

TESTE ȘI PROBLEME COMENTATE

pentru

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „TRAIAN LALESCU”

(liceu)

17

ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE

pentru clasa a X-a, partea a III-a.

de

GH. IVAN

1988

La realizarea acestui caiet au contribuit cu probleme originale sau selecțate după cum urmează:

A. C. Albu, lector dr., Univ. Timișoara (1.C, problemele: 1.C26 , 1.C27, 1.C28);

I.D. Albu, lector dr., Univ. Timișoara (1.C, problema 1.C25);

T. Bînzaru, student, Univ. Timișoara (1.C, problema 1.C1);

Gh. David, lector, Univ. Timișoara (1.A, problemele: A1, A2, A6; 1.C, problemele: C8, C11);

Gh. Ivan, lector dr., Universitatea Timișoara (1.A, problemele: A7, A8, A9, A10, A11, A12; 1.B, problemele: B2, B3, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B10, B11, B12, B13, B14, B15; 1.C, problemele: C2, C4, C5, C6, C7, C9, C10, C11, C12, C14, C15, C16, C17, C18, C19, C20, C21, C22, C23, C24);

M. Neacșu, profesor, Caransebeș (1.A, problemele: A3, A4, A5; 1.B, problema B1; 1.C, problemele: C3, C13).

Notele Matematice au fost scrise respectiv de K. Neacșu, profesor, Caransebeș și Gh. Ivan, lector doctor, Universitatea din Timișoara.

PREFATĂ

Concursul Interjudețean de Matematică "Traian Lalescu" este organizat de Inspectoratele Școlare Județene, Consiliile Județene ale Organizației Pionierilor și Comitetele Județene Arad, Caraș-Severin, Hunedoara și Timiș ale U.T.C., Universitatea din Timișoara și Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara. El se adresează elevilor din clasele V-XII și prevede cinci etape preliminare (pe clasă, pe școală, pe zonă, pe centru, pe județ) și o etapă interjudețeană. În paralel, se desfășoară și o formă " prin corespondență " adresată elevilor din cele patru județe sau din orice alt județ. Această formă adresează elevilor cinci teste a câte cinci probleme, în ritmul programelor școlare, și condiția de înregistrare ca participant este rezolvarea corectă a cel puțin două probleme din fiecare test și expedierea, în termen, către comisia de corectare și premiere. Enunțurile testelor sînt trimise unităților școlare sub forma unor caiete de informare matematică.

În scopul sprijinirii elevilor interesați pentru aprofundarea cunoștințelor de matematică, exersarea deprinderilor de rezolvare a problemelor și pentru corelarea eforturilor elevilor și profesorilor animatori ai spiritului de emulație în pregătirea elevilor la matematică sînt planificate să fie multiplicat cîte un caiet de informare pentru fiecare clasă, fiecare etapă și fiecare formă de concurs. Aceste caiete vor conține teste model, probleme și soluții interesante sub forma unor complemente la manualele și programele școlare. Pentru a asigura condiții de parcurgere ritmică, programa școlară și manualele au fost secționat în cinci-gase componente printr-o programă a concursului care a fost înaintată în prealabil fiecărei unități școlare. Aceste componente sînt grupate în jurul testelor pentru etapele preliminare, menționate mai sus și recomandate respectiv pentru lunile octombrie, decembrie, februarie, martie, mai și Concursul Interjudețean "Traian Lalescu" în luna iunie.

Caietele de informare matematică doresc să ofere un prilej și un mod adecvat pentru stimularea elevilor și profesorilor de a propune probleme sau de a trimite soluții interesante. Primele serii de caiete s-au dovedit un cadru propice pentru colaborarea unor studenți dornici să contribuie la activitățile menționate. Ele oferă un schimb de experiență în organizarea cercurilor de elevi sau a taberelor de matematică pentru elevi.

Ultimul paragraf al fiecărui caiet, de regulă, conține note matematice menite să fructifice activitatea de investigație matematică a tineretului școlar, studenților și profesorilor, oferind sinteze, ilustrând sau lansând în rândul elevilor concepte sau tehnici adecvate pentru rezolvarea unor probleme mai dificile.

Totodată, prin aceste caiete se încearcă a se oferi un cadru unitar pentru pregătirea concursului în toate județele participante. Sunt oferite seturi de probleme pe mai multe nivele, fie prin paragrafe special constituite, fie prin anexarea unui (sau mai multor) asterisc la problemele recomandate pentru elevii avansați în pregătirea la matematică.

Sperăm că prin aceste caiete de informare matematică va fi atras în activitatea de rezolvare a mai multor probleme de matematică un număr cât mai mare de elevi, sporind astfel numărul colaboratorilor la revistele de matematică existente și al participanților autentici la concursurile școlare de matematică.

61. COMPLEMENTE LA MANUALELE DE ALGEBRĂ ȘI GEOMETRIE - CLASA a X-a.

(ilustrări prin exerciții și probleme ale unor teme din programă testelor nr.3-4).

În acest paragraf oferim seturi de probleme prin care sperăm că se pot aprofunda temele de algebră și de geometrie din manuale și din programa testelor Concursului "Traian Lalescu". La algebră vom ilustra următoarele teme: elemente de combinatorică, aplicații ale binomului lui Newton, progresii aritmetice, progresii geometrice și noțiuni de aritmetica numerelor întregi.

La geometrie problemele prezentate se referă la următoarele teme: aplicații ale trigonometriei în geometrie și în algebră, incidență, ordonare, paralelism în spațiu și perpendicularitate în spațiu.

1.A. Complemente la manualul de algebră pentru clasa a X-a.

A1. Să se arate că

$$i) \sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad a, b \geq n$$

$$ii) \sum_{k=0}^a (C_a^k)^2 = C_{2a}^a$$

și să se calculeze:

$$iii) \sum_{k=1}^n k C_a^k C_b^{n-k}$$

$$iv) \sum_{k=1}^n k^2 C_a^k C_b^{n-k}.$$

* * *

Soluție: i) În membrul stîng al egalității $(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$ termenul ce conține x^n are coeficientul $\sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k}$ iar în membrul drept coeficientul lui x^n este C_{a+b}^n , de unde rezultă egalitatea din enunț. (4p).

ii) Punînd în egalitatea i), $b = n - a$ și ținînd seama că $C_a^k = C_a^{a-k}$ rezultă egalitatea cerută. (1p).

$$iii) S_1 = \sum_{k=1}^n k C_a^k C_b^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{a!}{k!(n-k)!} C_b^{n-k} =$$

$$= a \sum_{k=1}^n \frac{(a-1)!}{(k-1)!(n-k)!} C_b^{n-k} = a \sum_{k=1}^n C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k}.$$

Avînd în vedere egalitatea (i) avem

$$S_1 = a C_{a+b-1}^{n-1}, \quad (2p)$$

$$iv) S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 C_a^k C_b^{n-k} = \sum_{k=1}^n [(k^2-k)+k] C_a^k C_b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=2}^n k(k-1) C_a^k C_b^{n-k} + \sum_{k=1}^n k C_a^k C_b^{n-k} = a(a-1) \sum_{k=2}^n \frac{(a-2)!}{(k-2)![(a-2)-(k-2)]!} C_b^{n-k}$$

$$+ S_1 = a(a-1) \sum_{k=2}^n C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} + a C_{a+b-1}^{n-1}.$$

Ținînd seama de egalitatea i) avem

$$S_2 = a(a-1) C_{a+b-2}^{n-2} + a C_{a+b-1}^{n-1} = a \left[(a-1) \frac{(a+b-2)!}{(n-2)!(a+b-n)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(a+b-1)!}{(n-1)!(a+b-n)!} \right] = \frac{a(a+b-2)!}{(n-2)!(a+b-n)!} \left[a-1 + \frac{a+b-1}{n-1} \right] =$$

$$= a C_{a+b-2}^{n-2} \cdot \frac{n(a-1) + b}{n-1} \quad (2p).$$

A2. Să se arate că

$$\sum_{i=n}^m C_i^n = C_{m+1}^{n+1}$$

* * *

Soluție: Aplicînd egalitatea $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$ obținem

$$\begin{cases} C_{m+1}^{n+1} = C_m^{n+1} + C_m^n \\ C_m^{n+1} = C_{m-1}^{n+1} + C_{m-1}^n \\ C_{m-1}^{n+1} = C_{m-2}^{n+1} + C_{m-2}^n \\ \dots \\ C_{n+2}^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} + C_{n+1}^n \end{cases}$$

Adunând egalitățile de mai sus, membru cu membru, obținem egalitatea din enunț dacă se ține seama că $C_{n+1}^{n+1} = C_n^n$.

A3. Să se rezolve ecuația

$$C_{7x}^{x^2+10} + A_{5x+4}^{x^2+3x-4} = 379.$$

M. Neacșu, profesor, Caransebeș.

Indicație: Se impun condițiile: $7x > 0$, $x^2+10 > 0$ și $7x \geq x^2+10$

(1p). Se deduce că $C_{7x}^{x^2+10}$ are sens pentru $x \in \{2, 3, 4, 5\}$. (2p).

Se impun condițiile: $5x+4 > 0$, $x^2+3x-4 \geq 0$ și $5x+4 \geq x^2+3x-4$ (1p)

și se deduce că $A_{5x+4}^{x^2+3x-4}$ are sens pentru $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. (2p).

Prin urmare egalitatea are sens pentru $x \in \{2, 3, 4\}$ (1p).

Se verifică dacă egalitatea este adevărată pentru fiecare valoare a lui x , (1p). Se obține soluția $x = 4$ (1p).

A4. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ expresia $(\sqrt{k} - 1)^n$ poate fi pusă sub forma $\sqrt{m+a} - \sqrt{m}$ unde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ și $m, a \in \mathbb{N}$.

M. Neacșu, profesor, Caransebeș.

Soluție: Avem

$$(\sqrt{k} - 1)^n = C_n^0 (\sqrt{k})^n - C_n^1 (\sqrt{k})^{n-1} + C_n^2 (\sqrt{k})^{n-2} - \dots + (-1)^n C_n^n$$

$$(\sqrt{k} + 1)^n = C_n^0 (\sqrt{k})^n + C_n^1 (\sqrt{k})^{n-1} + C_n^2 (\sqrt{k})^{n-2} + \dots + C_n^n$$

Se deosebesc cazurile:

1^o. $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$(\sqrt{k}-1)^n = C_n^0 k^p - C_n^1 k^{p-1} + \dots + C_n^n - (C_n^1 k^{p-1} + C_n^3 k^{p-2} + \dots + C_n^{n-1}) \sqrt{k}$$

$$(\sqrt{k}+1)^n = C_n^0 k^p + C_n^2 k^{p-1} + \dots + C_n^n + (C_n^1 k^{p-1} + C_n^3 k^{p-2} + \dots + C_n^{n-1}) \sqrt{k}$$

adică

$$(\sqrt{k} - 1)^n = A - B\sqrt{k}$$

$$(\sqrt{k} + 1)^n = A + B\sqrt{k}$$

de unde rezultă că

$$(k - 1)^n = A^2 - k B^2$$

Deci

$$(\sqrt{k-1})^n = \sqrt{A^2} - \sqrt{kB^2} = \sqrt{kB^2 + (k-1)^n} - \sqrt{kB^2}$$

Rezultă

$$(\sqrt{k} - 1)^n = \sqrt{m+a} - \sqrt{m} \quad \text{cu } m = kB^2 \in \mathbb{N} \text{ și } a = (k-1)^n \in \mathbb{N}.$$

2°. $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$. Atunci

$$\begin{aligned} (\sqrt{k}-1)^n &= (C_n^0 k^p + C_n^2 k^{p-1} + \dots + C_n^{n-1})\sqrt{k} - (C_n^1 k^p + C_n^3 k^{p-1} + \\ &+ C_n^5) = C\sqrt{k} - D = \sqrt{kC^2} - \sqrt{D^2} \end{aligned}$$

$$(\sqrt{k}+1)^n = C\sqrt{k} + D = \sqrt{kC^2} + \sqrt{D^2}$$

Deci $(k-1)^n = kC^2 - D^2$, de unde

$$(\sqrt{k-1})^n = \sqrt{D^2 + (k-1)^n} - \sqrt{D^2} \Rightarrow (\sqrt{k-1})^n = \sqrt{m+a} - \sqrt{m}$$

cu $m = D^2 \in \mathbb{N}$ și $a = (k-1)^n$.

A5. Să se demonstreze că dacă p și q sînt două numere diferite înfîți $p+q = 1$ atunci

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2 q^2 - \dots + (-1)^i C_{n-1}^i p^i q^i = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

* * *

Indicație: Se notează membrul stîng al egalității date cu S_n și se arată că:

$$(*) \quad S_{n+1} - S_n = -pq S_{n-1} \quad (3p).$$

Utilizînd relația $(*)$ se demonstrează apoi prin inducție că are loc egalitatea cerută $(6p)$.

A6. Fie a_1, a_2, \dots, a_n în progresie aritmetică cu rația r și un număr par de termeni. Dacă

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_{i+1}} + \sqrt{a_i}}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{a_{i+1}} - \sqrt{a_i}}$$

să se arate că

$$S_1 S_2 = \frac{n-1}{r}.$$

Soluție:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{i+1}} - \sqrt{a_i}}{a_{i+1} - a_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{i+1}} - \sqrt{a_i}}{r} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r}$$

$$= \frac{a_n - a_1}{r(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{(n-1)r}{r(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} \quad (4p).$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}(\sqrt{a_{i+1}} + \sqrt{a_i})}{a_{i+1} - a_i} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1}(\sqrt{a_{i+1}} + \sqrt{a_i})$$

$$= \frac{1}{r} [(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}) - (\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}) + (\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}) + \dots + (-1)^n(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}})] = \frac{1}{r} [\sqrt{a_1} + (-1)^n \sqrt{a_n}] \quad (3p)$$

Cum n este par rezultă

$$S_2 = \frac{1}{r} (\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}) \quad (1p).$$

Se obține apoi

$$S_1 S_2 = \frac{n-1}{r} \quad (1p).$$

A7. Fie numerele pozitive a_0, a_1, \dots, a_n în progresie aritmetică. Demonstrați că

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\sqrt{a_{i-1} a_{i+1}}} \geq n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Gh. Ivan, lector dr., Timișoara.

Soluție: Avem:

$$\frac{a_i}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}} = \frac{\frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}}$$

pentru orice $i = \overline{1, n-1}$ deoarece $2a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$ (3p).

Conform inegalității mediilor avem

$$(m) \quad \frac{a_i}{\sqrt{a_{i-1}a_{i+1}}} \geq 1$$

pentru orice $i = \overline{1, n-1}$. (3p)

Adunînd membru cu membru inegalitățile (m) obținem inegalitatea enunțată (3p).

Inegalitatea dată se poate demonstra și prin metoda inducției matematice.

AB. Demonstrați că în dezvoltarea binomului $(a+b)^n$ nu există trei termeni consecutivi care să fie în progresie geometrică.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Presupunem că există $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ încît termenii $T_{k+1}, T_{k+2}, T_{k+3}$ sînt în progresie geometrică, adică

$$T_{k+2}^2 = T_{k+1} \cdot T_{k+3} \quad (2p)$$

Rezultă

$$(C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1})^2 = C_n^k a^{n-k} b^k \cdot C_n^{k+2} a^{n-k-2} b^{k+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (C_n^{k+1})^2 a^{2n-2k-2} b^{2k+2} = C_n^k C_n^{k+2} a^{2n-2k-2} b^{2k+2}$$

$$\Leftrightarrow (C_n^{k+1})^2 = C_n^k C_n^{k+2} \quad (3p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n!)^2}{[(k+1)!]^2 [(n-k-1)!]^2} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{n!}{(k+2)! (n-k-2)!} \quad (2p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)(n-k-1)} = \frac{1}{(n-k)(k+2)} \quad (1p)$$

$$\Leftrightarrow n+1 = 0, \text{ imposibil.} \quad (1p).$$

A9. Demonstrați că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$ numărul întreg $a^{4n+1} - a$

este divizibil cu 10.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Fie $x = a^{4n+1} - a$. Arătăm că x se divide cu 2 și 5 (1p).

Deoarece $x = a(a^{2n-1})(a^{2n+1}) = a(a-1)(a^{2n-1} + \dots + a+1)(a^{2n+1})$

rezultă că $2 \mid x$ fiindcă produsul $a(a-1)$ este totdeauna număr par (3p).

Deoarece $a \in \mathbb{Z}$ rezultă că a este de forma $5k$; $5k \pm 1$; $5k \pm 2$ cu $k \in \mathbb{Z}$, (1p).

Pentru $a = 5k$ rezultă $5 \mid a \Rightarrow 5 \mid x = a(a^{2n-1})(a^{2n+1})$ (1p).

Pentru $a = 5k \pm 1 \Rightarrow a^{2n} = (5k \pm 1)^{2n} = 5\alpha + 1 \Rightarrow 5 \mid a^{2n-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5 \mid x$ (1p).

Pentru $a = 5k \pm 2 \Rightarrow a^{2n} = (5k \pm 2)^{2n} = 5\beta + 2^{2n} = 5\beta + 4^n =$
 $= 5\beta + (5-1)^n = 5\gamma + (-1)^n = 5\gamma \pm 1 \Rightarrow 5 \mid a^{2n} - 1$ sau $5 \mid a^{2n} + 1$
 $\Rightarrow 5 \mid x$ (1p).

Prin urmare $5 \mid x$ pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, (1p).

A10. Fie p un număr prim. Demonstrați că

$$C_{2p}^p - 2$$

se divide cu p^2 .

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Avem $C_{2p}^p = (C_p^0)^2 + (C_p^1)^2 + \dots + (C_p^p)^2$ conform exercițiului A1, ii). (4p). Rezultă $C_{2p}^p - 2 = (C_p^1)^2 + (C_p^2)^2 + \dots + (C_p^{p-1})^2$ (1p). Se arată că C_p^k pentru $1 \leq k \leq p-1$ este multiplu de p . (3p).

A11. Demonstrați că numărul $a = \underbrace{44\dots422\dots2}_{n \text{ ori } \quad n \text{ ori}}$ este un produs a două numere naturale consecutive.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Avem $a = 4 \cdot 10^{2n-1} + 4 \cdot 10^{2n-2} + \dots + 4 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^{n-1} +$
 $+ \dots + 2 \cdot 10 + 2 = 4 \cdot 10^n (10^{n-1} + \dots + 10 + 1) + 2(10^{n-1} + \dots + 10 + 1)$
 $= 2(10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(2 \cdot 10^n + 1) = 2 \frac{10^n - 1}{10 - 1} (2 \cdot 10^n + 1) =$
 $= \frac{2(10^n - 1)}{9} \cdot \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \quad (6p).$

Notind $b = \frac{2(10^n - 1)}{9}$ avem $b + 1 = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{9}$ și rezultă că
 $a = b(b+1)$ cu $b \in \mathbb{N}$. (3p).

A12. Să se calculeze următoarele sume:

- i) $\sum_{k=1}^{999} k[\log k]$
 ii) $\sum_{k=1}^{999} k \lfloor \log k \rfloor$
 iii) $\sum_{k=1}^{999} \lfloor \log k \rfloor^k$

($\lfloor \log k \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului $\log k$).

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Se ține seama că: $\lfloor \log k \rfloor = 0$ pentru $1 \leq k \leq 9$; $\lfloor \log k \rfloor = 1$ pentru $10 \leq k \leq 99$ și $\lfloor \log k \rfloor = 2$ pentru $100 \leq k \leq 999$. Atunci

i) $\sum_{k=1}^{999} k \lfloor \log k \rfloor = \sum_{k=1}^9 k \lfloor \log k \rfloor + \sum_{k=10}^{99} k \lfloor \log k \rfloor + \sum_{k=100}^{999} k \lfloor \log k \rfloor =$
 $= (10 + 11 + \dots + 99) + (100 \cdot 2 + 101 \cdot 2 + \dots + 999 \cdot 2) = \frac{(10+99)90}{2} +$
 $+ 2 \cdot \frac{(100 + 999)900}{2}$
 ii) $\sum_{k=1}^{999} k \lfloor \log k \rfloor^2 = \sum_{k=1}^9 k \lfloor \log k \rfloor^2 + \sum_{k=10}^{99} k \lfloor \log k \rfloor^2 + \sum_{k=100}^{999} k \lfloor \log k \rfloor^2 =$
 $(1^0 + 2^0 + \dots + 9^0) + (10^1 + 11^1 + \dots + 99^1) + (100^2 + 101^2 + \dots$
 $+ 999^2) = 9 + (10 + 11 + \dots + 99) + [(1^2 + 2^2 + \dots + 99^2 +$
 $+ 100^2 + \dots + 999^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 99^2)] = 9 + 109.45 +$
 $+ \frac{999 \cdot 1000 \cdot 1999}{6} - \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6}.$

$$\sum_{k=1}^{999} [\log k]^k = (1^{10} + 1^{11} + \dots + 1^{99}) + (2^{100} + 2^{101} + \dots + 2^{999})$$

$$= 90 + 2^{100}(1+2+ \dots + 2^{899}) = 90 + 2^{100}(2^{900} - 1).$$

1.B. Complemente la manualul de geometrie și trigonometrie pentru clasa a X-a.

B1. Numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3 sînt afizele vîrfurilor unui triunghi echilateral dacã și numai dacã are loc o relație de formă $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$, unde ε este o rădăcină complexă de ordinul trei a unității diferită de 1.

* * *

Indicație: Formulează implicația: z_1, z_2, z_3 afizele vîrfurilor unui triunghi echilateral implică $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ (1p). Se consideră z_0 afixul centrului cercului circumscris triunghiului și avem relațiile $z_2 - z_0 = \varepsilon(z_1 - z_0)$; $z_3 - z_0 = \varepsilon^2(z_1 - z_0)$ (1p).

Folosind relațiile $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$ și $\varepsilon^4 = \varepsilon$ se arată că $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = z_1 + \varepsilon[z_0 + \varepsilon(z_1 - z_0)] + \varepsilon^2[z_0 + \varepsilon^2(z_1 - z_0)] = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(z_1 - z_0) = 0$ (2p).

Formulează implicația: $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0, z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$ implică z_1, z_2, z_3 afizele vîrfurilor unui triunghi echilateral, (1p).

Din $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ și $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ se obține $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 - (z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_1) = 0$ adică $\varepsilon(z_2 - z_1) - \varepsilon^2(z_3 - z_1) = 0$ de unde

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| \quad (2p)$$

Analog utilizînd relațiile $z_2 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_2 = 0$ și $z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3 = 0$ se deduce că

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| \quad (1p)$$

Cum $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \neq 0$ rezultă că z_1, z_2, z_3 sînt afizele unui triunghi echilateral (1p).

B2. Fie $z_i, z_i^i, i = 1, 2, 3, 4$ respectiv rădăcinile ecuațiilor

$$z^4 - z^2 + 1 = 0 \quad \text{și} \quad z^4 + z^2 + 1 = 0$$

Demonstrați că z_i respectiv z'_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sînt afixele vîrfurilor
lor unui dreptunghi. Cele două dreptunghiuri sînt vîrfuri comune ?

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Ecuația $z^4 - z^2 + 1 = 0$ se scrie $(z^2 - 1)^2 + z^2 = 0$ de unde rezultă $(z^2 - 1 + iz)(z^2 - 1 - iz) = 0$ (1p). Obținem

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_3 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{3} - i}{2} \quad (1p)$$

Avem că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ și rezultă că imaginile geometrice M_1, M_2, M_3, M_4 ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3, z_4 sînt conciclice (aparțin cercului cu centrul în origine și raza 1) (1p).

De asemenea $M_1 M_2 M_3 M_4$ este paralelogram deoarece

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4 = 0 \quad (1p)$$

Rezultă că $M_1 M_2 M_3 M_4$ este dreptunghi (1p)

Analog $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 1)^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) = 0$. Se obțin rădăcinile

$$z'_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad z'_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad z'_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}; \quad z'_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \quad (1p)$$

Deoarece $|z'_1| = |z'_2| = |z'_3| = |z'_4| = 1$ și $z'_1 + z'_3 = z'_2 + z'_4$ rezultă că imaginile geometrice M'_i ale numerelor complexe z'_i , $i=1, 2, 3, 4$ sînt vîrfurile unui dreptunghi (2p). Cele două dreptunghiuri au două vîrfuri comune (1p).

B3. Calculați $(1 + i \operatorname{ctgx})^n + (1 - i \operatorname{ctgx})^n$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Avem succesiv:

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + i \operatorname{ctgx})^n + (1 - i \operatorname{ctgx})^n = \left(\frac{1 + \sin x + i \cos x}{\sin x} \right)^n + \left(\frac{1 + \sin x - i \cos x}{\sin x} \right)^n \\ &= \frac{1}{\sin^n x} \left[(\cos x + i \sin x)^n + (-1)^n (\cos x - i \sin x)^n \right] = \\ &= \frac{1}{\sin^n x} \left[(1 + (-1)^n) \cos^n x + i(1 + (-1)^{n+1}) \sin^n x \right]. \end{aligned}$$

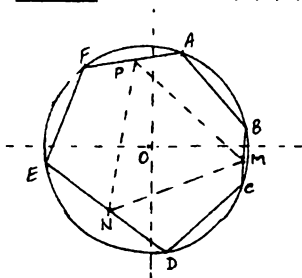
Rezultă

$$S_{2k} = \frac{2\cos 2kx}{\sin^2 kx} \quad \text{și} \quad S_{2k+1} = \frac{2i \sin(2k+1)x}{\sin^2 kx}$$

B4. Intr-un cerc de centru O și de rază r se consideră un hexagon înscris $ABCDEF$ încît $AB = CD = EF = r$. Să se arate că mijloacele segmentelor BC , DE și FA sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

* * *

Soluție: Deoarece $A, B, C, D, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$ și $AB = CD = EF = r$ rezultă că OAB , OCD și OEF sînt



triunghiuri echilaterale (1p).

Fie $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F$ afixele vîrfurilor hexagonului $AECDEF$. Ținînd seama că triunghiurile OAB , OCD și OEF sînt echilaterale avem $1 \cdot z_O + \varepsilon \cdot z_A + \varepsilon^2 z_B = 0$; $1 \cdot z_O + \varepsilon \cdot z_C + \varepsilon^2 z_D = 0$;

$1 \cdot z_O + \varepsilon \cdot z_E + \varepsilon^2 z_F = 0$ unde $z_O = 0$ și ε este o rădăcină complexă de ordinul trei a unității diferită de 1. (vezi problema B1) (2p)

Rezultă $z_B = -\varepsilon^2 z_A$, $z_D = -\varepsilon^2 z_C$ și $z_F = -\varepsilon^2 z_E$ (1p).

Dacă z_M, z_N, z_P sînt afixele mijloacelor segmentelor $[BC]$, $[DE]$, $[FA]$ atunci:

$$z_M = \frac{1}{2}(z_B + z_C), \quad z_N = \frac{1}{2}(z_D + z_E), \quad z_P = \frac{1}{2}(z_F + z_A), \quad (2p)$$

Pentru ca z_M, z_N, z_P să fie afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral este necesar și suficient ca

$$1 \cdot z_M + \varepsilon z_N + \varepsilon^2 z_P = 0 \quad (1p)$$

în calcul avem:

$$\begin{aligned} 1 \cdot z_M + \varepsilon z_N + \varepsilon^2 z_P &= \frac{1}{2} [z_B + z_C + \varepsilon z_D + \varepsilon z_E + \varepsilon^2 z_F + \varepsilon^2 z_A] = \\ &= \frac{1}{2} [-\varepsilon^2 z_A + z_C - \varepsilon^3 z_C + \varepsilon z_E - \varepsilon^4 z_E + \varepsilon^2 z_A] = 0 \end{aligned}$$

fiindcă $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^4 = \varepsilon$ (2p).

E5. Fie $ABCD$ un paralelogram, O intersecția diagonalelor sale, M un punct exterior planului $(ABCD)$ și N mijlocul segmentului (AM) . Demonstrați că dreapta CM este paralelă cu planul (BND) .

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Punctele O și N fiind mijloacele segmentelor (AC) respectiv (AM) rezultă $ON \parallel CM$. Cum $CM \parallel ON$ și ON este inclusă în planul (BND) rezultă că CM este paralelă cu planul (BND) .

E6. Intr-un tetraedru $ABCD$ muchiile AC și BD sînt perpendiculare. Dacă M, N, P, Q sînt respectiv mijloacele muchiilor AB, BC, CD, DA demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

* * *

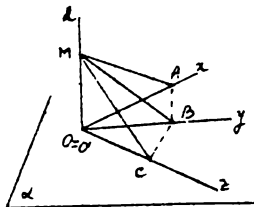
Soluție: MN și PQ fiind linii mijlocii în triunghiurile ABC respectiv ACD rezultă $MN \parallel AC, PQ \parallel AC, MN = PQ = \frac{1}{2}AC$ (2p). Cum $MN \parallel PQ$ și $MN = PQ$ rezultă că $MNPQ$ este un paralelogram (2p).

De asemenea MQ fiind linie mijlocie în triunghiul AED rezultă $MQ \parallel ED$ (2p).

Din $MN \parallel AC$ și $MQ \parallel ED, AC \perp BD$ rezultă că $MN \perp MQ$. Deci $MNPQ$ este dreptunghi (4p).

E7. Intr-un plan α se duc trei semidrepte Ox, Oy, Oz . Prin O se duce o dreaptă d care formează unghiuri congruente cu cele trei semidrepte. Arătați că d este perpendiculară pe plan.

* * *



Soluție: Deoarece $\angle(d, Ox) = \angle(d, Oy) = \angle(d, Oz)$ rezultă că dreapta d nu este conținută în planul α (1p). Fie $A \in Ox, B \in Oy, C \in Oz$ încît $OA = OB = OC$ și $M \in d$. Din congruența triunghiurilor MOA, MOB și MOC rezultă că $(MA) = (MB) = (MC)$ (2p). Fie O' proiecția punctului M

pe planul α . Deoarece $MO' \perp \alpha$ și $(MA) \equiv (MB) \equiv (MC)$ avem că $\triangle MO'A \equiv \triangle MO'B \equiv \triangle MO'C$ (1p). Rezultă $O'A = O'B = O'C$ (2p). Prin urmare O' este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Deci O' coincide cu O și $MO \perp \alpha$ adică $d \perp \alpha$ (3p).

PS. Se consideră în spațiu patru puncte necoplanare A, B, C, D încât $AB = EC = CD = DA$ și fie M mijlocul lui BD, N mijlocul lui AC. Arătați că $MN \perp AC$, $MN \perp ED$.

* * *

Soluție: AM și CM sînt mediane în triunghiurile isoscele congruente AED respectiv CED, Rezultă $AM = CM$. Deci triunghiul AMC este isoscel și MN este mediană. Rezultă $MN \perp AC$. (5p).

Analog în triunghiurile isoscele congruente ABC și ADC, EN și DN sînt mediane. Rezultă $EN = DN$. În triunghiul isoscel BND, MN este mediană și deci $MN \perp BD$. (4p).

PS. Să se arate că proiecțiile ortogonale a două drepte din spațiu pe un plan paralel cu perpendiculara lor comună sînt două drepte paralele.

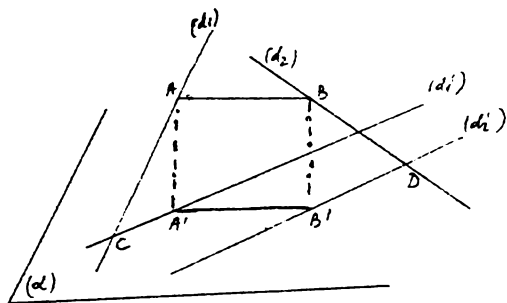
* * *

Soluție: Fie d_1 și d_2 două drepte oarecare din spațiu, AB perpendiculara comună a dreptelor d_1 și d_2 ($A \in d_1$ și $B \in d_2$ și sînt unice, vezi problema 6, Cap.V, pag.82, manual de geometrie și trigonometrie clasa a X-a). Fie α un plan paralel cu dreapta AB.

Dacă planul α este perpendicular pe una din dreptele d_1 sau d_2 atunci proiecția acelei drepte pe α este un punct și în acest caz problema pusă nu are sens.

Fresupunem că planul α nu este perpendicular pe nici una din dreptele d_1 și d_2 .

Fie A'B' proiecția perpendicularei comune AB pe planul α și d_1'



d_2' proiecțiile dreptelor d_1 respectiv d_2 pe α (dacă una dintre drepte, spre exemplu d_1 , ar fi conținută în planul α atunci d_1' ar coincide cu d_1 și perpendiculara comună AB ar fi conținută în α).

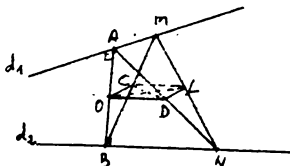
Ținând seama că un unghi drept (vezi problema 3, § 4, pag. 79. Cap. VI, manual) care are o latură (anume AB) paralelă cu un plan (anume α) se proiectează pe acei plan după un unghi drept, rezultă că unghiurile $\angle A'AB$ și $\angle B'BA$ sunt drepte. Deci dreptele d_1' și d_2' sînt paralele.

Ex. 10. Se dau dreptele d_1 și d_2 în spațiu. Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor $[MN]$ cînd M și N descriu dreptele d_1 respectiv d_2 .

* * *

Soluție: Fie AB perpendiculara comună a dreptelor d_1, d_2 ($A \in d_1, B \in d_2$) și notăm cu O mijlocul segmentului (AB) .

Fie $M \in d_1$ și $N \in d_2$ două puncte arbitrare. Notăm cu L, C, D mijloacele segmentelor $(MN), (ME), (AN)$



Notăm cu L, C, D mijloacele segmentelor $(MN), (ME), (AN)$

Deoarece (OD) și (CL) sînt linii mijlocii în triunghiurile ABN și KEN rezultă $OD \parallel CL$ și $OD = CL$. Deci patrulaterul ODLK este un paralelogram. Cum $AP \perp d_1$ și $OC \parallel d_1$ rezultă $AB \perp OC$. De asemenea $AB \perp d_2$ și $OD \parallel d_2$ rezultă $AB \perp OD$. Din $AB \perp OC$ și $AB \perp OD$ avem $AB \perp$ planul paralelogramului ODLK. Prin urmare L aparține planului mediator al segmentului (AB).

Reciproc, dacă L este un punct ce aparține planului mediator al segmentului (AB) se arată ușor că L este mijlocul unui segment cu capetele pe dreptele d_1 și d_2 .

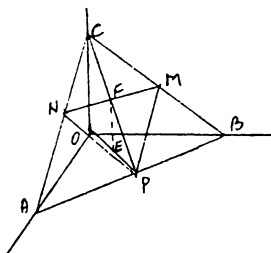
Deci locul geometric al punctului L este planul mediator al segmentului (AB).

Ex. Fie O, A, B, C patru puncte încît $OA \perp OB$, $OC \perp CA$ și $(OA) \equiv (OB) \equiv (OC)$. Dacă K, N, P, E, F sînt mijloacele segmentelor (BC), (CA), (AB), (OP), (ME) arătați că:

- i) $MN \perp (COP)$
- ii) EF este perpendiculara comună a dreptelor OP și MN.

* * *

Soluție: i) Triunghiurile OAB, OAC, OBC sînt dreptunghice și isoscele iar OM, ON, OP sînt mediane.



Rezultă $OM \perp BC$, $OP \perp AB$,
 $ON \perp AC$ (1p).

În triunghiul ABC, MN fiind linie mijlocie rezultă $MN \parallel AB$ și cum $OP \perp AB$ rezultă $OP \perp MN$ (2p).

Avem $CO \perp (AOP)$ rezultă $CO \perp AB$ și cum $MN \parallel AB$ rezultă $MN \perp CO$ (2p)
 Din $MN \perp OP$ și $MN \perp CO$ rezultă $MN \perp$ pe planul determinat de CO și OP (1p)
 ii) F este mijlocul segmentului (CP), rezultă EF linie mijlocie

in triunghiul OCP. Deci $EP \parallel OC$ și rezultă $EP \perp (OAB)$. Rezultă că $EP \perp OP$ (2p).

Din $EP \perp (OAB)$ rezultă $EP \perp AB$ și cum $AE \parallel ME$ obținem $EP \perp ME$ (1p).
Deci EP este perpendiculară comună a dreptelor OP și ME.

B12. Fie Ox, Oy, Oz trei drepte perpendiculare două câte două și $A \in Ox, B \in Oy, C \in Oz, M \in (AC)$. Dacă N și P sînt proiecțiile ortogonale ale punctului M pe Ox respectiv AB iar u este măsura unghiului diedru format de planele (AMN) și xOy să se arate că

$$\operatorname{tg}^2 u = \operatorname{tg}^2 v + \operatorname{tg}^2 w$$

unde $v = \angle(CEC), w = \angle(OAC)$.

* * *

Soluție: Deoarece $MN \perp Ox$ și planele xOz și xOy sînt perpendiculare rezultă că

$MN \perp (xOy)$

$$(1p)$$

Deoarece $MN \perp (xOy)$ și $EP \perp AB$, iar $AB \subset (xOy)$ rezultă, conform teoremei celor trei perpendiculare, că

$$MP \perp AB \quad (1p).$$

Prin urmare unghiul diedru al planelor (AMB) și xOy este $u = \angle MPN$ (1p).

$$\text{Rezultă } \operatorname{tg} u = \frac{MN}{NP} \quad (1p)$$

Deoarece $MN \parallel OC$ rezultă $\triangle AMN \sim \triangle AOC \Rightarrow \frac{MN}{OC} = \frac{AN}{OA}$ și deci $MN = \frac{OC \cdot AN}{OA}$ (1p). Din asemănarea triunghiurilor APN și AOB obținem $\frac{NP}{OB} = \frac{AN}{AB}$ și

$$\text{deci } NP = \frac{OB \cdot AN}{AB} \quad (1p).$$

$$\text{Rezultă } \operatorname{tg} u = \frac{MN}{NP} = \frac{OC \cdot AB}{OA \cdot OB} \quad (1p).$$

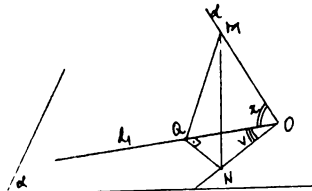
$$\text{Cum } \operatorname{tg} v = \frac{OC}{OB}, \operatorname{tg} w = \frac{OC}{OA} \text{ rezultă}$$

$$\operatorname{tg}^2 v + \operatorname{tg}^2 w = \frac{OC^2}{OB^2} + \frac{OC^2}{OA^2} = OC^2 \frac{OA^2 + OB^2}{OA^2 \cdot OB^2} = \frac{OC^2 \cdot AB^2}{OA^2 \cdot OB^2} = \operatorname{tg}^2 u \quad (2p)$$

B13. O dreaptă d din spațiu intersectează un plan α într-un punct O și formează cu acest plan un unghi u . O dreaptă d_1 conținută în α și care trece prin O formează cu dreapta d unghiul x iar cu proiecția dreptei d pe plan unghiul v ($0 < v < \frac{\pi}{2}$). Arătați că:

$$\cos x = \cos u \cdot \cos v$$

Soluție: Dintr-un punct $M \in d$ ducem $MN \perp \alpha$ și $NQ \perp d_1$ (2p). Din



teorema celor trei perpendiculare rezultă $MQ \perp d_1$ (2p)

Avem $m(\widehat{MQ}) = x$; $m(\widehat{NQ}) = v$ și $m(\widehat{MO}) = u$ (1p).

Obținem $\cos u = \frac{ON}{OM}$; $\cos v = \frac{OQ}{ON}$, $\cos x = \frac{OQ}{OM}$. (2p).

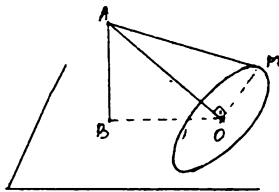
Se verifică imediat că $\cos x = \cos u \cdot \cos v$ (2p).

B14. Un punct mobil M descrie un cerc cu centrul în O , conținut în planul α . A fiind un punct fix în spațiu să se determine poziția punctului M încât aria triunghiului OAM să fie maximă.

Soluție: Ducem $AB \perp \alpha$. Rezultă $S_{\triangle OAM} = \frac{1}{2} OA \cdot OM \sin(\widehat{AOM})$. Cum OA este constantă, aria este maximă când $\sin(\widehat{AOM}) = 1$ adică \widehat{AOM} este unghi drept. Rezultă $AO \perp OM$.

Cum $AB \perp \alpha$, $AO \perp OM$ ($OM \subset \alpha$) rezultă că $BO \perp OM$.

Prin urmare, poziția punctului M încât aria să fie maximă este intersecția cercului cu perpendiculara în O pe BO .



B15. Fie ABCDA'B'C'D' un cub de latură a avînd muchiile laterale AA', BB', CC', DD'. Prin C' se duce un plan α perpendicular pe diagonala AC'. Arătați că:

1) unghiurile formate de diagonala AC' cu muchiile AB, AD, AA' sînt congruente;

ii) suma pătratelor proiecțiilor segmentelor (AB), (AD) și (AA') pe planul α este egală cu $2a^2$.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: 1) Unghiurile formate de diagonala AC' cu muchiile AB, AD, AA' sînt respectiv $\widehat{BAC'}$, $\widehat{DAC'}$ și $\widehat{A'AC'}$. Triunghiurile BAC', DAC' și A'AC' sînt congruente. Rezultă $\widehat{BAC'} \equiv \widehat{DAC'} \equiv \widehat{A'AC'}$.

ii) Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul BAC' și țînînd seama că AC' = A√3 = d obținem

$$\cos x = \frac{AB^2 + AC'^2 - BC'^2}{2AB \cdot AC'} = \frac{a^2 + d^2 - 2a^2}{2ad} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

unde

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cum AC' \perp α , C' \in α , proiecția punctului A pe α este punctul C'. Fie B₁, D₁, A'₁ proiecțiile punctelor B, D respectiv A' pe planul α . Unghiurile formate de AB, AD, AA' cu planul α au respectiv măsurile $\frac{\sqrt{3}}{2} - m(\widehat{BAC'}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - m(\widehat{DAC'}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$; $\frac{\sqrt{3}}{2} - m(\widehat{A'AC'}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$. Cum proiecțiile segmentelor AB, AD, AA' pe planul α sînt respectiv C'B₁, C'D₁, C'A'₁ rezultă

$$C'B_1 = AB \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) = a \sin x$$

$$C'D_1 = AD \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) = a \sin x$$

$$C'A'_1 = AA' \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right) = a \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{Avem } (C'B_1)^2 + (C'D_1)^2 + (C'A'_1)^2 &= 3a^2 \sin^2 x = 3a^2(1 - \cos^2 x) = \\ &= 3a^2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2a^2. \end{aligned}$$

1.C. Probleme de concurs.

În acest subparagraf prezentăm câteva probleme de sinteză cu un grad sporit de dificultate, cu caracter mai complex, decât cele prin care am ilustrat temele din manuale. Aceste probleme sînt destinate elevilor care sînt avansați în pregătirea la matematică, doresc să facă activitate de performanță și sînt apți să utilizeze tehnici mai deosebite, și-și pun problema unor generalizări, a unor soluții mai simple, mai deosebite și elegante.

C1. Fie $a_i \in (0,1)$, $i = 1,2,\dots,n$. Să se arate că

$$\begin{aligned} & \log_{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} (a_2 a_3 \dots a_{n-2} a_n^2) + \log_{a_2 a_3 \dots a_n} (a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1^2) + \\ & + \log_{a_3 a_4 \dots a_n a_1} (a_4 a_5 \dots a_n a_2^2) + \dots + \log_{a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n} (a_2 a_3 \dots a_{n-2} a_{n-1}^2) \\ & \geq n \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

În ce caz avem egalitate?

Tudor Bînzaru, student, Timișoara.

Indicație: Avem:

$$\log_{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} (a_2 a_3 \dots a_n) + \log_{a_2 a_3 \dots a_n} (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) \geq 2$$

$$\log_{a_2 a_3 \dots a_n} (a_3 a_4 \dots a_n a_1) + \log_{a_3 a_4 \dots a_n a_1} (a_2 a_3 \dots a_n) \geq 2$$

$$\log_{a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n} (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) + \log_{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} (a_1 a_2 \dots a_n) \geq 2$$

Adunînd aceste inegalități membru cu membru obținem inegalitatea enunțată. Egalitatea se obține pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

C2. Demonstrați că

$$\lg 2 + \lg 3 + \dots + \lg n < n \lg \frac{n+1}{2}, \quad (\forall) n \geq 2.$$

- a) utilizând metoda inducției matematice
b) direct.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicție: a) Se verifică ușor că inegalitatea este adevărată pentru $n = 2$. Demonstrarea faptului că $P(k)$ implică $P(k+1)$ se reduce la demonstrarea inegalității

$$2 < \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \quad \text{pentru } k \geq 2.$$

b) Inegalitatea dată se scrie

$$\lg n! < \lg \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Leftrightarrow n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt{n!} < \frac{n+1}{2}$$

Conform inegalității mediilor avem

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n}$$

și cum $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ rezultă

$$\sqrt{n!} < \frac{n+1}{2}$$

C): Să se afle valoarea maximă a sumei

$$S_n = \cos a_1 + \cos a_2 + \dots + \cos a_n$$

decă $a_i > 0$, $(\forall) i = \overline{1, n}$ și $\sum_{i=1}^n a_i = \bar{X}$.

M. Neacșu, profesor, Caransebeș.

Indicție: $\cos \frac{a_i + a_j}{2} - \frac{1}{2} (\cos a_i + \cos a_j) = \cos \frac{a_i + a_j}{2} - \cos \frac{a_i + a_j}{2} \cos \frac{a_i - a_j}{2} = \cos \frac{a_i + a_j}{2} (1 - \cos \frac{a_i - a_j}{2}) \geq 0$, $(\forall) i, j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow \cos \frac{a_i + a_j}{2} \geq \frac{\cos a_i + \cos a_j}{2}$

Prin inducție matematică se arată că

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos a_i \leq \cos \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Ținând cont că $\sum_{i=1}^n a_i = \bar{X}$, obținem

$$S_n \leq n \cos \frac{\bar{X}}{n}$$

Se observă că S_n are valoarea $\cos \frac{\pi}{n}$ atunci când $a_1 = \frac{\pi}{n}$; oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, deci valoarea maximă a sumei S_n este $\cos \frac{\pi}{n}$.

C4. Demonstrați că pentru orice număr natural n are loc inegalitatea

$$(1+2C_n^1 + \dots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n)^2 \leq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n)!}{6(n!)^2}$$

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski obținem:

$$(1+2C_n^1 + \dots + nC_n^{n-1} + (n+1)C_n^n)^2 \leq [1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2][(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2]$$

Folosind egalitățile

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (\text{vezi A1, ii})$$

se obține inegalitatea cerută.

C5. Fie p un număr prim, $n \in \mathbb{N}$ și

$$S_n = (p + i\sqrt{p})^n + (p - i\sqrt{p})^n$$

Arătați că: i) S_n este un număr întreg.

ii) S_n se divide cu $2p^2$, pentru orice $n \geq 3$.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Soluția a I-a. Se studiază cazurile n par, n impar și se aplică binomul lui Newton.

Soluția a II-a. Se folosește identitatea

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$$

și se deduce relația de recurență

$$(1) \quad S_n = 2pS_{n-1} - p(p+1)S_{n-2}$$

Cum $S_0 = 2$, $S_1 = 2p$, prin inducție, din relația (1), se deduce că S_n este un număr întreg.

Cum $S_2 = 2p(p-1)$, $S_3 = 2p^2(p-3)$, prin inducție din (1), se obține că S_n se divide cu $2p^2$ pentru orice $n \geq 3$.

C6. Demonstrați că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$

$$a^{8n+5} - a \text{ se divide cu } 30.$$

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Avem $a^{8n+5} - a = a(a^{2n+1} - 1)(a^{2n+1} + 1)(a^{4n+2} + 1)$ și $a(a-1)(a+1)$ divide $a^{8n+5} - a$. Cum produsul a trei numere întregi consecutive se divide cu 6 rezultă că $a^{8n+5} - a$ se divide cu 6.

Se arată apoi că $a^{8n+5} - a$ se divide cu 5, utilizând procedeul folosit în exercițiul A9 (sau scriem $a^{8n+5} - a = a^{4m+1}$ cu $m = 2n+1$ și se aplică exercițiul A9).

C7. Să se determine numărul termenilor independenți de a din dezvoltarea

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^{28} \cdot \left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{14}$$

Gh. Ivan lector doctor, Timișoara.

Indicație: Avem $T_{k+1} = C_{28}^k \cdot a^{\frac{84-7k}{6}}$ cu $k \in \{0, 1, 2, \dots, 28\}$ un termen al dezvoltării primului binom și $T'_{m+1} = C_{14}^m \cdot a^{\frac{56-7m}{12}}$ cu $m \in \{0, 1, \dots, 14\}$ un termen arbitrar al dezvoltării celui de-al doilea binom. Un termen arbitrar al produsului celor două binoame este de forma

$$\begin{aligned} T_{k+1} \cdot T'_{m+1} &= C_{28}^k \cdot C_{14}^m \cdot a^{\frac{84-7k}{6} + \frac{56-7m}{12}} \\ &= C_{28}^k \cdot C_{14}^m \cdot a^{\frac{+7}{12}(32-2k-m)} \quad \text{cu } k \in \{0, 1, \dots, 28\} \text{ și } m \in \{0, 1, \dots, 14\} \end{aligned}$$

Termenii independenți de a satisfac condiția

$$2k + m = 32 \iff k = \frac{32 - m}{2}$$

Rezultă $m \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ și $k \in \{16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9\}$. Prin

urmare $T_{17}^{T_1}$; $T_{16}^{T_3}$; $T_{15}^{T_5}$; $T_{14}^{T_7}$; $T_{13}^{T_9}$; $T_{12}^{T_{11}}$; $T_{11}^{T_{13}}$ și $T_{10}^{T_{15}}$ sînt termenii independenți de a adică există 8 termeni independenți de a.

CB. Fie T_i termenul de rang i din dezvoltarea binomului $(x+y)^n$.
Stiind că

$$\sqrt{1 + T_i - a_i} = \lg(10 - T_i + a_i)$$

pentru $i = 2, 3, 4$ iar a_i sînt respectiv 240, 720, 1080 să se determine x , y și n .

Soluție: Observăm că egalitatea din enunț este satisfăcută pentru $T_i = a_i$. Deoarece membrul stîng este o funcție crescătoare în variabilă T_i iar membrul drept este o funcție descrescătoare în aceeași variabilă rezultă că $T_i = a_i$ este singura valoare care satisface egalitatea dată.

Avem deci $T_2 = 240$, $T_3 = 720$ și $T_4 = 1080$. Rezultă atunci

$C_n^1 x^{n-1}y = 240$, $C_n^2 x^{n-2}y^2 = 720$, $C_n^3 x^{n-3}y^3 = 1080$ și obținem sistemul:

$$(1) \quad \begin{cases} n x^{n-1} y = 240 \\ \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 = 720 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} y^3 = 1080 \end{cases}$$

Împărțind membru cu membru primele două ecuații între ele și ultimele două ecuații între ele sistemul (1) este echivalent cu

$$(2) \quad \begin{cases} n x^{n-1} y = 240 \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{y}{x} = 3 \\ \frac{n-2}{3} \cdot \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n x^{n-1} y = 240 \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{y}{x} = 3 \\ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{3}{n-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n x^{n-1} y = 240 \\ y = \frac{3x}{2} \\ n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 y = 48 \\ y = \frac{3x}{2} \\ n = 5 \end{cases}$$

Obținem soluția $x = 2$; $y = 3$; $n = 5$.

99. Demonstrați că pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc inegalitatea

$$(n+1)^{n-1} C_{2n+1}^1 C_{2n+1}^2 \dots C_{2n+1}^n < 4^{n(n+1)}$$

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Inegalitatea dată se scrie sub forma

$$C_{2n+1}^0 C_{2n+1}^1 C_{2n+1}^2 \dots C_{2n+1}^n < \left(\frac{2^{2n}}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{C_{2n+1}^0 C_{2n+1}^1 \dots C_{2n+1}^n} < \frac{2^{2n}}{n+1} \quad \text{sau}$$

$$\sqrt[n+1]{(C_{2n+1}^0)^2 (C_{2n+1}^1)^2 \dots (C_{2n+1}^n)^2} < \frac{2^{2n}}{n+1}$$

$$(1) \sqrt[n+1]{C_{2n+1}^0 C_{2n+1}^1 \dots C_{2n+1}^n C_{2n+1}^{n+1} \dots C_{2n+1}^{2n+1}} < \frac{2^{2n}}{n+1}$$

Inegalitatea (1) are loc pe baza inegalității mediilor dacă se ține seama că

$$C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n+1}$$

200. Fie $S_n = (-1+i\sqrt{3})^n + (-1-i\sqrt{3})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Arătați că S_n este un număr întreg pentru orice n .

ii) Calculați suma

$$1 - 3C_{3k}^2 + 3^2 C_{3k}^4 - 3^3 C_{3k}^6 + \dots$$

iii) Demonstrați că $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{3n}$ este un multiplu de

10.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: i) Metoda I-a. Notînd $x = -1+i\sqrt{3}$, $y = -1-i\sqrt{3}$ rezultă că $x+y = -2$ și $xy = 4$. Atunci $S_n = -2S_{n-1} + 4S_{n-2}$. Cum $S_0 = 2$, $S_1 = -2$ rezultă prin inducție că S_n este număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Metoda II. Se utilizează binomul lui Newton și se studiază cazurile n par și n impar. Avem:

$$(1) S_n = 2 \left[(-1)^n - (-1)^{n-2} \cdot 3C_n^2 + (-1)^{n-4} 3^2 C_n^4 - (-1)^{n-6} 3^3 C_n^6 + \dots \right]$$

Metoda a III-a. Folosind scrierea trigonometrică avem

$$-1+i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{și} \quad -1-i\sqrt{3} = 2 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

rezultă

$$(2) S_n = 2^{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

Cum $n \in \mathbb{Z}$ deosebim cazurile $n = 3k$, $n = 3k+1$ și $n = 3k+2$. Atunci

$$(3) S_{3k} = 2^{3k+1}; \quad S_{3k+1} = -2^{3k+1}; \quad S_{3k+2} = -2^{3k+2}$$

Prin urmare S_n este număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

ii) Conform egalității (1) pentru $n = 3k$ avem

$$(4) S_{3k} = 2 \left[(-1)^{3k} - (-1)^{3k-2} 3C_{3k}^2 + (-1)^{3k-4} 3^2 C_{3k}^4 - (-1)^{3k-6} 3^3 C_{3k}^6 + \dots \right] = 2(-1)^k [1 - 3C_{3k}^2 + 3^2 C_{3k}^4 - 3^3 C_{3k}^6 + \dots]$$

Din (3) și (4) obținem:

$$1 - 3C_{3k}^2 + 3^2 C_{3k}^4 - 3^3 C_{3k}^6 + \dots = (-1)^k 8^k$$

iii) Ținând seama de (3) obținem:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{3n-2} + S_{3n-1} + S_{3n} = (-2 - 2^2 + 2^4) + (-2^4 - 2^5 + 2^7) + \dots + (-2^{3n-2} - 2^{3n-1} + 2^{3n+1}) = 10 + 10 \cdot 2^3 + \dots + 10 \cdot 2^{3n-3} = 10(1 + 8 + \dots + 8^{n-1}).$$

Cl1. Fie numerele naturale a ale căror ultime patru cifre sînt 1910 încît a < 10⁷.

i) Să se arate că printre aceste numere există numere divizibile cu 1911.

ii) Determinați numerele a divizibile cu 1985.

Gh. David, lector univ., Timișoara.

Soluție: i) Numerele 10⁴ și 1911 fiind prime între ele există două numere $k, m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$(1) \quad 10^4 \cdot k - 1911m = 1$$

$$\text{Atunci } a = \frac{\dots 1910}{\dots} = 10^4 \cdot k + 1910 = (1 + 1911m) + 1910 = 1911(m+1).$$

Deci există numere a divizibile cu 1911.

Pentru a arăta că există numere a mai mici decât 10^7 divizibile cu 1911, din (1) deducem

$$m = 5k + \frac{445k - 1}{1911} \in \mathbb{N}$$

Se impune condiția $\frac{445k - 1}{1911} = r \in \mathbb{N}^*$ deci

$$k = 4r + \frac{131r + 1}{445} \in \mathbb{N}$$

De asemenea $\frac{131r + 1}{445} = t \in \mathbb{N}$, de unde

$$r = 3t + \frac{52t - 1}{131} \in \mathbb{N}$$

În continuare, din condiția $r \in \mathbb{N}$, deci $\frac{52t - 1}{131} = s \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$t = 2s + \frac{27s + 1}{52} \in \mathbb{N}$$

De asemenea $\frac{27s + 1}{52} = u \in \mathbb{N}^*$ atrage după sine

$$s = 2u - \frac{2u + 1}{27} \in \mathbb{N}^*$$

și $s \in \mathbb{N}^*$ dacă $\frac{2u + 1}{27} = v \in \mathbb{N}^*$. Rezultă

$$u = 13v + \frac{v - 1}{2} \in \mathbb{N}^*$$

Pentru $v = 1$ rezultă $u = 13$, $s = 25$, $t = 63$, $r = 214$, $k = 919$, $m = 4809$. Deci $a = 10^4 \cdot k + 1910 = 10^4 \cdot 919 + 1910 = 9191910 = 1911 \cdot 4810$

ii) Pentru ca numărul $a = \dots 1910$ să fie divizibil cu 1985 este necesar ca

$$(2) \quad a = 10^4 \cdot k + 1910 = 1985m, \quad k, m \in \mathbb{N}^*$$

Din (2) rezultă

$$m = (5k+1) + 15 \frac{k-1}{397}.$$

și $m \in \mathbb{N}$ dacă

$$k-1 = 397p \quad \text{cu } p \in \mathbb{N}.$$

Rezultă

$$(4) \quad k = 397p + 1 \quad \text{cu } p = 0, 1, 2, \dots$$

Condiția ca $a < 10^7$ impune $10^4 k \leq 9990000$ adică $k \leq 999$.

Din (4) deducem că valorile posibile ale lui p sînt $p=0$, $p=1$ și $p=2$. Deci există trei numere a care satisfac condițiile puse și anume:
pentru $p = 0$ rezultă $k = 1$ și $a = 11910$

$p = 1$ rezultă $k = 398$ și $a = 3981910$

$p = 2$ rezultă $k = 795$ și $a = 7951910$.

C12. Intr-o mulțime formată din n elemente s-au ales 2^{n-1} submulțimi astfel încît oricare trei dintre ele au un element comun. Să se arate că toate aceste submulțimi au un element comun.

* * * (dată la a XXX-a Olimpiadă de stat din Moscova)

Soluție: (prezentată de prof.univ.dr. Gh.Constantin) Se știe că mulțimea tuturor părților are 2^n elemente (împreună cu mulțimea însăși și cu partea vidă).

Din ipoteză avem că s-au ales jumătate din părți și orice două sau trei dintre părțile alese au elemente comune. Deci dintre A și \bar{A} (complementara mulțimii A) s-a ales numai una. De asemenea dacă B_1 și B_2 s-au ales atunci rezultă că printre părțile alese se află și $B_1 \cap B_2 = D$. Deci nu pot fi alese B_1 , B_2 și \bar{D} fiindcă nu au elemente comune.

Prin inducție se arată că dacă s-au ales părțile B_1, B_2, \dots, B_k atunci s-a ales și $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$.

Prin urmare, dacă s-au ales 2^{n-1} părți rezultă că și intersecția lor se află printre ele și deci toate aceste submulțimi au un element comun.

Observație: Algoritm: Se fixează un element al mulțimii inițiale și se iau toate submulțimile ce-l conțin (pentru că părțile lui $X = \{x\}$ sînt în număr de 2^{n-1} și deci cele ce-l conțin sînt în număr de $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$).

C13. Să se determine laturile și unghiurile unui triunghi în care

se dau lungimile medianelor m_a , m_b și unghiul C .

* * *

Indicație: Utilizând formulele $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ se obține $\frac{3}{4}(b^2 - a^2) = m_a^2 - m_b^2$, (2p).

Din teorema cosinusului se obține că

$$m_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - ab \cos C \quad \text{și} \quad m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab \cos C$$

din care rezultă

$$\frac{5}{4}(a^2 + b^2) - 2ab \cos C = m_a^2 + m_b^2 \quad (2p)$$

Se rezolvă sistemul omogen în necunoscutele a și b

$$\begin{cases} \frac{3}{4}(b^2 - a^2) = m_a^2 - m_b^2 \\ \frac{5}{4}(b^2 + a^2) - 2ab \cos C = m_a^2 + m_b^2 \end{cases} \quad (2p)$$

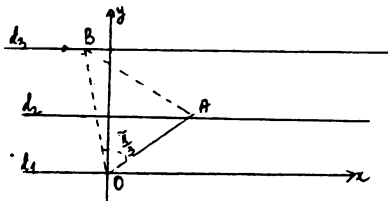
iar din teorema cosinusului se obține C iar din teorema sinusurilor se obțin unghiurile A și B (3p).

C14. Arătați că există triunghiuri echilaterale ale căror vîrfuri aparțin la trei drepte paralele date.

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Dacă d_1 , d_2 , d_3 sînt trei drepte paralele date alegem sistemul de axe ortogonale încît d_1 este axa Ox , iar Oy este perpendiculara pe d_1 . (1p).

Ecuațiile dreptelor d_1 , d_2 și d_3 sînt respectiv $y = 0$, $y = a$, $y = b$



cu a și b date. (1p).

Arătăm că există două puncte $A \in d_2$, $B \in d_3$ astfel încît O , A , B sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. (1p).

Dacă z_A , z_B sînt afizele punctelor A și B atunci $z_A = u+ia$, $z_B = v+ib$ (1p).

Pentru ca O, A, B să fie vîrfurile unui triunghi echilateral este necesar și suficient ca numărul complex

$$\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_A}{z_B}$$

să aibă modulul 1 și argumentul $+\frac{\pi}{3}$ sau $-\frac{\pi}{3}$ (1p), adică:

$$z_A = z_B \left(\frac{1+i\epsilon\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{cu } \epsilon = \pm 1, \quad (1p)$$

Rezultă

$$u+ia = (v+ib) \left(\frac{1+i\epsilon\sqrt{3}}{2} \right) \Leftrightarrow (2u-v+b\epsilon\sqrt{3}) + i(2a-v\epsilon\sqrt{3}-b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u = \frac{a-2b}{\epsilon\sqrt{3}} \quad \text{și } v = \frac{2a-b}{\epsilon\sqrt{3}} \quad (2p)$$

Deci există două triunghiuri echilaterale OAB ale căror vîrfuri A și B au afixele

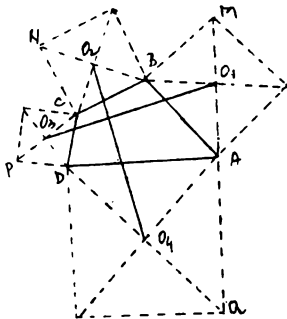
$$z_A = \frac{a-2b}{\epsilon\sqrt{3}} + ia, \quad z_B = \frac{2a-b}{\epsilon\sqrt{3}} + ib$$

cu $\epsilon = \pm 1$, (1p).

C15. Dacă pe laturile unui patrulater oarecare $ABCD$ construim în exterior pătrate de centre O_1, O_2, O_3, O_4 atunci dreptele O_1O_3 și O_2O_4 sînt perpendiculare.

* * *

Soluție: Notăm cu M, N, P, Q vîrfurile pătratelor construite pe



laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$, opuse respectiv vîrfurilor A, B, C, D .

Fie $z_A, z_B, z_C, z_D, z_M, z_N, z_P, z_Q$ afixele punctelor A, B, C, D, M, N, P, Q respectiv și $z_{O_i}, i=1,2,3,4$ afixele centrelor pătratelor construite. Atunci

$$z_{O_1} = \frac{z_A + z_M}{2}; \quad z_{O_2} = \frac{z_B + z_M}{2}; \quad z_{O_3} = \frac{z_C + z_P}{2}; \quad z_{O_4} = \frac{z_D + z_Q}{2}$$

Deoarece $AB = EM$ și $AM \perp AB$ avem că $\frac{z_M - z_B}{z_A - z_B}$ este egal cu i sau $-i$.

Rezultă $z_M - z_B = -i(z_A - z_B)$ și deci $z_M = z_B + i(z_B - z_A)$. Obținem $z_{O_1} = \frac{1}{2}[z_A + z_B + i(z_B - z_A)]$.

În mod analog, găsim:

$$z_{O_2} = \frac{1}{2}[z_B + z_C + i(z_C - z_B)]$$

$$z_{O_3} = \frac{1}{2}[z_C + z_D + i(z_D - z_C)]$$

$$z_{O_4} = \frac{1}{2}[z_D + z_A + i(z_A - z_D)]$$

Pentru a arăta că O_1O_3 și O_2O_4 sînt perpendiculare este necesar și suficient să arătăm că

$$\arg \frac{z_{O_3} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad -\frac{\pi}{2}$$

adică

$$\frac{z_{O_3} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_2}} = i \text{ sau } -i.$$

Prin calcul direct, avem:

$$\frac{z_{O_3} - z_{O_1}}{z_{O_4} - z_{O_2}} = \frac{(z_C + z_D - z_A - z_B) + i(z_D - z_C - z_B + z_A)}{(z_D - z_C - z_B + z_A) + i(z_A + z_B - z_C - z_D)} = \frac{x + iy}{y - ix} = i$$

C16. Determinați laturile triunghiului ABC în care se cunosc $p = 12$, $r = 2$ și $R = 5$.

* * *

Indicația: Avem $a+b+c = 24$; $abc = 4RS = 4Rrp = 480$. Din relația $p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 = r^2 p^2$ se găsește

$$ab + bc + ca = 188$$

Se rezolvă sistemul $a+b+c = 24$; $ab + bc + ca = 188$; $abc = 480$ și se obține $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$.

C17. Demonstrați că numerele complexe de modul 1 care au ca argument soluțiile ecuației

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(n+1)x + 1 = 0 \quad n \geq 2$$

sînt afixele vîrfurilor unui poligon regulat cu $2n$ laturi.

Ch. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Ecuația dată se scrie astfel

$$\operatorname{tg}(n+1)x = -\operatorname{ctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg}(n+1)x = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow (n+1)x = x + \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ cu } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Rezultă } x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Numerele complexe de modul 1 care îndeplinesc condiția impusă sînt

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$$

pentru $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$.

Argumentele numerelor complexe z_k , $k=0, 1, \dots, 2n-1$ formează o progresie aritmetică cu rația $\frac{\pi}{n}$ și primul termen $\frac{\pi}{2n}$. Imaginile geometrice ale numerelor complexe z_k , $k=0, 1, \dots, 2n-1$ sînt vîrfurile unui poligon regulat cu $2n$ laturi înscris în cercul cu centrul în origine și de rază egală cu unu.

C18. Demonstrați că ecuația $(z-ia)^n - (z+ia)^n = 0$ unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ și a este un număr real nenul, are toate rădăcinile reale.

Ch. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Indicație: Notînd $\frac{z-ia}{z+ia} = y$, ecuația devine $y^n - 1 = 0$ care are rădăcinile $y_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ cu $k = 1, 2, \dots, n-1$ (pentru $k=0$, $y = 1$ implică $a = 0$).

Avem atunci $z_k = ia \frac{1 + y_k}{1 - y_k}$ și se obține $z_k = -a \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

C19. Fie M un punct exterior unui dreptunghi $ABCD$ încît MD este

perpendiculară pe planul (ABCD). Se notează cu O intersecția diagonalelor dreptunghiului și prin x, y, z măsurile unghiurilor formate de dreptele MA, MP, MC cu planul (ABCD). Să se arate că:

i) $MA = MB = MC = MD$ unde N este mijlocul lui (KE) ,

ii) planele (MAC) respectiv (MED) sînt perpendiculare pe planul (ABCD),

$$\text{iii) } \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 z = \operatorname{ctg}^2 y$$

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: 1) Avem $MD \perp (ABCD)$, $AD \perp AB$ rezultă $MA \perp AB$. Analog

$MC \perp AC$ (1p).

În triunghiurile dreptunghice AME, CME, DME ; MA, MC și MD sînt mediane, rezultă $MA = ME = MB$; $MC = ME = MD$ și $MD = ME = MC$.

Deci

$$MA = MB = MC = MD, \quad (3p)$$

ii) În triunghiul dreptunghic DME , ON este linie mijlocie, rezultă $ON \parallel MD$ și cum $ED \perp (ABCD)$ avem $NO \perp (ABCD)$.

Planele (MAC) și $(ABCD)$ sînt perpendiculare deoarece planul (MAC) conține dreapta NO care este perpendiculară pe $(ABCD)$ (vezi teorema 1 § 3, Cap.V din manualul de geometrie), (2p). Analog planul (MED) conține dreapta NO perpendiculară pe $(ABCD)$ și deci $(MED) \perp (ABCD)$, (1;

$$\text{iii) Avem } \operatorname{ctg} x = \frac{AD}{MD}, \quad \operatorname{ctg} y = \frac{BD}{MD} \text{ și } \operatorname{ctg} z = \frac{CD}{MD} \quad (1p). \text{ Atunci}$$

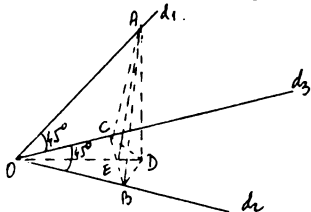
$$\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 z = \frac{AD^2 + CD^2}{MD^2} = \frac{AC^2}{MD^2} = \frac{BD^2}{MD^2} = \operatorname{ctg}^2 y \quad (1p).$$

C20. Se consideră în spațiu trei drepte concurente în punctul O formînd două câte două unghiuri de 45° . Pe dreapta d_1 se ia un punct A încît $OA = a$. Să se determine distanțele de la punctul A la dreptel.

d_2 , d_3 și la planul determinat de dreptele d_2 , d_3 în funcție de a .

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Notăm cu α planul determinat de dreptele d_2 și d_3 . Fie



$$AB \perp d_2 \quad (B \in d_2)$$

$$AC \perp d_3 \quad (C \in d_3)$$

$$AD \perp \alpha \quad (D \in \alpha)$$

și $AE \perp BC$.

Din $\{AB \perp d_2, \alpha\}$ rezultă $DB \perp d_2$.
 Din $\{AD \perp \alpha\}$ rezultă $AD \perp DB$.

Din $\{AD \perp \alpha, AC \perp d_3, \alpha\} \Rightarrow$ rezultă $DC \perp d_3$.

Cum $AD \perp \alpha$, $AE \perp BC$ rezultă $DE \perp BC$. Triunghiurile COA și BOA sunt dreptunghice isoscele, rezultă $AC = AB = OC = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Deoarece triunghiul ABC este isoscel și $AE \perp BC$ rezultă $CE = BE$.

De asemenea triunghiul OBC fiind isoscel și $CE = BE$ rezultă $OE \perp BC$.

Cum $DE \perp BC$, $OE \perp BC$, $E \in BC$, rezultă O, D, E coliniare.

$$\text{De asemenea } m(\widehat{COD}) = \frac{\pi}{8}. \text{ Avem } OD = \frac{OC}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos \frac{\pi}{8}}$$

$$\text{Obținem } AD^2 = OA^2 - OD^2 = a^2 \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = a^2(\sqrt{2} - 1).$$

$$\text{Deci } AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ și } AD = a\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

C21. Se dă triunghiul OAB dreptunghic în O . Pe perpendiculara în O pe planul (OAB) se ia un punct C . Fie E și F proiecțiile pe laturile AC respectiv BC ale unui punct arbitrar D al segmentului (OC) . Arătați că:

$$\frac{EF^2}{CD^2} = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2b^2}$$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului ABC .

Gh. Ivan, lector doctor, Timișoara.

Soluție: Notăm măsura unghiului \widehat{ECP} cu u . Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul EFC avem

$$3 \sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}.$$

rezultă

$$f \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2}}$$

Tinând seama că $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{2ab}$; $\sqrt{a^2+c^2} \geq \sqrt{2ac}$ și $\sqrt{b^2+c^2} \geq \sqrt{2bc}$ obținem că $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+c^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2} \geq \sqrt{8a^2b^2c^2} = 2\sqrt{2} abc$.

Atunci $f \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{2\sqrt{2} abc} = 3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$. Egalitatea are loc pentru $b = c = a$. Deci minimul expresiei f este $3(1+\sqrt{2})a$.

C23. Pe perpendiculara în A pe planul triunghiului ABC se consideră un punct D. Arătați că dacă E și F sînt proiecțiile punctului A pe dreptele DP respectiv DC atunci patrulaterul BEFC este inscriabil.

* * *

Soluție: Deoarece $AE \perp ED$ și $AD \perp AB$ rezultă că $\triangle DEA \sim \triangle DAB$.

Deci $\frac{DE}{AD} = \frac{AD}{BD}$, de unde obținem că $DE = \frac{AD^2}{BD}$.

Analog din $DA \perp AC$, $AF \perp DC$ avem $\triangle DFA \sim \triangle DAC$, rezultă $\frac{DF}{AD} = \frac{AD}{DC}$, de unde $DF = \frac{AD^2}{DC}$. Obținem $\frac{DE}{DC} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}$ și $\frac{DF}{BD} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}$, rezultă

$\frac{DE}{DC} = \frac{DF}{BD}$. Atunci $\triangle DEF \sim \triangle DCE$ și rezultă că patrulaterul BEFC este inscriabil.

C24. Fie x, y, z măsurile unghiurilor formate de diagonala (DB') a paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu muchiile DA, DC, DD' . Demonstrați

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$$

* * *

Soluție: Unghiurile formate de diagonala (DB') cu muchiile DA, DC, DD' sînt respectiv $\angle ADB', \angle CDB'$ și $\angle D'DB'$.

Notînd $DA = a, DC = b, DD' = c, DB' = d$, se știe că $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Aplicând teorema cosinusului în unghiul ADB' obținem

$$\cos x = \frac{AD^2 + DB'^2 - AB'^2}{2 \cdot AD \cdot DB'} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ad}$$

Aplicând apoi teorema cosinusului în triunghiurile CDB' respectiv $D'DB'$ obținem

$$\cos y = \frac{b}{d}, \quad \cos z = \frac{c}{d}$$

Avem atunci

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = 1$$

C25. Se consideră tetraedrul $[AECD]$. Un plan variabil intersectează muchiile $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$ și $[DB]$ respectiv în punctele M , N , P , Q astfel încât patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.

Să se demonstreze că oricare două din afirmațiile de mai jos implică pe cea de a treia:

- 1° $\sigma[MNPQ]$ este maximă;
- 2° $MNPQ$ este romb;
- 3° $(AB) \equiv (CD)$.

I. Albu, lector doctor, Timișoara.

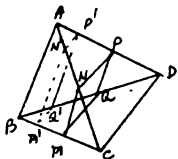
Soluție: Din condiția că $MNPQ$ este paralelogram se deduce că $AB \parallel MN \parallel PQ$ și $CD \parallel NP \parallel QM$.

1° + 2° \Rightarrow 3°. $\sigma[MNPQ]$ maximă dacă și numai dacă produsul $MN \cdot NP$

este maxim, deoarece orice $M'N'P'Q'$ un alt paralelogram determinat de aceeași manieră, unghiurile lui $MNPQ$ și cele ale lui $M'N'P'Q'$ sînt respectiv, congruente, iar raportul ariilor

$$\frac{\sigma[MNPQ]}{\sigma[M'N'P'Q']} = \frac{MN \cdot NP}{M'N' \cdot N'P'}$$

Din asemănările $\triangle CMN \sim \triangle CBA$, $\triangle ANP \sim \triangle ACD$ avem $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ și



$$\frac{NP}{CD} = \frac{NA}{AC} \cdot \text{Adunându-le, obținem}$$

$$(1) \quad \frac{MN}{AB} + \frac{NP}{CD} = 1$$

Pe de altă parte, avem

$$(2) \quad MN \cdot NP = AB \cdot CD \cdot \frac{MN}{AB} \cdot \frac{NP}{CD},$$

deci $MN \cdot NP$ este maxim dacă și numai dacă $\frac{MN}{AB} \cdot \frac{NP}{CD}$ este maxim; cum din (1) suma acestor rapoarte pozitive este constantă ($= 1$), rezultă că $\frac{MN}{AB} \cdot \frac{NP}{CD}$ este maxim când $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{CD} = \frac{1}{2}$. Așadar $MN = \frac{1}{2} AB$, $NP = \frac{1}{2} CD$ (planul secant conține mijloacele muchiilor). Cum 2° implică $MN = NP$, rezultă $AB = CD$, adică 3° .

$1^\circ + 3^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Din 1° am dedus $MN = \frac{1}{2} AB$, $NP = \frac{1}{2} CD$. Cum $3^\circ \Rightarrow \Rightarrow MN = NP$, rezultă că paralelogramul $MNPQ$ este romb, adică 2° .

$$2^\circ + 3^\circ \Rightarrow 1^\circ. \quad 2^\circ \Rightarrow MN = NP, \text{ care împreună cu } 3^\circ \text{ implică } \frac{MN}{AB} =$$

$\frac{NP}{CD} = \frac{1}{2}$ deci MN este linie mijlocie în triunghiul CAB , M este mijlocul lui (BC) , deci $\sigma[MNPQ]$ este maximă.

C26. Să se determine locul geometric al punctelor (din plan) egal depărtate de trei drepte distincte din plan. Discuție.

A. C. Albu, lector doctor, Timișoara.

Soluție: 1) Dacă dreptele a , b , c se intersectează două câte două formînd triunghiul ABC , locul este format din patru puncte, punctul I de intersecție a bisectoarelor interioare și punctele I_a , I_b , I_c , centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC .

ii). Dacă dreptele a , b , c sînt concurente în O , locul este punctul O .

iii). Dacă $a \parallel b$ și c le intersectează, locul este format din două puncte aflate la intersecția bisectoarelor interioare și exterioare ale unghiurilor $\sphericalangle(a, c)$ și $\sphericalangle(b, c)$.

iv). Dacă $a \parallel b \parallel c$, locul este mulțimea vidă.

227. 1) Demonstrați proprietatea: pentru orice dreaptă d ce trece prin centrul de greutate G al triunghiului ABC și taie laturile AB , AC respectiv în punctele B_1 , C_1 , avem relația:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} = 3.$$

2) Generalizați proprietatea 1) considerînd cazul în care dreapta d taie mediana AM ($M \in AB$) într-un punct $M_1 \neq G$; găsiți ca un caz particular proprietatea 1).

3) Generalizați proprietatea 2) considerînd cazul în care AM este o ceviană pentru care avem $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = k$ ($k \neq -1$); găsiți ca un caz particular proprietatea 2).

A. C. Albu, lector doctor, Timișoara.

Soluție "vectorială": 1) Avem $\overline{AG} = \lambda \overline{AB_1} + (1-\lambda)\overline{AC_1}$; observînd și avem $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$, dacă punem $\overline{AB_1} = p\overline{AB}$, $\overline{AC_1} = q\overline{AC}$, obținem:

$$\frac{1}{3}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \lambda p \overline{AB} + (1-\lambda)q \overline{AC},$$

de unde $\lambda p = \frac{1}{3}$, $(1-\lambda)q = \frac{1}{3}$. Eliminînd pe λ obținem $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 3$ adică relația cerută.

2) Avem $\overline{AM_1} = \lambda \overline{AB_1} + (1-\lambda)\overline{AC_1}$, unde $\overline{AB_1} = p\overline{AB}$, $\overline{AC_1} = r\overline{AC}$ și

$$\overline{AM_1} = r\overline{AM} = \frac{r}{2}(\overline{AB} + \overline{AC});$$

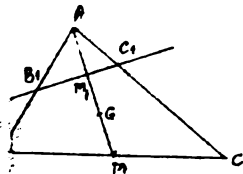
înlocuind în prima relație, obținem:

$$\frac{r}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \lambda p \overline{AB} + (1-\lambda)r \overline{AC},$$

deci

$$\frac{r}{2} = \lambda p, \quad \frac{r}{2} = (1-\lambda)r;$$

Eliminînd pe λ , obținem rela-



și

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{1}{r}, \text{ adică } \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB_1}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AC_1}} \right) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AM_1}}$$

Pentru $M_1 = G \in d$, rezultă $\frac{\overline{AM}}{\overline{AM_1}} = \frac{3}{2}$, deci proprietatea 1).

3) Procedînd analog ca la 2), și ținînd seama că $\overline{AM} = \frac{1}{1+k} \overline{AB} +$

+ $\frac{k}{1+k} \vec{AC}$, obținem

$$\frac{r}{1+k} \vec{AB} + \frac{rk}{1+k} \vec{AC} = \lambda r \vec{AB} + (1-\lambda) r \vec{AC},$$

de unde

$$\frac{r}{1+k} = \lambda r, \quad \frac{rk}{1+k} = (1-\lambda)r$$

Eliminând pe λ obținem relația:

$$\frac{1+k}{r} = \frac{kp+q}{p+q}$$

adică

$$\frac{1}{k+1} \left(\frac{\vec{AB}}{\vec{AB}_1} + k \frac{\vec{AC}}{\vec{AC}_1} \right) = \frac{\vec{AM}}{\vec{AM}_1}$$

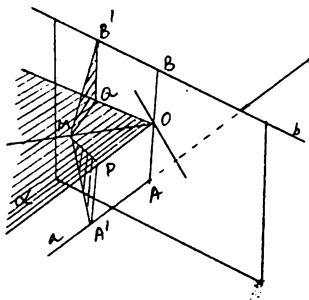
Pentru $k = 1$, se obține relația din 2).

C28. Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte distincte.

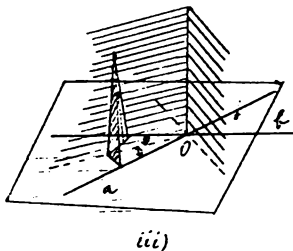
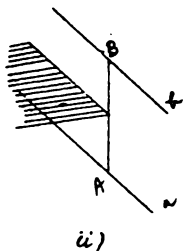
* * *

Soluție: considerăm trei cazuri: i) $a \cap b = \emptyset$; ii) $a \parallel b$; iii) $a \cap b \neq \emptyset$.

i) Fie \overline{AB} segmentul pe perpendiculara comună pe a, b și α planul medietorului \overline{AB} ; se vede că $d(M, a) = d(M, b)$ de unde se deduce că M aparține bisectoarei unghiului \widehat{POQ} .
Deci locul este format din două drepte prin O , situate în planul α , bisectoarele interioară și exterioară ale unghiului \widehat{POQ}



i)



ii) $a \parallel b$, fie \overline{AB} segmentul unei perpendiculare comune. Locul este planul mediator al lui \overline{AB} , și el nu depinde de alegerea lui \overline{AB} .

iii) Fie α planul dreptelor a , b . Conform teoremei celor trei perpendiculare, locul este format din două plane perpendiculare pe α , care taie pe α după bisectoarele interioară și exterioară ale unghiului $\angle(a, b)$.

Notă. Soluțiile problemelor din acest paragraf marcate cu asterisc au fost redactate după cum urmează: profesor M. Neacșu, Caransebeș (A5; B1; C13), lector Gh. David, Universitatea Timișoara (A1, A2, A6; C8; C11), lector doctor Gh. Ivan, Universitatea Timișoara (B4, B6, B7, B8, B9, B10, B11, B12, B13, B14; C15, C16, C23, C24); lector doctor A.C. Albu, Universitatea Timișoara (C28).

§ 2. SOLUTIILE PROBLEMELOR DATE LA EDITIA a II-a, DEVA

28-30 MARTIE 1986

Testul I, clasa a X-a, 28 martie 1986

1°. Să se arate că numărul $n = 7^{100} \cdot 3^{100}$ are 85 de cifre și să se determine ultimele patru cifre ale lui n .

L. Panaitopol, lektor doctor, București.

Soluție: Arătăm mai întâi că 7^{100} are 85 de cifre adică $10^{84} < 7^{100} < 10^{85}$.

Prin calcul avem $7^4 < \frac{10^4}{4}$ sau $4 \cdot 7^4 < 10^4$ sau $2^{10} \cdot 7^{20} < 10^{20}$, deci $7^{20} < \frac{10^{20}}{2^{10}}$. Avem $\frac{10^{20}}{2^{10}} < 10^{17}$ deoarece $10^3 < 2^{10}$. Rezultă $7^{20} < 10^{17}$ și deci $7^{100} < 10^{85}$.

De asemenea avem $7^5 > 2^{14}$, deci $7^{25} > 2^{70} = (2^{10})^7 > (10^3)^7 = 10^{21}$. Rezultă $10^{84} < 7^{100}$.

Arătăm apoi că 3^{100} are cel mult 80 de cifre.

Intr-adevăr, $3^{100} < 10^{80}$ dacă și numai dacă $3^{10} < 10^8 \Leftrightarrow 3^5 < 10^4$, ceea ce este evident.

In concluzie, deoarece 7^{100} are 85 de cifre și 3^{100} are cel mult 80 de cifre avem că $n = 7^{100} \cdot 3^{100}$ are 85 de cifre.

$$7^{100} \cdot 3^{100} = (10-3)^{100} \cdot 3^{100} = 10^4 k - C_{100}^3 \cdot 10^3 \cdot 3^{97} + C_{100}^2 \cdot 10^2 \cdot 3^{98} - C_{100}^1 \cdot 10 \cdot 3^{99}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dar

$$\begin{aligned} C_{100}^3 \cdot 10^3 &= 0 \pmod{10^4} \\ C_{100}^2 \cdot 10^2 \cdot 3^{98} &\equiv 5000 \pmod{10^4} \Rightarrow \\ C_{100}^1 \cdot 10 \cdot 3^{99} &\equiv 7000 \pmod{10^4} \end{aligned}$$

$n \equiv 5000 - 7000 \pmod{10^4} \Leftrightarrow n \equiv 8000 \pmod{10^4}$ adică ultimele cifre ale lui n sînt 8000.

2°. Demonstrați că pentru orice funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax + b$ există $c \in [-2, 1]$ astfel încît $|f(c)| \geq 1$.

D. Miheș, profesor, Timișoara.

Soluție: Printr-un calcul imediat se obține

$$f(-2) + 2 \cdot f(1) - 3f(0) = -6$$

deci

$$|f(-2) + 2 \cdot f(1) - 3f(0)| = 6$$

și obținem

$$|f(-2)| + 2|f(1)| + 3|f(0)| \geq 6$$

adică

$$6 \max\{|f(-2)|, |f(1)|, |f(0)|\} \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\max\{|f(-2)|, |f(1)|, |f(0)|\} \geq 1$$

Rezultă că există $c \in [-2, 1]$ astfel încît $|f(c)| \geq 1$.

3°. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC cu unghiurile B și C ascuțite înălțimea din A trece prin mijlocul bisectoarei interioare din B, atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

$$(i) \quad m(\hat{B}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(ii) \quad \sigma(ABC) = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A. Pinciu, profesor, București.

Soluție: Fie AA' înălțime, A' ∈ (EC), BB' bisectoare, B' ∈ (AC), AA' ∩ BB' = {P}.

Considerăm A'' ∈ AP, astfel încît PA'' = AP, deci A'' în exteriorul triunghiului ABC, iar P mijlocul segmentului AA''.

Se calculează ușor A'A'' și se obține:

$$A'A'' = AB(1 - \cos \hat{B}) \operatorname{tg} \frac{B}{2}$$

Din asemănarea triunghiurilor A'A''B și A'AC avem:

$$A'C = AB \cdot \frac{\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B}}{(1 - \cos \hat{B}) \operatorname{tg} \frac{B}{2}}$$

$$\text{Se obține } \sigma(ABC) = \frac{AB^2}{2} \cdot \sin \hat{B} \left(\cos \hat{B} + \frac{\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B}}{(1 - \cos \hat{B}) \operatorname{tg} \frac{B}{2}} \right)$$

Echivalența cerută se reduce la a demonstra că afirmațiile

$$(i) \quad m(\hat{B}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(ii) \quad \sin \hat{B} \left(\cos \hat{B} + \frac{\sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B}}{(1 - \cos \hat{B}) \operatorname{tg}^2 \frac{\hat{B}}{2}} \right) = \sqrt{3}$$

sînt echivalente.

Prin înlocuirea $m(\hat{B}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ se obține imediat că relația (ii) este adevărată.

Fie $\operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = t$. Efectuînd calculele în relația (ii) se obține ecuația

$$\sqrt{3} \cdot t^3 + 2t^2 + \sqrt{3} \cdot t - 2 = 0$$

care are o singură rădăcină reală $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $m(\hat{B}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4°. Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu, astfel încît în triunghiul ABC, unde B și C sînt fixate, expresia

$$g(A, B, C) = R^2 \cdot \sin 2B \cdot \sin 2C \text{ să fie maximă.}$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție: } g(A, B, C) &= 2R \sin B \cdot 2R \sin C \cdot \cos B \cdot \cos C = b \cdot c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^4 - (b^2 - c^2)^2}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Dar } (b^2 - c^2)^2 \geq 0 \text{ deci } g(A, B, C) \leq \frac{a^2}{4},$$

maximul se obține cînd $b = c$.

Locul geometric căutat este planul mediator al segmentului BC, exceptînd mijlocul lui BC. Reciproca este imediată.

Testul II, clasa a IX-a, 29 martie 1986.

1°. Se consideră numerele:

$$a_n = 1 - C_n^3 + C_n^6 - \dots$$

$$b_n = -C_n^1 + C_n^4 - C_n^7 + \dots$$

$$c_n = C_n^2 - C_n^5 + C_n^8 - \dots$$

Arătați că pentru orice $n \geq 2$, $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - c_n a_n = 3^n$

D. Miheș, profesor, Timișoara.

Soluție: Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $\varepsilon^3 = -1$.

Notăm $S_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 - a_n b_n - b_n c_n - c_n a_n$.

Printr-un calcul imediat se obține

$$S_n = (a_n - \varepsilon b_n + \varepsilon^2 c_n) \cdot (a_n - \bar{\varepsilon} b_n + \bar{\varepsilon}^2 c_n)$$

$$\text{Dar } a_n - \varepsilon b_n + \varepsilon^2 c_n = (1 + \varepsilon)^n$$

$$a_n - \bar{\varepsilon} b_n + \bar{\varepsilon}^2 c_n = (1 - \bar{\varepsilon})^n$$

In concluzie

$$S_n = [(1 + \varepsilon)(1 - \bar{\varepsilon})]^n = (1 + \varepsilon + \bar{\varepsilon} + \varepsilon \cdot \bar{\varepsilon})^n = 3^n \text{ și egalitatea}$$

este demonstrată.

2°. Se știe că:

$f: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow [a; b]$, $f(x) = \sqrt[n]{\cos x} + \sqrt[n]{\sin x}$ ($n \geq 2$) este surjectivă. Precizați numerele a și b și monotonia lui f .

V. Radu, lector doctor, Timișoara.

Soluție: $f(x) = \sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, oricare ar fi $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Folosind inegalitatea lui Jensen pentru $h(x) = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, obținem:

$$\frac{\sqrt[n]{\sin x} + \sqrt[n]{\cos x}}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{\sin x + \cos x}{2}} \leq \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}}{2}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

unde am folosit inegalitatea $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Deci } f(x) \leq 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$\text{Am obținut că } a = 1 \text{ și } b = 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$\text{Deoarece } f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 1 \text{ și } f(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}} > 1,$$

funcția nu este monotonă.

3^o. Se dau patru puncte A, B, C, D în spațiu, dintre care cel mult două sînt la o distanță mai mare decît 1 între ele. Determinați valoarea maximă a expresiei

$$g(A,B,C,D) = AB + BC + AD + CA + DB + DC$$

* * *

Soluție: Să demonstrăm că valoarea maximă a expresiei $g(A,B,C,D)$ este $5 + \sqrt{3}$.

Presupunem că $|AB| = \max \{ |AB|, |BC|, |AD|, |CA|, |DB|, |DC| \}$. Dacă $|AB| < \sqrt{3}$, atunci $\max g(A,B,C,D) < 5 + \sqrt{3}$.

Fie $|AB| \geq \sqrt{3}$.

Considerăm sferile de centre A, respectiv B și de rază 1.

Fie C, D aparținînd intersecției celor două sfere, două puncte oarecare. Avem $|CD| \leq |MN|$, $|AC| \leq |AM|$, $|BD| \leq |BN|$, $|BC| \leq |BM|$, $|AD| \leq |AN|$, unde MN o coardă comună celor două sfere.

Dacă considerăm cazul $C = M$, $D = N$ vom obține egalitate în fiecare din inegalitățile de mai sus și vom obține maximul expresiei căutate. Problema s-a redus la o problemă de geometrie plană.

Avem $AB \perp DC$, $AC = BC = BD = AD = 1$,

Notăm $AB \cap CD = \{O\}$ și $CO = DO = x$.

Atunci $AO = BO = \sqrt{1 - x^2}$, unde $x \in [0; \frac{1}{2}]$.

$g(A,B,C,D) = 2x + 4 + 2\sqrt{1 - x^2}$.

Fie $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$, $f: [0; \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$.

Să calculăm maximul lui $f(x)$.

Fie $x = \sin y$, unde $y \in [0; \frac{\pi}{6}]$, pentru că $x \in [0; \frac{1}{2}]$ rezultă: $f(y) = \sin y + \cos y = \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - y) \leq \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$, după înlocuirea lui $\cos \frac{\pi}{12}$.

Deci maximul lui $g(A,B,C,D)$ este $4 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 5 + \sqrt{3}$.

4^o. Demonstrați că pentru orice patru puncte distincte din spațiu următoarele afirmații sînt echivalente:

(1) A_1, A_2, A_3 și A_4 sînt vîrfurile unui dreptunghi

(2) Pentru orice punct M din spațiu

$$MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$$

* * *

Soluție: Să arătăm că 1) \Rightarrow 2).

$$\text{Fie } \{O\} = A_1A_3 \cap A_2A_4$$

Aplicînd teorema medianei în triunghiurile MA_1A_3 și MA_2A_4 vom obține: $MA_2^2 + MA_4^2 = 2 \cdot MO^2 + \frac{1}{2} \cdot A_1A_3^2$,

$$MA_2^2 + MA_4^2 = 2 \cdot MO^2 + \frac{1}{2} \cdot A_2A_4^2$$

$$\text{Dar } A_1A_3 = A_2A_4 \text{ implică } MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2.$$

Să demonstrăm implicația inversă:

$$\text{Fie } M \equiv A_1, \text{ respectiv } M \equiv A_3.$$

$$\text{Vom avea: } A_1A_2^2 + A_1A_4^2 = A_1A_3^2 = A_3A_2^2 + A_3A_4^2$$

Analog, pentru $M \equiv A_2$, respectiv $M \equiv A_4$ avem: $A_1A_2^2 + A_2A_3^2 = A_2A_4^2 + A_4A_1^2 + A_4A_3^2$. Prin adunarea respectiv scăderea relațiilor de mai sus se obține $A_1A_2 \equiv A_4A_3$ și $A_1A_4 \equiv A_2A_3$.

Fie O_1 , respectiv O_2 mijloacele segmentelor A_1A_3 , respectiv A_2A_4 .

Aplicînd teorema medianei în triunghiurile MA_1A_3 și MA_2A_4 , folosind și relația $MA_1^2 + MA_3^2 = MA_2^2 + MA_4^2$ vom avea $4MO_1^2 - 4MO_2^2 = A_2A_4^2 - A_1A_3^2$, pentru orice punct M din spațiu.

Dacă $M \equiv O_1$ și apoi $M \equiv O_2$ se va ajunge la $O_1O_2^2 = 0$, deci $O_1 \equiv O_2$. Cu cele demonstrate anterior se obține că $A_1A_2A_3A_4$ este un paralelogram. Din $A_1A_3^2 = A_1A_2^2 + A_2A_3^2$, se obține că paralelogramul este un dreptunghi.

Notă. Soluțiile problemelor prezentate în acest paragraf au fost redactate de profesor I. Crișan, Arad.

63. NOTE MATEMATICE

Scopul acestui paragraf este să ofere mici sinteze expository sau contribuții originale pentru aprofundarea unor tehnici noi sau speciale în rezolvarea unor tipuri de probleme. Notele doresc să orienteze pe elevi în lărgirea orizontului lor matematic și a posibilităților de abordare mai generală a unor teme din programa concursurilor școlare de matematică.

PRINCIPIUL INDUCȚIEI COMPLETE

de

M. Neacșu, profesor, Caransebeș

În [1] principiul inducției matematice se formulează astfel: V_1 : "Dacă o propoziție $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$, și, din aceea că este adevărată pentru $n = k$ (unde k este un număr natural oarecare) rezultă că este adevărată și pentru numărul natural $n = k+1$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n ".

Culegerile uzuale de probleme conțin numeroase exemple care se rezolvă cu această variantă.

Considerăm că este util a prezenta în materialul de față câteva tipuri de probleme la care nu se aplică varianta principiului inducției matematice enunțat mai sus:

1°. Să se determine o funcție $f: \mathbb{N}^{\times} \rightarrow \mathbb{N}^{\times}$ care îndeplinește condițiile:

- a) $f(p) = p$, dacă p este prim,
- b) $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$ oricare ar fi $n, m \in \mathbb{N}^{\times}$.

2°. Fie o funcție $f: \mathbb{N}^{\times} \rightarrow \mathbb{N}^{\times}$ îndeplinind condițiile:

- a) $f(k_1 \cdot k_2) = f(k_1) \cdot f(k_2)$ pentru orice $k_1 \in \mathbb{N}^{\times}$ și $k_2 \in \mathbb{N}^{\times}$.
- b) $k_1 < k_2 \Rightarrow f(k_1) < f(k_2)$

c) $f(2) = 2$.

Să se arate că $f(n) = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3°. Pentru orice număr natural n , există un număr natural m și m numere naturale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ cu proprietatea că $\lambda_k \in \{-1, 1\}$ ($1 \leq k \leq m$) astfel ca

$$n = \lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 2^2 + \dots + \lambda_m \cdot m^2$$

4°. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale, astfel încît:

1) $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{6}$.

2) $a_{n+2} = 5a_{n+1} + a_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător.

În cazul exemplurilor 1° și 2° rezolvarea se face folosind următoarea variantă a principiului inducției complete pe mulțimea \mathbb{N} sau pe mulțimea bine ordonată $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq a\}$.

V₂. " Dacă propoziția $P(0)$ este adevărată (respectiv $P(a)$) și implicația $\{P(k) \text{ este adevărată pentru orice } k \leq n\} \Rightarrow P(n+1) \text{ adevărată}$ (respectiv $n \geq a$ ~~$n \geq n$~~), atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$."

Soluția exemplului 1°.

În relația b) înlocuind pe n cu 1 și m cu 1, obținem $f(1) = f^2(1)$. Cum $f(1) \neq 0$ rezultă $f(1) = 1$. Ținînd seama de a) rezultă $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, $f(5) = 5$, etc., iar din b) rezultă $f(4) = f(2) \cdot f(2) = 4$, $f(6) = f(2) \cdot f(3) = 6$, etc. Intuim că $f(n) = n$. Notăm cu $P(n)$ propoziția " $f(n) = n$ " și demonstrăm prin inducție.

$P(1)$: $f(1) = 1$ este adevărată.

Fie $f(k) = k$ oricare ar fi k ($1 \leq k \leq n$).

Dacă $n+1$ este prim atunci $f(n+1) = n+1$.

Dacă $n+1$ nu este prim, atunci există $k_1 < n+1$ și $k_2 < n+1$, astfel încît $n+1 = k_1 k_2$. Deoarece $k_1 \leq n$ și $k_2 \leq n$ avem $f(k_1) = k_1$ și $f(k_2) = k_2$ și deci $f(n+1) = f(k_1 k_2) = f(k_1) \cdot f(k_2) = k_1 k_2 = n+1$.

Deci implicația $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ este adevărată pentru orice k ce îndeplinește condiția $1 \leq k \leq n$. Se constată că funcția $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^n$, $f(n) = n$ îndeplinește condițiile a) și b). Din rezolvare rezultă și unicitatea ei.

Soluția exemplului 2^o.

Pie propoziția $P(n)$: $f(n) = n^n$.

Propoziția $P(1)$ este adevărată, căci $f(1) = f^2(1)$ și cum $f(1) \neq 0$ rezultă $f(1) = 1$.

Presupunem $f(k) = k$, pentru $1 \leq k \leq n$. Dacă $n+1$ este par, atunci există k , $1 \leq k \leq n$, astfel încât $n+1 = 2k$ și $f(n+1) = f(2k) = f(k) = k = n+1$. Dacă $n+1$ este impar atunci există k , astfel încât $2k < n+1 < 2k+2$ adică $n+1 = 2k+1$. Deoarece $1 \leq k < k+1 \leq n$ rezultă $f(2k) = f(2) \cdot f(k) = 2k$ și $f(2k+2) = f(2) \cdot f(k+1) = 2k+2$. Rezultă că $2k < f(n+1) < 2k+2$ și deci $f(n+1) = 2k+1 = n+1$.

Implicația $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ este adevărată pentru orice $k \leq n$ și deci $f(n) = n$.

Funcția $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^n$, $f(n) = n$ îndeplinește condițiile a, b), c).

Pentru rezolvarea exemplului 3^o, folosim varianta:

V_3 : "Pie $a \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^n$ și $P(n)$ o proprietate referitoare la un număr natural $n \geq a$.

Dacă

- 1) Propozițiile $P(a)$, $P(a+1)$, ..., $P(a+k-1)$ sînt adevărate și
- 2) Implicația $P(n) \Rightarrow P(n+k)$ este adevărată oricare ar fi $n \geq a$, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq a$.

Soluția exemplului 3^o.

Notăm cu $P(n)$ propoziția din enunț.

Propozițiile $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sînt adevărate căci $0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$;
 $1 = 1^2$; $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$; $3 = -1^2 + 2^2$.

Vom arăta că implicația $P(n) \rightarrow P(n+4)$ este adevărată pentru orice n .

Precizăm mai întâi că $4 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$. Dacă $\lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 2^2 + \dots + \lambda_m \cdot m^2$ atunci $n + 4 = \lambda_1 \cdot 1^2 + \lambda_2 \cdot 2^2 + \dots + \lambda_m \cdot m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$. Deci implicația $P(n) \rightarrow P(n+4)$ este adevărată $\Rightarrow P(n)$ este adevărată pentru orice n natural.

În cazul exemplului 4^o folosim varianta:

V₄: "Fie $a \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ și $P(n)$ o proprietate referitoare la un număr natural $n \geq a$.

Dacă:

- 1) Propozițiile $P(a), P(a+1), \dots, P(a+k-1)$ sînt adevărate
 - 2) Implicația $P(n) \wedge P(n+1) \wedge \dots \wedge P(n+k-1) \Rightarrow P(n+k)$ este adevărată, pentru orice $n \geq a$,
- atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq a$.

Soluția exemplului 4^o.

Fie $P(n)$ propoziția " $x_n < x_{n+1}$ ".

$P(0)$: " $x_0 < x_1$ " este adevărată.

Din b) obținem $x_2 = 5x_1 + x_0 = \frac{5}{6}$. Rezultă că și propoziția $P(1)$: $x_1 < x_2$ este adevărată.

Dacă $(x_n < x_{n+1}) \wedge (x_{n+1} < x_{n+2})$ atunci $(5x_{n+1} < 5x_{n+2})$ și $(x_n < x_{n+1}) \Rightarrow 5x_{n+1} + x_n < 5x_{n+2} + x_{n+1}$ adică implicația $P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător.

Observație 1. Varianta V_1 , prezentată în [1] ține seama că mulțimea \mathbb{N} este bine ordonată și că orice element, cu excepția celui mai mic element, posedă un ~~pre~~predecesor imediat.

Varianta V_2 , ține seama numai că relația de ordine uzuală determină pe mulțimea \mathbb{N} , o structură de mulțime bine ordonată.

Varianta V_1 nu este aplicabilă într-o mulțime bine ordonată în care

istă cel puțin două elemente care nu posedă predecesor imediat.

Exemplu.

Fie mulțimea ordonată $N \times N$, care are ca prim element pe $(0,0)$.
Successorul imediat al elementului $(n,m) \in N \times N$ este $(n,m+1)$.

Fie propoziția:

$$P(n,m): n + \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

Se arată prin inducție că $P(0,0)$ este adevărată iar implicația
 $P(n,m) \Rightarrow P(n,m+1)$ este adevărată oricare ar fi $(n,m) \in N \times N$ (exerci-
țiu).

Vom arăta în continuare că Propoziția $P(n,m)$ este falsă oricare
ar fi $n > 0$.

$$n + \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{m+1} k^2 = n + \frac{1}{3} + \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \neq \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

deoarece $n \neq 0$.

Bibliografie

- [1]. Măstășescu, Niță, Popa, Matematică pentru clasa a X-a, Ed. Did.
Ped., București, 1983.
- [2]. Foeru, E.G. Buzău, N. Teodorescu, etc., Matematica în învățământul
gimnazial și liceal, S.S.M. din R.S.R., București,
1978.

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE

de

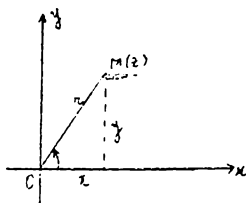
Gh. Ivan, lector doctor, Universitatea Timișoara

În cele ce urmează vom expune unele proprietăți geometrice în limbajul numerelor complexe care pot fi utile în rezolvarea pe o cale mai simplă a unor probleme de geometrie.

Fie $\overline{\Pi}$ un plan dat în care s-a ales un sistem de coordonate ortogonale, reperul fiind $\{O, A, B\}$ și \mathbb{C} -mulțimea numerelor complexe.

Există o funcție bijectivă $f: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\Pi}$, care asociază fiecărui număr complex $z = x+iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) un punct unic $M \in \overline{\Pi}$ de coordonate (x, y) față de reperul ales, numit imaginea geometrică a numărului complex z .

Dacă imaginea geometrică a lui z este punctul M , atunci numărul complex z se numește sfixul punctului M și vom nota $M(z)$.



lungimea r a segmentului OM este modulul numărului complex z ; avem

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Iar unghiul u format de dreapta OM cu semi-axa pozitivă a axei Ox este argumentul numărului complex z ; avem

$$u = u \in [0, 2\pi)$$

Cu ajutorul modulului r și argumentului u (numit argument redus) un număr complex se scrie sub formă

$$(1) \quad z = r(\cos u + i \sin u)$$

numită forma trigonometrică a numărului complex z .

Dacă z_1, z_2, \dots, z_n sînt numere complexe atunci sînt binecunoscute următoarele rezultate:

$$(2) \quad |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

$$(3) \quad |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$$

$$(4) \quad \arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n$$

$$(5) \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ dac\u0103 } z_2 \neq 0$$

$$(6) \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

(7) Dac\u0103 punctele M_1, M_2 au afixele z_1, z_2 atunci mijlocul M al segmentului $[M_1 M_2]$ are afixul $\frac{z_1 + z_2}{2}$.

(8) Imaginile geometrice $M_i, i = 1, 2, 3, 4$ ale numerelor complexe $z_i, i = 1, 2, 3, 4$ s\u00e2nt v\u00e2rfurile unui paralelogram $M_1 M_2 M_3 M_4$ (propriu sau degenerat) dac\u0103 \u015fi numai dac\u0103

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

(9) Dac\u0103 M_1 \u015fi M_2 s\u00e2nt imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1 \u015fi z_2 atunci lungimea segmentului $[M_1 M_2]$ este dat\u0103 prin:

$$M_1 M_2 = |z_2 - z_1|$$

Exerci\u021biul 1. Dac\u0103 punctele M_1 \u015fi M_2 au afixele z_1, z_2 atunci punctul M care \u00e2mparte segmentul $[M_1 M_2]$ \u00eentr-un raport k dat are afixul

$$(10) \quad z = \frac{z_1 - k z_2}{1 - k}$$

Demonstra\u021bie. Fie $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_2$ \u015fi $\frac{k z_1}{k z_2} = k$ unde $k < 0$ c\u00e2nd M apar\u021bine segmentului $[M_1 M_2]$ \u015fi $k > 0$ \u00een caz contrar. Deoarece coordonatele lui M_1, M_2 s\u00e2nt $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ atunci se \u015fte c\u0103 M are coordonatele

$$x = \frac{x_1 - k x_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - k y_2}{1 - k}$$

Astfel afixul punctului M este

$$z = x + i y = \frac{x_1 - k x_2}{1 - k} + i \frac{y_1 - k y_2}{1 - k} = \frac{z_1 - k z_2}{1 - k}$$

Exerci\u021biul 2. Dac\u0103 punctele M_1, M_2, M_3 au afixele z_1, z_2, z_3 atunci centrul de greutate G al triunghiului $M_1 M_2 M_3$ are afixul

$$(11) \quad z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Demonstrație. Dacă M este mijlocul segmentului $[M_1M_2]$ atunci

$z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$ conform cu (7). Punctul G fiind centrul de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$ rezultă că G împarte segmentul $[M_1M_3]$ în raportul $-\frac{1}{2}$ și deci conform Exercițiului 1 avem

$$z_G = \frac{z_M + \frac{1}{2}z_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

Exercițiul 3. Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sînt trei puncte în planul xOy atunci

$$(12) \quad \angle M_2OM_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}$$

$$(13) \quad \angle M_3M_1M_2 = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

(14) M_1, M_2, M_3 sînt coliniere dacă și numai dacă

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$$

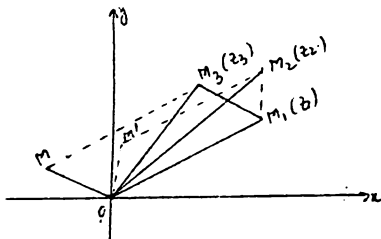
(15) dreptele M_1M_2 și M_3M_4 sînt perpendiculare dacă și numai dacă

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}.$$

Demonstrație. În adevăr, $\angle M_2OM_1 = \angle AOM_2 - \angle AOM_1 = \arg z_2 -$

$$- \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

Se știe că imaginea diferenței $z_3 - z_1$ este vîrfurile M al paralelogramului OM_1M_3M' iar imaginea diferenței $z_2 - z_1$ este vîrfurile M' al paralelogramului OM_1M_2M' . Se observă



ușor că $\angle M_3M_1M_2 = \angle M''OM_1$ și conform (12) rezultă egalitatea (13).

Echivalența (14) este o consecință a faptului că $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

este o sau \bar{z} și numerele complexe care au argumentul o sau π sînt reale.

Echivalența (15) este o consecință a faptului că unghiul dreptelor M_1M_2 , M_3M_4 este $\frac{\pi}{2}$ și numerele complexe de argument $\frac{\pi}{2}$ sînt pur complexe.

Exercițiul 4. Dacă $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ sînt patru puncte distincte în planul xOy atunci:

a) M_1 , M_2 , M_3 sînt vîrfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă:

$$(16) \quad |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \quad \text{și} \quad \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\pi}{3} \quad \text{sau} \quad -\frac{\pi}{3}$$

b) M_1 , M_2 , M_3 , M_4 sînt vîrfurile unui dreptunghi dacă și numai dacă:

$$(17) \quad z_1 + z_3 = z_2 + z_4, \quad |z_1 - z_2| \neq |z_1 - z_3| \quad \text{și}$$

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$$

c) M_1 , M_2 , M_3 , M_4 sînt vîrfurile unui pătrat dacă și numai dacă

$$(18) \quad z_1 + z_3 = z_2 + z_4 \quad \text{și} \quad \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = i \quad \text{sau} \quad -i.$$

Demonstrație. Se aplică exercițiul 3.

Exercițiul 5. a) Fie z , z_1 , z_2 , z_3 afixele a patru puncte distincte coplanare. Atunci are loc relația lui Ptolemeu:

$$(19) \quad (z - z_1)(z_2 - z_3) + (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2) = 0$$

b) Dacă $M(z)$, $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sînt patru puncte distincte în planul xOy atunci are loc inegalitatea lui Ptolemeu

$$(20) \quad |z - z_1| \cdot |z_2 - z_3| \leq |z - z_2| \cdot |z_3 - z_1| + |z - z_3| \cdot |z_1 - z_2|$$

Demonstrație. a) Egalitatea (19) se demonstrează prin calcul direct luînd $z = x + iy$ și $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, 3$.

b) Conform relației lui Ptolemeu avem:

$$(z - z_1)(z_2 - z_3) + (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2) = 0$$

pe unde

$$-(z - z_1)(z_2 - z_3) = (z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2)$$

si rezultă

$$|-(z - z_1)(z_2 - z_3)| = |(z - z_2)(z_3 - z_1) + (z - z_3)(z_1 - z_2)| \leq |(z - z_2)(z_3 - z_1)| + |(z - z_3)(z_1 - z_2)|$$

Atunci avem

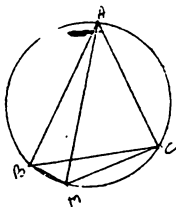
$$|z - z_1| \cdot |z_2 - z_3| \leq |z - z_2| \cdot |z_3 - z_1| + |z - z_3| \cdot |z_1 - z_2|$$

adică

$$MK_1 \cdot M_2 M_3 \leq MK_2 \cdot M_1 M_3 + MK_3 \cdot M_1 M_2$$

Problema 1. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct ce aparține planului triunghiului și diferit de A, B, C. Fie MA cea mai mare dintre lungimile MA, MB, MC. Punctul M aparține cercului circumscris triunghiului ABC dacă și numai dacă $MA = MB + MC$.

Soluție: Presupunem că M aparține cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă conform teoremei lui Ptolemeu că



$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$$

și cum $AB = BC = CA$ rezultă

$$MA = MB + MC$$

Reciproc, presupunem că $MA = MB + MC$

și calculăm în patrulaterul MBAC produsul lungimilor diagonalelor

$MA \cdot BC$. Avem:

$$MA \cdot BC = (MB + MC) \cdot BC = MB \cdot BC + MC \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$$

Rezultă că patrulaterul MBAC este inscripșibil conform reciprocei teoremei lui Ptolemeu. Deci M aparține cercului circumscris triunghiului ABC.

Problema 2. (teorema lui D. Pompeiu) Dacă punctul M din planul triunghiului echilateral $M_1 M_2 M_3$ nu aparține cercului circumscris triunghiului $M_1 M_2 M_3$ atunci există un triunghi ale cărui laturi au lungi-

mile MM_1 , MM_2 , MM_3 .

Soluție: Presupunem că $MM_1 = \max\{MM_1, MM_2, MM_3\}$. Pentru a arăta că există un triunghi ale cărui laturi au lungimile egale cu MM_1 , MM_2 , MM_3 este necesar și suficient să arătăm că

$$MM_1 < MM_2 + MM_3$$

Conform teoremei lui Ptolemeu avem:

$$MM_1 \cdot M_2 M_3 \leq MM_2 \cdot M_1 M_3 + MM_3 \cdot M_1 M_2$$

de unde ținând seama că $M_2 M_3 = M_1 M_3 = M_1 M_2$ obținem

$$MM_1 \leq MM_2 + MM_3$$

Dacă am avea $MM_1 = MM_2 + MM_3$ atunci conform Problemei 1 ar rezulta că M aparține cercului circumscris triunghiului echilateral $M_1 M_2 M_3$ ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare $MM_1 < MM_2 + MM_3$.

Problema 3. Fie $A_1 B_1 C_1 D_1$ și $A_2 B_2 C_2 D_2$ două paralelograme. Să se arate că punctele A_3, B_3, C_3, D_3 care împart în același raport segmentele $[A_1 A_2]$, $[B_1 B_2]$, $[C_1 C_2]$, $[D_1 D_2]$ sînt vîrfurile unui paralelogram eventual degenerat).

Soluție: Fie $z_{A_1}, z_{B_1}, z_{C_1}, z_{D_1}$, $i = 1, 2, 3$ afixele punctelor A_1, B_1, C_1, D_1 , $i = 1, 2, 3$. Deoarece $A_1 B_1 C_1 D_1$ și $A_2 B_2 C_2 D_2$ sînt paralelograme, conform (8) avem:

$$(i) \quad z_{A_1} + z_{C_1} = z_{B_1} + z_{D_1} \quad \text{și} \quad z_{A_2} + z_{C_2} = z_{B_2} + z_{D_2}$$

Fie k raportul în care A_3, B_3, C_3, D_3 împart segmentele $[A_1 A_2]$, $[B_1 B_2]$, $[C_1 C_2]$, $[D_1 D_2]$, atunci afixele punctelor A_3, B_3, C_3, D_3 (vezi Exercițiul 2, (11)) sînt:

$$(ii) \quad z_{A_3} = \frac{z_{A_1} - kz_{A_2}}{1 - k}, \quad z_{B_3} = \frac{z_{B_1} - kz_{B_2}}{1 - k}, \quad z_{C_3} = \frac{z_{C_1} - kz_{C_2}}{1 - k}, \quad z_{D_3} = \frac{z_{D_1} - kz_{D_2}}{1 - k}$$

Ținînd seama de relațiile (i), (ii) prin calcul direct se arată că

$$z_{A_3} + z_{C_3} = z_{B_3} + z_{D_3}$$

și rezultă că $A_3 B_3 C_3 D_3$ este un paralelogram.

Observație: Dacă în problema 3 se consideră $k = -1$, deci punctele A_3, B_3, C_3, D_3 sînt mijloacele segmentelor $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$, se obține problema 2, Cap. IV, din manualul de geometrie și trigonometrie, clasa a X-a.

Problema 4. Fie $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$ două triunghiuri cu centrele de greutate G_1, G_2 . Fie $P_i, i = 1, 2, 3$ punctele care împart segmentele $[A_iB_i], i = 1, 2, 3$ în același raport k . Să se arate că centrul de greutate G al triunghiului $P_1P_2P_3$ împarte segmentul $[G_1G_2]$ în raportul k .

Soluție: Fie $z_{A_i}, z_{B_i}, z_{P_i}, i = 1, 2, 3, z_{G_1}, z_{G_2}, z_G$ afixele punctelor $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, G_1, G_2, G$. Din ipoteză, ținînd seama de Exercițiile 1 și 2 avem

$$(a) \quad z_{P_i} = \frac{z_{A_i} - kz_{B_i}}{1 - k}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(b) \quad z_{G_1} = \frac{z_{A_1} + z_{A_2} + z_{A_3}}{3}, \quad z_{G_2} = \frac{z_{B_1} + z_{B_2} + z_{B_3}}{3}$$

$$(c) \quad z_G = \frac{z_{P_1} + z_{P_2} + z_{P_3}}{3}$$

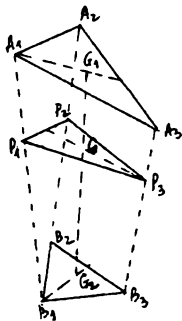
Prin calcul direct utilizînd relațiile (a), (b), (c) obținem:

$$z_G = \frac{z_{G_1} - k z_{G_2}}{1 - k}$$

adică G împarte segmentul $[G_1G_2]$ în raportul k .

Problema 5. Fie A, B, C, D centrele de simetrie ale pătratelor construite în exterior pe laturile unui paralelogram. Să se arate că $ABCD$ este un pătrat. (generalizare a problemei 8, exerciții recapitulative din manualul de geometrie, clasa a IX-a).

Soluție: Fie $M_i(z_i), i = 1, 2, 3, 4$ încît $M_1M_2M_3M_4$ este un parale-



ogram; rezultă deci $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$.

Fie $M_1Q_1Q_2M_2$ pătratul construit pe latura M_1M_2 , atunci afixul centrului A este $z_A = \frac{1}{2}(z_1 + z_{Q_2})$.

$M_1Q_1Q_2M_2$ fiind pătrat, conform Exercițiului 4, (c) avem că:

$$\frac{z_{Q_2} - z_2}{z_1 - z_2} = i \quad z_{Q_2} = z_2 + i(z_1 - z_2)$$

$$\text{Deci } z_A = \frac{z_1 + z_2 + i(z_1 - z_2)}{2}$$

Fie acum $M_2Q_3Q_4M_3$ pătratul construit pe latura M_2M_3 și E centrul său. Obținem în mod analog că:

$$z_B = \frac{z_2 + z_3 + i(z_2 - z_3)}{2}$$

De asemenea

$$z_C = \frac{z_3 + z_4 + i(z_3 - z_4)}{2}$$

și

$$z_D = \frac{z_4 + z_1 + i(z_4 - z_1)}{2}$$

Prin calcul, avem imediat că

$$z_A + z_C = z_B + z_D$$

și rezultă că ABCD este un paralelogram.

Pentru a arăta că ABCD este pătrat este suficient să arătăm că:

$$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$$

este egal cu i sau $-i$.

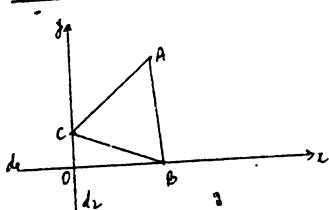
Prin calcul obținem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} &= \frac{(z_3 - z_1) + i[2z_2 - (z_3 + z_1)]}{(z_4 - z_2) + i[(z_4 + z_2) - 2z_1]} = \frac{(z_3 - z_1) + i(z_2 - z_4)}{(z_4 - z_2) + i(z_3 - z_1)} = \frac{x + iy}{-y + ix} \\ &= \frac{-i(-y + ix)}{-y + ix} = -i \quad \text{unde } z_3 - z_1 = x \text{ și } z_2 - z_4 = y. \end{aligned}$$

Problema 6. Fie d_1 și d_2 două drepte perpendiculare și A un punct ce aparține planului determinat de cele două drepte. Arătați

să există două puncte B și C ce aparțin dreptelor date încât A, B, C să fie vîrfurile unui triunghi echilateral.

Soluție: Putem alege în planul dat, reperul determinat de cele



doi drepte perpendiculare d_1 și d_2 , cu originea O. Fie $z = a+ib$ afixul punctului dat A. Notăm cu $z_B = u$ și $z_C = iv$ afixele punctelor $B \in d_1$ și $C \in d_2$.

Pentru ca A, B, C să fie vîrfurile unui triunghi echilateral este necesar și suficient ca numărul complex $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ să aibă modulul 1 și argumentul egal cu $+\frac{\pi}{3}$ sau $-\frac{\pi}{3}$ (vezi Exercițiul 4, a).

Atunci putem scrie

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon i \sqrt{3}) \quad \text{cu } \varepsilon = \pm 1$$

adică

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon i \sqrt{3})(z_C - z_A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u - a - ib &= \frac{1}{2} (1 + \varepsilon i \sqrt{3})(iv - a - ib) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [2u - a + \varepsilon \sqrt{3}(v - b)] + i[a \varepsilon \sqrt{3} - b - v] &= 0 \Leftrightarrow \\ u = b \varepsilon \sqrt{3} - a \quad \text{și } v &= a \varepsilon \sqrt{3} - b. \end{aligned}$$

Deci punctele B și C au afixele

$$z_B = b \varepsilon \sqrt{3} - a \quad \text{și } z_C = i(a \varepsilon \sqrt{3} - b) \quad \text{cu } \varepsilon = \pm 1.$$

Prin urmare, există două triunghiuri echilaterale ABC, care au vîrful A fixat și punctele B și C situate pe două drepte perpendiculare date.

Bibliografie

- [1] A. Coța și alții, Manual de geometrie și trigonometrie, Ed. Did. și Ped., București, 1987.
- [2] N. Mihăileanu, Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Ed. Tehnică, București, 1968.

C U P R I N S

PREPATA	1
1. <u>COMPLEMENTE LA MANUALELE DE ALGEBRA SI GEOMETRIE - CLASA a I-a</u>		3
1.A. Complemente la manualul de algebră pentru clasa a I-a		3
1.B. Complemente la manualul de geometrie și trigonometrie pentru clasa a I-a		11
1.C. Probleme de concurs		21
2. <u>SOLUTIILE PROBLEMELOR DATE LA EDITIA A DOUA, DEVA, 28-30 MARTIE 1986</u>		43
3. NOTE MATEMATICE		49
PRINCIPIUL INDUCTIEI COMPLETE de M. Keacșu,		49
APLICATII ALE NUMERELOR COMPLEXE IN GEOMETRIE de Gh. Ivan		54

În serie de caiete de informare matematică TESTE ȘI PROBLEME COMEN-
TATE pentru CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ "TRAIAN LALESCU" (11-
ceu) au apărut:

1. Caietul nr.1, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea I-a (conține recapitularea noțiunilor din gimnaziu și noțiuni introductive din manualele de clasa a IX-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a IX-a).
2. Caietul nr.2, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a VI-a (conține ultima parte a manualelor de clasa a IX-a și noțiuni introductive din manualele de clasa a X-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a X-a).
3. Caietul nr.3, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a V-a (conține ultima parte a manualelor de clasa a X-a și noțiuni introductive din manualele de clasa a XI-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a XI-a).
4. Caietul nr.4, ALGEBRĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XI-a, partea a VI-a (conține ultimele părți ale manualelor de clasa a XI-a și noțiuni ajutătoare din manualele de clasa a XII-a; acoperă programa testului nr.1 (octombrie), clasa a XII-a).
5. Caietul nr.5, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasele IX-X (conține enunțurile și soluțiile testelor prin corespondență de la ediția 1987 pentru clasele IX-X).
6. Caietul nr.6, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE pentru clasele XI-XII (conține enunțurile și soluțiile testelor prin corespondență de la ediția 1987 pentru clasele XI-XII).
7. Caietul nr.7, TESTELE CONCURSULUI PRIN CORRESPONDENȚA, ediția 1988; pentru clasele IX-XII.
8. Caietul nr.8, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a II-a (acoperă programa testului nr.2 (decembrie), clasa a IX-a).
9. Caietul nr.9, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea I-a (acoperă programa testului nr.2 (decembrie), clasa a X-a).
10. Caietul nr.10, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, partea I-II; acoperă programa testului nr. 2 (decembrie), clasa a XI-a).
11. Caietul nr.11, ALGEBRĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a părțile I-II (acoperă programa testului nr.2 (decembrie)).
12. Caietul nr.12, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a IX-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie) clasa a IX-a).
13. Caietul nr.13, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a II-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie) clasa a X-a).

14. Caietul nr.14, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie), clasa a XI-a).
15. Caietul nr.15, ALGEBRĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.3 (februarie), clasa a XII-a).
16. Caietul nr.16, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a II-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a II-a).
17. Caietul nr.17, ALGEBRĂ și GEOMETRIE pentru clasa a X-a, partea a III-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a X-a).
18. Caietul nr.18, ALGEBRĂ, ANALIZĂ MATEMATICĂ și GEOMETRIE ANALITICĂ pentru clasa a XI-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.4 (martie, clasa a XI-a)).
19. Caietul nr.19, ALGEBRĂ și ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru clasa a XII-a, partea a IV-a (acoperă programa testului nr.4 (martie), clasa a XII-a).

