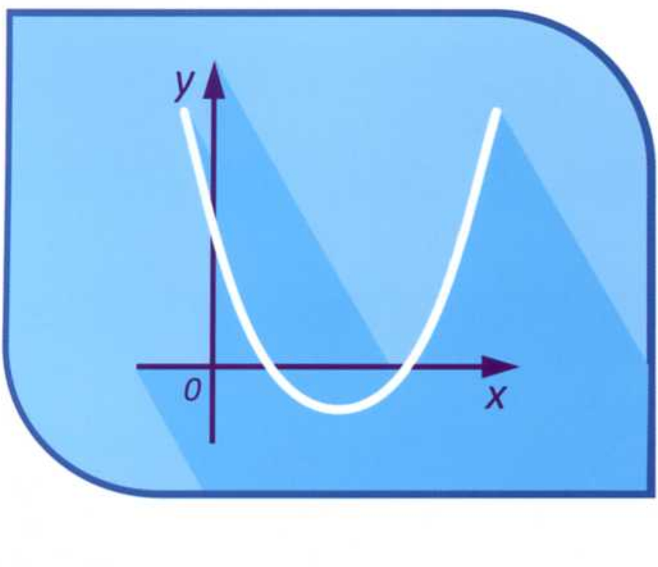
Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

ОГЭ-2018

МАТЕМАТИКА

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

- 160 НОВЫХ ТЕМАТИЧЕСКИХ ВАРИАНТОВ
- ВСЕ РАЗДЕЛЫ КОДИФИКАТОРА ОГЭ-2018
- ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ
- ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ



ЛЕГИОН

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ОГЭ-2018

9 класс

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

Учебно-методическое пособие

ТМ
ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2017

ББК 22.14я72
М34

Рецензенты:
Л. Н. Евич — кандидат физико-математических наук, доцент;
А. П. Уваровский — заслуженный учитель РФ, кандидат педагогических наук, профессор РАЕ.

Авторский коллектив:
С. В. Дерезин, С. О. Иванов, Е. Г. Коннова, В. М. Кривенко, Л. С. Ольховая, Н. М. Резникова, Е. М. Фридман, Д. И. Ханин.

М34 **Математика. ОГЭ-2018. 9-й класс. Тематический тренинг**: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов н/Д: Легион, 2017. — 432 с. — (ОГЭ).

ISBN 978-5-9966-1050-1

Пособие предназначено выпускникам 9-х классов общеобразовательных учреждений для подготовки к государственной итоговой аттестации (ОГЭ) в 2018 году.

В 2018 году в проекте спецификации произошёл ряд изменений, в частности исключён модуль «Реальная математика». Данное пособие написано в соответствии с этими изменениями и охватывает все основные разделы кодификатора элементов содержания. Книга существенно изменена по сравнению с предыдущим изданием: переработаны многие задания и обновлены теоретические сведения, а при составлении вариантов реализованы принципы их парного подобия и возрастания уровня сложности.

Пособие содержит:

- 160 новых тематических вариантов для самостоятельного решения (всего более 1400 разноуровневых заданий, охватывающих 27 основных тем);
- 200 примеров заданий с подробным решением и пояснениями;
- краткие теоретические сведения с примерами и иллюстрациями;
- ответы ко всем заданиям.

ББК 22.1я72

ISBN 978-5-9966-1050-1

Оглавление

От авторов

Дорогие ученики и уважаемые учителя!

Пособие предназначено для систематической подготовки выпускников 9-х классов общеобразовательных учреждений к государственной итоговой аттестации по математике.

Оно существенно отличается от аналогичного издания прошлого года. В него внесены необходимые изменения, позволяющие использовать его как для самостоятельной работы, так и непосредственно при изучении соответствующих тем на уроках математики в школе:

- все варианты по каждой теме составлены по принципу парного подобия и возрастания уровня сложности;
- теоретические сведения по каждой теме переработаны и дополнены необходимыми фактами и примерами, дающими ученикам возможность самостоятельно решать задачи базового уровня;
- многие задания заменены новыми, аналогичными экзаменационным.

Структура, форма и содержание пособия позволяют использовать его на различных этапах подготовки к ОГЭ, в том числе на заключительном. Книга содержит более 160 новых вариантов, включающих задания различного уровня сложности (более 1400 тренировочных заданий с ответами по 27 темам) по всем разделам ОГЭ в соответствии со спецификацией 2018 года.

В начале каждого параграфа приведён вариант из восьми или пяти заданий с образцами их решения и подробными пояснениями. В пособие включены также четыре темы, задания по которым относятся к повышенному уровню сложности: «Алгебра. Иррациональные уравнения и уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля»; «Алгебра. Задания с параметром»; «Алгебра. Уравнения и системы нелинейных уравнений»; «Геометрия. Задания повышенного уровня». Эти темы обозначены в пособии знаком *.

Мы рекомендуем начинать изучение каждой темы с освоения теоретического материала, изложенного в начале каждого параграфа. При необходимости можно обратиться также к школьному учебнику и пособию издательства «Легион» «Математика. 7—11-е классы. Карманный справочник».

Затем следует разобрать самостоятельно или под руководством учителя вариант с образцами решений. Задания этого варианта являются типовыми и относятся преимущественно к базовому уровню.

После этого рекомендуем прорешать задания варианта 1, которые, как правило, соответствуют заданиям варианта с решениями. Первый вариант лучше разобрать с учителем, а второй — самостоятельно.

Задания вариантов 3 и 4 незначительно сложнее заданий вариантов 1 и 2. Если позволяет время урока, первый вариант из пары следует прорешать непосредственно на уроке, а второй — самостоятельно.

Варианты 5 и 6 содержат в основном задания повышенного уровня сложности. Их рекомендуется предлагать ученикам, ориентированным на дальнейшее изучение математики на профильном уровне.

Надеемся, что содержащиеся в пособии задания разнообразных типов и различных уровней сложности помогут ученикам приобрести все необходимые навыки для успешной сдачи ОГЭ.

Успехов Вам!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, присылайте на электронный адрес: legionrus@legionrus.com.

Тематические задания

§ 1. Алгебра. Приближённые значения. Стандартный вид числа и округление чисел

Основные сведения

Десятичные дроби. Рассмотрим сумму

$$\mathbf{5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}}.$$

Её можно записать в виде десятичной дроби **5027,84**. То есть справедливо равенство:

$$\mathbf{5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 5027{,}84}.$$

Вообще, всякую сумму, составленную из целых степеней числа 10, умноженных на некоторые неотрицательные целые числа от 0 до 9 (их называют цифрами), можно также записать в виде десятичной дроби.

Правила округления. При округлении десятичной дроби до указанного разряда, смотрим на первую цифру **c** после цифры указанного разряда.

Если **c** меньше 5 $(0, 1, 2, 3, 4)$, то цифру **c** и все последующие за ней цифры этой дроби заменяем нулями. Полученная дробь и будет результатом округления.

Если же **c** не меньше 5 $(5, 6, 7, 8, 9)$, то цифру **c** и все последующие за ней цифры этой дроби заменяем нулями и к полученному числу прибавляем число, равное одной единице указанного разряда. Полученная дробь и будет результатом округления.

Заметим, что если цифра указанного разряда является последней цифрой целого числа или находится после запятой, то замена последующих цифр нулями равносильна их удалению.

1) Округляя дробь 2347,8 до сотен, заметим, что за цифрой 3, указывающей количество сотен, следует цифра 4, которая меньше 5. Поэтому результатом округления будет дробь 2300,0, равная 2300.

2) Округляя дробь 15,962 до десятых, заметим, что за цифрой 9, указывающей количество десятых, следует цифра 6, которая больше 5. Поэтому заменяем нулями все цифры после цифры 9 и прибавляем к полученному числу 0,1, получим $15{,}900 + 0{,}1 = 16{,}000 = 16$. Это число и будет результатом округления.

Чтобы отметить, что число 16 является результатом округления числа 15,962 до десятых, записывают $15{,}962 \approx 16{,}0$

Стандартным видом положительного числа a является число, равное числу a и имеющее вид: $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа** a, число a_0 — **мантиссой** ($5027{,}84 = 5{,}02784 \cdot 10^3$).

На практике точное значение величины x нередко заменяют на некоторое её приближённое значение a.

Абсолютной погрешностью (погрешностью) при этом называют модуль разности между точным значением величины x и её приближённым значением a, обозначается: $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|$.

Относительной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|$ к модулю приближённого значения. Относительную погрешность выражают в процентах: $\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \mathbf{100\,\%}$.

Если a — приближённое значение числа x и $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leqslant \boldsymbol{h}$ $(h > 0)$, то $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{h} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}$.

Последнее двойное неравенство можно записать в виде: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{h}$.

Если число x удовлетворяет неравенствам $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$, то число $\boldsymbol{a}$ называют приближённым значением числа x **с недостатком**, а число $\boldsymbol{b}$ — приближённым значением числа x **с избытком**.

Вариант с решениями

1. Округлите число 57 497 до сотен.

1) 58 000 2) 58 497 3) 57 500 4) 60 000

Решение. При округлении числа 57 497 до сотен получим 57 500. Действительно, за цифрой 4, обозначающей разряд сотен, следует цифра 9. Следовательно, 4 нужно увеличить на 1, а все цифры, стоящие правее данного разряда, заменить нулями. Из предложенных ответов верным является 3-й.

Ответ: 3.

2. Диаметр планеты Юпитер приближённо равен 142 600 км. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}426 \cdot 10^4$ км 2) $1{,}426 \cdot 10^2$ км
3) $1{,}426 \cdot 10^5$ км 4) $1{,}426 \cdot 10^6$ км

Решение. $142\,600 = 1,426 \cdot 10^5$. Из предложенных ответов верным является 3-й.

Ответ: 3.

3. Толщину одной и той же детали измерили штангенциркулем и микрометром. Получили соответственно результаты: 2,5 мм; 2,48 мм. Какой из полученных результатов даёт наименьшую относительную погрешность, если действительная толщина детали равна 2,3 мм? Ответ дайте в миллиметрах.

Решение. Найдём относительную погрешность для каждого из полученных результатов:

1) при измерении штангенциркулем: $|x-a| = |2{,}3 - 2{,}5| = 0{,}2$, $\frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}2}{2{,}5} \cdot 100\,\% = 8\,\%$;

2) при измерении микрометром: $|x-a| = |2{,}3 - 2{,}48| = 0{,}18$,
$\frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}18}{2{,}48} \cdot 100\,\% = \frac{1800}{248}\,\% < 8\,\%$;

Из чисел 8 и $\frac{1800}{248}$ наименьшее — $\frac{1800}{248}$. Следовательно, наименьшая относительная погрешность будет, если в качестве результата взять число 2,48 мм.

Ответ: 2,48.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$.

Решение. $2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}001 + 7 \cdot 0{,}0001 = 0{,}2 + 0{,}003 + 0{,}0007 = 0{,}2037$.

Ответ: 0,2037.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 14{,}7$ и $b = 14{,}724$.

1) $\frac{8}{49}\,\%$ 2) $-0{,}024\,\%$ 3) $0{,}24\,\%$ 4) $-\frac{8}{49}\,\%$

Решение. $\frac{|b-a|}{|a|} \cdot 100\,\% = \frac{|14{,}724 - 14{,}7|}{14{,}7} \cdot 100\,\% = \frac{2{,}4}{14{,}7}\,\% = \frac{8}{49}\,\%$.
Из предложенных ответов верным является 1-й.

Ответ: 1.

6. Температура t воздуха в холодильной камере 7,5 $°C$. В качестве приближённого значения взято число 7 $°C$. Найдите абсолютную погрешность приближения. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Решение. $|7{,}5 - 7| = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

7. Пусть $x = 12{,}7 \pm 0{,}2$.

Из чисел А = 12,91 Б = 12,95 В = 12,501 Г = 12,52 выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Б 3) Б, В 4) В, Г

Решение. Запись $x = 12{,}7 \pm 0{,}2$ означает, что x равно 12,7 с точностью до 0,2, то есть $12{,}7 - 0{,}2 \leqslant x \leqslant 12{,}7 + 0{,}2$. Отсюда $12{,}5 \leqslant x \leqslant 12{,}9$. Полученному неравенству удовлетворяют только числа В и Г. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Укажите приближённое значение числа b, равное среднему арифметическому его приближённых значений с недостатком и с избытком, если $5{,}8 \leqslant b \leqslant 6{,}4$.

Решение. Числа 5,8 и 6,4 являются приближёнными значениями числа b с недостатком и с избытком соответственно. Среднее арифметическое этих чисел равно $\dfrac{5{,}8 + 6{,}4}{2} = 6{,}1$.

Ответ: 6,1.

Вариант № 1

1. Округлите число 3210,2878 до тысячных.

1) 3000 2) 3210,3 3) 3210,29 4) 3210,288

Ответ: ________________.

2. Площадь бассейна реки Амур составляет 1855 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}855 \cdot 10^3$ км^2 2) $1{,}855 \cdot 10^4$ км^2

3) $1{,}855 \cdot 10^5$ км^2 4) $1{,}855 \cdot 10^6$ км^2

Ответ: ________________.

3. Мальчик и девочка, проживающие в одном городе, на вопрос о том, сколько километров составляет расстояние между их городом и Москвой, ответили соответственно: «675 км» и «630 км». Какой из полученных ответов даёт наименьшую относительную погрешность, если действительное расстояние между городами 650 км? Ответ дайте в километрах.

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: ________________.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 15{,}3$; $b = 15{,}347$.

1) $-\frac{47}{153}\,\%$ 2) $0{,}47\,\%$ 3) $-0{,}047\,\%$ 4) $\frac{47}{153}\,\%$

Ответ: ________________.

6. Длина отрезка l равна 15 см. В качестве приближённого значения длины взято число 15,5 см. Найдите абсолютную погрешность приближения. Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: ________________.

7. Пусть $x = 8,7 \pm 0,4$.

Из чисел А) 8,223 Б) 8,341 В) 9,023 Г) 9,2

выберите возможные значения x.

1) А, В 2) Б, В 3) Б, Г 4) В, Г

Ответ: ________________.

8. Укажите приближённое значение числа m, равное среднему арифметическому его приближённых значений с недостатком и с избытком, если $3{,}9 \leqslant m \leqslant 4{,}3$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Округлите число 4218,9 до десятков.

1) 4219 2) 4220 3) 42 000 4) 4000

Ответ: ________________.

2. Запишите число 0,000 218 в стандартном виде.

1) $21{,}8 \cdot 10^{-5}$ 2) $0{,}218 \cdot 10^{-3}$ 3) $2{,}18 \cdot 10^{-4}$ 4) $218 \cdot 10^{-6}$

Ответ: ________________.

3. При измерении температуры в 14 часов дня двумя термометрами были получены значения $15{,}8°C$ и $15{,}3°C$. Какой из полученных результатов измерения даёт наименьшую относительную погрешность, если известно, что действительное значение температуры в это время было $15{,}5°C$. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ________________ .

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: ________________ .

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 27{,}4$ и $b = 27{,}418$.

1) $-0{,}18\,\%$ 2) $\frac{9}{137}\,\%$ 3) $-\frac{9}{137}\,\%$ 4) $0{,}18\,\%$

Ответ: ________________ .

6. Округлите число a до сотых и найдите абсолютную погрешность при этом округлении, если $a = 3{,}755$.

Ответ: ________________ .

7. Пусть $z = 9{,}2 \pm 0{,}3$.

Из чисел А $= 9{,}3$ Б $= 9{,}7$ В $= 8{,}96$ Г $= 8{,}17$
выберите возможные значения z.

1) Б, Г 2) А, Б 3) А, Г 4) А, В

Ответ: ________________ .

8. Укажите приближённое значение числа k, равное среднему арифметическому его приближённых значений с недостатком и с избытком, если $4{,}1 \leqslant k \leqslant 4{,}3$.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Округлите число 12 346 до сотен.

1) 10 000 2) 12 000 3) 12 300 4) 12 350

Ответ: ________________.

2. Стандартный вид числа 0,000 801 имеет представление:

1) $8{,}01 \cdot 10^{-4}$ 2) $0{,}801 \cdot 10^{-3}$ 3) $0{,}0801 \cdot 10^{-2}$ 4) $801 \cdot 10^{-6}$

Ответ: ________________.

3. Марина на уроке географии сказала: «Расстояние от Простоквашино до Грибного — 1796 м», а Маша её поправила: «Нет, расстояние между этими населёнными пунктами — 1801 м». Какой ответ даёт наименьшую относительную погрешность, если действительное расстояние составляет — 1799 м? Ответ дайте в метрах.

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$.

Ответ: ________________.

5. Запишите десятичную дробь, равную $\frac{27}{4}$. Ответ округлите до десятых и найдите относительную погрешность при этом округлении в процентах.

1) $\frac{20}{27}$ 2) $\frac{25}{34}$ 3) $-\frac{25}{34}$ 4) 0,74

Ответ: ________________.

6. Масса макарон в пакете — 0,8 кг. В качестве приближённого значения взята масса 0,9 кг. Найдите абсолютную погрешность в граммах при этом приближённом значении.

Ответ: ________________.

7. Укажите все значения, которые может принимать число x, если его приближённое значение равно 7,13, а абсолютная погрешность равна 0,04.

1) $-7{,}09 \leqslant x \leqslant 7{,}09$ 2) $7{,}09 \leqslant x \leqslant 7{,}17$
3) $-7{,}17 \leqslant x \leqslant 7{,}17$ 4) $-7{,}13 \leqslant x \leqslant 7{,}13$

Ответ: ________________.

8. Найдите среднее арифметическое двух соседних натуральных чисел, между которыми заключено число $4\sqrt{13}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Округлите число 283,657 до сотых.

1) 283,65 2) 283,6 3) 283,66 4) 283,67

Ответ: ________________.

2. Общее количество биомассы Мирового океана оценивается в 35 миллиардов тонн. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $35 \cdot 10^6$ т 2) $35 \cdot 10^9$ т 3) $3{,}5 \cdot 10^8$ т 4) $3{,}5 \cdot 10^{10}$ т

Ответ: ________________.

3. Время бега на дистанции 100 метров победителя школьных соревнований замеряли двумя ручными секундомерами, которые показали время 11,59 с и 11,54 с. Какой из указанных результатов даёт наименьшую относительную погрешность, если действительное время составляло 11,56. Ответ дайте в секундах.

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$.

Ответ: ________________.

5. Округлите число 2,53 до десятых. Найдите относительную погрешность при этом округлении в процентах.

1) 12 2) 1,2 3) 2 4) 10

Ответ: ________________.

6. При взвешивании одной упаковки сливочного масла на электронных рыночных весах была показана масса 1,07 кг. Хотя действительная масса была 0,98 кг. Укажите в граммах абсолютную погрешность при этом взвешивании.

Ответ: ________________.

7. На рулетке написано: $l = 5{,}2 \pm 0{,}015$ м. Как это условие можно записать в виде двойного неравенства?

1) $4{,}995 \leqslant l \leqslant 5{,}215$ 2) $5{,}185 \leqslant l \leqslant 5{,}315$
3) $5{,}195 \leqslant l \leqslant 5{,}215$ 4) $5{,}185 \leqslant l \leqslant 5{,}215$

Ответ: ________________.

8. Найдите среднее арифметическое двух соседних натуральных чисел, между которыми заключено число $5\sqrt{12}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Округлите число 253,355 до десятых.

1) 253,4 2) 253,3 3) 253,25 4) 253,26

Ответ: ________________.

2. Расстояние от планеты Земля до Солнца равно 149,6 млн км. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}496 \cdot 10^6$ км 2) $1{,}496 \cdot 10^7$ км
3) $1{,}496 \cdot 10^8$ км 4) $1{,}496 \cdot 10^9$ км

Ответ: ________________.

3. Велосипедист проехал дистанцию 47 км со средней скоростью 9 км/ч. За сколько минут велосипедист преодолел эту дистанцию? Ответ округлите до целых.

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$.

Ответ: ________________.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 230$, $b = 234{,}5$.

1) $\frac{2}{9}\,\%$ 2) $-\frac{45}{23}\,\%$ 3) $\frac{45}{23}\,\%$ 4) $-4{,}5\,\%$

Ответ: ________________.

6. Абсолютная погрешность при измерении роста человека с помощью вертикальной линейки не более 2 см. Рост Владимира при таком измерении оказался равным 1,67 м. Укажите, какой рост не может быть у Владимира.

1) 1,68 м 2) 1,69 м 3) 1,7 м 4) 1,66 м

Ответ: ________________.

7. Пусть $x = 24{,}71 \pm 1{,}2$.

Из чисел А = 24,73, Б = 26,71, В = 23,21, Г = 25,91 выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Г 3) Б, В 4) В, Г

Ответ: ________________.

8. Запишите число $\frac{124}{99}$ в виде десятичной дроби. Ответ округлите до десятых.

1) 1,2 2) 0,12 3) 1,3 4) 1,4

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Округлите число 82,376 до десятых.

1) 80 2) 82,3 3) 82,4 4) 82,38

Ответ: ________________.

2. Площадь квартиры, подаренной молодожёнам, составляет 65 м^2. Укажите её площадь в км^2 и в ответе её численное значение запишите в стандартном виде.

1) $0{,}0065 \cdot 10^2$ 2) $65 \cdot 10^{-4}$ 3) $6{,}5 \cdot 10^{-5}$ 4) $6{,}5 \cdot 10^{-4}$

Ответ: ________________.

3. Велосипедист проехал дистанцию 47 км со средней скоростью 12 км/ч. За сколько минут велосипедист преодолел эту дистанцию? Ответ округлите до десятков.

Ответ: ________________.

4. Запишите десятичную дробь, равную сумме $8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$.

Ответ: ________________.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 1{,}6$, $b = 1{,}625$.

1) 2 % 2) 1,5 % 3) 1,5625 % 4) 3 %

Ответ: ________________.

6. Стоимость автомобиля равна 200 000 руб. $\pm$ 50 000 руб. в зависимости от комплектации. Какую цену не может заплатить покупатель при указанном условии?

1) 230 000 2) 200 000 3) 280 000 4) 180 000

Ответ: ________________.

7. Пусть $x = -24{,}71 \pm 1{,}2$.
Из чисел
А $= -24{,}72$; Б $= -26{,}01$; В $= -23{,}41$; Г $= -23{,}51$
выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Г 3) Б, В 4) В, Г

Ответ: ________________.

8. Запишите число $\frac{134}{99}$ в виде десятичной дроби. Ответ округлите до десятых.

1) 1,2 2) 1,12 3) 1,3 4) 1,4

Ответ: ________________.

§ 2. Алгебра. Отношения и пропорции

Основные сведения

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое: $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$; $\boldsymbol{a : b}$; $\boldsymbol{\frac{5}{8}}$; $\boldsymbol{5 : 8}$.

Оно показывает, какую часть число a составляет от b.

Если отношение $\frac{a}{b}$ двух положительных чисел a и b больше 1, то оно показывает, во сколько раз число a больше b (или во сколько раз число b меньше a).

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения их отношения надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Число b называют **обратным** к числу a, если произведение b на a равно 1. Если b обратно к a, то и наоборот, a обратно к b, а числа a и b называют **взаимно обратными**.

Отношение $\frac{b}{a}$ является обратным к отношению $\frac{a}{b}$.

Пару отношений, соединённых знаком равенства, называют **пропорцией**:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \frac{5}{8} = \frac{10}{16}}.$$

.

Пропорцию $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ называют **верной**, если равны числа $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ и $\boldsymbol{\frac{c}{d}}$:

$$\boldsymbol{\frac{12}{18} = \frac{4}{6}; \frac{26}{13} = \frac{4}{2}}.$$

В пропорции $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ (или $\boldsymbol{a : b = c : d}$) числа a и d называют **крайними**, а числа b и c — **средними** её членами.

Основное свойство пропорции. Пропорция

$$\boldsymbol{a : b = c : d}$$

верна, если выполняется равенство произведений крайних и средних членов пропорции:

$$\boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c.}$$

Если в верной пропорции поменять местами средние или крайние члены, то получившиеся новые пропорции верны.

Задача. Отрезок длиной 30 см разделили на три части, длины которых относятся, как **3 : 5 : 7**. Найдите длины полученных отрезков в сантиметрах.

Решение. Пусть l_1, l_2, l_3 — длины первого, второго и третьего отрезков. Тогда по условию $\frac{l_1}{l_2} = \frac{3}{5}, \frac{l_2}{l_3} = \frac{5}{7}$.

Отсюда $\frac{l_1}{l_3} = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{l_2}{l_3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}, \frac{l_1}{l_3} = \frac{3}{7}$.

Поэтому $l_2 = \frac{5 \cdot l_1}{3}, l_3 = \frac{7 \cdot l_1}{3}$. Пусть $\frac{l_1}{3} = t$, тогда $l_1 = 3t, l_2 = 5t, l_3 = 7t$.

Согласно условию получаем уравнение: $3t + 5t + 7t = 30, t = 2$. Значит, $l_1 = 6, l_2 = 10, l_3 = 14$.

Ответ: 6; 10; 14.

Вообще, если числа $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$ относятся как $\boldsymbol{m : n : p}$, то $\boldsymbol{a_1 = m \cdot t, a_2 = n \cdot t, a_3 = p \cdot t}$, где $\boldsymbol{t}$ — некоторое число.

Вариант с решениями

1. Найдите число, обратное к числу $\frac{7}{9}$.

1) $-\frac{7}{9}$ 2) $1\frac{2}{7}$ 3) 0,8 4) 1,4

Решение. Числом, обратным к $\frac{7}{9}$, является $\frac{9}{7}$, а $\frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Масса печенья 15 кг, а масса упаковки 600 г. Найдите отношение массы печенья к массе упаковки.

1) $\frac{15}{600}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{1}{25}$ 4) 25

Решение. 600 г = 0,6 кг. Отношение массы печенья к массе упаковки равно $\frac{15}{0{,}6} = \frac{150}{6} = 25$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Из каких указанных ниже отношений можно составить верную пропорцию?

А = 4,8 : 0,9; Б = 1,6 : 0,3; В = 0,48 : 0,9; Г = 25 : 12

1) А и Б 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

Решение. Найдём числа, равные заданным отношениям:

$$А = \frac{4{,}8}{0{,}9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$Б = \frac{1{,}6}{0{,}3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3};$$

$$В = \frac{0{,}48}{0{,}9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15};$$

$$Г = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.$$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

4. Укажите, какая из указанных ниже пропорций получается из верной пропорции 20 : 15 = 16 : 12 переменой местами средних или крайних членов.

1) 15 : 20 = 16 : 12 2) 20 : 12 = 15 : 16
3) 12 : 16 = 15 : 20 4) 20 : 16 = 12 : 15

Решение. Меняя местами крайние или средние члены заданной пропорции, получим ещё три верные пропорции: 12 : 15 = 16 : 20, 20 : 16 = 15 : 12, 12 : 16 = 15 : 20. Только последняя из них — 12 : 16 = 15 : 20 — совпадает с пропорцией, указанной под номером 3.

Ответ: 3.

5. Найдите неизвестный член верной пропорции $\frac{0{,}9}{5} = \frac{1{,}8}{x}$.

Решение. По правилу нахождения крайнего члена пропорции $x = \frac{1{,}8 \cdot 5}{0{,}9} = 10$.

Ответ: 10.

6. На пошив 9 рубашек ушло 18,9 м ткани. Сколько метров такой же ткани потребуется на пошив 15 рубашек?

1) 27 2) 35 3) 31,5 4) 30

Решение. Пусть на пошив 15 рубашек потребуется x м ткани. Тогда, согласно условию,

9 рубашек — 18,9 м

15 рубашек — x м

Так как расход ткани **прямо пропорционален** числу рубашек, то верна пропорция: $\frac{9}{15} = \frac{18{,}9}{x}$

Отсюда по основному свойству верной пропорции получаем:
$9 \cdot x = 18{,}9 \cdot 15$, $x = \frac{15 \cdot 18{,}9}{9} = 31{,}5$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. С помощью 6 одинаковых труб бассейн заполняется водой за 32 минуты. За сколько минут можно заполнить бассейн с помощью 8 таких труб?

1) 36 2) 42 3) 64 4) 24

Решение. Пусть с помощью 8 труб бассейн можно заполнить за x минут. Тогда, согласно условию,

6 труб — 32 мин

8 труб — x мин

Так как время заполнения бассейна **обратно пропорционально** количеству труб, то верна пропорция: $\frac{6}{8} = \frac{x}{32}$

Отсюда по основному свойству верной пропорции получаем:
$8 \cdot x = 6 \cdot 32$, $x = \frac{6 \cdot 32}{8} = 24$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Угол в 140° разделён на 4 части, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 4 : 5. Найдите градусную меру меньшего из полученных углов.

1) 10 2) 20 3) 70 4) 120

Решение. Согласно условию градусные меры частей, на которые разделён угол, равны соответственно $2x$, $3x$, $4x$ и $5x$, где x — некоторое число. Следовательно, $2x + 3x + 4x + 5x = 140$; $14x = 140$; $x = 10$. Градусная мера меньшего из полученных углов равна $2 \cdot 10 = 20$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

Вариант № 1

1. Найдите число, обратное к числу $\frac{5}{4}$.

1) $1\frac{1}{4}$ 2) $-\frac{4}{5}$ 3) 0,8 4) $1\frac{1}{5}$

Ответ: ________________.

2. Масса конфет равна 2 кг, а масса печенья — 800 г. Найдите отношение массы печенья к массе конфет.

1) $\frac{800}{2}$ 2) $\frac{2}{800}$ 3) $\frac{20}{8}$ 4) $\frac{2}{5}$

Ответ: ________________.

3. Пользуясь основным свойством пропорции, найдите, из каких отношений:

А) 1,2 : 10; Б) 8,4 : 14; В) $0{,}75 : 6\frac{1}{4}$; Г) 8,4 : 1,4 — можно составить верную пропорцию?

1) А и Г 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

Ответ: ________________.

4. Укажите пропорцию, которая получается из верной пропорции $\frac{4}{a} = \frac{5}{b}$ перестановкой средних или крайних членов.

1) $\frac{b}{a} = \frac{4}{5}$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ 3) $\frac{b}{a} = \frac{9}{5}$ 4) $\frac{b}{a} = \frac{5}{9}$

Ответ: ________________.

5. Известно, что $\frac{4{,}5}{x} = \frac{3}{5}$, тогда x равен

Ответ: ________________.

6. Из 13,2 м шёлка сшили 4 сарафана. Сколько таких сарафанов сошьют из 23,1 м такой ткани?

Ответ: ________________ .

7. Для строительства стадиона 5 бульдозеров расчистили площадку за 2 часа 20 минут. За сколько минут 7 таких бульдозеров расчистят такую же площадку?

Ответ: ________________ .

8. Известно, что градусные меры углов A, B, C, D четырёхугольника $ABCD$ относятся как $1:2:3:4$ соответственно. Найдите градусную меру угла C.

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Найдите число, обратное к числу $-\frac{3}{5}$.

1) $\frac{3}{5}$ 2) $-\frac{12}{5}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{5}{3}$

Ответ: ________________ .

2. Масса колбасы равна 4 кг, а масса сосисок — 600 г. Найдите отношение массы сосисок к массе колбасы.

1) $\frac{2000}{3}$ 2) $\frac{3}{20}$ 3) $\frac{20}{3}$ 4) $\frac{3}{2000}$

Ответ: ________________ .

3. Пользуясь основным свойством пропорции, найдите, из каких отношений:

А) $\frac{2}{3}$ и $\frac{14}{41}$ Б) $2:3$ и $14:42$ В) $4:3$ и $64:12$ Г) $5:4$ и $25:20$ —

можно составить пропорцию?

1) А 2) Б 3) В 4) Г

Ответ: ________________ .

4. Укажите пропорцию, которая получается из верной пропорции $\frac{0{,}8}{p} = \frac{0{,}12}{m}$ перестановкой средних или крайних членов.

1) $\frac{m}{p} = \frac{12}{125}$ 2) $\frac{m}{p} = \frac{125}{12}$ 3) $\frac{m}{p} = \frac{3}{20}$ 4) $\frac{m}{p} = \frac{20}{3}$

Ответ: ________________ .

5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{0,3}{x} = \frac{21}{42}$.

Ответ: ________________.

6. Из 24 метров ткани сшили 6 костюмов. Сколько метров такой же ткани потребуется на пошив 5 костюмов?

Ответ: ________________.

7. Для переноса стульев из класса по коридору в актовый зал 6 мальчикам 5-го класса потребовалось 1 час 12 мин. Сколько минут потребуется 9 мальчикам этого класса для переноса всех стульев обратно?

Ответ: ________________.

8. Известно, что величины углов A, B, C треугольника ABC относятся как 6 : 5 : 7 соответственно. Найдите градусную меру угла A.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите, во сколько раз $\frac{28}{9}$ больше $\frac{7}{4}$.

1) $\frac{9}{16}$ 2) $\frac{16}{9}$ 3) $\frac{7}{9}$ 4) $\frac{9}{7}$

Ответ: ________________.

2. Под посадку подсолнечника выделили участок земли площадью 7,2 гектара, а под посадку льна — 54 000 квадратных метров. Во сколько раз площадь, выделенная под подсолнечник, больше площади, выделенной под лён?

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{5}{9}$ 4) $\frac{4}{3}$

Ответ: ________________.

3. Укажите равенство, которое является верной пропорцией.

1) 8,8 : 2,2 = 17,6 : 4,1 2) 8,8 : 2,1 = 17,6 : 4,1

3) 8,8 : 2,2 = 17,6 : 4,5 4) 8,8 : 2,1 = 17,6 : 4,2

Ответ: ________________.

4. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

Ответ: ________________.

5. Неизвестный член пропорции $3{,}6 : x = \frac{1}{5} : \frac{4}{9}$ равен

1) 18 2) 0,32 3) 8 4) другой ответ

Ответ: ________________ .

6. Масштаб карты 1 : 200 000. Чему равно расстояние (в км) между школой и бассейном, если на карте оно составляет 5,2 см?

Ответ: ________________ .

7. Одну бочку виноградного сока пятью соковыжималками получают за x часов. Сколько часов понадобится для получения такой же бочки виноградного сока тремя соковыжималками?

1) $\frac{3x}{5}$ 2) $\frac{3}{5x}$ 3) $\frac{5x}{3}$ 4) $\frac{5}{3x}$

Ответ: ________________ .

8. Для пайки изделий из жести применяют сплав, состоящий из свинца и олова в отношении 2 : 5 соответственно. Сколько граммов олова понадобится для приготовления 350 г сплава?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Найдите, во сколько раз $\frac{15}{7}$ больше $\frac{3}{14}$.

1) $\frac{1}{10}$ 2) 8 3) 10 4) $\frac{9}{7}$

Ответ: ________________ .

2. В магазине «Магнит» 1 кг сыра стоит 461 рубль 10 копеек. Во время акции он стал стоить 384 рубля 25 копеек. Во сколько раз меньше стала цена 1 кг сыра во время акции, чем до акции?

1) 1,5 2) 1,4 3) 1,3 4) 1,2

Ответ: ________________ .

3. Укажите равенство, которое является верной пропорцией.

1) $1{,}47 : 0{,}21 = 0{,}84 : 0{,}11$ 2) $1{,}46 : 0{,}21 = 0{,}84 : 0{,}12$

3) $1{,}47 : 0{,}21 = 0{,}84 : 0{,}12$ 4) $1{,}46 : 0{,}21 = 0{,}84 : 0{,}2$

Ответ: ________________ .

4. Масса одного ананаса на $\frac{3}{7}$ кг тяжелее $\frac{5}{7}$ этого же ананаса. Какова масса этого ананаса (в кг)?

Ответ: ________________ .

5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{7}{13} = \frac{x}{39}$.

1) $\frac{91}{39}$ 2) 20 3) $\frac{507}{7}$ 4) 21

6. Масштаб карты 1 : 200 000. Чему равно расстояние между городами (в км), если на карте оно составляет 8 см?

Ответ: ________________.

7. Четыре автопогрузчика загружают рефрижератор за x часов. За сколько часов загрузят этот рефрижератор 3 таких же автопогрузчика?

1) $\frac{3x}{4}$ 2) $\frac{3}{5x}$ 3) $\frac{4x}{3}$ 4) $\frac{5}{3x}$

Ответ: ________________.

8. Тетради в количестве 126 штук разделили между двумя классами в отношении 10 : 11. Сколько тетрадей составляет бóльшая часть?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите число, обратное к отношению двух чисел $\frac{21}{39}$ и $\frac{7}{4}$.

1) $\frac{147}{156}$ 2) 3,45 3) $\frac{121}{169}$ 4) 3,25

Ответ: ________________.

2. Ширина комнаты — 3,2 м, а длина — 480 см. Найдите отношение ширины комнаты к её длине.

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{384}{25}$ 4) $\frac{25}{384}$

Ответ: ________________.

3. Выберите пару отношений, из которых можно составить верную пропорцию.

1) $\frac{15}{3}$ и $\frac{5}{0{,}3}$ 2) $\frac{14}{4}$ и $\frac{0{,}7}{0{,}2}$ 3) $\frac{11}{10}$ и $\frac{10}{11}$ 4) $\frac{2{,}3}{4{,}6}$ и $\frac{1}{4}$

Ответ: ________________.

4. Выберите верное отношение b к a, если $1{,}5b = 3{,}2a$.

1) $\frac{b}{a} = \frac{24}{5}$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{5}{24}$ 3) $\frac{b}{a} = \frac{1{,}5}{3{,}2}$ 4) $\frac{b}{a} = \frac{3{,}2}{1{,}5}$

Ответ: ________________.

5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{5,4}{x}=\frac{2,7}{2,1}$, используя её основное свойство.

Ответ: ________________.

6. 12 одинаковых станков выполняют заказ за 17 часов. За сколько часов выполнят заказ 34 таких станка?

Ответ: ________________.

7. 18 одинаковых деталей весят 286 кг. Сколько кг весят 45 таких же деталей?

Ответ: ________________.

8. Для участия в соревнованиях класс разбили на четыре равные команды. При этом в первую команду попали только девочки, во вторую и третью — только по одному мальчику (остальные девочки), а в четвёртую — две девочки (остальные мальчики). Найдите, какую часть составляют девочки от количества всех учеников в классе.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите число, обратное отношению числа (-20) к числу 7.

1) $2\frac{6}{7}$ 2) $-\frac{20}{7}$ 3) $-0,35$ 4) $\frac{20}{7}$

Ответ: ________________.

2. Гитара стоит 6 тысяч рублей, а комплект струн — 300 рублей. Найдите отношение стоимости струн к стоимости гитары.

1) $\frac{300}{6}$ 2) $\frac{6}{300}$ 3) $\frac{20}{3}$ 4) $\frac{1}{20}$

Ответ: ________________.

3. Выберите пару отношений, из которых можно составить верную пропорцию.

1) $\frac{16}{4}$ и $\frac{10}{2}$ 2) $\frac{7}{2}$ и $\frac{35}{20}$ 3) $\frac{11}{10}$ и $\frac{121}{110}$ 4) $\frac{7}{9}$ и $\frac{6}{3}$

Ответ: ________________.

4. Выберите верное отношение b к a, если $\frac{1,3}{a}=\frac{1,8}{b}$.

1) $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ 2) $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$ 3) $\frac{b}{a}=\frac{18}{13}$ 4) $\frac{b}{a}=\frac{1,3}{1,8}$

Ответ: ________________.

5. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{x}{1,3} = \frac{1,8}{2,6}$, используя её основное свойство.

Ответ: ________________ .

6. Две трубы наполняют бассейн за 5,3 часа. За сколько часов наполнят бассейн 5 таких труб?

Ответ: ________________ .

7. В овощном ларьке покупатель купил на 50 рублей 3,2 кг баклажанов. Сколько кг баклажанов он смог бы купить на 65 рублей?

Ответ: ________________ .

8. Для поездки всех учеников начальных классов в дельфинарий понадобилось 4 автобуса одинаковой вместимости. При этом все сидячие места были заняты детьми. В первом и третьем автобусах было ровно по одному мальчику, а во втором — ровно 2 мальчика. Найдите отношение числа девочек к числу всех учеников начальных классов, если в четвёртом автобусе было ровно 4 девочки.

Ответ: ________________ .

§ 3. Алгебра. Проценты

Основные сведения

1 % от числа a — это $\frac{1}{100}$ **часть числа** a или $\frac{a}{100}$.

p **% от числа** a — это $\frac{p}{100}$ **частей числа** a или $p \cdot \frac{a}{100} = \frac{p \cdot a}{100}$.

15 % от числа 20 $= \frac{15 \cdot 20}{100} = 3$.

Чтобы найти сколько процентов от числа a составляет число b, полагаем, что числу a соответствует **100 %**, а числу b соответствует x %:

$$a \ — \ 100\,\%,$$

$$b \ — \ x\,\%.$$

Тогда верно равенство $\frac{a}{b} = \frac{100}{x}$, откуда

$$x = \frac{b \cdot 100}{a}.$$

Наоборот, чтобы найти число a, если известно, что p **% от числа** a равно b, рассуждаем аналогично:

$$p\,\% \ — \ b,$$

$$100\,\% \ — \ a.$$

Тогда

$$a = \frac{b \cdot 100}{p}.$$

При увеличении числа a на $p\%$ **от числа** a, надо число a умножить на число $\left(1+\frac{p}{100}\right)$:

$$a+\frac{p\cdot a}{100}=a\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Соответственно, при уменьшении числа a на $p\%$ **от числа** a, надо число a умножить на число $\left(1-\frac{p}{100}\right)$:

$$a-\frac{p\cdot a}{100}=a\left(1-\frac{p}{100}\right).$$

Если исходная сумма S увеличивается в конце каждого из n $(n\in N)$ периодов на $p\%$ **от числа** S, то сумма S_n, которая получится по истечении n периодов, находится по формуле:

$$S_n=S+\underbrace{\frac{p\cdot S}{100}+\frac{p\cdot S}{100}+\ldots+\frac{p\cdot S}{100}}_{n\text{ слагаемых}}=S\left(1+\frac{np}{100}\right),$$

$$S_n=S\left(1+\frac{np}{100}\right).$$

Она называется **формулой простого процентного роста** (формулой простых процентов).

Если же исходная сумма S увеличивается в конце каждого периода на $p\%$ от суммы, имеющейся в его начале, то сумма S_n, которая получится по истечении n периодов $n(n\in N)$, находится по формуле:

$$S_n=S\cdot\underbrace{\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)}_{n\text{ сомножителей}}=S\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

$$S_n=S\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Она называется **формулой сложного процентного роста** (формулой сложных процентов).

Вариант с решениями

1. Найдите, сколько процентов составляет число 15 от 125.

1) 25 2) 7 3) 15 4) 12

Решение. Пусть число 15 составляет x процентов от числа 125. Тогда

$$15 \quad — \quad x\,\%,$$

$$125 \quad — \quad 100\,\%.$$

Из пропорции $15 : 125 = x : 100$ находим $x = \dfrac{15 \cdot 100}{125} = 12$. Число 15 от числа 125 составляет 12 %. Из предложенных ответов верным является 4)[1].

Ответ: 4.

2. Найдите 35 % от числа 80.

1) $\dfrac{16}{7}$ 2) $\dfrac{7}{16}$ 3) 28 4) 3,5

Решение. 35 % от числа 80 равно $\dfrac{35 \cdot 80}{100} = 0{,}35 \cdot 80 = 28$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. В доме 160 двухкомнатных и 240 трёхкомнатных квартир. Других квартир нет. Сколько процентов от всех квартир составляют трёхкомнатные?

1) 5 2) 60 3) 63,5 4) 40

Решение. Всего в доме квартир $160 + 240 = 400$. Тогда количество трёхкомнатных квартир составляет $\dfrac{240 \cdot 100}{400}\,\% = 60\,\%$ от числа всех квартир. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

[1]Здесь и далее при решении задач на проценты можно пользоваться формулами, приведёнными в основных сведениях к этому параграфу.

4. Когда рабочий сделал 2484 детали, то оказалось, что он выполнил 46 % месячной нормы. Сколько деталей составляет месячная норма рабочего?

Решение. Пусть месячная норма составляет x деталей. Тогда

$$\begin{array}{lcl} 2484 \text{ деталей} & — & 46\,\%, \\ x \text{ деталей} & — & 100\,\%. \end{array}$$

Из пропорции $2484 : x = 46 : 100$ находим $x = \dfrac{2484 \cdot 100}{46} = 5400$; 5400 деталей — месячная норма рабочего.

Ответ: 5400.

5. Площадь поля составляет 84 га. В первый день вспахали 21 га. Сколько процентов поля не вспахали?

Решение. Согласно условию, невспаханными остались $84 - 21 = 63$ (га) поля. Пусть эта величина составляет x % поля. Тогда

$$\begin{array}{lcl} 84 \text{ га} & — & 100\,\%, \\ 63 \text{ га} & — & x\,\%. \end{array}$$

Из пропорции $84 : 63 = 100 : x$ находим $x = \dfrac{63 \cdot 100}{84} = 75$. Следовательно, 75 % поля не вспахали.

Ответ: 75.

6. Смешали два раствора соли по 250 г каждый. Концентрация первого раствора — 12 %, второго — 24 %. Какова концентрация полученного раствора?

Решение. Концентрация первого раствора соли массой 250 г составляет 12 %. То есть соли в этом растворе $\dfrac{250 \cdot 12}{100} = 30$ (г).

Концентрация второго раствора соли массой 250 г составляет 24 %. Это означает, что соли в этом растворе $\dfrac{250 \cdot 24}{100} = 60$ (г).

После того как смешали два раствора, в 500 г нового раствора стало содержаться $30 + 60 = 90$ (г) соли, что составляет $\dfrac{90 \cdot 100}{500} = 18$ (%).

Ответ: 18.

7. Частным лицам принадлежит 25 % акций предприятия, остальные акции принадлежат государству. Общая прибыль предприятия после выплаты налогов за год составила 7,5 млн рублей. Какая сумма (в рублях) из этой прибыли должна пойти на выплату государству?

Решение. Государству принадлежит $100 - 25 = 75\,\%$ акций предприятия, значит, на выплату государству пойдёт сумма, равная 75 % от общей прибыли предприятия. Найдём 75 % от 7,5 млн рублей.
$0{,}75 \cdot 7\,500\,000 = 5\,625\,000$ рублей.

Ответ: 5 625 000.

8. Клиент открыл в банке счёт и положил на срочный вклад 500 тыс. рублей. Определите сумму вклада (в тысячах рублей) через 2 года, если банк начисляет сложные проценты по ставке 30 % годовых и дополнительных вложений не поступало.

Решение. *1-й способ.* Сумма в 500 тыс. рублей, положенная на банковский счёт под 30 % годовых, через год возрастёт до величины $500 \cdot 1{,}3 = 650$ (тыс. рублей). Так как банк начисляет сложные проценты, то за второй год 30 % будет начисляться на сумму 650 тыс. рублей и, следовательно, сумма возрастёт до $650 \cdot 1{,}3 = 845$ (тыс. рублей).

2-й способ. По формуле сложных процентов (см. «Основные сведения к параграфу») получаем: $S_2 = 500\left(1+\frac{30}{100}\right)^2 = 500\cdot\frac{169}{100} = 845$ (тыс. рублей).

Ответ: 845.

Вариант № 1

1. Найдите, сколько процентов от числа 20 составляет число 7.

1) 20 2) 7 3) 35 4) 287

Ответ: ________________.

2. Найдите 25 % от числа 68.

1) $\frac{17}{25}$ 2) $\frac{25}{68}$ 3) 17,2 4) 17

Ответ: ________________.

3. В парке посадили клёны и липы, причём на каждые 3 липы приходилось 2 клёна. Сколько процентов от всех посаженных деревьев составляли клёны?

1) 20% 2) 30% 3) 40% 4) 60%

Ответ: ________________ .

4. Нефтеразведочная экспедиция проводила исследования для определения вероятности наличия нефти на выделенных участках Западной Сибири. На завершающем этапе разведки проводился сейсмический тест на 49 участках, что составило 35% от общего числа исследованных участков. Определите число участков, на которых проводились исследования.

Ответ: ________________ .

5. Яблоки стоят 63 рубля за килограмм, а черешня — 90 рублей за килограмм. На сколько процентов яблоки дешевле черешни?

Ответ: ________________ .

6. Смешали три раствора сахара массой 200 г каждый. Концентрация первого раствора — 14%, концентрация второго — 16%, концентрация третьего — 30%. Какова концентрация полученного раствора (в процентах)?

Ответ: ________________ .

7. Аптека делает пенсионерам скидку на определённое количество процентов от стоимости покупки. Лекарство стоит в аптеке 650 рублей, а пенсионер заплатил за него 520 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионера?

Ответ: ________________ .

8. В период распродажи магазин снижал цены дважды: в первый раз на 25%, во второй — на 40%. Сколько рублей стала стоить стиральная машина после второго снижения цен, если до начала распродажи она стоила 19 600 рублей?

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Найдите, сколько процентов составляет число 3,78 от 27.

   1) 3,78 2) 27 3) 14 4) 378

   Ответ: ________________.

2. Найдите 15 % от числа 34.

   1) 5,1 2) 0,34 3) $2\frac{4}{15}$ 4) $\frac{15}{34}$

   Ответ: ________________.

3. Детский сад посещают 120 девочек и 80 мальчиков. Сколько процентов от общего числа детей в этом детском саду составляют мальчики?

   1) 10 2) 40 3) 30 4) 5

   Ответ: ________________.

4. Диван на распродаже уценили на 70 %, при этом он стал стоить 14 400 р. Сколько рублей стоил диван до распродажи?

   Ответ: ________________.

5. К новогоднему празднику каждому из 48 учеников класса были приготовлены новогодние подарки. Однако на праздник пришли только 36 учеников и забрали свои подарки. Сколько процентов учеников не забрали свои подарки?

   Ответ: ________________.

6. Имеется два сплава меди и цинка. В первом сплаве содержится 12 % меди, а во втором — 20 %. Сплавили 200 г первого сплава и 200 г второго сплава. Сколько процентов меди содержится в полученном сплаве?

   Ответ: ________________.

7. До проведения акции в магазине «Лента» одна банка маслин стоила 70 рублей, а при проведении акции стала стоить 49 рублей. На сколько процентов была снижена цена одной банки маслин при проведении акции?

   Ответ: ________________.

8. Стоимость одной тетради в магазине увеличилась на 10 %, а затем в связи с уценкой уменьшилась на 10 %. Сколько рублей стала стоить тетрадь после уценки, если её первоначальная стоимость составляла 26 рублей?

   Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Сколько процентов составляет 24 килограмма от 15 тонн?

1) 62,5 2) 120 3) 16 4) 0,16

Ответ: ________________.

2. Найдите число, которое на 15 % больше числа 130.

1) 145 2) 149,5 3) 19,5 4) 110,5

Ответ: ________________.

3. В семейной коллекции дисков на каждый диск с музыкой приходится 4 диска с мультфильмами и 5 дисков с фильмами. Сколько процентов от всех дисков составляют диски с мультфильмами?

1) 30 2) 40 3) 37,5 4) 50

Ответ: ________________.

4. В некоторой школе среди выпускников 9-го класса 13 двоечников, что составляет 6,5 % от всех выпускников. Сколько всего выпускников 9-го класса в этой школе?

Ответ: ________________.

5. В посёлке 3250 жителей, причём 18 % — это люди старше 60 лет. Сколько человек составляет эта категория жителей? Ответ округлите до сотен.

Ответ: ________________.

6. Корова даёт молоко 3,8%-ной жирности, а коза — 4,1%-ной жирности. Молоко какой жирности получится, если смешать молоко коровы и козы в отношении 1 : 2?

Ответ: ________________.

7. Из объявления фирмы, проводящей обучающие семинары: «Стоимость участия в семинаре — 5600 рублей с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 3 до 5 человек — 30 %, более 5 человек — 40 %». Сколько рублей должна заплатить организация, направившая на семинар группу из 6 человек?

Ответ: ________________.

8. Цена на холодильник сначала повысилась на 13 %, потом понизилась на 20 % от новой цены, после чего составила 11 300 рублей. Определите первоначальную цену холодильника (в рублях).

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Сколько процентов от 4 км составляют 25 метров?

1) 0,0625 2) 62,5 3) 6,25 4) 0,625

Ответ: ________________ .

2. Найдите число, которое на 35 % больше, чем число 120.

1) 140 2) 162 3) 153,5 4) 158

Ответ: ________________ .

3. У собственника железнодорожного транспорта имеются вагоны только трёх видов: платформы; крытые вагоны; железнодорожные цистерны. При этом на две платформы приходится одна железнодорожная цистерна и 7 крытых вагонов. Сколько процентов от всех вагонов составляют крытые вагоны?

1) 20 2) 10 3) 70 4) 50

Ответ: ________________ .

4. Сколько страниц в книге, если рассказ, который составляет 15 % от общего числа страниц этой книги, занимает 12 страниц?

Ответ: ________________ .

5. Сплав содержит 16 % олова. Сколько граммов олова содержится в 125 г сплава?

Ответ: ________________ .

6. В сельской школе два пятых класса. В 5 «А» классе 20 учеников, а в 5 «Б» — 25. Успеваемость по математике в каждом из этих классов составляет соответственно 95 % и 92 %. Какова успеваемость в процентах у пятиклассников этой школы? Результат округлите до целых.

Ответ: ________________ .

7. Набор столовых приборов, который стоил 1900 рублей, продаётся с 15%-ной скидкой. При покупке трёх таких наборов покупатель отдал кассиру 5000 рублей. Сколько рублей сдачи он должен получить?

Ответ: ________________ .

8. Цена товара сначала снизилась на 40 %, а затем его новая цена повысилась на 40 %. Сравните последнюю цену товара с его первоначальной ценой. Напишите, на сколько процентов уменьшилась цена.

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Найдите 30 % от числа 90.

1) 27 2) 30 3) 3 4) 300

Ответ: ________________.

2. В гараже были КамАЗы и ЗИЛы, причём на три КамАЗа приходилось семь ЗИЛов. Сколько процентов от общего числа машин в гараже составляли ЗИЛы?

1) 30 2) 70 3) 81 4) 75

Ответ: ________________.

3. Найдите среднюю массу одного мешка с зерном в килограммах, если 42 % средней массы одного мешка составляет 28 килограмм.

1) 9,52 2) $\frac{200}{3}$ 3) $\frac{100}{3}$ 4) 66

Ответ: ________________.

4. Супермаркет проводит акцию: «Любой кактус в горшке по цене 160 рублей. При покупке трёх кактусов скидка на третий 40 %». Сколько рублей придётся заплатить за покупку трёх кактусов?

1) 480 2) 320 3) 416 4) другой ответ

Ответ: ________________.

5. Масса сушёных яблок составляет 18 % от массы свежих. Сколько килограммов сушёных яблок получится из 250 кг свежих?

Ответ: ________________.

6. Результаты контрольной работы по математике в классе представлены в виде круговой диаграммы (см. рис. 1). Сколько школьников получили оценку «2», если в классе 40 учащихся?

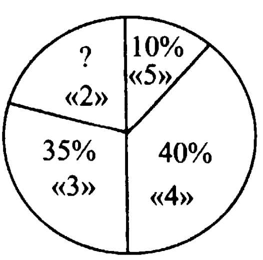


Рис. 1.

Ответ: ________________.

7. У Вовы 60 марок. У Вити на 20 % марок меньше, чем у Вовы, а у Серёжи на 30 % больше, чем у Вовы. Сколько всего марок у Вити и Серёжи?

Ответ: ________________ .

8. В банк положили 700 000 рублей. В соответствии с договором банк по окончании года будет начислять 9,5 % от суммы, находящейся на счёте. Какова будет сумма (в рублях) средств на счёте по истечении года, если договором не предусмотрены дополнительные операции?

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. Найдите 15 % от числа 220.

1) 15 2) 33 3) 330 4) 22

Ответ: ________________ .

2. В одном провинциальном городе на три неодноэтажных дома приходится пять одноэтажных. Сколько процентов от общего числа домов в этом городе составляют неодноэтажные дома?

1) 30 2) 37,5 3) 39 4) другой ответ

Ответ: ________________ .

3. Найдите средний рост девочек одного и того же возраста в оздоровительном лагере, если 52 % этого среднего роста составляет 78 сантиметров. Ответ дайте в сантиметрах.

1) 156 2) 152 3) 150 4) 155

Ответ: ________________ .

4. В двух ящиках 75 кг яблок. В первом ящике 48 % всех яблок. Сколько килограммов яблок во втором ящике?

1) 36 2) 45 3) 39 4) другой ответ

Ответ: ________________ .

5. В сплаве меди и цинка содержится 12 % меди. Масса сплава — 1200 г. Сколько в смеси цинка (в г)?

Ответ: ________________ .

6. Результаты районной контрольной работы по алгебре в 9-м классе представили в виде диаграммы (см. рис. 2). Сколько учащихся получили отметку «3», если всего работу писали 350 девятиклассников?

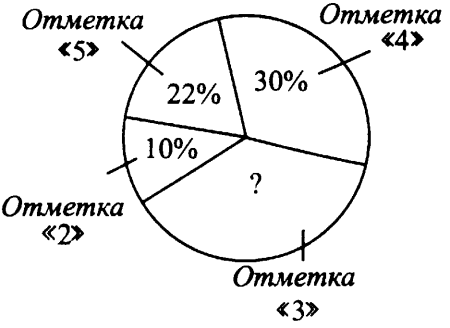


Рис. 2.

Ответ: ________________.

7. Антон собрал 80 кг яблок, Владимир на 80 % больше Антона, а Николай на 15 % меньше Антона. Сколько кг вместе собрали Владимир и Николай?

Ответ: ________________.

8. В начале года число абонентов компании «Электрон» составляло 150 000 человек, а к концу года их число увеличилось на 20 %. Сколько абонентов стало у компании «Электрон» к концу года?

Ответ: ________________.

§ 4. Алгебра. Арифметические действия и сравнение чисел

Основные сведения

Обыкновенная дробь — одна или несколько равных долей единицы: $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$; $\frac{13}{8}$; $\frac{10}{16}$, где m — числитель дроби, n — её знаменатель.

Если умножить числитель и знаменатель дроби на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменяется:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} \ (m, n, q \in N).$$

Значение заданной дроби также не изменится, если её числитель и знаменатель разделить на любой общий делитель числителя и знаменателя. Указанная операция называется **сокращением дроби**.

Правильная дробь – обыкновенная дробь, числитель которой меньше знаменателя. Сумму натурального числа и правильной дроби называют **смешанной дробью** (натуральное число называют её целой частью, а правильную дробь — дробной частью) :

$$4 + \frac{5}{9} = 4\frac{5}{9};\ 11 + \frac{3}{7} = 11\frac{3}{7}.$$

Сравнение дробей. Для сложения и вычитания обыкновенных дробей их следует привести к одному и тому же знаменателю.

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями **меньше** та, у которой числитель **меньше**:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{n}, \text{ если } m < p;\ \frac{m}{n} > \frac{p}{n}, \text{ если } m > p.$$

Чтобы сравнить две обыкновенные дроби, следует привести их к одному знаменателю и сравнить числители получившихся дробей.

Если перед обыкновенной дробью $\frac{m}{n}$ поставить знак минус «–», то получится отрицательное число.

Из двух отрицательных чисел **меньше** то, у которого модуль **больше**:

$$-\frac{15}{4} < -\frac{7}{4}, \text{ так как } \frac{15}{4} > \frac{7}{4}.$$

При изображении чисел точками числовой прямой, меньшему числу соответствует точка, расположенная левее точки, изображающей большее число.

Умножение дробей. Чтобы умножить две дроби, нужно перемножить их числители и знаменатели: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо числитель умножить на это число, а знаменатель оставить тем же: $\frac{m}{n} \cdot p = \frac{m \cdot p}{n}$.

Деление дробей. Чтобы разделить дробь $\frac{m}{n}$ на дробь $\frac{p}{q}$, надо дробь $\frac{m}{n}$ умножить на дробь $\frac{q}{p}$, **обратную** к дроби $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

При умножении и делении чисел с разными знаками пользуются **правилами знаков**: при умножении или делении чисел с **одинаковыми знаками** получается **положительное** число, а при умножении или делении чисел с **разными знаками** получается **отрицательное** число.

Напомним, что всякую сумму, составленную из целых степеней числа 10, умноженных на некоторые цифры, можно записать в виде **десятичной дроби**:

$$5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} = 5027{,}84.$$

При **сложении и вычитании десятичных дробей** их записывают одну под другой так, чтобы цифры одинаковых разрядов были друг под другом, и складывают или вычитают, не обращая внимания на запятую, как целые числа. В полученном результате запятую ставят под запятой.

При **умножении десятичных дробей** их умножают, как целые числа, не обращая внимания на запятую. Затем в полученном результате отделяют запятой справа столько цифр, сколько их было после запятой в двух сомножителях вместе.

Заметим, что при записи конечной десятичной дроби отбрасывают все нули, расположенные за последней ненулевой цифрой дробного разряда: **15,49000 = 15,49**.

Деление десятичных дробей также сводится к делению целых чисел.

Преобразование дробей. Для того, чтобы смешанную дробь записать в виде обыкновенной дроби, надо знаменатель дробной части умножить на целую часть, прибавить к полученному числу числитель дробной части и результат записать в числитель, а знаменатель оставить равным знаменателю дробной части:

$$\mathbf{4+\frac{5}{9}=\frac{9\cdot 4+5}{9}=\frac{41}{9}}.$$

Всякую обыкновенную дробь можно преобразовать в конечную или бесконечную десятичную периодическую дробь по известному алгоритму, основанному на делении натуральных чисел с остатком:

$$\mathbf{\frac{17}{6}=2{,}833\ldots=2{,}8(3)}.$$

17 делим на 6 с остатком. Получим в частном число 2 (оно является целой частью искомой дроби), а в остатке — число 5. Затем этот остаток умножаем на 10 и полученное число 50 опять делим на 6. В частном получится 8 (оно указывает количество десятых долей искомой дроби), а в остатке — число 2. Опять остаток умножаем на 10 и полученное число 20 делим на 6, и так далее.

Впрочем, если в разложении знаменателя на простые сомножители будут только числа 2 и 5, то получится конечная десятичная дробь. Её можно получить домножением числителя и знаменателя дроби на такое число, чтобы в знаменателе была степень числа 10:

$$\mathbf{\frac{17}{40}=\frac{17}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}=\frac{17\cdot(5\cdot 5)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot(5\cdot 5)}=\frac{425}{1000}=0{,}425}.$$

Вариант с решениями

1. Вычислите $11 \cdot 2\frac{13}{55} - 12{,}4$.

1) 9,6 2) 10,6 3) 12,2 4) −2,2

Решение. $11 \cdot 2\frac{13}{55} - 12{,}4 = 11 \cdot 2 + \frac{11 \cdot 13}{55} - 12{,}4 = 22 + \frac{13}{5} - 12{,}4 =$ $= 22 + 2{,}6 - 12{,}4 = 12{,}2.$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. На координатной прямой отмечены числа x и y (см. рис. 3). Какое из этих утверждений **верно**?

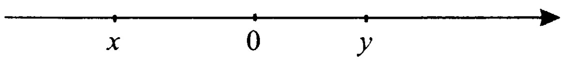


Рис. 3.

1) $x^2y > 0$ 2) $x^5y^3 > 0$ 3) $x^3y^2 > 0$ 4) $xy > 0$

Решение. Согласно рисунку $x < 0, y > 0$.

Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) верно, так как $x^2 > 0$ и, следовательно, $x^2y > 0$.

Утверждение 2) неверно, так как $x^5 < 0$, $y^3 > 0$ и, следовательно, $x^5y^3 < 0$.

Утверждение 3) неверно, так как $x^3 < 0$, $y^2 > 0$ и, следовательно, $x^3y^2 < 0$.

Утверждение 4) неверно, так как $x < 0$, $y > 0$ и, следовательно, $xy < 0$.

Из приведённых утверждений верным является только 1).

Ответ: 1.

3. Расположите числа в порядке возрастания: $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$; -1; $-1\frac{1}{3}$.

1) $-\frac{1}{3}$; -1; $-1\frac{1}{3}$; $-0{,}3$ 2) $-1\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$; -1

3) -1; $-0{,}3$; $-\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{3}$ 4) $-1\frac{1}{3}$; -1; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$

Решение. Запишем заданные числа в виде десятичных дробей. Получим соответственно: $-\frac{1}{3} = -0{,}33\ldots$; $-0{,}3$; -1; $-1\frac{1}{3} = -1{,}33\ldots$

Учитывая, что из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше, расположим полученные числа в порядке возрастания:

$-1{,}33...$; -1; $-0{,}33...$; $-0{,}3$. Этой последовательности соответствует последовательность 4).

Ответ: 4.

4. Сравните a и b, если $a = 6 : (-2)$, $b = 12 : (-6)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

Решение. $a = 6 : (-2) = -(6 : 2) = -3$, $b = 12 : (-6) = -(12 : 6) = -2$. Так как из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше, то $-3 < -2$, значит, $a < b$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. На координатной прямой изображены числа a и b (см. рис. 4). Какое из следующих неравенств **неверно**?

1) $a - 9 > b - 9$ 2) $a + 8 < b + 8$ 3) $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ 4) $-\frac{a}{3} < -\frac{b}{3}$

Рис. 4.

Решение. Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) верно, так как $a > b$ и, следовательно, $a - 9 > b - 9$.

Утверждение 2) неверно, так как $a > b$ и, следовательно, $a+8 > b+8$.

Утверждение 3) верно, так как обе части неравенства можно умножить на положительное число и, следовательно, $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$.

Утверждение 4) верно, так как при умножении левой и правой частей верного неравенства $a > b$ на отрицательное число знак неравенства меняется и, следовательно, $-\frac{a}{3} < -\frac{b}{3}$.

Из приведённых утверждений неверным является только 2).

Ответ: 2.

6. Соотнесите частное

А $= 145 : 5$; Б $= -4{,}76 : 0{,}01$; В $= \frac{6}{7} : \frac{8}{63}$

и результат.

1) 6,75 2) -476 3) $-0{,}00476$ 4) 29

Решение. Вычислим каждое из заданных частных.

А $= 145 : 5 = 29$ соответствует результату 4);

Б $= -4{,}76 : 0{,}01 = -476$ соответствует результату 2);

В $= \frac{6}{7} : \frac{8}{63} = \frac{6}{7} \cdot \frac{63}{8} = \frac{6 \cdot 63}{7 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 9}{4} = 6{,}75$ соответствует результату 1).

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

7. Какое из приведённых ниже неравенств является верным при любых значениях t и b, удовлетворяющих условию $t > b$?

1) $b - t > 0$ 2) $t - b > 5$ 3) $t - b > 1$ 4) $b - t < 4$

Решение. Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) неверно, так как $b < t$ и, следовательно, $b - t < 0$.

Утверждение 2) верно не для всех значений t и b, так как $5 > 4$, но $5 - 4 < 5$.

Утверждение 3) верно не для всех значений t и b, так как $t > b$ и, следовательно, $t - b > 0$. При $t = 5$ и $b = 4$ $t - b = 1$.

Утверждение 4) верно, так как из $b - t < 0$ следует, что $b - t < 4$.

Из приведённых утверждений верным для всех значений t и b является только 4).

Ответ: 4.

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{10}$ разности чисел 27,35 и 0,056?

1) 5 2) 6 3) 3 4) 4

Решение. Найдём разность заданных чисел: $27{,}35 - 0{,}056 = 27{,}294$.

$\frac{1}{10}$ этой разности равна $\frac{1}{10} \cdot 27{,}294 = 2{,}7294$. Это число содержит 4 знака после запятой.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Вариант № 1

1. Вычислите $\left(5\frac{2}{3} - 4\frac{1}{6}\right) \cdot 3\frac{1}{3}$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 5). Какое из данных утверждений **верно**?

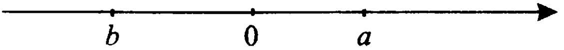


Рис. 5.

1) $ab > 0$ 2) $ba^2 > 0$ 3) $ab^2 > 0$ 4) $(ab)^3 > 0$

Ответ: ________________.

3. Расположите числа в порядке убывания: $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$.

1) $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$

2) $-2\frac{1}{6}$; $-2{,}6$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$

3) $-\frac{5}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-2\frac{1}{6}$; $-2{,}6$

4) $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$; $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$

Ответ: ________________.

4. Сравните числа a и b, если $a = 7 : (-3)$, $b = 3 : (-7)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

5. О числах m и k известно, что $m > k$. Среди приведённых ниже неравенств выберите верные:

1) $m - k > -6$ 2) $k - m > 5$ 3) $k - m < 5$

1) 1 и 2 2) 2 и 3 3) 1 и 3 4) 1, 2 и 3

Ответ: ________________.

6. Соотнесите произведение и результат:

А $= 12{,}3 \cdot 2{,}1$; Б $= \frac{25}{3} \cdot 1\frac{3}{15}$; В $= 13{,}2 \cdot 1\frac{3}{4}$.

1) 23,1 2) 25,83 3) 14,4 4) 10

Ответ:

А	Б	В

7. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $a - x > t$?

1) $a > x + t$ 2) $t + x - a < 0$ 3) $a - t > x$ 4) $a - x - t < 0$

Ответ: ________________.

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит произведение числа 0,001 на разность чисел 3272,354 и 1262,304?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Вычислите $\left(3\frac{1}{5} - 1{,}1\right) : \frac{1}{5}$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой (см. рис. 6) отмечены числа m и n. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

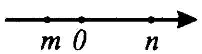


Рис. 6.

1) $mn > 0$ 2) $m^2n > 0$ 3) $m - n < 0$ 4) $n + m > 0$

Ответ: ________________.

3. Расположите числа в порядке убывания: $-\frac{5}{7}$; 0,55; $\frac{4}{5}$; $-0{,}75$.

1) $\frac{4}{5}$; 0,55; $-\frac{5}{7}$; $-0{,}75$ 2) $\frac{4}{5}$; 0,55; $-0{,}75$; $-\frac{5}{7}$

3) 0,55; $\frac{4}{5}$; $-\frac{5}{7}$; $-0{,}75$ 4) $-0{,}75$; $-\frac{5}{7}$; 0,55; $\frac{4}{5}$

Ответ: ________________.

4. Сравните значения выражений $a + 2b$ и $b - a$ при $a = -1$, $b = 2{,}5$.

1) $a + 2b < b - a$ 2) $a + 2b > b - a$

3) $a + 2b = b - a$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

5. О числах a и m известно, что $a < m$. Какое из следующих неравенств **неверно**?

1) $a + 2 < m + 2$ 2) $a - 3 < m - 3$

3) $\frac{a}{3} < \frac{m}{3}$ 4) $-\frac{a}{6} < -\frac{m}{6}$

Ответ: ________________.

6. Соотнесите произведение чисел

$\text{А} = 0{,}02 \cdot 15$; $\text{Б} = \frac{3}{7} \cdot 2{,}8$; $\text{В} = 3{,}14 \cdot \frac{1}{5}$

и результат.

1) 0,3 2) 0,628 3) 3 4) 1,2

Ответ:

А	Б	В

7. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $x < t - a$?

1) $x + a < t$ 2) $a - x < t$ 3) $x - t < -a$ 4) $a < t - x$

Ответ: ________________.

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит произведение чисел 6,482 и $-2{,}555$?

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Вычислите $\left(2{,}5 - 3\frac{1}{2}\right) : 0{,}5$.

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой (см. рис. 7) отмечены числа x и y. Какое из приведённых утверждений **верно**?

Рис. 7.

1) $xy^2 > 0$ 2) $y - x < 0$ 3) $xy > 0$ 4) $x^2 - y > 0$

Ответ: ________________.

3. Расположите числа в порядке возрастания: 0,3; $\frac{1}{2}$; -5; $-4{,}8$.

1) 0,3; $\frac{1}{2}$; -5; $-4{,}8$ 2) -5; $-4{,}8$; 0,3; $\frac{1}{2}$

3) $-4{,}8$; -5; $\frac{1}{2}$; 0,3 4) $\frac{1}{2}$; 0,3; $-4{,}8$; -5

Ответ: ________________.

4. Сравните a и b, если $a = 2 : (-3)$, $b = 2 \cdot (-3)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

5. О числах m, k, p и d известно, что $m < k, d = p, d > k$. Сравните числа m и d.

1) $d > m$ 2) $d < m$ 3) $d = m$ 4) сравнить невозможно

Ответ: ________________ .

6. Соотнесите частное

А $= 123 : 6$; Б $= \frac{5}{7} : \frac{2}{49}$; В $= -3{,}25 : 0{,}001$

и результат.

1) 17,5 2) -3250 3) -325 4) $20\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{24}$ (см. рис. 8). Какая это точка?

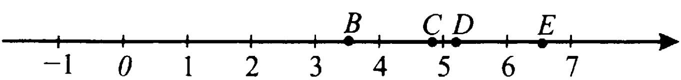


Рис. 8.

1) B 2) C 3) D 4) E

Ответ: ________________ .

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{100}$ суммы чисел 53,95 и 0,055?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Вычислите $\left(3{,}6 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}3$.

Ответ: ________________ .

2. На координатной прямой (см. рис. 9) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

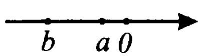


Рис. 9.

1) $a + b < 0$ 2) $a - b > 0$ 3) $ab > 0$ 4) $b - a > 0$

Ответ: ________________ .

3. Расположите числа в порядке убывания: $1{,}3$; $\frac{1}{2}$; $-2{,}3$; $1\frac{1}{3}$.

1) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; $1{,}3$; $-2{,}3$ 2) $1\frac{1}{3}$; $1{,}3$; $\frac{1}{2}$; $-2{,}3$

3) $-2{,}3$; $1\frac{1}{3}$; $1{,}3$; $\frac{1}{2}$ 4) $-2{,}3$; $1{,}3$; $1\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$

Ответ: ________________.

4. Сравните x и y, если $x = 3 \cdot (-4)$, $y = 3 : (-4)$.

1) $x > y$ 2) $x = y$ 3) $x < y$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

5. О числах a, b, c и d известно, что $a < b, d = c, d > b$. Сравните числа d и a.

1) $d > a$ 2) $d < a$ 3) $d = b$ 4) сравнить невозможно

Ответ: ________________.

6. Соотнесите произведение чисел

А $= 3 \cdot 12$; Б $= \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{14}$; В $= -4{,}25 \cdot 17$

и результат.

1) $0{,}5$ 2) $-68{,}25$ 3) 36 4) $-72{,}25$

Ответ:

А	Б	В

7. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $\sqrt{34}$ (см. рис. 10). Какая это точка?

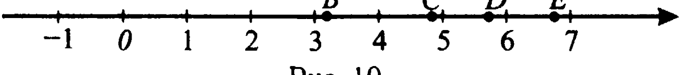


Рис. 10.

1) B 2) C 3) D 4) E

Ответ: ________________.

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{10}$ разности чисел $21{,}66$ и $13{,}86$?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Значение выражения $-7 - 10 : (-2{,}5) - 5 \cdot \frac{1}{6}$ равно

1) $-3\frac{5}{6}$ 2) $-11\frac{5}{6}$ 3) $-10\frac{1}{6}$ 4) $-2\frac{1}{6}$

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой (см. рис. 11) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

Рис. 11.

1) $a^2b > 0$ 2) $a + b > 0$ 3) $a - b > 0$ 4) $b - a > 0$

Ответ: ________________.

3. Сравните числа, являющиеся значениями выражений $A = \frac{0{,}2}{0{,}05}$ и $B = \frac{6}{18} \cdot 0{,}3$.

1) $A > B$ 2) $A = B$ 3) $A < B$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

4. Укажите наибольшее из чисел: 1,34; $\frac{7}{4}$; $\frac{7}{5}$; 1,1.

1) 1,34 2) $\frac{7}{4}$ 3) $\frac{7}{5}$ 4) 1,1

Ответ: ________________.

5. О числах m и k известно, что $m < k$. Среди приведённых ниже неравенств выберите верные:

1) $m - k < 2$ 2) $k - m > -5$ 3) $k - m < -5$

1) 1 и 2 2) 2 и 3 3) 1 и 3 4) 1, 2 и 3

Ответ: ________________.

6. Какое из следующих неравенств не следует из неравенства $a + x < t$?

1) $a < t - x$ 2) $t - a > x$ 3) $a - t + x > 0$ 4) $t - a - x > 0$

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $\frac{1{,}4^2 + 0{,}2^2}{1{,}3 - 0{,}8}$.

Ответ: ________________.

8. Найдите количество песчинок, содержащихся в 1 тонне песка, считая, что масса каждой песчинки составляет 0,002 г.

1) $2 \cdot 10^9$ 2) $2 \cdot 10^8$ 3) $5 \cdot 10^9$ 4) $5 \cdot 10^8$

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Вычислите $\left(5{,}5 - 2\frac{5}{6}\right) : 4 - 1$.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{8}{9}$ 4) $9\frac{2}{3}$

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой (см. рис. 12) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

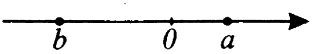


Рис. 12.

1) $a > b$ 2) $a + b > 0$ 3) $ab < 0$ 4) $a - b > 0$

Ответ: ________________.

3. Сравните числа, являющиеся значениями выражений: $A = \frac{0{,}3}{0{,}18}$ и $B = \frac{19}{20} : 0{,}2$.

1) $A > B$ 2) $A = B$ 3) $A < B$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

4. Укажите наименьшее из чисел: $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{9}$; 0,75; 0,81.

1) $\frac{7}{8}$ 2) $\frac{7}{9}$ 3) 0,75 4) 0,81

Ответ: ________________.

5. О числах r и m известно, что $r < m$. Какое из следующих неравенств **неверно**?

1) $r - 5 < m - 5$ 2) $r + 7 < m + 7$

3) $-\frac{r}{2} < -\frac{m}{2}$ 4) $\frac{r}{6} < \frac{m}{6}$

Ответ: ________________.

6. Какое из следующих неравенств **не следует** из неравенства $a+t > x$?

1) $a > x - t$ 2) $t > x - a$ 3) $a - x + t < 0$ 4) $a - x + t > 0$

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{1{,}2^2 - 0{,}8^2}{1{,}4 - 1}$.

Ответ: ________________.

8. Высота одного ряда кирпичей составляет 80 мм. Сколько рядов кирпичей надо проложить, чтобы построить стену высотой 0,4 км.

1) $2 \cdot 10^4$ 2) $5 \cdot 10^4$ 3) $2 \cdot 10^5$ 4) $5 \cdot 10^3$

Ответ: ________________.

§ 5. Алгебра. Значения выражений и преобразование формул

Основные сведения

Алгебраическим (буквенным) выражением называется конечная последовательность, состоящая из чисел, букв, круглых скобок и знаков алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения и деления, извлечения корня и возведения в целую степень. Скобки в алгебраическом выражении однозначно указывают порядок выполнения действий и входят в него попарно (каждой открывающей скобке соответствует единственная закрывающая скобка):

$$\left(\left(\sqrt{(a-3)^5}\cdot(b-8)\right):c^{-3}\right)-(a^2+(a\cdot b)).$$

Указанное выше выражение, согласно общепринятым правилам о порядке выполнения действий и расстановке скобок, можно записать проще:

$$\sqrt{(a-3)^5}\cdot(b-8):c^{-3}-(a^2+a\cdot b).$$

Буквы, указанные в алгебраическом выражении, называются **числовыми переменными**. Вместо них можно подставлять любые числа, при которых все операции, указанные в этом выражении, выполнимы. Например, в указанном выше выражении нельзя вместо a подставлять число **1**, так как при $a = 1$ подкоренное выражение равно (-32), а корень квадратный из отрицательного числа не определён.

Те значения букв, при которых определены все операции, указанные в алгебраическом выражении, называются **допустимыми**. Если вместо всех букв, входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые допустимые значения этих букв, то получим числовое выражение. Выполнив все указанные в нём действия, получим в результате число, которое называется **значением алгебраического выражения при заданных значениях букв**.

Значение вышеуказанного алгебраического выражения при $a = 4$, $b = 10$ и $c = 2$ равно:

$$\sqrt{(4-3)^5}\cdot(10-8):2^{-3}-(4^2+4\cdot 10) = -40.$$

Если между двумя алгебраическими выражениями поставить знак «=», то полученное равенство задаёт **формулу**.

Если в левой части такой формулы находится выражение, состоящее из одной буквы, а в правой её части алгебраическое выражение от одной переменной, то такая формула задаёт **функцию от одной переменной**. Изменяя число переменных в правой части формулы будем получать функции от различного числа переменных.

Вариант с решениями

1. Найдите значение выражения $1{,}2 - \frac{5}{6} \cdot a$ при $a = 0{,}12$.

1) 1,1 2) 2 3) −8,8 4) 0

Решение. Подставим в заданное выражение значение $a = 0{,}12$.

Получим $1{,}2 - \frac{5}{6} \cdot 0{,}12 = 1{,}2 - 5 \cdot 0{,}02 = 1{,}2 - 0{,}1 = 1{,}1$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Из формулы ускорения $a = \frac{F}{m}$ выразите силу F.

1) $F = \frac{a}{m}$ 2) $F = \frac{m}{a}$ 3) $F = ma$ 4) $F = \frac{Fm}{a}$

Решение. Умножив обе части заданного равенства на m, получим $m \cdot a = \frac{F \cdot m}{m}$. Отсюда $F = ma$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Путь $S(t)$ — расстояние в метрах, который автомобиль проезжает за t секунд, вычисляется по формуле $S(t) = 2t^2$. За сколько секунд автомобиль проедет 50 м?

1) 25 2) 5 3) 15 4) 10

Решение. Согласно условию задачи, необходимо найти время t_0, за которое автомобиль пройдёт путь $S(t_0) = 50$.

Следовательно, $2(t_0)^2 = 50$. Отсюда, учитывая, что $t_0 > 0$, находим $t_0 = 5$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Соотнесите площадь заштрихованной фигуры с соответствующей формулой (см. рис. 13).

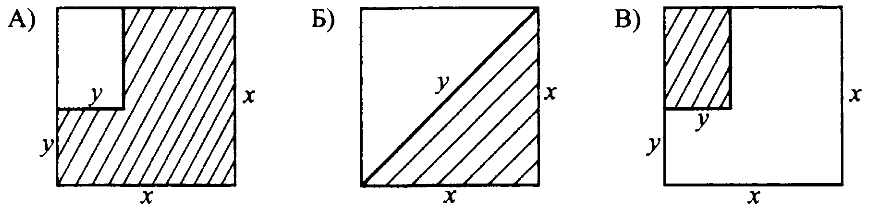


Рис. 13.

1) $S = \frac{1}{2}x^2$ 2) $S = x^2 - xy + y^2$ 3) $S = x^2 + y$ 4) $S = xy - y^2$

Решение. Найдём площадь каждой из предложенных фигур.

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 13 А), можно найти как разность площади квадрата со стороной x и прямоугольника со сторонами y и $(x - y)$. Эта площадь $x^2 - y(x - y) = x^2 - xy + y^2$ соответствует формуле 2).

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 13 Б), равна половине площади квадрата со стороной x. Эта площадь $\frac{1}{2}x^2$ соответствует формуле 1).

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 13 В), равна площади прямоугольника со сторонами y и $(x - y)$. Эта площадь $y(x - y) = xy - y^2$ соответствует формуле 4).

Ответ:

А	Б	В
2	1	4

5. Площадь S правильного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Во сколько раз площадь правильного треугольника будет больше при $a = 6$, чем при $a = 3$?

1) 9 2) 2 3) 3 4) 4

Решение. Обозначим S_1 — площадь треугольника со стороной $a_1 = 6$, S_2 — площадь треугольника со стороной $a_2 = 3$. Тогда, согласно условию задачи, необходимо найти отношение $S_1 : S_2$.

$$S_1 : S_2 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} : \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{a_2^2\sqrt{3}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{6^2}{3^2} = 4.$$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Из равенства $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a)$ выразите b.

1) $b = 3a$ 2) $b = 2a - \frac{1}{3}$ 3) $b = 1{,}8a$ 4) $b = 9a$

Решение. Умножим обе части заданного равенства на 3, а затем раскроем скобки в правой части равенства: $a+\frac{1}{3}b = 2(b-a)$; $3a+b = 6(b-a)$; $3a + b = 6b - 6a$; $5b = 9a$; $b = 1{,}8a$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Расстояние s (в метрах) от наблюдателя до места удара молнии можно приближённо вычислить по формуле $s = 330t$, где t — количество секунд, прошедших между вспышкой молнии и началом раската грома. Определите, на каком расстоянии от места удара молнии находится наблюдатель, если $t = 17$. Ответ дайте в километрах, округлив его до целых.

Решение. Вычислим по формуле $s = 330t = 330 \cdot 17 = 5610$ м $=$ $= 5{,}610$ км. Округлим до целых $5{,}610 \approx 6$.

Ответ: 6.

8. Перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта позволяет формула $F = 1{,}8C + 32$, где C — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Цельсия соответствует $100°$ по шкале Фаренгейта? Ответ округлите до десятых.

Решение. Согласно условию задачи, необходимо найти температуру по шкале Цельсия, которая соответствует $100°$ по шкале Фаренгейта. Получим уравнение $100 = 1{,}8C + 32$, отсюда
$C = (100 - 32) : 1{,}8 = 37{,}77... \approx 37{,}8$.

Ответ: $37{,}8$.

Вариант № 1

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \cdot a + 2{,}3$ при $a = 1{,}2$.

Ответ: _______________ .

2. Из формулы нахождения площади треугольника $S = \frac{ah}{2}$, где a — сторона треугольника, h — высота треугольника, проведённая к этой стороне, выразите высоту h.

1) $h = \frac{2S}{a}$ 2) $h = \frac{Sa}{2}$ 3) $h = \frac{2a}{S}$ 4) $h = 2Sa$

Ответ: _______________ .

3. Формула для вычисления прибыли от продажи товара имеет вид: $P = O - C$, где C — закупочная стоимость товара, O — отпускная стоимость товара. Какова должна быть отпускная стоимость товара в рублях, чтобы прибыль составила 3240 рублей, если закупочная стоимость равна 12 360 рублей?

Ответ: _______________ .

4. Соотнесите площадь S фигуры, изображённой на рисунке 14, с формулой.

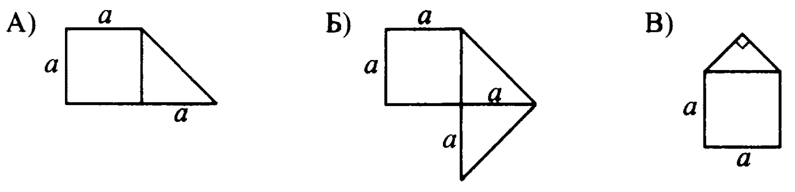


Рис. 14.

1) $S = \frac{5a^2}{4}$ 2) $S = \frac{2a^2}{5}$ 3) $S = \frac{3a^2}{2}$ 4) $S = 2a^2$

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь правильного шестиугольника вычисляется по формуле $S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, где a — сторона шестиугольника. Во сколько раз сторона первого шестиугольника больше стороны второго шестиугольника, если $S_1 = 40{,}96$; $S_2 = 10{,}24$?

Ответ: _______________ .

6. Из равенства $3a - 5b = \dfrac{a}{b+1}$ выразите a.

1) $a = 5b(b+1)$ 2) $a = \dfrac{5b(b+1)}{4}$

3) $a = \dfrac{5b(b+1)}{3b+2}$ 4) $a = \dfrac{b(5b+3)}{3b-1}$

Ответ: ________________.

7. Зная длину своего шага, человек может приближённо подсчитать пройденное им расстояние s по формуле $s = nl$, где n – число шагов, l – длина шага. Какое расстояние прошёл человек, если $l = 64$ см, $n = 1500$? Ответ выразите в километрах.

Ответ: ________________.

8. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия $(t°, C)$ в шкалу Фаренгейта $(t°, F)$, пользуются формулой $F = 1{,}8C + 32$, где С — градусы Цельсия, F — градусы Фаренгейта. Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует 102° по шкале Цельсия?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Найдите значение выражения $3 - \dfrac{7}{8} \cdot 4 + a$ при $a = 0{,}5$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы цены товара $a = \dfrac{C}{n}$, где C — стоимость товара, n — количество товара, выразите стоимость C.

1) $C = \dfrac{a}{n}$ 2) $C = \dfrac{n}{a}$ 3) $C = a \cdot n$ 4) $C = a^2 n$

Ответ: ________________.

3. При движении тела по прямой его скорость $v(t)$ в м/с изменяется по закону $v(t) = 7t + 11$ (t — время движения тела в секундах). Какова будет скорость тела через 2 секунды после начала движения (в м/с)?

Ответ: ________________.

4. Соотнесите длину отрезка MN с соответствующей формулой (см. рис. 15).

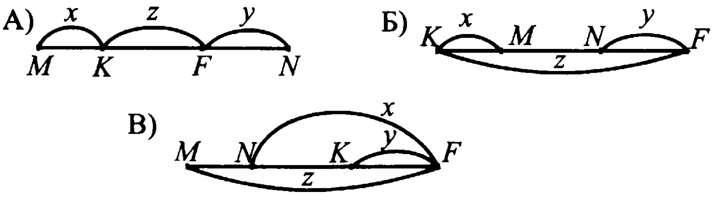


Рис. 15.

1) $MN = z - x + y$ 2) $MN = x + y + z$
3) $MN = z - x$ 4) $MN = z - (x + y)$

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь правильного шестиугольника S в см^2 вычисляется по формуле $S = \frac{3}{2} \cdot a^2\sqrt{3}$ (a — сторона шестиугольника в см). Во сколько раз площадь первого шестиугольника меньше площади второго, если $a_1 = 2$ см, $a_2 = 4$ см?

Ответ: ________________.

6. Из равенства $2a + 3{,}8b = \frac{a+b}{5}$ выразите a.

1) $a = 2b$ 2) $a = -\frac{2{,}8b}{9}$ 3) $a = -2b$ 4) $a = \frac{4{,}8b}{11}$

Ответ: ________________.

7. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 8000 + 3400 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 4 колец в рублях.

Ответ: ________________.

8. Закон Менделеева – Клапейрона можно записать в виде $PV = \nu RT$, где P — давление (в паскалях), V — объём (в м^3), ν — количество вещества (в молях), T — температура (в градусах Кельвина), а R — универсальная газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(К· моль). Пользуясь этой формулой, найдите температуру T (в градусах Кельвина), если $\nu = 53$ моля, $P = 365{,}7$ Па, $V = 277$ м^3.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{p}+2}{\sqrt{q}}$ при $p = 0{,}49$; $q = 0{,}09$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы силы $F = am$ выразите массу m.

1) $m = Fa$ 2) $m = \frac{F}{a}$ 3) $m = \frac{a}{F}$ 4) $m = \frac{F}{2a}$

Ответ: ________________.

3. При движении тела пройденный им путь $S(t)$ в метрах изменяется по закону $S(t) = t^3 + 5t$, где t — время движения тела в секундах. Какой путь пройдёт тело за 4 секунды? Ответ дайте в метрах.

1) 12 2) 24 3) 84 4) 36

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $(a - b)(a + b) - (a + b)^2 + 2b^2$ и найдите его значение при $a = 3,2$, $b = -0,3$.

Ответ: ________________.

5. Найдите значение функции $f(x) = \frac{4x-1}{x-2} + 3$, если значение аргумента равно 3.

1) 20 2) 14 3) 2,5 4) 24

Ответ: ________________.

6. Площадь треугольника можно вычислять по формуле $S = \frac{ab\sin\alpha}{2}$, где a и b – стороны треугольника и α – угол между сторонами a и b. Пользуясь этой формулой, найдите площадь треугольника, если $a = 15$, $b = 7, \sin\alpha = \frac{2}{35}$.

Ответ: ________________.

7. Закон Джоуля – Ленца можно записать в виде $Q = I^2Rt$, где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите количество теплоты (в джоулях), если $t = 12$ с, $I = 7$ А, $R = 6$ Ом.

Ответ: ________________.

8. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F — сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 — величины зарядов (в кулонах), k — коэффициент пропорциональности (в Н·м²/Кл²), а r — расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_1 (в кулонах), если $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл², $q_2 = 0{,}005$ Кл, $r = 2000$ м, а $F = 0{,}81$ Н.

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}+1}$ при $m = 1{,}21$; $n = 0{,}01$.

Ответ: ________________ .

2. Из формулы длины окружности $C = 2\pi R$ выразите число π.

1) $\pi = \frac{CR}{2}$ 2) $\pi = \frac{R}{2C}$ 3) $\pi = \frac{C}{2R}$ 4) $\pi = \frac{2R}{C}$

Ответ: ________________ .

3. При движении тела пройденный им путь $S(t)$ в метрах изменяется по закону $S(t) = t^3 + 3t$, где t — время движения тела в секундах. Какой путь пройдёт тело за 3 секунды?

1) 12 2) 16 3) 24 4) 36

Ответ: ________________ .

4. Упростите выражение $(a - b)(a + b) - (a + b)(2a + b) + a^2 + 2b^2$ и найдите его значение при $a = 3{,}5$, $b = -0{,}2$.

Ответ: ________________ .

5. Найдите значение функции $f(a) = 5 - \frac{4a-1}{a}$, если значение аргумента равно 0,25.

1) -1 2) 5 3) 2,5 4) 6

Ответ: ________________ .

6. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$, где d_1 и d_2 — диагонали четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите площадь четырёхугольника, если длины диагоналей $d_1 = 11, d_2 = 6, \sin\alpha = \frac{2}{33}$.

Ответ: ________________ .

7. Закон Джоуля – Ленца можно записать в виде $Q = I^2Rt$, где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите время t (в секундах), если $Q = 3528$ Дж, $I = 7$ А, $R = 6$ Ом.

Ответ: ________________.

8. Закон Кулона можно записать в виде $F = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$, где F — сила взаимодействия зарядов (в ньютонах), q_1 и q_2 — величины зарядов (в кулонах), k — коэффициент пропорциональности (в Н·м²/Кл²), а r — расстояние между зарядами (в метрах). Пользуясь формулой, найдите величину заряда q_1 (в кулонах), если $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл², $q_2 = 0{,}006$ Кл, $r = 300$ м, а $F = 0{,}48$ Н.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите значение выражения $5 - \frac{7}{4} \cdot c$ при $c = -8$.

Ответ: ________________.

2. Из формулы объёма конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ выразите высоту h.

1) $h = \frac{3V}{\pi r^2}$ 2) $h = \frac{V}{3r^2}$ 3) $h = \frac{\pi r^2}{3V}$ 4) $h = \frac{3\pi r^2}{V}$

Ответ: ________________.

3. Скорость первого велосипедиста равна v км/ч, а второго — на 2 км/ч больше. Составьте формулу для нахождения расстояния s (в км), которое преодолеет второй велосипедист за t часов.

1) $s = \frac{v+2}{t}$ 2) $s = (v+2)t$ 3) $s = vt$ 4) $s = 2vt$

Ответ: ________________.

4. Найдите значение выражения $\sqrt{5x-2}$ при $x = 1{,}2$.

1) 2 2) $\sqrt{2}$

3) $2\sqrt{2}$ 4) при $x = 1{,}2$ выражение не имеет смысла

Ответ: ________________.

5. В фирме «С ветерком!» стоимость поездки на такси (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 110 + 13 \cdot (t - 6)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах ($t > 6$). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 26-минутной поездки в рублях.

Ответ: ________________.

6. Из равенства $2{,}3k - 4n = \dfrac{5m}{n^2}$ выразите m.

1) $m = \dfrac{5}{4(2{,}3k - 4n)}$ 2) $m = \dfrac{2{,}3k - 4n}{5n^2}$

3) $m = \dfrac{4n^2}{2{,}3k - 4n}$ 4) $m = \dfrac{(2{,}3k - 4n)n^2}{5}$

Ответ: ________________.

7. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), а R — радиус окружности (в м). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R (в метрах), если угловая скорость равна 7,2 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 1036,8 м/с^2.

Ответ: ________________.

8. Закон всемирного тяготения можно записать в виде $F = \gamma \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, где F — сила притяжения между телами (в ньютонах), m_1 и m_2 — массы тел (в килограммах), r – расстояние между центрами масс тел (в метрах), а γ — гравитационная постоянная, равная $6{,}67 \cdot 10^{-11}$Н·м^2/кг^2. Пользуясь этой формулой, найдите массу тела m_1 (в килограммах), если $F = 83{,}375$ Н, $m_2 = 5 \cdot 10^{11}$ кг, а $r = 40$ м.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите значение выражения $\dfrac{7}{x} + 6$ при $x = -\dfrac{5}{3}$.

Ответ: ________________.

2. Модуль нормальной составляющей ускорения при движении по криволинейной траектории вычисляется по формуле $a_{\text{н}} = \dfrac{v^2}{R}$, где v — скорость движения, R — радиус кривизны траектории. Выразите из данной формулы скорость v.

1) $v = \sqrt{\dfrac{a_{\text{н}}}{R}}$ 2) $v = a_{\text{н}}R$ 3) $v = \sqrt{a_{\text{н}}R}$ 4) $v = \sqrt{\dfrac{R}{a_{\text{н}}}}$

Ответ: ________________ .

3. Катер прошёл от пункта A против течения реки s км. Составьте формулу, по которой можно находить время t в часах, которое катер затрачивает на преодоление всего пути, если скорость катера в стоячей воде v км/ч, а скорость течения равна 2 км/ч.

1) $t = \dfrac{s}{v+2}$ 2) $t = \dfrac{v+2}{s}$ 3) $t = \dfrac{s}{v-2}$ 4) $t = \dfrac{v-2}{s}$

Ответ: ________________ .

4. Найдите значение выражения $\sqrt{7x + 0{,}25}$ при $x = 2{,}25$.

1) 4 2) $\sqrt{2}$

3) $2\sqrt{2}$ 4) при $x = 1{,}2$ выражение не имеет смысла

Ответ: ________________ .

5. В фирме «Вода» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 7500 + 1200 \cdot n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 6 колец.

Ответ: ________________ .

6. Из равенства $1{,}5k + 7n = \dfrac{4}{mn^2}$ выразите m.

1) $m = \dfrac{n^2}{4(1{,}5k+7n)}$ 2) $m = \dfrac{1{,}5k+7n}{4n^2}$

3) $m = \dfrac{4n^2}{1{,}5k+7n}$ 4) $m = \dfrac{4}{n^2(1{,}5k+7n)}$

Ответ: ________________ .

7. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) можно вычислить по формуле $a = \omega^2 R$, где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), а R — радиус окружности (в м). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R (в метрах), если угловая скорость равна 3,8 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 361 м/с^2.

Ответ: ________________ .

8. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите силу тока I (в амперах), если мощность составляет 630 Вт, а сопротивление равно 280 ом.

Ответ: ________________ .

§ 6. Алгебра. Степень с целым показателем

Основные сведения

Свойства степени с целым показателем.

Для любого натурального числа n по определению полагаем:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ сомножителей}}$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, если $a \neq 0$;

$a^0 = 1$, если $a \neq 0$.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64,\ 4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64},\ 4^0 = 1,$

$(-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} = \dfrac{1}{16}.$

Выражение a^n называется **степенью**, a – **основание степени**, n – **показатель степени**.

Для любых целых чисел n и k верны следующие равенства:

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$,

$a^n : a^k = a^{n-k}$, если $a \neq 0$.

$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$,

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$,

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, если $b \neq 0$.

Справедливы равенства: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$,

$\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$, если $a \neq 0$.

Вариант с решениями

1. Вычислите $(6^2)^{-3} \cdot 6^9$.

1) -6 2) 216 3) 36 4) 1

Решение. $(6^2)^{-3} \cdot 6^9 = 6^{2 \cdot (-3)} \cdot 6^9 = 6^{-6} \cdot 6^9 = 6^{-6+9} = 6^3 = 216.$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Представьте выражение $\dfrac{(t^4)^{-2}}{t^{-3}}$ в виде степени с основанием t $(t \neq 0)$.

1) t^{-11} 2) t^{-19} 3) t^{-5} 4) t^{-13}

Решение. $\dfrac{(t^4)^{-2}}{t^{-3}} = \dfrac{t^{4\cdot(-2)}}{t^{-3}} = \dfrac{t^{-8}}{t^{-3}} = t^{-8-(-3)} = t^{-5}$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{4}{x^3} \cdot \dfrac{5}{x^{-5}}$ при $x = -\dfrac{1}{2}$.

1) -5 2) 5 3) $\dfrac{5}{8}$ 4) 80

Решение. $\dfrac{4}{x^3} \cdot \dfrac{5}{x^{-5}} = \dfrac{4 \cdot 5}{x^3 \cdot x^{-5}} = \dfrac{20}{x^{3-5}} = \dfrac{20}{x^{-2}} = 20x^2$.

Подставляя в полученное выражение значение $x = -\dfrac{1}{2}$, получим

$20 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 20 \cdot \dfrac{1}{4} = 5$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Упростите выражение $\dfrac{m^{-2} \cdot n^5}{m^{-4} \cdot (n^{-1})^5}$, если $m \neq 0$ и $n \neq 0$.

1) $m^{-6}n^{10}$ 2) $m^2 n$ 3) m^2 4) $m^2 n^{10}$

Решение. $\dfrac{m^{-2} \cdot n^5}{m^{-4} \cdot (n^{-1})^5} = \dfrac{m^{-2} \cdot n^5}{m^{-4} \cdot n^{-5}} = m^{-2-(-4)} n^{5-(-5)} = m^2 n^{10}$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Во сколько раз $3{,}84 \cdot 10^3$ меньше, чем $1{,}496 \cdot 10^4$? Результат округлите до десятых.

1) 0,3 2) 2,6 3) 13,9 4) 3,9

Решение. Для того чтобы определить, во сколько раз $3{,}84 \cdot 10^3$ меньше, чем $1{,}496 \cdot 10^4$, найдём частное

$\dfrac{1{,}496 \cdot 10^4}{3{,}84 \cdot 10^3} = \dfrac{1{,}496 \cdot 10}{3{,}84} = \dfrac{1496}{384} = 3{,}89... \approx 3{,}9$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $\frac{6^3}{2^3} + 27^2 \cdot 3^{-9}$.

1) $(26; 27)$ 2) $(27; 28)$ 3) $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$ 4) $(1; 3)$

Решение. $\frac{6^3}{2^3} + 27^2 \cdot 3^{-9} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 + \left(3^3\right)^2 \cdot 3^{-9} = 3^3 + 3^{3 \cdot 2} \cdot 3^{-9} =$

$= 3^3 + 3^6 \cdot 3^{-9} = 3^3 + 3^{6+(-9)} = 3^3 + 3^{-3} = 27 + \frac{1}{27}.$

Так как $0 < \frac{1}{27} < 1$, то значение заданного выражения принадлежит промежутку $(27; 28)$, указанному под номером 2).

Ответ: 2.

7. Среди чисел $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ найдите наибольшее.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

Решение. Запишем все указанные числа в виде обыкновенных дробей:

$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$;

$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$;

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{-1}{3}\right)^{-3} = \left(\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}\right)^3 = (-3)^3 = -27$;

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{-1}{3}\right)^{-4} = \left(\left(\frac{-1}{3}\right)^{-1}\right)^4 = (-3)^4 = 3^4 = 81.$

Наибольшим из заданных чисел является число 81, равное $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$. Верный ответ 4).

Ответ: 4.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(a^2)^{-3} \cdot a^5 \cdot a^0$; Б) $(a^2 \cdot a^{-3})^5$; В) $\frac{(a^{-2})^3}{a^5}$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$).

1) a 2) a^{-1} 3) a^{-11} 4) a^{-5}

Решение. Упростим каждое из заданных выражений:

А) $(a^2)^{-3} \cdot a^5 \cdot a^0 = a^{2\cdot(-3)} \cdot a^5 \cdot a^0 = a^{-6} \cdot a^5 \cdot 1 = a^{-6+5} = a^{-1}$. Соответствует выражению 2);

Б) $(a^2 \cdot a^{-3})^5 = (a^{2-3})^5 = (a^{-1})^5 = a^{-5}$. Соответствует выражению 4);

В) $\dfrac{(a^{-2})^3}{a^5} = \dfrac{a^{-6}}{a^5} = a^{-6-5} = a^{-11}$. Соответствует выражению 3).

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

Вариант № 1

1. Вычислите $3^5 \cdot \dfrac{1}{3^2} \cdot 3^{-3}$.

1) 1 2) 81 3) 3 4) 9

Ответ: ______________.

2. Представьте выражение $\dfrac{(a^5 \cdot a^{-2})^6}{a^4}$, где $a \neq 0$, в виде степени с основанием a.

1) a^{14} 2) a^7 3) a^6 4) a^3

Ответ: ______________.

3. Найдите значение выражения $3x^2 : \dfrac{1}{(2x)^3} \cdot \dfrac{1}{3x}$ при $x = -\dfrac{1}{2}$.

1) 4 2) $-\dfrac{1}{2}$ 3) 0,5 4) 2

Ответ: ______________.

4. Упростите выражение $\dfrac{x^2y^3}{y^{-2}} \cdot \dfrac{x^{-3}}{y^4}$, $y \neq 0, x \neq 0$.

1) $\dfrac{1}{xy^3}$ 2) $\dfrac{y}{x}$ 3) $\dfrac{x^5}{y^5}$ 4) 1

Ответ: ______________.

5. Во сколько раз масса протона больше массы электрона, если масса протона равна $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, а масса электрона равна $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг? Ответ округлите до сотен.

1) 190 2) 2000 3) 850 4) 1800

Ответ: ________________.

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(3 \cdot 6)^2 - \frac{6^3}{2^3} \cdot 3^{-4}$.

1) $(323; 324)$ 2) $(36; 72)$ 3) $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$ 4) $(26; 27)$

Ответ: ________________.

7. Среди чисел $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; 3^{-2}; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ найдите наибольшее.

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 2) 3^{-2} 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Ответ: ________________.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(2a^{-1}b^2)^3$; Б) $2\frac{(a^2b^4)^2}{b^3a}$; В) $2\left(\frac{a}{b}\right)^2 : \frac{a^3b^{-3}}{b}$

с тождественно равным ему выражением ($a > 0, b > 0$).

1) $2a^3b^5$ 2) $2\frac{a^5}{b^6}$ 3) $8\frac{b^6}{a^3}$ 4) $2\frac{b^2}{a}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Вычислите $3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^0$.

1) 243 2) $\frac{1}{3}$ 3) 3 4) 0

Ответ: ________________.

2. Представьте выражение $\dfrac{(c^3)^{-2}\cdot c}{c^{-8}}$, $c>0$, в виде степени с основанием c.

1) c^{10} 2) c^3 3) c^{-2} 4) c^{-1}

Ответ: ________________ .

3. Найдите значение выражения $\dfrac{3}{x^5}\cdot x^3 : x^{-2}$ при $x=0{,}001$.

1) 0,003 2) 0,03 3) 3 4) 0,3

Ответ: ________________ .

4. Упростите выражение $(ab)^7 : \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$, $b\neq 0, a\neq 0$.

1) a^4b^{10} 2) $(ab)^4$ 3) $a^{10}b^4$ 4) a^4b^{-4}

Ответ: ________________ .

5. Масса Земли равна $5{,}97\cdot 10^{27}$ граммов, масса Луны — $7{,}35\cdot 10^{25}$ граммов. Во сколько раз масса Земли больше массы Луны? Результат округлите до десятых.

1) 0,12 2) 0,1 3) 81,2 4) 812,22

Ответ: ________________ .

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(5\cdot 3)^2-\Big((-5):(-3)\Big)^{-2}$.

1) $[224; 225)$ 2) $(-200; -195)$ 3) $(0; 4]$ 4) $[225; 226]$

Ответ: ________________ .

7. Среди чисел $0{,}5^2$; $0{,}5^3$; $(-0{,}5)^{-5}$; $(-0{,}5)^{-6}$ найдите наибольшее.

1) $0{,}5^2$ 2) $0{,}5^3$ 3) $(-0{,}5)^{-5}$ 4) $(-0{,}5)^{-6}$

Ответ: ________________ .

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(n^{-1})^2\cdot n^0\cdot n^2$; Б) $\dfrac{(n^{-5})^{-2}}{n^4n^2}$; В) $(n^{-5})^2\cdot n^{-4}\cdot n^{-2}$

с тождественно равным ему выражением ($n>0$).

1) n^{-16} 2) n^4 3) n^{-13} 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Вычислите $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^4$.

1) 1 2) 2 3) 0 4) 4

Ответ: ________________.

2. Представьте выражение $\frac{(a^2)^{-3} \cdot a^{10}}{a^3}$ $(a \neq 0)$ в виде степени с основанием a.

1) a^8 2) a^{13} 3) a 4) a^{12}

Ответ: ________________.

3. Найдите значение выражения $t^7 \cdot \frac{4}{t^5} : t^3$ при $t = 2$.

1) 8 2) 128 3) 0,5 4) 2

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $3(a^2b)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5$, $b \neq 0$, $a \neq 0$.

1) $27a^{11} \cdot b^{-2}$ 2) $27a^{-2} \cdot b^{-2}$ 3) $\frac{3a^{11}}{b^2}$ 4) $\frac{3a^8}{b^2}$

5. Численность населения Франции составляет 65 млн человек, а численность населения Белоруссии — 9 млн человек. Во сколько раз численность населения Франции больше численности населения Белоруссии? Результат округлите до сотых.

1) 7,22 2) 0,14 3) 8,12 4) 6,23

Ответ: ________________.

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(6 \cdot 2)^2 - (-6) : (-2)^3$.

1) $(20; 80)$ 2) $[80; 100]$ 3) $(90; 110)$ 4) $[143; 144]$

Ответ: ________________.

7. Из чисел $(-0{,}3)^2$, $(-0{,}3)^3$, $(-0{,}3)^4$, $(-0{,}3)^5$ выберите наибольшее.

1) $(-0{,}3)^2$ 2) $(-0{,}3)^3$ 3) $(-0{,}3)^4$ 4) $(-0{,}3)^5$

Ответ: ________________.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(n^{-2})^2 \cdot n^4 \cdot n^0$; Б) $\dfrac{(n^{-3})^5}{n^{-14} \cdot n^2}$; В) $\dfrac{(n^2)^3}{n^3} \cdot n^{-4}$,

с тождественно равным ему выражением ($n \neq 0$).

1) $\dfrac{1}{n^3}$ 2) $\dfrac{1}{n}$ 3) $\dfrac{1}{n^2}$ 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Вычислите $6^2 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 3^1$.

1) 864 2) 4,5 3) 27 4) 13,5

Ответ: ________________.

2. Найдите k, если $a^k = \dfrac{a^{-3} \cdot (a^2)^4}{a^{-5}}$, $a \neq 1$, $a \neq 0$.

1) 6 2) 0 3) 10 4) 7

Ответ: ________________.

3. Найдите значение выражения $m^2 \cdot \left(\dfrac{m}{2}\right)^{-3} \cdot (m^5)^0$ при $m = 8$.

1) 1 2) 8 3) 64 4) 0,125

Ответ: ________________.

4. Какое из следующих выражений при $a \neq 0$, $c \neq 0$ тождественно равно выражению $\dfrac{(a^2c)^3}{c^4} \cdot \left(\dfrac{c^2}{a}\right)^2$?

1) a^3c^3 2) a^5c^3 3) a^4c^3 4) a^4c

Ответ: ________________.

5. Макароны нужно варить $1{,}5 \cdot 10^1$ минут, а горох — $1{,}8 \cdot 10^2$ минут. Во сколько раз дольше нужно варить горох, чем макароны?

1) $\dfrac{5}{60}$ 2) $\dfrac{50}{6}$ 3) 12 4) 1,2

Ответ: ________________.

6. Найдите промежуток, которому принадлежит значение выражения $2^3 \cdot 3^2 - \left(2^{-1} \cdot 3^2\right)^{-1}$.

1) $[35; 36]$ 2) $[-36; -35]$ 3) $[0; 1]$ 4) $[71; 72]$

Ответ: ______________.

7. Найдите наименьшее из чисел: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $(-3)^{-3}$, $(-3)^{-2}$.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 3) $(-3)^{-3}$ 4) $(-3)^{-2}$

Ответ: ______________.

8. Соотнесите каждое из выражений

$\text{А} = \left((k^2)^{-3} \cdot k^4\right)^{-1}$; $\text{Б} = \dfrac{k^{-3} \cdot k^5}{k^2} : k^{-1}$; $\text{В} = \dfrac{\left((k^3)^{-2} \cdot k\right)^{-1}}{k^{-5}}$

с тождественно равным ему выражением ($k \neq 0$).

1) k 2) k^{10} 3) k^2 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Запишите выражение $\dfrac{\left(2^9\right)^6 \cdot 16^{-4}}{2^{42}}$ в виде степени числа 2.

1) 2^{-27} 2) 2^8 3) 2^{-21} 4) 2^{-4}

Ответ: ______________.

2. Найдите значение выражения $\left(a^{-5}b\right)^2 \cdot a^8$ при $a = \frac{1}{3}$ и $b = \frac{1}{9}$

1) 3 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 9

Ответ: ______________.

3. Упростите выражение $\left(4a^5b^{-7}\right) : \dfrac{2a^3b^{-5}}{5}$.

1) $1{,}6a^8b^{-12}$ 2) a^2b^{-2} 3) $10a^2b^{-2}$ 4) $16a^8b^{-12}$

Ответ: ______________.

4. Найдите равенство, которое верно не при любых значениях m и n ($n \neq 0$, $m \neq 0$).

1) $\left(\frac{m^3}{m^2}\right)^5 n = m^5 n$ 2) $(n^5 m)^3 = n^{15} m^3$

3) $\frac{m^6}{(n^3)^2} = \frac{m^6}{n^5}$ 4) $\frac{(n^2)^4}{m^8} = \left(\frac{n}{m}\right)^8$

Ответ: ________________.

5. Сравните числа b^2 и b^5, если $0 < b < 1$.

1) $b^2 > b^5$ 2) $b^2 < b^5$

3) $b^2 = b^5$ 4) для ответа не хватает данных

Ответ: ________________.

6. Найдите значение выражения $(8 \cdot 10^{-7}) \cdot (0{,}2 \cdot 10^5)$.

1) 160 2) 0,016 3) 1600 4) 0,001 6

Ответ: ________________.

7. Точность изготовления микросхем в современных лабораториях достигает $6{,}3 \cdot 10^{-9}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

1) 0,000 000 006 3 2) 0,000 000 063 3) 0,000 000 63 4) 0,006 3

Ответ: ________________.

8. Соотнесите каждое выражение

$\text{А} = (2a^{-3})^3 \cdot (a^2)^2$; $\text{Б} = \frac{a^{-5} \cdot (-2a)^4}{-2a^4}$; $\text{В} = \frac{1}{8} a^4 \cdot (2a^{-3})^3$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$).

1) $-\frac{8}{a^5}$ 2) a^{-5} 3) $\frac{8}{a^5}$ 4) $\frac{8}{a^{-5}}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Представьте выражение $\frac{(a^7a^{-3})^{-2}}{a^{-6}}$ в виде степени буквы a, $a \neq 0$.

1) a^2 2) a^{-4} 3) a^8 4) a^{-2}

Ответ: ________________.

2. Найдите значение выражения $(2a^2b)^3$ при $a = 0{,}5$ и $b = 2$.

1) 3 2) 1 3) $\frac{1}{3}$ 4) 8

Ответ: ________________.

3. Упростите выражение $\left(\frac{a^{-3}b^4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{a^{-2}b^3}\right)^{-2}$.

1) $0{,}08a^{-7}b^{10}$ 2) $0{,}008a^{-7}b^{10}$
3) $\frac{5b^{-2}}{a}$ 4) $\frac{b^{-2}}{5a}$

Ответ: ________________.

4. Найдите равенство, которое верно не при любых значениях m и n ($n \neq 0$, $m \neq 0$).

1) $\left(\frac{8^{2n}}{m^3}\right)^4 = \left(\frac{4^{3n}}{m^3}\right)^4$ 2) $(n^3m^5)^2 = n^6m^{10}$
3) $\frac{m^{10}}{m^2n^3} = \frac{m^8}{n^2}$ 4) $\frac{(n^4)^3}{m^{12}} = \left(\frac{n}{m}\right)^{12}$

Ответ: ________________.

5. Сравните x^2 и x^3, если известно, что $0 < x < 2$.

1) $x^2 > x^3$ 2) $x^2 < x^3$
3) $x^2 = x^3$ 4) для сравнения не хватает данных

Ответ: ________________.

6. Найдите значение выражения $(2{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^{-2})$.

1) 7 200 000 2) 0,000 72 3) 0,000 072 4) 0,000 007 2

Ответ: ________________.

7. Масса клетки бактерии $1{,}2 \cdot 10^{-12}$ кг. Выразите эту массу в миллиграммах.

1) $1{,}2 \cdot 10^{-9}$ мг
2) $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ мг
3) $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ мг
4) $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ мг

Ответ: ________________ .

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\left(a^2a^5\right)^3$; Б) $a^4\left(a^3\right)^3$; В) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right)^4$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$).

1) a^8 2) a^{21} 3) a^{16} 4) a^{13}

Ответ:

А	Б	В

§ 7. Алгебра. Многочлены и преобразование выражений

Основные сведения

Произведение конечного числа буквенных переменных или числовых констант называют **одночленом**: $8abaa$; $x5yyxy$; $aaxb(-3)x2ba$.

Переставляя сомножители одночлена, можно добиться того, чтобы его **первым сомножителем было число, а остальные сомножители были степенями различных буквенных переменных**. Такой вид одночлена называют **стандартным**. Число, стоящее на первом месте одночлена стандартного вида, называют **коэффициентом одночлена**, а произведение всех буквенных переменных — **буквенной частью одночлена**.

Переставляя сомножители одночлена $aaxb(-3)x2ba$, получим одночлен $(-3)2aaabbxx$, который можно записать в стандартном виде: $(-6)a^3b^2x^2$.

Перемножая два или несколько одночленов, снова получим одночлен. При этом, по свойству степеней суммируются показатели степеней каждой переменной, входящей в перемножаемые одночлены: $(-8)a^2u^3y \cdot 2ay^2x = -16a^3u^3y^3x$.

Если у двух одночленов переменные одинаковы и каждая из них входит в эти одночлены одинаковое число раз, то их называют **подобными**: $5x^3$ и $-7x^3$; $(-4)xy^2$ и $3y^2x$; $(-2)a^2bc^3$ и $4ba^2c^3$. У подобных одночленов буквенные части могут различаться только порядком расположения сомножителей.

При сложении подобных одночленов их буквенную часть выносят за скобки: $(-2)a^2bc^3 + 4ba^2c^3 = (-2+4)a^2bc^3 = 2a^2bc^3$.

Замену суммы подобных одночленов одним одночленом называют **приведением подобных членов**.

Сумму нескольких одночленов называют **многочленом**. Если многочлен не содержит подобных слагаемых и все входящие в него одночлены имеют стандартный вид, то такой многочлен называют **многочленом стандартного вида**. Всякий многочлен можно привести к стандартному виду, если все составляющие его одночлены привести к стандартному виду, а затем привести подобные члены:

$4x^2yx-7x^2+11x^3y-9xx = (4x^3y+11x^3y)+(-7x^2-9x^2) = 15x^3y-16x^2$.

Для нахождения произведения двух многочленов каждый одночлен первого многочлена умножаем на каждый одночлен второго многочлена, складываем полученные одночлены и приводим подобные члены:
$(5x^2y^3 - 7xy^2) \cdot (4x + 3x^2y) = 5x^2y^3 \cdot 4x + 5x^2y^3 \cdot 3x^2y + (-7xy^2) \cdot 4x + (-7xy^2) \cdot 3x^2y = 20x^3y^3 + 15x^4y^4 - 28x^2y^2 - 21x^3y^3 = -x^3y^3 + 15x^4y^4 - 28x^2y^2$.

Применяя правила умножения многочленов, получаем известные **формулы сокращённого умножения**:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **– квадрат суммы**;
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **– квадрат разности**;
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ **– разность квадратов**;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ **– куб суммы**;
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ **– куб разности**;
$(a-b)(a+ab+b^2) = a^3 - b^3$ **– разность кубов**;
$(a+b)(a-ab+b^2) = a^3 + b^3$ **– сумма кубов.**

Укажем также формулу **разложения квадратного трёхчлена на линейные множители**:

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример:
$998^2 = (1000-2)^2 = 1000^2-2\cdot1000\cdot2+2^2 = 1\,000\,000-4000+4 = 996\,004$.

Вариант с решениями

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(x-4)(1-y)$?

1) $-(4-x)(y-1)$ 2) $-(x-4)(1-y)$
3) $-(x-4)(y-1)$ 4) $(4-y)(x-1)$

Решение. Выражения 1) – 3) преобразуем вынесением за скобки (-1) указанное число раз. Выражение 4) и заданное выражение преобразуем, перемножая многочлены, указанные в скобках.

1) $-(4-x)(y-1) = -(-(x-4))(-(1-y)) = -(x-4)(1-y)$ не равно тождественно $(x-4)(1-y)$.

2) $-(x-4)(1-y)$ не равно тождественно $(x-4)(1-y)$.

3) $-(x-4)(y-1) = -(x-4)(-(1-y)) = (x-4)(1-y)$ тождественно равно $(x-4)(1-y)$.

4) $(4-y)(x-1) = 4x - yx - 4 + y$ не равно тождественно $(x-4)(1-y) = x - 4 - xy + 4y$.

Из приведённых выражений 1) – 4) только третье тождественно равно $(x-4)(1-y)$.

Ответ: 3.

2. Упростите выражение $(3-4a)^2+8a(3-2a)$.

1) 9 2) $-48a-32a^2$ 3) $9-32a^2$ 4) $9-48a$

Решение. Применяя формулу квадрата разности и правило умножения многочленов, получаем:

$(3-4a)^2+8a(3-2a)=3^2-2\cdot 3\cdot 4a+(4a)^2+3\cdot 8a-2a\cdot 8a=$
$=9-24a+16a^2+24a-16a^2=9$.

Из приведённых ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Найдите значение многочлена $9x^2-6xy+y^2$ при $x=2$, $y=-1$.

1) -4 2) 2 3) 49 4) -2

Решение. Заметим, что $9x^2-6xy+y^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2$. По формуле квадрата разности получаем, что $(3x)^2-2\cdot 3x\cdot y+y^2=(3x-y)^2$. Поэтому $9x^2-6xy+y^2=(3x-y)^2$. Подставляя в многочлен $(3x-y)^2$ вместо x число 2, а вместо y число -1, получим: $(3\cdot 2-(-1))^2=49$.

Из приведённых ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. Пусть $A=y(y+9)$, $B=(3+2y)^2$. Приведите выражение $A-B$ к многочлену стандартного вида.

1) $5y^2+3y-9$ 2) $5y^2-21y-9$ 3) $-3y^2-3y-9$ 4) $y-9$

Решение. Преобразуем сначала выражение, применяя правило умножения многочленов и формулу квадрата суммы, а затем приводим подобные члены.

$A-B=y(y+9)-(3+2y)^2=y^2+9y-(9+12y+4y^2)=$
$=y^2+9y-9-12y-4y^2=-3y^2-3y-9$.

Из указанных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

5. Приведите к стандартному виду произведение многочленов $(x-2y)(x+2y)(y^2+3x^2)$.

1) $9y^2+4xy$ 2) $2x^2-9y^2+4xy$ 3) $-5y^2$ 4) $3x^4-11x^2y^2-4y^4$

Решение. По формуле разности квадратов
$(x-2y)(x+2y)=x^2-4y^2$.

Следовательно, $(x-2y)(x+2y)(y^2+3x^2)=(x^2-4y^2)(y^2+3x^2)=x^2y^2+$
$+3x^4-4y^4-12x^2y^2=-11x^2y^2-4y^4+3x^4=3x^4-11x^2y^2-4y^4$.

Из указанных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Выполните умножение многочленов $(a+2)(a^2-2a+4)$ и полученный многочлен запишите в стандартном виде .

1) a^3+16 2) a^3+8 3) a^3+2a^2+8 4) a^3-8

Решение. По формуле суммы кубов получаем, что $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Разложите многочлен $5x^2-ax-5y^2+ay$ на линейные множители.

1) $(5-a)(x-y)$ 2) $(x^2-y^2)(5-a)$
3) $(x+y)(5x-5y-a)$ 4) $(x-y)(5x+5y-a)$

Решение. Сгруппируем слагаемые $5x^2$ и $-5y^2$, $-ax$ и ay. Из первой группы выносим за скобки число 5, а из второй $-a$. Получаем $5x^2-5y^2-ax+ay=5(x^2-y^2)-a(x-y)$. По формуле разности квадратов $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. Отсюда $5x^2-5y^2-ax+ay=5(x-y)(x+y)-a(x-y)=$
$=(x-y)(5(x+y)-a)=(x-y)(5x+5y-a)$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Соотнесите каждое из выражений
А) $(a-4)(a+4)$; Б) a^2-4; В) $(a-2)^2$
с тождественно равным ему выражением.

1) a^2-16 2) a^2+4 3) $(a-2)(a+2)$ 4) a^2-4a+4

Решение. Преобразуем каждое из заданных выражений.

А) По формуле разности квадратов $(a-4)(a+4)=a^2-16$. Выражение a^2-16 указано под номером 1). Поэтому *А*) соответствует 1).

Б) По формуле разности квадратов $a^2-4=(a-2)(a+2)$. Выражение $(a-2)(a+2)$ указано под номером 3). Поэтому Б) соответствует 3).

В) По формуле квадрата разности $(a-2)^2=a^2-4a+4$. Выражение a^2-4a+4 указано под номером 4). Поэтому *В*) соответствует 4).

Ответ:

А	Б	В
1	3	4

Вариант № 1

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(4 - x)(x - 1)$?

1) $(x - 4)(1 - x)$ 2) $-(x - 4)(1 - x)$
3) $(4 - x)(1 - x)$ 4) $(x - 4)(x - 1)$

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $x^2 - 4 - (x + 1)(x - 4)$.

1) $3x - 8$ 2) $3x$ 3) $2x^2 + 3x$ 4) $2x^2 - 8$

Ответ: ________________.

3. Найдите значение многочлена $4a^2 - 12ab + 9b^2$ при $a = 1{,}25$; $b = -2{,}5$.

1) 100 2) $-1{,}25$ 3) 25 4) 4,5

Ответ: ________________.

4. Пусть $A = 5x^2 + 3xy - 1$, $Б = 2x^2 + 10$, $B = x(y - x)$. Приведите выражение $2A - 3Б + B$ к многочлену стандартного вида.

1) $3x^2 + 7xy - 32$ 2) $13x^2 - 8xy - 30$
3) $6x^2 + 4xy + 9$ 4) $7x^2 + 3xy + 9$

Ответ: ________________.

5. Приведите произведение многочленов $3(7a^2b - a^3)(ab^2 - b^3)$ к стандартному виду.

1) $24a^3b^3 - 24a^4b^2$ 2) $-3a^4b^2 - 21a^2b^4$
3) $24a^3b^3 - 3a^4b^2 - 21a^2b^4$ 4) $3a^9b^9$

Ответ: ________________.

6. Выполните умножение многочленов $(a-4)(a^2+4a+16)$ и полученный многочлен запишите в стандартном виде.

1) $a^3 + 64$ 2) $a^3 - 8$ 3) $a^3 - 64$ 4) $a^3 + 8$

Ответ: ________________.

7. Разложите на множители многочлен $121 - (t - 8)^2$.

1) $(3 - t)(3 - t)$ 2) $(11 - t)(t - 8)$
3) $(57 - t)(57 - t)$ 4) $(19 - t)(3 + t)$

Ответ: ________________.

8. Соотнесите каждое из выражений

А) $(x - y^2)^2$; Б) $(x^2 - y)^2$; В) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$

с тождественно равным ему выражением.

1) $x^4 - 2x^2y + y^2$ 2) $x^2 - 2xy^2 + y^4$
3) $x^4 - y^4$ 4) $5x^2 - 2xy$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно выражению $-x^2 - x + 20$?

1) $(x-4)(5-x)$ 2) $(4-x)(x+5)$
3) $(4-x)(5-x)$ 4) $(x+4)(x-5)$

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $(p-3q)(p+3q) + 9q^2 - 2pq - p^2$;

1) $2p^2 - 2pq$ 2) $18q^2 - 2pq$ 3) $18q^2 + 2p^2$ 4) $-2pq$

Ответ: ________________.

3. Найдите значение многочлена $p^2 + 2pq + q^2$ при $p = 1{,}5$; $q = -1{,}5$.

1) 9 2) $-4{,}5$ 3) 0 4) $-1{,}5$

Ответ: ________________.

4. Пусть $A = a(4a-1)$, $B = (1-2a)^2$. Приведите выражение $2bA - 3bB$ к многочлену стандартного вида.

1) $4a^2b - 10ab + 3b$ 2) $-4a^2b + 10ab - 3b$
3) $4a^2b + 10ab - 3b$ 4) $-4a^2b + 10ab + 3b$

Ответ: ________________.

5. Приведите произведение многочленов $(-2cd - 3c)(6c^4d^3 + c^4d^4)$ к стандартному виду.

1) $-15c^5d^4 - 2c^5d^5 - 18c^5d^3$ 2) $-15c^5d^4 - 2c^5d^5$
3) $-15c^5d^4 + 2c^5d^5 - 18c^5d^3$ 4) $-2c^5d^5 - 18c^5d^3$

Ответ: ________________.

6. Выполните умножение многочленов $(5c - 3d)(25c^2 + 15cd + 9d^2)$ и полученный многочлен запишите в стандартном виде.

1) $25c^3 - 27d^3$ 2) $27d^3 - 125c^3$
3) $125c^3 + 27d^3$ 4) $125c^3 - 27d^3$

Ответ: ________________.

7. Разложите на множители многочлен $z^3 + z^2 - z - 1$.

1) $(z-1)\cdot(z+1)$ 2) $(z-1)^2\cdot(z+1)$
3) $(z^2+1)\cdot(z-1)$ 4) $(z+1)^2\cdot(z-1)$

Ответ: ________________.

8. Соотнесите каждое из выражений

А) $(y+x)^3$; Б) $(x-y)^3$; В) $(x+y)(x^2 - xy + y^2)$

с тождественно равным ему выражением.

1) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ 2) $x^3 + y^3$
3) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ 4) $x^3 - y^3$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Какое из следующих выражений не является тождественно равным ни одному из выражений $x^2 - y^2$ и $(x-3)(x+2)$?

1) $(x-y)(x+y)$ 2) $x^2 - x - 6$
3) $(3-x)(-x-2)$ 4) $(x-y)^2$

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $(x-8)^2 - (x^2+64)$.

1) $16x + 128$ 2) 0 3) -128 4) $-16x$

Ответ: ________________.

3. Найдите значение многочлена $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 2, y = 3$.

1) 0 2) -4 3) 3 4) 1

Ответ: ________________.

4. Представьте выражение $(a+1)a + (a-1)^2$ в виде многочлена стандартного вида.

1) $3a - 1$ 2) $-2a + 1$ 3) $2a^2 - a + 1$ 4) $a^2 + a + 1$

Ответ: ________________.

5. Упростите выражение $A - B$, если $A = (2x-y)(x+2y)$,
$B = (x+y)^2 - 3y^2 - 5xy$.

1) $6xy - 4y^2$ 2) $x^2 + 2y^2$ 3) $x^2 - 2y^2$ 4) $x^2 + 6xy$

Ответ: ________________.

6. Выполните умножение многочленов $(a-2b)(2a^2 - 3ab - 2b^2)$ и полученный многочлен приведите к стандартному виду.

1) $2a^3 + 7a^2b - 4ab^2 + 4b^3$ 2) $2a^3 - 7a^2b + 4ab^2 + 4b^3$
3) $2a^3 - 7a^2b + 4ab^2 - 4b^3$ 4) $2a^3 + 7a^2b + 4ab^2 + 4b^3$

Ответ: ________________.

7. Найдите такой одночлен A, чтобы выражения
$(24c^7d^5 - 18c^6d^6) : A$ и $3d - 4c$ были тождественно равны при $c \neq 0$ и $d \neq 0$.

1) $6c^6d^5$ 2) $-2c^5d^6$ 3) $-6c^6d^5$ 4) $2c^5d^6$

Ответ: ________________.

8. Разложите на множители многочлен $y^3 + 2y^2 - 4y - 8$.

1) $(y+2)^2(y-2)$ 2) $(y-2)^2(y+2)$
3) $(y+2)(y^2+2)$ 4) $(y-4)(y+2)^2$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Какое из следующих выражений не является тождественно равным ни одному из выражений $(a-b)^2$ и $(a-4)(b+4)$?

1) a^2-b^2 2) $ab+4(a-b)-16$
3) $a^2-2ab+b^2$ 4) $(4-a)(-b-4)$

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $(x+2)^2-(4-x^2)$.

1) 0 2) $2x^2$ 3) $4x$ 4) $2x^2+4x$

Ответ: ________________.

3. Найдите значение многочлена $xy-3y+4x-12$ при $x=2$, $y=1{,}4$.

1) $5{,}4$ 2) $-4{,}4$ 3) $-4{,}6$ 4) $-5{,}4$

Ответ: ________________.

4. Представьте выражение $a(a-b)(a+b)+(a-1)(b^2+5)$ в виде многочлена стандартного вида.

1) a^3-2b^2+5a-5 2) a^3-b^2+5a-5
3) a^3-ab^2+5a-5 4) $a^3+2ab^2-b^2+5a-5$

Ответ: ________________.

5. Упростите выражение A^2+B, где $A=a-b^2$, $B=(2a-b^2)(b^2+4)$.

1) $8a-4b^2$ 2) $a^2+8a-4b^2$
3) $a^2+2b^4+8a-4b^2$ 4) $a^2-4ab^2+8a-4b^2$

Ответ: ________________.

6. Выполните умножение многочленов: $(m-n+1)(m+n+1)$.

1) m^2-n^2+1 2) $m^2+2m+1-n^2$
3) $m^2-2n+2m-n^2+1$ 4) m^2-n^2-1

Ответ: ________________.

7. Найдите такой одночлен A, чтобы выражения $(-12a^4b^5+9a^5b^3):A$ и $-4b^2+3a$ были тождественно равны при $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

1) $4a^4b^3$ 2) $3a^4b^3$
3) $3a^3b^4$ 4) $-3a^4b^3$

Ответ: ________________.

8. Разложите на множители многочлен $a^3-4a^2-4a+16$.

1) $(a-2)^2(a+2)$ 2) $(a-2)(a+2)(a+4)$
3) $(a-2)(a+2)(a-4)$ 4) $(a-4)^3$

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Какое выражение надо подставить вместо A, чтобы выражения $x^2 + x - 6$ и $A \cdot (x - 2)$ были тождественно равны?

1) $x - 6$ 2) $x + 3$ 3) $x + 6$ 4) $x - 3$

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $(2 - b)^3 + b(b^2 - 6b + 12)$. В ответе запишите его значение при $b = -5$.

Ответ: ________________.

3. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$\frac{1}{3} \cdot (9y - 6) - (7y + 4)$.

1) $4y + 6$ 2) $-4y + 6$ 3) $-4y - 6$ 4) $4y - 6$

Ответ: ________________.

4. Замените A таким одночленом, чтобы выполнялось равенство $-6a^4b^5 \cdot A = 18a^4b^{10}$.

1) $-3ab^2$ 2) $-3b^2$ 3) $-3ab^5$ 4) $-3b^5$

Ответ: ________________.

5. Упростите выражение $(a + 3)^2 + 2(3 - a)(a + 3) + (3 - a)^2$ и найдите его значение при $a = -\frac{11}{17}$.

Ответ: ________________.

6. Разложите на множители выражение $xy^3 + y^3 + x + 1$.

1) $(x + 1)(y + 1)(y^2 + y + 1)$ 2) $(x + 1)(y - 1)(y^2 + y + 1)$
3) $(x + 1)(y + 1)(y^2 - y + 1)$ 4) $(x + 1)(y - 1)(y^2 - y + 1)$

Ответ: ________________.

7. Упростите выражение $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16) - (a^4 - 1)^2$ и найдите его значение при $a = 3$.

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $(a + 1)^3 - (a - 1)^3$.

1) 2 2) $6a(a + 1)$ 3) $2(3a^2 + 1)$ 4) $6a^2$

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Какое выражение надо подставить вместо B, чтобы выражения $B \cdot (x^2 - 4)$ и $x^3 - x^2 - 4x + 4$ были тождественно равны?

1) $x^2 + 1$ 2) $x - 4$ 3) $x - 1$ 4) $x^2 + 4$

Ответ: ________________.

2. Упростите выражение $(2 + x)^3 - x(x^2 + 6x + 12)$. В ответе запишите его значение при $x = -9$.

Ответ: ________________.

3. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:
$(m + 2)(3 - m) - 3(m + 2)$.

1) $-m^2 - 2$ 2) $m^2 - 2m$ 3) $-m^2 - 2m$ 4) $-m^2 + 2m$

Ответ: ________________.

4. Замените B таким одночленом, чтобы выполнялось равенство
$7a^5b^2c^3 \cdot B = -56a^5b^3c^5$.

1) $9bc^2$ 2) $8bc^2$ 3) $-9bc^2$ 4) $-8bc^2$

Ответ: ________________.

5. Упростите выражение $(x - 3)^2 - 2(x + 3)(x - 3) + (x + 3)^2$ и найдите его значение при $x = -\frac{13}{19}$.

Ответ: ________________.

6. Разложите на множители выражение $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

1) $(x - 1)(y^2 - 1)$ 2) $(x^2 - 1)(y^2 - 1)$
3) $(x^2 - 1)(y - 1)$ 4) $(y^2 + 1)(x^2 - 1)$

Ответ: ________________.

7. Упростите выражение $(b^4 + 4)(b^2 + 2)(b^2 - 2) - (b^4 + 4)^2$ и найдите его значение при $b = 4$.

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $(a + 2)^3 - (a - 2)^3$.

1) 16 2) $4(3a^2 + 1)$ 3) $2(3a^2 + 1)$ 4) $4(3a^2 + 4)$

Ответ: ________________.

§ 8. Алгебра. Алгебраические дроби и преобразования рациональных выражений

Основные сведения

Рассмотрим алгебраическое выражение

$$((5x - 1) \cdot (4x + y)) : (4x^2 - 14xy).$$

Как видим, оно составлено из чисел, букв, операций: сложения, вычитания, умножения и деления, а также скобок. При этом определён порядок выполнения операций.

Вообще, всякое алгебраическое выражение, которое составлено указанным образом, называют **рациональным выражением**. Можно показать, что оно тождественно равно некоторой дроби, числителем и знаменателем которой являются многочлены.

Если вместо всех букв (переменных), входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые числа и выполнить все указанные действия, то полученное в результате число называется **значением алгебраического выражения** при заданных значениях букв (переменных).

Например, при $x = 1$ и $y = 2$ указанное выше алгебраическое выражение принимает значение -1:

$$((5 \cdot 1 - 1) \cdot (4 \cdot 1 + 2)) : (4 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 \cdot 2) = (4 \cdot 6) : (-24) = -1.$$

Значения переменных, при которых определены все действия, указанные в алгебраическом выражении, называют **допустимыми значениями** переменных.

Множество всех допустимых значений переменных заданного алгебраического выражения называют его **областью определения**.

В выражении $((5x - 1) \cdot (4x + y)) : (4x^2 - 14xy)$ пара значений $x = 0$ и $y = 1$ допустимой не является, так как $4x^2 - 14xy$ при указанных значениях равно 0, а деление на 0 не определено.

Если соответствующие значения двух выражений U и V равны при каждом наборе допустимых значений всех, входящих в них переменных, то их называют **тождественно равными** на множестве их допустимых значений, а равенство $U = V$ называют **тождеством** на множестве допустимых значений[2].

---

[2]**Далее мы не будем указывать область определения, считая, что все преобразования рассматриваемых алгебраических выражений проводятся для допустимых значений переменных.**

Если соответствующие значения двух выражений U и V равны при каждом наборе допустимых значений всех, входящих в них переменных, то их называют **тождественно равными** на множестве допустимых значений, а равенство $U = V$ называют **тождеством** на множестве его допустимых значений.

Выражения $\dfrac{a(x-y)}{b(x-y)}$ и $\dfrac{a}{b}$ тождественно равны на множестве, состоящем из таких значений x, y и b, что $x \neq y$ и $b \neq 0$.

Вообще, равенство $\dfrac{A \cdot C}{B \cdot C} = \dfrac{A}{B}$ является тождеством на множестве его допустимых значений.

Это тождество называют **тождеством сокращения** или **основным свойством дроби**. При сокращении дроби, имеющей вид $\dfrac{A \cdot C}{B \cdot C}$, её числитель и знаменатель делят на одно и то же выражение C, которое не обращается в ноль в области допустимых значений дроби $\dfrac{A \cdot C}{B \cdot C}$, и заменяют дробью $\dfrac{A}{B}$.

Отметим также, что тождеством является равенство $A = \dfrac{A}{1}$, а дроби $\dfrac{A}{B}$ и $\dfrac{C}{D}$ тождественно равны при условии, что тождественно равны произведения $A \cdot D$ и $B \cdot C$ и $BD \neq 0$.

При выполнении операций и преобразовании рациональных выражений пользуются теми же правилами, которые применялись при выполнении операций и преобразовании числовых выражений.

Задача. Найдите сумму алгебраических дробей:

$$\frac{x+2}{x^2+6x+9} - \frac{-3x+1}{x-3} + \frac{3x^2}{9-x^2}.$$

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю, для чего разложим на множители их знаменатели: $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$ (квадрат суммы); $x - 3$ на множители не разлагается;
$9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3-x)(3+x) = -(x-3)(x+3)$ (разность квадратов). Многочлен $(x+3)^2(x-3)$ является общим знаменателем. Дополнительными множителями для слагаемых дробей будут соответственно: $x - 3$; $(x+3)^2$; $-(x+3)$.

Тогда $\dfrac{x+2}{x^2+6x+9} - \dfrac{-3x+1}{x-3} + \dfrac{3x^2}{9-x^2} =$

$$\frac{(x+2)\cdot(x-3)}{(x+3)^2(x-3)} - \frac{(-3x+1)\cdot(x+3)^2}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{3x^2\cdot(-(x+3))}{(x-3)(x+3)^2} =$$

$$= \frac{(x+2)\cdot(x-3) - (-3x+1)\cdot(x+3)^2 + 3x^2\cdot(-(x+3))}{(x+3)^2(x-3)} =$$

$$= \frac{(x+2)\cdot(x-3) - (-3x+1)\cdot(x^2+6x+9) + 3x^2\cdot(-(x+3))}{(x+3)^2(x-3)} =$$

$$= \frac{x^2-3x+2x-6+3x^3+18x^2+27x-x^2-6x-9-3x^3-9x^2}{(x+3)^2(x-3)}.$$

Находим и приводим подобные члены в числителе:

$$\frac{(x^2+18x^2-x^2-9x^2)+(-3x+2x+27x-6x)-6-9}{(x+3)^2(x-3)} =$$

$$= \frac{9x^2+20x-15}{(x+3)^2(x-3)}.$$

Вариант с решениями

1. Укажите все значения c, которые не входят в область определения выражения $\dfrac{c+3}{c(c-1)}$.

1) 3 2) 0; 3 3) 1 4) 0; 1

Решение. Заданное выражение не определено, когда $c(c-1)=0$, то есть $c=0$ или $c=1$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

2. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{1}{x^2-8x}$; Б) $\dfrac{4}{x^2+9}$; В) $\dfrac{2x}{4x-8}$

с областью его определения.

1) $x \neq 2$ 2) x – любое число 3) $x \neq 8$, $x \neq 0$ 4) $x \neq 0$, $x \neq 2$

Решение. Областью определения выражения A является множество всех тех действительных чисел x, при которых $x^2-8x \neq 0$. Но $x^2-8x = x(x-8) = 0$ при $x=0$ или $x=8$. Следовательно, выражение А определено при $x \neq 0$ и $x \neq 8$, что соответствует ответу 3).

Областью определения выражения Б является множество всех действительных чисел, так как его знаменатель $x^2 + 9 \geqslant 9 > 0$ при любом x, что соответствует ответу 2).

Областью определения выражения В является множество всех тех действительных чисел x, при которых $4x - 8 \neq 0$. Но $4x - 8x = 4(x - 2) = 0$ при $x = 2$. Следовательно, выражение B определено при $x \neq 2$, что соответствует ответу 1).

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

3. Сократите дробь $\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9}$.

1) $x + 3$ 2) $\dfrac{x+9}{x-9}$ 3) $\dfrac{x^2 + 3x + 9}{x - 3}$ 4) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 6x + 9}$

Решение. Заметим, что $x^3 - 27 = x^3 - 3^3$. По формуле разности кубов $x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$, а по формуле квадрата разности $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Отсюда $\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)^2}$. Сокращая дробь на $x - 3$, получим $\dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{x^2 + 3x + 9}{x - 3}$. Эта дробь обозначена номером 3).

Ответ: 3.

4. Выполните деление дробей: $\dfrac{(a + 3)^2}{2a - 4} : \dfrac{3a + 9}{a^2 - 4}$.

1) $\dfrac{2a^2 - 6a + 3}{a - 2}$ 2) $\dfrac{a^2 + 5a + 6}{6}$

3) $\dfrac{2a^2 + 5a + 1}{6}$ 4) $\dfrac{a^2 - 5a + 6}{a + 3}$

Решение. Воспользуемся правилами деления дробей, вынесения за скобки общего множителя и формулой разности квадратов: $\dfrac{(a + 3)^2}{2a - 4} : \dfrac{3a + 9}{a^2 - 4} = \dfrac{(a + 3)^2}{2a - 4} \cdot \dfrac{a^2 - 4}{3a + 9} = \dfrac{(a + 3)^2(a - 2)(a + 2)}{2(a - 2) \cdot 3(a + 3)}$. Сократим полученную дробь на выражение $(a - 2)(a + 3)$, а затем выполним умножение в числителе:

$$\frac{(a + 3)^2(a - 2)(a + 2)}{2(a - 2) \cdot 3(a + 3)} = \frac{(a + 3)(a + 2)}{6} = \frac{a^2 + 5a + 6}{6}.$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Представьте выражение $2x + \dfrac{1-3x^2}{x}$ в виде дроби.

Решение. Запишем сначала одночлен $2x$ в виде дроби, а затем выполним сложение дробей:

$$2x + \frac{1-3x^2}{x} = \frac{2x}{1} + \frac{1-3x^2}{x} = \frac{2x \cdot x + 1 - 3x^2}{x} = \frac{1-x^2}{x}.$$

Ответ: $\dfrac{1-x^2}{x}$.

6. Упростите выражение $\dfrac{x^2+xy}{x^2-y^2} \cdot \left(\dfrac{y^2+xy}{x+y} - x\right)^2$ и найдите его значение при $x = -2$ и $y = 3$.

Решение. Применяем правило вынесения за скобки общего множителя, формулы сокращённого умножения и правило сокращения:

$$\frac{x^2+xy}{x^2-y^2} \cdot \left(\frac{y^2+xy}{x+y} - x\right)^2 = \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} \cdot \left(\frac{y(y+x)}{x+y} - x\right)^2 =$$

$$= \frac{x}{x-y} \cdot (y-x)^2 = x(x-y).$$

Подставляя в полученное выражение значения $x = -2$ и $y = 3$, получим $-2 \cdot (-2-3) = 10$.

Ответ: 10.

7. Найдите одночлен A из тождества $\dfrac{A}{6d} = \dfrac{5c^2d^4}{cd^2}$.

1) $30cd^3$ 2) $6cd$ 3) $5d^2$ 4) $5cd$

Решение. По свойствам тождеств получаем:

$$A = \frac{5c^2d^4 \cdot 6d}{cd^2} = \frac{30c^2d^5}{cd^2} = 30cd^3.$$

Ответ: 1.

8. Найдите сумму алгебраических дробей:

$$\frac{a-2}{a^3+3a^2+3a+1} - \frac{3}{a^2-1} + \frac{2}{a^2-2a+1}.$$

1) $\dfrac{2a^2-6a+3}{(a+1)^2(a-1)^3}$ 2) $\dfrac{a^2+5a+6}{(a+1)^2(a-1)^2}$

3) $\dfrac{-a^2+14a+3}{(a+1)^3(a-1)^2}$ 4) $\dfrac{a^2-5a+6}{a+3}$

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю, для чего разложим на множители их знаменатели: $a^3+3a^2+3a+1=(a+1)^3$ (куб суммы); $a^2-1=(a-1)(a+1)$ (разность квадратов); $a^2-2a+1=(a-1)^2$ (квадрат разности). Многочлен $(a+1)^3(a-1)^2$ является общим знаменателем. Дополнительными множителями для рассматриваемых дробей будут соответственно: $(a-1)^2$; $(a+1)^2(a-1)$; $(a+1)^3$.

Тогда $\dfrac{a-2}{a^3+3a^2+3a+1}-\dfrac{3}{a^2-1}+\dfrac{2}{a^2-2a+1}=$

$$\frac{(a-2)\cdot(a-1)^2}{(a+1)^3(a-1)^2}-\frac{3(a+1)^2(a-1)}{(a+1)^3(a-1)^2}+\frac{2\cdot(a+1)^3}{(a+1)^3(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a-2)\cdot(a-1)^2-3(a+1)^2(a-1)+2\cdot(a+1)^3}{(a+1)^3(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a-2)(a^2-2a+1)-3(a^2+2a+1)(a-1)+2(a^3+3a^2+3a+1)}{(a+1)^3(a-1)^2}.$$

Раскрываем в числителе скобки, а затем приводим подобные члены:

$$\frac{(3-3)a^3+(-2-2+3-6+6)a^2+(1+4+6-3+6)a+(-2+3+2)}{(a+1)^3(a-1)^2}=$$

$$=\frac{-a^2+14a+3}{(a+1)^3(a-1)^2}.$$

Полученная сумма обозначена номером 3.

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. Укажите все значения b, которые не входят в область определения выражения $\dfrac{b+8}{b(b+8)}$.

1) -8; 0 2) 0; 8 3) 0 4) -8

Ответ: _________________.

2. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-2}$; Б) $\dfrac{x-2}{2x-1}$; В) $\dfrac{2x-4}{x}$

с областью его определения.

1) любое число 2) $x\neq0$, $x\neq2$ 3) $x\neq0{,}5$ 4) $x\neq0$

Ответ:

А	Б	В

3. Сократите дробь $\dfrac{x^3+27}{x^2+6x+9}$.

1) $x+3$ 2) $\dfrac{x+9}{x-9}$ 3) $\dfrac{x^2-3x+9}{x+3}$ 4) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-6x+9}$

Ответ: ________________.

4. Выполните деление дробей $\dfrac{6a-3ab}{b^2+4b+4}:\dfrac{3a}{b^2-4}$.

1) $\dfrac{3a}{b+4}$ 2) $-\dfrac{b^2-4}{(b+2)^2}$ 3) $-\dfrac{(b-2)^2}{b+2}$ 4) $\dfrac{b-2}{b+2}$

Ответ: ________________.

5. Представьте выражение $x-\dfrac{x^2-5}{x}$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\dfrac{x^3+x^2y}{x^2-y^2}\cdot\left(\dfrac{y^2-xy}{x-y}+x\right)^2$ и найдите его значение при $x=-2$ и $y=3$.

Ответ: ________________.

7. Найдите одночлен A из тождества $\dfrac{A}{xy^2}=\dfrac{4x^3y^3}{2xy^2}$.

1) $2x^2y^3$ 2) $2xy$ 3) $2x^3y^3$ 4) $2x^3y^2$

Ответ: ________________.

8. Найдите сумму алгебраических дробей: $\dfrac{a^2-5a}{a^2-4}-\dfrac{2a^2-a}{a(a-2)}+\dfrac{2a+2}{a(a+2)}$.

1) $\dfrac{a^2}{2(a^2-4)\cdot a}$ 2) $\dfrac{-a^3-6a^2-4}{a(a^2-4)}$ 3) $\dfrac{2a^3}{2a(a^2-4)}$ 4) $\dfrac{a+1}{a^2-4}$

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Укажите все значения x, которые не входят в область определения выражения $\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$.

1) -1 2) $1;\ 3$ 3) $-1;\ -2$ 4) -2

Ответ: ________________.

2. Соотнесите каждое выражение

А) $2x + \dfrac{x^3}{x(x-6)}$; Б) $\dfrac{1}{x^2+36}$; В) $\dfrac{2}{x^2-36}$

с областью его определения.

1) любое число 2) $x \neq 0,\ x \neq 6$
3) $x \neq -6,\ x \neq 6$ 4) $x \neq 0,\ x \neq -6$

Ответ:

А	Б	В

3. Сократите дробь $\dfrac{8a^2-16a+8}{2a-2}$.

1) $4a+1$ 2) $4(a-1)$ 3) $8(a^2+1)$ 4) $8(a-1)$

Ответ: ________________ .

4. Выполните деление дробей $\dfrac{25m}{m-n} : \dfrac{15m^3}{m^2-n^2}$.

1) $\dfrac{5(m+n)}{3m}$ 2) $\dfrac{5(m+n)}{3m^2}$ 3) $\dfrac{5(m-n)}{3m^2}$ 4) $\dfrac{5}{3}m^2$

Ответ: ________________ .

5. Представьте выражение $3x - \dfrac{2+5x^2}{2x}$ в виде дроби.

Ответ: ________________ .

6. Упростите выражение $\dfrac{x^2-y^2}{y^2+xy} : \left(1 - \dfrac{x^2+xy}{y^2+xy}\right)^2$ и найдите его значение при $x = 3$ и $y = 4$.

Ответ: ________________ .

7. Найдите одночлен B из тождества $\dfrac{3x^5y^4}{B} = \dfrac{x^4y^5}{x^2y^3}$.

1) $3xy^3$ 2) $3xy$ 3) $3x^2y$ 4) $3x^3y^2$

Ответ: ________________ .

8. Найдите сумму алгебраических дробей:

$$\frac{x+5}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x+3} + \frac{4x-1}{x^2-9}.$$

1) $\dfrac{3x^2+7x}{(x^2-9)(x-3)}$ 2) $\dfrac{3x^2-7x}{(x^2-9)(x-3)}$

3) $\dfrac{-3x^2+7x}{(x^2-9)(x-3)}$ 4) $\dfrac{-3x^2-7x}{(x^2-9)(x-3)}$

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Укажите все значения b, которые не входят в область определения выражения $\frac{3}{b-1}-\frac{3b}{b^2-b}$.

1) 3 2) 0; 1 3) 1 4) -1

Ответ: ________________.

2. Соотнесите каждое выражение

А) $5x+\frac{x^3}{x(x-3)}$; Б) $\frac{1}{x^2+4}$; В) $\frac{2}{x^2-4}$

с областью его определения.

1) любое число 2) $x \neq 0,\ x \neq 3$
3) $x \neq -2,\ x \neq 2$ 4) $x \neq 0,\ x \neq -3$

Ответ:

А	Б	В

3. Сократите дробь $\frac{2a^2+5a}{25-4a^2}\cdot(5-2a)$.

Ответ: ________________.

4. Выполните вычитание дробей $\frac{3b}{ab+b}-\frac{5a}{a^2+a}$.

1) $-\frac{2}{a+1}$ 2) $\frac{3b^2-5a^2}{a^2b+ab}$
3) $\frac{2}{a+1}$ 4) $\frac{5a^2-3b^2}{a^2b+ab}$

Ответ: ________________.

5. Представьте выражение $\frac{4-5x^2}{x}+2x$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\frac{1}{b^2+2}:\left(\frac{2}{b^2}-\frac{4}{b^4+2b^2}\right)$ и найдите его значение при $b=15$.

Ответ: ________________.

7. Найдите такой многочлен C, чтобы отношение $C + 4a$ к $a^2 - b^2$ было тождественно равно отношению $a^2 + 4$ к $a + b$.

1) $a^3 - a^2b - 4b$ 2) $a^3 + ab - 4b$
3) $a^2 + ab + 4b$ 4) $-a^2 + ab - 4b$

Ответ: ________________.

8. Найдите сумму алгебраических дробей:

$$\frac{2a^2 + 10a}{a^2 + 10a + 25} + \frac{3a^3 - 15a^2}{a^2 - 10a + 25} - \frac{1 - 10a}{a^2 - 25}.$$

1) $\frac{3a^3 + 17a^2 + 1}{a^2 - 25}$ 2) $\frac{3a^3 + 17a^2 - 1}{a^2 - 25}$
3) $\frac{-3a^3 - 17a^2 - 1}{a^2 - 25}$ 4) $\frac{-3a^3 - 17a^2 + 1}{a^2 - 25}$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Укажите все значения a, которые не входят в область определения выражения $\frac{a}{3 - a} - \frac{3}{a - 2}$.

1) 3; 2 2) 3 3) 2 4) 0

Ответ: ________________.

2. Соотнесите каждое выражение

А) $\frac{a^5}{a + 2}$; Б) $\frac{2a}{a^2 + 9}$; В) $\frac{a + 1}{a^2 - 1}$

с областью его определения.

1) $a \neq -1,\ a \neq 1$ 2) любое число
3) $a \geqslant 0$ 4) $a \neq -2$

Ответ:

А	Б	В

3. Сократите дробь $\frac{(3a^2 - 7a) \cdot (3a + 7)}{49 - 9a^2}$.

Ответ: ________________.

4. Выполните вычитание дробей $\frac{a - 4b}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 + ab}$.

1) $\frac{5b}{a + b^2}$ 2) $\frac{-5b}{(a + b)^2}$ 3) $\frac{5b}{a^2 + b}$ 4) $\frac{5b}{a^2 + b^2}$

Ответ: ________________.

5. Представьте выражение $\dfrac{x - x^2 + 1}{x} + x$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\left(\dfrac{4}{b} + \dfrac{8}{b^2 - 2b}\right) : \dfrac{1}{b-2}$ и найдите его значение при $b = -15$.

Ответ: ________________.

7. Найдите такой многочлен D, чтобы отношение $D - 3a$ к $a^2 - b^2$ было тождественно равно отношению $a - 3$ к $a - b$.

1) $a^2 - ab + 3b$ 2) $a^2 + ab - 3b$
3) $a^2 - 3b$ 4) $a^3 + ab - 3b$

Ответ: ________________.

8. Найдите сумму алгебраических дробей:

$$\frac{3a^2 - 12a}{16 - 8a + a^2} + \frac{-2a^3 - 8a^2}{a^2 + 8a + 16} - \frac{2 + 12a}{a^2 - 16}.$$

1) $\dfrac{-2a^3 + 11a^2 - 2}{a^2 - 16}$ 2) $\dfrac{-2a^3 - 11a^2 - 2}{a^2 - 16}$

3) $\dfrac{-2a^3 + 11a^2 + 2}{a^2 - 16}$ 4) $\dfrac{2a^3 + 11a^2 + 2}{a^2 - 16}$

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Из перечисленных ниже значений x выберите те, при которых определено значение функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

1) $x = 1$ 2) $x = 2$ 3) $x = 3$ 4) $x = 1; x = 2$

Ответ: ________________.

2. Соотнесите каждое выражение с областью его определения.

А) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 9} - 3$ Б) $x^2 + 9 - \dfrac{1}{x^2 - 9}$ В) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + 3$

1) $x \neq \pm 3$ 2) x – любое число 3) $x \neq \pm 2, x \neq \pm 3$ 4) $x \neq 3$

Ответ:

А	Б	В

3. Сократите дробь $\dfrac{(3y^2 - 3yx - 2y + 2x)(x - y)}{(x - y)^2}$.

1) $2 - 3y$ 2) $3y - 2$ 3) $2 + 3y$ 4) $3y$

Ответ: ______________.

4. Найдите P из тождества, если $a \neq \pm\frac{1}{3}$, $a \neq 0$.

$\dfrac{9a^2 - 1}{15a^3} \cdot P = \dfrac{3a - 1}{5a^2}$.

1) $\dfrac{3a}{3a + 1}$ 2) $\dfrac{3a + 1}{3a - 1}$ 3) $3a^2$ 4) $3a + 1$

Ответ: ______________.

5. Представьте выражение $\dfrac{3x^2 - 3x + 1}{3x} - x$ в виде дроби.

Ответ: ______________.

6. Упростите выражение $\dfrac{6x^2 + 7x - 3}{x} : (3x - 1)$ и найдите его значение при $x = -1{,}5$.

Ответ: ______________.

7. Найдите такой многочлен A, чтобы равенство

$A + \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \dfrac{a^2}{a - b} - \dfrac{b^2}{a - b}$ было тождеством.

1) $-4b$ 2) $a^2b - 8a - 4b$
3) a^2b 4) $2b$

Ответ: ______________.

8. Упростите выражение

$\dfrac{1}{3b + 1} + \dfrac{27b^3 - 3b}{3b^2 - 2b + 1} \cdot \left(\dfrac{b}{9b^2 - 1} - \dfrac{1}{9b^2 + 6b + 1}\right)$,

1) 1 2) 0 3) $\dfrac{8b}{3b - 1}$ 4) -1

Ответ: ______________.

Вариант № 6

1. Из перечисленных ниже значений x выберите те, при которых определено значение функции $y = \dfrac{x+5}{(x^2+3x-4)x}$.

1) $x = 1, x = -4$ 2) $x = 1$ 3) $x = -4$ 4) $x = 5$

Ответ: ________________.

2. Соотнесите каждое выражение с областью его определения.

А) $\dfrac{3m+1}{9m^2-1}$ Б) $\dfrac{3m-1}{3m+1}$ В) $\dfrac{1}{(3m-2)(3m+1)}$

1) $m \neq \frac{1}{3}$ 2) $m \neq \pm\frac{1}{3}$ 3) $m \neq -\frac{1}{3}$ 4) $m \neq -\frac{1}{3}, m \neq \frac{2}{3}$

Ответ:

А	Б	В

3. Сократите дробь $\dfrac{(2xy+3x-2x^2-3y)\cdot(x+y)}{x^2-y^2}$.

1) $2-3y$ 2) $3y-2$ 3) $2x-3$ 4) $3-2x$

Ответ: ________________.

4. Найдите Q из тождества

$\dfrac{a^2-9}{14a^3}\cdot Q = \dfrac{a-3}{2a}$, если $a \neq \pm 3$, $a \neq 0$.

1) $\dfrac{7a^2}{3+a}$ 2) $\dfrac{a+3}{7a}$ 3) $7a^2$ 4) $a+3$

Ответ: ________________.

5. Представьте выражение $x - \dfrac{3x^2-3x+1}{3x}$ в виде дроби.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $x : \dfrac{3x-5}{6x^2-7x-5}$ и найдите его значение при $x = -0{,}5$.

Ответ: ________________.

7. Найдите такой многочлен B, чтобы равенство

$B + \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} = \dfrac{b^2}{a - b} - \dfrac{a^2}{a - b}$ было тождеством.

1) $-4b$ 2) $-8a - 4b$

3) $-2a - 2b$ 4) $2b$

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение

$$\frac{1}{3b - 1} - \frac{27b^3 - 3b}{-3b^2 + 2b - 1} \cdot \left(\frac{1}{9b^2 - 1} - \frac{b}{9b^2 - 6b + 1}\right).$$

1) 1 2) 0 3) $\dfrac{8b}{3b - 1}$ 4) -1

Ответ: ________________.

§ 9. Алгебра. Квадратные корни

Основные сведения

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a, обозначается $\boldsymbol{\sqrt{a}}$.

При любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ определено. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не определено.

$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0,01} = 0,1$; $\sqrt{-36}$ не существует.

Из определения арифметического корня получаем:

$\boldsymbol{\sqrt{a} \geqslant 0}$ и $\boldsymbol{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$, если $\boldsymbol{a \geqslant 0}$.

Свойства арифметического квадратного корня

1) $\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$, если $\boldsymbol{a \geqslant 0}$ и $\boldsymbol{b \geqslant 0}$.

2) $\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$, если $\boldsymbol{a \geqslant 0}$ и $\boldsymbol{b > 0}$.

3) $\boldsymbol{\sqrt{a^{2k}} = |a^k|}$, если $\boldsymbol{k \in N}$.

4) если $\boldsymbol{a > b \geqslant 0}$, то $\boldsymbol{\sqrt{a} > \sqrt{b}}$.

Приведём ещё два правила — «внесения множителя под корень» и «вынесения множителя из под корня»:

$\boldsymbol{a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}}$, если $\boldsymbol{a \geqslant 0}$ и $\boldsymbol{b \geqslant 0}$;

$\boldsymbol{\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}}$, если $\boldsymbol{b \geqslant 0}$.

Задача. Упростите выражение $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ при $a > 0$ и $b > 0$.

Решение. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $a = (\sqrt{a})^2$ и $b = (\sqrt{b})^2$. Тогда $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Применяя формулу разности квадратов и сокращая дробь, получаем:

$$\frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Ответ: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Вариант с решениями

1. Из чисел $3\sqrt{2}$; $\sqrt{15}$; 4; $5\sqrt{3}$ выберите наибольшее.

1) 4 2) $\sqrt{15}$ 3) $5\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{2}$

Решение. Внесём соответствующие множители под корень. Получим

$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $4 \cdot \sqrt{1} = \sqrt{4^2 \cdot 1} = \sqrt{16}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$.

Наибольшим из чисел $\sqrt{18}, \sqrt{15}, \sqrt{16}, \sqrt{75}$, представленных в виде квадратных корней, будет то, у которого число под корнем – наибольшее. Следовательно, наибольшим из заданных чисел является $\sqrt{75}$, которое равно $5\sqrt{3}$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Какое из данных выражений равно выражению $\dfrac{\sqrt{12}}{5}$?

1) $\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ 2) $4\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ 3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ 4) $\dfrac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Решение. Преобразуем числитель дроби $\dfrac{\sqrt{12}}{5}$. Заметим, что

$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$. Выносим множитель 2 из под корня:
$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

Тогда $\dfrac{\sqrt{12}}{5} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$. Число $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ обозначено номером 3).

Ответ: 3.

3. Вычислите $\sqrt{1\dfrac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09}$.

1) 0,3 2) 0,5 3) –0,3 4) –0,5

Решение. Запишем смешанное число $1\dfrac{24}{25}$ в виде обыкновенной дроби: $1\dfrac{24}{25} = \dfrac{49}{25}$. Тогда

$$\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{49}{25}} - 3\sqrt{0{,}09} = \frac{7}{5} - 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5.$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Упростите выражение $(8\sqrt{18}+6\sqrt{24}-\sqrt{72}):(2\sqrt{6})$.

1) $3\sqrt{3}-12$ 2) $3\sqrt{3}+6$ 3) $\sqrt{3}-4$ 4) 12

Решение. Согласно правилу деления суммы на число получаем:
$$(8\sqrt{18}+6\sqrt{24}-\sqrt{72}):(2\sqrt{6})=\frac{8\sqrt{18}}{2\sqrt{6}}+\frac{6\sqrt{24}}{2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}}=$$
$$=4\sqrt{\frac{18}{6}}+3\sqrt{\frac{24}{6}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{72}{6}}=4\sqrt{3}+6-\sqrt{3}=3\sqrt{3}+6.$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Сократите дробь $\dfrac{49-y}{7-\sqrt{y}}$.

1) $7+\sqrt{y}$ 2) $\dfrac{1}{7+\sqrt{y}}$ 3) $7+y$ 4) $\sqrt{7}-\sqrt{y}$

Решение. Так как в области допустимых значений заданной дроби $y\geqslant 0$, то $y=(\sqrt{y})^2$. Кроме того, $49=7^2$, поэтому, применяя формулу разности квадратов и сокращая дробь, получаем:
$$\frac{49-y}{7-\sqrt{y}}=\frac{7^2-(\sqrt{y})^2}{7-\sqrt{y}}=\frac{(7-\sqrt{y})(7+\sqrt{y})}{7-\sqrt{y}}=7+\sqrt{y}.$$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Упростите, исключив иррациональность в знаменателе дроби
$$\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

Решение. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Тогда в знаменателе по формуле разности квадратов получим: $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$. Отсюда
$$\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=$$
$$\frac{(5-2\sqrt{15}+3)(4+\sqrt{15})}{2}=\frac{2(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}{2}=16-15=1.$$

Ответ: 1.

7. Найдите значение выражения $x^2 - 3\sqrt{2}x + 2$, если $x = \sqrt{2} + 1$.

1) $-\sqrt{2} - 1$ 2) $\sqrt{2} + 1$ 3) $\sqrt{2} - 1$ 4) $1 - \sqrt{2}$

Решение. Подставляя в заданное выражение число $\sqrt{2} + 1$ вместо x, получим:

$(\sqrt{2}+1)^2 - 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) + 2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 3 \cdot 2 - 3\sqrt{2} + 2 = -1 - \sqrt{2}$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

8. Упростите выражение $\sqrt{(x-3)^2} \cdot (3 - x)$ при $x \leqslant 3$.

1) $(3 - x)^2$ 2) 0 3) $(3 + x)^2$ 4) $-(3 - x)^2$

Решение. По свойству квадратного корня ($\sqrt{a^2} = |a|$) получаем:

$\sqrt{(x-3)^2} \cdot (3 - x) = |(x - 3)| \cdot (3 - x)$.

Так как $x \leqslant 3$, то $x - 3 \leqslant 0$, поэтому $|(x - 3)| = -(x - 3) = 3 - x$.

$\sqrt{(x-3)^2} \cdot (3 - x) = (3 - x)^2$.

Ответ: 1.

Вариант № 1

1. Из чисел $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{22}$ выберите наименьшее.

1) $3\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{26}$ 4) $\sqrt{22}$

Ответ: ________________.

2. Какое из данных выражений равно $\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$?

1) $\sqrt{\dfrac{6}{49}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{18}}{7}$ 3) $4\sqrt{\dfrac{2}{7}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$

Ответ: ________________.

3. Вычислите $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot 4{,}5}$.

1) $2\sqrt{2}$ 2) 2 3) 3 4) $\sqrt{2}$

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $(\sqrt{27} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

1) 1 2) -1 3) 3 4) -3

Ответ: ________________.

5. Сократите дробь $\dfrac{a - 9}{\sqrt{a} + 3}$.

1) $\sqrt{a} - 3$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{a} + 3}$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt{a} - 3}$ 4) $3 + \sqrt{a}$

Ответ: ________________.

6. Вычислите, исключив иррациональность в знаменателе дроби, $\frac{(2\sqrt{3}-3)\cdot(7+4\sqrt{3})}{\sqrt{12}+3}$.

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $2u^2+5uv-3v^2$, если $u=\sqrt{6}$, $v=\sqrt{24}$.

1) 12 2) $\sqrt{24}-2$ 3) 0 4) $18-\sqrt{24}$

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $(x-2)\sqrt{\frac{1}{4-4x+x^2}}$ при $x>2$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Из чисел $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{17}$ выберите наибольшее.

1) $2\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{11}$ 4) $\sqrt{17}$

Ответ: ________________.

2. Какое из данных выражений равно $\frac{4}{\sqrt{18}}$?

1) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ 2) $4\sqrt{\frac{2}{9}}$ 3) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ 4) $\frac{3}{2\sqrt{9}}$

Ответ: ________________.

3. Вычислите $\sqrt{10\frac{1}{36}\cdot 5\frac{4}{9}}$.

1) $\frac{5\sqrt{2}}{18}$ 2) $\frac{10}{18}$ 3) $\frac{133}{18}$ 4) $\frac{\sqrt{200}}{18}$

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $(4\sqrt{45}+2\sqrt{80}-\sqrt{20}):2\sqrt{5}$.

1) 9 2) $2+2\sqrt{3}$ 3) 10 4) $6-\sqrt{5}$

Ответ: ________________.

5. Сократите дробь $\dfrac{x-7}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}$.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{7}}$ 2) $\sqrt{x}+\sqrt{7}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{7}}$ 4) $\sqrt{x}-\sqrt{7}$

Ответ: ________________.

6. Вычислите, исключив иррациональность в знаменателе дроби, $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{21}+5)}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $2a^2-3ab+2b^2$, если $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

1) 19 2) 17 3) $17+8\sqrt{6}$ 4) $23+8\sqrt{6}$

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $(x-7)\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x^2-14x+49}}$ при $x<7$.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

1) $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ 2) $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$

3) $\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$

Ответ: ________________.

2. Какое из данных выражений **не** равно $\dfrac{2}{\sqrt{28}}$?

1) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ 3) $\sqrt{\dfrac{1}{14}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{28}}{14}$

Ответ: ________________.

3. Вычислите $\sqrt{3\frac{2}{9}}\cdot\sqrt{2\frac{23}{29}}$.

1) $2\sqrt{\dfrac{23}{29}}$ 2) $3\sqrt{2\dfrac{11}{29}}$ 3) 3 4) 4

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $\left(\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{12}$.

1) 12 2) 26 3) 36 4) 21

Ответ: ________________.

5. Сократите дробь $\dfrac{x+\sqrt{8x}+2}{x+\sqrt{2x}-2\sqrt{x}-2\sqrt{2}}$.

1) $\sqrt{x}+2$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 3) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}-2}$ 4) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

Ответ: ________________.

6. Вычислите $-\sqrt{0{,}2}\cdot(\sqrt{98}\cdot\sqrt{10}+\sqrt{1{,}8})$.

1) $\sqrt{0{,}2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $-14{,}6$ 4) $-13{,}4$

Ответ: ________________.

7. Одна из точек на координатной прямой (см. рис. 16) соответствует числу $\sqrt{133}$. Какая это точка?

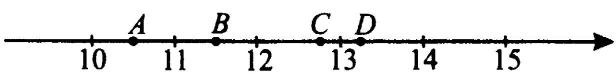


Рис. 16.

1) A 2) B 3) C 4) D

Ответ: ________________.

8. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ при $x<3$.

1) $x-3$ 2) 1 3) -1 4) $3-x$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Расположите в порядке убывания числа $3\sqrt{3}$; $\sqrt{28}$; 5,5; $2\sqrt{6}$.

1) 5,5; $3\sqrt{3}$; $\sqrt{28}$; $2\sqrt{6}$ 2) $2\sqrt{6}$; $3\sqrt{3}$; 5,5; $\sqrt{28}$

3) $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$; $\sqrt{28}$; 5,5 4) 5,5; $\sqrt{28}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{6}$

Ответ: ________________.

2. Какое из данных выражений **не** равно $\dfrac{\sqrt{45}}{2}$?

1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ 2) $\sqrt{\dfrac{45}{4}}$ 3) $\dfrac{15}{2\sqrt{5}}$ 4) $\sqrt{\dfrac{45}{2}}$

Ответ: ________________ .

3. Вычислите $\sqrt{2\dfrac{1}{12}} : \sqrt{8\dfrac{1}{3}}$.

1) 0,5 2) −0,5 3) 2 4) −2

4. Вычислите $\left(8\sqrt{12} + 4\sqrt{75}\right) : (3\sqrt{3})$.

1) 116 2) 4 3) 36 4) 12

Ответ: ________________ .

5. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt{4 - 4\sqrt{x} + x}}{\sqrt{x} - 2}$ при $x > 4$.

1) $\sqrt{x} + 2$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 3) 1 4) −1

Ответ: ________________ .

6. Вычислите $\sqrt{0{,}4} \cdot (\sqrt{4{,}9} - 3\sqrt{10})$.

1) $\sqrt{0{,}6}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) −4,6 4) 4,6

Ответ: ________________ .

7. Одна из точек на координатной прямой (см. рис. 17) соответствует числу $\sqrt{173}$. Какая это точка?

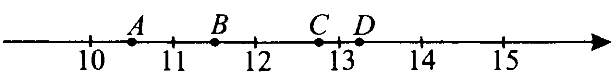


Рис. 17.

1) A 2) B 3) C 4) D

Ответ: ________________ .

8. Упростите выражение $\dfrac{1}{x+1}\sqrt{x^2 + 6x + 9}$ при $x > -3$.

1) 1 2) 0 3) $\dfrac{2x+3}{x+1}$ 4) $1 + \dfrac{2}{x+1}$

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Расположите числа $5\sqrt{2}$; 7; $3\sqrt{8}$; $4\sqrt{3}$ в порядке возрастания.

1) 7; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}$
2) $4\sqrt{3}$; 7; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}$
3) $5\sqrt{2}$; 7; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{8}$
4) $3\sqrt{8}$; $5\sqrt{2}$; 7; $4\sqrt{3}$

Ответ: ________________.

2. Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{56}$.

1) $-2\sqrt{8}$ 2) $2\sqrt{8}$ 3) $-2\sqrt{14}$ 4) $2\sqrt{14}$

Ответ: ________________.

3. Найдите значение выражения $5 - 2\sqrt{14} + \sqrt{56}$.

1) 11 2) 5 3) -5 4) $11\sqrt{7}$

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} - 3)$.

1) -4 2) 4 3) $(\sqrt{5} - 3)^2$ 4) -2

Ответ: ________________.

5. Сократите дробь $\dfrac{x^4 - 4}{(x^2 + 2)\left(x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}\,\right)}$

1) $\dfrac{x - \sqrt{2}}{x - 1}$ 2) $\dfrac{x + \sqrt{2}}{x + 1}$ 3) $\dfrac{x - \sqrt{2}}{x + 1}$ 4) $\dfrac{x + \sqrt{2}}{x - 1}$

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{50} - \sqrt{72}}{5\sqrt{2}}$

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $a^4 - 8a^2 + 16$ при $a = 1 - \sqrt{3}$.

Ответ: ________________.

8. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\dfrac{\sqrt{3x - 19}}{x - 7}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Расположите в порядке убывания числа $2\sqrt{10}$; 6,5; $\sqrt{41}$.

1) $2\sqrt{10}$; $\sqrt{41}$; 6,5
2) $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$; 6,5
3) $2\sqrt{10}$; 6,5; $\sqrt{41}$
4) 6,5; $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$

Ответ: ________________.

2. Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{63}$.

1) $7\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{7}$ 3) $3\sqrt{60}$ 4) $7\sqrt{56}$

Ответ: ________________.

3. Найдите значение выражения $5 - 3\sqrt{7} + \sqrt{63}$.

1) 11 2) 5 3) -5 4) $11\sqrt{7}$

Ответ: ________________.

4. Упростите выражение $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5} - 2)$.

1) -1 2) 4 3) $(\sqrt{5} - 3)^2$ 4) 1

Ответ: ________________.

5. Сократите дробь $\dfrac{x^4 - 9}{(x^2 + 3)\left(x^2 - (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}\right)}$.

1) $\dfrac{x - \sqrt{3}}{x - 1}$ 2) $\dfrac{x + \sqrt{3}}{x + 1}$ 3) $\dfrac{x + \sqrt{2}}{x + 1}$ 4) $\dfrac{-x - \sqrt{3}}{x - 1}$

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} - \sqrt{75}}{-8\sqrt{3}}$

Ответ: ________________.

7. Найдите значение выражения $a^4 - 12a^2 + 36$ при $a = 1 - \sqrt{5}$.

Ответ: ________________.

8. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\sqrt{80 + 9x}$.

Ответ: ________________.

§ 10. Алгебра. Линейные и квадратные уравнения

Основные сведения

Линейное уравнение. Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые числа, x — переменная, называется линейным.

1) Если $a \neq 0$, а b — любое число, то уравнение имеет единственное решение (корень): $x = -\frac{b}{a}$.

Например, $6x + 54 = 0$, $6x = -54$, $x = -\frac{54}{6} = -9$, $x = -9$.

2) Если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение принимает вид $0x+0 = 0$, $0x = 0$, поэтому любое действительное число является решением этого уравнения.

3) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение $0x + b = 0$ решений не имеет, так как при любом значении x в левой части уравнения получается не ноль, а в правой ноль.

Квадратное уравнение.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где где a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называется квадратным уравнением, а число $D = b^2 - 4ac$ называется его **дискриминантом**.

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два решения (корня):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Например, в уравнении $2x^2 + x - 6 = 0$ имеем $a = 2$, $b = 1$ и $c = -6$, $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49 > 0$, тогда

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 - 7}{4} = -2, \; x_2 = \frac{-1 + 7}{4} = 1{,}5.$$

Если $D > 0$ и b — чётное целое число, то корни квадратного уравнения удобно вычислять по формулам

$$x_1 = \frac{-b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}, \; x_2 = \frac{-b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}.$$

2) Если $D = 0$, то получаем единственный корень $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

3) Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

Квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$, в котором коэффициент a при x^2 равен 1, называется **приведённым квадратным уравнением**.

Неполные квадратные уравнения. Квадратные уравнения, в которых коэффициент b при x или свободный член c обращаются в ноль, называются **неполными**. Их можно решать, не используя указанные выше формулы для нахождения корней x_1, x_2.

1) $ax^2 + bx = 0\ (b \neq 0)$, $x(ax + b) = 0$. Отсюда либо $x = 0$, либо $ax + b = 0$, поэтому $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

2) $ax^2 + c = 0\ (c \neq 0)$, $x^2 = -\dfrac{c}{a}$. Если a и c имеют разные знаки, то $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. Если же a и c имеют одинаковые знаки, то это уравнение корней не имеет.

3) $ax^2 = 0, x^2 = 0, x = 0$.

Теоремы Виета. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -b$ и $x_1 x_2 = c$. Коэффициент b при x противоположен сумме корней, а свободный член c равен произведению корней.

Верно и обратное утверждение. Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

При $a = 1$ получаем, что если $x_1 + x_2 = -b$ и $x_1 x_2 = c$, то x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Следствия

1. Если коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют равенству $a + b + c = 0$, то его корнями будут числа $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

2. Если коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют равенству $a - b + c = 0$, то его корнями будут числа $x_1 = -1$ и $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители.

Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, где x_1 — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ на линейные множители с действительными коэффициентами не разлагается.

Вариант с решениями

1. Решите уравнение $\frac{5 - x}{2} + 1 = \frac{3x - 1}{4}$.

Решение. Умножим обе части заданного уравнения на 4, получим уравнение $10 - 2x + 4 = 3x - 1$. Перенесем с противоположным знаком слагаемые, содержащие x, в левую часть уравнения, а слагаемые, не содержащие x, в правую часть и приведем подобные слагаемые. Получим уравнение $-5x = -15$, $x = \frac{-15}{-5} = 3$, $x = 3$.

Ответ: 3.

2. Найдите корни уравнения $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

1) $\frac{1}{5}; 3$ 2) $-\frac{1}{5}; -3$ 3) $-\frac{1}{5}; 3$ 4) $\frac{1}{5}; -3$

Решение. Так как коэффициент при x — чётный, то корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{(-8)^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5};$$

$$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{(-8)^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{8 + 7}{5} = 3.$$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Разложите квадратный трёхчлен $5x^2 + 2x - 3$ на линейные множители.

1) $(x + 1)\left(x + \frac{3}{5}\right)$ 2) $(x - 1)\left(x - \frac{3}{5}\right)$

3) $(x + 1)(5x - 3)$ 4) $5(x - 1)(x - 3)$

Решение. Для разложения квадратного трёхчлена на линейные множители (см. «Основные сведения» к параграфу), находим корни уравнения $5x^2 + 2x - 3 = 0$. Заметим, что его коэффициенты удовлетворяют равенству $a - b + c = 0$ $(5 - 2 + 3 = 0)$. Тогда согласно следствию 2) (см. «Основные сведения» к параграфу), его корнями будут числа -1 и $-\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Значит, $5x^2 + 2x - 3 = 5(x - (-1))\left(x - \frac{3}{5}\right) = 5(x+1)\left(x - \frac{3}{5}\right) = (x+1)(5x-3)$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. Составьте приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -7$; $x_2 = -1$.

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$ 2) $x^2 - 8x + 7 = 0$
3) $x^2 - 8x - 7 = 0$ 4) $x^2 + 8x - 7 = 0$

Решение. Находим $x_1 + x_2$ и $x_1 \cdot x_2$.

По условию $x_1 + x_2 = -7 + (-1) = -8$, а $x_1 \cdot x_2 = -7 \cdot (-1) = 7$. Тогда по теореме Виета x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $x^2 + 8x + 7 = 0$. Значит, $x^2 + 8x + 7 = 0$ — искомое уравнение.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

5. Решите уравнение $4x^4 - 100x^2 = 0$.

Решение. Вынесем в левой части уравнения за скобки $4x^2$. Получим уравнение $4x^2(x^2 - 25) = 0$. Тогда либо $x^2 = 0$, либо $x^2 - 25 = 0$. Отсюда получаем, что $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 5$.

Ответ: -5; 0; 5.

6. Упростите выражение $\frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3} - \frac{1}{x - 1}$ в его области определения.

1) $\frac{1}{x-3}$ 2) $\frac{1}{(x-1)(2x-3)}$
3) $\frac{x}{x-3}$ 4) другой ответ

Решение. Для нахождения суммы дробей приведём их к общему знаменателю. Разложим на множители знаменатель первой дроби. Корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ находим по теореме Виета: сумма корней равна $-(-4) = 4$, а произведение равно 3. Такими числами являются числа 1 и 3 ($1 + 3 = 4 = -(-4)$ и $1 \cdot 3 = 3$). Следовательно, $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$. Тогда

$$\frac{x^2-3}{x^2-4x+3}-\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-3}{(x-1)(x-3)}-\frac{1}{x-1}.$$

Общим знаменателем дробей будет произведение $(x-1)(x-3)$. Дополнительным множителем к первой дроби будет 1, а ко второй $x-3$. Значит,

$$\frac{x^2-3}{(x-1)(x-3)}^{\diagdown 1}-\frac{1}{x-1}^{\diagdown x-3}=\frac{(x^2-3)\cdot 1-1\cdot(x-3)}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-3-x+3}{(x-1)(x-3)}=\frac{x^2-x}{(x-1)(x-3)}=\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x}{x-3},$$

учитывая, что $x\neq 1$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Найдите, при каких значениях параметра b уравнение

$(b-1)x^2+(b-1)x-\frac{3}{4}b=0$ имеет единственный корень.

Решение. Если $b=1$, то уравнение принимает вид $-\frac{3}{4}=0$, поэтому решений не имеет.

Если же $b\neq 1$, то получаем квадратное уравнение, которое имеет единственный корень в том и только том случае, когда его дискриминант D равен нулю. Поэтому решаем уравнение $D=0$:

$$D=(b-1)^2-4(b-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}b\right)=(b-1)^2+3(b-1)\cdot b=$$
$$=(b-1)(4b-1)=0.$$

Так как $b\neq 1$, то $4b-1=0$, $b=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

8. Соотнесите каждое квадратное уравнение

А) $x^2-9=0$; Б) $2x-x^2=0$; В) $x^2-3x-4=0$

с его корнями.

1) 0; 2 2) -3; 3 3) -1; 4 4) -4; 1

Решение. Решая уравнение А), получаем $x^2=9$, поэтому либо $x=-3$, либо $x=3$. Это соответствует ответу 2).

Решая уравнение Б), получаем $x(2-x)=0$, поэтому либо $x=0$, либо $x=2$. Это соответствует ответу 1).

Решим уравнение В) по формуле корней:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{2} = -1, \ x_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4.$$

Решение соответствует ответу 3).

Ответ:

А	Б	В
2	1	3

Вариант № 1

1. Решите уравнение $-8x + 1 = 3(x - 7)$.

1) -2 2) 2 3) -4 4) нет корней

Ответ: ________________.

2. Найдите корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Разложите квадратный трёхчлен $6x^2 + 5x - 6$ на линейные множители.

1) $(6x - 1)(x + 6)$ 2) $(3x - 2)(2x - 3)$
3) $(3x + 2)(2x + 3)$ 4) $(3x - 2)(2x + 3)$

Ответ: ________________.

4. Найдите сумму корней уравнения $0{,}7x + 14x^2 = 0$.

Ответ: ________________.

5. Найдите все корни уравнения $4x^3 - 100x = 0$.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\dfrac{x^2 - 6}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{2}{x - 2}$, $x \neq 2$ в его области определения.

1) $\dfrac{1}{x - 3}$ 2) $\dfrac{1}{(x - 2)(2x - 3)}$

3) $\dfrac{x}{x - 3}$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

7. При каких значениях параметра b уравнение
$(b + 5)x^2 + (2b + 10)x + 4 = 0$ имеет только один корень?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения

А) $x^2 - 9 = 0$ Б) $x^2 + 2x = 0$ В) $x^2 + 4 = 0$

с их корнями.

1) 0; −2 2) −2; 2 3) −3; 3 4) нет корней

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Решите уравнение $3(x-1) - 2(3x+4) = 1$.

1) −4 2) −3 3) 3 4) 4

Ответ: ________________.

2. Найдите корни уравнения $3x^2 + 9x + 6 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Разложите квадратный трёхчлен $1 - 2x - 3x^2$ на линейные множители.

1) $(x+1)(1-3x)$ 2) $(x-1)(3x+1)$

3) $3(x+1)(1-x)$ 4) $3(x-1)(x+1)$

Ответ: ________________.

4. Найдите произведение корней уравнения $18x^2 - 0{,}9 = 0$.

Ответ: ________________.

5. Найдите все корни уравнения $-108x^2 + 3x^4 = 0$.

Ответ: ________________.

6. Упростите выражение $\dfrac{x^2+5}{x^2+4x-5} + \dfrac{5}{x+5}$ в его области определения.

1) $\dfrac{1}{x-1}$ 2) $\dfrac{x}{x-1}$

3) $\dfrac{x}{x+1}$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

7. Найдите значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - 6ax + 9 = 0$ имеет ровно один корень.

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения

А) $x^2+3x-4=0$ Б) $x^2-5x=0$ В) $x^2-10x+25=0$

с их корнями.

1) 0; 5 2) −4; 1 3) 5 4) нет корней

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Решите уравнение $\frac{3x-1}{6}-\frac{x}{3}=\frac{5+x}{9}$.

Ответ: ________________.

2. Найдите корни уравнения $(4x+1)\cdot(2x-4)-8x^2=3\cdot(6-x)$.

Ответ: ________________.

3. Разложите квадратный трёхчлен $2x^2-5x-12$ на линейные множители.

1) $(2x-3)(x+4)$ 2) $2(x+3)(x-4)$
3) $(2x-3)(x-4)$ 4) $(2x+3)(x-4)$

Ответ: ________________.

4. Укажите приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1=-6$, $x_2=4$.

1) $x^2-10x+24=0$ 2) $x^2-2x-24=0$
3) $x^2+2x-24=0$ 4) $x^2-2x+24=0$

Ответ: ________________.

5. Найдите все корни уравнения $x^3+10x^2+24x=0$.

Ответ: ________________.

6. При каких значениях b сумма дробей $\frac{2b^2+1}{3}$ и $\frac{b+4}{6}$ равна 4?

Ответ: ________________.

7. При каких значениях параметра c корни квадратного уравнения $x^2+(4c^2-4c+1)x-1=0$ являются противоположными числами?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения

А) $x^2 - 1 = 0$ Б) $x^2 - x = 0$ В) $x^2 - x - 2 = 0$

с их корнями.

1) $0; 1$ 2) $-1; 1$ 3) $-1; 2$ 4) $-2; 1$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Решите уравнение $0{,}7(2x - 5) = 2{,}2 - 2(0{,}3x + 7{,}25)$.

Ответ: ________________.

2. Найдите корни уравнения $5x^2 - 15x - 50 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Разложите квадратный трёхчлен $3x^2 + 13x + 4$ на линейные множители.

1) $(3x + 1)(x - 4)$ 2) $(3x - 1)(x + 4)$
3) $(3x + 1)(x + 4)$ 4) $(3x - 1)(x - 4)$

Ответ: ________________.

4. Укажите приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 3$.

1) $x^2 + 3{,}5x + 1{,}5 = 0$ 2) $x^2 - 3{,}5x + 1{,}5 = 0$
3) $x^2 + 3{,}5x - 1{,}5 = 0$ 4) $x^2 - 3{,}5x - 1{,}5 = 0$

Ответ: ________________.

5. Найдите все корни уравнения $3x^2 + 2x^3 = 0$

Ответ: ________________.

6. При каких значениях a сумма дробей $\frac{5a^2 - 4}{4}$ и $\frac{a + 3}{5}$ равна 5?

Ответ: ________________.

7. При каких значениях параметра b корни квадратного уравнения $x^2 + (4b^2 + 4b + 1)x - 9 = 0$ являются противоположными числами?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения

А) $2x^2+3x+5=0$ Б) $x^2-9x+8=0$ В) $4x^2+4x+1=0$

с их корнями.

1) $1; 8$ 2) нет корней 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $-2; 1$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Решите уравнение $(2x+3)^2-(4x+1)(x+3)=5$.

1) 1 2) $\frac{4}{9}$ 3) -1 4) корней нет

Ответ: ________________.

2. При каких значениях n двучлены $13n^2+4n$ и $8n^2+14n-5$ принимают одинаковые значения?

Ответ: ________________.

3. Представьте квадратный трёхчлен x^2+5x+4 в виде $(x+p)^2-q^2$, где p и q — некоторые числа. В ответе укажите все возможные значения p и q.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x^4+5x^2-36=0$.

Ответ: ________________.

5. Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$.

1) $x^2-x+1=0$ 2) $x^2+\frac{13}{6}x-1=0$

3) $x^2-\frac{13}{6}x-1=0$ 4) $x^2-\frac{13}{6}x+1=0$

Ответ: ________________.

6. Какой знак имеет сумма корней уравнения $-2x^2-5x=0$.

Ответ: ________________.

7. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{5}{4}ax^2 + 4x + 5a = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: ________________.

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $4x^2 + 4x - 15 = 0$ Б) $2x^2 + 7 = 0$ В) $4x^2 - 9 = 0$

1) $-2{,}5; 1{,}5$ 2) $-1{,}5; 1{,}5$ 3) $1{,}5; -2{,}5$ 4) корней нет

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Решите уравнение $(3x - 1)^2 - (9x - 1)(x + 1) = 16$.

1) 1 2) $\frac{4}{9}$ 3) -1 4) корней нет

Ответ: ________________.

2. При каких значениях m значения двучленов $18m^2 + 32m$ и $6m + 38m^2$ равны?

Ответ: ________________.

3. Представьте квадратный трёхчлен $x^2 + 13x + 36$ в виде $(x + p)^2 - q^2$, где p и q — некоторые числа. В ответе укажите все возможные значения p и q.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Ответ: ________________.

5. Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$.

1) $x^2 - x + 1 = 0$ 2) $x^2 + \frac{7}{12}x - 1 = 0$

3) $x^2 + \frac{7}{12}x + 1 = 0$ 4) $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$

Ответ: ________________.

6. Какой знак имеет произведение корней уравнения $-4x^2 + 8x - 3 = 0$.

Ответ: ________________.

7. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: ________________ .

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 14x + 49 = 0$ Б) $x^2 - 7 = 0$ В) $x^2 - 7x = 0$

1) $x_1 = 7$
2) $x_1 = -\sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7}$
3) $x_1 = 0, x_2 = 7$
4) корней нет

Ответ:

А	Б	В

§ 11. Алгебра. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Основные сведения

Пусть u и v — произвольные алгебраические выражения, содержащие переменные. Тогда равенство $u = v$ называется **уравнением**. Если вместо букв, входящих в эти выражения, подставить такие числа, что получится верное числовое равенство, то набор этих чисел (взятый в заданном порядке) называют **решением уравнения**.

Например, одним из решений уравнения $x + 3y = 4$ является пара $(10; -2)$ (значение x на первом месте, а значение y на втором), так как, подставив вместо x число 10, а вместо y число (-2), получаем $10 + 3 \cdot (-2) = 4$. Полученное числовое равенство является верным, так как $10 - 6 = 4$.

Решить уравнение — значит найти все его решения или убедиться, что их нет.

Пусть $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ..., $u_k = v_k$ $(k \in N)$ — произвольное конечное множество уравнений.

В некоторых случаях требуется находить такие наборы допустимых значений переменных, которые являются решением каждого из этих уравнений.

Тогда эти уравнения объединяют фигурной скобкой и называют **системой уравнений**:

$$\begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = v_2, \\ \ldots \\ u_k = v_k. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется всякий набор допустимых значений всех, входящих в него переменных (взятых в заданном порядке), который является решением каждого уравнения системы.

Решить систему уравнений — значит найти все её решения или установить, что их нет.

Решениями системы с двумя неизвестными (переменными) являются пары чисел, взятые в определённом порядке, при подстановке которых в систему вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство.

При решении систем двух уравнений с двумя неизвестными, как правило, применяют указанные ниже способы. Их можно также с небольшими изменениями применять и для других систем уравнений. Отметим основные способы решения таких систем.

1. Способ подстановки. Выражаем из какого-либо уравнения одну неизвестную через другую. Пусть для определённости x выражаем через y и получаем $x = g(y)$.

Подставляем далее $g(y)$ вместо x в другое уравнение. Получим уравнение с одной переменной y. Решаем его и найденные значения y подставляем в выражение $g(y)$. Получим соответствующие значения x (см. задания 1 и 4 из варианта с решениями).

2. Графический способ. Строим в одной системе координат график каждого уравнения. Затем определяем координаты точек пересечения (они и будут решениями системы) и делаем проверку (см. задание 5 из варианта с решениями).

3. Способ сложения для систем линейных уравнений. Умножаем обе части каждого из двух уравнений на такие числа, чтобы уравнялись модули коэффициентов при одной неизвестной. Затем, складывая или вычитая полученные уравнения, получаем линейное уравнение с одной неизвестной и находим её значение. Подставив его в одно из уравнений исходной системы, находим второе неизвестное (см. задание 2 и 3 из варианта с решениями).

Вариант с решениями

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = -20, \\ 5y - 2x = 25. \end{cases}$

1) $(-15; 20)$ 2) $(25; 15)$ 3) $(5; 25)$ 4) $(-10; -25)$

Решение.

Решим систему способом подстановки (см. «Основные сведения» к параграфу).

Из первого уравнения выразим x через y. Получим $x = 3y - 20$. Подставим во второе уравнение системы вместо x выражение $3y - 20$. Система примет вид:

$$\begin{cases} x = 3y - 20, \\ 5y - 2 \cdot (3y - 20) = 25. \end{cases}$$

Решаем второе уравнение системы, а первое оставляем без изменения:

$$\begin{cases} x = 3y - 20, \\ 5y - 6y + 40 = 25; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y - 20, \\ y = 15. \end{cases}$$

Подставим найденное значение y в первое уравнение, получим $\begin{cases} x = 25, \\ y = 15. \end{cases}$

Из предложенных вариантов ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Найдите координаты точки пересечения прямых $2x + 3y = 11$ и $3x + 2y = 9$.

Решение. Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 9. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения (см. «Основные сведения» к параграфу).

Умножая первое уравнение системы на 2, второе — на (−3), получим систему $\begin{cases} 4x + 6y = 22, \\ -9x - 6y = -27, \end{cases}$ в которой модули коэффициентов при y в обоих уравнениях одинаковы и равны 6. Прибавляя к первому уравнению второе, получим:

$$\begin{cases} -5x = -5, \\ -9x - 6y = -27; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x = -5, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3).

3. Найдите $x_0 + 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{4} - \dfrac{x}{5} = 6, \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{12} = 0. \end{cases}$$

Решение. Решим систему способом сложения. Переставим слагаемые в первом уравнении, получим систему $\begin{cases} -\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{4} = 6, \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{12} = 0. \end{cases}$

Умножая первое уравнение системы на $\frac{1}{3}$ и прибавляя к первому уравнению второе, получим:

$$\begin{cases} \frac{2y}{12} = 2, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12, \\ \frac{x}{15} = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 12, \\ x = -15. \end{cases}$$

Следовательно, $x_0 = -15$, $y_0 = 12$; $x_0 + 2y_0 = -15 + 2 \cdot 12 = 9$.

Ответ: 9.

4. Решите систему $\begin{cases} x - y = -3, \\ y - x^2 = 1. \end{cases}$

Решение. Выразим y через x из первого уравнения (перенесём y в правую часть уравнения, а (-3) — в левую с противоположными знаками). Получим $y = x + 3$. Подставим $x + 3$ вместо y во второе уравнение. Система примет вид:

$$\begin{cases} y = x + 3, \\ (x+3) - x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 3, \\ -x^2 + x + 3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

Решаем второе уравнение системы по формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Подставляем поочерёдно найденные значения $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ в первое уравнение, находим соответственно $y_1 = -1 + 3 = 2$, $y_2 = 2 + 3 = 5$. Получаем два решения: $(x_1; y_1) = (-1; 2)$ и $(x_2; y_2) = (2; 5)$.

Ответ: $(-1; 2)$; $(2; 5)$.

5. Найдите решение системы $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = -x + 2, \end{cases}$ пользуясь рисунком 18.

1) $(-2; 1)$ 2) $(1; -2)$ 3) $(-0{,}5; 2{,}5)$ 4) $(2; 0)$

Решение. Первое уравнение системы запишем в виде $2x - y = 4$, а второе соответственно $y = 2 - x$. Как видно из рисунка, их графики пересекаются в точке $(2; 0)$. Действительно, подставляя в систему вместо x число 2, а вместо y число 0, получим верные числовые равенства. Паре $(2; 0)$ соответствует четвёртый вариант ответа.

Ответ: 4.

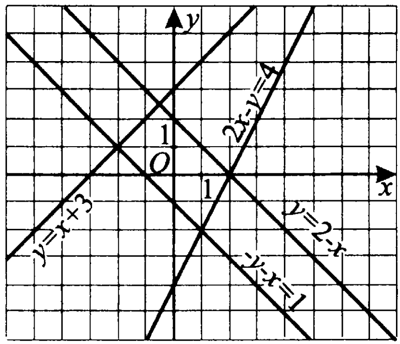


Рис. 18.

6. Для каждой пары прямых, изображённых на рисунке 19, укажите соответствующую систему уравнений.

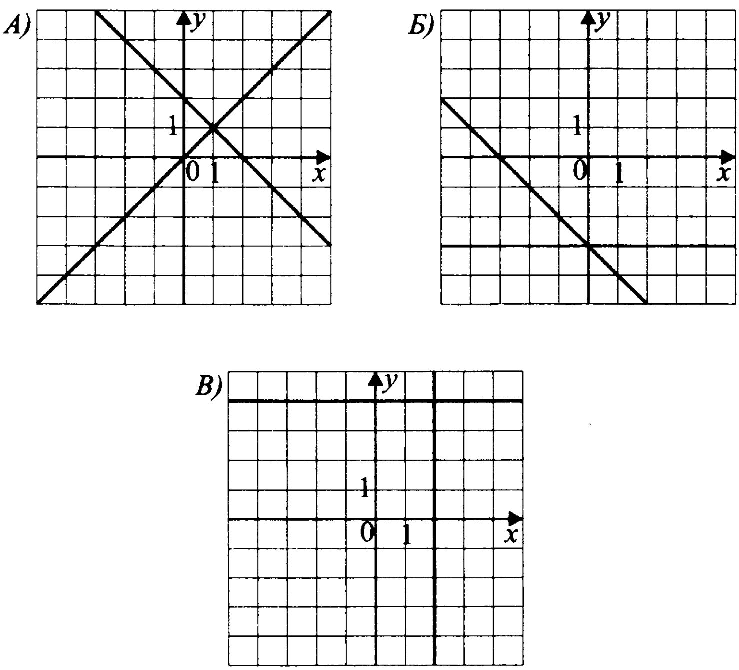


Рис. 19.

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x - 3, \\ y = -3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 4, \\ x = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 4x, \\ y = 2x \end{cases}$

Решение. Известно, что прямая, являющаяся биссектрисой первого и третьего координатных углов, задаётся уравнением $y = x$.

Прямая, являющаяся биссектрисой второго и четвёртого координатных углов, задаётся уравнением $y = -x$.

Прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0; b)$, задаётся уравнением $y = b$, а прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $(a; 0)$, задаётся уравнением $x = a$.

Поэтому на рисунке 19 А изображены прямая $y = x$ и прямая $y = -x + 2$. Этим прямым соответствует система уравнений 1).

На рисунке 19 Б изображены прямая $y = -x - 3$ и прямая $y = -3$. Этим прямым соответствует система уравнений 2).

На рисунке 19 В изображены прямая $y = 4$ и прямая $x = 2$. Этим прямым соответствует система уравнений 3).

Ответ:

А	Б	В
1	2	3

7. Установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

Системы уравнений	**Утверждения**
А) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x \end{cases}$	1) система не имеет решений
Б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2 \end{cases}$	2) система имеет одно решение
В) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$	3) система имеет два решения

Решение. Вычтем из первого уравнения системы А) второе уравнение. Получим уравнение $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, которое имеет два решения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Подставляя найденные значения x во второе уравнение ($y = x$), получаем два решения системы: $(1; 1)$, $(0; 0)$. Значит, системе А) соответствует утверждение 3).

Вычтем из первого уравнения системы Б) второе уравнение. Получим уравнение $x^2 + 2 = 0$, которое решений не имеет. Поэтому и система Б) решений не имеет. Значит, системе Б) соответствует утверждение 1).

Вычтем из первого уравнения системы В) второе уравнение. Получим уравнение $x^2 - \dfrac{1}{x} = 0$, $\dfrac{x^3 - 1}{x} = 0$. Отсюда $x^3 - 1 = 0$, $x = 1$, $y = 1^2 = 1$. Получаем единственное решение $(1; 1)$. Значит, системе В) соответствует утверждение 2).

Ответ:

А	Б	В
3	1	2

8. Гипербола, изображённая на рисунке 20, задаётся уравнением $y = \dfrac{3}{x}$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

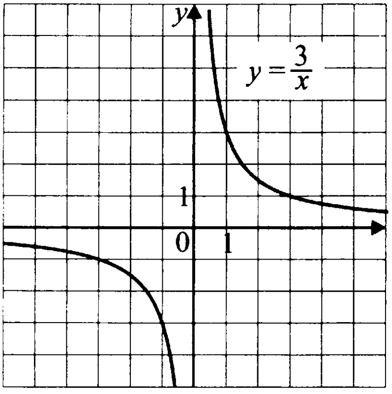


Рис. 20.

Системы уравнений	Утверждения
А) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 3x \end{cases}$	1) система имеет одно решение
Б) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = -2x \end{cases}$	2) система имеет два решения
В) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 6 \end{cases}$	3) система не имеет решений

Решение. Рассмотрим каждую из представленных систем уравнений. В каждой из систем уравнений первое уравнение соответствует гиперболе, изображённой на рисунке, а второе — прямой.

В системе А) угловой коэффициент прямой $y = 3x$ положителен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой — острый) и прямая проходит через начало координат. Следовательно, прямая пересекает каждую ветвь гиперболы, поэтому система имеет два решения (нетрудно заметить, что это будут $(-1; -3)$, $(1; 3)$), что соответствует утверждению 2).

В системе Б) угловой коэффициент прямой $y = -2x$ отрицателен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой — тупой) и прямая проходит через начало координат. Следовательно, прямая не пересекает ни одну из ветвей гиперболы (графики прямой и гиперболы лежат в разных четвертях и при $x > 0$, и при $x < 0$). Поэтому система не имеет решений, что соответствует утверждению 3).

В системе В) прямая $y = 6$ параллельна оси абсцисс и проходит через отметку 6 на оси ординат. По графику видно, что она пересекает график гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$ в одной точке. Следовательно, система имеет единственное решение, что соответствует утверждению 1).

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

Вариант № 1

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 7x - 3y = 11, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

1) $(1;3)$ 2) $(0;3)$ 3) $(1;2)$ 4) $(2;1)$

Ответ: ________________.

2. Найдите координаты точки пересечения прямых $2x + 3y - 8 = 0$ и $3x + y - 19 = 0$.

1) $(2;7)$ 2) $(7;2)$ 3) $(7;-2)$ 4) $(-7;2)$

Ответ: ________________.

3. Найдите $x_0 - 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{8}{y} = -2, \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{10}{y} = 8. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

4. Решите систему $\begin{cases} x - y = 3, \\ -5y + x^2 = 11. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. Найдите решение системы $\begin{cases} y = x + 3, \\ y = -x - 1, \end{cases}$ пользуясь рисунком 21.

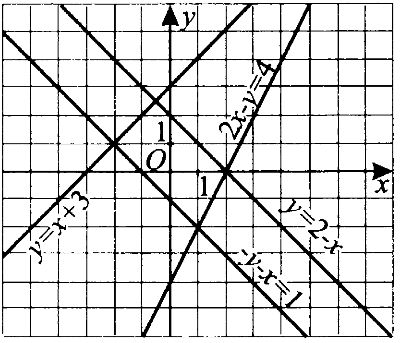


Рис. 21.

1) $(-2; 1)$ 2) $(1; -2)$ 3) $(-0{,}5; 2{,}5)$ 4) $(0; 2)$

Ответ: ________________.

6. Для каждой пары прямых, изображённых на рис. 22, укажите соответствующую ей систему уравнений.

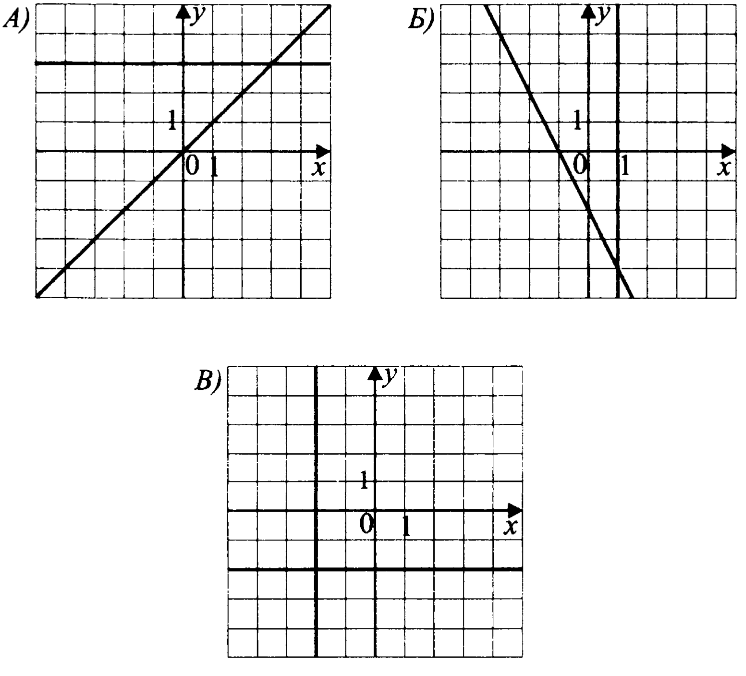


Рис. 22.

1) $\begin{cases} -2x - y = 2, \\ x = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 3 + x, \\ y = x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x, \\ y = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -2, \\ y = -2 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

7. Установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

Системы уравнений **Утверждения**

А) $\begin{cases} y = \sqrt{x - 2}, \\ y = -2 \end{cases}$ 1) система не имеет решений

Б) $\begin{cases} y = \sqrt{x - 2}, \\ y = 2 \end{cases}$ 2) система имеет одно решение

В) $\begin{cases} y = \sqrt{x - 2}, \\ y = x - 2 \end{cases}$ 3) система имеет два решения

Ответ:

А	Б	В

8. Гипербола, изображённая на рисунке 23, задаётся уравнением $y = \dfrac{3}{x}$.

Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

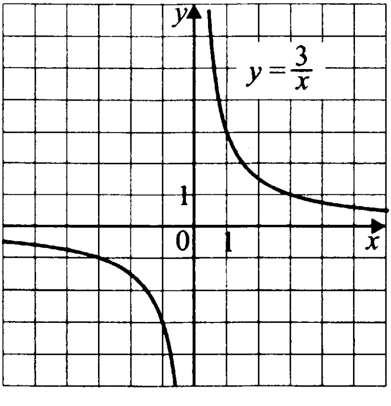


Рис. 23.

Системы уравнений

А) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ x = 0 \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ x = 2 \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = x \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 4x + y = 2, \\ 6x - y = 8. \end{cases}$

1) $(-2; 1)$ 2) нет решений 3) $(-2; -1)$ 4) $(1; -2)$

Ответ: ________________.

2. Найдите координаты точки пересечения прямых $4x + 3y - 5 = 0$ и $-2x + y + 5 = 0$.

1) $\left(0; \dfrac{5}{3}\right)$ 2) $(1; -3)$ 3) $(3; -1)$ 4) $(2; -1)$

Ответ: ________________.

3. Найдите $3x_0 + y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5x + \dfrac{4}{5y} = 9, \\ 5x + \dfrac{3}{5y} = 8. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 2y = 26. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. Пользуясь графиком (см. рис. 24), найдите решение системы
$$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = -x - 1. \end{cases}$$

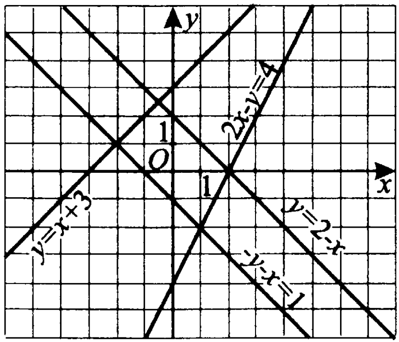


Рис. 24.

1) $(-2; 1)$ 2) $(1; -2)$ 3) $(-0,5; 2,5)$ 4) $(0; 2)$

Ответ: ________________.

6. Для каждой пары прямых, изображённых на рис. 25, укажите соответствующую ей систему уравнений.

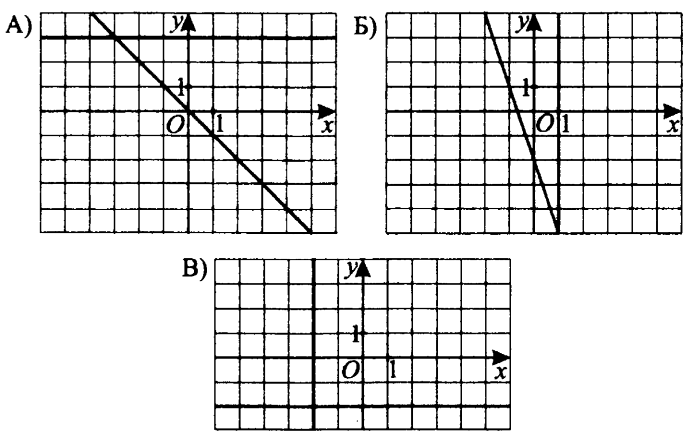


Рис. 25.

1) $\begin{cases} y = -3x - 2, \\ x = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = -1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -2, \\ y = -2 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

7. Установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

Системы уравнений

А) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -5 \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = x^2, \\ x = -2 \end{cases}$

Утверждения

1) система не имеет решений

2) система имеет одно решение

3) система имеет два решения

Ответ:

А	Б	В

8. Окружность, изображённая на рисунке 26, задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 9$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

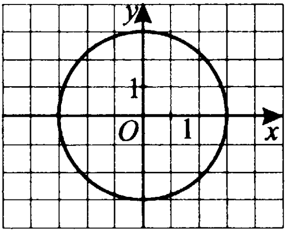


Рис. 26.

Системы уравнений

А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x. \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x + 5. \end{cases}$

В) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = -3. \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Из уравнения $5x - 2y = 3$ выразите переменную x через y.

1) $\dfrac{5y+3}{2}$ 2) $\dfrac{5y-3}{2}$ 3) $\dfrac{3+2y}{5}$ 4) $\dfrac{3-2y}{5}$

Ответ: ______________ .

2. Из пар чисел $(2;1)$; $(-2;-1)$; $(2;-1)$; $(-2;1)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

1) $(2;1)$ 2) $(-2;-1)$ 3) $(2;-1)$ 4) $(-2;1)$

Ответ: ______________ .

3. Укажите систему уравнений, которая имеет решение $(-1;3)$ (см. рис. 27).

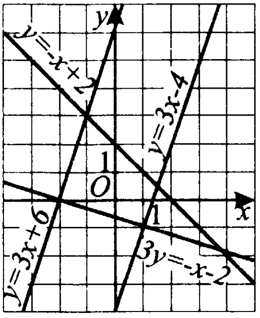


Рис. 27.

1) $\begin{cases} y = 3x + 6, \\ 3y = -x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y = -x - 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

Ответ: ______________ .

4. При каких значениях k прямая $y = kx - 2$ имеет ровно одну общую точку с параболой $y = x^2 + 3x - 1$.

Ответ: ______________ .

5. Найдите $3x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} y + 3x + 1 = 0, \\ y + x - 1 = 0. \end{cases}$$

1) -5 2) -3 3) 3 4) 5

Ответ: ______________ .

6. Решите системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$ Если решения есть, то ответ укажите в виде пар.

Ответ: ________________ .

7. Найдите координаты точек пересечения прямой $y = 7x + 4$ и параболы $y = x^2 + 7x - 5$.

Ответ: ________________ .

8. Для каждой пары прямых, изображённых на рисунке 28, укажите соответствующую систему уравнений.

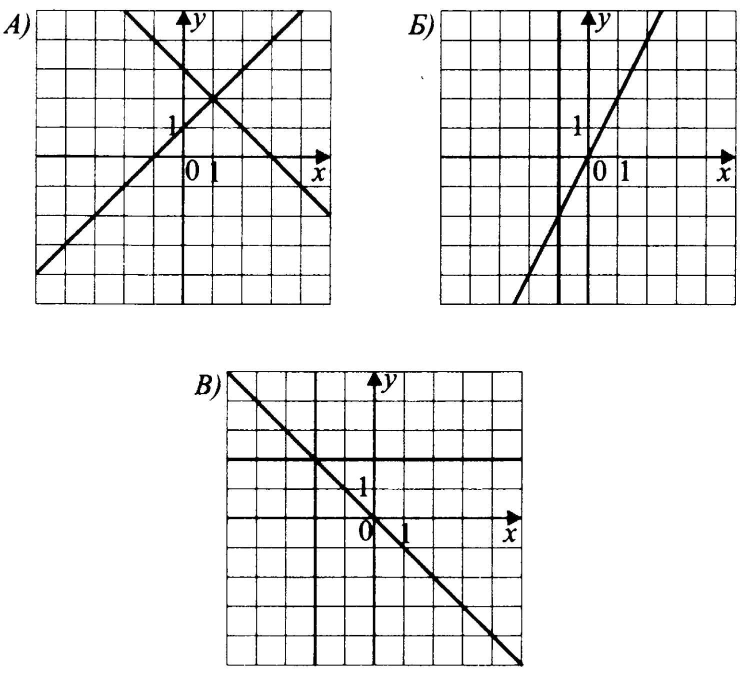


Рис. 28.

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x + 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = x + 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 2x, \\ x = -1 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Из уравнения $4y = 3x + 4$ выразите переменную x через y.

1) $x = \dfrac{4y-4}{3}$ 2) $x = \dfrac{4y+4}{3}$

3) $x = 3(4y-4)$ 4) $x = 3(4y+4)$

Ответ: ________________.

2. Какая из указанных пар чисел 1) – 4) является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$?

1) $(-1;1)$ 2) $(1;-1)$ 3) $(2;3)$ 4) $(1{,}5;0)$

Ответ: ________________.

3. Укажите систему уравнений, которая имеет решение $(-2;0)$ (см. рис. 29).

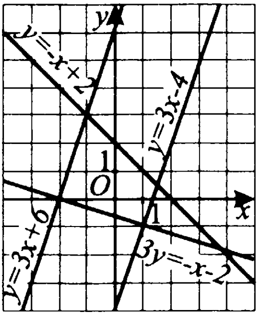


Рис. 29.

1) $\begin{cases} y = 3x + 6, \\ 3y = -x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y = -x - 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

Ответ: ________________.

4. При каких значениях k парабола $y = 2x^2 + 2kx + 6$ и прямая $y = -k - 6$ имеют одну общую точку?

Ответ: ________________.

5. Найдите $x_0 - 3y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5(2x - y) - (5y - 3x) = -1, \\ 3(5y - 3x) - 2(2x - y) = 10{,}8. \end{cases}$$

1) -5 2) $-3{,}2$ 3) $3{,}2$ 4) 5

Ответ: ________________.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x + y = 4, \\ 5y + 2x = -7. \end{cases}$

Если решения есть, то ответ укажите в виде пар.

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точек пересечения прямой $y - x - 3 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 = 9$.

Ответ: ________________.

8. Для каждой пары прямых, изображённых на рисунке 76, укажите соответствующую систему уравнений.

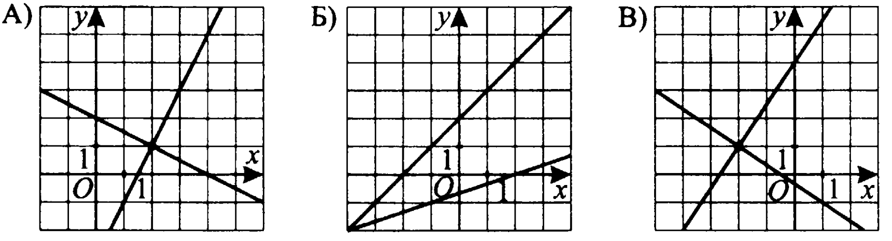


Рис. 30.

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ 3y = x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y = -x + 4, \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y = 3x + 4, \\ 3y = -2x + 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y = 3x + 8, \\ 3y = -2x - 1 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 5, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = -7. \end{cases}$

Ответ: ________________.

2. Найдите все значения x и y, при которых каждое из выражений $\dfrac{x^2 + 1}{-2x + y + 3}$, $\dfrac{x + 5}{3x - y - 4}$ не определено.

Ответ: ________________.

3. Найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $|x| - y = 15$, $|x| + y = 17$.

Ответ: ________________.

4. Найдите числа c и d, если модуль их разности равен 8, а сумма равна 16.

Ответ: ________________.

5. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = x, \\ \ldots \end{cases}$ так, чтобы она не имела решений.

1) $y = \dfrac{1}{x}$ 2) $y = -\dfrac{1}{x}$ 3) $y = -x$ 4) $y = x^2$

Ответ: ________________.

6. На рисунке 31 изображены графики функций $y = \dfrac{4}{x}$, $y = x^2 - 2$.

Пользуясь рисунком, решите систему уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{4}{x}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

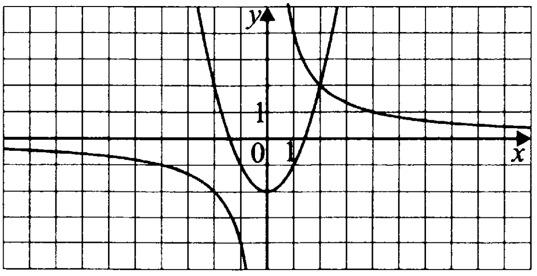


Рис. 31.

Ответ: ________________.

7. На рисунке 32 изображён график функции $y = \sqrt{x-2}$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений укажите соответствующее ей утверждение.

А) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2}, \\ y = x - 2 \end{cases}$ 1) система имеет одно решение

Б) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2}, \\ y = -x - 1 \end{cases}$ 2) система имеет два решения

В) $\begin{cases} y = \sqrt{x-2}, \\ y = -x + 2 \end{cases}$ 3) система не имеет решений

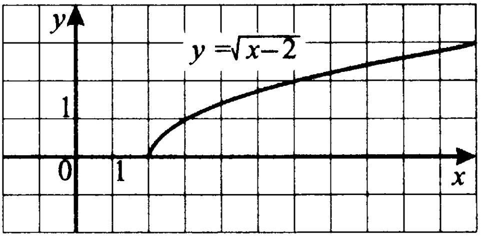


Рис. 32.

Ответ:

А	Б	В

8. Решите систему уравнений графически $\begin{cases} x^2 - 6x + y = 2, \\ y - \sqrt{x-3} = 9. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 10, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = 9. \end{cases}$

Ответ: ________________.

2. Найдите все значения x и y, при которых каждое из выражений $\dfrac{20x+14}{4x+y+3}$, $\dfrac{x^2+8}{2y+13-6x}$ не определено.

Ответ: ________________.

3. Найдите координаты точек пересечения графиков уравнений $|y| - x = 10$, $|y| + x = 14$.

Ответ: ________________ .

4. Найдите числа a и b, если модуль их разности равен двум, а сумма равна 10.

Ответ: ________________ .

5. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = -x, \\ \dots \end{cases}$ так, чтобы она не имела решений.

1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{x}$ 3) $y = x$ 4) $y = x^2$

Ответ: ________________ .

6. На рисунке 33 изображены графики уравнений $2x^2 + y = 2$ и $2x + y = -2$. Используя эти графики, найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y = 2, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

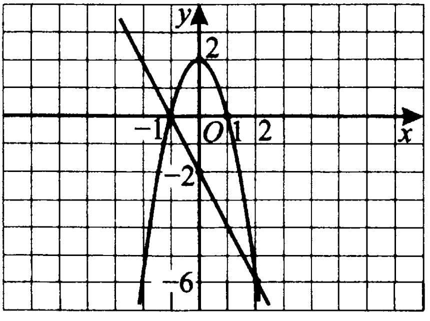


Рис. 33.

1) $(0; -1)$, $(2; -6)$ 2) $(-1; 0)$, $(-6; 2)$
3) $(-1; 0)$, $(2; -6)$ 4) $(0; 1)$, $(2; -6)$

Ответ: ________________ .

7. На рисунке 34 изображён график функции $y = \sqrt{2-x}$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений укажите соответствующее ей утверждение.

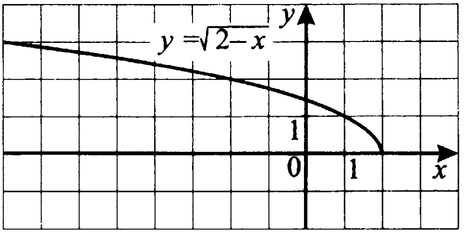


Рис. 34.

А) $\begin{cases} y = \sqrt{2-x}, \\ y = 2 - x \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y = \sqrt{2-x}, \\ y = x - 2 \end{cases}$

В) $\begin{cases} y = \sqrt{2-x}, \\ y = -1 \end{cases}$

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

8. Решите систему уравнений графически $\begin{cases} x^2 - 6x - y = 3, \\ y - \sqrt{4-x} = -5. \end{cases}$

Ответ: ______________ .

§ 12. Алгебра. Линейные неравенства с одной переменной и системы неравенств

Основные сведения

Для сравнения по величине чисел a и b используют три знака: $>$ (больше); $<$ (меньше); $=$ (равно).

При этом утверждение $a > b$ (a больше b) и $b < a$ (b меньше a) имеют одинаковый смысл.

Если разность $a - b$ чисел a и b является положительным числом, то верно неравенство $a > b$. Если же разность $a-b$ является отрицательным числом, то верно неравенство $a < b$.

Например, $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$, так как $2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} = \sqrt{28} - \sqrt{27} > 0$.

Если к обеим частям верного неравенства **прибавить** одно и то же число или обе его части **умножить или разделить** на одно и то же **положительное число**, то знак неравенства **не изменится**:

если $a > b$, то $a + c > b + c$ и если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.

Если же обе части верного неравенства **умножить или разделить** на одно и то же **отрицательное число**, то знак неравенства **изменится на противоположный**:

если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

Отметим также, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Выражение $a \geqslant b$ означает, что $a > b$ или $a = b$. Указанные выше свойства неравенств сохранятся, если в них знак $>$ заменить на $\geqslant$, а знак $<$ заменить на $\leqslant$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные алгебраические выражения с одной переменной x. Тогда неравенства, имеющие вид: $f(x) < g(x)$ ($f(x) \leqslant g(x)$), $f(x) > g(x)$ ($f(x) \geqslant g(x)$), называются неравенствами с одной переменной.

Число x_0 называется **решением неравенства** с одной переменной x, если при подстановке в неравенство числа x_0 вместо переменной x, получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Для записи множества всех решений неравенства используют такие числовые промежутки, как интервалы: $(-\infty; +\infty)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$, $(a; b)$; полуинтервалы: $(-\infty; a]$, $[a; +\infty)$, $[a; b)$, $(a; b]$; отрезки: $[a; b]$.

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются **равносильными**. Если неравенства I и II равносильны, то пишут $I \Leftrightarrow II$. Аналогично определяют и обозначают равносильные системы неравенств.

Если в какой-либо части неравенства выполнить одно или несколько тождественных преобразований, не изменяющих области определения, то получим равносильное ему неравенство.

Всякие преобразования неравенства, которые приводят к равносильному ему неравенству, называют равносильными преобразованиями. К ним относятся:

1) перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с противоположным знаком;

2) умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же положительное число;

3) одновременное умножение или деление обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число и изменение знака неравенства на противоположный.

Например, при решении неравенства $4x + 5 < -5x - 22$ получаем цепочку из четырёх равносильных неравенств:

$$\underbrace{4x + 5 < -5x - 22}_{1)} \Leftrightarrow \underbrace{4x + 5x < -5 - 22}_{2)} \Leftrightarrow \underbrace{9x < -27}_{3)} \Leftrightarrow \underbrace{x < -3}_{4)}.$$

Неравенство 2) получается из неравенства 1) переносом $-5x$ из правой его части в левую и числа 5 — из левой части в правую. Неравенство 3) получается из неравенства 2) приведением подобных, а неравенство 4) из неравенства 3) делением обеих частей неравенства на положительное число 9.

Множество решений — это множество всех значений x, таких что $x < -3$. Оно записывается в виде интервала $(-\infty; -3)$.

Если множество решений неравенства I содержится во множестве решений неравенства II, то пишут $I \Rightarrow II$ и неравенство II называют **следствием** I. Если $I \Leftrightarrow II$, то $I \Rightarrow II$ и $II \Rightarrow I$.

Если $y = f(x)$ – непрерывная функция, то неравенства $f(x) < 0$ и $f(x) > 0$ можно решать **методом интервалов**. Он основан на том, что во всех точках интервала, не содержащего корней уравнения $f(x) = 0$, значения функции $y = f(x)$ (а значит, и значения выражения $f(x)$) имеют один и тот же знак. Для определения этого знака достаточно найти его в какой-нибудь одной точке этого интервала.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, которое является решением каждого неравенства системы. Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

Вариант с решениями

1. Решите неравенство $3 - x \geqslant 3x + 5$.

1) $(-\infty; -0{,}5]$ 2) $[-0{,}5; +\infty)$ 3) $(-\infty; -2]$ 4) $[-2; +\infty)$

Решение. Выполняем равносильные преобразования неравенства (см. «Основные сведения» к § 12):

$3 - x \geqslant 3x + 5 \Leftrightarrow 3x + x \leqslant 3 - 5 \Leftrightarrow 4x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -0{,}5$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 35). Расположите в порядке возрастания числа a; $\frac{1}{a}$; a^2.

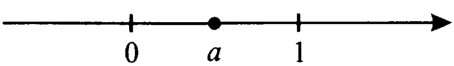


Рис. 35.

1) $\frac{1}{a}$; a; a^2 2) a^2; a; $\frac{1}{a}$ 3) $\frac{1}{a}$; a^2; a 4) a; $\frac{1}{a}$; a^2

Решение. Согласно рисунку $0 < a < 1$. По свойствам неравенств получаем $a^2 < a$ и $1 < \frac{1}{a}$. Значит, $a^2 < a < 1 < \frac{1}{a}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

3. Какое из приведённых ниже неравенств не следует из неравенства $x - y < z$?

1) $x - z - y < 0$ 2) $y > x - z$ 3) $y < z - x$ 4) $z + y > x$

Решение. Преобразуем каждое из перечисленных неравенств 1)–4), перенося неизвестные x и y в левую часть неравенства, а z — в правую.

Неравенство 1: $x - z - y < 0 \Leftrightarrow x - y < z$, поэтому неравенство 1 следует из заданного неравенства.

Неравенство 2: $y > x - z \Leftrightarrow x - y < z$, поэтому неравенство 2 следует из заданного неравенства.

Неравенство 3: $y < z - x \Leftrightarrow x + y < z$. Тройка чисел $x = 5$, $y = 4$, $z = 2$ является решением исходного неравенства, так как $5 - 4 = 1 < 2$.

Однако, она не является решением неравенства 3, так как $y = 4$, а $z - x = 2 - 5 = -3$. Значит, неравенство 3 не следует из заданного неравенства.

Неравенство 4: $z+y > x \Leftrightarrow x-y < z$, поэтому неравенство 4 следует из заданного неравенства.

Ответ: 3.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0, \\ x - 5 < 0. \end{cases}$

1) $[-2; 5]$ 2) $[5; +\infty)$ 3) $[-2; 5)$ 4) $(5; +\infty)$

Решение. Проводим равносильные преобразования каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0, \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant -6, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 5).$$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

5. Найдите множество решений двойного неравенства

$-2 \leqslant \dfrac{3x + 7}{4} \leqslant 4.$

1) $[-5; -3]$ 2) $[3; 5]$ 3) $[-3; 5]$ 4) $[-5; 3]$

Решение.

Выполняем равносильные преобразования неравенств:

$$-2 \leqslant \frac{3x + 7}{4} \leqslant 4 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x + 7 \leqslant 16 \Leftrightarrow -8 - 7 \leqslant 3x \leqslant 16 - 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -15 \leqslant 3x \leqslant 9 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 3.$$

Следовательно, множеством решений двойного неравенства является отрезок $[-5; 3]$, который обозначен номером 4).

Ответ: 4.

6. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 36?

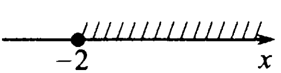


Рис. 36.

1) $\begin{cases} 3x + 5 > 1, \\ 5x + 24 \geqslant -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 7x \geqslant 2, \\ 10 - x \geqslant 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 6 \geqslant 4, \\ 2 - 11x \geqslant 16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 1 \geqslant -7, \\ 3x - 2 \geqslant -20 \end{cases}$

Решение. Число -2 входит в указанный на рисунке луч, но решением первого неравенства системы 1) (а значит, и всей системы) не является.

Значит, множество чисел изображённого луча не является решением системы 1).

Число 0 входит в указанный на рисунке луч, но решением первого неравенства системы 2) и второго неравенства системы 3) не является. Значит, множество чисел изображённого луча не является решением систем 1) и 3).

Решаем систему 4), пользуясь равносильными преобразованиями:

$$\begin{cases} 4x+1 \geqslant -7, \\ 3x-2 \geqslant -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \geqslant -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant -2.$$

Значит, множеством решений системы 4) является луч, изображённый на рис. 36.

Ответ: 4.

7. Решите систему $\begin{cases} 2 \leqslant x < 3, \\ 4x-10 < 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Решение. Преобразуем сначала второе неравенство системы: $4x - 10 < 0 \Leftrightarrow 4x < 10 \Leftrightarrow x < 2{,}5$. Получим систему $\begin{cases} 2 \leqslant x < 3, \\ x < 2{,}5. \end{cases}$

На первой из двух идентичных числовых прямых (см. рис. 37а)) заштрихуем числа полуинтервала от 2 (включая число 2, отмеченное жирной точкой, так как 2 удовлетворяет первому неравенству) до 3 (не включая 3, отмеченное пустым кружком, так как 3 не удовлетворяет первому неравенству).

На второй прямой (см. рис. 37б)) заштрихуем числа, расположенные левее 2,5 (не включая число 2,5, отмеченное пустым кружком, так как 2,5 не удовлетворяет второму неравенству).

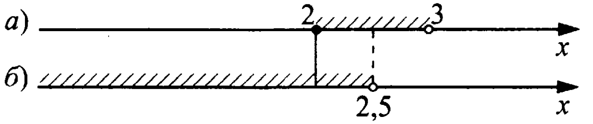


Рис. 37.

Из рисунка 37 видно, что числами, заштрихованными одновременно на двух прямых, являются числа полуинтервала [2; 2,5).

Ответ: [2; 2,5).

8. Для каждой системы неравенств укажите множество её решений.

А) $\begin{cases} 2x+7>4x-8, \\ 10+4x>0 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x^2-10x+9<0, \\ 6x-12>0 \end{cases}$ В) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+2>x, \\ \dfrac{2}{x}-6\geqslant 0 \end{cases}$

1) $(-\infty;0)\cup\left[\frac{1}{3};4\right)$ 2) $(-2{,}5;7{,}5)$ 3) $(2;9)$ 4) $\left(0;\frac{1}{3}\right]$

Решение. Найдём решение каждой из систем неравенств.

Решаем систему А), пользуясь равносильными преобразованиями неравенств системы:

А) $\begin{cases} 2x+7>4x-8, \\ 10+4x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<15, \\ 4x>-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7{,}5, \\ x>-2{,}5. \end{cases}$

Этому решению соответствует ответ 2).

Для решения системы Б) решим сначала неравенство $x^2-10x+9<0$. Разложим квадратный трёхчлен $x^2-10x+9$ на линейные множители. По теореме Виета определяем, что корнями квадратного трёхчлена $x^2-10x+9$ являются числа 1 и 9. Значит, $x^2-10x+9=(x-1)(x-9)$.

Решаем теперь неравенство $(x-1)(x-9)<0$, пользуясь тем, что произведение двух сомножителей меньше нуля, если эти сомножители имеют разные знаки.

Возможны два случая: 1) $\begin{cases} x-1>0, \\ x-9<0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1<0, \\ x-9>0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x-1>0, \\ x-9<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<9; \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<9.$

2) $\begin{cases} x-1<0, \\ x-9>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x>9. \end{cases}$

Последняя система решений не имеет. Отсюда находим решение системы Б):

$\begin{cases} x^2-10x+9<0, \\ 6x-12>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<9, \\ x>2; \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<9.$ Этому решению соответствует ответ 3).

Для решения системы В) решим сначала неравенство $\dfrac{2}{x}-6\geqslant 0$. Преобразуя левую часть неравенства, получаем неравенство $\dfrac{2-6x}{x}\geqslant 0$.

Но дробь $\dfrac{2-6x}{x}$ является неотрицательной в двух случаях:

1) $\begin{cases} 2-6x \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2-6x \leqslant 0, \\ x < 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 2-6x \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}.$

2) $\begin{cases} 2-6x \leqslant 0, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{1}{3}, \\ x < 0. \end{cases}$

Последняя система решений не имеет. Отсюда находим решение системы В):

$\begin{cases} \dfrac{x}{4}+2 > x, \\ \dfrac{2}{x}-6 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{8}{3}, \\ 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}.$ Этому решению соответствует ответ 4).

Замечание. Неравенства $\dfrac{2-6x}{x} \geqslant 0$ и $x^2-10x+9<0$ можно было бы решать методом интервалов.

Ответ:

А	Б	В
2	3	4

Вариант № 1

1. Решите неравенство $5-3x \leqslant 2x-20$.

1) $(5;+\infty)$ 2) $(-\infty;5]$ 3) $[5;+\infty)$ 4) $[-5;+\infty)$

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 38). Расположите в порядке возрастания числа $a+1$; $\dfrac{1}{a}$; a^2.

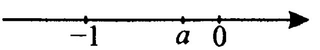


Рис. 38.

1) $a+1$; $\dfrac{1}{a}$; a^2 2) $\dfrac{1}{a}$; a^2; $a+1$ 3) $\dfrac{1}{a}$; $a+1$; a^2 4) a^2; $\dfrac{1}{a}$; $a+1$

Ответ: ________________.

3. Какое из приведённых ниже неравенств **не** следует из неравенства $a + b < d$?

1) $a < d - b$ 2) $d - b > a$ 3) $d - b - a > 0$ 4) $d - a + b > 0$

Ответ: ________________.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x + 7 \geqslant 15, \\ 10 - x > 0. \end{cases}$

1) $[4; 10)$ 2) $(4; 10]$ 3) $(10; +\infty)$ 4) $(-10; 4]$

Ответ: ________________.

5. Найдите множество решений двойного неравенства $2 \leqslant \dfrac{4x - 8}{7} \leqslant 5$.

1) $[-5{,}5; 10{,}25]$ 2) $[5{,}5; 10{,}75]$ 3) $[-10{,}75; -5{,}5]$ 4) $[-10{,}75; 5{,}5]$

Ответ: ________________.

6. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 39?

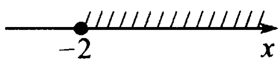


Рис. 39.

1) $\begin{cases} 3x + 5 > 2, \\ 5x + 24 \geqslant -2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 7x \geqslant 2, \\ 3 - x \leqslant 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 10 \geqslant 4, \\ 2 - 11x \geqslant 16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 1 \geqslant -9, \\ 4x - 5 \geqslant -29 \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Решите систему $\begin{cases} 3 \leqslant x < 5, \\ 2x - 8 > 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________.

8. Для каждой системы неравенств укажите множество её решений.

А) $\begin{cases} 5(x+1) \leqslant 7(x+3)+1, \\ \dfrac{2x-1}{3} \leqslant \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 7-3x \geqslant 0, \\ 4x-20 < 0 \end{cases}$

В) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+3} \leqslant 0, \\ \dfrac{x+3}{5} > \dfrac{x+2}{3} \end{cases}$

1) $\left(-\infty; \dfrac{7}{3}\right]$ 2) $[-8{,}5; 5]$ 3) $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ 4) $(-3; -0{,}5)$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Решите неравенство $5x - 2 \geqslant 13$.

1) $(3; +\infty)$ 2) $(-\infty; 3]$ 3) $[3; +\infty)$ 4) $[-3; +\infty)$

Ответ: ________________.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 40). Расположите в порядке убывания числа a^2; $a+1$; $\dfrac{1}{a}$.

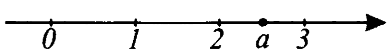


Рис. 40.

1) $a+1$; a^2; $\dfrac{1}{a}$ 2) a^2; $a+1$; $\dfrac{1}{a}$

3) $\dfrac{1}{a}$; $a+1$; a^2 4) $\dfrac{1}{a}$; a^2; $a+1$

Ответ: ________________.

3. Какое из неравенств не следует из неравенства $a+b-1 \geqslant c$?

1) $c+1 \leqslant a+b$ 2) $b-c \geqslant 1-a$

3) $a-c-1 \geqslant -b$ 4) $1-b \geqslant a-c$

Ответ: ________________.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 15x - 4 \geqslant 2x + 5, \\ 4 - x \leqslant 3. \end{cases}$

1) $[1; +\infty)$ 2) $(-1; +\infty)$ 3) $(1; +\infty)$ 4) $[-1; +\infty)$

Ответ: ________________ .

5. Найдите множество решений двойного неравенства $-3 \leqslant \dfrac{x+2}{4} \leqslant 1.$

1) $[-14; 2]$ 2) $[2; 14]$ 3) $[-14; -2]$ 4) $[-2; 14]$

Ответ: ________________ .

6. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 41?

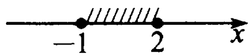


Рис. 41.

1) $\begin{cases} 7x - 13 \leqslant 1, \\ 5 - 4x \leqslant 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5 \leqslant 2, \\ 7 - 2x \leqslant 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x - 5 \geqslant 3, \\ 2x + 8 \geqslant 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 17 \leqslant 4, \\ 5x - 6 \leqslant 4 \end{cases}$

Ответ: ________________ .

7. Решите систему $\begin{cases} -2 \leqslant x < 6, \\ 2x - 7 < 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________ .

8. Для каждой системы неравенств укажите множество её решений.

А) $\begin{cases} 4x - 1 < x + 2, \\ 5x - 6 < x - 2 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 4x - 1 < 15, \\ x^2 - 8x + 7 \leqslant 0 \end{cases}$

В) $\begin{cases} 3x - 12 \leqslant 0 \\ -5x \geqslant 10 \end{cases}$

1) $[1; 4)$ 2) $(-\infty; -2]$ 3) $(-\infty; 1)$ 4) $(-2; -0{,}5)$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Решите неравенство $0{,}9 - 0{,}1x \geqslant 0$. Ответ запишите в виде полуинтервала.

Ответ: ________________ .

2. Известно, что число m принадлежит промежутку $(0; 1)$. На каком из рисунков (см. рис. 42) расположение чисел m, $2m$, m^2 указано правильно?

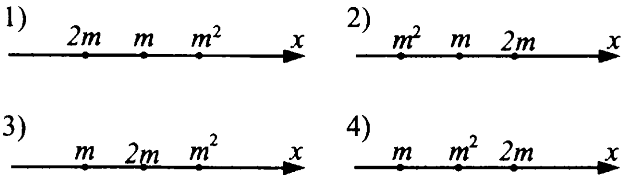


Рис. 42.

Ответ: ______________ .

3. Какое из приведённых ниже неравенств является верным при всех значениях $q < -7$?

1) $q + 7 > 0$ 2) $7 - q < 0$

3) $7 - q > 10$ 4) $q + 7 < -7$

Ответ: ______________ .

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} y < 3{,}2, \\ y < \dfrac{17}{21}, \\ y \leqslant -4. \end{cases}$

Ответ запишите в виде неравенства.

Ответ: ______________ .

5. Укажите промежуток, которому принадлежит множество решений двойного неравенства $3x - 1 \leqslant 2x \leqslant 4x + 5$.

1) $(-3; 0)$ 2) $[-2{,}5; 0{,}9]$ 3) $[-2{,}6; 1]$ 4) $[1; 2{,}5]$

Ответ: ______________ .

6. На каком из рисунков (см. рис. 43) изображено множество решений системы неравенств $\begin{cases} x + 1 \leqslant -2, \\ 2x + 1 < -7? \end{cases}$

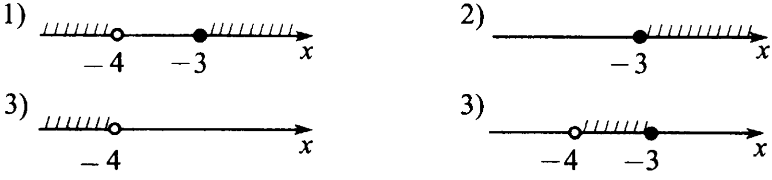


Рис. 43.

Ответ: ______________ .

7. Решите систему $\begin{cases} -4 \leqslant 2x < 5, \\ 4x - 12 < 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________.

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства $5x + 4 > 2x - 5$, удовлетворяющих условию $4x - 2 \leqslant 3$.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Решите неравенство $0{,}84x - 0{,}1 \geqslant 2$. Ответ запишите в виде полуинтервала.

Ответ: ________________.

2. Известно, что число k принадлежит промежутку $(2; +\infty)$. На каком из рисунков (см. рис. 44) расположение чисел k, $2k$, k^2 указано правильно?

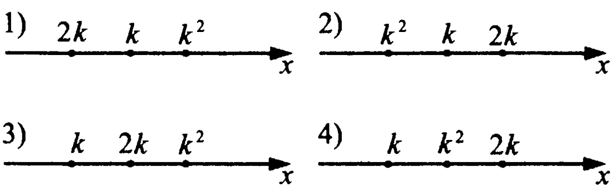


Рис. 44.

Ответ: ________________.

3. Какое из приведённых ниже неравенств является верным при всех значениях $b < 0{,}5$?

1) $-6b + 8 < 5$ 2) $-6b + 8 > 5$
3) $6b + 8 < 5$ 4) $-6b - 8 > 5$

Ответ: ________________.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} x > 8, \\ x \geqslant \dfrac{15}{17}, \\ x \geqslant -25. \end{cases}$ Ответ запишите в виде неравенства.

Ответ: ________________.

5. Укажите промежуток, которому принадлежит множество решений двойного неравенства $-x+5<3x<x+7$.

1) $(1;3)$ 2) $[1{,}2;3{,}6]$ 3) $[1{,}6;4]$ 4) $[1;2{,}5]$

Ответ: ______________.

6. Укажите на рисунке 45 множество решений системы неравенств
$$\begin{cases} 5x-2>0, \\ 12-3x>0. \end{cases}$$

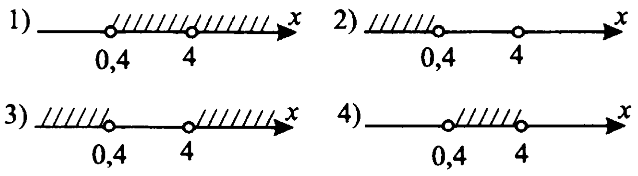


Рис. 45.

Ответ: ______________.

7. Решите систему $\begin{cases} -9<3x<6, \\ 5x+10\leqslant 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ______________.

8. Найдите количество целочисленных решений неравенства $3x-7\leqslant 2x+5$, удовлетворяющих условию $2x-9>12$.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

Ответ: ______________.

Вариант № 5

1. Решите неравенство $2x+8\geqslant -5(x-3)$. Ответ запишите в виде неравенства.

Ответ: ______________.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 46). Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$; $a^2 - a$; $1 - a$.

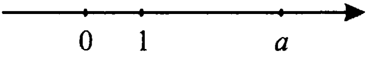


Рис. 46.

1) $1 - a; \frac{1}{a}; a^2 - a$　　2) $\frac{1}{a}; a^2 - a; 1 - a$

3) $a^2 - a; 1 - a; \frac{1}{a}$　　4) $a^2 - a; \frac{1}{a}; 1 - a$

Ответ: ________________ .

3. Какое из приведённых ниже неравенств следует из неравенства $a + b > d$?

1) $a > b + d$　　2) $a + b + d > 0$

3) $d - b + a < 0$　　4) $a + b - d > 0$

Ответ: ________________ .

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 1 \leqslant 4x, \\ \dfrac{5 - x}{x^2 + 2} \geqslant 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________ .

5. При каких значениях y значения выражения $7 - 2y$ принадлежат промежутку $[-2; 5]$? Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________ .

6. Укажите на рисунке 47 множество решений системы неравенств $\begin{cases} 4x - 5 > 0, \\ 24 - 6x > 0. \end{cases}$

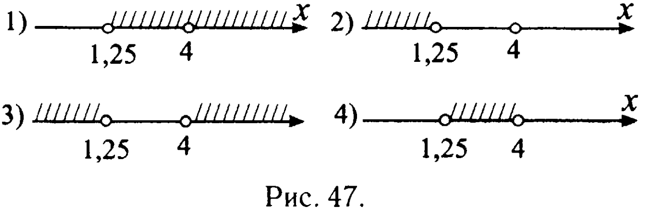


Рис. 47.

Ответ: ________________ .

7. Решите систему $\begin{cases} -14 \leqslant 4x < 10, \\ -5 \leqslant 2x \leqslant 7. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________ .

8. Решите неравенство $\dfrac{9-x^2}{x^2+2} \geqslant 0$. Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. Решите неравенство $3(x+3) < -2(x-5)$. Ответ запишите в виде неравенства.

Ответ: ________________ .

2. Используя рисунок 48, расположите числа $2a$, $b-a$, $1-a+c$ в порядке убывания.

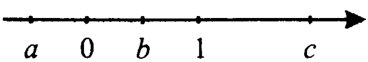


Рис. 48.

1) $1-a+c; 2a; b-a$ 2) $b-a; 2a; 1-a+c$
3) $1-a+c; b-a; 2a$ 4) $2a; b-a; 1-a+c$

Ответ: ________________ .

3. Какое из приведённых ниже неравенств следует из неравенства $1-a > b-c$?

1) $a > c-b-1$ 2) $a < c-b-1$
3) $a-c < 1-b$ 4) $a-c > 1-b$

Ответ: ________________ .

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x-5 \geqslant 2x-1, \\ \dfrac{2x-11}{x^2+9} \leqslant 0. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________ .

5. При каких значениях x значения выражения $1-3x$ принадлежат промежутку $[-14; 4]$? Ответ укажите в виде неравенства.

Ответ: ________________ .

6. На каком из рисунков (см. рис. 49) изображено множество решений системы неравенств $\begin{cases} \dfrac{2-x}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{3} + 2, \\ \dfrac{5x-3}{3} \geqslant x - \dfrac{4}{3}. \end{cases}$

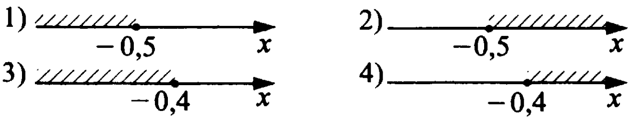


Рис. 49.

Ответ: ________________.

7. Решите систему $\begin{cases} -9 < 5x \leqslant 10, \\ -12 \leqslant 4x \leqslant -2. \end{cases}$ Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________.

8. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-8}{x^2+9} \geqslant 0$. Ответ запишите с помощью числовых промежутков.

Ответ: ________________.

§ 13. Алгебра. Квадратные неравенства и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Основные сведения

Квадратным неравенством с одной переменной x называют всякое неравенство, имеющее один из следующих видов: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где a, b, c — произвольные действительные числа и $a \neq 0$.

Рассмотрим один из способов решения квадратных неравенств частного вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \ (a > 0),$$

основанный на построении эскиза графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Решение квадратных неравенств остальных видов проводится аналогично.

Графиком функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, при указанных a, b и c, является **парабола**, ветви которой направлены вверх. В зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, этот график может иметь один из трёх указанных на рисунке 50 видов (x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$):

Из графика видно, что в случае I множеством решений неравенства является объединение двух интервалов: $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

В случае II множеством решений неравенства является объединение двух интервалов: $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$.

В случае III решением неравенства является любое число, поэтому множеством его решений является интервал: $(-\infty; +\infty)$.

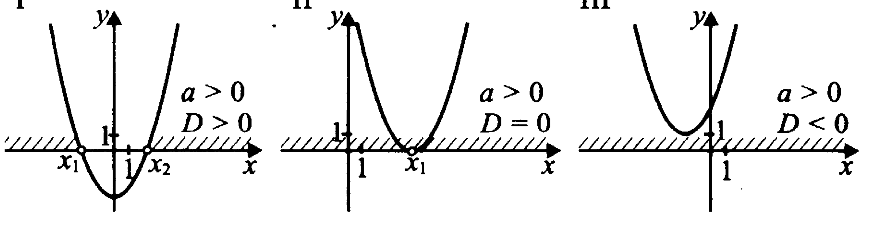


Рис. 50.

Тем самым для решения неравенства надо найти корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (если они есть) и нарисовать эскиз параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$. Она проходит через полученные корни (или расположена выше оси абсцисс), а её ветви направлены вверх.

По виду полученного графика указываем множество решений. Образец решения квадратных неравенств указанным способом приведен в задании 3 варианта с решениями.

Квадратные неравенства можно решать также и методом интервалов (см. решение задания 1 варианта с решениями). Он является универсальным и применим для решения многих других неравенств.

При решении неравенства получается равносильное неравенство, если:

1. Перенести слагаемое из одной части неравенства в другую с противоположным знаком и сохранить знак исходного неравенства;

2. Умножить или разделить обе части неравенства с переменной x на одно и то же выражение $p(x)$, положительное **при всех значениях** x, и сохранить знак исходного неравенства;

3. Умножить или разделить обе части неравенства с переменной x на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное **при всех значениях** x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный.

При решении неравенств часто пользуются тем, что знак дроби совпадает со знаком произведения числителя на знаменатель:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0;$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0.$$

Если при этом $f(x)$ и $g(x)$ – линейные выражения, то дробно рациональное неравенство заменяется квадратным (см. задания 6 и 8 варианта с решениями).

Модуль действительного числа и его основные свойства:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \qquad |a| \geqslant 0;$$

$$|a| = |-a|; \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0;$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \qquad |a+b| \leqslant |a| + |b|;$$

$$|a|^2 = a^2; \qquad |a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

Простейшие неравенства с модулями

1) Неравенство $|\boldsymbol{f(x)}| < \boldsymbol{b}$ $(b > 0)$ равносильно двойному неравенству $-b < f(x) < b$, которое записывается в виде системы неравенств:
$\begin{cases} f(x) < b, \\ f(x) > -b. \end{cases}$

Множеством его решений является пересечение множеств решений первого и второго неравенств системы.

2) Неравенство $|\boldsymbol{f(x)}| \leqslant \boldsymbol{b}$ $(b > 0)$ равносильно двойному неравенству $-b \leqslant f(x) \leqslant b$, которое записывается в виде системы неравенств:
$\begin{cases} f(x) \leqslant b, \\ f(x) \geqslant -b. \end{cases}$

3) Неравенство $|\boldsymbol{f(x)}| > \boldsymbol{b}$ $(b > 0)$ выполняется в двух случаях:

А) $f(x) < -b$; Б) $f(x) > b$. Множеством его решений является объединение множеств решений неравенств А) и Б).

В таком случае удобно говорить, что неравенство равносильно совокупности двух неравенств А) и Б), которая записывается так:
$\left[\begin{array}{l} f(x) < -b, \\ f(x) > b. \end{array}\right.$

4) Неравенство $|\boldsymbol{f(x)}| \geqslant \boldsymbol{b}$ $(b > 0)$ выполняется в двух случаях:

А) $f(x) \leqslant -b$; Б) $f(x) \geqslant b$. Множеством его решений является объединение множеств решений неравенств А) и Б).

Это неравенство равносильно совокупности двух неравенств:
$\left[\begin{array}{l} f(x) \leqslant -b, \\ f(x) \geqslant b. \end{array}\right.$

Укажем ещё некоторые методы решения уравнений и неравенств, содержащих модуль:

Общий метод. Разобьём числовую ось точками, в которых неравенство не определено, и точками, в которых обращаются в ноль выражения, стоящие под знаком модуля. Решаем неравенство на каждом из полученных промежутков. Решением неравенства является объединение множеств его решений на полученных промежутках.

Метод возведения в квадрат. $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе
$\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

Метод замены при решении уравнений и неравенств, содержащих одновременно выражения $|f(x)|$ и $f^2(x)$.

Например, $af^2(x) + b|f(x)| + c > 0 \Leftrightarrow a|f(x)|^2 + b|f(x)| + c > 0$, так как $f^2(x) = |f(x)|^2$. Замена $t = |f(x)|$, $t \geqslant 0$, приводит к квадратному неравенству $at^2 + bt + c > 0$.

Вариант с решениями

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + x - 6 < 0$? Ответ укажите при помощи промежутков.

Решение. Пусть $x^2 + x - 6 = f(x)$. Решаем неравенство $f(x) < 0$ методом интервалов.

Находим корни уравнения $f(x) = 0$ по формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3,\ x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Числа -3 и 2 разбивают ось абсцисс на три интервала:$(-\infty; -3)$; $(-3; 2)$; $(-3; 2)$ (см. рис. 51).

Для определения знака $f(x)$ на каждом из интервалов разложим $f(x)$ на линейные множители, получим $f(x) = (x+3)(x-2)$. Найдём теперь знак $f(x)$ в какой-нибудь одной точке каждого из трёх интервалов:

$-4 \in (-\infty; -3)$, $f(-4) = (-4+3)(-4-2) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ в любой точке интервала $(-\infty; -3)$;

$0 \in (-3; 2)$, $f(0) = (0+3)(0-2) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ в любой точке интервала $(-3; 2)$;

$3 \in (2; +\infty)$, $f(3) = (3+3)(3-2) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ в любой точке интервала $(2; +\infty)$.

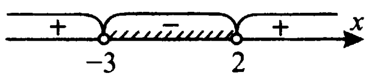


Рис. 51.

Следовательно, $f(x) < 0$ при $x \in (-3; 2)$.

Ответ: $(-3; 2)$.

2. Решите неравенство $|x+3| \geqslant 2$.

1) $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$ 2) $[-1; 5]$
3) $[-5; -1]$ 4) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Решение. Неравенство $|x+3| \geqslant 2$ выполняется в двух случаях: а) $x + 3 \leqslant -2$; б) $x + 3 \geqslant 2$.

а) $x + 3 \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -5$; б) $x + 3 \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant -1$.

Решением неравенства является объединение двух полуинтервалов: $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

Замечание. Более кратко указанное решение можно записать так:

$$|x+3| \geqslant 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3 \geqslant 2, \\ x+3 \leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ x \leqslant -5 \end{array}\right.$$

(см. «Основные сведения» к параграфу).

3. При каком наименьшем натуральном значении x значение квадратного трёхчлена $-4x^2+x+1$ меньше соответствующего значения двучлена $2-4x$?

Решение. Задача сводится к нахождению наименьшего натурального числа x, удовлетворяющего неравенству $-4x^2+x+1 < 2-4x$, равносильному неравенству $4x^2-5x+1>0$. Решим это неравенство с использованием эскиза графика параболы $y=4x^2-5x+1$.

Находим корни уравнения $4x^2-5x+1=0$. Непосредственно убеждаемся, что одним из корней является число 1. Так как по теореме Виета произведение корней равно $\frac{1}{4}$, то второй корень равен $\frac{1}{4}$.

Так как ветви параболы $y=4x^2-5x+1$ направлены вверх и она пересекает ось абсцисс в точках 1 и $\frac{1}{4}$, то её знаки определяются в соответствии с её эскизом (см. рис. 52).

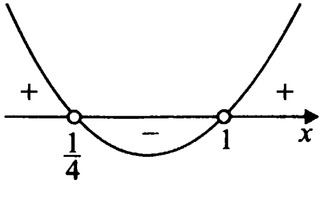


Рис. 52.

Согласно рисунку получаем, что $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1;\infty)$. Наименьшим натуральным числом, содержащимся во множестве $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1;\infty)$ является число 2.

Ответ: 2.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства
$\dfrac{x^2-15x+50}{x^2+3x+7} \leqslant 0.$

Решение. Решаем неравенство методом интервалов. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2-15x+50}{x^2+3x+7}$. Находим точки, при которых $f(x) = 0$, и те точки, в которых функция $f(x)$ не определена.

Знаменателем дроби $\dfrac{x^2-15x+50}{x^2+3x+7}$ является квадратный трёхчлен x^2+3x+7. Его дискриминант $D = 3^2 - 4 \cdot 7 < 0$ и старший коэффициент больше нуля. Значит, $x^2+3x+7 > 0$ при любом значении x. Следовательно, $f(x)$ определена при любом значении x и неравенство $\dfrac{x^2-15x+50}{x^2+3x+7} \leqslant 0$ равносильно неравенству $x^2 - 15x + 50 \leqslant 0$.

Решаем уравнение $x^2 - 15x + 50 = 0$ по теореме Виета. Находим такие числа, произведение которых равно свободному члену, равному 50, а сумма равна числу 15, противоположному к коэффициенту при x. Такими числами являются $x_1 = 5$ и $x_2 = 10$. Они и будут корнями уравнения.

Так как ветви параболы $y = x^2 - 15x + 50$ направлены вверх и она пересекает ось абсцисс в точках 5 и 10, то её знаки определяются в соответствие с её эскизом (см. рис. 53).

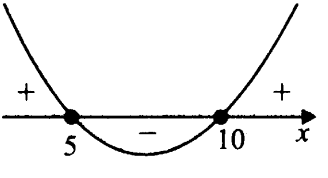


Рис. 53.

Получаем $5 \leqslant x \leqslant 10$. Промежуток $[5; 10]$ содержит 6 целых чисел: 5; 6; 7; 8; 9; 10. Значит, неравенство имеет 6 целочисленных решений.

Ответ: 6.

5. На рисунке 54 изображён график функции $y = f(x)$. Используя рисунок, решите неравенство $6 - f(x) \leqslant 0$.

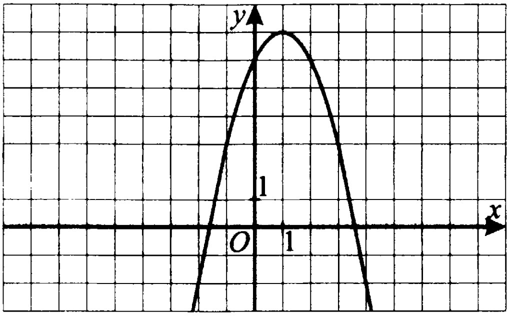


Рис. 54.

Решение. Неравенство $6 - f(x) \leqslant 0$ равносильно неравенству $f(x) \geqslant 6$. По рисунку определяем, что функция $y = f(x)$ принимает значение, равное 6, в двух точках: $x = 0$; $x = 2$. При $0 < x < 2$ значения функции больше 6. Поэтому $f(x) \geqslant 6$ при $x \in [0; 2]$.

Ответ: $[0; 2]$.

6. Решите неравенство $\dfrac{3}{2+x} > 2$.

1) $(-2; 0{,}5)$ 2) $(0{,}5; 2)$
3) $(-2; -0{,}5)$ 4) $(-1; 0)$

Решение. Преобразуем неравенство (см. соответствующие свойства в разделе «Основные сведения» к параграфу):

$$\frac{3}{2+x} > 2 \Leftrightarrow \frac{3}{2+x} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3-4-2x}{2+x} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+0{,}5}{x+2} < 0 \Leftrightarrow (x+0{,}5)(x+2) < 0.$$

Решаем полученное квадратное неравенство с помощью эскиза графика функции $y = (x+0{,}5)(x+2)$.

Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх и которая пересекает ось абсцисс в точках $x = -2$ и $x = -0{,}5$ (в этих точках значение функции $y = (x+0{,}5)(x+2)$ равно нулю, см. рис. 55).

По рисунку определяем, что $(x+0{,}5)(x+2) < 0$ на интервале $(-2; -0{,}5)$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

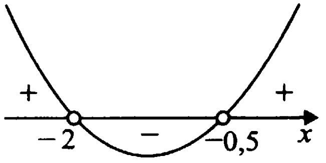


Рис. 55.

7. Решите неравенство $|3x+4| - |x-2| \leqslant 2$. Ответ укажите с помощью промежутков.

Решение. Находим те значения x, при которых обращаются в ноль выражения под знаком модуля:

$$3x + 4 = 0 \text{ при } x = -\frac{4}{3};\ x - 2 = 0 \text{ при } x = 2.$$

Непосредственной подстановкой в неравенство убеждаемся, что $x = -\dfrac{4}{3}$ является решением неравенства, а $x = 2$ не является.

Точки $x = -\dfrac{4}{3}$ и $x = 2$ делят всю числовую прямую на три интервала:

$$1)\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right);\quad 2)\left(-\frac{4}{3}; 2\right);\quad 3)\,(2; +\infty).$$

Решаем неравенство на каждом интервале отдельно, а затем объединим полученные решения.

На интервале 1) $3x+4<0$, поэтому $|3x+4| = -3x-4$. Аналогично: $x-2<0$, поэтому $|x-2| = -x+2$. Значит, на интервале 1) получаем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} x < -\dfrac{4}{3}, \\ (-3x-4) - (-x+2) \leqslant 2. \end{cases}$$

Решаем эту систему с помощью равносильных преобразований:

$$\begin{cases} x < -\dfrac{4}{3}, \\ -2x \leqslant 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{4}{3}, \\ x \geqslant -4; \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leqslant x < -\frac{4}{3}.$$

Решением системы является полуинтервал $\left[-4; -\dfrac{4}{3}\right)$.

На интервале 2) аналогично получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} < x < 2, \\ (3x+4) - (-x+2) \leqslant 2. \end{cases}$$

Решаем эту систему с помощью равносильных преобразований:

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} < x < 2, \\ 4x \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{3} < x < 2, \\ x \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3} < x \leqslant 0.$$

Решением системы является полуинтервал $\left(-\dfrac{4}{3}; 0\right]$.

Также на интервале 3) получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 2 < x, \\ (3x+4) - (x-2) \leqslant 2. \end{cases}$$

Решаем эту систему с помощью равносильных преобразований:

$$\begin{cases} 2 < x, \\ 2x \leqslant -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -2. \end{cases}$$ Система решений не имеет.

Объединяя все найденные решения, получаем промежуток $[-4; 0]$.

Ответ: $[-4; 0]$.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ 3x \geqslant 2x+5. \end{cases}$ Ответ укажите при помощи промежутков.

Решение. Решим сначала первое неравенство системы, которое равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2x-3} < -1, \\ \dfrac{x+3}{2x-3} > 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3+2x-3}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{x+3-2x+3}{2x-3} > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{6-x}{2x-3} > 0. \end{array}\right.$$

Первое неравенство совокупности равносильно квадратному неравенству $3x(2x-3) < 0$, эскиз графика функции $f(x) = 3x(2x-3)$ см. на рис. 56.

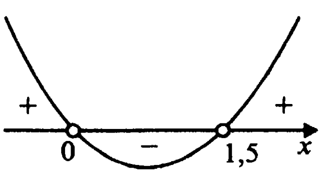


Рис. 56.

Второе неравенство равносильно неравенству $(6-x)(2x-3) > 0$, эскиз графика функции $g(x) = (6-x)(2x-3)$ см. на рис. 57.

В соответствие с этими графиками, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x < 1{,}5, \\ 1{,}5 < x < 6. \end{array}\right.$$

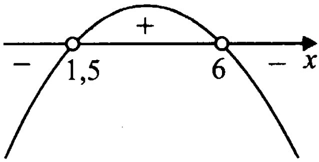


Рис. 57.

Множеством решений этой совокупности является объединение двух интервалов: $(0; 1{,}5) \cup (1{,}5; 6)$.

Решением второго неравенства заданной системы является полуинтервал $[5; +\infty)$. Общими решениями первого и второго неравенства системы является полуинтервал $[5; 6)$

Ответ: $[5; 6)$.

Вариант № 1

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + 4x - 21 < 0$? Ответ укажите при помощи прмежутков.

Ответ: ________________.

2. Решите неравенство $|2x - 3| > 1$.

1) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ 2) $(-\infty; 1)$
3) $(2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$

Ответ: ________________.

3. При каком наибольшем натуральном значении n значение квадратного трёхчлена $3n^2 - 18n + 2$ меньше соответствующего значения двучлена $2 - 3n$?

Ответ: ________________.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства
$\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 + 10} < 0.$

Ответ: ________________.

5. На рисунке 58 изображён график функции $y = f(x)$. Используя рисунок, решите неравенство $6 - f(x) < 3$.

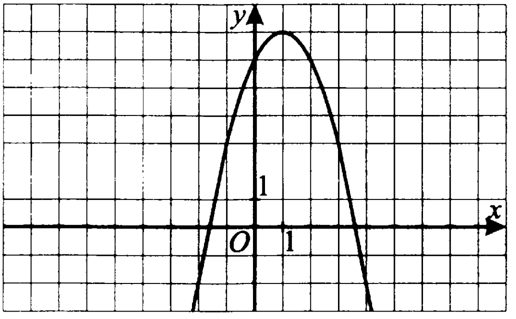


Рис. 58.

1) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$
2) $(0; 2)$
3) $(-1; 3)$
4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

Ответ: ________________.

6. Решите неравенство $\dfrac{2}{2x+3} \geqslant 1$.

1) $(-\infty; -3) \cup [-1; +\infty)$
2) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$
3) $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$
4) $(-3; -1]$

Ответ: ________________.

7. Решите неравенство $|x+1| + |x-1| \leqslant 2$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 2, \\ 4x - 2 \geqslant 2x + 1. \end{cases}$ Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Решите неравенство $x^2 - 7x + 6 < 0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

2. Решите неравенство $|2x - 5| > 2$.

1) $(-\infty; 3{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$
2) $(-\infty; -1{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$
3) $(3{,}5; +\infty)$
4) $(-\infty; 1{,}5) \cup (3{,}5; +\infty)$

Ответ: ________________.

3. При каком наименьшем натуральном значении m значение квадратного трёхчлена $4m^2 - 8m + 3$ больше соответствующего значения двучлена $3m - 4$?

Ответ: ________________.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства
$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + x + 1} < 0$.

Ответ: ________________.

5. На рисунке 59 изображён график функции $y = f(x)$. Используя график, решите неравенство $-f(x) < 0$.

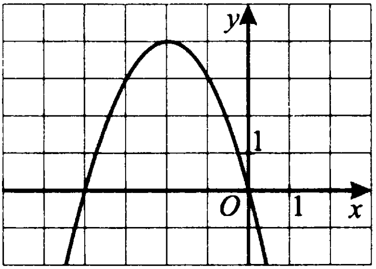


Рис. 59.

1) $(-4; 0)$
2) $(-3; -1)$
3) $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$
4) $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$

Ответ: ________________.

6. Решите неравенство $\frac{3}{x + 1} \geqslant 2$.

1) $[-1; +\infty)$ 2) $\left(-1; \frac{1}{2}\right]$ 3) $(-\infty; 2]$ 4) $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ответ: ________________.

7. Решите неравенство $|5x+2|-|x-1| \leqslant 1$. Ответ укажите с помощью промежутков.

Ответ: ________________.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x-5}{2x-1}\right| > 1, \\ 5x-4 \geqslant 4x-6. \end{cases}$ Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите неравенство $(x-7)(x+7) < -40$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

2. Решите неравенство $|2x-3| < 5$.

1) $1 < x < 4$ 2) $x < 1, x > 4$
3) $-1 < x < 4$ 4) $x < -1, x > 4$

Ответ: ________________.

3. Какое из перечисленных ниже множеств является решением неравенства $\dfrac{1}{2-x} < 3$?

1) $\left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$ 2) $\left(\dfrac{5}{3}; 2\right)$
3) $\left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right)$ 4) $\left(\dfrac{5}{3}; 2\right) \cup \left(2; +\infty\right)$

Ответ: ________________.

4. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства $x^2 - 5|x| + 6 \leqslant 0$.

Ответ: ________________.

5. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = -x^2 + 36$, принимает отрицательные значения? Ответ укажите с помощью промежутков.

Ответ: ________________.

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x-5 < x+1, \\ 2x-5 \geqslant 1-x. \end{cases}$

1) нет решений 2) $(-\infty; 6)$ 3) $[2; 6)$ 4) $[2; +\infty)$

Ответ: ________________.

7. Решите неравенство $\dfrac{2x^2-8}{3-|x+2|} \geqslant 0$.

1) решений нет 2) $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$

3) $[-5; 1)$ 4) $(-5; -2] \cup (1; 2]$

Ответ: ______________ .

8. Решите неравенство $|x+1|+|2x-3| \leqslant 11$. Ответ укажите с помощью промежутков.

Ответ: ______________ .

Вариант № 4

1. Решите неравенство $(3-x)(3+x) > -7$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ______________ .

2. Решите неравенство $|4x+3| > 7$.

1) $1 < x < 4$ 2) $x < 1, x > 4$

3) $-1 < x < 4$ 4) $x > 1, x < -2{,}5$

Ответ: ______________ .

3. Какое из перечисленных ниже множеств является решением неравенства $\dfrac{3}{x+1} \leqslant 2$.

1) $[-1; +\infty)$ 2) $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right]$ 3) $(-\infty; 2]$ 4) $(-\infty; -1) \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Ответ: ______________ .

4. Укажите наименьшее целочисленное решение неравенства $x^2 - 8|x| + 7 \leqslant 0$.

Ответ: ______________ .

5. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = x^2 - 5x + 6$, принимает неотрицательные значения? Ответ укажите с помощью промежутков.

Ответ: ______________ .

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x+3 \leqslant 3x-1, \\ x^2+5x < 6. \end{cases}$

1) нет решений 2) $(-\infty; -6)$ 3) $(-6; -4]$ 4) $(1; +\infty)$

Ответ: ______________ .

7. Решите неравенство $\dfrac{3x^2-3}{5-|x-1|} \geqslant 0$.

1) решений нет — 2) $(-\infty; -4) \cup [6; +\infty)$

3) $[-1; 6)$ — 4) $(-4; -1] \cup [1; 6)$

Ответ: ______________.

8. Решите неравенство $|x-3|+|2x+1| \leqslant 14$. Ответ укажите с помощью промежутков.

Ответ: ______________.

Вариант № 5

1. Решите неравенство $49-4x^2>0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ______________.

2. Решите неравенство $|x+2|>|x-1|$. Ответ укажите в виде неравенств.

Ответ: ______________.

3. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства

$\dfrac{32-16x}{x-5} \geqslant 0$.

1) 5 — 2) 2 — 3) 3 — 4) 4

Ответ: ______________.

4. Из чисел -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 выберите все те, при которых значения выражения $3x^2-6x+6$ меньше значений выражения $2x^2+1$. В ответе запишите их сумму.

Ответ: ______________.

5. Решите неравенство $x^4-13x^2+36 \leqslant 0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ______________.

6. Решите неравенство

$\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-25} \leqslant 0$.

1) $(-5; 0{,}5] \cup [3; 5)$ — 2) $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$

3) $[-0{,}5; 3) \cup (5; +\infty)$ — 4) $(-5; -0{,}5] \cup [0{,}5; 3)$

Ответ: ______________.

7. Дана функция $f(x)=x^2-5x-6$. Решите неравенство $f(|x-2|) \leqslant 0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ______________.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{8-x}{x+5} \geqslant 0, \\ |x-5| - |x| \geqslant 0. \end{cases}$

В ответе укажите наибольшее натуральное число, являющееся решением этой системы.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Решите неравенство $25x^2 - 9 < 0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

2. Решите неравенство $|x-3| > |x+2|$. Ответ укажите в виде неравенства.

Ответ: ________________.

3. Укажите наименьшее целочисленное решение неравенства
$\dfrac{64-6x}{15-5x} \leqslant 0$.

1) 9 2) 2 3) 3 4) 4

Ответ: ________________.

4. Из чисел -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 выберите все те, при которых значения выражения $2x^2 - 3x - 5$ меньше значений выражения $x^2 - 1$. В ответе запишите их сумму.

Ответ: ________________.

5. Решите неравенство $x^4 + 5x^2 - 36 \geqslant 0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________.

6. Решите неравенство
$\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{16 - x^2} \geqslant 0$.

1) $(-4; -0{,}5] \cup [2; +\infty)$ 2) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$
3) $[-0{,}5; 2) \cup (4; +\infty)$ 4) $(-4; -0{,}5] \cup [2; 4)$

Ответ: ________________.

7. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x - 10$. Решите неравенство $f(|x+3|) \geqslant 0$. Ответ укажите при помощи промежутков.

Ответ: ________________ .

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{8-x}{x+5} \leqslant 0, \\ |x-5| - |x| \leqslant 0. \end{cases}$

В ответе укажите наименьшее натуральное число, являющееся решением этой системы.

Ответ: ________________ .

§ 14. Алгебра. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Основные сведения

Числовые последовательности

Запишем последовательно друг за другом произвольные числа

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n;\ \dots\ (n \in N)$$

Получим **числовую последовательность**, которую будем обозначать (a_n). Числа, входящие в последовательность, называются её членами. Каждый член последовательности имеет свой номер.

Числовая последовательность, содержащая конечное число членов, называется конечной. В противном случае — бесконечной.

Нередко числовую последовательность задают **формулой**. Например, $a_n = n^2 - 6n + 8$ $(n \in N)$. Придавая n значения 1, 2, 3, ... будем получать первый, второй и так далее все остальные члены последовательности:
$a_1 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3, a_2 = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0, a_3 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1, \dots$

Формула $a_n = n^2 - 6n + 8$ называется **формулой n-го члена**.

Есть и другие способы задания числовых последовательностей. Например, можно задать её первый член a_1 и указать, как последующий член получается из предыдущих. Такой способ называют способом **рекуррентных соотношений**. Пусть $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - 2$.

Тогда $a_1 = 3$, $a_2 = 3 - 2 = 1$, $a_3 = 1 - 2 = -1, \dots$ Получим последовательность: $3; 1; -1; \dots$

Арифметическая прогрессия

Если первый член последовательности равен a_1 и $a_{n+1} = a_n + d$, где d — некоторое фиксированное число, не зависящее от n, то получаем последовательность:

$$a_1;\ a_1 + d;\ a_1 + 2d;\ a_1 + 3d;\ \dots$$

Эту последовательность называют **арифметической прогрессией**. Каждый её последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d. Это число называют **разностью арифметической прогрессии**. Заметим, что $d = a_{n+1} - a_n$.

Например, 2; 5; 8; 11; ..., здесь $a_1 = 2$ и $d = 3$.

Формула для нахождения n-ого члена арифметической прогрессии имеет вид:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Если сумму первых n членов арифметической прогрессии обозначить S_n, то $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ и S_n находится по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Отметим три свойства арифметической прогрессии:

1. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2};$$

2. Если a_k, a_l, a_m, a_p — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + p$, то $a_k + a_l = a_m + a_p$;

3. Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

Геометрическая прогрессия

Если первый член последовательности равен b_1 ($b_1 \neq 0$) и $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где q — некоторое число, отличное от 0, то получаем последовательность:

$$b_1;\ b_1 \cdot q;\ b_1 \cdot q^2;\ b_1 \cdot q^3 \ldots$$

Эту последовательность называют **геометрической прогрессией**. Каждый её последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии**. Заметим, что $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Например, 3; 6; 12; 24; ..., здесь $b_1 = 3$ и $q = 2$.

Формула для нахождения n-ого члена геометрической прогрессии имеет вид:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Если сумму первых n членов геометрической прогрессии обозначить S_n, то $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ и при $q \neq 1$ значение S_n находится по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Отметим два свойства геометрической прогрессии:

1. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = \frac{b_{n+1} \cdot b_{n-1}}{2};$$

2. Если a_k, a_l, a_m, a_p — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + p$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_p$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если геометрическая прогрессия (b_n) состоит из бесконечного числа членов и её знаменатель q не превосходит по модулю 1 $(|q| < 1)$, то прогрессию называют **бесконечно убывающей**. Действительно, члены такой прогрессии по модулю убывают. Если геометрическая прогрессия (b_n) является бесконечно убывающей, то определена сумма S всех её членов. Она находится по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Например, рассмотрим бесконечно убывающую прогрессию с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots \frac{1}{2^n}; \dots$$

Тогда её сумма $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$

Вариант с решениями

1. Какое из чисел 1) – 4) является членом последовательности, заданной формулой $a_n = n^2 - 4$.

1) -2 2) 6 3) 21 4) 2

Решение. Исследуем каждое из предложенных чисел.

1) Пусть $a_n = -2$, тогда $-2 = n^2 - 4$, $n^2 = 2$. Полученное уравнение не имеет решений во множестве натуральных чисел N. Следовательно, $a_n = -2$ не является членом заданной последовательности.

2) Пусть $a_n = 6$, тогда $6 = n^2 - 4$, $n^2 = 10$. Полученное уравнение не имеет решений во множестве натуральных чисел N. Следовательно, $a_n = 6$ не является членом заданной последовательности.

3) Пусть $a_n = 21$, тогда $21 = n^2 - 4$, $n^2 = 25$. Полученное уравнение имеет единственное решение $n = 5$ во множестве натуральных чисел N. Следовательно, число 21 является 5-м членом заданной последовательности.

4) Пусть $a_n = 2$, тогда $2 = n^2 - 4$, $n^2 = 6$. Полученное уравнение не имеет решений во множестве натуральных чисел N. Следовательно, $a_n = 2$ не является членом заданной последовательности.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Найдите шестой член арифметической прогрессии, заданной рекуррентными соотношениями: $a_1 = -5$, $a_{n+1} = a_n + 4$.

1) 2 2) -5 3) 22 4) 15

Решение. Находим согласно условию члены заданной указанной последовательности: $a_1 = -5$, $a_2 = -5 + 4 = -1$, $a_3 = -1 + 4 = 3$, $a_4 = 3 + 4 = 7$, $a_5 = 7 + 4 = 11$, $a_6 = 11 + 4 = 15$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Замечание. Шестой член арифметической прогрессии можно найти по формуле n-ого члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$; $a_6 = a_1 + (6 - 1)d$. По условию $a_1 = -5$, $d = 4$, поэтому $a_6 = -5 + 5 \cdot 4 = 15$.

3. Найдите пятый член геометрической прогрессии, заданной рекуррентными соотношениями: $b_1 = 243$, $b_{n+1} = -\frac{1}{3}b_n$.

1) 2 2) -5 3) 3 4) 15

Решение. Находим согласно условию члены заданной указанной последовательности: $b_1 = 243$, $b_2 = 243 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -81$,

$b_3 = -81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 27$, $b_4 = 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -9$; $b_5 = -9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

Замечание. Пятый член геометрической прогрессии можно найти по формуле n-го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$: $b_5 = b_1 \cdot q^{5-1}$. По условию $b_1 = 243$, $q = -\frac{1}{3}$, поэтому $b_5 = 243 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{243}{3^4} = 3$.

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: 3,2; 3,52; 3,872; 4,2692.

1) 1,2 2) 0,0 3) $-1,1$ 4) 1,1

Решение. Знаменатель геометрической прогрессии
$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3,52}{3,2} = 1,1$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Укажите число неотрицательных членов арифметической прогрессии: 13; 10; 7; ...

1) 5 2) 6 3) 4 4) 10

Решение. Разность заданной арифметической прогрессии
$d = a_2 - a_1 = 10 - 13 = -3$. Следовательно, $a_4 = a_3 + d = 7 - 3 = 4$, $a_5 = a_4 + d = 4 - 3 = 1$, $a_6 = a_5 + d = 1 - 3 = -2 < 0$. Очевидно, все последующие члены прогрессии являются отрицательными. Значит, заданная прогрессия содержит 5 неотрицательных членов.

Из предложенных ответов верным является 1).

Замечание. Для решения можно применить формулу n-ого члена: $a_n = 13 + (n-1) \cdot (-3)$ и решить неравенство $13 + (n-1) \cdot (-3) \geqslant 0$ в области натуральных чисел.

Ответ: 1.

6. Найдите количество членов геометрической прогрессии
135; 45; 15; ... , которые не меньше 1.

Решение. Находим формулу n-ого члена b_n этой геометрической прогрессии и решаем неравенство $b_n \geqslant 1$.

По условию $b_1 = 135$ и $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{45}{135} = \frac{1}{3}$, поэтому $b_n = 135 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Решаем неравенство $135 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \geqslant 1$. Получаем $\frac{135}{3^{n-1}} \geqslant 1$, $3^{n-1} \leqslant 135$, $3^n \leqslant 405$.

Решаем неравенство перебором: $3^1 = 3 \leqslant 435$, $3^2 = 9 \leqslant 405$, $3^3 = 27 \leqslant 405$, $3^4 = 81 \leqslant 405$, $3^5 = 243 \leqslant 405$, $3^6 = 729 > 405$.

Искомое количество равно 5, так как при умножении 243 на степени числа 3 будут получаться числа больше 405. Значит, последующие члены не удовлетворяют условию.

Ответ: 5.

7. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 5$, $d = -2$.

1) -20 2) 15 3) 10 4) 5

Решение. Сумму первых пяти членов заданной арифметической прогрессии найдём по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Получаем $S_5 = \frac{2 \cdot 5 - 2(5-1)}{2} \cdot 5 = 5$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -7$ и $b_5 = 0{,}875$.

Решение. Пусть b_1 — первый член этой прогрессии, а q — её знаменатель. Применяя формулу n-ого члена геометрической прогрессии получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q = -7, \\ b_1 \cdot q^4 = 0{,}875. \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое. Получим $q^3 = \frac{0{,}875}{-7} = -0{,}125$. Отсюда $q = -0{,}5$

Ответ: $-0{,}5$.

Вариант № 1

1. Какое из чисел 1) – 4) является членом последовательности, заданной формулой $a_n = n^2 - 4n$.

1) -5 2) -16 3) 12 4) -6

Ответ: ________________.

2. Найдите седьмой член арифметической прогрессии, заданной рекуррентными соотношениями: $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n - 0{,}3$.

1) $-1{,}9$ 2) 4 3) $-2{,}8$ 4) $2{,}8$

Ответ: ________________.

3. Найдите пятый член геометрической прогрессии, заданной рекуррентными соотношениями: $b_1 = -16$, $b_{n+1} = 0{,}5b_n$.

1) 2 2) -1 3) -8 4) 4

Ответ: ________________.

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: $-0{,}2$; $0{,}24$; $-0{,}288$; $0{,}3456$.

1) $-1{,}2$ 2) $1{,}2$ 3) $-1{,}1$ 4) $1{,}1$

Ответ: ________________.

5. Укажите число неположительных членов арифметической прогрессии: -19; $-16{,}7$; $-14{,}4$; $-12{,}1, \ldots$

Ответ: ________________.

6. Найдите количество членов, не меньших 2, в геометрической прогрессии: 248; 124; 62; 31; ....

Ответ: ________________.

7. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -3$, $d = -2$.

1) -8 2) -35 3) -18 4) -33

Ответ: ________________.

8. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = -10$ и $b_5 = 80$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Числовая последовательность задана формулой n-го члена: $a_n = n^2 + n + 3$. Из чисел 1) – 4) выберите то, которое является членом этой последовательности.

1) -3 2) -6 3) 8 4) 9

Ответ: ________________.

2. Арифметическая прогрессия задана следующими условиями: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = a_n - 2$. Найдите пятый член этой последовательности.

1) -4 2) -6 3) -8 4) 10

Ответ: ________________.

3. Геометрическая прогрессия задана следующими условиями: $b_1 = 625$, $b_{n+1} = -0{,}2b_n$. Найдите шестой член этой последовательности.

1) $-0{,}02$ 2) $0{,}2$ 3) $-0{,}2$ 4) $0{,}04$

Ответ: ________________.

4. Найдите разность арифметической прогрессии: -15; $-14{,}85$; $-14{,}7$; $-14{,}55$.

1) $0{,}25$ 2) $0{,}15$ 3) $-0{,}15$ 4) $-0{,}25$

Ответ: ________________.

5. Укажите число членов арифметической прогрессии $4, 7, 10, \ldots$, удовлетворяющих условию $a_n \leqslant 48$.

Ответ: ________________.

6. Укажите количество членов, которые не больше 2000, в геометрической прогрессии: 7; 21; 63; …

Ответ: ________________.

7. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если $b_1 = -2$; $q = 0{,}5$.

Ответ: ________________.

8. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_2 = -10$ и $a_5 = 80$.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) $2; 3; 5; 6; \ldots$ 2) $-2; -4; -8; -12; \ldots$
3) $4; 1; -2; -5; \ldots$ 4) $1; 2; 4; 8; \ldots$

Ответ: ________________.

2. В арифметической прогрессии $a_4 + a_{17} = 42$. Найдите $a_2 + a_{19}$.

Ответ: ________________.

3. Геометрическая прогрессия b_n задана условиями $b_1 = 4$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{4}$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = \frac{1}{4^n}$ 2) $b_n = \frac{1}{4^{n-1}}$ 3) $b_n = \frac{1}{4^{n-2}}$ 4) $b_n = \frac{1}{4^{n-3}}$

Ответ: ________________.

4. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Укажите её.

1) $1; 2; 6; 8; \ldots$ 2) $2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \ldots$
3) $1; 3; 5; 7; \ldots$ 4) $2; 4; 5; 6; \ldots$

Ответ: ________________.

5. В геометрической прогрессии $b_5 \cdot b_{20} = 13$. Найдите $b_3 \cdot b_{22}$.

Ответ: ________________.

6. Арифметическая прогрессия задана условиями $a_1 = 5{,}4$, $a_{n+1} = a_n - 3{,}6$. Найдите сумму первых 9 её членов.

Ответ: ________________.

7. В первую минуту гусеница проползает 10 см, а в каждую следующую на 1 см меньше, чем в предыдущую. За сколько минут гусеница проползёт 34 см?

Ответ: ________________.

8. По договору частный предприниматель возвращает долг базовому предприятию: в первый год — 500 тысяч рублей, а за каждый последующий год — в 1,5 раза больше, чем за предыдущий. За сколько лет он вернёт долг в 4 062 500 рублей?

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) $3; 1; 0; 4; \ldots$ 2) $1; 3; 5; -12; \ldots$
3) $3; 6; -9; 1; \ldots$ 4) $3; 1; -1; -3; \ldots$

Ответ: ________________.

2. В арифметической прогрессии $a_5 + a_6 = 19{,}2$. Найдите $a_3 + a_8$.

Ответ: ________________.

3. Геометрическая прогрессия b_n задана условиями $b_1 = 9$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{3}$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = \frac{1}{3^n}$ 2) $b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ 3) $b_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ 4) $b_n = \frac{1}{3^{n-3}}$

Ответ: ________________.

4. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Укажите её.

1) $-4; 2; -1; 0{,}5; \ldots$ 2) $9; 3; 1; 2; \ldots$
3) $4; 8; 12; 16; \ldots$ 4) $-3; 1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \ldots$

Ответ: ________________.

5. В геометрической прогрессии $b_4 \cdot b_{15} = 1{,}3$. Найдите $b_6 \cdot b_{13}$.

Ответ: ________________.

6. Арифметическая прогрессия задана условиями $a_1 = 4{,}7$, $a_{n+1} = a_n - 4$. Найдите сумму первых 8 её членов.

Ответ: ________________.

7. В первый день турист прошёл 25 км, а в каждый последующий день на 2 км меньше, чем в предыдущий. За сколько дней турист прошёл 120 км?

Ответ: ________________.

8. Бригада трубоукладчиков в первый день укладывает 100 м трубопровода, а в каждый последующий день в 1,1 раза больше. За сколько дней бригада уложит 464,1 м трубопровода?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Чему равна сумма первых шести членов арифметической прогрессии, если её третий член равен 3, а пятый равен 27?

Ответ: ________________.

2. Знаменатель геометрической прогрессии меньше нуля. Чему равны первый член и знаменатель этой прогрессии, если её четвёртый член равен 56, а шестой равен 224?

Ответ: ________________.

3. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии $3; 6; 12; \ldots$

Ответ: ________________.

4. Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: $\ldots;\ 15;\ x;\ 1;\ -6; \ldots$ Найдите член этой прогрессии, обозначенный буквой x.

Ответ: ________________.

5. Дана арифметическая прогрессия: 32; 30; 28; ... Найдите последний положительный член этой прогрессии.

Ответ: ________________.

6. Дана геометрическая прогрессия: $15\,625; 12\,500; 10\,000; \ldots$ Какое число стоит в этой последовательности на 8-м месте?

Ответ: ________________.

7. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 7$, $q = -\dfrac{2}{3}$.

Ответ: ________________.

8. Сумма третьего и восьмого членов арифметической прогрессии равна 19. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Чему равна сумма первых пяти членов арифметической прогрессии, если её четвёртый член равен (-6), а седьмой равен 42?

Ответ: ________________ .

2. Чему равны первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если её третий член равен (-40), а шестой равен 320?

Ответ: ________________ .

3. Найдите сумму первых девяти членов геометрической прогрессии: $3; -6; 12; \ldots$

Ответ: ________________ .

4. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: ...; 24; x; 6; -3; ... Найдите член этой прогрессии, обозначенный буквой x.

Ответ: ________________ .

5. Дана арифметическая прогрессия: -27; -24; -21; ... Найдите последний отрицательный член этой прогрессии.

Ответ: ________________ .

6. Дана геометрическая прогрессия: $-15\,625; 12\,500; -10\,000; \ldots$ Какое число стоит в этой последовательности на 7-м месте?

Ответ: ________________ .

7. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 25$, $q = -\frac{1}{4}$.

Ответ: ________________ .

8. Сумма четырнадцатого и пятого членов арифметической прогрессии равна 25. Найдите сумму первых восемнадцати членов этой прогрессии.

Ответ: ________________ .

§ 15. Алгебра. Исследование функции и построение графика

Основные сведения

Область определения функции

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл), обозначается $D(y)$ или $D(f)$.

Например, областью определения функции $y = \sqrt{2+x}$ будет множество всех таких x, что $2 + x \geqslant 0$, откуда $x \geqslant -2$. Значит, $D(y) = [-2; +\infty)$.

Нередко функцию рассматривают не на всей её области определения, а на некоторой её части, которая указывается в условии. Например, функцию $y = \dfrac{1}{x}$ — на множестве $(0; +\infty)$.

Области определения основных элементарных функций

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$, если f является многочленом от одной переменной. В частности, если $f = ax + b$, $f = ax^2 + bx + c$, $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

2. $D\left(\dfrac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

3. $D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$;

4. $D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = (-\infty; +\infty)$.

Множество значений функции

Множеством (областью) значений функции $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдётся такое число $x_0 \in D(f)$, что $f(x_0) = y_0$, обозначается $E(y)$ или $E(f)$.

Например, множеством значений функции $y = -3x+2$ является множество всех действительных чисел R.

В самом деле, пусть y_0 — произвольное действительное число. Находим такое число x, что $y_0 = -3x + 2$. Решаем уравнение $y_0 = -3x + 2$. Получаем $x = \dfrac{y_0 - 2}{-3} = \dfrac{2 - y_0}{3}$. Значит, для произвольно взятого y_0 нашли такое $x_0 = \dfrac{2 - y_0}{3}$, что $y(x_0) = y_0$. Это и означает, что $E(-3x + 2) = (-\infty; +\infty)$.

Области значений основных элементарных функций:

1. $E(f) = (-\infty; +\infty)$, если f является многочленом нечётной степени от одной переменной (например, $y = x^3$);

2. $E(f) = [a;\ +\infty)$, если f является многочленом чётной степени от одной переменной с положительным старшим коэффициентом, где a — наименьшее значение этого многочлена (например, наименьшее значение функции $y = x^2$ равно 0, поэтому $E(x^2) = [0; +\infty)$);

3. $E(f) = (-\infty;\ b]$, если f является многочленом чётной степени от одной переменной с отрицательным старшим коэффициентом, где b — наибольшее значение этого многочлена (например, наибольшее значение функции $y = -x^2 + 1$ равно 1, поэтому $E(-x^2 + 1) = (-\infty; 1]$);

4. $E\left(\dfrac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

5. $E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$;

6. $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = (-\infty; +\infty)$.

Чётность и нечётность функции, возрастание и убывание

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$ (например, $y = x^2$). График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$ (например, $y = x^3$). График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует большее значение функции).

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

Например, функция, изображённая на рисунке 60, возрастает на множестве всех чисел больше 1 и убывает на множестве всех чисел меньше 1.

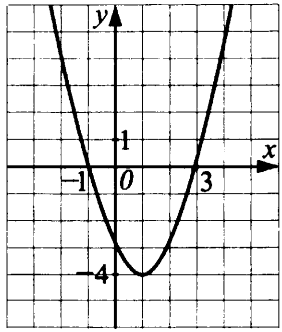


Рис. 60.

Графики элементарных функций

На рисунках 61, 62, 63 изображены эскизы графиков некоторых линейных и квадратичных функций.

I. $y = ax + b$

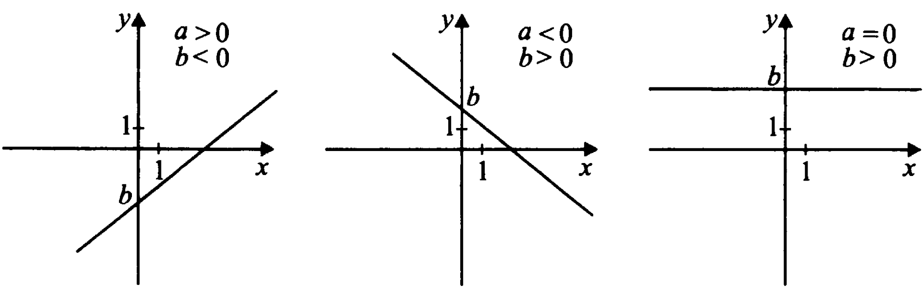


Рис. 61.

II. $y = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$

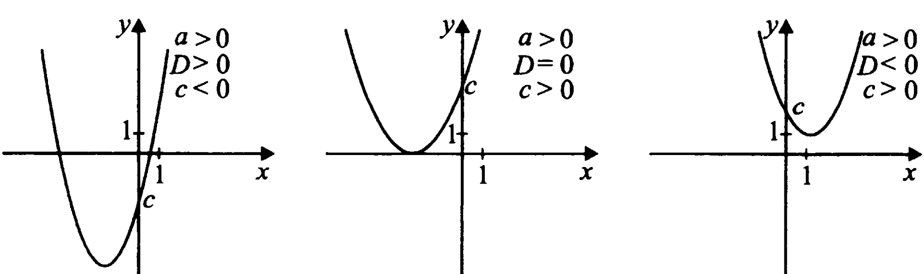


Рис. 62.

III. $y = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$

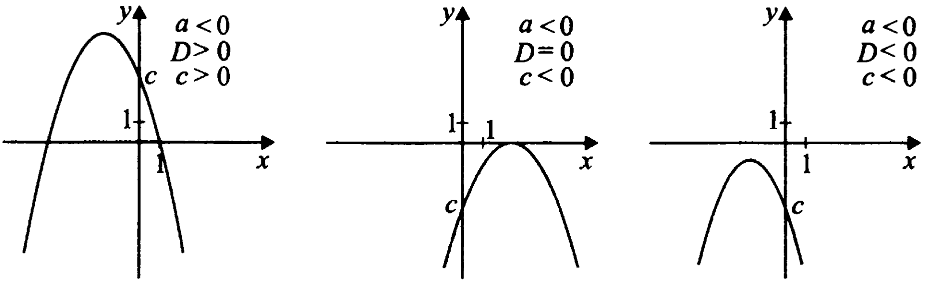


Рис. 63.

На рисунках 64 – 65 изображены эскизы графиков обратной пропорциональной зависимости и графиков корней чётной степени и нечётной степени.

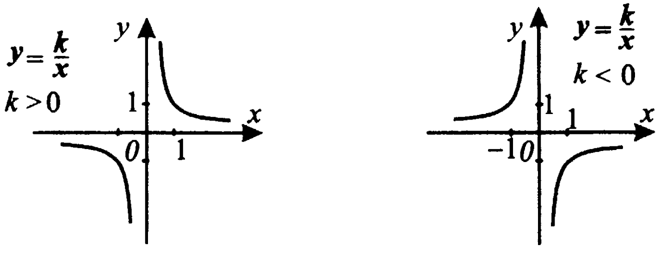


Рис. 64.

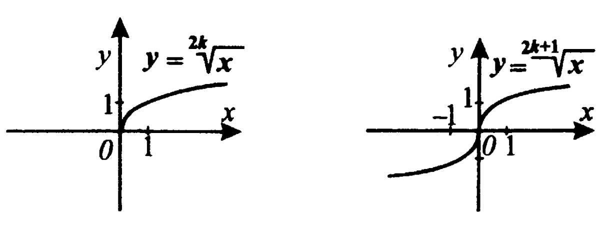


Рис. 65.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Ox (см. рис. 66).

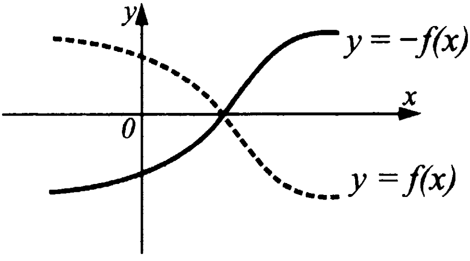


Рис. 66.

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Oy (см. рис. 67).

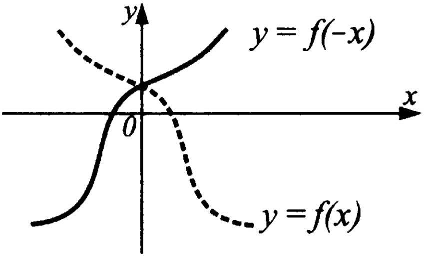


Рис. 67.

График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом (параллельным переносом вдоль оси Oy) вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 68).

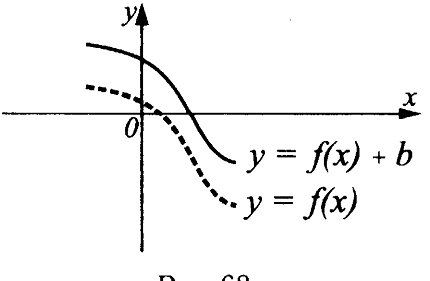


Рис. 68.

График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом (параллельным переносом вдоль оси Ox) вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 69).

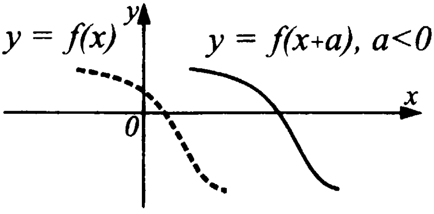


Рис. 69.

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 70) симметричным отображением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox (см. рис. 71a).

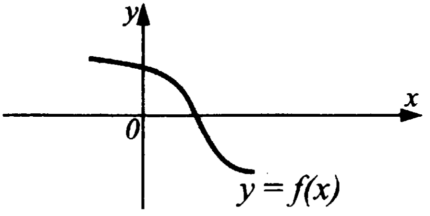


Рис. 70.

График функции $y = f(|x|)$ получается объединением двух графиков. Первый из них является частью графика функции $y = f(x)$, которая лежит правее оси Oy (включая точку этого графика, лежащую на оси Oy). Второй — получается из первого графика симметричным отображением относительно оси Oy (см. рис. 70 и рис. 71$б$).

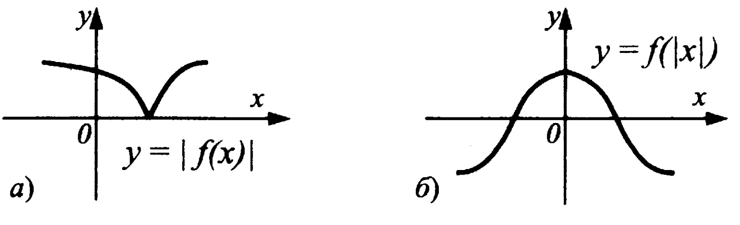


Рис. 71.

Вариант с решениями

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{-x^2 - 4x}$.

1) $[-4; 0]$ 2) $(-\infty; -4]$

3) $[0; +\infty)$ 4) $(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$

Решение. По определению квадратного корня получаем, что $-x^2 - 4x \geqslant 0$. Решаем это неравенство графически. Графиком функции $f = -x^2 - 4x$ является парабола. Её ветви направлены вниз, и корнями являются числа -4 и 0 (см. рис. 72).

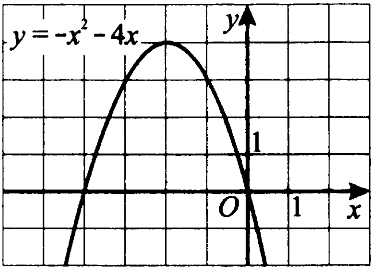


Рис. 72.

По рисунку определяем, что из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Найдите множество значений функции, определённой на отрезке $[-4; 4]$, график которой изображён на рисунке 73.

1) $[-4; 4]$ 2) $[-2; 1]$ 3) $[-2; 2]$ 4) $[-2; 3]$

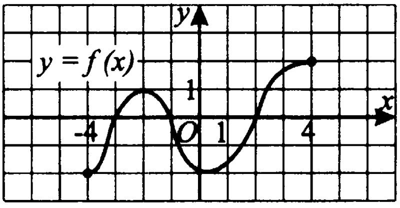


Рис. 73.

Решение. По графику определяем, что наименьшим значением функции является число -2 (оно получается при $x = -4$). Наибольшим значением функции является число 2 (оно получается при $x = 4$). Всякое число b из промежутка $[-2; 2]$ также является значением этой функции, так как прямая $y = b$ пересекает график по крайней мере в одной точке.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Среди указанных ниже функций 1) – 4) найдите чётную.

1) $y = x^2 + x$ 2) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2+2}$

3) $\dfrac{x^2+1}{x}$ 4) $y = x^3 - \dfrac{1}{x^2}$

Решение. Проверяем выполнение условия $y(-x) = y(x)$ для любого x для каждой из указанных функций 1) – 4).

1) $y(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, $y(x) = x^2 + x$. Формально $y(-x) \neq f(x)$. Более того, $y(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1^2 - 1 = 0$, а $y(1) = 1^2 + 1 = 2$. Значит, равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется при $x = 1$. Эта функция чётной не является.

2) 1) $y(-x) = (-x)^2 + \dfrac{1}{(-x)^2+2} = x^2 + \dfrac{1}{x^2+2} = y(x)$. Значит, эта функция является чётной.

3) $y(-1) = \dfrac{(-1)^2+1}{-1} = -2$, а $y(1) = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$. Значит, равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется при $x = 1$. Эта функция чётной не является.

4) $y(-1) = (-1)^3 - \dfrac{1}{(-1)^2} = -2$, а $y(1) = 1^3 - \dfrac{1}{1^2} = 0$. Значит, равенство $y(-x) = y(x)$ не выполняется при $x = 1$. Эта функция чётной не является.

Из указанных функций чётной является 2).

Ответ: 2.

4. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0; 9]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 74), укажите промежуток наибольшей длины, на котором функция возрастает.

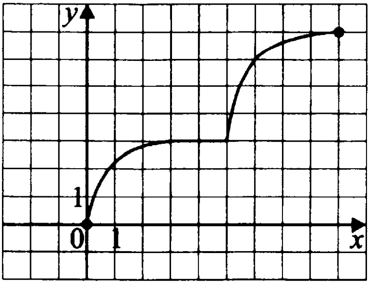


Рис. 74.

1) $[0; 3]$ 2) $[1; 3]$ 3) $[4; 7]$ 4) $[5; 9]$

Решение. Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. По графику определяем, что это условие выполняется на промежутке $[0; 3]$ и на промежутке $[5; 9]$. Длина промежутка $[0; 3]$ равна 3, Длина промежутка $[5; 9]$ равна 4. Значит, большую длину имеет промежуток $[5; 9]$. Он указан под номером 4).

Ответ: 4.

5. На рисунке 75 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

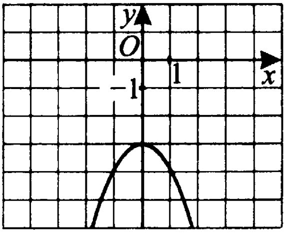


Рис. 75.

Решение. Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + c$ является парабола. Её ветви направлены вниз, поэтому $a < 0$. Замечаем также, что $c = y(0)$. По графику определяем, что $y(0)$ примерно равно -3. Значит, $c < 0$.

Ответ: $a < 0$; $c < 0$.

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ с осью абсцисс.

1) $(0; 1)$ 2) $(1; 0)$ 3) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ 4) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

Решение. Пусть график заданной функции пересекает ось абсцисс в точке с координатами $(x_0; 0)$. Найдём x_0 из условия $y(x_0) = 0$, $\dfrac{2}{x_0 - 3} + 1 = 0$.

$\dfrac{2}{x_0 - 3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x_0 - 3 = 0, \\ x_0 - 3 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 1$. Следовательно, абсцисса точки пересечения равна 1, а координаты точки пересечения $(1; 0)$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Найдите, на каком из рисунков 1) – 3) изображён график функции $y = \sqrt{x+3}$ (см. рис. 76).

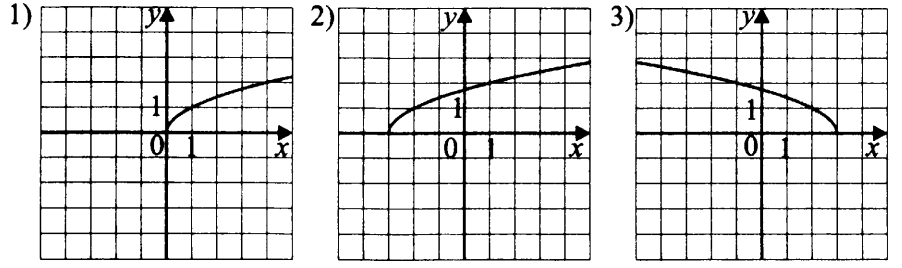


Рис. 76.

Решение. График функции $y = \sqrt{x+3}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом влево на 3 единицы (см. «Основные сведения» к параграфу о «механических» преобразованиях графиков). График функции квадратного корня $y = \sqrt{x}$ указан в этом параграфе на рисунке 65.

Следовательно, искомым графиком будет график под номером 2).

Ответ: 2.

8. Соотнесите функции

А) $y = x^2 + 1$, Б) $y = \dfrac{1}{x-2}$, В) $y = \sqrt{x+2}$

с их графиками (см. рис. 77).

Решение. График функции А) $y = x^2 + 1$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вверх на 1 единицу. На рисунке 77 он имеет номер 3).

График функции Б) $y = \dfrac{1}{x-2}$ получается из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ сдвигом вправо на 2 единицы. На рисунке 77 он имеет номер 2).

График функции В) $y = \sqrt{x+2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом влево на 2 единицы. На рисунке 77 он имеет номер 1).

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

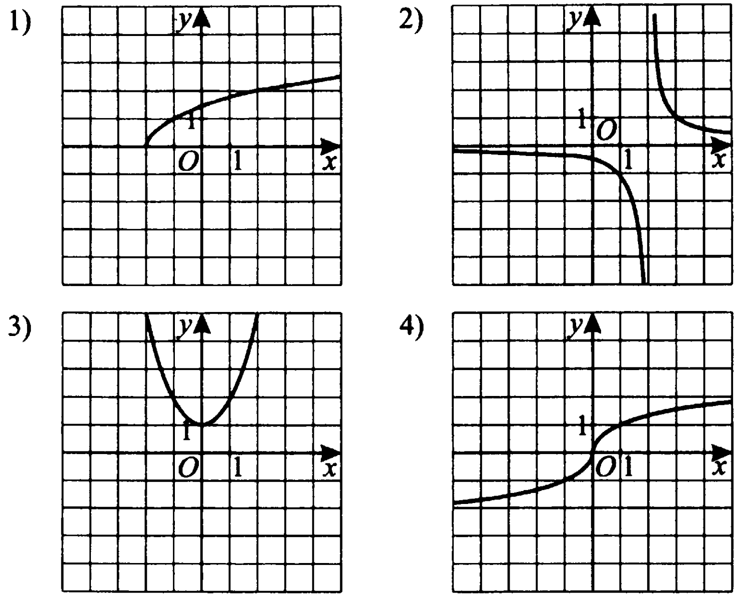


Рис. 77.

Вариант № 1

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{-2x+5}$.

1) $[2{,}5; +\infty)$ 2) $(-\infty; 2{,}5]$

3) $[-2{,}5; +\infty)$ 4) $(-\infty; -2{,}5]$

Ответ: ________________.

2. Найдите множество значений функции, определённой на отрезке $[-4; 4]$, график которой изображён на рисунке 78.

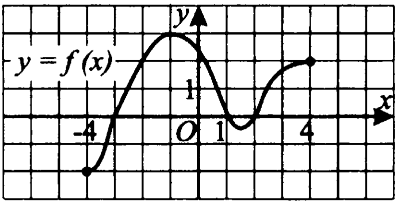


Рис. 78.

1) $[-3; 3]$ 2) $[-4; 3]$

3) $[-2; 3]$ 4) $[-3; -2]$

Ответ: ________________.

3. Среди указанных ниже функций 1) – 4) найдите чётную.

1) $y = -x^2 + x$ 2) $y = x^3 + \frac{1}{x^2 + 2}$

3) $\frac{-x^2 + 1}{x^4}$ 4) $y = x^2 - \frac{1}{x^3}$

Ответ: ________________.

4. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 3]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 79), укажите промежуток убывания наибольшей длины.

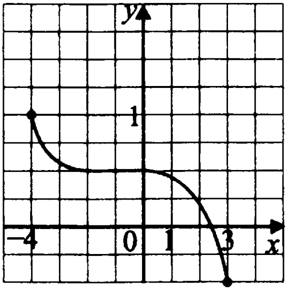


Рис. 79.

1) $[-4; -2]$ 2) $[-2; 0]$ 3) $[0; 3]$ 4) $[-4; 3]$

Ответ: ________________.

5. На рисунке 80 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

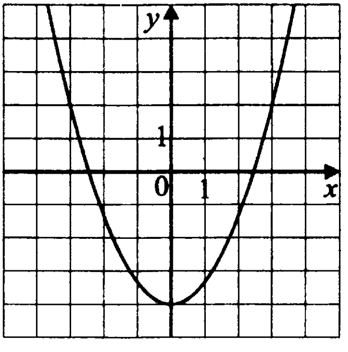


Рис. 80.

Ответ: ________________.

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции

$y = \dfrac{-3}{x+5} - 2$ с осью абсцисс.

1) $(6{,}5; 0)$ 2) $(-6{,}5; 0)$ 3) $(0; 6{,}5)$ 4) $(0; -6{,}5)$

Ответ: ________________.

7. Найдите, на каком из рисунков 1) – 3) изображён график функции

$y = \dfrac{1}{x-2}$ (см. рис. 81)

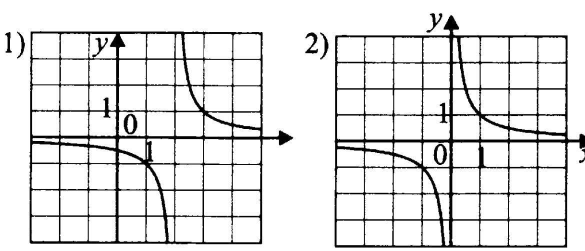


Рис. 81.

Ответ: ________________.

8. Соотнесите функции

А) $y = -x^2 + 1$, Б) $y = 2x + 4$, В) $y = \sqrt{x}$

с их графиками (см. рис. 82).

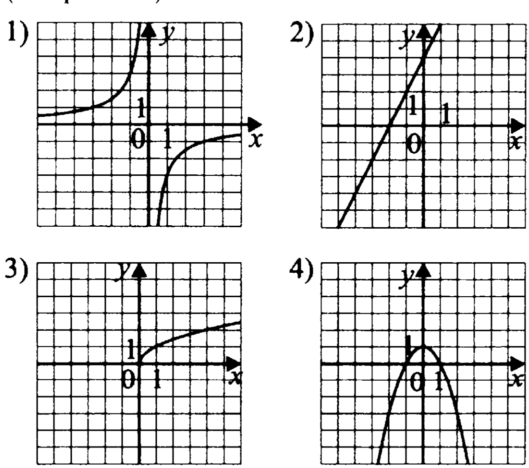


Рис. 82.

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$.

1) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ 2) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$

3) $(0{,}25; +\infty)$ 4) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

Ответ: ________________.

2. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-7; 4]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 83), укажите её область значений.

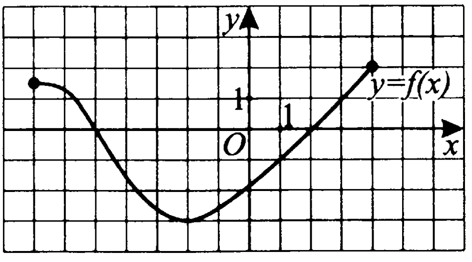


Рис. 83.

1) $[-5; 2]$ 2) $[-3; 2]$ 3) $[1; 2]$ 4) $[-3; 1]$

Ответ: ________________.

3. Среди функций $y = 5x^5$; $y = |x|$; $y = (x+3)^5$; $y = x^5 + 3$ выберите нечётную.

1) $y = 5x^5$ 2) $y = x^5 + 3$
3) $y = (x+3)^5$ 4) $y = |x|$

Ответ: ________________.

4. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-7; 4]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 84), укажите промежуток убывания наибольшей длины.

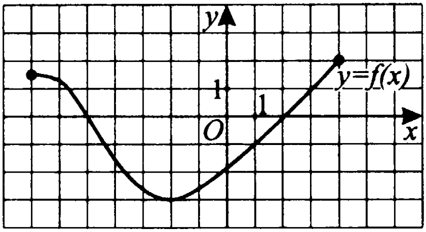


Рис. 84.

1) $[-7; -5]$ 2) $[-5; -2]$ 3) $[-7; -2]$ 4) $[-7; 0]$

Ответ: ________________.

5. На рисунке 85 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

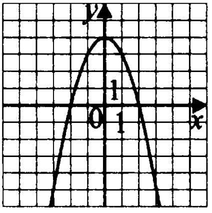


Рис. 85.

Ответ: ________________.

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции

$y = \dfrac{-4}{x+4} + 1$ с осью абсцисс.

1) $(0; 0)$ 2) $(1; 0)$ 3) $(0; 1)$ 4) $(-4; 0)$

Ответ: ________________.

7. Найдите, на каком из рисунков 1) – 3) изображён график функции $y = (x + 3)^3$ (см. рис. 86).

Ответ: ________________.

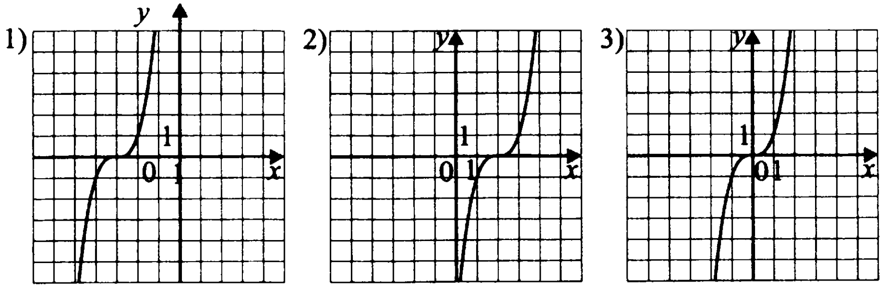


Рис. 86.

8. Соотнесите функции с их графиками (см. рис. 87).

А) $y = (x-3)^2$ Б) $y = \dfrac{2}{x}$ В) $y = x^3$

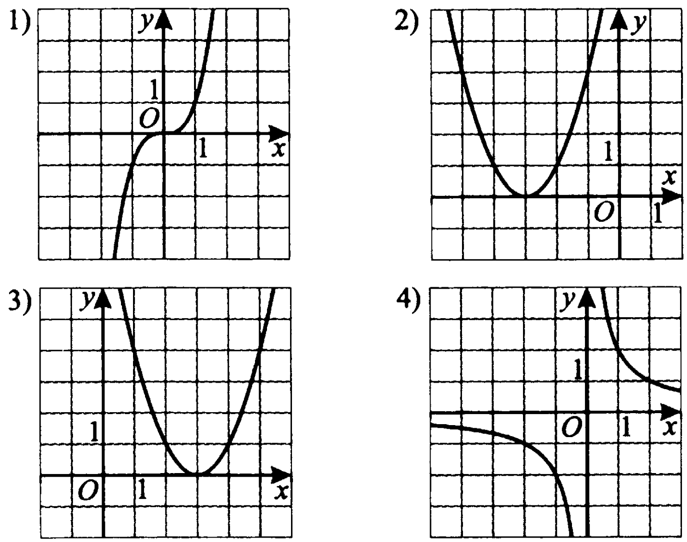


Рис. 87.

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Функция задана формулой $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Найдите $f(-2)$.

1) -19 2) 13 3) 0 4) -3

Ответ: ________________.

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 4]$. Используя её график, изображённый на рисунке 88, решите неравенство $f(x) > 0$. Ответ укажите с помощью промежутков.

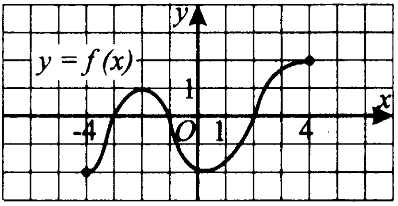


Рис. 88.

Ответ: ________________.

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-3; 6]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 89), укажите промежуток возрастания наибольшей длины.

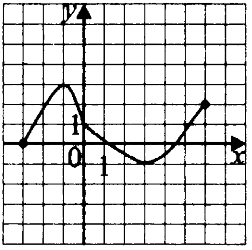


Рис. 89.

1) $[-3; -1]$ 2) $[1; 5]$ 3) $[-1; 3]$ 4) $[3; 6]$

Ответ: ________________.

4. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите значение свободного члена c (см. рис. 90).

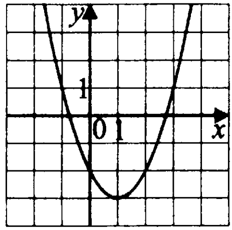


Рис. 90.

Ответ: ________________.

5. Соотнесите рисунок, изображающий график функции $y = kx + b$ (см. рис. 91), с одним из условий 1), 2) или 3).

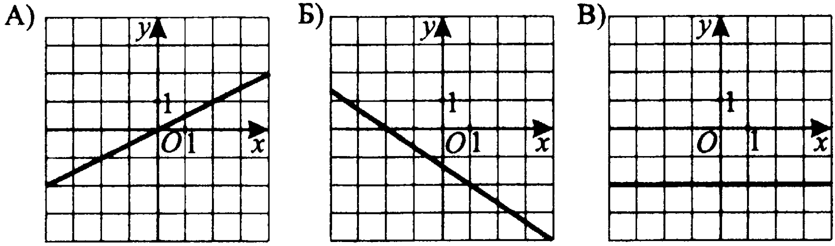


Рис. 91.

1) $k < 0$; $b < 0$ 2) $k = 0$; $b < 0$ 3) $k > 0$; $b = 0$

Ответ:

А	Б	В

6. График какой из перечисленных функций изображён на рисунке 92?

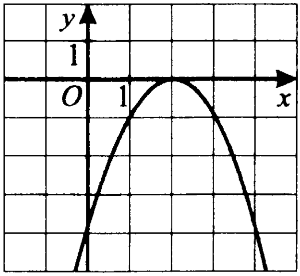


Рис. 92.

1) $y = x^2 + 4x$
2) $y = -(x-2)^2 - 4$
3) $y = (x-2)^2 + 4$
4) $y = -x^2 + 4x - 4$

Ответ: ________________.

7. На рисунке 93 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Выберите верное соотношение.

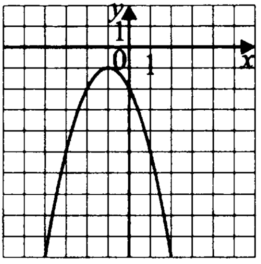


Рис. 93.

1) $a > 0,\ b^2 - 4ac \geqslant 0$
2) $a < 0,\ b^2 - 4ac < 0$
3) $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$
4) $a < 0,\ b^2 - 4ac = 0$

Ответ: ________________.

8. Для каждого из графиков функций А), Б) и В) (см. рис. 94) найдите множество всех тех значений x, при которых значения функции положительны.

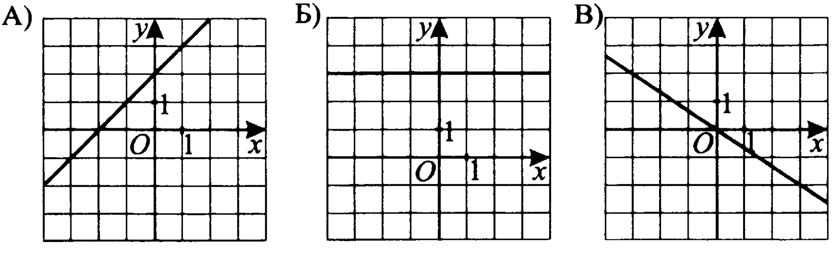


Рис. 94.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(-\infty; 0)$ 4) $(-2; +\infty)$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Функция задана формулой $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 4$. Найдите $f(-2)$.

1) -58 2) -8 3) -4 4) -3

Ответ: ________________.

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 4]$. Используя её график, изображённый на рисунке 95, решите неравенство $f(x) > -1$. Ответ укажите с помощью интервалов, полуинтервалов или отрезков.

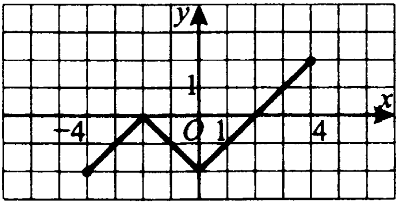


Рис. 95.

Ответ: ________________.

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 5]$ (см. рис. 96). Пользуясь графиком функции (см. рис. 96), укажите промежуток убывания наибольшей длины.

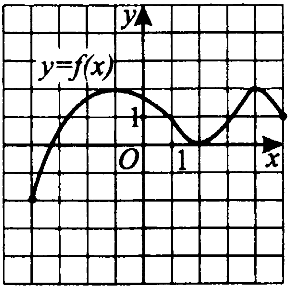


Рис. 96.

1) $[-4; -3]$ 2) $[-1; 2]$ 3) $[-3; 2]$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

4. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите значение свободного члена c (см. рис. 97).

Ответ: ________________.

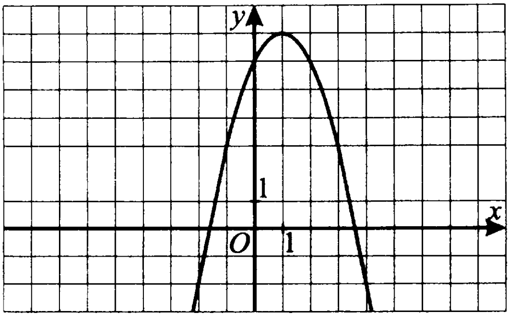


Рис. 97.

5. Соотнесите рисунок, изображающий график функции $y = kx + b$ (см. рис. 98), с одним из условий 1), 2) или 3).

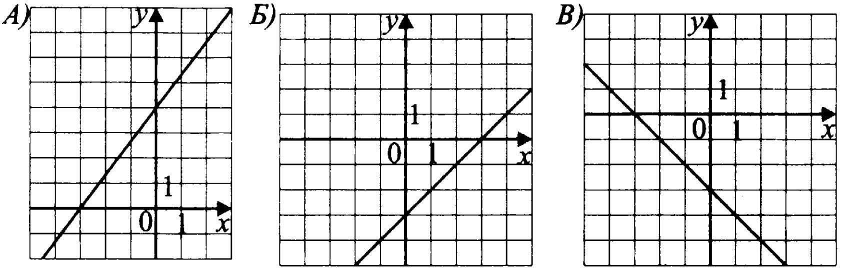


Рис. 98.

1) $k > 0;\ b < 0$ 2) $k < 0;\ b < 0$ 3) $k > 0;\ b > 0$

Ответ:

А	Б	В

6. График какой из перечисленных функций изображён на рисунке 99?

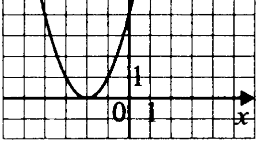


Рис. 99.

1) $y = x^2 + 4x + 4$ 2) $y = -(x-2)^2 + 4$

3) $y = (x+2)^2 - 8$ 4) $y = -x^2 + 4x + 4$

Ответ: __________________.

7. На рисунке 100 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Выберите верное соотношение.

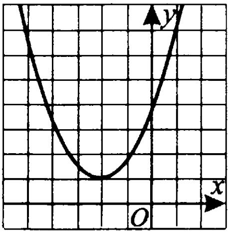


Рис. 100.

1) $a > 0,\ b^2 - 4ac \geqslant 0$ 2) $a < 0,\ b^2 - 4ac < 0$
3) $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$ 4) $a < 0,\ b^2 - 4ac = 0$

Ответ: _________________ .

8. Для каждого из графиков функций А), Б) и В) (см. рис. 101) найдите множество всех тех значений x, при которых значения функции отрицательны.

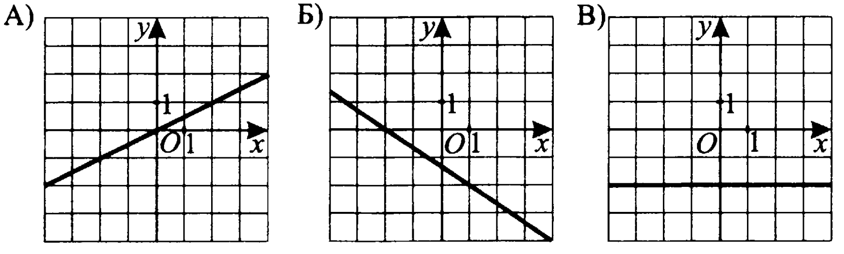


Рис. 101.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(-\infty; 0)$ 4) $(-2; +\infty)$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке $[-5; 5]$ (см. рис. 102). Найдите $f(-2)$.

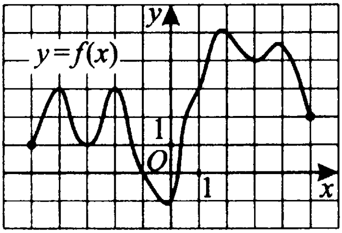


Рис. 102.

1) 1 2) 2 3) 3 4) −1

Ответ: ________________.

2. Найдите область значений функции, указанной на рисунке 103.

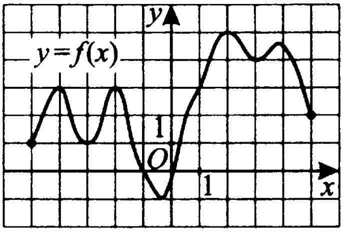


Рис. 103.

1) $[-5; 5]$ 2) $[0; 5]$ 3) $[-1; 5]$ 4) $[-1; 4]$

Ответ: ________________.

3. Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с её уравнением (см. рис. 104).

1) $x = 5$ 2) $y = 3$ 3) $y = 1 - x$ 4) $y = 2x$

Ответ:

А	Б	В	Г

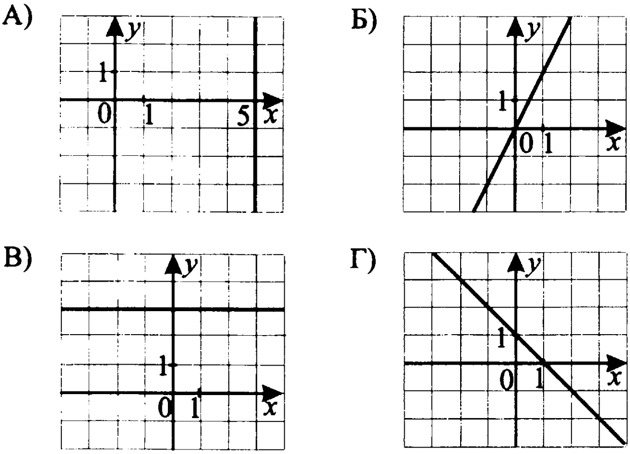


Рис. 104.

4. Найдите значение коэффициента k, если известно, что график функции $y = \dfrac{3k}{x}$ проходит через точку с координатами $(-2; 6)$.

Ответ: ________________ .

5. Соотнесите функции А), Б), В), заданные формулами, с их графиками, изображёнными на рис. 105.

А) $y = |x + 1|$ Б) $y = x - 3$ В) $y = -3x$

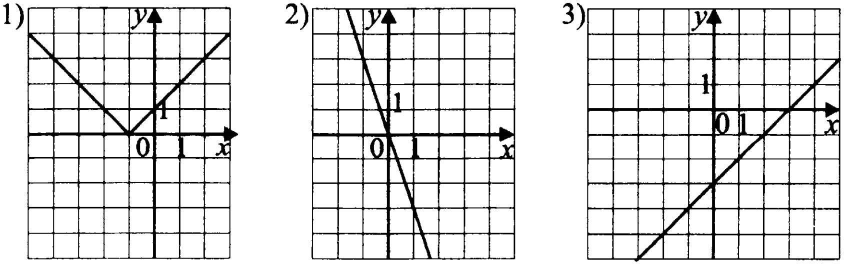


Рис. 105.

Ответ:

А	Б	В

6. На рисунке 106 изображён график квадратичной функции. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

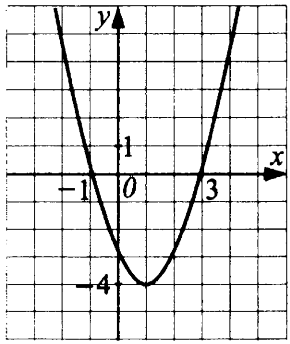


Рис. 106.

1) $y = x^2 - 2x - 3$ 2) $y = -x^2 - 2x - 3$
3) $y = x^2 + 2x - 3$ 4) $y = -x^2 - 2x + 3$

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точки пересечения графиков функций
$y = -\dfrac{64}{x}$ и $y = -8x^2$.

1) $(-2; 32)$ 2) $(2; 32)$ 3) $(2; -32)$ 4) $(0; 0)$

Ответ: ________________.

8. Соотнесите графики функций, изображённых на рисунке 107, с соответствующими им значениями параметра k.

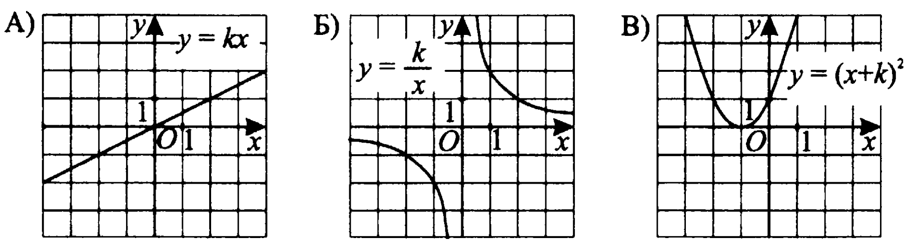


Рис. 107.

1) 1 2) 2 3) −1 4) $\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 4]$ и задана своим графиком (см. рис. 108). Найдите $f(2)$.

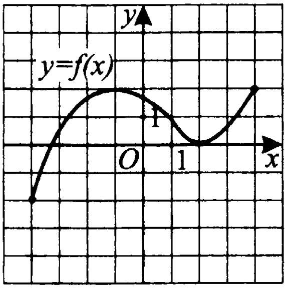


Рис. 108.

1) 2 2) 4 3) 0 4) другой ответ

Ответ: ________________.

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 3)$ и задана своим графиком (см. рис. 109). Укажите область значений функции $y = f(x)$ на промежутке $[-4; 3)$.

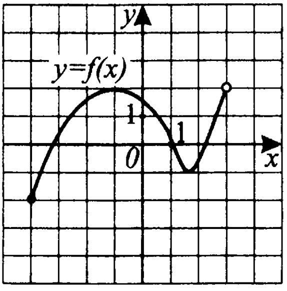


Рис. 109.

1) $[0; 2)$ 2) $[-2; 0]$ 3) $[-2; 2]$ 4) другой ответ

Ответ: ________________.

3. Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с её уравнением (см. рис. 110).

1) $x = -1$ 2) $y = x$ 3) $y = -x$ 4) $y = -3$

Ответ:

А	Б	В	Г

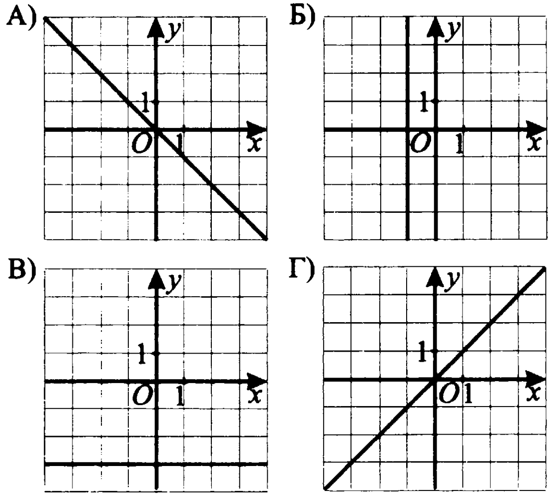


Рис. 110.

4. Найдите, при каком k график функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(-6\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Ответ: ________________ .

5. Соотнесите функции, заданные формулами, и их графики (см. рис. 111).

А) $y = 2 - x$ Б) $y = 2x$ В) $y = |x - 1|$

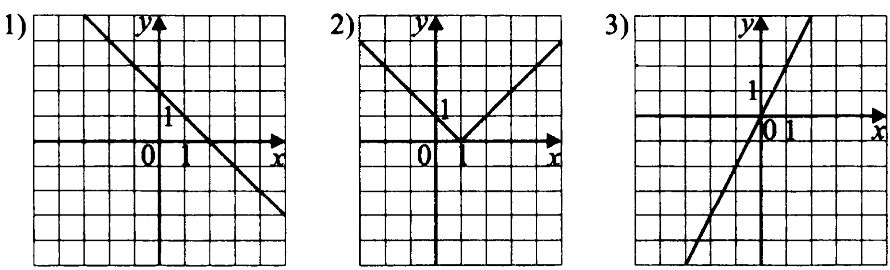


Рис. 111.

Ответ:

А	Б	В

6. На рисунке 112 изображён график квадратичной функции. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

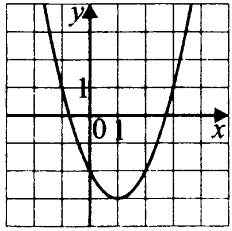


Рис. 112.

1) $y = x^2 + 2x - 2$ 2) $y = x^2 - 2x - 2$
3) $y = x^2 + 3x - 2$ 4) $y = x^2 - 3x - 2$

Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точки пересечения графиков функций

$y = \sqrt{x}$ и $y = \dfrac{8}{x}$.

1) $(-2; 4)$ 2) $(2; -4)$ 3) $(4; -2)$ 4) $(4; 2)$

Ответ: ________________.

8. Соотнесите графики функций, изображённых на рисунке 113, с соответствующими им значениями параметра k.

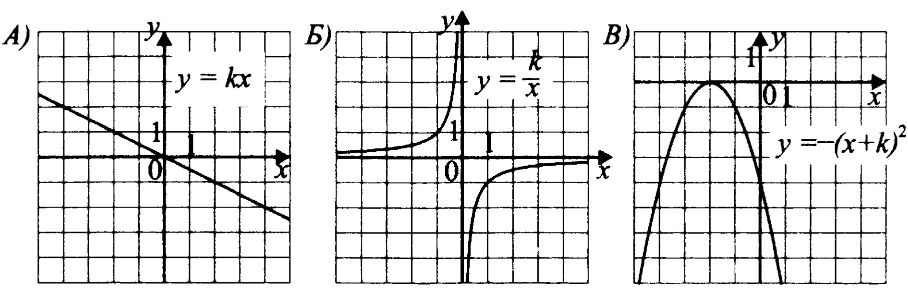


Рис. 113.

1) 1 2) 2 3) -1 4) $-\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

§ 16. Алгебра. Представление данных в виде таблиц, диаграмм и графиков

Основные сведения

Для наглядности изображения различных количественных соотношений часто используются таблицы, диаграммы (столбчатые и круговые), а также графики.

Рассмотрим простой пример. Выставка картин продолжалась три дня (с понедельника по среду), причём в понедельник её посетили 100 человек, во вторник — 250, в среду — 150 любителей живописи.

Для наглядности эту информацию можно представить либо в виде таблицы, либо в виде диаграммы (столбчатой или круговой). Таблица может выглядеть, например, следующим образом.

День недели	пон.	втор.	сред.
Количество посетителей	100	250	150

Таблицы позволяют структурировать информацию и опустить второстепенные данные и слова.

Эту же информацию можно проиллюстрировать столбчатой диаграммой (см. рис. 114).

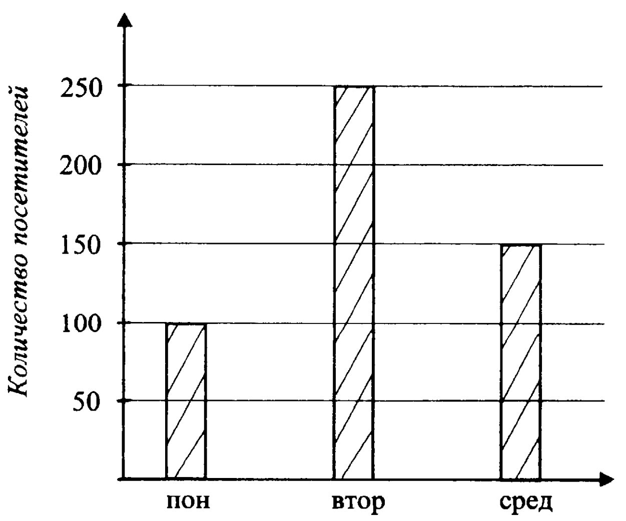


Рис. 114.

При необходимости точной передачи информации каждый столбец можно дополнительно подписать его числовым значением (в нашем случае это 100, 250 и 150), иначе «на глаз» значение 100 трудно отличить, например, от значения 101.

По сравнению с таблицей столбчатая диаграмма менее компактна, однако она позволяет легко оценить, во сколько раз примерно один показатель превышает другой, или найти наименьший и наибольший показатели.

Информацию о посещении выставки можно представить и на круговой диаграмме (см. рис. 115). Для этого круг надо разделить на три сектора так, чтобы их градусные меры относились как 100 : 250 : 150. Эта диаграмма позволит оценить, какую часть число посетителей в отдельный день составляет от общего числа посетителей выставки. Для достижения точности на каждом секторе круговой диаграммы можно указать число процентов, которое он составляет от всего круга, то есть в нашем случае число процентов, которое составляют посетители в отдельно взятый день от общего количества посетителей: 20%, 30% и 50%. Можно указать и непосредственно число посетителей.

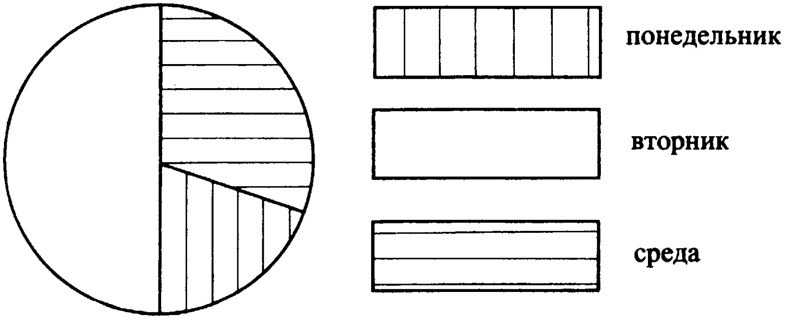


Рис. 115.

Ещё один вид иллюстрации соотношений и функциональных зависимостей — графики. Их обычно используют, когда зависимость изображается непрерывной линией либо когда число показателей хоть и конечно, но достаточно велико, чтобы рисовать столбчатую диаграмму. Работа с графиками показана в первых четырёх заданиях варианта с решениями.

Вариант с решениями

1. На рисунке 116 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток, автоматически записанный с помощью специального прибора — самописца. Используя этот график, найдите температуру воздуха в 9 часов утра.

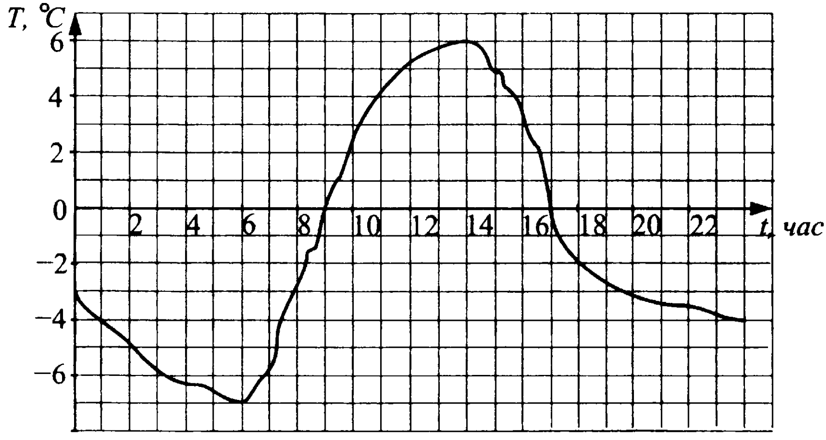


Рис. 116.

Решение. По графику определяем, что отметке 9 по горизонтальной оси соответствует 0 по оси вертикальной. Следовательно, в 9 часов утра температура составила $0°C$.

Ответ: 0.

2. Рейсовый катер перевозил по морю пассажиров между приморскими посёлками Тихий и Нижний, расстояние между которыми равно 9 км (катер движется прямолинейно). На рисунке 117 изображён график изменения расстояния от пос. Нижнего до катера при его движении во время четырёх рейсов (два — от Нижнего к Тихому и два — в обратном направлении). Используя график, ответьте на вопрос: на каком по счёту рейсе (из четырёх) катер шёл медленнее всего?

Решение. За каждый из четырёх рейсов катер проходил одно и то же расстояние, равное 9 км. Значит, медленнее всего он двигался во время того рейса, который занял больше всего времени. По графику определяем следующее.

Первый рейс продолжался $50 - 0 = 50$ мин.

Второй рейс продолжался $100 - 70 = 30$ мин.

Третий рейс продолжался $160 - 120 = 40$ мин.

Четвёртый рейс продолжался $240 - 180 = 60$ мин.

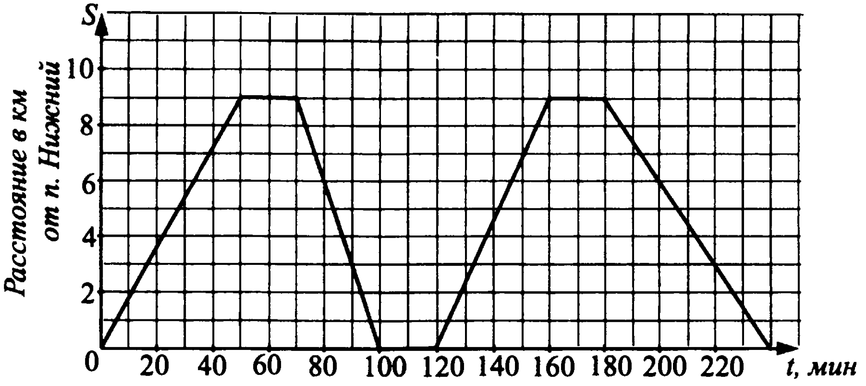


Рис. 117.

Медленнее всего катер двигался в четвёртом рейсе.

Ответ: 4.

3. На рисунке 118 представлены графики показаний счётчиков расхода горячей воды в течение 60 дней школой и жилым домом. Какой объект больше израсходовал горячей воды в период после 20-го дня и заканчивая 40-м днём и на сколько м^3?

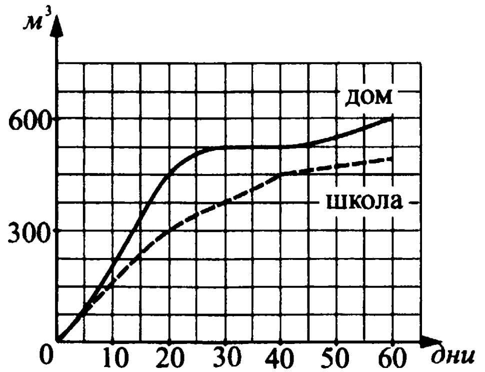


Рис. 118.

Решение. Заметим, что одному делению по вертикальной оси соответствует 75 м^3 воды. По графику определяем, что в течение первых двадцати дней школа израсходовала 300 м^3 воды, а в течение 40 дней — 450 м^3. Поэтому за период после 20-го дня и заканчивая 40-м днём школа израсходовала $450 - 300 = 150$ м^3 воды. Аналогично находим расход горячей воды жилым домом: $525 - 450 = 75$ м^3, что меньше расхода школы на $150 - 75 = 75$ м^3.

Ответ: школа, на 75.

4. Некоторая компания решила проанализировать эффективность рекламы на товары двух видов: M и N. На графике (см. рис. 119) показана зависимость объёма продаж от расходов на рекламу.

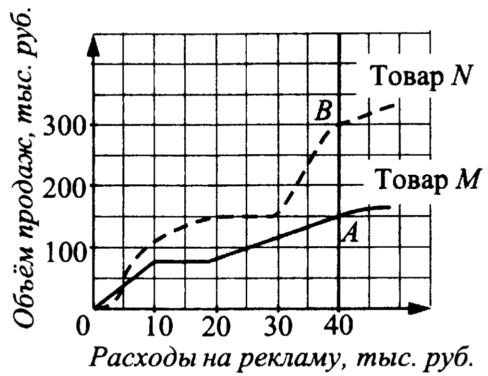


Рис. 119.

Объём продажи какого вида товара был больше и на сколько тысяч рублей в тот момент, когда расходы на рекламу составили 40 тыс. рублей?

Решение. По горизонтальной оси находим отметку 40 тыс. рублей. Рассмотрим вертикальную прямую, проходящую через такую отметку. Эта прямая пересечёт заданные графики в точках A и B, расстояние между ними составляет 3 клетки, причём по вертикальной оси одна клетка соответствует 50 тыс. рублей (цену деления по вертикальной оси можно найти как, например, значение выражения: $\frac{200-100}{2} = 50$ тыс. рублей). Тогда трём клеткам соответствует $3 \cdot 50 = 150$ тыс. руб., значит, объём продаж товара N на 150 тыс. руб. больше.

Ответ: товара N, 150.

5. Шесть различных полей засеяли кукурузой. Измерения уровня всхожести приведены в таблице:

№ поля	I	II	III	IV	V	VI
Уровень всхожести, %	85,7	87,6	88,5	87,8	88,4	87,9

Какое поле оказалось на пятом месте по уровню всхожести?

1) I 2) II 3) III 4) IV

Решение. Выпишем номера полей в порядке убывания их уровня всхожести в процентах, получим: III, V, VI, IV, II, I. На пятом месте поле под номером II, что соответствует ответу 2).

Ответ: 2.

6. В тонком неоднородном стержне длиной 10 см его масса (в граммах) распределяется по закону $m = l^2 + 5l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Заполните таблицу.

l — длина (в см)		5
m — масса (в г)	6	

Решение. Поочерёдно заполним пустые клетки. При $m = 6$ найдём l из уравнения $l^2 + 5l = 6$, то есть $l^2 + 5l - 6 = 0$. $l_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \dfrac{-5 \pm 7}{2}$; $l_1 = -6$; $l_2 = 1$. Длина l (в см) не может быть отрицательным числом, поэтому $l = 1$.

Заполним пустую клетку в следующем столбце. При $l = 5$ найдём m по формуле $m = l^2 + 5l$, тогда $m = 5^2 + 5 \cdot 5 = 50$.

Тогда таблица примет вид:

l — длина (в см)	**1**	5
m — масса (в г)	6	**50**

Ответ: 1, 50.

7. В саду 400 плодовых деревьев, соотношение которых представлено на круговой диаграмме (см. рис. 120). Сколько груш произрастает в саду?

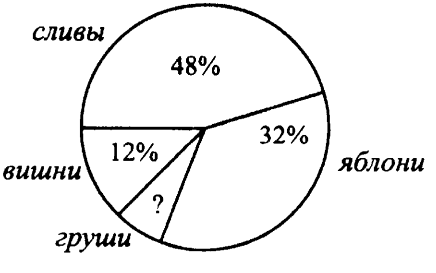


Рис. 120.

Решение. Все деревья в саду в совокупности составляют 100 %, тогда груши занимают 100 % − 48 % − 32 % − 12 % = 8 %.
Значит, груши составляют 8 % от 400, то есть $0{,}08 \cdot 400 = 32$ дерева.

Ответ: 32.

8. На новогодней викторине среди учащихся начальной школы классы 4 «А», 4 «Б», 4 «В» и 4 «Г» показали следующие результаты, представленные на диаграмме 121. Сколько баллов набрал 4 «В», если 4 «Б» набрал 30 баллов?

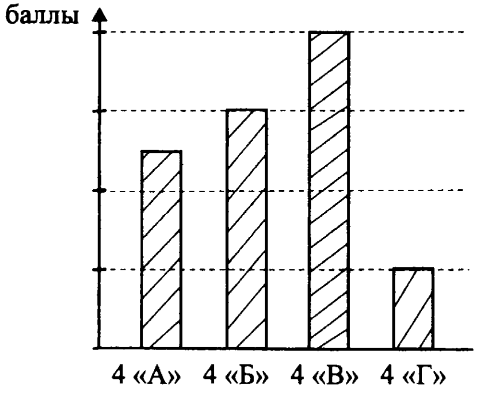


Рис. 121.

Решение. Определим цену деления на вертикальной оси. Высота столбика, соответствующего 4 «Б», равна трём делениям, что по условию составляет 30 баллов. Следовательно, цена одного деления равна $\frac{30}{3} = 10$ баллов. Высота столбика, соответствующего 4 «В», равна четырём делениям, то есть 40 баллам.

Ответ: 40.

Вариант № 1

1. На рисунке 122 изображён график зависимости скорости v некоторого объекта (в км/ч) от времени t (в ч). Найдите скорость (в км/ч) объекта при $t = 2$ ч.

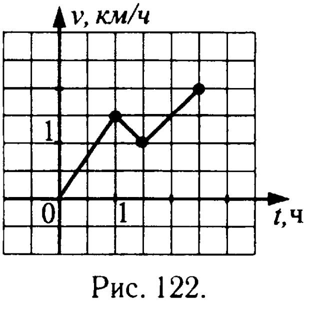


Рис. 122.

Ответ: ________________.

2. Двигаясь прямолинейно, катер перевозил отдыхающих с южного берега озера на северный и обратно. Расстояние между южным и северным берегами равно 10 км. На рисунке 123 изображён график изменения расстояния от южного берега до катера при его движении на протяжении четырёх рейсов.

Используя график, ответьте на вопрос: на каком по счёту рейсе катер шёл медленнее всего?

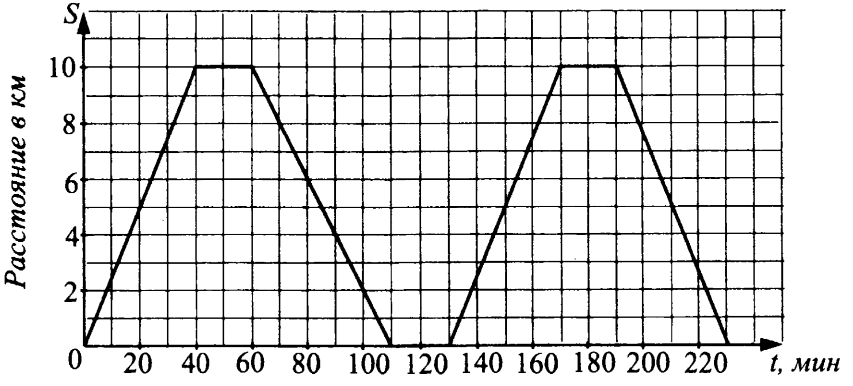


Рис. 123.

Ответ: ________________ .

3. На графиках (см. рис. 124) показана зависимость количества произведённых деталей рабочими А и Б от времени. Какой из рабочих произвёл деталей больше в период с 3-го по 6-й час рабочего времени и на сколько больше?

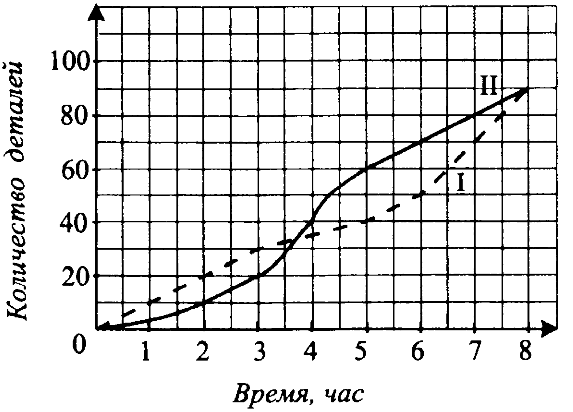


Рис. 124.

Ответ: ________________ .

4. Банк предлагает две схемы выплаты кредита на товар:
схема I — равными платежами;
схема II — с начислением процентов на оставшуюся сумму кредита.
На рисунке 125 приведены графики зависимости выплачиваемой по кредиту суммы денег от времени, прошедшего с момента выдачи кредита.

Определите, на сколько тыс. руб. больше заплатит клиент банка, взявший кредит на 1 год, если воспользуется схемой I, а не схемой II.

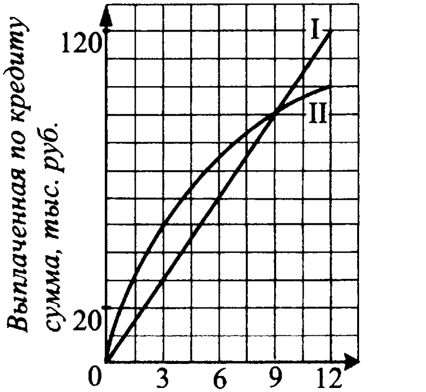


Рис. 125.

Ответ: ________________.

5. Пять лучших результатов районной олимпиады по физике представлены в таблице:

Фамилия ученика	Иванов	Петров	Буслов	Юрьев	Смирнов
Кол-во баллов	24,8	25,3	24,5	25,7	24,1

Какой ученик занял 4-е место?

1) Буслов 2) Петров 3) Юрьев 4) Иванов

Ответ: ________________.

6. Некоторое тело движется из начала координат прямолинейно, равноускоренно, и расстояние S от начала координат определяется формулой $S = 2t^2 + 7t$, где t — время, прошедшее с момента начала движения. Заполните таблицу:

t — время (в с)		2
S — расстояние (в м)	4	

Ответ: ________________.

7. Состав сплава массой 75 кг представлен на диаграмме (см. рис. 126). Сколько килограммов железа содержится в этом сплаве?

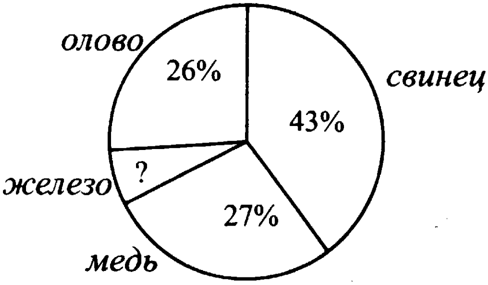


Рис. 126.

Ответ: ________________.

8. Мастер произвёл за рабочий день несколько деталей четырёх типов: A, B, C и D (см. диаграмму 127). Известно, что деталей типа D мастер изготовил 12 штук. Сколько деталей типа A изготовил мастер?

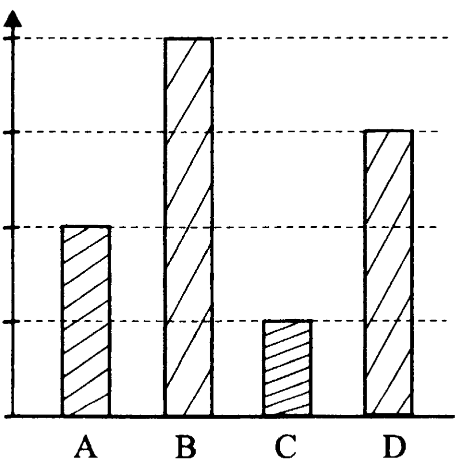


Рис. 127.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. На рисунке 128 изображён график зависимости скорости v асфальтового катка от времени. Определите скорость катка через 4 часа после начала движения. Ответ дайте в км/ч.

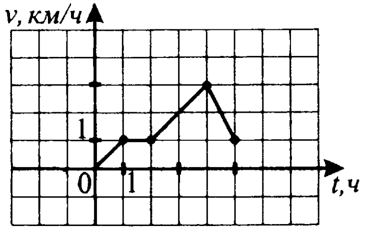


Рис. 128.

Ответ: ________________ .

2. На соревнованиях в пятидесятиметровом бассейне спортсмен проплывает 150-метровую дистанцию. На рисунке 129 показан график изменения расстояния между пловцом и точкой старта во время заплыва.

Используя график, ответьте на вопрос: на какой по счёту пятидесятиметровке пловец плыл медленнее всего?

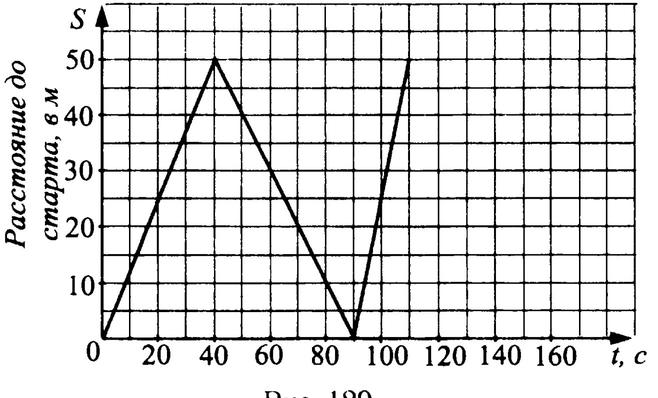


Рис. 129.

Ответ: ________________ .

3. На графике (см. рис. 130) показана зависимость общего количества зерна, собранного каждым из комбайнов A и B, от времени. Какой комбайн собрал больше зерна после 5-го дня и заканчивая 8-м днём уборки и на сколько тонн больше?

Ответ: ________________ .

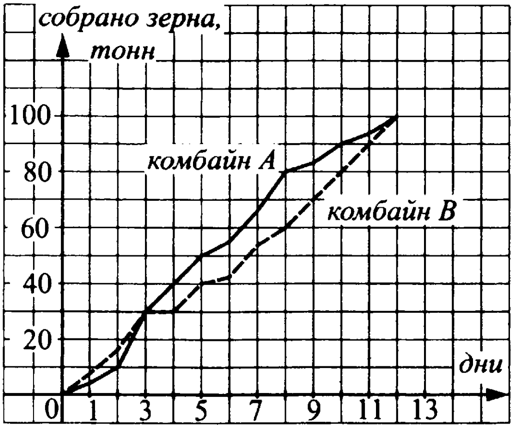


Рис. 130.

4. Компания «Аэрофлот» проанализировала ежегодные расходы, связанные с эксплуатацией самолётов двух типов — *А* и *Б*. На графике (см. рис. 131) показана зависимость ежегодной стоимости эксплуатации самолёта (y, млн руб.) от возраста (x, лет). Стоимость эксплуатации какого вида самолётов была выше на момент конца 18-го года эксплуатации самолётов и насколько? (Ответ выразите в млн рублей.)

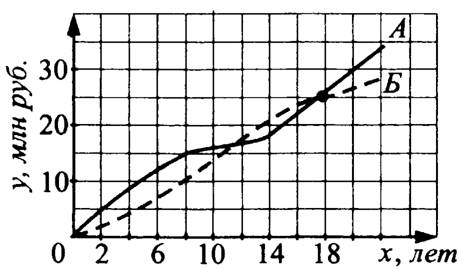


Рис. 131.

Ответ: ________________.

5. В таблице приведены результаты соревнований по прыжкам в высоту.

Страна	Россия	США	Китай	Англия	Франция	КНДР	ЮАР
Результат (м)	2,4	2,08	1,96	1,97	2,22	1,7	1,7

Представитель какой страны показал третий результат?

1) Китай 2) США 3) Англия 4) Франция

Ответ: ________________.

6. В тонком неоднородном стержне длиной 8 см его масса (в граммах) распределяется по закону $m = l^2 + 3l$, где l — длина стержня (в см), отсчитываемая от его начала. Чему равны А, Б?

l — длина (в см)	А	4
m — масса (в г)	10	Б

Ответ: ________________ .

7. Коллекция моделей одежды разной цветовой гаммы представлена в виде диаграммы (см. рис. 132). Сколько в коллекции моделей красного цвета, если всего в ней 800 моделей?

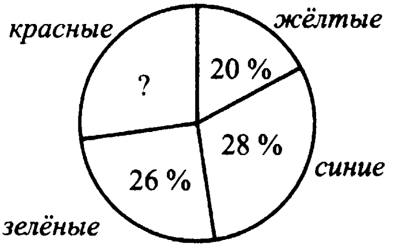


Рис. 132.

Ответ: ________________ .

8. Мастер произвёл за рабочий день несколько деталей четырёх типов: A, B, C и D (см. диаграмму 133). Известно, что деталей типа A мастер изготовил 18 штук. Сколько всего деталей изготовил мастер за день?

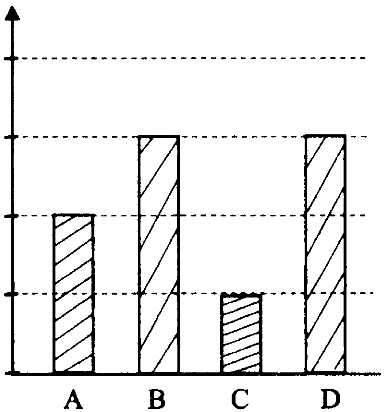


Рис. 133.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. На рисунке 134 изображён график зависимости скорости ракеты v (в м/с) от времени t (в с), прошедшего с момента начала наблюдения за ней. Через какое время после начала наблюдения ракета наберёт скорость 800 м/с?

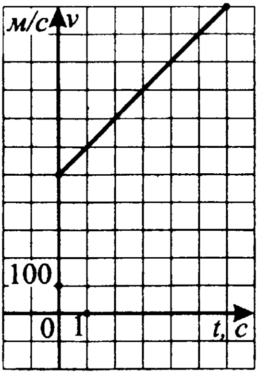


Рис. 134.

Ответ: ________________.

2. Мальчик собирает вишню в ведро. Масса вишни в полном ведре — 10 кг. Когда ведро наполняется, мальчик его осторожно освобождает и начинает снова собирать вишню. На рисунке 135 изображён график зависимости массы вишни в ведре от времени. Сколько всего вишни (в кг) было собрано за первые 1,5 часа?

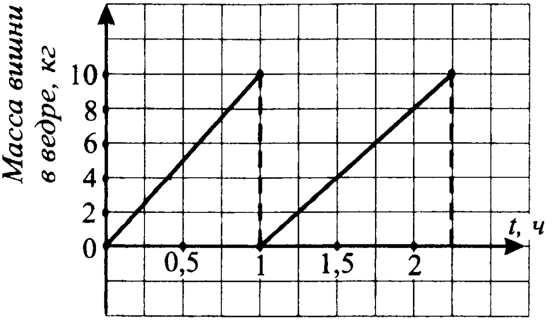


Рис. 135.

1) 4 2) 14 3) 18 4) 24

Ответ: ________________.

3. На рисунке 136 указаны графики движения двух объектов. Какой из них пройдёт большее расстояние в период после 20-й и заканчивая 50-й минутой и на сколько метров больше?

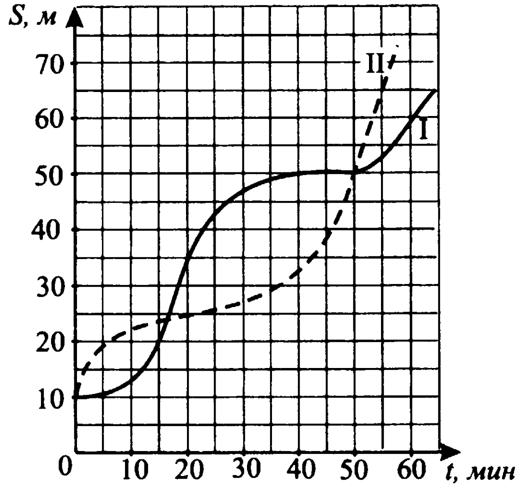


Рис. 136.

Ответ: ________________.

4. Двигаясь прямолинейно, велосипедист поехал от дома вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 137 изображён график изменения расстояния от велосипедиста до дома. Определите, пользуясь графиком:

а) сколько минут отдыхал велосипедист;

б) скорость велосипедиста на спуске к реке (в км/ч);

в) сколько минут заняла езда на велосипеде.

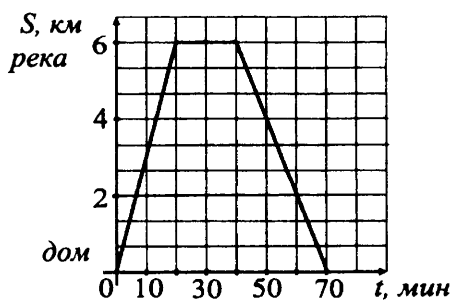


Рис. 137.

Ответ: ________________.

5. В таблице приведены нормативы по сгибанию и разгибанию рук в упоре лёжа для учеников 11-го класса.

	Мальчики			**Девочки**		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Количество выполнений упражнения	32	27	22	20	15	10

Не выполнившим норматив выставляется отметка «2». Какую оценку получит девочка, выполнившая это упражнение 18 раз?

Ответ: ________________ .

6. Хозяйка собирается приобрести продукты в одном из трёх магазинов: «Звезда», «Фонарь» и «Свет». Цена товаров и условия продажи указаны ниже.

Магазины	**Цена 1 кг хурмы**	**Цена упаковки чая**	**Цена 1 кг конфет**
«Звезда»	220	320	440
«Фонарь»	190	310	430
«Свет»	240	300	420

В «Звезде» предоставляется скидка на весь ассортимент в размере 6 %.

В каком магазине дешевле всего обойдётся набор продуктов из 2 кг хурмы, 2 упаковок чая и 0,5 кг конфет? В ответе укажите стоимость этого набора в рублях.

Ответ: ________________ .

7. Результаты анализа прибыли, полученной за год индивидуальным предпринимателем, представлены в виде круговой диаграммы (см. рис. 138). Какая прибыль (в рублях) была получена индивидуальным предпринимателем в 3-м квартале, если во 2-м квартале прибыль составила 48 000 тыс. рублей?

Ответ: ________________ .

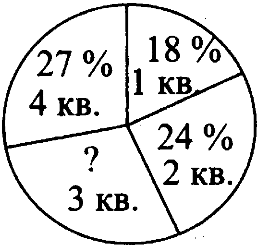


Рис. 138.

8. На диаграмме представлены результаты межпредметной викторины среди восьмых классов среднеобразовательной школы (см. рис. 139).

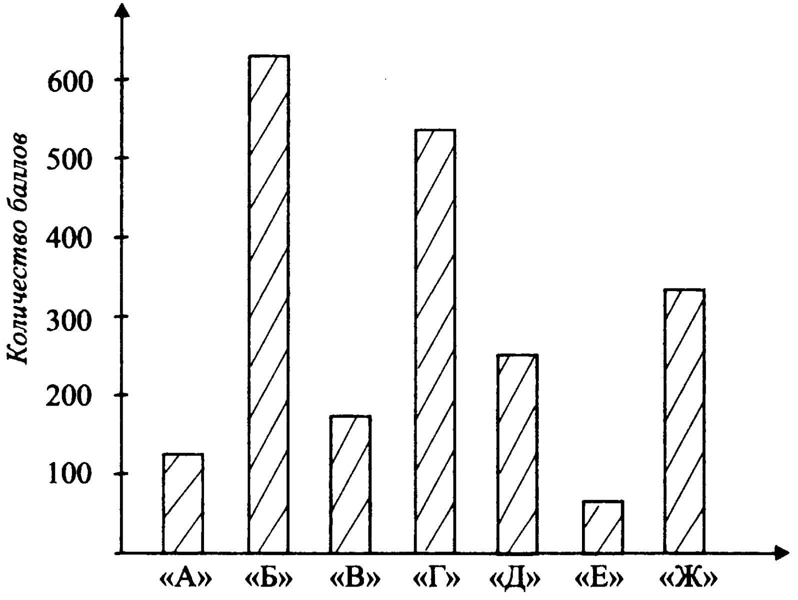


Рис. 139.

Какое место занял 8 «В», если первое место занял 8 «Б»?

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. На рисунке 140 изображён график зависимости скорости ракеты v (в м/с) от времени t (в с), прошедшего с момента начала наблюдения за ней. Через какое время (в с) после начала наблюдения ракета наберёт скорость 500 м/с?

Ответ: ________________.

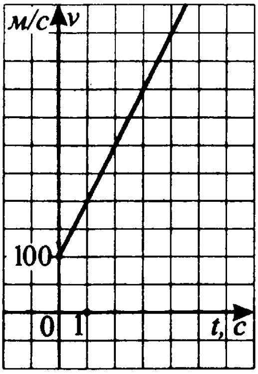


Рис. 140.

2. Мальчик собирает черешню в ведро. Масса черешни в полном ведре — 8 кг. Когда ведро наполняется, мальчик его осторожно освобождает и начинает снова собирать черешню. На рисунке 141 изображён график зависимости массы черешни в ведре от времени. Через сколько минут после начала сбора мальчик собрал 10 кг черешни?

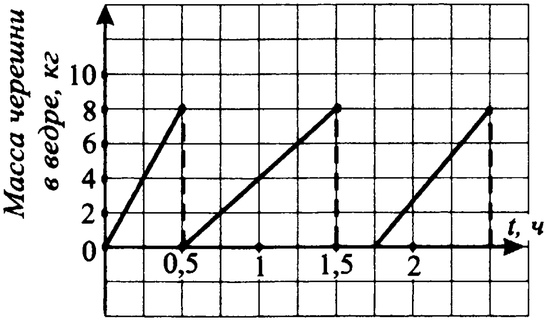


Рис. 141.

1) 30 2) 45 3) 90 4) 100

Ответ: ________________.

3. На рисунке 142 изображены графики зависимости количества решённых на экзамене задач от времени для учеников А и Б. Кто решил больше задач за последний час и на сколько?

Ответ: ________________.

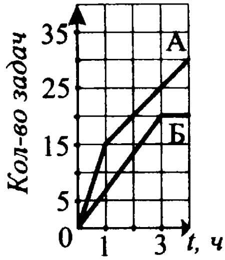


Рис. 142.

4. На рисунке 143 изображён график движения тела, брошенного вертикально вверх. Найдите по графику:

а) сколько времени тело поднималось вверх (в секундах);

б) какой наибольшей высоты достигло тело (в метрах);

в) через сколько секунд тело упало на землю.

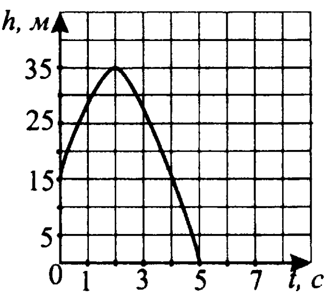


Рис. 143.

Ответ: ________________ .

5. В таблице приведены нормативы по бегу на лыжах на 3 км для учеников 11-го класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время, мин	14,3	15,0	15,5	18,0	19,0	20,0

Не выполнившим норматив выставляется отметка «2». Какую оценку получит девочка, пробежавшая на лыжах 3 км за 19,6 минут?

Ответ: ________________ .

6. Хозяйка собирается приобрести продукты в одном из трёх магазинов: «Муссон», «Бриз» и «Тайфун». Цена товаров и условия продажи указаны ниже.

Магазины	**Цена 1 кг печенья**	**Цена пакета молока**	**Цена 1 кг сыра**
«Муссон»	210	50	460
«Бриз»	180	60	500
«Тайфун»	240	42	490

В магазине «Бриз» проходит акция, в рамках которой предоставляется скидка 10 % на все молочные продукты.

В каком магазине дешевле всего обойдётся набор продуктов из 0,6 кг печенья, 3 пакетов молока и 300 грамм сыра? В ответе укажите стоимость этого набора в рублях.

Ответ: ________________.

7. Количество слоек с разной начинкой в магазине представлено в виде круговой диаграммы (см. рис. 144). Сколько слоек с вишнёвой начинкой, если слоек с абрикосовой начинкой 35, а с сыром в магазине 39 слоек?

Рис. 144.

Ответ: ________________.

8. На диаграмме представлены результаты межпредметной викторины среди восьмых классов среднеобразовательной школы (см. рис. 145).

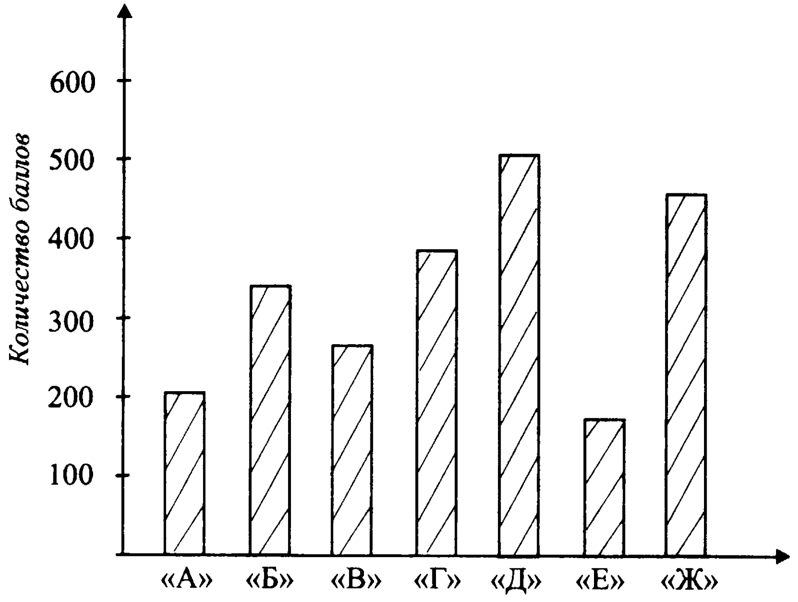


Рис. 145.

Какое место занял 8 «Б», если первое место занял 8 «Д»?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. На плодово-овощной базе первые 5 дней бананы продают по 25 руб., далее — по 15 руб. Какой график соответствует этим условиям? (См. рис. 146, по оси Ox отмеряется время (в сутках), по оси Oy — стоимость бананов (в руб.).)

Ответ: ________________.

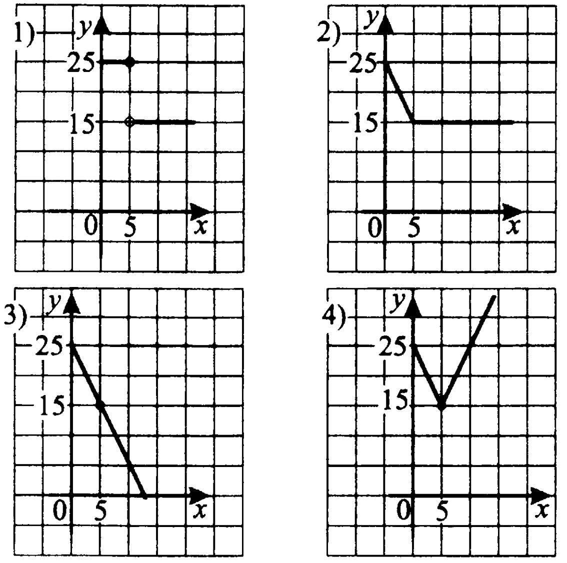


Рис. 146.

2. Турист отправился в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке 147 изображён график изменения расстояния от туриста до базы. Считая, что турист двигался прямолинейно, найдите среднюю скорость (в км/ч) туриста за всё время движения? (Время на привалы не учитывать.)

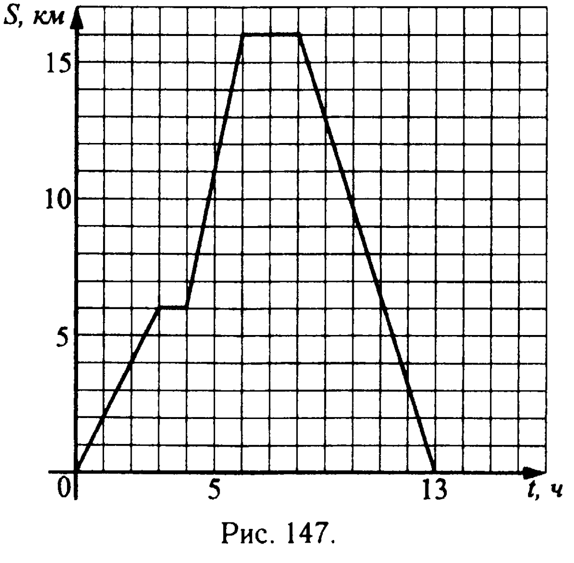


Рис. 147.

Ответ: ________________ .

3. На рисунке 148 изображены графики движения лодки и катера, отчаливших от одной пристани в одном направлении. Определите, пользуясь графиком:

а) на каком расстоянии (в километрах) от пристани катер догнал лодку;

б) через сколько часов после выхода катера произошла встреча;

в) на каком расстоянии (в км) друг от друга были лодка и катер в 14 часов.

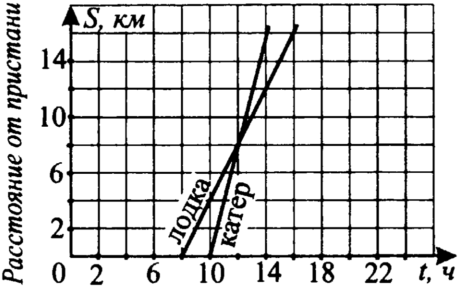


Рис. 148.

Ответ: ________________.

4. Пчела летает от улья к цветку и обратно (по прямой). На цветке она какое-то время собирает пыльцу. Расстояние от улья до цветка равно 5 м. На рисунке 149 изображён график зависимости расстояния между пчелой и ульем от времени движения пчелы. Определите, какое расстояние (в метрах) пролетела пчела за первые 40 секунд.

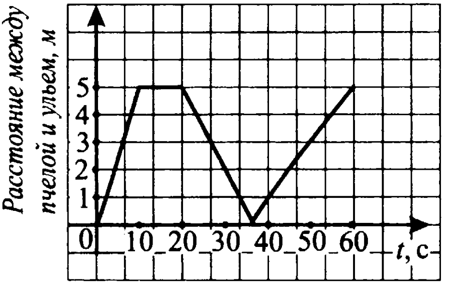


Рис. 149.

Ответ: ________________.

5. В таблице даны результаты олимпиад по русскому языку и литературе в 8 «Б» классе.

Номер работы ученика	Балл по русскому языку	Балл по литературе
7003	72	42
7008	79	90
7009	42	77
7010	53	63
7011	96	85
7013	19	25
7016	89	100
7019	80	74
7027	61	87
7031	36	47
7032	99	75
7033	60	92
7036	0	12
7038	44	80
7045	92	56

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 145 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 80 баллов. Сколько человек из 8 «Б», набравших меньше 80 баллов по литературе, получат похвальные грамоты?

Ответ: _______________.

6. В нескольких эстафетах, которые проводились в школе, команды показали следующие результаты:

Команда	I эстафета, мин	II эстафета, мин	III эстафета, мин	IV эстафета, мин
«Светлячки»	2,8	6,1	4,8	5,9
«Звёздные тигры»	4,1	4,2	4,9	3,6
«Дружок и Гена»	3,9	4,4	5,1	4,7
«Непобедимые»	5,3	3,9	4,6	4,1

За каждую эстафету команда получает количество баллов, равное занятому в этой эстафете месту, затем баллы по всем эстафетам суммируются. Какое итоговое место заняла команда «Дружок и Гена», если победителем считается команда, набравшая наименьшее количество очков?

Ответ: ______________ .

7. На диаграмме (см. рис. 150) представлено распределение всех имеющихся в школьной библиотеке изданий. Всего изданий — 4000.

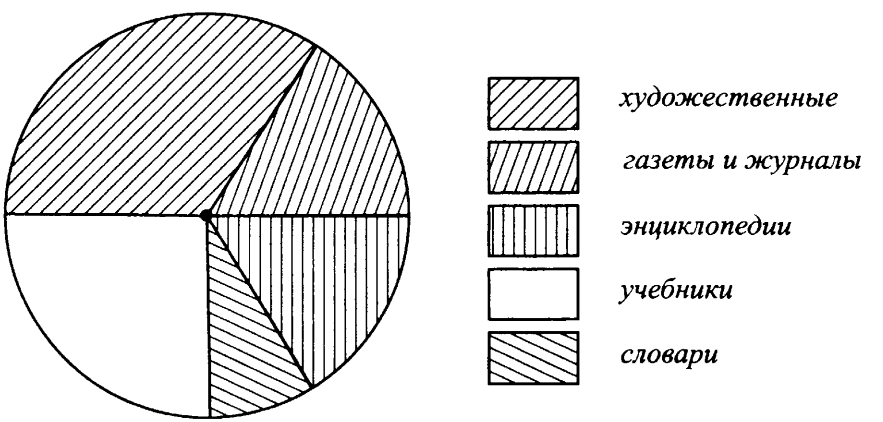


Рис. 150.

Какое из следующих утверждений неверно?

1) Художественных изданий больше, чем газет и журналов.
2) Энциклопедий больше, чем словарей.
3) Больше трети всех изданий занимают учебники.
4) Четвёртую часть всех изданий занимают энциклопедии и словари.

Ответ: ______________ .

8. Ольга Викторовна купила конфеты четырёх видов: «Луч», «Свет», «Луна» и «Вечер», причём конфеты «Луч» и «Луна» она купила в равном количестве, а конфет «Вечер» в два раза больше, чем «Луч». Какая из указанных диаграмм (см. рис. 151) может описывать соотношение купленных конфет?

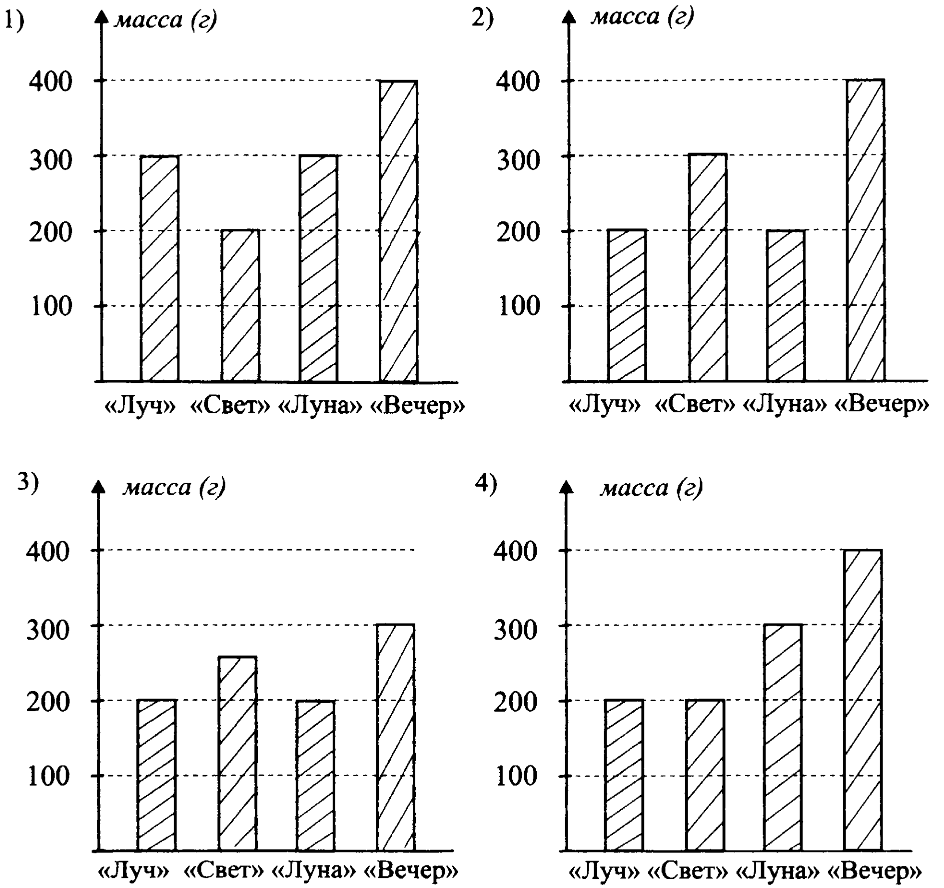


Рис. 151.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. Температура воздуха на складе 8 часов падала, а затем включили обогреватель и температура начала расти (см. рис. 152, по оси Ox отмеряется время в часах, начиная с полуночи, по оси Oy — температура в градусах Цельсия). Какой из рисунков 1) – 4) соответствует этим условиям?

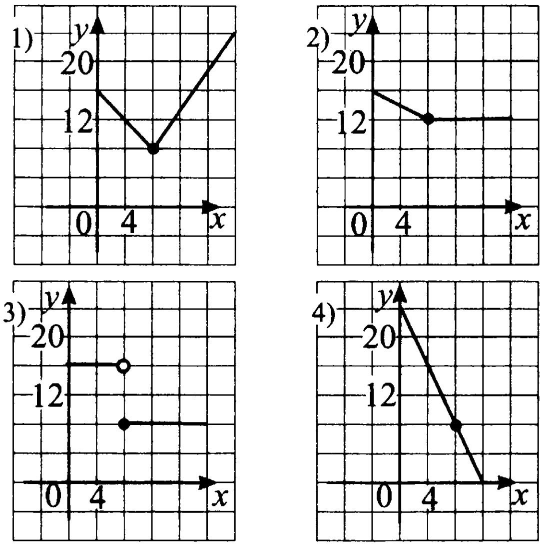


Рис. 152.

Ответ: ________________ .

2. Из города выехал первый автомобилист по прямолинейной трассе. График изменения его расстояния от города представлен на рисунке 153. Через два часа за ним выезжает второй автомобилист. С какой скоростью (в км/ч) должен ехать второй автомобилист, чтобы догнать первого через четыре часа после своего выезда?

Ответ: ________________ .

3. На рисунке 154 изображены графики движения автомобиля (график AB) и автобуса (график CD), вышедших из одного и того же города в одном направлении. Определите, пользуясь графиком:

а) на каком расстоянии от города автомобиль догнал автобус;

б) через сколько часов после выхода автобуса произошла встреча;

в) на каком расстоянии друг от друга были автобус и автомобиль в 8 часов.

Ответ: ________________ .

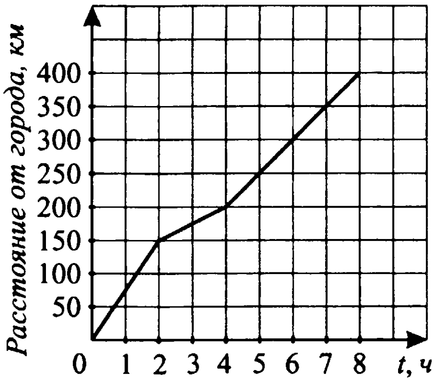


Рис. 153.

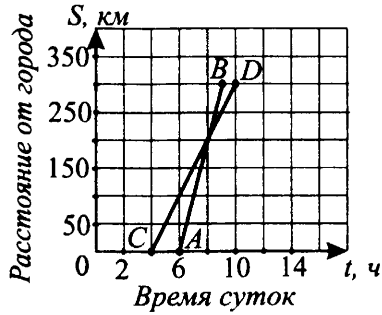


Рис. 154.

4. Мяч подбросили вертикально вверх, после чего через некоторое время он упал на землю. На рисунке 155 изображён график зависимости высоты мяча над землёй от времени, прошедшего после начала полёта. Используя график, выясните, сколько метров пролетел мяч за первые 2 секунды.

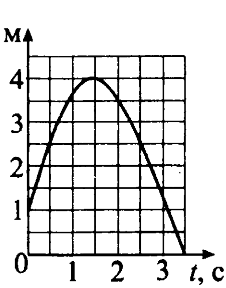


Рис. 155.

Ответ: ________________.

5. В таблице приведены результаты олимпиад по биологии и химии в 10 «В» классе.

Номер работы ученика	Балл по биологии	Балл по химии
9215	68	56
9226	70	88
9227	56	90
9229	41	98
9230	30	45
9235	0	13
9237	97	62
9247	23	35
9254	85	60
9276	90	74
9277	74	69
9278	36	47
9279	55	58
9286	49	52
9300	83	88

Похвальные грамоты дают тем школьникам, у кого суммарный балл по двум олимпиадам больше 140 или хотя бы по одному предмету набрано не меньше 75 баллов. Сколько человек из 10 «В», набравших не больше 140 баллов в сумме, получат похвальные грамоты?

Ответ: ________________.

6. В нескольких эстафетах, которые проводились в школе, команды показали следующие результаты:

Команда	I эстафета, мин	II эстафета, мин	III эстафета, мин	IV эстафета, мин
«Амон Ра»	7,2	8,3	2,4	8,3
«Ярило»	6,9	9,4	2,2	6,1
«Зевс»	7,3	7,5	2,5	7,2
«Юпитер»	8,0	7,9	2,6	6,4

За каждую эстафету команда получает количество баллов, равное занятому в этой эстафете месту, затем баллы по всем эстафетам суммируются. Какое итоговое место заняла команда «Амон Ра», если победителем считается команда, набравшая наименьшее количество очков?

Ответ: ________________ .

7. Суммарный фонд заработной платы фирмы составляет 3 000 000 рублей. Его распределение между отделами указано на диаграмме (см. рис. 156).

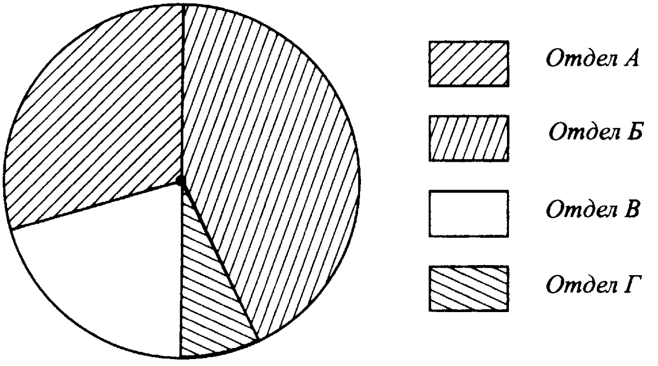


Рис. 156.

Какое из следующих утверждений верно?

1) Фонд заработной платы отдела Б меньше, чем фонд заработной платы отдела А.

2) Суммарный фонд заработной платы отделов В и Г больше, чем фонд заработной платы отдела А.

3) Фонд заработной платы отдела А больше фонда заработной платы отдела В.

Ответ: ________________ .

8. В магазин завезли мужские джинсы четырёх размеров: 46, 48, 50 и 52, причём всех размеров — разное количество. Какая из указанных диаграмм (см. рис. 157) может описывать соотношение завезённых товаров?

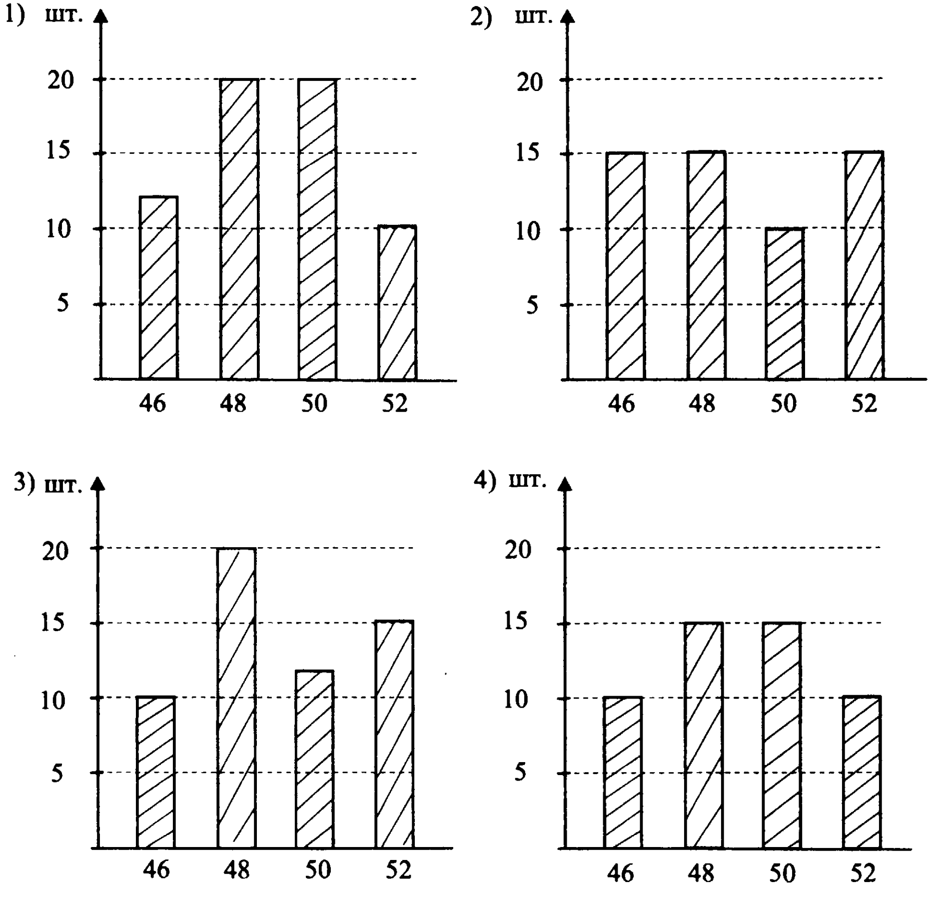


Рис. 157.

Ответ: ________________.

§ 17. Алгебра. Составление математической модели по условию текстовой задачи

Основные сведения

Решение текстовой задачи предполагает переход от словесного, «житейского» языка к языку математическому, языку формул. Таким образом составляется математическая модель. Нередко математическая модель текстовой задачи включает в себя уравнение или системы уравнений, а также некоторые ограничения на входящие в них переменные.

Рассмотрим бытовую задачу. «В школе имеется два девятых класса: 9 «А» и 9 «Б». Всего в них обучается 47 учеников, причём в 9 «А» на 3 человека больше, чем в 9 «Б». Найдите число учеников в каждом классе».

Составим математическую модель этой задачи. Пусть x — количество учеников в 9 «А», тогда по смыслу задачи x — число натуральное. Так как по условию в обоих классах в сумме 47 учеников, то в 9 «Б» $(47 - x)$ учеников, причём число $(47 - x)$ целое и положительное. Согласно условию задачи, в 9 «А» на 3 ученика больше, чем в 9 «Б», то есть $x - (47 - x) = 3$. Это уравнение (при условии, что x и $(47 - x)$ — натуральные числа) и является математической моделью рассматриваемой задачи.

Для этой же задачи может быть построена и другая модель. Пусть x — число учащихся в 9 «А», y — число учащихся в 9 «Б». Тогда по условию задачи составляем систему уравнений $\begin{cases} x + y = 47, \\ x - y = 3, \end{cases}$ где x и y — натуральные числа.

Рассмотрим пример на составление математической модели при решении текстовой задачи в случае «задачи на смеси».

«Смешали некоторый объём 10-процентного раствора соли и некоторый объём 4-процентного раствора соли. Получили 15 л 6-процентного раствора соли. Найдите объёмы (в литрах) каждого из двух взятых растворов».

Решение. Пусть 10-процентного раствора было x л, тогда из условия следует, что 4-процентного раствора взято $(15 - x)$ л.

В x л 10-процентного раствора содержится $x \cdot \frac{10}{100} = 0{,}1x$ л соли, а в $(15 - x)$ л 4-процентного раствора содержится $(15 - x) \cdot \frac{4}{100} = 0{,}04(15 - x)$ л соли. Тогда после смешивания в растворе будет $0{,}1x + 0{,}04(15 - x)$ л соли, значит, её процентное содержание составит
$\frac{0{,}1x + 0{,}04(15 - x)}{15} \cdot 100\,\%$, что по условию равно 6%. Получим уравнение $\frac{0{,}1x + 0{,}04(15 - x)}{15} \cdot 100\,\% = 6\,\%$, $\frac{0{,}1x + 0{,}04(15 - x)}{15} = 0{,}06$. Это уравнение является математической моделью рассматриваемой задачи при условии $x > 0$.

Другие примеры составления математической модели при решении задач (в том числе на «движение», «работу» и «производительность») приведены в задачах 1) – 8) варианта с решениями.

Важно отметить, что при составлении математической модели важно обращать внимание на единицы измерения. Например, если время одной величины решено измерять в часах, то и другие величины, относящиеся к категории «время», следует измерять в часах, а не в минутах или секундах. Это «правило единообразия» касается и других единиц измерения.

Иногда за неизвестную удобно обозначать не искомую величину, а какую-то вспомогательную. Но при ответе на вопрос задачи нельзя забывать о том, что именно спрашивается.

Вариант с решениями

1. Составьте уравнение по условию задачи. «Из прямоугольника со сторонами 6 и b вырезали заштрихованный квадрат со стороной c ($c < 6$, $c < b$), как показано на рисунке 158. Площадь оставшейся фигуры равна 29. Найдите сторону квадрата».

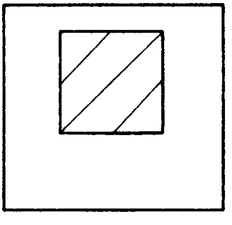


Рис. 158.

Считая, что сторона квадрата равна c, найдите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $6 + b - c = 29$ 2) $6b - c^2 = 29$

3) $6b - 2c = 29$ 4) $6 + b - 2c = 29$

Решение. Площадь треугольника со сторонами 6 и b равна $6b$, площадь квадрата со стороной c равна c^2. Значит, площадь оставшейся части равна $6b - c^2$, что по условию равно 29, то есть $6b - c^2 = 29$, что соответствует ответу 2).

Ответ: 2.

2. Составьте уравнение по условию задачи. «На три полки поставили 218 книг. На первую поставили на 13 книг больше, чем на вторую, а на третью полку — в 3 раза больше, чем на вторую. Сколько книг поставили на вторую полку?» Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество книг на второй полке.

1) $x + (x + 13) + 3x = 218$ 2) $13x + x + 3x = 218$

3) $13x + x + (x + 3) = 218$ 4) $x + (x + 13) + \frac{x}{3} = 218$

Решение. Пусть x — количество книг на второй полке, тогда на первой полке — $(x + 13)$ книг, а на третьей — $3x$ книг. Всего на трёх полках 218 книг. Получаем уравнение $x + 13 + x + 3x = 218$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Составьте уравнение по условию задачи. «Если задуманное число уменьшить на 10 и результат разделить на 7, то получится 3. Найдите это число».

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено задуманное число.

1) $\frac{x - 10}{7} = 3$ 2) $\frac{10 - x}{7} = 3$

3) $(x - 10) \cdot 7 = 3$ 4) $(10 - x) \cdot 7 = 3$

Решение. Если x — задуманное число, то, вычитая из него 10, получим $(x - 10)$. Разделив на 7, получим $\frac{x - 10}{7}$. По условию получаем уравнение $\frac{x - 10}{7} = 3$, что соответствует ответу 1).

Ответ: 1).

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Расстояние от посёлка до города мопед проезжает за 4 часа, а автомобиль — за 3 часа. Чему равно расстояние от посёлка до города, если скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости мопеда?»

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено расстояние (в км) от посёлка до города.

1) $4x - 3x = 30$ 2) $\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{30}$

3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 30$ 4) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} = 30$

Решение. Из условия следует, что скорость мопеда равна $\frac{x}{4}$ км/ч, а скорость автомобиля равна $\frac{x}{3}$ км/ч. Разность их скоростей $\frac{x}{3} - \frac{x}{4}$ по условию равна 30 км/ч. Получаем уравнение $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 30$.

Ответ: 3.

5. Составьте уравнение по условию задачи. «Из деревни в город выезжает мотоциклист и едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Через 20 минут после него из деревни в город выезжает автомобилист и едет с постоянной скоростью 80 км/ч. Какова длина пути от деревни до города, если мотоциклист и автомобилист прибыли в город одновременно?» Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой S обозначена длина пути от деревни до города (в км).

1) $\frac{S}{50} + 20 = \frac{S}{80}$ 2) $50S + 20 = 80S$

3) $80S + 0{,}2 = 50S$ 4) $\frac{S}{50} - \frac{S}{80} = \frac{1}{3}$

Решение. $\frac{S}{50}$ ч — время движения мотоциклиста; $\frac{S}{80}$ ч — время движения автомобилиста. По условию мотоциклист затратил на дорогу на 20 минут больше, чем автомобилист. Выразим время в часах: 20 мин $= \frac{20}{60}$ ч $= \frac{1}{3}$ ч. Составим уравнение: $\frac{S}{50} - \frac{S}{80} = \frac{1}{3}$. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Составьте уравнение по условию задачи. «Один насос может наполнить бассейн за 4 часа, второй — за 6 часов. За какое время они наполнят бассейн, если будут работать одновременно?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой t обозначено время (в часах), за которое наполняется бассейн при двух работающих насосах.

1) $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ 3) $t = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

Решение. Примем объём воды в бассейне за 1. За один час первый насос может наполнить $\frac{1}{4}$ часть бассейна, а второй — $\frac{1}{6}$ часть бассейна. При двух работающих насосах за 1 час наполнится $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ часть бассейна, что составит $\frac{1}{t}$. Согласно условию, получаем уравнение $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Из предложенных ответов только уравнение 2) соответствует условию задачи.

Ответ: 2.

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Соседи Константин и Николай переносят кирпичи с одного дачного участка на другой в течение 1 часа. Константин переносит в минуту на 1 кирпич меньше, чем Николай. Всего они перенесли 300 кирпичей. Сколько кирпичей в минуту переносит Николай?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество кирпичей, которое Константин перенесёт за минуту.

1) $x + (x + 1) = 300$ 2) $(x + (x - 1)) : 60 = 300$

3) $(x + (x + 1)) \cdot 60 = 300$ 4) $(x + (x - 1)) \cdot 60 = 300$

Решение. Николай по условию переносит на 1 кирпич в минуту больше, чем Константин, то есть $(x + 1)$ кирпич. Тогда вместе они переносят за минуту $(x + (x + 1))$ кирпичей, а за 60 минут — $60(x + (x + 1))$, что по условию равно 300. Получим уравнение $60(x + (x + 1)) = 300$, соответствующее варианту 3).

Ответ: 3.

8. Составьте уравнение по условию задачи. «Имеются два сплава, в первом из которых содержится 60 % меди, а во втором — 18 % меди. Сколько килограммов второго сплава необходимо сплавить с 16 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 25 % меди?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено искомое количество килограммов меди.

1) $\dfrac{6 \cdot 16 + 0{,}18x}{x + 16} = 0{,}25$ 2) $\dfrac{6 \cdot 16 + 18x}{x + 16} = 0{,}25$

3) $\dfrac{0{,}6 \cdot 16 + 0{,}18x}{x + 16} = 25$ 4) $\dfrac{0{,}6 \cdot 16 + 0{,}18x}{x + 16} = 0{,}25$

Решение. В 16 кг первого сплава содержится $16 \cdot \dfrac{60}{100} = 16 \cdot 0{,}6$ кг меди. В x кг второго сплава — $x \cdot \dfrac{18}{100} = 0{,}18x$ кг. Всего в обоих сплавах $(0{,}6 \cdot 16 + 0{,}18x)$ кг меди. Суммарная масса сплавов $(16 + x)$ кг. Тогда процентное содержание меди составит $\dfrac{0{,}6 \cdot 16 + 0{,}18x}{x + 16} \cdot 100\,\%$, что по условию равно 25 %. Следовательно, $\dfrac{0{,}6 \cdot 16 + 0{,}18x}{x + 16} = 0{,}25$, что соответствует ответу 4).

Ответ: 4.

Вариант № 1

1. Составьте уравнение по условию задачи. «Из прямоугольного треугольника (с катетами больше двух), имеющего площадь, равную 6, вырезали квадрат, как показано на рисунке 159. После этого площадь оставшейся фигуры составила 5. Найдите длину стороны квадрата».

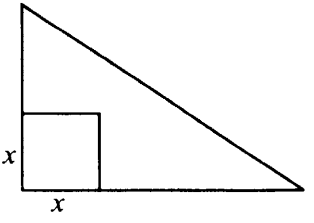


Рис. 159.

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена сторона вырезанного квадрата.

1) $5x^2 = 6$ 2) $6x^2 = 5$ 3) $6 - x^2 = 5$ 4) $6 + x^2 = 5$

Ответ: ________________.

2. Составьте уравнение по условию задачи. «На первой полке книг в 3 раза больше, чем на второй, и на 15 книг меньше, чем на третьей. Сколько книг на первой полке, если на трёх полках 120 книг?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено количество книг на первой полке.

1) $3x + 15 = 120 - x$ 2) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 15 = 120$

3) $\frac{7}{3}x - 15 = 120$ 4) $\frac{7}{3}x + 15 = 120$

Ответ: ________________.

3. Составьте уравнение по условию задачи. «Если задуманное число увеличить на 23 и результат разделить на 10, получится 7. Найдите это число».

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено задуманное число.

1) $(x - 23) \cdot 10 = 7$ 2) $10 \cdot (x + 23) = 7$

3) $(x + 23) : 10 = 7$ 4) $10 : (x + 23) = 7$

Ответ: ________________.

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Расстояние от посёлка до города автобус проходит за 3 часа, а автомобиль — за 2 часа. Чему равно расстояние от посёлка до города, если скорость автомобиля на 35 км/ч больше скорости автобуса?»

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено расстояние (в км) от посёлка до города.

1) $3x - 2x = 35$ 2) $35\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = 1$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 35$ 4) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 35$

Ответ: ________________.

5. Составьте уравнение по условию задачи. «Из двух пунктов, расстояние между которыми 45 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго велосипедиста. Определите скорость первого велосипедиста, если они встретились через 1 ч 30 мин после их выезда».

Обозначив через x скорость первого велосипедиста (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $2x - 3 = 45 \cdot 1{,}5$ 2) $2x + 3 = 45$

3) $1{,}5(x + (x - 3)) = 45$ 4) $1{,}5(x + (x + 3)) = 45$

Ответ: ________________.

6. Составьте уравнение по условию задачи. «Бабушка и внучка в течение $\frac{1}{2}$ часа слепили 120 пельменей. Сколько пельменей в минуту лепит бабушка, если она лепит в минуту на 2 пельменя больше внучки?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество пельменей, которое бабушка лепит в минуту.

1) $x + (x - 2) = 120$ 2) $\frac{1}{2}(x + (x - 2)) = 120$

3) $(x + (x + 2)) \cdot 30 = 120$ 4) $(x + (x - 2)) \cdot 30 = 120$

Ответ: ________________.

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Первая машинистка набирает 9 листов текста на компьютере за 40 мин, а вторая — 8 листов за это же время. Сколько минут потребуется им обеим, чтобы набрать 340 листов текста?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество минут, необходимое для набора 340 листов.

1) $\frac{9}{x + 40} + \frac{8}{x + 40} = 340$ 2) $17(x - 40) = 340$

3) $\frac{40}{x + 9} + \frac{40}{x + 8} = 340$ 4) $\frac{340 \cdot 40}{8 + 9} = x$

Ответ: ________________.

8. Составьте уравнение по условию задачи. «Имеются два сплава, в первом из которых содержится 40 % серебра, а во втором — 25 % серебра. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 20 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 30 % серебра?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено искомое количество килограммов второго сплава.

1) $\dfrac{20 \cdot 40 + x \cdot 25}{20 + x} = 0{,}3$ 2) $\dfrac{20 \cdot 0{,}4 + x \cdot 0{,}25}{20 + x} = 0{,}3$

3) $\dfrac{20 \cdot 40 + x \cdot 25}{20} = 30$ 4) $\dfrac{20 \cdot x}{40} = 30$

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Составьте уравнение по условию задачи. «Из прямоугольного треугольника (с катетами больше 4,5), имеющего площадь, равную 12, вырезали квадрат, две стороны которого лежат на катетах. После этого площадь оставшейся фигуры составила 8. Найдите сторону вырезанного квадрата».

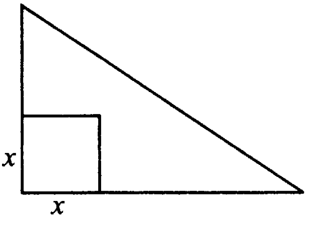


Рис. 160.

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена длина стороны квадрата.

1) $(x - 8)(x - 12) = 20{,}25$ 2) $(x - 12)(x - 8) = 0$

3) $x^2 = 12 - 8$ 4) $x^2 = 12 + 8$

Ответ: ________________.

2. Составьте уравнение по условию задачи. «На первой полке книг в 2 раза меньше, чем на второй, и на 5 книг больше, чем на третьей. Сколько книг на первой полке, если на всех трёх полках 55 книг?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначено количество книг на первой полке.

1) $5x - 5 = 55$ 2) $x + 2x + x - 5 = 55$

3) $3x - 5 = 55$ 4) $x + 2x - x + 5 = 55$

Ответ: ________________.

3. Составьте уравнение по условию задачи. «Если номер Васиной квартиры умножить на 4, а затем к результату прибавить 11, то получится 227. Определите номер квартиры, в которой живёт Вася».

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначен номер Васиной квартиры.

1) $4x + 11 = 227$ 2) $4(x + 11) = 227$

3) $x + 4 \cdot 11 = 227$ 4) другой ответ

Ответ: ________________ .

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Расстояние от посёлка А до посёлка Б автобус проходит за 5 часов, а автомобиль — за 3 часа. Чему равно расстояние между посёлками, если скорость автомобиля на 30 км/ч больше скорости автобуса?»

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если через s обозначено расстояние (в км) между посёлками.

1) $\frac{s}{3} - \frac{s}{5} = 30$ 2) $\frac{s}{5} - \frac{s}{3} = 30$

3) $5s - 3s = 30$ 4) $30\left(\frac{s}{3} - \frac{s}{5}\right) = 30$

Ответ: ________________ .

5. Составьте уравнение по условию задачи. «Из двух пунктов, расстояние между которыми 99 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Второй ехал со скоростью на 6 км/ч больше скорости первого мотоциклиста. Определите скорость первого мотоциклиста, если их встреча произошла через 1 ч 6 мин после выезда обоих мотоциклистов».

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена скорость первого мотоциклиста (в км/ч).

1) $2x + 6 = 99$ 2) $1{,}06(2x + 6) = 99$

3) $2x + 6 = 9{,}9$ 4) $1{,}1(x + x + 6) = 99$

Ответ: ________________ .

6. Составьте уравнение по условию задачи. «Мастер и подмастерье в течение трёх часов изготовили 900 деталей. Сколько деталей в минуту делает подмастерье, если он изготавливает в минуту на 1 деталь меньше, чем мастер?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество деталей, изготавливаемых подмастерьем в минуту.

1) $\dfrac{x + (x+1)}{900} = 3 \cdot 60$ 2) $3 \cdot (x + (x+1)) = 900$

3) $(x + (x+1)) \cdot 180 = 900$ 4) $(x + (x-1)) \cdot 180 = 900$

Ответ: ________________.

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Первый переводчик переводит 4 страницы текста за 50 мин, а второй — 5 страниц за это же время. Сколько минут потребуется им обоим, чтобы набрать 180 страниц текста, работая сообща?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой z обозначено количество минут, необходимое для набора 180 листов.

1) $\dfrac{50}{z+5} + \dfrac{50}{z+4} = 180$ 2) $\dfrac{180 \cdot 50}{9} = z$

3) $\dfrac{5}{z+50} + \dfrac{4}{z+50} = 180$ 4) $9(z - 50) = 180$

Ответ: ________________.

8. Составьте уравнение по условию задачи. «Имеются два сплава, в первом из которых содержится 6 % золота, а во втором — 2 % золота. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 50 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 3 % золота?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено искомое количество килограммов второго сплава.

1) $\dfrac{50 \cdot 0{,}06 + x \cdot 0{,}02}{50 + x} = 0{,}03$ 2) $\dfrac{50 \cdot 6 + x \cdot 2}{50} = 3$

3) $\dfrac{50 \cdot 0{,}6 + x \cdot 0{,}2}{50 + x} = 0{,}03$ 4) $\dfrac{50 \cdot 0{,}6 + x \cdot 0{,}02}{50 + x} = 0{,}03$

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Составьте уравнение по условию задачи. «На территории земельного участка, который имеет форму прямоугольника с размерами 37 м и 27 м, изнутри вдоль двух коротких сторон и одной длинной стороны выкладывают из тротуарной плитки три дорожки одинаковой ширины (см. рис. 161). Какова должна быть ширина дорожек, чтобы не покрытая плиткой земля участка имела площадь 860 м^2?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена ширина дорожек (в метрах).

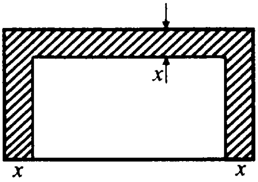


Рис. 161.

1) $37 \cdot 27 - 2 \cdot 27 \cdot x - 37 \cdot x = 860$
2) $37 \cdot 27 - 27 \cdot x - 37 \cdot x = 860$
3) $(37 - 2x)(27 - x) = 860$
4) $(37 - x) \cdot (27 - 2x) = 860$

Ответ: ________________ .

2. Составьте уравнение по условию задачи. «В парке посадили одинаковыми рядами 40 кустов роз. Кустов в каждом ряду оказалось на 6 больше, чем рядов. Сколько кустов в каждом ряду и сколько рядов в парке?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено число посаженных рядов.

1) $\frac{40}{x} = x + 6$　　2) $40(x + 6) = x$

3) $40x = 7 + x$　　4) $x^2 - 40x - 200 = 0$

Ответ: ________________ .

3. Составьте систему уравнений по фрагменту задачи. «Учебник по математике на 20 руб. дешевле учебника истории. Было куплено 2 учебника истории и 5 учебников математики на 600 рублей».

В ответе укажите номер системы уравнений, если буквой x обозначена стоимость учебника истории (в рублях), а буквой y — стоимость учебника математики (в рублях).

1) $\begin{cases} y - x = 20 \\ 2x + 5y = 600 \end{cases}$　　2) $\begin{cases} y - x = 20 \\ 5x + 2y = 600 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 20 \\ 2x + 5y = 600 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} x - y = 20 \\ 5x + 2y = 600 \end{cases}$

Ответ: ________________ .

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Сергей вышел из дома и пошёл в школу со скоростью 2 км/ч, а через 10 минут из дома вышла его младшая сестра и побежала в школу со скоростью 8 км/ч по той же дороге, в том же направлении. На каком расстоянии от дома сестра догонит Сергея?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено расстояние (в км) от дома, на котором сестра догонит брата.

1) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = \frac{1}{10}$ 2) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = \frac{1}{6}$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 10$ 4) $8x - 2x = 10$

Ответ: ________________ .

5. Составьте уравнение по условию задачи. «Лодка проплыла 6 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на весь путь 4 ч 45 мин. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена собственная скорость лодки (в км/ч).

1) $\frac{14}{x} = 4\frac{3}{4}$ 2) $\frac{6}{x+3} - \frac{8}{x-3} = 4$

3) $\frac{8}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 4{,}75$ 4) $\frac{6}{x+3} + \frac{8}{x-3} = 4{,}75$

Ответ: ________________ .

6. Составьте уравнение по условию задачи. «Два насоса, работая вместе, могут наполнить бассейн за 48 минут. За сколько минут может наполнить бассейн первый насос, работая один, если второму на эту работу нужно на 20 минут больше?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество минут, за которое первый насос может один наполнить бассейн.

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{48} = \frac{1}{x+20}$ 2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+20} = \frac{1}{48}$

3) $(20 + x) + x = 48$ 4) $\frac{1}{x+20} = \frac{1}{48}$

Ответ: ________________ .

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Два отряда ныряльщиков добывали жемчуг. Каждый человек из первого отряда достал 7 жемчужин, а каждый человек из второго отряда достал 3 жемчужины. Всего была добыта 61 жемчужина. Сколько ныряльщиков было в первом отряде, если в первом отряде их количество на 3 больше, чем во втором?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество ныряльщиков в первом отряде.

1) $3x + 7(x + 3) = 61$ 2) $3x + 7(x - 3) = 61$

3) $7x + 3(x - 3) = 61$ 4) $7x + 3(x + 3) = 61$

Ответ: ________________.

8. Составьте уравнение по условию задачи. «Какое количество воды надо добавить к 5 литрам 4-процентного раствора соли, чтобы концентрация составила 3 %?» В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено искомое количество литров.

1) $\dfrac{0{,}04 \cdot 5}{x+5} = 0{,}3,$ 2) $\dfrac{0{,}04 \cdot 5 + x}{5} = 0{,}03$

3) $\dfrac{0{,}04 \cdot 5}{x+5} = 0{,}03$ 4) $\dfrac{0{,}04 \cdot 5 + 0{,}03x}{x+5} = x$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Составьте уравнение по условию задачи. «По земельному участку, который имеет форму прямоугольника с меньшей стороной 42 м, вдоль двух коротких сторон и одной длинной стороны выкладывают из тротуарной плитки три дорожки шириной 4 метра (см. рис. 162). Чему равна длина большей стороны (в метрах), если не покрытая плиткой земля участка имеет площадь 1900 м^2?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена длина большей стороны (в метрах).

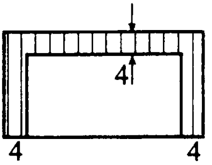


Рис. 162.

1) $(42 - 2 \cdot 4)(x - 4) = 1900$

2) $(42 - 4)(x - 2 \cdot 4) = 1900$

3) $42x - 4 \cdot 3 \cdot 42 = 1900$

4) $x = \dfrac{1900}{42}$

Ответ: ________________.

2. Составьте уравнение по условию задачи. «В сквере посадили одинаковыми рядами 88 кустов пионов. Кустов в каждом ряду оказалось на 3 меньше, чем рядов. Сколько кустов пионов в каждом ряду?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество кустов пионов в каждом ряду.

1) $88 = x(x + 3)$ 2) $\dfrac{x}{88} = x - 3$

3) $88x = x - 3$ 4) $x^2 + 3x - 264 = 0$

Ответ: ________________.

3. Составьте уравнение по фрагменту задачи. «Чемодан Алексея Петровича тяжелее чемодана Петра Алексеевича на 2 кг, а суммарно их масса составляет 30 кг». В ответе укажите номер системы уравнений, если буквой x обозначена масса чемодана Алексея Петровича (в кг), а буквой y — масса Петра Алексеевича (в кг).

1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 30 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 2 \\ x + y = 30 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y - x = 30 \end{cases}$

Ответ: ________________.

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Из школы вышел ученик и пошёл домой со скоростью 3 км/ч, а через час по той же дороге, в том же направлении на велосипеде выехал его брат со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от школы братья встретятся?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено расстояние (в км) от школы, на котором встретятся братья.

1) $\frac{x}{3} = \frac{x}{16} + 1$ 2) $\frac{x}{3} = \frac{x}{16} - 1$

3) $3x = 16x - 1$ 4) $\frac{x}{3} + \frac{x}{16} = 1$

Ответ: _______________.

5. Составьте уравнение по условию задачи. «Расстояние между пристанями на реке — 12 км. Катер прошёл от одной пристани до другой и вернулся обратно, затратив на весь путь 2 ч 30 мин. Какова скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость катера равна 10 км/ч?»

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена скорость течения реки (в км/ч).

1) $\frac{2{,}5}{10+x} + \frac{2{,}5}{10-x} = 12$ 2) $\frac{12}{2 \cdot 2{,}5} = x$

3) $\frac{12}{10+x} + \frac{12}{x-10} = \frac{5}{2}$ 4) $\frac{12}{x+10} + \frac{12}{10-x} = \frac{5}{2}$

Ответ: _______________.

6. Составьте уравнение по условию задачи. «Два насоса, работая вместе, могут наполнить бассейн за 64 минуты. За сколько минут может наполнить бассейн первый насос, работая один, если второму на эту работу нужно на 12 минут меньше?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой t обозначено количество минут, за которое первый насос может наполнить бассейн, работая самостоятельно.

1) $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+12} = \frac{1}{64}$ 2) $\frac{1}{t} + \frac{1}{t-12} = \frac{1}{64}$

3) $\frac{1}{64} - \frac{1}{t} = 12$ 4) $\frac{t + (t-12)}{64} = 1$

Ответ: _______________.

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Два отряда археологов собирали монеты на раскопках древнего города. Каждый человек из первого отряда собрал 12 монет, а каждый человек из второго отряда собрал 14 монет. Всего было собрано 306 монет. Сколько археологов было в первом отряде, если в первом отряде их количество на 7 меньше, чем во втором?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество археологов в первом отряде.

1) $14x + 12(x - 7) = 306$ 2) $12x + 14(x - 7) = 306$

3) $12x + 14(x + 7) = 306$ 4) $14x + 12(x + 7) = 306$

Ответ: ________________ .

8. Составьте уравнение по условию задачи. «Какой объём соли надо добавить к 6 литрам 5-процентного раствора соли, чтобы концентрация составила 7 %?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначен искомый объём соли (в литрах).

1) $\dfrac{0{,}05 \cdot 6}{x + 6} = 0{,}07,$ 2) $\dfrac{0{,}05 \cdot 6 + x}{6} = 0{,}07$

3) $\dfrac{0{,}05 \cdot x}{6} = 0{,}07$ 4) $\dfrac{0{,}05 \cdot 6 + x}{x + 6} = 0{,}07$

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Составьте уравнение по условию задачи. «Длина прямоугольника на 5 см больше его ширины. Найдите длину прямоугольника, если при её уменьшении на 1 см и увеличении ширины на 2 см площадь прямоугольника стала 48 см^2».

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена длина прямоугольника (в сантиметрах).

1) $(x + 1)(x - 2) = 48$ 2) $(x - 1)(x - 3) = 48$

3) $(x - 1)(x + 7) = 48$ 4) $(x + 5)(x - 3) = 48$

Ответ: ________________ .

2. Составьте уравнение по условию задачи. «Саша прочитал книгу за 5 дней, читая каждый день одинаковое число страниц. Если бы читал в день на 12 страниц меньше, то прочёл бы книгу за 7 дней. Сколько страниц в день читал Саша?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено число страниц, которые читал Саша в один день.

1) $7(x-12) = 5x$ 2) $7x - 5x = 12$

3) $5x + 7x = 12$ 4) $7x = 5(x+12)$

Ответ: ________________.

3. Составьте систему уравнений по условию задачи. «Прямоугольный участок земли обнесён забором, периметр которого 80 м. Площадь участка — 231 м^2. Найдите длины сторон участка».

В ответе укажите номер системы уравнений, если буквой x обозначена ширина участка (в метрах), буквой y — его длина (в метрах).

1) $\begin{cases} x + y = 80, \\ xy = 231 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 40, \\ xy = 231 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{231}{x} = y, \\ \dfrac{231}{x} + y = 80 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x+y) = 231, \\ xy = 80 \end{cases}$

Ответ: ________________.

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Расстояние между пристанями — 30 км. Лодка проплыла от одной пристани до другой и вернулась обратно, затратив на весь путь 6 часов. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена собственная скорость лодки (в км/ч).

1) $\dfrac{30}{x-2} - \dfrac{30}{x+2} = 6$ 2) $\dfrac{30}{x+2} + \dfrac{30}{x-2} = 6$

3) $\dfrac{30}{x+2} + \dfrac{30}{x-2} = 1$ 4) $30(x+2) - 30(x-2) = 6$

Ответ: ________________.

5. Составьте уравнение по условию задачи. «На складе имеется несколько мешков с яблоками и несколько ящиков с грушами. Мешков на 10 больше, чем груш в одном ящике, ящиков на 5 меньше, чем яблок в одном мешке, а яблок в мешке на 7 меньше, чем всего мешков. Сколько груш в каждом ящике, если всего груш на 120 меньше, чем яблок?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество груш в одном ящике.

1) $(x+3)(x+10) - x(x+5) = 120$

2) $(x+3)(x+10) - x(x-2) = 120$

3) $(x+10)(x-2) - x(x+3) = 120$

4) $x(x+10) - (x+3)(x-2) = 120$

Ответ: ________________.

6. Составьте систему уравнений по условию задачи. «На промежутке 24 м переднее колесо трактора делает на 4 оборота больше заднего. Если длину окружности переднего колеса увеличить на 0,6 м, то на том же промежутке переднее колесо сделает на 2 оборота больше заднего. Найдите в метрах длину окружности заднего колеса трактора».

В ответе укажите номер системы уравнений, если буквой x обозначена длина окружности переднего колеса (в м), а буквой y — длина окружности заднего колеса (в м).

1) $\begin{cases} \dfrac{24}{y} - \dfrac{24}{x} = 4, \\ \dfrac{24}{y + 2 \cdot 0{,}6} - \dfrac{24}{x} = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{24}{x} - \dfrac{24}{y} = 4, \\ \dfrac{24}{x} - \dfrac{24}{y + 0{,}6} = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y = 24, \\ 2(x + 0{,}6) - 2x = 4y \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{24}{x} - \dfrac{24}{y} = 4, \\ \dfrac{24}{x + 0{,}6} - \dfrac{24}{y} = 2; \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Имеется два раствора, первый содержит 15 % соли. В результате смешивания 10 литров первого раствора с 6 литрами второго получили раствор, содержащий 20 % соли. Сколько процентов соли содержал второй раствор?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено процентное содержание соли во втором растворе.

1) $\dfrac{15 \cdot 10 + \dfrac{x}{100} \cdot 6}{6} = \dfrac{20}{100}$

2) $\dfrac{0{,}15 \cdot 10 + \dfrac{x}{100} \cdot 6}{10 + 6} = \dfrac{20}{100}$

3) $\dfrac{15 \cdot 10 + x \cdot 6}{10 + 6} = \dfrac{20}{100}$

4) $\dfrac{0{,}15 \cdot 10 + \dfrac{x}{100} \cdot 6}{10 + 6} = 20$

Ответ: ________________.

8. Составьте выражение, которое является ответом на вопрос задачи. «Работая самостоятельно, первый рабочий может выполнить заказ за некоторое число часов больше двух, второй — также за определённое число часов, которое также больше двух. Сколько часов потребуется двум рабочим на выполнение такого же заказа, если сначала в течение 2 часов первый рабочий будет выполнять заказ самостоятельно, а затем подключится второй?»

Какое из выражений является ответом на вопрос задачи, если через x обозначено количество часов, необходимое первому рабочему на самостоятельное выполнение заказа, а через y — количество часов, необходимое второму рабочему?

1) $2 + \dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{x + y}$

2) $2 + \dfrac{1}{x + y}$

3) $2 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}$

4) $2 + \dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}$

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Составьте уравнение по условию задачи. «Из алюминиевого прямоугольника площадью 120 см^2 сделали коробку без крышки, вырезав по углам одинаковые квадраты и загнув края вверх (см. рис. 163). Чему равны стороны вырезанного квадрата, если размеры дна коробки оказались равными 6 см и 4 см?»

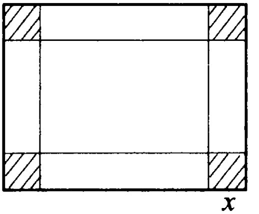


Рис. 163.

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена длина стороны вырезанного квадрата (в см).

1) $(6+x)(4+x)=120$

2) $(6-2x)(4-2x)=120$

3) $(6+2x)(4+2x)=120$

4) $6\cdot 4+4x^2=120$

Ответ: ______________.

2. Составьте уравнение по условию задачи. «Имеющийся у Винни Пуха запас мёда он съест за 10 дней. Если он будет есть в день на две порции больше, то он опустошит свой запас за 8 дней. Запас из скольких порций имеется у Винни Пуха?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначено количество порций, составляющих запас Винни Пуха.

1) $10x=8(x+2)$

2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=2$

3) $\frac{x}{10}-\frac{x}{8}=2$

4) $\frac{x}{10}=\frac{x}{8}-2$

Ответ: ______________.

3. Составьте систему уравнений по условию задачи. «Прямоугольный участок земли, периметр которого 252 м, обнесён забором. Площадь участка 2673 м^2. Найдите длины сторон участка».

В ответе укажите номер системы уравнений, если буквой a обозначена ширина участка (в метрах), а буквой b — его длина (в метрах).

1) $\begin{cases} \dfrac{252}{a} = b, \\ \dfrac{2673}{a} + b = 252 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(a+b) = 252, \\ ab = 2673 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a+b = 2673, \\ ab = 252 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a+b = 252, \\ ab = 2673 \end{cases}$

Ответ: ________________.

4. Составьте уравнение по условию задачи. «Расстояние между пунктами A и B по реке равно 2 км. На путь из A в B и обратно моторная лодка затратила $\frac{11}{30}$ часа. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой x обозначена собственная скорость лодки (в км/ч).

1) $2(x-1) + 2(x+1) = \dfrac{11}{30}$ 2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{11}{30}$

3) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{11}{30}$ 4) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{11}{30}$

Ответ: ________________.

5. Составьте уравнение по условию задачи. «На полке в продуктовом магазине имеется несколько коробок с печеньем и несколько пакетов с пряниками. Коробок на 4 больше, чем пряников в одном пакете, пакетов на 3 меньше, чем печений в одной коробке, а пряников в пакете на 1 больше, чем пакетов с пряниками. Сколько печений в каждой коробке, если всего печений на 134 больше, чем пряников?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой p обозначено количество печений в одной коробке.

1) $p(p-2) - (p-2)(p+3) = 134$
2) $(p-2)(p+2) - p(p-3) = 134$
3) $p(p+2) - (p-2)(p-3) = 134$
4) $p(p+4) - (p+1)(p-3) = 134$

Ответ: ________________.

6. Составьте систему уравнение по условию задачи. «На промежутке 72 м переднее колесо трактора делает на 16 оборотов больше заднего. Если длину окружности переднего колеса увеличить на 0,2 м, то на промежутке 48 м переднее колесо сделает на 4 оборота больше заднего. Найдите в метрах длину окружности заднего колеса трактора».

В ответе укажите номер системы уравнений, если буквой x обозначена длина окружности переднего колеса, а буквой y — длина окружности заднего колеса.

1) $\begin{cases} 16y = 72, \\ 2(x+0{,}2) - 4x = 16y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{72}{y} - \dfrac{72}{x} = 16, \\ \dfrac{48}{x+0{,}2} - \dfrac{48}{y} = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{72}{x} - \dfrac{72}{y} = 16, \\ \dfrac{48}{y+0{,}2} - \dfrac{48}{x} = 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{72}{x} - \dfrac{72}{y} = 16, \\ \dfrac{48}{x+0{,}2} - \dfrac{48}{y} = 4 \end{cases}$

Ответ: ________________.

7. Составьте уравнение по условию задачи. «Имеется два раствора, первый содержит 12 % соли. В результате смешивания 8 литров первого раствора с 18 литрами второго получили раствор, содержащий 10 % соли. Сколько процентов соли содержал второй раствор?»

В ответе укажите номер уравнения, если буквой z обозначено процентное содержание соли во втором растворе.

1) $\dfrac{12 \cdot 8 + z \cdot 6}{8+18} = \dfrac{10}{100}$ 2) $\dfrac{0{,}12 \cdot 8 + \dfrac{z}{100} \cdot 18}{8+18} = 10$

3) $\dfrac{12 \cdot 8 + \dfrac{z}{100} \cdot 18}{6} = \dfrac{10}{100}$ 4) $\dfrac{0{,}12 \cdot 8 + \dfrac{z}{100} \cdot 18}{8+18} = \dfrac{10}{100}$

Ответ: ________________.

8. Составьте выражение, которое является ответом на вопрос задачи. «Работая самостоятельно, первый рабочий может выполнить заказ за некоторое число часов больше шести, второй — также за определённое число часов, которое также больше шести. Сколько часов потребуется на изготовление этого количества деталей, если сначала в течение 1 часа первый рабочий будет выполнять заказ самостоятельно, затем 2 часа будут работать совместно, а оставшуюся часть будет доделывать второй рабочий?»

Какое из выражений является ответом на вопрос задачи, если через x обозначено количество часов, необходимое первому рабочему на самостоятельное выполнение заказа, а через y — количество часов, необходимое второму рабочему?

1) $2+\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x+y}+y$

2) $3+y\left(1-\frac{1}{x}-\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\right)$

3) $\dfrac{1}{2x+y}$

4) $1+\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}}$

Ответ: ________________.

§ 18. Алгебра. Текстовые задачи

В предыдущем параграфе рассматривался вопрос составления математической модели по условию задачи (на этом этапе важно следить за «единообразием» всех единиц измерения: например, если время одной величины решено измерять в часах, то и другие величины, относящиеся к категории «время», следует измерять в часах, а не в минутах или секундах).

Следующим важным этапом после составления математической модели является решение полученного уравнения или полученной системы уравнений и неравенств.

При выборе ответа необходимо помнить о тех ограничениях, которым должны удовлетворять переменные: например, время в часах, масса в килограммах, цена в рублях и т. п. должны выражаться неотрицательными числами, количество предметов должно быть целым и неотрицательным, собственная скорость лодки, движущейся против течения, должна быть больше скорости течения (иначе лодку будет сносить по течению) и т. д.

Также не следует забывать о единицах измерения и при записи ответа. Если в вопросе задачи явно указывается единица измерения, в которой надо дать ответ, то саму единицу измерения в ответе указывать не надо. В остальных случаях единицу измерения надо приписывать к ответу, так как, например, скорость в км/ч и скорость в м/с выражается разными числами. При этом важно помнить, что в заданиях с кратким ответом на ОГЭ все ответы следует давать без единицы измерения (они сформулированы соответствующим образом). В заданиях с развёрнутым ответом на ОГЭ единица измерения может в ответе присутствовать.

Вариант с решениями

1. Несколько килограммов сплава, содержащего 6 процентов меди, сплавили с такой же массой сплава, содержащего 3 процента меди. Определите концентрацию меди в получившемся сплаве (в процентах).

Решение. Пусть взято m кг первого сплава, тогда второго сплава взято также m кг. В первом сплаве — $\frac{6}{100}m$ кг меди, а во втором — $\frac{3}{100}m$ кг меди. После объединения масса сплава станет равной

$2m$ кг, а меди в нём $\left(\frac{6}{100}m + \frac{3}{100}m\right)$ кг. Искомая концентрация равна

$$\frac{\frac{6}{100}m + \frac{3}{100}m}{2m} \cdot 100\,\% = 4{,}5\,\%.$$

Ответ: 4,5.

2. В двух ящиках было одинаковое количество фломастеров. Когда из первого ящика во второй переложили 6 фломастеров, тогда во втором стало в 3 раза больше фломастеров, чем в первом. Сколько фломастеров было в каждом ящике первоначально?

Решение. Пусть изначально в каждом ящике n фломастеров, тогда после перекладывания в первом ящике стало $(n - 6)$ фломастеров, а во втором $(n + 6)$. По условию должно выполняться равенство $n + 6 = 3(n - 6)$, отсюда $2n = 24$, $n = 12$.

Ответ: 12.

3. С трёх грядок собрали 160 кг огурцов. С первой грядки собрали в 3 раза больше, чем со второй, а с третьей — на 54 кг больше, чем со второй. Сколько килограммов огурцов собрали с первой грядки?

Решение. Пусть со второй грядки собрали x кг огурцов.
Тогда $3x$ кг собрали с первой грядки, а $(x + 54)$ кг собрали с третьей грядки. По условию задачи с трёх грядок собрали 160 кг.
Составим уравнение:

$3x + x + x + 54 = 160,\ 5x = 106,\ x = 21{,}2.$

21,2 кг огурцов собрали со второй грядки; $21{,}2 \cdot 3 = 63{,}6$ кг — собрали с первой грядки.

Ответ: 63,6.

4. Две гири одинаковой массы и три гантели одинаковой массы вместе весили 47 кг, а три таких же гири и две гантели — 58 кг. Сколько килограммов весят одна гиря и пять гантелей?

Решение. Пусть x кг весит гиря $(x > 0)$, y кг весит гантель $(y > 0)$. Тогда 2 гири весят $2x$ кг, а 3 гантели весят $3y$ кг; $(2x + 3y)$ кг весят 2 гири и 3 гантели, что по условию задачи составляет 47 кг.

Следовательно, 1-е уравнение: $2x + 3y = 47$.

Так как 3 гири весят $3y$ кг, 2 гантели весят $2y$ кг, то $(3x + 2y)$ кг — весят 3 гири и 2 гантели.

Следовательно, 2-е уравнение: $3x + 2y = 58$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$\begin{cases} 2x + 3y = 47, \\ 3x + 2y = 58; \end{cases}$ $\begin{cases} 6x + 9y = 141, \\ 6x + 4y = 116. \end{cases}$ Вычтем из первого уравнения второе, получим $5y = 25$, $y = 5$. Из уравнения $2x + 3y = 47$, $2x = 47 - 5 \cdot 3 = 32$, $x = 16$.

Значит, гиря весит 16 кг, а гантель — 5 кг. Одна гиря и пять гантелей весят $16 + 5 \cdot 5 = 41$ кг.

Ответ: 41.

5. Двое рабочих вместе выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней может выполнить всю работу первый рабочий, трудясь самостоятельно?

Решение. Примем объём работы за единицу. Пусть за x дней выполнит всю работу первый рабочий ($x > 0$), за y дней — второй ($y > 0$).

$\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего,

$\frac{1}{y}$ — производительность второго рабочего,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ — производительность двух рабочих вместе.

По условию рабочие вместе выполняют всю работу за 5 дней, значит, общая производительность — $\frac{1}{5}$.

Следовательно, первое уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

$\frac{2}{x}$ — увеличенная вдвое производительность первого рабочего,

$\frac{1}{2y}$ — уменьшенная вдвое производительность второго рабочего,

$\frac{2}{x} + \frac{1}{2y}$ — изменённая производительность двух рабочих вместе.

По условию рабочие вместе выполнили бы всю работу за 4 дня, значит, $\frac{1}{4}$ — была бы их общая производительность.

Следовательно, второе уравнение: $\frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{2}{x}-\frac{2}{y}=-\frac{2}{5}, \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ -\frac{3}{2y}=-\frac{3}{20}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}, \\ y=10; \end{cases} \quad \begin{cases} x=10, \\ y=10. \end{cases}$$

Первый рабочий может выполнить всю работу за 10 дней.

Ответ: 10.

6. Расстояние между посёлками Весенний и Летний по реке — 72 км. Катер проплыл от Весеннего до Летнего и вернулся обратно, затратив на весь путь 7 часов. Найдите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки 3 км/ч.

Решение. Обозначим собственную скорость катера за x км/ч ($x > 3$, иначе катер не смог бы двигаться против течения). Составим таблицу.

	v **(км/ч)**	***S*** **(км)**	***t*** **(ч)**
по течению	$x+3$	72	$\frac{72}{x+3}$
против течения	$x-3$	72	$\frac{72}{x-3}$

Общее время равно $\frac{72}{x+3}+\frac{72}{x-3}$, по условию это время равно 7 часам.

Составим и решим уравнение $\frac{72}{x+3}+\frac{72}{x-3}=7$;

$\frac{72(x-3)+72(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{7(x^2-9)}{(x-3)(x+3)}$; $7x^2-144x-63=0$;

$x_{1,2}=\frac{72\pm\sqrt{5625}}{7}=\frac{72\pm 75}{7}$. Учитывая, что $x>0$, получим единственное значение $x=21$.

Ответ: 21.

7. Расстояние, равное 1008 км, легковой автомобиль прошёл на 12 часов быстрее автобуса. За время, которое требуется автобусу на прохождение 8 км, легковой автомобиль успевает пройти 14 км. Найдите скорость легкового автомобиля и автобуса (в км/ч).

Решение. Обозначим скорость легкового автомобиля через x км/ч, а скорость автобуса — через y км/ч. По смыслу задачи $x > 0$ и $y > 0$. Тогда 1008 км легковой автомобиль пройдёт за $\frac{1008}{x}$ ч, а автобус за $\frac{1008}{y}$ часов. Согласно условию $\frac{1008}{y} - \frac{1008}{x} = 12$. С другой стороны, на прохождение 8 км автобусу потребуется $\frac{8}{y}$ часов, а на прохождение 14 км автомобилю потребуется $\frac{14}{x}$ часов. Из условия следует, что $\frac{8}{y} = \frac{14}{x}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1008}{y} - \frac{1008}{x} = 12, \\ \frac{8}{y} = \frac{14}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{84}{y} - \frac{84}{x} = 1, \\ \frac{4}{y} = \frac{7}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{84x - 84y}{xy} = \frac{xy}{xy}, \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 84 \cdot \frac{7}{4}y - 84y = \frac{7}{4}y \cdot y, \\ x = \frac{7}{4}y; \end{cases} \quad \begin{cases} 63y = \frac{7}{4}y^2, \\ x = \frac{7}{4}y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 36, \\ x = 63. \end{cases}$$

Ответ: 63; 36.

8. Насос может выкачать из бассейна $\frac{3}{7}$ воды за $10\frac{1}{2}$ мин. Проработав 7 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в м^3), если после остановки насоса из бассейна осталось выкачать ещё 40 м^3 воды.

Решение. Обозначим объём бассейна через v м^3. Тогда за 1 минуту насос выкачивает $\frac{\frac{3}{7}v}{10\frac{1}{2}} = \frac{2}{49}v$ м. Следовательно, за 7 мин насос выкачивает $7 \cdot \frac{2}{49}v = \frac{2}{7}v$. Значит, останется выкачать $v - \frac{2}{7}v = \frac{5}{7}v$, из условия следует, что $\frac{5}{7}v = 40$, $v = 56$ м^3.

Ответ: 56.

Вариант № 1

1. Несколько литров 8-процентного раствора соли смешали с тем же объёмом 1-процентного раствора. Определите концентрацию получившейся смеси (в процентах).

Ответ: ________________ .

2. В двух пачках было одинаковое количество тетрадей. Когда из первой пачки во вторую переложили 18 тетрадей, то во второй стало в 4 раза больше тетрадей, чем в первой. Сколько тетрадей было в каждой пачке первоначально?

Ответ: ________________ .

3. В корзине лежали яблоки, груши и апельсины, всего 59 штук. Яблок было в 3 раза больше, чем груш, а апельсинов — на 25 штук меньше, чем яблок. Сколько яблок было в корзине?

Ответ: ________________ .

4. Двое рабочих вместе выполнили всю работу за 16 рабочих дней. Если бы первый работал в два раза быстрей, а второй в 3 раза медленнее, то сроки на выполнение работы не изменились бы. За сколько дней мог бы выполнить всю работу первый рабочий, работая самостоятельно со своей обычной скоростью?

Ответ: ________________ .

5. На один костюм и четыре одинаковых платья пошло 11 м ткани, а на три таких же костюма и два таких же платья — 13 м. Сколько метров ткани потребуется на одно платье и на один костюм?

Ответ: ________________ .

6. Расстояние между пунктами А и Б по реке 24 км. Катер проплыл от пункта А до пункта Б и вернулся обратно, затратив на весь путь 3,5 часа. Найдите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ________________ .

7. Расстояние, равное 960 км, первый автомобиль проходит на 2 часа быстрее второго. За время, которое требуется первому автомобилю на прохождение 60 км, второй успевает пройти 50 км. Найдите скорость каждого автомобиля (в км/ч).

Ответ: ________________ .

8. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за $7\frac{1}{2}$ мин. Проработав 9 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в м^3), если после остановки насоса из бассейна осталось выкачать ещё 20 м^3 воды.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Несколько литров 4-процентного раствора соли смешали с тем же объёмом 9-процентного раствора. Определите концентрацию получившейся смеси (в процентах).

Ответ: ________________.

2. В двух пачках было одинаковое количество книг. Из первой пачки переложили во вторую 20 книг, после чего книг во второй пачке стало в 3 раза больше, чем в первой. Сколько книг было в каждой пачке первоначально?

Ответ: ________________.

3. После посещения рынка у хозяйки в сумке были яблоки, мандарины и апельсины. Всего 56 штук. Яблок было в 2 раза больше, чем апельсинов, а мандаринов — на 8 штук больше, чем апельсинов. Сколько штук мандаринов в сумке у хозяйки?

Ответ: ________________.

4. Двое рабочих вместе выполнили всю работу за 24 рабочих дня. Если бы второй рабочий работал в 1,5 раза быстрее, им бы потребовалось на 4 рабочих дня меньше. За сколько дней мог бы выполнить всю работу первый рабочий, работая самостоятельно?

Ответ: ________________.

5. На два одинаковых костюма и три одинаковых платья пошло 12 м ткани, а на три таких же костюма и два таких же платья — 13 метров ткани. Сколько метров ткани потребуется на два платья и один костюм?

Ответ: ________________.

6. Катер прошёл 12 км по течению реки и 2 км против течения. На весь путь он потратил 1 час 20 мин. Определите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: ________________.

7. Расстояние, равное 630 км, автомобиль проезжает на 2 часа быстрее мотоцикла. За время, которое потребуется автомобилю на прохождение 45 км, мотоцикл успеет проехать 35 км. Найдите скорости мотоцикла и автомобиля (в км/ч).

Ответ: ________________.

8. Насос может выкачать из бассейна треть воды за 15 мин. Проработав 18 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в $м^3$), если после остановки насоса из бассейна осталось выкачать ещё 60 $м^3$ воды.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Бабушка слепила вареники с картошкой и с творогом. Причём вареников с творогом было на 12 штук больше, чем вареников с картошкой. Сколько было вареников с картошкой, если они составляли 80 % от вареников с творогом?

Ответ: ________________.

2. На одну и ту же сумму денег можно купить 3 одинаковых карандаша и 4 одинаковых стирательных резинки или 5 таких же карандашей и одну такую же резинку. Сколько процентов составляет стоимость четырёх карандашей от общей стоимости четырёх карандашей и девяти резинок?

Ответ: ________________.

3. Имеются два сплава, в первом из которых содержится 10 %, а во втором — 36 % свинца. Сколько килограммов второго сплава необходимо сплавить с 60 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 20 % свинца?

Ответ: ________________.

4. Расстояние между пристанями на реке — 96 км. Матвей Николаевич на моторной лодке проплыл от одной пристани до другой и вернулся обратно, затратив на весь путь 10 ч. Какова скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость моторной лодки равна 20 км/ч?

Ответ: ________________.

5. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 8 ч. За сколько часов может вспахать поле каждая бригада, работая самостоятельно, если второй бригаде на это необходимо на 12 ч больше, чем первой?

Ответ: ________________.

6. Автобус ехал по трассе от пункта A до пункта B со скоростью 80 км/ч. Выехав обратно, он 30 км ехал со скоростью, вдвое меньшей первоначальной. Затем он увеличил скорость на 50 км/ч и доехал до пункта A, не меняя более скорости. Найдите расстояние (в км) от пункта A до пункта B, если на обратный путь водитель затратил на $\frac{5}{18}$ часа меньше.

Ответ: ________________ .

7. Разность двух натуральных чисел равна 8. Сумма этих чисел, сложенная с их произведением, равна 179. Найдите эти числа.

Ответ: ________________ .

8. В первый день мастер сделал 25 деталей. В каждый следующий рабочий день он делал на 3 детали больше, чем в предыдущий. Укажите количество деталей, сделанных мастером в 27-й рабочий день.

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Книг по математике на 5 больше, чем книг по физике, которые составляют 40 % от общего числа книг по математике и физике. Сколько всего книг?

Ответ: ________________ .

2. На одну и ту же сумму денег можно купить 5 одинаковых тетрадей и 2 одинаковых маркера или 9 таких же маркеров и две такие же тетради. Сколько процентов составляет стоимость пяти тетрадей от общей стоимости пяти тетрадей и семи маркеров?

Ответ: ________________ .

3. Имеются два раствора, в первом из которых содержится 14 % некоторого вещества, а во втором — 8 %. Сколько литров первого сплава необходимо долить к 40 л второго раствора, чтобы получить раствор, содержащий 10 % раствора?

Ответ: ________________ .

4. Расстояние между пристанями на реке 18 км. Николай Матвеевич на моторной лодке проплыл от одной пристани до другой и вернулся обратно, затратив на весь путь 2 ч 30 мин. Какова скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость моторной лодки равна 15 км/ч?

Ответ: ________________ .

5. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 2,4 ч. За сколько часов может вспахать поле каждая бригада, работая самостоятельно, если второй бригаде на это необходимо на 2 ч меньше, чем первой?

Ответ: ________________.

6. Автомобиль ехал по трассе от пункта A до пункта B со скоростью 60 км/ч. Выехав обратно, он 60 км ехал со скоростью в 1,5 раза меньше первоначальной, потом он увеличил скорость на 5 км/ч и доехал до пункта A, не меняя более скорости. Найдите расстояние (в км) от пункта A до пункта B, если на обратный путь водитель затратил на 1,5 часа больше.

Ответ: ________________.

7. Разность двух целых чисел равна 12. Сумма этих чисел, сложенная с частным от деления большего числа на меньшее, равна 24. Найдите эти числа.

Ответ: ________________.

8. В угловом секторе стадиона в первом ряду 7 мест, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в 26-м ряду?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. На клумбе растут ромашки, тюльпаны и розы. Причём ромашек в 2 раза больше, чем тюльпанов, а роз на 14 меньше, чем ромашек. Сколько ромашек растёт на клумбе, если общее количество цветов равно 56?

Ответ: ________________.

2. Одна из сторон прямоугольника на 4 больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 96.

Ответ: ________________.

3. От пристани вниз по реке отправляется плот. Через два часа от той же пристани отправляется катер, собственная скорость которого в 3 раза больше скорости течения. Сколько часов потребуется катеру, чтобы догнать плот и вернуться к пристани?

Ответ: ________________.

4. Первоначально было 5 л раствора соли, потом к нему добавили 2 л другого раствора соли, после чего концентрация соли понизилась на 2% по сравнению с первоначальной. Найдите, на сколько процентов концентрация первого раствора больше концентрации второго.

Ответ: ________________ .

5. Два автобуса одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно. После их встречи первый автобус прибыл в пункт B через 4,5 часа, а второй прибыл в пункт A через 2 часа. Во сколько раз скорость первого автобуса меньше скорости второго?

Ответ: ________________ .

6. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

Ответ: ________________ .

7. Владислав, Вячеслав и Станислав выполняют некоторую работу. Если бы работали только Владислав и Вячеслав, то работа была бы выполнена за 4 дня. Если бы работали Владислав и Станислав, то работа была бы выполнена за 6 дней. Если бы работали только Вячеслав и Станислав, то работа была бы выполнена за 4 дня. За сколько дней рабочие выполнят всю работу, если будут трудиться втроём?

Ответ: ________________ .

8. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 71 км/ч, проезжает мимо идущего параллельно путям со скоростью 4 км/ч навстречу ему пешехода за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. В магазине продаются лампы накаливания мощностью 25, 40 и 60 Вт. Ламп мощность 25 Вт в 4 раза меньше, чем ламп мощностью 60 Вт, а ламп мощностью 40 Вт на 22 меньше, чем ламп мощностью 60 Вт. Сколько в магазине продаётся ламп накаливания мощностью 60 Вт, если общее число ламп в продаже равно 50?

Ответ: ________________ .

2. Один из катетов прямоугольного треугольника на 6 меньше другого. Найдите катеты, если площадь треугольника равна 56.

Ответ: ________________ .

3. От пристани вниз по реке отправляется плот. Через полтора часа от той же пристани отправляется катер, который догоняет плот, а потом разворачивается и возвращается к той же пристани, затратив на всё 1 час. Во сколько раз собственная скорость катера превышает скорость течения?

Ответ: ________________ .

4. Первоначально было 8 л раствора соли, потом к нему добавили 4 л другого раствора соли, после чего концентрация соли повысилась на 3 % по сравнению с первоначальной. Найдите, на сколько процентов концентрация второго раствора больше концентрации первого.

Ответ: ________________ .

5. Два автомобиля одновременно выехали навстречу друг другу из пунктов A и B соответственно. После их встречи первый прибыл в пункт B через 1 час, а второй прибыл в пункт A через 15 минут. Во сколько раз скорость первого автомобиля меньше скорости второго?

Ответ: ________________ .

6. Дыня на $\frac{3}{4}$ кг тяжелее $\frac{3}{4}$ этой же дыни. Какова масса дыни (в кг)?

Ответ: ________________ .

7. Трое рабочих выполняют некоторую работу. Если бы работали только первый и второй рабочий или только первый и третий, то работа была бы выполнена за 3 дня. Если бы работали только второй и третий рабочие, то работа была бы выполнена за шесть дней. За сколько дней рабочие выполнят всю работу, если будут трудиться втроём?

Ответ: ________________ .

8. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 83 км/ч, проезжает мимо идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 3 км/ч пешехода за 72 секунды. Найдите длину поезда в метрах.

Ответ: ________________ .

§ 19. Алгебра. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Основные сведения

Элементы комбинаторики

Комбинаторика — это раздел математики, в котором рассматриваются задачи о подсчёте количеств различных комбинаций (конфигураций), образованных элементами некоторых множеств.

Одними из основных правил комбинаторики являются **правило суммы** и **правило произведения**.

Например, если на столе лежат 20 различных тетрадей в линию и 30 различных тетрадей в клетку, то одну из этих тетрадей можно выбрать $20 + 30 = 50$ способами. Вообще, если различных объектов одного типа насчитывается n штук, а другого типа — m штук и нет объектов, относящихся к обоим типам одновременно, то один из этих объектов можно выбрать $n + m$ способами. Указанное правило называется **правилом суммы**.

Если в вазе лежат 6 красных яблок и 8 зелёных, то пару яблок, первое из которых красное, а второе — зелёное, можно выбрать $6 \cdot 8 = 48$ способами. Вообще, если объектов типа A насчитывается n штук, а объектов типа B — m штук и нет объектов, относящихся к обоим типам одновременно, то пару объектов, первый из которых имеет тип A, а второй — тип B, можно выбрать $n \cdot m$ способами. Указанное правило называется **правилом произведения**.

Случайные события и их вероятности

Экспериментом, опытом или испытанием называют всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление. Мы будем рассматривать эксперименты, в результате которых наступает один из равновозможных **элементарных исходов**. Исходы считают **равновозможными**, если нет оснований полагать, что один из них является более возможным, чем другой.

Например, при бросании игрального кубика возможны 6 равновозможных исходов, соответствующих количеству выпавших очков.

Случайным называется **событие**, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти. Некоторые элементарные исходы означают наступление какого-то события (благоприятствуют этому событию), а некоторые — нет.

Например, при бросании игрального кубика событие «выпало чётное число очков» случайно. Ему благоприятствуют такие элементарные исходы, как выпадение 2, 4 и 6.

Событие называют **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдёт в этом опыте. Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно в этом опыте произойти не может.

Например, при бросании игрального кубика событие «выпало не более шести очков» достоверно, а событие «выпало более шести очков» невозможно.

Два события называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте, и **несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Например, при бросании игрального кубика события «выпало менее 5 очков» и событие «выпало более 3 очков» совместны (если выпадет 4 очка, то наступят оба этих события одновременно). События «выпало менее 3 очков» и «выпало более 5 очков» несовместны.

Два события называются **противоположными**, если в результате эксперимента обязательно наступает одно из них и не наступает второе. Событие, противоположное к событию A, обозначается $\bar{A}$.

Например, при бросании игрального кубика событие «выпало чётное число очков» и событие «выпало нечётное число очков» противоположны.

Суммой, или **объединением**, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается $A + B$ (или $A \cup B$).

Например, если при бросании игрального кубика обозначить через A событие «выпало чётное число очков», через B — событие «выпало число очков, кратное 3», то их объединением будет событие $A \cup B$ — «число выпавших очков чётно или делится на 3», то есть событие, которому благоприятствуют такие элементарные исходы, как выпадение 2, 3, 4, 6. В данном случае союз «или» понимается в неразделяющем смысле, то есть возможно выпадение числа очков одновременно и чётного, и кратного 3 (элементарный исход «выпадение 6»).

Произведением, или **пересечением**, двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через AB (или $A \cap B$).

Например, если при бросании игрального кубика рассмотреть события A — «выпало чётное число очков» и B — «выпало число очков, кратное 3», то их пересечением будет событие $A \cap B$ — «число выпавших очков чётно и делится на 3», то есть событие, которому благоприятствует единственный элементарный исход — выпадение 6.

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B. Разность событий принято обозначать $A - B$ (или $A \setminus B$).

Например, если при бросании игрального кубика рассмотреть события A — «выпало чётное число очков» и B — «выпало число очков, кратное 3», то событие $A \setminus B$ — «число выпавших очков чётно и не делится на 3», то есть это событие, которому благоприятствуют такие элементарные исходы, как выпадение 2 и 4.

Вероятность события

Классическое определение вероятности. **Вероятность события** A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где n — число всех равновозможных элементарных исходов опыта, m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Например, рассмотрим эксперимент, заключающийся в подбрасывании игрального кубика. Как уже отмечалось, этот эксперимент имеет 6 равновозможных исходов. Пусть A — «выпало число очков больше 4». Этому событию благоприятствуют такие элементарные исходы, как выпадение 5 и 6, то есть 2 элементарных исхода. Тогда $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Если события A и B несовместны, то вероятность наступления хотя бы одного из них определяется формулой $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Снова рассмотрим эксперимент, заключающийся в подбрасывании игрального кубика. Пусть A — событие «выпало число очков больше 4», B — «выпало число очков меньше 4». Событию A благоприятствуют такие исходы, как выпадение 5 и выпадение 6 (2 исхода), событию B — такие исходы, как выпадение 1, 2 и 3 (3 исхода). Тогда $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. События A и B несовместны, событие $A \cup B$ — это событие «выпало больше 4 или меньше 4 очков». $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Если события A и B совместны, то вероятность наступления хотя бы одного из них определяется формулой

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Например, пусть вероятность того, что среди заданий контрольной работы будет текстовая задача (событие A), равна 0,4, вероятность того, что будет задание на нахождение среднего арифметического чисел (событие B), равна 0,1, а вероятность того, что будет и текстовая задача, и задание на вычисление среднего арифметического (событие $A \cap B$), равна 0,05. Событие $A \cup B$ заключается в том, что на контрольной будет хотя бы одно из следующих заданий: текстовая задача, задание на нахождение среднего арифметического чисел. Тогда $P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}495$.

События A и B называются **независимыми**, если наступление или ненаступление одного из них не влияет на вероятность наступления второго. В этом случае $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Например, если в доме установлены 2 независимых лифта, каждый из которых может быть неисправен с вероятностью 0,1, то вероятность того, что они оба неисправны одновременно, равна $0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

Вероятность события $\bar{A}$, противоположного к событию A, находится по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Например, если вероятность того, что лифт неисправен, равна 0,1, то вероятность противоположного события (вероятность того, что лифт исправен) равна $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Статистика

Статистика — это отрасль знаний, изучающая общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых данных. Математическая статистика занимается в основном анализом уже полученных данных.

Данные могут быть представлены графически, в виде ряда данных или в виде таблиц.

Если проводится серия измерений или серия идентичных экспериментов, то некоторое событие A может наступить в части из них. **Относительная частота** события A определяется формулой $W(A) = m/n$, где n — число всех проведённых опытов, m — число опытов, в которых появилось событие A,

Пусть результатом некоторого эксперимента (или измерения) является число, и пусть проводится серия идентичных экспериментов (измерений).

Рядом данных (или **рядом распределения**) называют последовательность результатов экспериментов (измерений), перечисленных в некотором порядке. Каждый из результатов называется **вариантой**.

Кратность варианты — количество её вхождений в ряд данных. Иногда кратность варианты называют её **абсолютной частотой**.

Например, для ряда данных 2, 3, 4, 5, 5, 14, 3 объём равен 7, абсолютная частота варианты «3» равна 2.

Числовые характеристики данных

Объём ряда данных — количество всех элементов в этом ряду. Относительная частота варианты показывает долю этой варианты в ряду распределения. В терминах ряда данных формула её нахождения примет вид

$$\text{относительная частота варианты} = \frac{\text{кратность варианты}}{\text{объём ряда данных}}.$$

Например, для ряда данных 2, 3, 4, 5, 5, 14, 3, рассмотренного выше, относительная частота варианты «3» равна $\frac{2}{7}$.

Размах ряда данных — разность между максимальной и минимальной вариантами этого ряда данных.

Мода ряда данных — варианта, которая в ряде данных встречается чаще других.

Например, для ряда данных 2, 3, 4, 5, 5, 14, 3 размах равен $14-2 = 12$. У этого ряда имеется 2 моды: 3 и 5.

Медиана ряда данных — это центральное число в упорядоченном ряду данных, если в ряду нечётное количество чисел, или полусумма двух центральных, если в ряду чётное количество чисел.

Для нахождения медианы распределения необходимо:

1. Упорядочить ряд распределения по возрастанию или по убыванию: $a_1, a_2, \ldots$

2. Если объём измерения нечётный, то есть $2n+1$, то получим следующую ситуацию:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n \text{ значений}}, a_{n+1}, \underbrace{a_{n+2}, \ldots, a_{2n+1}}_{n \text{ значений}}$$

В этом случае медианой является число a_{n+1}.

3. Если объём измерения чётный, то есть $2n$, то имеем: $\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n \text{ значений}}, \underbrace{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}}_{n \text{ значений}}$. В этом случае медианой является число $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

Например, медианой ряда 2, 3, 3, 4, 4, 5, 9 равна 4, а медиана ряда 1, 2, 7, 16 равна $\frac{2+7}{2} = 4{,}5$.

Среднее ряда (среднее арифметическое) — сумма всех чисел ряда, делённая на их количество.

Вариант с решениями

1. У Андрея 4 книги по математике, а у Максима — 3. Сколькими способами они могут обменять 1 книгу одного на 1 книгу другого?

1) 18 2) 12 3) 9 4) 4

Решение. Чтобы мальчики смогли обменять одну книгу одного на одну книгу другого, каждому из них нужно выбрать из своих книг ровно одну книгу для обмена. Определим, сколькими способами это может сделать каждый из них. Андрей может выбрать книгу 4 способами, а Максим — 3. По правилу произведения получаем, что всего $3 \cdot 4 = 12$ вариантов.

Ответ: 12.

2. Сколькими способами можно выбрать 2 карты из колоды в 36 карт с учётом порядка выбора?

Решение. Первую карту можно выбрать 36 способами, вторую — 35. То есть всего $36 \cdot 35 = 1260$ вариантов, которые учитывают порядок.

Ответ: 1260.

3. В ящике стола лежат 20 упаковок изоляционной ленты: из них 8 — синего цвета, 5 — красного, 2 — жёлтого, 3 — чёрного, а остальные — белого. Электрик наудачу взял одну упаковку изоленты. Какова вероятность, что это белая изолента?

Решение. На столе лежат $20 - 8 - 5 - 2 - 3 = 2$ упаковки изоляционной ленты белого цвета. Эксперимент «случайного выбора одной упаковки изоленты» имеет 20 равновозможных исходов (по числу упаковок изоляционной ленты). Однако из этих 20 исходов лишь 2 благоприятствуют событию «взята белая изоляционная лента». По классическому определению вероятности, искомая вероятность равна $\frac{2}{20} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

4. В среднем на 1000 мобильных телефонов, поступивших в продажу, приходится четыре неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине телефон окажется исправен.

Решение.

Из условия следует, что в среднем из каждых 1000 мобильных телефонов $1000 - 4 = 996$ исправных. Вероятность купить исправный телефон равна $\frac{996}{1000} = 0{,}996$.

Ответ: 0,996.

5. В книге ровно 100 страниц. Алексей просит двух друзей независимо друг от друга назвать номер какой-нибудь стриницы. Какова вероятность, что оба друга назовут номера страниц от 1 до 40?

Решение. События A = «первый друг назвал номер страницы от 1 до 40» и B = «второй друг назвал номер страницы от 1 до 40» независимы. Вероятности этих событий одинаковы и равны $\frac{40}{100} = 0{,}4$ (для каждого из них эксперимент состоит в выборе одного номера из 100 равновозможных, при этом 40 номеров (возможных исходов экспериментов) благоприятствуют соответствующему событию). Тогда вероятность того, что оба этих события наступят одновременно, то есть вероятность того, что оба друга назовут номера от 1 до 40, можно найти как $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

Ответ: 0,16.

6. На смотре школьной художественной самодеятельности среди 8 классов представлено 20 концертных номеров: 4 — от 8 «А», 3 — от 8 «Б», 5 — от 8 «В», а остальные — от 8 «Г» и 8 «Д» поровну. Порядок, в котором демонстрируются концертные номера, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет выступление от 8 «Д».

Решение. Так как всего 20 номеров, то от 8 «Г» и 8 «Д» в сумме подготовлено $20-4-3-5=8$ выступлений. Так как по условию эти классы представят равное количество номеров, то от 8 «Д» будет $\frac{8}{2}=4$ выступления. Пусть эксперимент заключается в том, что выбирается номер, который будет показан первым. Все выступления имеют равные шансы оказаться первыми, поэтому эксперимент имеет 20 равновозможных исходов, из которых 4 благоприятствуют тому, что первым будет выступления от класса 8 «Д». Тогда искомая вероятность равна $\frac{4}{20}=0{,}2$.

Ответ: 0,2.

7. На диаграмме (см. рис. 164) показано содержание питательных веществ в некотором продукте (* — к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества). Сколько примерно белков содержится в 1000 граммах этого продукта?

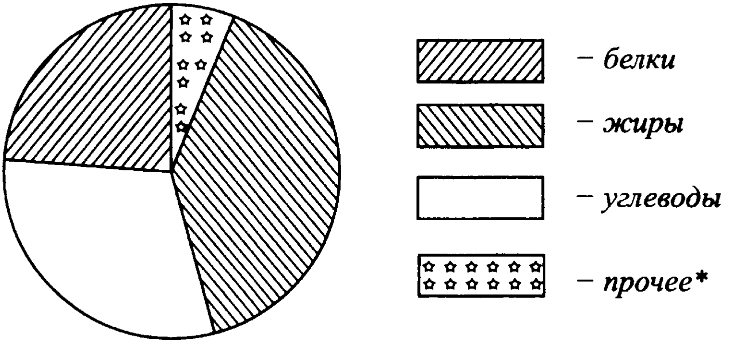


Рис. 164.

1) около 350 г 2) около 220 г 3) около 25 г 4) около 450 г

Решение.

Сектор, соответствующий белкам, занимает меньше четверти круга, значит, белков — меньше 250 граммов, в то время как первый и третий варианты ответов подразумевают существенно большее число граммов. Значит, эти варианты не подходят. Очевидно, что 25 граммов — слишком мало, в то время как рассматриваемый сектор ненамного меньше четверти, то есть белков — около 220 граммов.

Ответ: 2.

8. Измеряя вес каждого из семи пришедших на урок учеников, учитель физкультуры получил ряд чисел: 51, 53, 59, 52, 55, 54, 51. Найдите разность между модой и медианой этого ряда.

1) 3 2) -1 3) -2 4) 0

Решение. Модой ряда является число, наиболее часто в нём встречающееся. В данном ряде мода равна 51.

Для того чтобы найти медиану, упорядочим заданный ряд по возрастанию: 51, 51, 52, 53, 54, 55, 59. Поскольку в этой последовательности нечётное число элементов, то медианой ряда будет число, стоящее посередине, то есть 53. Следовательно, разность между модой и медианой равна $51 - 53 = -2$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. У Святополка Васильевича пять разных шариковых ручек, семнадцать разных карандашей и две линейки. Сколькими способами он может выбрать одну ручку, один карандаш и одну линейку?

Ответ: ________________ .

2. Коля взял в библиотеке 7 учебников. Сколькими способами можно выбрать три из них и уложить в стопку (порядок имеет значение)?

Ответ: ________________ .

3. В фирме такси в данный момент свободно 40 машин: 16 чёрных, 12 жёлтых и 12 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

Ответ: ________________ .

4. В среднем из каждых 60 поступивших в продажу аккумуляторов 42 аккумулятора заряжены. Найдите вероятность того, что выбранный в магазине наудачу аккумулятор не заряжен.

Ответ: ________________ .

5. Егор Тимофеевич 2 раза набирает на клавиатуре одну из десяти цифр наугад. Найдите вероятность того, что оба раза он выберет нечётные цифры.

Ответ: ________________ .

6. В соревнованиях по фигурному катанию участвуют 40 спортсменов: 10 фигуристов из Франции, 8 — из Италии, 14 — из Испании, а остальные — из Беларуси. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что последним будет выступать белорусский спортсмен.

Ответ: ________________.

7. На диаграмме (см. рис. 165) показано содержание питательных веществ в некотором продукте. Каких веществ больше всего (* — к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества)?

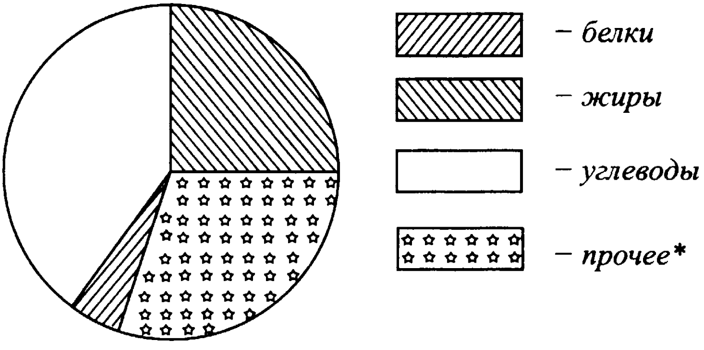


Рис. 165.

1) жиры 2) белки 3) углеводы 4) прочее

Ответ: ________________.

8. В 9 «А» и 9 «Б» классах провели медицинское обследование. При этом измерили вес учеников (с точностью до 5 кг). Результаты (в кг) представлены в таблице:

9 «А»	60	55	65	45	70	65	60	70	50	65	60
9 «Б»	50	55	70	60	65	60	70	60	55	60	75

Найдите разность между объёмами измерений для классов «А» и «Б».

1) 1 2) 0 3) 5 4) 10

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. У Родиона Платоновича семь разных учебников по географии, девять — по биологии и шесть — по истории. Ещё у него есть двадцать различных тетрадей. Сколькими способами он может выбрать один учебник и одну тетрадь?

Ответ: ________________ .

2. У Никиты 10 учебников. Сколькими способами можно выбрать 3 из них и уложить в стопку (порядок имеет значение)?

Ответ: ________________ .

3. На тарелке 25 пирожков: 8 — с мясом, 15 — с печенью и 2 — с яблочным повидлом. Олеся наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с яблочным повидлом.

Ответ: ________________ .

4. В среднем на 200 карманных фонариков, поступивших в продажу, приходится восемнадцать неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине фонарик окажется исправен.

Ответ: ________________ .

5. Магдалина Фёдоровна бросила игральную кость 2 раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпало чётное число очков.

Ответ: ________________ .

6. В соревнованиях по акробатике участвуют 8 спортсменов из Китая, 7 спортсменов из Швейцарии, 6 спортсменов из Армении и 9 — из Вьетнама. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что третьим будет выступать спортсмен из Армении.

Ответ: ________________ .

7. На диаграмме (см. рис. 166) показан возрастной состав населения города Нижнеосенск. Определите по диаграмме, жители какого возраста составляют более 50 % от всего населения.

1) 0 – 25 лет
2) 26 – 45 лет
3) 46 – 65 лет
4) 66 лет и более

Ответ: ________________ .

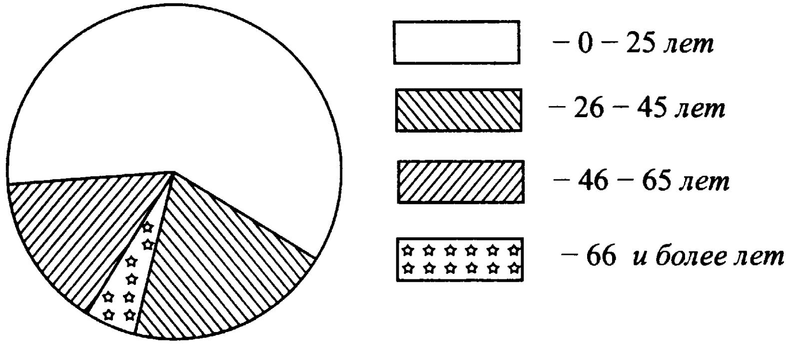


Рис. 166.

8. На письменном экзамене по математике можно получить от 0 до 10 баллов. Десять учеников получили такие оценки: 10, 4, 5, 7, 7, 6, 9, 4, 8, 5. Определите размах ряда.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. У Виссариона Глебовича десять красных тетрадей и восемь жёлтых. Также у него четырнадцать шариковых авторучек и одиннадцать гелевых. Сколькими способами можно выбрать одну тетрадь и одну ручку?

Ответ: ________________ .

2. У Леонида Несторовича два игральных кубика разных цветов. Сколькими способами они могут упасть так, чтобы сумма очков равнялась 5?

Ответ: ________________ .

3. На экзамене по истории 30 билетов, Феоктист не выучил 12 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

Ответ: ________________ .

4. На экзамене по биологии школьнику достанется один вопрос из сборника. Вероятность того, что это вопрос на тему «Животные», равна 0,31. Вероятность того, что это окажется вопрос на тему «Растения», равна 0,13. В сборнике нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: ________________ .

5. Магдалина Фёдоровна бросила игральную кость 2 раза. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз выпало чётное число очков.

Ответ: ________________ .

6. Маша бросает игральную кость 2 раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число больше 3.

Ответ: ________________.

7. На диаграммах (см. рис. 167) показаны религиозные составы населения четырёх городов: K, L, M, N. Определите по диаграмме, в каком городе доля католиков наибольшая.

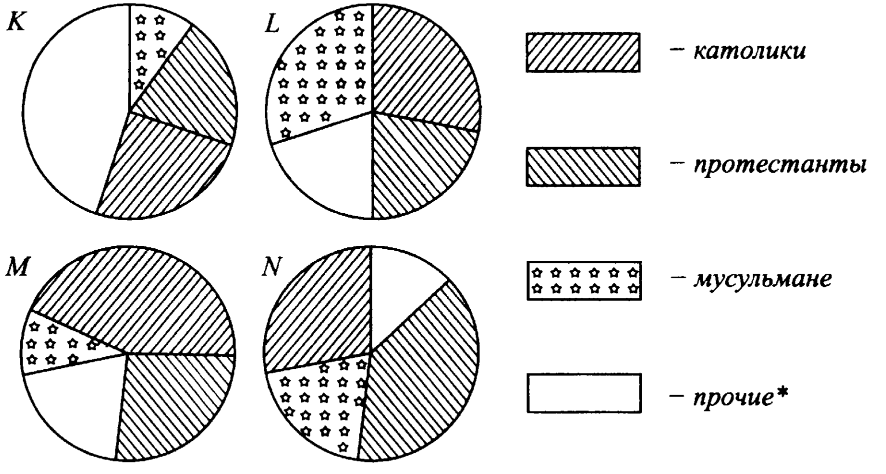


Рис. 167.

1) K 2) L 3) M 4) N

Ответ: ________________.

8. В 9 «А» и 9 «Б» классах провели медицинское обследование. При этом измерили вес учеников (с точностью до 5 кг). Результаты (в кг) представлены в таблице:

9 «А»	60	55	65	45	70	65	60	70	50	65	75
9 «Б»	50	55	70	60	65	60	70	60	55	60	75

Найдите моду измерений для 9 «Б» класса.

1) 55 2) 60 3) 65 4) 70

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. У Аделаиды 4 красных и 5 синих заколок, а также 2 жёлтых и 2 зелёных браслета. Сколькими способами она может выбрать 1 заколку и 1 браслет?

Ответ: ________________ .

2. У Осипа Валерьевича два игральных кубика разных цветов. Сколькими способами они могут упасть так, чтобы сумма очков равнялась 6?

Ответ: ________________ .

3. В каждой двадцатой бутылке газированной воды, согласно условиям акции, есть приз. Призы распределены по бутылкам случайно. Гера покупает бутылку минеральной воды в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Гера не найдёт приз в своей бутылке.

Ответ: ________________ .

4. На экзамене по литературе школьнику достанется один вопрос из сборника. Вероятность того, что это вопрос на тему «Проза XX века», равна 0,4. Вероятность того, что это окажется вопрос на тему «Поэзия XX века», равна 0,22. В сборнике нет вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: ________________ .

5. Константин Валентинович в случайном эксперименте симметричную монету бросает трижды. Найдите вероятность того, что решка выпадет хотя бы один раз.

Ответ: ________________ .

6. Вера бросает игральную кость 2 раза. Найдите вероятность того, что оба раза выпало число меньше 4.

Ответ: ________________ .

7. На диаграммах (см. рис. 168) указаны распределения территорий в четырёх агрофирмах. Определите, в какой агрофирме доля пастбищ и сенокосов превышает 25 %.

1) А 2) Б 3) В 4) Г

Ответ: ________________ .

8. Дан ряд чисел: 16, 15, 18, 12, 13, 20, 16, 14, 11. Найдите среднее этого ряда.

1) 13 2) 14 3) 15 4) 16

Ответ: ________________ .

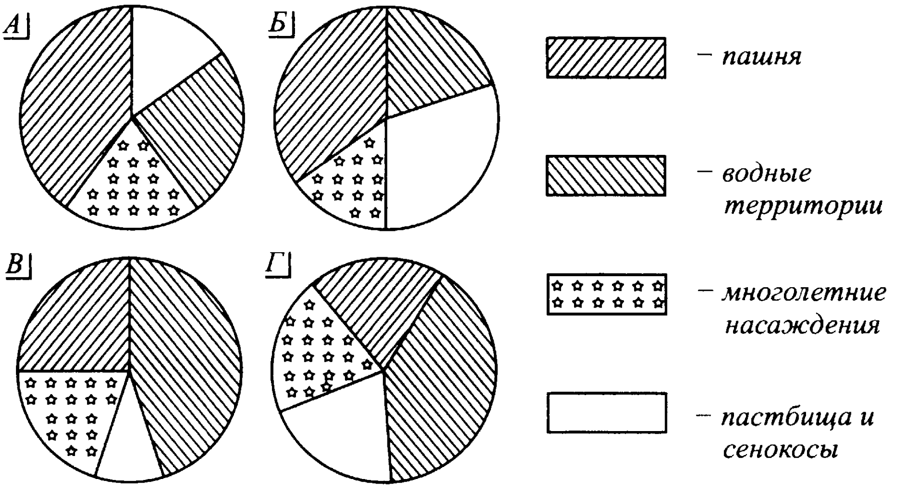


Рис. 168.

Вариант № 5

1. Сколькими способами можно расставить в программе концерта 3 различных песни?

Ответ: ________________ .

2. В классе 22 человека. Сколькими способами можно из них выбрать двух дежурных (порядок не важен)?

Ответ: ________________ .

3. Стрелок четыре раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок во второй и третий разы промахнётся, а остальные — попадёт в мишень.

Ответ: ________________ .

4. В таблице представлены результаты четырёх стрелков, показанные ими на тренировке.

Номер стрелка	Число выстрелов	Число попаданий
1	40	24
2	60	39
3	100	62
4	50	29

Тренер решил послать на соревнования того стрелка, у которого относительная частота попаданий выше. Кого из стрелков выберет тренер? Укажите в ответе его номер.

Ответ: ________________.

5. Стрелок 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попал в мишень три раза и один раз промахнулся.

Ответ: ________________.

6. Коля выбирает трёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 51.

Ответ: ________________.

7. В среднем каждый посетитель столовой съедает 282 грамма гречневой каши. Николай Валентинович съел 178 граммов гречневой каши. Какое из следующих утверждений верно?

1) Все посетители столовой, кроме Николая Валентиновича, съели по 282 грамма гречневой каши.
2) Обязательно найдётся посетитель, который съел больше 282 граммов гречневой каши.
3) Обязательно найдётся посетитель, который съел меньше, чем Николай Валентинович.
4) Обязательно найдётся посетитель, который съел ровно 282 грамма гречневой каши.

Ответ: ________________.

8. Учительница попросила пятерых опоздавших учеников выписать на доске время в минутах, которое они в среднем тратят на дорогу из дома до школы. Получились следующие данные: 20, 25, 35, 30, 40.

Найдите медиану этого ряда.

1) 20 2) 25 3) 30 4) 350

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Сколькими способами можно расставить 4 человек в очереди?

Ответ: ________________.

2. В доме 120 квартир. Сколькими способами рекламный агент может выбрать две из них (порядок не важен)?

Ответ: ________________.

3. Стрелок четыре раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок в первый и третий разы попадёт по мишени, а остальные — промахнётся.

Ответ: ________________.

4. В таблице представлены результаты четырёх стрелков, показанные ими на тренировке.

Номер стрелка	**Число выстрелов**	**Число попаданий**
1	30	14
2	40	20
3	20	13
4	10	6

Тренер решил послать на соревнования того стрелка, у которого относительная частота попаданий выше. Кого из стрелков выберет тренер? Укажите в ответе его номер.

Ответ: ________________.

5. Семён Игоревич 3 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попал в мишень два раза и один раз промахнулся.

Ответ: ________________.

6. Света выбирает трёхзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 34.

Ответ: ________________.

7. Средний вес футболиста команды «Дикари» — 84 кг. Вес футболиста Егора Егоркина — 84 килограмма. Какое из следующих утверждений верно?

1) Егор — самый тяжеловесный игрок команды.
2) Обязательно найдётся игрок, помимо Егора, весом 84 кг.
3) Обязательно найдётся игрок весом меньше 84 килограммов.
4) Обязательно найдётся игрок, помимо Егора, весом не более 84 килограммов.

Ответ: ________________.

8. Дан ряд чисел: 16, 15, 18, 12, 13, 20, 16, 14. Найдите медиану этого ряда.

1) 13 2) 14,5 3) 15,5 4) 16

Ответ: ________________.

§ 20. Алгебра. Иррациональные уравнения и уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля*

Основные сведения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Основные способы решения простейших иррациональных уравнений

I. Переход к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

1) Возведение обеих частей уравнения в некоторую степень. При возведении в чётную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Так как при возведении в чётную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат, то возможно появление посторонних решений. Например, уравнение $\sqrt{x} = -2$ решений не имеет, а уравнение $(\sqrt{x})^2 = (-2)^2$ имеет решение $x = 4$. Следовательно, необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной в первоначальное уравнение.

2) Замена иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильной системой:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

(см. задания 1 и 4 варианта с решениями).

3) Замена иррационального уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ одной из равносильных ему систем:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

(см. задание 3 варианта с решениями).

Неравенство $g(x) \geqslant 0$ (или $f(x) \geqslant 0$) в этих системах выражает условие, при котором уравнение определено.

Обычно при решении указанных систем неравенство не решают. Вначале ищут корни уравнения, входящего в систему, а потом подставляют найденные значения в неравенство и отбирают те из них, при которых неравенство выполнено.

II. Введение новой переменной.

Если в уравнении неоднократно встречается одно и то же выражение, содержащее неизвестную, то имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой переменной и попытаться решить уравнение сначала относительно введённой переменной, а затем уже найти исходную неизвестную (см. задание 8 варианта с решениями).

III. Использование свойства монотонности функций.

Если уравнение имеет вид

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ возрастает (убывает), или

$$f(x) = g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ убывает, или наоборот, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если удаётся привести уравнение к такому виду и найти его корень, то он и будет решением данного уравнения. В некоторых случаях корень такого уравнения удобно находить подбором.

Основные способы решения уравнений с модулем

I. При решении уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$ иногда бывает целесообразным возвести обе части в квадрат, придя к равносильному уравнению $f^2(x) = g^2(x)$ (см. задания 5 (2-й способ) и 6 варианта с решениями).

II. При решении уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$ иногда бывает целесообразным перейти к равносильной совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$ (см. задание 5 (1-й способ) и 7 варианта с решениями).

III. При решении уравнения вида $|f(x)| = g(x)$ ответ будет состоять из решений двух систем: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} -f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

IV. При решении произвольного уравнения, содержащего некоторое выражение $p(x)$, стоящее под знаком модуля, можно отдельно решить уравнение на множестве тех значений x, при которых $p(x) \geqslant 0$ ($|p(x)| = p(x)$) и на множестве тех значений, при которых $p(x) < 0$ ($|p(x)| = -p(x)$).

Вариант с решениями

1. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 5$.

Решение. $\sqrt{x-3} = 5$; $x - 3 = 5^2$; $x = 28$.

Ответ: 28.

2. Решите уравнение $9(\sqrt{x})^2 - 140 = 4 - x$.

Решение. ОДЗ. $x \geqslant 0$. На ОДЗ $(\sqrt{x})^2 = x$, поэтому исходное уравнение примет вид: $9x - 140 = 4 - x$, $10x = 144$, $x = 14{,}4$.

Ясно, что $x = 14{,}4 \geqslant 0$ — принадлежит ОДЗ, следовательно, является корнем исходного уравнения.

Ответ: 14,4.

3. Решите уравнение $\sqrt{(5x-6)^2} = \sqrt{(2x+5)^2}$.

Решение. 1-й способ. Так как $\sqrt{(5x-6)^2} = |5x-6|$ и $\sqrt{(2x+5)^2} = |2x+5|$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|5x-6| = |2x+5|$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 5x - 6 = 2x + 5, \\ 5x - 6 = -(2x+5); \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 3x = 11, \\ 7x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 3\dfrac{2}{3}, \\ x = \dfrac{1}{7}. \end{array}\right.$$

2-й способ. Подкоренные выражения неотрицательны, поэтому ОДЗ совпадает со множеством всех вещественных чисел. Уравнение равносильно уравнению

$(5x-6)^2 = (2x+5)^2$, $25x^2 - 60x + 36 = 4x^2 + 20x + 25$,

$21x^2 - 80x + 11 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 21 \cdot 11}}{21} = \frac{40 \pm \sqrt{1369}}{21} = \frac{40 \pm 37}{21},$$

$$x_1 = \frac{77}{21} = 3\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$$

Ответ: $\frac{1}{7}$; $3\frac{2}{3}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.

Решение.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-4 \geqslant 0, \\ x+5 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \geqslant -5; \end{cases}$ $x \geqslant 2.$

$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$; $\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}$. На ОДЗ обе части последнего неравенства неотрицательны, поэтому возведение их в квадрат не приведёт к появлению лишних корней:

$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5$; $2\sqrt{x+5}=x-10$;

$$\begin{cases} 4x+20=x^2-20x+100, \\ x-10 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-24x+80=0, \\ x \geqslant 10; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=20, \\ x=4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 10; \end{cases}$$

$x=20$.

Выполненные преобразования равносильны, значит, $x=20$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 20.

5. Решите уравнение $|2x+14|=12$.

Решение. 1-й способ. $|2x+14|=12$; $\left[\begin{array}{l} 2x+14=12, \\ 2x+14=-12; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-13. \end{array}\right.$$

2-й способ Так как две части равенства неотрицательны, то можно возвести в квадрат: $|2x+14|^2=12^2$. Так как $|a|^2=a^2$, то $4x^2+56x+196=144$, $4x^2+56x+52=0$, $x^2+14x+13=0$, $x=-13$, $x=-1$.

Ответ: $-13; -1$.

6. Решите уравнение $|x+1|-|4-2x|=0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $|x+1|=|4-2x|$. Обе части последнего уравнения неотрицательны, поэтому возведение их в квадрат не приведёт к появлению лишних корней:

$x^2+2x+1=16-16x+4x^2$, $3x^2-18x+15=0$, $x^2-6x+5=0$, $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4\cdot5\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm4}{2}$, $x_1=1$, $x_2=5$.

Ответ: 1; 5.

7. Решите уравнение $|5 - 2x^2| = 3$.

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 5 - 2x^2 = 3, \\ 5 - 2x^2 = -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x^2 = 2, \\ 2x^2 = 8; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 4; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = \pm 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm 1; \pm 2$.

8. Найдите количество корней уравнения $\sqrt{x+3} \cdot (x^4 - 17x^2 + 70) = 0$.

Решение. ОДЗ. $x \geqslant -3$.

На ОДЗ равенство $\sqrt{x+3} \cdot (x^4 - 17x^2 + 70) = 0$ выполняется в том случае, если либо $\sqrt{x+3} = 0$, либо $x^4 - 17x^2 + 70 = 0$.

$\sqrt{x+3} = 0$ при $x = -3$.

Решим уравнение $x^4 - 17x^2 + 70 = 0$. Сделаем замену $x^2 = t$, $t \geqslant 0$, $t^2 - 17t + 70 = 0$. По теореме Виета корни t_1 и t_2 удовлетворяют системе $\begin{cases} t_1 + t_2 = 17, \\ t_1 \cdot t_2 = 70. \end{cases}$ Подбором найдём корни: $t_1 = 7$, $t_2 = 10$. Оба этих значения удовлетворяют условию $t \geqslant 0$. Отсюда либо $x^2 = 7$, то есть $x = \pm\sqrt{7}$, либо $x^2 = 10$, то есть $x = \pm\sqrt{10}$. Определим, сколько из найденных чисел удовлетворяет ОДЗ.

Заметим, что $4 < 7 < 9$, следовательно, $2 < \sqrt{7} < 3$. Аналогично, $9 < 10 < 16$, следовательно, $3 < \sqrt{10} < 4$. Тогда $-3 < -\sqrt{7} < -2$ и $-4 < -\sqrt{10} < -3$. Условию $x \geqslant -3$ не удовлетворяет только значение $x = -\sqrt{10}$. Числа $-\sqrt{7}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$ и -3 являются корнями исходного уравнения. Всего 4 корня.

Ответ: 4.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\sqrt{3x+4} = 7$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $6(\sqrt{x})^2 - 12 = 4x$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $\sqrt{(3-x)^2} = \sqrt{(4x-1)^2}$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-4} = 1$.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $|5x + 12| = 8$.
Ответ: ________________.
6. Решите уравнение $|3x - 4| - |6 - 2x| = 0$.
Ответ: ________________.
7. Решите уравнение $|2 - x^2| = 2$.
Ответ: ________________.
8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x - 2} \cdot (x^6 - 8x^3 + 7) = 0$?
Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $\sqrt{2x + 5} = 3$.
Ответ: ________________.
2. Решите уравнение $3(\sqrt{x})^2 + 5x = 32$.
Ответ: ________________.
3. Решите уравнение $\sqrt{(5x - 2)^2} = \sqrt{(7 - 3x)^2}$.
Ответ: ________________.
4. Решите уравнение $\sqrt{3x + 13} - \sqrt{x - 8} = 5$.
Ответ: ________________.
5. Решите уравнение $|x + 1| = 3$.
Ответ: ________________.
6. Решите уравнение $|2x - 5| - |3x - 8| = 0$.
Ответ: ________________.
7. Решите уравнение $|17 - x^2| = 8$.
Ответ: ________________.
8. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{1 - x} \cdot (x^8 - 5x^4 + 4) = 0$?
Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $x - 3 = \sqrt{9 - x}$.
Ответ: ________________.
2. Решите уравнение $\sqrt{x - 4} = 4 - x$.
Ответ: ________________.
3. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + x} = 2 - x$.
Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x + 3\sqrt{x} - 28 = 0$.

Ответ: ________________ .

5. Решите уравнение $|2x + 3| = 5$.

Ответ: ________________ .

6. Решите уравнение $|x - 3| - |x + 5| = 2$.

Ответ: ________________ .

7. Найдите все целые корни уравнения, меньшие 3:
$\dfrac{|4 - x^2|}{|x + 2|} = |2 - |x||$.

Ответ: ________________ .

8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 9} \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$.

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Решите уравнение $\sqrt{x + 6} = 14 - x$.

Ответ: ________________ .

2. Решите уравнение $\sqrt{5 - x} = x - 5$.

Ответ: ________________ .

3. Решите уравнение $1 + \sqrt{3x^2 - 2} = 2x$.

Ответ: ________________ .

4. Решите уравнение $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$.

Ответ: ________________ .

5. Решите уравнение $|7 - 13x| = 6$.

Ответ: ________________ .

6. Решите уравнение $|x - 4| - |x + 7| = 3$.

Ответ: ________________ .

7. Найдите все целые корни уравнения больше -3:
$\dfrac{|x^2 - 9|}{||x| + 3|} = |x + 3|$.

Ответ: ________________ .

8. Решите уравнение
$\sqrt{x^2 - 16} \cdot (x^2 + 2x - 15) = 0$.

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Решите уравнение $\sqrt{2x-12}=5$.
   Ответ: ________________ .
2. Решите уравнение $(2-\sqrt{3x-4})(\sqrt{4x-1}-2)=0$.
   Ответ: ________________ .
3. Решите уравнение $x+3\sqrt{x+3}-37=0$.
   Ответ: ________________ .
4. Найдите наименьший корень уравнения
   $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.
   Ответ: ________________ .
5. Решите уравнение $|x^2-7x+10|=5x-25$.
   Ответ: ________________ .
6. Решите уравнение $||x+3|-1|=1$.
   Ответ: ________________ .
7. Решите уравнение $4\sqrt{x-1}+5|x+2|=24$.
   Ответ: ________________ .
8. Решите уравнение $\sqrt{x^2+\sqrt{3x^2-2}}=2$.
   Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. Решите уравнение $\sqrt{3x-5}=7$.
   Ответ: ________________ .
2. Решите уравнение $(3-\sqrt{7x-5})(\sqrt{2x-5}-1)=0$.
   Ответ: ________________ .
3. Решите уравнение $x-2\sqrt{x-7}-55=0$.
   Ответ: ________________ .
4. Найдите наименьший корень уравнения $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$.
   Ответ: ________________ .
5. Решите уравнение $|x^2-7x+12|=6x-24$.
   Ответ: ________________ .
6. Решите уравнение $||x-5|-8|=2$.
   Ответ: ________________ .

7. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 3|x-2| - 5$.

Ответ: __________________.

8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - \sqrt{3x^2 - 2}} = 2$.

Ответ: __________________.

§ 21. Алгебра. Задания с параметром*

Основные сведения

В условиях некоторых задач могут содержаться функции от нескольких переменных или уравнения, содержащие несколько переменных. При этом могут исследоваться некоторые свойства функции (или свойства корней уравнений) при различных фиксированных значениях одной из переменных. Такую переменную принято называть **параметром**. Задачу отыскания тех значений параметра, при которых выполняются указанные в задаче условия, называют **задачей с параметром**.

Рассмотрим пример.

Задача. Найдём такие значения параметра p, при которых уравнение $x^2 - px - 3 = 0$ имеет два корня: x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), причём оба они на оси абсцисс расположены левее числа 5.

Решение. Отметим, что дискриминант D квадратного уравнения $x^2 - px - 3 = 0$ равен $p^2 + 12$ и больше нуля для любого значения p. Следовательно, уравнение $x^2 - px - 3 = 0$ имеет два различных корня при каждом значении p.

Графиком функции $y = x^2 - px - 3$ при любом фиксированном значении p является парабола, ветви которой направлены вверх. Пусть p таково, что она пересекает ось абсцисс в точках x_1 и x_2, которые расположены левее числа 5 (см. рис. 169).

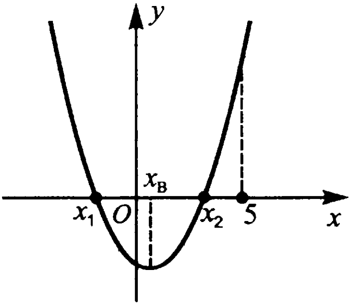


Рис. 169.

По рисунку видно, что оба корня лежат левее 5 при одновременном выполнении двух условий:

1) $y(5) > 0$;

2) абсцисса вершины расположена левее числа 5.

Абсцисса вершины параболы $y = x^2 - px - 3$ равна $\frac{p}{2}$;
$y(5) = 5^2 - p \cdot 5 - 3 = 22 - 5p$.

Значит, p является решением системы $\begin{cases} 22 - 5p > 0, \\ \frac{p}{2} < 5; \end{cases}$ $\begin{cases} p < 4{,}4, \\ p < 10; \end{cases}$
$p < 4{,}4$.

Значит, оба корня расположены левее числа 5 при $p < 4{,}4$, то есть $p \in (-\infty;\ 4{,}4)$.

Ответ: $(-\infty;\ 4{,}4)$.

Пусть уравнение $ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$ имеет два различных корня: x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$. Многие задачи программы основной школы связаны с исследованием расположения корней x_1 и x_2 относительно заданной точки A или заданных точек A и B $(A < B)$ на оси Ox.

Пусть $D = b^2 - 4ac$, $x_в$ — абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$, $x_в = -\frac{b}{2a}$.

Рассмотрим следующие возможные случаи расположения корней относительно точки A или точек A и B $(A < B)$, схематически указанные на рисунке 170.

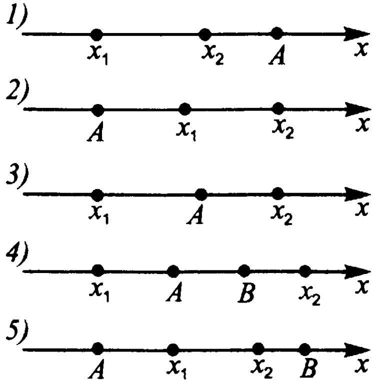
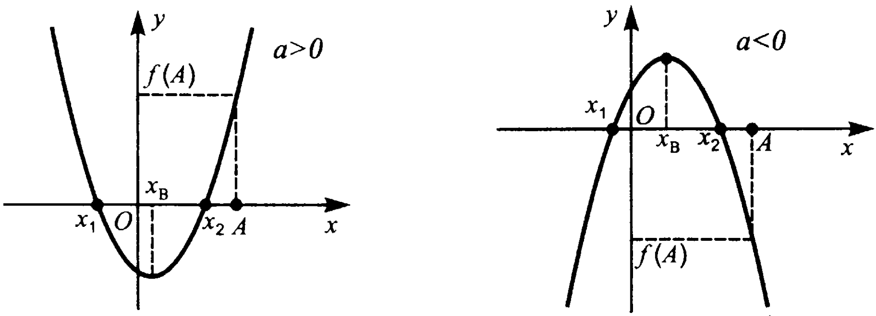


Рис. 170.

Утверждение 1. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корня x_1 и x_2, которые меньше заданного числа A ($x_1 < A$, $x_2 < A$) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_{\text{в}} < A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_{\text{в}} < A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

Графически эти условия можно представить следующим образом:



Оба случая можно объединить, рассмотрев одну систему вместо двух указанных в формулировке утверждений:

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(A) > 0, \\ x_{\text{в}} < A. \end{cases}$$

Утверждение 2. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корня x_1 и x_2, которые больше заданного числа A ($x_1 > A$, $x_2 > A$) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(A) > 0, \\ x_{\text{в}} > A. \end{cases}$$

Утверждение 3. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, причём эти корни лежат по разные стороны числа A $(x_1 < A, x_2 > A)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(A) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 4. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, причём эти корни лежат по разные стороны от отрезка $[A; B]$, то есть $x_1 < A < B < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ af(A) < 0, \\ af(B) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 5. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ имеет два различных корня x_1 и x_2, причём эти корни лежат между точками A и B, то есть $A < x_1 < B$ и $A < x_2 < B$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ A < x_{\text{в}} < B, \\ af(A) > 0, \\ af(B) > 0. \end{cases}$$

Также довольно часто необходимо определить, при каком значении параметра m прямая $y = m$ имеет с графиком $y = f(x)$ ровно k общих точек. В этом случае необходимо построить график $y = f(x)$ и посмотреть, при каких m горизонтальная прямая $y = m$ имеет с построенным графиком указанное число общих точек.

Вариант с решениями

1. При каких значениях параметра t уравнение $12x^2 - t = 0$ не имеет действительных решений?

Решение. Преобразуем уравнение к виду $x^2 = \frac{t}{12}$. Если $t > 0$, то последнее уравнение имеет 2 вещественных корня, равных $\pm\sqrt{\frac{t}{12}}$. Если $t = 0$, то корень один $(x = 0)$. Если $t < 0$, то корней нет, так как $x^2 \geqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; 0)$.

2. При каких значения параметра s неравенство $-2x^{10} \geqslant 2s - 6$ имеет хотя бы одно действительное решение?

Решение. Преобразуем неравенство к виду $x^{10} \leqslant 3-s$. Это неравенство имеет решения (например, $x = 0$) при $3 - s \geqslant 0$ и не имеет решений при $3 - s < 0$, так как $x^2 \geqslant 0$. Неравенство $3 - s \geqslant 0$ равносильно неравенству $s \leqslant 3$ или, иными словами, $s \in (-\infty;\ 3]$.

Ответ: $(-\infty;\ 3]$.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + 9x + 20)(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 + 3x - 4)}$ и определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку,

Решение. Упростим выражение, для чего разложим квадратные трёхчлены на множители. Найдём корни уравнения $x^2 + 9x + 20 = 0$,

$x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2}$, $x_1 = -5$, $x_2 = -4$.

Тогда $x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$,

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 2 \cdot 4}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Тогда $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Найдём корни уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$,

$x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 4}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

Тогда $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$.

Исходная функция примет вид

$y = \dfrac{(x + 4)(x + 5)(x - 1)(x - 2)}{(x + 4)(x - 1)} = (x + 5)(x - 2)$ при $x \neq -4;\ x \neq 1$.

Графиком функции $y = (x+5)(x-2) = x^2+3x-10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины расположена посередине между корнями, то есть равна $\dfrac{-5 + 2}{2} = -\dfrac{3}{2}$. Тогда ордината вершины равна $\left(-\dfrac{3}{2} + 5\right)\left(-\dfrac{3}{2} - 2\right) = -\dfrac{49}{4} = -12{,}25$. График исходной функции получается из графика функции $y = (x + 5)(x - 2)$ путём выкалывания точек с абсциссами $x = -4$ и $x = 1$. Найдём ординаты выкалываемых точек: $y(-4) = (-4 + 5)(-4 - 2) = -6$ и $y(1) = (1 + 5)(1 - 2) = -6$. Построим график исходной функции (см. рис. 171).

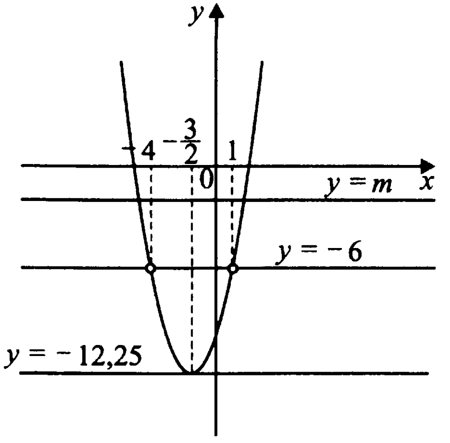


Рис. 171.

Горизонтальная прямая $y = m$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку при $m = -12{,}25$.

Ответ: $-12{,}25$

4. Какое наибольшее количество общих точек может иметь прямая $y = a$ с графиком функции $y = |x^2 - 6x + 4|$?

Решение. Заметим, что $x^2 - 6x + 4 = (x - 3)^2 - 5$. Построим график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, зная, что графиком функции $y = (x - 3)^2 - 5$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы расположена в точке $(3; -5)$ (см. рис. 172).

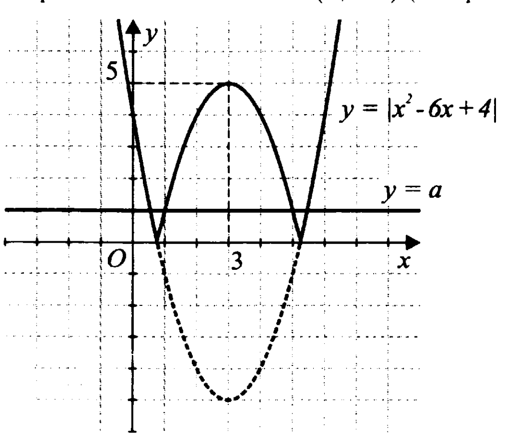


Рис. 172.

Графиком функции $y = a$ является горизонтальная прямая.

Очевидно, что при $a < 0$ общих точек нет.

Из графика видно, что при $a = 0$ и $a > 5$ общих точек 2. При $0 < a < 5$ общих точек 4.

При $a = 5$ общих точек 3.

Таким образом, наибольшее количество общих точек равно 4.

Ответ: 4.

5. Найдите значения параметра b, при которых вершина параболы $y = \frac{1}{4}x^2 + bx - 5$ лежит ниже прямой $y = 3x$.

Решение. Найдём координаты $(x_B;\ y_B)$ вершины параболы. $x_B = -\dfrac{b}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2b$. Тогда $y_B = y(x_B) = \frac{1}{4} \cdot (-2b)^2 + b \cdot (-2b) - 5 =$ $= -b^2 - 5$.

Вершина параболы лежит ниже прямой $y = 3x$, если $y_B < 3x_B$, то есть $-b^2 - 5 < 3 \cdot (-2b)$, $b^2 - 6b + 5 > 0$.

Решим последнее неравенство, рассмотрев вспомогательное уравнение $b^2 - 6b + 5 = 0$. Его корни: $b_1 = 1$, $b_2 = 5$. Отсюда следует, что решением неравенства $b^2 - 6b + 5 > 0$ являются значения $b < 1$ и $b > 5$. Иными словами, $b \in (-\infty;\ 1) \cup (5;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 1) \cup (5;\ +\infty)$.

Вариант № 1

1. При каких значениях параметра p уравнение $4x^2 + p = 0$ имеет два различных действительных корня?

Ответ: ________________ .

2. При каких значениях параметра a неравенство $x^4 < a$ имеет хотя бы одно действительное решение?

Ответ: ________________ .

3. Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 20x^2 + 64}{(x+4)(x-2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________ .

4. Постройте график функции $y = x^2 - 8|x| + 13$. При каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком этой функции не меньше 4 общих точек?

Ответ: ________________ .

5. Найдите все ненулевые значения параметра a, при которых вершина параболы $y = ax^2 - 6x + 4$ лежит ниже прямой $y = x$.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. При каких значениях параметра t уравнение $16x^2 + t = 0$ имеет ровно один действительный корень?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра a неравенство $x^6 + 3 \leqslant a$ не имеет действительных решений?

Ответ: ________________.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 3x - 10)(x - 6)}{x - 5}$ и определите, при каких значениях параметра u прямая $y = u$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________.

4. Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 15|$. При каких значениях параметра a прямая $y = a$ имеет с графиком этой функции ровно 3 общих точки?

Ответ: ________________.

5. Найдите все значения параметра a, при которых вершина параболы $y = 2x^2 + ax + 1$ лежит выше прямой $y = x$.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. При каких значениях параметра a уравнение $x\sqrt{x-5} - a\sqrt{x-5} = 0$ имеет ровно один действительный корень?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра p неравенство $x^2 + 5x + 2p \leqslant 0$ не имеет действительных корней?

Ответ: ________________.

3. При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

Ответ: ________________.

4. Найдите все значения параметра m, при каждом из которых прямая $y = mx$ имеет с графиком функции $y = -2x^2 - 8$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Ответ: ________________ .

5. При каких значениях параметра k прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек ни с параболой $y = -2x^2 - 2x + 3$, ни с параболой $y = x^2 + 5x + 21$?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. При каких значениях параметра a уравнение $x\sqrt{x+3} + a\sqrt{x+3} = 0$ имеет два различных действительных корня?

Ответ: ________________ .

2. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $4x^2 - 4(a-2)x + 25 > 0$ выполняется для любого значения x.

Ответ: ________________ .

3. При каких значениях параметра a число (-2) заключено между корнями уравнения $-x^2 - 3ax - a^2 + 4 = 0$?

Ответ: ________________ .

4. Определите, при каких значениях параметра m прямая $y = 2x + 7$ имеет с графиком функции $y = x^2 + m$ ровно одну общую точку. Постройте график этой функции при найденном значении m.

Ответ: ________________ .

5. При каких значениях параметра p графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках?

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. При каком положительном значении параметра a функция $y = x^2 + 3ax + 0{,}01$ имеет наименьшее значение, равное $-2{,}24$?

Ответ: ________________ .

2. При каких значениях параметра k прямая $y = kx + 1$ пересекает параболу $y = 2x^2 + 5x + 3$ ровно в одной точке?

Ответ: ________________ .

3. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|3x - \frac{12}{x}\right| + 3x + \frac{12}{x}\right)$ и определите, при каких значениях параметра k прямая $y = k$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Ответ: ________________ .

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & x \geqslant 1, \\ 2x + 4, & x < 1 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра s прямая $y = s$ имеет с этим графиком ровно две общие точки.

Ответ: ________________ .

5. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - ax + x = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 2]$?

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. При каком отрицательном значении параметра a функция $y = -x^2 + 8ax - 0{,}8$ имеет наибольшее значение, равное $99{,}2$?

Ответ: ________________ .

2. При каких неположительных значениях параметра k прямая $y = x + k + 1$ пересекает окружность $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ в двух точках?

Ответ: ________________ .

3. Постройте график функции $y = -x|x| + 4|x| - 2x$ и определите, при каких значениях параметра d прямая $y = d$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: ________________ .

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 6x + 9, \ x \leqslant 6, \\ y = \dfrac{54}{x}, \ x > 6 \end{cases}$ и определите, при каких значениях параметра h прямая $y = h$ имеет с этим графиком одну или две общие точки.

Ответ: ________________ .

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + 2(a-3)x - a^2 + 1 = 0$ имеет корни, один из которых меньше -1, другой — больше 2.

Ответ: ________________ .

§ 22. Алгебра. Уравнения и системы нелинейных уравнений*

Основные сведения

Многочленом n-й степени стандартного вида от одной переменной x называется выражение вида
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,$$
где $a_0, a_1, ..., a_n$ — заданные числа и $a_0 \neq 0$, $n \in N$. **Многочленами нулевой степени** ($n = 0$) называют отличные от нуля вещественные числа.

$a_0, a_1, ..., a_n$ — коэффициенты многочлена,

a_0x^n — старший член многочлена,

a_0 — старший коэффициент многочлена,

a_n — свободный член многочлена.

Например, коэффициентами многочлена $3x^5 - 4x^3 + 2x - 7$ (многочлена пятой степени) являются числа 3, 0, -4, 0, 2, -7, так как в стандартном виде данный многочлен записывается как
$3x^5 + 0x - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 7$. Старшим членом этого многочлена является $3x^5$, старшим коэффициентом — число 3, свободным членом — число (-7).

Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $q(x)$, если существует многочлен $s(x)$ такой, что $f(x) = q(x) \cdot s(x)$.

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$. (Левой частью этого уравнения является многочлен n-й степени от одной переменной x.)

Теорема. Пусть все коэффициенты алгебраического уравнения n-й степени являются целыми числами. Тогда если целое число a является корнем, то оно является делителем свободного члена.

Например, рассмотрим уравнение $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$. Непосредственно убеждаемся, что число 2 является его корнем и при этом число 2 — делитель свободного члена, равного -4.

Теорема Безу и деление многочленов

Для любого многочлена $f(x)$ степени $n > 0$ и любого числа x_0 существует такой многочлен $q(x)$ степени $(n - 1)$, что
$$f(x) = (x - x_0)q(x) + f(x_0)$$
($q(x)$ называют неполным частным от деления $f(x)$ на $(x - x_0)$, $f(x_0)$ — остатком от деления).

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и x_0 — произвольное число. Для нахождения коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ многочлена $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_n$ и значения $f(x_0)$ удобно применять таблицу, составленную их двух строк.

Первая клетка первой строки является пустой, за ней записываются по порядку коэффициенты многочлена $f(x)$ в стандартном виде.

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x_0	$a_0\ (b_0)$							

В первой клетке второй строки записываем x_0, а во второй клетке под a_0 записываем a_0. Это будет значение b_0.

Далее будем последовательно заполнять клетки второй строки слева направо. Под значением a_1 первой строки записываем сумму $a_1 + b_0 \cdot x_0$. Эта сумма и является значением b_1. Далее, во второй строке под числом a_2 первой строки записываем сумму $a_2 + b_1 \cdot x_0$ (значение b_1 к этому моменту уже получено). Это значение b_2.

Далее, аналогично найдём последовательность коэффициентов b_3, ..., b_{n-1} и значение $f(x_0)$. При этом $f(x_0)$ будет в клетке под значением a_n и $f(x_0) = a_n + b_{n-1}x_0$ (значение b_{n-1} к этому моменту уже получено).

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	$\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	$f(x_0)$

Например, если $f(x) = 4x^3 - 3x + 5$, то при делении указанного многочлена на $(x + 2)$, получаем, что $x_0 = -2$ и таблица имеет вид:

	4	**0**	**−3**	**5**
−2	4	−8	13	−21

Действительно,
$0 + 4 \cdot (-2) = -8,$
$-3 + (-8) \cdot (-2) = 13,$
$5 + 13 \cdot (-2) = -21.$

Следствие из теоремы Безу. Число x_0 является корнем уравнения $f(x) = 0$ в том и только в том случае, если $f(x)$ делится на двучлен $(x - x_0)$. Это означает, что $(x - x_0)$ в выражении $f(x)$ можно вынести за скобки.

Если при решении алгебраического уравнения $f(x) = 0$ удалось найти один корень x_0, то существует такой многочлен $q(x)$, что $f(x) = (x - x_0)q(x)$. Тогда нахождение остальных корней $f(x)$ сводится к нахождению корней уравнения $q(x) = 0$.

Схема Горнера — это один из способов провести деление многочлена на двучлен вида $(x-x_0)$, этот способ проиллюстрирован в решении задания 2 из варианта с решениями. Другой способ — способ группировки — показан в задании 4 варианта с решениями.

В общем случае, произвольный многочлен $f(x)$ на произвольный многочлен $q(x)$ (степень которого не выше степени $f(x)$) можно делить «уголком» (смотрите задание 3 варианта с решениями), аналогично делению многозначных чисел. Для этого старший член делимого $f(x)$ делят на старший член делителя $q(x)$, получая тем самым старший член частного. Далее делитель, то есть $q(x)$, умножают на этот старший член и полученный многочлен вычитают из делимого ($f(x)$). Полученный в результате многочлен используют в качестве нового делимого. Его старший член делят на старший член $q(x)$ и результат этого отношения записывают в качестве второго члена частного, и так далее, пока очередная разность не будет представлять многочлен, степень которого меньше степени $q(x)$. Последняя разность представляет собой остаток при делении. Если он равен 0, то говорят, что **$f(x)$ делится на $q(x)$**.

Попробуем разделить столбиком многочлен $x^5+ x^4- x^3+2x^2-7x+2$ на многочлен $x^2 + 2$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
-\,x^5 & +\,x^4 & -\,x^3 & +\,2x^2 & -\,7x & +\,2 & \;x^2+2 \\ \cline{7-7}
x^5 & & +\,2x^3 & & & & \;x^3+x^2-3x \\ \cline{1-6}
 & -\,x^4 & -\,3x^3 & +\,2x^2 & -\,7x & +\,2 & \\
 & x^4 & & +\,2x^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & & -\,(-\,3x^3) & & -\,7x & +\,2 & \\
 & & -\,3x^3 & & -\,6x & & \\ \cline{3-6}
 & & & & -x & +\,2 &
\end{array}
$$

В результате деления получился остаток $(-x + 2)$, это значит, что многочлен $x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ не делится на многочлен $x^2 + 2$, но в то же время выполняется равенство

$x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x^2 + 2)(x^3 + x^2 - 3x) + (-x + 2)$.

Для решения уравнений четвёртой степени $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ($a \neq 0$) в некоторых частных случаях существуют специальные приёмы.

1. Если уравнение имеет вид $ax^4+bx^2+c=0$ ($a \neq 0$) (**биквадратное уравнение**), то целесообразно сделать замену $x^2=t$ и решить квадратное уравнение относительно t, а затем вернуться к исходной переменной.

2. Если уравнение имеет вид $ax^4+bx^3+cx^2+kbx+k^2a=0$ ($a \neq 0$, $k \neq 0$) (**возвратное уравнение**), то целесообразно разделить обе части уравнения на x^2 (так как $x=0$ не является корнем) и в получившемся уравнении $ax^2+bx+c+k\frac{b}{x}+k^2\frac{a}{x^2}=0$ сделать замену $x+\frac{k}{x}=t$, после чего решить квадратное уравнение относительно t, а затем вернуться к исходной переменной. В частном случае, если уравнение имеет вид $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, то целесообразно после деления на x^2 сделать замену $t=x+\frac{1}{x}$, а если уравнение имеет вид $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$, то целесообразно после деления на x^2 сделать замену $t=x-\frac{1}{x}$.

Система уравнений называется **нелинейной**, если хотя бы одно из входящих в неё уравнений не является линейным. При решении нелинейных систем уравнений, как и при решении линейных систем уравнений, возможно использование подстановки и алгебраического сложения, а также замена переменной. В некоторых случаях возможно применение графического способа решения.

Вариант с решениями

1. Найдите многочлен наименьшей степени, корнями которого являются числа -4, 2, 6, и старший коэффициент равен 1.

1) x^2-2x-8 2) $x^3+4x^2-20x-48$

3) $x^4-3x^3-24x^2+28x+48$ 4) $x^3-4x^2-20x+48$

Решение. Искомый многочлен имеет вид: $(x-(-4))(x-2)(x-6)$. Приведём многочлен к стандартному виду:
$(x+4)(x-2)(x-6)=(x^2+2x-8)(x-6)=x^3-4x^2-20x+48$, что соответствует варианту ответа под номером 4).

Ответ: 4.

2. Разделите многочлен $x^4 - 7x^2 + x - 15$ на $(x + 3)$.

Решение. Выполним деление, используя схему Горнера.

	1	**0**	**−7**	**1**	**−15**
−3	1	−3	2	−5	0

Искомый многочлен — это $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ (коэффициенты этого многочлена есть во второй строке таблицы).

Ответ: $x^3 - 3x^2 + 2x - 5$.

3. Найдите наименьший корень уравнения $x^3 - x^2 - 7x + 10 = 0$.

Решение. Пусть $p(x) = x^3 - x^2 - 7x + 10$. Проверим, есть ли у уравнения $x^3 - x^2 - 7x + 10 = 0$ целые корни. Если они есть, то они должны быть делителями свободного члена, то есть целыми делителями числа 10. Будем последовательно проверять все делители числа 10, пока не найдём первый корень. Целые делители числа 10: числа $-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10$.
$p(1) = 3 \neq 0$, $p(-1) = 15$, $p(2) = 0$. Значит, 2 — корень уравнения $x^3 - x^2 - 7x + 10 = 0$. Разделим $x^3 - x^2 - 7x + 10$ на $(x - 2)$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 - x^2 - 7x + 10 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^3 - 2x^2 \phantom{{}- 7x + 10} & x^2 + x - 5 \\ \cline{1-1}
-\,x^2 - 7x + 10 & \\
x^2 - 2x \phantom{{}+ 10} & \\ \cline{1-1}
-\,-5x + 10 & \\
-5x + 10 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Вместо деления уголком можно было произвести деление по схеме Горнера:

	1	**−1**	**−7**	**10**
2	1	1	−5	0

Значит, уравнение $x^3 - x^2 - 7x + 10 = 0$ равносильно уравнению $(x-2)(x^2+x-5) = 0$. Решим уравнение $x^2+x-5 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Значит, корни исходного уравнения: 2, $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, наименьший из них — это $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

4. Сократите дробь $\dfrac{x^3+5x^2+9x+5}{x^3+2x^2-3x-10}$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители. Найдём целые корни многочлена, стоящего в числителе: $x^3+5x^2+9x+5=0$, если они существуют. Эти корни должны быть делителями числа 5, то есть эти корни следует искать среди чисел ±1, ±5. Подстановкой убеждаемся, что $x=-1$ является корнем, а $x=1$ и $x=\pm5$ корнями не являются. Зная корень $x=-1$, разложим многочлен x^3+5x^2+9x+5 на множители методом группировки:
$x^3+5x^2+9x+5 = x^3+x^2+4x^2+4x+5x+5 =$
$= x^2(x+1)+4x(x+1)+5(x+1) = (x^2+4x+5)(x+1)$.

Вместо использования метода группировки можно было произвести деление многочлена x^3+5x^2+9x+0 на $(x+1)$ по схеме Горнера:

	1	**5**	**9**	**5**
−1	1	4	5	0

Аналогично найдём целые корни многочлена, стоящего в знаменателе $x^3+2x^2-3x-10$, если они существуют. Эти корни должны быть делителями числа -10, то есть эти корни следует искать среди чисел ±1, ±2, ±5, ±10. Заметим, что $x=2$ является корнем. Зная это, разложим многочлен $x^3+2x^2-3x-10$ на множители:
$x^3+2x^2-3x-10 = x^3-2x^2+4x^2-8x+5x-10 =$
$= x^2(x-2)+4x(x-2)+5(x-2) = (x^2+4x+5)(x-2)$.

Вместо использования метода группировки можно было произвести деление многочлена $x^3+2x^2-3x-10$ на $(x-2)$ по схеме Горнера:

	1	**2**	**−3**	**−10**
2	1	4	5	0

Тогда $\dfrac{x^3+5x^2+9x+5}{x^3+2x^2-3x-10} = \dfrac{(x^2+4x+5)(x+1)}{(x^2+4x+5)(x-2)} = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Ответ: $\dfrac{x+1}{x-2}$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ xy=1. \end{cases}$

Решение. Заметим, что $y=0$ — не является корнем, так как $xy=1$. Тогда $x=\dfrac{1}{y}$. Подставим это выражение в первое уравнение системы, получим $\dfrac{1}{y^2}+y^2=2$. Сделаем замену $y^2=t$, $t>0$. Тогда $\dfrac{1}{t}+t=2$, $\dfrac{1-2t+t^2}{t}=0$, $t^2-2t+1=0$, $(t-1)^2=0$, $t=1$, $y^2=1$, $y=-1$ и $y=1$. При $y=1$ получим, что $x=\dfrac{1}{1}=1$, при $y=-1$ получим $x=\dfrac{1}{-1}=-1$. Получим следующие пары $(x,\ y)$: $(-1;\ -1)$, $(1,\ 1)$.

Ответ: $(-1;\ -1)$, $(1;\ 1)$.

Вариант № 1

1. Найдите многочлен наименьшей степени, корнями которого являются числа 1, 2, 3, и старший коэффициент равен 1.

1) $x^4-6x^3+11x^2-6x$ 2) x^2-3x+2

3) $x^3-6x^2+11x-6$ 4) $x^3+6x^2+11x+6$

Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $x^4-7x^3+14x^2-28x+40$ на $(x-5)$.

Ответ: ________________.

3. Найдите наибольший корень уравнения $x^3-7x^2+6=0$.

Ответ: ________________.

4. Сократите дробь $\dfrac{x^3+2x^2-2x+3}{x^3-2x^2+2x-1}$.

Ответ: ________________.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-2. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Найдите многочлен наименьшей степени, корнями которого являются числа $-1, 4, 5$, и старший коэффициент равен 1.

1) $x^2 - 3x - 4$
2) $x^3 - 8x^2 + 11x + 20$
3) $x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 20x$
4) $x^3 + 8x^2 + 11x - 20$

Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 6x - 72$ на $(x + 4)$.

Ответ: ________________.

3. Найдите наименьший корень уравнения $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$.

Ответ: ________________.

4. Сократите дробь $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}{x^3 + x^2 - 4x + 6}$.

Ответ: ________________.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ на многочлен $x^2 + 1$.

Ответ: ________________.

3. Найдите все корни уравнения $\dfrac{x^2 - 2}{x - 3} + \dfrac{x^2 - 10}{x + 1} = -4$.

Ответ: ________________.

4. Найдите целочисленные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} xy = 6, \\ xz = 10, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

5. Найдите все пары значений $(a;\ b)$, которые удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{5}{6}, \\ a - b = 10. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ на многочлен $x^2 + 2$.

Ответ: ________________.

3. Найдите все корни уравнения $\dfrac{x^2+7}{x-1} + \dfrac{x^2+15}{x-3} = -8$.

Ответ: ________________.

4. Найдите целочисленные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} xy = -20, \\ x^2 + y^2 = 41, \\ yz = -15. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

5. Найдите все пары значений $(k;\ m)$, которые удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{k}{m}} - 7\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \dfrac{3}{2}, \\ k + 4m = -195. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите те корни уравнения, которые больше 3.

$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $x + \dfrac{3-5x}{x^2-2x-3} + \dfrac{x}{x-3} = 1$.

Ответ: ________________.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(y+2z)=34, \\ x(z-y)=2, \\ y(x-z)=-20. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{6}, \\ xy=9. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите те корни уравнения, которые больше 0:
$x^4+3x^3-42x^2-3x+1=0$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $x^4-x^3-16x^2-17x-15=0$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{2x}{x-1}-2+\dfrac{4(2x+1)}{x^2+x-2}$.

Ответ: ________________.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy-xz=30, \\ z(x-y)=6, \\ z(2x+3y)=-108. \end{cases}$

Ответ: ________________.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x}=\sqrt{y}+2\sqrt{2}, \\ xy=16. \end{cases}$

Ответ: ________________.

§ 23. Геометрия. Углы и длины

Основные сведения

Параллельные прямые

Прямые, которые не пересекаются, называются **параллельными**. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. Две прямые, параллельные третьей, также параллельны.

Рассмотрим две прямые (a и b), пересечённые третьей прямой (c), которая называется секущей (см. рис. 173).

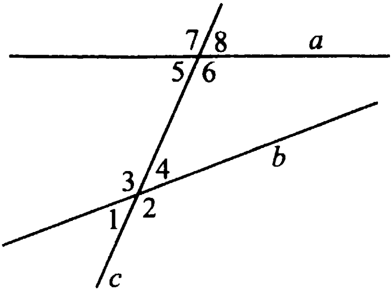


Рис. 173.

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ — накрест лежащие; $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$ — соответственные; $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$ — односторонние.

- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

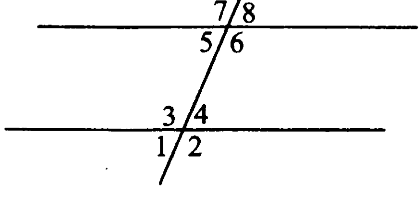


Рис. 174.

Верно и обратное. При пересечении параллельных прямых секущей (см. рис. 174) накрест лежащие углы равны ($\angle 4 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$), соответственные углы равны ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$), а сумма односторонних углов равна $180°$ ($\angle 4 + \angle 6 = 180°$, $\angle 3 + \angle 5 = 180°$).

Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется длина перпендикуляра, соединяющего две точки этих прямых.

Треугольником называется многоугольник с тремя углами. Сумма углов треугольника равна $180°$. На рисунке 175 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

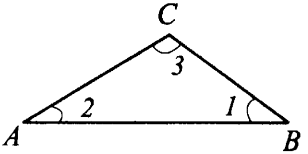


Рис. 175.

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется **внешним углом** треугольника. Например, $\angle CBK$ (см. рис. 176) — внешний угол $\triangle ABC$ при вершине B.

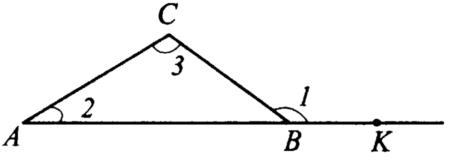


Рис. 176.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним ($\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$, см. рис. 176).

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Треугольники называются **подобными**, если их углы соответственно равны, а стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны (см. рис. 177). Отношение соответствующих (сходственных) сторон

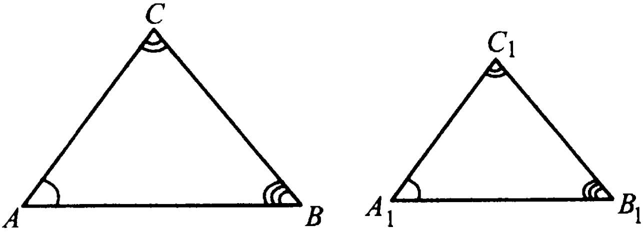


Рис. 177.

называют **коэффициентом подобия**. Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, то пишут $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими двумя сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Отношение соответствующих медиан, биссектрис, высот, а также радиусов вписанной и описанной окружностей в подобных треугольниках равно коэффициенту подобия.

Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов равен 90°. Сторона, лежащая против угла 90° (прямого угла), называется **гипотенузой**, две другие — **катетами**.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (для треугольника, изображённого на рисунке 178, $c^2 = a^2 + b^2$).

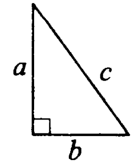


Рис. 178.

Верно и обратное утверждение: если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника (см. рис. 179). Она параллельна третьей стороне треугольника и равна её половине ($MN = \frac{1}{2}AB$).

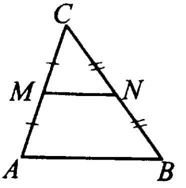


Рис. 179.

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Они называются боковыми сторонами. Третья сторона называется основанием. В равнобедренном треугольнике углы, прилежащие к основанию, равны, а высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают.

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.

Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны равны. Равносторонние треугольники также называют правильными. В равностороннем треугольнике все углы равны 60°, а медиана, биссектриса и высота, проведённые к любой из его сторон, совпадают.

Если в треугольнике все углы равны, то треугольник равносторонний.

Сумма углов четырёхугольника равна 360°. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$.

Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. На рисунке 180 $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

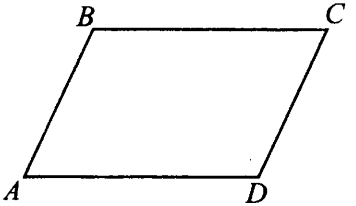


Рис. 180.

Свойства параллелограмма:

1) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°. То есть $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle B + \angle C = 180°$.

2) В параллелограмме противоположные стороны равны, т. е. $AB = CD$, $AD = BC$.

3) В параллелограмме противоположные углы равны, то есть $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Признаки параллелограмма

1) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если $AB = CD$ и $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

3) Если в выпуклом четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания трапеции), а две другие не параллельны.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме.

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны ($AB = CD$ в трапеции $ABCD$ на рисунке 181).

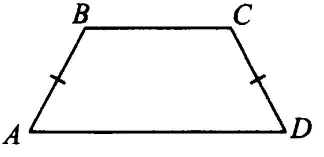


Рис. 181.

В равнобедренной трапеции углы при каждом из оснований равны ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ на рисунке 181). Верно и обратное утверждение: если в трапеции углы при основании равны, то трапеция равнобедренная.

Вариант с решениями

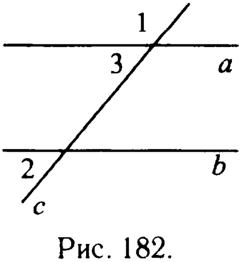


Рис. 182.

1. Параллельные прямые a и b пересечены прямой c. Угол $\angle 1 = 138°$ (см. рис. 182). Найдите $\angle 2$.

Решение. 1. $\angle 2$ и $\angle 3$ соответственные при $a \parallel b$ и секущей c, значит, по свойству параллельных прямых $\angle 2 = \angle 3$.

2. $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$.

$\angle 2 = \angle 3 = 42^\circ$.

Ответ: 42°.

2. Прямые p, q и l пересечены прямой t (см. рис. 183). $\angle 1 = 65^\circ$, $\angle 2 = 53^\circ$, $\angle 3 = 115^\circ$. Какие из прямых p, q и l параллельны?

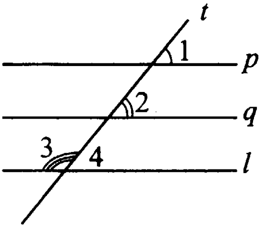


Рис. 183.

Решение.

1. $\angle 1$ и $\angle 2$ соответственные при прямых p, q и секущей t, $\angle 1 \neq \angle 2$, следовательно, прямые p и q пересекаются.

2. $\angle 3$ и $\angle 4$ смежные, $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$,
$\angle 4 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

$\angle 1$ и $\angle 4$ соответственные при прямых p, l и секущей t, $\angle 1 = \angle 4$, $p \parallel l$ по признаку параллельности прямых.

3. $\angle 2 \neq \angle 4$, значит, соответственные углы при прямых q и l не равны, прямые q и l не параллельны (пересекаются).

Ответ: $p \parallel l$.

3. В треугольнике ABC (см. рис. 184) $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 72^\circ$.

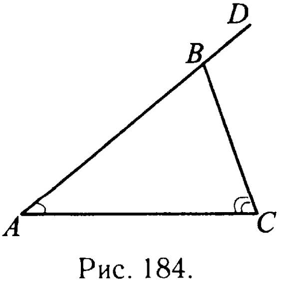


Рис. 184.

Найдите внешний угол при вершине B. Ответ выразите в градусах.

Решение. По теореме о внешнем угле треугольника
$\angle DBC = \angle A + \angle C = 47^\circ + 72^\circ = 119^\circ$.

Ответ: 119.

4. В треугольнике MNP угол M в 3 раза меньше угла N и в 2 раза меньше угла P (см. рис. 185). Найдите градусную меру угла M.

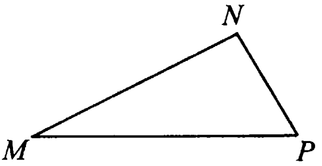


Рис. 185.

Решение.

Пусть $\angle M = x^\circ$, тогда $\angle N = (3x)^\circ$, $\angle P = (2x)^\circ$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle M + \angle N + \angle P = 180^\circ$, значит, $x + 3x + 2x = 180$, $6x = 180$, $x = 30$. $\angle M = 30^\circ$.

Ответ: 30.

5. Найдите градусную меру угла K треугольника EFK, если $EF = 25$, $EK = 24$, $KF = 7$ (см. рис. 186).

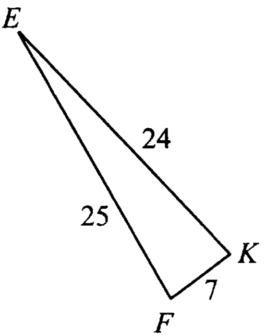


Рис. 186.

Решение.

$EF^2 = 25^2 = 625$,

$EK^2 = 24^2 = 576$,

$FK^2 = 7^2 = 49$.

$EK^2 + FK^2 = 576 + 49 = 625$.

Получим $EF^2 = EK^2 + FK^2$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle EFK$ — прямоугольный, $\angle K = 90^\circ$.

Ответ: 90.

6. В равнобедренной трапеции разность двух углов равна 30° (см. рис. 187). Найдите градусную меру тупого угла этой трапеции.

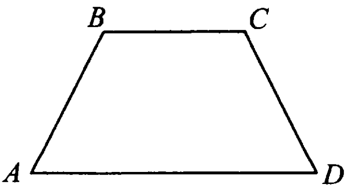


Рис. 187.

Решение.

По условию трапеция $ABCD$ равнобедренная, значит, $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$. Таким образом, есть два различных значения величины углов: это градусные меры $\angle B$ и $\angle A$. $\angle B > \angle A$. Разность углов может быть равна 30°, только если из большего вычитается меньший. Отсюда $\angle B - \angle A = 30^\circ$

По свойству трапеции $\angle B + \angle A = 180°$, кроме того, $\angle B - \angle A = 30°$.

Сложив два уравнения системы $\begin{cases} \angle B + \angle A = 180°, \\ \angle B - \angle A = 30°, \end{cases}$ получим: $2\angle B = 210°$, $\angle B = 105°$.

Ответ: 105.

7. В выпуклом четырёхугольнике $EFPQ$ $EF = EQ$, $FP = PQ$, $\angle E = 68°$, $\angle P = 102°$. Найдите угол F четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.

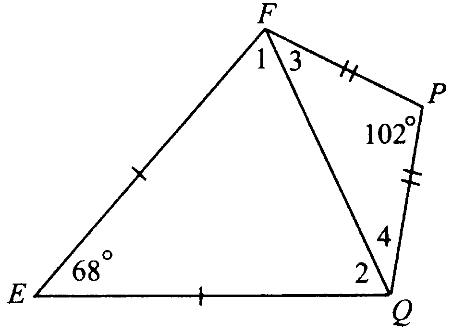


Рис. 188.

Решение.

По условию $EF = EQ$, $FP = PQ$, значит, треугольники FPQ и FEQ равнобедренные. По свойству углов при основании равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, отсюда $\angle F = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle Q$, $\angle E + \angle F + \angle P + \angle Q = 360°$ по теореме о сумме углов четырёхугольника, $\angle Q + \angle F = 360° - (\angle E + \angle P) = 360° - (68° + 102°) = 190°$, $2\angle F = 190°$, $\angle F = 190° : 2 = 95°$.

Ответ: 95.

8. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 6 метров от фонарного столба и отбрасывает тень длиной 9 м (см. рис. 189). Определите высоту фонарного столба (в метрах).

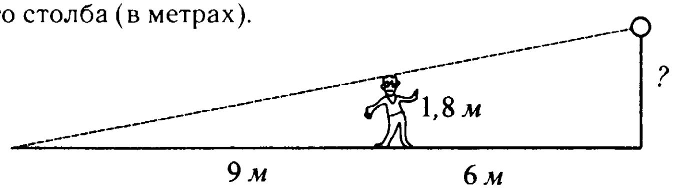


Рис. 189.

Решение.

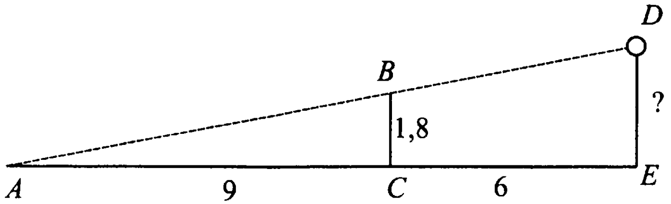


Рис. 190.

Составим геометрическую модель, согласно условию задачи (см. рис. 190). Рассмотрим треугольники ABC и ADE. Они подобны по двум углам ($\angle BCA = \angle DEA = 90°$, $\angle A$ — общий). Тогда $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$, $\frac{1{,}8}{9} = \frac{DE}{15}$, откуда $DE = 3$. Высота фонарного столба равна 3 м.

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. Параллельные прямые c и d пересечены прямой a. По данным рисунка 191 найдите градусную меру угла α.

Ответ: ________________ .

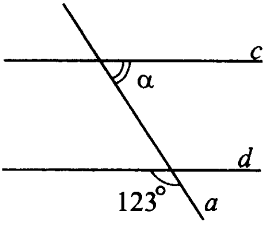


Рис. 191.

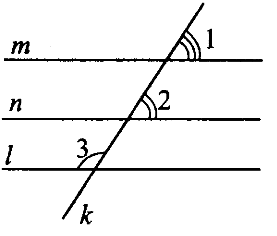


Рис. 192.

Ответ: ________________ .

2. Прямые m, n и l пересечены прямой k (см. рис. 192), $\angle 1 = 55°$, $\angle 2 = 53°$, $\angle 3 = 125°$. Какие из прямых m, n и l параллельны?

Ответ: ________________ .

3. В треугольнике MNP (см. рис. 193) $\angle M = 50°$, $\angle N = 70°$. Найдите внешний угол при вершине P. Ответ выразите в градусах.

Ответ: ________________ .

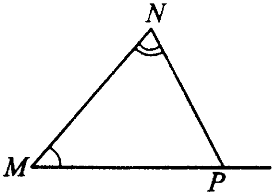


Рис. 193.

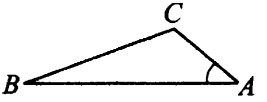


Рис. 194.

4. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B и в 3 раза меньше угла C (см. рис. 194). Найдите градусную меру угла A.

Ответ: ________________ .

5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 9$, $AB = 15$. Найдите BC.

Ответ: ________________ .

6. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 110°. Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = 137°$, $\angle B = 80°$. Найдите угол D. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

8. Проектор полностью освещает экран A высотой 150 см, расположенный на расстоянии 200 см от проектора (см. рис. 195). На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 420 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными?

Ответ: ________________ .

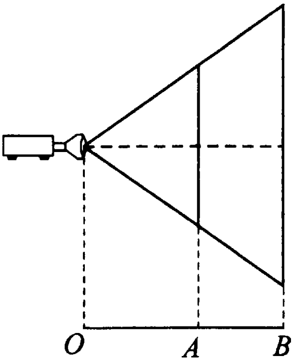


Рис. 195.

Вариант № 2

1. Параллельные прямые c и d пересечены прямой a. По данным рисунка 196 найдите градусную меру угла β.

Ответ: ________________.

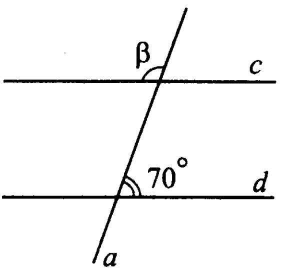


Рис. 196.

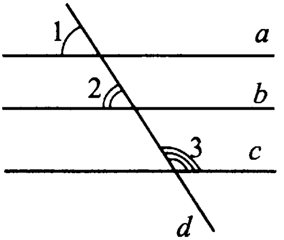


Рис. 197.

2. Прямые a, b и c пересечены прямой d (см. рис. 197), $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 48°$, $\angle 3 = 130°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

Ответ: ________________.

3. В треугольнике MNK (см. рис. 198) $\angle M = 40°$, $\angle N = 70°$. Найдите внешний угол при вершине K. Ответ выразите в градусах.

Ответ: ________________.

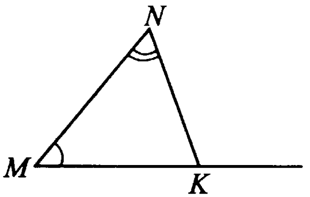


Рис. 198.

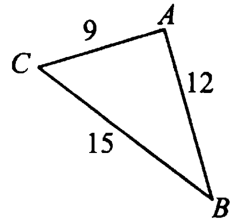


Рис. 199.

4. В треугольнике ABC угол B в 3 раза больше угла A и в 2 раза меньше угла C. Найдите градусную меру угла B.

Ответ: ________________ .

5. Найдите градусную меру угла A треугольника ABC, если $BC = 15$, $AB = 12$, $AC = 9$ (см. рис. 199).

Ответ: ________________ .

6. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 220°. Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

7. В выпуклом четырёхугольнике $MNPQ$ $\angle M = 63°$, $\angle N = 85°$, $\angle P = 79°$. Найдите градусную меру угла Q. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

8. Проектор полностью освещает экран A высотой 1 м, расположенный на расстоянии 2 м от проектора (см. рис. 200). Какой наибольшей высоты (в метрах) может быть экран B, чтобы его можно было расположить на расстоянии 5 м от проектора и он был полностью освещён, если настройки проектора не меняются?

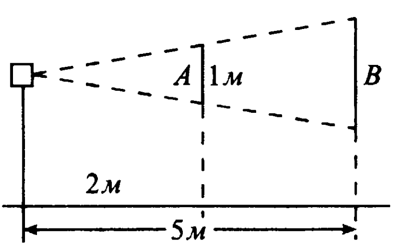


Рис. 200.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Прямые a, b и c пересечены прямой d, $\angle 1 = 77°$, $\angle 2 = 69°$, $\angle 3 = 103°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

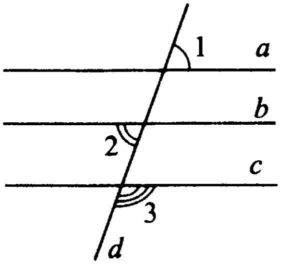


Рис. 201.

Ответ: ________________.

2. Наклонная крыша установлена на трёх вертикальных опорах, расположенных на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами. Высота малой опоры — 1,5 м, высота большой опоры — 2,8 м. Найдите высоту средней опоры (в метрах).

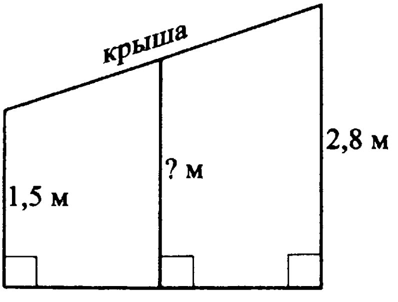


Рис. 202.

Ответ: ________________.

3. На рисунке 203 $\angle 1$ меньше $\angle 2$ на $40°$. Найдите градусную меру меньшего угла.

Ответ: ________________.

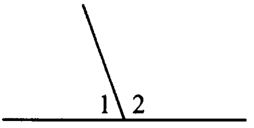


Рис. 203.

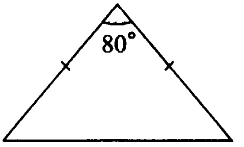


Рис. 204.

4. Чему равен угол при основании равнобедренного треугольника, если угол при его вершине равен $80°$ (см. рис. 204)? Ответ укажите в градусах.

Ответ: ________________.

5. В треугольнике MPQ PC — высота, $PC = 12$, $PQ = 13$. Найдите CQ.

Ответ: ________________.

6. В равнобедренной трапеции разность двух углов равна $20°$. Найдите наибольший угол этой трапеции. Ответ укажите в градусах.

Ответ: ________________.

7. В ромбе $MEKP$ $\angle MEK = 62°$ (см. рис. 205). Найдите угол между диагональю MK и боковой стороной KP. Ответ дайте в градусах.

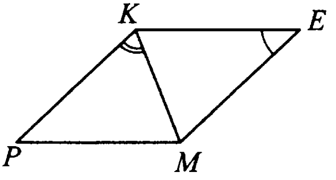


Рис. 205.

Ответ: ________________.

8. На расстоянии 12 шагов от фонарного столба (см. рис. 206) высотой 2,7 м стоит человек и отбрасывает тень длиной 24 шага. Определите высоту человека. Ответ дайте в метрах.

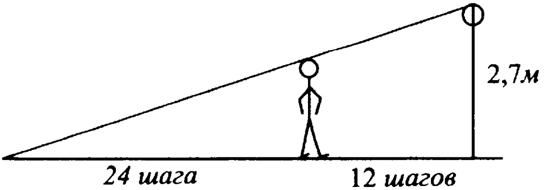


Рис. 206.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Прямые m, n и l пересечены прямой a (см. рис. 207), $\angle 1 = 36°$, $\angle 2 = 37°$, $\angle 3 = 143°$. Какие из прямых a, m, n и l параллельны?

Ответ: ________________.

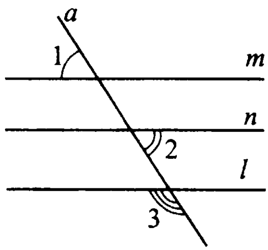


Рис. 207.

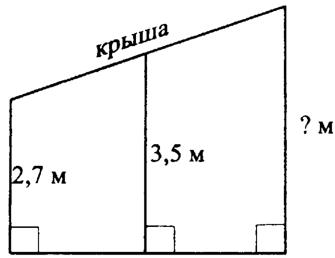


Рис. 208.

2. Наклонная крыша установлена на трёх вертикальных опорах, расположенных на одной прямой. Средняя опора стоит посередине между малой и большой опорами. Высота малой опоры равна 2,7 м, высота средней опоры — 3,5 м. Найдите высоту большой опоры (в метрах).

Ответ: ________________.

3. На рисунке 209 $\angle 1$ больше $\angle 2$ на 20°. Найдите градусную меру большего угла.

Ответ: ________________.

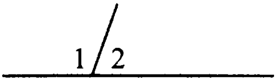


Рис. 209.

Рис. 210.

4. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 10° (см. рис. 210). Найдите градусную меру угла при вершине, противолежащей основанию.

Ответ: ________________.

5. В треугольнике CPK из вершины P проведена высота PH, $PH = 15$, $HK = 8$. Найдите сторону PK.

Ответ: ________________.

6. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A$ меньше $\angle B$ на 40°. Найдите угол C.

Ответ: ________________.

7. В ромбе $ABCD$ (см. рис. 211) внешний угол при вершине B равен $150°$. Найдите величину угла между стороной ромба CD и его диагональю AC. Ответ дайте в градусах.

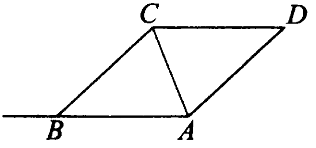


Рис. 211.

Ответ: ________________.

8. На рисунке 212 изображено дерево высотой 3 метра и столб высотой 9 метров, на котором установлен прожектор. Дерево отбрасывает тень длиной 6 метров. На каком расстоянии от дерева стоит столб? Ответ укажите в метрах.

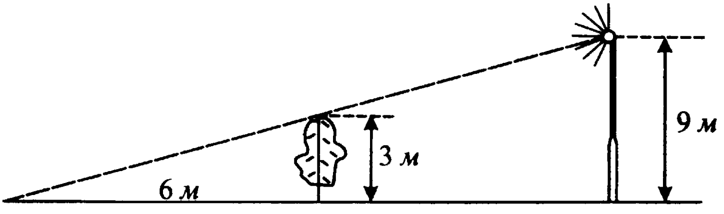


Рис. 212.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Параллельные прямые p и q пересечены прямой k. По данным рисунка 213 найдите угол β (в градусах).

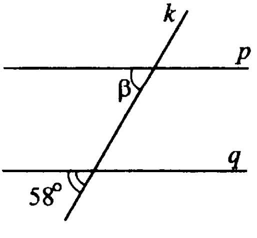


Рис. 213.

Ответ: ________________.

2. Два корабля вышли из порта, следуя один — на юг, другой — на восток. Скорости их соответственно равны 12 км/ч и 5 км/ч. Какое расстояние (в километрах) будет между ними через 5 часов?

Ответ: ________________.

3. На рисунке 214 $\angle 1 + \angle 3 = 150°$. Найдите углы 1 и 2 (в градусах).

Ответ: ________________.

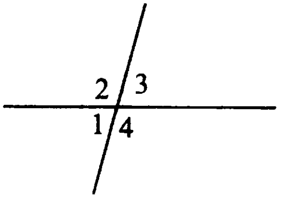


Рис. 214.

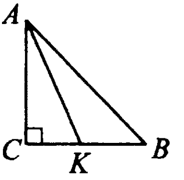


Рис. 215.

4. В прямоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, AK — биссектриса угла A (см. рис. 215). Найдите градусную меру угла AKB.

Ответ: ________________.

5. В треугольнике TLQ, $LT = LQ = 13$. Высота, проведённая из вершины L, равна 5. Найдите QT.

Ответ: ________________.

6. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, изображённой на рисунке 216.

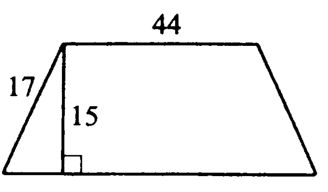


Рис. 216.

Ответ: ________________.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = AD$, $BC = CD$, $\angle A = 70°$, $\angle C = 100°$. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

8. На расстоянии 10 шагов от фонарного столба (см. рис. 217) стоит человек ростом 1,6 м и отбрасывает тень длиной 16 шагов. Определите высоту фонарного столба (в метрах).

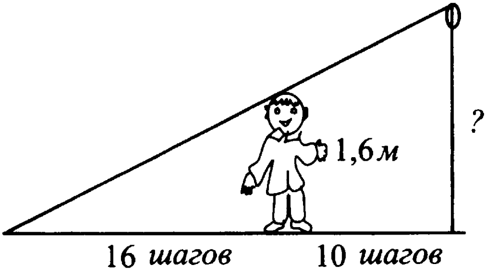


Рис. 217.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. Прямые m, n и p пересечены прямой q (см. рис. 218), $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 158°$, $\angle 3 = 22°$. Какие из прямых m, n и p параллельны?

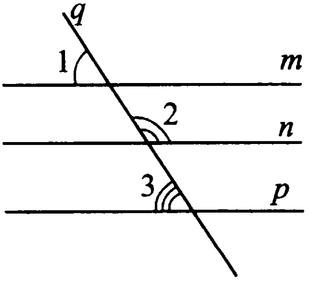


Рис. 218.

Ответ: ________________ .

2. Лестница соединяет точки A и B и состоит из 60 одинаковых ступеней. Высота каждой ступени 12 см, а длина — 22,5 см (см. рис. 219). Найдите расстояние между точками A и B (в метрах).

Ответ: ________________ .

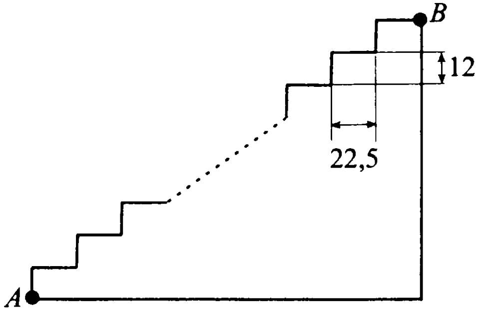


Рис. 219.

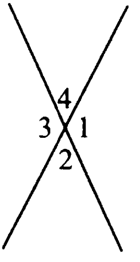


Рис. 220.

3. На рисунке 220 $\angle 4 = 52°$. Найдите углы 1 и 2. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

4. В треугольнике все внешние углы равны между собой. Найдите внешний угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________ .

5. В треугольнике FPE, $PF = PE = 5$, $EF = 8$. Найдите высоту, проведённую из вершины P.

Ответ: ________________ .

6. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, изображённой на рисунке 221.

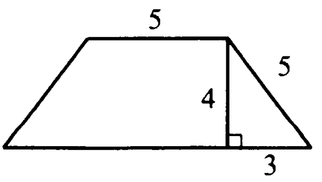


Рис. 221.

Ответ: ________________ .

7. В выпуклом четырёхугольнике $MNPQ$ $MN = MQ$, $NP = PQ$, $\angle M = 80°$, $\angle P = 100°$. Найдите $\angle N$ (в градусах).

Ответ: ________________ .

8. Дерево высотой 5,4 м стоит на расстоянии 14 шагов от дома, на котором установлен прожектор. Тень от дерева равна трём шагам. Какова высота дома в метрах (см. рис. 222)?

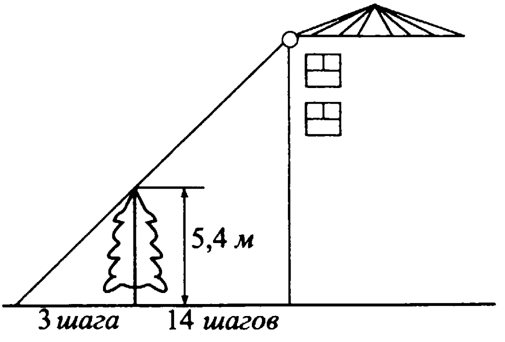


Рис. 222.

Ответ: ________________ .

§ 24. Геометрия. Площади фигур

Основные сведения

Площадь треугольника равна половине произведения любой его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$ (см. рис. 223).

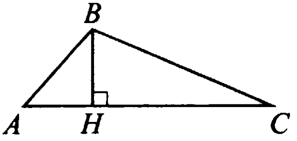


Рис. 223.

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AC \cdot \sin \angle A$ (см. рис. 223).

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$ (см. рис. 224).

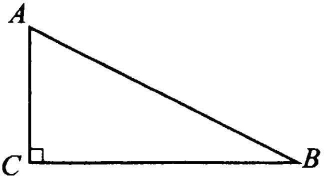


Рис. 224.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. То есть если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённую к этому основанию. $S_{ABCD} = AD \cdot CH$ (см. рис. 225).

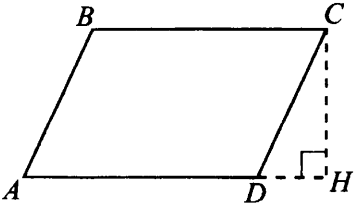


Рис. 225.

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту, $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH$ (см. рис. 226).

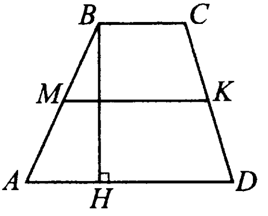


Рис. 226.

Если диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются под углом α, то его площадь равна $S = \dfrac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$, где d_1 и d_2 — длины диагоналей. В частности, площадь ромба равна $S = \dfrac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$.

Вариант с решениями

1. В равнобедренном треугольнике ABC BH — высота, проведённая из вершины B, $BC = 10$, $AC = 16$ (см. рис. 227). Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

1. По условию $\triangle ABC$ — равнобедренный, BH — высота, значит, BH — медиана, отсюда $AH = CH = 8$.

2. В прямоугольном треугольнике BHC по теореме Пифагора $BC^2 = BH^2 + CH^2$, $BH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

3. $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BH}{2} = \dfrac{16 \cdot 6}{2} = 48.$

Ответ: 48.

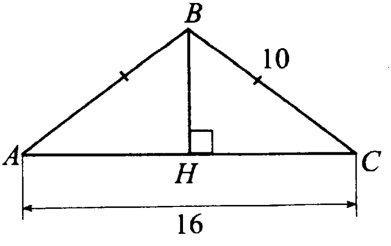


Рис. 227.

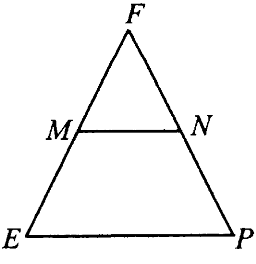


Рис. 228.

2. В треугольнике EFP MN — средняя линия (см. рис. 228). Площадь треугольника MFN равна 14. Найдите площадь четырёхугольника $EMNP$.

Решение.

1. MN — средняя линия, значит, $MN \parallel EP$, $MN = \frac{1}{2}EP$.

2. $\triangle EFP \sim \triangle MFN$ по I признаку подобия ($\angle F$ — общий; $\angle M = \angle E$ как соответственные при $EP \parallel MN$ и секущей EF). Так как $EF = 2MF$, то $EF : MF = 2$. Значит, коэффициент подобия k равен 2.

Тогда $\frac{S_{EFP}}{S_{MFN}} = k^2 = 4$ — по теореме об отношении площадей подобных треугольников, $\frac{S_{EFP}}{14} = 4$, $S_{EFP} = 56$.

$S_{EMNP} = S_{EFP} - S_{MFN} = 56 - 14 = 42$.

Ответ: 42.

3. В треугольнике ABC BK и CH высоты (см. рис. 229). Найдите CH, если $BK = 5$, $AC = 16$, $AB = 10$.

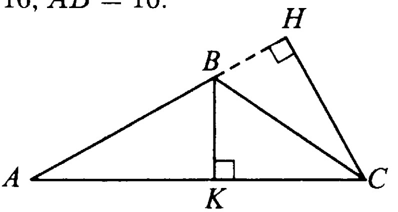


Рис. 229.

Решение. Зная, что площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведённую к этой стороне, запишем равенство: $\frac{AC \cdot BK}{2} = \frac{AB \cdot CH}{2}$, $CH = \frac{AC \cdot BK}{AB} = \frac{16 \cdot 5}{10} = 8$.

Ответ: 8.

4. В параллелограмме $MNKP$ диагональ NP перпендикулярна стороне NK (см. рис. 230). Найдите площадь параллелограмма, если $NP = 7$, $MP = 10$.

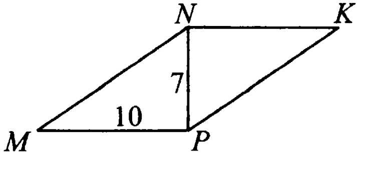


Рис. 230.

Решение. По условию $NP \perp NK$, значит, NP — высота параллелограмма. $S_{MNKP} = NP \cdot NK$, $NK = MP = 10$ как противоположные стороны параллелограмма. $S_{MNKP} = 10 \cdot 7 = 70$.

Ответ: 70.

5. Стороны параллелограмма равны 5 и $3\sqrt{2}$ (см. рис. 231). Найдите площадь параллелограмма, если его острый угол равен 45°.

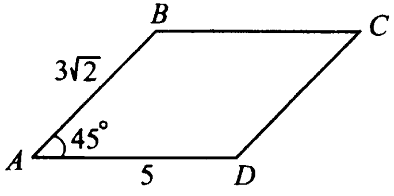


Рис. 231.

Решение. $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle A$.

$S_{ABCD} = 3\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \sin 45° = \dfrac{3\sqrt{2} \cdot 5}{\sqrt{2}} = 15$.

Ответ: 15.

6. Сколько потребуется плиток размером 15 см × 25 см, чтобы покрыть пол в магазине размером 9 м × 10 м? (Схема укладки пола изображена на рисунке 232.)

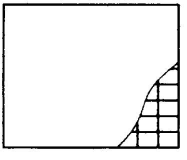


Рис. 232.

Ответ: ________________ .

Решение. 9 м = 900 см; 10 м = 1000 см. Следовательно, укладывая плитку согласно схеме, по длине пола потребуется $\dfrac{1000}{25} = 40$ плиток, а по ширине — $\dfrac{900}{15} = 60$ плиток.

Значит, всего потребуется $40 \cdot 60 = 2400$ плиток.

Ответ: 2400.

7. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12. Точка E — середина стороны BC. Найдите площадь $ABED$.

Решение. Пусть h — длина высоты параллелограмма, перпендикулярной стороне BC (см. рис. 233). Тогда площадь $S_{ABCD} = BC \cdot h = 12$, при этом $S_{ECD} = \frac{1}{2}EC \cdot h = \frac{1}{4}BC \cdot h = \frac{1}{4}S_{ABCD} = 3$. Далее, $S_{ABED} = S_{ABCD} - S_{ECD} = 12 - 3 = 9$.

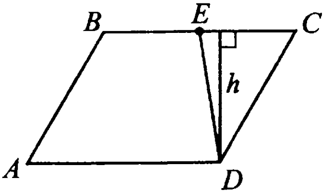


Рис. 233.

Ответ: 9.

8. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 234). Ответ дайте в см^2.

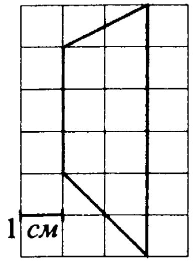


Рис. 234.

Решение. Площадь трапеции равна половине произведения высоты на сумму оснований (см. рис. 235). По рисунку определим, что основания равны 3 см и 6 см, а высота равна 2 см. Поэтому $S = \frac{3+6}{2} \cdot 2 = 9$.

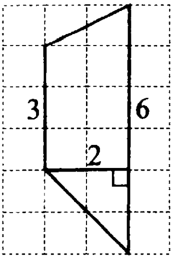


Рис. 235.

Ответ: 9.

Вариант № 1

1. В треугольнике ABC BH — высота, проведённая из вершины B, $BH = 12$, $AC = 7$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: ________________.

2. В треугольнике ABC MN — средняя линия (см. рис. 236). Площадь треугольника ABC равна 36. Найдите площадь треугольника MBN.

Ответ: ________________.

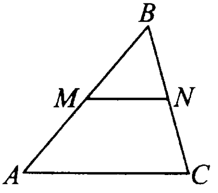


Рис. 236.

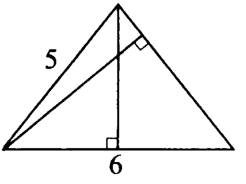


Рис. 237.

3. В треугольнике одна из сторон равна 6, а другая — 5 (см. рис. 237). К этим двум сторонам проведены высоты, меньшая из которых равна 4. Найдите длину второй высоты.

Ответ: ________________.

4. Основание параллелограмма равно 24, а боковая сторона — 15. Найдите площадь параллелограмма, если боковая сторона образует с основанием угол 30°.

Ответ: ________________.

5. Периметр квадрата равен 44. Найдите его площадь.

Ответ: ________________.

6. Пол комнаты, имеющей форму прямоугольника со сторонами 4 м и 7 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 7 см и 20 см. Сколько потребуется таких дощечек?

Ответ: ________________.

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 238.

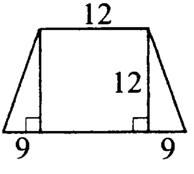


Рис. 238.

Ответ: ________________.

8. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 239.

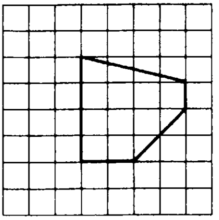


Рис. 239.

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. В треугольнике APQ PQ — высота, проведённая к стороне AQ, $PQ = 7$, $AQ = 18$. Найдите площадь треугольника APQ.

Ответ: ________________ .

2. В треугольнике MKN EF — средняя линия (см. рис. 240). Найдите площадь треугольника MKN, если площадь треугольника KEF равна 24.

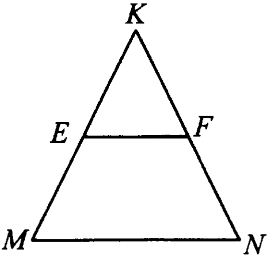


Рис. 240.

Ответ: ________________ .

3. В треугольнике со сторонами 22 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой стороне, равна 3. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ: ________________ .

4. В параллелограмме $ABCD$ один из углов равен 45°. Найдите площадь параллелограмма, если стороны равны $3\sqrt{2}$ и 4.

Ответ: ________________ .

5. Найдите площадь квадрата, если его периметр равен 20.

Ответ: ________________ .

6. Пол помещения, имеющего форму прямоугольника со сторонами 3 м и 4 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 20 см и 15 см. Сколько потребуется таких дощечек?

Ответ: ________________.

7. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 241.

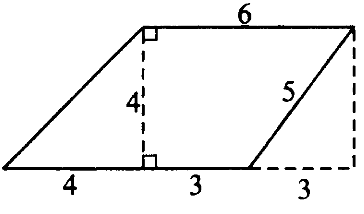


Рис. 241.

Ответ: ________________.

8. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 242.

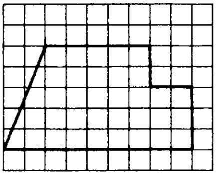


Рис. 242.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. В треугольнике MNK $MN = NK = 10$, $MK = 12$. Найдите площадь треугольника MNK.

Ответ: ________________.

2. В треугольнике ABC отрезок AF — медиана. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABF равна 15.

Ответ: ________________.

3. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $8\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: ________________.

4. Из одной вершины ромба проведены две высоты, одна из них равна 7. Найдите другую высоту.

Ответ: ________________.

5. Найдите угол между диагоналями прямоугольника, если его площадь равна $16\sqrt{3}$, а диагональ равна 8. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________.

6. Найдите длину диагонали квадрата, если его площадь равна 98.

Ответ: ________________.

7. Площадь ромба равна 72, острый угол — 30°. Найдите сторону ромба.

Ответ: ________________.

8. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 243.

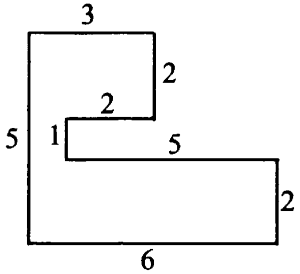


Рис. 243.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 6. Найдите площадь треугольника, если боковая сторона равна 10.

Ответ: ________________.

2. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны AD. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника DCK равна 5 (см. рис. 244).

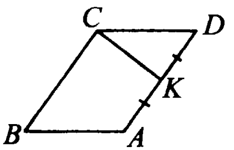


Рис. 244.

Ответ: ________________.

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $16\sqrt{2}$, а один из острых углов равен 45°. Найдите площадь треугольника.

Ответ: ________________ .

4. Две высоты, опущенные из одной вершины параллелограмма, равны 4 и 8 (см. рис. 245). Длина меньшей стороны равна 5. Найдите длину большей стороны.

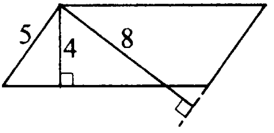


Рис. 245.

Ответ: ________________ .

5. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, $\angle AOD = 150°$, $AC = 4$. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: ________________ .

6. Найдите площадь квадрата, если длина его диагонали равна 6.

Ответ: ________________ .

7. Периметр ромба равен 60, а один из углов равен 30°. Найдите площадь ромба.

Ответ: ________________ .

8. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 246.

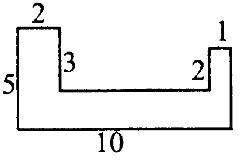


Рис. 246.

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. В треугольнике ADK $\angle A = 45°$, $AD = 7\sqrt{2}$, $AK = 6$. Найдите площадь треугольника ADK.

Ответ: ________________ .

2. В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 10, а высота, проведённая к этой стороне, равна 5. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: ________________.

3. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются под углом 30°. Найдите площадь параллелограмма, если $AC = 7$, $BD = 8$.

Ответ: ________________.

4. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 25, а катет — 15. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: ________________.

5. В прямоугольнике со сторонами 4 и 6 соединены середины соседних сторон (см. рис. 247). Найдите площадь получившегося параллелограмма.

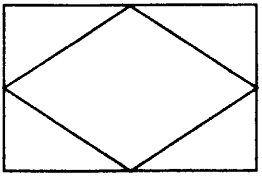


Рис. 247.

Ответ: ________________.

6. В треугольнике MNP отмечены середины E и F сторон MN и NP соответственно (см. рис. 248). Площадь треугольника MNP равна 220. Найдите площадь четырёхугольника $MEFP$.

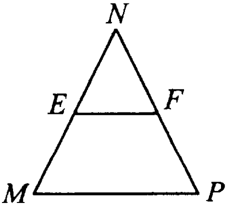


Рис. 248.

Ответ: ________________.

7. Высота трапеции равна 12, а средняя линия — 5. Найдите площадь трапеции.

Ответ: ________________.

8. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 249). Ответ дайте в см^2.

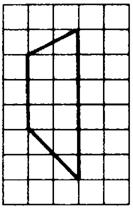


Рис. 249.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. В треугольнике KFM $\angle KFM = 60°$, $KF = 2\sqrt{3}$, $FM = 8$. Найдите площадь треугольника KFM.

Ответ: ________________ .

2. Диагональ параллелограмма перпендикулярна одной из сторон параллелограмма, как показано на рисунке 250. Найдите площадь параллелограмма.

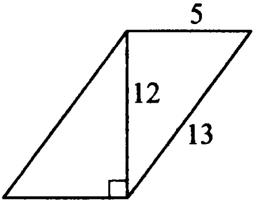


Рис. 250.

Ответ: ________________ .

3. Площадь ромба равна 12, а одна из его диагоналей равна 6. Найдите длину другой диагонали ромба.

Ответ: ________________ .

4. В прямоугольнике одна сторона равна 5, а диагональ равна 13. Найдите площадь прямоугольника.

Ответ: ________________ .

5. В прямоугольнике, одна из сторон которого равна 8, соединены середины соседних сторон (см. рис. 251). Площадь получившегося параллелограмма равна 40. Найдите неизвестную сторону прямоугольника.

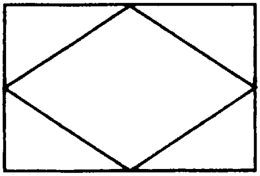


Рис. 251.

Ответ: ________________.

6. В треугольнике MNP отмечены середины E и F сторон MN и NP соответственно (см. рис. 252). Площадь треугольника ENF равна 35. Найдите площадь четырёхугольника $MEFP$.

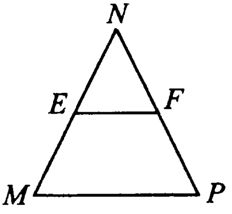


Рис. 252.

Ответ: ________________.

7. Высота трапеции равна 7, а средняя линия — 11. Найдите площадь трапеции.

Ответ: ________________.

8. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 253.

Ответ: ________________.

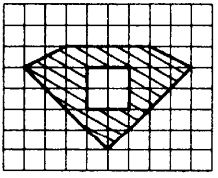


Рис. 253.

§ 25. Геометрия. Окружность и круг

Основные сведения

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки (центра окружности). Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется **радиусом**. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**. Диаметр — это наибольшая хорда окружности. Диаметр в 2 раза больше радиуса.

Любые две точки A и B окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 254 они обозначены тремя точками: $\smile ANB$ и $\smile AMB$. Если из контекста или рисунка понятно, о какой дуге идёт речь, то её обозначают только с помощью двух граничных точек, например, $\smile AB$ (см. рис. 254).

Часть плоскости, состоящая из всех точек, которые лежат внутри некоторой окружности, вместе с точками самой окружности, называется **кругом** (см. рис. 255).

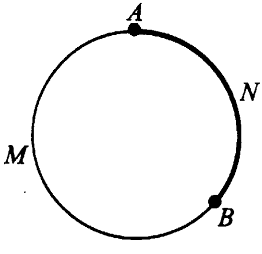


Рис. 254.

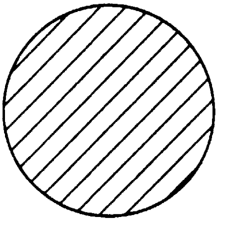


Рис. 255.

Взаимное расположение прямой и окружности

Окружность и прямая могут иметь две общие точки (см. рис. 256а), одну общую точку (см. рис. 256б) или не иметь общих точек (см. рис. 256в).

Если общих точек 2, то прямая называется **секущей** (см. рис. 256а), если такая точка одна, то прямая называется **касательной** (см. рис. 256б), а общая точка — **точкой касания**.

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. На рисунке 257 касательная $a \perp OA$.

Если радиус окружности равен R, то длина окружности $l = 2\pi R$, а площадь круга, ограниченного данной окружностью, $S = \pi R^2$. Зная

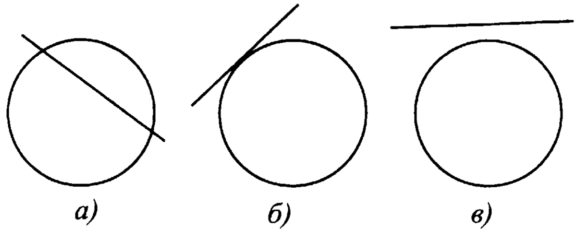


Рис. 256.

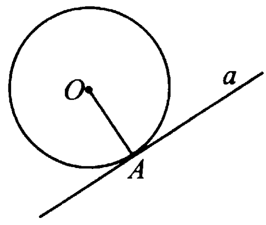


Рис. 257.

диаметр (d), можно также найти длину окружности как $l = \pi d$ и площадь круга по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

Углы и отрезки, связанные с окружностью

Градусная мера всей окружности составляет 360°.

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным**. Угловая величина дуги равна величине центрального угла, на неё опирающегося. Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным** (см. рис. 258). Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

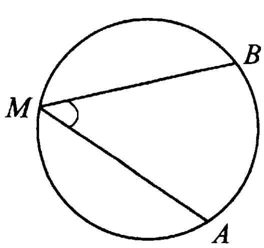


Рис. 258.

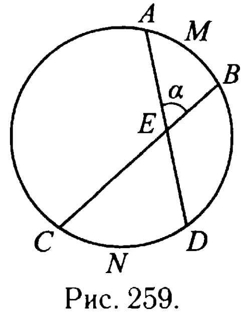


Рис. 259.

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами. На рисунке 259

$\alpha = \frac{1}{2}(\smile AMB + \smile CND)$.

Кроме того, выполнено равенство $AE \cdot ED = BE \cdot EC$.

Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности. На рисунке 260 угол $\alpha = \frac{1}{2}(\smile CME - \smile BND)$.

Кроме того, выполнено равенство $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

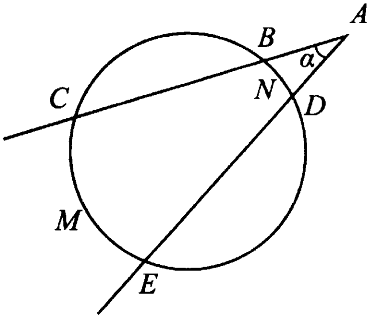


Рис. 260.

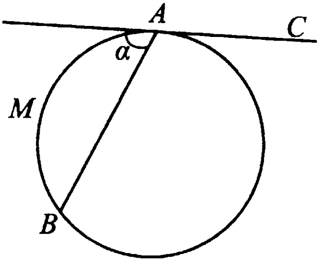


Рис. 261.

Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними. $\alpha = \frac{1}{2} \smile AMB$ на рисунке 261.

Если из одной точки A (см. рис. 262) проведены к окружности касательная AB (B — точка касания) и секущая AC (C, D — точки пересечения секущей с окружностью), то $AB^2 = AD \cdot AC$.

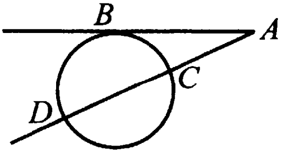


Рис. 262.

Треугольник и окружность

В любой треугольник можно вписать окружность, которая будет касаться каждой из его сторон, то есть иметь с ней одну общую точку. Такая окружность — единственная. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник (см. рис. 263).

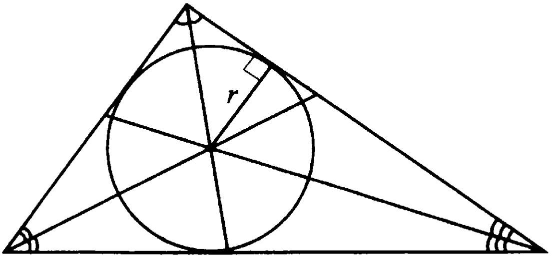
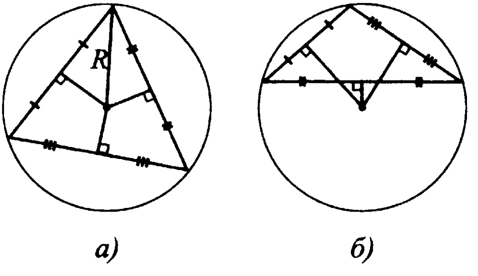


Рис. 263.

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности $\left(S = p \cdot r, p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, которая проходит через все его вершины. Такая окружность — единственная. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника (см. рис. 264).



а) *б)*

Рис. 264.

Площадь треугольника равна отношению произведения длин всех сторон к учетверённому радиусу описанной окружности $\left(S = \dfrac{abc}{4R}\right)$.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является серединой гипотенузы (см. рис. 265). Радиус равен половине гипотенузы.

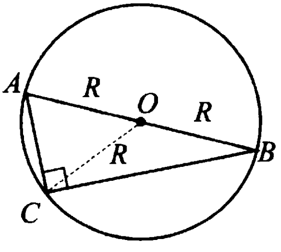


Рис. 265.

Если один из углов треугольника опирается на диаметр описанной окружности, то он равен 90°.

Четырёхугольник и окружность

Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.

Не вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. $AD + BC = AB + CD$ (см. рис. 266).

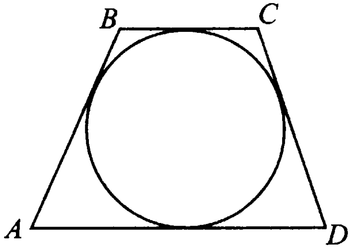


Рис. 266.

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

$\angle BCD + \angle BAD = \angle CBA + \angle CDA = 180°$ (см. рис. 267).

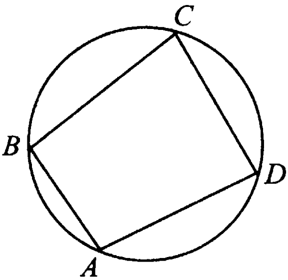


Рис. 267.

Если сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Вариант с решениями

1. Найдите длину окружности, если радиус окружности равен 15. В ответе запишите $\frac{C}{\pi}$, где C — длина окружности.

Решение. Найдём длину окружности по формуле $C = 2\pi r$, где r — радиус окружности.

$C = 2\pi \cdot 15 = 30\pi$, $\dfrac{C}{\pi} = \dfrac{30\pi}{\pi} = 30$.

Ответ: 30.

2. Найдите площадь круга (см. рис. 268), если площадь сектора равна 9 и $\angle AOB = 90°$.

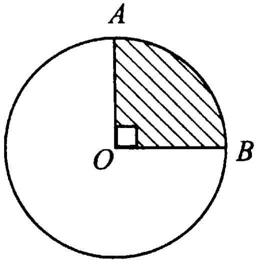


Рис. 268.

Решение. По условию $\angle AOB = 90°$. Так как градусная мера всей окружности составляет 360°, то указанный сектор составляет $\dfrac{90°}{360°} = \dfrac{1}{4}$ круга. $S_{\text{круга}} = 4S_{\text{сект.}}$.

$S_{\text{круга}} = 4 \cdot 9 = 36$.

Ответ: 36.

3. К окружности с центром в точке O проведены касательные AC и AB (см. рис. 269), OB и OC — радиусы, $AO = 20$, $AB = 16$. Найдите радиус окружности.

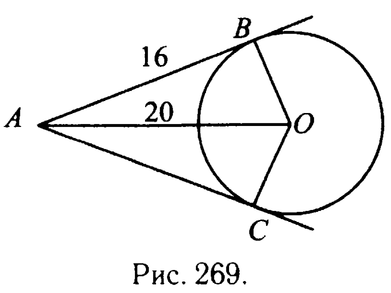


Рис. 269.

Решение. AB — касательная, OB — радиус, B — точка касания, по свойству касательной $AB \perp OB$. В прямоугольном треугольнике AOB по теореме Пифагора $AO^2 = AB^2 + OB^2$, $OB = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

Ответ: 12.

4. Вычислите градусную меру центрального угла, если соответствующая ему дуга составляет $\frac{4}{9}$ дуги окружности.

Решение. Градусная мера всей дуги окружности составляет 360°, тогда $\frac{4}{9}$ этой дуги равны $\frac{360° \cdot 4}{9} = 160°$, то есть $\smile AMB = 160°$ (см. рис. 270). Центральный угол равен градусной величине дуги, на которую он опирается, угол AOB — центральный, опирается на дугу AMB, значит, $\angle AOB = 160°$.

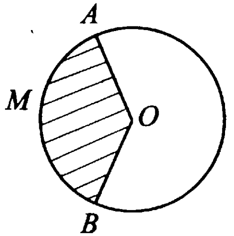


Рис. 270.

Ответ: 160.

5. AB и CD — хорды окружности (см. рис. 271). $AM = 6$, $BM = 4$, $CM = 3$. Найдите DM.

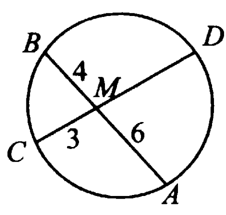


Рис. 271.

Решение. $BM \cdot AM = CM \cdot DM$ — по теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд.

$$DM = \frac{BM \cdot AM}{CM},\ DM = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

6. Из точки F проведены касательная FE (E — точка касания) и секущая FK, пересекающая окружность в точках P и K (см. рис. 272). Найдите FP, если $FE = 8$, $FK = 16$.

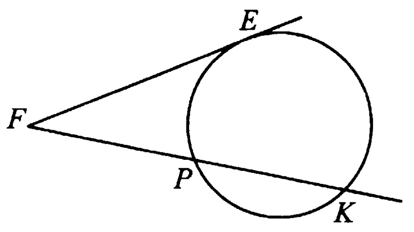


Рис. 272.

Решение. По теореме о касательной и секущей, проведённых из одной точки $FE^2 = FK \cdot FP$, $FP = \dfrac{FE^2}{FK}$, $FP = \dfrac{8^2}{16} = 4$.

Ответ: 4.

7. Трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD и периметром 56 описана около окружности (см. рис. 273). Найдите BC, если AD больше BC на 7.

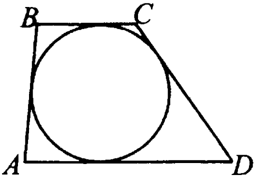


Рис. 273.

Решение. Трапеция $ABCD$ описана около окружности, поэтому $AD + BC = AB + CD$. По условию $AB + BC + CD + AD = 56$, $(AD + BC) + (AB + BC) = 56$, $2(AD + BC) = 56$, $AD + BC = 56 : 2 = 28$.

Пусть $BC = x$, тогда $AD = x + 7$, $x + x + 7 = 28$, $x = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

8. Четырёхугольник $MNPK$ вписан в окружность (см. рис. 274), угол M равен углу P. Найдите градусную меру угла P.

Решение. Так как четырёхугольник вписан в окружность, то $\angle M + \angle P = 180°$. По условию $\angle M = \angle P$, значит, $\angle P = 180° : 2 = 90°$.

Ответ: 90.

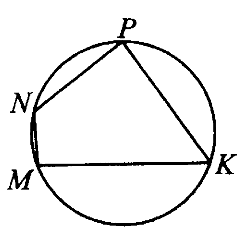


Рис. 274.

Вариант № 1

1. Найдите длину окружности, если радиус окружности равен 3. В ответе запишите $\frac{C}{\pi}$, где C — длина окружности.

Ответ: ________________ .

2. Найдите площадь S круга, если радиус окружности равен 5. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

Ответ: ________________ .

3. К окружности с центром в точке O проведены касательные AC и AB, OB и OC — радиусы, $OB = 3$, $AB = 4$ (см. рис. 275). Найдите AO.

Ответ: ________________ .

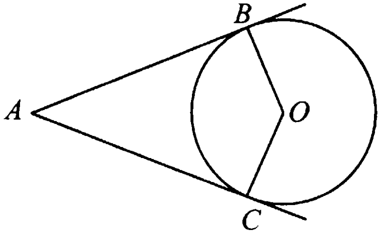


Рис. 275.

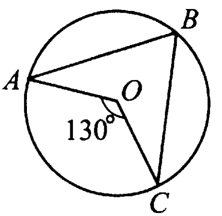


Рис. 276.

4. Вычислите градусную меру угла ABC, изображённого на рисунке 276, если O — центр окружности.

Ответ: ________________ .

5. AB и CD — хорды окружности (см. рис. 277). $AK = 7$, $BK = 4$, $DK = 8$. Найдите CK.

Ответ: ________________ .

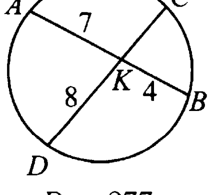


Рис. 277.

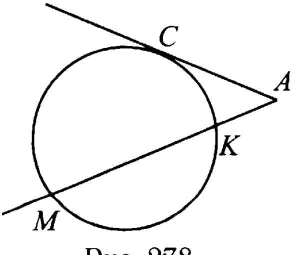


Рис. 278.

6. Из точки A к окружности проведены касательная AC (C — точка касания) и секущая AM, пересекающая окружность в точках K и M (см. рис. 278). Найдите AC, если $AK = 4$, $MK = 12$.

Ответ: ________________ .

7. Сумма двух противоположных сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равна 20. Найдите периметр этого четырёхугольника.

Ответ: ________________ .

8. Пользуясь данными рисунка 279, найдите градусную меру угла D.

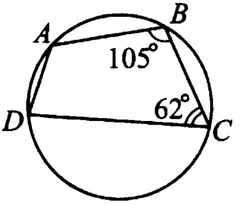


Рис. 279.

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Найдите длину окружности, если радиус окружности равен 7. В ответе запишите $\frac{C}{\pi}$, где C — длина окружности.

Ответ: ________________ .

2. Найдите площадь S круга, если радиус окружности равен 4. В ответе запишите $\frac{S}{\pi}$.

Ответ: ________________ .

3. К окружности с центром в точке O проведены касательная EF (F — точка касания) и секущая EO (см. рис. 280). Найдите радиус окружности, если $EF = 7$, $EO = 25$.

Ответ: ________________ .

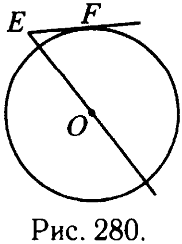


Рис. 280.

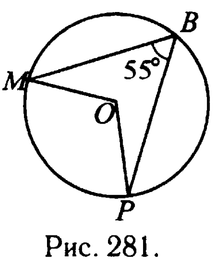


Рис. 281.

4. Вычислите градусную меру угла MOP, изображённого на рисунке 281, O — центр окружности.

Ответ: ________________ .

5. AM и CD — хорды окружности (см. рис. 282). $CP = 3$, $PA = 6$, $PD = 8$. Найдите MP.

Ответ: ________________.

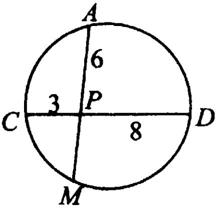


Рис. 282.

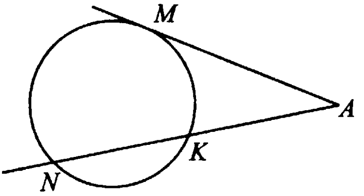


Рис. 283.

6. Из точки A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и секущая AN, пересекающая окружность в точках K и N (см. рис. 283). Найдите AN, если $AK = 2$, $AM = 4$.

Ответ: ________________.

7. Периметр равнобедренной трапеции $ABCD$, описанной около окружности, равен 64 (см. рис. 284). Найдите боковую сторону.

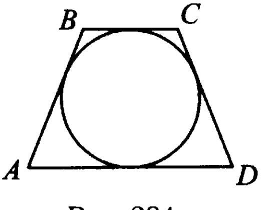


Рис. 284.

Ответ: ________________.

8. Пользуясь данными рисунка 285, найдите градусную меру угла M, если $\angle M = 2\angle K$.

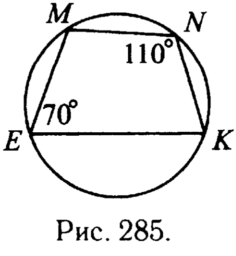


Рис. 285.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Найдите градусную меру центрального угла окружности, если дуга, на которую он опирается, составляет $\frac{1}{6}$ дуги всей окружности.

Ответ: __________________.

2. Две трубы, диаметры которых равны 16 см и 30 см, требуется заменить одной, площадь поперечного сечения которой равна сумме площадей поперечных сечений двух данных. Каким должен быть диаметр новой трубы? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: __________________.

3. К окружности с центром в точке O проведены касательная AC (C — точка касания) и секущая AO (см. рис. 286). Найдите диаметр окружности, если $AC = 15$, $AO = 17$.

Ответ: __________________.

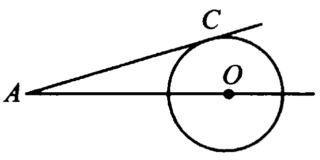


Рис. 286.

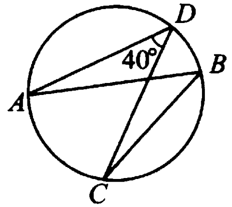


Рис. 287.

4. Найдите градусную меру угла ABC, изображённого на рисунке 287.

Ответ: __________________.

5. AM и CD — хорды окружности (см. рис. 288). $AE = 6$, $ME = 5$, $CD = 13$. Найдите CE, если $CE > ED$.

Ответ: __________________.

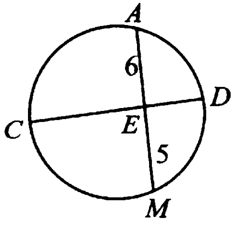


Рис. 288.

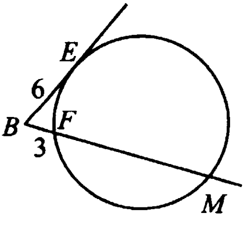


Рис. 289.

6. Из точки B проведены касательная BE (E — точка касания) и секущая BM, пересекающая окружность в точках F и M (см. рис. 289). Найдите FM, если $BE = 6$, $BF = 3$.

Ответ: __________________.

7. Периметр прямоугольной трапеции, описанной вокруг окружности, равен 38, её бóльшая боковая сторона равна 10 (см. рис. 290). Найдите радиус окружности.

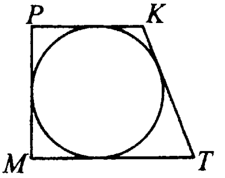


Рис. 290.

Ответ: ________________.

8. Какой угол (в градусах) описывает часовая стрелка за 15 минут? *Ответ*: ________________.

Вариант № 4

1. Найдите градусную меру центрального угла окружности, если соответствующая ему дуга составляет $\frac{1}{8}$ дуги всей окружности.

Ответ: ________________.

2. Две трубы, диаметры которых равны 27 см и 36 см, требуется заменить одной, площадь поперечного сечения которой равна сумме площадей поперечных сечений двух данных. Каким должен быть диаметр новой трубы? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: ________________.

3. К окружности с центром в точке O проведены касательная MN (N — точка касания) и секущая MO (см. рис. 291). Найдите MN, если $MO = 25$, а диаметр окружности равен 30.

Ответ: ________________.

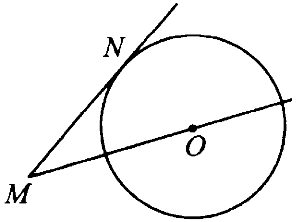


Рис. 291.

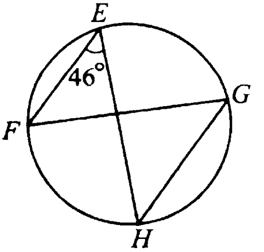


Рис. 292.

4. Найдите градусную меру угла FGH, изображённого на рисунке 292.

Ответ: ________________ .

5. AC и BD — хорды окружности (см. рис. 293). $AC = 17$, $DF = 6$, $FB = 10$. Найдите AF, если $AF < FC$.

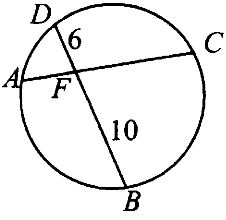


Рис. 293.

Ответ: ________________ .

6. Из точки C проведены две секущие к окружности. Одна секущая пересекает окружность в точках E и K, другая — в точках F и P (см. рис. 294). Найдите CF, если $CE = 5$, $CK = 12$, $CP = 15$.

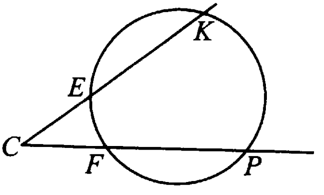


Рис. 294.

Ответ: ________________ .

7. Периметр прямоугольной трапеции, описанной вокруг окружности, равен 36. Радиус окружности равен 4 (см. рис. 295). Найдите бóльшую боковую сторону.

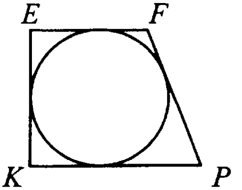


Рис. 295.

Ответ: ________________ .

8. На какой угол в градусах поворачивается минутная стрелка, пока часовая проходит 8°?

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Найдите длину окружности, вписанной в квадрат, со стороной 4 (см. рис. 296). В ответе запишите $\frac{C}{\pi}$, где C — длина окружности.

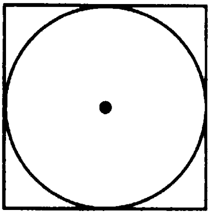


Рис. 296.

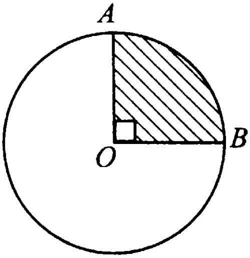


Рис. 297.

Ответ: ________________.

2. Найдите площадь круга, если площадь заштрихованного сектора равна 5 и $\angle AOB = 90°$ (см. рис. 297).

Ответ: ________________.

3. К окружности с центром в точке O проведены касательная EF (F — точка касания) и секущая EO, пересекающая окружность в точках M и N (см. рис. 298). Найдите MN, если $EF = 24$, $EO = 25$.

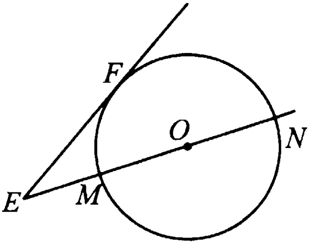


Рис. 298.

Ответ: ________________.

4. Найдите градусную меру вписанного угла, если он опирается на дугу, которая составляет $\frac{2}{9}$ дуги окружности.

Ответ: ________________.

5. AB и CD — хорды окружности (см. рис. 299). $OD = 2$, $OC = 16$, $AO : OB = 2 : 1$. Найдите AO.

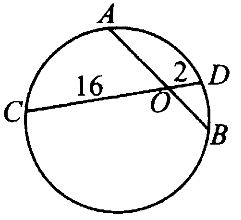


Рис. 299.

Ответ: ________________.

6. Из точки K проведены две секущие к окружности. Одна секущая пересекает окружность в точках P и E, другая — в точках Q и F (см. рис. 300). Найдите PE, если $KP = 5$, $KQ = 4$, $QF = 16$.

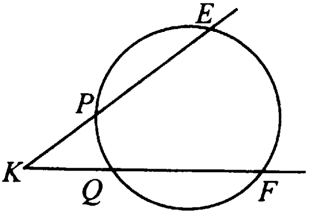


Рис. 300.

Ответ: ________________.

7. Периметр четырёхугольника, описанного вокруг окружности, равен 36, две его стороны — 8 и 12 (см. рис. 301). Найдите бóльшую из оставшихся сторон.

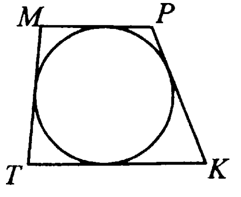


Рис. 301.

Ответ: ________________.

8. Сколько спиц в колесе, если угол между соседними спицами равен 4°?
Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. В квадрат вписана окружность (см. рис. 302). Найдите сторону квадрата, если длина окружности равна 12π.

Ответ: ________________ .

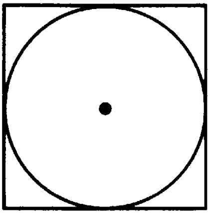


Рис. 302.

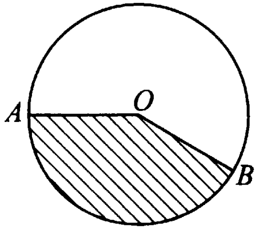


Рис. 303.

2. Площадь круга равна 36 (см. рис. 303). Найдите площадь заштрихованного сектора, если $\angle AOB = 120°$.

Ответ: ________________ .

3. К окружности с центром в точке O проведены касательная MN (N — точка касания) и секущая MO, пересекающая окружность в точках E и F (см. рис. 304). Найдите MO, если $MN = 12$, $EF = 10$.

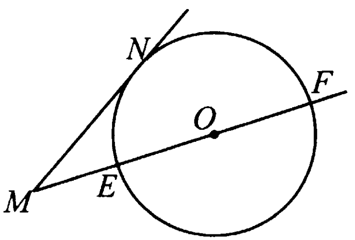


Рис. 304.

Ответ: ________________ .

4. Найдите градусную меру центрального угла, если соответствующая ему дуга составляет $\frac{5}{9}$ дуги окружности.

Ответ: ________________ .

5. Хорды AM и CP окружности пересекаются в точке K (см. рис. 305). $AK = 12$, $KM = 3$, $KC = KP$. Найдите KC.

Ответ: ________________ .

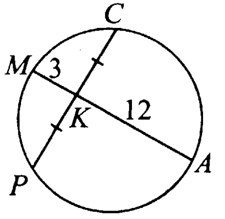


Рис. 305.

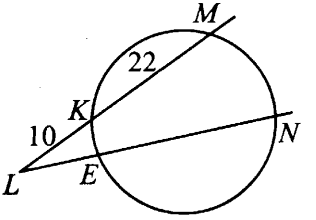


Рис. 306.

6. Из точки L проведены две секущие к окружности. Одна секущая пересекает окружность в точках K и M, другая — в точках E и N (см. рис. 306). $LK = 10$, $KM = 22$, $LE : EN = 1 : 4$. Найдите EN.

Ответ: ________________ .

7. Периметр четырёхугольника $ABCD$, описанного около окружности, равен 24 (см. рис. 307). Найдите CD, если AB больше CD на 4.

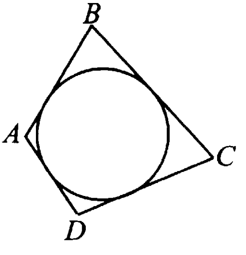


Рис. 307.

Ответ: ________________ .

8. За сколько часов Земля повернётся вокруг своей оси на $135°$?

Ответ: ________________ .

§ 26. Геометрия. Выбор утверждений

Основные сведения

В данном параграфе проверяется знание теорем, определений и свойств из всего школьного курса планиметрии. Необходимую теоретическую информацию о них можно найти в предыдущих параграфах, а также в учебнике по геометрии.

Вариант с решениями

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Утверждение является свойством биссектрис треугольника, указанного в школьном курсе геометрии.

Ответ: Да.

2. Четырёхугольник, у которого все стороны равны, является квадратом.

Решение. Утверждение не верно, так как существует четырёхугольник с равными сторонами, не являющийся квадратом. Например, не являющийся квадратом ромб (см. рис. 308).

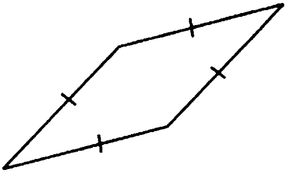


Рис. 308.

Ответ: Нет.

3. Четырёхугольник, у которого суммы противоположных углов равны по $180°$, можно описать около окружности.

Решение. Утверждение не верно. Например, у прямоугольника со сторонами 1 и 2 суммы противоположных углов равны по $180°$. Если предположить, что его можно описать около окружности, то по свойству окружности, вписанной в четырёхугольник, суммы противоположных сторон четырёхугольника должны быть равны. В нашем случае $1+1 \neq 2+2$, следовательно, этот четырёхугольник нельзя описать около окружности.

Ответ: Нет.

4. Площадь квадрата равна квадрату его диагонали.

Решение. Утверждение не верно. Например, у квадрата со стороной 1 квадрат диагонали равен 2, а площадь равна 1. Более того, можно доказать утверждение, что площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали.

Ответ: Нет.

5. Коэффициент подобия двух подобных треугольников равен отношению радиусов вписанных в них окружностей.

Решение. Утверждение верное.

Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и k — их коэффициент подобия. Тогда $\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$, где P_{ABC}, $P_{A_1B_1C_1}$ — периметры треугольников, а $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$, где S_{ABC}, $S_{A_1B_1C_1}$ — площади треугольников. По формуле площади треугольника $S = \dfrac{P}{2} \cdot r$ (P — периметр, S — площадь, r — радиус вписанной окружности) получаем, что $r = \dfrac{2S}{P}$. Отсюда $r = \dfrac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}$ и $r_1 = \dfrac{2S_{A_1B_1C_1}}{P_{A_1B_1C_1}}$, где r и r_1 — радиусы окружностей, вписанных в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, соответственно. Тогда $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} : \dfrac{2S_{A_1B_1C_1}}{P_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} \cdot \dfrac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k^2 \cdot \dfrac{1}{k} = k.$

Ответ: Да.

6. В прямоугольном треугольнике отношение катета к гипотенузе равно синусу угла, противолежащего этому катету.

Решение. Справедливость утверждения следует из определения синуса острого угла прямоугольного треугольника.

Ответ: Да.

7. В ромбе диагонали являются биссектрисами его углов.

Решение. Утверждение верно по одному из свойств ромба, указанных в школьном курсе планиметрии.

Ответ: Да.

8. Сумма двух сторон треугольника меньше третьей стороны.

Решение. Утверждение неверное, так как противоречит неравенству треугольника: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Ответ: Нет.

Вариант № 1

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Ответ: ________________.

2. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется прямоугольником.

Ответ: ________________.

3. В любой прямоугольник можно вписать окружность.

Ответ: ________________.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Ответ: ________________.

5. В подобных треугольниках отношение соответствующих медиан равно коэффициенту подобия.

Ответ: ________________.

6. В прямоугольном треугольнике тангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Ответ: ________________.

7. Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам.

Ответ: ________________.

8. Треугольник со сторонами 2, 5, 9 существует.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. Серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке.

Ответ: ________________.

2. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется прямоугольником.

Ответ: ________________.

3. В выпуклый четырёхугольник, у которого суммы противоположных сторон равны, можно вписать окружность.

Ответ: ________________.

4. Площадь прямоугольника равна произведению двух любых его сторон.

Ответ: ________________ .

5. В подобных треугольниках отношение соответствующих биссектрис равно коэффициенту подобия.

Ответ: ________________ .

6. В прямоугольном треугольнике отношение катета к гипотенузе равно косинусу угла, прилежащего к этому катету.

Ответ: ________________ .

7. Диагонали прямоугольника взаимно перпендикулярны.

Ответ: ________________ .

8. Треугольник со сторонами 8, 11, 16 существует.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Ответ: ________________ .

2. В подобных треугольниках сходственные стороны равны.

Ответ: ________________ .

3. Площадь круга радиуса r равна πr^2.

Ответ: ________________ .

4. Вписанным называется угол, вершина которого лежит на окружности.

Ответ: ________________ .

5. Четырёхугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.

Ответ: ________________ .

6. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ________________ .

7. Сумма ненулевых векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ равна $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: ________________ .

8. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. В равностороннем треугольнике все углы равны.

Ответ: ________________.

2. В подобных треугольниках соответствующие углы равны.

Ответ: ________________.

3. Площадь круга диаметром d равна $\frac{\pi d^2}{8}$.

Ответ: ________________.

4. Вписанным называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

Ответ: ________________.

5. Выпуклый четырёхугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом.

Ответ: ________________.

6. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно радиусу описанной окружности.

Ответ: ________________.

7. Для произвольного параллелограмма $ABCD$ выполняется $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Ответ: ________________.

8. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. Сумма углов треугольника равна 270°.

Ответ: ________________.

2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины.

Ответ: ________________.

3. Площадь кругового сектора равна $\frac{\pi r^2 \alpha}{180^\circ}$, где r — радиус круга, α — величина центрального угла (в градусах), ограничивающего этот сектор.

Ответ: ________________ .

4. Площадь ромба равна половине произведения квадрата его стороны на синус угла между сторонами.

Ответ: ________________ .

5. Если в одной окружности хорды AB и CD пересекаются в точке P, то $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

Ответ: ________________ .

6. Внешний угол треугольника равен внутреннему углу, смежному с ним.

Ответ: ________________ .

7. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Ответ: ________________ .

8. Если в трапецию вписана окружность, то трапеция равнобедренная.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

Для каждого из утверждений 1–8 в ответе укажите «да», если утверждение верно, и «нет», если не верно.

1. Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Ответ: ________________ .

2. Расстояние от вершины равностороннего треугольника до точки пересечения его медиан равно радиусу описанной окружности.

Ответ: ________________ .

3. Длина дуги окружности $\frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$, где r — радиус круга, α — величина центрального угла (в градусах), опирающегося на эту дугу.

Ответ: ________________ .

4. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту трапеции.

Ответ: ________________ .

5. Если точка лежит вне окружности, AP — касательная (P — точка касания), AQ — секущая (точки Q и L лежат на окружности), то $AP^2 = AQ \cdot AL$.

Ответ: ________________ .

6. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

Ответ: ________________ .

7. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой пересечения биссектрис.

Ответ: ________________ .

8. Если трапеция вписана в окружность, то трапеция равнобедренная.

Ответ: ________________ .

§ 27. Геометрия. Задания повышенного уровня*

Основные сведения

Решение геометрических задач профильного уровня предполагает использование большинства геометрических фактов по программе основной школы. Отметим только те, которые наиболее часто используются при решении задач данного параграфа.

— Свойство медианы прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла к гипотенузе и свойство середины гипотенузы;

— свойство прямоугольного треугольника, вписанного в окружность;

— свойства средней линии треугольника и трапеции;

— свойство равнобедренного треугольника, связанное с его медианой, биссектрисой и высотой, проведёнными к основанию;

— свойство касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности;

— свойство касательной и хорды, проведённых из одной точки на окружности;

— свойства четырёхугольника, вписанного в окружность и описанного около неё;

— признаки равенства и подобия треугольников, отношение площадей подобных треугольников;

— признаки параллельности прямых, признаки параллелограмма;

— свойство суммы квадратов диагоналей параллелограмма;

— формулы площади треугольника: по трём сторонам (формула Герона); по двум сторонам и углу между ними; через радиус вписанной и описанной окружностей;

— формула площади четырёхугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями (формула площади ромба);

— понятия синуса, косинуса и тангенса угла, значение этих функций от углов 30°, 45°, 60°, основное тригонометрическое тождество;

— теоремы синусов и косинусов.

Немаловажно также подчеркнуть роль дополнительных построений при решении задач профильного уровня. Нередко они существенно облегчают решение задачи (см. задачу 2 варианта с решениями).

Вариант с решениями

1. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, являются её диаметрами (см. рис. 309). Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

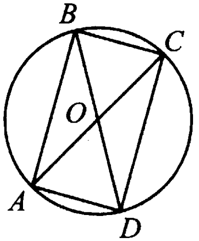


Рис. 309.

Решение. 1) Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$.
AO и OD, BO и OC равны как радиусы одной окружности. $\angle BOC$ и $\angle AOD$ равны как вертикальные углы. Следовательно, $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $BC = AD$ и $\angle ADO = \angle OBC$.

2) Получаем, что накрест лежащие углы при прямых BC и AD и секущей BD равны, поэтому $AD \parallel BC$. Значит, $ABCD$ — параллелограмм. Что и требовалось доказать.

2. Две стороны треугольника равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 2 (см. рис. 310). Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC и его медиану BM (см. рис. 310*а*)). Пусть $AB = 1$, $BC = \sqrt{15}$ и $BM = 2$. Достроим этот треугольник до параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 310б)). Заметим, что $BC = AD = \sqrt{15}$, $BD = 2BM = 4$.

По свойству параллелограмма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, отсюда $AC^2 + 16 = 2(1 + 15)$, $AC^2 = 16$, $AC = 4$.

Ответ: 4.

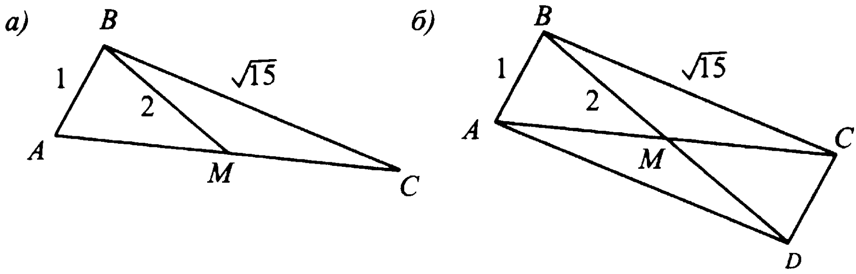


Рис. 310.

3. В параллелограмме $ABCD$ длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а продолжение стороны CD в точке E (см. рис. 311). Найдите длину отрезка KC, если $EC = 1$.

Решение. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK — биссектриса угла A. $\angle 2$ и $\angle 3$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\triangle ABK$ — равнобедренный, $BK = AB = 4$.

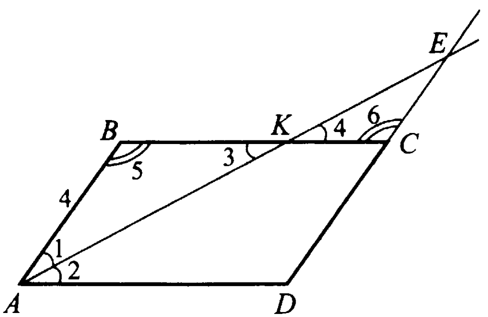


Рис. 311.

2) $\triangle ABK \sim \triangle ECK$ по двум углам ($\angle 3$ и $\angle 4$ равны как вертикальные, $\angle 5$ и $\angle 6$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BC).

3) Так как треугольник ABK — равнобедренный, то равнобедренным будет и треугольник ECK, поэтому $KC = EC = 1$.

Ответ: 1.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки M и N — середины боковых сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN, если периметр P_{ABC} треугольника ABC равен 32, а длина отрезка MN равна 6.

Решение. 1) Точки M и N — середины сторон AB и BC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $AC = 6 \cdot 2 = 12$ (см. рис. 312).

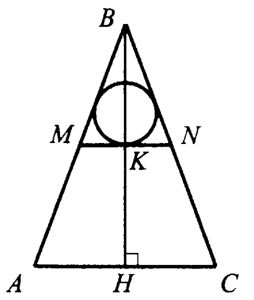


Рис. 312.

$AB = BC = \dfrac{P_{ABC} - AC}{2} = \dfrac{32 - 12}{2} = 10,$

2) BH — высота треугольника ABC.
По теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

3) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

4) $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, так как $\angle B$ — общий, $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Сходственными сторонами являются MB и AB. Коэффициент подобия треугольников равен $k = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\dfrac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$,

$S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12$.

5) $P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC} = 16$. Из формулы площади треугольника через радиус r вписанной в него окружности получаем:

$S_{MBN} = \frac{1}{2}r \cdot P_{MBN}$, $r = \dfrac{2S_{MBN}}{P_{MBN}} = \dfrac{2 \cdot 12}{16} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

5. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите диаметр этой окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.

Решение. Точки M и N — середины хорд AB и AC соответственно, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 313).

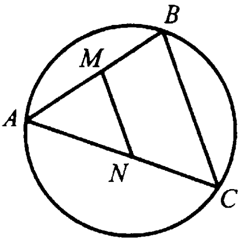


Рис. 313.

$MN = \frac{1}{2}BC$, $BC = 2MN = 2 \cdot 5 = 10$.

Периметр $P_{ABC} = 17 + 9 + 10 = 36$,
полупериметр $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$.

Находим площадь треугольника ABC по формуле Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-10)(18-17)(18-9)} = 36.$

Из формулы площади треугольника через радиус R описанной окружности получаем: $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$, $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 36} = 10{,}625$. Диаметр равен $2 \cdot 10{,}625 = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

Вариант № 1

1. Отрезки AC и BD являются диагоналями параллелограмма $ABCD$, вписанного в окружность. Докажите, что AC и BD являются диаметрами окружности (см. рис. 314).

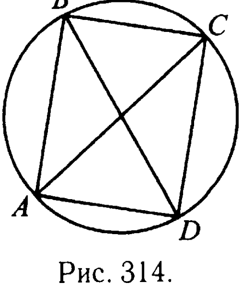


Рис. 314.

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90°$) проведена медиана AD (см. рис. 315). Найдите BL, если AL — высота треугольника и $AB = 1$ см, $AC = \sqrt{15}$ см, $AD = 2$ см.

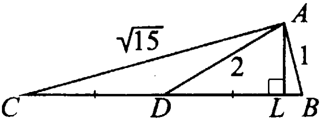


Рис. 315.

Ответ: ________________ .

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6. Точка K делит сторону BC в отношении $2 : 1$. Через точки A и K проведена прямая, пересекающая CD в точке E (см. рис. 316). Найдите DE.

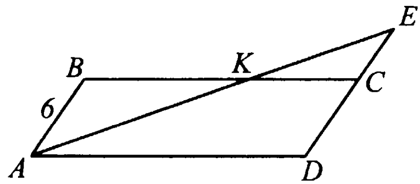


Рис. 316.

Ответ: ________________ .

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) длина средней линии MN равна 6 ($M \in AB$, $N \in BC$), а $\sin \angle BAC = \dfrac{4}{5}$ (см. рис. 317). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN.

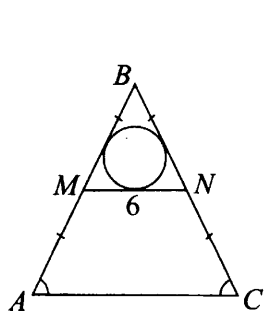


Рис. 317.

Ответ: ________________ .

5. В окружности проведены две хорды AB и AC, равные соответственно 14,4 и 12. Длина отрезка MN, соединяющего середины сторон AB и AC равна 6 (см. рис. 318). Найдите диаметр окружности.

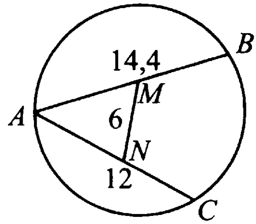


Рис. 318.

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Боковые стороны AB и CD четырёхугольника, вписанного в окружность, равны (см. рис. 319). Докажите, что равны диагонали AC и BD этого четырёхугольника.

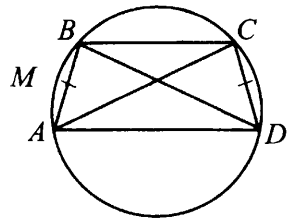


Рис. 319.

2. В треугольнике MNP проведена медиана MD. Найдите её длину, если $MN = 1$, $MP = \sqrt{15}$ и $\cos\angle MNP = \dfrac{1}{4}$ (см. рис. 320).

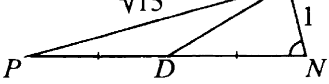


Рис. 320.

Ответ: ________________.

3. Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых, AD и BC пересекаются в точке O, при этом $BO = OC$, $AO = 3$ (см. рис. 321). Найдите OD.

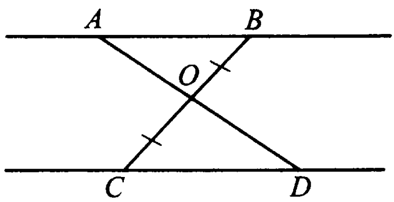


Рис. 321.

Ответ: ________________.

4. Точки M и N делят боковые стороны AB и CB равнобедренного треугольника ABC в отношении $1 : 3$. Периметр треугольника ABC равен $\frac{128}{3}$, $MN = 12$ (см. рис. 322). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MNB.

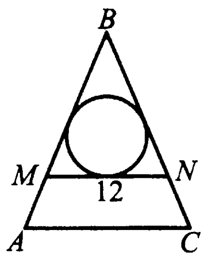


Рис. 322.

Ответ: ________________.

5. В окружности проведены две хорды AB и AC, каждая из которых равна 10. Длина отрезка MN, соединяющего середины сторон AB и AC, равна 6 (см. рис. 323). Найдите радиус окружности.

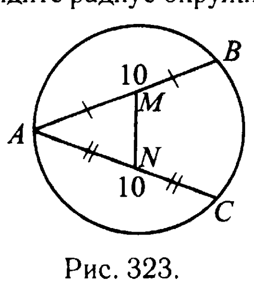


Рис. 323.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. В треугольнике ABC точки M и K выбраны так, что $AB : AM = CB : CK$ (см. рис. 324). Докажите, что $MK \| AC$.

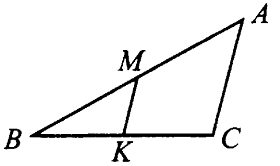


Рис. 324

2. В равнобедренном треугольнике проведена медиана к боковой стороне, равной 4 (см. рис. 325). Найдите квадрат длины основания треугольника, если длина медианы равна 3.

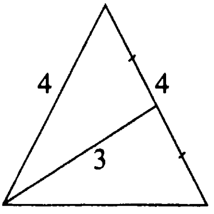


Рис. 325

Ответ: ________________.

3. В параллелограмме сторона и бо́льшая диагональ равны соответственно 3 и $\sqrt{37}$. Найдите периметр параллелограмма, если его острый угол равен 60° (см. рис. 326).

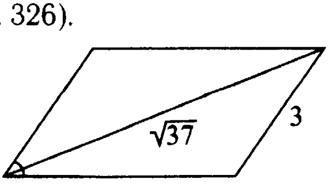


Рис. 326.

Ответ: ________________.

4. Тангенс острого угла BAC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен $\frac{5}{12}$, а расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до катета AC равно 2,5 (см. рис. 327). Найдите периметр этого треугольника.

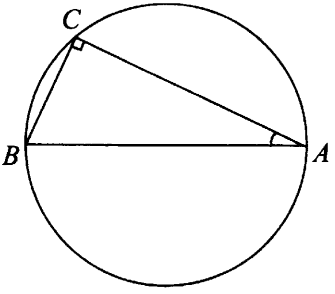


Рис. 327.

Ответ: ______________ .

5. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AC пересекает окружность в точках C и D (см. рис. 328). Найдите AD, если $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

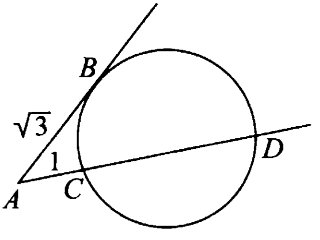


Рис. 328.

Ответ: ______________ .

Вариант № 4

1. В параллелограмме $ABCD$ точки M и K выбраны так, что $AD : MD = BC : KC$ (см. рис. 329). Докажите, что $MK \| AB$.

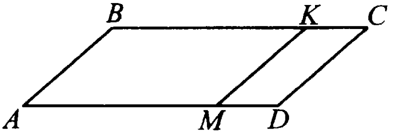


Рис. 329.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 24 (см. рис. 330). Найдите длину боковой стороны.

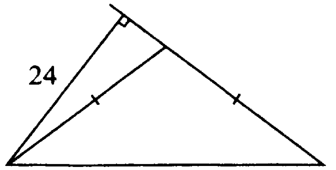


Рис. 330.

Ответ: ________________ .

3. Сторона ромба равна 5 см, а длины диагоналей относятся как 4 : 3 (см. рис. 331). Найдите сумму длин диагоналей ромба.

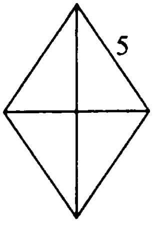


Рис. 331.

Ответ: ________________ .

4. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до этого катета равно 2,5 (см. рис. 332). Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

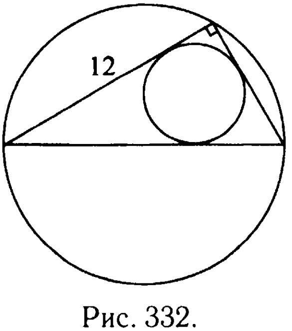


Рис. 332.

Ответ: ________________ .

5. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AM проходит через центр окружности и пересекает её в точках M и N (см. рис. 333). Найдите квадрат расстояния от точки B до прямой AN, если $AM = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

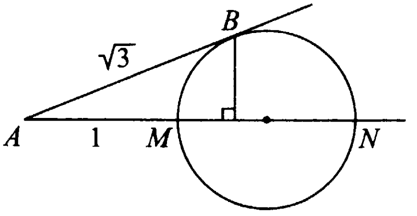


Рис. 333.

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC проведены медианы CK и AM к этим сторонам (см. рис. 334). Докажите, что $CK = AM$.

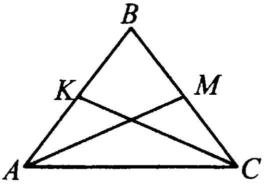


Рис. 334.

2. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведённой к третьей стороне, равна 26 (см. рис. 335). Найдите косинус угла между сторонами треугольника, равными 27 и 29.

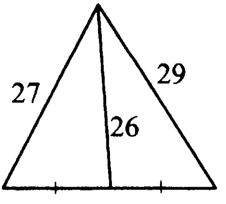


Рис. 335.

Ответ: ________________ .

3. Периметр параллелограмма — 90, а острый угол — 60°. Диагональ параллелограмма (см. рис. 336) делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите бóльшую сторону параллелограмма.

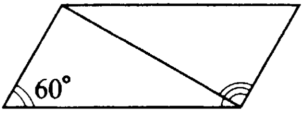


Рис. 336

Ответ: __________________ .

4. Около круга радиусом 2 описана равнобедренная трапеция с острым углом 30° (см. рис. 337). Найдите длину средней линии трапеции.

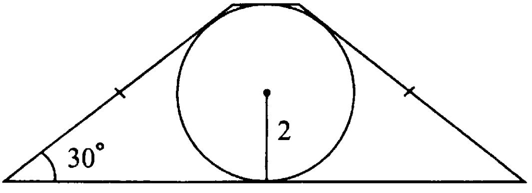


Рис. 337.

Ответ: __________________ .

5. Окружность касается сторон квадрата $ABCD$ в вершинах B и D и делит стороны KL и LM квадрата $CKLM$ на равные части, каждая из которых равна 5 (см. рис. 338). Найдите радиус окружности.

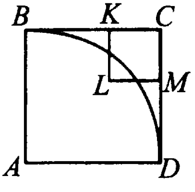


Рис. 338.

Ответ: __________________ .

Вариант № 6

1. В равнобедренном треугольнике ABC с боковыми сторонами AB и BC проведены медианы CK и AM к этим сторонам (см. рис. 339). Докажите, что $\angle MAC = \angle ACK$.

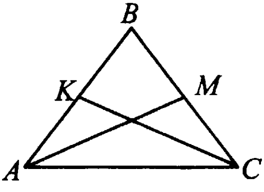


Рис. 339.

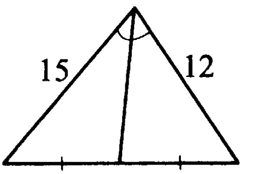


Рис. 340.

2. Длины двух сторон треугольника равны 15 и 12. Они образуют острый угол, синус которого равен $\frac{4}{5}$. Найдите квадрат медианы, проведённой к третьей стороне (см. рис. 340)

Ответ: ________________.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 12$ и $AF : FD = 4 : 3$ (см. рис. 341).

Ответ: ________________.

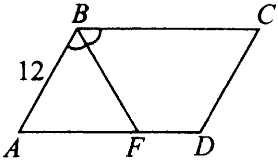


Рис. 341.

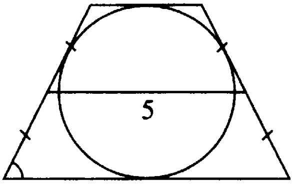


Рис. 342.

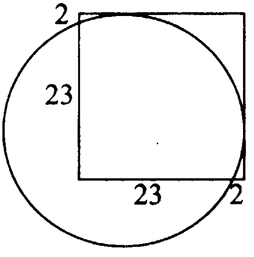


Рис. 343.

4. Около окружности описана равнобедренная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$ (см. рис. 342). Найдите площадь трапеции.

Ответ: ________________.

5. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 (см. рис. 343). Найдите радиус окружности.

Ответ: ________________.

Ответы

§ 1. Алгебра. Приближённые значения величин. Стандартный вид числа и округление чисел

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	630	30,029	4	0,5	2	4,1
2	2	3	15,3	700,603	2	0,005	4	4,2
3	3	1	1801	4000,52	2	100	2	14,5
4	3	4	11,54	6000,26	2	90	4	17,5
5	1	3	313	500,36	3	3	2	3
6	3	3	240	800,013	3	3	2	4

§ 2. Алгебра. Отношения и пропорции

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	3	2	7,5	7	100	108
2	4	2	4	3	0,6	20	48	60
3	2	4	4	4	3	10,4	3	250
4	3	4	3	1,5	4	16	3	66
5	4	1	2	4	4,2	6	715	0,75
6	3	4	3	3	0,9	2,12	4,16	0,75

§ 3. Алгебра. Проценты

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	3	140	30	20	20	8820
2	3	1	2	48 000	25	16	30	25,74
3	4	2	2	200	600	4	20 160	12 500
4	4	2	3	80	20	93	155	16
5	1	2	2	3	45	6	126	766 500
6	2	2	3	3	1056	133	212	180 000

§ 4. Алгебра. Арифметические действия и сравнение чисел

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	3	3	2	3	241	4	5
2	10,5	1	1	2	4	142	2	5
3	−2	4	2	3	1	412	2	5
4	0,08	4	2	3	1	314	3	2
5	1	3	1	2	1	3	4	4
6	2	2	3	3	3	3	2	4

§ 5. Алгебра. Значение выражений и преобразования формул

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,3	1	15 600	341	2	3	0,96	215,6
2	0	3	25	243	4	3	21 600	230
3	9	2	3	1,92	2	3	3528	0,072
4	1	3	4	2,1	2	2	12	0,0008
5	19	1	2	1	370	4	20	4 000
6	1,8	3	3	1	14 700	4	25	1,5

§ 6. Алгебра. Степень с целым показателем

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	3	2	4	1	3	314
2	2	2	3	1	3	1	4	421
3	2	3	4	3	1	4	1	412
4	4	3	1	3	3	4	3	312
5	4	2	3	3	1	2	2	312
6	4	2	2	3	4	3	3	241

§ 7. Алгебра. Многочлены и преобразование выражений

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1	1	3	3	4	213
2	2	4	3	2	1	4	4	312
3	4	4	4	3	4	2	3	1
4	1	4	4	2	2	2	2	3
5	2	8	3	4	36	3	−95	3
6	3	8	3	4	36	2	−2 080	4

§ 8. Алгебра. Алгебраические дроби. Преобразования рациональных выражений

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	234	3	3	$\frac{5}{x}$	−20	3	2
2	3	213	2	2	$\frac{x^2-2}{2x}$	−4	4	1
3	2	213	a	1	$\frac{4-3x^2}{x}$	0,5	1	2
4	1	421	$-a$	2	$\frac{x+1}{x}$	4	2	1
5	3	214	1	1	$\frac{1-3x}{3x}$	0	4	1
6	4	234	4	1	$\frac{3x-1}{3x}$	0	3	4

§ 9. Алгебра. Квадратные корни

Вар. №	№ задания 1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	2	1	1	1	1	3	1
2	2	3	3	1	4	−2	2	−1
3	4	3	3	2	3	3	2	3
4	4	4	1	4	3	3	4	4
5	2	4	2	1	2	−0,8	12	8
6	4	2	2	4	1	0,5	20	−8

§ 10. Алгебра. Линейные и квадратные уравнения

Вар. №	№ задания 1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	−1; 3	4	−0,05	−5; 0; 5	3	−1	314
2	1	−2; −1	1	−0,05	−6; 0; 6	2	1	213
3	13	−2	4	3	−6; −4; 0	−2,25; 2	0,5	213
4	−4,4	−2; 5	3	2	−1,5; 0	−2,16; 2	−0,5	213
5	1	1	(2,5; −1,5) (2,5; 1,5)	±2	4	−	−0,8; 0; 0,8	142
6	3	0; 1,3	(6,5; −2,5) (6,5; 2,5)	±2	2	+	−5; 0; 5	123

§ 11. Алгебра. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	3	−1	(4; 1), (1; −2)	1	314	123	312
2	4	4	3,2	(6; 5), (−4; −5)	2	314	312	231
3	3	3	4	1; 5	1	(3; 3)	(−3; −17), (3; 25)	241
4	1	2	1	−4; 6	2	(1,5; −2)	(0; 3), (−3; 0)	214
5	(−1; 0,5)	(1; −1)	(−16; 1), (16; 1)	(12; 4), (4; 12)	2	(2; 2)	231	(4; 10)
6	$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$	(0,5; −5)	(2; 12), (2; −12)	(6; 4), (4; 6)	1	3	213	(0; −3)

§ 12. Алгебра. Линейные неравенства с одной переменной и системы неравенств

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	4	1	2	4	$(4; 5)$	214
2	3	2	4	1	1	1	$[-2; 3{,}5)$	312
3	$(-\infty; 9]$	2	3	$y \leqslant -4$	3	3	$[-2; 2{,}5)$	4
4	$[2{,}5; +\infty)$	3	2	$x > 8$	2	4	$(-3; -2]$	2
5	$x \geqslant 1$	1	4	$[-0{,}5; 5]$	$1 \leqslant y \leqslant 4{,}5$	4	$[-2{,}5; 2{,}5)$	$[-3; 3]$
6	$x < 0{,}2$	3	3	$[4; 5{,}5]$	$-1 \leqslant x \leqslant 5$	4	$(-1{,}8; -0{,}5]$	$(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

§ 13. Алгебра. Квадратные неравенства и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(-7;3)$	1	4	9	3	3	$[-1;1]$	$(1,5;3)$
2	$(1;6)$	4	2	2	1	2	$[-1;0]$	$[-2;0,5)\cup(0,5;2)$
3	$(-3;3)$	3	1	3	$(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$	3	4	$\left[-3;4\frac{1}{3}\right]$
4	$(-4;4)$	4	4	−7	$(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$	3	4	$\left[-4;5\frac{1}{3}\right]$
5	$(-3,5;3,5)$	$x>-\frac{1}{2}$	4	9	$(-3;-2]\cup[2;3]$	1	$[-4;8]$	2
6	$(-0,6;0,6)$	$x<\frac{1}{2}$	4	6	$(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$	4	$(-\infty;-8]\cup[2;+\infty)$	8

§ 14. Алгебра. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	3	2	1	9	7	2	−2
2	4	2	3	2	15	6	−3,875	30
3	3	42	3	2	13	−81	4	4
4	4	19,2	4	1	1,3	−74,4	6	4
5	54	−7; −2	381	8	2	3276,8	4,2	95
6	−110	−10; −2	513	−12	−3	−4096	20	225

§ 15. Алгебра. Исследование функции и построение графика

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	3	3	$a > 0; c < 0$	2	1	423
2	3	2	1	3	$a < 0; c > 0$	1	1	341
3	4	$(-3;\ -1) \cup (2;\ 4]$	4	−2	312	4	2	413
4	2	$(-3;\ -1) \cup (1;\ 4]$	2	6	312	1	3	341
5	3	3	1423	−4	132	1	3	421
6	3	3	3142	−12	132	2	4	432

§ 16. Алгебра. Представление данных в виде таблиц, диаграмм и графиков

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,5	2	II; 30	20	1	0,5; 22	3	8
2	3	2	А; 10	0	2	2; 28	208	81
3	3	2	II; 10	20; 18; 50	4	1215	62 000	5
4	4	2	А; 5	2; 35; 5	3	405	97	4
5	1	4	8; 2; 4	11	3	4	3	2
6	1	75	200; 4; 0	3,5	1	3	3	3

§ 17. Алгебра. Составление математической модели по условию текстовой задачи

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	4	3	3	3	4	4	2
2	3	2	1	1	4	3	2	1
3	3	1	3	2	4	2	3	3
4	2	1	3	1	4	2	3	4
5	2	1	2	2	2	4	2	4
6	3	4	2	4	3	4	4	2

§ 18. Алгебра. Текстовые задачи

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4,5	30; 30	36	40	5	14	96; 80	100
2	6,5	40; 40	20	40	7	9	70; 90	100
3	48	40	37,5	4	12; 24	500	17; 9	103
4	25	62,5	20	3	6; 4	240	16; 4	57
5	28	8; 12	2	7	1,5	4	3	750
6	32	14; 8	4	9	2	3	2,4	1600

§ 19. Алгебра. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	170	210	0,3	0,3	0,25	0,2	3	2
2	440	720	0,08	0,91	0,25	0,2	1	6
3	450	4	0,6	0,44	0,75	0,25	3	2
4	36	5	0,95	0,62	0,875	0,25	2	3
5	6	231	0,0256	2	0,3456	0,02	2	3
6	24	7140	0,0576	3	0,384	0,03	4	3

§ 20. Алгебра. Иррациональные уравнения и уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля*

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	15	6	$0{,}8; -\frac{2}{3}$	4	$-4; -0{,}8$	± 2	$0; \pm 2$	1
2	2	4	$1{,}125; -2{,}5$	12; 17	$-4; 2$	2,6; 3	$\pm 3; \pm 5$	3
3	5	4	0,8	16	$-4; 1$	-2	0; 1; 2	± 3
4	10	5	1; 3	81	$\frac{1}{13}; 1$	-3	$-2; -1; 0$	$-5; \pm 4$
5	18,5	$2\frac{2}{3}$	22	-1	5; 7	$-5; -3; -1$	2	$\pm\sqrt{2}$
6	18	3	71	3	4; 9	$-5; -1; 11; 15$	4	± 3

§ 21. Алгебра. Задания с параметром*

Вар. №	№ задания				
	1	2	3	4	5
1	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$-9; -8; 16$	$(-3; 13)$	$(0; 3)$
2	0	$(-\infty; 3)$	$-16; -7$	16	$(-2; 4)$
3	$(-\infty; 5]$	$(3{,}125; +\infty)$	$(2; 4)$	± 8	$(-3; 2)$
4	$(-\infty; 3)$	$(-3; 7)$	$(0; 6)$	8	$(-\infty; 12) \cup (14; +\infty)$
5	1	1; 9	$-6; 6$	2; 6	$[-1; 3]$
6	$-2{,}5$	$(-1; 0]$	0; 1	$\{0\} \cup [9; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

§ 22. Алгебра. Уравнения и системы нелинейных уравнений*

Вар. №	№ задания 1	2	3	4	5
1	3	x^3-2x^2+4x-8	$3+\sqrt{15}$	$\frac{x+3}{x-1}$	$(2;\ -1); (-2;\ 1); (1;\ -2); (-1;\ 2)$
2	2	$x^3-6x^2+3x-18$	$2-2\sqrt{2}$	$\frac{x-2}{x+3}$	$(2;\ 3); (-2;\ -3); (-3;\ -2); (3;\ 2)$
3	$-2;\ 1;\ 3$	x^2-4x+5	$-4;\ 1;\ 2$	$(2;\ 3;\ 5)$, $(-2;\ -3;\ -5)$	$a=18;\ b=8$
4	$-4;\ -1;\ 1$	x^2-x+1	$-3;\ -1;\ 2$	$(-4;\ 5;\ -3)$, $(4;\ -5;\ 3)$	$m=-12; k=-147$
5	$3+\sqrt{8}; 2+\sqrt{3}$	$-4; 3$	$-2; 1$	$(2;\ 5;\ 6)$, $(-2;\ -5;\ -6)$	$\left(3(4-\sqrt{7});\ \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$
6	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}; \sqrt{17}-4$	$-3; 5$	$-1; 4$	$(3;\ 4;\ -6)$, $(-3;\ -4;\ 6)$	$\left(3+\sqrt{5};\ 4(3-\sqrt{5})\right)$

§ 23. Геометрия. Углы и длины

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	57	$m \parallel l$	120	40	12	55	143	560
2	110	$a \parallel c$	110	54	90	110	133	2,5
3	$a \parallel c$	2,15	70	50	5	100	59	1,8
4	$n \parallel l$	4,3	100	160	17	70	75	12
5	58	65	75; 105	112,5	24	52	95	2,6
6	$n \parallel p$	15,3	128; 52	120	3	8	90	30,6

§ 24. Геометрия. Площади фигур

Вар. №	№ задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	42	9	4,8	180	121	2000	252	12
2	63	96	11	12	25	400	26	36
3	48	30	48	7	60	14	12	19
4	48	20	128	10	4	18	112,5	28
5	21	50	14	150	12	165	60	9
6	12	60	4	60	10	105	77	18

§ 25. Геометрия. Окружность и круг

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	25	5	65	3,5	8	40	75
2	14	16	24	110	4	8	16	120
3	60	34	16	40	10	9	4,5	7,5
4	45	45	20	46	5	4	10	96
5	4	20	14	40	8	11	10	90
6	12	12	13	200	6	32	4	9

§ 26. Геометрия. Выбор утверждений

Вар.	№ задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	да	нет	нет	да	да	нет	да	нет
2	да	нет	да	нет	да	да	нет	да
3	да	нет	да	нет	да	да	да	нет
4	да	да	нет	да	да	нет	да	да
5	нет	нет	нет	нет	да	нет	да	нет
6	да	да	да	да	да	да	нет	да

§ 27. Геометрия. Задания повышенного уровня*

Вар. №	№ задания				
	1	2	3	4	5
1		0,25	9	1,5	15
2		2	3	3	6,25
3		10	14	30	3
4		25	14	2	0,75
5		$\frac{21}{29}$	30	8	25
6		146,25	66	20	17

Литература

1. *Алимов Ш. А. и др.* Алгебра. 9-й класс. Учебник. — М.: Просвещение, 2014.
2. *Макарычев Ю. Н. и др.* Алгебра. 9-й класс. Учебник. ФГОС. — М.: Просвещение, 2017.
3. Математика. ОГЭ-2017. 9 класс. Тематический тренинг / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016.
4. *Мордкович А. Г., Николаев Н. П.* Алгебра. 8-й класс. В 2 ч. Ч. 1. — М.: Мнемозина, 2013.
5. *Смирнов В. А., Смирнова И. М.* Геометрия. 7 – 9-е классы: учебник для общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2010.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Приказ Минобрнауки РФ от 17.12.2010 г. № 1897).

ОГЭ

Учебное издание

Дерезин Святослав Викторович, **Иванов** Сергей Олегович,
Коннова Елена Генриевна, **Кривенко** Виктор Михайлович,
Ольховая Людмила Сергеевна, **Резникова** Нина Михайловна,
Фридман Елена Михайловна, **Ханин** Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА. ОГЭ-2018. 9-й класс.
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *Н. Раевская*
Компьютерная верстка *Д. Ханин*
Корректоры *Н. Рошанская, Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 06.09.2017.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,11.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 170810

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в ООО "Подольская периодика"
142110, Московская область, г. Подольск, ул. Кирова, д.15
www.podolsk-print.ru