МАТЕМАТИКА

Б. Г. ЗИВ

30 УРОКОВ ПОВТОРЕНИЯ И НЕ ТОЛЬКО...

11

З 59

Зив Б. Г.
З 59 МАТЕМАТИКА. Тридцать уроков повторения и не только... СПб: СМИО Пресс, 2001. – 304 с.

Книга Заслуженного учителя России Б. Г. Зива является переработанным вариантом выходившей в 1998 г. книги «Математика—11. Уроки повторения». В ней представлены материалы для заключительных уроков по курсу математики средней школы. Пособие содержит задачи и упражнения, которые помогут школьникам и абитуриентам подготовиться к выпускным экзаменам в школе и вступительным экзаменам в вуз.

ISBN 5–7704–0050–1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой набор материалов для проведения уроков повторения по алгебре и началам анализа и по геометрии в 11 классе. Оно предназначено для классов, работающих по базовой программе. Однако уровень сложности некоторых упражнений и задач несколько выше тех, которые предлагаются в обычных классах. Этот уровень, по нашему мнению, соответствует так называемому «гимназическому уровню», поскольку в гимназиях учатся, как правило, более подготовленные ученики. К каждому уроку алгебры и начал анализа даны дополнительные упражнения, которые могут быть использованы для работы с наиболее сильными учениками или для факультативных занятий. Набор упражнений и задач в каждом уроке несколько избыточен, но совсем не обязательно доводить решение каждого примера или задачи до конца. Достаточно иногда ограничиться четким планом решения, а окончательный результат ученики могут получить и дома. Задания для письменного опроса предназначены для нескольких учеников. Их число определяет сам учитель.

Вступительное слово учителя или его комментарий должны содержать очень сжатое изложение теории с практическими выводами для решения задач. Задачи, которые получают ученики при ответе, решаются на отдельной доске или письменно в тетради. В первом случае привлекается внимание класса к решению этих задач. Упражнения даны для самостоятельной работы учащихся. Учитель должен внимательно следить за работой класса, комментировать решения, а в необходимых случаях (в силу важности примеров или задач либо затруднений у учащихся при решении) разобрать эти задачи на доске. При разборе геометрических задач следует требовать от учащихся теоретических обоснований. В связи с ограничением по времени учитель должен указать, какие фрагменты задачи необходимо обосновать. Предложенные в пособии решения не претендуют на образец записи решений.

В связи с тем, что в настоящее время тема «Интегралы» исключена из программы базовой школы, все материалы по этой теме можно рассматривать на факультативных занятиях.

Для составления итоговых работ на повторение рекомендуется использовать «Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 класс», экспериментальное пособие. Авторы: Г. В. Дорофеев, Г. К. Муравин, Е. А. Седова, 2-е издание, доработанное. М., Дрофа, 1999.

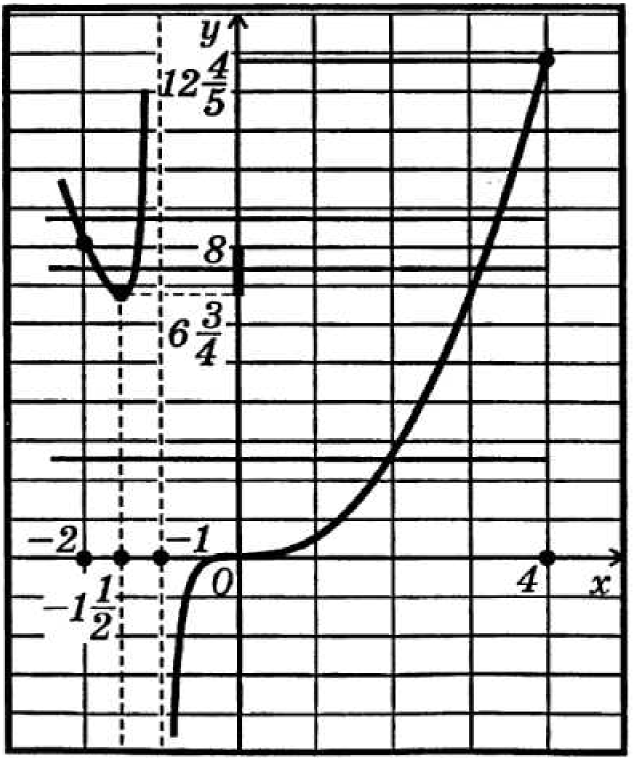
Для школ Санкт-Петербурга следует использовать «Сборник заданий для проведения итоговой аттестации по математике в 11 классе (экспериментальный)». Авторы: А. П. Карп, В. Б. Некрасов, СПб, СМИО Пресс, 2000.

Следует обратить внимание, что в домашних заданиях как по алгебре, так и по геометрии не указаны параграфы из учебников, поскольку учитель может работать по различным книгам. Для домашних заданий по геометрии можно использовать следующую литературу: 1. Зив Б. Г. «Задачи к урокам геометрии. 7–11 классы», «Работы на повторение», стр. 541—556 (НПО «Мир и семья-95», СПб, 1995); 2. Зив Б. Г. «Дидактические материалы по геометрии для 11 классов» (П–1–4), стр. 53—57 (М., Просвещение, 1995 и последующие годы).

Для активизации процесса повторения и для экономии времени на уроке в пособии имеется специальный раздел, где даны устные упражнения практически по всем темам курса 10—11 классов. Учитель может по своему усмотрению включать их в уроки повторения, заменив ими задачи, требующие достаточно много времени для их выполнения.

Часть I

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА



Урок 1

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ, ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ, ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ, ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

I. Вступительное слово учителя

Напомнить ученикам определение функции, понятия области определения и множества значений. Что такое график функции? Обратить внимание, что не всякая кривая на плоскости является графиком функции.

Например, линии, изображенные на рис. 1, *а* и 1, *б*, являются графиками функций, а линии на рис. 1, *в* и 1, *г* — нет.

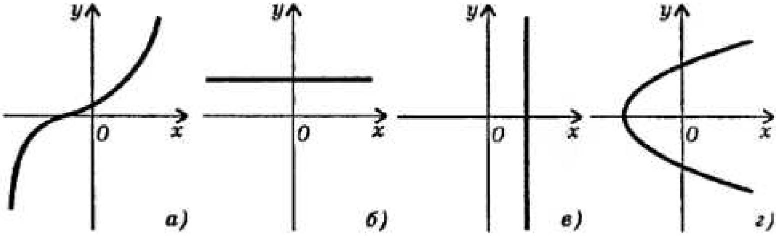


Рис. 1

1. Установите область определения функций:

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sin 3x}+\operatorname{tg}x\,\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{1-x^2}$.

Ответ. $D(f)=\left[-\sqrt{3};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{3};-1\right)\cup(-1;0)\cup$

$\cup(0,1)\cup\left(1;\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{3}\right]$.

2) $f(x)=\sqrt{16x-x^5}+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4\right)$.

Ответ. $D(f)=(-\infty;-2)$.

3) $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

Ответ. $D(f) = \{2\}$.

4) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x+1}}$.

Ответ. $D(f) = \{-1\} \cup [0; +\infty)$.

2. Установите множество значений функций:

1) $f(x) = \log_2(5 + \sin x)$.

Ответ. $E(f) = [2; \log_2 6]$.

2) $f(x) = 12\sin x + 5\cos x$.

Ответ. $E(f) = [-13; 13]$.

3) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{\operatorname{tg} x \cdot (1 + \cos 2x)}{2}$.

Решение. Область определения функции: $x \neq \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$.

$$f(x) = -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} x \cdot 2\cos^2 x}{2} = -1 + \frac{\sin 2x}{2},$$

$$-1 + \frac{1}{2}\sin \pi k = -1, \qquad -\frac{3}{2} \le -1 + \frac{1}{2}\sin 2x \le -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $E(f) = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$.

4) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$.

Отметим, что функция непрерывна и что $D(f) = [-2; 2]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{2-x}},$$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$.

x	-2	0	2
$f(x)$	2	$2\sqrt{2}$	2

Ответ. $E(f) = \left[2; 2\sqrt{2}\right]$.

5*) $f(x) = \left(1 - x^2\right)^2 - 4 \cdot \left(1 - x^2\right) + 3$.

Решение

Пусть $u = 1 - x^2$, причем

$$-\infty < u \le 1.$$

$$P(u) = u^2 - 4u + 3 = (u-2)^2 - 1$$

Отсюда следует:

$$0 \le P(u) < \infty.$$

Ответ. $E(f) = [0; +\infty)$.

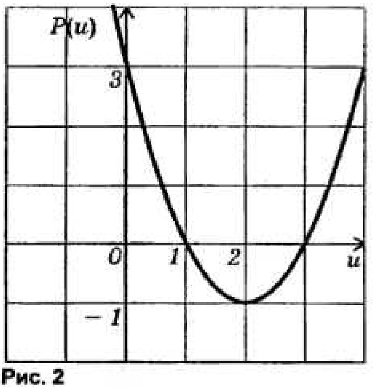


Рис. 2

6*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$.

Решение. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$. Выразим x через y:

$yx^2 + y = x^2 - 2$, $(y-1)x^2 = -y - 2$, так как $y \ne 1$,

то $x^2 = -\dfrac{y+2}{y-1}$.

Учитывая, что $x^2 \ge 0$, имеем $\dfrac{y+2}{y-1} \le 0$ и $-2 \le y < 1$.

Ответ. $E(f) = [-2; 1)$.

II. Четные и нечетные функции (комментарии учителя)

1. Исследуйте на четность и нечетность функцию:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin 3x} + \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{3 - x^2}}{1 - x^2}$.

Обратите внимание на то, что область определения должна быть симметрична относительно нуля.

Ответ. Функция нечетная.

2) $f(x) = x^3 \cdot \log_2 \dfrac{1-x}{1+x}$.

Ответ. Функция четная.

3) $f(x) = \sin x + \cos x$.

Ответ. Свойством четности или нечетности не обладает.

4*) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. (Функция нечетная)

5*) $f(x) = \arcsin(\cos x)$. (Функция четная)

6*) $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

$f(x) = \frac{\pi}{2}$. (Функция четная)

2. Постройте схематически графики функций:

1) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

2) $f(x) = \log_2(|x| - 1)$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}|x|$.

Необходимо учесть, что все эти функции четные, а потому их графики симметричны относительно оси ординат.

III. Периодические функции (комментарии учителя)

1. Найдите периоды следующих функций:

1) $f(x) = \sin\left(\frac{4x}{3} + 2\right)$. $(T_0 = \frac{3\pi}{2})$

2) $f(x) = \cos^2 2\pi x$. $(T_0 = \frac{1}{2})$

3) $f(x) = |\sin 4x|$. $(T_0 = \frac{\pi}{4})$

4) $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{3}$. $(T_0 = 30\pi)$

5) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. $(T_0 = \frac{\pi}{2})$

6) $f(x) = \sin\frac{x + |x|}{2}$. (Функция не является периодической)

2*. Докажите, что следующие функции не являются периодическими:

1) $f(x)=x^2-2$;

2) $f(x)=\sin\sqrt{x}$;

3) $f(x)=\dfrac{x-8}{x+9}$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+3}$;

5) $f(x)=\cos x^2$.

На дом: Производная. Основные свойства производной. Производные основных элементарных функций. Геометрический смысл производной. Понятие непрерывности функции.

1) $f(x)=x\sin 2x$. Вычислите $f'(x)+f(x)+2$.

2) Решите уравнение $f'(x)=g(x)$, если $f(x)=2x^2\cos^2\dfrac{x}{2}$ и $g(x)=2x-x^2\sin x$.

3) Решите неравенство $f'(x)>g'(x)$, если

$$f(x)=x+\ln(x-5) \text{ и } g(x)=\ln(x-1).$$

4) Решите неравенство $g'(x)<f'(x)$, если $f(x)=\dfrac{5^{2x+1}}{2}$ и $g(x)=5^x+4x\ln 5$.

5) Найдите уравнение касательной к параболе

$$y=x^2-7x+3,$$

если эта касательная параллельна прямой $5x+y-3=0$.

6) Постройте график функции

$$f(x)=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2x}\cdot\frac{\operatorname{tg}2x\cdot\sin^2(\pi-2x)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}.$$

Урок 2
ПРОИЗВОДНАЯ
(часть I)

I. Из домашнего задания

Обратите внимание на пример 6.

График $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2x} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} 2x \cdot \sin^2(\pi - 2x)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2x\right)}$:

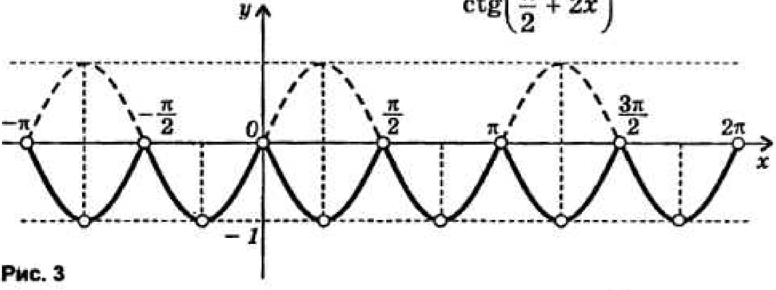


Рис. 3

Решение. Область определения функции: $x \neq \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x}} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \sin^2 2x}{-\operatorname{tg} 2x} = \frac{-\sin^2 2x}{|\sin 2x|} = -|\sin 2x|.$$

II. Напоминание

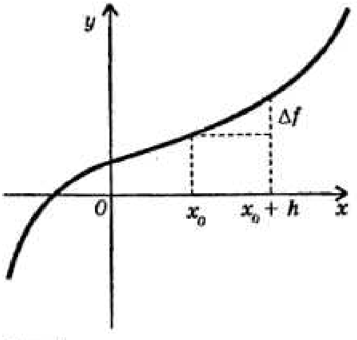


Рис. 4

1. Определение производной

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если этот предел существует.

Отмечается, что при нахождении производной фиксируется x, а переменной является h. После нахождения производной x считается переменной, т. е. производная является функцией от x.

2. Классу предлагается найти по определению производную функции $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

$f(x)$	$f(x+h)$
$x^2 - 3x + 4$	$(x+h)^2 - 3(x+h) + 4$

$$\Delta f(h) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 4 - x^2 + 3x - 4 =$$

$$= 2xh - 3h + h^2,$$

$$\underbrace{\frac{\Delta f(h)}{h}}_{\text{средняя скорость изменения функции}} = 2x - 3 + h,$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}(2x - 3 + h) = 2x - 1.$$

Отмечается физический смысл производной:

$$v(t) = S'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h}.$$

3. Материальная точка движется по прямой. Уравнение движения: $S(t) = t^3 - 3\frac{t^2}{2} + 2t - 1$ (м).

а) Найдите ее скорость в момент времени $t = 3$ (с).

$v(t) = S'(t) = 3t^2 - 3t + 2;$

$v(3) = 27 - 9 + 2 = 20$ (м/с).

б) В какой момент времени ускорение будет равно 9 м/с^2?

$a(t) = v'(t) = 6t - 3$; $6t - 3 = 9$; $t = 2$ (с).

4. Напоминаются свойства производной.

Если U и V — дифференцируемые функции, то:

1) $(U + V)' = U' + V'$;

2) $(UV)' = U'V + V'U$;

3) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$.

Производная сложной функции:

$y = f(u(x))$, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Например:

1) $y = \left(3x^2 - 4x\right)^3$, $y' = 3\left(3x^2 - 4x\right)^2 \cdot (6x - 4)$.

2) $y = \cos^2 x$, $y' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$.

Таблица производных

$f(x)$	c	x^p	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$
$f'(x)$	0	px^{p-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)$	$\mathrm{ctg}\, x$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$
$f'(x)$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	e^x	$a^x \cdot \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x\ln a}$

5. Найдите производные следующих функций:

1) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$. $\left(f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

2) $f(x) = 0{,}3^{2x-3} + (2x-3)^{0{,}3}$.

$\left(f'(x) = 2 \cdot 0{,}3^{2x-3} \cdot \ln 0{,}3 + 0{,}6 \cdot (2x-3)^{-0{,}7}\right)$

3) $f(x) = \ln\frac{x-2}{x+2}$. $\left(f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}\right)$

4) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Решение

1-й способ: $f(x) = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$

$= 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$; $f'(x) = -\sin 4x$

2-й способ: $4\sin^3 x \cos x + 4\cos^3 x\,(-\sin x) =$

$= 4\sin x \cos x\,\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = 2\sin 2x\,(-\cos 2x) =$

$= -\sin 4x$.

III. Геометрический смысл производной (комментарии учителя)

Уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Напоминается определение непрерывности функции в точке x_0. Напоминается также, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна. Обратная же теорема неверна, т. е. из того, что функция непрерывна в точке x_0, не следует, что она в этой точке имеет производную.

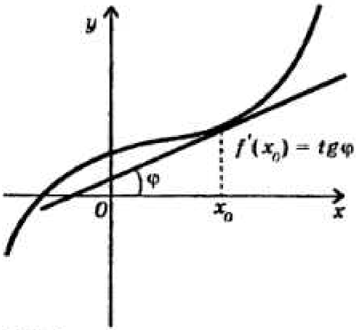


Рис. 5

Так, на рис. 6 и 7 приведены примеры графиков функций, непрерывных в точке x_0, но не дифференцируемых в ней. На рис. 7 касательная перпендикулярна оси Ox.

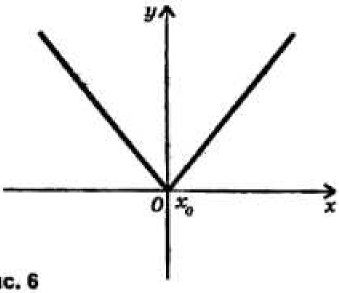


Рис. 6

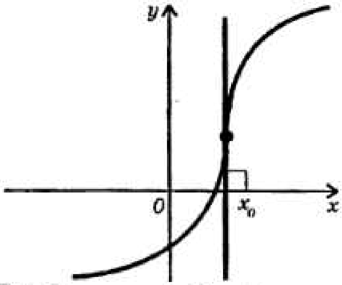


Рис. 7

1. Дифференцируема ли функция $f(x) = \left|\dfrac{x^2 - 1}{1 - x}\right|$ в области ее определения?

Ответ. нет, так как в точке $x = -1$ производной нет, хотя точка $x = -1$ принадлежит области определения функции.

2. $f(x) = \dfrac{x+2}{3-x}$. К графику f в точке $x_0 = 2$ проведена касательная l.

а) Напишите уравнение касательной l. $(y = 5x - 6)$

б) Существует ли касательная к графику f, отличная от l и параллельная l? Если существует, то найдите ее уравнение. $(y = 5x - 26)$

3. При каких a прямая $y = ax + 8a - 1$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$?

Решение. Уравнение касательной:

$$y = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0),$$

где x_0 — абсцисса точки касания.

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot x + \frac{\sqrt{x_0}}{2}; \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} = a, \quad a > 0, \\ \dfrac{\sqrt{x_0}}{2} = 8a - 1. \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{x_0}}{2} = \frac{4}{\sqrt{x_0}} - 1; \quad x_0 + 2\sqrt{x_0} - 8 = 0.$$

Отсюда $x_0 = 4$. Тогда $a = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

Ответ. $a = \dfrac{1}{4}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \ln x$, проведенной из точки (0; 0).

Решение. Уравнение касательной имеет вид:

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

Так как точка (0; 0) принадлежит касательной, то

$0 = \ln x_0 - 1$; $\ln x_0 = 1$; $x_0 = e$.

$y = 1 + \dfrac{1}{e}(x - e)$; $y = \dfrac{1}{e}x$.

Ответ. $y = \dfrac{1}{e}x$.

Дополнительные упражнения

1. Напишите уравнение общей касательной к параболам $y = x^2 + 2x$ и $y = x^2 - 4x$.

Решение. Пусть общая касательная l касается первой параболы в точке с абсциссой x_1, а второй — в точке с абсциссой x_2.

Уравнение касательной к первой параболе имеет вид:

$y = x_1^2 + 2x_1 + (2x_1 + 2)(x - x_1)$; $y = (2x_1 + 2) \cdot x - x_1^2$.

Уравнение касательной ко второй параболе:

$y = x_2^2 - 4x_2 + (2x_2 - 4)(x - x_2)$, т. е. $y = (2x_2 - 4) \cdot x - x_2^2$.

Так как это должна быть одна и та же прямая, то

$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 2x_2 - 4, \\ x_1^2 = x_2^2. \end{cases}$ Отсюда $x_2 = \frac{3}{2}$. Тогда $y = -x - \frac{9}{4}$.

2. Найдите все общие точки графика функции $y = 3x - x^3$ и касательной, проведенной к этому графику через точку A (0; 16).

Решение. Уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где x_0 — абсцисса точки касания. $y' = 3 - 3x^2$, тогда

$$y = 3x_0 - x_0^3 + \left(3 - 3x_0^2\right)(x - x_0) = \left(3 - 3x_0^2\right) \cdot x + 2x_0^3.$$

Так как касательная проходит через точку A (0; 16), то $2x_0^3 = 16$ и $x_0 = 2$.

Уравнение касательной имеет вид $y = -9x + 16$.

Теперь решаем уравнение:

$3x - x^3 = -9x + 16$, $x^3 - 12x + 16 = 0$,

$x^3 - 4x - 8x + 16 = 0$,

$x(x - 2)(x + 2) - 8(x - 2) = 0$, $(x - 2)\left(x^2 + 2x - 8\right) = 0$.

$x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = -4$.

Тогда координаты общих точек графика функции:

$x_1 = 2$; $y_1 = -2$ и $x_2 = -4$; $y_2 = 52$.

Ответ. (2; –2) и (–4; 52).

3. При каком значении параметра a касательная к графику функции $f(x) = a - x^2$ отсекает в первой четверти от координатного угла равнобедренный треугольник с площадью $\frac{9}{32}$?

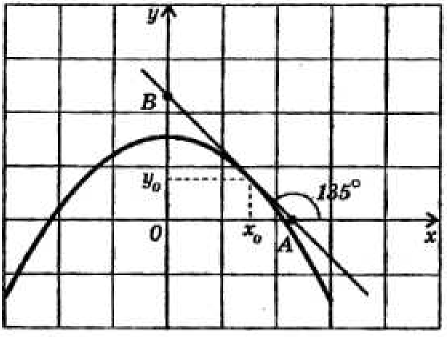


Рис. 8

Чтобы отсечь в первой четверти равнобедренный прямоугольный треугольник, касательная к графику функции $y = a - x^2$ должна быть наклонена к оси Ox под углом 135°, т. е.

$$f'(x_0) = -1 .$$

Пусть x_0, y_0 — координаты точки касания.

Тогда $f'(x) = -2x \Rightarrow -2x_0 = -1,\ x_0 = \frac{1}{2};\ y_0 = a - \frac{1}{4}.$

Уравнение касательной:

$y - a + \frac{1}{4} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right);\quad y = -x + a + \frac{1}{4}.$

Получаем, что $OA = OB = a + \frac{1}{4}$

и $S_{\Delta AOB} = \frac{OA^2}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{4}\right)^2.$

По условию $S_{\Delta AOB} = \frac{9}{32}$. Тогда имеем: $\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}$ при $\left(a + \frac{1}{4}\right) > 0$. Отсюда следует, что $a = \frac{1}{2}$.

Ответ. $a = \frac{1}{2}$.

4. Докажите, что касательные к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ отсекают от координатного угла треугольники постоянной площади.

5. Какой угол с осью абсцисс составляет касательная к графику функции $f(x) = \frac{1}{4}\operatorname{tg}2x - \frac{8}{\pi}x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{8}$?

Ответ. $\varphi = 135°$.

6. Дана функция $f(x) = \sin 2x \cdot \operatorname{tg} x$. В каких точках касательная к кривой $y = f(x)$ параллельна прямой $y=2x-5$?

Ответ. $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; 1\right)$, $k \in Z$.

7. Дана функция $f(x) = 27^x - 3^x$. Напишите уравнение касательной к графику f, если известно, что искомая касательная параллельна Ox.

Ответ. $y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

8. Прямая $y = 5x + 1$ параллельна касательной к кривой $y = \frac{6 \cdot 0{,}5^{x+1}}{\ln 0{,}5} + \frac{0{,}5^{-x-1}}{\ln 0{,}5} - 2$. Найдите координаты точки касания.

Ответ. $\left(1;\ \frac{7}{\ln 0{,}5} - 2\right)$.

9. Найдите расстояние от начала координат до касательной к графику функции $y = x \ln x$, параллельной оси абсцисс.

Ответ. $\frac{1}{e}$.

На дом: Исследование функции с помощью производной: 1. Формула Лагранжа. 2. Достаточный признак возрастания и убывания функции. 3. Экстремум. 4. Достаточный признак экстремума.

1. Дана функция $f(x) = \log_2(a - x)$.

а) Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $f(x) = 2$ имеет корень $x_0 = 1$.

б) Пусть $a = 5$. Решите неравенство $f(x) < 2$.

в) Пусть $a = 5$. Сравните числа $f(1)$ и $f\left(2^{\log_{\frac{1}{3}} 2}\right)$.

г) Выясните, существуют ли такие числа a, что неравенство $f(x) < 2$ выполняется при четырех целых значениях x.

2. Дана функция $f(x) = \sin x + \cos x$.

а) Докажите, что $(f(x))^2 + 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

б) Решите уравнение $f(x) = -1$.

в) Определите знак числа $f\left(\frac{17}{24}\pi\right)$.

г) Решите неравенство $f(x) > \sqrt{\frac{3}{2}}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Дана функция $f(x) = (x-1)(x-4)^2$.

а) Напишите уравнение касательной к графику функции f в его точке с абсциссой $x_0 = 4$.

б) Постройте график функции f на отрезке $[1; 4]$.

в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f и графиком функции $y = (x-4)^2$.

г) Докажите, что при любом $a \in (0; 3)$ уравнение $f(x) = a(x-4)^2$ имеет два корня на отрезке $[1; 4]$.

Урок 3

ПРОИЗВОДНАЯ (*часть II*)

I. Проверка домашнего задания

1. Обратите внимание на примеры **1**, г и **3**, г:

1) $f(x)=\log_2(a-x)$. Выясните, существуют ли такие числа a, что неравенство $f(x) < 2$ выполняется при четырех целых значениях x.

Ответ. Да, например, $a = 4{,}5$.

2) $f(x)=(x-1)(x-4)^2$. Докажите, что при любом $a \in (0; 3)$ уравнение $f(x)=a(x-4)^2$ имеет два корня на отрезке $[1;4]$.

2. Письменный опрос учащихся.

1) Решите неравенство:
$\log_2 x + \log_2(2x-1) < \log_2(2x+2)$.

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

2) Исследуйте на экстремум и монотонность функцию $f(x) = x^2 - \ln(2x-1)$.

Ответ. Функция убывает на промежутке $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$. $y_{\min} = f(1) = 1$.

3) Установите множество значений функции

$$f(x) = \sqrt{7}\sin x + 3\cos x.$$

Ответ. $[-4;\ 4]$.

II. Вступительное слово учителя

1. Напомнить определение возрастающей на промежутке и убывающей на промежутке функции.

2. Формула Лагранжа.

3. Достаточный признак возрастания и убывания функции.

4. Понятие о критических (стационарных) точках. Максимум и минимум функции. Теорема Ферма.

5. Достаточный признак экстремума.

III. Теоретические упражнения

1. На рисунке 9, *а* изображен график некоторой функции $y = f(x)$.

Сколько экстремумов имеют функции

$$y = f(|x|) \text{ и } y = |f(x)|\ ?$$

2. Касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках x_1 и x_2 параллельны оси Ox (рис. 9, *б*). Верно ли, что x_1 и x_2 — точки экстремума?

Ответ. не обязательно.

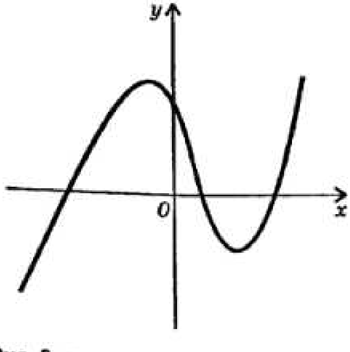


Рис. 9, *а*

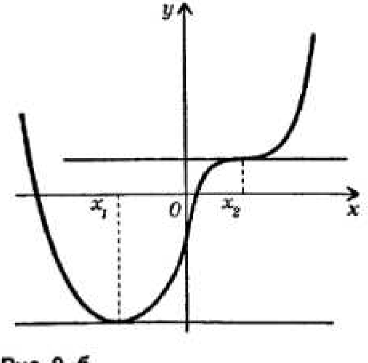


Рис. 9, *б*

3. Непрерывная функция $y = f(x)$ имеет два нуля: x_1 и x_2, причем $x_1 < -1$, а $-1 < x_2 < 1$. График производной этой функции показан на рис. 10.

Постройте схематически график самой функции $y = f(x)$.

Ответ. См. рис. 11.

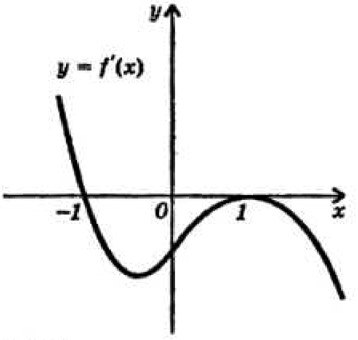


Рис. 10

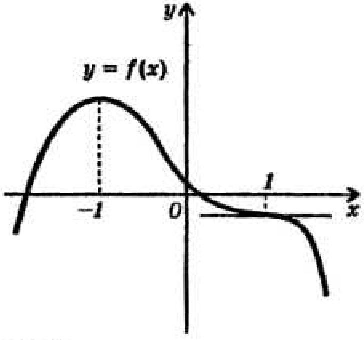


Рис. 11

IV. Упражнения

1. Найдите промежутки монотонности для функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2.$$

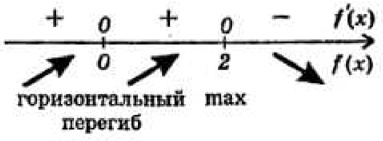
Ответ. Функция возрастает на R.

2. Постройте с исследованием график функции

$$y = f(x) = \frac{8}{3}x^3 - x^4 - 4.$$

Решение. $D(f) = R$; функция общего вида;

$$f'(x) = 8x^2 - 4x^3 = 4x^2(2 - x).$$



Критические точки: $x = 0$, $x = 2$.

Результаты исследования: функция возрастает на промежутке $(0;\ 2]$ и убывает на промежутке $[2;\ +\infty]$.

$$f(0) = -4; \quad f(2) = 1\frac{1}{3}.$$

Дополнительные точки:

$f(1) = -2\frac{1}{3}$; $f(3) = -13$; $f(-1) = -7\frac{2}{3}$.

$$y_{\max} = f(2) = 1\frac{1}{3}.$$

В точке $x = 0$ график функции имеет горизонтальный перегиб;

$$E(f) = \left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right] \text{ (рис. 12).}$$

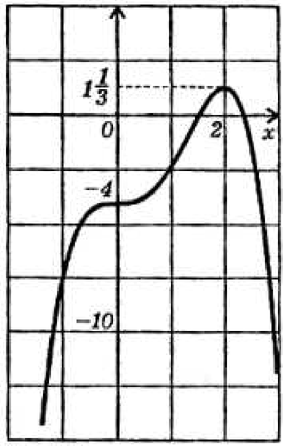


Рис. 12

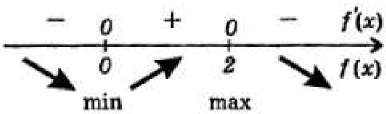
3. Постройте с исследованием график функции $f(x) = x^2e^{-x}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

Решение

$D(f) = \boldsymbol{R}$. Нуль функции $x = 0$.

Функция общего вида;

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}x(2 - x)$.



Критические точки:

$$x = 0 \text{ и } x = 2.$$

$f(0) = 0$; $f(2) = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}54$.

Результаты исследования:

функция возрастает на промежутке $[0;\ 2]$ и убывает на промежутках $(-\infty;\ 0]$ и $[2;\ +\infty)$.

$y_{\max} = f(2) = \frac{4}{e^2}$,

$y_{\min} = 0$,

$E(f) = [0;\ e]$.

Дополнительные точки:

$f(-1) = e$; $f(3) = \frac{9}{e^3} \approx 0{,}45$.

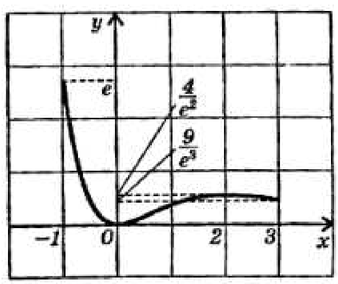


Рис. 13

4. Найдите все такие a, для которых функция

$$f(x) = (a-2)x^3 + 6x^2 + (a-3)x - 1$$

убывает на множестве $\boldsymbol{R}$ и не имеет критических точек.

Решение. $a \neq 2$; $f'(x) = 3(a-2)x^2 + 12x + a - 3$.

Функция будет убывать на $\boldsymbol{R}$, если $D < 0$ и $a < 2$.

$\frac{D}{4} = 36 - 3(a-2)(a-3) < 0$; $\quad 12 - a^2 + 2a + 3a - 6 < 0$;

$a^2 - 5a - 6 > 0$; $\quad a < -1$ или $a > 6$.

Имеем: $\begin{cases} a < -1 \text{ либо } a > 6, \\ a < 2. \end{cases}$ Отсюда $a < -1$.

Ответ. $(-\infty; -1)$.

На дом:

1. Найдите критические точки функции

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin x - \cos 2x$$

и укажите какую-либо точку ее максимума.

$$\left(\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \\ &x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{aligned}\right)$$

2. При каких значениях a функция

$$f(x) = a \cdot \ln x + x^2 - x$$

имеет в точке $x_0 = 1$ экстремум? Определите, какой точкой экстремума является точка $x_0 = 1$ при найденном значении a.

($a = -1$; $x_0 = 1$ — точка минимума)

3. Исследуйте функции и постройте графики:

1) $y = x^4 - 4x^3 + 12$;

2) $y = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ на отрезке $[-2; 2]$.

4. Найдите множество значений функции

$$f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1.$$

5. При каких значениях a уравнение $\frac{1}{x} + 4x = a$ имеет одно решение?

Ответ. $a = \pm 4$.

6. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}\ln x = a$, если $-\frac{2}{e} < a < 0$?

Ответ. Два.

Дополнительные упражнения

1. Постройте графики следующих функций:

1) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Решение. Функция общего вида;

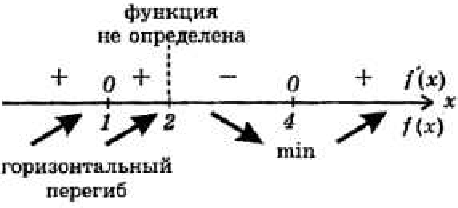
$D(f) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Функция непрерывна на области своего определения. Нуль функции $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3},$$ критические точки:

$$x = 1,\ x = 4;\quad f(1) = 0,\ f(4) = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}.$$

Функция возрастает на промежутках $(-\infty;\ 2)$ и $[4;\ +\infty)$ и убывает на промежутке $(2;\ 4]$.



Нахождение асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x-2)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 4} = 1.$$

Асимптота: $y = x + 1$.

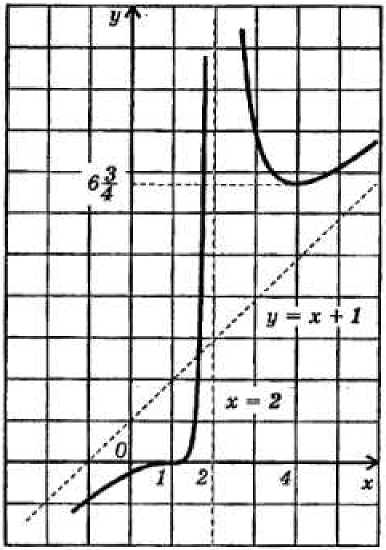
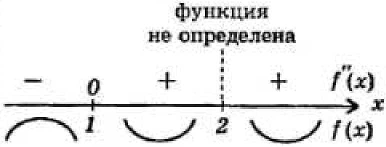


Рис. 14

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} f(x) = +\infty,$$

$x = 2$ — вертикальная асимптота.

$$f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x-2)^4}$$



2) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Решение. $D(f) = R$; функция непрерывная.

Нули функции: $x = 0$ и $x = 2$.

$$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Критическая точка $x = 1$;

$y(1) = 1$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -\infty$; $E(f) = (-\infty;\ 1]$.

$$y'' = \frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}.$$

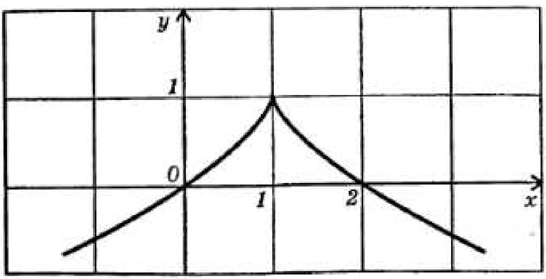


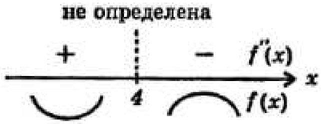
Рис. 15

3) $y = 2 + \sqrt[3]{x-4}$.

Решение. $D(f) = R$; функция непрерывна. Нуль функции $x = -4$.

$y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-4)^2}} > 0$; функция возрастает на множестве R.

$y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x-4)^5}}$.



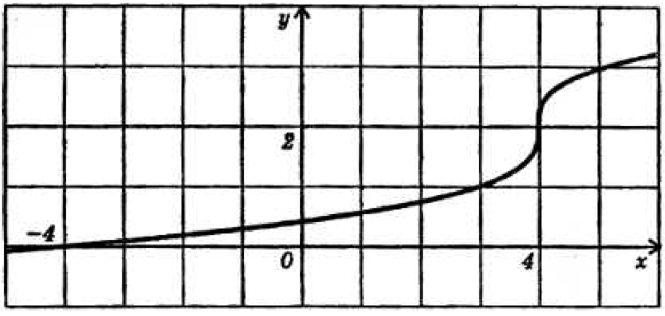


Рис. 16

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $y(0) = 2 - \sqrt[3]{4} \approx 0{,}41$.

2. При каких значениях a уравнение $x^3 - ax - a = 0$ имеет три корня на отрезке $[-2;\ 4]$?

Решение. Так как $x \neq -1$, то данное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{x^3}{x+1} = a$.

Построим график функции

$$y = \frac{x^3}{x+1}.$$

$y(-2) = 8$; $y\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 6\dfrac{3}{4}$;

$y(4) = 12\dfrac{4}{5}$.

Ответ. $\left(6\dfrac{3}{4};\ 8\right]$.

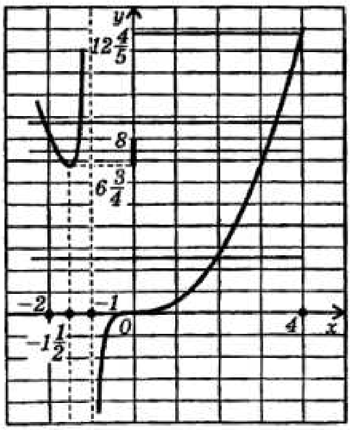


Рис. 17

Урок 4

ПРОИЗВОДНАЯ
(часть III)

I. Проверка домашнего задания

Обратите внимание на задачи 4 и 6.

1) Найдите множество значений функции

$$f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 1.$$

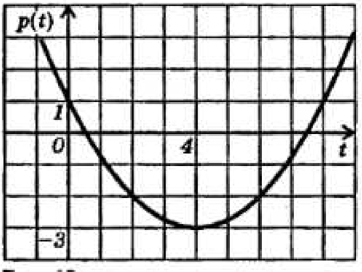


Рис. 18

Решение. Пусть $x^2 = t > 0$;

$p(t) = \frac{1}{4}t^2 - 2t + 1$; $t_0 = -\frac{-2}{\frac{1}{2}} = 4$;

$p(4) = \frac{1}{4} \cdot 16 - 8 + 1 = -3$.

Ответ. $E(p) = [-3;\ +\infty)$.

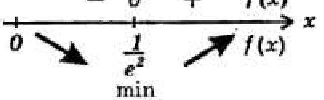
2) Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x}\ln x = a$, если $-\frac{2}{e} < a < 0$?

Решение. Рассмотрим график функции $f(x) = \sqrt{x}\ln x$.

$D(f) = (0;\ +\infty)$. Нуль функции $x = 1$.

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x}(\ln x + 2)$;

$f'(x) = 0$ при $x = \frac{1}{e^2}$;



$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e}$.

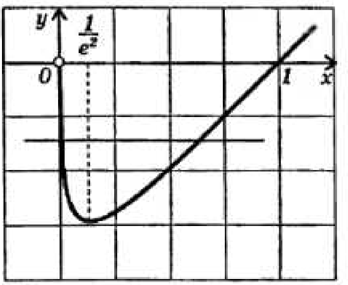


Рис. 19

Ответ. Два.

II. Письменный опрос учащихся

1. Решите уравнение $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

2. Постройте график функции $y = \left(2x^2 - 3x\right)e^x$ на отрезке $[-2;\ 2]$.

3. Исследуйте на монотонность функцию

$$f(x) = \log_4(2 - 3x).$$

Ответ. Функция убывает на интервале $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)$.

III. Упражнения

1. Постройте графики следующих функций:

1) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$. График показан на рис. 20.

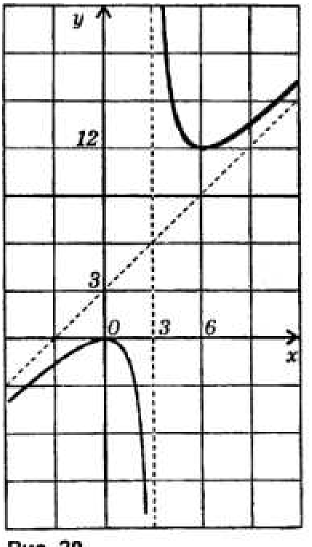


Рис. 20

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ на отрезке $\left[\frac{1}{4};\ 9\right]$.

Решение. Отрезок $\left[\frac{1}{4};\ 9\right]$ принадлежит области определения функции; $x = 1$ — нуль функции.

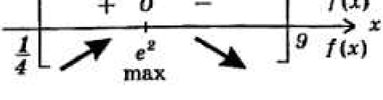
$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}};$$

критическая точка $x = e^2$.

$$y_{\max} = f\left(e^2\right) = \frac{2}{e} \approx 0{,}74.$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\ln\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -2\ln 4 \approx -2{,}8;$$

$$f(9) = \frac{\ln 9}{3} \approx 0{,}73.$$



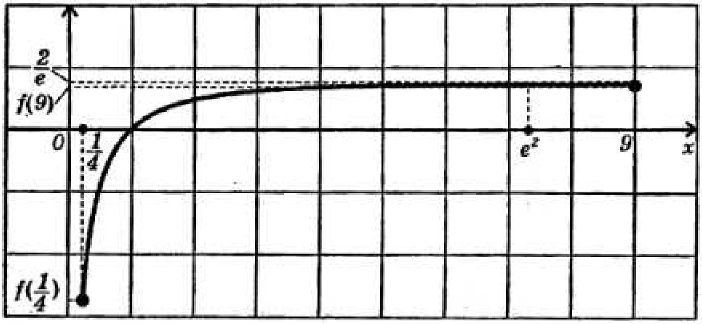
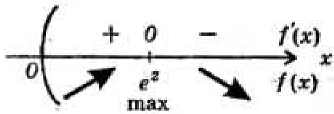


Рис. 21

Примечание. Рассмотрим график функции $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ на всей области определения (рис. 22).

$D(f) = (0;\ +\infty)$



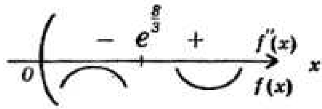
$y_{\max} = f\left(e^2\right) = \dfrac{2}{e} \approx 0{,}74;$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

$x = 0$ — вертикальная асимптота, $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $x = 1$ — нуль функции.

$$f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = 0, \text{ при } x = e^{\frac{8}{3}}.$$

$$f\left(e^{\frac{8}{3}}\right) \approx 0{,}702.$$



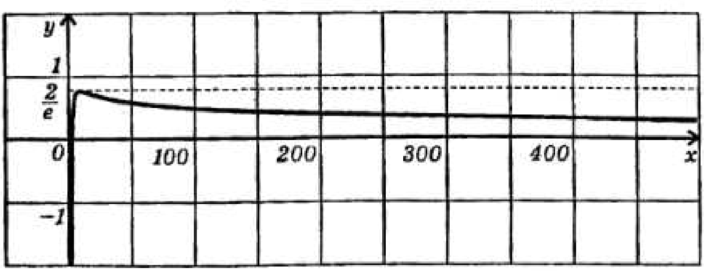


Рис. 22

IV. Наибольшее и наименьшее значения функции (комментарии учителя)

Отметить, что если $f(x)$ непрерывная функция, то множество ее значений на отрезке $[a;\ b]$ есть отрезок $[m;\ M]$, где

$$m = \min_{[a;b]} f(x), \text{ а } M = \max_{[a;b]} f(x).$$

Упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ на отрезке $[1;\ 9]$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$, $f'(x) = 0$, $x = -3$, $x = 3$.

x	1	3	9
$f(x)$	10	6	10

Ответ. $\min\limits_{[1;9]} f(x) = f(3) = 6$; $\max\limits_{[1;9]} f(x) = f(9) = 10$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 5\sqrt{2x+1} - x$ на отрезке $[4;\ 40]$.

Решение. $f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{2x+1}} - 1 = \dfrac{5-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$;

$f'(x) = 0$ при $x = 12$.

x	4	12	40
$f(x)$	11	13	5

Ответ. $\min\limits_{[4;40]} f(x) = f(40) = 5$; $\max\limits_{[4;40]} f(x) = f(12) = 13$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos x - \sin^2 x + 2$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение

1-й способ: $f'(x) = -\sin x - 2\sin x\cos x$; $f'(x) = 0$, если $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f(x)$	3	$\frac{3}{4}$	1

Ответ. $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$; $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = 3$.

2-й способ: $f(x) = \cos x - 1 + \cos^2 x + 2 = \cos^2 x + \cos x + 1$.

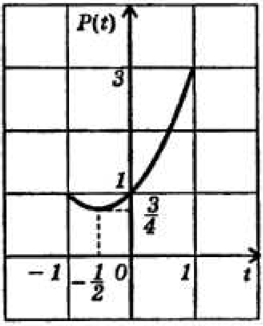


Рис. 23

Пусть $\cos x = t$.

Рассмотрим $P(t) = t^2 + t + 1$,

где $-1 \le t \le 1$; $t_0 = -\frac{1}{2}$.

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$;

$P(-1) = 1$; $P(1) = 3$.

Этот способ интересен тем, что он демонстрирует элементарное решение задачи.

На дом:

1. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 10 + 4x\ln 9 - 3^{x-1} - 3^{3-x}.$$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2(2x-3) - 12(3x-2)$ на отрезке $[-3;\ 6]$.

3. Докажите, что $\sin^2\frac{x}{2}\cos x < \frac{1}{7}$.

4. Напишите уравнение касательной к кривой
$$y = 2^{-x} - 2^{-2x} \text{ в точке } x_0 = 2.$$

5. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{e^x}$.

2) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$ на отрезке $[1; 8]$.

Дополнительные упражнения

1. Пересекаются ли графики функций

$f(x) = \sin^3 x + \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}$ и $g(x) = \arcsin x - \frac{3\pi}{2}$?

Решение. $f(x) = \sin^3 x + 3\sin^2 x + 1$.

Пусть $\sin x = t$, где $-1 \le t \le 1$.

Рассмотрим функцию

$P(t) = t^3 - 3t^2 + 1;\ \ P'(t) = 3t^2 - 6t;$

критические точки $t = 0$, $t = 2$.

t	-1	0	1
$P(t)$	-3	1	-1

$$\max_{[-1;1]} P(t) = 1;\quad \min_{[-1;1]} P(t) = -3.$$

Отсюда следует, что $E(f) = [-3;\ 1]$. (1)

Рассмотрим теперь функцию $g(x) = \arcsin x - \frac{3\pi}{2}$.

$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$,

следовательно, $E(g) = [-2\pi;\ -\pi]$. (2)

Из (1) и (2) следует, что $E(g) \cap E(f) = \varnothing$.

Отсюда можно сделать вывод, что графики этих функций не пересекаются.

2. Докажите, что для углов A, B, C равнобедренного треугольника справедливо неравенство:

$$\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \le \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

Решение. Пусть $A = C$. Тогда $B = \pi - 2A$.

Имеем: $\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} = \cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) =$

$= \cos^2\frac{A}{2}\cdot\sin A = \frac{(1+\cos A)\sin A}{2} = \frac{1}{2}\sin A + \frac{1}{4}\sin 2A.$

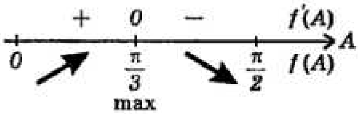
Рассмотрим функцию $f(A) = \frac{1}{2}\sin A + \frac{1}{4}\sin 2A$,

где $0 < A < \frac{\pi}{2}$.

$f'(A) = \frac{1}{2}\cos A + \frac{1}{2}\cos 2A =$

$= \cos^2 A + \frac{1}{2}\cos A - \frac{1}{2}$,

$f'(A) = 0$ при $A = \frac{\pi}{3}$.



Учитывая, что $0 < A < \frac{\pi}{2}$, при $A = \frac{\pi}{3}$ функция достигает максимума. Так как на данном промежутке функция непрерывна и это единственный экстремум, то при $A = \frac{\pi}{3}$ функция достигает наибольшего значения.

$f_{\text{наиб.}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$

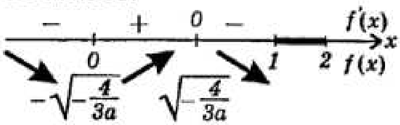
Это и значит, что $\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} \le \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

3. Существуют ли такие значения a, при которых наибольшее значение функции $f(x) = ax^3 + 4x + 1$ на промежутке $[1; 2]$ достигается на левом конце этого промежутка?

Решение. $f'(x) = 3ax^2 + 4$. При $a \ge 0$ $f'(x) > 0$, а потому функция возрастает, и на левом конце промежутка $[1; 2]$ наибольшего значения быть не может.

Следовательно, $a < 0$.

$f'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{-\frac{4}{3a}}$.



На промежутке $\left[-\frac{4}{3a};\ +\infty\right)$ функция $f(x)$ убывает, а потому наибольшее значение может быть достигнуто на левом конце промежутка $[1;\ 2]$, если будут выполнены условия: $\begin{cases}\sqrt{-\frac{4}{3a}} \le 1, \\ a < 0.\end{cases}$ Отсюда $a \le -\frac{4}{3}$.

Ответ. При $a \in \left(-\infty;\ -\frac{4}{3}\right]$.

4. На графике функции $f(x) = \sqrt{\ln\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)}$ найдите точку, ближайшую к точке $A(0;\ 0)$.

Решение. Пусть точка $(x;\ y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$.

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + \ln\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)}.$$

d достигает наименьшего значения тогда, когда будет наименьшим подкоренное выражение:

$$g(x) = x^2 + \ln\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right) = x^2 + \ln\frac{2x^2 + x + 2}{x}.$$

Отметим, что $D(g) = (0;\ +\infty)$.

$$g'(x) = 2x + \frac{x}{2x^2 + x + 2}\cdot\left(2 - \frac{2}{x^2}\right) = 2x + \frac{2x\left(x^2 - 1\right)}{x^2\left(2x^2 + x + 2\right)} =$$

$$= 2x\cdot\left(1 + \frac{x^2 - 1}{x^2\left(2x^2 + x + 2\right)}\right) = 2x\cdot\frac{2x^4 + x^3 + 2x^2 + x^2 - 1}{x^2\left(2x^2 + x + 2\right)} =$$

$$= \frac{2\left(2x^4 + x^3 + 3x^2 - 1\right)}{x\left(2x^2 + x + 2\right)}.$$

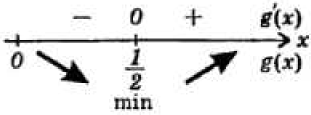
$g'(x) = 0$, если $2x^4 + x^3 + 3x^2 - 1 = 0$,

$2x^4 - x^3 + 2x^3 - x^2 + 4x^2 - 2x + 2x - 1 = 0$,

$x^3(2x - 1) + x^2(2x - 1) + 2x(2x - 1) + (2x - 1) = 0$,

$(2x-1)\left(x^3+x^2+2x+1\right)=0.$

Пусть $P(x)=x^3+x^2+2x+1.$



При $x>0$ $P(x)>0$, поэтому уравнение имеет только один корень $x=\frac{1}{2}$ при $x>0$.

Наименьшее значение достигается при $x=\frac{1}{2}$.

Тогда $y=\sqrt{\ln(1+4+1)}=\sqrt{\ln 6}$.

Ответ. $\left(0{,}5;\ \sqrt{\ln 6}\right)$.

Примечание. При достаточной подготовленности класса можно использовать схему Горнера.

$\frac{1}{2}$	2	1	3	0	−1
	2	2	4	2	0

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^3+2x^2+4x+2\right)=0 \Rightarrow (2x-1)\underbrace{\left(x^3+x^2+2x+1\right)}_{\neq 0}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

5. К некоторой точке кривой $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ проведена касательная. При каком значении абсциссы точки касания расстояние от начала координат до касательной будет наибольшим?

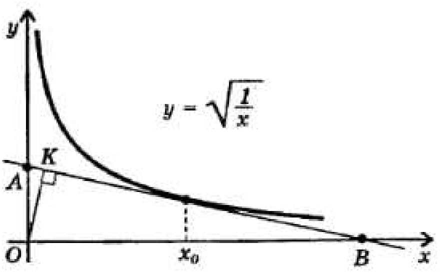


Рис. 24

Решение. Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид:

$$y=-\frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}x+\frac{3}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$OA=y(0)=\frac{3}{2\sqrt{x_0}};$$

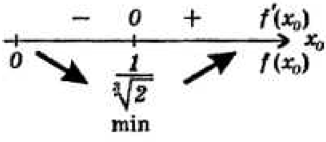
$$y = 0; \quad \frac{1}{2x_0\sqrt{x_0}}x = \frac{3}{2\sqrt{x_0}}.$$

Отсюда $x = 3x_0$.

Тогда $OB = 3x_0$; $AB = \sqrt{\dfrac{9}{4x_0} + 9x_0^2} = \dfrac{3\sqrt{4x_0^3 + 1}}{2\sqrt{x_0}}$;

$$d = OK = \frac{AO \cdot OB}{AB} = \frac{3x_0}{\sqrt{4x_0^3 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{4x_0 + \dfrac{1}{x_0^2}}}.$$

Рассмотрим функцию $f(x_0) = x_0^{-2} + 4x_0$; $x_0 > 0$.



$$f'(x_0) = \frac{2\left(2x_0^3 - 1\right)}{x_0^3},$$

$f'(x_0) = 0$ при $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Таким образом, расстояние от начала координат до касательной будет наибольшим при $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Урок 5

ПРОИЗВОДНАЯ
(*часть IV*)

I. Проверка домашнего задания

Обратите внимание на задачи 3 и 5.

1. Докажите, что $\sin^2 \dfrac{x}{2} \cos x < \dfrac{1}{7}$.

Доказательство. $f(x) = \sin^2 \dfrac{x}{2} \cos x = -\dfrac{1}{2}\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\cos x$.

Пусть $\cos x = t$, где $-1 \le t \le 1$.

Рассмотрим функцию $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$, где $t \in [-1; 1]$.

$h'(t) = -t + \frac{1}{2}$; $h'(t) = 0$ при $t = \frac{1}{2}$.

t	-1	$\frac{1}{2}$	1
$h(t)$	-1	$\frac{1}{8}$	0

$\max\limits_{[-1;1]} h(t) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$. Это значит, что $h(t) \le \frac{1}{8}$.

Так как $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$, то при любых значениях x $\sin^2\frac{x}{2}\cos x < \frac{1}{7}$.

2. Графики:

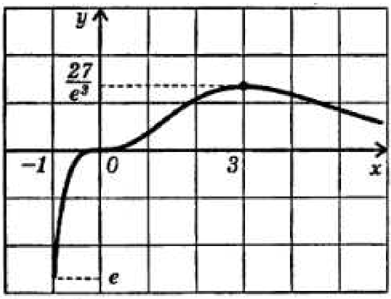


Рис. 25

1) $y = \frac{x^3}{e^x}$ (см. рис. 25).

Примечание. Исследование с помощью второй производной не проводилось.

2) $y = \frac{x}{\ln x - 1}$ на отрезке $[1; 8]$ (см. рис. 26).

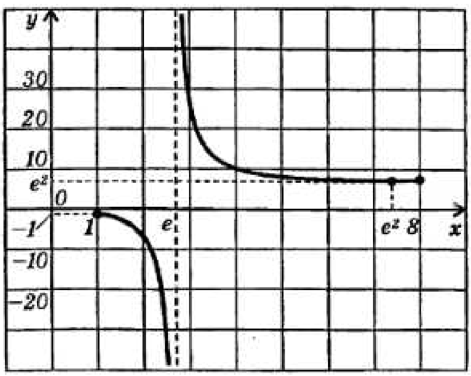


Рис. 26

II. Письменный опрос учащихся

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{1}{\ln 2}4^x-\frac{3}{\ln 2}2^x+x \text{ на отрезке } [0;\ 1].$$

Ответ. $\max\limits_{[0;1]} f(x)=1-\frac{2}{\ln 2}$; $\min\limits_{[0;1]} f(x)=-\frac{2}{\ln 2}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3+y^3=28, \\ x+y=4. \end{cases}$

Ответ. $(1;\ 3)$, $(3,\ 1)$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2+1-\ln(2x-1)$, параллельной оси Ox.

Ответ. $y=2$.

III. Упражнения (различные задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции)

1. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 2. Найдите наибольшее значение площади боковой поверхности призмы.

Решение. Пусть $BC=x$. Тогда $BB_1=\sqrt{4-x^2}$.

$$S_{\text{бок.}}=3x\sqrt{4-x^2}=3\sqrt{4x^2-x^4}, \text{ где } 0<x<2.$$

Площадь боковой поверхности будет наибольшей, если будет наибольшим значение функции $p(x)=4x^2-x^4$.

$$p'(x)=8x-4x^3=4x\left(\sqrt{2}+x\right)\left(\sqrt{2}-x\right).$$

В указанном интервале $(0;\ 2)$ находится только одна критическая точка $x=\sqrt{2}$, которая является точкой максимума. Отсюда

$$\max S_{\text{бок.}}=S\left(\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2}=6.$$

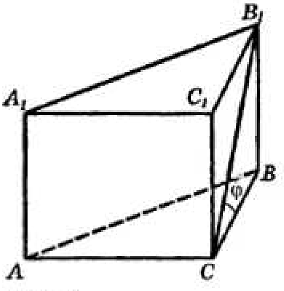


Рис. 27

Задача может быть решена и элементарным способом.

Пусть $\angle B_1CB = \varphi$. Тогда $BC = 2\cos\varphi$.

$P_{ABC} = 6\cos\varphi$; $BB_1 = 2\sin\varphi$.

$S_{бок.} = P_{ABC} \cdot BB_1 = 6\cos\varphi \cdot 2\sin\varphi = 6\sin 2\varphi$.

Отсюда следует, что $S_{наиб.} = 6$.

Ответ. 6.

2. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, а сумма длин всех ее ребер равна m. Найдите наибольшее значение площади ее боковой поверхности.

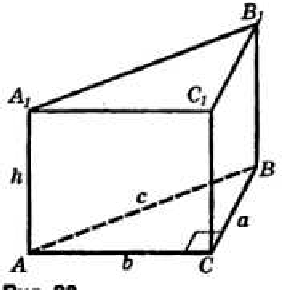


Рис. 28

Решение. $S_{бок.} = (a + b + c)h$ (см. рис. 28).

По условию $2(a + b + c) + 3h = m$.

Отсюда $a + b + c = \frac{m - 3h}{2}$.

Тогда

$S_{бок.} = \frac{m - 3h}{2} \cdot h = -\frac{3}{2}h^2 + \frac{m}{2}h$, где $0 < h < \frac{m}{3}$.

Эта функция достигает наибольшего значения при $h = \frac{m}{6}$.

$$S_{наиб.} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m^2}{36} + \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{6} = \frac{m^2}{24}.$$

Ответ. $\frac{m^2}{24}$.

3. Центр основания правильной четырехугольной пирамиды удален от боковой грани на расстояние, равное m. При каком угле наклона боковых граней к плоскости основания площадь полной поверхности пирамиды будет наименьшей?

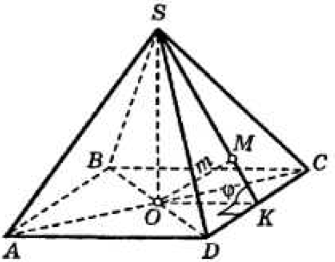


Рис. 29

Решение. Пусть $\angle SKO = \varphi$ (см. рис. 29).

Тогда $OK = \frac{m}{\sin\varphi}$ и $AD = \frac{2m}{\sin\varphi}$.

$$S_{\text{осн.}} = \frac{4m^2}{\sin^2 \varphi}. \qquad (1)$$

$S = \dfrac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi} + S_{\text{осн.}} = \dfrac{2S_{\text{осн.}}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. Учитывая (1), имеем:

$$S = \frac{8m^2 \cdot \cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{2m^2}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi}.$$

Площадь поверхности будет наименьшей при условии, что знаменатель дроби принимает наибольшее значение.

Имеем $\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi = \dfrac{1-\cos\varphi}{2}\cdot\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}\cos^2\varphi + \dfrac{1}{2}\cos\varphi$.

Пусть $\cos\varphi = t$, где $0 < t < 1$.

Рассмотрим функцию $f(t) = -\dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}t$. Она достигает наибольшего значения при $t = \dfrac{1}{2}$, т. е. при $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда следует, что площадь поверхности пирамиды будет наименьшей, если $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. $\dfrac{\pi}{3}$.

4. Для расфасовки растворимого кофе используют банки цилиндрической формы объемом 128π. При каких размерах банки для ее изготовления потребуется наименьшее количество металла (расходами металла на швы можно пренебречь)?

Решение. Пусть радиус основания цилиндра R, а его высота h. Площадь поверхности банки $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$, а объем банки $V = \pi R^2 h$.

По условию $\pi R^2 h = 128\pi$. Отсюда $h = \dfrac{128}{R^2}$.

Тогда $S = 2\pi R\cdot\dfrac{128}{R^2} + 2\pi R^2 = 2\pi\left(\dfrac{128}{R} + R^2\right)$, где $R > 0$.

$$S'(R) = 2\pi\left(2R - \frac{128}{R^2}\right) = 4\pi\frac{R^3 - 64}{R^2},$$

$S'(R) = 0$ при $R = 4$.

Тогда $h = \dfrac{128}{16} = 8$.

Ответ. $R = 4$, $h = 8$.

5. В фигуру, ограниченную линиями $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 6$ вписан параллелограмм наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой $x = 6$, а две другие — на параболах. Найдите его площадь.

Решение. Пусть $A\left(x;\ x^2\right)$ и $B\left(x;\ 2x^2\right)$, тогда $AB = 2x^2 - x^2 = x^2$. AK — высота параллелограмма $ABCD$.

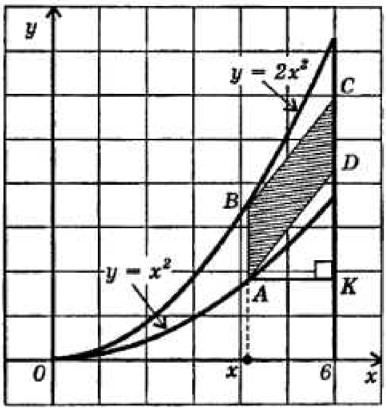


Рис. 30

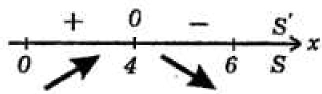
$AK = 6 - x$.

$S_{ABCD} = x^2(6 - x) =$

$= -x^3 + 6x^2$, где $0 < x < 6$.

$S' = -3x^2 + 12x = 3x(4 - x)$,

$S' = 0$ при $x = 4$.



$S_{\text{наиб.}} = S(4) = 16 \cdot 2 = 32$.

Ответ. 32.

На дом:

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция, основания которой 4 и 6. Диагональ боковой грани, проходящей через большую боковую сторону трапеции, равна 4. Найдите наибольшую величину объема призмы.

Ответ. 30.

2. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписан прямоугольный параллелепипед наибольшего объема так, что его четыре вершины лежат на боковых ребрах пирамиды. Найдите длину его боковых ребер.

Ответ. $\frac{h}{3}$.

IV. Первообразная и интеграл (основные положения и теоремы)

1. Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными указанными уравнениями:

1) $y = x^2 - 6x + 5$; $y = x^2 + 6x + 5$; $y = 0$.

2) $y = e^x$; $y = 1 - x$; $x = -1$; $y = 0$.

3) $y = x^2 - 3x$; $y = -x - 1$; $y = 0$.

4) $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $y = \sqrt{x}$; $y = 0$.

2. Вычислите интегралы:

1) $\int_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx$; 2) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx$.

Дополнительные упражнения

1. Найдите все значения a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a-2)x - a - 1 = 0$ принимает наименьшее значение.

Решение. $x_1 + x_2 = a - 2$; $x_1 \cdot x_2 = -a - 1$;

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (a-2)^2 + 2a + 2 = a^2 - 2a + 6.$$

Наименьшее значение достигается при $a = 1$.

Отметим, что $D = a^2 - 4a + 4 + 4a + 4 = a^2 + 8 > 0$ при всех $a \in R$.

Ответ. $a = 1$.

2. В треугольной пирамиде три ребра, исходящие из одной вершины, перпендикулярны друг другу, причем одно из них равно противолежащему ему ребру основания, а произведение длин двух других ребер равно P. Найдите наименьшее значение объема пирамиды.

Ответ. $V_{\text{наим.}} = \frac{P}{6}\sqrt{2P}$.

3. В правильную треугольную пирамиду со стороной основания x и боковым ребром y вписан шар радиуса r. При каких x и y объем пирамиды будет наименьшим?

Ответ. при $x = y = 2r\sqrt{6}$.

4. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Точки M и N лежат на диагоналях боковых граней BC_1 и CA_1 соответственно, причем отрезок MN параллелен плоскости AA_1B. Найдите наименьшую возможную длину отрезка MN.

Решение. Через MN проведем плоскость, параллельную грани AA_1B_1B.

Очевидно, что $PQ \parallel AB$; $MQ \parallel BB_1$ и $NP \parallel AA_1$.

Рассмотрим прямоугольную трапецию $PNMQ$.

Пусть $\frac{BQ}{BC} = x$. Тогда $QC = a - ax = PC$,

$MQ = BQ = ax$ (из ΔBMQ).

$NP = PC = a - ax$ (из ΔNPC). $MN^2 = TN^2 + TM^2$.

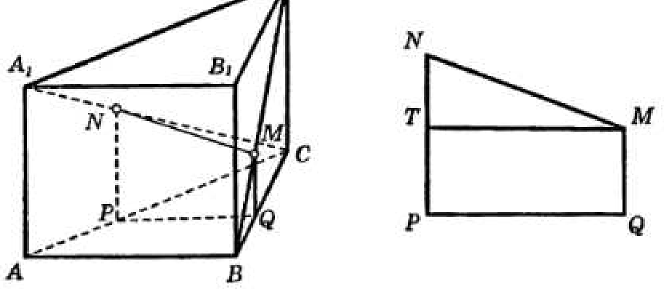


Рис. 31

$MN^2 = (a - ax - ax)^2 + (a - ax)^2$; $PQ = QC$,

$MN^2 = (a - ax)^2 + (a - 2ax)^2 = 5x^2a^2 - 6xa^2 + 2a^2$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 5x^2a^2 - 6xa^2 + 2a^2$ $(x > 0)$;

$f'(x) = 10x\,a^2 - 6a^2$; $f'(x) = 0$ при $x = 0{,}6$.

Легко доказать, что в точке $x = 0{,}6$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения.

$f_{\min} = a^2(5 \cdot 0{,}36 - 3{,}6 + 2) = 0{,}2\,a^2$.

Тогда $MN = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Ответ. $\dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

5. **Найдите наибольшее значение площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если площадь его основания равна 1, а длина диагонали равна 2.**

Решение. Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, B_1D — его диагональ.

Пусть $AB = x$. Тогда $AD = \dfrac{1}{x}$, $BB_1 = \sqrt{4 - x^2 - \dfrac{1}{x^2}}$.

Площадь боковой поверхности $S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot BB_1$.

$$S(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{4 - x^2 - \frac{1}{x^2}},$$

где $\sqrt{2 - \sqrt{3}} < x < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$.

Тогда $S(x) = 2\sqrt{\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(6 - \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2\right)}$.

Введем обозначение $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = t$ и рассмотрим функцию $f(x) = t(6 - t) = -t^2 + 6t$, где $4 \le t < 6$, т. к. $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$ при $x > 0$.

$f'(t) = 6 - 2t$, но при $4 \le t < 6$ $f'(t) < 0$, т. е. функция убывает. Она достигает наибольшего значения при $t = 4$.

Следовательно, функция $S(x)$ достигает наибольшего значения, если $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4$, т. е. $x + \frac{1}{x} = 2$.

Отсюда следует, что $x = 1$.

$S_{\text{наиб.}} = S(1) = 2 \cdot 2\sqrt{4 - 1 - 1} = 4\sqrt{2}$.

Ответ. $S_{\text{наиб.}} = 4\sqrt{2}$.

Урок 6

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ (*часть I*)

I. Краткий обзор домашнего задания

II. Вступительное слово учителя

1. Понятие первообразной. Основные свойства первообразных.
2. Таблица первообразных.
3. Правила нахождения первообразных.
4. Понятие интеграла. Геометрический смысл интеграла.
5. Формула Ньютона—Лейбница.

III. Упражнения

1. Докажите, что функция $F(x) = 4x + \cos^2 4x$ является первообразной для функции $f(x) = 8\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$.

2. Для функции f найдите первообразную F, если

$f(x) = -\frac{3}{x^2} - \cos \pi x$ и $F(-1) = 1$.

Ответ. $F(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{\pi}\sin \pi x + 4$.

3. $f(x) = 2x + 4$, $y = 6x + 3$. Найдите ту первообразную функции f, график которой касается данной прямой.

Решение. $F(x) = x^2 + 4x + C$.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания.

Уравнение касательной:

$y = x_0^2 + 4x_0 + C + (2x_0 + 4)(x - x_0) =$

$= (2x_0 + 4) \cdot x - 2x_0^2 - 4x_0 + x_0^2 + 4x_0 + C =$

$= (2x_0 + 4) \cdot x - x_0^2 + C.$

Так как $y = 6x + 3$ — касательная к графику F, то

$\begin{cases} 2x_0 + 4 = 6, \\ -x_0^2 + C = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 1, \\ C = 4. \end{cases}$

Тогда $F(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Ответ. $(x + 2)^2$.

4. Материальная точка массы $m = 1$ движется по прямой со скоростью $V(t)$ под действием силы, которая меняется по закону $F(t) = 8 - 12t$. Найдите закон движения точки $x(t)$, если в момент времени $t = 0$ $x = 0$ и $V = 1$.

Решение. $mV' = 8 - 12t$. Так как $m = 1$, то $V'(t) = 8 - 12t$.

Тогда $V(t) = 8t - 6t^2 + C$; $V(0) = 1$.

Отсюда $C = 1$, $V(t) = -6t^2 + 8t + 1$.

Тогда $x'(t) = -6t^2 + 8t + 1$; $x(t) = -2t^3 + 4t^2 + t + C_1$.

Так как $x(0) = 0$, то $C_1 = 0$.

Ответ. $x(t) = -2t^3 + 4t^2 + t$.

5. Вычислите интегралы:

1) $\int_1^4 \frac{x\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^9}} dx$. **Ответ.** $\frac{14}{3}$.

2) $\int_1^2 \frac{dx}{2 - 3x}$. **Ответ.** $-\frac{2}{3}\ln 2$.

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$. **Ответ.** π.

4) $\int_{-2}^{1} (|x| + 1) dx$.

Решение

1-й способ: $\int\limits_{-2}^{1}(|x|+1)dx = \int\limits_{-2}^{0}(-x+1)\,dx + \int\limits_{0}^{1}(x+1)\,dx =$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{0}^{1}=(0-(-2-2))+\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)-0\right)=$$

$$=4+\frac{3}{2}=5{,}5.$$

2-й способ: График функции $f(x)=|x|+1$ показан на рис. 32.

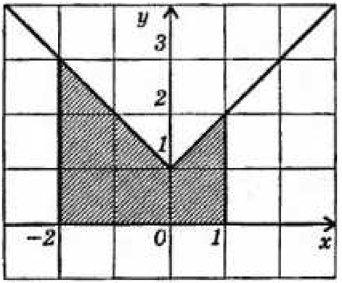


Рис. 32

$f(-2)=3,\ f(1)=2.$

Интеграл равен площади заштрихованной фигуры:

$$\int\limits_{-2}^{1}(|x|+1)dx =$$

$$=\frac{3+1}{2}\cdot 2+\frac{2+1}{2}\cdot 1=5{,}5.$$

Ответ. 5,5.

5) $\int\limits_{1}^{2}\sqrt{(x-1)(2-x)}\,dx.$

Решение. $y=\sqrt{(x-1)(2-x)}=\sqrt{-x^2+3x-2},\ y\ge 0.$

$y^2=-x^2+3x-2.$

$x^2-3x+2+y^2=0,$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$

Для нахождения значения интеграла необходимо вычислить площадь полукруга.

$S=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}.$

Ответ. $\frac{\pi}{8}.$

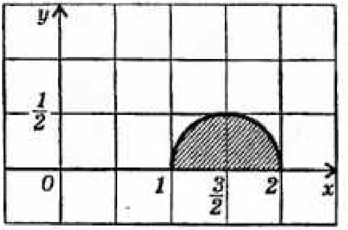


Рис. 33

6. *Резерв.* Найдите значения A и B, при которых функция $f(x) = Ax + B$ удовлетворяет условиям:

$$f(2) - f'(2) = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 f^2(x)\,dx \le \frac{1}{4}.$$

Решение. $f(2) = 2A + B$; $f'(x) = A$; $f'(2) = A$.

$f(2) - f'(2) = 2A + B - A = A + B$.

По условию $A + B = 1$,

$$\int_0^1 \left(A^2x^2 + 2ABx + B^2\right)dx = \left(\frac{A^2x^3}{3} + \frac{2ABx^2}{2} + B^2x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{A^2}{3} + AB + B^2.$$

Имеем:

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ \dfrac{A^2}{3} + AB + B^2 \le \dfrac{1}{4}. \end{cases} \qquad \begin{cases} B = 1 - A, \\ A^2 - 3A + \dfrac{9}{4} \le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1 - A, \\ \left(A - \dfrac{3}{2}\right)^2 \le 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{3}{2}, \\ B = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$.

На дом:

1. Найдите первообразную для функции:

$$f(x) = \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos 2x}.$$

Ответ. $F(x) = 2\cos x + C$.

2. Найдите $F(x)$ по данной $F'(x)$.

1) $F'(x) = 7x^2 - 2x + 3$, график F проходит через точку $M(1;\ 5)$.

2) $F'(x) = \sin 2x + 3x^2$; $F(0) = 2$.

3. Вычислите:

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx$. **Ответ.** $\frac{\pi}{2}$.

2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{1+6x+9x^2}}$. **Ответ.** $4\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4}\right)$.

3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x^2-2x+1}{x^3}\,dx$. **Ответ.** $2\ln 2-\frac{5}{8}$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=-x^3-2x^2-x+3$ и касательной к нему в точке $x_0=-1$.

Ответ. $\frac{1}{12}$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+1$ и двумя касательными, проведенными к нему в точках пересечения графика с осью Ox.

Ответ. $1\frac{1}{3}$.

6*. Дана фигура, ограниченная линиями $y=\frac{1}{4}x^2$ и $y=x$. Отрезок наибольшей длины, заканчивающийся внутри фигуры и принадлежащий прямой $x=a$, делит фигуру на две части. Докажите, что площади этих частей равны.

Дополнительные упражнения

1. Найдите первообразные для следующих функций:

1) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$. **Ответ.** $F(x)=\operatorname{tg} x-x+C$.

2) $f(x)=\sin^3 x$. **Ответ.** $F(x)=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C$.

3) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+4}$.

Решение. $D(f)$: $x \neq -1$ и $x \neq -4$;

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 4} = \frac{1}{(x+4)(x+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right).$$

Ответ. $F(x) = \frac{1}{3}(\ln|x+1| - \ln|x+4|) + C$.

2. Вычислите $A = \int\limits_{-3}^{0} \underbrace{\min\left(\sqrt{x+3};\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\right)}_{f(x)} dx$.

Решение. Отметим, что $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{при } -3 \le x \le -2, \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} & \text{при } -2 \le x \le 0. \end{cases}$

Тогда $A = \int\limits_{-3}^{-2} \sqrt{(x+3)}\,dx + \int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}\right)dx =$

$$= \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{3}x\right)\Big|_{-2}^{0} = 3\frac{1}{3}.$$

Ответ. $3\frac{1}{3}$.

Урок 7

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ (*часть II*)

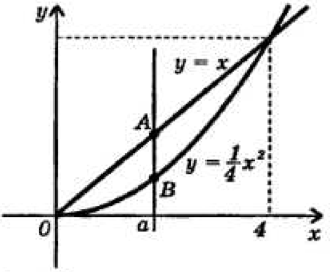
I. Проверка домашнего задания

Обратите внимание на задачу 6*.

Доказательство. $d = AB = a - \frac{a^2}{4}$;

$d(a)$ — является квадратной функцией и наибольшего значения достигает при $a = 2$.

$$S_1 = \int\limits_{0}^{2}\left(x - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_{0}^{2} = 1\frac{1}{3}.$$



$$S_2 = \int_2^4 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_2^4 = 1\frac{1}{3}.$$

Получили $S_1 = S_2$.

Рис. 34

II. Письменный опрос учащихся

1. (Для более сильных учеников.)

1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - |x|$ и $y = x^2 - 3$.

Ответ. $14\frac{2}{3}$.

2) Найдите все корни уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, удовлетворяющие неравенству $x^2 - 8x + 12 \le 0$.

Ответ. $x_1 = \frac{5\pi}{6}$; $x_2 = \frac{7\pi}{6}$; $x_3 = \frac{11\pi}{6}$.

3) Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x \sqrt{1 - \cos 2x}$.

2. (Для более слабых учеников.)

1) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)^2$ и $y = 4 - x$.

Ответ. 4,5.

2) Найдите первообразную $F(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, график которой проходит через точку $M(-1;\ 2)$.

Ответ. $F(x) = \ln|x| + 2$.

3) Решите систему (в целых числах) $\begin{cases} 3^{2x-1} \cdot 27^{y+x} = 9\frac{1}{2}, \\ 3x + y^2 = 4. \end{cases}$

Ответ. $(1;\ -1)$.

III. Работа класса

1. Вычислите:

1) $\int\limits_1^2 \frac{x^4 - 3x^3 + 3}{x} dx$. **Ответ.** $3\ln 2 - 3\frac{1}{4}$.

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2 x + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$. **Ответ.** $\frac{5}{2} - \frac{3\pi}{4}$.

3) $\int\limits_0^2 \left| |x-1| - 1 \right| dx$. **Ответ.** 1.

2. Фигура, ограниченная линиями $y = -2x + 8$, $x = -1$ и $y = 0$, делится линией $y = x^2 - 4x + 5$ на две части. Найдите площади каждой части.

Ответ. $11\frac{1}{3}$; $13\frac{2}{3}$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$, $x = -1$ и касательной к параболе, проведенной в точке $x_0 = 3$.

Ответ. $10\frac{2}{3}$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -\frac{6}{x} - 3 \text{ и } y = x + 4.$$

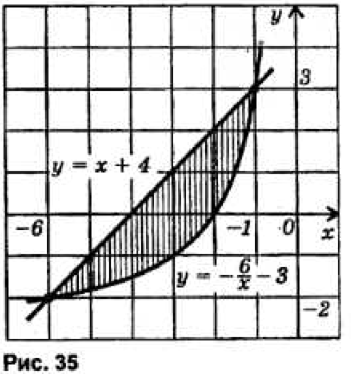


Рис. 35

Решение. Находим абсциссы точек пересечения графиков указанных функций:

$-\frac{6}{x} - 3 = x + 4$; $x_1 = -1$, $x_2 = -6$.

$$S = \int\limits_{-6}^{-1} \left(x + 4 + \frac{6}{x} + 3 \right) dx = \int\limits_{-6}^{-1} \left(x + \frac{6}{x} + 7 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6\ln|x| + 7x \right) \Bigg|_{-6}^{-1} = 17{,}5 - 6\ln 6.$$ **Ответ.** $17{,}5 - 6\ln 6$.

На дом: Подготовка к контрольной работе по теме «Первообразная и интеграл»

1. При каких значениях a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$?

Ответ. $a = -7$.

2. Постройте график функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$ на отрезке $[-0,5;\ 3]$. Укажите множество значений функции на этом отрезке.

Ответ. $[-2;\ 2]$.

3. Найдите промежутки убывания функции $y = \left|x - x^3\right|$.

Ответ. $(-\infty;\ -1]$; $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\ 0\right]$; $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\ 1\right]$.

4. Найдите множество значений функции

$$y = 2\cos x - \sin 2x \text{ на отрезке } \left[0;\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right].$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{8}x^3;\quad y = 3 - x;\quad y = -4x.$$

Ответ. 5.

6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x|y| = 2;\quad x = 1;\quad x = 3.$$

Ответ. $4\ln 3$.

7. В правильной треугольной призме каждая боковая грань имеет периметр, равный a $(a > 0)$. Найдите длину бокового ребра призмы наибольшего объема.

Ответ. $\frac{a}{6}$.

Дополнительные упражнения

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f(x)=2+\sin x$; $g(x)=1+\cos^2 x$ при $x\in[0;\ \pi]$.

Решение. $0\le \sin x\le 1$; $2\le \sin x+2\le 3$.

$0\le \cos^2 x\le 1$; $1\le \cos^2 x+1\le 2$.

Отсюда следует, что при $x\in[0;\ \pi]$ $f(x)\ge g(x)$.

Тогда $S_ф=\int\limits_0^{\pi}\left(2+\sin x-1-\cos^2 x\right)dx=$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(2+\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}+2.$$

Ответ. $\frac{\pi}{2}+2$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$ и $y=\frac{1}{e-1}\cdot x-\frac{1}{e-1}$.

Решение. Построим данную фигуру и фигуру, симметричную данной относительно прямой $y=x$. Получим фигуру, ограниченную графиками функций $y=e^x$ и $y=(e-1)x+1$, которая равна данной (рис. 36).

$S_ф=S_{ABCO}-S_{AmBCO}$;

$S_{ABCO}=\frac{1+e}{2}\cdot 1=\frac{1+e}{2}$;

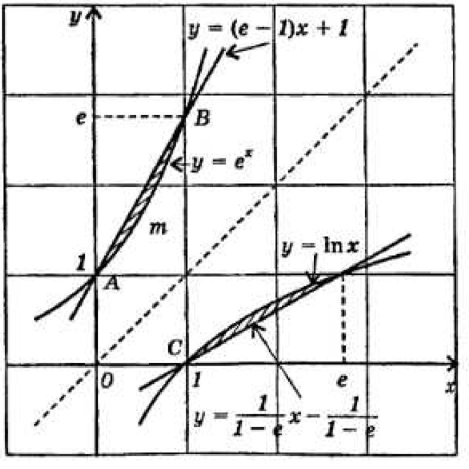


Рис. 36

$$S_{AmBCO} = \int_0^1 e^x\,dx = e^x \Big|_0^1 = e - e^0 = e - 1;$$

$$S_\phi = \frac{1+e}{2} - (e-1) = \frac{3-e}{2}.$$ **Ответ.** $\frac{3-e}{2}$.

3. Фигура находится в правой полуплоскости и ограничена кривыми $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$, $y = 1$ и $y = 2$. При каких $a \geq 1$ площадь фигуры будет наибольшей?

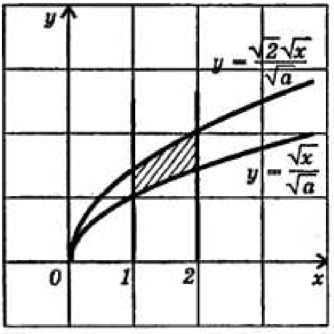


Рис. 37

Решение. Рассмотрим функции, обратные функциям $y = ax^2$ и $y = \frac{1}{2}ax^2$. Графики этих функций $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$ и $y = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$ показаны на рис. 37.

Заштрихованная фигура равна искомой фигуре.

$$S = \int_1^2 \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \right) dx = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a}} \int_1^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2\left(5-3\sqrt{2}\right)}{3\sqrt{a}}.$$

Функция $S(a) = \frac{2\left(5-3\sqrt{2}\right)}{3\sqrt{a}}$ достигает наибольшего значения на конце луча $[1; +\infty)$, т. е. при $a = 1$.

Ответ. 1.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}}$ и $y = 3 - x^2$, если известно, что они пересекаются в точках с целочисленными абсциссами.

Решение. Отметим, что $x \neq \pm 2$.

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}};$$

$$f(\pm 1) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2.$$

$g(x) = 3 - x^2$; $g(\pm 1) = 2$.

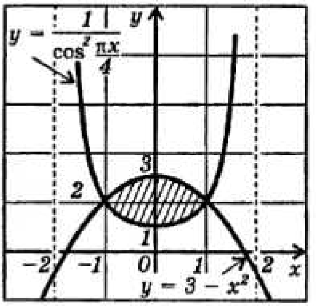


Рис. 38

Следовательно, кривые пересекаются в точках с абсциссами $x = -1$ и $x = 1$.

$$S_ф = 2\int_0^1 \left(3 - x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}}\right) dx = 2\left(3x - \frac{x^3}{3} - \frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(3 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi}\right) = 2\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Ответ. $\frac{8(2\pi - 3)}{3\pi}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 + \sqrt{x + 2}$, $y = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$ и $x = \sqrt{10 - y}$.

Решение. $x = \sqrt{10 - y}$; $x \geq 0$; $x^2 = 10 - y$; $y = 10 - x^2$.

Найдем абсциссу точки пересечения графиков функций:

1) $y = 4 + \sqrt{x + 2}$ и $y = 10 - x^2$.

Рассмотрим уравнение:

$4 + \sqrt{x + 2} = 10 - x^2$, $\sqrt{x + 2} = 6 - x^2$.

Подбором находим, что $x = 2$. Другого решения нет, так как функция в левой части возрастает, а в правой — при $x \geq 0$ убывает.

2) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$ и $y = 10 - x^2$ $(x \geq 0)$.

$$10-x^2=-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5};\quad 5x^2-3x-36=0.$$

Положительный корень только $x=3$.

3) $y=4+\sqrt{x+2}$ и $y=-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}$;

$$4+\sqrt{x+2}=-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5};\quad \sqrt{x+2}=-\frac{3}{5}x-\frac{6}{5};$$

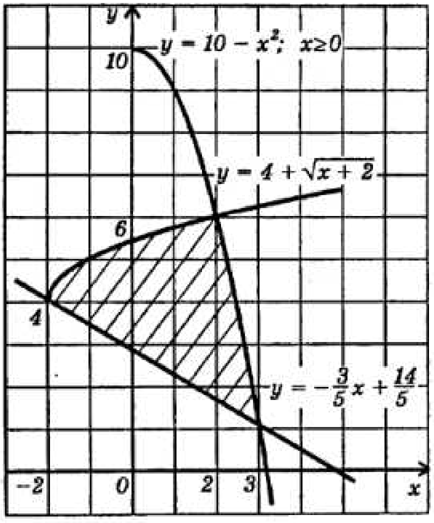


Рис. 39

$$\sqrt{x+2}=-\frac{3}{5}(x+2).$$

Отсюда следует, что $x=-2$.

Теперь изобразим графики указанных функций (см. рис. 39).

Так как на отрезке $[-2;\ 2]$ выполняется неравенство

$$4+\sqrt{x+2}\geq-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5},$$

а на отрезке $[2;\ 3]$ — неравенство

$$10-x^2\geq-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5},$$

то искомую площадь найдем следующим образом:

$$S=\int_{-2}^{2}\left(4+\sqrt{x+2}-\left(-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}\right)\right)dx+$$

$$+\int_{2}^{3}\left(\left(10-x^2\right)-\left(-\frac{3}{5}x+\frac{14}{5}\right)\right)dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{10}x^2+\frac{6}{5}x\right)\Bigg|_{-2}^{2}+\left(7\frac{1}{5}x+\frac{3}{10}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{2}^{3}=12{,}5.$$

Ответ. 12,5.

Урок 8

Контрольная работа по теме «ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ»

1-й вариант

1. Постройте с исследованием график функции

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3.$$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2;\ 2]$. Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $f(x) = a$?

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 4$, параллельной прямой $y = -2x + 6$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции, касательной и осью ординат.

Ответ. $y = -2x + 5$; $\frac{1}{3}$.

3. В основании пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. MB — высота. Объем пирамиды равен 9. Найдите наименьшее значение MD^2.

Ответ. 27.

2-й вариант

1. Постройте с исследованием график функции

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2;\ 2]$. Сколько решений в зависимости от m имеет уравнение $f(x) = m$?

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 + 4x$, параллельной прямой $y = 2x + 3$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции, касательной и осью ординат.

Ответ. $y = 2x + 1$; $\frac{1}{3}$.

3. Объем правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $18\sqrt{3}$. Найдите наименьшее значение A_1E^2, где E — середина CB.

Ответ. 27.

На дом: Тригонометрические функции, их свойства и графики. Основные формулы тригонометрии (без вывода).

1. Докажите:

1) $\dfrac{\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}{\cos 2x - \cos 3x + \cos 4x} = \operatorname{tg} 3x$.

2) $\dfrac{1 - 2\cos^2 \alpha}{2\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = 1$.

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

4) $1 - \cos(2x - \pi) - \cos(4x + \pi) + \cos(6x - 2\pi) =$
$= 4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$.

5) $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$.

6) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$.

2. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

1) $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найдите $f(\alpha)$. **Ответ.** 3.

2) Решите уравнение $f(x) = 2$. **Ответ.** $\operatorname{arctg} 3 + \pi k$.

3) Решите систему уравнений $\begin{cases} y - f(x) = 0, \\ y + f(x) = 4. \end{cases}$

Ответ. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ y = 2. \end{cases}$

4) Докажите, что для любых $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $f(x) > 1$.

Урок 9

ТРИГОНОМЕТРИЯ
(часть I)

I. Вступительное слово учителя

1. Определения тригонометрических функций.
2. Свойства и графики функций:

$y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ (краткий обзор).

II. Упражнения

1. Постройте графики функций:

1) $y = 2\cos 2x - 1$.

2) $y = 1{,}5\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3) $y = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

$$D(y): \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in Z, \\ x \neq \pi + 2\pi k; \quad k \in Z. \end{cases}$$

Графиком данной функции является график функции $y = \operatorname{tg} x$ с «выколотыми» точками $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

4) $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)}$,

$$D(y): \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi k}{2}, \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \quad \text{где} \quad k \in Z. \\ x \neq -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi k}{2}. \end{cases}$$

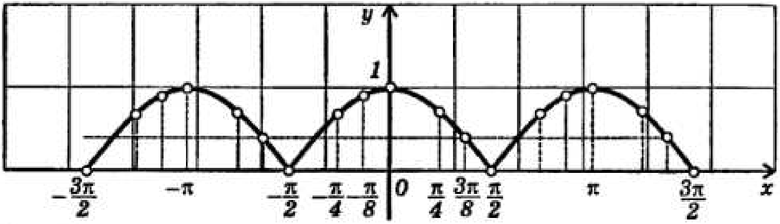


Рис. 40

$$y = |\cos x| \cdot \frac{\operatorname{ctg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)}{1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = |\cos x| \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg} 2x) \cdot \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 2x \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)} =$$

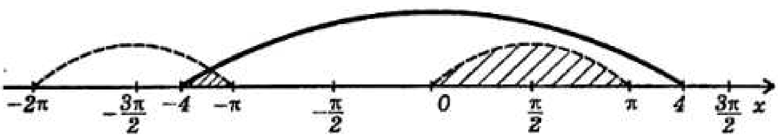
$= |\cos x|$.

2. Установите область определения функции

$y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$.

Решение

$$\begin{cases} \sin x \ge 0, \\ -4 \le x \le 4, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k, \ k \in Z, \\ -4 \le x \le 4. \end{cases}$$



Ответ. $[-4; -\pi] \cup [0; \pi]$.

3. Установите множество значений функции

$$f(x) = \log_2 \frac{\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Отметим, что $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Следует напомнить, что

$$A \sin x \pm B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(x \pm \operatorname{arctg} \frac{B}{A}\right), \ (A, \ B > 0).$$

В таком случае $D(f) = \boldsymbol{R}$.

$$\frac{\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3, \quad -1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1.$$

Тогда $2 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \le 4$. Тогда $1 \le f(x) \le 2$.

Ответ. $E(x) = [1;\ 2]$.

4. *Резерв*

$$f(x) = \frac{\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} - \frac{1}{2}x.$$

Построить график $y = f'(x)$.

Решение

$$f(x) = \frac{-\mathrm{ctg}\,x\cdot\sin x + \cos^3 x}{\sin x(-\mathrm{ctg}\,x)} - \frac{1}{2}x = \frac{\cos^3 x - \cos x}{-\cos x} -$$

$$-\frac{1}{2}x = \frac{\cos x\left(\cos^2 x - 1\right)}{-\cos x} - \frac{1}{2}x = \sin^2 x - \frac{1}{2}x =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 2x - \frac{1}{2}x, \quad D(f)\colon\ x \ne \frac{\pi k}{2}.$$

$$y = f'(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}.$$

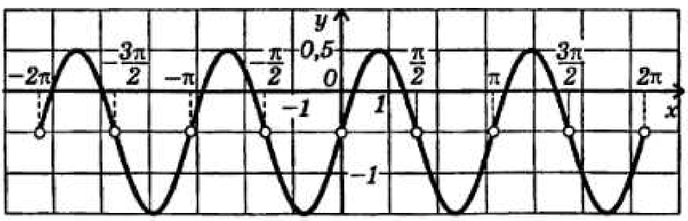


Рис. 41

Примечание. $f(x)=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ из домашнего задания.

Докажите, что для любых $x\in\left(\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ $f(x)>1$.

Доказательство. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}x-1}$. Если $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}x>1$ и $\operatorname{tg}x-1>0$.

В таком случае $\operatorname{tg}x+1>\operatorname{tg}x-1$ и $f(x)>1$, что и требовалось доказать.

На дом:

I. 1. Упростите $2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1$.

2. Докажите, что $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha$.

3. Докажите, что $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\alpha\right)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

4. Докажите, что $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 6\alpha-\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha+2\sin^2 2\alpha-1}=2\sin 2\alpha$.

5. Докажите, что
$\cos^2(45°+\alpha)-\cos^2(30°-\alpha)+\sin 15°\cdot\sin(75°-2\alpha)=-\sin 2\alpha$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$, если известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

Ответ. $\dfrac{m^2-1}{2}$.

II. Дана функция $f(x)=2\sin^2 x-3\sin x$.

1. Решите уравнение $f(x)=-1$.

2. Сравните $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y=f(x), \\ y=1-\cos 2x. \end{cases}$

4. Решите неравенство $\dfrac{f(x)+1}{\sin x - 1} > 0$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Дополнительные упражнения

1. Докажите, что

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha = \frac{\sin 5\alpha \cdot \sin 4\alpha}{\sin\alpha}.$$

Доказательство. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha =$

$$= \frac{\sin 2\alpha\ \sin\alpha + \sin 4\alpha\ \sin\alpha + \sin 6\alpha\ \sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin 8\alpha\ \sin\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{2\sin\alpha} +$$

$$+ \frac{\cos 5\alpha - \cos 7\alpha + \cos 7\alpha - \cos 9\alpha}{2\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha - \cos 9\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin 5\alpha \cdot \sin 4\alpha}{\sin\alpha}.$$

2. Упростите выражение

$$\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}.$$

Решение. Упростим знаменатель этой дроби.

Имеем $\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right) = \cos 2\alpha.$

Теперь выражение будет иметь вид $\dfrac{1-\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \cos 2\alpha.$

Ответ. $\cos 2\alpha$

3. Вычислите $\cos\dfrac{2\pi}{5} - \sin\dfrac{3\pi}{10}$.

Решение. $\cos\dfrac{2\pi}{5} - \sin\dfrac{3\pi}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{5} - \cos\dfrac{\pi}{5} =$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} - 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $-\frac{1}{2}$.

4. Представьте в виде произведения
$\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta$.

Решение. $\sin^2(\alpha - 2\beta) - \cos^2\alpha - \cos^2 2\beta =$

$$= \frac{1 - \cos(2\alpha - 4\beta) - 1 - \cos 2\alpha}{2} - \cos^2 2\beta =$$

$$= -\frac{\cos 2\alpha + \cos(2\alpha + 4\beta)}{2} - \cos^2 2\beta =$$

$$= -\cos(2\alpha - 2\beta)\cdot\cos 2\beta - \cos^2 2\beta =$$

$$= -\cos 2\beta\left(\cos(2\alpha - 2\beta) + \cos 2\beta\right) = -2\cos\alpha\cos 2\beta\cos(\alpha - 2\beta).$$

5. Докажите, что если $A + B + C = \pi$, то
$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1$.

Доказательство. Отметим, что из формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (\cos\alpha \neq 0;\ \cos\beta \neq 0)$$

следует, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$.

Аналогично $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)(1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$.

Имеем: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} =$

$$= \operatorname{tg}\frac{B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{A + C}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} =$$

$$= 1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1,$$

так как $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = 1.$

6. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{4}$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos(2\alpha+\beta)$.

Урок 10

ТРИГОНОМЕТРИЯ
(*часть II*)

I. Проверка домашнего задания

1. Рассматривается «сюжет» из домашнего задания.

1) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x = -1$.

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$. Пусть $\sin x = t$, где $-1 \le t \le 1$.

$2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

$\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$ или $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

2) Сравните числа $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ и $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^2\frac{\pi}{4} - 3\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin^2\frac{\pi}{3} - 3\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\frac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-1}{2}.$$

$a=3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)>0;\ \ a^2=9\left(3+2-2\sqrt{6}\right)=45-18\sqrt{6};$

$b=1;\ \ b^2=1;$

$a^2-b^2=45-18\sqrt{6}-1=44-18\sqrt{6}=2\left(22-9\sqrt{6}\right)=$

$=2\left(\sqrt{484}-\sqrt{486}\right)<0.$

Отсюда следует, что $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Или проще:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin^2\frac{\pi}{4}-3\sin\frac{\pi}{4}-2\sin^2\frac{\pi}{3}+3\sin\frac{\pi}{3}=$$

$$=2\left(\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)-3\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(2\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{3}-3\right)=$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-3\right)<0,$$

так как $\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{\pi}{3}$, а $\sqrt{2}+\sqrt{3}>3$, что легко доказать.

3) Решите систему уравнений $\begin{cases} y=f(x), \\ y=1-\cos 2x. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} y=2\sin^2 x-3\sin x, \\ y=1-\cos 2x. \end{cases}$

$1-\cos 2x=2\sin^2 x-3\sin x;$

$2\sin^2 x=2\sin^2 x-3\sin x;\ \ \sin x=0;$

$x=\pi k,\ \ k\in Z;\ \ y=1-\cos 2\pi k=1-1=0.$

Ответ. $\begin{cases} x=\pi k,\ \ k=Z; \\ y=0. \end{cases}$

4) Решите неравенство $\dfrac{f(x)+1}{\sin x - 1} > 0$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение. $\dfrac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sin x - 1} > 0;$

$$\frac{2(\sin x - 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)}{\sin x - 1} > 0.$$

$$\begin{cases} \sin x > \frac{1}{2}, \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

Так как по условию $x \in [0;\ \pi]$, то имеем

$\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}\right)$.

2. Докажите, что

$$\cos^2(45°+\alpha) - \cos^2(30°-\alpha) + \sin 15° \cdot \sin(75°-2\alpha) = -\sin 2\alpha.$$

Доказательство. $\dfrac{1+\cos(90°+2\alpha) - 1 - \cos(60°-2\alpha)}{2} +$

$$+\frac{\cos(60°-2\alpha) - \cos(90°-2\alpha)}{2} = \frac{-\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2} = -\sin 2\alpha.$$

II. Письменный опрос учащихся

1. Преобразуйте в произведение $1 - \cos\alpha - \sin\alpha$.

Ответ. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \sin^3 2x + \cos^3 2x$ в точке $x_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Ответ. $\operatorname{tg}\varphi = -3\sqrt{2}$.

3. Постройте график функции $f(x) = 2^{\log_2 \sin 2x} + 1$.

III. Напоминание

1. Решение простейших тригонометрических уравнений:

$\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$.

Понятие об $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$.

2. Отметить, что:

1) $\sin(\arcsin a) = a$, если $-1 \le a \le 1$;

$\arcsin(\sin a) = a$, если $-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$;

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

2) $\cos(\arccos a) = a$, если $-1 \le a \le 1$;

$\arccos(\cos a) = a$, если $0 \le a \le \pi$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$, если $a \in R$;

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

1. Вычислите $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответ. π.

2. При каких x определено выражение $\arccos\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$?

Ответ. $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

3. Вычислите:

1) $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$. **Ответ.** $\frac{7}{25}$.

2) $\sin(2\operatorname{arctg} 3)$. **Ответ.** $\frac{3}{5}$.

4. Упростите:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. **Ответ.** $\frac{\pi}{6}$.

2) $\arccos\left(\cos\dfrac{8\pi}{7}\right)$. **Ответ.** $\dfrac{6\pi}{7}$.

5. Постройте график функции $y = \sin(\arcsin(2x - 1))$.

Решение уравнений

1. Метод сведения уравнения к квадратному

$\cos x - 3\cos\dfrac{x}{2} + 2 = 0.$

Ответ. $x = 4\pi k;\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k;\ k \in Z.$

2. Метод разложения на множители

$1 + \sqrt{3}\sin(x + \pi) = \sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right).$

Ответ. $x = 2\pi k;\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in Z.$

3. Уравнения однородные и сводящиеся к ним

$4\sin^2 x - 2\sin 2x + 6\cos^2 x = 3.$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k;\ k \in Z.$

4. $3\sin x - 2\cos x = 3.$

1-й способ:

$$6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 3\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right),$$

$$\sin^2\frac{x}{2} - 6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 5\cos^2\frac{x}{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 6\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 5 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in Z.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 5;\ x = 2\operatorname{arctg} 5 + 2\pi k;\ k \in Z.$$

2-й способ:

$$\sqrt{13}\sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) = 3;\ \ \sin\left(x - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}};$$

$$x - \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = (-1)^k \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} + \pi k;\ \ k \in Z.$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi k;\ \ k \in Z.$$

5. Использование формул понижения степени

$\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1;$

$1 + \cos 4x + 1 + \cos 6x = 2;\quad \cos 4x + \cos 6x = 0;$

$2\cos 5x \cos x = 0.$

Ответ. $x = \frac{\pi}{10}(2k+1);\ \ k \in Z.$

Резерв. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x,\ \ x \in \left[0;\ \frac{\pi}{3}\right].$$

Решение. $f'(x) = 4\cos 2x - 4\sin 4x$. Найдем критические точки:

$\cos 2x - 2\sin 2x\cos 2x = 0;\ \ \cos 2x(1 - 2\sin 2x) = 0;$

$\cos 2x = 0;\ \ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \ k \in Z.\quad \sin 2x = \frac{1}{2};$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\quad x = \frac{\pi}{12} + \pi k;\ \ k \in Z. \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k;\ \ k \in Z. \end{array}\right.$$

Из этих критических точек в указанный промежуток попадают только два числа: $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{\pi}{4}$.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\sqrt{3} - \frac{1}{2}$

Ответ. $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} f(x) = 1{,}5;\ \ \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{3}\right]} f(x) = 1.$

На дом:

1. Решите уравнения:

1) $\sqrt{3}\sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \sin x - \sqrt{3} = 0$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}(4k+1)$; $\frac{\pi}{3}(3k-1)$; $k \in Z$.

2) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

Ответ. $\frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}$; $\frac{4\pi}{21} + \frac{2\pi k}{7}$; $k \in Z$.

3) $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$. **Ответ.** $\frac{\pi k}{8}$.

4) $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$.

Ответ. $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{20}(2k+1)$, $k \in Z$.

5) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$. **Ответ.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$.

6) $3(\cos x - \sin x) = 1 + \cos 2x - \sin 2x$.

Ответ. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$.

2*. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Ответ. $\max\limits_{[0;\ \pi]} f(x) = \frac{9}{8}$; $\min\limits_{[0;\ \pi]} f(x) = 0$.

3. Изобразите на плоскости множество точек $(x;\ y)$, для которых $\cos(x+y) = \cos(x-y)$.

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнения:

1) $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \sin 2x - 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $k \in Z$.

2) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} 2x = \cos x + \sin 2x$.

Ответ. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

3) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + 4\cos 2x + 2 = 0.$

Ответ. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k;\ \ \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right) + \pi k,\ \ k \in Z.$

4) $\cos 2x + \sin^2 x - 0{,}5 = \cos 40°.$

Решение. $1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x - \dfrac{1}{2} = \cos 40°;$

$-\sin^2 x + \dfrac{1}{2} = \cos 40°;\ \ \sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \cos 40°;$

$\sin^2 x = \cos 60° - \cos 40° < 0.$

Ответ. $\varnothing$.

2. Для каждого значения m решите уравнение

$$|\cos x| - m\cos x = 5.$$

Решение

1) Пусть $\cos x \geq 0$.

Тогда $\cos x - m\cos x = 5$, $(1-m)\cos x = 5$.

При $m \neq 1$ $\cos x = \dfrac{5}{1-m}$. Очевидно, что $0 \leq \cos x \leq 1$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{5}{1-m} \geq 0, \\ \dfrac{5}{1-m} \leq 1. \end{cases}$ Отсюда $m \leq -4$.

2) Пусть $\cos x < 0$.

Тогда $-\cos x - m\cos x = 5$, $(m+1)\cos x = -5$.

При $m \neq -1$ $\cos x = -\dfrac{5}{1+m}$.

Очевидно, что $-1 \leq \cos x \leq 0$.

Тогда $\begin{cases} \dfrac{-5}{m+1} < 0, \\ \dfrac{-5}{m+1} \geq -1. \end{cases}$ Отсюда $m \geq 4$.

Ответ. При $m \leq -4$ $x = \pm\arccos\dfrac{5}{1-m} + 2\pi k,\ \ k \in Z;$

при $m \geq 4 \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{5}{m+1}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$;

при $-4 < m < 4$ решений нет.

3. При каких p имеет решение уравнение

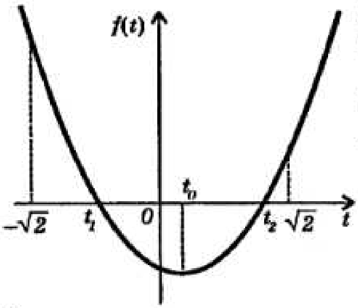
$$p\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x + 9?$$

Решение. $\frac{p\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \sin 2x + 9$;

$$\frac{p\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = (\sin x + \cos x)^2 + 8.$$

Пусть $\sin x + \cos x = t$, где $t \in \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$.

Тогда $t^2 - \frac{p\sqrt{2}}{2}t + 8 = 0$, $\underbrace{2t^2 - p\sqrt{2}t + 16}_{f(t)} = 0$.



Одно из возможных расположений парабол

$t_0 = \frac{p\sqrt{2}}{4}$

$D = 2(p^2 - 64) \geq 0$

Рис. 42

$$\begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right) \geq 0, \\ f\left(\sqrt{2}\right) \geq 0, \\ -\sqrt{2} \leq \frac{p\sqrt{2}}{4} \leq \sqrt{2}, \\ p^2 - 64 \geq 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств решений не имеет.

При таком расположении парабол имеем (см. рис. 43):

$$\begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right) \leq 0, \\ f\left(\sqrt{2}\right) \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f\left(-\sqrt{2}\right) \geq 0, \\ f\left(\sqrt{2}\right) \leq 0, \end{cases}$$

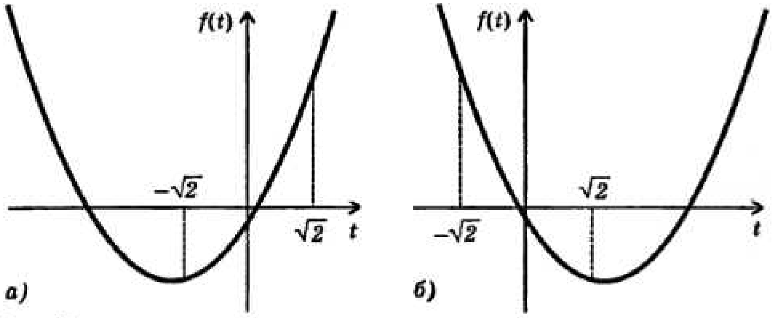


Рис. 43

т. е. должно быть: $f\left(-\sqrt{2}\right)f\left(\sqrt{2}\right) \le 0;$

$(10+p)(10-p) \le 0$. Отсюда $|p| \ge 10$.

Ответ. $|p| \ge 10$.

4. Решите уравнение $\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)\sin 3x = 2$.

Решение. $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin 3x = 2;\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin 3x = 1.$

Это возможно в двух случаях:

а) $\begin{cases}\sin 3x = 1,\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1\end{cases}$ или б) $\begin{cases}\sin 3x = -1,\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = -1.\end{cases}$

Рассмотрим случай “а”.

$$\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{6}(4m+1),\ \ m \in \boldsymbol{Z},\\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Из второго уравнения: $x = \dfrac{\pi}{6}(12n+1);\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Эти решения должны совпадать. Тогда $4m+1=12n+1$. Отсюда $m = 3n$.

В таком случае $x = \dfrac{\pi}{6}(12n+1);\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Аналогично из второй системы можно получить, что $x = \dfrac{\pi}{6}(12n-5);\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Объединение серий $12n+1,\ n \in Z$ и $12n-5,\ n \in Z$ есть числа вида $6p+1,\ p \in Z$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6}(6p+1),\ \ p \in Z$.

Урок 11

ТРИГОНОМЕТРИЯ (*часть III*)

I. Проверка домашнего задания

Обратите внимание на примеры 2* и 3.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

Решение. $f'(x) = \cos x - 2\sin 2x$.

Найдем критические точки:

$\cos x - 2\sin 2x = 0,\ \ \cos x\,(1 - 4\sin x) = 0;$

либо $\cos x = 0;\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k_1,\ \ k_1 \in Z;$

$$\text{либо } \sin x = \frac{1}{4};\ \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z, \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z. \end{array}\right.$$

В указанный промежуток попадают числа

$\arcsin\frac{1}{4},\ \ \pi - \arcsin\frac{1}{4},\ \ \frac{\pi}{2}.$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1 - 1 = 0;$$

$$f\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) + \cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + 1 - 2\sin^2\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 1 - 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{9}{8};$$

$$f\left(\pi - \arcsin\frac{1}{4}\right) = \sin\left(\pi - \arcsin\frac{1}{4}\right) + \cos\left(2\pi - 2\arcsin\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) + \cos\left(2\arcsin\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}.$$

x	0	$\arcsin\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi - \arcsin\frac{1}{4}$	π
$f(x)$	1	$\frac{9}{8}$	0	$\frac{9}{8}$	1

Ответ. $\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = \frac{9}{8}$; $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = 0$.

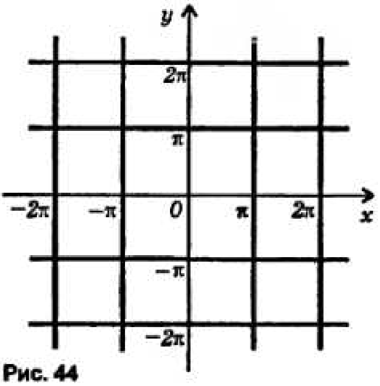


Рис. 44

2. Изобразите на плоскости множество точек $(x;y)$, для которых
$\cos(x + y) = \cos(x - y)$.

Решение.

$\cos(x + y) - \cos(x - y) = 0,$

$2\sin x \sin(-y) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin y = 0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi k,\ \ k \in Z,\\ y = \pi n,\ \ n \in Z.\end{array}\right.$$

II. Письменный опрос учащихся

1. Вычислите $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$. **Ответ.** $\frac{3}{4}$.

2. Решите уравнение $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cdot \cos 2x$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$ и $x + y = 3$.

Ответ. $1{,}5 - 2\ln 2$.

III. Работа класса

1. Решите уравнение $\sin x - \cos x = \cos 2x$.

Ответ. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z;\quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

2. Может ли значение выражения $\dfrac{\cos(1{,}5\pi + 6x) - \sin(-2x)}{1 + \cos(-4x)}$ равняться 2?

Ответ. Нет, не может.

3. Решите уравнение $4 + 3\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. (1)

Решение. О. Д. З. $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in Z.$

$$4 + 3 \cdot \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x}; \qquad (2)$$

О. Д. З. $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1), \\ x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), \end{cases} \quad k \in Z.$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) сузится область допустимых значений. Это может привести к потере корня.

$4\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right) + 3(\operatorname{tg} x + 2)^2 = -(\operatorname{tg} x - 1)^2$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg} x = -2$; $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z$.

Проверим, является ли $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ корнем этого уравнения:

левая часть: $4 + 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k\right) = 4 - 3 = 1;$

правая часть: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Ответ. $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in Z;\quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

4. Установите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{2\sin 2x+\sqrt{2}}.$$

Ответ. $\left[-\dfrac{\pi}{8}+\pi k;\ \dfrac{5\pi}{8}+\pi k\right],\ k\in Z.$

5. Решите неравенство

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1>0.$$

Решение. $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-3\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+1>0.$

Пусть $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=t,\ |t|\le 1.$

$$\begin{cases}2t^2-3t+1>0,\\ -1\le t\le 1,\end{cases}\qquad \begin{cases}t<\dfrac{1}{2}\ \text{либо}\ t>1,\\ -1\le t\le 1,\end{cases}\qquad -1\le t<\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{3}+2\pi k<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;$$

$$\frac{\pi}{12}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ. $\left(\dfrac{\pi}{12}+2\pi k;\ \dfrac{7\pi}{12}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

6. Решите неравенство $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}x}<\sqrt{3}.$

Решение. $\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<\sqrt{3},\\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\end{cases}\ k\in Z.$

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}+\pi k<x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\\ x\ne\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\end{cases}\ k\in Z.$$

$$\begin{cases} -\frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \quad k \in Z.$$

Ответ. $\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi k;\ -\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{12} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

7. Найдите промежуток монотонности функции

$$f(x) = -\sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

Решение. $f'(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

$f'(x) > 0;\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 0;$

$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z;$

$f'(x) < 0;\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) < 0;$

$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z.$

Ответ. Функция возрастает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ и убывает на каждом из промежутков $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{13\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

На дом:

Подготовиться к самостоятельной работе по тригонометрии.

1. Сюжет:

Дана функция $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$:

1) докажите, что

$f(x) = 8\sin x \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;

2) решите уравнение $f(x) = \sin 2x$;

3) вычислите $f\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$;

4) решите неравенство $\frac{f(x)}{2\cos x + 1} < \frac{1}{2}$, $x \in [0;\ \pi]$.

2. На каких промежутках возрастает функция

$$f(x) = 2\cos^2 x + x - 3?$$

Ответ. $\left[-\frac{7\pi}{12} + \pi k;\ \frac{\pi}{12} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Сколько корней имеет уравнение

$$2\cos^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x = 0,\ \ 0 < x < 2\pi?$$

Ответ. Два.

4. Решите неравенства:

1) $\frac{\sin x - 1}{2\sin x - 1} < 0$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $\sin x - \cos x \geq \sqrt{2}$.

Ответ. $\left\{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Дополнительные упражнения

1. На каких промежутках возрастает функция

$$f(x) = \sin^3 x + 7?$$

Ответ. $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. На каких промежутках возрастает функция

$$f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - \sin x + 3?$$

Ответ. $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$; $\left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{x}{4} - 2\sin x\right)\sin x + \left(1 + \sin\frac{x}{4} - 2\cos x\right)\cos x = 0.$$

Решение

$$\cos\frac{x}{4}\cdot\sin x-2\sin^2 x+\cos x+\sin\frac{x}{4}\cdot\cos x-2\cos^2 x=0;$$

$$\sin\left(x+\frac{x}{4}\right)+\cos x-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0;$$

$$\sin\frac{5x}{4}+\cos x=2;\quad \begin{cases}\sin\frac{5x}{4}=1,\\ \cos x=1.\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{5x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \ k\in Z,\\ x=2\pi n,\ \ n\in Z.\end{cases}$$

$2\pi n=\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi k}{5};$ $n=\frac{4k+1}{5}$. Так как $n\in Z$, то

$k=1+5m;$ $m\in Z$. Тогда $x=2\pi+8\pi m$.

Ответ. $x=2\pi(4m+1),$ $m\in Z$.

4. Решите уравнение $\sin x+\cos x=1+\sin x\cdot\cos x$.

Решение. Пусть $\sin x+\cos x=t$, где $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$,

$$\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=t^2;\ \ \sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$$

Тогда $t=1+\frac{t^2-1}{2};$ $t^2-2t+1=0;$ $t=1$.

Отсюда $\sin x+\cos x=1$.

Решение этого уравнения очевидно.

Ответ. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;$ $x=2\pi k,$ $k\in Z$.

5. Решить уравнение $\sin x+(a+1)\sin^2 x+\sin^3 x=a-1$.

Решение. $\left(1+\sin^2 x\right)(1+\sin x)=a(1-\sin x)(1+\sin x);$

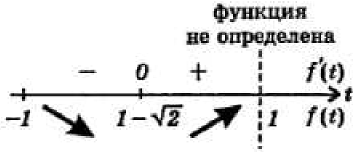
$\sin x=-1;$ $x=\frac{\pi}{2}(4k-1),$ $k\in Z$.

Пусть $1+\sin^2 x=a(1-\sin x),$ $\sin x=t;$ $-1\le t\le 1$,

$t^2+1=a(1-t);$ $a=\frac{t^2+1}{1-t};$

$$f(t)=\frac{t^2+1}{1-t};\ \ f'(t)=\frac{-t^2+2t+1}{(t-1)^2};\ \ f'(t)=0;\ \ t=1-\sqrt{2},$$

т. к. $-1\le t\le 1$.



$y_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$

$$t^2 + at - a + 1 = 0;\ t_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2}.$$

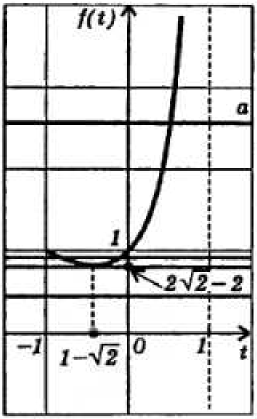


Рис. 45

Ответ. При $a < 2\sqrt{2} - 2$

$x = \frac{\pi}{2}(4k - 1),\ k \in \boldsymbol{Z}$;

при $a = 2\sqrt{2} - 2$

$x = \frac{\pi}{2}(4k - 1),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

$x = (-1)^k \arcsin\left(1 - \sqrt{2}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

При $2\sqrt{2} - 1 < a \le 1$

$x = (-1)^k \arcsin\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

$x = \frac{\pi}{2}(4k - 1),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

При $a > 1$ $x = (-1)^k \arcsin\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a - 4}}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

$x = \frac{\pi}{2}(4k - 1),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Урок 12

Контрольная работа по теме «ТРИГОНОМЕТРИЯ»

1-й вариант

1. Дана функция $f(x) = \sin x + \cos x$.

1) Докажите, что $f^2(x) + 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

2) а) Решите уравнение $f(x) = 1$.

Решение. $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1;$

$$\left[\begin{array}{ll} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi k, & k\in Z, \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\pi k, & k\in Z, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2\pi k,\ k\in Z, \\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z. \end{array}\right.$$

б) При каких значениях a не имеет решения уравнение $af(x)=1$?

3) Определите знак числа $f\left(\frac{17\pi}{24}\right)$.

Решение. $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{17\pi}{24}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{23\pi}{24}>0$.

4) На каких промежутках возрастает функция

$$g(x)=f(x)+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x+29?$$

Решение. $g(x)=\sin x+\cos x+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot x+29,$

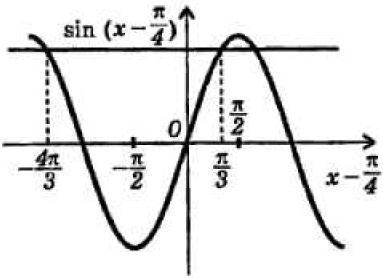


Рис. 46

$$g'(x)=\cos x-\sin x+\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$g'(x)>0,$$

$$\cos x-\sin x+\sqrt{\frac{3}{2}}>0,$$

$$\sin x-\cos x<\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\frac{4\pi}{3}+2\pi k<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z,$$

$$-\frac{13\pi}{12}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ. Функция возрастает на промежутках

$$\left[-\frac{13\pi}{12}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{12}+2\pi k\right],\ k\in Z.$$

5) Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$.

Решение. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2x)\,dx = \left(x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

2-й вариант

1. Дана функция $f(x) = \sin x - \cos x$.

1) Докажите, что $f^2(x) + 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

2) а) Решите уравнение $f(x) = -1$.

б)* При каких значениях a имеет решение уравнение $af(x) = 1$?

3) Определить знак числа $f\left(\frac{31\pi}{24}\right)$. **Ответ.** $f\left(\frac{31\pi}{24}\right) < 0$.

4) На каких промежутках убывает функция

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}x + 31?$$

Решение. $g(x) = \sin x - \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}x + 31$;

$g'(x) = \cos x + \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$; $\sin x + \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$; $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

$-\frac{17\pi}{12} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. Функция убывает на промежутках

$$\left[-\frac{17\pi}{12} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{12} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}.$$

5. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx$.

Решение. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin 2x)\,dx = \left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} =$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cos(-\pi)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

На дом: Показательная функция. Определение логарифма. Основные логарифмические тождества. Свойства логарифмов. Логарифмическая функция.

1. Постройте графики функций:

1) $y = 2^{|x|} + 1$. 2) $y = 2^{|1-x|}$.

3) $y = 2^{|\log_2 x|}$. 4) $y = \log_2|x-1| - 1$.

5) $y = \lg|x| - \lg x^2$. 6) $y = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

7) $y = \frac{|\log_2 x|}{\log_2 x}$. 8) $y = \log_2\left(x^2 - 2x + 1\right)$.

2. Упростите:

1) $\log_3 64 \cdot \log_2 \frac{1}{27}$. 2) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$. 3) $\log_{\frac{1}{4}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

3. Определить знак числа $\log_3 4 - \log_4 3$.

4. Установите область определения функции:

1) $y = \log_{2x-5}\left(x^2 - 3x - 10\right)$.

2) $y = \log_3 \log_{\frac{1}{2}} x$.

Урок 13
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

I. Вступительное слово учителя

1. Степень с действительным показателем. Свойства степени с действительным показателем.
2. Показательная функция, ее свойства и график.
3. Краткий обзор домашних примеров.

II. Упражнения

1. Постройте схематические графики функций:

1) $y = \left|0{,}7^x - 1\right|$.

2) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} - 1$.

3) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} + 2^x$.

2. Теоретические упражнения:

1) Установите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right)\sqrt{1-x}}.$$

Ответ. $(-\infty;\ 0] \cup \{1\}$.

2) Сравните $0{,}7^{\sin 130^\circ}$ и $0{,}7^{\sin 129^\circ}$.

Ответ. $0{,}7^{\sin 130^\circ} > 0{,}7^{\sin 129^\circ}$.

3) Установите множество значений функции

$$f(x) = 2^{4\sin x + 3\cos x}.$$

Ответ. $\left[\frac{1}{32};\ 32\right]$.

4) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{x^2 - 2x}.$$

Ответ. $\sqrt{2}\ \ (= f(1))$.

3. Показательные уравнения и неравенства:

1) Решите уравнение $\dfrac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{(0{,}04)^x}{25}$.

Ответ. $x = -1$.

2) Решите уравнение $3^x + 3^{x+1} = 5^x - 5^{x-1}$.

Ответ. $x = \log_{\frac{5}{3}} 5 = \dfrac{\lg 5}{\lg \frac{5}{3}}$.

3) Решите уравнение $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

Решение. $3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{7}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}}$;

$3^{2x-1}(3+1) = 2^{x+\frac{1}{2}}(1+8)$;

$\dfrac{3^{2x-1}\cdot 2^2}{2^{x+\frac{1}{2}}\cdot 3^2} = 1$; $\quad \dfrac{3^{2x-3}}{2^{x-\frac{3}{2}}} = 1$;

$\left(\dfrac{9}{2}\right)^{x-\frac{3}{2}} = 1$; $\quad x = \dfrac{3}{2}$.

Ответ. $x = \dfrac{3}{2}$.

4) Найдите промежутки монотонности для функции

$$f(x) = \frac{1}{\ln 5}\left(\frac{1}{2}5^{2x+1} - 5^x - 4x\cdot\ln 5\right).$$

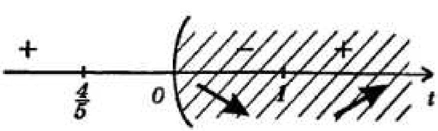
Решение. $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 5}\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 5^{2x+1}\cdot\ln 5 - 5^x\ln 5 - 4\cdot\ln 5\right) =$

$= 5^{2x+1} - 5^x - 4$.

Пусть $5^x = t > 0$; $p(t) = 5t^2 - t - 4$; $5t^2 - t - 4 = 0$.

$t_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1+80}}{10} = \dfrac{1\pm 9}{10}$;

$t_1 = 1$; $t_2 = -\dfrac{4}{5}$.



$p(t) < 0$ при $0 < t < 1$; $0 < 5^x < 1$; $x < 0$.

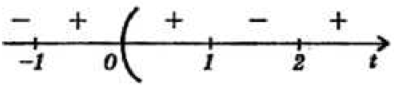
$p(t) > 0$ при $t > 1$; $5^x > 1$; $x > 0$.

Ответ. Функция возрастает на промежутке $[0;\ +\infty)$; функция убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$.

5) Решите неравенство $\dfrac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \le 0$.

Решение. $2^x = t > 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{2}{t} - t + 1}{t-1} \le 0, \\ t > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2 - t^2 + t}{t-1} \le 0, \\ t > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{t^2 - t - 2}{t-1} \ge 0, \\ t > 0. \end{cases}$$



$0 < t < 1$; $t > 2$.

$2^x < 1$; $2^x > 2$;

$x < 0$; $x > 1$.

Ответ. $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

На дом:

1. Сюжет:

Дана функция $f(x) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3}$:

а) вычислите $f\left(\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{7}\right)$;

б) решите уравнение $f(x) = \dfrac{1}{2}$;

в) решите неравенство $f(x) < \dfrac{1}{2}$;

г) докажите, что если $a \ge 1$, то неравенство $f(x) < a$ выполняется при всех значениях x.

2. Решить уравнения:

1) $\left|7^x-5\right|+\left|x^2-6x+5\right|=7^x+x^2-6x$.

Решение. Нужно учесть, что $|a|+|b|=a+b$, если $\begin{cases} a\ge 0, \\ b\ge 0. \end{cases}$

В нашем случае $7^x-5=a$, $x^2-6x+5=b$;

$$\begin{cases} 7^x-5\ge 0, \\ x^2-6x+5\ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge \log_7 5, \\ x\le 1;\ \ x\ge 5, \end{cases}$$

отсюда $\log_7 5\le x\le 1$; $x\ge 5$.

Ответ. $[\log_7 5;\ 1]\cup[5;\ +\infty)$.

2) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$.

Ответ. $x=\pm 2$.

3) $9^x+4^x=2{,}5\cdot 6^x$.

Ответ. $x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}$, $x=\log_{\frac{3}{2}}2$.

3. Решите неравенство $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}>29$.

Ответ. $x<\log_3\frac{2}{3}$; $x>2$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}$ на промежутке $[-1;\ 2]$.

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнение $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=36$.

Решение. $\dfrac{3^x\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}}{2^2\cdot 3^2}=1$; $3^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}-2}=1$; $3^{x-2}\cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}}=1$;

$\left(3\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}=1$; отсюда $x=2$, но возможно, что и

$3\cdot 2^{\frac{1}{x+1}}=1$. Тогда $\frac{1}{x+1}\lg 2=\lg\frac{1}{3}$; $x+1=\frac{\lg 2}{\lg\frac{1}{3}}$; $x=-\frac{\lg 2}{\lg 3}-1$.

Ответ. $x=2$; $x=-\frac{\lg 2}{\lg 3}-1$.

2. Решите неравенство $\frac{4^x}{4^x-3^x}<4$.

Решение. $\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}<4$; $\left(\frac{3}{4}\right)^x=t>0$.

$$\begin{cases}\frac{1}{1-t}<4,\\ t>0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{4t-3}{1-t}<0,\\ t>0.\end{cases}$$

Отсюда $0<t<\frac{3}{4}$ либо $t>1$.

Имеем $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{4}\right)^x<\frac{3}{4},\\ \left(\frac{3}{4}\right)^x>1,\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<0.\end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция $f(x)=0{,}5e^{2x}+(1-a)e^x-ax+\sin 2$ имеет критические точки, и укажите эти точки.

Решение. $f'(x)=e^{2x}+(1-a)e^x-a$.

$f'(x)=0$, если $e^{2x}+(1-a)e^x-a=0$.

Отсюда следует, что $e^x=a$ либо $e^x=-1$.

Вариант $e^x=-1$ невозможен, таким образом, $e^x=a$.

Это уравнение имеет решение при $a>0$. $x=\ln a$.

Ответ. Критические точки: $x=\ln a$. Функция имеет критические точки при всех $a\in(0;\ +\infty)$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} + 12 \cdot 2^x, \text{ где } x \in [-1;\ 1].$$

Решение. $f'(x) = 6 \cdot 2^{3x} \ln 2 - 18 \cdot 2^{2x} \ln 2 + 12 \cdot 2^x \ln 2.$

$f'(x) = 0$, если $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 2^x = 0$,

т. к. $2^x \neq 0$, то $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$.

$2^x = 1;\ 2^x = 2.$

Тогда $x = 0;\ x = 1.$

x	-1	0	1
$f(x)$	4	5	4

Ответ. $\max\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = 5;\ \min\limits_{[-1;\ 1]} f(x) = 4.$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{3x}$, $x = 3$ и прямой, которая касается кривой $y = e^{3x}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. $y' = 3e^{3x};\ y'(0) = 3;\ y(0) = 1.$

Уравнение касательной $y = 3x + 1$.

$$S = \int_0^3 \left(e^{3x} - 3x - 1\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{3x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{e^9}{3} - \frac{27}{2} - 3 - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2e^9 - 101}{6}.$$

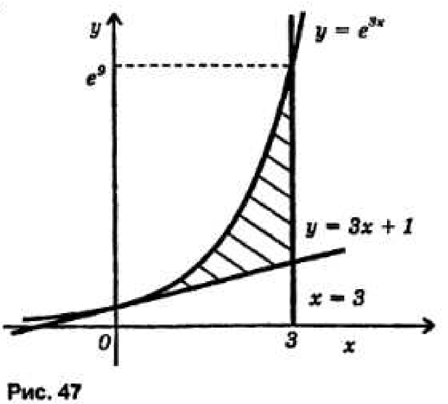


Рис. 47

Ответ. $\dfrac{2e^9 - 101}{6}$.

Урок 14
ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (*часть I*)

I. Письменный опрос учащихся

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-3x^2-x-1;\ x=-1;\ y=-15$.

Ответ. 31,5.

2. Решите неравенство $5^{2x+1}>5^x+3$.

Ответ. $\left(\log_5\dfrac{1+\sqrt{61}}{10};\ +\infty\right)$.

3. Установите множество значений функции $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sin^2 x}$.

Ответ. $\left[\dfrac{1}{4};\ 1\right]$.

II. Разбор домашнего задания

Обратите внимание на примеры 1, г и 4.

1. Докажите, что если $a\ge 1$, то неравенство $f(x)<a$ выполняется при всех значениях x.

Решение. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+3}<a;\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x-2<a\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+3a$

(учитывая, что $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+3>0$); $(1-a)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<3a+2$.

При $a\ge1,\ 1-a\le0$.

Кроме того, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>0$ при всех x. Таким образом, это неравенство выполняется при всех значениях x.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}$ на промежутке $[-1;\ 2]$.

Решение. $y'=2^x-2^{-x}$, $y'=0$, $2^x-\dfrac{1}{2^x}=0$,

$4^x-1=0$, 4^x-1, $x=0$.

x	-1	0	2
$f(x)$	$\dfrac{5}{2\ln 2}$	$\dfrac{2}{\ln 2}$	$\dfrac{17}{4\ln 2}$

Ответ. $\max\limits_{[-1;\ 2]} y=\dfrac{17}{4\ln 2}$; $\min\limits_{[-1;\ 2]} y=\dfrac{2}{\ln 2}$.

III. Вступительное слово учителя

1. Определение логарифма. Основные логарифмические тождества.
2. Основные свойства логарифмов.
3. Формулы переходов от одного основания логарифма к другому.
4. Логарифмическая функция, ее свойства и график.

IV. Упражнения

1. Постройте схематически график функции:

1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$.

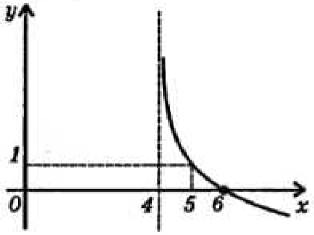
2) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\right|$.

3) $y=\dfrac{1}{2}\log_2 x^2$.

4) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(16-8x+x^2\right)+\log_2(2x-8)$.

$D(y)=(4;\ +\infty)$.

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2+\log_2(2x-8)=$



$$= -2\log_2(x-4)+1+\log_2(x-4)=$$

$$= -\log_2(x-4)+1 = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1.$$

5) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$.

6) $y = 2^{\log_2 \cos x}$.

Рис. 48

2. Упростите $0{,}2^{\log_5 0{,}5} + \log_{\sqrt{3}} \dfrac{9}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{7+2\sqrt{10}}$.

Решение. $\dfrac{1}{5^{\log_5 0{,}5}} + \log_3 \dfrac{81}{7+2\sqrt{10}} - \log_3 \dfrac{1}{7+2\sqrt{10}} =$

$$= 2 + \log_3 \frac{81\left(7+2\sqrt{10}\right)}{7+2\sqrt{10}} = 2 + 4 = 6.$$

Ответ. 6.

3. $\log_{12} 3 = a$. Найдите $\log_4 36$.

Решение

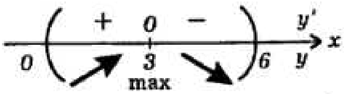
$$\log_4 36 = \frac{\log_{12} 36}{\log_{12} 4} = \frac{\log_{12}(12\cdot 3)}{\log_{12}\frac{12}{3}} = \frac{1+\log_{12} 3}{1-\log_{12} 3} = \frac{1+a}{1-a}.$$

Ответ. $\dfrac{1+a}{1-a}$.

4. Докажите, что график функции $y = \log_2\left(6x - x^2\right) - 2$ лежит в нижней полуплоскости.

Решение. $D(y) = (0;\ 6)$; $y' = \dfrac{6-2x}{\left(6x - x^2\right)\ln 9}$; $y' = 0$ при $x = 3$.

Учитывая, что на области определения $6x - x^2 > 0$



и $\ln 9 > 0$, имеем

$y_{\max} = y(3) = \log_9 9 - 2 = -1$.

Так как наибольшее значение функции на промежутке $(0;\ 6)$ отрицательно, то функция на этом промежутке отрицательна и график лежит в нижней полуплоскости.

5. Вычислить, при каких значениях параметра a графики функций $y = f(x) = \dfrac{2\lg x}{1+\lg x}$ и $y = a$ не пересекаются.

Решение. $\dfrac{2\lg x}{1+\lg x} = a$.

Область допустимых значений: $x > 0$ и $x \neq 0{,}1$.

$2\lg x = a + a\lg x$; $(2-a)\lg x = a$; при $a \neq 2$ $\lg x = \dfrac{a}{2-a}$ (отметим, что $\dfrac{a}{2-a} \neq -1$).

Ответ. Графики функций не пересекаются при $a = 2$.

На дом:

1. Сюжет:

Дана функция $f(x) = \dfrac{\log_2(4x-3)}{\log_2 x}$:

1) найдите область определения функции f.
2) вычислите $f(3)$;
3) решите уравнение $f(x) = 2$;
4) решите неравенство $x^{f(x)} < 1$.

2. Решите уравнения:

1) $\log_7\left(2^x - 1\right) + \log_7\left(2^x - 7\right) = 1$. **Ответ.** $x = 3$.

2) $\dfrac{1}{6}\log_6(x-2) - \dfrac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}}\sqrt{3x-5}$. **Ответ.** $x = 3$.

3) $x^{1+\lg x} = 10^x$. **Ответ.** $x_1 = 10$; $x_2 = \dfrac{1}{10}$.

4) $\dfrac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$. **Ответ.** $x = 4$.

3. Решите неравенства:

1) $\log_2 x \leq \dfrac{2}{\log_2 x - 1}$. **Ответ.** $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup (2;\ 4]$.

2) $\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right) > \log_{0,1}(x+3)$.

Ответ. $\left(-\sqrt{5};\ -2\right)\cup\left(1;\ \sqrt{5}\right)$.

Дополнительные упражнения

1. Пусть $0<a<b<1$. Упростите выражение и определите его знак.

$$1+\left(\frac{\log_{ab} b}{\log_b a}\right)^{-1}\cdot\frac{\log_a b-\log_{ab} b}{\log_a b+\frac{1}{2}\log_a a^2}\cdot\left(b^{2\log_b(\log_a b)}-1\right).$$

Ответ. $\log_a b>0$.

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{\log_2\frac{x}{4}\cdot\log_2 4x}{\log_2 2x}$.

1) Решите уравнение $f(x)=\dfrac{3\log_{\frac{1}{4}} x}{\log_{\frac{1}{4}} x-\frac{1}{2}}$.

Решение. О. Д. З. $x>0$; $x\neq\frac{1}{2}$;

$$\frac{(\log_2 x-2)(\log_2 x+2)}{1+\log_2 x}=\frac{3\cdot\frac{\log_2 x}{-2}}{\frac{\log_2 x}{-2}-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{(\log_2 x-2)(\log_2 x+2)}{1+\log_2 x}=\frac{3\log_2 x}{1+\log_2 x}.$$

Пусть $\log_2 x=t$. $t^2-4=3t$; $t^2-3t-4=0$;

$t_1=4$; $t_2=-1$.

$\log_2 x=4$; $x=16$.

$\log_2 x=-1$; $x=\frac{1}{2}$ — посторонний корень.

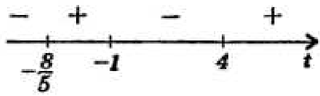
Ответ. $x=16$.

2) Решите неравенство $f(x)<2{,}4$.

Решение. $\dfrac{\log_2^2 x-4}{1+\log_2 x}<\dfrac{12}{5}$; $\dfrac{5\log_2^2 x-20-12-12\log_2 x}{1+\log_2 x}<0.$

Пусть $\log_2 x=t$. $\dfrac{5t^2-12t-32}{t+1}<0.$

$\log_2 x<-\dfrac{8}{5}$; $-1<\log_2 x<4.$



$0<x<2^{-\frac{8}{5}}$; $\dfrac{1}{2}<x<16.$

Ответ. $\left(0;\ 2^{-\frac{8}{5}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ 16\right).$

3) Найдите промежутки монотонности функции f.

Решение. $f(x)=\dfrac{\log_2^2 x-4}{\log_2 x+1}$; $D(f)=\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right).$

$$f'(x)=\frac{2\log_2 x\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}(\log_2 x+1)-\dfrac{1}{x\ln 2}\left(\log_2^2 x-4\right)}{(\log_2 x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{x\ln 2}\cdot\frac{2\log_2^2 x+2\log_2 x-\log_2^2 x+4}{(\log_2 x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{x\ln 2}\cdot\frac{\log_2^2 x+2\log_2 x+4}{(\log_2 x+1)^2}>0.$$

Ответ. Функция возрастает на промежутках $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

4) Найдите множество значений функции f при $x\in\left(\dfrac{1}{2};\ 2\right]$.

Решение. $f(2)=\dfrac{1-4}{1+1}=-\dfrac{3}{2}$. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x)=-\infty.$

Учитывая пункт 2.3, можно утверждать, что на этом промежутке множество значений $E(f)=\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right]$.

Ответ. $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right].$

3. $g(x) = \dfrac{\ln\left(x^2 - 2ax + a\right)}{x + a}$. При каких значениях a функция определена на промежутке $[1;\ 2]$?

Решение. Пусть $f(x) = x^2 - 2ax + a$ должна быть больше нуля на $[1;\ 2]$. Это возможно в следующих случаях:

$D = a(a - 1)$.

1) Если $D < 0$, т. е. $0 < a < 1$, то функция $f(x)$ положительна на этом промежутке (рис. 49, *а*).

2) $\begin{cases} a \le 0 \quad \text{либо} \quad a \ge 1, \\ x_0 < 1, \\ f(1) > 0. \end{cases}$ (См. рис. 49, *б*).

Решение этой системы: $a \le 0$.

3) $\begin{cases} a \le 0 \quad \text{либо} \quad a \ge 1, \\ x_0 < 2, \\ f(2) > 0. \end{cases}$ (См. рис. 49, *в*).

Эта система решения не имеет.

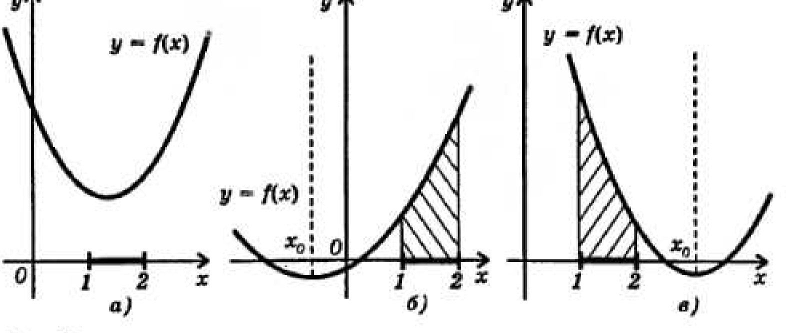


Рис. 49

Кроме этого, для функции g нужно учесть, что $x \ne -a$, следовательно, $-a$ не должно попасть в промежуток $[1;\ 2]$ и эти значения a нужно исключить.

Имеем: $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a \le 0. \end{cases}$ Тогда $a < 1$.

Окончательно имеем: $a < -2$; $-1 < a < 1$.

Ответ. $(-\infty;\ -2) \cup (-1;\ 1)$.

Урок 15

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (*часть II*)

I. Письменный опрос учащихся

1. Решите уравнение $\lg\sqrt{x-3} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$.

Ответ. $x = 4{,}5$.

2. Решите уравнение $5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(2e - x)$ в точке $x_0 = e$.

Ответ. $x + ey - 2e = 0$.

II. Проверка домашнего задания

Обратите внимание на примеры 1.4 и 3.1.

1. $f(x) = \dfrac{\log_2(4x-3)}{\log_2 x}$.

Решите неравенство $x^{f(x)} < 1$.

Решение. $f(x) = \dfrac{\log_2(4x-3)}{\log_2 x}$; $D(f) = \left(\dfrac{3}{4};\ +\infty\right)$;

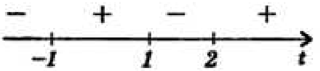
$x^{\frac{\log_2(4x-3)}{\log_2 x}} < 1$;

$\begin{cases} x^{\log_x(4x-3)} < 1, \\ x > \dfrac{3}{4};\ x \ne 1, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ x > \dfrac{3}{4};\ x \ne 1, \end{cases}$ $\dfrac{3}{4} < x < 1$.

Ответ. $\left(\dfrac{3}{4};\ 1\right)$.

2. Решите неравенство $\log_2 x \le \dfrac{2}{\log_2 x - 1}$.

Решение. Пусть $\log_2 x = t$; $\dfrac{t^2 - t - 2}{t - 1} \le 0$.



$\log_2 x \le -1$, $\quad 0 < x \le \dfrac{1}{2}$;

$1 < \log_2 x \le 2$; $\quad 2 < x \le 4$.

Ответ. $\left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup (2; 4]$.

III. Упражнения

1. Решите уравнение $\log_2(4 - x) + \log_2(1 - 2x) = \dfrac{2\lg 3}{\lg 2}$.

Ответ. $x = -\dfrac{1}{2}$.

2. Решите уравнение $(x + 1)^{\lg(x+1)} = 100(x + 1)$.

Ответ. $x_1 = -0{,}9$; $x_2 = 99$.

3. Решите уравнение $\dfrac{\lg\sqrt{x + 7} - \lg 2}{\lg 8 - \lg(x - 5)} = -1$.

Ответ. $x = 29$.

4. Решите уравнение $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$.

Ответ. $x_1 = \dfrac{1}{625}$; $x_2 = 5$.

5. Решите уравнение $2\log_3(x - 2) + \log_3(x - 4)^2 = 0$. (1)

Решение. О. Д. З. $x > 2$; $x \ne 4$.

$\log_3(x - 2)^2 + \log_3(x - 4)^2 = 0$; $(x - 2)^2(x - 4)^2 = 1$.

Отсюда $\left[\begin{aligned} &x^2 - 6x + 7 = 0, \\ &x^2 - 6x + 9 = 0. \end{aligned}\right.$

Ответ. $x_1 = 3$; $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.

Обратите внимание на возможную потерю корня:

$2\log_3(x - 2) + 2\log_3(x - 4) = 0$. (2)

$\log_3\left(x^2-6x+8\right)=0;$ О. Д. З. $x>4$.

$x^2-6x+7=0;$ $x=3+\sqrt{2}$.

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения сузилась, что может привести к потере корня.

6. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)}>0$.

Ответ. $(-\infty;\ 2)\cup(8;\ +\infty)$. Отметим, что числитель дроби отрицательный.

7. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\ge\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

Ответ. $(1;\ 2]\cup[3;\ 4)$.

8. Решите неравенство $2\log_3 x-\log_x 9>-3$.

Ответ. $\left(\frac{1}{9};\ 1\right)\cup\left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

9. Решите неравенство $(2x)^{\log_{\frac{1}{2}}x-2}>\frac{1}{4}$.

О. Д. З. $x>0$.

Решение. $\left(\log_{\frac{1}{2}}x-2\right)\log_{\frac{1}{2}}2x<2;$

$\left(\log_{\frac{1}{2}}x-2\right)\left(\log_{\frac{1}{2}}x-1\right)<2;$ $\log^2_{\frac{1}{2}}x-3\log_{\frac{1}{2}}x<0;$

$0<\log_{\frac{1}{2}}x<3;$ $\frac{1}{8}<x<1$.

Ответ. $\left(\frac{1}{8};\ 1\right)$.

10. Решите неравенство $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}x}-1}>1$.

Решение. $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}x}<1;$

$0\le\log_{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}x<1,$ $1\le\operatorname{ctg}x<\sqrt{3}$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{4}+\pi k\right],$ $k\in Z$.

На дом: подготовиться к самостоятельной работе.

1. Сюжет:

Дана функция $f(x) = \log_2 x \cdot \log_3 3x$.

1) Вычислите $3^{f\left(\frac{1}{2}\right)}$. **Ответ.** $\frac{2}{3}$.

2) Решите уравнение $f(x) = \log_3 x + 1$.

Ответ. $x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

3) Решите неравенство $f(x) < 2\log_2 x$.

Ответ. $(1; 3)$.

4) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $f(x) = a\log_2 x$ имеет только одно решение.

Ответ. $a = 1$.

2. Решите уравнение:

1) $3 - \log_3(2x - 1) = \log_3(18x - 27)$. **Ответ.** $x = 2$.

2) $1 + \log_6 \dfrac{x+3}{x+7} = \dfrac{1}{4}\log_{\sqrt{6}}(x-1)^2$.

Ответ. $x_1 = -11$; $x_2 = 5$; $x_3 = -1$.

3. Решите неравенство:

1) $\log_{0,3}(6 - x) - \log_{0,3}(x - 2) > \frac{1}{2}\log_{0,3} 4$.

Ответ. $\left(3\frac{1}{3};\ 6\right)$.

2) $\log_{0,5} \dfrac{3 - x}{x + 2} > 1$. **Ответ.** $\left(1\frac{1}{3};\ 3\right)$.

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнение $1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10 - x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$.

Ответ. $x_1 = 2$; $x_2 = 8$.

2. Решите уравнение

$$\lg^2(x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2\lg^2(x-1).$$

Решение. О. Д. З. $x>1$. Отметим, что $\lg(x-1)\neq 0$.

Тогда $\left(\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}\right)^2=\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}+2$.

$\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=t$; $t^2-t-2=0$; $t_1=-1$; $t_2=2$.

1) $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1$. Отсюда $x=\sqrt{2}$.

2) $\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2$. Отсюда $x=3$.

Ответ. $x_1=\sqrt{2}$; $x_2=3$.

3. Решите уравнение $2x^{\lg x}+3x^{-\lg x}=5$.

Решение. $x>0$.

$2x^{\lg x}+\dfrac{3}{x^{\lg x}}=5$; $x^{\lg x}=t>0$.

$2t^2-5t+3=0$; $t_1=1$; $t_2=\dfrac{3}{2}$.

1) $x^{\lg x}=1$. Отсюда $x=1$.

2) $x^{\lg x}=\dfrac{3}{2}$; $\lg^2x=\lg 1{,}5$; $\lg x=\pm\sqrt{\lg 1{,}5}$.

Отсюда $x=10^{\pm\sqrt{\lg 1{,}5}}$.

Ответ. $x_1=1$; $x_{2,3}=10^{\pm\sqrt{\lg 1{,}5}}$.

4. Решите уравнение $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

Решение. О. Д. З. $x>0$. Отметим, что $a^{\log_m b}=b^{\log_m a}$.

В таком случае $5^{\lg x}=50-5^{\lg x}$;

$2\cdot 5^{\lg x}=50$; $5^{\lg x}=25$; $\lg x=2$; $x=100$.

Ответ. $x=100$.

5. В зависимости от значения параметра a решите уравнение $\dfrac{\lg(ax)}{\lg(x+1)}=2$.

Решение. О. Д. З. $\begin{cases} ax > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} ax > 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

$$\lg(ax) = 2\lg(x+1); \quad ax = (x+1)^2; \quad x^2 + (2-a)x + 1 = 0.$$

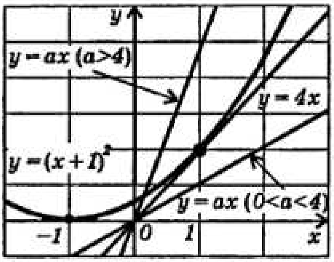


Рис. 50, а

1) Если $a > 0$,

то $x_{1,2} = \dfrac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$

при $a > 4$.

При $a = 4$ $x = 1$.

При $0 < a < 4$ решений нет.

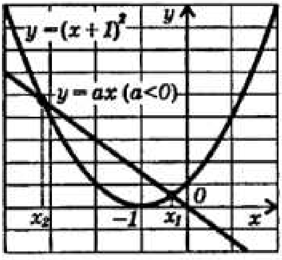


Рис. 50, б

2) $a < 0$. В таком случае

$$-1 < x < 0.$$

Области допустимых значений удовлетворяет только больший корень $x_1 = \dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

Ответ. Если $a < 0$,

то $x = \dfrac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

Если $a = 4$, то $x = 1$.

Если $0 \le a < 4$, то решения нет.

Если $a > 4$, то $x_{1,2} = \dfrac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$.

6. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\left(\sqrt{6-x}\right)\right) > 0$.

Решение. О. Д. З. $0 < x < 1$ либо $1 < x < 6$.

В таком случае $\dfrac{x}{6} < 1$ и тогда $0 < \log_x \sqrt{6-x} < 1$.

Если $x > 1$, то $1 < \sqrt{6-x} < x$, откуда $2 < x < 5$.

Если $0 < x < 1$, то $x < \sqrt{6-x} < 1$. Это неравенство решения не имеет.

Ответ. $(2;\ 5)$.

7. Решите неравенство $\log_{3x-2} x \le 1$.

Решение. Рассмотрим условие, при котором $\log_b a > 0$.

Это возможно, если $\begin{cases} b > 1, \\ a > 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} b < 1, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} b-1 > 0, \\ a-1 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} b-1 < 0, \\ a-1 < 0. \end{cases}$

В таком случае $(a-1)(b-1) > 0$.

Вывод: $\log_b a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) > 0, \\ a > 0, \\ b > 0,\ b \ne -1. \end{cases}$

Если же $\log_b a < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1) < 0, \\ a > 0, \\ b > 0,\ b \ne -1. \end{cases}$

В нашем случае имеем:

$\log_{3x-2} x \le \log_{3x-2}(3x-2)$; $\log_{3x-2} \dfrac{x}{3x-2} \le 0$.

Это равносильно системе:

$$\begin{cases} (3x-3)\left(\dfrac{x}{3x-2} - 1\right) \le 0, \\ x > \dfrac{2}{3};\ x \ne 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3(x-1)(x-3x+2)}{3x-2} \le 0, \\ x > \dfrac{2}{3};\ x \ne 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3(x-1)(2-2x)}{3x-2} \le 0, \\ x > \dfrac{2}{3};\ x \ne 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{6(x-1)^2}{3x-2} \ge 0, \\ x > \dfrac{2}{3};\ x \ne 1. \end{cases}$$

Ответ. $x > \dfrac{2}{3}$ и $x \ne 1$; $\left(\left(\dfrac{2}{3};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)\right)$.

Урок 16

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

I. Самостоятельная работа по теме: «Показатели и логарифмы» (15—20 мин)

1-й вариант

1. Решите уравнение $\log_3 x = \dfrac{\log_3(2x+3)}{\log_3 9}$.

Ответ. $x = 3$.

2. Решите неравенство $0{,}09^x - 6 \cdot 0{,}3^x > -5$.

Ответ. $\left(-\infty;\ \log_{0,3} 5\right) \cup (0;\ +\infty)$.

3. Решите неравенство $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}{3x+2} < 0$.

Ответ. $(0;\ +\infty)$.

2-й вариант

1. Решите уравнение $\dfrac{\log_2(4-3x)}{\log_2 4} = \log_2(-x)$.

Ответ. $x = -4$.

2. Решите неравенство $4^x - 2^{x+3} < -7$.

Ответ. $(0;\ \log_2 7)$.

3. Решите неравенство $\dfrac{2x-3}{\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)} > 0$.

Ответ. $\left(0;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

II. Вступительное слово учителя о некоторых методах решения иррациональных уравнений

Обращается внимание на решение уравнений типа:

1. $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \quad (\text{или } g(x) \geq 0). \end{cases}$$

III. Упражнения

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}}$.

1) Решите уравнение $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+3}$.

Решение. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+3}$; $\quad \sqrt{\dfrac{1-x}{3-x}} - \dfrac{\sqrt{1-x}}{x+3} = 0$.

Отметим, что $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$, если $a \leq 0$; $b < 0$.

$$\sqrt{1-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3-x}} - \frac{1}{x+3} \right) = 0;$$

либо $x = 1$ – корень уравнения,

либо $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x} = x+3, \\ -3 < x < 3, \end{cases}$

$\begin{cases} 3 - x = x^2 + 6x + 9, \\ -3 < x < 3, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x^2 + 7x + 6 = 0, \\ -3 < x < 3, \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1; \ x = -6, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$ Отсюда $x = -1$.

Примечание. Можно было отобрать посторонний корень и путем проверки.

Ответ. $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

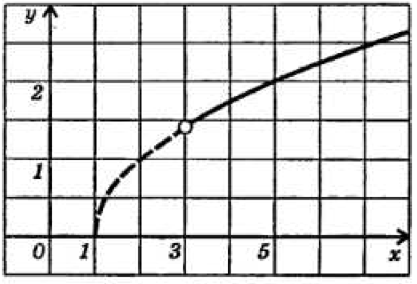


Рис. 51

2) Постройте график функции

$$y = f(x)\sqrt{x-3}.$$

Решение

$y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-3}} \cdot \sqrt{x-3}$;

$D(y) = (3;\ +\infty)$;

$y = \sqrt{x-1}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$.

Решение. Пусть $\sqrt{x+2} = t \geq 0$, тогда $x = t^2 - 2$.

Имеем $t + \sqrt{5-t^2} = 3$; $\sqrt{5-t^2} = 3 - t$.

$$\begin{cases} 5 - t^2 = 9 - 6t + t^2, \\ 0 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

$t^2 - 3t + 2 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Тогда $x_1 = 1 - 2 = -1$; $x_2 = 4 - 2 = 2$.

Ответ. $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 6x + 7} + x^2 = 2x + 7$.

Решение. Пусть $\sqrt{3x^2 - 6x + 7} = t \geq 0$.

Отсюда $x^2 - 2x = \dfrac{t^2 - 7}{3}$. Имеем $t + \dfrac{t^2 - 7}{3} - 7 = 0$;

$t^2 + 3t - 28 = 0$. $t_1 = -7$ (посторонний корень); $t_2 = 4$.

$\sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 4$, $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Ответ. $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

4. Решите неравенство $\left(x^2-9\right)\sqrt{x+2}\ge 0$.

Отметим, что $x\ge -2$.

Решение

1) 

2) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-9\ge 0,\\ x\ge -2,\end{cases}\\ x=-2.\end{array}\right.$

Ответ. $\{-2\}\cup[3;\ +\infty)$.

На дом:

1. Решите уравнение:

1) $\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{6-5x}-x\right)=0$. **Ответ.** $x_1=-3$; $x_2=1$.

2) $\sqrt{7-2x-x^2}=x-1$. **Ответ.** $\sqrt{3}$.

3) $\sin 2x\sqrt{4-x^2}=0$.

Ответ. $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm\dfrac{\pi}{2}$; $x_{4,5}=\pm 2$.

4) При каком значении a число 4 является корнем уравнения $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$?

Ответ. $a=5$.

2. Решите неравенство $(x+1)\sqrt{4-x^2}\le 0$.

Ответ. $[-2;\ -1]\cup\{2\}$.

3. Для каждого a найдите все решения неравенства

$(x-a)\sqrt{x-2}\ge 0$.

Ответ. если $a>2$, то $\{2\}\cup[a;\ +\infty)$;

если $a\le 2$, то $[2;\ +\infty)$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{x}$, касательной к этому графику в точке $x_0=1$ и осью Ox.

Дополнительные упражнения

1. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2-16} - 6.$

Решение. О. Д. З. $x \ge 4$.

Пусть $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4} = t \ge 0$.

$2x + 2\sqrt{x^2-16} = t^2;\ \ x + \sqrt{x^2-16} = \dfrac{t^2}{2};$

$\dfrac{t}{2} = \dfrac{t^2}{2} - 6;\ \ t^2 - t - 12 = 0;$

$t_1 = -3$ — посторонний корень, $t_2 = 4$.

Имеем $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4} = 4.$ (1)

Умножим левую и правую части уравнения (1) на $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} \ne 0$.

$8 = 4\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right).$

Поэтому $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4} = 4;\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-4} = 2.$

Тогда $2\sqrt{x+4} = 6;\ \ \sqrt{x+4} = 3.$

Отсюда $x = 5$.

Ответ. $x = 5$.

2. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$

Решение:

1) $f(x) = \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x};\ \ D(f) = [2;\ 4].$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} = \dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{4-x}},$

$f'(x) = 0$ при $x = 3$.

x	2	3	4
$f(x)$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

$\max\limits_{[2;\ 4]} f(x) = f(3) = 2;\ \ \min\limits_{[2;\ 4]} f(x) = f(4) = \sqrt{2}.$

2) $g(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$.

$\min y(x) = 2$ при $x = 3$.

Из 1) и 2) следует, что $x = 3$.

Ответ. $x = 3$.

3. Решите уравнение $\sqrt{4 - 3\sin x} = -2\cos x$.

Решение. $\begin{cases} 4 - 3\sin x = 4\cos^2 x, \\ \cos x \le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 4\sin^2 x - 3\sin x = 0, \\ \cos x \le 0, \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x(4\sin x - 3) = 0, \\ \cos x \le 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi k, \ k \in Z, \\ \cos \ x \le 0 \ , \end{cases}$

или $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi k, \ k \in Z, \\ x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi k, \ k \in Z, \end{cases} \\ \cos x \le 0. \end{array}\right.$

Отсюда следует, что $x = \pi(2k+1)$, $k \in Z$,
$x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ. $x = \pi(2k+1)$, $k \in Z$,
$x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4x + a} = 2x - 1.$$

Решение. $4x + a = 4x^2 - 4x + 1$, причем $x \ge \frac{1}{2}$.

$\begin{cases} a = 4x^2 - 8x + 1, \\ x \ge \frac{1}{2}, \end{cases}$

$4x^2 - 8x + 1 - a = 0$; $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{a+3}}{2}$.

Исходя из рис. 52 имеем решения:

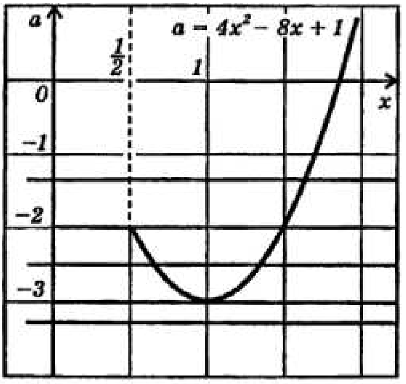


Рис. 52

Ответ. Если $a < -3$, то решения нет;

если $a = -3$, то $x = 1$;

если $-3 < a \le -2$,

то $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{a+3}}{2}$;

если $a > -2$,

то $x = \dfrac{2 + \sqrt{a+3}}{2}$.

5. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 7x} > x - 2$.

Решение:

1-й способ

Пусть $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x} - x + 2 > 0$. Будем применять метод интервалов.

Найдем корни уравнения $\sqrt{2x^2 - 7x} = x - 2$.

$\begin{cases} 2x^2 - 7x = x^2 - 4x + 4, \\ x \ge 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x \ge 2, \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4, \ x = -1, \\ x \ge 2. \end{cases}$

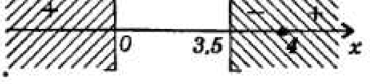
$x = 4$;

$D(f) = (-\infty;\ 0] \cup [3{,}5;\ +\infty)$.

$f(5) = \sqrt{50 - 35} - 5 + 2 = \sqrt{15} - 3 > 0$;

$f(3{,}7) < 0$.

$f(-1) = \sqrt{2 + 7} + 1 + 2 = 6 > 0$.



Ответ. $(-\infty;\ 0] \cup (4;\ +\infty)$.

2-й способ

Решением данного неравенства является решение совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2<0,\\2x^2-7x\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x-2\ge 0,\\2x^2-7x>(x-2)^2;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\x\le 0,\ \ x\ge 3{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\x>4,\ \ x<-1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x\le 0,\\x>4.\end{array}\right.$$

Ответ. $(-\infty;\ 0]\cup(4;\ +\infty)$.

6. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x}>1.$

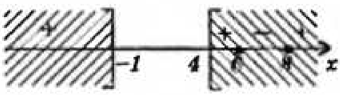
Решение. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}-2x+10}{6-x}>0.$

Будем применять метод интервалов.

$D(f)=(-\infty;\ -1]\cup[4;\ 6)\cup(6;\ +\infty).$

Решим уравнение $\sqrt{x^2-3x-4}=2x-10.$

Корень уравнения $x=8$.



$f(5)>0;\ \ f(-2)>0;$

$f(7)<0;\ \ f(9)>0.$

Ответ. $(-\infty;\ -1]\cup[4;\ 6)\cup(8;\ +\infty)$.

Урок 17

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

I. Проверка домашнего задания

Обратите внимание на примеры 1.3 и 3.

1. Решите уравнение $\sin 2x\sqrt{4-x^2}=0$.

2. Для каждого a найдите все решения неравенства

$$(x-a)\sqrt{x-2}\ge 0.$$

II. Письменный опрос учащихся

1. Решите уравнение $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

Ответ. $x=-1.$

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x+\cos y=0{,}5,\\ 3\sin x-\cos y=-2{,}5.\end{cases}$

Ответ. $\begin{cases}x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z,\\ y=2\pi k,\ \ k\in Z.\end{cases}$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4-x^2 \ \text{ и } \ y=x+2.$$

Ответ. 4,5.

III. Упражнения

1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{x-2}{y+1}=\dfrac{1}{4},\\ xy-4y=x.\end{cases}$

Ответ. (4,5; 9).

2. Напомнить план решения систем вида:

1) $\begin{cases}x+y=a,\\ xy=b.\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-y=a,\\ xy=b.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=a\ge 0,\\ xy=b.\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y^2=a\ge 0,\\ x\pm y=b.\end{cases}$

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23.\end{cases}$

Ответ. (3; 5); (5; 3).

4. Однородные системы или системы, сводящиеся к однородным:

а) Решите систему $\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{10}{3},\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

О. Д. З. $x \neq 0$; $y \neq 0$; $x + y \neq 0$.

Решение. $\begin{cases} 3x^2+3y^2=10(x+y), \\ 4(x+y)=3xy, \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}xy, \\ 3\left(x^2+y^2\right)=10\left(\dfrac{3}{4}xy\right), \end{cases}$

$x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy$; $2x^2-5xy+2y^2=0$; т. к. $y \neq 0$,

то $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-5\dfrac{x}{y}+2=0$. Отсюда $\dfrac{x}{y}=2$ или $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

Если $\dfrac{x}{y}=2$, то $\begin{cases} x=2y, \\ x+y=\dfrac{3}{4}xy \end{cases}$ и $\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

Так как система симметрична, то $x=2$; $y=4$ — второе решение, получающееся при $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ. (4; 2); (2; 4).

б) Решите систему $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$

Ответ. (2; 1); (−2; −1).

в) $\begin{cases} x^3+2x^2y-3y^3=0, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

Решение. О. Д. З. $x, y \in R$;

т. к. $y \neq 0$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3=0$. Пусть $\dfrac{x}{y}=t$.

$t^3+2t^2-3=0$; $\left(t^3-1\right)+2\left(t^2-1\right)=0$;

$(t-1)\left(t^2+3t+3\right)=0$; $t=1$; $\dfrac{x}{y}=1$.

$\begin{cases} x=y, \\ 2x^2=2, \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=1, \\ y=x, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=x. \end{cases}$

Ответ. (1; 1); (−1; −1).

5. Примеры решения различных систем:

1) $\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y - x = 3. \end{cases}$ **Ответ.** $(-3;\ 0)$.

2) $\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_2 \dfrac{x}{y} = 3, \\ \log_2^2 x^2 + \log_2^2 y^2 = 20. \end{cases}$

Решение: О. Д. З. $\begin{cases} xy > 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Необходимо учесть, что $\log_m ab = \log_m|a| + \log_m|b|$ и $\log_m \dfrac{a}{b} = \log_m|a| - \log_m|b|$.

Отметим, что $\log_2^2 x^2 = (2\log_2|x|)^2 = 4\log_2^2|x|$.

Аналогично $\log_2^2 y^2 = 4\log_2^2|y|$.

Имеем $\begin{cases} (\log_2|x| + \log_2|y|)(\log_2|x| - \log_2|y|) = 3, \\ \log_2^2|x| + \log_2^2|y| = 5. \end{cases}$

Отсюда следует:

а) $2\log_2^2|x| = 8$ и $\log_2^2|x| = 4$.

Тогда $\log_2|x| = \pm 2$, $|x| = 4$ и $|x| = \dfrac{1}{4}$.

б) $2\log_2^2|y| = 2$; $\log_2^2|y| = 1$; $\log_2|y| = \pm 1$;

$|y| = 2$ или $|y| = \dfrac{1}{2}$.

Ответ. $(\pm 4;\ \pm 2)$; $\left(\pm\dfrac{1}{4};\ \pm 2\right)$; $\left(\pm 4;\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\pm\dfrac{1}{4};\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$ (8 решений).

3) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Решение. Если сложить и вычесть уравнения системы, то получим систему, равносильную данной.

Имеем: $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = 0. \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(x+y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(x-y) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in Z, \\ x - y = \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n+k}{2}\pi, \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n-k}{2}\pi, \end{cases} \quad n, k \in Z.$

Ответ. $\begin{cases} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n+k}{2}\pi, \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n-k}{2}\pi, \end{cases} \quad n, k \in Z.$

На дом:

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20. \end{cases}$ **Ответ.** $(4;\ 1)$; $\left(\dfrac{10}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$.

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$ **Ответ.** $(2;\ 3)$; $(3;\ 2)$.

3) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2. \end{cases}$ **Ответ.** $(5;\ 2)$.

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x + y), \\ \log_2(x+y) + \log_2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 1. \end{cases}$

Ответ. $(1;\ 1)$; $\left(\dfrac{\sqrt[3]{6}}{3};\ \dfrac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$.

5) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ. $\left((-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right),$

$\left((-1)^{k+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$

Подготовиться к итоговой работе по всему курсу.

Дополнительные упражнения

1. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x}\,(x + 3y) = 13, \\ \sqrt{y}\,(3x + y) = 14. \end{cases}$

Решение. О. Д. З. $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\sqrt{x} + 3y\sqrt{x} = 13, & (1) \\ 3x\sqrt{y} + y\sqrt{y} = 14. & (2) \end{cases}$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2).

$x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - y\sqrt{y} = -1,\ \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^3 = -1.$

Если сложить уравнения (1) и (2), то получим

$x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 27,\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^3 = 27.$

Имеем $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = -1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3. \end{cases}$

Отсюда следует, что $x = 1,\ y = 4.$

Ответ. $(1;\ 4)$.

2) $\begin{cases} (x + y)\left(x^2 - y^2\right) = 16, \\ (x - y)\left(x^2 + y^2\right) = 40. \end{cases}$

Ответ. $(1;\ -3);\ (3;\ -1)$.

3) $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0, \\ 2xy + 6y^2 - 2x + 8y - 14 = 0. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе.

Тогда $-5y^2 - 10y + 15 = 0$; $y^2 + 2y - 3 = 0$,

откуда $y_1 = 1$; $y_2 = -3$.

а) $\begin{cases} y = 1, \\ x + 3 - x + 4 - 7 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1, \\ 0 \cdot x = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = t; \ t \in \boldsymbol{R}, \\ y = 1. \end{cases}$

б) $y = -3$. Тогда $x = 2$.

Ответ. $(t;\ 1)$, $t \in \boldsymbol{R}$; $(2;\ -3)$.

4) $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ \left(x^2 + 1\right) y + \left(y^2 + 1\right) x = 4xy. \end{cases}$

Решение. Так как $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то второе уравнение можно разделить на xy.

$\dfrac{x^2 + 1}{x} + \dfrac{y^2 + 1}{y} = 4$; $x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y} = 4$.

Пусть $\sqrt{x + \dfrac{1}{y}} = a \geq 0$; $\sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = b \geq 0$.

Тогда $\begin{cases} a + b = 2\sqrt{2}, \\ a^2 + b^2 = 4. \end{cases}$

Отсюда $a = b = \sqrt{2}$. Следовательно, $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2, \\ y + \dfrac{1}{x} = 2. \end{cases}$

Тогда $x = y = 1$.

Ответ. $(1;\ 1)$.

5) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2\left(x^2 - xy + y^2\right) = 1. \end{cases}$

О. Д. З. $y < 0$; $x + y > 0$.

Решение. $\begin{cases} \log_2(x+y)^2 + \log_2 y = 2, \\ \log_2(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 1, \end{cases}$

$\begin{cases} \log_2\left(y(x+y)^2\right) = 2, \\ (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2, \end{cases}$ $\begin{cases} y(x+y)^2 = 4, \\ 2(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 4. \end{cases}$

Отсюда $y(x+y)^2 = 2(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$,

$(x+y)\left(2x^2 - 3xy + y^2\right) = 0.$

Так как $x + y > 0$, то $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$.

Отсюда $x = y$ и $x = \frac{1}{2}y$.

а) $\begin{cases} x = y, \\ y = 1. \end{cases}$ Отсюда $x = y = 1$.

б) $\begin{cases} y = 2x, \\ 2x \cdot 9x^2 = 4. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}, \\ y = 2\sqrt[3]{\frac{2}{9}}. \end{cases}$

Ответ. (1; 1); $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}};\ 2\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)$.

6) $\begin{cases} y^{1-\frac{1}{5}\log_x y} = x^{\frac{4}{5}}, & (1) \\ 2 + \log_x\left(1 - \frac{3y}{x^2}\right) = \log_x 4. & (2) \end{cases}$

Решение. О. Д. З. $\begin{cases} x > 0;\ y > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

(1) $\left(1 - \frac{1}{5}\log_x y\right) \cdot \log_x y = \frac{4}{5}$;

Обозначим $\log_x y = t$, тогда $-\frac{1}{5}t^2 + t - \frac{4}{5} = 0$;

$t^2 - 5t + 4 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 4$.

а) $\log_x y = 1$; $y = x$.

(2) $2+\log_x\left(1-\frac{3}{x}\right)=\log_x 4;\quad x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)=4;$

$x^2-3x-4=0.$

$x_1=4;\ x_2=-1$ (посторонний корень). Тогда $x=4,\ y=4.$

б) $\log_x y=4;\quad y=x^4.$

(2) $2+\log_x\left(1-3x^2\right)=\log_x 4;\quad x^2\left(1-3x^2\right)=4;$

$3x^4-x^2+4=0$ — решений нет.

Ответ. $(4;\ 4).$

7) $\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=-\frac{1}{4}, & (1)\\ \operatorname{tg} y=\operatorname{ctg} x. & (2)\end{cases}$

Решение. О. Д. З. $\sin x\neq 0;\ \cos y\neq 0.$

(2) $\Leftrightarrow \sin x\cdot\sin y=\cos x\cdot\cos y.$

$\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=-\frac{1}{4},\\ \sin x\cdot\sin y=-\frac{1}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos(x-y)=-\frac{1}{2},\\ \cos(x+y)=0.\end{cases}$

Ответ. $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+\left(\frac{n}{2}+k\right)\pi,\\ y=\frac{\pi}{4}\mp\frac{\pi}{3}-\pi\left(k-\frac{n}{2}\right).\end{cases}\quad k,n\in\mathbf{Z}.$

8) $\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{3}{4}, & (1)\\ x+y=\frac{\pi}{3}. & (2)\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow\ \frac{1-\cos 2x+1-\cos 2y}{2}=\frac{3}{4};$

$2-(\cos 2x+\cos 2y)=\frac{3}{2};$

$2-2\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\frac{3}{2}.$

Из уравнения (2) $x+y=\frac{\pi}{3}.$

Тогда $2\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(x-y)=\frac{1}{2}$. Отсюда $\cos(x-y)=\frac{1}{2}$.

Имеем: $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ x-y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z. \end{cases}$

а) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ x-y=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi k \\ y=-\pi k, \end{cases}$ $k\in Z$.

б) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ x-y=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pi k, \\ y=\frac{\pi}{3}-\pi k, \end{cases}$ $k\in Z$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ -\pi k\right)$, $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{3}-\pi k\right)$; $k\in Z$.

*Урок 18**

СТЕПЕНИ И КОРНИ
(*дополнительно*)

Повторим на некоторых примерах действия со степенями и корнями.

I. Действия с корнями

1. Дана функция

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}+1\right)\cdot$$

$\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+1}$. Найдите $f'(x)$.

Решение. $D(f)=(2;\ +\infty)$;

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)}\right)^{-2}$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}+1\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}\right)^{-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+1}=$$

$$=\left(\sqrt{x-2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{x+2-x+2}\right)\right)^{-2}=$$

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{x-2}\cdot\frac{4}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$f'(x)=-4\cdot\frac{1}{\left(x^2-4\right)^2}\cdot 2x=-\frac{8x}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Ответ. $-\dfrac{8x}{\left(x^2-4\right)^2}$.

2. Упростите выражение $Q=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ при $x=\dfrac{a^2+1}{2a}$; $a>0$.

Решение. $\sqrt{x-1}=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2a}-1}=\sqrt{\dfrac{(a-1)^2}{2a}}=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{2a}}$;

$\sqrt{x+1}=\dfrac{a+1}{\sqrt{2a}}$.

$$Q=\frac{|a-1|}{a+1-|a-1|}=\begin{cases}\dfrac{a-1}{a+1-a+1}=\dfrac{a-1}{2} & \text{при } a\ge 1;\\[2mm] \dfrac{1-a}{a+1+a-1}=\dfrac{1-a}{2a} & \text{при } 0<a<1.\end{cases}$$

Ответ. $\dfrac{a-1}{2}$ при $a\ge 1$, $\dfrac{1-a}{2a}$ при $0<a<1$.

3. Небольшие упражнения.

1) Внесите множитель под знак корня: $\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{\sqrt{5}+2}$.

Решение

$$\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{\sqrt{5}+2}=-\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

2) Сократите показатель корня и показатель подкоренного выражения $\sqrt[4]{(a-3)^2}$ при $2 \le a \le 4$.

Решение. $\sqrt[4]{(a-3)^2}=\sqrt{|a-3|}=\begin{cases}\sqrt{a-3}, & \text{если } 3 \le a \le 4;\\ \sqrt{3-a}, & \text{если } 2 \le a < 3.\end{cases}$

3) Разложите на множители $\sqrt{-x}+\sqrt{xy}$.

Решение. Очевидно, что $x \le 0$ и $y \le 0$, тогда

$$\sqrt{-x}+\sqrt{xy}=\sqrt{-x}+\sqrt{(-x)\cdot(-y)}=\sqrt{-x}\left(1+\sqrt{-y}\right).$$

4) Упростите $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Решение

$$\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2}}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)=\sqrt{5}-2.$$

5) Упростите $Q=\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$.

Решение. Пусть $\sqrt{x-4}=t \ge 0$. Тогда $x=t^2+4$.

$$Q=\frac{\sqrt{t^2+4-4t}+2}{\sqrt{t^2+4+4t}-2}=\frac{|t-2|+2}{t}=\begin{cases}1 \text{ при } t \ge 2,\\ \dfrac{4-t}{t}=\dfrac{4}{t}-1 \text{ при } 0<t<2.\end{cases}$$

Ответ. $Q=\begin{cases}1 \text{ при } x \ge 8,\\ \dfrac{4}{\sqrt{x-4}}-1 \text{ при } 4<x<8.\end{cases}$

II. Действия со степенями

1. Отметим:

1) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, если $a > 0, m \in N; n \in Z; m > 1$.

Если $m, n \in N$, то $a \geq 0$.

2) а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $D(f) = R$.

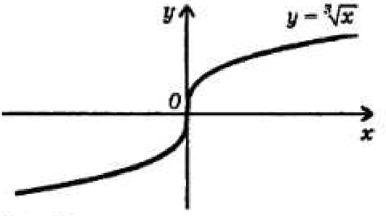


Рис. 53

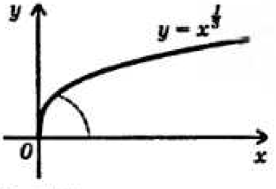


Рис. 54

б) $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$; $D(y) = (0; +\infty)$.

в) $\sqrt[3]{x} = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}, \text{ если } x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{-x} = -(-x)^{\frac{1}{3}}, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

г) $\sqrt[3]{a^2} = |a|^{\frac{2}{3}}$.

Кратко напомнить график и свойства степенной функции $y = x^p$.

2. Выполнить действия: $Q = \dfrac{x - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}} - \dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1 - x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}}$.

Решение: $Q = \dfrac{x^{-2}\left(x^3 - 1\right)}{x^{-\frac{1}{2}}(x - 1)} - \dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x^{-2}\left(x^2 - 1\right)}{x^{-\frac{1}{2}}(x + 1)} =$

$= \dfrac{x^2 + x + 1}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x - 1}{x^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{x}$. Ответ. $\sqrt{x}$.

3. Выполните действия:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt[4]{\sqrt{a^{-1}b^{3}}}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}}+\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right)^{-1}}.$$

Решение. $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}+\frac{b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-1}}=$

$$=\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})}\right)^{-1}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^{-\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)}=\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Ответ. $=\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

4. Выполните действия:

$$Q=\frac{\sqrt{x^{2}y^{-2}-xy^{-1}+\frac{1}{4}}\cdot\left(xy^{-2}+y^{-\frac{3}{2}}\right)}{2x^{2}-y^{\frac{3}{2}}-xy+2xy^{-\frac{1}{2}}}.$$

Отметим, что $y>0$.

Решение. $Q=\dfrac{\sqrt{\frac{x^{2}}{y^{2}}-\frac{x}{y}+\frac{1}{4}}\cdot y^{-2}\left(x+y^{\frac{1}{2}}\right)}{2x\left(x+y^{\frac{1}{2}}\right)-y\left(x+y^{\frac{1}{2}}\right)}=$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4x^2 - 4xy + y^2}{4y^2}} \cdot y^{-2}\left(x + y^{\frac{1}{2}}\right)}{(2x - y)\left(x + y^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{|2x - y| \cdot y^{-2}}{2y(2x - y)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2y^3} & \text{при } 0 < y < 2x, \\ -\frac{1}{2y^3} & \text{при } 0 < 2x < y. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{1}{2y^3}$ при $0 < y < 2x$;

$-\frac{1}{2y^3}$ при $0 < 2x < y$.

Урок 19

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Для школ Санкт-Петербурга

1-й вариант

I сюжет. Дана функция $f(x) = \log_4 x - 2$:

а) вычислите $\left(\frac{1}{4}\right)^{f\left(\frac{1}{4}\right)}$;

б) решите неравенство $\left(\frac{1}{4}\right)^{f(x)} \geq 64$;

в) решите уравнение $x^{f(x)} = 64$;

г) докажите, что если $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$, то уравнение $x^{f(x)} = a$ не имеет решений.

II сюжет. Дана функция $f(x) = x + \sqrt{x + 3} - 3$:

а) упростите выражение $\frac{f(x)}{\sqrt{x + 3} + 3} - \sqrt{x + 3}$;

б) найдите область определения функции $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) решите уравнение $f(x) = 0$;

г) решите систему уравнений $\begin{cases} f(y) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \\ f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0. \end{cases}$

III сюжет. Дана функция $f(x) = \sin 2x - \cos x$:

а) найдите $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, если $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a$;

б) докажите, что $f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) решите уравнение $f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$;

г) найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \cos^2(x + y) = \sin(x + y), \\ f(x) - f(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $x + y \in [0; 2\pi]$.

IV сюжет. Дана функция $f(x) = 2\left(x + \frac{4}{x^2}\right)$:

а) найдите координаты точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс;

б) исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность;

в) постройте график функции $y = f(x)$ на отрезке $[1; 4]$;

г) основание прямой призмы — равнобедренный прямоугольный треугольник, объем призмы равен 2. Найдите наименьший возможный периметр меньшей боковой грани такой призмы.

2-й вариант

I сюжет. Дана функция $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x + 4$:

а) вычислите $3^{f(3)}$;

б) решите неравенство $3^{f(x)} \geq 27$;

в) решите уравнение $x^{f(x)} = 27$;

г) докажите, что если $b \in (0;\ 81]$, то уравнение $x^{f(x)} = b$ не имеет решений.

II сюжет. Дана функция $f(x) = x - 2 + \sqrt{8 - x}$:

а) упростите выражение $\dfrac{f(x)}{\sqrt{8-x} + 2} + \sqrt{8 - x}$;

б) найдите область определения функции $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

в) решите уравнение $f(x) = 0$;

г) решите систему уравнений $\begin{cases} f(x) \cdot f\left(\dfrac{1}{y}\right) = 0, \\ f(y) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0. \end{cases}$

III сюжет. Дана функция $f(x) = \sin 2x + \cos x$:

а) найдите $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, если $f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = b$;

б) докажите, что $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2} \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) решите уравнение $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$;

г) найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\sin(y - x) = 2 + \cos^2(y - x), \\ f(x) + f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $y - x \in [-\pi;\ \pi]$.

IV сюжет. Дана функция $f(x) = 4\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)$:

а) найдите координаты точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью абсцисс;

б) исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность;

в) постройте график функции $y = f(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$;

г) объем правильной четырехугольной призмы равен 2. Найдите наименьший возможный периметр развертки боковой поверхности призмы.

При проведении итоговой работы можно IV сюжет считать обязательным и из оставшихся сюжетов выбрать любые два.

Для других регионов России

1-й вариант

1. Вычислите $\left(27^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2\right)^{\frac{5}{6}}$.

2. Решите неравенство $\lg x + 0{,}5\lg 16 < \lg 80 - \lg 2$.

3. Решите уравнение $\sin(-x) = \sin 2x$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-5;\ 4]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-4;\ 5]$;

в) $f'(x) > 0$ для любых x из промежутка $(-1;\ 2)$, $f'(x) < 0$ для любых x из промежутков $(-5;\ -1)$ и $(2;\ 4)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

г) нули функции -1 и 3.

5. Найдите первообразную функции $f(x) = 3x^2 - 5$, график которой проходит через точку $(2;\ 10)$.

6. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$, принадлежащие отрезку $[-\pi;\ \pi]$.

7. Решите неравенство $\dfrac{(0{,}1)^x + 1000}{2x-3} < 0$.

8. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y = \dfrac{3x-1}{x+8}$, имеющих угловой коэффициент 4.

9. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x-1| = ax + 2$.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{2}x\ln x - x\ln 2 \text{ на отрезке } [1;\ 4].$$

2-й вариант

1. Вычислите $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 36^{\frac{1}{6}}$.

2. Решите неравенство $\log_6(5x-2) > 3\log_6 2 + 2$.

3. Решите уравнение $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin\dfrac{\pi}{4}$.

4. Изобразите график функции $y = f(x)$, зная, что:

а) область определения функции есть промежуток $[-2;\ 5]$;

б) значения функции составляют промежуток $[-5;\ 2]$;

в) $f'(x) > 0$ для любых x из промежутка $(3;\ 5)$, $f'(x) < 0$ для любых x из промежутков $(-2;\ 0)$ и $(0;\ 3)$, $f'(x) = 0$ при $x = 0$;

г) нули функции $x = 0$ и $x = 4$.

5. Найдите какую-нибудь первообразную функции $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3$, которая принимает положительное значение при $x = -1$.

6. Найдите все решения уравнения $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$, принадлежащие отрезку $[0;\ 2\pi]$.

7. Решите неравенство $\dfrac{4-(0,5)^x}{x-1} > 0$.

8. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y = \dfrac{x+4}{x-5}$, имеющих угловой коэффициент -1.

9. Для каждого значения a найдите число корней уравнения $|x+1| = 3 - ax$.

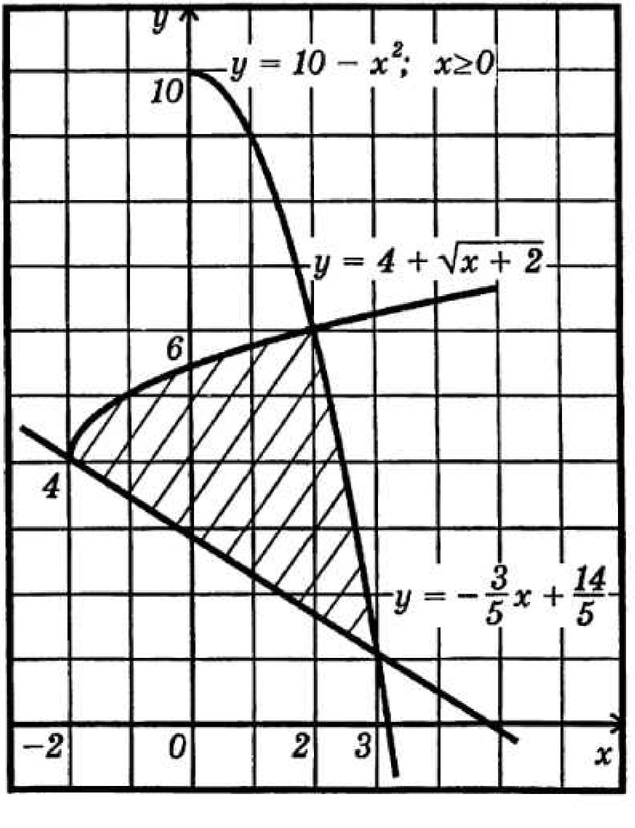
10. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{6}x\ln 9$$

на отрезке $[1;\ 3]$.

Часть II

БЛИЦ-ОПРОС



Глава I

СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Задачи, связанные с определением функции

1. 1) На координатной плоскости изображена замкнутая кривая. Может ли она быть изображением графика некоторой числовой функции?

2) Кривая Γ на координатной плоскости симметрична относительно оси ординат. Может ли кривая Γ изображать график числовой функции?

3) Кривая Γ на координатной плоскости симметрична относительно оси абсцисс. Может ли кривая Γ изображать график числовой функции?

2. 1) Дана функция $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0: \end{cases}$

а) укажите область определения функции f;

б) найдите $f(-2)$; $f(-0{,}5)$; $f(5)$; $f(40{,}7)$;

в) найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

2) Дана функция $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } x > 0, \\ 2 & \text{при } x \le 0: \end{cases}$

а) укажите область определения функции f;

б) найдите $f(-3)$; $f(-0{,}7)$; $f(4)$; $f(103)$;

в) найдите координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

3. Одну и ту же или разные функции задают формулы:

1) $f(x) = x$ и $g(x) = \sqrt{x^2}$;

2) $f(x) = 1$ и $g(x) = x^0$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ и $g(x) = |x + 3|$?

4. На рис. 1 и 2 изображены графики некоторой функции f. Задайте аналитически функцию f.

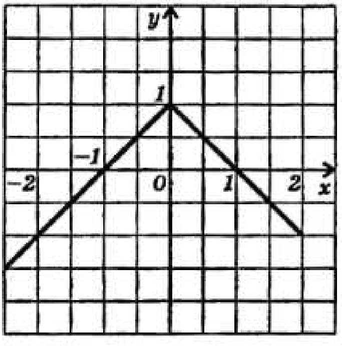


Рис. 1

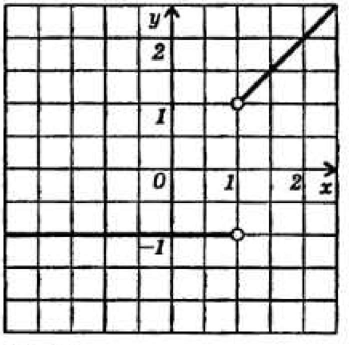


Рис. 2

5. На рис. 3 и 4 обозначена через $S(a)$ площадь части фигуры, лежащей правее оси Oy и отсеченной прямой, находящейся на расстоянии a от этой оси. Запишите выражение для $S(a)$.

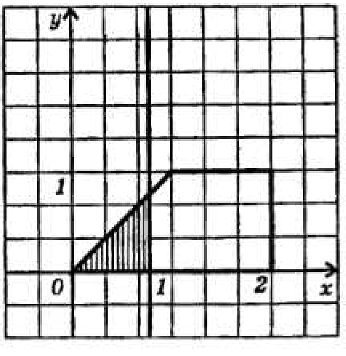


Рис. 3

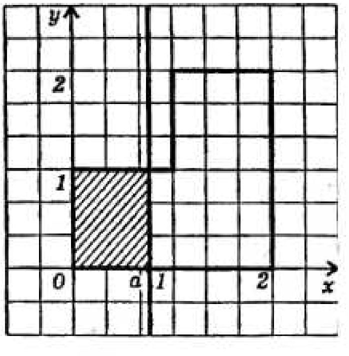


Рис. 4

§ 2. Область определения и множество значений функции

1. Установите область определения функций:

1) а) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{|x|-1}}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{2-|x|}{x^2+2}}$;

2) а) $y=\sqrt{x^3-x^2}$; б) $y=\sqrt{x^3-4x^2+4x}$;

3) а) $y=\dfrac{1}{[x]-2}$; б) $y=\dfrac{1}{\{x\}}$;

4) а) $y=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$;

б) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+\sqrt{9-x^2}$;

5) а) $y=\sqrt{x\sqrt{x+1}}$; б) $y=\sqrt{-x\sqrt{2-x}}$.

2. Установите множество значений функций:

1) а) $y=x^2+2x-3,\ \ x\in[0;\ 2]$;

б) $y=-x^2+4x-3,\ \ x\in[-2;\ 0]$;

2) а) $y=\sqrt{-x^2+4x-4}$; б) $y=\sqrt{-x^2-6x-9}$;

3) а) $y=x+\dfrac{4}{x}$; б) $y=x^2+\dfrac{9}{x^2}$;

4) а) $y=\dfrac{1+2x}{x}$; б) $y=\dfrac{-x-1}{x}$;

5) а) $y=\left(1-x^2\right)^2-4\left(1-x^2\right)+3$;

б) $y=-\left(x^2+2\right)^2+2\left(x^2+2\right)+3$.

§ 3. Четные и нечетные функции

1. Исследуйте на четность и нечетность функции:

а) $y=\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\sqrt{1-x}$;

в) $y=x-\dfrac{1}{x}$; г) $y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$;

д) $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$.

2. Исследуйте на четность и нечетность функцию $y = kx + b$ в зависимости от k и b.

3. Исследуйте на четность и нечетность функцию $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ в зависимости от b и c.

4. Достройте до графиков четной и нечетной функции:

а)

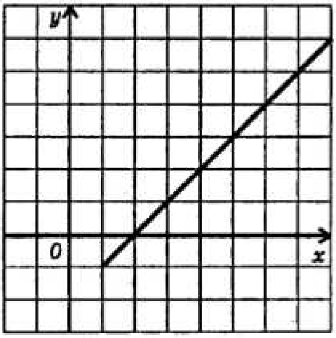


Рис. 5

б)

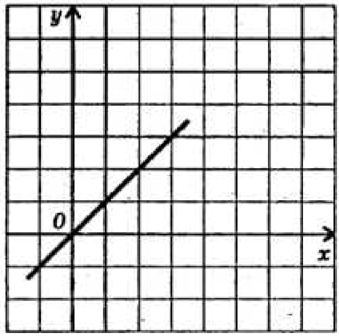


Рис. 6

в)

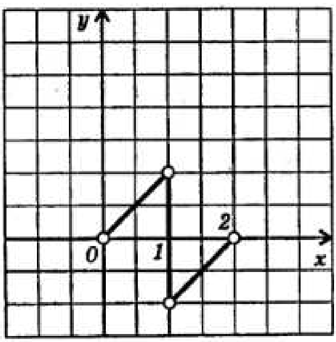


Рис. 7

г)

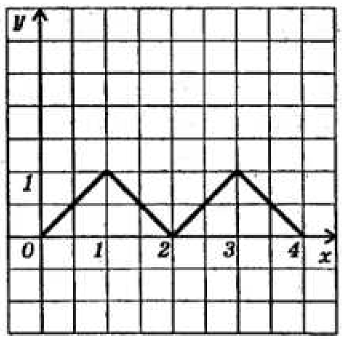


Рис. 8

5. Постройте схематически графики следующих функций:

а) $y = x^2 - 2|x|$; б) $y = \dfrac{1}{|x|} + 1$; в) $y = \dfrac{1}{(|x| - 2)^2}$;

г) $y = f(|x|)$, если $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x < 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$

д) $y = \sqrt{|x| + 1}$; е) $y = \sqrt{2 - |x|}$; ж) $y = (|x| - 1)^3$.

6. На рис. 9 дан график функции $y = |f(x)|$, которая является четной. Приведите возможные примеры функции $y = f(x)$ такие, чтобы функция $y = f(x)$ была: а) четной; б) нечетной; в) общего вида.

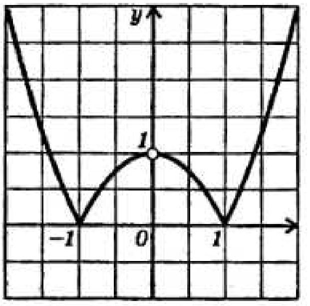


Рис. 9

7. Представьте следующие функции в виде суммы четной и нечетной функций:

а) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$; б) $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^2}$.

§ 4. Общие принципы построения графиков функций

1. На рис. 10 дан график функции $y = f(x)$. Постройте схематически графики функций:

$y = f(x - 1)$; $y = f(|x|)$; $y = f(-x)$; $y = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$; $y = \dfrac{1}{f(x)}$.

2. На рис. 11 дан график функции $y = g(x)$. Постройте схематически графики функций:

$y = g(x + 1)$; $y = -g(x)$; $y = 2g(x)$;

$y = g(2x - 2)$; $y = \dfrac{1}{g(x + 1)}$.

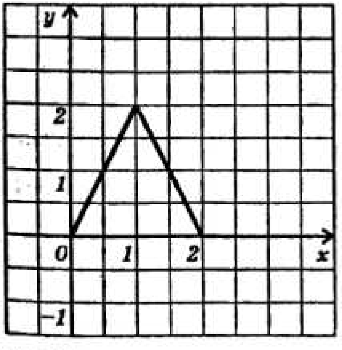


Рис. 10

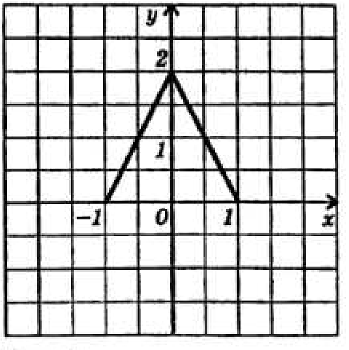


Рис. 11

3. Постройте схематически графики функций:

1) $y = \dfrac{x+2}{x+1}$;
2) $y = \dfrac{2-x}{x-1}$;
3) $y = \sqrt{-x^2+4x-4}$;
4) $y = \dfrac{1}{-x^2-2}$;
5) $y = \dfrac{1}{x^2-4x}$;
6) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$;
7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
8) $y = \sqrt{4-x^2}$;
9) $y = \operatorname{sign}\left(4-x^2\right)$.

§ 5. Классы числовых функций

1. Укажите для заданных ниже функций, какие из них возрастающие (убывающие). Для немонотонных функций укажите промежутки возрастания (убывания):

1) $y = 2x+3$;
2) $y = -2x+3$;
3) $y = x^2+x-1$;
4) $y = -x^2+x-1$;
5) $y = \sqrt{x^2}$;
6) $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$;
7) $y = x^{-2}$;
8) $y = -(x-1)^{-2}$;
9) $y = \dfrac{1}{x^2+2}$;
10) $y = -\dfrac{1}{x^2+4}$;
11) $y = [x]$;
12) $y = \{x\}$.

2. 1) Четная функция f убывает на $(-\infty;\ 0)$. Что можно сказать о поведении этой функции на $(0;\ +\infty)$?

2) Нечетная функция g возрастает на $(0;\ +\infty)$. Что можно сказать о поведении этой функции на $(-\infty;\ 0)$?

3. 1) $f(x)$ — возрастающая функция. Какой является функция $g(x) = 1-2f(x)$?

2) $f(x)$ — убывающая функция. Какой является функция $g(x) = -1+3f(x)$?

4. 1) Укажите функцию, возрастающую на R:

а) $y = x^3$; б) $y = |x|^3$; в) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = \{x\}$.

2) Какая из перечисленных ниже функций возрастает на $(0; 1]$:

а) $f(x) = \frac{3}{x}$; б) $y = -x^2$; в) $y = -\frac{3}{x}$; г) $y = -x^3$.

5. Приведите примеры, показывающие, что разность двух возрастающих функций может быть: 1) возрастающей функцией; 2) убывающей функцией.

6. 1) Приведите примеры двух возрастающих функций, произведение которых является немонотонной функцией.

2) Приведите примеры двух убывающих функций, произведение которых является немонотонной функцией.

§ 6. Взаимно-обратные функции

1. Какие из приведенных ниже функций являются обратимыми (см. рис. 12)?

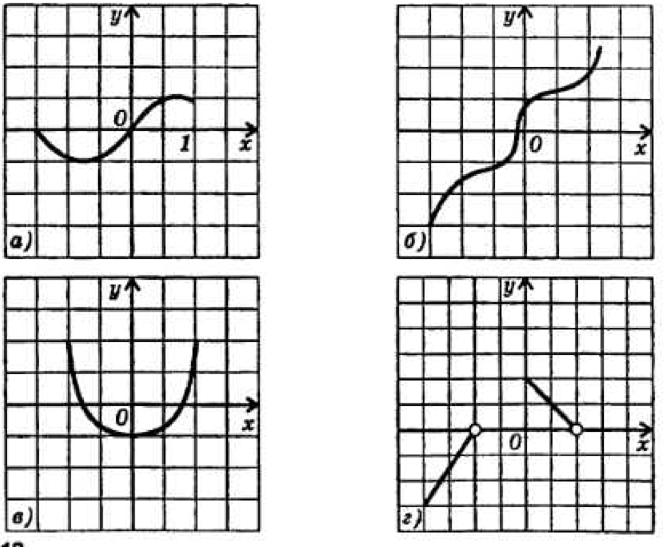


Рис. 12

2. Задайте формулой функцию, обратную данной:

1) $y = x^2 - 1, \ x \in [0; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4, \ x \in (-\infty; 0]$;

3) $y = \sqrt{x} + 1$;

4) $y = 1 - \sqrt{x}$;

5) $y = \dfrac{1}{x-1}$;

6) $y = \dfrac{1}{x+2}$.

3. Найдите функцию, обратную функции:

1) $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x-2} + 5$;

2) $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} - 3$.

4. 1) Дана функция $f(x)$, у которой $D(f) = \{1; 2; 3\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$. Задайте функцию $g(x)$, обратную данной.

2) Дана функция $f(x)$, у которой $D(f) = \{-1; 2; 3\}$, $f(-1) = -1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$. Задайте функцию $g(x)$, обратную данной.

5. На рис. 13 изображены графики функций: 1) $y = f_1(x)$ и 2) $y = f_2(x)$. Изобразите графики функций, обратные данным.

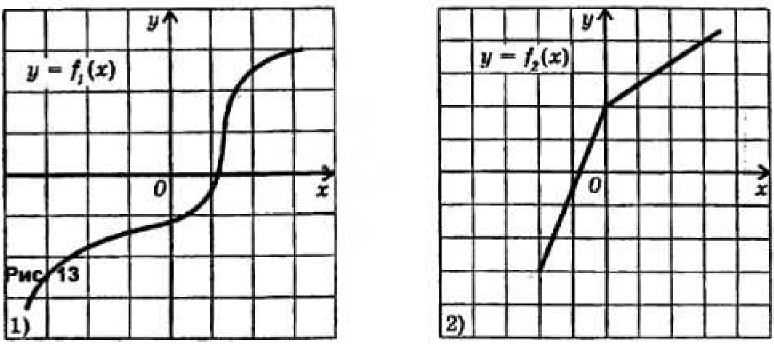


Рис. 13

Глава II

ПРОИЗВОДНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Понятие о пределе функции в точке. Непрерывность функции

1. На рис. 1 дан график функции $f(x)$.

Найдите: $\lim\limits_{x\to1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3} f(x)$; $\lim\limits_{x\to5} f(x)$; $\lim\limits_{x\to6} f(x)$.

2. На рис. 2 дан график функции $f(x)$.

Найдите: $\lim\limits_{x\to0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3} f(x)$; $\lim\limits_{x\to5} f(x)$.

3. Дана функция $f(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$.

Найдите: $\lim\limits_{x\to5} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-10} f(x)$; $\lim\limits_{x\to3} f(x)$.

4. Дана функция $f(x) = \dfrac{2-x}{|x-2|}$.

Найдите: $\lim\limits_{x\to4} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-5} f(x)$; $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

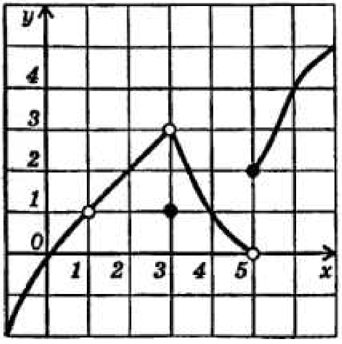


Рис. 1

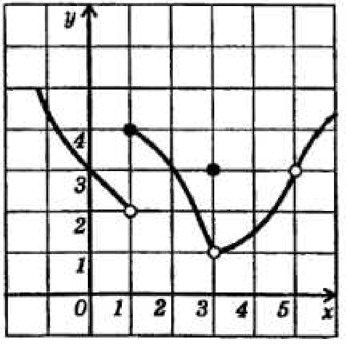


Рис. 2

5. Начертите схематически график функции, обладающей следующими свойствами:

$D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$;

$x = -3$ — единственный нуль функции;

на промежутках $(-\infty;\ 1)$; $(1;\ +\infty)$ функция возрастает;

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

6. Начертите схематически график функции, обладающей следующими свойствами:

$D(f) = \boldsymbol{R}$; $x = 4$ — единственный нуль функции;

на промежутках $(-\infty;\ 2)$; $(2;\ +\infty)$ — функция убывает;

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, $f(2) = 1$.

7. Схематически изобразите графики функций f и g, обладающих свойствами:

а) f определена в точке $x_0 = 2$, но не имеет в ней предела;

б) g имеет предел, равный 4, при $x \to 2$, но в точке $x_0 = 2$ не является непрерывной.

8. Схематически изобразите графики функций f и g, обладающих свойствами:

а) f не имеет предела при $x = -2$ и в этой точке не определена;

б) g имеет предел, равный 3, при $x \to 2$ и является непрерывной в этой точке.

9. 1) На рис. 3 даны графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

Найдите: $\lim\limits_{x \to 1}(f(x) + g(x))$; $\lim\limits_{x \to 1}(f(x) \cdot g(x))$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2) На рис. 4 даны графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

Найдите: $\lim\limits_{x \to -1}(f(x)+g(x))$; $\lim\limits_{x \to -1}(f(x) \cdot g(x))$; $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

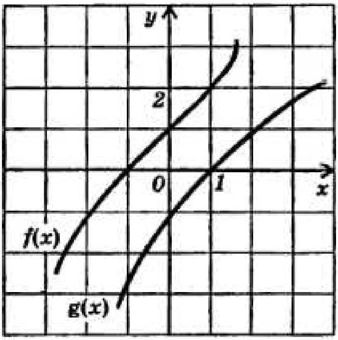


Рис. 3

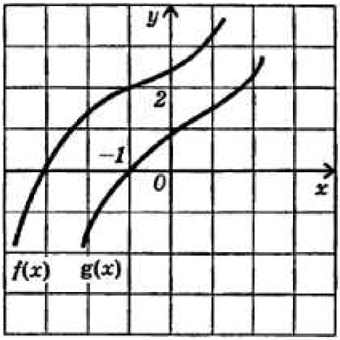


Рис. 4

10. Какая из функций непрерывна в любой точке области ее определения:

1) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{если } x\in[0;\ +\infty),\\ -\sqrt{-x}, & \text{если } x\in(-\infty;\ 0);\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\in[1;\ +\infty),\\ 0, & \text{если } x\in(-\infty;\ 1);\end{cases}$

3) $f(x)=[x]$; 4) $f(x)=\{x\}$?

11. Какая из функций не является непрерывной в некоторой точке области определения:

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$;

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{x+3}$; 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0?\end{cases}$

12. На какой вопрос следует дать утвердительный ответ:

1) может ли функция быть непрерывной в точке, в которой она не определена;

2) может ли функция быть непрерывной в точке $x=a$, если предел $f(x)$ в точке $x=a$ не существует;

3) всегда ли функция непрерывна в точке $x = a$, если функция определена в этой точке и существует предел функции в этой точке;

4) всегда ли, если функция f непрерывна в точке $x = a$, точка a принадлежит области определения этой функции?

13. 1) Дана функция $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{при } x \neq 2, \\ A & \text{при } x = 2. \end{cases}$

При каких A функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 2$?

2) Дана функция $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{при } x \neq 3, \\ B & \text{при } x = 3. \end{cases}$

При каких B функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 3$?

14. 1) Известно, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Найдите предел функции $g(x) = \dfrac{f(x) \cdot (x - a)}{x - a}$ в точке $x = a$.

2) Известно, что $\lim\limits_{x \to -b} f(x) = f(-b)$.

Найдите предел функции $g(x) = \dfrac{f(x) \cdot (x + b)}{x + b}$ в точке $x = -b$.

15. Найдите пределы следующих функций:

1) а) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^3 - x^2 + 1\right)$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 + x^2 - 2\right)$;

2) а) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$; б) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$;

3) а) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\sqrt{x} + 2\right)$; б) $\lim\limits_{x \to 27} \left(\sqrt[3]{x} - 3\right)$;

4) а) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^3 - 8x^2}{x - 8}$; б) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^3 + 5x^2}{x + 5}$.

§ 2. Производная и ее свойства

1. 1) $f(x) = 2x - 1703$. Найдите приращение функции Δy в точке $x_0 = 1812$, если $\Delta x = 0{,}1$;

2) $f(x) = -3x + 1905$. Найдите приращение функции Δy в точке $x_0 = 1917$, если $\Delta x = 0{,}1$;

3) $f(x) = x^2$. Найдите приращение функции Δy в точке:

а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = -1$, если $\Delta x = 0{,}1$.

2. Найдите производные следующих функций:

1) а) $f(x) = x^2 - \frac{4}{x}$; б) $f(x) = x^3 + \frac{5}{x}$;

2) а) $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$;

3) а) $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ $(x > 0)$; б) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[5]{x}}$ $(x > 0)$;

4) а) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$; б) $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$;

5) а) $f(x) = \left(2x^3 - 3x^2 + 4\right)^5$; б) $f(x) = \left(3x^3 - 2x^2 + 7\right)^7$;

6) а) $f(x) = x^2\left(\sqrt{x} + 1\right)$; б) $f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)x^3$;

7) а) $f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$; б) $f(x) = \frac{x - 2}{x - 1}$.

3. Дифференцируемы ли функции:

1) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ в точке $x = 3$;

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ в точке $x = -5$;

3) $f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$ в точках $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

4) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ в точке $x = \frac{1}{2}$;

5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$;

6) $f(x) = |x - 2|$ в точках $x = 2$, $x = 0$?

4. Постройте графики производных следующих функций:

1) $y = |x - 1|$; 2) $y = -|x + 1|$;

3) $y = 2\sqrt{x}$; 4) $y = 2\sqrt{-x}$.

5. Истинны ли следующие высказывания:

1) а) если функция f имеет в точке x_0 производную, то она непрерывна в этой точке;

б) если функция f непрерывна в точке x_0, то она имеет в этой точке производную;

2) а) если функция f не является непрерывной в точке x_0, то она не имеет в этой точке производной;

б) если функция f не имеет в точке x_0 производной, то она не является непрерывной в этой точке?

6. Производная некоторой функции f на всей числовой прямой равна 0. Какой формулой следует задать функцию f, если ее график проходит: 1) через точку $M(1;\ 5)$; 2) через точку $N(5;\ 1)$?

7. Среди указанных функций выберите те, для которых $f'(0) = 0$:

1) $f(x) = x + |x|$; $f(x) = \frac{x^3}{x}$; $f(x) = 2x^2 - 3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = 3\sqrt{15}$;

2) $f(x) = \frac{x^5}{x^2}$; $f(x) = -3x^2 + 5$; $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $f(x) = 3|x| - 2$; $f(x) = -5\sqrt{17}$.

8. 1) Для какой из функций производная в точке $x_0 = 0$ отрицательна:

а) $f(x) = -2$; б) $f(x) = 3 - x$;

в) $f(x) = -|x|$; г) $f(x) = -\frac{3}{x}$?

2) Для какой из функций производная в точке $x_0 = 0$ существует и отлична от нуля:

а) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; б) $f(x) = 2x^2 - 5$;

в) $f(x) = x$; г) $f(x) = \sqrt{x}$?

9. Укажите функции, дифференцируемые на множестве R:

1) а) $y = \sqrt{x^2} - 2x + 1$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} - 2x + 1$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$; г) $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$;

2) а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 7}}{x^2 + 1}$; б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$;

в) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 7}}{x^3 + 1}$; г) $y = \sqrt{x + x^2}$.

10. Укажите ложные высказывания:

1) а) для того чтобы функция $f(x)$ имела производную в точке $x = a$, необходимо, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a;

б) для того чтобы функция имела производную в точке $x = a$, достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $x = a$;

в) существует функция, которая не имеет производной в некоторой точке области ее определения;

г) области определения функций $f(x)$ и $f'(x)$ могут не совпадать;

2) а) если существует производная функции $f(x)$ в точке $x = a$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$;

б) если не существует производной функции $f(x)$ в точке $x = a$, то не существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a)$;

в) если функция $f(x)$ такова, что $\Delta f(x) = 0$ в любой точке и при любом Δx, то $f'(x) = 0$;

г) если при любом $x \in R$ $f(x) < g(x)$, то может быть верным неравенство $f'(x_0) < g'(x_0)$.

11. Укажите ложное высказывание:

1) если $f(x)$ — нечетная функция, то $f'(x)$ — четная функция;

2) если $f'(x)$ — четная функция, то $f(x)$ — нечетная функция;

3) $f'(x)$ может быть четной функцией, а $f(x)$ — функцией общего вида;

4) функция $f(g(x))$ может иметь производную в точке x_0, а $g(x)$ не иметь производной в точке x_0.

12. Какое из высказываний можно считать верным:

1) если существует $(f(x)+g(x))'$, то существует и $f'(x)$ и $g'(x)$;

2) если существует $(f(x)+g(x))'$ и существует $f'(x)$, то существует и $g'(x)$;

3) если существует $f'(x)$ и $g'(x)$, то существует и $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$;

4) если не существует $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то не существует и $(f(x)+g(x))'$ в точке x_0?

13. Точка движется прямолинейно по закону:

а) $S(t)=t^2$; б) $S(t)=\dfrac{1}{t}$;

в) $S(t)=t^3$; г) $S(t)=2t+1$.

Укажите уравнение равномерного движения.

14. Точка движется прямолинейно по закону:

а) $S(t)=t^3-3t^2+1$; б) $S(t)=3t+1$;

в) $S(t)=3t^3+1$; г) $S(t)=\dfrac{1}{2}t^2+t+3$.

Укажите уравнение равноускоренного движения.

§ 3. Геометрический смысл производной

1. Касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси абсцисс. Найдите абсциссы точек касания, если:

1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+5;$ 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-7.$

2. Какой угол составляет с положительным направлением оси Ox касательная к графику функции:

1) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{3}{2}x+3$ в точке $x_0=1;$

2) $f(x)=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)x+\sqrt{x}+1$ в точке $x_0=1?$

3. На рис. 5 и 6 изображены графики движений; l — касательная к этим графикам. Найдите скорость в момент времени t_0.

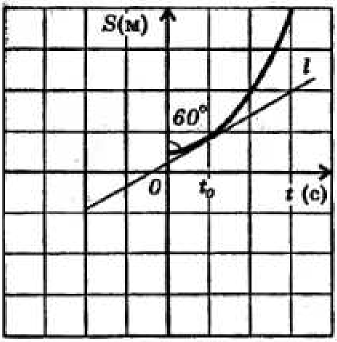


Рис. 5

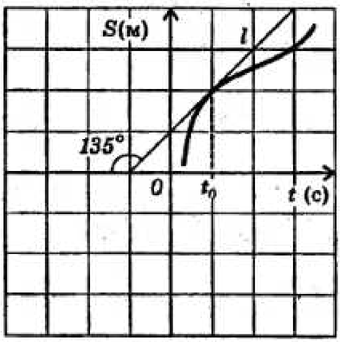


Рис. 6

4. 1) Касательная к графику функции $f(x)=x^3-7$ параллельна прямой $y=12x-3$. Найдите абсциссы точек касания.

2) Касательная к графику функции $f(x)=2x^2+9$ параллельна прямой $y=16x+15$. Найдите абсциссы точек касания.

5. Напишите уравнение касательной к графику функции:

1) $y=\sqrt{4-x^2}$ в точке $x_0=0;$

2) $y=-\sqrt{1-x^2}$ в точке $x_0=0.$

6. Напишите уравнение какой-нибудь общей касательной к графикам функций:

1) $y = x^2 + 2$ и $y = -(x-3)^2 + 2$;

2) $y = -x^2 + 3$ и $y = (x+2)^2 + 3$.

7. 1) Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(-x)$ в точке $-x_0$.

2) Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = -f(x)$ в точке x_0.

8. 1) Может ли касательная к графику функции иметь более одной общей точки с графиком функции?

2) Может ли касательная к графику функции совпадать с графиком этой функции?

3) Верно ли, что если функция имеет производную в точке x_0, то она имеет и касательную в этой точке?

4) Верно ли обратное утверждение?

§ 4. Исследование функции с помощью производной

1. Укажите по графику (рис. 7—10) промежутки возрастания и убывания функций.

1)

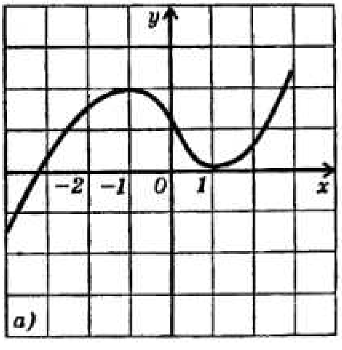


Рис. 7

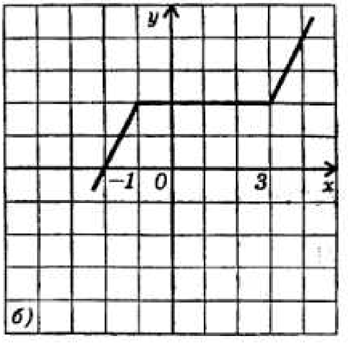


Рис. 8

2)

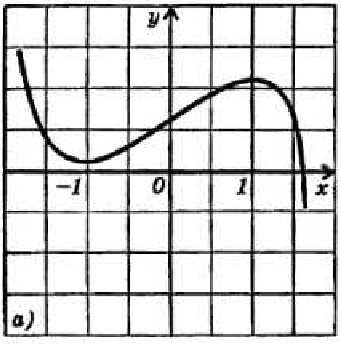


Рис. 9

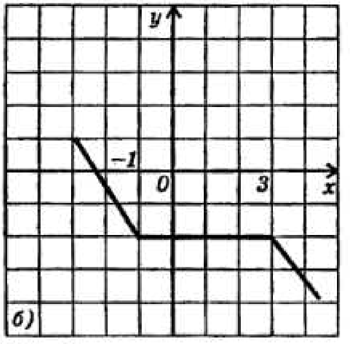


Рис. 10

2. Начертите схематически графики функций, производная которой:

1) отрицательна на множестве R за исключением двух точек, в которых производная равна нулю;

2) положительна при тех же условиях.

3. 1) Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;\ b]$. Известно, что только в точке $x = a$ $f'(x) = 0$ и только в точке $c \in (a;\ b)$ производной не существует. Укажите критические точки этой функции.

2) Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;\ b]$. Известно, что только в точке $x = a$ производная не существует, и только в точке $c \in (a;\ b)$ производная равна нулю. Укажите критические точки этой функции.

4. 1) Какие из указанных функций возрастают на множестве R:

$f(x)=x^3 - 4x + 5$; $f(x) = -3x + 4$; $f(x) = -\dfrac{1}{x}$; $f(x) = 4x^3$?

2) Какие из указанных функций убывают на множестве R:

$f(x)=2x^3 - 2x + 3$; $f(x) = 4x - 1$; $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f(x) = -3x^5$?

5. 1) При каких значениях a функция $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+3$ возрастает на всей области определения?

2) При каких значениях m функция $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+mx+3$ убывает на всей области определения?

6. Укажите функцию, критическая точка которой не является ее точкой экстремума:

1) $y=x^3-x$;
2) $y=\frac{1}{x^2}$;
3) $y=\frac{1}{2}x-3$;
4) $y=x^5$.

7. Укажите функцию, которая имеет только одну точку экстремума:

1) $y=\frac{1}{x^3}$;
2) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$;
3) $y=(x-1)^3$;
4) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$.

8. Укажите ложные высказывания:

1) а) наибольшее значение функции может и не быть ее максимумом;

б) если $f'(x)>0$ на всей области определения $f(x)$, то $f(x)$ не имеет экстремума;

в) равенство нулю производной в точке x_0 является достаточным условием экстремума $f(x)$ в точке x_0;

г) функция $f(x)=ax^2+bx+c$ не может иметь больше одной точки экстремума;

2) а) для функции $f(x)$, определенной на $[a;\ b]$, точки a и b не могут быть точками экстремума;

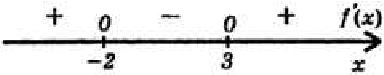
б) существуют точки, в которых $f'(x)$ равна нулю, но они не являются точками экстремума;

в) если $f'(x)<0$ для $x<a$ и $f'(x)>0$ для $x>a$, то a — точка минимума $f(x)$;

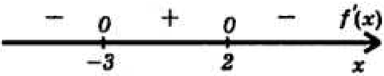
г) если $f'(x)<0$ для $x<a$ и $f'(x)>0$ для $x>a$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то a — точка минимума $f(x)$.

9. **По результатам исследований функций с помощью производной построить графики функций:**

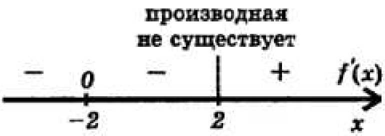
1) а) функция имеет один нуль x_1, причем $x_1<-2$;



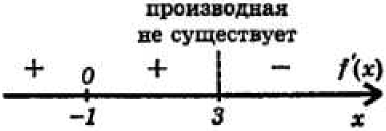
б) функция имеет один нуль x_1, причем $x_1<-3$;



2) а) в точке $x=2$ производная не существует. $D(f)=\boldsymbol{R}$; функция непрерывна на всей области определения и имеет два нуля x_1 и x_2, причем $-2<x_1<2$, $x_2>2$;



б) в точке $x=3$ производная не существует. $D(f)=\boldsymbol{R}$; функция непрерывна на всей области определения и имеет два нуля x_1 и x_2, причем $x_1<-1$ и $x_2>3$.



10. По известному графику производной постройте схематически график функции:

1) а) функция имеет два нуля x_1 и x_2, причем $x_1 < -1$ и $-1 < x_2 < 1$ (см. рис. 11);

б) функция имеет два нуля x_1 и x_2, причем $-1 < x_1 < 2$; $x_2 > 2$ (см. рис. 12);

2) а) функция имеет один нуль x_1, причем $x_1 > 2$ (см. рис. 13);

б) функция имеет два нуля x_1 и x_2, причем $x_1 < 0$ и $0 < x_2 < 2$ (см. рис. 14).

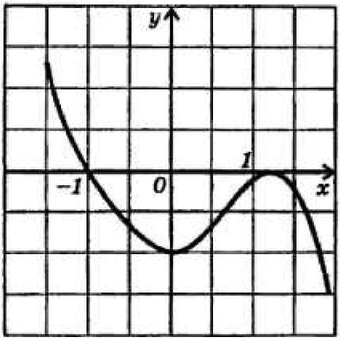


Рис. 11

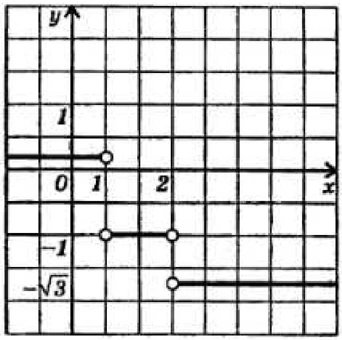


Рис. 12

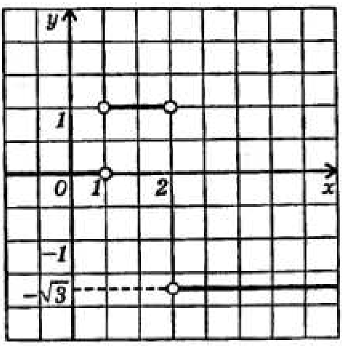


Рис. 13

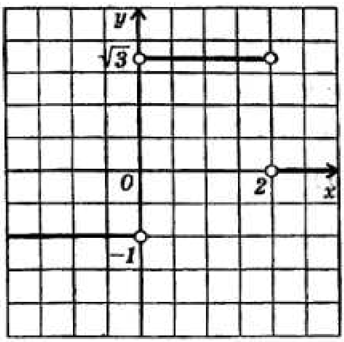


Рис. 14

11. 1) Какие из указанных функций достигают минимума в точке $x = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(1-x)^3 + 2; \qquad f(x) = |x-1| + 1;$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1; \qquad f(x) = \sqrt{x-1}?$$

2) Какие из указанных функций достигают максимума в точке $x = 2$:

$$f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^3 + 3; \qquad f(x) = 2 - |x-2|;$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 3; \qquad f(x) = \sqrt{x-2}?$$

12. На рис. 15 показан график функции $f(x)$. Сколько экстремумов имеет функция:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = f(|x|)$?

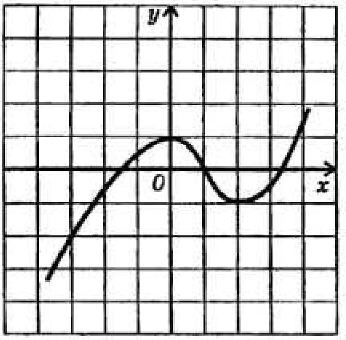


Рис. 15

13. 1) Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точках x_1 и x_2 параллельна оси Ox. Верно ли, что x_1 и x_2 — точки экстремума?

2) Функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве R и в точках x_1 и x_2 производная не существует. Верно ли, что x_1 и x_2 — точки экстремума?

14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

1) а) $f(x) = x^3 + x + 1$ на отрезке $[0; 1]$;

б) $f(x) = -x^3 - x + 2$ на отрезке $[0; 1]$;

2) а) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ на отрезке $[-1; 3]$;

б) $f(x) = \sqrt[5]{x^4}$ на отрезке $[-2; 1]$.

15. 1) Известно, что функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a;\ b]$ в точке $c \in (a;\ b)$ единственный экстремум, который является максимумом. Верно ли, что $f(c)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a;\ b]$?

2) Известно, что функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a;\ b]$ в точке $c \in (a;\ b)$ единственный экстремум, который является минимумом. Верно ли, что $f(c)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a;\ b]$?

16. 1) Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и в точке $c \in (a;\ b)$ имеет единственный максимум. Верно ли, что $f(c)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$?

2) Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и в точке $c \in (a;\ b)$ имеет единственный минимум. Верно ли, что $f(c)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a;\ b]$?

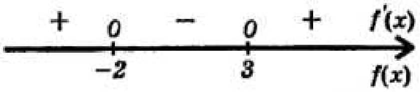
17. Найдите наибольшее значение функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $[5;\ +\infty)$;

2) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ на промежутке $[3;\ +\infty)$.

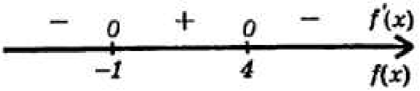
18. Исследования функции $f(x)$ при помощи производной дали следующие результаты:

1)



Как найти наибольшее значение функции на промежутке $(-\infty;\ -3]$ и наименьшее значение на отрезке $[-1;\ 2]$?

2)



Как найти наименьшее значение функции на отрезке $[0;\ 3]$ и наибольшее значение функции на промежутке $[5;\ +\infty)$?

Глава III

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение тригонометрических функций. Знаки значений тригонометрических функций

1. Выясните, что больше:

1) а) $\sin\sqrt{2}$ или $\cos\sqrt{2}$; б) $\sin\sqrt{3}$ или $\cos\sqrt{3}$;

2) а) $\sin 4{,}8$ или $\operatorname{tg} 4{,}8$; б) $\sin 3{,}7$ или $\operatorname{tg} 3{,}7$.

2. Решите уравнения:

1) а) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$;

б) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, $x \in \left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

2) а) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in \left(\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x \in \left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$.

3. Решите неравенство:

1) $\dfrac{\sin x - 1}{\operatorname{tg} 4 \cdot \cos 2 \cdot \sin 5} \geq 0$;

2) $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{ctg} 3{,}5 \cdot \sin 2{,}9 \cdot \cos 3{,}8} \geq 0$.

4. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin x - \cos x}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0$, $x \in (0;\ 2\pi)$;

2) $\dfrac{\sin x + \cos x}{2\cos x + \sqrt{2}} = 0$, $x \in (0;\ 2\pi)$.

5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\sin x}\cdot(x-5)\cdot(x-1)=0$;

2) $\sqrt{\cos x}\cdot(x-2)\cdot(x-6)=0$.

6. Решите уравнение:

1) $\cos 2x=\sin^2\frac{x}{2}+1$;

2) $\sin\frac{x}{2}=(\cos x+1)^2+1$.

7. Решите неравенство:

1) $\left(x^2-12x+35\right)\cdot\sin^2 x\geq 0$;

2) $\left(x^2-8x+15\right)\cdot\cos^2 x\geq 0$.

8. Где расположен центр описанной около треугольника окружности, если:

1) $\sin A>\operatorname{tg} A$, где A — угол треугольника;

2) $\sin B<\operatorname{tg} B$, где B — угол треугольника?

9. Вычислите:

1) $\cos\frac{13\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{7\pi}{5}\cdot\left(\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{5}\cdot\sin\frac{19\pi}{37}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

10. Установите область определения функций:

1) а) $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\cos x}$;

б) $f(x)=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{\cos x}$;

2) а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-\sin^2 x}}{x+2\pi}$;

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{-\cos^2 x}}{x-\frac{3\pi}{2}}$;

3) а) $f(x)=\operatorname{ctg} x+\sqrt{1-|x|}$;

б) $f(x)=\operatorname{tg} x+\sqrt{2-|x|}$;

4) а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\lg\cos 2x}}{\cos x+1}$;

б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\lg\sin x}}{\cos x}$.

§ 2. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

11. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$;

2) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

12. Упростите:

1) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\mathrm{tg}^2\alpha$; 2) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\mathrm{ctg}^2\alpha$.

13. Упростите:

1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha-\cos^4\alpha$; 2) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha-\sin^4\alpha$.

14. Вычислите:

1) $A=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=5$;

2) $B=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha=-3$.

15. 1) $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\cos\alpha$.

2) $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Найдите $\sin\alpha$.

16. 1) $\mathrm{tg}\,\alpha=2$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\cos\alpha$.

2) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-3$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$.

17. 1) Найдите $\mathrm{tg}^2 2\alpha+\mathrm{ctg}^2 2\alpha$, если $\mathrm{tg}\,2\alpha+\mathrm{ctg}\,2\alpha=m$.

2) Найдите $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}$, если $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}-\mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}=n$.

18. Установите множество значений функции:

1) $f(x)=\sin^2 x-2\cos^2 x$; 2) $f(x)=\cos^2 x+3\sin^2 x$.

19. Постройте схематически график функции:

1) а) $y = \sin^2 2x + \cos^2 2x$; б) $y = \sin^2(-3x) + \cos^2(-3x)$;

2) а) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; б) $y = \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 2x$;

3) а) $y = \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$; б) $y = \cos x \cdot \operatorname{tg} x$;

4) а) $y = x^{\sqrt{\cos^2 x - 1}}$; б) $y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\sqrt{\sin x - 1}}$;

5) а) $y = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\cos x}$.

§ 3. Четность и нечетность тригонометрических функций. Периодичность тригонометрических функций

20. Исследуйте на четность и нечетность функцию:

1) а) $f(x) = \dfrac{\cos 2x + x^2}{\sin x}$; б) $f(x) = \dfrac{\sin 2x + x^3}{\cos x}$;

2) а) $f(x) = \sqrt{\cos x}$; б) $f(x) = \sqrt{\sin x}$;

3) а) $f(x) = \dfrac{\cos x \cdot (x - 3)}{x - 3}$; б) $f(x) = \dfrac{\sin x \cdot \left(x^2 - 4\right)}{x^2 - 4}$.

21. Найдите основной период функции:

1) а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$;

2) а) $y = |\sin 2x|$; б) $y = |\cos 3x|$;

3) а) $y = \cos^2 2x$; б) $y = \sin^2 3x$;

4) а) $y = \sin x + \cos 2x$; б) $y = \cos x + \sin 2x$;

5) а) $y = 5^{\cos \frac{x}{2}}$; б) $y = \log_5 \sin \frac{x}{2}$.

22. 1) Какие из функций $y = x^2 - x + 1$, $y = -3$, $y = \sqrt{\cos x}$, $y = \sin\dfrac{x + |x|}{2}$, $y = \sqrt{x + 1}$ являются периодическими, а какие нет?

2) Какие из функций $y = x^3 - x^2$, $y = 3$, $y = \lg \sin x$, $y = \cos\frac{x - |x|}{2}$, $y = \sqrt{1 - x}$ являются периодическими, а какие нет?

23. Решите уравнение:

1) $\sin(2x + 10\pi) + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos(4\pi - 2x) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

24. Вычислите:

1) а) $\sin\frac{13\pi}{3}$; б) $\cos\frac{9\pi}{4}$;

2) а) $\operatorname{tg}\frac{31\pi}{6}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{3}$;

3) а) $\cos\frac{11\pi}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{37\pi}{8} + \cos\frac{241\pi}{5}\right)$;

б) $\left(\sin\frac{237\pi}{3} + \operatorname{ctg}\frac{17\pi}{5}\right)\sin 15\pi$.

25. Упростите:

1) $1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha + 7\pi)$; 2) $\frac{1}{\cos^2(10\pi + 2\alpha)} - 1$.

26. Постройте схематически график функции:

1) $f(x) = \sin(12\pi - x)\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;

2) $f(x) = \cos(10\pi - x)\cdot\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

§ 4. Формулы сложения и следствия из них

27. Установите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{-(\cos x\cdot\cos 5x + \sin x\cdot\sin 5x)^2}$;

2) $f(x) = \sqrt{-(\sin 4x\cdot\cos x - \cos 4x\cdot\sin x)^2}$.

28. Упростите:

1) $\dfrac{\sin 5\alpha \cdot \cos\alpha - \cos 5\alpha \cdot \sin\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha}$;

2) $\dfrac{\cos 6\alpha \cdot \cos\alpha + \sin 6\alpha \cdot \sin\alpha}{\operatorname{ctg} 5\alpha}$.

29. Вычислите:

1) $\cos 40° + \operatorname{tg} 20° \cdot \sin 40°$;

2) $\cos 50° - \operatorname{ctg} 25° \cdot \sin 50°$.

30. Пересекаются ли графики функций:

1) $f(x) = \sin x + \cos x$ и $g(x) = x^2 + 1{,}5$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$ и $g(x) = -x^2 - 2{,}1$?

31. Постройте схематически график функции:

1) $y = \left(1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) \cdot \sin x$;

2) $y = \left(\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} - 1\right) \cdot \sin x$.

32. Найдите значение выражения:

1) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2\pi - \alpha) - \sin(\pi + \alpha)$ при $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$;

2) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha)$ при $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$.

33. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{3} \cdot \sin\dfrac{11\pi}{6}$;

2) $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{7\pi}{6} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{3}$.

34. Упростите:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}(20° + \alpha) + \operatorname{tg}(40° - \alpha)}{\operatorname{tg}(20° + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(40° - \alpha) - 1}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}(55° + \alpha) - \operatorname{tg}(10° + \alpha)}{1 + \operatorname{tg}(55° + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(10° + \alpha)}$.

35. Упростите:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}5\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}\cdot(\cos3\alpha\cdot\cos\alpha-\sin3\alpha\cdot\sin\alpha)$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}3\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha}\cdot(\cos\alpha\cdot\cos4\alpha-\sin\alpha\cdot\sin4\alpha)$.

36. Упростите:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 31^\circ-\operatorname{tg}^2 14^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 31^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 14^\circ}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 70^\circ-\operatorname{tg}^2 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 70^\circ\cdot\operatorname{tg}^2 10^\circ}$.

37. Постройте схематически график функции:

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}$; 2) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}$.

38. Установите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{\left(\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos x}$;

2) $f(x)=\sqrt{-\cos2x\left(\cos^2x-\sin^2x\right)}$.

39. Упростите:

1) $\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$; 2) $\dfrac{1-\cos4\alpha}{1+\cos4\alpha}$.

40. Решите уравнение:

1) $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}$; 2) $\sin2x\cdot\cos2x=-\dfrac{1}{2}$.

41. Вычислите:

1) $\dfrac{2(1-\cos\alpha)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$;

2) $\dfrac{2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.

42. 1) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=2\cos^2 2x+\cos4x.$$

2) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=2\sin^2 3x-\cos6x.$$

43. Найдите основной период функции:

1) $f(x)=\sin 3x \cdot \cos x$; 2) $f(x) = \sin 6x \cdot \sin 2x$.

44. Вычислите:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ} \cdot \cos 30^\circ$; 2) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 30^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ} \cdot \sin 60^\circ$.

45. Упростите:

1) $\dfrac{2\cos^2 x - 1}{2\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $\dfrac{1-2\sin^2 x}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

46. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

47. Упростите:

1) $\sqrt{1-\sin 2\alpha} + \sin\alpha$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$;

2) $\sqrt{1-\sin 2\alpha} + \cos\alpha$ при $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

48. Постройте схематически график функции:

1) а) $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$; б) $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$;

2) а) $y = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$; б) $y = \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$;

3) а) $y = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; б) $y = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

49. Упростите:

1) $\dfrac{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2\cos\alpha + 1}$;

2) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - 1}$.

50. Преобразуйте в произведение:

1) $2\cos 2\alpha + \sqrt{3}$; 2) $2\sin 4\alpha - 1$.

51. Постройте схематически график функции:

1) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

52. Найдите значения функции:

1) $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x}$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \dfrac{3\pi}{2}$;

2) $f(x) = \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sin 2x}$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$ и $x = \pi$.

53. Упростите:

1) $2\cos^2 20° - \cos 80° - 1$;

2) $1 + \cos 40° - 2\sin^2 10°$.

§ 5. Обратные тригонометрические функции

54. Вычислите:

1) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

2) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

55. Вычислите:

1) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

56. Вычислите:

1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos\frac{5}{14}\right)$; 2) $\sin\left(\pi + \arcsin\frac{2}{17}\right)$.

57. Упростите:

1) $2\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin m\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin m\right)$;

2) $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos m\right) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos m\right)$.

58. Вычислите:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$.

59. Вычислите:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$.

60. Вычислите:

1) $\mathrm{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

61. Установите область определения функции:

1) $f(x) = \arcsin(x-2) + \sqrt{x-2}$;

2) $f(x) = \arccos(x-1) + \sqrt{1-x}$.

62. Постройте графики функций:

1) а) $y = \arcsin x + \sqrt{x-1}$; б) $y = \arccos x + \sqrt{-x-1}$;

2) а) $y = \arcsin\left(1+\cos^2 x\right)$; б) $y = \arccos\left(1+\sin^2 x\right)$.

63. Постройте график функции:

1) $y = \sin(\arcsin x) + 1$; 2) $y = \cos(\arccos x) - 1$.

64. Решите уравнение:

1) $\arcsin(x+1) = (y-2)^2 + \frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos(x-1) = (y-1)^2 + \pi$.

65. Пересекаются ли графики функций:

1) $f(x) = \arccos x$ и $g(x) = 3^x + 3{,}15$;

2) $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = 2^x + 1{,}58$?

§ 6. Тригонометрические уравнения и неравенства

66. Установите область определения функции:

1) $f(x)=\sqrt{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}$; 2) $f(x)=\sqrt{\sin x - \sqrt{3}\cos x - 2}$.

67. Решите уравнение:

1) $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \cos\dfrac{3\pi}{4} = 0$;

2) $\left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right) - \cos\dfrac{11\pi}{6} = 0$.

68. Решите уравнение:

1) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$; 2) $1 + \sin x - \cos 2x = 0$.

69. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\cos x}\cdot(2\sin x - 1)(x - 2) = 0$;

2) $\sqrt{\sin x}\cdot(2\cos x - 1)(x - 4) = 0$.

70. 1) Найдите все решения уравнения $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, которые удовлетворяют неравенству $(x - 2{,}5)(5 - x) \geq 0$.

2) Найдите все решения уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$, которые удовлетворяют неравенству $(x - 2{,}7)(x - 7) \leq 0$.

71. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$; 2) $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$.

72. Решите уравнение:

1) $4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x\,(\operatorname{tg} x - 1) = 0$;

2) $4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\cos x\left(\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}\right) = 0$.

73. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin x - 2\cos x}{\sqrt{-x}} = 0$; 2) $\dfrac{2\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

74. Решите уравнение:

1) $1 + \operatorname{tg}^4 x = \cos 2x$; 2) $-\operatorname{ctg}^8 x - 1 = \cos 2x$.

75. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\operatorname{ctg} x} = 2$; 2) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\operatorname{cosec} x} = 2$.

76. Решите уравнение:

1) $\cos x = \sqrt{x} + 1$; 2) $\sin x = \sqrt{x - \dfrac{\pi}{2}} + 1$.

77. Найдите ошибку в решении уравнения

$$3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \qquad (1)$$

Решение.

$$3\frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} + 2\frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1, \qquad (2)$$

$$-3(\operatorname{tg} x - 1)^2 + 2(\operatorname{tg} x + 1)^2 = 1 - \operatorname{tg}^2 x.$$

Отсюда $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{5}$, $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \pi k$, $k \in Z$.

78. Какое из приведенных решений уравнения верно?

1) $\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x = 0$, (1)

О. Д. З. $\begin{cases} x \neq \pi k, & k \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, & k \in Z. \end{cases}$

Решение.

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 0, \qquad (2)$$

$$2\operatorname{tg}^2 x + 3 - 3\operatorname{tg}^2 x = 0;\ \operatorname{tg}^2 x = 3;\ \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3};$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

2) $\operatorname{tg} 2x + 3\operatorname{ctg} x = 0$.

Решение. $\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + \dfrac{3\cos x}{\sin x} = 0$;

$$\sin 2x \cdot \sin x + 3\cos x \cdot \cos 2x = 0;$$
$$\cos x\left(2\sin^2 x + 3\cos 2x\right) = 0;$$
$$\cos x\,(1 - \cos 2x + 3\cos 2x) = 0;\ \cos x\,(1 + 2\cos 2x) = 0;$$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0;\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

79. Постройте графики уравнений:

1) а) $(\mathrm{tg}\,x - 1)\left(y^2 - 4\right) = 0;$ б) $(\mathrm{tg}\,x + 1)\left(y^2 - 1\right) = 0;$

2) а) $\begin{cases}\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - y^2}} = 0,\\ 0 \le x \le \pi;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sqrt{y^2 - 1}} = 0,\\ -\pi \le x \le \pi.\end{cases}$

80. Установите область определения функции:

1) а) $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1};$ б) $f(x) = \sqrt{2\cos x - \sqrt{2}};$

2) а) $f(x) = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 2\sin x\right)\left(x^2 - 4\right)^2};$

б) $f(x) = \sqrt{(1 - 2\cos x)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x - 2)^2}.$

81. Решите неравенство:

1) $\dfrac{\cos^2 x\,(5\sin x - 2)}{2 + \cos x} > 0;$ 2) $\dfrac{\sin^2 x\,(4\cos x - 3)}{3 - 2\sin x} > 0.$

82. Решите неравенство:

1) $\sin x + \cos x < \sqrt{2};$ 2) $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}.$

83. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2\sin x - \sqrt{3}}{\sin x} < 0;$ 2) $\dfrac{2\cos x - \sqrt{2}}{\cos x} < 0.$

84. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} > -1;$ 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} < 1.$

§ 7. Производные тригонометрических функций

85. Найдите производные следующих функций:

1) а) $f(x) = \sin^2 x;$ б) $f(x) = \cos^2 x;$

2) а) $f(x) = \sin\frac{x}{2} + \operatorname{tg} 3x;$ б) $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} 3x;$

3) а) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x};$ б) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x};$

4) а) $f(x) = \left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)\cdot \sin x \cos x;$

б) $f(x) = \left(\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2}\right)\cdot \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2};$

5) а) $f(x) = \dfrac{1+\sin 2x}{\sin x + \cos x};$ б) $f(x) = \dfrac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x};$

6) а) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1};$ б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x};$

7) а) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right);$

б) $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right);$

8) а) $f(x) = \sin(2x-1)\cdot\cos(x+1) + \cos(2x-1)\cdot\sin(x+1);$

б) $f(x) = \cos(4x+1)\cdot\cos(x-1) - \sin(4x+1)\cdot\sin(x-1);$

9) а) $f(x) = 2\sin 5x\cdot\sin x + \cos 7\pi;$

б) $f(x) = 2\cos 9x\cdot\cos 5x + \sin\frac{5\pi}{2}.$

86. Какой угол составляет с положительным направлением оси Ox касательная к графику функции:

1) $f(x) = \sin 2x + 5$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6};$

2) $f(x) = \cos 2x - 7$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}?$

87. 1) Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $f(x) = \cos x$ параллельна прямой

$$y = \frac{1}{2}x - 10.$$

2) Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $f(x) = \sin x$ параллельна прямой

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2.$$

88. Найдите абсциссы точек, в которых касательные к графикам данных функций параллельны:

1) $y = \sin x$ и $y = \cos x$;

2) $y = -\sin x$ и $y = \cos x$.

89. Напишите уравнение касательной к графику функции:

1) $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

2) $y = \operatorname{ctg} x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

90. Найдите критические точки функции:

1) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; 2) $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

91. Найдите критические точки функции:

1) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + 3$;

2) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x - 4$.

92. Найдите экстремальные точки функции:

1) $f(x) = \sin^3 x$; 2) $f(x) = \cos^3 x$.

93. 1) На каких промежутках убывает функция

$$f(x) = 2\sin x - x + 5?$$

2) На каких промежутках возрастает функция

$$f(x) = 2\cos x - x - 3?$$

94. 1) Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sin 2x + 5x$$

на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ 100\right]$.

2) Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \cos 2x - 3x$$

на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ 200\right]$.

95. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = 2\sin x + x$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = -2\cos x + \sqrt{2}\,x$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

Глава IV

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ, ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ И СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИИ

§ 1. Графики показательной, логарифмической и степенной функций

1. Постройте схематически график функции $\left(a = 2 \text{ или } a = \frac{1}{2}\right)$:

1) $f(x) = a^{x-1}$;
2) $f(x) = a^x - 1$;
3) $f(x) = \left|a^x - 1\right|$;
4) $f(x) = a^{|x|} - 1$;
5) $f(x) = -a^x + 1$;
6) $f(x) = a^{-x+1}$.

2. Постройте схематически на одном рисунке графики функций:

1) $y = \left(\sqrt{5} - 2\right)^x$ и $y = \left(\sqrt{5} + 2\right)^x$;

2) $y = \left(\sqrt{2} + 1\right)^x$ и $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)^x$.

3. Постройте схематически график функции $\left(a = 2 \text{ или } a = \frac{1}{2}\right)$:

1) $f(x) = \log_a(x - 1)$;
2) $f(x) = \log_a x - 1$;
3) $f(x) = \log_a(1 - x)$;
4) $f(x) = |\log_a(x - 1)|$;
5) $f(x) = \log_a|x - 1|$;
6) $f(x) = \log_a(|x| - 1)$;
7) $f(x) = -\log_a x + 1$;
8) $f(x) = \frac{1}{2}\log_a(x - 1)^2$.

4. Постройте схематически график уравнения:

1) $|y| = 2^x - 1$;
2) $|y| = \log_2 x$.

5. Постройте схематически график функции $\left(a = 2\right.$ или $\left.a = \frac{1}{2}\right)$:

1) $y = \frac{\log_a x}{|\log_a x|}$; 2) $|y| = \log_a x + |\log_a x|$.

6. Постройте график функции:

1) $y = \log_{x-2}(x-2)$; 2) $y = \log_{3-x}(3-x)$.

7. Постройте схематически графики функций:

1) а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 x}$; б) $y = 2^{\log_{\frac{1}{2}}(-x)}$;

2) а) $y = (1{,}7)^{\log_{1,7} 2x} - x$; б) $y = (2{,}9)^{\log_{2,9} 3x} - 2x$.

8. Постройте схематически графики функций:

1) а) $y = (\operatorname{tg} 40^\circ)^x$; б) $y = (\operatorname{tg} 50^\circ)^x$;

2) а) $y = x^{\operatorname{tg} 40^\circ}$; б) $y = x^{\operatorname{tg} 50^\circ}$;

3) а) $y = x^{\cos 130^\circ}$; б) $y = x^{\sin 220^\circ}$;

4) а) $y = 5^{\log_7 x}$; б) $y = 7^{\log_5 x}$.

§ 2. Свойства показательной и логарифмической функций

9. Установите область определения функций:

1) а) $f(x) = \sqrt{1812^x - 1945^x}$;

б) $f(x) = \sqrt{1828^x - 1799^x}$;

2) а) $f(x) = \arccos\left(0{,}47^x\right)$; б) $f(x) = \arcsin\left(2{,}7^x\right)$;

3) а) $f(x) = \sqrt{(x-2)(4-x)} + \frac{1}{\left\{2^x\right\}}$;

б) $f(x) = \sqrt{-(x+4)(x+6)} + \frac{1}{0{,}5^x}$;

4) а) $f(x)=\sqrt{\left(2^x-1\right)\cdot\sqrt{x+1}}$;

б) $f(x)=\sqrt{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right)\cdot\sqrt{x-1}}$;

5) а) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$; б) $f(x)=\sqrt{\log_3(x+1)}$;

6) а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log_6^2(x-1)}{\log_{\frac{1}{2}}6\cdot\log_3 5}}$; б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1)}{\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{3}\cdot\log_2\frac{1}{5}}}$;

7) а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{\lg\left(x^2+1\right)}{x+1}(x-4)}$;

б) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}\lg\left(x^2+1\right)}$;

8) а) $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-4}$; б) $f(x)=\sqrt{1-\ln^2 x}$;

9) а) $f(x)=\sqrt{\log_2\sin x}+\dfrac{15}{x-\frac{\pi}{2}}$;

б) $f(x)=\sqrt{\log_3\cos x}-\dfrac{10}{x-2\pi}$.

10. Установите область значений функций:

1) а) $f(x)=2^{4\sin x+3\cos x}$; б) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\sin x-4\cos x}$;

2) а) $f(x)=\log_2(5+\sin x)$; б) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-\cos x)$;

3) а) $f(x)=\log_2\left(1+\sqrt{4-x^2}\right)$;

б) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(2+\sqrt{9-x^2}\right)$.

11. Исследуйте на четность и нечетность функции:

1) а) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}$; б) $f(x)=3^{-x^2}$;

2) а) $f(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$; б) $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{3}$;

3) а) $f(x)=x\dfrac{5^x-1}{5^x+1}$; б) $f(x)=x^2\dfrac{7^x+1}{7^x-1}$;

4) а) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; б) $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$;

5) а) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}$; б) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

12. Вычислите:

1) а) $\log_4 9$, если $\log_2 3=a$;

б) $\log_9 25$, если $\log_3 5=b$;

2) а) $-\log_3 2$, если $\log_3\dfrac{1}{2}=a$;

б) $\log_5 7$, если $-\log_5\dfrac{1}{7}=b$;

3) а) $\log_3 4\cdot\log_8 27$; б) $\log_2 25\cdot\log_{125} 8$;

4) а) $\log_5 10$, если $\lg 2=a$; б) $\log_2 10$, если $\lg 5=b$.

13. При каких x справедливы равенства:

1) а) $\log_a(x-2)(x-3)=\log_a(x-2)+\log_a(x-3)$;

б) $\log_a\dfrac{4-x}{2-x}=\log_a(4-x)-\log_a(2-x)$;

2) а) $\log_a(x-3)^4=4\log_a(x-3)$;

б) $\log_a(x-2)^4=4\log_a(2-x)$;

3) а) $\log_{3x} x=\dfrac{1}{\log_x 3x}$; б) $\log_x 2x=\dfrac{1}{\log_{2x} x}$?

§ 3. Показательные и логарифмические уравнения

14. Решите уравнения:

1) а) $2^{x^2-5x+6}=(x-3)^0$; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-5x+4}=(x-1)^0$;

2) а) $\left(10^{x-3}\right)^{x+3}=10000^4$; б) $\left(3^{x+4}\right)^{x-4}=27^3$;

3) а) $3^{2x}=5$; б) $5^{3x}=2$;

4) а) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=14$; б) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=39$;

5) а) $2^x\cdot 5^{2x}=2500$; б) $5^x\cdot 2^{3x}=1600$;

6) а) $2^{2x-2}=5^{x-1}$; б) $3^{3x+3}=2^{x+1}$;

7) а) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$; б) $16^x-2\cdot 4^x-8=0$;

8) а) $\left(\sqrt{2}\right)^{1-\cos 2x}-2^{\sin^2 x+\sin x}=0$;

б) $\left(\sqrt{3}\right)^{1+\cos 2x}-3^{\cos^2 x+\cos x}=0$;

9) а) $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2$;

б) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=2$;

10) а) $2^{2x}-6^x-2\cdot 3^{2x}=0$; б) $3^{2x}-2\cdot 12^x-3\cdot 4^{2x}=0$;

11) а) $2^{\sqrt{x}}=1-x^2$; б) $3^{-\sqrt{x}}=x^2+1$;

12) а) $2^{x-\pi}=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$; б) $3^{x-\frac{\pi}{2}}=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$;

13) а) $\sqrt{\cos x}\cdot\left(2^{x^2}-16\right)=0$; б) $\sqrt{\sin 2x}\cdot\left(3^{x^2}-81\right)=0$.

15. Решите уравнения:

1) а) $2^{\frac{3}{\log_2 x}}=\frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{\log_3 x}}=9$;

2) а) $2^{\log_6(-4x)}=\log_3 81$; б) $3^{\log_5(-2x)}=\log_2 512$;

3) а) $\log_x 3-\log_x 2=\frac{1}{2}$; б) $\log_x 5+\log_x 3=\frac{1}{2}$;

4) а) $x\log_2 3-1=-\log_2 18$; б) $x\log_3 2-1=-\log_3 12$;

5) а) $|x-1|^{\lg x}=1$; б) $|x-2|^{\lg(x-1)}=1$;

6) а) $\lg(3x-1)\cdot\lg\left(x^2-x+1\right)=0$;

б) $\lg(-x-1)\cdot\lg\left(x^2+x+1\right)=0$;

7) а) $3^{\lg x}=54-x^{\lg 3}$; б) $2^{\lg x}=32-x^{\lg 2}$;

8) а) $\sqrt{\log_2(x-1)}=\log_{\frac{1}{2}} x$;

б) $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x}=\log_2 x$;

9) а) $(\log_3\cos x)^2=\log_{\cos x} 4$; б) $(\log_2\sin x)^2=\log_{\sin x} 3$;

10) а) $x^{\log_x (1-x)^2} = 9;$ б) $x^{\log_x (x+1)^2} = 4;$

11) а) $\log_{\cos x} \sin x = 1;$ б) $\log_{\cos x}(-\sin x) = 1;$

12) а) $\log_2^2 x - \dfrac{1}{\log_x 2} - 2 = 0;$ б) $\log_3^2 x - \dfrac{2}{\log_x 3} - 3 = 0;$

13) а) $\log_3 \log_2 x - \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} = 2;$

б) $\log_2 \log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x} = 4.$

16. Найдите ошибку в решении следующих уравнений:

1) $\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0.$ (1)

Решение. $\dfrac{1}{\log_x 2x} + \dfrac{1}{\log_x 8x^2} = 0,$ (2)

$$\frac{1}{\log_x 2 + 1} + \frac{1}{2 + 3\log_x 2} = 0;\ 2 + 3\log_x 2 + \log_x 2 + 1 = 0;$$

$$\log_x 2 = -\frac{3}{4};\ x = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}.$$

2) $\lg 2x = \dfrac{1}{4} \lg (x-15)^4.$ (1)

Решение. $\lg 2x = \dfrac{1}{4} \cdot 4 \lg (x-15);$ (2)

$\lg 2x = \lg (x-15);\ \ 2x = x - 15;\ \ x = -15.$

Так как $x > 0$, то уравнение не имеет решений.

§ 4. Показательные и логарифмические неравенства

17. Решите неравенства:

1) а) $2 < 7^x < 15;$ б) $3 < (0{,}7)^x < 11;$

2) а) $(2^x - 3)(2^x - 5) < 0;$ б) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 5\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3\right) > 0;$

3) а) $\dfrac{0{,}3^{x^2} - 1}{\log_{0,3} 0{,}7} \ge 0;$ б) $\dfrac{3^{x^2} - 1}{\log_3 7} \le 0;$

4) а) $a^{x+\sqrt{1-a}} > a^{\sqrt{1-a}}$ $(a > 0;\ a \neq 1)$;

б) $m^{2x+\sqrt{m-1}} < m^{\sqrt{m-1}}$ $(m > 0;\ m \neq 1)$;

5) а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x+\sqrt{-\cos x}} > 2^{-\sqrt{-\cos x}}$;

б) $3^{\cos x+\sqrt{-\sin x}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{-\sin x}}$.

18. Решите неравенства:

1) а) $(x+1)\log_2 x > 0$; б) $\dfrac{x+2}{\log_{\frac{1}{2}} x} < 0$;

2) а) $2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 5$; б) $-1 < \log_2 x < 3$;

3) а) $\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} x - 1}{\log_{\frac{1}{3}} x - 2} < 0$; б) $\dfrac{\log_3 x - 2}{\log_3 x - 1} > 0$;

4) а) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x + 2}{\sqrt{2x-1}} > 0$; б) $\dfrac{\log_3 x - 2}{\sqrt{10-x}} > 0$;

5) а) $\log_2\left(x^2-4x+4\right) > 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+9\right) > -2$;

6) а) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 < 0$; б) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 5\log_{\frac{1}{2}} x + 4 > 0$;

7) а) $\log_x 2 > 1$; б) $\log_x 3 < 1$.

§ 5. Производные показательной, логарифмической и степенной функций

19. Найдите производные следующих функций:

1) а) $f(x) = e^{x^3-4x^2+5}$; б) $f(x) = e^{x^3+2x^2-3}$;

2) а) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$; б) $f(x) = 3^{\sin x}$;

3) а) $f(x) = x^2 e^x$; б) $f(x) = x e^{-x}$;

4) а) $f(x)=x^{\sqrt{2}}+\left(\sqrt{2}\right)^x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$;

б) $f(x)=x^{\sqrt{3}}+\left(\sqrt{3}\right)^x+\sin\frac{\pi}{8}$;

5) а) $f(x)=\log_5 x+\log_{\frac{1}{3}} x$; б) $f(x)=\log_2 x+\log_{\frac{1}{5}} x$;

6) а) $f(x)=\log_5 \sqrt{x}$; б) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{x}$;

7) а) $f(x)=\ln^3 x$; б) $f(x)=\ln^5 x$;

8) а) $f(x)=\ln\sin x$; б) $f(x)=\ln\cos x$.

20. Укажите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции параллельна оси Ox, если:

1) $f(x)=e^{x^3-3x}$; 2) $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-4x}$.

21. Какой угол с положительным направлением оси Ox составляет в точке $x_0=0$ касательная к графику функции:

1) $f(x)=\dfrac{0{,}7^{-x}}{\ln 0{,}7}+3$; 2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 0{,}3^{-x}}{\ln 0{,}3}-5$?

22. Найдите тангенс угла, который составляет с положительным направлением оси Ox касательная к графику функции:

1) $f(x)=\ln\left(x^2-4x\right)$ в точке $x_0=5$;

2) $f(x)=\ln\left(x^2+2x\right)$ в точке $x_0=3$.

23. На каких промежутках убывает функция:

1) $f(x)=0{,}7^{x^2}+12$; 2) $f(x)=x\cdot\log_7 x-\dfrac{x}{\ln 7}$?

24. На каких промежутках возрастает функция:

1) $f(x)=0{,}3^{x^2}-15$; 2) $f(x)=x\cdot\log_5 x-\dfrac{x}{\ln 5}$?

25. Найдите критические точки функций:

1) а) $f(x)=xe^x+3$; б) $f(x)=xe^{-x}+4$.

2) а) $f(x)=\ln^2 x-6\ln x+5$; б) $f(x)=\ln^2 x+4\ln x-3$.

26. Найдите промежутки монотонности функций:

1) а) $f(x) = x - e^{x} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; б) $f(x) = x + e^{x} + \cos\frac{\pi}{9}$;

2) а) $f(x) = x^{\sqrt{3}} - 0{,}3^{2x-3}$; б) $f(x) = x^{-\sqrt{2}} + 0{,}7^{3x-5}$.

27. Исследуйте на экстремум функцию:

1) $f(x) = 0{,}3^{x^{2}-2x}$; 2) $f(x) = 0{,}2^{-x^{2}+4x}$.

28. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = \ln\left(x^{3} + x + 1\right)$ на промежутке $[0;\ 2]$;

2) $f(x) = \ln\left(2 - x - 3x^{3}\right)$ на промежутке $[-1;\ 0]$.

Глава V

ИНТЕГРАЛ

1. Найдите первообразные для функций:

1) а) $f(x)=3x^4$; б) $f(x)=4x^3$;

2) а) $f(x)=\frac{1}{x^3}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^4}$;

3) а) $f(x)=(1-2x)^3$; б) $f(x)=(2-3x)^3$;

4) а) $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$; б) $f(x)=\left(x^2-2\right)^2$;

5) а) $f(x)=\sin 2x-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}$; б) $f(x)=\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\cos^2 2x}$;

6) а) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$; б) $f(x)=\operatorname{ctg}^2 x$;

7) а) $f(x)=2\sin^2 x$; б) $f(x)=2\cos^2 x$;

8) а) $f(x)=e^{2x-1}$; б) $f(x)=e^{1-3x}$;

9) а) $f(x)=x^3+3^x$; б) $f(x)=x^2+2^x$;

10) а) $f(x)=\frac{1}{1-2x}$; $x\in\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$;

б) $f(x)=\frac{1}{3x-1}$; $x\in\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right)$.

2. Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M:

1) а) $f(x)=2x+1$; $M(1;\ 3)$;

б) $f(x)=3x^2-1$; $M(1;\ 2)$;

2) а) $f(x)=\frac{1}{3x}$ $(x>0)$; $M\left(e;\ \frac{4}{3}\right)$;

б) $f(x)=\frac{1}{2x}$ $(x>0)$; $M\left(e;\ \frac{3}{2}\right)$.

3. Решите дифференциальные уравнения:

1) а) $y' = 3x^2 - 4x + 5$; б) $y' = 2x^2 + 3x - 4$.

2) а) $y' = \cos x$; $y(0) = 1$; б) $y' = -\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

3) а) $y' = e^{2x}$; $y(0) = \frac{3}{2}$; б) $y' = e^{3x}$; $y(0) = \frac{4}{3}$.

4. 1) Вычислите $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$, если график функции $f(x)$ изображен на рис. 1.

2) Вычислите $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, если график функции $f(x)$ изображен на рис. 2.

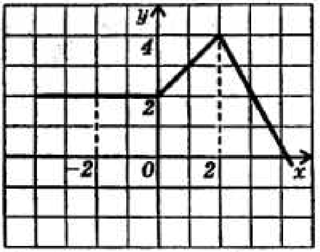


Рис. 1

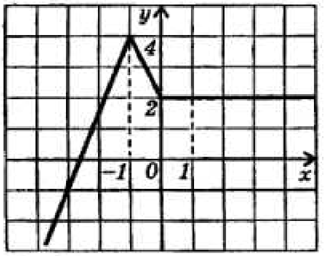


Рис. 2

5. 1) Вычислите $\int_{-4}^{0} f(x)\,dx$, если график функции $f(x)$ изображен на рис. 3.

2) Вычислите $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$, если график функции $f(x)$ изображен на рис. 4.

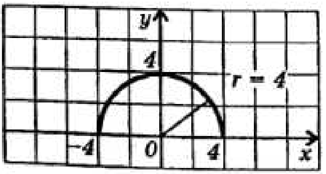


Рис. 3

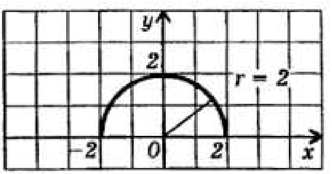


Рис. 4

6. Вычислите:

1) а) $\int\limits_{-2}^{5} 3\,dx$; б) $\int\limits_{-3}^{4} 2\,dx$;

2) а) $\int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx$;

3) а) $\int\limits_{1,1}^{1,9} [x]\,dx$; б) $\int\limits_{2,2}^{2,8} [x]\,dx$;

4) а) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\,dx$;

5) а) $\int\limits_{-2}^{2} \sin 5x\,dx$; б) $\int\limits_{-3}^{3} \left(x^5-4x^{11}-x\right)dx$.

7. Решите уравнение:

1) $\int\limits_{0}^{2} y\,dy = x^2$; 2) $2\int\limits_{-2}^{0} (-z)\,dz = x^2$.

8. Решите неравенство:

1) $8x \ge \int\limits_{0}^{4} dx$; 2) $2x \le \int\limits_{0}^{2} dx$.

9. Сравните по величине a и b, если:

1) а) $a = \int\limits_{0}^{1} x^{\frac{5}{2}}\,dx$ и $b = \int\limits_{0}^{1} x^{\frac{2}{5}}\,dx$;

б) $a = \int\limits_{0}^{1} x^{\frac{7}{3}}\,dx$ и $b = \int\limits_{0}^{1} x^{\frac{3}{7}}\,dx$;

2) а) $a = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,dx$ и $b = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$;

б) $a = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ и $b = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$;

3) а) $a = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$ и $b = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx$;

б) $a = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$ и $b = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx$;

4) а) $a = \int\limits_{0,1}^{1} 2^{\log_5 x}\,dx$ и $b = \int\limits_{0,1}^{1} 5^{\log_2 x}\,dx$;

б) $a = \int\limits_{0,2}^{1} 7^{\log_3 x}\,dx$ и $b = \int\limits_{0,2}^{1} 5^{\log_7 x}\,dx$.

10. Вычислите площади фигур, изображенных на рисунках 5—9:

1)

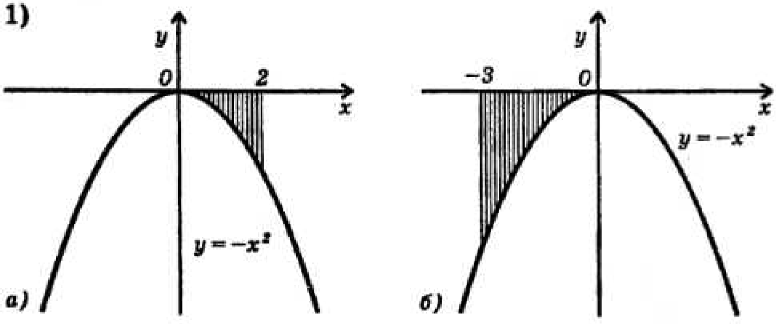


Рис. 5

2)

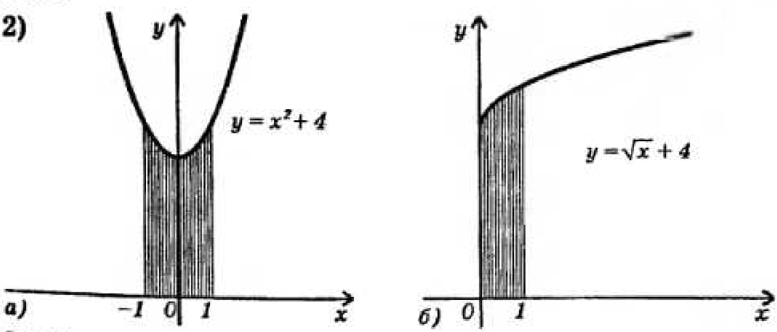


Рис. 6

3)

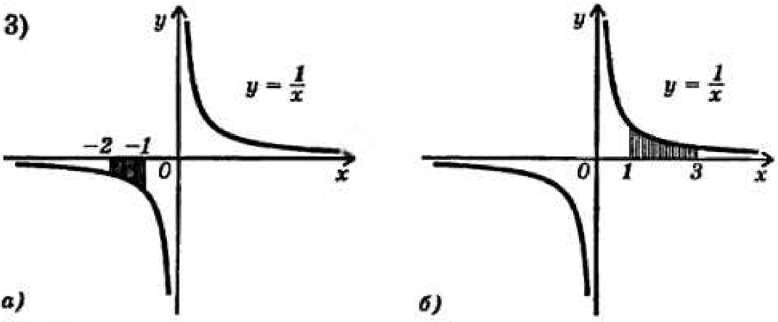


Рис. 7

4)

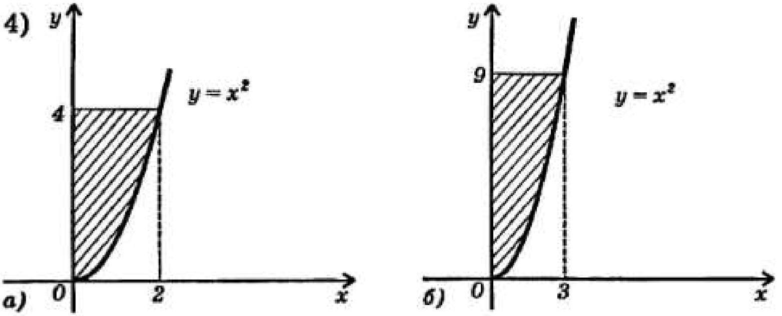


Рис. 8

5)

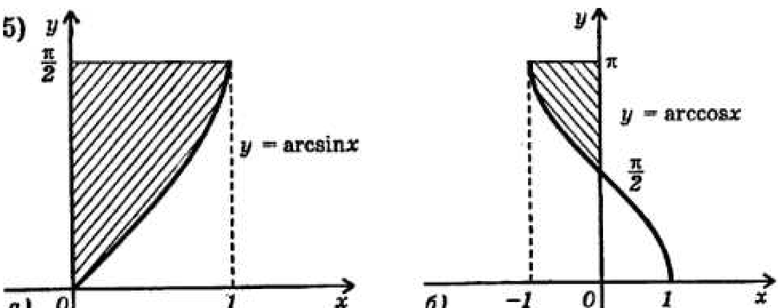
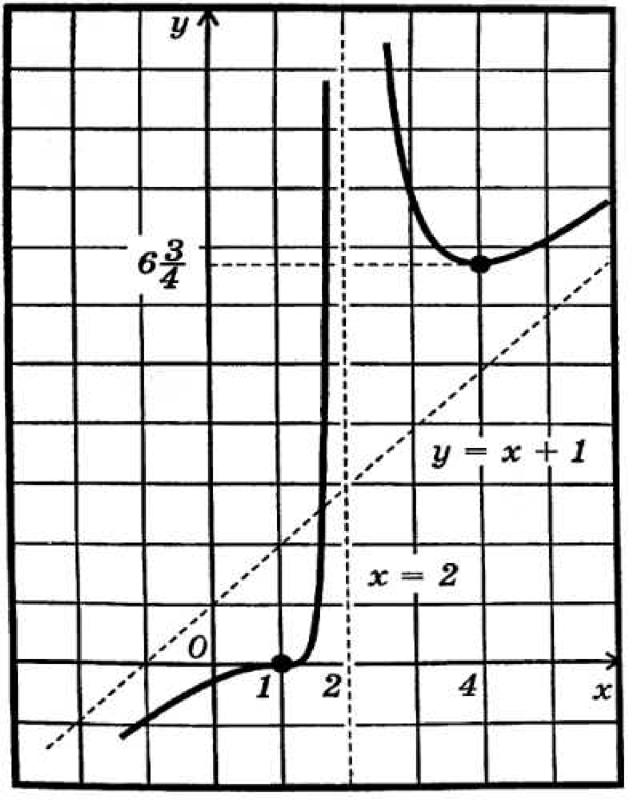


Рис. 9

11. Сравните по величине:

1) $\int\limits_1^e \ln x\,dx$ и $e-1$; 2) $\int\limits_1^e \ln x\,dx$ и $\frac{e-1}{2}$.

ОТВЕТЫ



Глава I

§ 1

1. 1) нет; 2) да; 3) да (например, $y = 0$).

2. 1) а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; б) $-1;\ -1;\ 1;\ 1$; в) таких точек нет;
2) а) R; б) $2;\ 2;\ -2;\ -2$; в) $(0;\ 2)$.

3. 1) разные функции; 2) разные функции; 3) одну и ту же функцию.

4. 1) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{при } x<0,\\ 1-x & \text{при } 0\le x\le 2;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x<1,\\ x & \text{при } x>1.\end{cases}$

5. 1) $S(a)=\begin{cases}\dfrac{a^2}{2} & \text{при } 0\le a\le 1,\\ a-\dfrac{1}{2} & \text{при } 1\le a\le 2;\end{cases}$

2) $S(a)=\begin{cases}a & \text{при } 0\le a\le 1,\\ 2a-1 & \text{при } 1\le a\le 2.\end{cases}$

§ 2

1. 1) а) $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; б) $[-2;\ 2]$;
2) а) $\{0\}\cup[1;\ +\infty)$; б) $[0;\ +\infty)$;
3) а) $(-\infty;\ 2)\cup[3;\ +\infty)$; б) $x\notin Z$; 4) а) $\{2\}$; б) $\{3\}$;
5) а) $\{-1\}\cup[0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0]\cup\{2\}$.

2. 1) а) $[-3;\ 5]$; б) $[-15;\ -3]$; 2) а) $\{0\}$; б) $\{0\}$;
3) а) $(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$; б) $[6;\ +\infty)$;
4) а) $(-\infty;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$;
5) а) $[0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 3]$.

§ 3

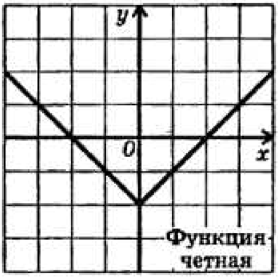
1. а) четная функция; б) функция общего вида; в) нечетная функция; г) нечетная функция; д) нечетная функция.

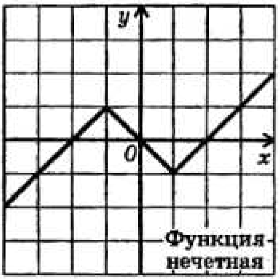
2. $k\ne 0$ и $b=0$ — функция нечетная; при $k=0$ и $b\ne 0$ — функция четная; при $k=0$ и $b=0$ — функция одновременно является и четной и нечетной, при $k\ne 0$ и $b\ne 0$ — функция общего вида.

3. При $b\ne 0$ — функция общего вида; при $b=0$ — функция четная.

4.

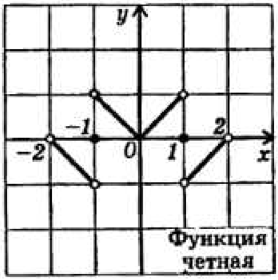
а)





Примечание. Задание может быть выполнено разными способами.
б) можно достроить только до графика нечетной функции;

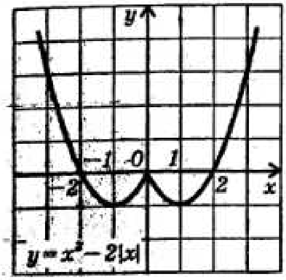
в)



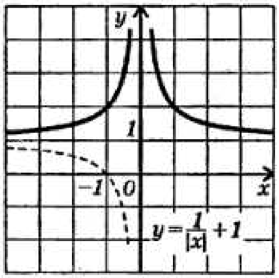
г)

6.

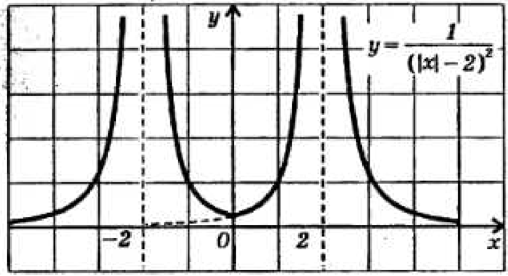
а)


y
x
−2
−1
0
1
2
y = x² − 2|x|

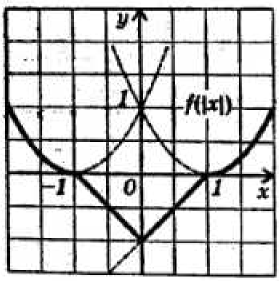
б)


y
x
1
−1
0
y = 1/|x| + 1

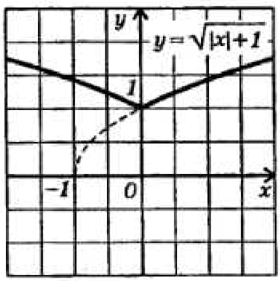
в)


y
x
−2
0
2
y = 1/(|x| − 2)²

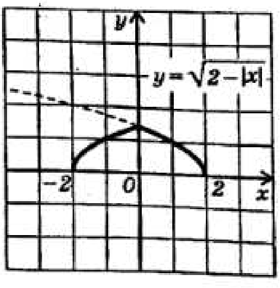
г)


y
x
1
−1
0
1
f(|x|)

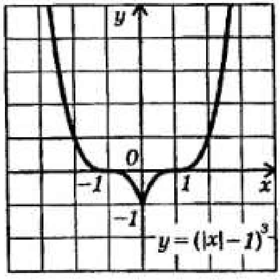
д)


y
x
1
−1
0
y = √(|x| + 1)

е)

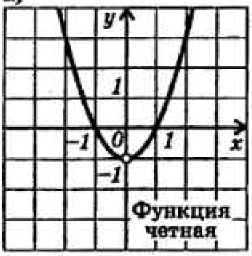

y
x
−2
0
2
y = √(2 − |x|)

ж)

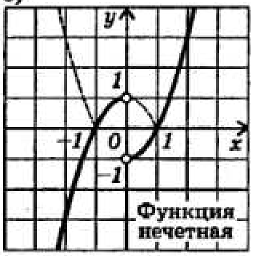

y
x
0
−1
1
−1
y = (|x| − 1)³

6.

а)



б)

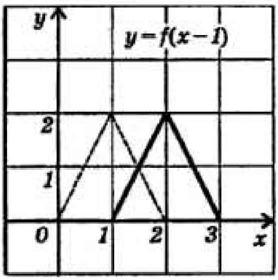


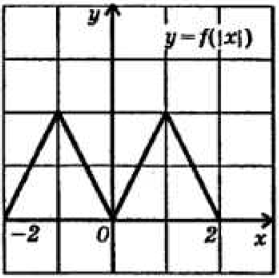
в)

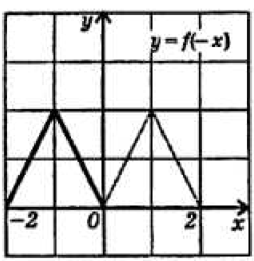
7. а) $y = x^2 + x^{-1}$; б) $y = x^3 + \left(-x^{-2}\right)$.

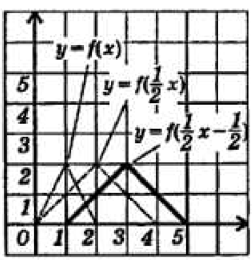
§ 4

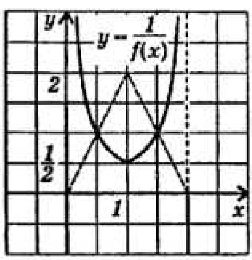
1. $y = f\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$.



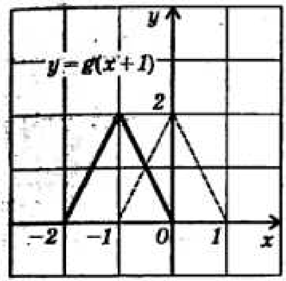


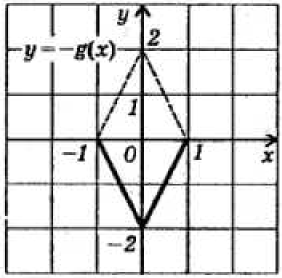


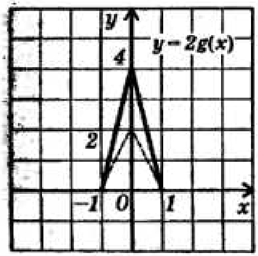


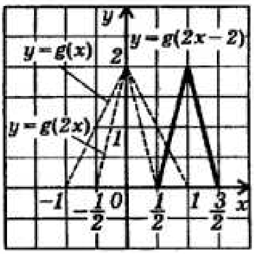


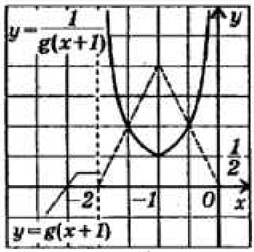
2. $y = g(2x-2) = g(2(x-1))$.





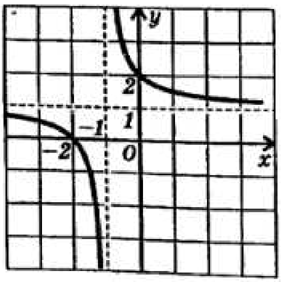


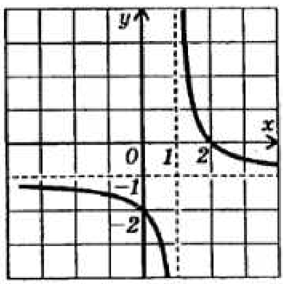




3. 1) $y = \dfrac{x+2}{x+1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$;

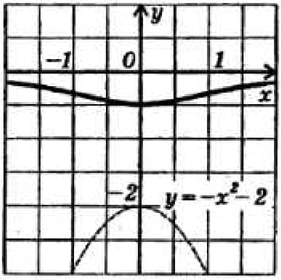
2) $y = \dfrac{2-x}{x-1} = -\dfrac{x-2}{x-1} = -\left(1 - \dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{x-1} - 1$;



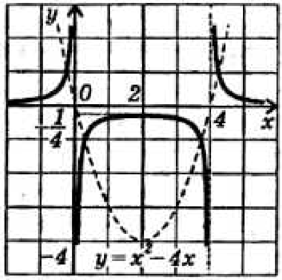


3) графиком функции является точка $(2;\ 0)$;

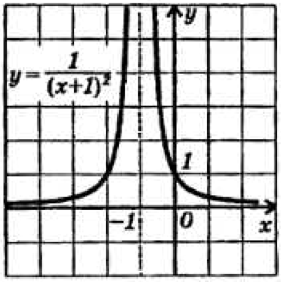
4) $y = -\dfrac{1}{x^2+2}$;



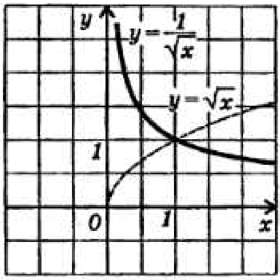
5) $y = \dfrac{1}{x^2-4x}$;



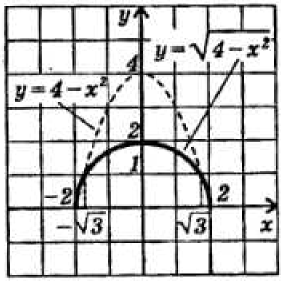
6) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$;



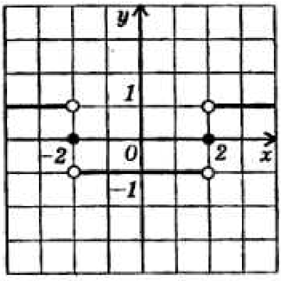
7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;



8) $y = \sqrt{4-x^2}$;



9) $y = \operatorname{sign}\left(4-x^2\right)$.



§ 5

1. 1) возрастающая функция; 2) убывающая функция;

3) возрастает на $\left[-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$ и убывает на $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right]$;

4) возрастает на $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$ и убывает на $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$;

5) возрастает на $[0;\ +\infty)$ и убывает на $(-\infty;\ 0]$;

6) возрастает на $[0;\ +\infty)$;

7) возрастает на $(-\infty;\ 0)$ и убывает на $(0;\ +\infty)$;

8) возрастает на $(1;\ +\infty)$ и убывает на $(-\infty;\ 1)$;

9) возрастает на $(-\infty;\ 0]$ и убывает на $[0;\ +\infty)$;

10) возрастает на $[0;\ +\infty)$ и убывает на $(-\infty;\ 0]$;

11) функция на каждом из промежутков $[n;\ n+1)$, где $n \in Z$, является постоянной; на $(-\infty;\ +\infty)$ нестрого возрастает;

12) функция не является монотонной, но на каждом из промежутков $[n;\ n+1)$, где $n \in Z$, возрастает; ее множество значений $[0;\ 1)$.

2. 1) функция возрастает на $(0;\ +\infty)$;

2) функция возрастает на $(-\infty;\ 0)$.

3. 1) убывающая функция; 2) убывающая функция.

4. 1) $y = x^3$; 2) $y = -\frac{3}{x}$.

5. 1) например, $f(x) = 2x - 3$, а $g(x) = x + 2$, тогда $f(x) - g(x) = x - 5$ — возрастающая функция;

2) например, $f(x) = x + 2$, а $g(x) = 2x - 3$, тогда $f(x) - g(x) = -x + 5$ — убывающая функция.

6. 1) $f(x) = x - 4$ и $g(x) = x$; $f(x) \cdot g(x) = x^2 - 4x$ — немонотонная функция;

2) $f(x) = -x + 2$ и $g(x) = -x$; $f(x) \cdot g(x) = x^2 - 2x$ — немонотонная функция.

§ 6

1. Рис. 12, *б* и 12, *г*.

2. 1) $y = \sqrt{x+1}$; 2) $y = -\sqrt{x+4}$;

3) $y = (x-1)^2,\ x \geq 1$; 4) $y = (x-1)^2,\ x \leq 1$;

5) $y = 1 + \frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{1}{x} - 2$.

3. 1) функция $g(x)$, у которой $D(g) = \{5\}$ и $E(g) = \{2\}$;

2) функция $g(x)$, у которой $D(g) = \{-3\}$ и $E(g) = \{3\}$.

4. 1) функция $g(x)$, у которой $D(g) = \{1;\ 2;\ 3\}$, причем $g(1) = 1$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$;

2) функция $g(x)$, у которой $D(g) = \{-1;\ 4;\ 5\}$, причем $g(-1) = -1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 3$.

5. Необходимо использовать осевую симметрию относительно прямой $y = x$.

Глава II

§ 1

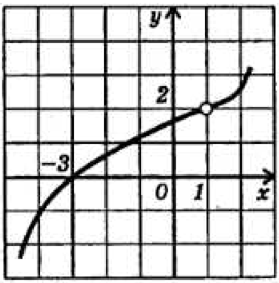
1. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 4$.
В точке $x = 5$ предела нет.

2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 3$.
В точке $x = 1$ предела нет.

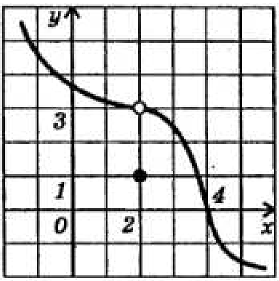
3. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -10} f(x) = -1$. В точке $x = 3$ предела нет.

4. $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 1$. В точке $x = 2$ предела нет.

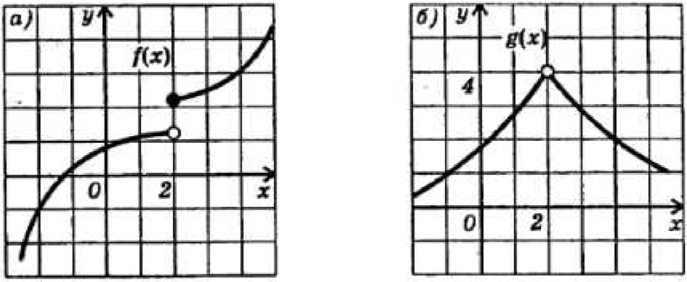
5.



6.



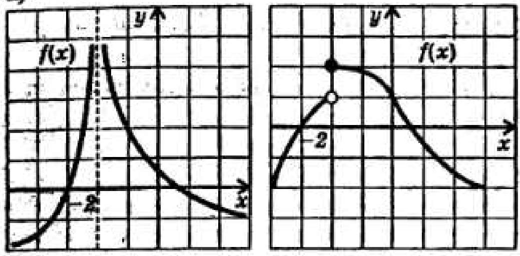
7.



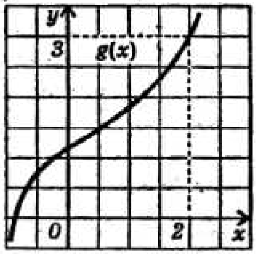
Примечание. Задание может быть выполнено многими способами.

8.

а)



б)



Примечание. Задание может быть выполнено многими способами.

9. 1) $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)+g(x)\right)=2$; $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

В точке $x=1$ предел $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует.

2) $\lim\limits_{x\to-1}\left(f(x)+g(x)\right)=2$; $\lim\limits_{x\to-1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0$.

В точке $x=-1$ предел $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует.

10. Функция 10.1.

11. Функция 11.4.

12. На вопрос 12.4.

13. 1) $A=4$; 2) $B=1$.

14. 1) $f(a)$; 2) $f(-b)$.

15. 1) а) 1; б) -2; 2) а) -1; б) $\dfrac{17}{2}$;

3) а) 4; б) 0; 4) а) 64; б) 25.

§ 2

1. 1) 0,2; 2) $-0{,}3$; 3) а) 0,21; б) $-0{,}19$.

2. 1) а) $2x+\dfrac{4}{x^2}$; б) $3x^2-\dfrac{5}{x^2}$; 2) а) $\dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$; б) $\dfrac{1}{12}x^{-\frac{11}{12}}$;

3) а) $-\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$; б) $-\dfrac{1}{x\sqrt[5]{x}}$; 4) а) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$; б) $-\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$;

5) а) $5\left(2x^3-3x^2+4\right)^4\cdot\left(6x^2-6x\right)$;

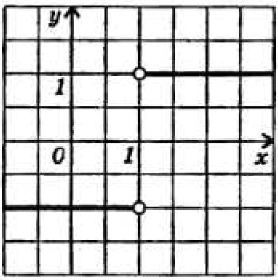
б) $7\left(3x^3-2x^2+7\right)^6\cdot\left(9x^2-4x\right)$;

6) а) $2x\left(\sqrt{x}+1\right)+\dfrac{x^2}{2\sqrt{x}}$; б) $3x^2\left(\sqrt{x}-1\right)+\dfrac{x^3}{2\sqrt{x}}$;

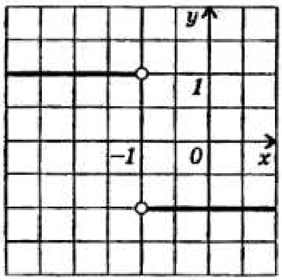
7) а) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$; б) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

3. 1) нет; 2) нет; 3) в точках $x=0$ и $x=4$ — нет, а в точке $x=2$ — да; 4) да; 5) нет; 6) в точке $x=2$ — нет, а в точке $x=0$ — да.

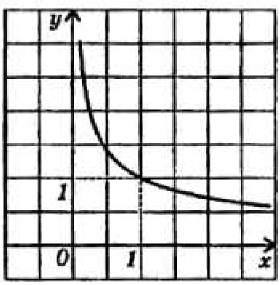
4. 1)



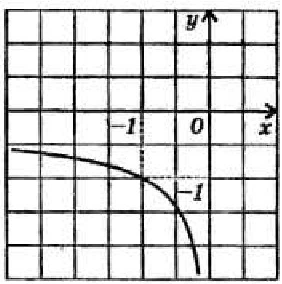
2)



3)



4)



5. 1) а) да; б) нет; 2) а) да; б) нет.

6. 1) $y=5$; 2) $y=1$.

7. 1) $f(x)=2x^2-3$; $f(x)=3\sqrt{15}$;

2) $f(x)=-3x^2+5$; $f(x)=-5\sqrt{17}$.

8. 1) для функции $f(x)=3-x$; 2) для функции $f(x)=x$.

9. 1) функция $y=\dfrac{1}{x^2-x+2}$; 2) функция $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+7}}{x^2+1}$.

10. 1) высказывание (б); 2) высказывание (б).

11. Высказывание (2).

12. Высказывание (2).

13. Движение (г).

14. Движение (г).

§ 3

1. 1) $x_1 = 0$; $x_2 = 4$;

2) $x_1 = 0$; $x_2 = -3$.

2. 1) $\varphi = 135°$; 2) $\varphi = 60°$.

3. 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ м/с; 2) 1 м/с.

4. 1) $x_0 = \pm 2$; 2) $x_0 = 4$.

5. 1) $y = 2$; 2) $y = -1$.

6. 1) $y = 2$; 2) $y = 3$.

7. 1) $y = -kx + b$; 2) $y = -kx - b$.

8. 1) да; 2) да; 3) да; 4) нет.

Замечание: ответ на последний вопрос зависит от определения касательной. Мы понимаем под касательной l к графику Γ в точке M прямую, проходящую через точку M, такую, что в некоторой окрестности точки M график Γ лежит только в одной полуплоскости относительно l.

Если же понимать под касательной предельное положение секущих, то тогда из существования касательной к графику функции следует дифференцируемость функции в данной точке.

§ 4

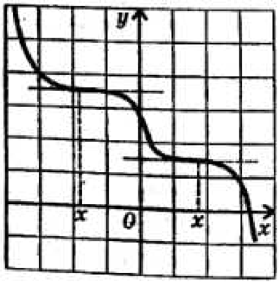
1. 1) а) убывает: $[-1;\ 1]$, возрастает: $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ +\infty)$;

б) возрастает: $(-\infty;\ -1]$, $[3;\ +\infty)$;

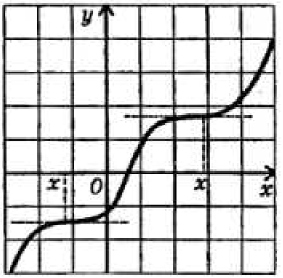
2) а) убывает: $(-\infty;\ -1]$, $[1;\ +\infty)$, возрастает: $[-1;\ 1]$;

б) убывает: $(-\infty;\ -1]$, $[3;\ +\infty)$.

2. 1)



2)



3. 1) $x = c$;

2) $x = c$.

4. 1) $f(x) = 4x^3$;

2) $f(x) = -3x^5$.

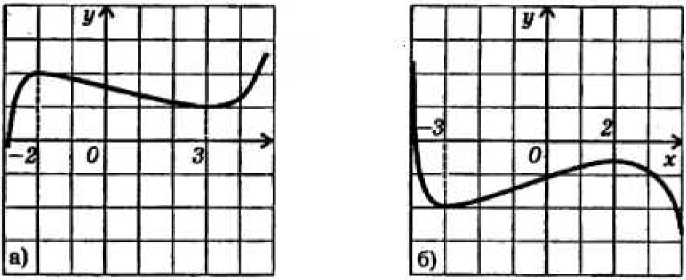
5. 1) при $a \geq 0$; 2) при $m \leq 0$.

6. Функция $y = x^5$.

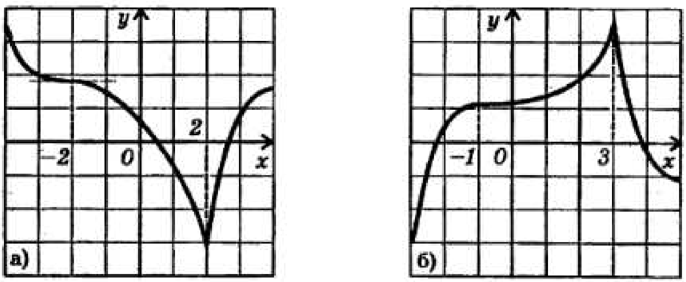
7. Функция $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$.

8. 1) высказывание (в); 2) высказывание (в).

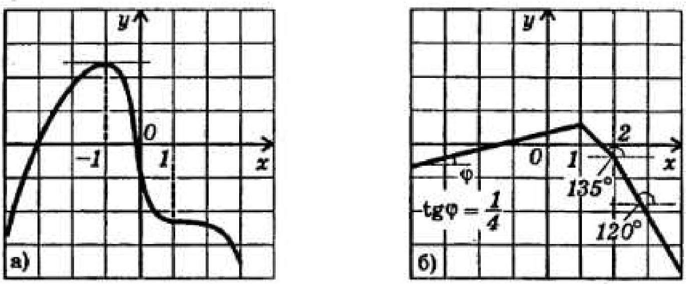
9. 1)



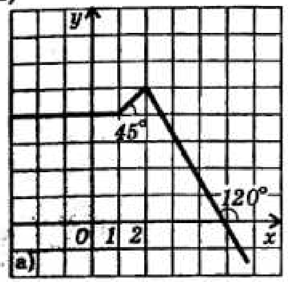
2)

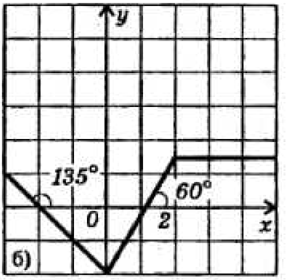


10. 1)



2)





11. 1) $f(x) = |x-1|+1$ и $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$;

2) $f(x) = 2-|x-2|$ и $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x - 3$.

12. 1) пять; 2) три.

13. 1) нет, неверно; 2) нет, неверно.

14. 1) а) $\min\limits_{[0;\,1]} f(x) = 1$; $\max\limits_{[0;\,1]} f(x) = 3$;

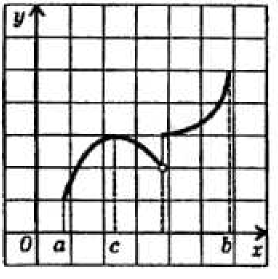
б) $\min\limits_{[0;\,1]} f(x) = 0$; $\max\limits_{[0;\,1]} f(x) = 2$;

2) а) $\min\limits_{[-1;\,3]} f(x) = 0$; $\max\limits_{[-1;\,3]} f(x) = \sqrt[5]{9}$;

б) $\min\limits_{[-2;\,1]} f(x) = 0$; $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = \sqrt[5]{16}$.

15. 1) нет, неверно; 2) нет, неверно.

Не указано, что функция непрерывна на отрезке. Возможный вариант показан на рисунке. Наибольшее значение $f(b)$, а не $f(c)$.



16. 1) нет, неверно; 2) нет, неверно.

17. 1) $\max\limits_{[5;\,+\infty)} f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

2) $\min\limits_{[3;\,+\infty)} f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

18. 1) $\max\limits_{(-\infty;\,-3]} f(x) = f(-2)$; $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(2)$;

2) $\max\limits_{[5;\,+\infty)} f(x) = f(5)$; $\min\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(0)$.

Глава III

§ 1

1. 1) а) $\sin\sqrt{2} > \cos\sqrt{2}$; б) $\sin\sqrt{3} > \cos\sqrt{3}$;

2) а) $\sin 4{,}8 > \operatorname{tg} 4{,}8$; б) $\sin 3{,}7 < \operatorname{tg} 3{,}7$.

2. 1) а) $x = \frac{2\pi}{3}$; б) $x = \frac{4\pi}{3}$; 2) а) $x = \frac{7\pi}{6}$; б) $x = \frac{5\pi}{3}$.

3. 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

4. 1) $x = \frac{5\pi}{4}$; 2) $x = \frac{7\pi}{4}$.

5. 1) $x = 1$ и $x = \pi k,\ k \in Z$;

2) $x = 6$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

6. 1) $x = 2\pi k,\ k \in Z$; 2) $x = \pi + 4\pi k,\ k \in Z$.

7. 1) $x \in (-\infty;\ 5] \cup \{2\pi\} \cup [7;\ +\infty)$;

2) $x \in (-\infty;\ 3] \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} \cup [5;\ +\infty)$.

8. 1) вне треугольника; 2) неизвестно.

9. 1) 0; 2) 0.

10. 1) а) $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k\right],\ k \in Z$;

б) $\left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k\right],\ k \in Z$;

2) а) $x = \pi k,\ k \in Z \setminus \{-2\}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \setminus \{1\}$;

3) а) $[-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$;

б) $\left[-2;\ -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ 2\right]$;

4) а) $x = 2\pi k,\ k \in Z$; б) функция не определена.

§ 2

11. 1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$. **12.** 1) 1; 2) 1.

13. 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$. **14.** 1) $A = \frac{3}{2}$; 2) $B = -2$.

15. 1) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$.

16. 1) $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{10}}$.

17. 1) $m^2 - 2$; 2) $n^2 + 2$.

18. 1) $[-2;\ 1]$; 2) $[1;\ 3]$.

19. 1) а) прямая $y = 1$; б) прямая $y = 1$;

2) а) прямая $y = 1$ с «выколотыми» точками $x = \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;

б) прямая $y = 1$ с «выколотыми» точками $x = \dfrac{\pi k}{4}$, $k \in Z$;

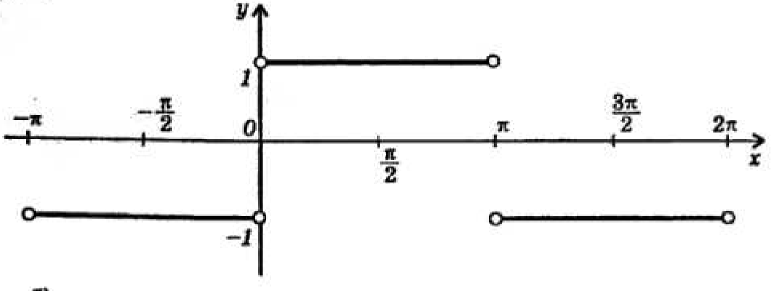
3) а) график функции $y = \cos x$ с «выколотыми» точками $x = \pi k$, $k \in Z$;

б) график функции $y = \sin x$ с «выколотыми» точками $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

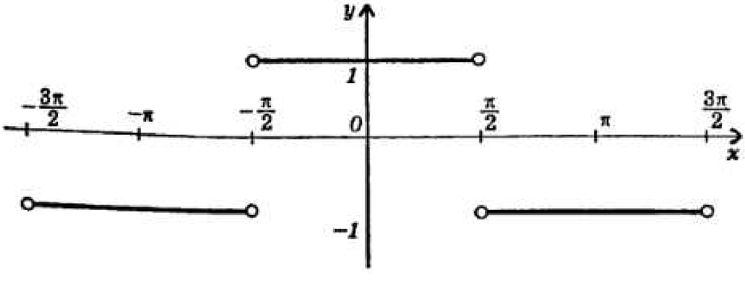
4) а) точки, лежащие на прямой $y = 1$ с абсциссами $x = \pi k$, где $k \in Z$ и $k \neq 0$;

б) точки, лежащие на прямой $y = 1$ с абсциссами $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$ и $k \neq 0$.

5) а)



б)



§ 3

20. 1) а) функция нечетная; б) функция нечетная;
2) а) функция четная; б) функция общего вида;
3) а) функция общего вида; б) функция нечетная.

21. 1) а) $T_0 = \pi$; б) $T_0 = 4\pi$;
2) а) $T_0 = \frac{\pi}{2}$; б) $T_0 = \frac{\pi}{3}$;
3) а) $T_0 = \frac{\pi}{2}$; б) $T_0 = \frac{\pi}{3}$;
4) а) $T_0 = 2\pi$; б) $T_0 = 2\pi$;
5) а) $T_0 = 4\pi$; б) $T_0 = 4\pi$.

22. 1) периодические функции $y = -3$ и $y = \sqrt{\cos x}$;
2) периодические функции $y = 3$ и $y = \lg \sin x$.

23. 1) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

24. 1) а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) а) 0; б) 0.

25. 1) $\operatorname{cosec}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

26. 1) график функции $f(x) = -\sin x$;
2) график функции $f(x) = -\cos x$.

§ 4

27. 1) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

28. 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\sin 5\alpha$.

29. 1) 1; 2) -1.

30. 1) нет, не пересекаются; 2) нет, не пересекаются.

31. 1) график функции $y = \operatorname{tg} x$ с «выколотыми» точками $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;
2) график функции $y = \operatorname{tg} x$ с «выколотыми» точками $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

32. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$.

33. 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$.

34. 1) $-\sqrt{3}$; 2) 1.

35. 1) $\sin 4\alpha$; 2) $\sin 5\alpha$.

36. 1) $\operatorname{tg} 17°$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 80°$.

37. 1) график функции $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ с «выколотыми» точками $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

2) график функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ с «выколотыми» точками $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

38. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

39. 1) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

40. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; 2) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$.

41. 1) 1; 2) 1.

42. 1) 3; 2) -1.

43. 1) $T_0 = \pi$; 2) $T_0 = \frac{\pi}{2}$.

44. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1.

45. 1) 1; 2) 1.

46. 1) -2; 2) $-2\sqrt{3}$.

47. 1) $\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$.

48. 1) а) график функции $y = |\operatorname{tg} x|$;
б) график функции $y = |\operatorname{ctg} x|$;
2) а) график функции $y = \operatorname{tg} x$;
б) график функции $y = \operatorname{ctg} x$;
3) а) график функции $y = \sin x$ с «выколотыми» точками $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;
б) график функции $y = \cos x$ с «выколотыми» точками $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

49. 1) $\cos 2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha$.

50. 1) $4\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)$;

2) $4\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{12}\right)$.

51. 1) график функции $y = \sin x$; 2) график функции $y = \cos x$.

52. 1) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, в точке $x = \frac{3\pi}{2}$ функция не определена;

2) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, в точке $x = \pi$ функция не определена.

53. 1) $\sqrt{3}\sin 20°$; 2) $\sqrt{3}\cos 10°$.

§ 5

54. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$.
55. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
56. 1) $-\frac{5}{14}$; 2) $-\frac{2}{17}$.
57. 1) m; 2) m.
58. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$.
59. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{12}{13}$.
60. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{4}{3}$.
61. 1) $D(f) = [2;\ 3]$; 2) $D(f) = [0;\ 1]$.
62. 1) а) точка $\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$; б) точка $(-1;\ \pi)$;

    2) а) точки $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right)$, где $k \in Z$;

    б) точки $(\pi k;\ 0)$, где $k \in Z$.
63. 1) отрезок прямой $y = x + 1$, где $-1 \le x \le 1$;

    2) отрезок прямой $y = x - 1$, где $-1 \le x \le 1$.
64. 1) $x = 0$, $y = 2$; 2) $x = 0$, $y = 1$.
65. 1) нет, не пересекаются; 2) нет, не пересекаются.

§ 6

66. 1) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.
67. 1) $x = \pm\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.
68. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;

    2) $x = \pi k$, $k \in Z$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.
69. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$;

    2) $x = \pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.
70. 1) $x = \frac{4\pi}{3}$; 2) $\frac{13\pi}{6}$.
71. 1) $x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$, $k \in Z$; 2) $x = \frac{\pi}{2}(4k - 1)$, $k \in Z$.
72. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$, $x = \pi k$, $k \in Z$;

    2) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

73. 1) $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, где $k \in Z$, $k < 0$;

2) $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k$, где $k \in N$.

74. 1) $x = \pi k$, $k \in Z$; 2) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

75. 1) $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 2) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

76. 1) $x = 0$; 2) $x = \dfrac{\pi}{2}$.

77. Ошибка состоит в том, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) произошла потеря корня, так как $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ может быть решением уравнения (1), но не может быть решением уравнения (2).

Проверкой убеждаемся, что $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ является корнем уравнения (1).

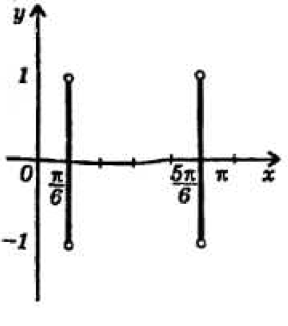
Ответ. $x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \pi k$, $k \in Z$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

78. Верным является второе решение, так как в первом решении при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) произошла потеря корня $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

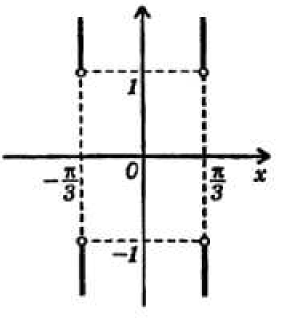
79. 1) а) объединение прямой $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$ и прямых $y = \pm 2$ с «выколотыми» точками $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;

б) объединение прямой $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$ и прямых $y = \pm 1$ с «выколотыми» точками $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2) а)



б)



80. 1) а) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right],\ k\in Z;$

б) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right],\ k\in Z;$

2) а) $\left[-\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right],\ k\in Z\cup\{2\};$

б) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right],\ k\in Z\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}.$

81. 1) $\left(\arcsin 0{,}4+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi-\arcsin 0{,}4+2\pi k\right),\ k\in Z;$

2) $\left(-\arccos\frac{3}{4}+2\pi k;\ 2\pi k\right)\cup\left(2\pi k;\ \arccos\frac{3}{4}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

82. 1) $x\neq\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z;$ 2) $x\neq-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z.$

83. 1) $\left(2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right),\ k\in Z;$

2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

84. 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\ k\in Z;$

2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \pi+2\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\pi+2\pi k;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

§ 7

85. 1) а) $\sin 2x;$ б) $-\sin 2x;$

2) а) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{\cos^2 3x};$ б) $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{3}{\sin^2 3x};$

3) а) $-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}};$ б) $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}};$ 4) а) $\cos 4x;$ б) $-\frac{1}{2}\cos 2x;$

5) а) $\cos x - \sin x$; б) $\cos x + \sin x$;

6) а) $\dfrac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$;

7) а) $-2\sin 2x$; б) $2\cos 2x$;

8) а) $3\cos 3x$; б) $-5\sin 5x$;

9) а) $-4\sin 4x + 6\sin 6x$; б) $-14\sin 14x - 4\sin 4x$.

86. 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$.

87. 1) $x_0 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $x_0 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

88. 1) $x_0 = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; 2) $x_0 = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

89. 1) $y = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \sqrt{3} - 4\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

90. 1) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

91. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $x = \pi k,\ k \in Z,\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

92. 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; 2) $x = \pi k,\ k \in Z$.

93. 1) $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right],\ k \in Z$;

2) $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in Z$.

94. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{3}$; 2) $-\frac{1}{2} - \pi$.

95. 1) $\max\limits_{\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 2 + \frac{\pi}{2}$; $\min\limits_{\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = 0$;

2) $\max\limits_{\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}$; $\min\limits_{\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = -2$.

Глава IV

§ 1

1. Для случая $a = 2$ графики показаны на рис. 1—6.

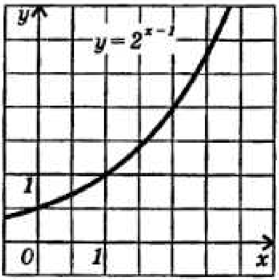


Рис. 1

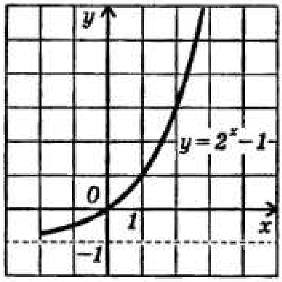


Рис. 2

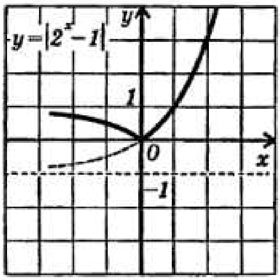


Рис. 3

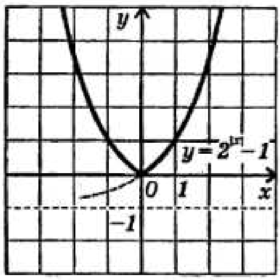


Рис. 4

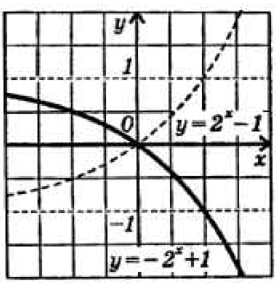


Рис. 5

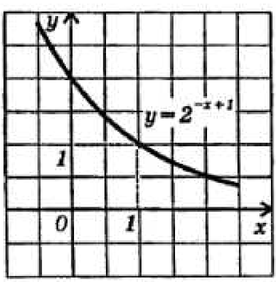


Рис. 6

2. Графики функций $y = \left(\sqrt{5} + 2\right)^x$ и $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)^x$ симметричны относительно оси Oy соответственно графикам функций $y = \left(\sqrt{5} - 2\right)^x$ и $y = \left(\sqrt{2} + 1\right)^x$.

3. Для случая $a = \frac{1}{2}$ графики показаны на рис. 7—14.

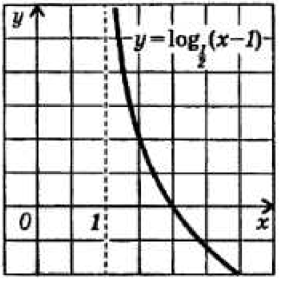


Рис. 7

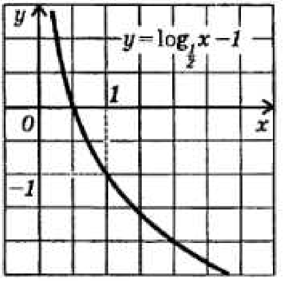


Рис. 8

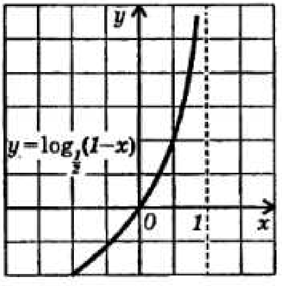


Рис. 9

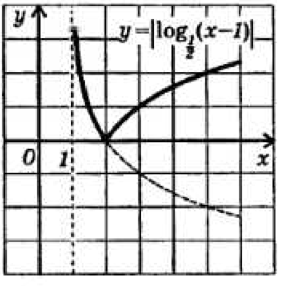


Рис. 10

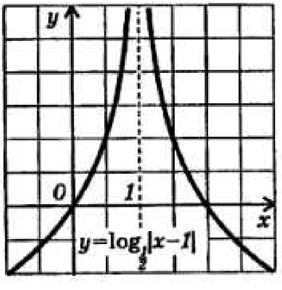


Рис. 11

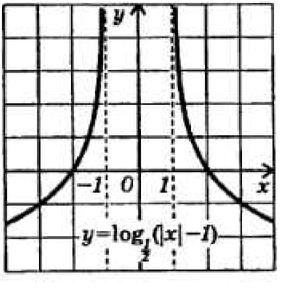


Рис. 12

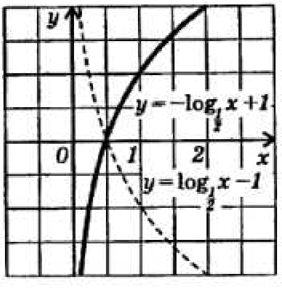


Рис. 13

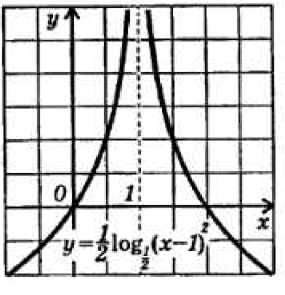


Рис. 14

4. 1) см. рис. 15; 2) см. рис. 16.

5. 1) см. рис. 17 (при $a = \frac{1}{2}$); 2) см. рис. 18 (при $a = 2$).

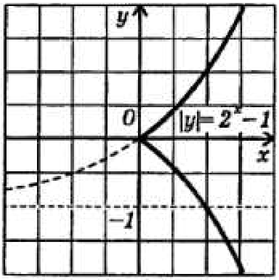


Рис. 15

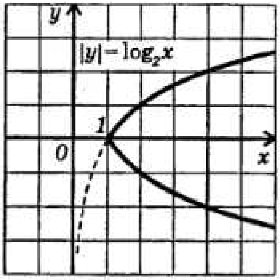


Рис. 16

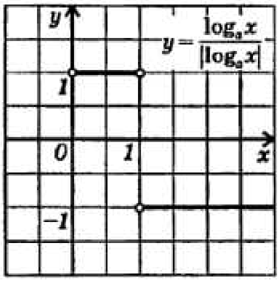


Рис. 17

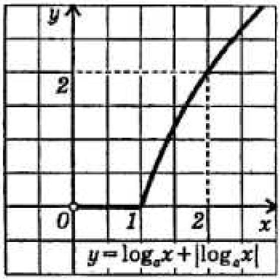


Рис. 18

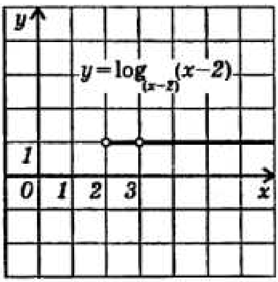


Рис. 19

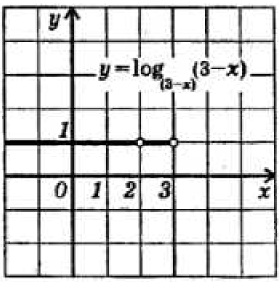


Рис. 20

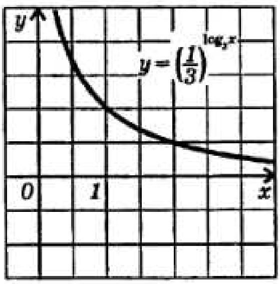


Рис. 21

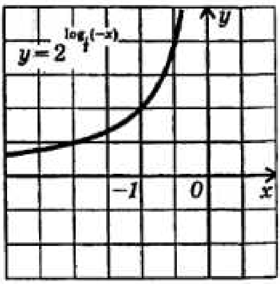


Рис. 22

6. 1) см. рис. 19; 2) см. рис. 20.
7. 1) а) см. рис. 21; б) см. рис. 22; 2) см. рис. 23.
8. 1) см. рис. 24; 2) см. рис. 25;
   3) см. рис. 26;
   4) $y = 5^{\log_7 x} = x^{\log_7 5}$; $\log_7 5 < 1$;
   $y = 7^{\log_5 x} = x^{\log_5 7}$; $\log_5 7 > 1$ (см. рис. 27).

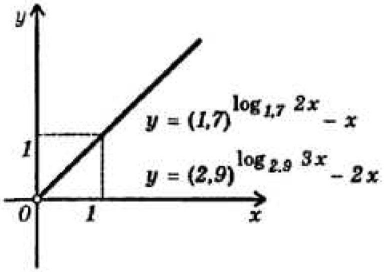


Рис. 23

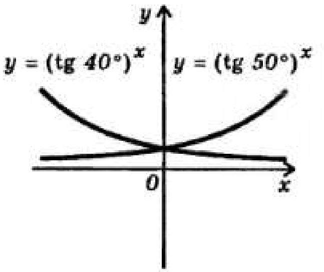


Рис. 24

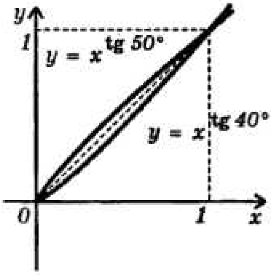


Рис. 25

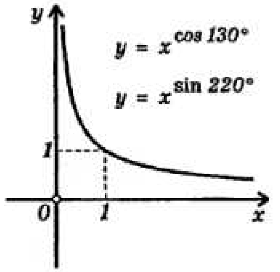


Рис. 26

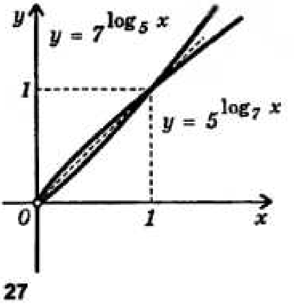


Рис. 27

§ 2

9. 1) а) $(-\infty;\ 0]$; б) $[0;\ +\infty)$; 2) а) $[0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0]$;
3) а) $(2,\ 3)\cup(3,\ 4)$; б) $[-6;\ -4]$;
4) а) $\{-1\}\cup[0;\ +\infty)$; б) $\{1\}$;
5) а) $(1;\ 2]$; б) $[0;\ +\infty)$; 6) а) $\{2\}$; б) $\{0\}$;
7) а) $(-\infty;\ -1)\cup\{0\}\cup[4;\ +\infty)$; б) $\{0\}\cup(2;\ 3]$;
8) а) $\left(0;\ \frac{1}{e^2}\right]\cup\left[e^2;\ +\infty\right)$; б) $\left[\frac{1}{e};\ e\right]$;
9) а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z,\ k\neq 0$;
б) $x=2\pi k,\ k\in Z,\ k\neq 1$.

10. 1) а) $\left[\frac{1}{32};\ 32\right]$; б) $\left[\frac{1}{32};\ 32\right]$;
2) а) $[2;\ \log_2 6]$; б) $[-2;\ -1]$;
3) а) $[0;\ \log_2 3]$; б) $\left[\log_{\frac{1}{2}} 5;\ -1\right]$.

11. 1) а) функция четная; б) функция четная;
2) а) функция четная; б) функция нечетная;
3) а) функция четная; б) функция нечетная;
4) а) функция нечетная; б) функция нечетная;
5) а) функция общего вида; б) функция общего вида.

12. 1) а) a; б) b; 2) а) a; б) b;
3) а) 2; б) 2; 4) а) $\frac{1}{1-a}$; б) $\frac{1}{1-b}$.

13. 1) а) при $x>3$; б) при $x<2$;
2) а) при $x>3$; б) при $x<2$;
3) а) при $x>0,\ x\neq\frac{1}{3},\ x\neq 1$; б) при $x>0;\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq 1$.

§ 3

14. 1) а) $x=2$; б) $x=4$;
2) а) $x_1=5,\ x_2=-5$; б) $x_1=5,\ x_2=-5$;
3) а) $x=\frac{1}{2}\log_3 5$; б) $x=\frac{1}{3}\log_5 2$;
4) а) $x=1$; б) $x=1$;

5) а) $x = 2$; б) $x = 2$;

6) а) $x = 1$; б) $x = -1$;

7) а) $x = 1$; б) $x = 1$;

8) а) $x = \pi k,\ k \in Z$; б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;

9) а) $x = 0$; б) $x = 0$;

10) а) $x = \log_{\frac{2}{3}} 2$; б) $x = \log_{\frac{3}{4}} 3$;

11) а) $x = 0$; б) $x = 0$;

12) а) нет решения; б) нет решения;

13) а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; б) $x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\ x = -2$.

15. 1) а) $x = \frac{1}{2}$; б) $x = \frac{1}{3}$; 2) а) $x = -9$; б) $x = -\frac{25}{2}$;

3) а) $x = \frac{9}{4}$; б) $x = 225$; 4) а) $x = -2$; б) $x = -2$;

5) а) $x = 2$; б) $x = 3$; 6) а) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 1$; б) $x_1 = -2$;

7) а) $x = 1000$; б) $x = 10000$;

8) а) нет решения; б) $x = 1$;

9) а, б) нет решения; 10) а) $x = 4$; б) $x = 1$;

11) а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$;

12) а) $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{2}$; б) $x_1 = 27,\ x_2 = \frac{1}{3}$;

13) а) $x = 8$; б) $x = 16$.

16. 1) в уравнении (1) $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, а в уравнении (2), кроме этого, $x \neq 1$. Это значит, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения сужается, что может привести к потере корня. Действительно, проверкой убеждаемся, что $x = 1$ тоже является корнем уравнения;

2) в уравнении (1) $x > 0$, $x \neq 15$, а в уравнении (2) $x > 15$. При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) область определения сужается, что может привести к потере корня. Нужно решать так: $\lg 2x = \lg|x - 15|$; $|x - 15| = 2x$.

Отсюда: $x = 5$. **Ответ.** $x = 5$.

§ 4

17. 1) а) $\log_7 2 < x < \log_7 15$; б) $\log_{0,7} 11 < x < \log_{0,7} 3$;

2) а) $\log_2 3 < x < \log_2 5$; б) $x < \log_{\frac{1}{2}} 5,\ \ x > \log_{\frac{1}{2}} 3$;

3) а) $x = 0$; б) $x = 0$; 4) а) $x < 0$; б) $x < 0$;

5) а) $\pi + 2\pi k < x \le \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$;

б) $\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k < x \le 2\pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

18. 1) а) $x > 1$; б) $x > 1$; 2) а) $\dfrac{1}{32} < x < \dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{1}{2} < x < 8$

3) а) $\dfrac{1}{9} < x < \dfrac{1}{3}$; б) $0 < x < 3,\ \ x > 9$;

4) а) $\dfrac{1}{2} < x < 4$; б) $9 < x < 10$;

5) а) $x < 0,\ \ x > 4$; б) $0 < x < 6,\ \ x \ne 3$;

6) а) $3 < x < 27$; б) $0 < x < \dfrac{1}{16},\ \ x > \dfrac{1}{2}$;

7) а) $1 < x < 2$; б) $0 < x < 1,\ \ x > 3$.

§ 5

19. 1) а) $\left(3x^2 - 8x\right)e^{x^3 - 4x^2 + 5}$; б) $\left(3x^2 + 4x\right)e^{x^3 + 2x^2 - 3}$;

2) а) $-\sin x \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos x} \cdot \ln\dfrac{1}{2}$; б) $\cos x \cdot 3^{\sin x} \cdot \ln 3$;

3) а) $2x e^x + x^2 e^x$; б) $e^{-x} - x e^{-x}$;

4) а) $\sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2} - 1} + \left(\sqrt{2}\right)^x \cdot \ln\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3} - 1} + \left(\sqrt{3}\right)^x \cdot \ln\sqrt{3}$;

5) а) $\dfrac{1}{x\ln 5} + \dfrac{1}{x\ln\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{1}{x\ln 2} + \dfrac{1}{x\ln\frac{1}{5}}$;

6) а) $\dfrac{1}{2x\ln 5}$; б) $\dfrac{1}{3x\ln\frac{1}{5}}$;

7) а) $\dfrac{3\ln^2 x}{x}$; б) $\dfrac{5\ln^4 x}{x}$;

8) а) $\operatorname{ctg} x$; б) $-\operatorname{tg} x$.

20. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.
21. 1) $\varphi = 135°$; 2) $\varphi = 120°$.
22. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{5}$; 2) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{8}{15}$.
23. 1) $[0;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 1]$.
24. 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $[1;\ +\infty)$.
25. 1) а) $x = -1$; б) $x = 1$; 2) а) $x = e^3$; б) $x = \frac{1}{e^2}$.
26. 1) а) убывает на промежутке $[0;\ +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0]$;
   б) функция возрастает на всей области определения;
   2) а) функция возрастает на всей области определения;
   б) функция убывает на всей области определения.
27. 1) $x = 1$ — точка максимума, $y_{\max} = \frac{10}{3}$;
   2) $x = 2$ — точка минимума, $y_{\min} = \frac{1}{5^4}$.
28. 1) $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = \ln 11$; $\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = 0$;
   2) $\max\limits_{[-1;\,0]} f(x) = \ln 6$; $\min\limits_{[-1;\,0]} f(x) = \ln 2$.

Глава V

1. 1) а) $F(x) = \frac{3}{5}x^5 + C$; б) $F(x) = x^4 + C$;
   2) а) $F(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$; б) $F(x) = -\frac{1}{3}x^{-3} + C$;
   3) а) $F(x) = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$; б) $F(x) = -\frac{1}{12}(2-3x)^4 + C$;
   4) а) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$;
   б) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x + C$;
   5) а) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$;
   б) $F(x) = 2\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x + C$;
   6) а) $F(x) = \operatorname{tg} x - x + C$; б) $F(x) = -\operatorname{ctg} x - x + C$;

Указание: $f(x) = \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$;

7) а) $F(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$; б) $F(x) = x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$;

8) а) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$; б) $F(x) = -\frac{1}{3}e^{1-3x} + C$;

9) а) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$; б) $F(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{2^x}{\ln 2} + C$;

10) а) $F(x) = -\frac{1}{2}\ln(2x-1) + C$; б) $F(x) = \frac{1}{3}\ln(1-3x) + C$.

2. 1) а) $F(x) = x^2 + x + 1$; б) $F(x) = x^3 - x + 2$;

2) а) $F(x) = \frac{1}{3}\ln x + 1$; б) $F(x) = \frac{1}{2}\ln x + 1$.

3. 1) а) $y = x^3 - 2x^2 + 5x + C$; б) $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$;

2) а) $y = \sin x + 1$; б) $y = \cos x + 2$;

3) а) $y = \frac{1}{2}e^{2x} + 1$; б) $y = \frac{1}{3}e^{3x} + 1$.

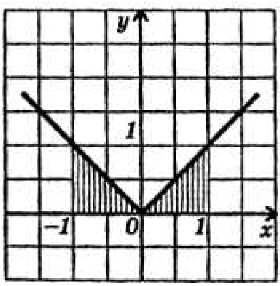
4. 1) 10; 2) 5.

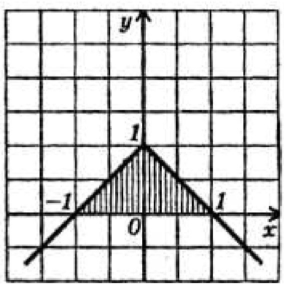
5. 1) 4π; 2) π.

6. 1) а) 21; б) 14; 2) а) 1; б) 1; 3) а) 0,8; б) 1,2;

4) а) $\frac{\pi}{4}$; б) π; 5) а) 0; б) 0.

Указание к пунктам (2 а) и (2 б): вычислить площадь фигур, изображенных на рисунках.





7. 1) $x = \pm\sqrt{2}$; 2) $x = \pm 2$.

8. 1) $\frac{1}{2} \le x \le 4$; 2) $0 \le x \le 1$.

9. 1) а) $a < b$; б) $a < b$; 2) а) $a = b$; б) $a = b$;

3) а) $a = b$; б) $a = b$;

4) а) $a > b$; б) $a < b$.

Указание: $2^{\log_5 x} = x^{\log_5 2}$;

$\log_5 2 < 1$; $5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$; $\log_2 5 > 1$.

Необходимо рассмотреть площади фигур, изображенных на рисунке 1.

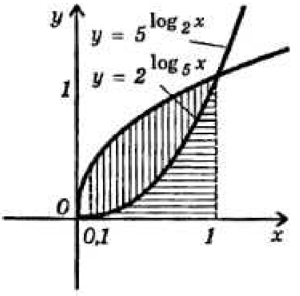


Рис. 1

10. 1) а) $\frac{8}{3}$; б) 9. 2) а) $8\frac{2}{3}$; б) $4\frac{2}{3}$.

Указание: необходимо рассмотреть прямоугольник со сторонами, длины которых равны 1 и 4, и криволинейную трапецию, ограниченную параболой $y = x^2$ и прямыми $y = 0$ и $x = 1$.

Тогда $S = 2\cdot\left(4 + \frac{1}{3}\right) = 8\frac{2}{3}$.

3) а) $\ln 2$; б) $\ln 3$. 4) а) $\frac{14}{3}$; б) $\frac{52}{3}$.

Указание: нужно рассмотреть площадь равновеликой фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$ и $x = 4$.

5) а) 1; б) 1.

Для нахождения площадей указанных фигур нужно вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ и $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

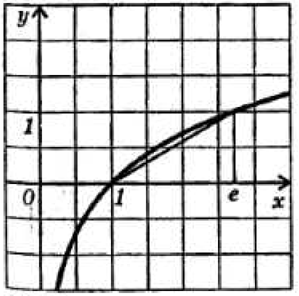


Рис. 2

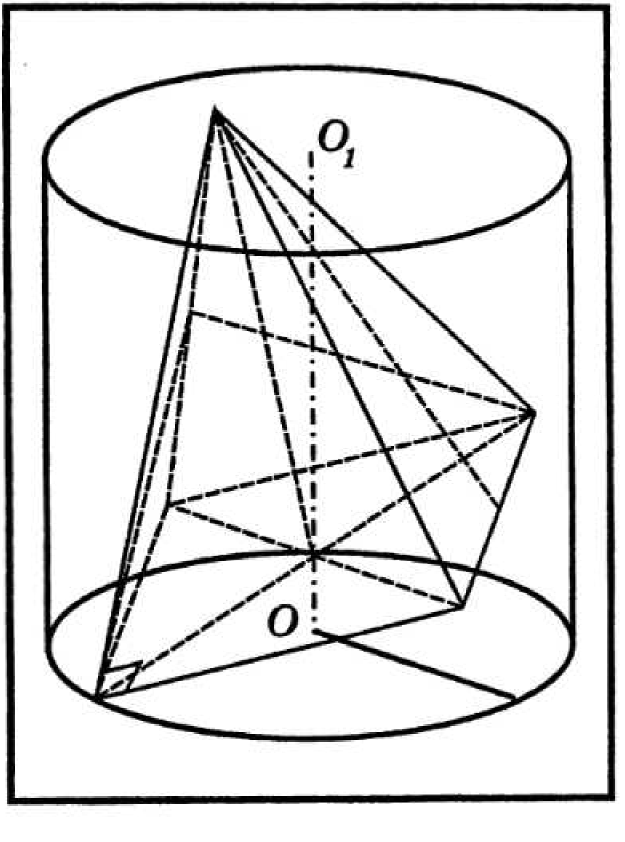
11. 1) $\int\limits_1^e \ln x\,dx < e - 1$;

2) $\int\limits_1^e \ln x\,dx < \frac{e-1}{2}$.

Решение видно из рисунка 2.

Часть III

ГЕОМЕТРИЯ



Урок 1

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1. Совместно с классом повторяются аксиомы стереометрии и следствия из них.

Задача. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки E, D и F.

1) Какие аксиомы стереометрии использовались для обоснования построения сечения?

2) Как расположены прямые MF и DN? Почему?

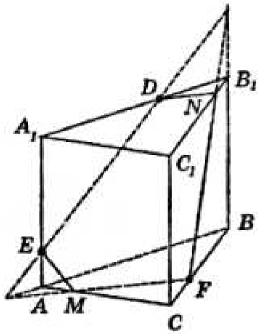


Рис. 1

2. Взаимное расположение прямых в пространстве.

1)

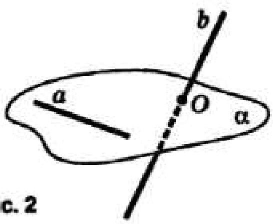


Рис. 2

2) Напоминается признак скрещивающихся прямых.

$a \subset \alpha$

$b \times \alpha = O$

$O \notin a$

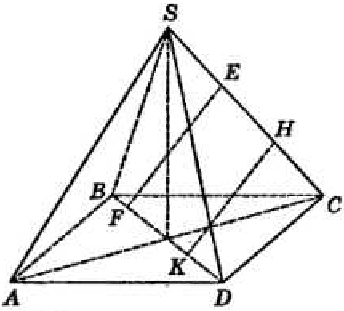


Рис. 3

Задача. Каково взаимное положение прямых:

1) BD и SC;

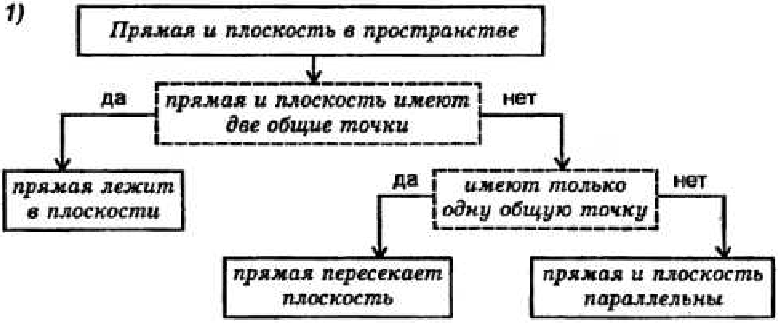
2) EF и HK? Почему?

3) Напоминается понятие угла между скрещивающимися прямыми.

4) Вспоминается лемма о двух параллельных прямых, из которых одна пересекает плоскость. Эта лемма использовалась для доказательства свойства транзитивности параллельности прямых в пространстве.

3. Взаимное расположение прямой и плоскости.

1)



2) Рассматривается признак параллельности прямой и плоскости (доказывает ученик).

Задача для ученика. В правильной четырехугольной пирамиде стороны основания равны a, а апофема пирамиды равна b. Через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найдите площадь сечения.

Ответ. $\frac{3ab}{8}$.

Обращается внимание на следующие утверждения:

а) если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой;

б) пользуясь этим фактом, можно доказать, что если прямая параллельна плоскости, то в плоскости всегда найдется прямая, параллельная данной прямой.

Задачи

1. $\alpha \times \beta = l$; $m \parallel \alpha$; $m \parallel \beta$. Докажите, что $m \parallel l$.

2. $DABC$ — правильная треугольная пирамида. Сторона основания равна a, а боковые ребра — b. M — середина BC.

   а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M параллельно AC и BD.

   б) Найдите угол между скрещивающимися прямыми AC и BD. **Ответ.** 90°.

   в) Найдите площадь построенного сечения. **Ответ.** $\frac{ab}{4}$.

4. Взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Ответ ученика

Определение и признак параллельности двух плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Задача для ученика. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной a и острым углом α. Через сторону основания и середину бокового ребра проведена плоскость под углом φ к плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда и его объем.

Ответ. $8a^2 \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi$; $2a^3 \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

Задачи

1. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. P — середина ребра AS. Сторона основания равна a, а высота h. Через точку P проведена плоскость, которая параллельна плоскости BSD. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

Ответ. $\frac{a^2h}{48}$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены плоскости через вершины A_1, C_1 и D и через середины ребер D_1A_1, D_1C_1 и D_1D. Ребро куба равно a. Докажите, что многогранник, отсеченный этими плоскостями от куба, есть усеченная пирамида. Какова площадь ее боковой поверхности?

Ответ. $\frac{9a^2}{8}$.

Урок 2

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (*часть I*)

I. Вступительное слово учителя

Обратить внимание на нахождение расстояния: а) между плоскостью и параллельной ей прямой, б) между параллельными плоскостями, в) между скрещивающимися прямыми.

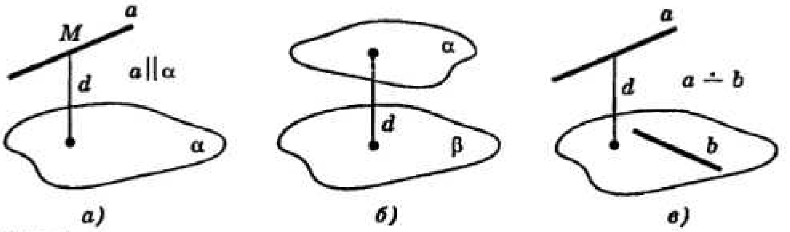


Рис. 4

II. Ответы учеников

1. Какие прямые называются перпендикулярными к плоскости?

Теоремы: а) $\left.\begin{matrix} a \parallel b \\ a \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$; б) $\left.\begin{matrix} a \parallel \alpha \\ b \perp \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \perp \alpha$.

Задача для отвечающего. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC; $AC = BC = a$. Угол $\angle ACB = 120°$. Грани, проходящие через стороны AB и BC, перпендикулярны к плоскости основания, а третья боковая грань наклонена к нему под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ. $\frac{a^2}{4}\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$.

2. Теорема о трех перпендикулярах.

Задача для отвечающего. Дано: $BD \perp ABC$, $\angle C = 90°$. Постройте перпендикуляр, опущенный из точки D на прямую AC. Дайте обоснование.

Во время подготовки учеников к ответу рассмотреть признак перпендикулярности прямой к плоскости. Ученик формулирует теорему. На кодоскопе (или на плакате) показывается рисунок и напоминается кратко идея доказательства.

После обсуждения ответов учеников напоминается, что через данную точку пространства можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данной прямой, и единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.

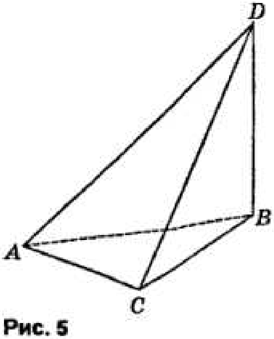


Рис. 5

III. Задачи

1. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ расстояние от вершины A до плоскости BDC равно d. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°.

1) Найдите высоту пирамиды, опущенную из вершины D.

Ответ. $\dfrac{2d}{3}$.

2) Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку O ($DO \perp ABC$), которая параллельна плоскости грани CDB. Чему равно расстояние между этими плоскостями?

Ответ. $\dfrac{d}{3}$.

2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояния от ребра AA_1 до ребра BB_1 и до ребра CC_1 равны 10, а расстояние между ребрами CC_1 и BB_1 равно 12. Найдите расстояние от ребра AA_1 до грани CC_1B_1B. **Ответ.** 8.

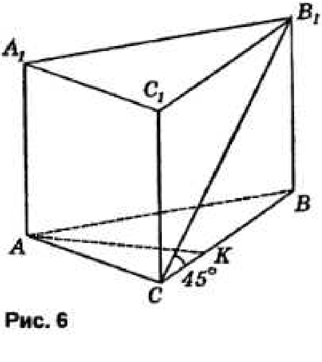


Рис. 6

3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ расстояние между прямыми AA_1 и CB_1 равно d. CB_1 составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы (рис. 6).

В этой задаче необходимо объяснить, что $AK = d$ и что $\angle B_1CB = 45°$ (напомнить определение угла между наклонной и плоскостью).

Ответ. $\dfrac{2d^3}{3}$.

4. В правильной треугольной пирамиде угол между высотой пирамиды и боковой гранью равен α. Найдите объем пирамиды, если сторона основания равна a. Обратите внимание на обоснование. **Ответ.** $\dfrac{a^3 \operatorname{ctg}\alpha}{12}$.

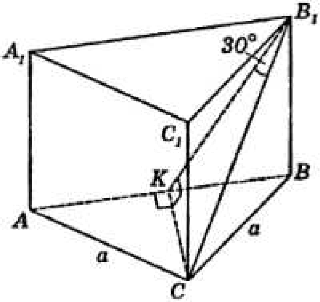


Рис. 7

5. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого $AC = BC = a$. Диагональ боковой грани B_1C составляет с гранью AA_1B_1B угол в 30°. Найдите объем призмы. Обратите внимание на обоснование (рис. 7).

Решение. $CK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $B_1C = a\sqrt{2}$.

$$H = \sqrt{2a^2 - a^2} = a; \quad S_{ABC} = \frac{a^2}{2}; \quad V = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}.$$

Ответ. $\dfrac{a^3}{2}$.

Примечание. **Вопросы к классу**

1) Что из себя представляет множество точек пространства, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой?

Пример. Все грани многогранника — равносторонние треугольники (рис. 8) со стороной a. Найдите расстояние между вершинами D и E.

Ответ. $\sqrt{2}a$.

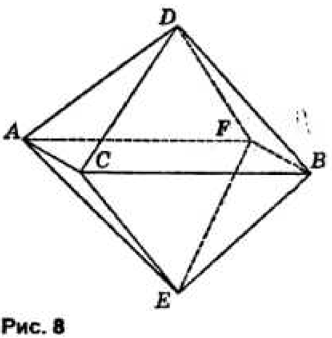


Рис. 8

2) Куда может проецироваться точка, равноудаленная от всех сторон треугольника (четырехугольника)? При каких условиях такая точка существует в четырехугольнике?

Пример. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, катеты которого 3 и 4. Вершина M (проецируется во внутреннюю область основания) удалена от всех сторон основания на $\sqrt{10}$. Найдите высоту пирамиды. **Ответ.** 3.

Урок 3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ (*часть II*)

I. Вступительное слово учителя

1. Понятие о двугранных углах.
2. Линейный угол двугранного угла.
3. Понятие об угле между пересекающимися плоскостями.

II. Ответ ученика

Определение и признак перпендикулярности двух плоскостей.

Задача для отвечающего: В тетраэдре $DABC$ грани ABC и CDB — правильные треугольники, стороны которых равны a. Плоскости CDB и ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ. $\frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$.

III. Задачи

1. Постройте линейный угол двугранного угла $SADB$ так, чтобы одна из его сторон проходила через вершину S.

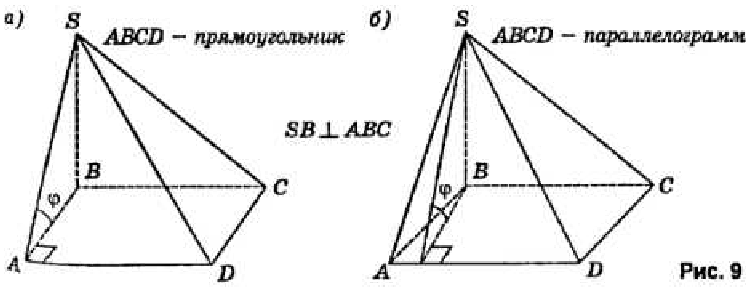


Рис. 9

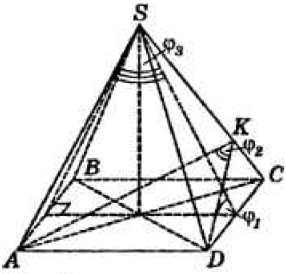


Рис. 10

2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ постройте линейный угол двугранного угла:

а) с ребром CD (φ_1);

б) с ребром SC (φ_2);

в) между противоположными боковыми гранями (φ_3).

3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$. SO — высота пирамиды. Через AC проведена плоскость, параллельная SD, которая пересекает ребро SB в точке M. Постройте линейный угол двугранного угла $MACB$.

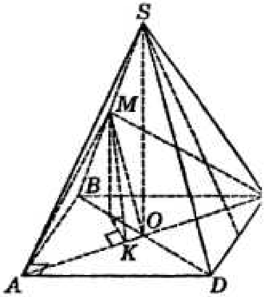


Рис. 11

IV. Комментарий учителя

1) 2)

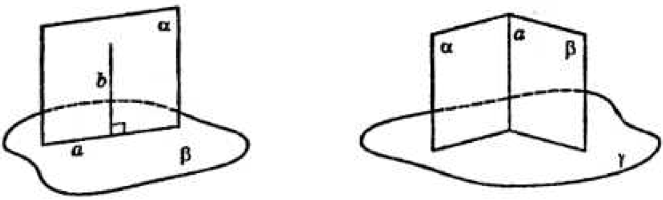


Рис. 12

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \perp \beta \\ \alpha \times \beta = a \\ b \subset \alpha;\ b \perp a\end{array}\right\} \Rightarrow b \perp \beta; \quad \left.\begin{array}{l}\alpha \times \beta = a \\ \alpha \perp \gamma \\ \beta \perp \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \gamma.$$

V. Задачи

1. Прямая пересекает плоскость. Как провести через прямую плоскость, перпендикулярную данной плоскос Сколько решений имеет задача?

2. Прямая параллельна плоскости. Как через эту прямую провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости? Сколько решений имеет эта задача?

3. В основании пирамиды $DABC$ лежит треугольник ABC. $AB = 15$; $AC = 13$; $BC = 14$. Грани, проходящие через стороны AB и AC, перпендикулярны к плоскости основания, а ребро AD составляет с гранью CDB угол в 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ. 336.

Дополнительные вопросы:

а) назовите не менее четырех пар взаимно перпендикулярных плоскостей;

б) чему равен двугранный угол $DBCA$?

4. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Грань $ADC \perp ABC$, а остальные грани наклонены к основанию под равными углами.

1) Докажите, что вершина D проецируется на биссектрису угла ABC.

2) Определите вид боковой грани DCB.

3) Найдите объем пирамиды, если $BC = a$; $\angle ABC = 60°$, а боковые грани ADB и CDB наклонены к основанию под углом 45°.

Ответ. $\dfrac{a^3}{6}$.

Некоторые итоги

Закончив материалы о параллельности и перпендикулярности в пространстве, необходимо указать на их связь. В некоторых случаях параллельность одних элементов влечет за собой перпендикулярность других; обратно, из перпендикулярности прямых можно сделать заключение о параллельности других. Полезно, например, знать, что два перпендикуляра к плоскости параллельны; две плоскости, перпендикулярные к одной прямой, параллельны; прямая и плоскость, перпендикулярные к одной и той же прямой (плоскости), параллельны.

Урок 4

ПРИЗМА (*часть I*)

I. Вступительное слово учителя

1. Понятие многогранника.

2. Призма. Классификация призм.

3. Площадь боковой поверхности призмы и методы вычисления этой площади.

4. Несколько слов о понятии объема. Объем прямоугольных параллелепипедов.

Ответы учеников

1. Параллелепипед и его свойства. Прямоугольный параллелепипед и свойства его диагоналей.

Задача для отвечающего. В правильной треугольной призме радиус описанного шара, проведенный в одну из вершин основания, составляет с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объем призмы, если радиус шара равен R.

Ответ. $\dfrac{9R^3\sqrt{3}}{16}$.

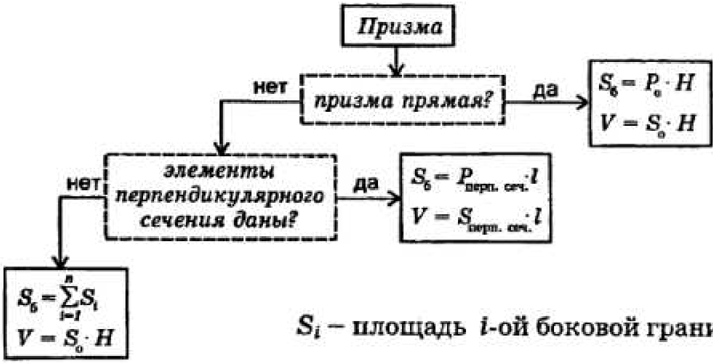
2. Объем прямой призмы.

Задача для отвечающего. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ вершина A_1 равноудалена от всех вершин нижнего основания, которое является правильным треугольником со стороной, равной 3. Площадь грани CC_1B_1B равна 12. Найдите объем призмы.

Ответ. $\dfrac{9\sqrt{39}}{4}$.

Отметить, что объем наклонной призмы можно вычислить двумя способами: $V = S_{осн.} \cdot H = S_{перп.\ сеч.} \cdot l$, где l — боковое ребро (теория будет повторена на следующем уроке).

После этого напоминается алгоритм для выбора метода нахождения площади боковой поверхности и объема.



S_i – площадь i-ой боковой грани.

II. Устные упражнения

1. Всякая ли четырехугольная призма является параллелепипедом?

2. Могут ли две грани наклонного параллелепипеда быть перпендикулярны плоскости основания.

3. Определите вид боковых граней такого параллелепипеда, если в основании лежит прямоугольник. (См. задачу 2.)

4. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, — прямоугольники. Является ли это свойство необходимым и достаточным признаком прямоугольного параллелепипеда?

5. В наклонной треугольной призме две смежные грани взаимно перпендикулярны. Их площади равны 30 и 40, а общее ребро — 10. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

Ответ. $S_{бок} = 120$; $V = 60$.

III. Задачи

1. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб со стороной a и острым углом 60°. Диагональ параллелепипеда B_1D составляет с боковой гранью DD_1C_1C угол 45°. Найдите площадь боковой поверхности и объем параллелепипеда.

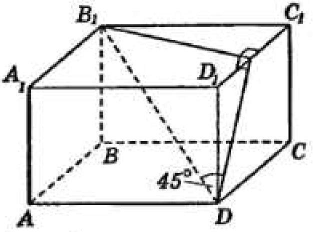


Рис. 13

Решение: $B_1K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $B_1D = \frac{a\sqrt{6}}{2}$;

$$H = \sqrt{\frac{6a^2}{4} - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$S_{бок} = 4a\frac{a\sqrt{2}}{2} = 2a^2\sqrt{2};$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$$

(Ученики должны дать обоснование к этой задаче.)

2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основание — равносторонний треугольник со стороной a. Боковое ребро $AA_1 = b$ и составляет со сторонами AB и AC углы по 60°. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

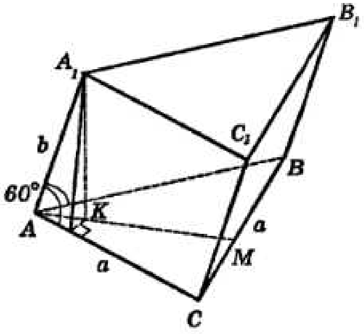


Рис. 14

Решение: Необходимо обосновать, что CC_1B_1B — прямоугольник.

$S_{CC_1B_1B} = ab$;

$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} =$
$= ab\sin 60°$;

$S_{бок} = ab + 2ab\sin 60° = ab\left(\sqrt{3}+1\right)$; из ΔAA_1E $AE = \frac{b}{2}$;

из ΔAKE $AK = \frac{AE}{\cos 30°} = \frac{b}{\sqrt{3}}$;

из ΔAA_1K $H = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{3}} = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2b\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ. $S_{бок} = ab\left(\sqrt{3}+1\right)$; $V = \frac{a^2b\sqrt{2}}{4}$.

(Ученики должны дать обоснование к этой задаче.)

Дополнительный вопрос:

Чему равен двугранный угол C_1CBA?

Ответ. $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. *Резерв.* В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, основания которой 4 и 16. Найдите объем призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

Ответ. 640.

Урок 5

ПРИЗМА (*часть II*)

I. Вступительное слово учителя

Напомнить идею вычисления объема тел с помощью определенного интеграла

Ответ ученика

Объем наклонной призмы

$$V = S_0H = S_{\text{перп. сеч.}} \cdot l.$$

Задача для отвечающего. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна H. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Угол между равными боковыми гранями AA_1C_1C и AA_1B_1B равен φ, а расстояние от ребра AA_1 до противоположной боковой грани равно m. Найдите объем призмы.

Ответ. $\dfrac{m^2H\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha}$.

Задачи для письменного опроса

1. В наклонном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание — квадрат со стороной a. Боковое ребро $AA_1 = b$ и составляет с плоскостью основания угол α:

$$\angle AA_1D = \angle A_1AB = 90°.$$

Найдите площадь диагональных сечений.

Ответ. $ab\sqrt{2}\sin\alpha$; ab.

2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 30 и 50, угол между ними равен 120°. Боковое ребро равно 10. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы.

Ответ. 150; $\dfrac{75\sqrt{3}}{2}$.

II. Небольшие задачи

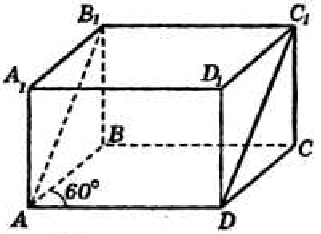


Рис. 15

1. Задача дается по чертежу (рис. 15). Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ. $\dfrac{3a^3}{4}$.

2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которое делит пополам его объем и проходит через: 1) ребро CD; 2) через диагонали грани A_1B.

3. Основания прямой и наклонной призм лежат в параллельных плоскостях. Сравните объемы этих призм, если их основания имеют одинаковые площади.

4. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ площадь грани CC_1B_1B равна Q, а расстояние от нее ребра AA_1 равно d. Найдите объем призмы.

Ответ. $\dfrac{1}{2}dQ$.

5. Площадь основания наклонной призмы равна Q, высота — H, а боковые ребра — a. Найдите площадь перпендикулярного сечения.

Ответ. $\dfrac{QH}{a}$.

III. Задачи

1. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат со стороной 1. $\angle A_1AD = \angle A_1AB < 90°$. Двугранный угол при ребре AA_1 равен 120°. Боковое ребро также равно 1. Найдите объем параллелепипеда и площадь боковой поверхности.

Решение: BKD — перпендикулярное сечение призмы $ABDA_1B_1D_1$.

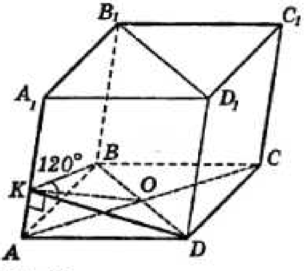


Рис. 16

1) $BD=\sqrt{2}$; $OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$KO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$;

$S_{BKO}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

$V_{ABDA_1B_1D_1}=\dfrac{1}{2}V=$

$=S_{BKO}\,AA_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$; $V=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2) $KD=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $S_{AA_1D_1D}=1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $S_{бок}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине. Высота призмы равна 10. Вокруг призмы описан шар, площадь поверхности которого 676π. Найдите объем и площадь боковой поверхности призмы.

Ответ. $360\sqrt{3}$; $120\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Урок 6

ПИРАМИДА (*часть I*)

I. Ответы учеников

1. Понятие пирамиды. Правильная пирамида и ее свойства. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды.

Задача для отвечающего: В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник $ABCD$; $AB=2a$; $\angle BAC=30°$. Диагональное сечение ASC составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем и площадь боковой поверхности, если грани ABS и CBS перпендикулярны к плоскости основания.

Ответ. $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$; $\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)$.

2. Объем пирамиды.

Задача для отвечающих. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Расстояние от центра основания до боковой грани равно m. Найдите объем и площадь боковой поверхности.

Ответ. $\dfrac{4m^3}{3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}$; $\dfrac{4m^2}{\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi}$.

Письменный опрос учащихся

1) В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом 60°. Грани, проходящие через стороны этого угла, перпендикулярны к плоскости основания, а другие боковые грани наклонены к ней под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ. $\dfrac{a^3}{4}$.

2) В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

Ответ. $\arccos\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}\right)$.

Комментарий учителя:

1. Площадь боковой поверхности пирамиды с равнонаклоненными боковыми гранями: $S_{бок}=\dfrac{S_0}{\cos\varphi}$, где φ — угол наклона боковых граней к плоскости основания, S_0 — площадь основания.

2. Площадь боковой поверхности и объем усеченной пирамиды.

II. Устные упражнения

1. Каким свойством обладает пирамида, все боковые грани которой составляют с плоскостью основания равные углы?

2. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Боковые грани наклонены к основанию под углом φ. Найти боковую поверхность пирамиды.

Ответ. $\dfrac{a^2 \sin\alpha}{\cos\varphi}$.

3. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной 1. Две смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания. Их общее ребро равно 1. Найдите площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

Ответ. $S = 1 + \sqrt{2}$; $V = \dfrac{1}{3}$.

4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. Одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и тоже является правильным треугольником. Найдите угол между плоскостями наклонных граней и плоскостью основания.

Ответ. $\operatorname{arctg} 2$.

5. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые, боковые ребра равны 1, 2 и 3. Найдите объем пирамиды.

Ответ. 1.

III. Задачи

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a. Плоский угол при вершине равен α. Найдите объем пирамиды (рис. 17).

Решение: $OK = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$; $DK = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;

$$H = \sqrt{\frac{a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1};$$

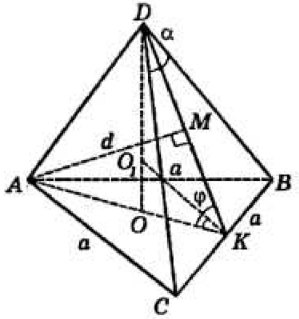


Рис. 17

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{a^3\sqrt{3\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}{24}.$$

Дополнительные вопросы:

1) Чему равен двугранный угол $DBCA$?

Ответ. $\varphi = \arccos\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

2) Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

$$R_{\text{Ш}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2},\ \text{где } \varphi = \arccos\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

3) Найдите расстояние от вершины A до грани BDC.

$$AM\cdot DK = DO\cdot AK;\quad d = AM = \frac{DO\cdot AK}{DK};$$

$$d = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{3}-1}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{3\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

4) В каких пределах может изменяться угол α?

Ответ. $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Обратить внимание на обоснование.

2. Каждое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно a. Плоскость, параллельная плоскости основания данной пирамиды, отсекает от нее усеченную пирамиду. Найдите объем усеченной пирамиды, если сторона сечения равна b.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{6}\left(a^3 - b^3\right)$.

Урок 7

ПИРАМИДА (*часть II*)

I. Письменный опрос учащихся

1. Основанием пирамиды служит треугольник, стороны которого 5,5 и 8. Грани, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны к плоскости основания, а третья грань наклонена к основанию под углом 60°. Найдите объем и площадь боковой поверхности.

Ответ. $V = 12\sqrt{3}$; $S_{бок} = 24 + 15\sqrt{3}$.

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус, образующая которого равна L и составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите объем и площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ. $V = \frac{4}{3}L^3 \sin\varphi \cos^2\varphi$; $S_{бок} = 4L^2 \cos\varphi$.

II. Устные упражнения

1. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Вокруг пирамиды описан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ. 40.

2. Стороны основания треугольной пирамиды 5, 6 и 7. В эту пирамиду вписан конус, образующая которого равна 10. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Ответ. 90.

3. Площадь боковой поверхности пирамиды равна Q. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Чему равна площадь боковой поверхности образовавшейся усеченной пирамиды?

Ответ. $\frac{3}{4}Q$.

4. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды составляют с плоскостью основания угол 45°. Высота пирамиды H. Чему равен объем описанного шара?

Ответ. $\frac{4}{3}\pi H^3$.

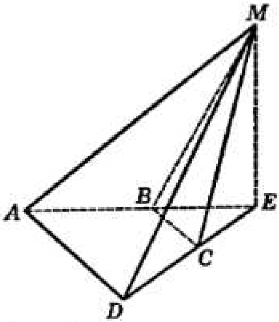


Рис. 18

5. Объем треугольной пирамиды $DABC$ равен V. Через медиану основания BM параллельно боковому ребру CD проведена плоскость. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

Ответ. $\frac{V}{4}$.

6. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?

Ответ. Существует. (См. рис. 18.)

III. Задачи

1. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого равны a. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$. Найдите радиус вписанного в эту пирамиду шара.

Решение. Напомнить, что если шар вписан в многогранник, то $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем многогранника, S — площадь его поверхности. (См. рис. 19, *а*.)

$$OB = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \ H = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12};$$

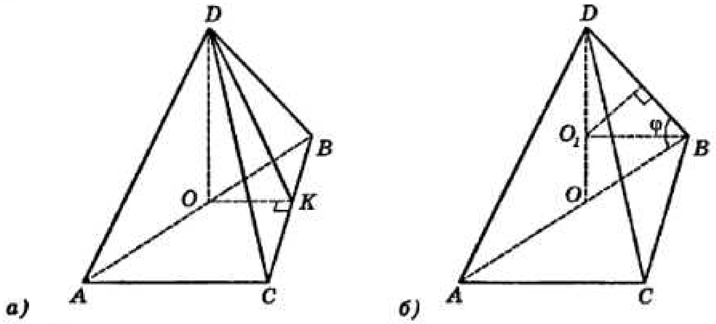


Рис. 19

Из ΔDOK $DK = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = a;$

$$S_{бок} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2\sqrt{6}}{4} + a^2;$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{6}}{4} + a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{6} + 6\right);$$

$$R_{ш} = \frac{a^3\sqrt{3} \cdot 4}{4a^2\left(\sqrt{6} + 6\right)} = \frac{a}{\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + 1\right)}.$$

Ответ. $\frac{a}{\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + 1\right)}$.

Дополнительный вопрос

Чему равен радиус описанного шара? См. рис. 19, *б*.

$R = O_1D = OB$. Так как $\varphi > 45°$, то центр описанного шара O_1 лежит выше плоскости основания.

$$R_{ш} = \frac{OB}{\sin(180° - 2\varphi)} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\varphi}.$$

Учитывая, что $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$, находим $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, тогда $R_{ш} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Ответ. $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

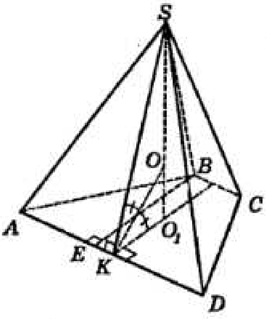


Рис. 20

2. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, основания которой 20 и 5. Площадь боковой поверхности равна 325. Боковые грани пирамиды равнонаклонены к плоскости основания. Найдите расстояние от центра вписанного в пирамиду шара до ее вершины.

Решение: O_1 — центр вписанной окружности (см. рис. 20);

KO — биссектриса $\angle SKO_1$;

O — центр вписанного шара;

так как $AB + CD = AD + BC$, то $P = 50$.

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot SK$; $SK = \frac{650}{50} = 13$;

$BE = \sqrt{\frac{625}{4} - \frac{225}{4}} = 10$; $O_1K = r = 5$; $SO_1 = 12$.

$\frac{SO}{12 - SO} = \frac{13}{5}$ (свойство биссектрисы угла треугольника). Отсюда $SO = 8\frac{2}{3}$.

Ответ. $8\frac{2}{3}$.

Урок 8
ЦИЛИНДР И КОНУС

I. Вступительное слово учителя

1. Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра. Сечения в цилиндре.
2. Понятие конуса. Сечение в конусе.

Ответы учеников

1. Объем цилиндра.

Задача для отвечающего: Ромб со стороной, равной a, и углом 60° вращается около прямой, проведенной через вершину острого угла ромба перпендикулярно его стороне. Найдите объем тела вращения.

Ответ. $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

2. Площадь поверхности конуса. Площадь поверхности усеченного конуса (без доказательства).

Задача для отвечающего. В основании призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 8. В призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндра и призмы.

Ответ. $\pi : 5$.

3. Объем конуса. Объем усеченного конуса (без доказательства).

Задача для отвечающего. В правильной треугольной пирамиде расстояние от середины высоты до боковой грани равно 2. Найдите объем вписанного в эту пирамиду конуса, если боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°.

Ответ. $\frac{512\pi}{9}$.

Задачи для письменного опроса

1. В шар вписана правильная треугольная призма. Радиус шара, проведенный в вершину основания, составляет угол α с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности и объем призмы, если радиус шара равен R.

Ответ. $S = 3R^2\sqrt{3}\sin 2\alpha$; $V = \frac{3R^3\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

2. Угол развертки боковой поверхности конуса равен 120°, а образующая конуса равна 15. Найдите объем конуса.

Ответ. $\frac{250\pi\sqrt{2}}{3}$.

II. Небольшие задачи

1. Условие дается к рисунку (рис. 21).

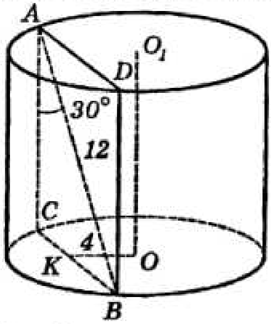


Рис. 21

Отрезок AB составляет с осью цилиндра угол 30°. Расстояние между AB и осью цилиндра равно 4. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра, если $AB = 12$.

Ответ. $V = 150\pi\sqrt{3}$; $S = 60\pi\sqrt{3}$.

2. Из круга радиуса 3 вырезан сектор с углом 240°. Найдите объем и площадь боковой поверхности конуса, разверткой которой является данный сектор.

Ответ. $V = \dfrac{4\pi\sqrt{5}}{3}$; $S = 6\pi$.

3. Докажите, что из всех сечений конуса плоскостью, проходящей через вершину, наибольший периметр имеет осевое сечение. А какие сечения имеют наибольшую площадь?

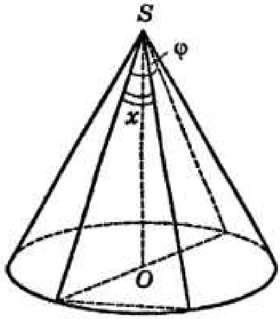


Рис. 22

φ — наибольший угол между образующими;

x — угол в сечении при $0 < x \le \varphi$;

$S_{сеч} = \dfrac{1}{2}L^2 \sin x$.

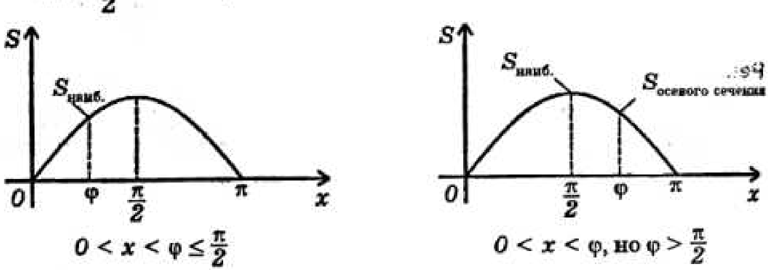


Рис. 23

Вывод. Если $0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$, то наибольшую площадь имеет осевое сечение. Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то наибольшую площадь имеет сечение с взаимно перпендикулярными образующими.

4. O_1 — середина высоты. Объем конуса равен 40. Чему равен объем цилиндра?

Ответ. 15.

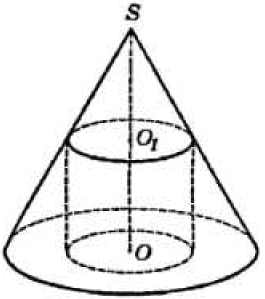


Рис. 24

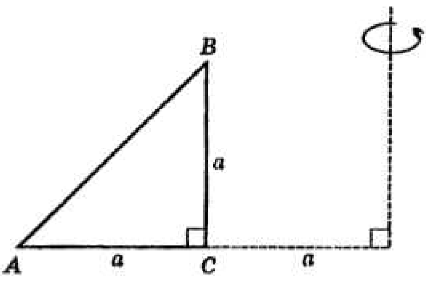


Рис. 25

5. Найдите площадь поверхности и объем тела вращения (рис. 25).

Ответ. $S = \pi a^2\left(3\sqrt{2} + 5\right)$; $V = \frac{4}{3}\pi a^3$.

III. Задача

В шар радиуса $R_{ш}$ вписан конус, наибольший угол между образующими которого равен φ ($\varphi > 90°$). Найдите: 1) объем конуса; 2) расстояние от центра шара до плоскости основания.

Решение

$AB = 2R_{ш} \sin\varphi$;

$2R = 2R_{ш} \sin\varphi$;

$R = R_{ш} \sin\varphi$.

$H = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = R_{ш} \sin\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$;

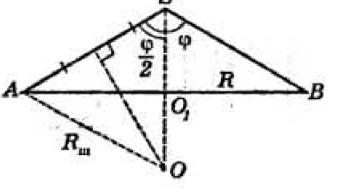


Рис. 26

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R_{\text{ш}}^3 \sin^3 \varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};$$

$$d = OO_1 = R_{\text{ш}} - H = R_{\text{ш}}\left(1 - \sin\varphi \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Дополнительные вопросы

1) При каком значении угла φ это расстояние равно нулю?

Ответ. при $\varphi = 90°$.

2) Найдите наибольшую площадь сечения плоскостью, проходящей через вершину конуса.

Решение. Наибольшую площадь имеет сечение с взаимноперпендикулярными образующими.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{L^2}{2}; \quad L = \frac{AO_1}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{R_{\text{ш}}\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} = 2R_{\text{ш}}\cos\frac{\varphi}{2} \text{ (см. рис. 26);}$$

$$S_{\text{сеч}} = 2R_{\text{ш}}^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Ответ. $2R_{\text{ш}}^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

3) Какой угол составляет эта плоскость с плоскостью основания (рис. 27)?

Решение

$$\sin\alpha = \frac{SO_1}{SK} = \frac{H}{\frac{L\sqrt{2}}{2}} = \frac{H\sqrt{2}}{L};$$

$$H = L\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\alpha = \arcsin\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Ответ. $\arcsin\left(\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$.

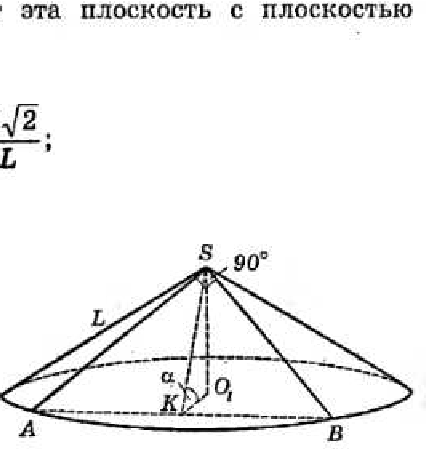


Рис. 27

Урок 9
СФЕРА И ШАР

I. Вступительное слово учителя

1. Понятие сферы и шара.
2. Взаимное расположение сферы и плоскости.

Ответы учеников

1. Касательная плоскость к сфере.

Задача для отвечающего. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на расстояние, равное 3. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Объем шара.

Задача для отвечающего. Через точку, не лежащую на сфере, проведены две плоскости, касающиеся сферы. Найдите расстояние от центра сферы до линии пересечения плоскостей, если угол между плоскостями равен 60°, а площадь сферы 32π.

Ответ. $4\sqrt{2}$.

Комментарий учителя

Идея вывода формулы для площади сферы.

II. Небольшие задачи

1. На сфере проведена замкнутая линия. При каком условии она будет окружностью?

2. Что представляет из себя множество центров всех сфер, проходящих через три данные точки, не лежащие на одной прямой?

3. Что представляет из себя множество центров всех сфер, которые касаются плоскости в заданной точке?

4. Вершины прямоугольного треугольника лежат на сфере. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если его гипотенуза равна C, а радиус сферы R.

Ответ. $\sqrt{R^2 - \dfrac{C^2}{4}}$.

5. Две взаимно перпендикулярные плоскости касаются шара. Расстояние между точками касания равно l. Найдите расстояние от центра шара до линии пересечения плоскостей.

Ответ. l.

6. Сфера радиуса R касается плоскости в некоторой точке. Через эту точку проведена плоскость под углом φ к касательной плоскости. Найдите площадь сечения.

Ответ. $\pi R^2 \sin^2 \varphi$.

7. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h. Угол между противоположными боковыми гранями равен $60°$. Найдите площадь поверхности вписанного в пирамиду шара.

Ответ. $\dfrac{4\pi h^2}{9}$.

8. Найдите объем шара, вписанного в правильную треугольную призму, сторона основания которой равна a.

Ответ. $\dfrac{\pi a^3}{18\sqrt{3}}$.

III. Задачи

1. В конус вписан шар. Найдите площадь его поверхности, если образующая конуса равна L и составляет с плоскостью основания угол φ.

Ответ. $4\pi L^2 \cos^2 \varphi \cdot \mathrm{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2}$.

Дополнительный вопрос. Найдите длину окружности, по которой шар касается поверхности конуса.

Ответ. $\pi L \sin 2\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

2. Четыре шара, радиус которых равен R, касаются друг друга. Найдите расстояние от центра одного шара до плоскости, которая касается трех других.

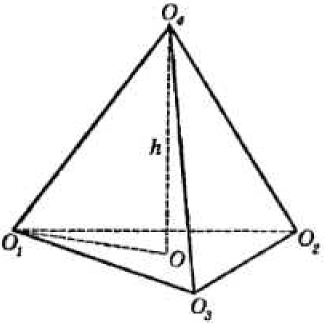


Рис. 28

Решение. Центры шаров O_1, O_2, O_3 и O_4 являются вершинами правильного тетраэдра с ребром, равным $2R$.

$$h = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3};$$

$$d = \frac{2R\sqrt{6}}{3} \pm R.$$ **Ответ.** $\frac{2R\sqrt{6}}{3} \pm R$.

3. Радиусы двух шаров равны 25 и 30. Длина линии пересечения поверхностей этих шаров равна 48π. Найдите расстояние между центрами шаров.

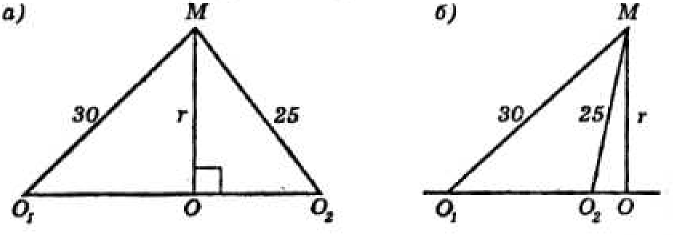


Рис. 29

Решение. O_1 и O_2 — центры шаров; MO — радиус линии пересечения.

$$2\pi r = 48\pi;\quad r = 24;\quad O_1O = \sqrt{900 - 576} = 18;$$

$$O_2O = \sqrt{625 - 576} = 7.$$

а) $O_1O_2 = 18 + 7 = 25$ (см. рис. 29, *а*);

б) $O_1O_2 = 18 - 7 = 11$ (см. рис. 29, *б*).

Ответ. 18 или 11.

Урок 10
ВЕКТОРЫ

I. Краткий обзор теории

1. Понятие вектора. Равенство векторов.
2. Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов.
3. Умножение вектора на число. Лемма о коллинеарных векторах.
4. Компланарные векторы. Правило параллелепипеда.
5. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Таблица 1

1) 

$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}| = AB;$

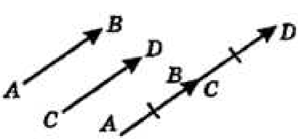
2) 

$\overrightarrow{MM} = \vec{0}; \quad |\vec{0}| = 0.$

Таблица 2

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$; 3) $\vec{k} \uparrow\downarrow \vec{l}$; 4) M;

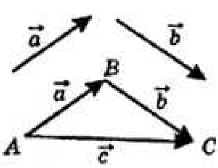
Коллинеарные векторы

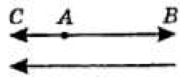
5) 

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ есть $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

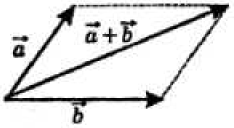
Таблица 3

1) а) 

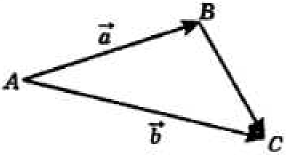


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ — для любых трех точек A, B и C.

б)

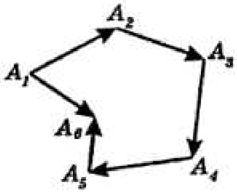


2)



$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB};\quad \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BC}.$$

3)



$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_5A_6} = \overrightarrow{A_1A_6}$$

Таблица 4

Умножение вектора на число:

$k > 0$ $k < 0$

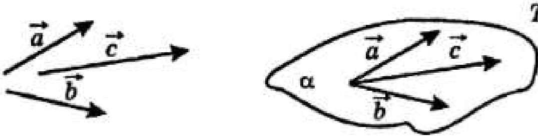
$|k\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|$. Частные случаи: $k\cdot\vec{0} = \vec{0}$; $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$.

Свойства:

$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$; $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.

Лемма: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует число k такое, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

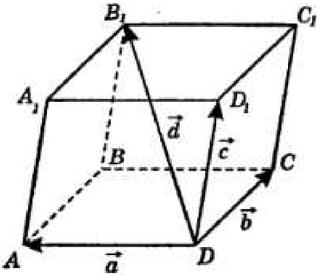
Таблица 5



Компланарные векторы

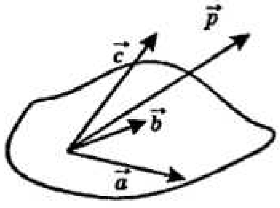
Если $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарные.

Таблица 6



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ — правило параллелепипеда.

Таблица 7



$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Учителем делается обзор теории по заранее подготовленным чертежам.

II. Типовые задачи

1. $AM = MB$;

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$ (Рис. 30, *а*.)

2. $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$;

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}.$$ (Рис. 30, *б*.)

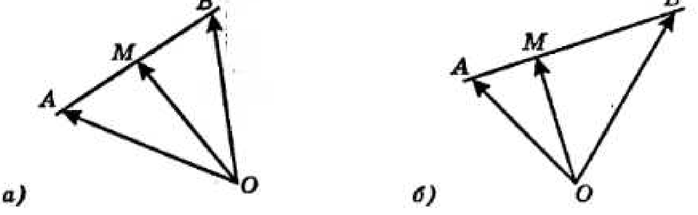
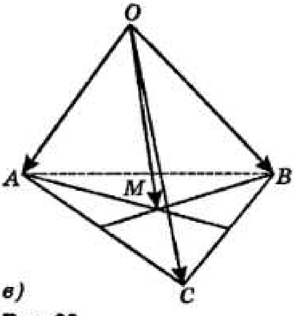


Рис. 30

3. M — точка пересечения медиан;

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$



в)

Рис. 30

III. Задачи

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$;

$AA_1 = C$; $M \in D_1C_1$, причем $\frac{D_1M}{MC} = \frac{2}{3}$.

Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Ответ. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \vec{c}$.

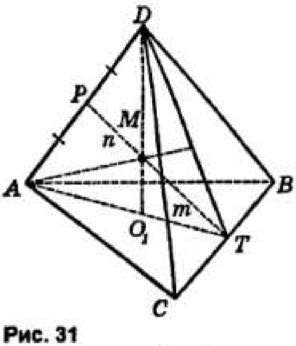


Рис. 31

2. Докажите, что середины противолежащих ребер тетраэдра симметричны относительно его центроида (центроидом тетраэдра называется точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней).

Решение: $\overrightarrow{DO_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)$;

$\overrightarrow{DO_1} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{DP} + 2\overrightarrow{DT}\right) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DT}\right)$, учитывая, что

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DT}$.

Пусть $\overrightarrow{DM} = x \cdot \overrightarrow{DO_1} = \frac{2}{3}x\left(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{DT}\right)$. (1)

Если $\dfrac{MT}{MP}=\dfrac{m}{n}$, то $\overrightarrow{DM}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{DP}+\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{DT}$. (2)

Из (1) и (2) следует, что $\begin{cases}\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{2x}{3},\\ \dfrac{n}{m+n}=\dfrac{2x}{3}.\end{cases}$

Отсюда $\dfrac{m}{n}=1$.

Тогда $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DT}\right)$. Это значит, что M — середина отрезка PT, т. е. точки P и T симметричны относительно точки M — центроида тетраэдра.

3. $\dfrac{SK}{KA}=\dfrac{3}{1}$; $\dfrac{SE}{EB}=\dfrac{3}{4}$; $SM=MC$.

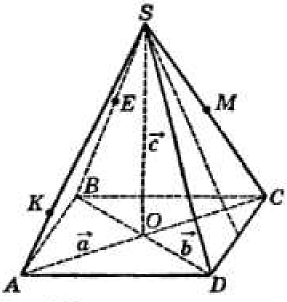


Рис. 32

Докажите, что точки K, E, M и D лежат в одной плоскости.

Решение:

$\overrightarrow{DK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DS}=$

$=\dfrac{3}{4}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\dfrac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=$

$=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$. (1)

Аналогично можно получить, что

$\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$, (2)

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{10}{7}\vec{b}+\dfrac{4}{7}\vec{c}$; (3)

$\overrightarrow{DK}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DM}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}+\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{c}=\dfrac{5}{2}\vec{b}+\vec{c}$,

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{5}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)=\dfrac{4}{7}\left(\overrightarrow{DK}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DM}\right)$.

Отсюда $\overrightarrow{DE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{DK} + \frac{6}{7}\overrightarrow{DM}$.

В таком случае $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{DM} + y\overrightarrow{DK}$, т. е. векторы компланарны, а т. к. они отложены от одной и той же точки, то точки K, E, M и D лежат в одной плоскости.

Ученики находят разложение только для $\overrightarrow{DK}$, а остальные результаты дает учитель. Важно рассмотреть только итог этой задачи.

Можно было применить и теорему: пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой и пусть S — произвольная точка пространства. Тогда условие $\overrightarrow{SD} = \alpha\overrightarrow{SA} + \beta\overrightarrow{SB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{SC}$ является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B, C и D одной плоскости. Однако эта теорема не изучается в базовой школе.

Урок 11
МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

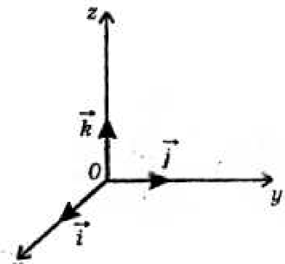
I. Краткий обзор теории

Таблица 1

1) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: x, y, z — координаты вектора.

$\vec{a}\,\{x; y; z\}$;

$\vec{b}\,\{0; 0; 0\}$.

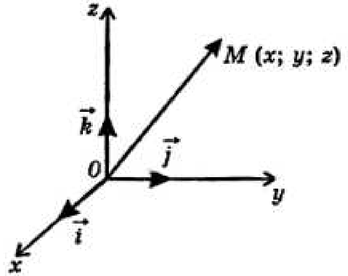


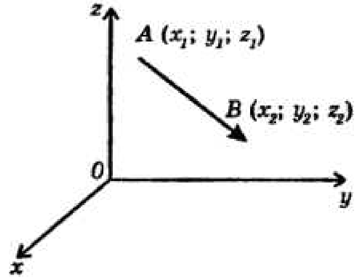
2) $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$; $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$;

$\vec{a} \pm \vec{b}\,\{x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2\}$.

3) $m\vec{a}\,\{mx_1; my_1; mz_1\}$.

Таблица 2



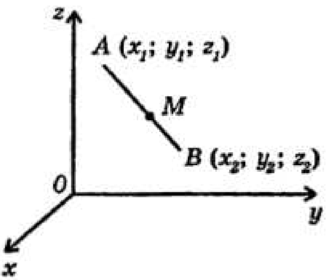


$\overrightarrow{OM}\{x;\ y;\ z\}$

$M(x;\ y;\ z)$

$\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$

Таблица 3



$AM = MB$

$\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$

$M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2};\ \dfrac{y_1 + y_2}{2};\ \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right);$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Таблица 4

$\varphi = \left(\vec{a};\ \vec{b}\right),\ \ \vec{a} \neq \vec{0},\ \ \vec{b} \neq \vec{0};$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi;$

$\left(\vec{a} \perp \vec{b}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\right);$

$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2.$

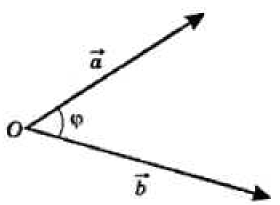


Таблица 5

$\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\};\ \ \vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\};$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$

$$\alpha = \left(\vec{a};\ \vec{b}\right);\ \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a};$

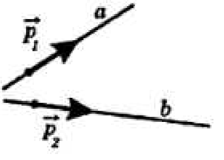
$\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right);$

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$

Таблица 6

1) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2$ — направляющие векторы.

$$\cos\left(\widehat{a;\ b}\right) = \frac{\left|\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\right|}{\left|\vec{p}_1\right|\cdot\left|\vec{p}_2\right|};$$



2) $\vec{n}\perp\alpha;\ \vec{p}$ — направляющий вектор.

$$\varphi = \left(\widehat{a;\ \alpha}\right),\ \ \sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{p},\ \vec{n}\right)\right|.$$

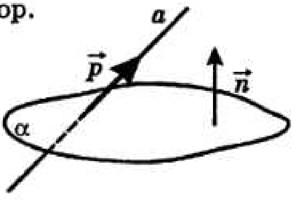
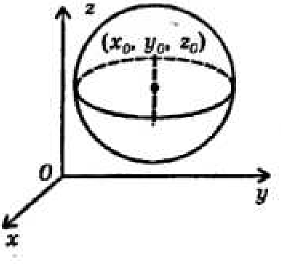


Таблица 7



$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

— уравнение сферы.

Учитель делает обзор по заранее подготовленным чертежам.

II. Задачи

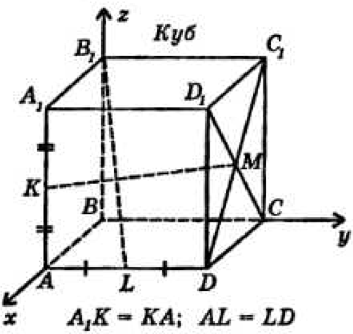


Рис. 33

1. Докажите, что $KM \perp B_1L$.

Решение: Пусть ребро куба равно 1.

Тогда: $K\left(1;\,0;\,\frac{1}{2}\right)$; $L\left(1;\,\frac{1}{2};\,0\right)$;

$M\left(\frac{1}{2};\,1;\,\frac{1}{2}\right)$; $B_1(0;\,0;\,1)$.

$\overrightarrow{KM}\left\{-\frac{1}{2};1;\,0\right\}$; $\overrightarrow{B_1L}\left\{1;\,\frac{1}{2};\,-1\right\}$;

$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{B_1L} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0.$

Следовательно, $KM \perp B_1L$.

2. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC; $\angle ACB = 90°$; $AC = 3$; $BC = 5$. $AM \perp AC$; $AM = 4$; $MB = \sqrt{30}$. Найдите объем пирмиды.

Решение: Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат, как это показано на рис. 34.

$$AM = \sqrt{x^2+z^2} = 4;\ x^2+z^2 = 16; \qquad (1)$$

$$BM = \sqrt{30}; \quad \sqrt{(x+5)^2+9+z^2} = \sqrt{30}.$$

Отсюда $(x+5)^2+9+z^2 = 30. \qquad (2)$

Из (1) и (2) следует:

$$\begin{cases} x^2+z^2=16, \\ x^2+z^2+10x+25+9=30, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=16, \\ 10x+16+34=30. \end{cases}$$

Отсюда $10x=-20$; $x=-2$.

$H = MO = \sqrt{z^2} = z\ (z>0)$;

$z^2 = 16 - x^2$;

$z^2 = 12$; $z = 2\sqrt{3}$.

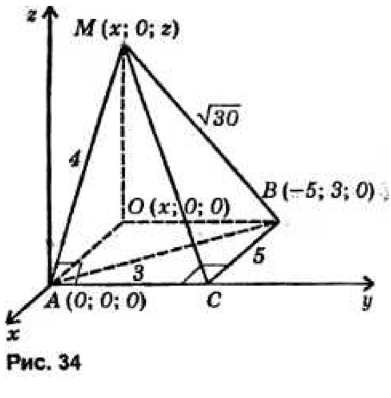


Рис. 34

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta\, ABC}\cdot H;\ \ S_{\Delta\, ABC} = \frac{15}{2};\ V = \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Ответ. $5\sqrt{3}$.

3. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны между собой. $M \in BD$ и $DM = MB$; $F \in AC$ и $AF = FC$. Найдите угол между прямыми DF и MC.

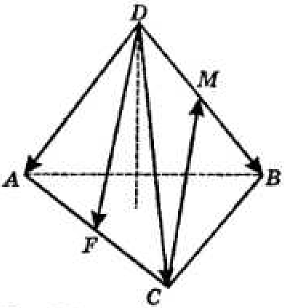


Рис. 35

Решение:

1-й способ

Пусть ребро тетраэдра равно 1.

$$\overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right),$$

$$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

$$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}^{\,2} =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$DF = CM = \frac{\sqrt{3}}{2}.\quad \cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$.

2-й способ

Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат, как это показано на рис. 36.

$$\overrightarrow{CM}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right\},\ \overrightarrow{DF}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{6}; 0; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right\};$$

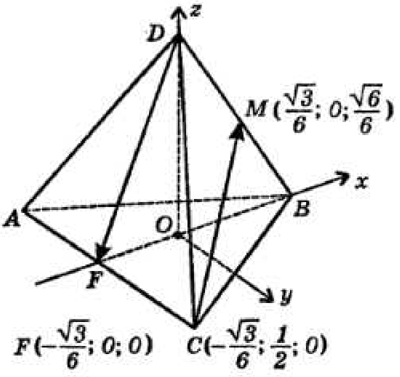


Рис. 36

$$\cos\varphi = \frac{\left|-\frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{3}\right|}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3};$$

$$\varphi = \arccos\frac{2}{3}.$$

Дополнительный вопрос:

Найдите угол между CM и плоскостью ABC.

$\overrightarrow{CM}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right\};$

$\vec{n} \perp ABC;$ $\vec{n}\,\{0; 0; 1\}$; см. таблицу 6,

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$ **Ответ.** $\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}.$

Дополнительные упражнения

1. При каком значении a вектор $\vec{p}\,\{a;\ 2-2a\}$ будет перпендикулярен прямой $3x + 4y = 1$?

Решение: Выберем на этой прямой две произвольные точки $A\left(0; \frac{1}{4}\right)$ и $B\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}\left\{\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right\}$.

Чтобы вектор $\vec{p}$ был перпендикулярен прямой $3x + 4y = 1$, необходимо, чтобы $\vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, т. е. $\frac{1}{3}a + (2-2a)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$.

Отсюда $a = 0{,}6$.

Ответ. $a = 0{,}6$.

2. При каком значении a вектор $\vec{n}\,\{a; 1\}$ будет параллелен касательной к графику функции $y = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 0{,}2$, проведенной в точке $(1; 4{,}8)$?

Решение. Уравнение касательной имеет вид $5x - y - 0{,}2 = 0$. Выберем на этой касательной две произвольные точки $A\left(0; -\frac{1}{5}\right)$ и $B\left(\frac{1}{25}; 0\right)$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}\left\{\frac{1}{25}; \frac{1}{5}\right\}$.

Этот вектор должен быть коллинеарным вектору $\vec{n}\,\{a; 1\}$.

В таком случае $\begin{cases} a = \frac{1}{25}k, \\ 1 = \frac{1}{5}k. \end{cases}$ Отсюда $k = 5$ и $a = \frac{1}{5}$.

Ответ. $a = 0{,}2$.

3. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}\,\{2; 3\}$ и $\vec{b}\,\{-5; 4\}$.

Решение. Пусть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — φ.

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$; $|\vec{a}| = \sqrt{13}$; $|\vec{b}| = \sqrt{41}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-5) + 4\cdot 3 = 2.$

В таком случае $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{31}\cdot\sqrt{41}}$.

$S = \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$; $\sin\varphi = \sqrt{1 - \dfrac{4}{13\cdot 41}} = \dfrac{23}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{41}}$;

$S = \frac{1}{2}\sqrt{13}\cdot\sqrt{41}\cdot\dfrac{23}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{41}} = \dfrac{23}{2} = 11{,}5.$

Ответ. 11,5.

4. Найдите площадь треугольника ABC, заданного координатами своих вершин $A\{-4; 1; -1\}$, $B\{-2; 3; -1\}$, $C\{-4; 1; 2\}$.

Решение. Пусть $\angle BAC = \varphi$. $\overrightarrow{AB}\,\{2; 2; 0\}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8}$;

$\overrightarrow{AC}\,\{0; 0; 3\}$; $|\overrightarrow{AC}| = 3$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{0+0+0}{3\sqrt{8}} = 0.$$ Отсюда $\varphi = 90°$.

Тогда $S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3 = 3\sqrt{2}$.

Ответ. $3\sqrt{2}$.

5. На гиперболе $y = \frac{1}{x}$ найдите точку P, ближайшую к точке $M(3;\ 3)$.

Решение: Пусть координаты искомой точки $P\left(x;\ \frac{1}{x}\right)$.

Тогда $PM = \sqrt{(x-3)^2 + \left(\frac{1}{x}-3\right)^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x-3)^2 + \left(\frac{1}{x}-3\right)^2 =$

$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 18$. Пусть $x + \frac{1}{x} = t$. Отсюда

$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ и $p(t) = t^2 - 2 - 6t + 18 = t^2 - 6t + 16$.

Эта функция достигает наименьшего значения при $t = 3$.

Тогда $x + \frac{1}{x} = 3$; $x^2 - 3x + 1 = 0$ и $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

В таком случае $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1}{x_1} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4} =$

$= \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1}{x_2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $P_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$;

$P_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Урок 12
ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

1-й вариант

В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$ с углом α $(\alpha < 90°)$ при вершине. Вокруг пирамиды описан конус, радиус основания которого R, а образующая составляет с плоскостью основания угол φ $(\varphi > 45°)$. Найдите:

1) объем пирамиды;

2) скалярное произведение $\overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$;

3) угол между гранями, проходящими через равные стороны основания, и плоскостью основания;

4) площадь сферы, описанной вокруг пирамиды;

5) расстояние между AM и BC.

Ответы. 1) $\frac{2}{3}R^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$; 2) 0; 3) $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$;

4) $\dfrac{4\pi R^2}{\sin^2 2\varphi}$; 5) $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$.

2-й вариант

В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC $(BA = BC)$, равные стороны которого равны a, а углы BAC и BCA равны α. В эту пирамиду вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол φ. Найдите:

1) объем конуса;

2) скалярное произведение $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{BM}$;

3) угол между плоскостью основания и равными боко выми ребрами;

4) объем вписанного в пирамиду шара;

5) расстояние от вершины B до плоскости AMC.

Ответы. 1) $\frac{1}{3}\pi a^3 \cos^3\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\varphi$; 2) 0;

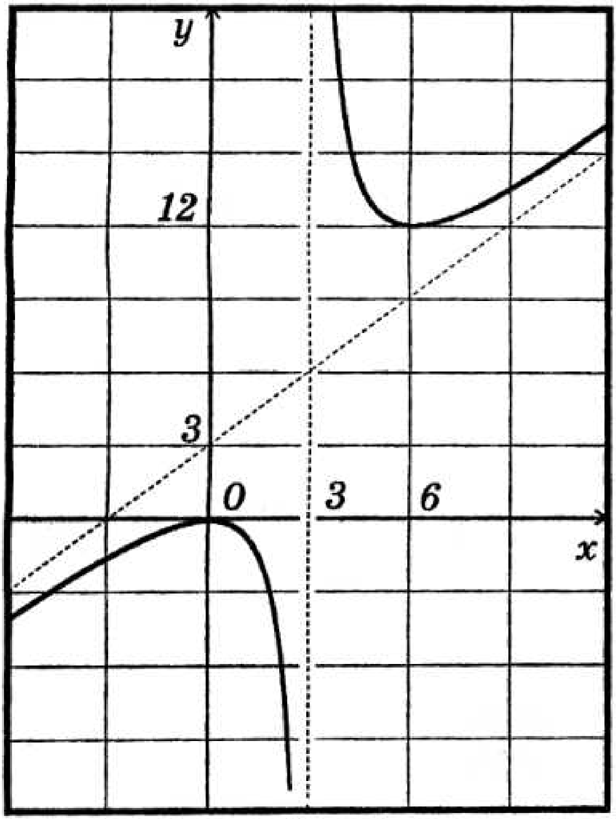
3) $\operatorname{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot \operatorname{tg}\varphi\right)$; 4) $\frac{4}{3}\pi a^3 \cos^3\alpha \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$;

5) $a \sin\alpha \sin\varphi$.

Работа рассчитана на два часа.

Часть IV

МАТЕРИАЛЫ К ЭКЗАМЕНАМ



КОНТРОЛЬНЫЕ ТЕСТЫ

Вариант 1

1. Вычислите $\left(\frac{3}{11}-0{,}5\right)\cdot 2\frac{4}{9}$. **Ответ.** $-\frac{5}{9}$.

2. Решите уравнение $\frac{1}{2x^{-1}}=3(x-5)^{-1}$.

Ответ. $x_1=6$; $x_2=-1$.

3. Сократите дробь $\frac{\sqrt{m}-m}{1-\sqrt[4]{m}}$. **Ответ.** $\sqrt{m}\left(1+\sqrt[4]{m}\right)$.

4. Упростите выражение $b^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt[6]{b^5}$. **Ответ.** b.

5. Решите неравенство $|2x-3|<5$. **Ответ.** $(-1;\ 4)$.

6. Решите неравенство $\sqrt{2-x}<x$. **Ответ.** $(1;\ 2]$.

7. В арифметической прогрессии $a_1=-2$, $d=3$. Найдите a_5. **Ответ.** $a_5=10$.

8. Сравните $\sin\sqrt{2}$ и $\cos\sqrt{2}$. **Ответ.** $\sin\sqrt{2}>\cos\sqrt{2}$.

9. Решите уравнение $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Ответ. $x=\frac{2\pi}{3}$.

10. Упростите $\frac{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos\alpha+1}$. **Ответ.** $\cos 2\alpha$.

11. Вычислите $\sin 75°$. **Ответ.** $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$.

12. Вычислите $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$. **Ответ.** $\frac{1}{2}$.

13. Вычислите $(\log_6 2+\log_6 18)\left(\log_6\frac{1}{6}+\log_6 36\right)$.

Ответ. 2.

14. Вычислите $3^{2\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}}$. **Ответ.** 25.

15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}\sqrt{3}}{x-x^2} > 0$.

Ответ. $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$.

16. Установите область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x}}{\lg_2(x+2)}.$$

Ответ. $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$.

17. Постройте график функции $y=\left|x^2-1\right|+1$.

Ответ. Рис. 1

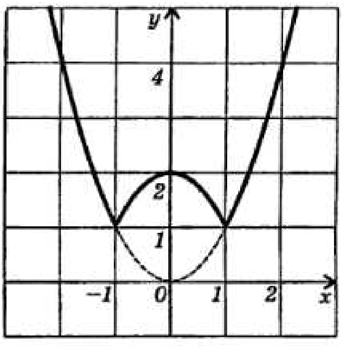


Рис. 1

18. $f(x)=\cos^2 x$. Решите неравенство $f'(x)>0$.

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi k\right)$, $k\in Z$.

19. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=\cos 2x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$. **Ответ.** -2.

20. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^3-1$ в точке $x_0=1$.

Ответ. $y=2x-2$.

21. Сравните $f'(a)$ и $f'(b)$ (рис. 2).

Ответ. $f'(a)>f'(b)$.

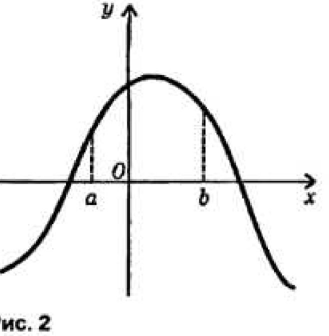


Рис. 2

22. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+x+1$ на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ. $\max\limits_{[0;\ 1]} y=3;\ \min\limits_{[0;\ 1]} y=1.$

23. Исследуйте на монотонность функцию

$$f(x) = \log_{0,3}\left(2x - x^2\right).$$

Ответ. Функция возрастает на промежутке $[1;\ 2)$, убывает на промежутке $(0;\ 1]$.

24. $AC = 3$; $BC = 4$. Найдите CK (рис. 3). **Ответ.** $2{,}4$.

25. Радиус описанной окружности $R = 2$. Найдите AB (рис. 4). **Ответ.** 2.

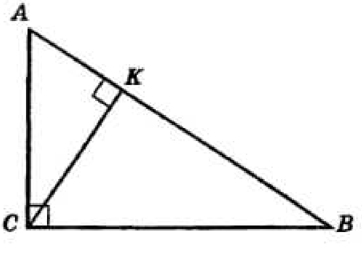


Рис. 3

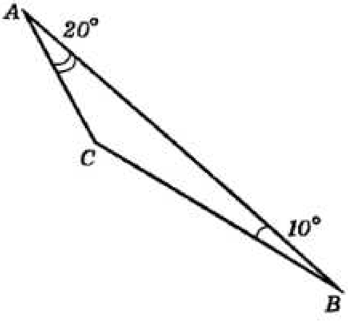


Рис. 4

26. $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{2}{3}$. Разложите вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Ответ. $\overrightarrow{OM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}$.

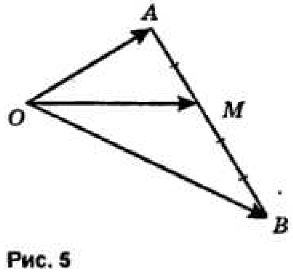


Рис. 5

27. Найдите вектор, перпендикулярный вектору $\{12;\ -5\}$ и имеющий длину 6,5.

Ответ. $\{2{,}5;\ 6\}$ и $\{-2{,}5;\ -6\}$.

28. Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен $\sqrt{6}$.

Ответ. 9.

29. Площадь боковой поверхности конуса равна $\pi\sqrt{5}$, высота равна 9. Найдите радиус основания.

Ответ. 1.

30. Найдите площадь поверхности полушара радиуса R.

Ответ. $3\pi R^2$.

Вариант 2

1. Вычислите $1{,}25+\frac{5}{12}:\left(\frac{1}{3}\cdot 2{,}5-\frac{7}{8}\right)$. **Ответ.** $-8\frac{3}{4}$.

2. Решите уравнение $(x-3)^{-1}=\frac{1}{7(x+3)^{-1}}$.

Ответ. $x_{1,2}=\pm 4$.

3. Сократите дробь $\frac{\sqrt{a}-a}{1+\sqrt[4]{a}}$. **Ответ.** $\sqrt{a}\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

4. Упростите выражение $\sqrt[3]{c\sqrt[4]{c^{-3}}}:c^{-\frac{5}{12}}$. **Ответ.** $\sqrt{c}$.

5. Решите неравенство $|3x-1|>2$.

Ответ. $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right)$; $(1;\ +\infty)$.

6. Решите неравенство $\sqrt{x+2}<-x$. **Ответ.** $[-2;\ -1)$.

7. В геометрической прогрессии $b_2=1$, $b_5=8$. Найдите q.

Ответ. $q=2$.

8. Сравните $\sin\sqrt{3}$ и $\cos\sqrt{3}$. **Ответ.** $\sin\sqrt{3}>\cos\sqrt{3}$.

9. Решите уравнение $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x\in\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ. $x=\frac{4\pi}{3}$.

10. Упростите $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-1}$. **Ответ.** $\sin 2\alpha$.

11. Вычислите $\cos 15°$. **Ответ.** $\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}$.

12. Вычислите $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **Ответ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Вычислите $(\log_8 2+\log_8 32)\left(\log_8\frac{1}{8}+\log_8 64\right)$.

Ответ. 2.

14. Вычислите $5^{2\log_{\sqrt{5}}\sqrt{7}}$. **Ответ.** 49.

15. Решите неравенство $\left(x^2-4x\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}5>0$.

Ответ. $(0;\ 4)$.

16. Установите область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x}}{\log_4(x+3)}.$$

Ответ. $(-3;\ -2)\cup(-2;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$.

17. Постройте график функции $y=(|x|-1)^2$.

Ответ. Рис. 6.

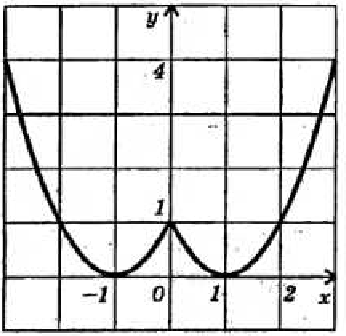


Рис. 6

18. $f(x)=\sin^2 x$. Решите неравенство $f'(x)>0$.

Ответ. $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

19. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=\sin 2x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$. **Ответ.** 1.

20. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2-4$ в точке $x_0=2$.

Ответ. $y=4x-8$.

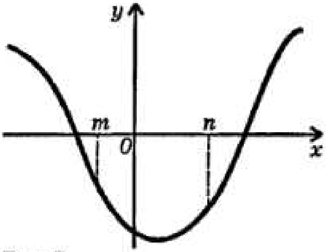


Рис. 7

21. Сравните $f'(m)$ и $f'(n)$ (рис. 7). **Ответ.** $f'(m) < f'(n)$.

22. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -x^3 - x + 2$ на отрезке $[0;\ 1]$.

Ответ. $\max\limits_{[0;\ 1]} y = 2$; $\min\limits_{[0;\ 1]} y = 0$.

23. Исследуйте на монотонность функцию

$$f(x) = \log_{75}\left(5x - x^2\right).$$

Ответ. функция возрастает на промежутке $(0;\ 2{,}5]$, убывает на промежутке $[2{,}5;\ 5)$.

24. $AC = 3$; $BC = 4$. Найдите радиус вписанной окружности (рис. 8). **Ответ.** 1.

25. $AB = \sqrt{3}$. Найдите радиус описанной окружности (рис. 9). **Ответ.** 1.

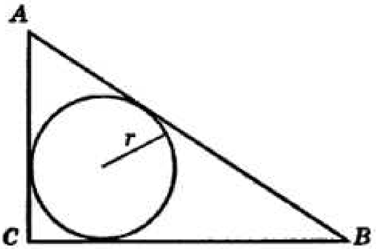


Рис. 8

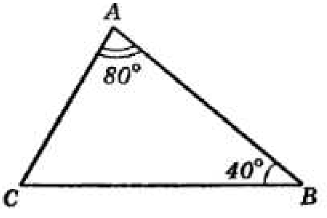


Рис. 9

26. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{3}{7}$. Разложите вектор $\overrightarrow{BD}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Ответ. $\overrightarrow{BD} = \dfrac{7}{10}\overrightarrow{BA} + \dfrac{3}{10}\overrightarrow{BC}$.

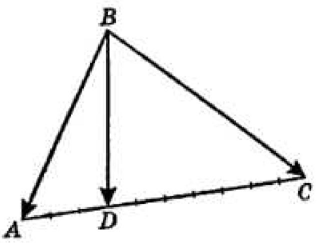


Рис. 10

27. Найдите вектор, перпендикулярный вектору $\{-3;\ 4\}$ и имеющий длину 5.

Ответ. $\{4;\ 3\}$ и $\{-4;\ -3\}$.

28. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{5}$, высота — $\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

Ответ. 1,5.

29. Площадь боковой поверхности конуса равна 15π, радиус основания равен 3. Найдите высоту конуса.

Ответ. 4.

30. В равносторонний конус, образующая которого равна L, вписан шар. Найдите его объем.

Ответ. $\dfrac{\pi L^3}{18\sqrt{3}}$.

РАБОТА НА ПОВТОРЕНИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ В ВУЗ

№ 1

1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}}=4.$ **Ответ.** $-1{,}5;\ 0{,}5$.

2) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1.$ **Ответ.** 2,5.

2. Решите неравенство:

1) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{x-1}{x}}\geq 1.$ **Ответ.** $(0;\ 1]$.

2) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^{-1}(x-1)}\leq 1.$ **Ответ.** $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$.

3. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + 2y^3 = 4, \\ x^2 y^6 = 4. \end{cases}$

Ответ. $(2;\ 1)$; $\left(2 + 2\sqrt{2};\ \sqrt[3]{1 - \sqrt{2}}\right)$; $\left(2 - 2\sqrt{2};\ \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}\right)$.

2) $\begin{cases} xy + 2 = 0, \\ x^4 y^3 - x^3 y^4 = -24. \end{cases}$

Ответ. $(1;\ -2)$; $(2;\ -1)$.

4. Решите уравнение:

1) $\sin^2 \pi x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \sin \pi x = 2$, если $|x| \le 1$. **Ответ.** $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{3}{4}$.

2) $2\cos^2 \dfrac{\pi x}{6} + 3\sin \dfrac{\pi x}{6} = 0$, если $|x| \le 6$. **Ответ.** -5; -1.

5. Вычислите:

1) $5^{\log_2 3} \cdot 3^{-\log_2 5}$. **Ответ.** 1.

2) $7^{\log_3 5} \cdot 5^{-\log_3 7}$. **Ответ.** 1.

6. 1) Вычислите $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = 0{,}8$; $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответ. 2.

2) Вычислите $\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -0{,}6$; $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ. $-\dfrac{1}{3}$.

7. Решите уравнение:

1) $(2 - x)^{-1} \cdot \log_3\left(3^x - 8\right) = 1$. **Ответ.** Нет решения.

2) $\log_7\left(6 + 7^{-x}\right) = 1 + x$. **Ответ.** 0.

8. 1) Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству $|x| \ge |2x - 3|$. **Ответ.** 1.

2) Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству $|x| \le \left|\dfrac{x}{2} - 3\right|$. **Ответ.** -6.

9. 1) В зрительном зале 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличить на 4 и добавить еще один ряд, в зале станет 420 мест. Сколько стало рядов в зале?

Ответ. 5 или 21.

2) На концерт было продано на 2000 рублей билетов по одной стоимости и на 1200 рублей по стоимости на 5 рублей больше. Какова цена билетов, если всего было продано 280 билетов.

Ответ. 10; 15.

10. 1) Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 56. Сумма четырех последних равна 112. Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 11.

Ответ. 231.

2) Сумма четырех первых членов арифметической прогрессии равна 11. Сумма трех последних равна 15. Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2.

Ответ. 30.

11. 1) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна a. Диагональ боковой грани A_1C составляет с гранью CC_1B_1B угол 30°. Найдите объем призмы.

Ответ. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

2) В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием служит ромб со стороной a и острым углом 60°. Диагональ параллелепипеда B_1D составляет с боковой гранью DD_1C_1C угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

Ответ. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

12. 1) При каких значениях m длина промежутка, являющегося областью решения неравенства $4x^2 \le m$, равна 1?

Ответ. 1.

2) При каких значениях a длина промежутка, являющегося областью решения неравенства $ax^2 \le 1$, равна 4?

Ответ. $\frac{1}{4}$.

№ 2

1. Решите уравнение:

1) $x^2 + \sqrt{x^2+7} = 23$. **Ответ.** $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}$.

2) $x^2 - 2\sqrt{x^2+11} = 13$. **Ответ.** $x_{1,2} = \pm 5$.

2. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2^x - 2}{2^x} < \dfrac{3}{2^x + 2}$. **Ответ.** $(-\infty;\ -2)$.

2) $\dfrac{9^x + 25}{2 \cdot 3^x + 4} < 13$. **Ответ.** $(-\infty;\ 3)$.

3. Упростите:

1) $$A = \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(4x + \frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x} \cdot \cos x.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $$B = \frac{2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{18}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{17\pi}{18}\right) - \cos\frac{8\pi}{9}}{2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin x}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Решите уравнение:

1) $\left|3^x-27\right|-\left|3^x-3\right|=12.$ **Ответ.** $x=2.$

2) $\left|2^x-16\right|-\left|2^x-4\right|=4.$ **Ответ.** $x=3.$

5. Установите область определения функции:

1) $f(x)=\lg\left(2+x-x^2\right)\sqrt{2\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)-\sqrt{3}}.$

Ответ. $\left[\frac{\pi}{3};\ 2\right).$

2) $f(x)=\lg\frac{1+3x}{3-4x}\sqrt{2\cos^2 x-\frac{3}{2}}.$

Ответ. $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{\pi}{6}\right].$

6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\log^2_{\sqrt{2}} x+2\log_{\sqrt{2}} x\cdot\log_{\sqrt{2}} y-3\log^2_{\sqrt{2}} y=0,\\ 4\cdot\frac{y}{x}+\frac{7}{xy}=2.\end{cases}$

Ответ. $\left(8;\ \frac{1}{2}\right).$

2) $\begin{cases}\log^2_{\sqrt{3}} x+4\log_{\sqrt{3}} x\cdot\log_{\sqrt{3}} y+3\log^2_{\sqrt{3}} y=0,\\ \frac{y}{x}-\frac{5}{xy}=36.\end{cases}$

Ответ. $\left(\frac{1}{27};\ 3\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{41}};\ \sqrt{41}\right).$

7. 1) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 9, а в остатке 1. Если из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то в результате получится данное двузначное число. Найдите это число.

Ответ. 91.

2) Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3. Если из суммы квадратов цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то в результате получится половина данного числа. Найдите это число.

Ответ. 24.

8. Решите неравенство:

1) $\log_{(x-3)^2}\left(x^2+x+3\right)\geq\frac{1}{2}$.

Ответ. $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

2) $\log_{9x^2}\left(6+2x-x^2\right)\leq\frac{1}{2}$.

Ответ. $\left(1-\sqrt{7};\ -1\right)\cup\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup\left(2;\ 1+\sqrt{7}\right)$.

9. 1) При каких значениях a прямая $y=ax-5$ касается кривой $y=3x^2-4x-2$?

Ответ. $a=2$; $a=-10$.

2) При каких значениях a прямая $y=ax-7$ касается кривой $y=2x^2-5x+1$?

Ответ. $a=3$; $a=-13$.

10. Найдите критические точки функции:

1) $y=2\sqrt{3}\sin x-\cos 2x$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k, n\in Z$.

2) $y=2\sqrt{3}\cos x+\cos 2x$.

Ответ. πk; $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $k, n\in Z$.

11. 1) В конус вписан шар. Отношение радиуса окружности касания шара и конической поверхности к радиусу основания конуса равно 0,6. Найдите косинус угла между образующей конуса и плоскостью основания.

Ответ. 0,4.

2) В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

Ответ. 0,28.

12. Решите уравнение при всех значениях параметра a:

1) $\sqrt{3x-a+2}-\sqrt{x+a}=2$.

Ответ. если $a<-1$, то $\varnothing$,

если $a=-1$, то $x=2$,

Если $-1\le a\le-\frac{1}{2}$, то $x=a+3\pm2\sqrt{2a+2}$,

Если $a>-\frac{1}{2}$, то $x=a+3+2\sqrt{2a+2}$.

2) $\sqrt{2x+3a+1}-\sqrt{x-2a}=2$.

Ответ. если $a>1$, то $\varnothing$,

если $a=1$, то $x=6$,

Если $\frac{3}{7}\le a<1$, то $x=11-5a\pm4\sqrt{7-7a}$,

Если $a<\frac{3}{7}$, то $x=11-5a+4\sqrt{7-a}$.

№ 3

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ РАБОТА ДЛЯ ПОСТУПЛЕНИЯ В САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ) (*с пояснениями*)

1. Число y составляет 25% от числа x. Сколько процентов составляет число x от числа $5y$?

Решение. По условию $y=\frac{1}{4}x$. Для ответа на поставленный вопрос необходимо найти $\frac{x}{5y}$.

Имеем $\frac{x}{5y}=\frac{x}{\frac{5}{4}x}=\frac{4}{5}=0{,}8$.

Ответ. 80%.

2. Упростите $2^{2\log_4|4-a|}-a$ при $a>4$.

Решение. $2^{2\log_4|4-a|}-a=4^{\log_4(a-4)}-a=a-4-a=-4.$

Ответ. -4.

3. Вычислите значение выражения $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}+2\sqrt{2}$. Покажите, что это — целое число.

Решение. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}+2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+2\sqrt{2}=3$ — целое число.

Ответ. 3.

4. Решите уравнение $3+\log_{\frac{1}{2}}x=\log_2(x-2)$.

Решение. О. Д. З. $x>2$.

$3-\log_2 x=\log_2(x-2)$; $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$;

$x^2-2x=8$, $x^2-2x-8=0$;

$x_1=-2$ — посторонний корень; $x_2=4$.

Ответ. $x=4$.

5. Решите уравнение $9^{2x^2}\cdot\sqrt{1-4x}=3\sqrt{1-4x}$.

Решение. О. Д. З. $x\le\frac{1}{4}$.

$9^{2x^2}\cdot\sqrt{1-4x}-3\sqrt{1-4x}=0$; $\sqrt{1-4x}\left(9^{2x^2}-3\right)=0$.

Отсюда $x=\frac{1}{4}$ или $3^{4x^2}=3$; $4x^2=1$; $x^2=\frac{1}{4}$.

Учитывая О. Д. З., имеем $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ. $x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{4}$.

6. Найдите $\cos^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 3$.

Решение. $5\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 5\left(1 - \cos^2\alpha\right) + 2\cos^2\alpha - 1 =$

$= 5 - 5\cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 4 - 3\cos^2\alpha;$

$4 - 3\cos^2\alpha = 3$, откуда $\cos^2\alpha = 1$.

Ответ. 1.

7. Установите область определения функции

$$y = \sqrt{3 - |x| - 2x^2}.$$

Решение. $3 - |x| - 2x^2 \ge 0$, $2|x|^2 + |x| - 3 \le 0$; $|x| = t \ge 0$,

$2t^2 + t - 3 = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4}$,

$t_1 = -\dfrac{3}{2}$; $t_2 = 1$.

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 3 \le 0, \\ t \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \le t \le 1, \\ t \ge 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Тогда $|x| \le 1$. Отсюда $-1 \le x \le 1$.

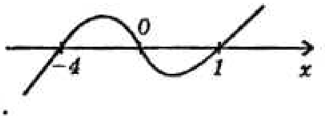
Ответ. $[-1; 1]$.

8. Решите неравенство $x - \dfrac{4}{x} > -3$ и найдите произведение целых отрицательных его решений.

Решение. $x - \dfrac{4}{x} + 3 > 0$; $\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x} > 0$; $\dfrac{(x+4)(x-1)}{x} > 0$.

Применим метод интервалов:

$-4 < x < 0$; $x > 1$.



Целые отрицательные решения:

$x_1 = -3$; $x_2 = -2$; $x_3 = -1$.

Их произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$.

Ответ. -6.

9. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\operatorname{tg}x=1.$

Решение. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2\operatorname{tg}x=1;\quad \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}x}+2\operatorname{tg}x=1;$

$\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}+2\operatorname{tg}x=1.$ Отсюда $\operatorname{tg}x=0$ и $x=\pi k,\ k\in Z.$

Ответ. $\pi k,\ k\in Z.$

10. Найдите производную функции $y=x\sin\frac{\pi x}{2}$ в точке $x=-1.$

Решение. $y'=\sin\frac{\pi x}{2}+1\cdot\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2};$

$y'(-1)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0=-1.$

Ответ. $-1.$

11. Решите уравнение $\left|x^2-3\right|-2|x|=x^2+2x-3.$

Решение.

1) $\begin{cases}x^2-3\ge 0,\\ x\ge 0,\end{cases}$ $x\ge\sqrt{3}.$ Тогда $x^2-3-2x=x^2+2x-3.$

Отсюда $x=0.$ Так как $x\ge\sqrt{3},$ то решений нет.

2) $\begin{cases}x^2-3\le 0,\\ x\le 0,\end{cases}$ $\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},\\ x\le 0,\end{cases}$ $-\sqrt{3}\le x\le 0.$

Тогда $3-x^2+2x=x^2+2x-3$ и $x^2=3.$

Так как $-\sqrt{3}\le x\le 0,$ то $x=-\sqrt{3}.$

3) $x^2-3<0;\quad 0<x<\sqrt{3}.$

Тогда $3-x^2-2x=x^2+2x-3,$

$x^2+2x-3=0;$ $x_1=-3$ (посторонний корень); $x_2=1.$

4) $\begin{cases} x^2-3>0, \\ x<0, \end{cases}$ $\begin{cases} x<-\sqrt{3};\ x>\sqrt{3}, \\ x<0, \end{cases}$ $x<-\sqrt{3}.$

Тогда $x^2-3+2x=x^2+2x-3$. Это справедливо при всех $x<-\sqrt{3}$. **Ответ.** $\left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right]\cup\{1\}$.

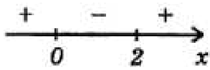
12. Координаты вершин ΔABC: $A(1;2)$; $B(0;3)$; $C(\alpha;2\alpha-1)$. При каких значениях α угол $\angle BAC$ прямой?

Решение. $\overrightarrow{AB}\{-1;1\}$; $\overrightarrow{AC}\{\alpha-1;2\alpha-3\}$. $\angle BAC$ будет прямым, если $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, т. е. $-1\cdot(\alpha-1)+1\cdot(2\alpha-3)=0$; $1-\alpha+2\alpha-3=0$, $\alpha=2$. **Ответ.** $\alpha=2$.

13. Решите неравенство $\dfrac{2^{x-1}+3x-2}{x}\le 3$.

Решение. $\dfrac{2^{x-1}+3x-2-3x}{x}\le 0$; $\dfrac{2^x-4}{x}\le 0$.

Применим метод интервалов. Имеем



Ответ. $(0;\ 2]$.

14. Решите неравенство $\log_2\dfrac{x+x^2}{x}<2$.

Решение. $\log_2(x+1)<2$ при $x\ne 0$;

$0<x+1<4$; $-1<x<3$. **Ответ.** $(-1;\ 0)$; $(0;\ 3)$.

15. Найдите уравнение функции, график которой симметричен графику функции $y=x^2+3x$ относительно точки $O(1;\ 0)$.

Решение

$Z_0(A)=A_1$,

$Z_0(B)=B_1$,

$Z_0(C)=C_1$;

$y=-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}=$

$=-x^2+7x-10$.

Ответ

$y=-x^2+7x-10$.

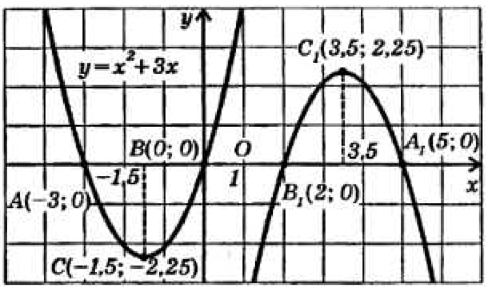


Рис. 11

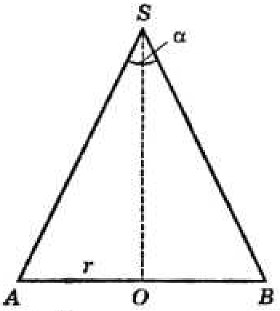


Рис. 12

16. Найдите косинус угла при вершине осевого сечения конуса, если площадь основания конуса равна 6π, а площадь его боковой поверхности равна 8π.

Решение

$\pi r^2 = 6\pi, \pi r l = 8\pi$, отсюда $\frac{r}{l} = \frac{3}{4}$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$; $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{16}$;

$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{9}{16}$. Отсюда следует, что $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$.

Ответ. $-\frac{1}{8}$.

17. При каких значениях параметра p неравенство

$$3x^2 - px + 3 > 0$$

выполняется при всех $x > 0$?

Решение. Для выполнения поставленной задачи парабола должна располагаться так, как указано на рисунке. Это возможно, если: а) абсцисса вершины параболы отрицательна или б) парабола выше оси Ox.

Для параболы

$y = ax^2 + bx + c \quad x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Тогда в нашем случае

$-\frac{-p}{6} < 0$; $p < 6$.

Ответ. $(-\infty; 6)$.

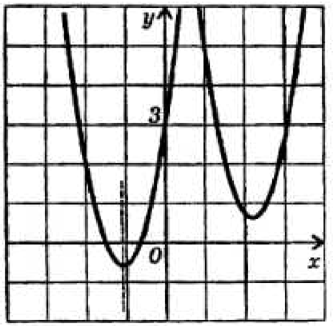


Рис. 13

18. Найдите все значения параметра a, при которых числа $2^{a-1} - 2$, a и $2^{a-1} \cdot a$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Решение. Данные числа будут последовательными членами арифметической прогрессии, если

$$\frac{2^{a-1} - 2 + 2^{a-1} \cdot a}{2} = a;$$

$$\frac{2^a}{2} - 2 + \frac{2^a}{2} \cdot a = 2a; \qquad 2^a - 4 + 2^a \cdot a = 4a;$$

$$2^a - 4 = a\left(4 - 2^a\right); \quad \left(2^a - 4\right)(a+1) = 0.$$

Отсюда $a = 2$ или $a = -1$.

Ответ. $\{-1;\ 2\}$.

19. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точка D разбивает гипотенузу на части длиной 2 и 4. Найдите длину отрезка CD, если известно, что $\angle B = 30°$.

Решение:

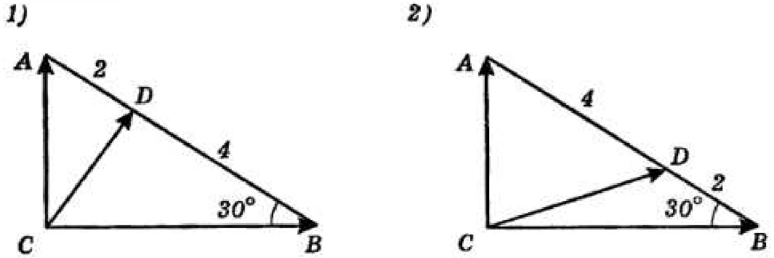


Рис. 14

Рассмотрим первый случай.

$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}; \quad \overrightarrow{CD}^2 = \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2 =$$

$$= \frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2, \text{ т. к. } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0. \quad CA = 3; \ CB = 3\sqrt{3};$$

$$CD^2 = \overrightarrow{CD}^2 = \frac{4}{9} \cdot 9 + \frac{1}{9} \cdot 27 = 7; \quad CD = \sqrt{7}.$$

Во втором случае $CD = \sqrt{13}$.

Ответ. $\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}$.

20. Найдите сумму всех целых положительных чисел n, для которых выражение $\frac{6}{n-1}$ является целым числом.

Решение. Целыми значениями выражения $\frac{6}{n-1}$ могут быть только ± 1; ± 2; ± 3 и ± 6. Для решения нужно рассмотреть 8 уравнений и из множества их решений выбрать числа, которые являются целыми и положительными.

$\frac{6}{n-1} = 1$ $(n = 7)$; $\frac{6}{n-1} = 2$ $(n = 4)$; $\frac{6}{n-1} = 3$ $(n = 3)$;

$\frac{6}{n-1} = \pm 6$ $(n = 2$ и $n = 0)$. Сумма решений 16.

Ответ. 16.

Список используемой и рекомендуемой литературы

1. Карп А. П. Сборник задач для подготовки к выпускным экзаменам по алгебре и началам анализа. СПб, ООО Игрек-М, 1996.

2. Карп А. П. Сборник задач по алгебре и началам анализа. М., Просвещение, 1995.

3. Дудницын Ю. П., Смирнова В. К. Содержание и анализ письменных и экзаменационных работ по алгебре и началам анализа. М., Просвещение, 1995.

4. Звавич Л. И., Аверьянов Д. И., Смирнов В. К. Экзаменационные задачи по алгебре для школьников и абитуриентов. М., Дрофа, 1997.

5. Говоров В. П., Дыбов П. Т., Миронов Н. В., Смирнов С. В. Сборник конкурсных задач по математике. М., Наука, 1988.

6. Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Начала анализа. М., Наука, 1988.

7. Вавилов В. В. и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., Наука, 1988.

8. Егоров В. К. и др., под ред. М. И. Сканави. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во ВТУЗы. М., Высшая школа, 1978.

9. Зив Б. Г. Задачи по алгебре и началам анализа. СПб, Мир и семья-95, 1995.

10. Зив Б. Г. Задачи к урокам геометрии. 7—11 кл. СПб, Мир и семья-95, 1995.

11. Лоповок Л. М. Сборник задач по геометрии. М., Просвещение, 1959.

12. Квасникова З. Я. Сборник задач по геометрии. М., Просвещение, 1969.

13. Математика для поступающих в ВУЗы. Под ред. С. Р. Тихомирова и Е. В. Подсыпанина. СПб, Нестор, 2000.

14. Багманов А. Т., Толстых И. В. Математика. Избранные задачи. Абитуриенту–2001 для самостоятельной работы. СПб, Изд-во СПбГТУ, 2000.

15. Математика. Методические указания по подготовке к вступительному экзамену. СПб, СПбГИТМО (ТУ), 1999.

16. Математика. Сборник методических указаний и задач для абитуриентов СПбГУАП в трех частях. СПб, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ