Alef$_0$

II

Geometrie

Geometrie metrică

ALEF$_0$/ GEOMETRIE

ALEPH$_0$/GÉOMÉTRIE

I^{re} CDE

II GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE

G. GIRARD

C. THIERCÉ

Agrégés de mathématiques

L'ensemble N des nombres entiers a été étendu à des „nombres" cardinaux transfinis, traditionnellement désignés par la lettre hébraïque aleph diversement indexée.
Aleph-zéro réprésente ainsi le cardinal de N lui-même. Aleph-un est le plus petit cardinal supérieur à Aleph-zéro et ainsi de suite.

Classiques Hachette, 79 Boulevard Saint-Germain, Paris

Alef

II

Geometrie

Geometrie metrică

G. GIRARD

C. THIERCÉ

Editura didactică și pedagogică
București, 1974

Traducerea din limba franceză :
Dinu Moroianu
Emilian Stătescu

Confruntarea traducerii :
conf. univ. **Eugen Rusu**
Redactor : prof. **Valentin Radu**
Tehnoredactor : **Ion Teodorescu**

8 PRODUS SCALAR

INTRODUCERE

Reamintim în ce mod a fost abordat studiul produsului scalar în cursul clasei a II-a. Planul vectorial fiind construit plecînd de la planul P, am definit o aplicație a produsului cartezian $\vec{P}^2$ în $\mathbf{R}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v},$$

numită **produs scalar pe planul vectorial** $\vec{P}$, și care posedă proprietățile următoare:

1. $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}) \in \vec{P}^3 \begin{cases} (\vec{u}+\vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v} \\ (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$

3. $\forall \vec{u} \in \vec{P} - \{\vec{0}\} \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$

Pentru a defini acest produs scalar, ne-am folosit de planul P utilizînd noțiunile de ortogonalitate a două drepte și de distanță între două puncte.

Vom proceda în acest an în modul următor: $\vec{E}$ fiind un spaţiu vectorial şi E un spaţiu afin asociat acestui spaţiu vectorial, vom defini mai întîi un produs scalar pe spaţiul vectorial $\vec{E}$, adică o aplicaţie a produsului cartezian $\vec{E}^2$ în $\mathbf{R}$ care posedă proprietăţile precedente **1, 2, 3** şi aceasta fără a utiliza spaţiul afin E. Noţiunile de *ortogonalitate* în spaţiul vectorial $\vec{E}$ şi în spaţiul afin E, ca şi noţiunile de *normă* a unui vector din $\vec{E}$ şi de *distanţă* dintre două puncte din E, vor fi deduse atunci din produsul scalar.

8.1. PRODUS SCALAR PE UN SPAŢIU VECTORIAL

8.1.1. Definiţie

Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial pe corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale.

Se numeşte **produs scalar pe** $\vec{E}$ orice aplicaţie φ a produsului cartezian $\vec{E}^2$ în $\mathbf{R}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) \to \varphi(\vec{u}, \vec{v}),$$

care posedă proprietăţile următoare:

1. $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \qquad \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u}).$

2. $\forall a \in \mathbf{R},$
$\forall(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}) \in \vec{E}^3 \quad \begin{cases} \varphi(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{u}', \vec{v}) \\ \varphi(a\vec{u}, \vec{v}) = a\varphi(\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$

3. $\forall \vec{u} \in \vec{E} - \{\vec{0}\} \qquad \varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0.$

Dacă spaţiul vectorial $\vec{E}$ este înzestrat cu un singur produs scalar φ, după cum va fi întotdeauna cazul în continuarea acestui curs, numărul real $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$ este numit **produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$** şi este notat $\vec{u} \cdot \vec{v}$; proprietăţile 1, 2, 3 se scriu atunci:

1. $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2. $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}) \in \vec{E}^3 \begin{cases} (\vec{u}+\vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v} \\ (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$

3. $\forall \vec{u} \in \vec{E} - \{\vec{0}\} \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$

Observaţii. — **1.** Pentru orice bivector $(\vec{u}, \vec{v})$, produsul scalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ este un număr real şi nu un vector; produsul scalar pe $\vec{E}$ nu este deci o lege de compoziţie internă definită pe spaţiul vectorial $\vec{E}$.
2. Se poate defini întotdeauna un produs scalar pe un spaţiu vectorial $\vec{E}$. Demonstraţia acestui rezultat în cazul în care $\vec{E}$ este de dimensiune 1, 2 sau 3 este propusă în exerciţiul nr. **8.1.**
3. Un spaţiu vectorial $\vec{E}$ înzestrat cu un produs scalar este numit **spaţiu vectorial euclidian.**

8.1.2. Simetria şi biliniaritatea produsului scalar

Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial înzestrat cu un produs scalar:

$$(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Se ştie că:

1. $\qquad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2.1. $\forall a \in \mathbf{R},\ \forall(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}) \in \vec{E}^3 \begin{cases} (\vec{u}+\vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v} \\ (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{cases}$

Fie b un număr real şi fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'$ trei vectori aparţinînd lui $\vec{E}$; din proprietăţile precedente 1 şi 2.1 rezultă:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = (\vec{v} + \vec{v}') \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}' \cdot \vec{u} =$$
$$= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}';$$
$$\vec{u} \cdot (b\vec{v}) = (b\vec{v}) \cdot \vec{u} = b(\vec{v} \cdot \vec{u}) = b(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Se poate deci scrie:

$$\textbf{2.2.} \quad \forall b \in \mathbf{R},\ \forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}') \in \vec{E}^3 \begin{cases} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}' \\ \vec{u} \cdot (b\vec{v}) = b(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{cases}$$

Proprietăţile **1, 2.1, 2.2.** se exprimă spunînd că produsul scalar este o **formă biliniară** (proprietăţile **2.1, 2.2**), **simetrică** (proprietatea 1) definită pe spaţiul vectorial $\vec{E}$.

Consecinţe. — **1.** Fie a şi b două numere reale şi fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd spaţiului vectorial $\vec{E}$; avem:

$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = a[\vec{u} \cdot (b\vec{v})] = a[b(\vec{u}, \vec{v})] = ab(\vec{u}, \vec{v}).$$

Egalitatea:

$$\boxed{(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})}$$

dă:

- pentru $a = 0$ şi $b = 0$: $\vec{0} \cdot \vec{0} = 0$;
- pentru $a = 1$ şi $b = 0$: $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$;
- pentru $a = 0$ şi $b = 1$: $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$;
- pentru $a = -1$ şi $b = 1$: $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u}, \vec{v})$;
- pentru $a = 1$ şi $b = -1$; $\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v})$;
- pentru $a = -1$ şi $b = -1$; $(-\vec{u}) \cdot (-\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$;

2. Fie $\vec{u}, \vec{u}', \vec{v}, \vec{v}'$ pentru vectori aparţinînd spaţiului vectorial $\vec{E}$.
Avem:

$$(\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v} = [(\vec{u} - \vec{u}') + \vec{u}'] \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

ceea ce implică:

$$(\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}' \cdot \vec{v}.$$

Rezultă din aceasta

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') = (\vec{v} - \vec{v}') \cdot \vec{u} =$$
$$= \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}' \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}';$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{u}') \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}' \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}') &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}' \end{aligned}}$$

APLICAŢIE. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$.

1. $(2\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} + 2\vec{v}) = (2\vec{u})(3\vec{u} + 2\vec{v}) + \vec{v}(3\vec{u} + 2\vec{v}) =$
$= (2\vec{u})(3\vec{u}) + (2\vec{u})(2\vec{v}) + \vec{v}(3\vec{u}) + \vec{v}(2\vec{v}) = 6\vec{u} \cdot \vec{u} +$
$+ 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6\vec{u} \cdot \vec{u} + 7\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v}.$

2. $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) = (2\vec{u})(-\vec{u} + 4\vec{v}) - (3\vec{v})(-\vec{u} + 4\vec{v}) =$
$= (2\vec{u})(-\vec{u}) + (2\vec{u})(4\vec{v}) - (3\vec{v})(-\vec{u}) - (3\vec{v})(4\vec{v}) =$
$= -2\vec{u} \cdot \vec{u} + 8\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 12\vec{v} \cdot \vec{v} =$
$= -2\vec{u} \cdot \vec{u} + 11\vec{u} \cdot \vec{v} - 12 \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}.$

3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v}(\vec{u} + \vec{v}) =$
$= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}.$

4. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}(\vec{u} - \vec{v}) - \vec{v}(\vec{u} - \vec{v}) =$
$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u}$

5. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}(\vec{u} - \vec{v}) =$
$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}.$

8.1.3. Pătratul scalar

Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial euclidian şi fie $\vec{u}$ un vector aparţinînd lui $\vec{E}$.

DEFINIŢIE / **Se numeşte pătrat scalar al vectorului $\vec{u}$, şi se notează $(\vec{u})^2$, produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{u}$:**

$$(\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$

Se ştie că (nr. **8.1.1.**):

$$\forall \vec{u} \in \vec{E} - \{\vec{0}\} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u})^2 > 0$$

Pe de altă parte la nr. **8.1.2.** se demonstrează că:

$$(\vec{0})^2 = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

adică:

$$\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{u})^2 = 0.$$

Reciproc, un vector $\vec{u}$ pentru care $(\vec{u})^2 = 0$ este nul întrucît în caz contrar am avea:

$$(\vec{u})^2 > 0.$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall \vec{u} \in \vec{E} \qquad (\vec{u})^2 \geq 0 \\ (\vec{u})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \end{array}}$$

Observaţie. — Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd lui $\vec{E}$; avem (nr. **8.1.2**, Aplicaţie):

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$
$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

Egalitățile precedente pot să se scrie și sub următoarea formă — formă în care le vom reține:

$$\boxed{\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\\ (\vec{u}-\vec{v})^2 &= \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2\\ (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}^2 - \vec{v}^2.\end{aligned}}$$

8.1.4. Normă a unui vector

Pentru orice vector $\vec{u}$ aparținînd spațiului vectorial euclidian $\vec{E}$, pătratul scalar $(\vec{u})^2$ este un număr real pozitiv sau nul care prin urmare posedă o rădăcină pătrată pozitivă $\sqrt{(\vec{u})^2}$.

DEFINIȚIE / **Se numește normă a unui vector $\vec{u}$ numărul real notat $\|\vec{u}\|$ și egal cu $\sqrt{(\vec{u})^2}$;**

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u})^2}.$$

Din această definiție rezultă că norma unui vector $\vec{u}$ este un număr real pozitiv sau nul.

Se spune că un vector $\vec{u}$ este **unitar** sau **normat** dacă norma sa este egală cu 1.

PROPRIETĂȚILE NORMEI UNUI VECTOR

1. Norma unui vector nul este:

$$\|\vec{0}\| = \sqrt{(\vec{0})^2} = \sqrt{0} = 0.$$

Reciproc, fie $\vec{u}$ un vector pentru care norma este nulă.

Avem:

$$\|\vec{u}\|^2 = (\vec{u})^2 = 0,$$

ceea ce implică (nr. 8.1.3): $\vec{u} = \vec{0}$.
Din cele de mai sus rezultă:

$$\boxed{\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.}$$

Prin *contrapoziţia* echivalenţei precedente se obţine:

$$\boxed{\|\vec{u}\| > 0 \Leftrightarrow \vec{u} \neq \vec{0}.}$$

2. Fie a un număr real şi fie $\vec{u}$ un vector.
Avem:

$$\|a\vec{u}\| = \sqrt{(a\vec{u})^2} = \sqrt{a^2(\vec{u})^2} = |a| \sqrt{(\vec{u})^2} = |a| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{\forall a \in \mathbf{R}, \ \forall \vec{u} \in \vec{E} \ \ \|a\vec{u}\| = |a| \, \|\vec{u}\|.}$$

În particular pentru orice vector $\vec{u}$, avem:

$$\|-\vec{u}\| = \|(-1)\vec{u}\| = \|-1\| \cdot \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|.$$

Observaţii. — 1. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori. Avem:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2 =$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

ceea ce implică:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

Rezultă din aceasta că produsul scalar a doi vectori poate fi exprimat în funcţie de normele acestor doi vectori şi de norma sumei lor.

2. Fie $\vec{u}$ un vector nenul; norma acestui vector, $\|\vec{u}\|$ nu este nulă şi avem:

$$\left\|\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\|\vec{u}\| = 1.$$

Rezultă din aceasta că **pentru orice vector $\vec{u}$ nenul, vectorul $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\cdot\vec{u}$ este unitar.**

3. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă în spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}$ şi fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$.

Vectorul $\vec{u}$ este nenul; rezultă că vectorul $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ este unitar şi deci nenul; cum în plus $\vec{i}$ aparţine lui $\vec{D}$, $\vec{i}$ este o bază a lui $\vec{D}$.

Fie $\vec{i'} = t\,\vec{i}$ un vector aparţinînd dreptei vectoriale $\vec{D}$; vectorul $\vec{i'}$ este unitar dacă şi numai dacă:

$$\|\vec{i'}\| = \|t\vec{i}\| = |t|\,\|\vec{i}\| = |t| = 1 \Leftrightarrow$$
$$t = 1 \text{ sau } t = -1 \Leftrightarrow \vec{i'} = \vec{i} \text{ sau } \vec{i'} = -\vec{i}.$$

O dreaptă vectorială $\vec{D}$ conţine deci doi vectori unitari şi numai doi; aceşti doi vectori sînt opuşi.

EXERCIŢII

8.1. 1° Fie $\vec{E}_1$ o dreaptă vectorială raportată la o bază $\vec{i}$ şi fie φ aplicaţia lui $\vec{E}_1 \times \vec{E}_1$, în **R** care la orice cuplu de vectori $(\vec{u}, \vec{u'})$ de abscise respective x şi x' face să corespundă numărul real $\varphi(\vec{u}, \vec{u'})$ definit prin:

$$\varphi(u, u') = xx'.$$

Să se demonstreze că φ este un produs scalar definit pe $\vec{E}_1$.

2° Aceeaşi chestiune pentru un plan vectorial $\vec{E}_2$ raportat la o bază $(\vec{i}, \vec{j})$ şi aplicaţia φ a lui $\vec{E}_2 \times \vec{E}_2$ în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$\forall \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \forall \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \varphi(\vec{u}, \vec{u}') = xx' + yy'.$$

3° Aceeaşi chestiune pentru spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ de dimensiune trei raportat la o bază $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi aplicaţia φ a lui $\vec{E}_3 \times \vec{E}_3$ în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$\forall \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \forall \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \varphi(\vec{u}, \vec{u}') = xx' + yy' + zz'.$$

8.2. Fie $\vec{E}_2$ un plan vectorial raportat la o bază $(\vec{i}, \vec{j})$ şi fie φ aplicaţia lui $\vec{E}_2 \times \vec{E}_2$ în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$\forall \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \forall \vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \varphi(\vec{u}, \vec{u}') = xx' - yy'.$$

1° Să se demonstreze că φ este o formă biliniară, simetrică, definită pe $\vec{E}_2$.

2° Să se determine mulţimea de vectori $\vec{u}$ astfel ca:

$$(\vec{u}, \vec{u}) = 0.$$

Să se deducă din aceasta că aplicaţia φ nu este un produs scalar.

8.3. 1° Fie $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ doi vectori liniari independenţi aparţinînd unui plan vectorial euclidian $\vec{E}_2$.
Să se demonstreze implicaţia:

$$[\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 0 \text{ şi } \vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 0] \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}.$$

2° Fie $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ trei vectori liniar independenţi aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune trei.
Să se demonstreze implicaţia:

$$[\vec{u}_1 \cdot \vec{v} = 0 \text{ şi } \vec{u}_2 \cdot \vec{v} = 0 \text{ şi } \vec{u}_3 \cdot \vec{v} = 0] \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}.$$

8.4. 1° Fie $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ doi vectori unitari liniar independenţi aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_2$ şi fie (α, β) un cuplu de numere reale.

Să se demonstreze că există un vector $\vec{v}$ aparţinînd lui $\vec{E}_2$, şi numai unul, astfel ca:

$$(\alpha, \beta) = (\vec{v} \cdot \vec{i}, \vec{v} \cdot \vec{j}).$$

2° Fie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trei vectori unitari liniar independenţi aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune trei şi fie (α, β, γ) un triplet de numere reale.

Să se demonstreze că există un vector $\vec{v}$ aparţinînd lui $\vec{E}_3$, şi numai unul, astfel ca:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\vec{v} \cdot \vec{i}, \vec{v} \cdot \vec{j}, \vec{v} \cdot \vec{k}).$$

8.5. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$ şi fie a, b, c trei numere reale. Să se calculeze:

1° $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2$.

2° $(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})^2$; $(\vec{u} - \vec{v} - \vec{w})^2$.

3° $(a\vec{u} + b\vec{v})^2$; $(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})^2$.

4° $(2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w})^2$; $(2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}) \cdot (-\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w})$.

8.6. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$.

Să se demonstreze că:

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2];$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2].$$

8.7. Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial euclidian şi fie $\vec{u}$ un vector nenul aparţinînd lui $\vec{E}$.

Desemnăm prin F, G, H submulţimile lui $\vec{E}$ definite prin:

$$F = \{\vec{v} \in \vec{E};\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0\};$$

$$G = \{\vec{v} \in \vec{E};\ \vec{u} \cdot \vec{v} > 0\};$$

$$H = \{\vec{v} \in \vec{E};\ \vec{u} \cdot \vec{v} < 0\}.$$

1° Să se demonstreze că $\{F, G, H\}$ este o partiţie a lui $\vec{E}$.

2° $\{F, G, H\}$ sînt subspaţii vectoriale ale lui $\vec{E}$?

8.8. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian. Să se scrie simplificat expresiile următoare:

$$(2\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}+3\vec{v})^2;$$

$$(\vec{u})^2-(3\vec{u}-\vec{v})^2;$$

$$(\vec{u})^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\frac{1}{4}(\vec{v})^2;$$

$$\|\vec{u}+2\vec{v}\|^2-\|\vec{v}\|^2;$$

$$\|\vec{u}\|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\|\vec{v}\|^2.$$

8.2. INEGALITATEA LUI CAUCHY–SCHWARZ

8.2.1. Inegalitata lui Cauchy–Schwarz

Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial euclidian şi fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd lui $\vec{E}$, $\vec{u}$ nefiind nul.
Punem:

$$(\vec{u})^2=\|\vec{u}\|^2=a,\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=b',\quad (\vec{v})^2=\|\vec{v}\|^2=c;$$

rezultă imediat că:

$$a>0 \quad \text{şi} \quad c\geqslant 0$$

Desemnăm prin $\mathbf{f}$ aplicaţia lui $\mathbf{R}$ în $\mathbf{R}$ definită prin

$$\forall x\in\mathbf{R}\ \mathbf{f}(x)=(x\vec{u}+\vec{v})^2.$$

Biliniaritatea şi simetria produsului scalar implică:

$$\mathbf{f}(x)=x^2(\vec{u})^2+2x(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{v})^2=ax^2+2b'x+c.$$

Pentru orice număr real x, pătratul scalar $(x\vec{u}+\vec{v})^2$ este pozitiv sau nul; avem prin urmare:

$$\forall x\in\mathbf{R}\ \mathbf{f}(x)\geq 0.$$

În particular:

$$f\left(-\frac{b'}{a}\right)=\frac{ac-b'^2}{a}\geq 0.$$

Numărul real a fiind strict pozitiv, avem:

$$ac - b'^2 \geq 0,$$

ceea ce implică:

$$b'^2 \leq ac.$$

Cum fiecare dintre cele două numere b'^2 şi ac este pozitiv sau nul, rezultă:

$$|b'| = \sqrt{b'^2} \leq \sqrt{ac} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{c},$$

adică:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|.$$

Rezultă imediat că inegalitatea precedentă este adevărată dacă vectorul $\vec{u}$ este nul; se poate deci scrie:

$$\boxed{\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2 \quad |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|.}$$

Acest rezultat este cunoscut sub numele de **inegalitatea lui Cauchy-Schwarz.**

Observaţie. — Se poate da inegalităţii lui Cauchy-Schwarz o demonstraţie mai naturală, dar care face apel la rezultatul relativ la semnul unei funcţii trinom de gradul doi.
Funcţia f definită prin:

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = ax^2 + 2b'x + c;$$

este o funcţie trinom de gradul doi astfel ca

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) \geq 0.$$

Dacă discriminantul redus al trinomului $ax^2 + 2b'x+c$ ar fi strict pozitiv, acest trinom ar avea două rădăcini reale şi diferite x' şi x''; pentru orice număr real α

astfel ca: $x' < \alpha < x''$ am avea atunci $f(\alpha) < 0$, ceea ce conduce la o contradicţie. Rezultă că

$$b'^2 - ac \leq 0;$$

ultima parte a demonstraţiei este aceeaşi ca şi a celei precedente.

$(\vec{u}, \vec{v})$ pentru care $\vert \vec{u} \cdot \vec{v} \vert = \Vert \vec{u} \Vert \; \Vert \vec{v} \Vert$.

8.2.2. Caracterizarea bivectorilor

Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}$ astfel ca:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

- Dacă $\vec{u}$ este nul, $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt *liniar dependenţi.*
- Dacă $\vec{u}$ este nenul, egalitatea:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \; \|\vec{v}\|$$

implică (notaţiile fiind cele dela alineatul nr. **8.2.1**):

$$b'^2 = ac$$

adică:

$$\frac{ac - b'^2}{a} = f\left(-\frac{b'}{a}\right) = \left(-\frac{b'}{a}\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = 0.$$

Rezultă din aceasta:

$$-\frac{b'}{a}\vec{u} + \vec{v} = 0,$$

ceea ce dovedeşte că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt *liniar dependenţi.*

Reciproc, fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori liniar dependenţi.

Dacă $\vec{u}$ este nul, rezultă imediat că:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = 0.$$

Dacă $\vec{u}$ este nenul, există un număr real t şi numai unul astfel încît

$$\vec{v} = t\vec{u}.$$

Avem atunci:

- $t \geq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = t(\vec{u})^2$ şi $\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|t\vec{u}\| = t\|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.
- $t < 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = t(\vec{u})^2$ şi $\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|t\vec{u}\| = -t\|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$.

În toate cazurile avem deci:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

ceea ce permite să enunţăm:

TEOREMĂ / Pentru doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ are loc egalitatea

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

dacă şi numai dacă aceşti doi vectori sînt liniar dependenţi.

Observaţie. — Se poate preciza teorema precedentă observînd că:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(\vec{u} = 0) \text{ sau } (\exists t \geq 0,\ \vec{v} = t\vec{u})].$$

8.2.3. Inegalitatea triunghiului

Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}$; avem:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Pe de altă parte inegalitatea lui Cauchy-Schwarz aplicată vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ dă:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

Rezultă din aceasta:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2,$$

ceea ce implică:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.}$$

Rezultatul precedent este cunoscut sub numele de **inegalitatea triunghiului.**

Consecinţă. — Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}$; avem:

$$\vec{u} = (\vec{u} + \vec{v}) + (-\vec{v}).$$

Pe de altă parte, inegalitatea triunghiului aplicată celor doi vectori $\vec{u} + \vec{v}$ şi $-\vec{v}$ dă:

$$\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u}+\vec{v}\| + \|-\vec{v}\|;$$

cum $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$, avem:

$$\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u}+\vec{v}\| + \|\vec{v}\|,$$

ceea ce implică:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|.$$

Se demonstrează la fel că:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \geq \|\vec{v}\| - \|\vec{u}\|.$$

Unul dintre cele două numere $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$ şi $\|\vec{v}\| - \|\vec{u}\|$ este egal cu:

$$| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| |.$$

Din cele de mai sus rezultă:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \geq | \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| |.$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 \quad \|\vec{u} + \vec{v}\| \geq | \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| |.}$$

8.2.4. Caracterizarea bivectorilor $(\vec{u}, \vec{v})$ pentru care $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}$; avem:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

$$(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

ceea ce dovedeşte că:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

deci că: $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.
Se ştie pe de altă parte că (nr. **8.2.2**):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow [(\vec{u} = 0) \quad \text{sau} \quad (\exists t \geqslant 0; \; \vec{v} = t\vec{u})].$$

Rezultă din cele arătate:

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow [\vec{u} = 0 \text{ sau } (\exists t \geqslant 0; \; \vec{v} = t\vec{u})].}$$

EXERCIŢII

8.9. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian şi fie $\vec{i}$ un vector unitar aparţinînd lui $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că pentru orice vector unitar $\vec{i'}$ aparţinînd lui $\vec{P}$ avem:

$$-1 \leq \vec{i} \cdot \vec{i'} \leq 1$$

2° Să se dovedească existenţa cel puţin a unui vector unitar $\vec{j}$ astfel ca $(\vec{i}, \vec{j})$ să fie o bază a lui $\vec{P}$; γ fiind numărul real egal cu $\vec{i} \cdot \vec{j}$, să se demonstreze că:

$$-1 < \gamma < 1.$$

3° Planul vectorial $\vec{P}$ fiind raportat la baza $(\vec{i}, \vec{j})$ să se demonstreze analitic:

a) că există vector unitar $\vec{i'}$, şi numai unul, astfel ca:

$$\vec{i} \cdot \vec{i'} = 1;$$

b) că există un vector unitar $\vec{i'}$ şi numai unul, astfel ca

$$\vec{i} \cdot \vec{i'} = -1;$$

c) că există doi vectori $\vec{i'}$, şi numai doi, astfel ca

$$\vec{i} \cdot \vec{i'} = c,$$

c fiind un număr real aparţinînd intervalului deschis $]-1, +1[$.

8.10. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori nenuli aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian astfel ca: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Să se demonstreze că:

$$\|\vec{u}\| < \|\vec{u} + \vec{v}\|;$$

$$\|\vec{v}\| < \|\vec{u} + \vec{v}\|.$$

8.11. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori nenuli aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian şi astfel ca: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Se notează:

$$\vec{u'} = a\vec{u} \quad \text{şi} \quad \vec{v'} = b\vec{v}$$

a şi b fiind două numere reale aparţinînd intervalul $[0, 1[$. Să se demonstreze că:

$$\|\vec{u'} + \vec{v'}\| < \|\vec{u} + \vec{v}\|.$$

8.12. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian astfel că $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt liniar independenţi şi:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0.$$

Notăm:

$$\vec{u'} = -\vec{v} + \vec{w},\ \vec{v'} = -\vec{w} + \vec{u},\ \vec{w'} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

1° Să se demonstreze că:

$$\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| - \|\vec{u}\| < \|\vec{u'}\| < \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

2° Să se deducă

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| < \|\vec{u'}\| + \|\vec{v'}\| + \|\vec{w'}\| < 2(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|).$$

8.13. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian, vectorul $\vec{u}$ nefiind nul.
Să se demonstreze implicaţia:

$$[t \in [-1, 0] \text{ şi } \vec{v} = t\vec{u}] \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|.$$

Să se studieze reciproca.

8.14. Se numeşte *normă* definită pe un spaţiu vectorul $\vec{E}$, orice aplicaţie N a lui $\vec{E}$ în $\mathbf{R}^+$ astfel ca:

$$\begin{array}{ll}
\forall \vec{u} \in \vec{E} - \{\vec{0}\} & N(\vec{u}) > 0 \\
\forall a \in \mathbf{R},\ \forall \vec{v} \in \vec{E} & N(a\vec{u}) = |a| N(\vec{u}); \\
\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2 & N(\vec{u} + \vec{v}) \leq N(\vec{u}) + N(\vec{v}).
\end{array}$$

1° Se presupune că spaţiul vectorial $\vec{E}$ este înzestrat cu un produs scalar.
a) Să se demonstreze că aplicaţia

$$\vec{u} \rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u})^2}$$

este o normă definită pe $\vec{E}$.
b) Să se demonstreze că:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

2° Se presupune că spaţiul vectorial $\vec{E}$ este de dimensiunea 2 şi că este raportat la o bază $(\vec{i}, \vec{j})$. Se notează prin N_1, N_2, N_3 cele trei aplicaţii ale lui $\vec{E}$ în $\mathbf{R}$ definite prin:

$$\forall \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{cases} N_1(\vec{u}) = \sup(|x|, |y|); \\ N_2(\vec{u}) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ N_3(\vec{u}) = |x| + |y|. \end{cases}$$

a) Să se demonstreze că N_1, N_2, N_3 sînt trei norme definite pe $\vec{E}$.
b) Să se demonstreze că

$$\forall \vec{u} \in \vec{E} \; N_1(\vec{u}) \leq N_2(\vec{u}) \leq N_3(\vec{u}) \leq 2N_1(\vec{u}).$$

8.3. ORTOGONALITATEA A DOI VECTORI

8.3.1. Vectori ortogonali

Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial euclidian şi fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd lui $\vec{E}$.

DEFINIŢIE / **Se spune că vectorul $\vec{u}$ este ortogonal cu vectorul $\vec{v}$ şi se scrie $\vec{u} \perp \vec{v}$ dacă produsul scalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ este nul:**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Din simetria produsului scalar rezultă că dacă vectorul $\vec{u}$ este ortogonal cu vectorul $\vec{v}$, vectorul $\vec{v}$ este ortogonal cu vectorul $\vec{u}$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u};$$

se spune atunci că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt **ortogonali.**

Consecințe. **1.** Pentru orice vector $\vec{u}$ aparținînd spațiului vectorial $\vec{E}$, avem

$$\vec{u} \cdot \vec{0} = 0,$$

ceea ce dovedește că **vectorul nul este ortogonal cu orice vector din** $\vec{E}$.

2. Un vector $\vec{u}$ este ortogonal cu el însuși dacă și numai dacă:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

adică dacă și numai dacă $\vec{u} = \vec{0}$ (nr. **8.1.3**); rezultă din aceasta că vectorul nul este singurul vector ortogonal cu el însuși ceea ce implică faptul că **vectorul nul este singurul vector ortogonal oricărui vector din** $\vec{E}$.

3. Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori ortogonali și fie a și b două numere reale; avem:

$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0,$$

ceea ce implică că vectorii $a\vec{u}$ și $b\vec{v}$ sînt ortogonali; prin urmare

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow a\vec{u} \perp b\vec{v}.}$$

4. Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori; avem:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v},$$

ceea ce dovedește că produsul scalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ este nul, deci că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt ortogonali dacă și numai dacă:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Rezultatul precedent care poate să se exprime prin echivalenţa:

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2.}$$

este cunoscut sub numele de **teorema lui Pitagora.**

Observaţie. Fie F un subspaţiu al spaţiului vectorial $\vec{E}$; se spune că un vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\vec{E}$ este ortogonal lui F şi se scrie: $\vec{u} \perp F$ dacă $\vec{u}$ este ortogonal oricărui vector din F.

Mai general se spune că două submulţimi F şi G ale spaţiului vectorial $\vec{E}$ sînt ortogonale, şi se scrie $F \perp G$, dacă orice vector din F este ortogonal oricărui vector din G.

EXERCIŢIU. *Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori ale căror norme sînt egale. Să se demonstreze că vectorii $\vec{u} + \vec{v}$ şi $\vec{u} - \vec{v}$ sînt ortogonali.*

Avem: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$, ceea ce dovedeşte că:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \perp (\vec{u} - \vec{v}).$$

8.3.2. Bază ortonormată a unui plan vectorial euclidian

Fie $\vec{E}_2$ un plan vectorial euclidian, $\vec{i}$ un vector unitar al lui $\vec{E}_2$ şi $\vec{u}$ un vector în aşa fel încît $(\vec{i}, \vec{u})$ să fie o bază a planului vectorial $\vec{E}_2$.

x fiind un număr real, vectorul $x\vec{i} + \vec{u}$ este ortogonal vectorului $\vec{i}$ dacă şi numai dacă:

$$(x\vec{i} + \vec{u}) \cdot \vec{i} = x(\vec{i})^2 + \vec{u} \cdot \vec{i} = x + \vec{u} \cdot \vec{i} = 0,$$

adică dacă şi numai dacă: $x = -\vec{u} \cdot \vec{i}$.
Să punem: $\alpha = -(\vec{u} \cdot \vec{i})$ şi $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \vec{u}$.
Vectorul $\vec{v}$ astfel definit este nenul căci a doua coordonată a sa în baza $(\vec{i}, \vec{u})$ este 1; pe de altă parte, acest vector este evident ortogonal cu $\vec{i}$. Rezultă că vectorul $\vec{j} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ este unitar şi ortogonal cu $\vec{i}$,

ceea ce dovedeşte că cei doi vectori $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt unitari şi ortogonali:

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ şi } \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

● Fie a şi b două numere reale astfel ca: $a\vec{i} + b\vec{j} = \vec{0}$; avem:

$$0 = \vec{i} \cdot \vec{0} = \vec{i} \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) = a(\vec{i})^2 + b(\vec{i} \cdot \vec{j}) = a\|\vec{i}\|^2 = a,$$
$$0 = \vec{j} \cdot \vec{0} = \vec{j} \cdot (a\vec{i} + b\vec{j}) = a(\vec{j} \cdot \vec{i}) + b(\vec{j})^2 = b\|\vec{j}\|^2 = b,$$

ceea ce dovedeşte că vectorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt liniar independenţi, deci că bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază a planului vectorial $\vec{E}_2$.

DEFINIŢIE / **Se spune că o bază $(\vec{i}, \vec{j})$ a planului vectorial euclidian $\vec{E}_2$ este ortonormată, dacă $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt ortogonali şi dacă fiecare dintre ei este unitar.**

Studiul care a precedat această definiţie dovedeşte existenţa bazelor ortonormate ale lui $\vec{E}_2$ şi permite să se enunţe:

TEOREMA / 1 **Pentru orice vector unitar $\vec{i}$ aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{E}_2$ există cel puţin un vector $\vec{j}$ aparţinînd lui $\vec{E}_2$ astfel ca bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ să fie o bază ortonormată a lui $\vec{E}_2$.**

TEOREMA / 2 **Dacă doi vectori $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{E}_2$ sînt unitari şi ortogonali, bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{E}_2$.**

Observaţie. — Se spune că o bază $(\vec{i}, \vec{j})$ a planului vectorial euclidian $\vec{E}_2$ este **ortogonală,** dacă vectorii $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt ortogonali.

D 8.3.3. Bază ortonormată a unui spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3

Fie $\vec{E}_3$ un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3, $\vec{P}$ un plan vectorial inclus în $\vec{E}_3$ şi $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ (am dovedit în paragraful precedent existenţa unei baze a lui $\vec{P}$).

● Fie $\vec{u}$ un vector astfel că $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{u})$ este o bază a lui $\vec{E}_3$.

x şi y fiind două numere reale, vectorul $x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{u}$ este ortogonal cu vectorul $\vec{i}$ şi cu vectorul $\vec{j}$ dacă şi numai dacă:

$$(x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{u}) \cdot \vec{i} = x + \vec{u} \cdot \vec{i} = 0;$$

şi $$(x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{u}) \cdot \vec{j} = y + \vec{u} \cdot \vec{j} = 0,$$

adică dacă şi numai dacă:

$$x = -(\vec{u} \cdot \vec{i}) \text{ şi } y = -(\vec{u} \cdot \vec{j}).$$

Punem:

$\alpha = -(\vec{u} \cdot \vec{i})$, $\beta - (\vec{u} \cdot \vec{j})$, $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \vec{u}$; vectorul $\vec{v}$ astfel definit este nenul căci a treia coordonată a sa în baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{u})$ este 1; pe de altă parte, $\vec{v}$ este evident ortogonal cu $\vec{i}$ şi cu $\vec{j}$; rezultă din aceasta că vectorul $\vec{k} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ este unitar şi ortogonal cu vectorul $\vec{i}$ şi cu vectorul $\vec{j}$, ceea ce dovedeşte că cei trei vectori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sînt unitari şi doi cîte doi ortogonali:

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ şi $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$

● Fie a, b, c trei numere reale astfel ca:

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0};$$

Avem:

$$0 = \vec{i}\cdot\vec{0} = \vec{i}\cdot(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = a(\vec{i})^2 + b(\vec{i}\cdot\vec{j}) + c(\vec{i}\cdot\vec{k}) = a$$

$$0 = \vec{j}\cdot\vec{0} = \vec{j}\cdot(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = a(\vec{i}\cdot\vec{j}) + b(\vec{j})^2 + (\vec{j}\cdot\vec{k}) = b$$

$$0 = \vec{k}\cdot\vec{0} = \vec{k}\cdot(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) = a(\vec{k}\cdot\vec{i}) + b(\vec{k}\cdot\vec{j}) + c(\vec{k})^2 = c,$$

ceea ce implică faptul că vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sînt liniar independenţi, deci trivectorul $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este o bază a spaţiului vectorial $\vec{E}_3$.

DEFINIŢIE / **Se spune că o bază $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este ortonormată, dacă vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sînt doi cîte doi ortogonali şi dacă fiecare dintre ei este unitar.**

Studiul care a precedat această definiţie dovedeşte existenţa bazelor ortonormate ale lui $\vec{E}_3$ şi permite să se enunţe:

TEOREMA / 1 **$\vec{i}$ şi $\vec{j}$ fiind doi vectori unitari şi ortogonali aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$, există cel puţin un vector $\vec{k}$ aparţinînd lui $\vec{E}_3$ astfel încît trivectorul $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ să constituie o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$.**

TEOREMA / 2 **Dacă trei vectori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$ sînt unitari şi doi cîte doi ortogonali, trivectorul $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$.**

Observaţie. — 1. Fie $\vec{i}$ un vector unitar aparţinînd lui $\vec{E}_3$; $\vec{P}$ fiind un plan vectorial al lui $\vec{E}_3$, conţinînd pe $\vec{i}$, se ştie că există cel puţin un vector $\vec{j}$ aparţinînd lui $\vec{P}$, unitar şi ortogonal cu $\vec{i}$; teorema 1 permite atunci să se afirme existenţa cel puţin a unui vector $\vec{k}$, aparţinînd lui $\vec{E}_3$, astfel ca trivectorul $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ să fie o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$. Rezultă din aceasta că, **pentru orice vector unitar $\vec{i}$ din $\vec{E}_3$ există cel puţin doi vectori unitari $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ din $\vec{E}_3$ astfel ca trivectorul $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ să fie o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$.**

2. Se spune că o bază $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este **ortogonală**, dacă vectorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sînt doi cîte doi ortogonali.

8.3.4. Expresia analitică a produsului scalar a doi vectori într-o bază ortonormată

Fie $\vec{E}_3$ un spaţiu vectorial euclidian raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ fiind doi vectori de coordonate respective

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \text{ avem:}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}).$$

Din simetria şi biliniaritatea produsului scalar rezultă:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2(\vec{i})^2 + y_1y_2(\vec{j})^2 + z_1z_2(\vec{k})^2 +$$
$$+ (x_1y_2 + y_1x_2)\vec{i} \cdot \vec{j} + (y_1z_2 + z_1y_2)\vec{j} \cdot \vec{k} +$$
$$+ (z_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot z_2)\vec{k} \cdot \vec{i}.$$

Cum baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este ortonormată, avem

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = (\vec{k})^2 = 1.$$

şi $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ ceea ce implică

$$\boxed{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Consecinţe. — 1. Fie $\vec{u}$ un vector de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Avem:

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x \times 1 + y \times 0 + z \times 0 = x,$$
$$\vec{u} \cdot \vec{j} = x \times 0 + y \times 1 + z \times 0 = y,$$
$$\vec{u} \cdot \vec{k} = x \times 0 + y \times 0 + z \times 1 = z.$$

Rezultă din acestea că cele trei coordonate ale unui vector $\vec{u}$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sînt respectiv egale cu cele trei produse scalare ale vectorului $\vec{u}$ cu fiecare dintre cei trei vectori ai bazei considerate.

2. Fie $\vec{u}$ un vector de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Avem:

$$\| \vec{u} \|^2 = (\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$$

ceea ce implică

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

Observaţie. — Fie $\vec{E}_2$ un plan vectorial euclidian raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$; o demonstraţie analoagă cu cea făcută pentru spaţiul euclidian $\vec{E}_3$ dovedeşte că:

- produsul scalar a doi vectori $\vec{u}_1$ şi $\vec{u}_2$ de coordonate respective $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$\boxed{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

- norma unui vector $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

EXERCIŢII. I. *$\vec{u}$ şi $\vec{v}$ fiind doi vectori aparţinînd unui plan vectorial euclidian $\vec{P}$, să se demonstreze analitic echivalenţa:*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

Fie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ coordonatele respective ale vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ într-o bază ortonormată a planului vectorial $\vec{P}$; coordonatele vectorului $\vec{u} + \vec{v}$ sînt $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ şi avem:

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$$

ceea ce implică:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (x+x')^2 + (y+y')^2 =$$
$$= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow 2(xx'+yy') = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0.$$

Avem pe de altă parte

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0.$$

Rezultă:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

II. Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ fiind raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ cei doi vectori de coordonate respective $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Să se determine un vector unitar $\vec{v}$ ortogonal cu $\vec{u}$ şi cu $\vec{u}'$.

Un vector $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ este unitar şi ortogonal cu $\vec{u}$ şi cu $\vec{u}'$ dacă şi numai dacă:

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \\ \vec{u}'\cdot\vec{v} = 0 \\ \|\vec{v}\| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \\ 6z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 2z \\ y = z \\ z = -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

Rezultă că există doi vectori verificînd condiţiile impuse: vectorii de coordonate

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

EXERCIŢII

8.15. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ doi vectori liniar independenţi aparţinînd unui plan vectorial euclidian $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că există un vector $\vec{v}$ aparţinînd lui $\vec{P}$ şi numai unul, astfel ca:

$$(\vec{v}-\vec{u}) \perp \vec{u} \text{ şi } (\vec{v}-\vec{u}') \perp \vec{u}'.$$

2° Se raportează planul vectorial euclidian $\vec{P}$ la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Să se determine analitic vectorul $\vec{v}$, în cazurile următoare:

a) $$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

b) $$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

c) $$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}.$$

8.16. Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ fiind doi vectori aparţinînd lui $\vec{E}_3$, să se determine un vector $\vec{v}$ de normă dată, astfel încît:

$$(\vec{v}-\vec{u}) \perp \vec{u} \quad \text{şi} \quad (\vec{v}-\vec{u}') \perp \vec{u}',$$

în cazurile următoare:

a) $$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{5}.$$

b) $$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}.$$

8.17. Fie $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ trei vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$.

Să se demonstreze implicaţia următoare:

$$\left.\begin{matrix}\vec{u}_1 \perp (\vec{u}_2-\vec{u}_3)\\ \vec{u}_2 \perp (\vec{u}_3-\vec{u}_1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{u}_3 \perp (\vec{u}_1-\vec{u}_2).$$

8.18. Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Să se rezolve şi eventual să se discute ecuaţia definită prin relaţia:

$$(x\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0,$$

în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\m\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}m+1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\p\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

8.19 Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se determine un vector $\vec{v}$ de normă dată, ortogonal cu doi vectori daţi $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$, în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|\vec{v}\| = 2$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\|\vec{v}\| = \dfrac{3}{2}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\|\vec{v}\| = 3$.

8.20. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian. Să se demonstreze echivalenţele următoare:

1° $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Leftrightarrow \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

2° $(\vec{u} \perp \vec{v}) \Rightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

8.21. Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$, este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Fie $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ şi $\vec{u'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ doi vectori din $\vec{E}_3$.

Se face notaţia: $d_1 = \begin{vmatrix}\beta & \beta'\\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix}\gamma & \gamma'\\ \alpha & \alpha'\end{vmatrix}$, $d_3 = \begin{vmatrix}\alpha & \alpha'\\ \beta & \beta'\end{vmatrix}$.

1° Să se demonstreze că vectorul $\vec{v}$ de coordonate $\begin{pmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{pmatrix}$ este ortogonal cu vectorul $\vec{u}$ şi cu vectorul $\vec{u'}$.

2° Să se demonstreze că, dacă $\vec{u}$ şi $\vec{u'}$ sînt liniar independenţi, vectorul $\vec{v}$ este nenul. Să se deducă atunci că trivectorul $(\vec{u}, \vec{u'}, \vec{v})$ este o bază a lui $\vec{E}_3$.

4° *Aplicaţie.* Să se determine un vector ortogonal cu vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{u'}$ în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

8.22. Să se demonstreze că n vectori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian, nenuli şi doi cîte doi ortogonali, sînt liniar independenţi.

8.23. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori liniar independenţi aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian.

1° Să se demonstreze că există un număr real a, şi numai unul astfel încît vectorul $\vec{h}$ definit prin: $\vec{h} = (1 - a)\vec{u} + a\vec{v}$ să fie ortogonal cu $\vec{v} - \vec{u}$.

2° Să se demonstreze:

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \|\vec{h}\|\,\|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \dfrac{1}{\|\vec{h}\|^2} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|^2} + \dfrac{1}{\|\vec{v}\|^2}$.

c) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u})^2 = (\vec{h} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{h})^2 = -(\vec{h} - \vec{u}) \cdot (\vec{h} - \vec{v})$.

8.24. Fie $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trei vectori nenuli aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune 3.

1° Să se demonstreze că, dacă sînt doi cîte doi ortogonali, avem:

$$\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2.$$

2° Să se demonstreze că implicaţia reciprocă implicaţiei de la punctul 1° este falsă.

8.25. Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Să se demonstreze că vectorul $\vec{i}'\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ este normat şi să se determine doi vectori $\vec{j}'$ şi $\vec{k}'$ astfel ca trivectorul $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ să constituie o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$.

2° Aceeaşi chestiune în cazurile următoare:

a) $\vec{i}'\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; b) $\vec{i}'\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; c) $\vec{i}'\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$.

8.26. Spaţiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Să se demonstreze că cei doi vectori $\vec{i}'\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ şi $\vec{j}'\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ sînt normaţi şi ortogonali şi să se determine un vector $\vec{k}'$ astfel ca trivectorul $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ să fie o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$.

2° Aceeaşi chestiune în cazul următor:

$$\vec{i}'\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \vec{j}'\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

8.4. ORTOGONALITATEA A DOUĂ SUBSPAŢII VECTORIALE

8.4.1. Ortogonalitatea a două drepte vectoriale

În acest paragraf $\vec{E}$ reprezintă un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 2 sau 3.

$\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ fiind doi vectori *nenuli* şi *ortogonali* aparţinînd lui $\vec{E}$, fie $\vec{D}$ dreapta vectorială conţinînd vectorul $\vec{u}$ şi fie $\vec{u}'$ dreapta vectorială conţinînd vectorul $\vec{u}'$.

$\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ fiind doi vectori aparţinînd respectiv lui $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$, există două numere reale t şi t' astfel ca:

$$\vec{v} = t\vec{u} \text{ şi } \vec{v}' = t'\vec{u}';$$

rezultă din acestea că:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = (t\vec{u}) \cdot (t'\vec{u}') = tt'(\vec{u} \cdot \vec{u}') = 0,$$

ceea ce dovedeşte că orice vector aparţinînd dreptei vectoriale $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector aparţinînd dreptei vectoriale $\vec{D}'$.

DEFINIŢIE / **Se spune că o dreaptă vectorială $\vec{D}$ este ortogonală unei drepte vectoriale $\vec{D}'$, şi se scrie $\vec{D} \perp \vec{D}'$, dacă orice vector din $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector din $\vec{D}'$.**

Se defineşte astfel, pe mulţimea dreptelor vectoriale incluse în $\vec{E}$, o relaţie liniară numită **relaţia de ortogonalitate a două drepte vectoriale.**

Remarcăm că, dacă o dreaptă vectorială $\vec{D}$ este ortogonală unei drepte vectoriale $\vec{D}'$, $\vec{D}'$ este ortogonală lui $\vec{D}$; se spune de asemenea că $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ **sînt ortogonale.** Studiul făcut la începutul acestui paragraf dovedeşte că există astfel de drepte vectoriale.

PROPRIETĂŢI ALE ORTOGONALITĂŢII A DOUĂ DREPTE VECTORIALE

1. Fie $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ două drepte vectoriale, fie $\vec{u}$ un vector *nenul* aparţinînd lui $\vec{D}$ şi fie $\vec{u}'$ un vector nenul aparţinînd lui $\vec{D}'$.

● Rezultă imediat că: $\vec{D} \perp \vec{D}' \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$.

● *Reciproc,* dacă $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ sînt ortogonali, s-a demonstrat că orice vector aparţinînd lui $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector aparţinînd lui $\vec{D}'$, deci că dreptele vectoriale $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ sînt ortogonale:

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{D}'$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMA / **Două drepte vectoriale $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ sînt ortogonale dacă şi numai dacă un vector**

nenul din $\vec{D}$ este ortogonal unui vector nenul din $\vec{D}'$.

2. Fie $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ două drepte vectoriale ortogonale. Vectorul nul aparţine evident intersecţiei $\vec{D} \cap \vec{D}'$. Pe de altă parte, pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd intersecţiei $\vec{D} \cap \vec{D}'$, avem $\vec{u} \perp \vec{u}$, ceea ce implică (nr. **8.3.1**) : $\vec{u} = \vec{0}$.
Rezultă :

$$\vec{D} \cap \vec{D}' = \{\vec{0}\}.$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{\vec{D} \perp \vec{D}' \Rightarrow \vec{D} \cap \vec{D}' = \{\vec{0}\}.}$$

8.4.2. Dreaptă vectorială ortogonală cu o dreaptă vectorială dată

Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian şi fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă în $\vec{P}$.
$\vec{i}$ fiind un vector unitar aparţinînd lui $\vec{D}$, se ştie că există un vector $\vec{j}$ aparţinînd lui $\vec{P}$, astfel încît bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ să fie o bază ortonormată a lui $\vec{P}$.
Urmează atunci imediat că dreapta vectorială $\vec{\Delta}$ conţinînd vectorul $\vec{j}$ este inclusă în $\vec{P}$ şi este ortogonală lui $\vec{D}$.

Reciproc, fie $\vec{D}'$ o dreaptă vectorială inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală lui $\vec{D}$; pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\vec{\Delta}$, de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, avem:

$$\vec{u} \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{i} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Rezultă din aceasta: $\vec{u} = y\vec{j}$,
ceea ce dovedeşte că: $\vec{u} \in \vec{\Delta}$,
deci că: $\vec{\Delta}' \subset \vec{\Delta}$.
Dreapta vectorială $\vec{\Delta}'$, care este inclusă în dreapta vectorială $\vec{\Delta}$, este deci egală cu $\vec{\Delta}$ (nr. **3.1.6**).
Se poate enunţa:

TEOREMA / 1 **Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă în planul vectorial $\vec{P}$. Există o dreaptă vectorială $\vec{\Delta}$, şi numai una, inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$.**

Observaţie: — Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă în planul vectorial $\vec{P}$, fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$ şi fie $\vec{\Delta}$ dreapta vectorială inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$. Avem:

$$\vec{v} \in \vec{\Delta} \Rightarrow \vec{v} \in \vec{P} \text{ şi } \vec{v} \perp \vec{u}.$$

Reciproc, fie $\vec{v}$ un vector astfel ca:

$$\vec{v} \in \vec{P} \text{ şi } \vec{v} \perp \vec{u}.$$

Dacă $\vec{v}$ este nul, urmează imediat că $\vec{v}$ aparţine lui $\vec{\Delta}$. Dacă $\vec{v}$ nu este nul, dreapta vectorială $\vec{\Delta}'$ conţinînd pe $\vec{v}$ este inclusă în $\vec{P}$ şi este ortogonală lui $\vec{D}$ (nr. **8.4.1**); rezultă atunci din teorema precedentă 1 că $\vec{\Delta}' = \vec{\Delta}$, deci că $\vec{v}$ aparţine lui $\vec{\Delta}$. Avem în cele din urmă:

$$\vec{v} \in \vec{\Delta}' \Leftrightarrow \vec{v} \in \vec{P} \text{ şi } \vec{v} \perp \vec{u}.$$

TEOREMA / 2 **Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă într-un plan vectorial $\vec{P}$ şi fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$. Dreapta vectorială $\vec{\Delta}$ inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$ este mulţimea vectorilor din $\vec{P}$ ortogonali cu vectorul $\vec{u}$.**

Exerciţii. I. *Planul vectorial $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Fie $\vec{D}$ dreapta vectorială în care o bază este vectorul nul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ şi fie $\vec{\Delta}$ dreapta vectorială inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$.*

1° *Să se demonstreze că:* $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \vec{\Delta} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0.$

2° *Să se demonstreze că o bază a lui $\vec{\Delta}$ este vectorul $\vec{u'}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$.*

1° Reamintim că dreapta vectorială $\vec{\Delta}$ este mulţimea vectorilor din $\vec{P}$ ortogonali vectorului $\vec{u}$; avem deci:

$$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \vec{\Delta} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0.$$

Relaţia $\alpha x + \beta y = 0$, care este verificată de coordonatele x, y ale unui vector $\vec{v}$ al lui $\vec{P}$ dacă şi numai dacă acest vector aparţine dreptei vectoriale Δ este o **ecuaţie carteziană** a lui $\vec{\Delta}$.

2° Vectorul $\vec{u}$ nefiind nul, una cel puţin dintre coordonatele sale α, β nu este nulă; rezultă din aceasta că vectorul $\vec{u}$ nu este nul; avem pe de altă parte:

$$\vec{u'}\cdot\vec{u} = (-\beta)\alpha + \alpha\beta = 0,$$

ceea ce dovedeşte că $\vec{u'}$ este ortogonal cu $\vec{u}$, deci că $\vec{u'}$ aparţine lui $\vec{\Delta}$. Vectorul $\vec{u'}$ care este nenul şi care aparţine lui $\vec{\Delta}$ este deci o bază a lui $\vec{\Delta}$.

II. *Planul vectorial $\vec{P}$ fiind raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, fie $\vec{F}$ mulţimea vectorilor $\vec{v}$ pentru care coordonatele $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ verifică relaţia $\alpha x + \beta y = 0$, unde α şi β sînt două numere reale nu amîndouă nule.*

Să se demonstreze că $\vec{F}$ este dreapta vectorială ortogonală dreptei vectoriale conținînd vectorul nenul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

Fie $\vec{D}$ dreapta vectorială conținînd vectorul nenul $\vec{u}$ și fie $\vec{\Delta}$ dreapta vectorială ortogonală cu $\vec{D}$. Avem:

$$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \vec{F} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0,$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \vec{\Delta} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = 0.$$

Rezultă: $\vec{v} \in \vec{F} \Leftrightarrow \vec{v} \in \vec{\Delta}$,

ceea ce dovedește că: $\vec{F} = \vec{\Delta}$.

$\overline{\text{D}}$ 8.4.3. Ortogonalitatea unei drepte vectoriale cu un plan vectorial

Fie $\vec{E}_3$ un spațiu vectorial euclidian de dimensiune 3; $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fiind o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$, fie $\vec{D}$ dreapta vectorială în care o bază este $\vec{k}$ și fie $\vec{P}$ planul vectorial în care o bază este $(\vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{v} = t\vec{k}$ fiind un vector aparținînd lui $\vec{D}$ și $\vec{w} = t'\vec{i} + t''\vec{j}$ fiind un vector aparținînd lui $\vec{P}$, avem:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (t\vec{k}) \cdot (t'\vec{i} + t''\vec{j}) = tt'(\vec{k} \cdot \vec{i}) + tt''(\vec{k} \cdot \vec{j}) = 0$$

ceea ce dovedește că orice vector al lui $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector din $\vec{P}$.

DEFINIȚIE / **Se spune că o dreaptă vectorială $\vec{D}$ este ortogonală cu un plan vectorial $\vec{P}$, și se scrie $\vec{D} \perp \vec{P}$, dacă orice vector din $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector din $\vec{P}$.**

S-a definit astfel o relaţie binară între elementele mulţimii dreptelor vectoriale din $\vec{E}_3$ şi mulţimea planelor vectoriale din $\vec{E}_3$, **numită relaţia de ortogonalitate a unei drepte vectoriale cu un plan vectorial.**

Atunci cînd o dreaptă vectorială $\vec{D}$ este ortogonală cu un plan vectorial $\vec{P}$, se spune de asemenea că $\vec{P}$ **este ortogonal cu** $\vec{D}$, sau că $\vec{D}$ **şi** $\vec{P}$ **sînt ortogonale**; studiul făcut la începutul acestui paragraf dovedeşte că există o dreaptă vectorială şi un plan vectorial ortogonale.

PROPRIETĂŢI ALE ORTOGONALITĂŢII UNEI DREPTE VECTORIALE CU UN PLAN VECTORIAL

1. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială, $\vec{P}$ un plan vectorial, $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$ şi $(\vec{u}', \vec{u}'')$ o bază a lui $\vec{P}$.

● Urmează imediat că:

$$\vec{D} \perp \vec{P} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}' \text{ şi } \vec{u} \perp \vec{u}''.$$

● *Reciproc,* dacă vectorul $\vec{u}$ este ortogonal vectorilor $\vec{u}'$ şi $\vec{u}''$ o demonstraţie analoagă celei făcute la începutul acestui paragraf dovedeşte că orice vector din $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector din $\vec{P}$, deci că $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ sînt ortogonale:

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \text{ şi } \vec{u} \perp \vec{u}'' \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{P}.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **O drepată vectorială $\vec{D}$ şi un plan vectorial $\vec{P}$ sînt ortogonale dacă şi numai**

dacă un vector nenul din $\vec{D}$ este ortogonal cu cei doi vectori ai unei baze a lui $\vec{P}$.

2. Fie $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ o dreaptă vectorială şi un plan vectorial, ortogonale. Vectorul nul aparţine evident intersecţiei $\vec{D} \cap \vec{P}$.

Pe de altă parte, pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd intersecţiei $\vec{D} \cap \vec{P}$, avem:

$$\vec{u} \perp \vec{u}$$

ceea ce implică (nr. **8.3.1**):

$$\vec{u} = 0.$$

Rezultă din aceasta:

$$\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\};$$

se poate deci scrie:

$$\boxed{\vec{D} \perp \vec{P} \Rightarrow \vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}.}$$

D 8.4.4. Dreaptă vectorială ortogonală cu un plan vectorial dat

Fie $\vec{E}_3$ un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3 şi fie $\vec{P}$ un plan vectorial inclus în $\vec{E}_3$.

Se ştie că există cel puţin o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a lui $\vec{E}_3$ astfel încît bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ să fie o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ (nr. **8.3.3**).

Urmează atunci imediat că dreapta vectorială $\vec{D}$, pentru care o bază este $\vec{k}$, este ortogonală planului vectorial $\vec{P}$.

Reciproc, fie $\vec{D}'$ o dreaptă vectorială ortogonală lui $\vec{P}$; pentru orice vector $\vec{u}$ aparținînd lui $\vec{D}'$, de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a lui $\vec{E}_3$, avem:

$$\vec{u} \perp \vec{i} \text{ şi } \vec{u} \perp \vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{i} = \vec{u} \cdot \vec{j} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = y = 0.$$

Rezultă din acestea: $\vec{u} = z\vec{k}$, ceea ce dovedeşte că: $\vec{u} \in \vec{D}$, deci că:

$$\vec{D}' \subset \vec{D}.$$

Dreapta vectorială $\vec{D}'$, care este inclusă în dreapta vectorială $\vec{D}$, este deci egală cu $\vec{D}$. Se poate enunța:

TEOREMA 1. / **Fie $\vec{P}$ un plan vectorial inclus într-un spațiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune 3. Există o dreaptă vectorială, şi numai una, inclusă în $\vec{E}_3$ şi ortogonală lui $\vec{P}$.**

Observație. — Fie $\vec{P}$ un plan vectorial al lui $\vec{E}_3$, fie $(\vec{u}, \vec{u}')$ o bază a lui $\vec{P}$ şi fie $\vec{D}$ dreapta vectorială ortogonală lui $\vec{P}$.

Avem:

$$\vec{v} \in \vec{D} = \vec{v} \perp \vec{u} \text{ şi } \vec{v} \perp \vec{u}'.$$

Reciproc, fie $\vec{v}$ un vector astfel încît:

$$\vec{v} \perp \vec{u} \text{ şi } \vec{v}' \perp \vec{u}'.$$

Dacă $\vec{v}$ este nul, urmează imediat că $\vec{v}$ aparține lui $\vec{D}$.
Dacă $\vec{v}$ nu este nul, dreapta vectorială $\vec{D}'$ conținînd pe $\vec{v}$ este ortogonală lui $\vec{P}$ (nr. 8.4.3); rezultă atunci din teorema 1 (precedentă) că $\vec{D}' = \vec{D}$, deci că $\vec{v}$ aparține lui $\vec{D}$.
Avem în cele din urmă:

$$\vec{v} \in \vec{D} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \text{ și } \vec{v} \perp \vec{u}',$$

ceea ce permite să enunțăm:

TEOREMA 2. **Fie $\vec{P}$ un plan vectorial inclus în spațiul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ și fie $(\vec{u}, \vec{u}')$ o bază a lui $\vec{P}$.**

Dreapta vectorială ortogonală lui $\vec{P}$ este mulțimea vectorilor lui $\vec{E}_3$ ortogonali vectorului $\vec{u}$ și vectorului $\vec{u}'$.

Exerciții. I. *Spațiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*
1° *Să se găsească un sistem de ecuații carteziene ale dreptei vectoriale D ortogonale planului $\vec{P}$ conținînd cei doi vectori:*

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \vec{u}'\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

2° *Să se determine o bază a lui $\vec{D}$.*
1° Dreapta vectorială $\vec{D}$ este mulțimea vectorilor $\vec{v}$ ortogonali cu $\vec{u}$ și cu $\vec{u}'$, avem deci:

$$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \vec{D} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{v} \perp \vec{u}\\ \vec{v} \perp \vec{u}'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{v}\cdot\vec{u} = 0\\ \vec{v}\cdot\vec{u}' = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1)\\ -2x + y + 3z = 0 & (2)\end{cases}$$

Relațiile (1) și (2) care sînt verificate de către coordonatele $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

ela unui vector $\vec{v}$ al lui $\vec{E}_3$ constituie un sistem de ecuaţii carteziene ale dreptei vectoriale $\vec{D}$ dacă şi numai dacă acest vector aparţine lui $\vec{D}$.

2° O bază a lui $\vec{D}$ este un vector nenul aparţinînd lui $\vec{D}$, adică un vector pentru care tripletul de coordonate (x, y, z) este o soluţie a sistemului:

$$\text{I}\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0, \end{cases}$$

diferită de soluţia (0, 0, 0).

Sistemul I este echivalent cu sistemul:

$$\text{II}\begin{cases} x = \dfrac{7}{3}\, z \\ y = \dfrac{5}{3}\, z. \end{cases}$$

Rezultă din aceasta că vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\5\\3\end{pmatrix}$ este o bază a lui $\vec{D}$.

II. *Fie $\vec{P}$ un plan vectorial de ecuaţie carteziană $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a lui $\vec{E}_3$. Să se demonstreze că o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}$, ortogonală cu $\vec{P}$, este vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.*

Pentru orice vector $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ aparţinînd lui $\vec{P}$, avem:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

ceea ce dovedeşte că vectorul $\vec{u}$ este ortogonal oricărui vector din $\vec{P}$, deci că $\vec{u}$ aparţine dreptei vectoriale $\vec{D}$ ortogonală lui $\vec{P}$. Cum cel puţin unul dintre cele trei numere α, β, γ nu este nul, vectorul $\vec{u}$ nu este nul.

Rezultă că vectorul $\vec{u}$, care nu este nul şi care aparţine lui $\vec{D}$, este o bază a lui $\vec{D}$.

D 8.4.5. Plan vectorial ortogonal unei drepte vectoriale date

Fie $\vec{E}_3$, un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune 3 şi fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă în $\vec{E}_3$. Se ştie că există cel puţin o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a lui $\vec{E}_3$ astfel că vectorul unitar $\vec{i}$ este o bază a lui $\vec{D}$ (nr. **8.3.3**).

Urmează atunci imediat că planul vectorial $\vec{P}$, pentru care o bază este $(\vec{j}, \vec{k})$, este ortogonal dreptei vectoriale $\vec{D}$.

Reciproc, fie $\vec{P}'$ un plan vectorial ortogonal lui $\vec{D}$; pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\vec{P}'$, de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a lui $\vec{E}_3$, avem:

$$\vec{u} \perp \vec{i} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Rezultă din aceasta:

$$\vec{u} = y\vec{j} + z\vec{k},$$

ceea ce dovedeşte că:

$$\vec{u} \in \vec{P}$$

deci că:

$$\vec{P}' \subset \vec{P}.$$

Planul vectorial $\vec{P}'$, care este inclus în planul vectorial $\vec{P}$, este deci egal cu $\vec{P}$ (nr. **3.1.6**).

Se poate enunţa:

TEOREMA/ 1. **Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă într-un spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune 3. Există un plan vectorial, şi numai unul, inclus în $\vec{E}_3$ şi ortogonal lui $\vec{D}$.**

Observaţie. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială a lui $\vec{E}_3$, fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$ şi fie $\vec{P}$ planul vectorial ortogonal lui $\vec{D}$.

Avem: $\vec{v} \in \vec{P} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}$.

Reciproc, fie $\vec{v}$ un vector astfel ca: $\vec{v} \perp \vec{u}$.

Dacă $\vec{v}$ este nul, urmează imediat că $\vec{v}$ aparţine lui $\vec{P}$.

Dacă $\vec{v}$ nu este nul fie $\vec{v}'$ un vector aparţinînd lui $\vec{P}$ astfel ca $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ să fie liniar independenţi; planul vectorial $\vec{P}'$ conţinînd pe $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ este ortogonal cu $\vec{D}$ (nr. **8.4.3**); rezultă atunci din teorema 1 (precedentă) că $\vec{P}' = \vec{P}$, deci că $\vec{v}$ aparţine lui $\vec{P}$.

Avem în cele din urmă:

$$\vec{v} \in \vec{P} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u},$$

ceea ce permite să enunţăm:

TEOREMA/ 2. **Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă într-un spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ şi fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$. Planul vectorial ortogonal cu $\vec{D}$ este mulţimea vectorilor lui $\vec{E}_3$ ortogonali cu vectorul $\vec{u}$.**

Exerciţii. *Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se determine o ecuaţie a planului vectorial $\vec{P}$ ortogonal dreptei vectoriale $\vec{D}$ conţinînd vectorul nenul $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.*

Planul vectorial $\vec{P}$ este mulţimea vectorilor lui $\vec{E}_3$ ortogonali vectorului $\vec{i}$. Rezultă de aici că:

$$\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \vec{P} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Relaţia $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, care este verificată de coordonatele x, y, z ale unui vector $\vec{v}$ al lui $\vec{E}_3$, dacă şi numai dacă acest vector aparţine lui $\vec{P}$, este deci o ecuaţie carteziană a planului vectorial $\vec{P}$.

EXERCIŢII

8.27. Planul vectorial $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă în $\vec{P}$ şi fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$. Să se stabilească o ecuaţie carteziană şi o bază a dreptei vectoriale $\vec{\Delta}$, inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$, în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; e) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$; f) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.

8.28. Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială a lui $\vec{E}_3$ şi fie $\vec{u}$ o bază a lui $\vec{D}$. Să se stabilească o ecuaţie carteziană şi o bază a planului vectorial $\vec{P}$ ortogonal cu $\vec{D}$, în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\ \\1\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$;

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$; e) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$; f) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

8.29. Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial al lui $\vec{E}_3$ şi fie $(\vec{u}, \vec{u}')$ o bază a lui $\vec{P}$. Să se găsească o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}$ ortogonală cu $\vec{P}$, în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u'}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

8.30. Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1° Să se demonstreze că cei doi vectori $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ şi $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ sînt liniar independenţi. Fie $\vec{P}$ planul vectorial conţinînd aceşti doi vectori.

2° Să se determine numărul real m astfel încît vectorul $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\m\\3\end{pmatrix}$ să aparţină lui $\vec{P}$. Fie $\vec{D}$ dreapta vectorială ce conţine acest vector $\vec{v}$ (cînd $\vec{v}$ aparţine lui $\vec{P}$).

3° Să se găsească o bază a dreptei vectoriale $\vec{\Delta}$ inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$.

8.31. Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial al lui $\vec{E}_3$ şi fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială a lui $\vec{E}_3$ neortogonală cu $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că există o dreaptă vectorială $\vec{\Delta}$, şi numai una, inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$.

2° Să se determine o bază a lui $\vec{\Delta}$ în cazul în care o ecuaţie carteziană a lui $\vec{P}$ este:

$$x - 2y - 3z = 0$$

şi o bază a lui $\vec{D}$ este $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3° Să se determine o bază a lui $\vec{\Delta}$, în cazul în care $\vec{P}$ este planul vectorial ce conţine cei doi vectori $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ şi $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ şi în care $\vec{D}$ este dreapta vectorială conţinînd vectorul $\vec{u''}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

8.32. Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial lui $\vec{E}_3$ şi fie $(\vec{u}, \vec{u}')$ o bază a lui $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că dreapta vectorială $\vec{D}$, ortogonală cu $\vec{P}$ este intersecţia a două plane vectoriale respectiv ortogonale cu $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$.

2° Să se scrie un sistem de ecuaţii carteziene ale dreptei vectoriale $\vec{D}$, apoi să se determine o bază a lui $\vec{D}$ în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\quad \vec{u}'\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\quad \vec{u}'\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\quad \vec{u}'\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$.

8.33. Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial al lui $\vec{E}_3$ şi fie $\vec{D}$ dreapta vectorială ortogonală lui $\vec{P}$.

Să se găsească o bază a lui $\vec{D}$ apoi să se scrie un sistem de ecuaţii carteziene ale lui $\vec{D}$ în cazurile următoare, în care o ecuaţie carteziană a lui $\vec{P}$ este:

a) $x + y - z = 0$; $\qquad$ b) $2x + y + z = 0$;

c) $-y + 2z = 0$; $\qquad$ d) $x + 2y - 3z = 0$.

8.34. Fie $\vec{E}$ un spaţiu vectorial euclidian şi fie $\vec{P}$ şi $\vec{P}'$ două plane vectoriale ortogonale, adică astfel ca:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P}, \quad \forall \vec{u}' \in \vec{P}' \quad \vec{u} \perp \vec{u}'.$$

1° Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ şi fie $(\vec{i}', \vec{j}')$ o bază ortonormată a lui $\vec{P}'$.

Să se demonstreze că cei patru vectori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}', \vec{j}'$ sînt liniar independenţi.

2° Să se deducă din aceasta că nu există plane vectoriale ortogonale în spaţiul vectorial de dimensiune trei.

8.35. Planul vectorial euclidian $\vec{E}_3$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{P}$ planul vectorial din $\vec{E}_3$ pentru care o ecuaţie carteziană este:

$$2x + y - z = 0.$$

1° Să se demonstreze că vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ aparține lui $\vec{P}$.

Să se deducă din aceasta că dreapta vectorială $\vec{D}$ pentru care o bază este $\vec{u}$ este inclusă în $\vec{P}$.

2° Să se găsească o bază a dreptei vectoriale $\vec{\Delta}$ inclusă în $\vec{P}$ și ortogonală cu $\vec{D}$.

3° Să se reia cele două chestiuni precedente în cazul în care ecuația carteziană a lui $\vec{P}$ este:

$$x - y + 2z = 0,$$

și în care vectorul $\vec{u}$ are coordonatele $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

8.36. Fie $\vec{F}$ un subspațiu vectorial al spațiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$ ($\dim \vec{E}_3 = 3$). Se numește *ortogonalul* lui $\vec{F}$, și se notează $\vec{F}^{\perp}$, mulțimea vectorilor din $\vec{E}_3$ ortogonali cu oricare dintre vectorii lui $\vec{F}$.

1° Să se demonstreze că $\vec{F}^{\perp}$ este un subspațiu vectorial al lui $\vec{E}_3$ și că:

$$\vec{F} \cap \vec{F}^{\perp} = \{\vec{0}\}.$$

2° Ce se poate spune despre $\vec{F}^{\perp}$ în cazurile următoare:

a) $\vec{F} = \{\vec{0}\}$.

b) $\vec{F}$ este o dreaptă vectorială.

c) $\vec{F}$ este un plan vectorial.

d) $\vec{F} = \vec{E}_3$?

Să se deducă din acestea că, în toate cazurile:

$$\dim F + \dim F^{\perp} = 3.$$

3° Să se demonstreze că orice vector $\vec{u}$ al lui $\vec{E}_3$ se scrie într-un singur mod ca sumă a unui vector $\vec{u}'$ aparținînd lui $\vec{F}$ și a unui vector $\vec{u}''$ aparținînd lui $\vec{F}^{\perp}$.

8.37. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă într-un plan vectorial euclidian $\vec{P}$ și fie Δ dreapta vectorială inclusă în $\vec{P}$ și ortogonală cu $\vec{D}$.

1° $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ fiind doi vectori unitari aparţinînd respectiv lui $\vec{D}$ şi $\vec{\Delta}$, să se demonstreze că $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$.

2° Să se demonstreze că, pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\vec{P}$, există un bivector $(\vec{u}', \vec{u}'')$, şi numai unul, aparţinînd lui $\vec{D} \times \vec{\Delta}$ astfel ca

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''.$$

3° Se numeşte *proiecţie ortogonală* a unui vector $\vec{u}$ pe dreapta vectorială $\vec{D}$, vectorul $\vec{u}'$ definit la punctul 2°.

a) Să se demonstreze că: $\vec{u}' = (\vec{u}\cdot\vec{i})\vec{i}$.

Să se deducă din aceasta că aplicaţia: $\vec{u} \rightarrow \vec{u}'$ este o aplicaţie liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{D}$.

b) Să se demonstreze că:

$$\vec{u}' = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{\Delta}.$$

c) Să se demonstreze că: $\vec{u}' = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{D}$.

d) Să se demonstreze că: $\|\vec{u}'\| \leq \|\vec{u}\|$.

8.38. Fie $\vec{D}$ o dreaptă vectorială inclusă într-un spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune trei şi fie $\vec{P}$ planul vectorial ortogonal lui $\vec{D}$.

1° $(\vec{i}, \vec{j})$ fiind o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ şi $\vec{k}$ un vector unitar aparţinînd lui $\vec{D}$, să se demonstreze că trivectorul $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$.

2° Să se demonstreze că, pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\vec{E}_3$, există un bivector $(\vec{u}', \vec{u}'')$ aparţinînd lui $\vec{D} \times \vec{P}$, şi numai unul, astfel ca:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''.$$

3° Se numeşte *proiecţie ortogonală* a unui vector $\vec{u}$ pe dreapta vectorială $\vec{D}$, vectorul $\vec{u}'$ definit la punctul 2°.

a) Să se demonstreze că:

$$\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

Să se deducă de aici că aplicaţia $\vec{u} \rightarrow \vec{u}'$ este o aplicaţie liniară a lui $\vec{E}_3$ în $\vec{D}$.

b) Să se demonstreze că: $\vec{u'} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{P}$.

c) Să se demonstreze că: $\vec{u'} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{D}$.

d) Să se demonstreze că: $\|\vec{u'}\| \leq \|\vec{u}\|$.

4° Se numeşte *proiecţie ortogonală* a unui vector $\vec{u}$ pe planul vectorial $\vec{P}$ vectorul $\vec{u''}$ definit la punctul 2°.

a) Să se demonstreze că aplicaţia: $\vec{u} \Rightarrow \vec{u''}$ este o aplicaţie liniară a lui $\vec{E}_3$ în $\vec{P}$.

b) Să se demonstreze că: $\vec{u''} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{D}$.

c) Să se demonstreze că: $\vec{u''} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{P}$.

d) Să se demonstreze că: $\|\vec{u''}\| \leq \|\vec{u}\|$.

5° Spaţiul vectorial $\vec{E}_3$ este raportat la baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie $\vec{u}$ un vector de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Să se caracterizeze printr-o relaţie între x, y, z mulţimea F a vectorilor $\vec{u}$ astfel ca $\|\vec{u'}\| = \|\vec{u''}\|$. Mulţimea F este un subspaţiu vectorial al lui $\vec{E}_3$?

PROBLEME.

8.39. Fie $\vec{u}$ un vector nenul aparţinînd unui plan vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie a un număr real.

1° Să se rezolve în $\vec{P}$ şi să se discute ecuaţia definită prin:

$$\|\vec{x} + \vec{a}\| = a.$$

2° Să se rezolve în $\vec{P}$ şi să se discute ecuaţia definită prin:

$$\|\vec{x} - \vec{u}\| = a$$

3° Să se rezolve în $\vec{P}$ ecuaţia definită prin:

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = a.$$

(Pentru fiecare chestiune se va utiliza o bază ortonormată convenabil aleasă.)

8.40. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian şi fie a, b, c trei numere reale $(a \neq 0)$.
Se consideră numărul A definit prin:

$$A = a(\vec{u})^2 + b\vec{u} \cdot \vec{v} + c(\vec{v})^2.$$

1° Să se demonstreze că există un vector $\vec{w}$ şi un număr real Δ astfel ca:

$$A = a\left[(\vec{w})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}(\vec{v})^2\right].$$

2° În cazul în care Δ este pozitiv sau nul, să se scrie sub forma:

$$A = a(\vec{u} - \alpha\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \beta\vec{v}).$$

8.41. Fie $\vec{u}$, $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ trei vectori aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$, astfel ca

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

1° Să se demonstreze că, dacă $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt liniar independenţi, tot astfel sînt $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ pe de o parte, $\vec{u}$ şi $\vec{w}$ pe de altă parte.

Se presupune în continuarea problemei că $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt liniar independenţi.

2° Să se demonstreze că norma fiecăruia dintre cei trei vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ este strict inferioară sumei normelor celorlalţi doi vectori.

3° Să se demonstreze că norma fiecăruia dintre cei trei vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ este strict superioară valorii absolute a diferenţei normelor celorlalţi vectori.

4° Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel că:

$$|b - c| < a < b + c$$

a) Să se demonstreze că:

$$-1 < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 1.$$

b) $\vec{P}$ fiind un plan vectorial al spaţiului vectorial $\vec{E}$ şi $(\vec{i}, \vec{j})$ fiind o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, să se demonstreze că există cel puţin un vector unitar $\vec{j'}$ astfel încît:

$$\vec{i} \cdot \vec{j'} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

c) Se pune $\vec{u} = b\vec{i}$, $\vec{v} = -c\vec{j'}$, $\vec{w} = -(\vec{u} + \vec{v})$.
Să se demonstreze că $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sînt liniar independenţi şi că:

$$\|\vec{u}\| = b, \quad \|\vec{v}\| = c, \quad \|\vec{w}\| = a.$$

5° Să se rezume studiul făcut la punctul patru sub formă de teoremă.

8.42. Fie $\vec{E}_3$ un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune trei şi fie $\vec{u}$ un vector nenul aparţinînd lui $\vec{E}_3$. Se desemnează prin f aplicaţia lui $\vec{E}_3$ în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$\forall \vec{v} \in \vec{E}_3 \qquad f(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

1° Să se demonstreze că f este o formă liniară definită pe $\vec{E}_3$.
2° Să se demonstreze că mulţimea F_0 a vectorilor $\vec{v}$ din $\vec{E}_3$ astfel ca $f(\vec{v}) = 0$ este un plan vectorial al lui $\vec{E}_3$.
3° Mai general, k fiind un număr real dat, fie E_k mulţimea vectorilor $\vec{v}$ ai lui $\vec{E}_3$ astfel ca:

$$f(\vec{v}) = k.$$

a) Să se demonstreze că vectorul $\frac{k}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$ aparţine lui F_k şi prin urmare că F_k nu este vidă.
b) $\vec{v}_0$ fiind un vector aparţinînd lui F_k, să se demonstreze că:

$$\vec{v} \in F_k \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 \in F_0.$$

Să se deducă de aici că F_k este transformata lui F_0 printr-o translaţie vectorială.

8.43. Fie $\vec{E}_3$ un spaţiu vectorial euclidian de dimensiune trei. Se spune că un plan vectorial $\vec{P}$ al lui $\vec{E}_3$ este perpendicular pe un plan vectorial $\vec{P}$ al lui $\vec{E}_3$ şi se scrie $\vec{P} \perp \vec{P'}$ dacă orice vector ortogonal cu $\vec{P}$ este ortogonal oricărui vector ortogonal cu $\vec{P'}$.
(Se reaminteşte că un vector ortogonal lui $\vec{P}$ este un vector ortogonal tuturor vectorilor lui $\vec{P}$.)
1° Să se demonstreze că: $\vec{P} \perp \vec{P'} \Rightarrow \vec{P'} \perp \vec{P}$.
(Se va spune că $\vec{P}$ şi $\vec{P'}$ sînt perpendiculare).
2° Să se demonstreze că un plan vectorial nu este perpendicular pe el însuşi.
3° Să se demonstreze că două plane $\vec{P}$ şi $\vec{P'}$ sînt perpendiculare dacă şi numai dacă un vector nenul ortogonal cu $\vec{P}$ şi un vector nenul ortogonal cu $\vec{P'}$, sînt ortogonali.
4° Să se demonstreze că $\vec{P}$ este ortogonal cu $\vec{P'}$ dacă şi numai dacă $\vec{P}$ conţine o dreaptă vectorială ortogonală cu $\vec{P'}$.

5° Să se demonstreze că intersecția a două plane vectoriale distincte $\vec{P'}$ și $\vec{P''}$, perpendiculare pe același plan vectorial $\vec{P}$, este dreapta vectorială ortogonală cu $\vec{P}$.

6° Spațiul vectorial $\vec{E}_3$ fiind raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie $\vec{P}$ și $\vec{P'}$ două plane vectoriale de ecuații carteziene respective:

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + by + c' = 0.$$

Să se demonstreze că:

$$\vec{P} \perp \vec{P'} \Leftrightarrow aa' + bb' + c\,c' = 0.$$

7° *Aplicație*. Se consideră cele patru plane vectoriale $\vec{P}$, $\vec{P'}$, $\vec{Q}$, $\vec{Q'}$ pentru care ecuațiile carteziene, într-o bază ortonormată, sînt:

$$\vec{P} : x + y + z = 0;$$
$$\vec{P'} : 2x - y - z = 0;$$
$$\vec{Q} : x + 3y - z = 0;$$
$$\vec{Q'} : 3x + 5y + z = 0.$$

Să se determine toate perechile care conțin două plane vectoriale perpendiculare, alese dintre cele patru plane date.

8° Să se demonstreze că există un plan vectorial $\vec{R}$, și numai unul, perpendicular pe două plane vectoriale distincte $\vec{P}$ și $\vec{Q}$.

Aplicație. Să se determine $\vec{R}$ pentru care $\vec{P}$ și $\vec{Q}$ au drept ecuații carteziene, într-o bază ortonormată a lui $\vec{E}_3$:

$$\vec{P} : 2x + y - 3z = 0;$$
$$\vec{Q} : x + 2y + z = 0.$$

9. IZOMETRIILE PLANULUI VECTORIAL EUCLIDIAN

9.1. GRUP ORTOGONAL

9.1.1. Aplicații liniare ortogonale

Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ și fie f aplicația liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ pentru care matricea în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ și $\vec{v}$ fiind doi vectori aparținînd lui $\vec{P}$, de coordonate respective $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, vectorii $f(\vec{u})$ și $f(\vec{v})$

au respectiv coordonatele:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$$

$$\text{şi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta \end{pmatrix}.$$

Produsul scalar $\mathrm{f}(\vec{u}) \cdot \mathrm{f}(\vec{v})$ este atunci egal cu:

$$\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)\left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\delta\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\delta\right) = \frac{1}{4}\alpha\gamma - \frac{\sqrt{3}}{4}\beta\gamma - \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\delta + \frac{3}{4}\beta\delta +$$

$$+ \frac{3}{4}\alpha\gamma + \frac{\sqrt{3}}{4}\beta\gamma + \frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\delta + \frac{1}{4}\beta\delta = \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Cum însă: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha\gamma + \beta\delta$, rezultă:

$$\mathrm{f}(\vec{u}) \cdot \mathrm{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

DEFINIŢIE / **Se spune că o aplicaţie liniară f a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi este ortogonală dacă:**

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \ \mathrm{f}(\vec{u}) \cdot \mathrm{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Aplicaţia liniară studiată la începutul acestui paragraf este ortogonală.

Observaţii. — **1.** Urmează imediat că o aplicaţie identică a planului vectorial $\vec{P}$ este o aplicaţie liniară ortogonală.

2. Proprietatea:

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \mathfrak{f}(\vec{u}) \cdot \mathfrak{f}(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v},$$

verificată de o aplicaţie liniară ortogonală $\mathfrak{f}$, se exprimă spunînd că $\mathfrak{f}$ **conservă produsul scalar.**

9.1.2. Caracterizarea unei aplicaţii liniare ortogonale

Fie $\mathfrak{f}$ o aplicaţie liniară a planului vectorial $\vec{P}$ în el însuşi.

● Dacă $\mathfrak{f}$ este ortogonală, avem, pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\vec{P}$:

$$\| \mathfrak{f}(\vec{u}) \|^2 = \mathfrak{f}(\vec{u}) \cdot \mathfrak{f}(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = \| \vec{u} \|^2,$$

ceea ce implică:

$$\| \mathfrak{f}(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|.$$

● *Reciproc,* dacă $\mathfrak{f}$ este astfel ca:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \| \mathfrak{f}(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|,$$

avem pentru orice cuplu $(\vec{u}, \vec{v})$ de vectori din $\vec{P}$:

$$\| \mathfrak{f}(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|, \; \| \mathfrak{f}(\vec{v}) \| = \| \vec{v} \|, \; \| \mathfrak{f}(\vec{u} + \vec{v}) \| = \| \vec{u} + \vec{v} \|;$$

Cum, în plus, $\mathfrak{f}$ este liniară, avem:

$$\| \mathfrak{f}(\vec{u}) + \mathfrak{f}(\vec{v}) \| = \| \mathfrak{f}(\vec{u} + \vec{v}) \| = \| \vec{u} + \vec{v} \|.$$

Rezultă din aceasta (nr. **8.1.4**):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 - \| \vec{v} \|^2) =$$

$$= \frac{1}{2} (\| \mathfrak{f}(\vec{u}) + \mathfrak{f}(\vec{v}) \|^2 - \| \mathfrak{f}(\vec{u}) \|^2 - \| \mathfrak{f}(\vec{v}) \|^2) = \mathfrak{f}(\vec{u}) \cdot \mathfrak{f}(\vec{v})$$

ceea ce dovedeşte că f conservă produsul scalar, deci că, aplicaţia liniară f este ortogonală. Se poate enunţa:

TEOREMĂ / O aplicaţie liniară f a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ este ortogonală dacă şi numai dacă:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \qquad \|\mathrm{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

Proprietatea: $\forall \vec{u} \in \vec{P}\ \|\mathrm{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, verificată de o aplicaţie liniară ortogonală f se exprimă spunînd că f conservă norma.

Observaţie: O aplicaţie liniară ortogonală a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi este de asemenea numită o izometrie vectorială a lui $\vec{P}$ sau, mai simplu, izometrie a lui $\vec{P}$. Acesta este termenul pe care îl vom utiliza de acum înainte pentru a desemna o aplicaţie liniară ortogonală a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$.

EXERCIŢIU. *Să se demonstreze că aplicaţia liniară f a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$, a cărei matrice, într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este:*

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}, \text{ este ortogonală.}$$

$\vec{u}$ fiind un vector de coordonate $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, vectorul $\mathrm{f}(\vec{u})$ are coordonatele:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}}\,\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\beta \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\beta \end{pmatrix}.$$

Avem atunci:

$$\|\mathbf{f}(\vec{u})\|^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\,\alpha + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\beta\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\beta\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha\beta + \frac{2}{3}\beta^2 + \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha\beta + \frac{1}{3}\beta^2 =$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 = \|\vec{u}\|^2;$$

Rezultă din aceasta că: $\|\mathbf{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, ceea ce dovedește că aplicația $\mathbf{f}$, care conservă norma este ortogonală.

9.1.3. Determinantul matricei unei izometrii într-o bază ortonormată

Fie $\mathbf{f}$ o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ pentru care matricea, într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, este:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};$$

determinantul lui A este:

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Avem pe de altă parte:

$$\mathbf{f}(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j}$$

și

$$\mathbf{f}(\vec{j}) = c\vec{i} + d\vec{j};$$

cum $\mathbf{f}$ este o izometrie, $\mathbf{f}$ conservă norma și produsul scalar. Rezultă din aceasta:

$$\|\mathbf{f}(\vec{i})\|^2 = a^2 + b^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1$$

$$\|\mathbf{f}(\vec{j})\|^2 = c^2 + d^2 = \|\vec{j}\|^2 = 1$$

$$\mathbf{f}(\vec{i}) \cdot \mathbf{f}(\vec{j}) = ac + bd = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

Identitatea lui Lagrange (nr. **4.3.4**) aplicată celor patru numere a, b, c, d ne dă atunci

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2,$$

adică:

$$(ad - bc)^2 = D^2 = 1.$$

Avem prin urmare:

$$D = 1 \text{ sau } D = -1$$

ceea ce permite să enunţăm:

TEOREMĂ / **Determinantul matricei unei izometrii a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, este egal cu 1 sau cu $-$ 1.**

Observaţie. — Fie $\mathbf{f}$ aplicaţia liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ pentru care matricea într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinantul matricei A este $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$

Avem pe de altă parte

$$\mathbf{f}(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j},$$

ceea ce implică:

$$\| \mathbf{f}(\vec{i}) \| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Rezultă din aceasta că normele vectorilor $\mathbf{f}(\vec{i})$ şi $\vec{i}$ sînt distincte $\sqrt{5} \neq 1$, ceea ce dovedeşte că aplicaţia liniară $\mathbf{f}$ nu este o izometrie.

O aplicaţie liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$, pentru care matricea, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, are un determinant egal cu 1 sau cu -1, nu este deci în mod necesar o izometrie.

9.1.4. Aplicaţia compusă a două izometrii

$\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ fiind două izometrii ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$, desemnăm prin $\mathbf{h}$ aplicaţia compusă $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$. Cum $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ sînt două aplicaţii liniare ale lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$, tot aşa este şi aplicaţia compusă $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$.
Fie $\vec{u}$ un vector aparţinînd lui $\vec{P}$, fie $\vec{u}' = \mathbf{f}(\vec{u})$ imaginea lui $\vec{u}$ prin $\mathbf{f}$ şi fie $\vec{u}'' = \mathbf{g}(\vec{u}')$, imaginea lui $\vec{u}'$ prin $\mathbf{g}$; $\vec{u}''$ este de asemenea imaginea lui $\vec{u}$ prin $\mathbf{h}$:

$$\vec{u}'' = \mathbf{g}(\vec{u}') = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\vec{u})] = (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\vec{u}) = \mathbf{h}(\vec{u}).$$

Cele două izometrii $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ conservă norma; avem deci

$$\| \vec{u}'' \| = \| \vec{u}' \| = \| \vec{u} \|,$$

ceea ce implică:

$$\| \mathbf{h}(\vec{u}) \| = \| \vec{u} \|.$$

Rezultă din aceasta că aplicaţia liniară $\mathbf{h}$ conservă norma, deci că $\mathbf{h}$ este o izometrie.
Se poate enunţa:

TEOREMĂ / **Aplicaţia compusă a două izometrii ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ este o izometrie a lui $\vec{P}$.**

9.1.5. Aplicația reciprocă a unei izometrii

Fie f o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie A matricea lui f într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$.
S-a demonstrat în paragraful nr. **9.1.3.** că determinantul matricei A este egal cu 1 sau cu -1. Cum acest determinant nu este nul, matricea A este regulată (nr. **4.3.5**) ; rezultă că aplicația liniară f este bijectivă (nr. **4.3.3**).
Desemnăm prin f^{-1} aplicația reciprocă a lui f ; se ştie că f^{-1} este o aplicație liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$.
$\vec{u}$ fiind un vector aparținînd lui $\vec{P}$, fie $\vec{u}_1 = \overset{-1}{f}(\vec{u})$ imaginea lui $\vec{u}$ prin f^{-1}; avem :

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u};$$

Cum f este o izometrie, avem

$$\| \vec{u} \| = \| f(\vec{u}_1) \| = \| \vec{u}_1 \|,$$

adică :

$$\| \vec{u} \| = \| f^{-1}(\vec{u}) \|.$$

Rezultă din aceasta că aplicația liniară f^{-1} conservă norma, deci că f^{-1} este o izometrie.
Se poate enunța :

TEOREMĂ / **Orice izometrie f a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ este bijectivă şi aplicația sa reciprocă f^{-1} este o izometrie a lui $\vec{P}$.**

9.1.6. Grup ortogonal al planului vectorial euclidian

Desemnăm prin $\mathcal{J}$ mulțimea izometriilor planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Aplicația compusă a două izometrii fiind o izometrie, rezultă că compunerea aplicaţiilor este *o lege de compoziţie internă* definită pe mulţimea $\mathcal{J}$.

● Această lege este asociativă:

$$\forall (\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \in \mathcal{J}^3 \ (\mathfrak{h} \circ \mathfrak{g}) \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{h} \circ (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}).$$

● Aplicaţia identică e a planului vectorial $\vec{P}$ aparţine lui $\mathcal{J}$; e este deci *element neutru* al lui $\mathcal{J}$ pentru legea de compoziţie a aplicaţiilor:

$$\forall \mathfrak{f} \in \mathcal{J} \ \mathfrak{f} \circ \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{f}.$$

● Orice izometrie $\mathfrak{f}$ este bijectivă şi aplicaţia sa reciprocă $\mathfrak{f}^{-1}$ este o izometrie; cum mai mult $\mathfrak{f}^{-1}$ este astfel încît:

$$\mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}^{-1} = \mathfrak{f}^{-1} \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{e},$$

rezultă de aici că orice element al lui $\mathcal{J}$ posedă un *simetric* în $\mathcal{J}$, relativ la legea de compoziţie a aplicaţiilor:

$$\forall \mathfrak{f} \in \mathcal{J}, \ \exists \mathfrak{f}^{-1} \in \mathcal{J} \ \mathfrak{f} \circ \mathfrak{f}^{-1} = \mathfrak{f}^{-1} \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{e}.$$

Studiul anterior permite să se enunţe:

TEOREMĂ / **Mulţimea $\mathcal{J}$ a izometriilor planului vectorial euclidian $\vec{P}$, înzestrată cu legea de compoziţie a aplicaţiilor este un grup numit grupul ortogonal al lui $\vec{P}$.**

EXERCIŢIU. *Fie $\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{g}$ cele două aplicaţii liniare ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi pentru care matricele respective într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ sînt:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1° *Să se demonstreze că $\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{g}$ sînt două izometrii.*

2° *Să se exprime matricele izometriilor $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$. Să se deducă de aici că grupul ortogonal $\mathcal{J}$ al planului vectorial $\vec{P}$ nu este comutativ.*

1° Fie $\vec{u}$ un vector de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$.

În această bază, coordonatele vectorului $f(\vec{u})$ sînt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix};$$

rezultă din aceasta:

$$\|f(\vec{u})\|^2 = y^2 + (-x)^2 = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$$

ceea ce dovedeşte că aplicaţia liniară f conservă norma, deci că f este o izometrie. Coordonatele vectorului $g(\vec{u})$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix};$$

rezultă din aceasta:

$$\|g(\vec{u})\|^2 = x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2,$$

ceea ce dovedeşte că aplicaţia liniară g conservă norma, deci că g este o izometrie.

2° Matricea C a izometriei $g \circ f$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea C' a izometriei $f \circ g$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$C' = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se constată imediat că $C \neq C'$, ceea ce implică:

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Rezultă din aceasta că **grupul ortogonal $\mathcal{J}$ al planului vectorial euclidian $\vec{P}$ nu este comutativ.**

EXERCIŢII

9.1. Fie h_λ omotetia de raport λ a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi. Să se demonstreze că h_λ este o izometrie dacă şi numai dacă:

$$\lambda = 1 \text{ sau } \lambda = -1.$$

9.2. Fie f o aplicaţie liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi pentru care matricea A într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui

$\vec{P}$ este dată. Să se spună dacă f este o izometrie în cazurile următoare:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi b) } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ d) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{f) } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

9.3. Să se demonstreze că orice izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ transformă o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$.

Reciproc, să se demonstreze că orice aplicaţie liniară f a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ care transformă o bază ortonormată într-o bază ortonormată este o izometrie.

9.4. Fie f o aplicaţie liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi şi fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază a lui $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că, dacă f este injectivă, bivectorul $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$ este o bază a lui $\vec{P}$.

2° Folosind rezultatul de la punctul 1° să se deducă implicaţia:

$$f \text{ injectivă} \Rightarrow f \text{ surjectivă}.$$

Se presupune că f este o izometrie. Utilizînd proprietatea de conservare a normei prin f, să se demonstreze că f este injectivă. Să se deducă de aici că o izometrie este surjectivă.

9.5. Fie $\vec{i}$ un vector unitar aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$.

1° Se desemnează prin p aplicaţia lui $\vec{P}$ în el însuşi definită prin:

$$p(\vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i}.$$

a) Să se demonstreze că p este liniară.
b) Aplicaţia p este o izometrie?

2° Se desemnează prin s aplicaţia lui $\vec{P}$ în el însuşi definită prin:

$$s(\vec{u}) = 2p(\vec{u}) - \vec{u}.$$

a) Să se demonstreze că s este liniară.
b) Aplicația s este o izometrie?

3° Fie $\vec{j}$ un vector astfel că $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$. Care sînt, în această bază, matricele aplicațiilor liniare p și s?

9.6. Să se demonstreze că o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ transformă orice dreaptă vectorială $\vec{D}$, inclusă în $\vec{P}$, într-o dreaptă vectorială $\vec{D}'$.

9.7. Fie f aplicația liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuși pentru care matricea într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că pentru orice vector $\vec{u}$ aparținînd lui $\vec{P}$ avem:

$$\|f(\vec{u})\| = 2\|\vec{u}\|.$$

2° Fie h omotetia vectorială de raport $\frac{1}{2}$. Să se demonstreze că:

$$h \circ f = f \circ h$$

și că $f \circ h$ este o izometrie.

9.2. ROTAȚII VECTORIALE

9.2.1. Matricea unei izometrii într-o bază ortonormată

Fie f o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ pentru care matricea, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, este:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

S-a demonstrat în paragraful **9.1.3** că numerele reale a, b, c, d verifică relaţiile

$$a^2 + b^2 = 1$$
$$c^2 + d^2 = 1$$
$$ac + bd = 0$$

şi că aceste relaţii implică:

$$ad - bc = 1 \text{ sau } ad - bc = -1.$$

● Dacă $ad - bc = 1$, cuplul (c, d) este soluţia sistemului:

$$\mathrm{I}\begin{cases} ax + by = 0 \\ -bx + ay = 1. \end{cases}$$

Determinantul sistemului I este:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1;$$

cum D nu este nul, sistemul I are o soluţie şi numai una:

$$x = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{vmatrix} = -b, \quad y = \begin{vmatrix} a & 0 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = a.$$

Rezultă din aceasta:

$$c = -b \text{ şi } d = a,$$

ceea ce implică faptul că matricea A, a izometriei f, este egală cu:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

● Dacă $ad - bc = -1$, cuplul (c, d) este soluţie a sistemului:

$$\mathrm{II}\begin{cases} ax + by = 0 \\ -bx + ay = -1, \end{cases}$$

determinantul sistemului II este:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1$$

cum D nu este nul, sistemul II are o soluţie şi numai una

$$x = \begin{vmatrix} 0 & b \\ -1 & a \end{vmatrix} = b, \quad y = \begin{vmatrix} a & 0 \\ -b & -1 \end{vmatrix} = -a.$$

Rezultă din aceasta

$$c = b \quad \text{şi } d = -a.$$

ceea ce implică faptul că matricea A, a izometriei f, este egală cu: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Matricea unei izometrii a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ se prezintă sub una din cele două forme:**

$$(1) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

unde a şi b sînt două numere reale astfel ca:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

9.2.2. Rotaţii vectoriale

● Fie φ o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, în care matricea A într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este de forma (1):

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ fiind un vector *unitar* de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, vectorul $\varphi(\vec{u})$ are drept coordonate în aceeaşi bază:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx - ay \end{pmatrix};$$

rezultă din aceasta:

$$\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u}) = x(ax - by) + y(bx + ay) = a(x^2 + y^2);$$

cum $\vec{u}$ este unitar, avem: $x^2 + y^2 = 1$, ceea ce implică:

$$\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u}) = a.$$

Izometria φ este deci astfel că, pentru orice vector unitar $\vec{u}$, produsul scalar $\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u})$ este constant şi egal cu a.

● Fie $\mathfrak{f}$ o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, pentru care matricea într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este de forma (2):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ fiind un vector unitar de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, vectorul $\mathfrak{f}(\vec{u})$ are drept coordonate în aceeaşi bază:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx - ay \end{pmatrix};$$

rezultă din aceasta:

$$\vec{u} \cdot \mathfrak{f}(\vec{u}) = x(ax + by) + y(bx - ay) =$$
$$= a(x^2 - y^2) + 2bxy.$$

Se constată imediat că produsul scalar $\vec{u} \cdot \mathrm{f}(\vec{u})$, unde vectorul $\vec{u}$ este unitar, nu este constant.
Într-adevăr dacă a nu este nul, avem:

- pentru vectorul unitar $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{i} \cdot \mathrm{f}(\vec{i}) = a$;
- pentru vectorul unitar $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\vec{j} \cdot \mathrm{f}(\vec{j}) = -a \neq a$;

prin urmare: $\vec{i} \cdot \mathrm{f}(\vec{i}) \neq \vec{j} \cdot \mathrm{f}(\vec{j})$.
Dacă a este nul şi b nu este, avem:

- pentru vectorul unitar $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$: $\vec{i} \cdot \mathrm{f}(\vec{i}) = 0$;
- pentru vectorul unitar $\vec{i'}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$:

$$\vec{i'} \cdot \mathrm{f}(\vec{i'}) = 2b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = b \neq 0;$$

prin urmare: $\vec{i} \cdot \mathrm{f}(\vec{i}) \neq \vec{i'} \cdot \mathrm{f}(\vec{i'})$.

DEFINIŢIE / **Se numeşte rotaţie vectorială a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ o izometrie φ a lui $\vec{P}$ astfel încît pentru orice vector unitar $\vec{u}$, produsul scalar $\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u})$ este constant.**

Studiul care a precedat această definiţie dovedeşte că:

- **O izometrie a planului vectorial $\vec{P}$, pentru care matricea într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ este de forma (1), este o rotaţie vectorială.**
- **O izometrie a planului vectorial $\vec{P}$, pentru care matricea într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ este de forma (2), nu este o rotaţie vectorială.**

Observaţie. — 1. O rotaţie vectorială mai este numită **şi izometrie pozitivă** sau **izometrie pară.**

2. Fie e aplicaţia identică a planului vectorial $\vec{P}$. Pentru orice vector unitar $\vec{u}$, avem:

$$\vec{u} \cdot e(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = \| u \|^2 = 1,$$

ceea ce dovedeşte că izometria e este o rotaţie vectorială.

9.2.3. Caracteristicele unei rotaţiii vectoriale

1. Fie φ o rotaţie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$; φ fiind o izometrie, matricea A a lui φ într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ este de forma (1) sau de forma (2);
A nu poate să fie de forma (2) căci atunci produsul scalar $\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u})$ pentru un vector unitar $\vec{u}$ nu ar fi constant. Rezultă de aici că A este de forma (1), deci că:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Reciproc, fie φ o aplicaţie liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$, pentru care matricea A, într-o bază $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Pentru orice vector $\vec{u}$, de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, vectorul $\varphi(\vec{u})$ are drept coordonate în aceeaşi bază

$$\begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} \text{ şi avem:}$$

$$\| \varphi(\vec{u}) \|^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 = \| \vec{u} \|^2.$$

Rezultă din aceasta că aplicaţia liniară φ conservă norma ceea ce dovedeşte că φ este o izometrie.
Cum în plus matricea A, a izometriei φ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, este de forma (1), φ este o rotaţie vectorială.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA 1. **/O aplicaţie liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi este o rotaţie vectorială dacă şi numai dacă matricea sa, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, este de forma:**

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

unde a şi b sînt două numere reale astfel încît:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

2. Matricea A a unei rotaţii φ a planului vectorial $\vec{P}$, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ este astfel încît

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ şi } a^2 + b^2 = 1.$$

Rezultă din aceasta:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1.$$

Reciproc, fie φ o izometrie a planului vectorial $\vec{P}$

pentru care matricea A într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este astfel încît:

$$\det A = 1.$$

Matricea A a lui φ este de forma (1) căci dacă ea ar fi de forma (2) am avea:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 = -1;$$

rezultă că φ este o rotație vectorială.

Se poate deci enunța:

TEOREMA 2. / **O izometrie φ a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ este o rotație vectorială dacă și numai dacă determinantul matricei lui φ, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, este egal cu 1.**

Observație. — 1. Fie f o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ pentru care matricea, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, este A; se știe că (nr. **9.1.3**):

$$\det A = 1 \text{ sau } \det A = -1.$$

Prin contrapoziția echivalenței

f este o rotație vectorială $\Leftrightarrow \det A = 1$, se obține:

f nu este o rotație vectorială $\Leftrightarrow \det A = -1$.

2. Reamintim (nr. **9.1.3**) că o aplicație liniară f a planului vectorial P în el însuși pentru care matricea A într-o bază ortonormată a lui P este în așa fel încît $\det A = 1$, nu este în mod necesar o izometrie; rezultă din aceasta, a fortiori, că o astfel de aplicație liniară nu este în mod necesar o rotație vectorială.

9.2.4. Comparație între matricele aceleiași rotații vectoriale în două baze ortonormate

Fie φ o rotație a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ și fie $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ matricea lui φ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$.

S-a demonstrat în paragraful nr. **9.2.2** că, pentru orice vector unitar $\vec{u}$, produsul scalar $\vec{u} \cdot \varphi(\vec{u})$ este constant și egal cu a.

$A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ fiind matricea lui φ într-o altă bază ortonormată $(\vec{i'}, \vec{j'})$ a lui $\vec{P}$, s-ar demonstra la fel că acest produs scalar este egal cu a'; avem prin urmare:

$$a = a';$$

cum în plus

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 = 1,$$

rezultă din acestea: $b^2 = b'^2$, adică:

$$b' = b \text{ sau } b' = -b.$$

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / Dacă $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ este matricea unei rotații φ a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, matricea lui φ în orice altă bază ortonormată a lui $\vec{P}$ este egală cu $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sau cu $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Consecință. — Fie φ o rotație a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ într-o bază ortonor-

mată a lui $\vec{P}$; studiul care a fost făcut dovedeşte că numerele reale a şi $|b|$ sînt independente de această bază ortonormată.
Se spune că cele două numere reale a şi b care nu depind decît de rotaţia vectorială φ, sînt legate **intrinsec** de φ.

9.2.5. Rotaţie vectorială care transfomă un vector unitar $\vec{i}$ într-un vector unitar $\vec{i}'$.

Fie $\vec{i}$ şi $\vec{i}'$ doi vectori unitari aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$; $\vec{j}$ fiind un vector astfel că bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, desemnăm prin $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ coordonatele lui $\vec{i}'$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$.

● Fie φ o rotaţie vectorială astfel ca:

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i}'$$

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ fiind matricea lui φ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, coordonatele vectorului $\varphi(\vec{i})$ în această bază sînt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Egalitatea:

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i}'$$

implică atunci:

$$a = \alpha \text{ şi } b = \beta,$$

ceea ce dovedeşte că:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

● *Reciproc,* fie φ aplicaţia liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ pentru care matricea, în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, este $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Cum vectorul $\vec{i}'$ este unitar, avem:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Rezultă de aici că aplicaţia liniară φ este o rotaţie vectorială (nr. **9.2.3**, Teorema 1). Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **$\vec{i}$ şi $\vec{i}'$ fiind doi vectori unitari aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$, există o rotaţie vectorială şi numai una, care transformă $\vec{i}$ în $\vec{i}'$.**

EXERCIŢIU. *Fie $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ cei doi vectori de coordonate respective* $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ *şi* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ *într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a planului vectorial euclidian $\vec{P}$.*

1° *Să se demonstreze că $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ sînt unitari.*

2° *Să se determine matricea rotaţiei vectoriale φ, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, care transformă $\vec{u}$ în $\vec{u}'$.*

1° Avem:

$$\|\vec{u}\|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1,$$

$$\|\vec{u}'\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

ceea ce dovedeşte că $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ sînt unitari.

2° Fie $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ matricea rotaţiei vectoriale φ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$;

coordonatele vectorului $\varphi(\vec{u})$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, sînt:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{\sqrt{2}}{2} b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b + \frac{\sqrt{2}}{2} a \end{pmatrix}.$$

Egalitatea $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}'$ se transpune atunci, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, prin:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{\sqrt{2}}{2} b = \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului precedent dă:

$$a = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$b = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Rezultă de aici că matricea A, a rotației vectoriale φ, este:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

EXERCIȚII

9.8. Fie f o aplicație liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuși, pentru care matricea A într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este dată. Să se spună dacă f este o rotație vectorială în cazurile următoare:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

9.9. Fie $\mathfrak{f}$ aplicaţia liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi, pentru care matricea A într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că $\mathfrak{f}$ nu este o rotaţie vectorială.

2° Să se demonstreze că, pentru orice vector unitar $\vec{u}$, produsul scalar $\vec{u} \cdot \mathfrak{f}(\vec{u})$ este constant.

3° Ce concluzii se pot obţine din rezultatele de la punctele 1° şi 2°?

9.10. Fie $\mathfrak{f}$ o aplicaţie liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi avînd proprietatea (1) următoare:

„Pentru orice vector unitar $\vec{u}$, produsul scalar $\vec{u} \cdot \mathfrak{f}(\vec{u})$ este constant şi nenul".

1° Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ matricea lui $\mathfrak{f}$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$.

Să se calculeze: $\vec{i} \cdot \mathfrak{f}(\vec{i})$ şi $\vec{j} \cdot \mathfrak{f}(\vec{j})$. Să se deducă de aici că: $a = d$.

2° Să se demonstreze că: $b + c = 0$. Să se deducă de aici că A este de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu a nenul. Să se studieze o reciprocă.

3° Să se demonstreze că aplicaţia $\mathfrak{f}$ este bijectivă. Aplicaţia reciprocă $\overset{-1}{\mathfrak{f}}$ are proprietatea (1)?

4° Aplicația compusă a două aplicații liniare cu proprietatea (1), are și ea această proprietate?

9.11. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$.

1° Fie $\vec{u}$ și $\vec{u}'$ doi vectori nenuli cu aceeași normă.
Să se demonstreze că există o rotație vectorială φ, și numai una, care transformă $\vec{u}$ și $\vec{u}'$.

2° Să se determine φ prin matricea sa în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$;

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$; f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-\frac{12}{13}\\\frac{5}{13}\end{pmatrix}$.

9.12. 1° Să se demonstreze că există trei rotații vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$, astfel că:

$$\varphi \circ \varphi \circ \varphi = e,$$

unde e este aplicația identică a lui $\vec{P}$.

2° Să se demonstreze că mulțimea celor trei rotații precedente, înzestrată cu compunerea aplicațiilor, este un grup comutativ. Să se construiască tabela legii de compoziție a acestui grup.

9.13. Fie f și g două aplicații liniare ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuși, pentru care matricele respective, în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, sînt:

$$A = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13}\end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că $\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{g}$ sînt două izometrii şi că $\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{g}$ nu sînt rotaţii vectoriale.
2° Să se determine în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, matricele C şi C' ale aplicaţiilor compuse $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}$. Să se demonstreze că $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}$ sînt rotaţii vectoriale.
3° Mai general să se demonstreze că:

$$[\mathfrak{f} \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \text{ şi } \mathfrak{g} \in (\mathcal{J} - \mathcal{R})] \Rightarrow \mathfrak{g}\circ\mathfrak{f} \in \mathcal{R}.$$

($\mathcal{J}$ desemnează mulţimea izometriilor şi $\mathcal{R}$ mulţimea rotaţiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$).

9.14. Fie $\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{g}$ două aplicaţii liniare ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi pentru care matricele respective în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ sînt:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că $\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{g}$ sînt două izometrii, că $\mathfrak{f}$ este o rotaţie vectorială în timp ce $\mathfrak{g}$ nu este.
2° Să se determine matricele C şi C' ale aplicaţiilor compuse $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$.
Să se demonstreze că $\mathfrak{g}\circ\mathfrak{f}$ şi $\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}$ nu sînt rotaţii vectoriale.
3° Mai general, să se demonstreze că:

$$[\mathfrak{f} \in \mathcal{R} \text{ şi } \mathfrak{g} \in (\mathcal{J} - \mathcal{R})] \Rightarrow \mathfrak{g}\circ\mathfrak{f} \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}).$$

($\mathcal{J}$ desemnează mulţimea izometriilor şi $\mathcal{R}$ mulţimea rotaţiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$).

9.15. Fie φ o rotaţie vectorială a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, diferită de aplicaţia identică $\mathfrak{e}$ a lui $\vec{P}$.
Să se demonstreze că singurul vector $\vec{v}$ al lui $\vec{P}$ astfel încît $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}$ este vectorul nul al lui $\vec{P}$.

9.16. Să se demonstreze că orice izometrie $\mathfrak{f}$ a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ care nu este o rotaţie vectorială este astfel încît:

$$\overset{-1}{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}.$$

9.17. Fie $\mathfrak{f}$ aplicaţia liniară a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi pentru care matricea, într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, este:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că f este o izometrie şi că f nu este o rotaţie vectorială.

2° Să se demonstreze că există cel puţin un vector unitar $\vec{u}$ astfel ca $f(\vec{u}) = \vec{u}$.

3° Să se demonstreze că există cel puţin un vector unitar $\vec{v}$ astfel ca $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

4° Să se demonstreze că bivectorul $(\vec{u}, \vec{v})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$. Care este matricea lui f în baza $(\vec{u}, \vec{v})$?

5° Să se demonstreze că rezultatele de la punctele 2°, 3° şi 4° sînt verificate de orice izometrie f care nu este o rotaţie vectorială.

9.18. Fie φ o rotaţie vectorială a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, pentru care matricea, într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, este:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ cu: } a^2 + b^2 = 1.$$

Să se demonstreze că baza $(\vec{u}, \vec{v})$ este ortonormată şi să se determine matricea lui φ, în baza $(\vec{u}, \vec{v})$, în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

9.3. GRUPUL ROTAŢIILOR VECTORIALE

9.3.1. Aplicaţia compusă a două rotaţii vectoriale

Fie φ şi φ' două rotaţii ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$, de matrice respective A şi A' într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$. Avem (nr. **9.2.3**):

$$\det A = 1 \text{ şi } \det A' = 1.$$

Desemnăm prin ψ aplicaţia compusă $\varphi' \circ \varphi$; cum φ şi φ' sînt două izometrii tot izometrie este şi $\psi = \varphi' \circ \varphi$ (nr. **9.1.4**):

Pe de altă parte, matricea B a lui ψ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este (nr. **4.2.4**)

$$B = A'A.$$

Rezultă de aici (nr. **4.3.4**): $\det B = \det A' \times \det A = 1 \times 1 = 1$, ceea ce dovedeşte că izometria ψ, pentru care matricea în baza ortonormată (i, j) a lui $\vec{P}$ are determinantul egal cu 1, este o rotaţie vectorială (nr. **9.2.3**). Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Aplicaţia compusă a două rotaţii vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ este o rotaţie vectorială a lui $\vec{P}$.**

Observaţie. — Matricele A şi A' ale rotaţiilor vectoriale φ şi φ', în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, sînt de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}.$$

Matricea B a rotaţiei vectoriale $\psi = \varphi' \circ \varphi$, în baza

$(\vec{i}, \vec{j})$, este atunci:

$$B = A'A = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a'a - b'b & -a'b - b'a \\ b'a + a'b & -b'b + a'a \end{pmatrix};$$

de asemenea, matricea B' a rotației vectoriale $\psi' = \varphi \circ \varphi'$, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, este:

$$B' = AA' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

Se constată imediat că $B = B'$, ceea ce implică:

$$\varphi' \circ \varphi = \varphi \circ \varphi'$$

9.3.2. Aplicație reciprocă a unei rotații vectoriale

Fie φ o rotație a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, cu matricea A într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$; avem (nr. **9.2.3**):

$$\det A = 1.$$

Aplicația φ fiind o izometrie, este bijectivă și aplicația sa reciprocă φ^{-1} este o izometrie (nr. **9.1.5**).

Pe de altă parte, matricea lui φ^{-1} în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, este matricea inversă, A^{-1} a matricei A a lui φ (nr. **4.3.3**); egalitatea: $AA^{-1} = I_2$,
unde I_2 este matricea unitate a mulțimii M_2 a matricelor pătrate de ordin 2, implică atunci
$\det A \times \det A^{-1} = \det I_2$.
Rezultă de aici:

$$\det A^{-1} = 1,$$

ceea ce dovedeşte că izometria φ^{-1}, pentru care matricea A^{-1} în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ are un determinant egal cu 1, este o rotaţie vectorială (nr. **9.2.3**) Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Orice rotaţie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ este bijectivă şi aplicaţia sa reciprocă este o rotaţie vectorială a lui $\vec{P}$.**

Observaţie. — Matricea A a rotaţiei vectoriale φ în baza ortonormată $(\vec{i}. \vec{j})$ este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ cu: } \det A = 1;$$

matricea A^{-1}, a rotaţiei vectoriale φ^{-1} în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este atunci (nr. **4.3.5**):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Exerciţii. *Să se determine rotaţiile φ ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ astfel încît*

$$\varphi = \varphi^{-1}.$$

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ fiind matricea unei rotaţii vectoriale φ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, matricea rotaţiei vectoriale φ^{-1} în această bază este:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici că:

$$\varphi = \varphi^{-1} \Leftrightarrow A = A^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0.$$

Cum în plus:

$$a^2 + b^2 = 1,$$

avem:

$$b = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ sau } a = -1.$$

Se obţine în cele din urmă:

$$\varphi = \varphi^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{sau} \\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

● Dacă: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, φ este aplicaţia identică a planului vectorial $\vec{P}$.

● Dacă: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, φ este aplicaţia lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ care, la orice vector $\vec{u}$, face să corespundă vectorul $-\vec{u}$, adică omotetia vectorială de raport -1.

9.3.3. Grupul rotaţiilor vectoriale

Desemnăm prin $\mathfrak{R}$ mulţimea rotaţiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$.
Aplicaţia compusă a două rotaţii vectoriale fiind o rotaţie vectorială, rezultă că compunerea aplicaţiilor este o *lege de compoziţie internă* definită pe mulţimea $\mathfrak{R}$.

● Această lege este *asociativă*:

$$\forall(\varphi, \varphi', \varphi'') \in \mathfrak{R}^3 \quad (\varphi'' \circ \varphi') \circ \varphi = \varphi'' \circ (\varphi' \circ \varphi).$$

● Ea este *comutativă* (nr. **9.3.1**)

$$\forall(\varphi, \varphi') \in \mathfrak{R}^3 \quad \varphi' \circ \varphi = \varphi \circ \varphi'.$$

● Aplicaţia identică e a planului vectorial $\vec{P}$ este o rotaţie vectorială; e este deci *element neutru* al lui $\mathfrak{R}$ pentru legea de compoziţie a aplicaţiilor definite pe $\mathfrak{R}$:

$$\forall\varphi \in \mathfrak{R} \quad \varphi \circ e = e \circ \varphi = \varphi.$$

● Orice rotaţie vectorială φ este bijectivă şi aplicaţia sa reciprocă φ^{-1} este o rotaţie vectorială; cum în plus φ^{-1} este astfel încît:

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = e,$$

rezultă de aici că orice element al lui $\mathcal{R}$ posedă un *simetric* în $\mathcal{R}$ relativ la legea de compoziție a aplicațiilor:

$$\forall \varphi \in \mathcal{R}, \ \exists \varphi^{-1} \in \mathcal{R} \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = e.$$

Studiul precedent permite să se enunțe:

TEOREMĂ / **Legea de compoziție a aplicațiilor conferă mulțimii $\mathcal{R}$ a rotațiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ structura de grup comutativ.**

EXERCIȚIU. *Se desemnează prin U mulțimea matricelor pătrate de ordinul 2 de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sînt două numere reale astfel încît $a^2 + b^2 = 1$. Să se demonstreze că mulțimea U, înzestrată cu înmulțirea matricelor, este un grup comutativ.*

Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ aparținînd lui U, $a^2 + b^2$ nu este altceva decît determinantul lui A; rezultă de aici că U este mulțimea matricelor A de forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, astfel încît:

$$\det A = 1.$$

● Fie $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$
două matrice aparținînd lui U.
Avem:

$$AA' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -ab' - ba' \\ ba' + ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

Dacă punem:

$$\alpha = aa' - bb' \quad \text{și} \quad \beta = ab' + ba'$$

AA' se scrie sub forma: $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Cum în plus:

$$\det AA' = \det A \times \det A' = 1 \times 1 = 1,$$

rezultă de aici că matricea AA' aparține lui U.

Înmulţirea matricelor este deci o lege internă definită pe U:

$$\forall (A, A') \in U^2 \quad AA' \in U.$$

● Această lege este *asociativă* (nr. **4.2.5**):

$$\forall (A, A', A'') \in U^3 \quad (AA')A'' = A(A'A'').$$

● S-a demonstrat la nr. **9.3.1** că $AA' = A'A$; înmulţirea matricelor definite pe U este deci o lege *comutativă:*

$$\forall (A, A') \in U^2 \quad AA' = A'A.$$

● Urmează imediat că matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparţine lui U; I_2 este deci *element neutru* pentru U la înmulţirea matricelor definite pe U:

$$\exists I_2 \in U, \ \forall A \in U \ AI_2 = I_2A = A.$$

● Fie $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ o matrice aparţinînd lui U; cum

$$\det A = 1,$$

A este inversabilă şi matricea sa inversă A^{-1} este (nr. **9.3.2**)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Dacă se pune:

$$\alpha = a \text{ şi } \beta = -b,$$

A^{-1} se scrie sub forma $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Cum în plus:

$$\det A^{-1} = a^2 + b^2 = 1$$

rezultă că A^{-1} aparţine lui U, ceea ce dovedeşte că orice element al lui U admite un *simetric* în U relativ la înmulţirea matricelor definite pe U;

$$\forall A \in U, \quad \exists A^{-1} \in U \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I_2.$$

Studiul precedent dovedeşte că **înmulţirea matricelor conferă mulţimii U structura de grup comutativ.**

EXERCIȚII

9.19. 1° Să se demonstreze că există patru rotații vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ astfel încît:
unde φ este aplicația identică a lui $\vec{P}$.

$$\varphi^4 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi = e$$

2° Să se demonstreze că mulțimea formată din cele patru rotații vectoriale precedente este un grup comutativ. Să se scrie tabela de compunere în acest grup.

*

In cele trei exerciții care urmează, $\mathcal{J}$ și $\mathcal{R}$ desemnează respectiv mulțimea izometriilor și mulțimea rotațiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$.

9.20. 1° Să se demonstreze că:

$$\forall \varphi \in \mathcal{R}, \quad \forall f \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \quad \begin{matrix} f \circ \varphi \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \\ \varphi \circ f \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}). \end{matrix}$$

2° Să se demonstreze că:

$$\forall f \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}), \quad \forall g \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \quad g \circ f \notin (\mathcal{J} - \mathcal{R}).$$

Mulțimea $(\mathcal{J} - \mathcal{R})$ este un grup pentru compunerea aplicațiilor?

9.21. 1° Să se demonstreze că:

$$\forall \varphi \in \mathcal{R}, \quad \forall f \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}), \quad \exists f' \in (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \ \varphi = f' \circ f.$$

2° Reluați punctul precedent utilizînd matricele aplicațiilor liniare φ, f, f' într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$.

9.22. Să se demonstreze că:

$$\forall f \in \mathcal{J}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R} \quad f^{-1} \circ \varphi \circ f \ \mathcal{R}.$$

9.23. Fie φ o rotație vectorială a planului vectorial euclidian $\vec{P}$.
1° Să se demonstreze că, dacă termenii matricei A a lui φ într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ sînt raționali, același lucru are loc în orice altă bază ortonormată a lui $\vec{P}$. (O astfel de rotație vectorială φ se numește *rațională*).
2° Fie $\mathcal{S}$ mulțimea rotațiilor vectoriale raționale.
Să se demonstreze că $\mathcal{S}$ este un grup comutativ pentru compunerea aplicațiilor.
3° Fiecărui întreg relativ t, i se asociază aplicația liniară φ_t a lui $\vec{P}$ în el însuși pentru care matricea într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$

a lui $\vec{P}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{-2t}{1+t^2} \\ \dfrac{2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că aplicația φ_t aparține lui $\mathcal{S}$.

4° Să se demonstreze că, pentru orice rotație vectorială φ, aparținînd lui $\mathcal{S}$, diferită de omotetia vectorială de raport -1, există un întreg t, și numai unul, astfel ca:

$$\varphi = \varphi_t.$$

PROBLEME

9.24. Fie $\mathfrak{f}$ o aplicație a planului vectorial euclidian P în el însuși care conservă norma:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \qquad \|\mathfrak{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

1° Să se demonstreze că $\mathfrak{f}$ conservă produsul scalar.

2° Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui $\vec{P}$; se pune:

$$\vec{i}' = \mathfrak{f}(\vec{i}) \quad \text{și} \quad \vec{j}' = \mathfrak{f}(\vec{j}).$$

Să se demonstreze că $(\vec{i}', \vec{j}')$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$.

3° Fie $\vec{u}$ un vector de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ și fie $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ coordonatele lui $\mathfrak{f}(\vec{u})$ în baza $(\vec{i}', \vec{j}')$.
Să se demonstreze că: $x = x'$ și $y = y'$.

4° Să se deducă din punctul 3° că $\mathfrak{f}$ este o aplicație liniară.

5° Să se rezume studiul precedent sub forma unei teoreme.

9.25. Fie $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ o matrice patrată de ordin 2. Se numește *transpusa* lui A, matricea patrată de ordin 2, notată $\widetilde{A}$ pentru care prima (respectiv a doua) coloană este prima (respectiv a doua) linie a lui A:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că: $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \cdot \widetilde{A}$.

2° Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind raportat la o bază ortonormată

$(\vec{i}, \vec{j})$, fie $\mathfrak{f}$ aplicația liniară a lui $\vec{P}$ în el însuși pentru care matricea în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este A.
Să se demonstreze echivalența:

$$\mathfrak{f} \text{ este o izometrie} \Leftrightarrow A^{-1} = \tilde{A}.$$

9.26. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian și fie $\mathfrak{f}$ o aplicație liniară a lui $\vec{P}$ în el însuși pentru care matricea A în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că există o aplicație liniară $\mathfrak{f}^*$ a lui $\vec{P}$ în el însuși și numai una, astfel ca:

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \quad \mathfrak{f}(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \mathfrak{f}^*(\vec{v}).$$

Să se demonstreze că matricea lui $\mathfrak{f}^*$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2° Să se demonstreze echivalența:

$$\mathfrak{f} \text{ este o izometrie} \Leftrightarrow \mathfrak{f}^{-1} = \mathfrak{f}^*.$$

3° Să se demonstreze echivalența:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}^* \Leftrightarrow A \text{ este simetrică.}$$

9.27. Fie $\vec{i}$ și $\vec{i}'$ doi vectori unitari ai planului vectorial euclidian $\vec{P}$.
1° Să se demonstreze că există o izometrie $\mathfrak{f}$ și numai una neaparținînd grupului $\mathcal{R}$ al rotațiilor vectoriale și astfel ca:

$$\mathfrak{f}(\vec{i}) = \vec{i}'.$$

2° Să se demonstreze că:

$$\mathfrak{f}(\vec{i} + \vec{i}') = \vec{i} + \vec{i}' \text{ și că: } \mathfrak{f}(\vec{i} - \vec{i}') = \vec{i}' - \vec{i}.$$

9.28. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$.

1° Să se demonstreze că cei doi vectori $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ și $\vec{u}'\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ sînt unitari.

2° Să se demonstreze că există două izometrii şi numai două transformînd $\vec{u}$ în $\vec{u}'$.
Să se demonstreze că una, φ, este o rotaţie vectorială şi că cealaltă, $\mathfrak{f}$, nu este
3° Se pune:

$$\vec{i}' = \frac{1}{\|\vec{u} + \vec{u}'\|}(\vec{u} + \vec{u}') \text{ şi } \vec{j}' = \frac{1}{\|\vec{u} - \vec{u}'\|}(\vec{u} - \vec{u}').$$

Să se demonstreze că bivectorul $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$. Care sînt matricele lui φ şi $\mathfrak{f}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$?

9.29. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian; λ fiind un număr real stric pozitiv, se numeşte similitudine de raport λ orice aplicaţie liniară s a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ care are proprietatea următoare:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P}, \ \|s(\vec{u})\| = \lambda\|\vec{u}\|.$$

1° Să se demonstreze că orice similitudine s de raport λ este astfel încît:

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{P}^2 \ s(\vec{u}) \cdot s(\vec{v}) = \lambda^2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Să se studieze o reciprocă.
2° Fie s o similitudine de raport λ şi fie $\mathfrak{h}$ omotetia vectorială de raport $\frac{1}{\lambda}$. Să se demonstreze că $\mathfrak{h} \circ s = s \circ \mathfrak{h}$ şi că $s \circ \mathfrak{h}$ este o izometrie.
Să se deducă de aici că orice similitudine s poate să se scrie sub forma:

$$s = \mathfrak{f} \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathfrak{f},$$

unde $\mathfrak{f}$ este o izometrie şi $\mathfrak{h}$ o omotetie vectorială de raport pozitiv.
3° Să se demonstreze că matricea unei similitudini s de raport λ, într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ are una din cele două forme:

(1) $$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

unde a şi b sînt două numere reale astfel ca: $a^2 + b^2 = \lambda^2$. Să se studieze o reciprocă.
4° Se presupune că matricea similitudinii s, în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ este de forma (2). Să se demonstreze că există doi vectori unitari $\vec{i}'$ şi $\vec{j}'$ astfel încît:

$$s(\vec{i}') = \lambda\vec{i}' \quad \text{şi} \quad s(\vec{j}') = -\lambda\vec{j}'.$$

Să se demonstreze că bivectorul $(\vec{i'}, \vec{j'})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$. Care este matricea lui s în baza $(\vec{i'}, \vec{j'})$?

5° Fie s și s' două similitudini de raporturi respective λ și λ'. Să se demonstreze că $s' \circ s$ este o similitudine de raport $\lambda\lambda'$.

6° Fie s o similitudine de raport λ. Să se demonstreze că s este bijectivă și că aplicația sa reciprocă s^{-1} este o similitudine de raport $\frac{1}{\lambda}$.

7° Să se demonstreze că mulțimea $\mathcal{S}$ a similitudinilor, înzestrată cu compunerea aplicațiilor, este un grup.

8° Se spune că o similitudine s este pozitivă dacă s este de forma:

$$s = \alpha \circ h = h \circ \alpha,$$

unde α este o rotație vectorială și h o omotetie vectorială de raport pozitiv. Să se demonstreze că mulțimea de similitudini pozitive, înzestrată cu legea de compoziție a aplicațiilor, este un grup comutativ.

9.30. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Se consideră cele șase aplicații liniare ale lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$: e, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 pentru care matricele respective în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că cele șase aplicații precedente sînt izometrii. Să se indice, printre aceste izometrii, care sînt rotațiile vectoriale.

2° Să se calculeze produsele două cîte două ale matricelor I, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Să se deducă de aici că mulțimea $\{e, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, înzestrată cu legea de compoziție a aplicațiilor, este un grup G (se va forma tabelul înmulțirii acestui grup).

Grupul G este comutativ?

10. PLAN VECTORIAL EUCLIDIAN ORIENTAT

10.1. ORIENTAREA PLANULUI VECTORIAL EUCLIDIAN

10.1.1. Izometrie care transformă o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}', \vec{j}')$

● Fie f o izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui $\vec{P}$; se spune că bivectorul $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ este **transformatul prin f** al bivectorului $(\vec{i}, \vec{j})$.
Cum izometria f conservă produsul scalar şi norma, avem:

$$f(\vec{i}) \cdot f(\vec{j}) = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0,$$

$$\| f(\vec{i}) \| = \| \vec{i} \| = 1,$$

$$\| f(\vec{j}) \| = \| \vec{j} \| = 1;$$

rezultă de aici că bivectorul $(\mathrm{f}(\vec{i}), \mathrm{f}(\vec{j}))$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ (nr. **8.3.2**) ; se poate deci enunţa :

TEOREMA 1. / **Orice izometrie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ transformă o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$.**

● *Reciproc,* fie f o aplicaţie liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ care transformă o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ ntr-o bază ortonormată $(\vec{i'}, \vec{j'})$.

Pentru orice vector $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, avem :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Pe de altă parte, f fiind liniară :

$$\mathrm{f}(\vec{u}) = \mathrm{f}(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\mathrm{f}(\vec{i}) + y\mathrm{f}(\vec{j}) = x\vec{i'} + y\vec{j'} ;$$

rezultă de aici că coordonatele vectorului $\mathrm{f}(\vec{u})$ în baza ortonormată $(\vec{i'}, \vec{j'})$ sînt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deci că :

$$\|\mathrm{f}(\vec{u})\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Avem prin urmare : $\|\mathrm{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, ceea ce dovedeşte că aplicaţia liniară f, care conservă norma, este o izometrie.

Se poate deci enunţa :

TEOREMA 2. / **Dacă o aplicaţie liniară f a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi transformă o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ într-o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, atunci f este o izometrie.**

● Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$ şi fie $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ coordonatele respective ale vectorilor $\vec{i}'$ şi $\vec{j}'$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$.

Există o aplicaţie liniară f a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ şi numai una care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i}', \vec{j}')$ şi anume aceea pentru care matricea în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}.$$

Rezultă atunci din teorema 2, precedentă că f este o izometrie.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA 3. / **Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian şi fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$. Există o izometrie a lui $\vec{P}$, şi numai una, care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i}', \vec{j}')$.**

10.1.2. Baze ortonormate de aceeaşi orientare

Desemnăm prin $\mathcal{B}$ mulţimea bazelor ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi considerăm *relaţia binară* Θ definită de mulţimea $\mathcal{B}$ prin:

$(\vec{i}, \vec{j})\ \Theta\ (\vec{i}', \vec{j}')$ $\Leftrightarrow$ **izometria care transformă** $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i}', \vec{j}')$ **este o rotaţie vectorială.**

Dacă două baze ortonormate $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ sînt astfel încît:

$$(\vec{i}, \vec{j})\ \Theta\ (\vec{i}', \vec{j}'),$$

se spune că $(\vec{i}, \vec{j})$ **are aceeaşi orientare ca** $(\vec{i}', \vec{j}')$.

EXEMPLE. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Urmează imediat că bivectorii $(\vec{j}, \vec{i})$ şi $(\vec{j}, -\vec{i})$ sînt două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$.

● Matricea, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ a izometriei f care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{j}, \vec{i})$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum determinantul acestei matrice este:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

izometria f nu este o rotaţie vectorială.

Rezultă de aici că baza $(\vec{i}, \vec{j})$ nu are aceeaşi orientare ca baza $(\vec{j}, -\vec{i})$.

● Matricea în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ a izometriei φ care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{j}, -\vec{i})$ este:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cum determinantul acestei matrice este:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

izometria φ este o rotaţie vectorială.

Rezultă de aici că baza $(\vec{i}, \vec{j})$ are aceeaşi orientare ca baza $(\vec{j}, -\vec{i})$.

10.1.3. Proprietăţile relaţiei $\mathcal{O}$

● Pentru orice bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ aplicaţia identică e a lui $\vec{P}$ transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i}, \vec{j})$; cum e este o rotaţie vectorială, avem:

$$(\vec{i}, \vec{j}) \,\mathcal{O}\, (\vec{i}, \vec{j}),$$

ceea ce dovedeşte că **relaţia $\mathcal{O}$ este reflexivă.**

● Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ și $(\vec{i'}, \vec{j'})$ două baze ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ astfel încît:

$$(\vec{i}, \vec{j}) \mathcal{O} (\vec{i'}, \vec{j'});$$

φ fiind rotația vectorială care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i'}, \vec{j'})$, se știe că φ este bijectivă și că aplicația sa reciprocă φ^{-1} este o rotație vectorială.

Cum: $\qquad \varphi(\vec{i}) = \vec{i'}$ și $\varphi(\vec{j}) = \vec{j'}$,

avem: $\qquad \varphi^{-1}(\vec{i'}) = \vec{i}$ și $\varphi^{-1}(\vec{j'}) = \vec{j}$,

ceea ce dovedește că relația vectorială φ^{-1} transformă $(\vec{i'}, \vec{j'})$ în $(\vec{i}, \vec{j})$, deci că:

$$(\vec{i'}, \vec{j'}) \mathcal{O} (\vec{i}, \vec{j}).$$

Rezultă de aici că **relația $\mathcal{O}$ este simetrică.**

Două baze ortonormate $(\vec{i}, \vec{j})$ și $(\vec{i'}, \vec{j'})$ legate prin relația $\mathcal{O}$ se spune că sînt de **aceeași orientare.**

● Fie $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{i'}, \vec{j'})$ și $(\vec{i''}, \vec{j''})$ trei baze ortonormate ale planului vectorial $\vec{P}$ astfel ca:

$$(\vec{i}, \vec{j}) \mathcal{O} (\vec{i'}, \vec{j'}) \text{ și } (\vec{i'}, \vec{j'}) \mathcal{O} (\vec{i''}, \vec{j''});$$

φ și φ' fiind cele două rotații vectoriale care transformă respectiv $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i'}, \vec{j'})$ și $(\vec{i'}, \vec{j'})$ în $(\vec{i''}, \vec{j''})$. Se știe că aplicația compusă $\varphi' \circ \varphi$ este o rotație vectorială. Cum:

$$(\varphi' \circ \varphi)(\vec{i}) = \varphi'[\varphi(\vec{i})] = \varphi'(\vec{i'}) = \vec{i''},$$

$$(\varphi' \circ \varphi)(\vec{j}) = \varphi'[\varphi(\vec{j})] = \varphi'(\vec{j'}) = \vec{j''},$$

rotația vectorială $\varphi' \circ \varphi$ transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i''}, \vec{j''})$.

Rezultă de aici: $(\vec{i}, \vec{j}) \mathcal{O} (\vec{i''}, \vec{j''})$,

ceea ce implică faptul că **relația $\mathcal{O}$ este tranzitivă.**

Studiul făcut dovedeşte că relaţia $\mathcal{O}$, care este reflexivă, *simetrică* şi *tranzitivă*, este o *relaţie de echivalenţă*. Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 1. **Relaţia binară $\mathcal{O}$, definită pe mulţimea $\mathcal{B}$ a bazelor ortonormate a lui $\vec{P}$ prin:**

$$(\vec{i},\vec{j})\,\mathcal{O}\,(\vec{i}',\vec{j}') \Leftrightarrow \begin{cases}\text{izometria care transformă}\\ (\vec{i},\vec{j}) \text{ în } (\vec{i}',\vec{j}') \text{ este o ro-}\\ \text{taţie vectorială}\end{cases}$$

este o relaţie de echivalenţă.

● Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie $\vec{i}'$ un vector unitar aparţinînd lui $\vec{P}$. Se ştie că există o rotaţie vectorială φ şi numai una astfel ca:

$$\varphi(\vec{i}) = \vec{i}';$$

$\vec{j}'$ fiind transformatul prin φ al vectorului $\vec{j}$, bivectorul $(\vec{i}', \vec{j}')$ este atunci transformatul prin φ al bazei ortonormate $(\vec{i}, \vec{j})$; rezultă de aici că $(\vec{i}', \vec{j}')$ este o bază ortonormată (nr. **10.1.1** teorema 1) şi că această bază ortonormată are aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$.

Reciproc, fie $\vec{j}''$ un vector astfel că $(\vec{i}', \vec{j}'')$ este o bază ortonormată avînd aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$; există atunci o rotaţie vectorială care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i}', \vec{j}'')$ şi această rotaţie care transformă $\vec{i}$ în $\vec{i}'$ este în mod necesar egală cu φ. Rezultă de aici:

$$\vec{j}'' = \varphi(\vec{j}) = \vec{j}'.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 2. **Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie $\vec{i}'$ un vector unitar aparţinînd lui $\vec{P}$. Există un vector**

$\vec{j'}$, şi numai unul, astfel ca $(\vec{i'}, \vec{j'})$ să fie o bază ortonormată şi de aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$.

Aplicaţie. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie $\vec{i'}$ un vector unitar de coordonate $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$. Matricea, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, a rotaţiei vectoriale φ care transformă $\vec{i}$ în $\vec{i'}$ este (nr. 9.2.5):

$$A = \begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

Vectorul $\vec{j'}$, astfel că bivectorul $(\vec{i'}, \vec{j'})$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ avînd aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$ este transformatul prin φ al vectorului $\vec{j}$. Rezultă de aici că coordonatele lui $\vec{j'}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt:

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

10.1.4. Caracterizarea a două baze ortonormate de aceeaşi orientare

Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i'}, \vec{j'})$ două baze ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ coordonatele respective ale vectorilor $\vec{i'}$ şi $\vec{j'}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$.
Reamintim că se numeşte **determinant al bivectorului $(\vec{i'}, \vec{j'})$, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$**, determinantul care se poate nota $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i'}, \vec{j'})$, pentru care prima (respectiv a doua) coloană este coloana coordonatelor vectorului $\vec{i'}$ (respectiv $\vec{j'}$) în baza $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i'}, \vec{j'}) = \begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Se ştie, pe de altă parte, că matricea în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ a izometriei $\mathbf{f}$ care transformă baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ în baza ortonormată $(\vec{i}', \vec{j}')$ este (nr. **10.1.1**):

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

şi că $\mathbf{f}$ este o rotaţie vectorială dacă şi numai dacă determinantul lui A este egal cu 1 (nr. **9.2.3**). Rezultă de aici:

$$(\vec{i}, \vec{j}) \mathcal{O} (\vec{i}', \vec{j}') \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ este o rotaţie vectorială}$$
$$\Leftrightarrow \det A = 1$$
$$\Leftrightarrow \det_{(\vec{i}, \vec{j})} (\vec{i}', \vec{j}') = 1.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Două baze ortonormate $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ au aceeaşi orientare dacă şi numai dacă determinantul bivectorului $(\vec{i}', \vec{j}')$, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, este egal cu 1.**

Observaţii. — 1. Notaţiile fiind aceleaşi ca mai înainte, se ştie că izometria $\mathbf{f}$ care transformă $(\vec{i}, \vec{j})$ în $(\vec{i}', \vec{j}')$ nu este o rotaţie vectorială dacă şi numai dacă: $\det A = -1$ (nr. **9.2.3**).

Rezultă de aici că **două baze ortonormate** $(\vec{i}, \vec{j})$ **şi** $(\vec{i}', \vec{j}')$ **nu au aceeaşi orientare dacă şi numai dacă determinantul bivectorului** $(\vec{i}', \vec{j}')$ **în baza** $(\vec{i}, \vec{j})$ **este egal cu — 1.**

2. Se constată imediat că:

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})} (\vec{i}', \vec{j}') = -\det_{(\vec{i}, \vec{j})} (\vec{i}', \vec{j}').$$

3. Un bivector $(\vec{u}, \vec{v})$ pentru care determinantul, într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, este egal cu 1 sau cu -1, nu este în mod necesar o bază ortonormată. Demonstraţia acestui rezultat se propune în cadrul exerciţiului nr. **10.4.**

Exercițiu. *Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ se consideră vectorii:*

$$\vec{i}'\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{j}'\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{i}''\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{j}''\begin{pmatrix} \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că $(\vec{i}', \vec{j}')$ și $(\vec{i}'', \vec{j}'')$ sînt două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$ care nu are aceeași orientare.

Avem:

$$\|\vec{i}'\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

$$\|\vec{j}'\|^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$\vec{i}' \cdot \vec{j}' = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

ceea ce dovedește că $(\vec{i}', \vec{j}')$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$. De asemenea:

$$\|\vec{i}''\|^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1,$$

$$\|\vec{j}''\|^2 = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1,$$

$$\vec{i}'' \cdot \vec{j}'' = \frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9} = 0,$$

ceea ce dovedește că $(\vec{i}'', \vec{j}'')$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$. Pe de altă parte, avem:

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i}', \vec{j}') = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1,$$

ceea ce implică:

$$\text{non } [(\vec{i}, \vec{j}) \,\Theta\, (\vec{i'}, \vec{j'})]$$

şi:

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})} (\vec{i''}, \vec{j''}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$$

ceea ce implică

$$(\vec{i}, \vec{j}) \,\Theta\, (\vec{i''}, \vec{j''}).$$

Rezultă de aici că $(\vec{i'}, \vec{j'})$ şi $(\vec{i''}, \vec{j''})$ nu au aceeaşi orientare; în caz contrar am avea:

$$(\vec{i}, \vec{j}) \,\Theta\, (\vec{i''}, \vec{j''}) \text{ şi } (\vec{i''}, \vec{j''}) \,\Theta\, (\vec{i'}, \vec{j'}),$$

adică $(\vec{i}, \vec{j}) \,\Theta\, (\vec{i'}, \vec{j'})$,
ceea ce este contradictoriu deoarece mai avem şi:

$$\text{non } [(\vec{i}, \vec{j}) \,\Theta\, (\vec{i'}, \vec{j'})].$$

10.1.5. Orientarea planului vectorial euclidian

S-a definit la nr. **10.1.2** o relaţie de echivalenţă, notată Θ pe mulţimea $\mathfrak{B}$ a bazelor ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$.

Reamintim că o *clasă de echivalenţă modulo* Θ este mulţimea bazelor ortonormate ale lui $\vec{P}$ avînd aceeaşi orientare ca una dintre ele şi că două astfel de clase sînt egale sau disjuncte.

Reamintim totodată că mulţimea claselor de echivalenţă modulo Θ este numită *mulţimea cît* al lui $\mathfrak{B}$ prin Θ şi este notată $\mathfrak{B}/\Theta$.

Fie $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ o bază ortonormată dată a lui $\vec{P}$; s-a demonstrat la nr. **10.1.2** că baza ortonormată $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$

nu are aceeaşi orientare ca $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$. Rezultă de aici că mulţimea cît $\mathfrak{B}/\mathcal{O}$ are cel puţin două elemente şi anume clasa lui $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ şi aceea a lui $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$.

$(\vec{i}, \vec{j})$ fiind o bază ortonormată a lui $\vec{P}$, fie D determinantul bivectorului $(\vec{i}, \vec{j})$ în baza $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$.

- Dacă $D = 1$, $(\vec{i}, \vec{j})$ are aceeaşi orientare ca $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ şi aparţine deci clasei lui $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$.
- Dacă $D = -1$, determinantul bivectorului $(\vec{i}, \vec{j})$ în baza $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$, care este opusul lui D (nr. **10.1.4**), este egal cu 1; rezultă de aici că $(\vec{i}, \vec{j})$ are aceeaşi orientare ca $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$ deci că $(\vec{i}, \vec{j})$ aparţine clasei lui $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$.

Studiul făcut dovedeşte că **mulţimea cît $\mathfrak{B}/\mathcal{O}$ conţine două elemente şi numai două: clasa lui $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ şi aceea a lui $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$.**

Convenim să spunem că o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ are o **orientare pozitivă** (respectiv **negativă**) relativ la $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ dacă şi numai dacă $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ şi $(\vec{i}, \vec{j})$ au aceeaşi orientare (respectiv nu au aceeaşi orientare). Mulţimea bazelor ortonormate de orientare pozitivă este evident clasa de echivalenţă a lui $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$, adică un element din cele două ale mulţimii cît $\mathfrak{B}/\mathcal{O}$; mulţimea bazelor ortonormate de orientare negativă este atunci celălalt element al lui $\mathfrak{B}/\mathcal{O}$ şi anume clasa lui $(\vec{j}_0, \vec{i}_0)$. Cînd se defineşte astfel un semn indicînd orientarea pentru orice bază ortonormată a planului vectorial, euclidian $\vec{P}$, se spune că $\vec{P}$ **este orientat de baza ortonormată** $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$.

Observaţii. — **1.** Fie $\vec{P}$ planul vectorial euclidian orientat; în loc de a spune că o bază ortonormată are o *orientare pozitivă* (respectiv *negativă*), se spune de asemenea că ea este **directă** (respectiv **indirectă**).

2. Semnul de orientare corespunzător unei baze ortonormate a lui $\vec{P}$ depinde de alegerea, arbitrară, a bazei ortonormate $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ utilizată pentru a orienta pe $\vec{P}$.

3. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind orientat de baza ortonormată $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$, fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată directă.

Dacă o bază ortonormată $(\vec{i}', \vec{j}')$ are aceeaşi orientare ca şi $(\vec{i}, \vec{j})$, atunci $(\vec{i}', \vec{j}')$ este directă; dacă $(\vec{i}', \vec{j}')$ nu are aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$, atunci $(\vec{i}', \vec{j}')$ este indirectă.

4. Fie $\vec{P}$ planul vectorial euclidian orientat şi fie $\vec{i}$ un vector unitar aparţinînd lui $\vec{P}$.

$(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ fiind baza ortonormată utilizată pentru a orienta pe $\vec{P}$, s-a demonstrat la nr. **10.1.3** că există un vector $\vec{j}$ şi numai unul astfel ca $(\vec{i}, \vec{j})$ să fie o bază ortonormată avînd aceeaşi orientare ca $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$.

Rezultă de aici că, **pentru orice vector unitar $\vec{i}$ aparţinînd planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, există un vector unitar $\vec{j}$, şi numai unul, astfel că $(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată directă a lui $\vec{P}$.**

EXERCIŢII

10.1. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Se dau vectorii:

$$\vec{i}'\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{j}'\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad \vec{i}''\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{j}''\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1° Să se demonstreze că bivectorii $(\vec{i'}, \vec{j'})$ şi $(\vec{i''}, \vec{j''})$ sînt două baze ortonormate.

2° Care este, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, matricea A a izometriei $\mathfrak{f}$ care transformă $(\vec{i'}, \vec{j'})$ în $(\vec{i''}, \vec{j''})$? Izometria $\mathfrak{f}$ este o rotaţie vectorială?

3° Care este matricea A' a lui $\mathfrak{f}$ în baza $(\vec{i'}, \vec{j'})$?

10.2. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent cu:

a) $\vec{i'}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \vec{j'}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad \vec{i''}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{j''}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$

b) $\vec{i'}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}, \vec{j'}\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad \vec{i''}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{j''}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

10.3. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Se consideră următorii opt bivectori:

$$(\vec{i}, \vec{j}), \quad (\vec{i}, -\vec{j}), \quad (-\vec{i}, \vec{j}), \quad (-\vec{i}, -\vec{j}),$$

$$(\vec{j}, \vec{i}), \quad (\vec{j}, -\vec{i}), \quad (-\vec{j}, \vec{i}), \quad (-\vec{j}, -\vec{i}).$$

1° Să se demonstreze că fiecare dintre aceşti bivectori constituie o bază ortonormată pentru $\vec{P}$.

2° Să se scrie toate perechile conţinînd două din cele opt baze. Să se indice perechile care conţin baze de aceeaşi orientare.

10.4. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Să se determine doi vectori $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ cu următoarele două proprietăţi:

a) bivectorul $(\vec{u}, \vec{v})$ nu este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$;

b) determinantul bivectorului $(\vec{u}, \vec{v})$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este egal cu 1.

Care este determinantul bivectorului $(\vec{v}, \vec{u})$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$? Să se rezume studiul precedent sub forma unei teoreme.

10.5. Planul vectorial euclidian P este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$. Fie $\vec{i'}$ un vector unitar de coordonate $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

1° Să se demonstreze că există doi vectori unitari $\vec{j'_1}$ şi $\vec{j'_2}$, şi numai doi, astfel că $(\vec{i'}, \vec{j'_1})$ şi $(\vec{i'}, \vec{j'_2})$ sînt două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$.
2° Să se demonstreze că una din cele două baze precedente are aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$ şi că cealaltă nu are aceeaşi orientare ca $(\vec{i}, \vec{j})$.

10.6. 1° Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, să se demonstreze în cazurile următoare că bivectorii $(\vec{i'}, \vec{j'})$ şi $(\vec{i''}, \vec{j''})$ sînt două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$ şi să se indice dacă aceste două baze au aceeaşi orientare:

a) $\vec{i'}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \vec{j'}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \vec{i''}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{j''}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{i'}\begin{pmatrix} -\frac{12}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \vec{j'}\begin{pmatrix} -\frac{5}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}; \vec{i''}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \vec{j''}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}.$

c) $\vec{i'}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}, \vec{j'}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{7}} \\ -\sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}; \vec{i''}\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}; \vec{j''}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{6} \end{pmatrix}.$

2° Se presupune că planul vectorial $\vec{P}$ este orientat şi că baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ este de orientare negativă. Care, sînt, printre cele şase baze ortonormate precedente, acelea care sînt de orientare pozitivă?

10.7. Se consideră cele opt baze ortonormate definite în exerciţiul nr. **10.3** şi se presupune că planul vectorial $\vec{P}$ este orientat de baza $(\vec{i}, \vec{j})$. Printre aceste opt baze care sînt de orientare pozitivă? Dar de orientare negativă?

10.8. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i'}, \vec{j'})$ două baze ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că, dacă aceste două baze au aceeaşi orientare, avem:

$$\vec{i}\cdot\vec{i'}=\vec{j}\cdot\vec{j'}.$$

2° Ce se poate spune despre cele două baze $(\vec{i},\vec{j})$ şi $(\vec{i'},\vec{j'})$ dacă:

$$\vec{i}\cdot\vec{i'}\neq\vec{j}\cdot\vec{j'}?$$

3° Baza ortonormată $(\vec{i},\vec{j})$ fiind dată, să se determine toate bazele ortonormate $(\vec{i'},\vec{j'})$ neavînd aceeaşi orientare ca $(\vec{i},\vec{j})$ şi astfel ca:

$$\vec{i}\cdot\vec{i'}=\vec{j}\cdot\vec{j'}.$$

4° Implicaţia:

$$\vec{i}\cdot\vec{i'}=\vec{j}\cdot\vec{j'}\Rightarrow\begin{bmatrix}(\vec{i},\vec{j})\text{ şi }(\vec{i'},\vec{j'})\text{ au}\\ \text{aceeaşi orientare}\end{bmatrix}$$

este adevărată?

5° Să se demonstreze că:

$$\vec{i}\cdot\vec{i'}=\vec{j}\cdot\vec{j'}\neq 0\Rightarrow\begin{bmatrix}(\vec{i},\vec{j})\text{ şi }(\vec{i'},\vec{j'})\text{ au}\\ \text{aceeaşi orientare}\end{bmatrix}.$$

10.9. Fie $(\vec{i},\vec{j})$ şi $(\vec{i'},\vec{j'})$ două baze ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că dacă $(\vec{i},\vec{j})$ şi $(\vec{i'},\vec{j'})$ nu au aceeaşi orientare, vectorii $\vec{i}+\vec{i'}$ şi $\vec{j}+\vec{j'}$ sînt liniar dependenţi.

2° Ce se poate spune despre bazele $(\vec{i},\vec{j})$ şi $(\vec{i'},\vec{j'})$ dacă vectorii $\vec{i}+\vec{i'}$ şi $\vec{j}+\vec{j'}$ sînt liniar independenţi.

3° Baza ortonormată $(\vec{i},\vec{j})$ fiind dată, să se determine toate bazele ortonormate $(\vec{i'},\vec{j'})$ avînd aceeaşi orientare ca $(\vec{i},\vec{j})$ şi astfel ca vectorii $\vec{i}+\vec{i'}$ şi $\vec{j}+\vec{j'}$ să fie liniar dependenţi.

4° Implicaţia:

$$\begin{bmatrix}\vec{i}+\vec{i'}\text{ şi }\vec{j}+\vec{j'}\text{ sînt}\\ \text{liniar dependenţi}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}(\vec{i},\vec{j})\text{ şi }(\vec{i'},\vec{j'})\text{ nu au}\\ \text{aceeaşi orientare}\end{bmatrix}$$

este adevărată?

5° Să se demonstreze că:

$$\begin{bmatrix}\vec{i}+\vec{i'}\text{ şi }\vec{j}+\vec{j'}\text{ liniar}\\ \text{dependente şi }\vec{i}+\vec{i'}\neq\vec{0}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}(\vec{i},\vec{j})\text{ şi }(\vec{i'},\vec{j'})\text{ nu au}\\ \text{aceeaşi orientare}\end{bmatrix}.$$

10.2. COSINUSUL ŞI SINUSUL UNEI ROTAŢII VECTORIALE A PLANULUI VECTORIAL EUCLIDIAN ORIENTAT

10.2.1. Comparaţie între matricele unei rotaţii vectoriale în două baze ortonormate de aceeaşi orientare

Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ două baze ortonormate ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ avînd aceeaşi orientare; există o rotaţie vectorială ψ, şi numai una, care transformă baza $(\vec{i}, \vec{j})$ în baza $(\vec{i}', \vec{j}')$:

$$\vec{i}' = \psi(\vec{i}) \text{ şi } \vec{j}' = \psi(\vec{j}).$$

Fie φ_0 o rotaţie vectorială cu matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ şi matricea $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}', \vec{j}')$; avem

$$\varphi(\vec{i}) = a\vec{i} + b\vec{j} \text{ şi } \varphi(\vec{i}') = a'\vec{i}' + b'\vec{j}'.$$

Pe de altă parte, cum compunerea rotaţiilor vectoriale este comutativă, urmează:

$$\varphi(\vec{i}') = \varphi[\psi(\vec{i})] = \psi[\varphi(\vec{i})] = \psi(a\vec{i} + b\vec{j}) =$$
$$= a\psi(\vec{i}) + b\psi(\vec{j}) = a\vec{i}' + b\vec{j}'.$$

Rezultă de aici:

$$\varphi(\vec{i}') = a'\vec{i}' + b'\vec{j}' = a\vec{i}' + b\vec{j}',$$

ceea ce dovedeşte că:

$$a' = a \text{ şi } b' = b,$$

deci că matricele A şi A' sînt egale. Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / Fie φ o rotaţie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Matricele lui φ în două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$, sînt egale.

10.2.2. Cosinusul şi sinusul unei rotaţii a planului vectorial euclidian orientat

Fie φ o rotaţie a planului vectorial euclidian *orientat* $\vec{P}$. Matricea A a lui φ, într-o bază ortonormată *directă* $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$, este astfel ca:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

şi:

$(\vec{i}', \vec{j}')$ fiind o bază ortonormată *directă* a lui $\vec{P}$, bazele $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i}', \vec{j}')$ au aceeaşi orientare; teorema enunţată la nr. **10.2.1** dovedeşte atunci că matricea lui φ în baza $(\vec{i}', \vec{j}')$ este egală cu A.

Rezultă de aici că matricea rotaţiei vectoriale φ, într-o bază ortonormată directă a lui $\vec{P}$, este independentă de această bază.

Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 1. Pentru orice rotaţie vectorială φ a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, există un cuplu (a, b) de numere reale, şi numai unul, astfel ca:

1. Matricea lui φ, în orice bază ortonormată directă a lui $\vec{P}$, este

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

2. $$a^2 + b^2 = 1.$$

Numerele reale a şi b sînt respectiv numite cosinusul şi sinusul rotaţiei vectoriale φ şi sînt notate:

$$\cos \varphi \text{ şi } \sin \varphi.$$

Observaţii. — 1. Cosinusul şi sinusul unei rotaţii φ, a planului vectorial euclidian $\vec{P}$, sînt definite atunci cînd $\vec{P}$ este orientat.

Cosinusul lui φ este independent de orientarea lui $\vec{P}$; din contră, sinusul lui φ depinde de această orientare. Demonstraţia acestui rezultat este propusă în cadrul exerciţiului nr. **10.10.**

2. Fie φ o rotaţie a planului vectorial euclidian $\vec{P}$; $\vec{P}$ fiind orientat, matricea lui φ, în orice bază ortonormată directă a lui $\vec{P}$, este:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici că **două rotaţii vectoriale care au acelaşi cosinus şi acelaşi sinus, sînt egale.**

3. Pentru orice rotaţie φ, a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, avem:

$$(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = 1,$$

egalitate care se scrie de asemenea sub forma:

$$\boxed{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.}$$

4. Aplicaţia identică e, a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, este o rotaţie vectorială a lui $\vec{P}$; cum matricea lui φ, în orice bază ortonormată a lui $\vec{P}$, este $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avem:

$$\boxed{\cos e = 1 \text{ şi } \sin e = 0.}$$

5. Fie a şi b două numere reale astfel încît:

$$a^2 + b^2 = 1.$$

$\vec{P}$ fiind un plan vectorial euclidian orientat şi $(\vec{i}, \vec{j})$ fiind o bază ortonormată directă a lui $\vec{P}$, fie φ rotaţia vectorială pentru care matricea, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};$$

urmează atunci imediat că:

$$\cos \varphi = a \text{ şi } \sin \varphi = b.$$

Reciproc, o rotaţie vectorială a lui $\vec{P}$ pentru care cosinusul este a şi sinusul este b, are acelaşi cosinus şi acelaşi sinus ca φ şi este deci egală cu φ.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA 2. / **a şi b fiind două numere reale astfel încît:**

$$a^2 + b^2 = 1,$$

există o rotaţie φ a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, şi numai una, astfel ca:

$$\cos \varphi = a \text{ şi } \sin \varphi = b.$$

10.2.3. Cosinusul şi sinusul rotaţiei reciproce a unei rotaţii vectoriale

Fie φ o rotaţie a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$; matricea lui φ, în baza ortonormată directă a lui $\vec{P}$, este:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Se ştie că φ este bijectivă şi că aplicaţia reciprocă φ^{-1} este o rotaţie vectorială pentru care matricea, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este (nr. **9.3.2**);

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\varphi^{-1}) &= \cos\varphi \\ \sin(\varphi^{-1}) &= -\sin\varphi. \end{aligned}}$$

10.2.4. Cosinusul şi sinusul rotaţiei compuse a două rotaţii vectoriale

Fie φ şi φ' două rotaţii ale planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$; matricele corespunzătoare pentru φ şi φ', în baza ortonormată directă a lui $\vec{P}$, sînt:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\varphi' & -\sin\varphi' \\ \sin\varphi' & \cos\varphi' \end{pmatrix}.$$

Se ştie că aplicaţia compusă $\varphi' \circ \varphi$ este o rotaţie vectorială pentru care matricea, în baza $(\vec{i}, \vec{j})$, este: (nr. **9.3.1**):

$$A'A = \begin{pmatrix} \cos\varphi' & -\sin\varphi' \\ \sin\varphi' & \cos\varphi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi'\cos\varphi - \sin\varphi'\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\cos\varphi' \\ \sin\varphi'\cos\varphi + \cos\varphi'\sin\varphi & -\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi' \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\varphi' \circ \varphi) &= \cos\varphi \cos\varphi' - \sin\varphi \sin\varphi' \\ \sin(\varphi' \circ \varphi) &= \sin\varphi \cos\varphi' + \cos\varphi \sin\varphi'.\end{aligned}}$$

Consecință. — Dacă $\varphi = \varphi'$, formulele precedente devin:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\varphi \circ \varphi) &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\ \sin(\varphi \circ \varphi) &= 2\sin\varphi\cos\varphi.\end{aligned}}$$

EXERCIŢIU. *Fie φ rotaţia planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$ definită prin:*

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \text{ şi } \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să se determine mulţimea rotaţiilor vectoriale ψ astfel ca: $\psi \circ \psi = \varphi$

ψ fiind o rotaţie vectorială, punem

$$\cos\psi = x \text{ şi } \sin\psi = y;$$

egalitatea $\psi \circ \psi = \varphi$ are loc dacă şi numai dacă:

$$\mathrm{I}\begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] 2xy = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Pe de altă parte avem:

$$2xy = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = \dfrac{3}{16} \\[2ex] xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(-y^2) = -\dfrac{3}{16} \\[2ex] xy > 0. \end{cases}$$

Rezultă de aici că sistemul I este echivalent cu:

$$\mathrm{II}\begin{cases} x^2 + (-y^2) = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x^2(-y^2) = -\dfrac{3}{16} \\[2ex] xy > 0. \end{cases}$$

Cele două numere x^2 şi $-y^2$, pentru care suma este $\frac{1}{2}$ şi produsul $-\frac{3}{16}$, sînt rădăcinile ecuaţiei de gradul II:

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{3}{16} = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii fiind $\frac{3}{4}$ şi $-\frac{1}{4}$, avem:

$$x^2 = \frac{3}{4} \text{ şi } -y^2 = -\frac{1}{4},$$

adică:

$$x^2 = \frac{3}{4} \text{ şi } y^2 = \frac{1}{4}$$

Sistemul II este deci echivalent cu:

$$\text{III} \begin{cases} x^2 = \dfrac{3}{4} \\ y^2 = \dfrac{1}{4} \\ xy > 0 \end{cases}$$

adică

$$\text{IV} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ sau } x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \text{ sau } y = -\dfrac{1}{2} \\ xy > 0 \end{cases}$$

Sistemul IV şi prin urmare sistemul I are două soluţii şi numai două:

$$\left(x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{1}{2}\right), \left(x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2}\right).$$

Rezultă de aici că există două rotaţii vectoriale şi numai două, soluţii ale problemei puse.

ψ_1 definită prin: $\cos \psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\sin \psi_1 = \frac{1}{2}$,

ψ_2 definită prin: $\cos \psi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\sin \psi_2 = -\frac{1}{2}$.

EXERCIŢII

10.10. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian şi fie $(\vec{i}, \vec{j})$ şi $(\vec{i'}, \vec{j'})$ două baze ortonormate ale lui $\vec{P}$ neavînd aceeaşi orientare.

1° Fie φ o rotaţie vectorială a lui $\vec{P}$ cu matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$.

Să se demonstreze că matricea lui φ în baza (i', j') este $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

2° Fie α şi β cosinusul şi sinsul lui φ atunci cînd $\vec{P}$ este orientat de baza $(\vec{i}, \vec{j})$ şi fie α' şi β' cosinusul şi sinusul lui φ atunci cînd $\vec{P}$ este orientat de baza $(\vec{i'}, \vec{j'})$.
Ce relaţii există între α şi α', pe de o parte, şi β şi β' pe de altă parte.

10.11. Planul vectorial euclidian orientat $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ cu orientare pozitivă. Să se determine cosinusul şi sinsul rotaţiei vectoriale φ care transformă vectorul unitar $\vec{u}$ în vectorul unitar $\vec{u'}$ în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

e) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; f) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix} \frac{8}{17} \\ \frac{15}{17} \end{pmatrix}$.

10.12. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat şi fie a un număr real aparţinînd intervalului închis $[-1, +1]$.

Să se determine mulţimea rotaţiilor vectoriale φ ale lui $\vec{P}$ astfel încît:

$$\cos \varphi = a.$$

Să se discute, după valorile lui a, numărul de elemente al acestei mulţimi.

Aplicaţie. $a = -1$, $a = 1$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10.13. Să se demonstreze că, pentru orice rotaţie φ a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, avem:

$$\cos \varphi \in [-1, +1], \ \sin \varphi \in [-1, +1], \ (\cos \varphi, \sin \varphi) \neq (0,0)$$

10.14. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat şi fie b un număr real aparţinînd intervalului închis $[-1, +1]$. Să se determine mulţimea rotaţiilor vectoriale φ ale lui $\vec{P}$, astfel ca:

$$\sin \varphi = b.$$

Să se discute, după valorile lui b, numărul elementelor acestei mulţimi.

Aplicaţie. $b = 1$, $b = -1$, $b = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.15. Fie φ şi ψ două rotaţii vectoriale ale planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$.
Să se demonstreze că:

$$\cos (\psi^{-1} \circ \varphi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi$$

$$\sin (\psi^{-1} \circ \varphi) = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi.$$

10.16. Fie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trei rotaţii vectoriale ale planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$. Să se exprime în funcţie de cosinusul şi de sinusul acestor rotaţii, cosinusul şi sinusul rotaţiei $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$.

10.17. Fie φ o rotaţie a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$. Să se demonstreze că:

$$\cos (\varphi \circ \varphi) = 1 - 2 \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1.$$

Să se deducă de aici o expresie pentru $\cos^2 \varphi$ şi $\sin^2 \varphi$ în funcţie de $\cos (\varphi \circ \varphi)$.

10.18. Fie φ o rotaţie vectorială a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$ definit prin:

$$\cos \varphi = a, \ \sin \varphi = b.$$

Să se determine rotațiile vectoriale ψ astfel ca: $\psi \circ \psi = \varphi$, în cazurile următoare:

1° $a = 1,\ b = 0$. 2° $a = 0,\ b = 1$.

3° $a = -1,\ b = 0$. 4° $a = 0,\ b = -1$.

5° $a = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b = \frac{1}{2}$. 6° $a = \frac{\sqrt{2}}{2},\ b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7° $a = \frac{3}{5},\ b = -\frac{4}{5}$. 8° $a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.19. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat. Să se determine mulțimea rotațiilor vectoriale φ care verifică relațiile:

1° $\cos \varphi = \sin \varphi$. 2° $\sin \varphi = \sin (\varphi \circ \varphi)$.

3° $\cos \varphi = \cos (\varphi \circ \varphi)$. 4° $\cos \varphi = \cos (\varphi \circ \varphi)$.

5° $\cos \varphi = \sin (\varphi \circ \varphi)$. 6° $\sin^2 = 3 \cos \varphi$.

7° $\sin (\varphi \circ \varphi) + \cos (\varphi \circ \varphi \circ \varphi) = 0$.

(Se reamintește că o rotație vectorială este definită de către cosinusul și sinusul său.)

10.20. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat.

1° Să se demonstreze că pentru orice rotație vectorială, avem:

$$(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 = 2 - (\cos \varphi - \sin \varphi)^2.$$

2° Să se determine rotațiile vectoriale φ ale planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, astfel ca:

$$\cos \varphi + \sin \varphi = \sqrt{2}.$$

10.21. Fie φ_0 o rotație vectorială a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, astfel încît:

$$\cos \varphi_0 = a, \quad \sin \varphi_0 = b.$$

1° Să se determine rotațiile vectoriale φ astfel încît:

$$\cos \varphi = \cos \varphi_0.$$

2° Să se determine rotațiile vectoriale φ astfel încît:

$$\sin \varphi = \sin \varphi_0.$$

PROBLEME

10.22. *Orientarea unui plan vectorial.*

Fie $\vec{P}$ un plan vectorial care nu este în mod necesar euclidian.

1° Fie $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{i'}, \vec{j'})$, $(\vec{i''}, \vec{j''})$ trei baze ale lui $\vec{P}$. Să se demonstreze că:

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i'}, \vec{j'}) \times \det_{(\vec{i'}, \vec{j'})}(\vec{i''}, \vec{j''}) = \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i''}, \vec{j''}).$$

2° Pe mulţimea $\mathcal{B}$ a bazelor lui $\vec{P}$, se defineşte o relaţie binară notată Θ prin:

$$(\vec{i}, \vec{j})\, \Theta\, (\vec{i'}, \vec{j'}) \Leftrightarrow \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{i'}, \vec{j'}) > 0.$$

a) Să se demonstreze că relaţia Θ este reflexivă.

b) Să se demonstreze că relaţia Θ este simetrică.

c) Să se demonstreze că relaţia Θ este tranzitivă.

Să se deducă de aici că relaţia Θ este o relaţie de echivalenţă.
3° Să se demonstreze că mulţimea cît $\mathcal{B}/\Theta$ conţine două elemente şi numai două.
4° Să se definească ca la nr. **10.1.5.** o orientare a planului vectorial $\vec{P}$ plecînd de la una din bazele sale.

10.23. Fie φ o rotaţie vectorială a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$.
1° Să se demonstreze că:

$$\cos(\varphi \circ \varphi \circ \varphi) = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$$
$$\sin(\varphi \circ \varphi \circ \varphi) = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi.$$

2° Să se determine mulţimea rotaţiilor vectoriale φ astfel ca: $\varphi \circ \varphi \circ \varphi = e$ unde e reprezintă aplicaţia identică a lui $\vec{P}$.

3° Să se demonstreze că mulţimea precedentă, înzestrată cu compunerea aplicaţiilor, este un grup comutativ cu trei elemente. Să se construiască tabelul legii de compoziţie pentru acest grup.

10.24. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ este raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ de orientare pozitivă.
1° Să se determine cosinusul şi sinusul rotaţiei vectoriale care transformă $\vec{i}$ în $\vec{j}$.

2° Să se demonstreze că, pentru orice vector unitar $\vec{i'}$, bivectorul $(\vec{i'}, \varphi(\vec{i'}))$ este o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ de orientare pozitivă.

3° Se face notaţia:

$$\varphi^0 = e,\ \varphi^3 = \underbrace{\varphi \circ \varphi \ldots \circ \varphi}_{n \text{ ori}},$$

unde e este aplicaţia identică a lui $\vec{P}$.
Să se demonstreze că mulţimea $G = \{\varphi^n, n \in N\}$ înzestrată cu

legea de compoziție a aplicațiilor este un grup finit comutativ conținînd patru elemente.
Să se construiască tabelul legii de compoziție pentru acest grup.

10.25. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat.
1° Să se demonstreze că există o rotație vectorială φ_0, și numai una, astfel ca:

$$\cos \varphi_0 = -1$$

2° Fie φ o rotație vectorială diferită de φ_0. Să se demonstreze că există un număr real t, și numai unul, astfel ca:

$$\cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2t}{1+t^2}.$$

a) Să se exprime t în funcție de $\cos \varphi$ și $\sin \varphi$.
b) Să se demonstreze că există cel puțin o rotație vectorială astfel ca:

$$\psi \circ \psi = \varphi.$$

c) Să se demonstreze că:

$$t = \frac{\sin \psi}{\cos \psi}.$$

10.26. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian orientat și fie a, b, c trei numere reale astfel ca:

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

Se desemnează prin S mulțimea rotațiilor vectoriale ale lui $\vec{P}$ astfel ca:

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c.$$

1° Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a lui $\vec{P}$ și fie $\vec{u}$ vectorul de coordonate $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$. Să se demonstreze echivalența:

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \varphi(\vec{i}) = c.$$

2° Fie E mulțimea vectorilor unitari $\vec{i'}$ astfel ca:

$$\vec{u} \cdot \vec{i'} = c.$$

Să se demonstreze echivalența:

$$\varphi \in S \Leftrightarrow \varphi(i) \in E.$$

3° Să se determine E apoi S în cazurile următoare:

$$a = 1,\ b = 1,\ c = \sqrt{2}$$

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 1$$

$$a = 1,\ b = -2,\ c = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$$

$$a = 2,\ b = -1,\ c = 6$$

$$a = 1,\ b = \sqrt{3},\ c = 2.$$

11. GRUPUL UNGHIURILOR

11.1. UNGHIUL UNUI CUPLU DE SEMIDREPTE VECTORIALE

11.1.1. Semidreaptă vectorială

Fie $\vec{u}$ un vector *nenul* aparţinînd planului vectorial $\vec{P}$. Reamintim (cursul clasei a II-a, nr. **4.3.5**) că se numeşte **semidreaptă vectorială** conţinînd pe $\vec{u}$ mulţimea, notată $\mathbf{R}^+\vec{u}$, definită prin :

$$\mathbf{R}^+\vec{u} = \{\vec{v} \in \vec{P};\ \exists t \in \mathbf{R}^+ \vec{v} = t\vec{u}\};$$

vectorii $0 = \vec{0} \cdot \vec{u}$ şi $\vec{u} = 1 \cdot \vec{u}$ aparţin în mod evident lui $\mathbf{R}^+ \vec{u}$. Pentru a simplifica notaţiile vom putea desemna o semidreaptă vectorială printr-un simbol ca :

$$\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{\triangle}, \overset{\mapsto}{D'}, \overset{\mapsto}{\triangle'}, \ldots$$

PROPRIETĂȚILE SEMIDREPTELOR VECTORIALE

1. Fie $\vec{u}$ un vector nenul aparținînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$ și fie $\overset{\mapsto}{D}$ semidreapta vectorială conținînd pe $\vec{u}$. Vectorul *unitar* $\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ aparține evident lui $\overset{\mapsto}{D}$.

Reciproc, fie $\vec{i'}$ un vector unitar aparținînd lui $\overset{\mapsto}{D}$; există un număr real t, pozitiv sau nul, astfel ca $\vec{i'} = t\vec{u}$ deci astfel ca:

$$\|\vec{i'}\| = |t| \, \|\vec{u}\| = t \, \|\vec{u}\| = 1;$$

rezultă de aci că $t = \frac{1}{\|\vec{u}\|}$, ceea ce implică:

$$\vec{i'} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \vec{i}.$$

Se poate deci enunța:

TEOREMA / 1. **O semidreaptă vectorială conține un vector unitar și numai unul.**

2. Fie $\vec{i}$ un vector *unitar* aparținînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Semidreapta vectorială $\overset{\mapsto}{D} = \mathbf{R}^+\vec{i}$ conține evident vectorul $\vec{i}$.

Reciproc, fie $\overset{\mapsto}{\triangle} = \mathbf{R}^+\vec{u}$ o semidreaptă vectorială conținînd pe $\vec{i}$. Cum $\vec{i}$ aparține lui $\overset{\mapsto}{\triangle}$ și cum singurul vector unitar aparținînd lui $\overset{\mapsto}{\triangle}$ este $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, avem:

$$\vec{i} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}.$$

Avem atunci:

- $\vec{v} \in \overset{\mapsto}{D} \Rightarrow \exists t \geq 0;\ \vec{v} = t\vec{i} \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{t}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ şi

  $\dfrac{t}{\|\vec{u}\|} \geq 0 \Rightarrow \vec{v} \in \overset{\mapsto}{\Delta}$

- $\vec{v} \in \overset{\mapsto}{\Delta} \Rightarrow \exists t \geq 0;\ \vec{v} = t\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = t\,\|\vec{u}\|\vec{i}$ şi

  $t\,\|\vec{u}\| \geq 0 \Rightarrow \vec{v} \in \overset{\mapsto}{D}.$

Rezultă de aici: $\overset{\mapsto}{D} = \overset{\mapsto}{\Delta}$; se poate deci enunţa:

TEOREMA 2. / **Există o semidreaptă vectorială şi numai una conţinînd un vector unitar dat.**

Rezultă din această teoremă că o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D}$ este determinată de vectorul unitar $\vec{i}$ pe care îl conţine: $\overset{\mapsto}{D} = \mathbb{R}^+\vec{i}$.

Observaţie. — Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ două semidrepte vectoriale de vectori unitari respectivi $\vec{i}$ şi $\vec{i'}$.

Se spune că $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ sînt **opuse** dacă $\vec{i'} = -\vec{i}$.

Se spune că $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ sînt **ortogonale** dacă $\vec{i}$ şi $\vec{i'}$ sînt ortogonali; orice vector din $\overset{\mapsto}{D}$ este atunci ortogonal oricărui vector din $\overset{\mapsto}{D'}$.

11.1.2. Rotaţia vectorială care transformă o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D}$ într-o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D'}$.

Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ două semidrepte vectoriale incluse în planul vectorial euclidian $\vec{P}$.

$\vec{i}$ şi $\vec{i'}$ fiind doi vectori unitari aparţinînd respectiv lui $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$, desemnăm prin φ rotaţia vectorială a lui $\vec{P}$ care transformă $\vec{i}$ în $\vec{i'}$.

● Pentru orice vector $\vec{u}$ aparţinînd lui $\overset{\mapsto}{D} = \mathbf{R}^+\vec{i}$, există un număr real t pozitiv sau nul astfel ca: $\vec{u} = t\vec{i}$; avem atunci:

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi(t\vec{i}) = t\varphi(\vec{i}) = t\vec{i'},$$

ceea ce dovedeşte că $\varphi(\vec{u})$ aparţine lui $\overset{\mapsto}{D'} = \mathbf{R}^+\vec{i'}$.

● Pentru orice vector $\vec{u'}$ aparţinînd lui $\overset{\mapsto}{D'}$, există un număr real t pozitiv sau nul astfel ca:

$$\vec{u'} = t\vec{i'};$$

urmează atunci imediat că $\vec{u'}$ este transformatul prin φ al vectorului $\vec{u} = t\vec{i}$ aparţinînd lui $\overset{\mapsto}{D}$.
Studiul făcut dovedeşte că $\overset{\mapsto}{D'}$ este mulţimea transformatelor prin φ a vectorilor din $\overset{\mapsto}{D}$, deci că rotaţia vectorială φ transformă semidreapta vectorială $\overset{\mapsto}{D}$ în semidreapta vectorială $\overset{\mapsto}{D'}$.
Reciproc, fie ψ o rotaţie vectorială care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D'}$. Cum ψ este o izometrie, ψ conservă norma; rezultă de aici că vectorul $\psi(\vec{i})$ este unitar şi aparţine lui $\overset{\mapsto}{D'}$, deci că $\psi(\vec{i}) = \vec{i'}$. Rotaţia vectorială ψ, care transformă $\vec{i}$ în $\vec{i'}$, este atunci egală cu φ.
Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ două semidrepte vectoriale incluse în planul vectorial euclidian $\vec{P}$. Există o rotaţie vectorială a lui $\vec{P}$, şi numai una, care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D'}$, anume aceea care transformă vectorul unitar din $\overset{\mapsto}{D}$ în vectorul unitar din $\overset{\mapsto}{D'}$.**

11.1.3. Unghiul unui cuplu de semidrepte vectoriale. Unghiul unui bivector.

Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D}'$ două semidrepte vectoriale incluse în planul vectorial euclidian $\vec{P}$.

DEFINIŢIA / 1. **Se numeşte unghi al cuplului $(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}')$ şi se notează $\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}')}$, rotaţia vectorială care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D}'$.**

Unghiul $\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}')}$ este deci rotaţia vectorială a lui $\vec{P}$ care transformă vectorul unitar $\vec{i}$ din $\overset{\mapsto}{D}$ în vectorul unitar $\vec{i}'$ din $\overset{\mapsto}{D}'$.

Fie $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ doi vectori *nenuli* aparţinînd lui $\vec{P}$.

DEFINIŢIA / 2. **Se numeşte unghi al bivectorului $(\vec{u}, \vec{u}')$ şi se notează $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ rotaţia vectorială care transformă semidreapta vectorială $\mathbf{R}^+\vec{u}$ în semidreapta vectorială $\mathbf{R}^+\vec{u}'$.**

Vectorii unitari ai semidreptelor vectoriale $\mathbf{R}^+\vec{u}$ şi $\mathbf{R}^+\vec{u}'$ sînt respectiv $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ şi $\frac{1}{\|\vec{u}'\|}\vec{u}'$; unghiul $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ este deci rotaţia vectorială care transformă vectorul $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ în vectorul $\frac{1}{\|\vec{u}'\|}\vec{u}'$.

Observaţii. — **1** Simbolul $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ nu are sens decît dacă fiecare dintre vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ este nenul.

2 Rotaţia $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ transformă $\vec{u}$ în $\vec{u}'$ dacă şi numai dacă normele vectorilor $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ sînt egale ; demonstraţia acestui fapt este propusă în cadrul exerciţiului nr. **11.11.**

11.1.4. Cosinusul şi sinusul unghiului unui bivector

● Fie $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ doi vectori unitari aparţinînd planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, şi fie $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$ coordonatele respective ale acestor doi vectori într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$.

Unghiul $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ este rotaţia vectorială φ care transformă vectorul unitar $\vec{u}$ în vectorul unitar $\vec{u}'$ (nr. **11.1.3**).

Matricea lui φ în baza ortonormată directă $(\vec{i}, \vec{j})$ este :

$$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

şi coordonatele vectorului $\varphi(\vec{u})$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi\\ \alpha\sin\varphi + \beta\ \mathrm{ocs}\ \varphi\end{pmatrix}.$$

Cum $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}'$, avem :

$$\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi = \alpha'$$
$$\beta\cos\varphi + \alpha\cos\varphi = \beta'$$

ceea ce dovedeşte că cuplul $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ este soluţia sistemului

$$\mathrm{I}\begin{cases}\alpha x - \beta y = \alpha'\\ \beta x + \alpha y = \beta'.\end{cases}$$

Determinantul sistemului I este:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \beta^2;$$

Vectorul $\vec{u}$ fiind unitar, avem:

$$\| \vec{u} \| = \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Rezultă de aici că $D = 1$, ceea ce dovedeşte că sistemul I are o soluţie şi numai una:

$$x = \begin{vmatrix} \alpha' & -\beta \\ \beta' & \alpha \end{vmatrix} = \alpha\alpha' + \beta\beta',$$

$$y = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

Remarcînd că:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \vec{u} \cdot \vec{u}' \text{ şi } \alpha\beta' - \beta\alpha' = \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{u}'),$$

avem:

$$\cos \varphi = \vec{u} \cdot \vec{u}' \text{ şi } \sin \varphi = \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{u}').$$

● Fie $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ doi vectori nenuli aparţinînd planului vectorial euclidian *orientat* $\vec{P}$ şi fie $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ coordonatele respective ale acestor doi vectori în baza ortonormată directă $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$.

Unghiul $\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$ este rotaţia vectorială care transformă vectorul unitar $\vec{u} = \frac{1}{\| \vec{v} \|} \vec{v}$ în vectorul unitar $\vec{u}' = \frac{1}{\| \vec{v}' \|} \vec{v}'$. Din studiul făcut anterior rezultă:

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) = \vec{u} \cdot \vec{u}' = \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right) \cdot \left(\frac{1}{\|\vec{v}'\|}\vec{v}'\right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}'\|},$$

$$\sin(\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) = \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{u}').$$

Coordonatele respective în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ a vectorilor $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ și $\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{v}'\|}\vec{v}'$ sînt $\begin{pmatrix} \frac{a}{\|\vec{v}\|} \\ \frac{b}{\|\vec{v}\|} \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} \frac{a'}{\|\vec{v}'\|} \\ \frac{b'}{\|\vec{v}'\|} \end{pmatrix}$;

avem deci:

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} \frac{a}{\|\vec{v}\|} & \frac{a'}{\|\vec{v}'\|} \\ \frac{b}{\|\vec{v}\|} & \frac{b'}{\|\vec{v}'\|} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{ab' - a'b}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|} = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{v}, \vec{v}')}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|}$$

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată directă a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$. Pentru orice cuplu $(\vec{v}, \vec{v}')$ de vectori nenuli aparținînd lui $\vec{P}$, avem:**

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|}$$

$$\sin(\widehat{\vec{v}, \vec{v}'}) = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{v}, \vec{v}')}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|}.$$

Observații. — 1 Fie $\vec{v}$ și $\vec{v}'$ doi vectori nenuli aparținînd planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$.

Se numeşte **cosinus al bivectorului** $(\vec{v}, \vec{v}')$ şi se notează $\cos(\vec{v}, \vec{v}')$, cosinusul unghiului $\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$; avem deci:

$$\cos(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|}$$

ceea ce implică:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = \|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\| \cos(\vec{v}, \vec{v}').$$

Se numeşte **sinus al bivectorului** $(\vec{v}, \vec{v}')$ şi se notează $\sin(\vec{v}, \vec{v}')$, sinusul unghiului $\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$; avem deci pentru orice bază ortonormată directă $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\sin(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{v}, \vec{v}')}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|}.$$

2. Cosinusul bivectorului $(\vec{v}, \vec{v}')$ care se exprimă sub forma cîtului dintre produsul scalar al vectorilor $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ şi produsul normelor este independent de orientarea planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi poate deci să fie definit fără ca $\vec{P}$ să fie orientat.

Mai general, $\vec{v}$ **şi** $\vec{v}'$ **fiind doi vectori nenuli aparţinînd unui spaţiu vectorial euclidian** $\vec{E}$, **se numeşte cosinusul bivectorului** $(\vec{v}, \vec{v}')$ **şi se notează** $\cos(\vec{v}, \vec{v}')$, **numărul real definit prin:**

$$\cos(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{v}'\|}.$$

Exemple. I. Fie $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ doi vectori de coordonate respective $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ într-o bază ortonormată directă $(\vec{i}, \vec{j})$ a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$. Avem:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = (2)(1) + (1)(-1) = 1,$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5},$$

$$\|\vec{v}'\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\det_{(\vec{i},\, \vec{j})}(\vec{v}, \vec{v}') = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3.$$

Rezultă de aici:

$$\cos(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sin(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{-3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}.$$

II. Fie $\vec{v}$ şi $\vec{v}'$ doi vectori de coordonate respective $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$. Avem:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = (1)(1) + (2)(-1) + (-2)(1) = -3,$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\|\vec{v}'\| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}.$$

Rezultă de aici:

$$\cos(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

EXERCIŢII

11.1. Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D}'$ două semidrepte vectoriale incluse într-un spaţiu vectorial $\vec{E}$.
Să se demonstreze că:

$$\overset{\mapsto}{D} \cap \overset{\mapsto}{D}' = \{\vec{0}\} \text{ sau } \overset{\mapsto}{D} = \overset{\mapsto}{D}'.$$

11.2. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}$.
Să se demonstreze echivalenţa:

$$[\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\vec{u} \text{ şi } \vec{v} \text{ aparţin} \\ \text{aceleiaşi semidrepte vectoriale.}\end{array}\right]$$

11.3. Fie $\overset{\mapsto}{D}$ o semidreaptă vectorială inclusă în planul vectorial euclidian $\vec{P}$. Să se demonstreze că există două semidrepte vectoriale, şi numai două, ortogonale cu $\overset{\mapsto}{D}$. Să se demonstreze că aceste două semidrepte vectoriale sînt opuse.

11.4. Să se demonstreze că orice izometrie f a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ transformă o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D}$ într-o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D'}$.

11.5. Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ două semidrepte vectoriale incluse în planul vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie φ rotaţia vectorială care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D'}$.

1° Să se demonstreze că există o izometrie f a lui $\vec{P}$ şi numai una, diferită de φ şi care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D'}$.
Să se demonstreze că f nu este o rotaţie vectorială.

2° Planul vectorial $\vec{P}$ fiind raportat la o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, fie $\vec{u}$ un vector nenul din $\overset{\mapsto}{D}$ şi fie $\vec{u}'$ un vector nenul din $\overset{\mapsto}{D'}$. Să se determine f prin matricea sa în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-3\\3/2\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$;

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

11.6. Planul vectorial euclidian orientat $\vec{P}$ este raportat bazei $(\vec{i}, \vec{j})$ de orientare pozitivă. Să se determine cosinusul şi sinusul unghiului $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ în cazurile următoare:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; d) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1\\\sqrt{3}+1\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$;

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$; f) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+\sqrt{2}\\\sqrt{3}-\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\vec{u}'\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

11.7. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori nenuli aparţinînd spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}$.

1° Să se demonstreze că:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} =$$

$$= \frac{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2}{4\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

2° Se presupune în plus că vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{u}-\vec{v}$ sînt ortogonali Să se demonstreze că:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Să se studieze o reciprocă.

11.8. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori nenuli aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Să se demonstreze echivalenţele:

$$\left[\begin{matrix}\vec{u} \text{ şi } \vec{v} \text{ sînt liniar} \\ \text{dependenţi.}\end{matrix}\right] \Leftrightarrow \sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0;$$

$$\left[\begin{matrix}\vec{u} \text{ şi } \vec{v} \text{ ȋnt liniar} \\ \text{dependenţi.}\end{matrix}\right] \Leftrightarrow |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1.$$

11.9. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori nenuli aparţinînd planului vectoria euclidian orientat $\vec{P}$.

1° Să se demonstreze că există un vector $\vec{h}$, şi numai unul, astfel ca:

$$(\vec{h} \perp \vec{u}) \text{ şi } (\vec{u} \text{ şi } \vec{v}+\vec{h} \text{ sînt liniar dependenţi}).$$

2° Să se demonstreze că:

$$|\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{v}+\vec{h}\|}{\|\vec{v}\|}, \qquad |\sin(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{\|\vec{h}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

11.10. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ doi vectori nenuli aparţinînd planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, şi fie a şi b două numere reale nenule. Să se compare, după semnele lui a şi b, numerele: $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ şi $\cos(a\vec{u}, b\vec{v})$ apoi numerele: $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ şi $\sin(a\vec{u}, b\vec{v})$.

11.11. Fie $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$ doi vectori nenuli aparţinînd planului vectorial euclidian $\vec{P}$ şi fie φ rotaţia euclidiană $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$. Să se demonstreze echivalenţa:

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u}'\| \Leftrightarrow \varphi(\vec{u}) = \vec{u}'.$$

11.2. GRUPUL UNGHIURILOR

11.2.1. Introducere

$\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D}'$ fiind două semidrepte vectoriale incluse în planul vectorial euclidian $\vec{P}$, se numeşte unghi al cuplului $(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}')$ şi se notează $\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}')}$ rotaţia vectorială care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D}'$.

Rezultă de aici că un unghi nu este altceva decît o rotaţie vectorială, deci că termenii *unghi* şi *rotaţie vectorială* sînt sinonimi; alegerea unuia sau a altuia dintre aceşti doi termeni va depinde de context adică de chestiunea sau de problema pe care o vom studia. Fie $\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}', \overset{\mapsto}{D}''$ trei semidrepte vectoriale incluse în $\vec{P}$; desemnăm prin φ rotaţia vectorială care transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D}'$ şi prin φ' rotaţia vectorială care transformă $\overset{\mapsto}{D}'$ în $\overset{\mapsto}{D}''$. Urmează atunci imediat că rotaţia vectorială $\varphi' \circ \varphi$ transformă $\overset{\mapsto}{D}$ în $\overset{\mapsto}{D}''$; avem deci:

$$\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}')} = \varphi, \quad \widehat{(\overset{\mapsto}{D}', \overset{\mapsto}{D}'')} = \varphi, \quad \widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}'')} = \varphi' \circ \varphi.$$

Dacă se admite, ceea ce este conform obişnuinţei, că unghiul $\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D}'')}$ este prin definiţie „suma" unghiurilor $(\widehat{\vec{D}, \vec{D}'})$ şi $(\widehat{\vec{D}, \vec{D}''})$, deci că:

$$(\widehat{\vec{D}, \vec{D}''}) = (\widehat{\vec{D}, \vec{D}'}) + (\widehat{\vec{D}, \vec{D}''}),$$

sîntem conduşi să punem: $\varphi' \circ \varphi = \varphi + \varphi'$,
adică să notăm aditiv (cu semnul $+$) legea de compoziţie a aplicaţiilor definite pe mulţimea $\mathcal{R}$ a rotaţiilor vectoriale.

Această notaţie aditivă, utilizată mai ales în formula numită formula lui Chasles:

$$(\widehat{\vec{D}, \vec{D}'}) + (\widehat{\vec{D}', \vec{D}''}) = (\widehat{\vec{D}, \vec{D}''}),$$

verificată de orice triplet $(\vec{D}, \vec{D}', \vec{D}'')$ de semidrepte vectoriale, va fi justificată atunci cînd se va defini *măsura unghiurilor*. Ea va pune atunci în evidenţă raportul strîns — omomorfismul — existent între adunarea numerelor reale şi adunarea unghiurilor. Mulţimea $\mathcal{R}$ a rotaţiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$ înzestrată cu compunerea aplicaţiilor este un grup comutativ. Atunci cînd se consideră rotaţiile vectoriale ca unghiuri, grupul precedent este notat $\mathcal{A}$ şi se utilizează atunci terminologia şi notaţiile următoare:

- **unghiul** $\hat{\varphi}$ în loc de rotaţia vectorială φ.
- **suma** $\hat{\varphi} + \hat{\varphi}'$ **a două unghiuri** $\hat{\varphi}$ **şi** $\hat{\varphi}'$ în loc de aplicaţia compusă $\varphi' \circ \varphi$ a două rotaţii vectoriale φ şi φ'.
- **unghiul nul** $\hat{0}$, în loc de aplicaţia identică e a planului vectorial $\vec{P}$
- **opusul** $-\hat{\varphi}$ **al unui unghi** $\hat{\varphi}$ în loc de aplicaţia reciprocă φ^{-1} a unei rotaţii vectoriale φ.

Observaţie. — Fie φ şi φ' două rotaţii vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Este necesar să fim atenți asupra faptului că simbolurile $\varphi + \varphi'$ și $\hat{\varphi} + \hat{\varphi}'$ desemnează respectiv:

1° Suma $\varphi + \varphi'$ a două aplicații φ și φ', adică aplicația lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$ definită prin:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P}, \ (\varphi + \varphi')(u) = \varphi(\vec{u}) + \varphi'(\vec{u});$$

în acest caz, $\varphi + \varphi'$ care este o aplicație liniară a lui $\vec{P}$ în $\vec{P}$, nu este în general o rotație vectorială.

2° Unghiul $\hat{\varphi} + \hat{\varphi}'$, suma a două unghiuri $\hat{\varphi}$ și $\hat{\varphi}'$, adică rotația vectorială $\varphi' \circ \varphi$ definită prin:

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \ (\varphi' \circ \varphi) \ (\vec{u}) = \varphi'[\varphi(\vec{u})].$$

11.2.2. Cosinusul și sinusul unui unghi al planului vectorial orientat

Fie $\mathcal{A}$ grupul unghiurilor planului vectorial euclidian $\vec{P}$. Orice unghi φ aparținînd lui $\mathcal{A}$ este o rotație vectorială a lui $\vec{P}$; atunci cînd $\vec{P}$ este orientat, cosinusul și sinusul acestei rotații vectoriale sînt de asemenea **cosinusul** și **sinusul unghiului** φ și sînt notate $\cos\hat{\varphi}$ și $\sin\hat{\varphi}$. Reluăm atunci, utilizînd „limbajul unghiurilor" rezultatele obținute la cap. 10 privind cosinusul și sinusul unei rotații vectoriale:

● Pentru orice unghi $\hat{\varphi}$, avem (nr. **10.2.2**):

$$\boxed{\cos^2\hat{\varphi} + \sin^2\hat{\varphi} = 1}$$

● Dacă două unghiuri au același cosinus și același sinus, ele sînt egale (nr. **10.2.2**).

● Pentru orice cuplu (a, b) de numere reale astfel ca: $a^2 + b^2 = 1$, există un unghi $\hat{\varphi}$, și numai unul, astfel ca (nr. **10.2.2**):

$$\cos\hat{\varphi} = a \text{ și } \sin\hat{\varphi} = b.$$

● $\hat{0}$ fiind unghiul nul din $\mathcal{A}$, avem (**10.2.2**):

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \hat{0} &= 1 \\ \sin \hat{0} &= 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(2) \\ &(2') \end{aligned}$$

● Pentru orice unghi $\hat{\varphi}$, cu opusul $-\hat{\varphi}$, avem (nr. **10.2.3**):

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(-\hat{\varphi}) &= \cos \hat{\varphi} \\ \sin(-\hat{\varphi}) &= -\sin \hat{\varphi} \end{aligned}} \qquad (3)$$

● Pentru orice cuplu de unghiuri $(\hat{\varphi}, \hat{\varphi}')$, avem (nr. **10.2.4**):

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\hat{\varphi} + \hat{\varphi}') &= \cos \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi}' - \sin \hat{\varphi} \sin \hat{\varphi}' \\ \sin(\hat{\varphi} + \hat{\varphi}') &= \sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi}' + \sin \hat{\varphi}' \cos \hat{\varphi} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(4) \\ &(4') \end{aligned}$$

Consecințe. — **1** Dacă în formulele (4) și (4') avem $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}$ și dacă se convine să se noteze cu $2\hat{\varphi}$ unghiul $\hat{\varphi} + \hat{\varphi}$, obținem:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\hat{\varphi} &= \cos^2 \hat{\varphi} - \sin^2 \hat{\varphi} \\ \sin 2\hat{\varphi} &= 2 \sin \hat{\varphi} \cos \hat{\varphi} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(5) \\ &(5') \end{aligned}$$

2. Fie două unghiuri $\hat{\varphi}$ și $\hat{\varphi}'$: $\mathcal{A}$ fiind un grup comutativ, se poate defini *diferența* $\hat{\varphi} - \hat{\varphi}'$ a unghiurilor $\hat{\varphi}$ și $\hat{\varphi}'$, și se știe că:

$$\hat{\varphi} - \hat{\varphi}' = \hat{\varphi} + (-\hat{\varphi}').$$

Rezultă de aici:

$$\cos(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}') = \cos[\widehat{\varphi} + (-\widehat{\varphi}')] =$$

$$= \cos\widehat{\varphi}\cos(-\widehat{\varphi}') - \sin\widehat{\varphi}\sin(\widehat{\varphi}')$$

$$\sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}') = \sin[\varphi + (-\varphi')] =$$

$$= \sin\widehat{\varphi}\cos(-\widehat{\varphi}') + \cos\widehat{\varphi}\sin(-\widehat{\varphi}');$$

cum în plus:

$$\cos(-\widehat{\varphi}) = \cos\widehat{\varphi} \text{ şi } \sin(-\widehat{\varphi}) = -\sin\widehat{\varphi},$$

avem în cele din urmă:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}') &= \cos\widehat{\varphi}\cos\widehat{\varphi}' + \sin\widehat{\varphi}\sin\widehat{\varphi}' \\ \sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\varphi}') &= \sin\widehat{\varphi}\cos\widehat{\varphi}' - \cos\widehat{\varphi}\sin\widehat{\varphi}'\end{aligned}} \qquad \begin{aligned}(6)\\(6')\end{aligned}$$

EXERCIŢIU. *$\widehat{\varphi}$ şi $\widehat{\varphi}_0$ fiind două unghiuri aparţinînd grupului $\mathcal{A}$ al unghiurilor planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, să se demonstreze echivalenţa:*

$$\cos\widehat{\varphi} = \cos\widehat{\varphi}_0 \Leftrightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \widehat{\varphi} = -\widehat{\varphi}_0.$$

Presupunem:

$$\cos\widehat{\varphi} = \cos\widehat{\varphi}_0.$$

Egalităţile $\cos^2\widehat{\varphi} + \sin^2\widehat{\varphi} = 1$ şi $\cos^2\widehat{\varphi}_0 + \sin^2\widehat{\varphi}_0 = 1$, implică atunci:

$$\sin^2\widehat{\varphi} = \sin^2\widehat{\varphi}_0,$$

adică

$$\sin\widehat{\varphi} = \sin\widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \sin\widehat{\varphi} = -\sin\widehat{\varphi}_0.$$

■ **Dacă $\sin\widehat{\varphi} = \sin\widehat{\varphi}_0$, cele două unghiuri $\widehat{\varphi}$ şi $\widehat{\varphi}_0$ care au acelaşi cosinus şi acelaşi sinus, sînt egale.**

■ **Dacă $\sin\widehat{\varphi} = -\sin\widehat{\varphi}_0$, avem (formulele 3 şi 3'):**

$$\cos\widehat{\varphi} = \cos\widehat{\varphi}_0 = \cos(-\widehat{\varphi}_0),$$

$$\sin\widehat{\varphi} = -\sin\widehat{\varphi}_0 = \sin(-\widehat{\varphi}_0);$$

rezultă de aici că unghiurile $\hat{\varphi}$ şi $-\hat{\varphi}_0$, care au acelaşi cosinus şi acelaşi sinus, sînt egale. Avem deci:

$$\cos\hat{\varphi} = \cos\hat{\varphi}_0 \Rightarrow \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \text{ sau } \hat{\varphi} = -\hat{\varphi}_0.$$

Implicaţia reciprocă:

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \text{ sau } \hat{\varphi} = -\hat{\varphi}_0 \Rightarrow \cos\hat{\varphi} = \cos\hat{\varphi}_0.$$

Prin urmare

$$\boxed{\cos\hat{\varphi} = \cos\hat{\varphi}_0 \Leftrightarrow \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \text{ sau } \hat{\varphi} = -\hat{\varphi}_0.}$$

11.2.3. Unghiul plat

S-a demonstrat la nr. **9.3.2** (Exerciţiu) că aplicaţia planului vectorial euclidian $\vec{P}$ în el însuşi, definită prin:

$$\vec{u} \mapsto -\vec{u},$$

este unica rotaţie a lui $\vec{P}$ egală cu aplicaţia sa reciprocă şi diferită de aplicaţia identică **e** a lui $\vec{P}$.

DEFINIŢIE / **Se numeşte unghi plat şi se notează $\hat{\omega}$, rotaţia vectorială ω a planului vectorial euclidian $\vec{P}$ definită prin:**

$$\forall \vec{u} \in \vec{P} \quad \omega(\vec{u}) = -\vec{u}.$$

PROPRIETĂŢILE UNGHIULUI PLAT

1. Proprietatea $\hat{\omega}^{-1} = \hat{\omega}$ a rotaţiei vectoriale ω se traduce în „limbajul unghiurilor" prin:

$$-\hat{\omega} = \hat{\omega};$$

rezultă de aici: $\hat{\omega} + \hat{\omega} = 2\hat{\omega} = \hat{0}$; unghiul plat $\hat{\omega}$

este singurul unghi diferit de unghiul $\hat{0}$ şi verificînd egalitatea precedentă.

2. Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ două semidrepte vectoriale opuse; vectorii lor unitari, respectiv $\vec{i}$ şi $\vec{i'}$ sînt opuşi; rezultă de aici că unghiul $\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D'})}$ care este rotaţia vectorială care transformă $\vec{i}$ în $\vec{i'} = -\vec{i}$, este unghiul plat $\hat{\omega}$.

Pentru orice cuplu $\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D'})}$ de semidrepte vectoriale opuse, avem deci:

$$\widehat{(\overset{\mapsto}{D}, \overset{\mapsto}{D'})} = \hat{\omega}.$$

3. Matricea rotaţiei vectoriale ω în orice bază a lui $\vec{P}$ este egală cu $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; pe de altă parte, dacă $\vec{P}$ este *orientat*, matricea lui ω într-o bază ortonormată *directă* a lui $\vec{P}$ este egală cu:

$$\begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix};$$

prin urmare:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\hat{\omega} &= -1 \\ \sin\hat{\omega} &= 0. \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(1') \end{aligned}$$

4. Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind orientat, avem pentru orice unghi φ:

$$\cos(\hat{\omega} + \hat{\varphi}) = \cos\hat{\omega}\cos\hat{\varphi} - \sin\hat{\omega}\sin\hat{\varphi}$$
$$\sin(\hat{\omega} + \hat{\varphi}) = \sin\hat{\omega}\cos\hat{\varphi} + \cos\hat{\omega}\sin\hat{\varphi}$$
$$\cos(\hat{\omega} - \hat{\varphi}) = \cos\hat{\omega}\cos\hat{\varphi} + \sin\hat{\omega}\sin\hat{\varphi}$$
$$\sin(\hat{\omega} - \hat{\varphi}) = \sin\hat{\omega}\cos\hat{\varphi} - \cos\hat{\omega}\sin\hat{\varphi}.$$

Cum în plus $\cos \widehat{\omega} = -1$ şi $\sin \widehat{\omega} = 0$, rezultă:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\widehat{\omega} + \widehat{\varphi}) &= -\cos \widehat{\varphi} \\ \sin(\widehat{\omega} + \widehat{\varphi}) &= -\sin \widehat{\varphi} \\ \cos(\widehat{\omega} - \widehat{\varphi}) &= -\cos \widehat{\varphi} \\ \sin(\widehat{\omega} - \widehat{\varphi}) &= \sin \widehat{\varphi} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(2) \\ &(2') \\ &(3) \\ &(3') \end{aligned}$$

EXERCIŢIU. *$\vec{\varphi}$ şi $\vec{\varphi}_0$ fiind două unghiuri aparţinînd grupului $\mathfrak{A}$ al unghiurilor planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, să se demonstreze echivalenţa:*

$$\sin \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0 \Leftrightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \widehat{\varphi} = \widehat{\omega} - \widehat{\varphi}_0.$$

Presupunem:

$$\sin \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0.$$

Egalităţile $\cos^2 \widehat{\varphi} + \sin^2 \widehat{\varphi} = 1$ şi $\cos^2 \widehat{\varphi}_0 + \sin^2 \widehat{\varphi}_0 = 1$ implică atunci:

$$\cos^2 \widehat{\varphi} = \cos^2 \widehat{\varphi}_0,$$

adică:

$$\cos \widehat{\varphi} = \cos \widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \cos \widehat{\varphi} = -\cos \widehat{\varphi}_0.$$

- Dacă $\cos \widehat{\varphi} = \cos \widehat{\varphi}_0$, cele două unghiuri $\widehat{\varphi}$ şi $\widehat{\varphi}_0$ care au acelaşi cosinus şi acelaşi sinus sînt egale.
- Dacă $\cos \widehat{\varphi} = -\cos \widehat{\varphi}_0$, avem:

$$\cos \widehat{\varphi} = -\cos \widehat{\varphi}_0 = \cos(\widehat{\omega} - \widehat{\varphi}_0),$$

$$\sin \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0 = \sin(\widehat{\omega} - \widehat{\varphi}_0);$$

rezultă de aici că unghiurile $\widehat{\varphi}$ şi $\widehat{\omega} - \widehat{\varphi}_0$ care au acelaşi cosinus şi acelaşi sinus, sînt egale. Avem deci:

$$\sin \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0 \Rightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \widehat{\varphi} = \widehat{\omega} - \widehat{\varphi}_0.$$

Implicaţia reciprocă:

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \widehat{\varphi} = \widehat{\omega} - \widehat{\varphi}_0 \Rightarrow \sin \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0$$

rezultă imediat din formula (3'). Prin urmare:

$$\boxed{\sin\hat{\varphi} = \sin\hat{\varphi}_0 \Leftrightarrow \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0 \text{ sau } \hat{\varphi} = \hat{\omega} - \hat{\varphi}_0.}$$

11.2.4. Unghiuri drepte

Problemă. *Să se rezolve, în grupul $\mathfrak{R}$ al rotațiilor vectoriale ale planului vectorial euclidian $\vec{P}$, ecuația* (1) *definită prin: $\varphi \circ \varphi = \omega$, unde ω desemnează rotația vectorială astfel ca:*

$$\forall u \in \vec{P} \ \omega(\vec{u}) = -\vec{u}.$$

Matricea lui ω într-o bază ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{P}$ este:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Fie φ o rotație vectorială a lui $\vec{P}$; există două numere reale a și b astfel ca: $a^2 + b^2 = 1$ și astfel încît matricea lui φ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ să fie;

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Matricea rotației vectoriale $\varphi \circ \varphi$ în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este atunci:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

● Dacă $\varphi \circ \varphi = \omega$, cuplul (a, b) care caracterizează rotația vectorială φ verifică cele trei egalități:

$$a^2 + b^2 = 1, \ a^2 - b^2 = -1, \ 2ab = 0;$$

acest cuplu este deci soluţie a sistemului:

$$\mathrm{I}\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

● *Reciproc,* dacă (a, b) este o soluţie a sistemului I, aplicaţia liniară φ a lui P în P pentru care matricea în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, este o rotaţie vectorială astfel încît:

$$\varphi \circ \varphi = \omega.$$

Rezultă de aici că, pentru a rezolva ecuaţia (1), sîntem conduşi să rezolvăm sistemul I:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{sau} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1. \end{cases}$$

Sistemul I are deci două soluţii, şi numai două: $(0, 1)$, $(0, -1)$, ceea ce dovedeşte că există două rotaţii vectoriale, şi numai două, soluţii ale ecuaţiei (1).

Matricele lor respective în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desemnăm prin δ şi prin δ' rotaţiile vectoriale pentru care matricele respective în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ sînt A şi A'; matricea lui δ^{-1} în baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este (nr. **9.3.2**):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A',$$

ceea ce dovedeşte că:

$$\delta^{-1} = \delta', \text{ deci că: } \delta'^{-1} = \delta.$$

Rezultatele precedente pot să se exprime în „limbajul unghiurilor" prin:

TEOREMĂ / **Mulţimea unghiurilor $\hat{\varphi}$, astfel ca:**

$$\hat{\varphi} + \hat{\varphi} = \hat{\omega},$$

conţine două elemente, şi numai două, numite unghiuri drepte.

Dacă $\hat{\delta}$ este unul din cele două unghiuri drepte, celălalt este $-\hat{\delta}$.

11.2.5. Unghiul drept pozitiv, unghiul drept negativ

Planul vectorial $\vec{P}$ fiind *orientat*, fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată *directă* a lui $\vec{P}$; în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$, matricele a două rotaţii vectoriale δ şi δ', astfel ca $\delta \circ \delta = \delta' \circ \delta' = \omega$, sînt (nr. **11.2.4**):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici că cosinusul unui unghi drept este nul şi că sinusul său este egal cu 1 sau cu -1.

DEFINIŢIE / **Planul vectorial euclidian $\vec{P}$ fiind orientat, se numeşte unghi drept pozitiv (respectiv negativ), unghiul drept pentru care sinusul este egal cu 1 (respectiv -1).**

Unghiul drept pozitiv este notat cu δ; unghiul drept negativ este atunci $-\delta$.

Calificativul pozitiv sau negativ nu pot fi atribuite unui unghi drept decît dacă planul vectorial $\vec{P}$ este orientat.

PROPRIETĂȚILE UNGHIURILOR DREPTE

1. Fie $(\vec{i}, \vec{j})$ o bază ortonormată a planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$; unghiul $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}$ este rotația vectorială φ care transformă vectorul $\vec{i}$ în vectorul $\vec{j}$ și matricele lui φ în bazele $(\vec{i}, \vec{j})$ și $(\vec{j}, \vec{i})$ sînt respectiv:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

● Dacă baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este directă, avem:

$$\cos \varphi = 0 \text{ și } \sin \varphi = 1,$$

ceea ce implică: $\varphi = \delta$.

● Dacă baza $(\vec{i}, \vec{j})$ este indirectă, baza $(\vec{j}, \vec{i})$ este directă și avem:

$$\cos \varphi = 0 \text{ și } \sin \varphi = -1,$$

ceea ce implică: $\varphi = -\delta$. Rezultă de aici:

$(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată directă $\Rightarrow \widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \hat{\delta}$,

$(\vec{i}, \vec{j})$ este o bază ortonormată indirectă $\Rightarrow \widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = -\hat{\delta}$.

2. Cosinusul și sinusul unghiului drept pozitiv $\hat{\delta}$ sînt:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \hat{\delta} &= 0 \\ \sin \hat{\delta} &= 1. \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(1) \\ &(1') \end{aligned}$$

3. Pentru orice unghi φ avem:

$$\cos (\hat{\delta} + \hat{\varphi}) = \cos \hat{\delta} \cos \hat{\varphi} - \sin \hat{\delta} \sin \hat{\varphi},$$

$$\sin (\hat{\delta} + \hat{\varphi}) = \sin \hat{\delta} \cos \hat{\varphi} + \cos \hat{\delta} \sin \hat{\varphi},$$

$$\cos (\hat{\delta} - \hat{\varphi}) = \cos \hat{\delta} \cos \hat{\varphi} + \sin \hat{\delta} \sin \hat{\varphi},$$

$$\sin (\hat{\delta} - \hat{\varphi}) = \sin \hat{\delta} \cos \hat{\varphi} - \cos \hat{\delta} \sin \hat{\varphi}.$$

Cum $\cos \widehat{\delta} = 0$ și $\sin \widehat{\delta} = 1$, rezultă de aici:

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos(\widehat{\delta} + \widehat{\varphi}) = -\sin \widehat{\varphi} \\ &\sin(\widehat{\delta} + \widehat{\varphi}) = \cos \widehat{\varphi} \\ &\cos(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi}) = \sin \widehat{\varphi} \\ &\sin(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi}) = \cos \widehat{\varphi}. \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &(2) \\ &(2') \\ &(3) \\ &(3') \end{aligned}$$

EXERCIȚIU. $\widehat{\varphi}$ *și* $\widehat{\varphi}_0$ *fiind două unghiuri aparținînd grupului* $\mathfrak{A}$ *al triunghiurilor planului vectorial euclidian orientat* $\widehat{P}$, *să se demonstreze echivalența:*

$$\cos \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0 \Leftrightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}_0 = \delta \text{ sau } \widehat{\varphi}_0 - \widehat{\varphi} = \widehat{\delta}.$$

Presupunem: $\cos \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0$.
Egalitatea

$$\sin \widehat{\varphi}_0 = \cos(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi}_0) \text{ implică atunci:}$$

$$\cos \widehat{\varphi} = \cos(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi}_0);$$

din studiul făcut în paragraful nr. 11.2.2. (Exerciții), rezultă:

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\delta} - \widehat{\varphi}_0 \text{ sau } \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_0 - \widehat{\delta}.$$

- Dacă $\widehat{\varphi} = \widehat{\delta} - \widehat{\varphi}_0$, urmează $\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}_0 = \widehat{\delta}$
- Dacă $\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi}_0 - \widehat{\delta}$, urmează $\widehat{\varphi}_0 - \widehat{\varphi} = \widehat{\delta}$

Avem deci:

$$\cos \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0 \Rightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}_0 = \widehat{\delta} \text{ sau } \widehat{\varphi}_0 - \widehat{\varphi} = \widehat{\delta}$$

Reciproc, presupunem:

$$\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}_0 = \widehat{\delta} \text{ sau } \widehat{\varphi}_0 - \widehat{\varphi} = \widehat{\delta}$$

- $\widehat{\varphi} + \widehat{\varphi}_0 = \widehat{\delta} \Rightarrow \widehat{\varphi} = \widehat{\delta} - \widehat{\varphi}_0 \Rightarrow \cos \widehat{\varphi} = \cos(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi}_0) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \cos \widehat{\varphi} = \sin \widehat{\varphi}_0$.

● $\widehat{\varphi_0} - \widehat{\varphi} = \widehat{\delta} \Rightarrow \widehat{\varphi} = -(\widehat{\delta} - \widehat{\delta_0}) \Rightarrow \cos\widehat{\varphi} = \cos[-(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi_0})] \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\widehat{\varphi} = \cos(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi_0}) \Rightarrow \cos\widehat{\varphi} = \sin\widehat{\varphi_0}.$

Prin urmare:

$$\cos\widehat{\varphi} = \sin\widehat{\varphi_0} \Leftrightarrow \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi_0} = \widehat{\delta} \text{ sau } \widehat{\varphi_0} - \widehat{\varphi} = \widehat{\delta}.$$

EXERCIŢII

În toate exercițiile care urmează, se desemnează prin $\mathcal{A}$ grupul unghiurilor planului vectorial euclidian orientat $\vec{P}$, prin $\widehat{0}$ unghiul nul, prin $\widehat{\delta}$ unghiul drept pozitiv și prin $\widehat{\omega}$ unghiul plat al lui $\mathcal{A}$.

11.12. Să se demonstreze, pentru orice unghi $\widehat{\varphi}$ aparținînd lui $\mathcal{A}$, egalitățile următoare:

a) $\cos 2\widehat{\varphi} = 2\cos^2\widehat{\varphi} - 1 = 1 - 2\sin^2\widehat{\varphi}$;

$\cos 3\widehat{\varphi} = 4\cos^3\widehat{\varphi} - 3\cos\widehat{\varphi}$.

b) $\sin 3\widehat{\varphi} = 3\sin\widehat{\varphi} - 4\sin^3\widehat{\varphi}$;

$\cos^4\widehat{\varphi} - \sin^4\widehat{\varphi} = \cos 2\widehat{\varphi}$.

c) $\cos^2 2\widehat{\varphi} - \sin^2\widehat{\varphi} = \cos\widehat{\varphi}\cos 3\widehat{\varphi}$;

$\sin 3\widehat{\varphi}\sin^3\widehat{\varphi} + \cos 3\widehat{\varphi}\cos^3\widehat{\varphi} = \cos^3 2\widehat{\varphi}$.

d) $\sin^6\widehat{\varphi} + \cos^6\widehat{\varphi} + 3\sin^2\widehat{\varphi}\cos^2\widehat{\varphi} = 1$;

$2\cos^8\widehat{\varphi} - 2\sin^8\widehat{\varphi} + 3\sin^6\widehat{\varphi} - 5\cos^6\widehat{\varphi} + 3\cos^4\widehat{\varphi} - \sin^2\widehat{\varphi} = 0.$

e) $2(\sin^6\widehat{\varphi} + \cos^6\widehat{\varphi}) - 3(\sin^4\widehat{\varphi} + \cos^4\widehat{\varphi}) = -1.$

11.13. $\widehat{\varphi}$ fiind un unghi aparținînd lui $\mathcal{A}$, să se simplifice expresiile următoare:

a) $\sin(\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}) + \sin(\widehat{\varphi} + 2\widehat{\omega}) + \sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\omega}) + \sin(\widehat{\varphi} - 3\widehat{\omega})$

b) $\cos(\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}) + \cos(\widehat{\varphi} + 2\widehat{\omega}) + \sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\omega}) + \sin(\widehat{\varphi} - 3\widehat{\omega})$

c) $\sin(\widehat{\varphi} + \widehat{\delta}) + \cos(\widehat{\varphi} - 3\widehat{\delta}) + \sin(\widehat{\varphi} + 3\widehat{\delta}) + \cos(\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}).$

11.14. Să se demonstreze pentru orice cuplu $(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$ de unghiuri aparținînd lui $\mathcal{C}$, egalitățile:

a) $\cos\widehat{\varphi}\cos\widehat{\psi} = \frac{1}{2}[\cos(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}) + \cos(\widehat{\varphi} + \widehat{\psi})]$

b) $\sin\widehat{\varphi}\sin\widehat{\psi} = \frac{1}{2}[\cos(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}) - \cos(\widehat{\varphi} + \widehat{\psi})]$

c) $\sin\widehat{\varphi}\cos\widehat{\psi} = \frac{1}{2}[\sin(\widehat{\varphi} + \widehat{\Psi}) + \sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi})]$

d) $\cos(\widehat{\varphi} + \widehat{\psi})\cos(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}) = \cos^2\widehat{\varphi} - \sin^2\widehat{\psi} = \cos^2\widehat{\psi} - \sin^2\widehat{\varphi}.$

e) $\sin(\widehat{\varphi} + \widehat{\psi})\sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}) = \sin^2\widehat{\varphi} - \sin^2\widehat{\psi}.$

11.15. Să se demonstreze că pentru orice triplet $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma})$ de unghiuri aparținînd lui $\mathcal{C}$, egalitățile următoare:

a) $\cos\widehat{\alpha}\sin(\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}) + \cos\widehat{\beta}\sin(\widehat{\gamma} - \widehat{\alpha}) + \cos\widehat{\gamma}\sin(\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}) = 0$

b) $\sin\widehat{\alpha}\sin(\widehat{\beta} - \widehat{\gamma}) + \sin\widehat{\beta}\sin(\widehat{\gamma} - \widehat{\alpha}) + \sin\widehat{\gamma}\sin(\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}) = 0.$

11.16. $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ fiind trei unghiuri aparținînd lui $\mathcal{C}$, să se exprime $\cos(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma})$ și $\sin(\widehat{\varphi} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma})$ în funcție de cosinusurile și sinusurile unghiuril r $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$.

Să se deducă din aceste expresii pentru $\cos 3\widehat{\alpha}$ și $\sin 3\widehat{\alpha}$.

11.17. Să se rezolve, în $\mathcal{C}$, ecuațiile definite prin:

$$2\widehat{\varphi} = \widehat{0};\ 2\widehat{\varphi} = \widehat{\omega};\ 2\widehat{\varphi} = \widehat{\delta},\ 3\widehat{\varphi} = \widehat{0};$$

$$3\widehat{\varphi} = \widehat{\omega};\ 3\widehat{\varphi} = \widehat{\delta};\ 4\widehat{\varphi} = \widehat{0}.$$

(Se vor determina unghiurile — soluții prin cosinusul lor și sinusul lor.)

11.18. Să se rezolve, în $\mathcal{C}$, ecuațiile definite prin:

1° $\sin\widehat{\varphi} = 0$; $\cos\widehat{\varphi} = 0$; $\sin\widehat{\varphi} = 1$;

$\sin 2\widehat{\varphi} = 0$; $\cos 2\widehat{\varphi} = 0$; $\sin 2\widehat{\varphi} = 1$;

$\sin 3\widehat{\varphi} = 0$; $\cos 3\widehat{\varphi} = 0.$

2° $\cos\widehat{\varphi} = 1$; $\sin\widehat{\varphi} = -1$; $\cos\widehat{\varphi} = -1$;

$\cos 2\widehat{\varphi} = 1$; $\sin 2\widehat{\varphi} = -1$; $\cos 2\widehat{\varphi} = -1.$

3° $\cos\widehat{\varphi} = \frac{1}{2}$; $\sin\widehat{\varphi} = -\frac{1}{2}$; $\sin\widehat{\varphi} = \frac{1}{2}$.

$\cos\widehat{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\widehat{\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\widehat{\varphi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.19. Fie (x, y) un cuplu necunoscut aparţinînd lui $\mathbf{R}^2$, fie a şi b două numere reale date şi fie $\widehat{\alpha}$ şi $\widehat{\beta}$ două unghiuri date aparţinînd lui $\mathcal{A}$.

Să se rezolve sistemul definit prin:

$$x\cos\widehat{\alpha} + y\sin\widehat{\alpha} = a,$$
$$x\sin\widehat{\alpha} - y\cos\widehat{\alpha} = b.$$

Să se verifice că: $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

11.20. Se numeşte tangentă a unui unghi $\widehat{\varphi}$ aparţinînd lui $\mathcal{A}$, şi se notează $\operatorname{tg}\widehat{\varphi}$, numărul real egal cu $\frac{\sin\widehat{\varphi}}{\cos\widehat{\varphi}}$.

1° Care este mulţimea unghiurilor care au o tangentă?

2° Să se calculeze $\operatorname{tg}\widehat{0}$ şi $\operatorname{tg}\widehat{\omega}$.

11.21. Să se demonstreze, pentru orice unghi $\widehat{\varphi}$ aparţinînd unei submulţimi D a lui $\mathcal{A}$ care se va determina, egalităţile următoare:

a) $\operatorname{tg}(-\widehat{\varphi}) = -\operatorname{tg}\widehat{\varphi}$;

b) $\operatorname{tg}(\widehat{\varphi} + \widehat{\omega}) = \operatorname{tg}\widehat{\varphi}$;

c) $\operatorname{tg}(\widehat{\omega} - \widehat{\varphi}) = -\operatorname{tg}\widehat{\varphi}$;

d) $\operatorname{tg}(\widehat{\delta} - \widehat{\varphi}) = \frac{1}{\operatorname{tg}\widehat{\varphi}}$;

e) $\operatorname{tg}(\widehat{\delta} + \widehat{\varphi}) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\widehat{\varphi}}$.

11.22. Să se demonstreze, pentru orice unghi $\widehat{\varphi}$ aparţinînd unei submulţimi D a lui $\mathcal{A}$, care se va determina, egalităţile următoare:

1° $1 + \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi} = \frac{1}{\cos^2\widehat{\varphi}}$; $\cos 2\widehat{\varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}$.

2° $\sin^2\widehat{\varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}$; $\sin 2\widehat{\varphi} = \frac{2\operatorname{tg}\widehat{\varphi}}{1 + \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}$.

3° $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\widehat{\varphi}}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}$; $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}} - \cos^2\widehat{\varphi} = \frac{\cos^2\widehat{\varphi}}{\operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}$.

4° $1 + 2\sin\widehat{\varphi}\cos\widehat{\varphi} = \sin\widehat{\varphi}\cos\widehat{\varphi}(1 + \operatorname{tg}\widehat{\varphi})\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\widehat{\varphi}}\right)$.

11.23. Să se demonstreze pentru orice cuplu $(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$ aparţinînd unei submulţimi a lui $\mathcal{A}^2$, care se va determina, egalităţile următoare:

1° $\operatorname{tg}(\widehat{\varphi} + \widehat{\psi}) = \dfrac{\operatorname{tg}\widehat{\varphi} + \operatorname{tg}\widehat{\psi}}{1 - \operatorname{tg}\widehat{\varphi}\operatorname{tg}\widehat{\psi}}$; $\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin(\widehat{\varphi} + \widehat{\psi})}{\cos\widehat{\varphi}\cos\widehat{\psi}}$.

2° $\operatorname{tg}(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}) = \dfrac{\operatorname{tg}\widehat{\varphi} - \operatorname{tg}\widehat{\psi}}{1 + \operatorname{tg}\widehat{\varphi}\operatorname{tg}\widehat{\psi}}$; $\operatorname{tg}\widehat{\varphi} - \operatorname{tg}\widehat{\varphi} = \dfrac{\sin(\widehat{\varphi} - \widehat{\psi})}{\cos\widehat{\varphi}\cos\widehat{\psi}}$.

3° $\dfrac{\cos^2\widehat{\varphi} - \sin^2\widehat{\psi}}{\sin^2\widehat{\varphi}\sin^2\widehat{\psi}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}\operatorname{tg}^2\widehat{\psi}} - 1.$

4° $\sin^2\widehat{\varphi} - \sin^2\widehat{\psi} = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\widehat{\psi}} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi}}.$

11.24. $\widehat{\varphi}$ şi $\widehat{\psi}$ fiind două unghiuri aparţinînd lui $\mathcal{A}$, să se demonstreze implicaţia:

$$\operatorname{tg}\widehat{\varphi} = \frac{\sin\widehat{\psi} - \cos\widehat{\psi}}{\sin\widehat{\psi} + \cos\widehat{\psi}} \Rightarrow 2\sin^2\widehat{\varphi} = (\sin\widehat{\psi} - \cos\widehat{\psi})^2.$$

Să se studieze implicaţia reciprocă.

11.25. Să se rezolve, în $\mathcal{A}$, ecuaţiile definite prin:

$$\operatorname{tg}\widehat{\varphi} = 0,\ \operatorname{tg}\widehat{\varphi} = 1,\ \operatorname{tg}^2\widehat{\varphi} = 3,\ \operatorname{tg}\widehat{\varphi} = 2\sin\widehat{\varphi},\ \cos^2\widehat{\varphi} = \sin\widehat{\varphi}.$$

(Se vor determina unghiurile — soluţii prin cosinusul lor sau sinusul lor).

PROBLEME

11.26. Fie $\vec{P}$ un plan vectorial euclidian.

1° Să se demonstreze că orice izometrie a lui $\vec{P}$ transformă o dreaptă vectorială $\vec{D}$ într-o dreaptă vectorială $\vec{\Delta}$.

2° Să se demonstreze că orice izometrie a lui $\vec{P}$ transformă o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D}$ într-o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{\Delta}$.

3° Să se demonstreze că există două izometrii, şi numai două, care transformă o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{D}$ într-o semidreaptă vectorială $\overset{\mapsto}{\Delta}$. Să se demonstreze că una dintre aceste două izometrii, şi numai una, este o rotaţie vectorială.

4° Să se demonstreze că o dreaptă vectorială $\vec{D}$ conţine două semidrepte vectoriale şi numai două, pe care le vom nota $\overset{\mapsto}{D'}$ şi $\overset{\mapsto}{D''}$. Să se demonstreze că $\overset{\mapsto}{D'}$ şi $\overset{\mapsto}{D''}$ sînt opuse.

5° Fie $\vec{D}$ şi $\vec{\Delta}$ două drepte vectoriale. Să se demonstreze că există patru izometrii, şi numai patru, dintre care două rotaţii vectoriale care transformă $\vec{D}$ în $\vec{\Delta}$.

6° Să se demonstreze că mulţimea izometriilor care transformă o dreaptă vectorială $\vec{D}$ în ea însăşi, înzestrată cu compunerea aplicaţiilor, este un grup. Să se construiască tabelul legii de compoziţie pentru acest grup.

11.27. 1° Să se rezolve, în $\mathcal{A}$, ecuaţia definită prin: $2\hat{\varphi} = \hat{\delta}$. (Se vor determina unghiurile — soluţii prin cosinusul lor sau prin sinusul lor).

2° Să se rezolve, în $\mathcal{A}$, ecuaţia definită prin:

$$\cos\hat{\varphi} = \sin\hat{\varphi}.$$

3° Să se demonstreze că există un unghi $\hat{\varphi}_0$, şi numai unul, astfel ca:

$$\cos\hat{\varphi}_0 = \sin\hat{\varphi}_0 \text{ şi } \cos\hat{\varphi}_0 > 0.$$

4° Să se demonstreze pentru orice unghi $\hat{\theta}$, egalităţile următoare:

$\cos\hat{\theta} + \sin\hat{\theta} = \sqrt{2}\cos(\hat{\varphi}_0 - \hat{\theta})$; $\cos\hat{\theta} - \sin\hat{\theta} = \sqrt{2}\sin(\hat{\varphi}_0 - \hat{\theta})$.

11.28. Să se rezolve şi să se discute sistemele următoare, unde cuplul necunoscut (x, y) aparţine lui $\mathbf{R}^2$ şi unde $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ sînt unghiuri care aparţin lui $\mathcal{A}$:

$$1°\begin{cases} x\sin\hat{\alpha} + y\sin 2\hat{\alpha} = \sin 3\hat{\alpha} \\ x\cos\hat{\alpha} + y\cos 2\hat{\alpha} = \cos 3\hat{\alpha} \end{cases}; \quad 2°\begin{cases} x\sin\hat{\alpha} + y\sin\hat{\beta} = \sin\hat{\gamma} \\ x\cos\hat{\alpha} + y\cos\hat{\beta} = \cos\hat{\gamma}. \end{cases}$$

11.29. Să se demonstreze că dacă α, β, γ sînt trei unghiuri astfel ca: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = \hat{\omega}$, avem:

a) $\sin 2\hat{\alpha} + \sin 2\hat{\beta} + \sin 2\hat{\gamma} = 4\sin\hat{\alpha}\sin\hat{\beta}\sin\hat{\gamma}$

b) $\cos 2\hat{\alpha} + \cos 2\hat{\beta} + \cos 2\hat{\gamma} + 4\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}\cos\hat{\gamma} + 1 = 0$.

c) $\cos^2\hat{\alpha} + \cos^2\hat{\beta} + \cos^2\hat{\gamma} + 2\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}\cos\hat{\gamma} - 1 = 0$

d) $\sin^2\hat{\alpha} + \sin^2\hat{\beta} + \sin^2\hat{\gamma} - 2\cos\hat{\alpha}\cos\hat{\beta}\cos\hat{\gamma} - 2 = 0$.

11.30. Fie $\overset{\mapsto}{D}$ şi $\overset{\mapsto}{D'}$ două semidrepte vectoriale incluse în planul vectorial euclidian orientat $\vec{P}$. Să se demonstreze că mulţimea semidreptelor vectoriale $\overset{\mapsto}{\Delta}$, astfel ca: $\widehat{(\overset{\mapsto}{\Delta}, \overset{\mapsto}{\Delta})} = \widehat{(\overset{\mapsto}{\Delta}, \overset{\mapsto}{D'})}$, conţine două elemente şi numai două.

Să se demonstreze că aceste două semidrepte vectoriale sînt opuse.

12. SPAŢIUL AFIN EUCLIDIAN

12.1. DISTANŢA DINTRE DOUĂ PUNCTE

12.1.1. Spaţiul afin euclidian

DEFINIŢIE / **Se spune că un spaţiu afin E este euclidian dacă spaţiul vectorial $\vec{E}$ la care el este asociat, este euclidian.**

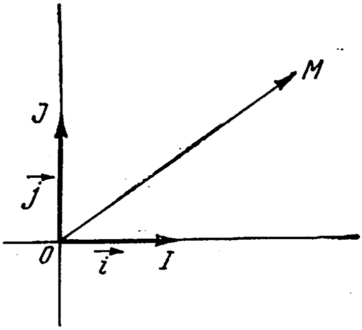
● Fie E_2 un plan afin euclidian asociat planului vectorial euclidian $\vec{E}_2$.

Se spune că un reper $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **al lui** E_2 **este ortonormat dacă baza** $(\vec{i}, \vec{j})$ **a lui** $\vec{E}_2$ **este ortonormată adică:**

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{şi} \quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1.$$

Un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ este reprezentat grafic după cum indică figura 1; pe această figură, I şi J sînt punctele respectiv definite prin $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ şi $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

Fig. 1



Pentru orice punct M al planului E_2 de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avem:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

ceea ce implică:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = x \text{ şi } \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = y.$$

Se spune că planul afin E_2 este orientat dacă planul vectorial $\vec{E}_2$ este orientat; un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ al lui $\vec{E}_2$ este atunci direct (respectiv indirect) dacă baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j})$ a lui $\vec{E}_2$ este directă (respectiv indirectă).

● **Fie E_3 spaţiul afin euclidian asociat spaţiului vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune 3.**
Se spune că un reper $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ al lui E_3 este ortonormat dacă baza $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a lui E_3 este ortonormată, adică:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

şi $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$

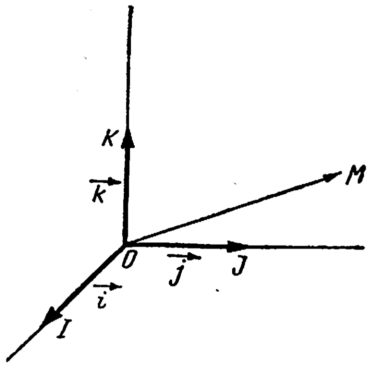


Fig. 2

Un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este reprezentat grafic cum indică figura 2; pe această figură, I, J şi K sînt punctele respective definite prin:

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \ \overrightarrow{OJ} = \vec{j}, \ \overrightarrow{OK} = \vec{k}.$$

Pentru orice punct M al spaţiului E_3 de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avem:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

ceea ce implică:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = x, \ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = y, \ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = z.$$

● Fie D o dreaptă inclusă într-un spaţiu afin euclidian E de dimensiune 2 sau 3; se spune că un reper $(O, \vec{i})$ al dreptei D este normat dacă vectorul $\vec{i}$ este unitar.

12.1.2. Distanţa dintre două puncte

Fie E un spaţiu afin euclidian de dimensiune 2 sau 3 şi fie A şi B două puncte aparţinînd lui E.

DEFINIȚIE / **Se numește distanța dintre două puncte A și B, și se notează $d(A, B)$, numărul real egal cu norma vectorului AB:**

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

PROPRIETĂȚILE DISTANȚEI DINTRE DOUĂ PUNCTE.

1. Pentru orice bipunct (A, B), avem: $d(A, B) \geqslant 0$. Pe de altă parte:

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B;$$

prin urmare:

$$\boxed{d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.} \tag{1}$$

2. Pentru orice bipunct (A, B), avem:

$$d(B. A) = \|\overrightarrow{BA}\| = \|-\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$$

prin urmare:

$$\boxed{\forall (A, B) \in E^2 \quad d(A, B) = d(B, A).} \tag{2}$$

3. Fie trei puncte A, B, C aparținînd spațiului E: relația lui Chasles aplicată tripletului (A, B, C) dă:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC};$$

rezultă de aici (inegalitatea triunghiului):

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\| \leqslant \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|.$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{\forall (A, B, C) \in E^3 \quad d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C).} \tag{3}$$

Aplicaţia d a produsului cartezian E^2 în $\mathbf{R}^+$, definită prin:

$$(A, B) \mapsto d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

este numită **distanţa euclidiană** pe E.
Mai general, se numeşte **distanţă pe mulţimea** E orice aplicaţie a lui E^2 în $\mathbf{R}^+$ care posedă proprietăţile (1), (2) şi (3) precedente. O mulţime înzestrată cu o distanţă este numită **spaţiu metric.**
Observaţie. — Cu scopul de a simplifica notaţiile, distanţa $d(A, B)$ dintre două puncte A şi B aparţinînd spaţiului euclidian E va putea fi notată şi AB.

Aplicaţii. I. *A, B, C fiind trei puncte ale unui spaţiu euclidian E, să se demonstreze echivalenţa :*

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Egalitatea vectorială $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ implică:

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB},$$

adică: $AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Rezultă de aici: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Rezultatul pe care l-am stabilit este cunoscut sub numele de **teorema lui Pitagora.**
II. *A, B, C, fiind trei puncte, două cîte două distincte, ale unui spaţiu afin euclidian E, să se demonstreze că :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Egalitatea vectorială :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

implică :

$$\|\overrightarrow{BC}\|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Pe de altă parte, cum punctele A, B, C sînt două cîte două distincte, vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ sînt nenuli; avem deci (nr. **11.1.4.**):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}). \quad (2)$$

Rezultă atunci egalităţile (1) şi (2):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

12.1.3. Invarianța distanței prin translație

Fie patru puncte A, B, A', B' ale spațiului euclidian E astfel ca:

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB};$$

avem:

$$d(A'B') = \|A'B'\| = \|\lambda\overrightarrow{AB}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{AB}\| = |\lambda|d(A, B).$$

Rezultă de aici că:

$$\boxed{\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow d(A', B') = |\lambda|\, d(AB).}$$

Consecință. — Fie **t** o translație punctuală a spațiului E; se știe că **t** transformă orice bipunct (A, B) într-un bipunct (A', B') echivalent cu (A, B) (fig. 3); avem prin urmare:

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB},$$

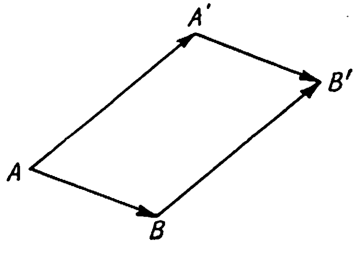


Fig. 3

ceea ce implică:

$$d(A', B') = d(A, B).$$

Rezultatul precedent se exprimă spunînd că **o translație a spațiului euclidian E conservă distanța**, sau că **distanța este invariantă prin translație.**

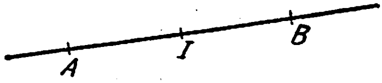


Fig. 4

Aplicaţie. *Fie A şi B două puncte distincte ale spaţiului euclidian E (fig. 4). Să se demonstreze echivalenţa:*

$$I \text{ este mijlocul lui } (A, B) \Leftrightarrow \begin{cases} I \text{ aparţine dreptei } AB \text{ şi} \\ d(I, A) = d(I, B). \end{cases}$$

● Fie I mijlocul bipunctului (A, B).
Se ştie că I aparţine dreptei AB (nr. 6.3.2) şi că (nr. 5.1.4):

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};$$

rezultă de aici:

$$\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB},$$

Ceea ce implică:

$$d(I, A) = \|\overrightarrow{IA}\| = \|-\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IB}\| = d(I, B).$$

● *Reciproc*, fie I un punct aparţinînd dreptei AB şi astfel ca:

$$d(I, A) = d(I, B).$$

Remarcăm că $d(I, A)$ nu este nul, în caz contrar am avea $I = A$ şi $d(I, B) = 0$, adică $A = B$, ceea ce este contrar ipotezei: $A \neq B$. t fiind abscisa punctului I în reperul $(A, \overrightarrow{AB})$ al dreptei AB, avem:

$$\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = t(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) \Rightarrow (1 - t)\overrightarrow{AI} = t\overrightarrow{IB},$$

ceea ce implică:

$$|1 - t|\, d(I, A) = |t|\, d(I, B).$$

Cum numerele reale $d(I, A)$ şi $d(I, B)$ sînt egale şi nenule, egalitatea precedentă dă:

$$|1 - t| = |t|.$$

Avem pe de altă parte:

$$|1 - t| = |t| \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = t \\ \text{sau} \\ 1 - t = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ \text{sau} \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Rezultă de aici că: $t = \dfrac{1}{2}$, deci că: $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, ceea ce dovedeşte că I este mijlocul bipunctului (A, B).

12.1.4. Caracterizarea metrică a unui segment

A şi B fiind două puncte distincte aparţinînd unui spaţiu euclidian E, desemnăm prin D dreapta conţinînd A şi B (fig. 5) şi raportăm această dreaptă la

Fig. 5 

reperul $(A, \overrightarrow{AB})$. Abscisele respective ale punctelor A şi B în acest reper sînt 0 şi 1.
Reamintim că segmentul $[A, B]$ este mulţimea punctelor M aparţinînd lui D pentru care obscisa t în reperul $(A, \overrightarrow{AB})$ este astfel încît:

$$0 \leq t \leq 1.$$

Rezultă de aici că:

$$M \in [A, B] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] \; \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}.$$

Se constată imediat că echivalenţa precedentă este adevărată dacă punctele A şi B sînt egale.
● Fie un punct M aparţinînd segmentului $[A, B]$; există un număr real t astfel ca:

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \text{ şi } t \in [0, 1].$$

Rezultă de aici: $d(A, M) = |t| d(A, B)$;
cum în plus t este pozitiv sau nul, avem:

$$d(A, M) = |t| \, d(A, B). \qquad (1)$$

Avem pe de altă parte:

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - t\,\overrightarrow{AB} = (1 - t)\overrightarrow{AB},$$

ceea ce implică:

$$d(M, B) = |1 - t| \, d(A, B);$$

Cum în plus t este mai mic sau egal cu 1, $1 - t$ este pozitiv sau nul; rezultă de aici:

$$d(M, B) = (1 - t)d(A, B). \qquad (2)$$

Prin adunarea, membru cu membru a egalităţilor (1) şi (2) se obţine:

$$d(A, M) + d(M, B) = d(A, B).$$

● *Reciproc*, fie M un punct al spaţiului E astfel ca

$$d(A, M) + d(M, B) = d(A, B).$$

Egalitatea precedentă implică:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{MB}\|,$$

adică:

$$\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{MB}\|.$$

Rezultă de aici (nr. **8.2.4**):

$$[\overrightarrow{AM} = \vec{0}] \text{ sau } [\exists t \geq 0 \; \overrightarrow{MB} = t\overrightarrow{AM}].$$

a) $\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Rightarrow A = M \Rightarrow M \in [A, B]$.

b) $\overrightarrow{MB} = t\,\overrightarrow{AM}$ şi $t \geq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AM}$ şi

$$t \geq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+t}\overrightarrow{AB} \text{ şi } 0 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow M \in [A, B]$.

În cele din urmă avem:

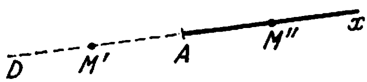
$$\boxed{M \in [A, B] \Leftrightarrow d(A, M) + d(M, B) = d(A, B).}$$

Echivalenţa precedentă dovedeşte că **segmentul** $[A,B]$ **este mulţimea punctelor** M **din spaţiul euclidian** E **astfel ca:**

$$d(A, M) + d(M, B) = d(A, B).$$

12.1.5. Punct al unei semidrepte pentru care distanța la origine este dată

Fie Ax o semidreaptă închisă în spațiul euclidian E (fig. 6), și fie l un număr real pozitiv sau nul. Raportăm dreapta D, care conține pe Ax, la un reper

Fig. 6 

normat $(A, \vec{i})$ cu originea A; semidreapta Ax este atunci mulțimea punctelor M ale dreptei D pentru care abscisa t în reperul $(A, \vec{i})$ este pozitivă sau nulă, sau mulțimea punctelor M ale dreptei D pentru care abscisa este negativă sau nulă.

Pentru orice punct M al dreptei D, cu abscisa t în reperul $(A, \vec{i})$, avem:

$$AM = t\vec{i},$$

ceea ce implică:

$$d(A, M) = \|\overrightarrow{AM}\| = \|t\vec{i}\| = |t|\,\|\vec{i}\| = |t|.$$

Rezultă de aici că:

$$d(A, M) = l \Leftrightarrow |t| = l \Leftrightarrow t = l \text{ sau } t = -l.$$

● Dacă $l = 0$, există un punct din D, și numai unul: punctul A, pentru care distanța la punctul A este nulă și acest punct aparține semidreptei Ax.

● Dacă $l > 0$, există două puncte din D și numai două: punctele M' și M'' de abscise l și $-l$, pentru care distanța la punctul A este egală cu l unul și numai unul dintre aceste puncte aparține semidreptei Ax.

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **Fie Ax o semidreaptă închisă inclusă în spaţiul euclidian E şi fie l un număr real pozitiv sau nul.**
Există un punct M, şi numai unul, aparţinînd lui Ax astfel ca:

$$d(A, M) = l.$$

12.1.6. Expresia analitică a distanţei dintre două puncte

Fie E_3 un spaţiu afin euclidian de dimensiune 3 raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
M_0 şi M_1 fiind două puncte din E_3 de coordonate respective:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

vectorul $\overrightarrow{M_0M_1}$ are drept coordonate în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix};$$

Rezultă de aici (nr. 8.3.4)

$$\| \overrightarrow{M_0M_1} \| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2},$$

ceea ce implică:

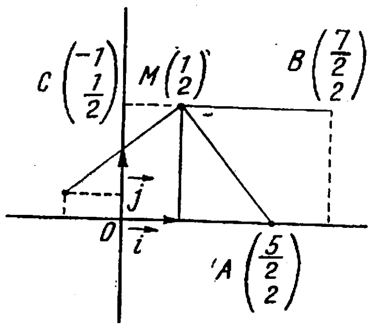
$$\boxed{d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}$$

Observaţie. — O demonstraţie analoagă cu cea precedentă dovedeşte că distanţa dintre două puncte M_0 şi M_1 dintr-un plan euclidian E_2, de coordonate respective $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ în reperul ortonormat al lui E_2, este dat prin:

$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Aplicaţii. I *Planul euclidian E_2 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, fie A, B şi C punctele de coordonate respective* $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ *şi* $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *(fig. 7). Să se demonstreze că există un*

Fig. 7



punct M, şi numai unul, egal depărtat de trei puncte A, B, C.

Fie M un punct din E_2 de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Egalitatea a două numere pozitive sau nule fiind echivalentă cu egalitatea pătratelor acestor două numere; avem:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2. \end{cases}$$

Pe de altă parte:

$$MA^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2$$

$$MB^2 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y - 2)^2,$$

$$MC^2 = (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Rezultă de aici că:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + (y-2)^2 \\ \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + y^2 = (x+1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

După reduceri și simplificări, se obține:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -7x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Punctul M de coordonate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ este deci singurul punct egal depărtat de punctele A, B, C.

II. *Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie A și B punctele de coordonate respective* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *și* $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Să se demonstreze că mulțimea F a punctelor M din E_3, egal depărtate de A și B, este un plan.

Fie M un punct din E_3, de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; avem:

$$M \in F \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2.$$

Rezultă de aici că mulțimea F este planul pentru care o ecuație carteziană este:

$$4x + 6y - 8z + 5 = 0$$

EXERCIȚII

12.1. E fiind o mulțime nevidă, fie d aplicația lui E^2 în $\mathbf{R}^+$ definită prin:

$$d(A, B) = 0 \text{ dacă } A = B$$
$$d(A, B) = 1 \text{ dacă } A \neq B$$

1° Să se demonstreze că d este o distanță pe E.
2° Să se caracterizeze tripletele (A, B, C) pentru care:

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

12.2. 1° Aplicația d a lui $\mathbf{R}^2$ în $\mathbf{R}^+$, definită prin:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

este o distanță pe $\mathbf{R}$?

2° Aceeaşi chestiune dacă aplicaţia d este definită prin:

$$d(x, y) = \sup (|x|, |y|).$$

(Se reaminteşte că $\sup (|x|, |y|)$ desemnează cel mai mare dintre numerele $|x|$ şi $|y|$).
3° Aceeaşi chestiune dacă aplicaţia d este definită prin:

$$d(x, y) = |x| + |y|.$$

12.3. 1° Aplicaţia d a lui $\mathbf{R}^2$ în $\mathbf{R}^+$ definită prin:

$$d(x, y) = (x - y)^2$$

este o distanţă pe R?
2° Aceeaşi chestiune dacă aplicaţia d este definită prin:

$$d(x, y) = ||x| - |y||.$$

12.4. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca:

$$\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB} \text{ şi}$$
$$\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{AC},$$

unde k este un număr real nenul.
Să se demonstreze că:

$$B'C' = |k|\,BC.$$

12.5. Fie D şi D' două drepte coplanare. O dreaptă $\triangle$ taie pe D în A şi pe D' în A'; o dreaptă $\triangle'$, strict paralelă cu $\triangle$, taie pe D în B şi pe D' în B'.
k fiind un număr real nenul, fie M punctul de absciså k în reperul $(A, \overrightarrow{AB})$ al dreptei D şi fie M' punctul de abscisă k în reperul $(A', \overrightarrow{A'B'})$ al dreptei D'.
1° Să se demonstreze că:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{A'M'}{A'B'} = |k|.$$

2° Să se exprime vectorul $\overrightarrow{MM'}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ şi de numărul k.
3° Să se exprime MM' în funcţie de numerele AA', BB' şi k.
12.6. Fie un triunghi ABC şi fie trei puncte A', B', C' aparţinînd respectiv segmentelor $[B, C]$, $[C, A]$ şi $[A, B]$.
1° Să se demonstreze că:

$$A'B' + B'C' + C'A' \leq AB + BC + CA.$$

2° În ce caz avem:

$$A'B' + B'C' + C'A' = AB + BC + CA\,?$$

12.7. Fie un triunghi ABC şi fie A', B', C' mijloacele respective ale segmentelor $[B, C]$, $[C, A]$ şi $[A, B]$. Se notează:

$$BC = a \quad CA = b, \quad AB = c,$$
$$AA' = m, \quad BB' = n, \quad CC' = p.$$

1° Să se demonstreze că:

$$b + c - a < 2m < b + c + a.$$

2° Să se demonstreze că:

$$\frac{1}{2}(a + b + c) < m + n + p < \frac{3}{2}(a + b + c).$$

12.8. Planul afin euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie A şi B punctele de coordonate respective $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ şi fie D dreapta de ecuaţie: $x + 2y - 2 = 0$.
Fie $\mathfrak{f}$ aplicaţia lui D în $\mathbf{R}^+$ definită prin:

$$\forall M \in D \quad \mathfrak{f}(M) = MA^2 + MB^2.$$

Să se demonstreze că există un punct M_0, pentru care se vor determina coordonatele, aparţinînd lui D şi astfel ca:

$$\forall M \neq M_0 \Rightarrow \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(M_0).$$

(Se va putea utiliza o reprezentare parametrică a dreptei D).

12.9. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent, cu punctele $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ şi dreapta D de ecuaţie: $3x - y - 6 = 0$.

12.10. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se dau punctele:

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că mulţimea punctelor egal depărtate de A, B, C este o dreaptă D pentru care se va determina un reper.

12.11. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent, cu punctele:

a) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; b) $A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

12.12. Spaţiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se demonstreze că există un punct M, şi numai unul, egal depărtat de punctele:

$$A\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

Aceeaşi chestiune cu punctele:

$$A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\\ 3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{3}\\ \frac{7}{3}\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}-\frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{8}{3}\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}\frac{6}{6}\\ -\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

12.13. Fie A, B, C trei puncte ale planului afin euclidian P.
1° Să se demonstreze că există un punct G şi numai unul, astfel ca:

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

2° Fie f aplicaţia lui P în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$\forall M\in P \quad f(M)=2MA^2+MB^2-MC^2.$$

Să se demonstreze că

$$\forall M\in P \quad f(M)=f(G)+2MG^2.$$

Să se deducă de aici că aplicaţia f admite un minim absolut în $M=G$, adică:

$$M\neq G\Rightarrow f(M)>f(G).$$

3° Să se determine coordonatele lui G şi să se calculeze $f(G)$ în cazurile în care punctele A, B, C au drept coordonate, într-un reper ortonormat al lui P:

a) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$.

b) $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$;

c) $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

12.14. Fie un paralelogram $ABCD$ din spaţiul euclidian E. Să se demonstreze că:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2.$$

12.15. Fie două puncte A şi B ale spaţiului euclidian E şi fie I mijlocul bipunctului (A, B). Să se demonstreze că, pentru orice punct M, avem:

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}.$$

12.2. ORTOGONALITATEA A DOUĂ DREPTE

12.2.1. Drepte ortogonale

În acest paragraf, E desemnează un spaţiu afin asociat unui spaţiu vectorial euclidian $\vec{E}$ de dimensiune 2 sau 3.
Fie D şi D' două drepte incluse în spaţiul E.

DEFINIŢIE / **Se spune că dreapta D este ortogonală dreptei D', şi se scrie $D \perp D'$, dacă dreapta vectorială $\vec{D}$, direcţia lui D, este ortogonală dreptei vectoriale $\vec{D}'$, direcţia lui D':**

$$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{D} \perp \vec{D}'.$$

Se defineşte astfel, pe mulţimea dreptelor incluse în E, o relaţie binară numită **relaţia de ortogonalitate a două drepte.**

Fie $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ două drepte vectoriale ortogonale ale spaţiului vectorial $\vec{E}$ şi fie A şi A', două puncte ale spaţiului E; urmează că dreapta D conţinînd pe A şi de direcţie $\vec{D}$ este ortogonală dreptei D' conţinînd pe A' şi de direcţie $\vec{D}'$, ceea ce dovedeşte existenţa cuplurilor (D, D') de drepte astfel ca $D \perp D'$.

PROPRIETĂŢILE ORTOGONALITĂŢII A DOUĂ DREPTE

1. D şi D' fiind două drepte de direcţii respective $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$, avem:

$$D \perp D' \Rightarrow \vec{D} \perp \vec{D}' \Rightarrow \vec{D}' \perp \vec{D} \Rightarrow D' \perp D.$$

Rezultă de aici că, dacă D este ortogonală cu D', atunci D' este ortogonală cu D; se spune de asemenea că **dreptele D şi D' sînt ortogonale.**

2. Dacă D şi D' sînt două drepte ortogonale, direcţiile lor respective $\vec{D}$ şi $\vec{D}'$ sînt două drepte vectoriale ortogonale; avem atunci (nr. **8.4.1**):

$$\vec{D} \cap \vec{D}' = \{\vec{0}\},$$

ceea ce dovedeşte că: $\vec{D} \neq \vec{D}'$, deci că dreptele D şi D' nu sînt paralele.

Două drepte ortogonale nu sînt paralele.

Rezultă de aici că două drepte paralele nu sînt ortogonale şi că, în particular, **o dreaptă D nu este ortogonală ei însăşi.**

3. Fie trei drepte D, D' şi $\triangle$ de direcţii respective $\vec{D}$, $\vec{D}'$ şi $\vec{\triangle}$, astfel ca:

$$D \parallel D' \text{ şi } \triangle \perp D;$$

avem atunci:

$$\vec{D} = \vec{D}' \text{ şi } \vec{\triangle} \perp \vec{D},$$

ceea ce dovedeşte că: $\vec{\triangle} \perp D'$, deci că: $\triangle \perp D'$. Se poate enunţa:

TEOREMA/ 1. **Dacă două drepte sînt paralele, orice dreaptă ortogonală uneia este ortogonală şi celeilalte.**

4. Fie D şi D' două drepte de vectori directori respectivi $\vec{u}$ şi $\vec{u}'$; vectorul $\vec{u}$ este o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}$, direcţia lui D, şi vectorul $\vec{u}'$ este o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}'$, direcţia lui D'; rezultă de aici (nr. **8.4.1**):

$$\vec{D} \perp \vec{D}' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}',$$

ceea ce implică:

$$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{D} \perp \vec{D}' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 2. **Două drepte sînt ortogonale dacă şi numai dacă un vector director al uneia este ortogonal unui vector director al celeilalte.**

Aplicaţie. *Planul euclidian P fiind raportat la un reper ortonormat* $(O, \vec{i}, \vec{j})$, *fie D şi D' două drepte de ecuaţii carteziene respective:*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$
$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0.$$

Să se demonstreze echivalenţa:

$$D \perp D' \Leftrightarrow \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.$$

Se ştie că un vector director al dreptei D este $\vec{u}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$; la fel un vector director al dreptei D' este $u'\begin{pmatrix}-\beta'\\ \alpha'\end{pmatrix}$.

Rezultă de aici:

$$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u'} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u'} = (-\beta)(-\beta') + \alpha\alpha' = 0,$$

adică:

$$\boxed{D \perp D' \Leftrightarrow \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0.}$$

12.2.2. Dreaptă a unui plan *P* conţinînd un punct din *P* şi ortogonală unei drepte din *P*

Fie P un plan inclus în spaţiul euclidian E (dacă $\dim E = 2$, atunci $P = E$), fie A un punct aparţinînd lui P şi fie D o dreaptă inclusă în P (fig. 8). $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ fiind direcţiile respective ale dreptei D şi ale planului P, incluziunea $D \subset P$ implică: $\vec{D} \subset \vec{P}$, şi se ştie că există o dreaptă vectorială $\vec{D}'$, şi numai

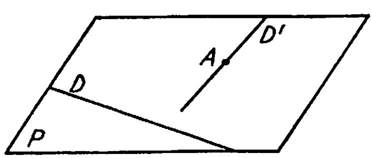


Fig. 8

una, inclusă în $\vec{P}$ şi ortogonală lui $\vec{D}$ (nr. **8.4.2.**).

● Fie D' dreapta de direcţie $\vec{D}'$ conţinînd pe A; urmează imediat că D' este ortogonală cu D. Pe de altă parte:

$$\vec{D}' \subset \vec{P} \Rightarrow D' \parallel P;$$

cum în plus intersecţia $D' \cap P$; nu este vidă ($A \in D' \cap P$), dreapta D' este inclusă în planul P.

● *Reciproc*, fie D'' o dreaptă inclusă în P, conţinînd pe A şi ortogonală cu D; $\vec{D}''$ fiind direcţia dreptei D'', avem:

$$\vec{D}'' \subset \vec{P} \quad \text{şi} \quad \vec{D}'' \perp \vec{D};$$

unicitatea dreptei vectoriale incluse în $\vec{P}$ şi ortogonală cu $\vec{D}$ dovedeşte atunci $\vec{D}'' = \vec{D}'$, deci că dreptele D' şi D'' care au punctul A comun şi aceeaşi direcţie sînt egale. Se poate enunţa:

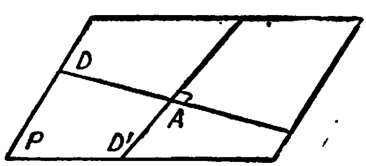
TEOREMA/ 1. **Fie un plan P, un punct A aparţinînd lui P şi o dreaptă D inclusă în P. Există o dreaptă D', şi numai una, inclusă în P, care conţine punctul A şi este ortogonală cu D.**

Observaţie. — **1.** Dacă două drepte sînt coplanare şi ortogonale, ele sînt coplanare şi neparalele; rezultă de aici că ele sînt concurente (nr. **7.1.5**).

Două drepte coplanare şi ortogonale sînt concurente.

Două astfel de drepte sînt reprezentate grafic aşa cum indică figura 9, dacă planul P care le conţine

Fig. 9



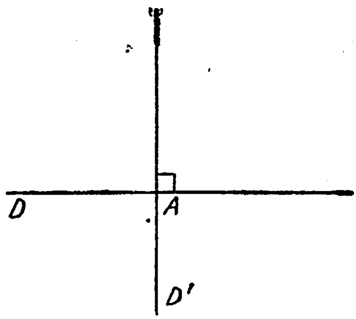


Fig. 10

este inclus într-un spaţiu euclidian E_3 de dimensiune 3 sau, aşa cum indică figura 10, dacă aceste două drepte sînt incluse într-un plan euclidian E_2.
2. Fie un plan P şi trei drepte D, D', D'' incluse în P astfel ca:

$$D' \perp D \text{ şi } D'' \perp D.$$

Dacă D' şi D'' ar fi concurente în A (fig. 11), ar exista două drepte distincte, incluse în P, conţinînd pe

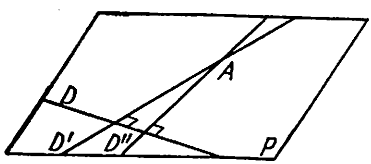


Fig. 11

A şi ortogonale cu D, ceea ce constituie o contradicţie; rezultă de aici că cele două drepte D' şi D'', care sînt coplanare şi neconcurente, sînt paralele.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 2. **Dacă două drepte dintr-un plan P sînt ortogonale aceleaşi drepte din P, ele sînt paralele.**

3. Fie A şi B două puncte distincte aparţinînd unui plan P; dreapta 1) inclusă în P, care conţine mijlocul I al lui $[A, B]$ şi ortogonală dreptei AB, este **media-**

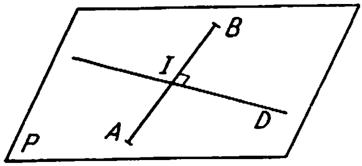


Fig. 12

toarea segmentului $[A, B]$ inclus în planul P (fig. 12). Reamintim rezultatul următor care a fost demonstrat în cursul clasei a doua:

> **Mediatoarea segmentului $[A, B]$ inclus în planul P este mulţimea punctelor M aparţinînd lui P, egal depărtate de A şi B.**

12.2.3. Dreaptă a unui plan definită de un punct şi de un vector normal nenul.

Fie E_2 un plan afin asociat planului vectorial euclidian $\vec{E}_2$.

D fiind o dreaptă de direcţie $\vec{D}$ inclusă în E_2 se numeşte **vector normal** lui $\vec{D}$, orice vector aparţinînd dreptei vectoriale $\vec{D}'$ inclusă în $\vec{E}_2$, şi ortogonală cu $\vec{D}$.

Fie M_0 un punct din D şi fie $\vec{u}$ un vector nenul, *normal* lui D (fig. 13):

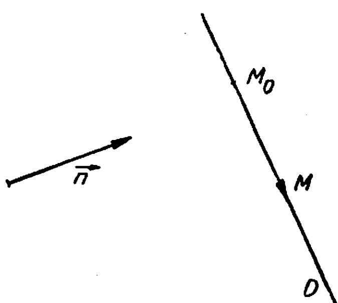


Fig. 13

avem:

$$M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in \vec{D}; \tag{1}$$

pe de altă parte, vectorul nenul $\vec{n}$ este o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}'$ ortogonală cu $\vec{D}$; prin urmare (nr. 8.4.2):

$$\vec{u} \in \vec{D} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0. \tag{2}$$

Rezultă atunci din echivalențele (1) și (2) că:

$$\boxed{M \in D \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.}$$

Echivalența precedentă dovedește că **o dreaptă** D **a unui plan euclidian este definită cînd se dau unul din punctele sale și unul din vectorii săi normali, nenuli.**

Observații. — **1.** Orice vector ortogonal unui vector director al dreptei D este un vector normal lui D.
2. Dacă două drepte D și D' incluse în planul P sînt ortogonale, orice vector director al uneia este un vector nenul, normal celeilalte și orice vector nenul, normal uneia este un vector director al celeilalte.

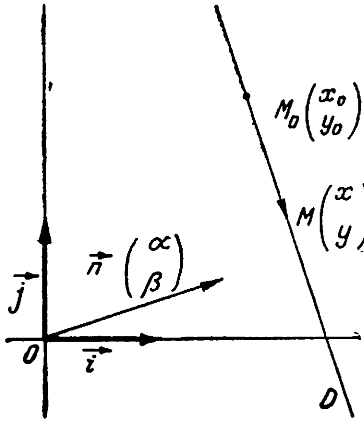
Consecințe. 1. Fie E_2 un plan euclidian raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ și fie D dreapta conținînd punctul $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ și pentru care un vector normal nenul este $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (fig. 14).

M fiind un punct de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ are drept coordonate $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$; rezultă de aici:

$$M \in D \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0.$$

Relația $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$, care este verificată de coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ale unui punct M al

Fig. 14



planului E_2 dacă şi numai dacă acest punct aparţine dreptei D, este o ecuaţie carteziană a lui D.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 1. **Planul euclidian E_2 fiind raportat la un reper ortonormat, o ecuaţie carteziană a dreptei D conţinînd punctul $M_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ şi admiţînd vectorul nenul $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ca vector normal, este:**

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0.$$

2. Planul euclidian E_2 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, fie D o dreaptă inclusă în E_2 de ecuaţie carteziană:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Se ştie că un vector director al lui D este vectorul nenul $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$. Desemnăm prin $\vec{n}$ vectorul de coordonate $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$; $\vec{n}$ este nenul şi avem:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = (\alpha)(-\beta) + (\beta)(\alpha) = 0,$$

ceea ce dovedeşte că $\vec{n}$ este ortogonal cu $\vec{u}$ deci că $\vec{n}$ este un vector nenul, normal lui D.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 2. **Planul euclidian E_2 fiind raportat la un reper ortonormat, fie D o dreaptă din E_2 cu ecuaţia carteziană:**

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0;$$

un vector nenul, normal lui D este vectorul de coordonate $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Exemple. Planul euclidian E_2 este raportat la un reper ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Să se stabilească o ecuaţie carteziană a dreptei D care conţine punctul $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ şi ortogonală dreptei $\triangle$ de ecuaţie:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0.$$

Prima metodă. — Un vector nenul, normal lui $\triangle$ este vectorul de coordonate $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; acest vector este un vector director al lui D; rezultă de aici că o ecuaţie carteziană a lui D este:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & \frac{1}{2} \\ y - 2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0, \text{ adică: } \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 0.$$

Metoda a doua. Un vector director al lui $\triangle$ este vectorul de coordonate $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; acest vector este un vector nenul, normal lui D, rezultă de aici că o ecuaţie carteziană a lui D este:

$$-\frac{1}{3}(x - 3) + \frac{1}{2}(y - 2) = 0,$$

adică:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 0.$$

II. *Fie A și B două puncte de coordonate respective* $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *și* $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Să se stabilească o ecuație carteziană a mediatoarei D a segmentului* $[A, B]$.

Prima metodă. Dreapta D este dreapta care conține mijlocul I al lui $[A, B]$ și pentru care un vector normal, nenul este $\overrightarrow{AB}$. Coordonatele punctului I sînt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; acelea ale vectorului $\overrightarrow{AB}$ sînt $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; rezultă de aici că o ecuație carteziană a dreptei 1) este:

$$4(x - 1) - 2(y - 1) = 0, \text{ adică:}$$

$$4x - 2y - 2 = 0. \tag{1}$$

Metoda a doua. Dreapta D este mulțimea punctelor M egal depărtate de A și B; avem atunci:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow AM^2 = BM^2$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 0)^2$$
$$\Leftrightarrow 8x - 4y - 4 = 0.$$

Rezultă de aici că o ecuație carteziană a dreptei D este:

$$8x - 4y - 4 = 0. \tag{2}$$

Prin simplificarea ecuației (1) sau a ecuației (2), se obține:

$$2x - y - 1 = 0.$$

$\overline{\text{D}}$ 12.2.4. Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă

În acest paragraf, E desemnează un spațiu afin euclidian de dimensiune 2 sau 3.
Fie D o dreaptă inclusă în E și fie A un punct aparținînd lui E.

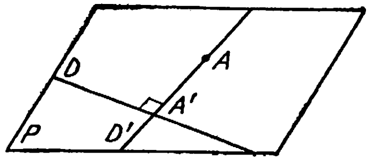


Fig. 15

● Dacă A nu aparține lui D (fig. 15), există un plan P și numai unul, care să conțină pe A și D (dacă dim $E = 2$, atunci $P = E$) ; dreapta D' inclusă în P, care conține pe A și ortogonală cu D este atunci secantă lui D într-un punct A' numit **proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta D.**

● Dacă A aparține lui D, proiecția ortogonală a lui A pe D este, prin definiție, însuși punctul A. Remarcăm, în acest caz, că orice plan P care conține pe D, conține pe A și că dreapta D' inclusă în P, care conține pe A și este ortogonală cu D, este secantă lui D în A (fig. 16).

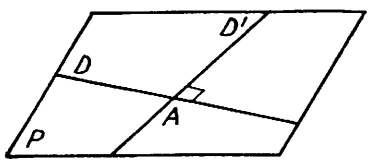


Fig. 16

PROPRIETĂȚI

1. Pentru orice punct A cu proiecția ortogonală A' pe o dreaptă D, avem :

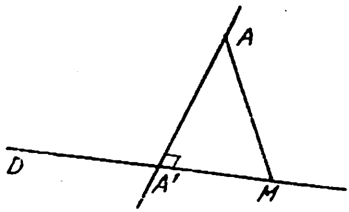
$$A \notin D \Rightarrow A \neq A' ;$$
$$A \in D \Rightarrow A = A'.$$

2. Fie un punct A cu proiecția ortogonală A' pe o dreaptă D (fig. 17) ; M fiind un punct care aparține lui D și distinct de A', avem :

$$A'M^2 > 0.$$

Pe de altă parte, vectorii $A'A$ și $A'M$ care aparțin respectiv la două drepte vectoriale ortogonale, sînt ortogonali.

Fig. 17



Rezultă de aici (teorema lui Pitagora):

$$AM^2 = A'A^2 + A'M^2 > A'A^2,$$

ceea ce implică:

$$AM > A'A.$$

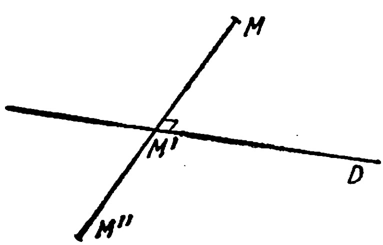
Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **A și D fiind respectiv un punct și o dreaptă dintr-un spațiu euclidian E, distanța $d(A, M)$ a punctului A la un punct M al dreptei D este minimă pentru punctul A', proiecția ortogonală a lui A pe D.**
Această distanță minimă, $d(A, A')$ este numită distanța de la punctul A la dreapta D și este notată $d(A, D)$.

Observație. Fie o dreaptă D și un punct M cu proiecția ortogonală M' pe D (fig. 18); se numește simetricul punctului M în raport cu dreapta D punctul M'' definit prin:

$$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'}.$$

Fig. 18



Urmează imediat că punctul M' este mijlocul bipunctului (M, M'') şi că punctul M este simetricul punctului M'' în raport cu dreapta D. Se spune de aceea despre punctele M şi M'' că **sînt simetrice în raport cu dreapta** D.

Aplicaţii. I. *Planul euclidian P fiind raportat la un reper ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$, fie M_0 punctul de coordonate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ şi fie D dreapta cu ecuaţia carteziană (fig. 19):*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

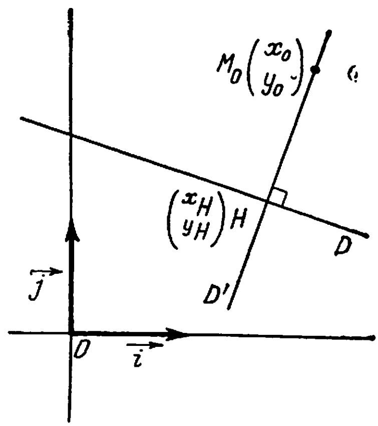


Fig. 19

1° *Să se exprime coordonatele proiecţiei ortogonale a lui M_0 pe D.*
2° *Să se exprime distanţa de la punctul M_0 la dreapta D.*
1° Fie D' dreapta care conţine pe M_0 şi este ortogonală lui D. Vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, care este un vector director al dreptei D este un vector nenul, normal dreptei D'. Rezultă de aici că o ecuaţie carteziană a lui D' este:

$$-\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) = 0.$$

Punctul H, proiecţia ortogonală a lui M_0 pe D, este punctul de intersecţie al dreptelor D şi D'; cuplul (x_H, y_H) al coordonatelor lui H este deci soluţia sistemului:

$$\text{I}\begin{cases} \alpha x + \beta y = -\gamma \\ -\beta x + \alpha y = -\beta x_0 + \alpha y_0. \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului I dă:

$$x_H = \frac{\begin{vmatrix} -\gamma & \beta \\ -\beta x_0 + \alpha y_0 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-\alpha\gamma + \beta^2 x_0 - \alpha\beta y_0}{\alpha^2 + \beta^2} =$$

$$= x_0 - \frac{\alpha(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$y_H = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & -\beta x_0 + \alpha y_0 \end{vmatrix}}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-\alpha\beta x_0 + \alpha^2 y_0 - \beta\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} =$$

$$= y_0 - \frac{\beta(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

2° Distanţa de la punctul M_0 la dreapta D este distanţa dintre punctele M_0 şi H; avem deci:

$$d^2(M_0, D) = d^2(M_0, H) = (x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\beta^2(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} =$$

$$= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma)^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Rezultă de aici:

$$d(M_0, D) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

II. *Spaţiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie M_0 punctul de coordonate $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ şi fie D dreapta care conţine punctul A $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Să se determine coordonatele punctului H, proiecţia ortogonală a lui M_0 pe D, precum şi distanţa $d\ (M_0, D)$.*

Pentru orice punct $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aparţinînd dreptei D cu reperul $(A, \vec{u})$, există un număr real t şi numai unul, astfel ca:

$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, deci astfel ca:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Reamintim că t este abscisa punctului M în reperul $(A, \vec{u})$. Avem atunci:

$$M_0M^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 =$$
$$(t-3)^2 + (t+1)^2 + (4-t)^2 = 3t^2 - 12t + 26.$$

Funcţia trinom definită prin:

$$f(t) = 3t^2 - 12t + 26,$$

admite un minim pentru $t = \dfrac{12}{6} = 2.$

Cum pe de altă parte M_0M^2 este minim atunci cînd $M = H$, punctul H este punctul de pe dreapta D pentru care abscisa în reperul $(A, \vec{u})$ este $t = 2$. Prin urmare coordonatele punctului H sînt:

$$x_H = -1 + 2 = 1$$
$$y_H = 2 + 2 = 4$$
$$z_H = 1 - 2 = -1$$

şi distanţa $d(M_0D)$ a punctului M_0 la dreapta D este

$$d(M_0, D) = M_0H = \sqrt{f(2)} = \sqrt{14}.$$

EXERCIŢII

12.16. Fie un triunghi ABC inclus în planul euclidian P. Reamintim că o înălţime a triunghiului ABC este o dreaptă inclusă în P, conţinînd un vîrf şi ortogonală dreptei care conţine celelalte două vîrfuri.

1° Să se demonstreze că înălţimile care conţin pe B şi pe C sînt două drepte concurente într-un punct H şi că:

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \quad \text{şi} \quad \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

2° Să se demonstreze că, pentru orice punct D al planului P, avem

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

3° Să se deducă din punctele 1° şi 2° că $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Să se demonstreze că punctul H aparține înălțimii care conține pe A. (Punctul H comun celor trei înălțimi ale triunghiului este numit *ortocentrul* triunghiului).
4° Fie A', B', C' mijloacele respective ale laturilor $[B, C]$, $[C, A]$, $[A, B]$.
a) Să se demonstreze că înălțimile triunghiului A', B', C' sînt mediatoarele triunghiului ABC.
b) Să se demonstreze că mediatoarele triunghiului ABC sînt concurente într-un punct egal depărtat de cele trei vîrfuri A, B, C.
12.17. Fie un paralelogram $ABCD$ al planului euclidian P.
Să se demonstreze echivalența:

$$\text{dreapta } AB \perp \text{dreapta } AD \Leftrightarrow AC = BD.$$

12.18. Fie un paralelogram $ABCD$ al planului euclidian P.
1° Să se demonstreze echivalența:

$$AB = BC \Leftrightarrow \text{dreapta } AC \perp \text{dreapta } BD.$$

2° Să se demonstreze echivalența:

$$AB = BC \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}).$$

12.19. Fie un triunghi ABC isoscel în A $(AB = AC)$. Fiecărui punct M al dreptei BC i se asociază proiecțiile ortogonale respective H și K ale lui M pe dreptele AB și AC.
1° Să se demonstreze că, pentru orice punct M aparținînd segmentului $[B, C]$, suma $MH + MK$ este constantă.
2° Să se demonstreze că pentru orice punct M al dreptei BC care nu aparține segmentului $[B, C]$, numărul $|MH - MK|$ este constant și că această constantă este egală cu aceea definită la punctul anterior.
12.20. Fie D o dreaptă a spațiului afin euclidian E_3 și fie A și B două puncte din E_3.
Fie $\mathfrak{f}$ aplicația lui D în $\mathbf{R}^+$ definită prin:

$$\forall M \in D \quad \mathfrak{f}(M) = 2MA^2 + MB^2.$$

1° Să se demonstreze că există un punct I din E_3 și numai unul astfel ca:

$$2\,\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

2° Să se demonstreze că

$$\forall M \in D \; \mathfrak{f}(M) = 3MI^2 + \frac{2}{3}AB^2.$$

3° Fie H proiecția ortogonală a lui I pe D. Să se demonstreze că:

$$M \in D - \{H\} \Rightarrow \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(H).$$

4° Spațiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se determine analitic punctul H pentru care:

$$M \in D - \{H\} \Rightarrow \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(H).$$

atunci cînd punctele A şi B au respectiv coordonatele $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ şi cînd D este dreapta care conţine pe A şi admite vectorul $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ca vector director.

12.21. Fie o dreaptă D inclusă în planul euclidian P, fie un punct A aparţinînd lui D şi fie un număr real, pozitiv sau nul, k.
Se desemnează prin E mulţimea punctelor M a planului P astfel ca:

$$d(M, A) = kd(M, D).$$

Să se studieze mulţimea E după valorile lui k.

12.22. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie un punct M şi fie o dreaptă D cu reperul $(A, \vec{u})$. Să se determine coordonatele proiecţiei ortogonale H a lui M pe D şi distanţa de la punctul M la dreapta D în cazurile următoare:

a) $\quad M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $\quad M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c) $\quad M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

12.23. Fie D şi D' două drepte paralele incluse în spaţiul euclidian. Să se demonstreze că distanţa de la un punct al uneia la cealaltă este constant.

12.24. Fie D şi D' două drepte necoplanare incluse în spaţiul afin euclidian E_3.

1° Utilizînd un reper normat al lui D şi un reper normat al lui D', să se demonstreze că există un bipunct (H, H') şi numai unul care aparţine lui $D \times D'$ şi astfel ca dreapta HH' să fie ortogonală celor două drepte D şi D'.

2° Să se demonstreze că, pentru orice bipunct (M, M') aparţinînd lui $D \times D'$, avem

$$(M, M') \neq (H, H') \Rightarrow HH' < MM'.$$

3° Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fie D o dreaptă cu reperul $(A, \vec{u})$ şi fie D' o dreaptă cu reperul

$(A', \vec{u'})$. Să se determine coordonatele punctelor H şi H' în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

b) $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

d) $A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$.

12.25. Planul afin euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie o dreaptă D cu ecuaţia $ax + by + c = 0$ şi fie un punct $M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$. Ne propunem să calculăm coordonatele X' şi Y' ale punctului M', simetricul lui M în raport cu D.

1° Să se exprime faptul că mijlocul segmentului E aparţine lui D.

2° Să se exprime faptul că vectorul $\overrightarrow{MM'}$ este ortogonal unui vector director al lui D.

3° Să se deducă din punctele 1° şi 2° coordonatele punctului M'.

4° *Aplicaţii.*

a) Să se calculeze X' şi Y' în funcţie de X şi Y atunci cînd dreapta D are ecuaţia

$$3x + 2y - 6 = 0$$

b) Să se demonstreze analitic că simetria în raport cu D, notată S_D, conservă distanţa, adică pentru orice bipunct (M, N) cu transformatul (M', N') prin S_D, avem:

$$d(M, N) = d(M', N').$$

12.26. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D care conţine punctul $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Ne propunem să calculăm coordonatele punctului $M'\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$ simetricul punctului $M\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ în raport cu dreapta D.

1° Să se exprime faptul că mijlocul segmentului $[M, M']$ aparține lui D.

2° Să se exprime faptul că vectorii $\overrightarrow{MM'}$ și $\vec{u}$ sînt ortogonali.
3° Să se deducă din punctele 1° și 2° coordonatele punctului M'.
4° Să se demonstreze analitic că simetria în raport cu dreapta D, notată S_D, conservă distanța adică faptul că pentru orice bipunct (M, N) cu transformatul (M', N') prin S_D, avem: $d(M, N) = d(M', N')$.

12.27. Fie o dreaptă D inclusă în spațiul afin euclidian E_3 și fie A un punct care nu aparține lui D. Fie $\mathfrak{f}$ aplicația lui E_3 în $\mathbf{R}^+$ definită prin:

$$\forall M \in E_3 \quad \mathfrak{f}(M) = [d(M, A)]^2 + [d(M, D)]^2.$$

1° Raportînd pe E_3 la un reper convenabil ales, să se exprime $\mathfrak{f}(M)$ în funcție de coordonatele punctului M.
2° Să se deducă de aici că există un punct M_0 astfel ca:

$$M \neq M_0 \Rightarrow \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(M_0).$$

$\bar{\text{D}}$ 12.3. ORTOGONALITATEA UNEI DREPTE CU UN PLAN

12.3.1. Drepte și plane ortogonale

Fie E_3 un spațiu afin asociat unui spațiu vectorial euclidian E_3 de dimensiune 3 și fie D și P o dreaptă și un plan inclus în spațiul E_3.

DEFINIȚIE / **Se spune că dreapta D este ortogonală cu planul P, și se scrie $D \perp P$, dacă dreapta vectorială $\vec{D}$, direcția lui D, este ortogonală cu planul vectorial $\vec{P}$, direcția lui P:**

$$D \perp P \Leftrightarrow \vec{D} \perp \vec{P}.$$

Se definește astfel o relație binară între elementele mulțimii de drepte din E_3 și acelea ale mulțimii planelor din E_3, numită

relaţia de ortogonalitate a unei drepte cu un plan. Dacă o dreaptă D este ortogonală cu un plan P, se spune de asemenea că P **este ortogonal** cu D sau că D **şi** P **sînt ortogonale.**

$\vec{D}$ şi $\vec{P}$ fiind respectiv o dreaptă vectorială şi un plan vectorial, ortogonale, iar A şi B fiind două puncte ale spaţiului E_3, fie D dreapta de direcţie $\vec{D}$ care conţine pe A şi fie P planul de direcţie $\vec{P}$ care conţine pe B (fig. 20). Urmează imediat că D şi P sînt ortogonale ceea ce dovedeşte existenţa cuplurilor (D, P) cu cîte o dreaptă şi un plan, ortogonale.

Consecinţe. — **1** Fie o dreaptă D şi un plan P, ortogonale; direcţiile lor respective $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ sînt o dreaptă vectorială şi un plan vectorial, ortogonale; avem deci (nr. **8.4.3**) : $\vec{D} \cap \vec{P} = \{\vec{0}\}$. Rezultă de aici că $\vec{D}$ nu este inclusă în $\vec{P}$ ceea ce dovedeşte că dreapta D şi planul P nu sînt paralele, deci că ele sînt secante.

O dreaptă şi un plan, ortogonale sînt secante.

O dreaptă şi un plan, ortogonale sînt reprezentate grafic aşa cum indică figura 21.

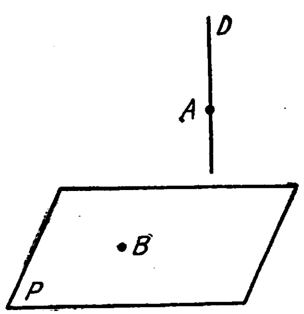


Fig. 20

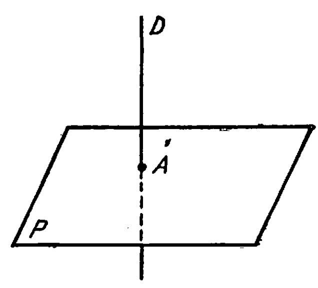


Fig. 21

2. Fie două drepte D şi D' şi fie un plan P, de direcţi respective $\vec{D}$, $\vec{D'}$ şi $\vec{P}$, astfel încît :

$$D \parallel D' \quad \text{şi} \quad P \perp D;$$

avem atunci:

$$\vec{D} = \vec{D'} \quad \text{şi} \quad \vec{P} \perp \vec{D},$$

ceea ce implică: $\vec{P} \perp \vec{D'}$ şi prin urmare: $P \perp D'$.
Se poate enunţa:

TEOREMA/ 1. **Dacă două drepte sînt paralele, orice plan ortogonal uneia este ortogonal şi celeilalte.**

3. Fie două plane P şi P' şi fie o dreaptă D de direcţii respective $\vec{P}$, $\vec{P'}$ şi $\vec{D}$ astfel ca: $P \parallel P'$ şi $D \perp P$; avem atunci:

$$\vec{P} = \vec{P'} \quad \text{şi} \quad \vec{D} \perp \vec{P},$$

ceea ce implică: $\vec{D} \perp \vec{P'}$ şi prin urmare $D \perp P'$.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 2. **Dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă ortogonală unuia este ortogonală şi celuilalt.**

4. Fie o dreaptă D şi un plan P, fie $\vec{u}$ un vector director al lui D şi fie $\vec{u'}$ şi $\vec{u''}$ cei doi vectori ai unui reper din P.

Vectorul $\vec{u}$ este o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}$, direcţia lui D şi bivectorul $(\vec{u'}, \vec{u''})$ este o bază a planului vectorial $\vec{P}$, direcţia lui P. Rezultă (nr. **8.4.3**):

$$\vec{D} \perp \vec{P} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u'} \quad \text{şi} \quad \vec{u} \perp \vec{u''},$$

ceea ce implică:

$$D \perp P \Leftrightarrow \vec{D} \perp \vec{P} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u'} \quad \text{şi} \quad \vec{u} \perp \vec{u''}.$$

Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 3. **O dreaptă D şi un plan P sînt ortogonale dacă şi numai dacă un vector director al lui D este ortogonal cu cei doi vectori ai unui reper din P.**

Aplicație. Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se demonstreze că o dreaptă D cu vectorul director $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ este ortogonală planului P cu ecuația carteziană:

$$-4x + 2y - 6z + 5 = 0.$$

Un reper al planului P se obține exprimînd, cu ajutorul ecuației:

$$-4x + 2y - 6z + 5 = 0,$$

cele trei coordonate x, y, z în funcție de două dintre ele, de exemplu:

$$\begin{cases} x = 0 + 1x + 0z, \\ y = -\dfrac{5}{2} + 2x + 3z, \\ z = 0 + 0x + 1 \cdot z \end{cases}$$

Cele trei egalități precedente dovedesc că punctul $A\begin{pmatrix}0\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ și cei doi vectori $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ și $\vec{u}''\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ sînt astfel încît tripletul $(A, \vec{u}', \vec{u}'')$ este un reper al lui P.

Avem atunci:

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0,$$
$$\vec{u} \cdot \vec{u}'' = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0,$$

adică:

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \quad \text{și} \quad \vec{u} \perp \vec{u}'';$$

rezultă de aici

$$D \perp P.$$

12.3.2. Caracterizarea ortogonalității unei drepte cu un plan

● Fie D și P o dreaptă și un plan, ortogonale, incluse în spațiul euclidian E_3 (fig. 22). Dreapta vectorială $\vec{D}$, direcția lui D și planul vectorial $\vec{P}$, direcția lui P, sînt ortogonale.

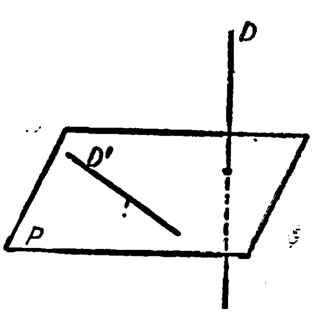


Fig. 22

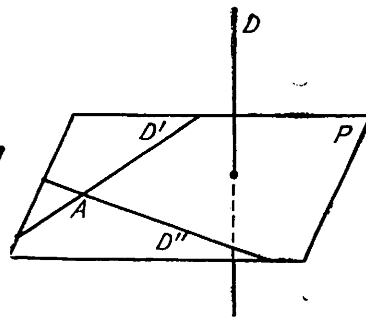


Fig. 23

Pentru orice dreaptă D', de direcție $\vec{D}'$, inclusă în P avem: $\vec{D}' \subset \vec{P}$. Cum $\vec{D}$ este ortogonală cu $\vec{P}$, orice vector din $\vec{D}$ este ortogonal oricărui vector din $\vec{P}$ deci oricărui vector din $\vec{D}'$; rezultă de aici că $\vec{D} \perp \vec{D}'$ ceea ce implică $D \perp D'$.
Se poate deci enunța:

TEOREMA/ 1. **Dacă o dreaptă D este ortogonală unui plan P, D este ortogonală oricărei drepte incluse în P.**

● Din teorema precedentă rezultă că dacă o dreaptă D este ortogonală unui plan P, D este ortogonală pe două drepte concurente incluse în P.
Reciproc, fie o dreaptă D ortogonală cu două drepte concurente D' și D'' incluse în planul P (fig. 23). Notăm cu A punctul de intersecție al dreptelor D' și D'', prin $\vec{u}'$ un vector director al lui $\vec{D}'$ și prin $\vec{u}''$ un vector director al lui D''; s-a demonstrat la nr. **7.1.5** că tripletul $(A, \vec{u}', \vec{u}'')$ este un reper al planului P. Pe de altă parte, $\vec{u}$ fiind un vector director al dreptei D ortogonalitatea dintre D și D' și aceea dintre D și D'' implică:

$$\vec{u} \perp \vec{u}' \quad \text{și} \quad \vec{u} \perp \vec{u}'';$$

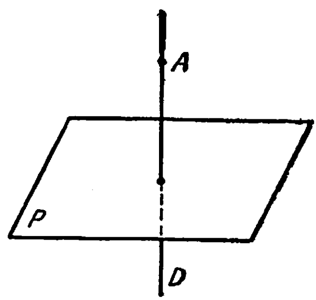
vectorul director $\vec{u}$ al dreptei D fiind ortogonal cu doi vectori $\vec{u'}$ şi $\vec{u''}$ ai unui reper al planului P, dreapta D este ortogonală cu planul P. Se poate deci enunţa :

O dreaptă D este ortogonală cu un plan P dacă şi numai dacă ea este ortogonală cu două drepte concurente incluse în P.

12.3.3. Dreapta care conţine un punct dat şi este ortogonală cu un plan dat.

Fie P un plan inclus în spaţiul euclidian E_3 şi fie A un punct aparţinînd lui E_3 (fig. 24).

Fig. 24



$\vec{P}$ fiind direcţia planului P, se ştie că există o dreaptă vectorială $\vec{D}$, şi numai una, ortogonală cu $\vec{P}$ (nr. **8.4.4**).

● Fie D dreapta de direcţie $\vec{D}$ conţinînd pe A ; urmează imediat că dreapta D este ortogonală cu planul P.

● *Reciproc*, dacă o dreaptă D' conţinînd pe A este ortogonală cu planul P, direcţia $\vec{D'}$ a lui D este o dreaptă vectorială ortogonală cu $\vec{P}$. Unicitatea dreptei vectoriale ortogonale cu $\vec{P}$ dovedeşte că $\vec{D} = \vec{D'}$, deci că dreptele D şi D' care au punctul A comun şi aceeaşi direcţie sînt egale. Se poate deci enunţa :

TEOREMĂ / **Există o dreaptă şi numai una, conţinînd un punct dat şi ortogonală cu un plan dat.**

Observaţii. — 1. Fie P un plan de direcţie $\vec{P}$. Dacă două drepte D şi D' sînt ortogonale cu planul P (fig. 25), ele au aceeaşi direcţie şi anume dreapta

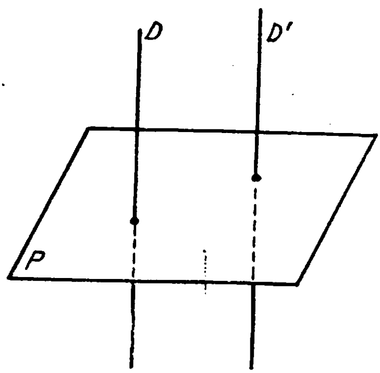


Fig. 25

vectorială ortogonală cu $\vec{P}$. Rezultă de aici că cele două drepte sînt paralele.

Două drepte ortogonale cu acelaşi plan sînt paralele.

2. Fie P un plan de direcţie $\vec{P}$ şi fie D o dreaptă ortogonală cu P. Direcţia lui D este dreapta vectorială $\vec{D}$ ortogonală cu planul $\vec{P}$. Rezultă de aici că orice vector $\vec{u}$, bază a lui $\vec{D}$, este un vector director al lui D.

● Dacă planul P este definit printr-o ecuaţie carteziană:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ al lui E_3, o ecuaţie carteziană a planului $\vec{P}$ în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

a lui E_3 este:

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

şi se ştie că o bază a lui D, deci un vector director al lui D este vectorul $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ (nr. **8.4.4**, exerciţiul II).

● Dacă planul P este definit printr-unul din reperele sale $(B, \vec{u}', \vec{u}'')$, un vector director al dreptei D se obţine determinînd un vector $\vec{u}$ nenul, ortogonal fiecăruia dintre vectorii $\vec{u}'$ şi $\vec{u}''$.

APLICAŢII. I. *Spaţiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se determine un sistem de ecuaţii parametrice ale dreptei D, care conţine punctul $A\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ şi este ortogonală cu planul P pentru care o ecuaţie carteziană este:*

$$x - 2y + 3z - 2 = 0.$$

Un vector director al dreptei D este vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$; rezultă de aici că cuplul $(A, \vec{u})$ este un reper al dreptei D, deci că avem:

$$M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \exists t \in \mathbf{R};\begin{cases} x - 1 = t & (1)\\ y + 2 = -2t & (2)\\ z = 3t & (3)\end{cases}$$

Egalităţile (1), (2) şi (3) constituie un sistem de ecuaţii parametrice al dreptei D.

II. *Spaţiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie P un plan cu reperul $(B, \vec{u}', \vec{u}'')$, vectorii $\vec{u}'$ şi $\vec{u}''$ avînd drept coordonate respective pe $\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$. Să se determine un sistem de ecuaţii parametrice al dreptei D care conţine pe $A\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ şi este ortogonală cu P.*

Un vector $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ este un vector director al lui D dacă şi numai dacă $\vec{u}$ este nenul şi ortogonal cu $\vec{u'}$ şi cu $\vec{u''}$ adică dacă şi numai dacă:

$$\text{I}\begin{cases} a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0 \text{ sau } c \neq 0 \\ a - 2b + 3c = 0 \\ 2a + b - c = 0. \end{cases}$$

Căutăm un triplet (a, b, c), soluţie a sistemului precedent I, astfel ca $a = 1$. Cuplul (b, c) este atunci soluţie a sistemului:

$$\begin{cases} -2b + 3c = -1 \\ b - c = -2; \end{cases}$$

rezolvarea sistemului II dă:

$$b = -7 \quad \text{şi} \quad c = -5.$$

Rezultă de aici că un vector director al dreptei D este vectorul $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix}1\\-7\\-5\end{pmatrix}$; un sistem de ecuaţii parametrice al dreptei D, cu un reper $(A, \vec{u})$, este deci:

$$\begin{cases} x + 1 = t \\ y = -7t \\ z - 1 = -5t. \end{cases}$$

12.3.4. Proiecţia ortogonală a unui punct pe un plan

Fie P un plan inclus în spaţiul euclidian E_3 şi fie A un punct aparţinînd lui E_3 (fig. 26).

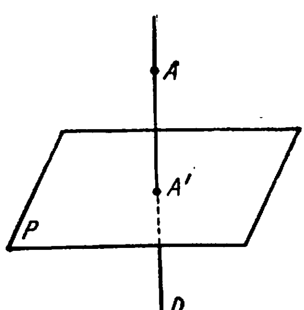


Fig. 26

Există o dreaptă D şi numai una conţinînd pe A şi ortogonală cu P şi această dreaptă D este secantă cu P într-un punct A' numit **proiecţia ortogonală a punctului A pe planul P.**

PROPRIETĂŢI

1. Urmează imediat că pentru orice punct A cu proiecţia ortogonală A' pe un plan P, avem:

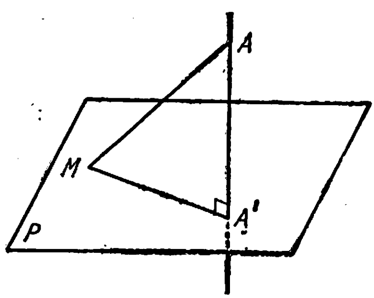
$$A \notin P \Rightarrow A \neq A',$$

$$A \in P \Rightarrow A = A'.$$

2. Fie un plan P şi un punct A' aparţinînd lui P; mulţimea punctelor A pentru care proiecţia ortogonală pe P este A' este dreapta care conţine pe A' şi este ortogonală cu P.

3. Fie un punct A cu proiecţia ortogonală A' pe un plan P (fig. 27). M fiind un punct aparţinînd lui P

Fig. 27



şi distinct de A', avem: $A'M^2 > 0$. Pe de altă parte, vectorii $\overrightarrow{A'A}$ şi $\overrightarrow{A'M}$, care aparţin respectiv unei drepte vectoriale şi unui plan vectorial ortogonale, sînt ortogonali. Rezultă din aceasta (teorema lui Pitagora):

$$AM^2 = A'A^2 + A'M^2 > A'A^2$$

ceea ce implică:

$$AM > AA'.$$

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **A și P fiind respectiv un punct și un plan ale unui spațiu euclidian E_3, distanța $d(A, M)$ a punctului A la un punct M al planului P este minimă pentru punctul A', proiecția ortogonală a lui A pe P.**

Această distanță minimă $d(A, A')$ este numită distanța punctului A la planul P și este notată:

$$d(A, P).$$

Observație. — Fie un plan P și un punct M cu proiecția ortogonală M' pe P (fig. 28); se numește

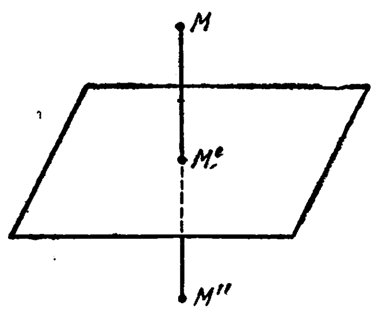


Fig. 28

simetricul punctului M în raport cu planul P, punctul M'' definit prin:

$$\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{MM'}.$$

Urmează imediat că punctul M' este mijlocul bipunctului (M, M'') și că punctul M este simetricul punctului M'' în raport cu planul P; se spune de asemenea despre punctele M și M'' că sînt **simetrice în raport cu planul P.**

APLICAŢIE. *Spaţiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie M_0 punctul de coordonate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ şi fie P planul cu ecuaţia carteziană:*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

Să se exprime coordonatele $\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}$ ale punctului H, proiecţia ortogonală a lui M_0 pe P şi distanţa de la punctul M_0 la planul P.

Punctul H este punctul de intersecţie a planului cu dreapta D care conţine pe M_0 şi este ortogonală cu P (fig. 29).

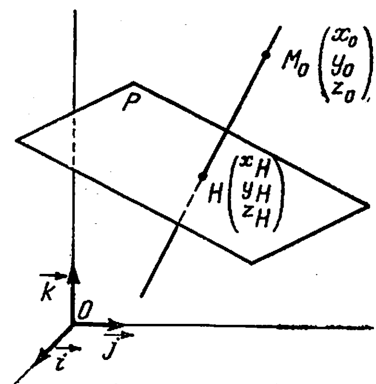


Fig. 29

Un vector director al dreptei D este vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ şi cuplul $(M_0, \vec{u})$ este un reper al acestei drepte; cum H aparţine lui D, există un număr real ρ astfel ca:

$$\overrightarrow{M_0H} = \rho\vec{u},$$

deci astfel ca:
$$x_H - x_0 = \rho\alpha$$
$$y_H - y_0 = \rho\beta$$
$$z_H - z_0 = \rho\gamma$$

Cum în plus punctul H aparţine planului P, avem:

$$\alpha(x_0 + \rho\alpha) + \beta(y_0 + \rho\beta) + \gamma(z_0 + \rho\gamma) + \delta = 0.$$

ceea ce implică:

$$\rho = -\frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

Coordonatele punctului H sînt:

$$\boxed{\begin{aligned} x_H &= x_0 - \frac{\alpha(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ y_H &= y_0 - \frac{\beta(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \\ z_H &= z_0 - \frac{\gamma(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \end{aligned}}$$

Pe de altă parte, egalitatea $\overrightarrow{M_0H} = \rho\vec{u}$ conduce la:

$$\|\overrightarrow{M_0H}\| = |\rho|\,\|\vec{u}\| = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \times \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

adică:

$$d(M_0, H) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Distanța de la punctul M_0 la planul P nefiind alta decît distanța de la punctul M_0 la punctul H, se obține în cele din urmă:

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.}$$

12.3.5. Plan care conține un punct dat și este ortogonal cu o dreaptă dată

Fie D o dreaptă inclusă în spațiul euclidian E_3 și fie A un punct aparținînd lui E_3 (fig. 30).

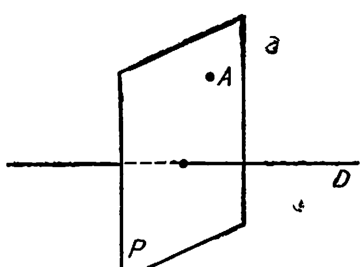


Fig. 30

$\vec{D}$ fiind direcţia dreptei D, se ştie că există un plan vectorial $\vec{P}$, şi numai unul, ortogonal cu dreapta vectorială $\vec{D}$ (nr. **3.4.5**).

● Fie P un plan de direcţie P care conţine pe A. Urmează imediat că planul P este ortogonal dreptei D.

● *Reciproc*, dacă planul P' care conţine pe A este ortogonal cu dreapta D, direcţia s $\vec{P}'$ este un plan vectorial ortogonal cu $\vec{D}$. Unicitatea planului vectorial $\vec{D}$ dovedeşte că $\vec{P} = \vec{P}'$, deci că planele P şi P' care au comun punctul A şi aceeaşi direcţie sînt egale. Se poate deci demonstra:

TEOREMA/ 1 **Există un plan, şi numai unul, care conţine un punct dat şi este ortogonal cu o dreaptă dată.**

Observaţii. — **1.** Fie P şi P' două plane ortogonale cu o dreaptă D (fig. 31); dacă P şi P' ar fi secante,

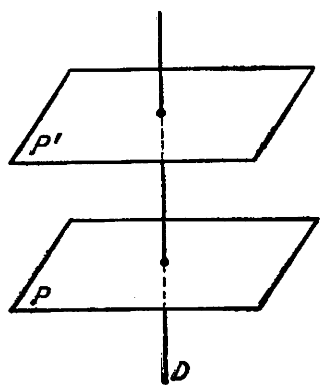


Fig. 31

orice punct al dreptei lor de intersecţie ar aparţine la două plane distincte şi ortogonale cu D, ceea ce este contradictoriu.

Rezultă de aici că planele P şi P' nu sînt secante deci că ele sînt paralele.

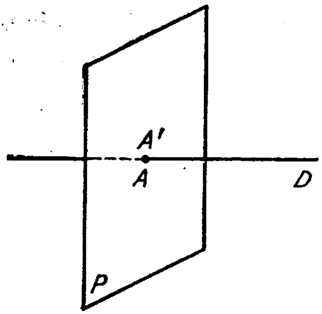


Fig. 32

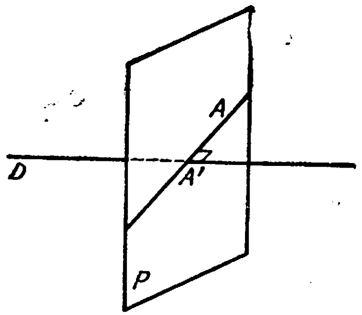


Fig. 33

Două plane ortogonale aceleiaşi drepte sînt paralele.

2. Fie un punct A şi o dreaptă D şi fie P planul care conţine pe A şi este ortogonal cu D.
Se ştie că D şi P sînt secante. Desemnăm prin A' punctul lor de intersecţie.
● Dacă A aparţine lui D (fig. 32), urmează imediat că $A' = A$, deci că A' este proiecţia ortogonală a lui A pe D (nr. **12.2.4**).
● Dacă A nu aparţine lui D (fig. 33), dreapta AA' este inclusă în planul P' care conţine pe A şi pe D. Pe de altă parte, dreapta D fiind ortogonală planului P, este ortogonală oricărei drepte incluse în P, deci în particular dreptei AA'. Rezultă de aici că dreapta AA' este dreapta inclusă în P' care conţine pe A şi este ortogonală cu D, deci că punctul A' este proiecţia ortogonală a punctului A pe dreapta D (nr. **12.2.4**).
Se poate deci enunţa:

TEOREMA/ 2. **Proiecţia ortogonală a unui punct A pe o dreaptă D este punctul de intersecţie al dreptei D cu planul care conţine pe A şi este ortogonal cu D.**

3. Fie A şi B două puncte distincte din spaţiul E_3.

Se numeşte plan mediator al segmentului $[A, B]$, planul care conţine mijlocul lui $[A, B]$ şi este ortogonal cu dreapta AB.

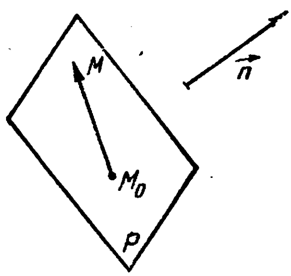
12.3.6. Planul definit de un punct şi de un vector normal nenul

Fie P un plan de direcţie $\vec{P}$ inclus în spaţiul euclidian E_3. Se numeşte **vector normal** lui P orice vector care aparţine dreptei vectoriale $\vec{D}$, ortogonală cu planul vectorial $\vec{P}$.

Fie M_0 un punct al lui P şi fie $\vec{n}$ un *vector nenul, normal* lui P (fig. 34);
avem:

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in \vec{P}. \qquad (1)$$

Fig. 34



Pe de altă parte, vectorul nenul $\vec{n}$ este o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}$ ortogonală cu $\vec{P}$; prin urmare (nr. 8.4.5, Teorema 2):

$$\vec{u} \in \vec{P} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

Din echivalenţele (1) şi (2) rezultă atunci că:

$$\boxed{M \in P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.}$$

Echivalența precedentă dovedește că **un plan P este determinat prin cunoașterea unuia dintre punctele sale și a unuia dintre vectorii nenuli, normali acestuia.**

Consecințe. — **1** Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie P planul care conține punctul $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ și pentru care $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ este un vector normal, nenul (fig. 35). M fiind un punct

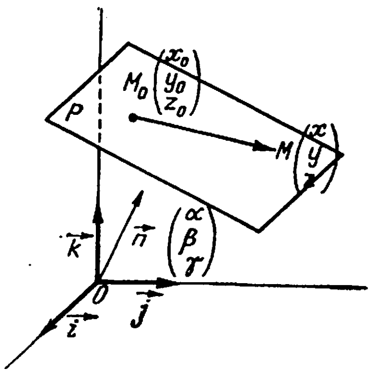


Fig. 35

de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, vectorul $\overrightarrow{M_0M}$ are drept coordonate: $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$.

Rezultă de aici că

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Relația :

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0,$$

care este verificată de coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ale unui punct M din spațiul E_3 dacă și numai dacă acest punct aparține planului P, este o ecuație carteziană a lui P.
Se poate deci enunța:

TEOREMA/ 1. **Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat, o ecuație carteziană a planului P, care conține punctul $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ și care admite ca vector normal vectorul nenul $\vec{n}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, este:**

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

2. Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie P planul cu ecuația carteziană:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

O ecuație carteziană a planului vectorial $\vec{P}$, direcția lui P, în baza ortonormată $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este atunci:

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

și vectorul $\vec{n}$ de coordonate $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ este o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}$ ortogonală cu $\vec{P}$ (nr. **8.4.4.** Exercițiul II). Rezultă de aici că $\vec{n}$ este un vector nenul, normal planului P.
Se poate deci enunța:

TEOREMA/ 2. **Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat, fie un plan P cu ecuația carteziană:**

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0;$$

vectorul de coordonate $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ **este un vector nenul, normal lui P.**

APLICAȚII. I. *Spațiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie A, B și C trei puncte de coordonate respective:*

$$\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\ 0\\ -3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$$

Să se determine o ecuație carteziană a planului P care conține pe A și este ortogonal dreptei BC.

Vectorul $\overrightarrow{BC}$ pentru care coordonatele sînt $\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ este un vector director al dreptei BC; cum dreapta BC este ortogonală cu planul P, vectorul $\overrightarrow{BC}$ este un vector nenul, normal lui P. Rezultă de aici că:

$$M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-1) + 2(y+2) + 1(z+1) = 0,$$

ceea ce dovedește că o ecuație carteziană a planului P este

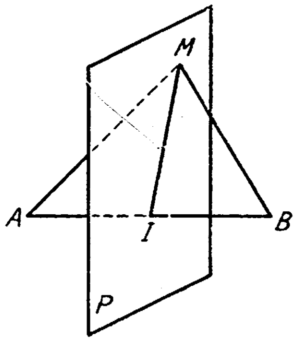
$$-3x + 2y + z + \gamma = 0.$$

II. *Fie A și B două puncte distincte din spațiul euclidian E_3. Să se demonstreze că planul mediator P al segmentului $[A, B]$ este mulțimea punctelor M din E_3 egal depărtate de A și de B (fig. 36).*

● Planul P conține punctul I, mijlocul lui $[A, B]$. Vectorul nenul $\overrightarrow{AB}$ este un vector director al dreptei AB; cum dreapta AB este ortogonală cu planul P, vectorul $\overrightarrow{AB}$ este un vector nenul, normal lui P. Rezultă de aici că:

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \qquad (1)$$

Fig. 36



● Pentru orice punct M din spaţiul E_3, avem:

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA})^2 - (\overrightarrow{MB})^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) =$$
$$= (2\overrightarrow{MI})(\overrightarrow{BA}) = 2\,\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Rezultă de aici că:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \tag{2}$$

Echivalenţele (1) şi (2) dovedesc atunci că:

$$M \in P \Leftrightarrow MA = MB,$$

adică planul mediator al segmentului $[A, B]$ este mulţimea punctelor M egal depărtate de A şi de B.

EXERCIŢII

12.28. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie P planul cu ecuaţia $6x - 3y - 5z - 6 = 0$ şi fie A punctul de coordonate $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1° Să se scrie un sistem de ecuaţii parametrice ale dreptei D care conţine punctul A şi este ortogonală cu planul P.

2° Să se calculeze coordonatele punctului de intersecţie A' a dreptei D cu planul P.

3° Să se deducă din punctul 2° distanţa de la punctul A la planul P. Să se regăsească direct acest rezultat.

4° Să se calculeze coordonatele punctului A'', simetricul punctului A în raport cu planul P.

12.29. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent cu:

a) $P: 3x + 4z - 12 = 0$; $A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $P: x+y+z-8=0;\ A\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}.$

c) $P: 2x-y=0;\ A\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}.$

12.30. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Fie A şi B punctele de coordonate:

$$A\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că mulţimea punctelor M, astfel ca:

$$MA^2 - MB^2 = 12,$$

este un plan ortogonal cu dreapta AB. Să se calculeze coordonatele punctului de intersecţie a acestui plan cu dreapta AB.

12.31. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D dreapta care conţine punctul $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, şi fie punctul $B\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

1° Să se scrie o ecuaţie carteziană a planului P care conţine pe B şi este ortogonal cu D.
2° Să se calculeze coordonatele punctului de intersecţie a dreptei D cu planul P.
3° Să se deducă din punctul 2° distanţa de la punctul B la dreapta D.

12.32. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent cu:

a) $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$

b) $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$

c) $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}, \quad \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$

12.33. Fie P şi P' două plane strict paralele, incluse în spaţiul afin euclidian E_3.

Raportînd E_3 la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ convenabil, să se demonstreze că mulţimea punctelor egal depărtate de P şi P' este un plan π, paralel cu P şi cu P'.

12.34 Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie punctele $A\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$ şi $C\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$ unde a, b, c, sînt trei numere reale astfel încît:

$$abc \neq 0.$$

1° Să se scrie o ecuaţie carteziană a planului ABC.
2° Să se calculeze distanţa h de la punctul O la planul ABC.
3° Să se verifice că: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

12.35. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D dreapta care conţine punctul O şi pentru care un vector director este $\vec{k}$ şi fie punctul $A\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Să se demonstreze că există două plane care conţin dreapta D şi pentru care distanţele la punctul A sînt egale fiecare cu 1.

12.36. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie P şi P' două plane cu ecuaţiile carteziene respective:

$$x - 2y + 5z - 6 = 0,$$
$$x - 2y + 5z - 10 = 0.$$

1° Să se demonstreze că planele P şi P' sînt strict paralele.
2° Să se determine mulţimea punctelor egal depărtate de P şi de P'.

12.37. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se dau punctele:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}.$$

1° Să se scrie o ecuaţie a planului ABC.
2° Să se calculeze coordonatele proiecţiei ortogonale H a punctului P pe planul ABC.
3° Să se demonstreze că punctul H este ortocentrul triunghiului ABC.

12.38. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se determine numărul real m astfel încît distanţa de la punctul O la planul P cu ecuaţia:

$$mx + \sqrt{3}(m - 1)y + 3(m + 1)z - 4(3 + m) = 0,$$

să fie egală cu 4.

12.39. Spaţiul afin euclidian E_3, este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie P planul cu ecuaţia:

$$x + y + z = 0,$$

şi fie F mulţimea punctelor M din E_3, astfel ca:

$$d(M, O) = \sqrt{3}\, d(M, P).$$

1° Să se demonstreze că un punct $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ aparţine lui F dacă şi numai dacă:

$$xy + yz + zx = 0.$$

2° Să se demonstreze că pentru orice punct A care aparţine lui F şi diferit de O, dreapta OA este inclusă în F.

12.40. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Se dau punctele:

$$A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}-1\\b\\0\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}-1\\c\\0\end{pmatrix}, \quad D\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},$$

unde b şi c sînt două numere reale distincte.

1° Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{AD}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sînt ortogonali.

2° Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BD}$ sînt ortogonali dacă şi numai dacă numerele b şi c verifică o relaţie care se va determina. Se presupune în continuarea problemei că această relaţie este verificată.

3° Să se demonstreze că vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sînt ortogonali.

4° Fie Δ_A dreapta care conţine punctul A şi este ortogonală cu planul BCD, fie Δ_B dreapta care conţine punctul B şi este ortogonală cu planul ACD, fie Δ_C dreapta care conţine punctul C şi este ortogonală cu planul ABD şi fie Δ_D dreapta care conţine punctul D şi este ortogonală cu planul ABC.
Să se demonstreze că cele patru drepte Δ_A, Δ_B, Δ_C şi Δ_D sînt concurente.

12.41. Fie A şi B două puncte distincte din spaţiul afin euclidian E_3 şi fie k un număr real. Se desemnează prin F mulţimea punctelor M din E_3, astfel ca:

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

1° Punctul O fiind mijlocul segmentului $[A, B]$ să se demonstreze că:

$$\forall M \in E_3 \qquad MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2° Să se demonstreze că există un punct M_0, şi numai unul, care aparţine mulţimii F şi dreptei AB.

3° Să se demonstreze că:

$$M \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Să se deducă de aici că F este planul care conţine punctul M_0 şi este ortogonal cu dreapta AB.

4° Raportînd E_3 la un reper ortonormat convenabil, să se determine pe cale analitică mulţimea F.

12.42. Fie un plan P, un punct A a cărui proiecție ortogonală pe planul P este punctul A', o dreaptă D inclusă în P și un punct B care aparține lui D.
Să se demonstreze că punctul B este proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta D dacă și numai dacă punctul B este proiecția ortogonală a punctului A' pe dreapta D.

12.43. Fie D și D' două drepte concurente și fie P și P' două plane respectiv ortogonale cu D și cu D'. Să se demonstreze că planele P și P' sînt secante și că dreapta lor de intersecție este ortogonală cu planul care conține pe D și pe D'.

12.44. Spațiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie a un număr real strict pozitiv și fie B, C, D, A', C' și I punctele respective definite prin:

$$\overrightarrow{AB} = a\vec{i}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = a\vec{j}, \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = a\vec{k}, \quad \overrightarrow{A'I} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A'C}.$$

Să se demonstreze că planul care conține pe I și este ortogonal cu dreapta $A'C$ conține punctele C', B și D.

12.45. Spațiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D dreapta cu reperul $(O, \vec{j})$ și fie P planul cu reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie a un număr real strict pozitiv și fie A, B și I trei puncte definite respectiv prin:

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{k}, \quad OB = a\vec{i}, \quad \vec{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$$

1° La fiecare punct M al dreptei D, se asociază dreapta D_M, inclusă în planul P, conținînd pe M și ortogonală cu dreapta IM. Să se demonstreze că punctele A și B sînt echidistante de dreapta D_M.
2° Fie Δ o dreaptă inclusă în planul P și egal depărtată de A și de B. Să se demonstreze că există un punct M, și numai unul, care aparține lui Δ astfel ca $\Delta = D_M$.

$\overline{\text{D}}$ 12.4. PLANE PERPENDICULARE

12.4.1. Definiție

Fie D și D' două drepte ortogonale incluse în spațiul euclidian E_3, fie P un plan ortogonal cu D și fie P' un plan ortogonal cu D' (fig. 37); Δ și Δ' fiind două drepte respectiv ortogonale cu P și cu P', avem:

$$D \perp P \text{ și } \Delta \perp P \Rightarrow D // \Delta$$

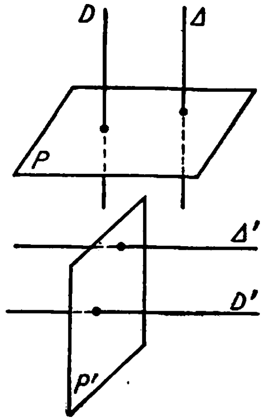


Fig. 37

$$D' \perp P' \text{ şi } \Delta' \perp P' \Rightarrow D' // \Delta'.$$

Cum dreptele D şi D' sînt ortogonale, şi dreptele Δ şi Δ' care sînt respectiv paralele cu primele sînt ortogonale. Rezultă de aici că orice dreaptă ortogonală cu P este ortogonală cu orice dreaptă ortogonală cu P'.

DEFINIŢIE / **Se spune că un plan P este perpendicular pe un plan P' şi se scrie $P \perp P'$ dacă orice dreaptă ortogonală cu P este ortogonală cu orice dreaptă ortogonală cu P'.**

Rezultă imediat din această definiţie că, dacă planul P este perpendicular pe planul P', atunci P' este perpendicular pe P; se spune de aceea că **planele P şi P' sînt perpendiculare.**
Studiul care a precedat această definiţie dovedeşte existenţa planelor perpendiculare şi permite să se enunţe:

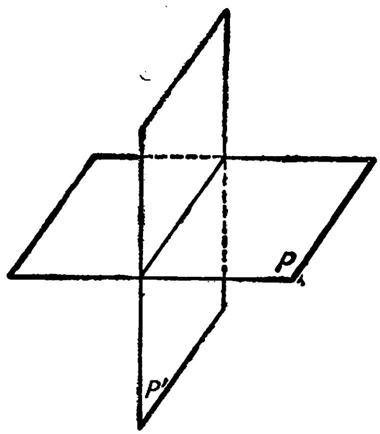
TEOREMĂ / **Două plane sînt perpendiculare dacă şi numai dacă o dreaptă ortogonală cu unul este ortogonală cu o dreaptă ortogonală celuilalt.**

Consecințe. 1. Fie P și P' două plane perpendiculare. Dacă P și P' ar fi paralele, orice dreaptă D ortogonală cu P ar fi ortogonală cu P'. Cum P și P' sînt perpendiculare, dreapta D ar fi atunci ortogonală ei însăși, ceea ce este imposibil; planele P și P' care nu sînt paralele sînt așadar secante.

Două plane perpendiculare sînt secante.

Două astfel de plane sînt reprezentate grafic ca în figura 38.

Fig. 38



2. Fie P și P' două plane perpendiculare. Dreapta D, intersecția acestor două plane este inclusă în P și în P'. Cum o dreaptă nu este ortogonală ei însăși, rezultă:

TEOREMĂ / **Dacă două plane sînt perpendiculare, oricare ar fi dreapta inclusă într-unul nu este ortogonala tuturor dreptelor incluse în celălalt.**

Observație. Fie $\vec{P}$ și $\vec{P}'$ două plane vectoriale incluse într-un spațiu vectorial euclidian $\vec{E}_3$ de dimensiune 3. Există cel puțin un vector nenul aparținînd lui $\vec{P}$

şi lui $\vec{P}'$. Cum un vector nenul nu este ortogonal lui însuşi, orice vector aparţinînd lui $\vec{P}$ nu este ortogonal oricărui vector aparţinînd lui $\vec{P}'$.

Acest rezultat se exprimă spunînd că **două plane vectoriale ale spaţiului vectorial euclidian E_3 nu sînt ortogonale.**

Rezultă de aici că două plane oarecare P şi P' incluse într-un spaţiu euclidian E_3 nu au direcţii ortogonale. Se va evita deci să se spună că două plane perpendiculare sînt ortogonale.

APLICAŢIE. *Spaţiul euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie două plane P şi P' de ecuaţii carteziene respective:*

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \text{ şi } \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0.$$

Să se demonstreze echivalenţa:

$$P \perp P' \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Fie D o dreaptă ortogonală cu planul P; un vector director al dreptei D este vectorul $\vec{u}$ de coordonate $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ (nr. 12.3.3).

De asemenea, D' fiind o dreaptă ortogonală cu planul P', un vector director al dreptei D' este vectorul $\vec{u}'$ de coordonate $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$.

Avem: $D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

Cum în plus:

$$P \perp P' \Leftrightarrow D \perp D',$$

se obţine în cele din urmă:

$$\boxed{P \perp P' \Leftrightarrow \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.}$$

12.4.2. Caracterizarea a două plane perpendiculare

Fie P şi P' două plane de direcţii respective $\vec{P}$ şi $\vec{P}'$, fie D o dreaptă de direcţie $\vec{D}$ ortogonală cu P şi fie $\vec{D}'$ o dreaptă de direcţie D' ortogonală cu P' (fig. 39) ;

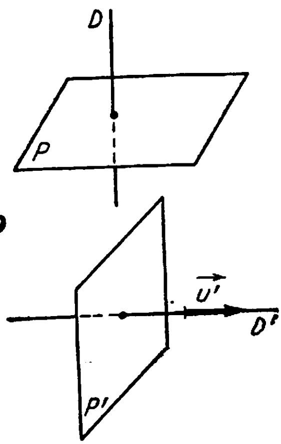


Fig. 39

avem :

$$\vec{D} \perp \vec{P} \quad \text{şi} \quad \vec{D}' \perp \vec{P}'.$$

Pe de altă parte, $\vec{u}'$ fiind o bază a dreptei vectoriale $\vec{D}'$ reamintim că (nr. **8.4.5**) : $\vec{u} \in \vec{P}' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$.

● Dacă planul P este perpendicular pe planul P', dreapta D este ortogonală dreptei D', ceea ce implică :

$$\vec{D} \perp \vec{D}';$$

avem atunci :

$$\vec{u} \in \vec{D} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$$
$$\Rightarrow \vec{u} \in \vec{P}'.$$

ceea ce dovedeşte că:

$$\vec{D} \subset \vec{P'},$$

deci că:

$$D \parallel P'.$$

Dacă două plane sînt perpendiculare, orice dreaptă ortogonală unuia este paralelă cu celălalt.

● *Reciproc*, dacă dreapta D este paralelă cu planul P' avem:

$$\vec{D} \subset \vec{P'}.$$

Orice vector din $\vec{D}$ este atunci un vector din $\vec{P'}$ şi este deci ortogonal cu orice vector din $\vec{D'}$; rezultă de aici:

$$\vec{D} \perp \vec{D'},$$

ceea ce implică:

$$D \perp D'$$

şi în consecinţă:

$$P \lrcorner P'.$$

Prin urmare:

$$D \parallel P' \Rightarrow P \lrcorner P'.$$

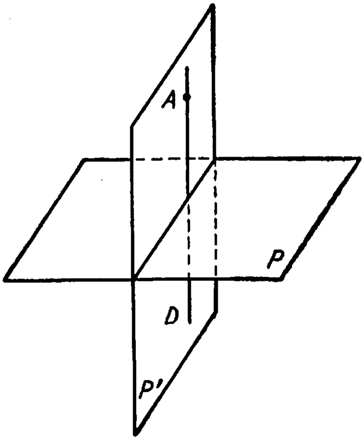
Studiul precedent permite să se enunţe:

TEOREMA 1. / **Două plane sînt perpendiculare dacă şi numai dacă o dreaptă ortogonală unuia este paralelă cu celălalt.**

Consecinţe. — **1** Fie P şi P' două plane perpendiculare (fig. 40); A fiind un punct aparţinînd lui P', dreapta D care conţine pe A şi este ortogonală cu P este paralelă cu P'. Cum în plus D şi P' au punctul A comun, D este inclusă în P'.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA 2. / **Dacă două plane P şi P' sînt perpendiculare, orice dreaptă care conţine un**

Fig. 40

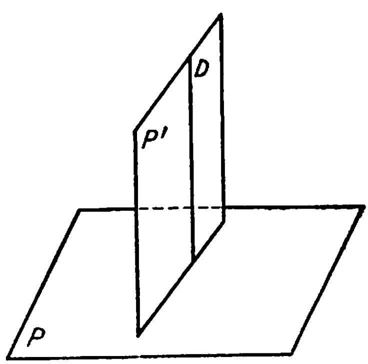


punct din P' şi este ortogonală cu P este inclusă în P'.

2. Din teorema 2 (precedentă) rezultă că dacă două plane sînt perpendiculare, unul dintre ele conţine o dreaptă ortogonală celuilalt.

Reciproc, fie P şi P' două plane astfel ca unul dintre ele, P' de exemplu, să conţină o dreaptă D ortogonală celuilalt (fig. 41). Dreapta D, ortogonală cu P, este

Fig. 41



inclusă în P', deci este paralelă cu P'. Rezultă atunci din teorema 1 (precedentă) că P şi P' sînt perpendiculare. Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 3. **Două plane sînt perpendiculare dacă şi numai dacă unul dintre ele conţine o dreaptă ortogonală celuilalt.**

12.4.3. Proprietăţi ale planelor perpendiculare

1. Fie P' şi P'' două plane secante perpendiculare aceluiaşi plan P (fig. 42).

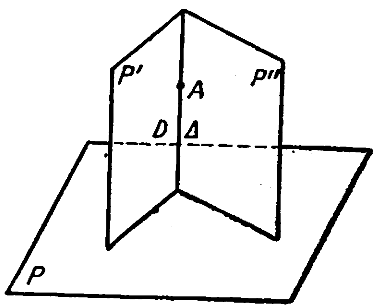


Fig. 42

A fiind un punct care aparţine dreptei D de intersecţie a planelor P' şi P'', fie Δ dreapta care conţine pe A şi ortogonală cu planul P. Cum P şi P' sînt perpendiculare, Δ este inclusă în planul P' (nr. **12.4.2**, Teorema 2); de asemenea dreapta Δ este inclusă în planul P''. Rezultă de aici că $D = \Delta$, deci că dreapta D este ortogonală cu planul P. Se poate enunţa:

TEOREMA / 1. **Dacă două plane secante sînt perpendiculare unui plan P, dreapta lor de intersecţie este ortogonală cu planul P.**

2. Fie P şi P' două plane perpendiculare şi fie Q un plan ortogonal dreptei lor de intersecţie Δ (fig. 43). Planul P, care conţine dreapta Δ ortogonală cu planul Q, este perpendicular pe Q (nr. **12.4.2**, Teorema 3). De asemenea, planul P' este perpendicular pe planul Q.

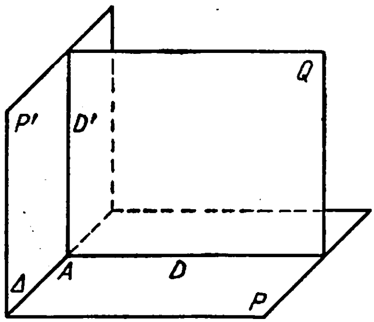


Fig. 43

Fie D dreapta de intersecţie a planelor P şi Q şi fie D' cea corespunzătoare planelor P' şi Q.
Planele secante P şi Q sînt perpendiculare pe P'; rezultă (Teorema 1) că dreapta lor de intersecţie este ortogonală cu planul P'. Prin urmare, dreapta D este ortogonală cu dreapta D', inclusă în P'. Remarcăm că dreptele D şi D', care sînt ortogonale şi coplanare, sînt secante într-un punct A care aparţine lui P, lui P' şi deci dreptei $\Delta = P \cap P'$. Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 2. **Dacă două plane P şi P' sînt perpendiculare, orice plan ortogonal dreptei lor de intersecţie Δ le taie după două drepte ortogonale şi secante într-un punct al lui Δ.**

3. Fie un plan P şi o dreaptă D.
● Dacă dreapta D este ortogonală cu planul P, orice plan care conţine pe D este perpendicular pe P.
● Dacă dreapta D nu este ortogonală cu planul P, fie A un punct care aparţine lui D şi fie D' dreapta care conţine pe A şi ortogonală cu P (fig. 44).
Planul P' care conţine cele două drepte concurente D şi D' conţine dreapta D' ortogonală cu P; P' este deci perpendicular pe P.
Reciproc, fie P'' un plan care conţine pe D şi perpendicular pe P. Dreapta D' care conţine punctul A din P'' şi care este ortogonală cu P este inclusă în P''.

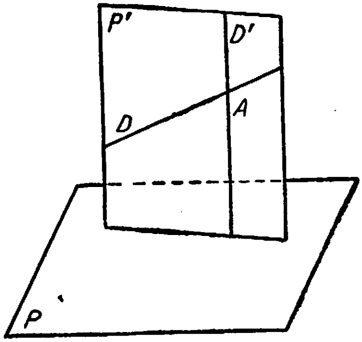


Fig. 44

Rezultă că P'' conţine pe D şi D'' deci că $P'' = P'$. Se poate deci enunţa:

TEOREMA 3. / **Fie un plan P şi o dreaptă D neortogonală cu P; există un plan P', şi numai unul, care conţine pe D şi perpendicular pe P.**

EXERCIŢII

12.46. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie A, B, C trei puncte de coordonate:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}.$$

1° Să se scrie o ecuaţie a planului P care conţine dreapta OA şi perpendicular pe planul BOC. Să se scrie de asemenea o ecuaţie a planului P' care conţine dreapta OB şi este perpendicular pe planul COA, apoi o ecuaţia a planului P'' care conţine dreapta OC şi este perpendicular pe planul AOB.

2° Să se demonstreze că intersecţia $P \cap P' \cap P''$ este o dreaptă D.

12.47. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D dreapta cu reperul $(O, \vec{i})$ şi fie D' dreapta care conţine pe O şi pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Care este mulţimea punctelor M de coordonate $\begin{pmatrix}4t\\t\\t'\end{pmatrix}$ astfel ca planul care conţine M şi D să fie perpendicular pe planul care conţine M şi D'?

12.48. Fie trei puncte A, B, C necoliniare şi fie P_A, P_B, P_C planele mediatoare respective ale segmentelor $[B, C]$, $[C, A]$ şi $[A, B]$.
1° Să se demonstreze că fiecare dintre planele P_A, P_B şi P_C este perpendicular pe planul P care conţine punctele A, B, C.
2° Să se demonstreze că planele P_A şi P_B sînt secante după o dreaptă Δ ortogonală cu P şi că Δ este inclusă în P_C.
3° M fiind un punct din spaţiu, să se demonstreze că:

$$MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta.$$

12.49. Fie D şi D' două drepte strict paralele din spaţiul euclidian E_3. Să se demonstreze că mulţimea punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două drepte D şi D' este un plan perpendicular pe planul care conţine aceste două drepte.

12.50. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie a un număr real nenul şi fie D şi D' dreptele care conţin punctul O şi cu vectorii directori respectivi:

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix} \text{ şi } \vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-a\\0\end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că mulţimea punctelor din E_3 egal depărtate de D şi de D' este reuniunea a două plane perpendiculare între ele şi perpendiculare pe planul care conţine pe D şi D'.

12.51. Fie P şi P' două plane perpendiculare secante după o dreaptă D.
1° Să se demonstreze că pentru orice punct din spaţiu avem:

$$d^2(M, D) = d^2(M, P) + d^2(M, P').$$

2° Spaţiul afin euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie $x + y - z = 0$ o ecuaţie a lui P şi fie $2x - y + z = 0$ o ecuaţie a lui P'.
Să se verifice că planele P şi P' sînt perpendiculare şi să se exprime distanţa de la punctul $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ la dreapta D de intersecţie a celor două plane P şi P'.

12.52. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D o dreaptă cu reperul $(A, \vec{u})$ şi fie P un plan definit printr-o ecuaţie carteziană. Să se determine o ecuaţie carteziană a planului P' care conţine dreapta D şi este perpendicular pe planul P în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $P: 2x - y + z = 0.$

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $P: x + 2y + z = 0$.

c) $A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $P: 2x + y - z + 3 = 0$.

12.53. Fie P şi P' două plane secante incluse în spaţiul euclidian E_3. Să se demonstreze că mulţimea punctelor din spaţiu egal depărtate de P şi de P' este reuniunea a două plane perpendiculare şi care conţine dreapta de intersecţie a lui P cu P'. (Se va putea alege un reper ortonormat convenabil şi trata problema pe cale analitică).

12.54. Fie P un plan din spaţiul E_3, fie A şi B două puncte distincte care aparţin lui E_3 şi fie I mijlocul segmentului $[A, B]$. Să se demonstreze echivalenţa:

$$[d(A, P) = d(B, P)] \Leftrightarrow [I \in P \text{ sau (dreapta } AB \parallel P)].$$

PROBLEME

12.55. Spaţiul afin euclidian E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D dreapta care conţine punctul $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ şi fie D' dreapta care conţine punctul $A'\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

1° M fiind un punct de coordonate $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, să se calculeze în funcţie de x, y, z distanţele $d(M, D)$ şi $d(M, D')$.

2° Fie S mulţimea punctelor $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ astfel încît: $d(M, D) = d(M, D')$. Să se demonstreze că: $M \in S \Leftrightarrow xy = 2z$.

3° Fie M_0 un punct care aparţine lui S. Să se demonstreze că există două drepte care conţin pe M_0 şi incluse în S.

12.56. Fie P un plan închis în spaţiul afin euclidian E_3 şi fie A şi B două puncte care aparţin lui E_3.

1° Să se demonstreze că există un punct I şi numai unul astfel ca:

$$2\,\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

2° Să se demonstreze că, pentru orice punct din spaţiu E_3 avem:

$$2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$$

$$2\,MA^2 + MB^2 = 3MI^2 + \frac{2}{3}\,AB^2.$$

3° Fie $\mathfrak{f}$ aplicaţia lui P şi $\mathbf{R}^+$ definită prin:

$$\forall M \in P \quad \mathfrak{f}(M) = 2MA^2 + MB^2$$

şi fie I' proiecţia ortogonală a lui I pe planul P. Să se demonstreze că:

$$\forall M \in P - \{I'\} \quad \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(I').$$

4° Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie $x - y + z - 2 = 0$
o ecuaţie carteziană a planului P şi fie punctele:

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze pe cale analitică că există un punct I' şi numai unul, care aparţine lui P şi astfel încît:

$$\forall M \in P - \{I'\} \quad \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(I').$$

Să se verifice că punctul I' este proiecţia ortogonală a punctului I pe planul P şi să se calculeze $\mathfrak{f}(I')$.

12.57. Fie A, B, C trei puncte din spaţiul afin euclidian E_3.

1° Să se demonstreze că există un punct G, şi numai unul, astfel ca: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2° Să se demonstreze că există un punct I, şi numai unul astfel ca: $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

3° Să se demonstreze că pentru orice punct M din spaţiul E_3 avem:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}; \quad 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}.$$

4° Care este mulţimea punctelor M astfel ca:

$$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| ?$$

5° Să se studieze pe cale analitică punctul 4° în cazul în care spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, punctele A, B, C au coordonatele:

$$A\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

12.58. Spaţiul afin euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fie P planul pentru care un reper este $(O, \vec{i}, \vec{j})$ şi fie D dreapta care conţine punctul O şi pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Fie S mulţimea punctelor M din spaţiul E_3 astfel ca:

$$d(M, P) = d(M, D).$$

1° Să se exprime numerele $d(M, P)$ şi $d(M, D)$ în funcţie de coordonatele x, y, z ale punctului M.
2° Să se caracterizeze analitic mulţimea S.
3° Fie M_0 un punct diferit de O şi aparţinînd lui S. Să se demonstreze că dreapta OM_0 este inclusă în S.

12.59. Spaţiul afin euclidian E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, se dau punctele:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad C\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

1° Să se determine planele P care conţin punctele O şi A şi astfel ca:

$$d(B, P) = d(C, P).$$

2° Să se determine planele P care conţin punctul O şi astfel ca:

$$d(A, P) = d(B, P) = d(C, P)$$

3° Să se determine planele P astfel ca:

$$d(O, P) = d(A, P) = d(B, P) = d(C, P).$$

12.60. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare care aparţin spaţiului afin euclidian E_3.

1° Să se demonstreze că: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
Să se deducă de aici că dacă cele două drepte pentru două din cele trei perechi:
{dreapta AB, dreapta CD}, {dreapta AC, dreapta DB}, {dreapta AD, dreapta BC} sînt ortogonale, acelaşi lucru are loc pentru cele două drepte din a treia pereche.
2° Să se demonstreze că dacă cele două drepte din fiecare pereche, din cele trei perechi de la punctul 1° sînt ortogonale, proiecţia ortogonală A' a punctului A pe planul BCD este ortocentrul triunghiului BCD. Să se studieze reciproca.
3° Se presupune încă faptul că cele două drepte ale fiecărei perechi, din cele trei de la punctul 1°, sînt ortogonale.
Se desemnează prin Δ_A dreapta care conţine punctul A şi ortogonală cu planul BCD, prin Δ_B dreapta care conţine punctul B şi ortogonală cu planul CDA, prin Δ_C dreapta care conţine punctul C şi ortogonală cu planul DAB, prin Δ_D dreapta care conţine punctul D şi ortogonală cu planul ABC. Să se demonstreze că dreptele Δ_A, Δ_B, Δ_C şi Δ_D sînt concurente.

D 13 CERCUL

13.1. ECUAȚIA CARTEZIANĂ A UNUI CERC

13.1.1. Generalități

Notă. *In acest capitol P desemnează un plan afin euclidian.*

Fie Ω un punct care aparține planului P și fie r un număr real strict pozitiv.

DEFINIȚIA / 1. **Se numește cerc de centru Ω și de rază r mulțimea punctelor M din planul P pentru care**

$$d(\Omega, M) = r.$$

Cercul de centru Ω și rază r poate fi notat $C(\Omega, r)$ sau, mai simplu, $C, C', \Gamma, \ldots$

El este reprezentat grafic după cum indică figura 1.

DEFINIȚIA / 2. **Se numește interiorul (respectiv exteriorul) cercului $C(\Omega, r)$ mulțimea punctelor M din planul P pentru care $d(\Omega, M) < r$ (respectiv $d(\Omega, M) > r$).**

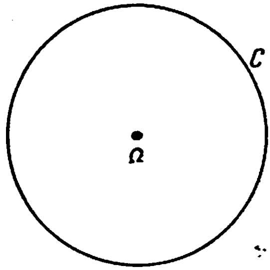


Fig. 1

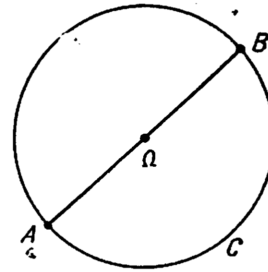


Fig. 2

Interiorul cercului $C(\Omega, r)$ este de asemenea numit **disc deschis** de centru Ω şi de rază r şi poate fi notat $D(\Omega, r)$.

Reuniunea $C(\Omega, r) \cup D(\Omega, r)$ este numită **disc închis** de centru şi de rază r. Acest disc închis este mulţimea punctelor M din planul P pentru care:

$$d(\Omega, M) \leq r.$$

DEFINIŢIA / 3. **Se numeşte coardă a unui cerc orice segment pentru care extremităţile aparţin acestui cerc. Se spune că o coardă este un diametru dacă ea conţine centrul cercului.**

Atunci cînd coarda $[A, B]$ este un diametru al cercului C se spune de asemenea că punctele A şi B sînt două puncte **diametral opuse** ale cercului C (fig. 2).

Fiind date două puncte distincte A şi B ale planului P, există un cerc, şi numai unul, inclus în P şi care admite segmentul $[A, B]$ ca diametru. Centrul acestui cerc este mijlocul lui $[A, B]$ şi raza sa este $\frac{1}{2}\, d(A, B)$ (fig. 2).

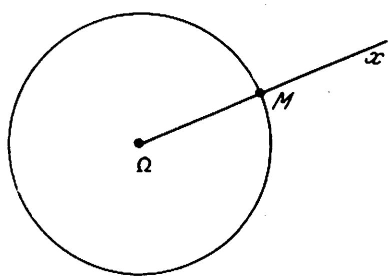
Observaţii. 1. Mulţimea punctelor M din planul P astfel ca $d(\Omega, M) = 0$ conţine singurul punct Ω. Această mulţime $\{\Omega\}$ poate fi numită cerc de centru

Ω şi rază nulă. Se spune de asemenea că este un **cerc — punct.**
2. Fie C un cerc din planul P; cele trei submulţimi ale lui P: cercul C, interiorul lui C, exteriorul lui C formează o partiţie a lui P.

13.1.2. Consecinţe

1. Fie un cerc $C(\Omega, r)$ inclus în planul P.
Orice semidreaptă Ωx de origine Ω inclusă în planul P conţine un punct din $C(\Omega, r)$, şi numai unul, anume punctul M al semidreptei Ωx astfel ca $d(\Omega, M) = r$ (fig. 3).

Fig. 3



2. Fie A şi B două puncte *distincte* aparţinînd cercului $C(\Omega, r)$; avem $d(\Omega, A) = d(\Omega, B)$, ceea ce implică faptul că mediatoarea coardei $[A, B]$ conţine centrul Ω al cercului $C(\Omega, r)$ (fig. 4).
3. Fie A, B, C trei puncte *necoliniare* (fig. 5) aparţinînd planului P. Mediatoarele segmentelor $[A, B]$ şi $[B, C]$ sînt două drepte concurente; Ω fiind punctul lor de intersecţie, avem:

$$d(\Omega, A) = d(\Omega, B) = d(\Omega, C)$$

ceea ce implică faptul că cercul de centru Ω şi de rază $d(\Omega, A)$ conţine cele trei puncte A, B, C.
Orice alt cerc care conţine A, B, C, are ca centru

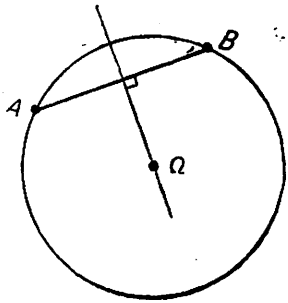


Fig. 4

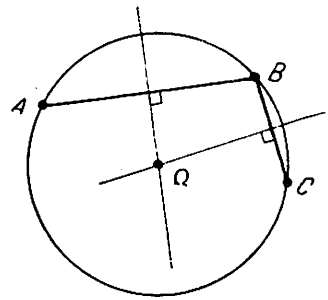


Fig. 5

punctul de intersecție ale mediatoarelor segmentelor $[A, B]$ și $[B, C]$, adică punctul Ω, și ca rază $d(\Omega, A)$; acest cerc este deci egal cu primul.

Se poate enunța:

TEOREMA 1. / Există un cerc și numai unul, care conține trei puncte necoliniare.

Cercul care conține punctele necoliniare A, B, C este numit **cercul** ABC.

4. Fie A, B, C trei puncte coliniare, două cîte două distincte (fig. 6). Dacă un cerc ar conține A, B, C,

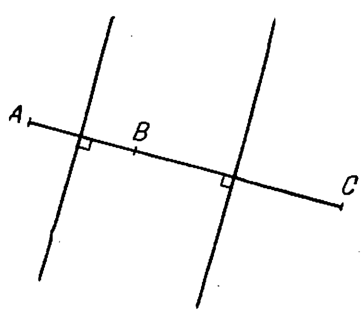


Fig. 6

centrul său Ω ar aparține mediatoarelor segmentelor $[A, B]$ și $[B, C]$; însă aceste mediatoare sînt strict paralele. Nu există deci un cerc care să conţină punctele A, B, C.

Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 2. **Nu există un cerc care să conţină trei puncte coliniare, două cîte două distincte.**

Observaţii. — 1° Din teorema 2 (precedentă) rezultă că intersecţia unui cerc cu o dreaptă conţine cel mult două puncte distincte.

2° Din teoremele precedente 1 şi 2 rezultă că intersecţia a două cercuri distincte conţine cel mult două puncte.

5. Fie $C(\Omega, r)$ şi $C(\Omega', r')$ două cercuri astfel ca:

$$C(\Omega, r) = C(\Omega', r').$$

A, B, C fiind trei puncte ale cercului $C(\Omega, r)$ două cîte două distincte, deci ale cercului $C(\Omega', r')$, aceste puncte nu sînt coliniare. Ω este punctul de intersecţie al mediatoarelor, segmentelor $[A, B]$ şi $[B, C]$ şi acelaşi lucru are loc pentru Ω'. Avem deci: $\Omega = \Omega'$, ceea ce implică:

$$r = d(\Omega, A) = d(\Omega, 'A) = r'.$$

Reciproc, urmează imediat că:

$$\Omega = \Omega' \text{ şi } r = r'' \Rightarrow C(\Omega, r) = C(\Omega', r').$$

Se poate deci scrie:

$$\boxed{C(\Omega, r) = C(\Omega', r') \Leftrightarrow \Omega = \Omega' \text{ şi } r = r'}$$

13.1.3. Ecuaţia unui cerc

Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Fie C un cerc de centru $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ şi de rază r (fig. 7).

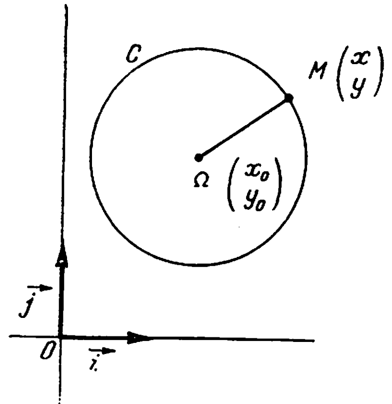


Fig. 7

M fiind un punct al planului P, din definiţia cercului rezultă că:

$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M = r.$$

Cum egalitatea a două numere pozitive sau nule este echivalentă cu egalitatea pătratelor acestora, se poate scrie:

$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2.$$

Pe de altă parte dacă $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sînt coordonatele punctului M, avem (nr. **12.1.6**):

$$\Omega M^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

ceea ce dă în cele din urmă:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Se spune că relaţia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

care este verificată de coordonatele(x, y) ale unui punct M al planului P dacă şi numai dacă acest punct aparține cercului C, este o **ecuație carteziană** sau, mai simplu, o **ecuație a cercului** C.

Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **Planul P fiind raportat la un reper ortonormat, o ecuație a cercului C de centru $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ și de rază r este:**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Exemple. Planul este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. O ecuație a cercului de centru O și de rază r este:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

II. O ecuație a cercului de centru $\Omega\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ și de rază $\sqrt{5}$ este:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - (\sqrt{5})^2 = 0,$$

adică

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0;$$

remarcăm faptul că originea reperului, O, ale cărei coordonate $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ verifică relația precedentă, aparține acestui cerc (fig. 8).

Observație. — 1. Planul P fiind raportat la un reper (O, i, j), fie C cercul de centru $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ și de rază r; un punct $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ al planului P aparține interiorului cercului C dacă și numai dacă:

$$\Omega M < r \Leftrightarrow \Omega M^2 < r^2 \Leftrightarrow \Omega M^2 - r^2 < 0,$$

adică dacă și numai dacă:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 < 0. \qquad (1)$$

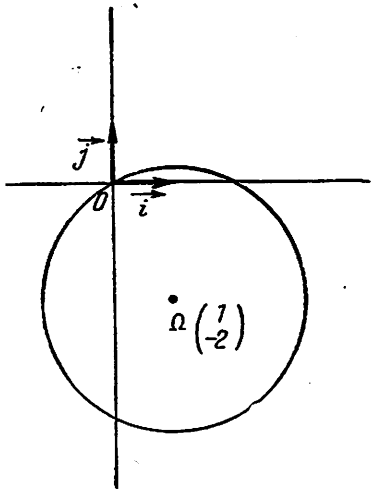


Fig. 8

În acelaşi fel, un punct $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ aparţine exteriorului cercului C dacă şi numai dacă $\Omega M > r$, adică dacă şi numai dacă

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 > 0. \qquad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) permit să se caracterizeze interiorul şi respectiv exteriorul cercului C.

2. Dacă se dezvoltă primul membru al ecuaţiei unui cerc C:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

se obţine:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0;$$

în această relaţie, numerele x_0, y_0, r sînt date. Rezultă de aici că ecuaţia cercului C este de forma:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

unde α, β, γ sînt trei numere reale date.

13.1.4. Problemă

Planul P fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, să se studieze mulțimea T a punctelor M care aparține lui P pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifică relația;

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

unde α, β, γ sînt trei numere reale date.

Pentru orice cuplu (x, y) de numere reale avem:

$$x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4},$$

$$y^2 + \beta y = \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4}.$$

Rezultă de aici:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma.$$

Pe de altă parte Ω fiind punctul de coordonate $\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$, avem **(12.1.6)**:

$\Omega M^2 = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2$, ceea ce implică:

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma.$$

Trei cazuri se pot prezenta:

1. $$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma < 0.$$

Urmează atunci imediat că egalitatea:

$$\Omega M^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma$$

nu este verificată de nici un punct M al planului P, deci că:

$$\Gamma = \emptyset.$$

2. $$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma = 0.$$

Urmează atunci:

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = 0 \Leftrightarrow \Omega M = 0 \Leftrightarrow M = \Omega,$$

ceea ce dovedeşte că $\Gamma = \{\Omega\}$, deci că Γ este un cerc-punct.

3. $$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma > 0.$$

Există atunci un număr real strict pozitiv r, şi numai unul, astfel ca

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma$$

$\left(r \text{ este rădăcina pătrată pozitivă din } \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma\right)$.

Avem în acest caz: $M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow M = r$ ceea ce dovedeşte că Γ este cercul de centru Ω şi de rază r. Studiul care a fost făcut permite să se enunţe:

TEOREMĂ / **Planul P fiind raportat la un reper ortonormat, fie mulţimea punctelor M care aparţin lui P pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifică relaţia:**

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

a) **Dacă:** $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma < 0$, **atunci Γ este vidă.**

b) **Dacă:** $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma \geqslant 0$, **atunci Γ este cercul de centru**

$$\Omega\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \text{ şi de rază } r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}.$$

Reţinerea acestei teoreme nu este strict necesară. De fapt se regăsesc imediat aceste rezultate transformînd relaţia : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ în relaţia echivalentă :

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma;$$

este suficient să se efectueze această transformare de fiecare dată cînd apare această situaţie.

EXEMPLE. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Fie Γ_1 mulţimea punctelor M pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifică relaţia (1) :

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 12 = 0.$$

Relaţia (1) este echivalentă cu : $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = -2$. Rezultă de aici că mulţimea Γ_1 este vidă.

II. Fie Γ_2 mulţimea punctelor M pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifică relaţia (2) :

$$x^2 + y^2 - x + 3y + \frac{5}{2} = 0.$$

Relaţia (2) este echivalentă cu :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Rezultă de aici că mulţimea Γ_2 este cercul-punct de centru $\Omega\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

III. Fie Γ_3 mulţimea punctelor M pentru care coordonatele $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ verifică relaţia (3):

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0.$$

Relaţia (3) este echivalentă cu:

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Rezultă de aici că mulţimea Γ_3 este cercul de centru $\Omega\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ şi de rază $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Observaţie. — Planul P fiind raportat la un reper ortonormat, fie C un cerc de ecuaţie:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0. \qquad (1)$$

Pentru orice număr real, *nenul* k, relaţia (1) este echivalentă cu:

$$k(x^2 + y^2) + k\alpha x + k\beta y + k\gamma = 0 \qquad (2)$$

şi relaţia (2), care este verificată de coordonatele $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ale unui punct M al planului P dacă şi numai dacă acest punct aparţine lui C, este o ecuaţie a cercului C. Cercul C are deci o infinitate de ecuaţii de forma:

$$k(x^2 + y^2) + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0;$$

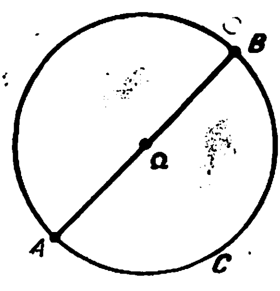
cu toate acestea una singură dintre aceste ecuaţii, numită **ecuaţia normalizată a lui** C este astfel încît $k = 1$. Într-adevăr dacă $x^2 + y^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$

este o ecuaţie a cercului C de centru $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ şi de rază r, avem: $x_0 = -\frac{\alpha'}{2}$, $y_0 = -\frac{\beta'}{2}$, $r^2 = \frac{\alpha'^2}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \gamma'$, ceea ce dovedeşte că:
$\alpha' = -2x_0$, $\beta' = -2y_0$, $\gamma' = x_0^2 + y_0^2 - r^2$, deci că coeficienţii α', β', γ' sînt determinaţi într-un mod unic.

13.1.5. Cerc definit prin extremităţile unui diametru

● Fie A şi B două puncte distincte din planul P. Există un cerc C, şi numai unul, inclus în P şi care admite segmentul $[A, B]$ ca diametru; centrul acestui cerc este punctul Ω, mijlocul lui $[A, B]$ şi raza sa este $r = \frac{1}{2}AB$ (fig. 9); prin urmare:

Fig. 9



$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M = \frac{1}{2}AB. \qquad (1)$$

● Pentru orice punct M din planul P se poate scrie:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B});$$

cum Ω este mijlocul lui $[A, B]$, avem:

$$\overrightarrow{\Omega A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

şi

$$\overrightarrow{\Omega B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

ceea ce implică:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{M\Omega} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{M\Omega} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) =$$

$$= (\overrightarrow{M\Omega})^2 - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 = M\Omega^2 - \frac{1}{2}AB^2;$$

rezultă de aici că:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M\Omega^2 = \frac{1}{4}AB^2,$$

deci că:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \Omega M = \frac{1}{2}AB. \qquad (2)$$

Echivalenţele (1) şi (2) dovedesc atunci că:

$$M \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0,$$

ceea ce permite să se enunţe

TEOREMĂ / ***A* şi *B* fiind două puncte distincte din planul *P*, un punct *M* din *P* aparţine cercului inclus în *P* cu diametrul $[A, B]$ dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ sînt ortogonali.**

Consecinţe. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Fie $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ două puncte distincte din P şi fie C cercul inclus în P de diametru $[A, B]$ (fig. 10).

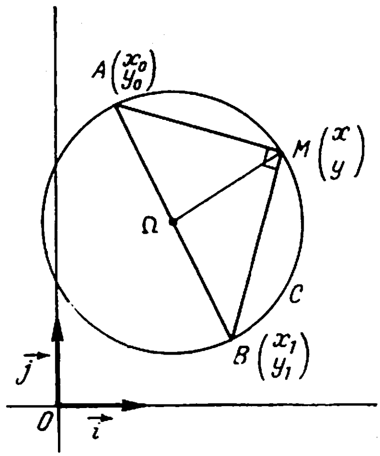


Fig. 10

Un punct $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ aparţine cercului C dacă şi numai dacă:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0;$$

cum vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ au coordonatele respective $\begin{pmatrix}x_0 - x\\y_0 - y\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}x_1 - x\\y_1 - y\end{pmatrix}$, produsul scalar $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ este egal cu:

$$(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y)(y_1 - y).$$

Rezultă de aici că:

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in C \Leftrightarrow (x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y)(y_1 - y) = 0$, ceea ce dovedeşte că $(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y)(y_1 - y) = 0$, este o ecuaţie carteziană a cercului C de diametru $[A, B]$.

EXEMPLE. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Fie punctele $A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; pentru orice punct $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ au coordonatele respective:

$$\begin{pmatrix}1-x\\-2-y\end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix}3-x\\1-y\end{pmatrix}$$

Rezultă de aici că o ecuaţie a cercului de diametru $[A, B]$, inclus în P este:

$$(1-x)(3-x)+(-2-y)(1-y)=0,$$

adică:

$$x^2+y^2-4x+y+1=0.$$

II. Fie punctele $A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$; pentru orice punct $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ au coordonatele respective:

$$\begin{pmatrix}a-x\\-y\end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix}-x\\b-y\end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici că o ecuaţie a cercului cu diametrul $[A, B]$, inclus în P este:

$$(a-x)(-x)+(-y)(b-y)=0,$$

adică:

$$x^2+y^2-ax-by=0.$$

13.1.6. Cerc definit printr-o relaţie metrică

Reamintim rezultatele următoare demonstrate în cursul clasei a II-a.

TEOREMA 1. **Fie A şi B două puncte din planul P şi fie k un număr real. Mulţimea punctelor M care aparţin lui P astfel încît**

$$MA^2+MB^2=k,$$

dacă nu este vidă, este un cerc de centru I, mijlocul bipunctului (A, B) şi de rază r, numărul pozitiv definit prin:

$$r^2=\frac{1}{2}\left(k-\frac{AB^2}{2}\right).$$

TEOREMA 2. **Fie A și B două puncte distincte din planul P și fie k un număr real strict pozitiv și diferit de 1. Mulțimea punctelor M care aparțin lui P astfel ca:**

$$MA = kMB$$

este cercul de diametru $[I, J]$, I și J fiind punctele definite prin:

$$\overrightarrow{IA} = -k\overrightarrow{IB} \text{ și } \overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JB}.$$

Se poate da acestor două teoreme o demonstrație analitică; este ceea ce se propune prin problemele **13.40** și **13.41.**

EXEMPLE. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. *A și B fiind punctele de coordonate respective $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, să se studieze mulțimea Γ a punctelor M care aparțin lui P, astfel ca:* $MA^2 + MB^2 = 11$.

Fie M un punct care aparține planului P, de coordonate $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Avem:

$$MA^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$MB^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

ceea ce implică: $MA^2 + MB^2 = 2x^2 + 2y^2 - 8x - 2y + 15$. Rezultă de aici că punctul M aparține mulțimii Γ dacă și numai dacă:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 2y + 15 = 11,$$

adică dacă și numai dacă $x^2 + y^2 - 4x - y + 2 = 0$. Relația precedentă fiind echivalentă cu:

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

avem în cele din urmă:

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

ceea ce dovedește că mulțimea Γ este un cerc de centru $\Omega\begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ și de rază $\frac{3}{2}$.

Se vede imediat că centrul Ω al acestui cerc este mijlocul bipunctului (A, B).

II. *A şi B fiind două puncte de coordonate respective* $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ *şi* $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ *(fig. 11), să se studieze mulţimea Γ a punctelor M care aparţin lui P, astfel ca:*

$$MA = 2MB.$$

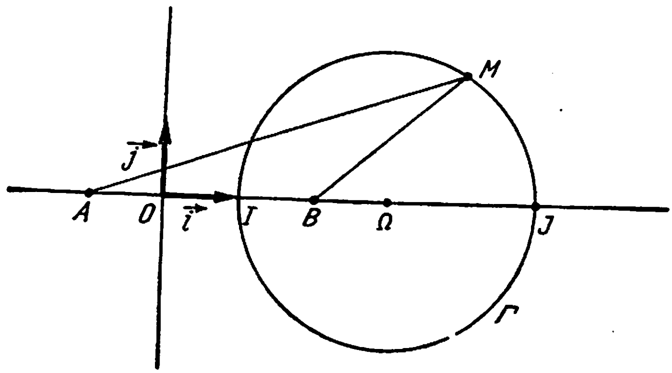


Fig. 11

Fie M un punct care aparţine planului P; urmează imediat că:

$$MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 - 4MB^2 = 0.$$

Pe de altă parte, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ fiind coordonatele punctului M, avem:

$$MA^2 = (x + 1)^2 + y^2,$$

$$MB^2 = (x - 2)^2 + y^2,$$

ceea ce implică:

$$MA^2 - 4MB^2 = -3x^2 - 3y^2 + 18x - 15.$$

De aici rezultă că punctul M aparţine mulţimii Γ dacă şi numai dacă:

$$-3x^2 - 3y^2 + 18x - 15 = 0,$$

adică dacă şi numai dacă:

$$x^2 - y^2 - 6x + 5 = 0.$$

Relaţia precedentă fiind echivalentă cu:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 2^2,$$

avem în cele din urmă:

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \Gamma \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 2^2,$$

ceea ce dovedeşte că mulţimea Γ este cercul de centru $\Omega\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ şi de rază 2.

Dreapta AB de ecuaţie $y = 0$, conţine centrul cercului Γ; această dreaptă taie deci Γ în două puncte diametral opuse I şi J pentru care abscisele sînt soluţiile ecuaţiei:

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Ecuaţia precedentă are rădăcinile 1 şi 5; I fiind punctul de abscisă 1 şi J punctul de abscisă 5, se constată atunci cu uşurinţă că:

$$\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{JA} = 2\overrightarrow{JB}.$$

EXERCIŢII

13.1. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Să se scrie o ecuaţie a cercului C definit prin centrul său Ω şi raza sa r, în cazurile următoare:

a) $\Omega\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $r = 6$ b) $\Omega\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, $r = \sqrt{2}$;

c) $\Omega\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $r = 5$ d) $\Omega\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$, $r = 7$.

13.2. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Să se scrie o ecuaţie a cercului C de centru Ω şi care conţine punctul A, în cazurile următoare:

a) $\Omega\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$; b) $\Omega\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

c) $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; d) $\Omega\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

13.3. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Să se scrie o ecuaţie a cercului Γ care conţine trei puncte A, B, C, în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$;

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-2\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$;

c) $A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$;

d) $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

13.4. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Să se scrie o ecuaţie a cercului de diametru $[A, B]$ inclus in P. în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$; b) $A\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$;

c) $A\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$; d) $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$;

e) $A\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$.

13.5. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Să se studieze mulţimea Γ a punctelor M din plan pentru care coordonatele x, y verifică relaţia $\mathcal{R}$, în cazurile următoare:

a) $\mathcal{R} : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$;

b) $\mathcal{R} : x^2 + y^2 - 5x + 7y + \frac{5}{2} = 0$;

c) $\mathcal{R} : x^2 + y^2 - 3x + y + \frac{5}{2} = 0$;

d) $\mathcal{R} : x^2 + y^2 - x + 4y + 5 = 0$;

e) $\mathcal{R} : 2(x^2 + y^2) - 4x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$

În cazul în care Γ este un cerc se va determina centrul şi raza sa.

13.6. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Fie C mulţimea punctelor M din planul P astfel încît:

$$MA^2 + MB^2 = 4.$$

1° Să se demonstreze pe cale analitică faptul că C este un cerc pentru care se vor determina centrul şi raza.
2° Fie I mijlocul segmentului $[A, B]$. Să se demonstreze că, pentru orice punct M care aparţine planului P, avem:

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Să se utilizeze această proprietate pentru a regăsi rezultatele de la punctul 1°.

13.7. Acelaşi exerciţiu cu punctele $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ şi relaţia:

$$MA^2 + MB^2 = \frac{21}{2}.$$

13.8. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$.
Fie C mulţimea punctelor M al planului P astfel ca:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \frac{3}{4}.$$

1° Să se demonstreze pe cale analitică faptul că C este un cerc pentru care se vor determina centrul şi raza.
2° Fie I mijlocul segmentului $[A, B]$. Să se demonstreze că pentru orice punct M care aparţine planului P, avem:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Să se utilizeze această proprietate pentru a regăsi rezultatele de la punctul 1°.

13.9. Acelaşi exerciţiu cu punctele $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ şi relaţia:

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -\frac{5}{2}.$$

13.10. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.
Fie C mulţimea punctelor M din planul P astfel ca:

$$MA = \frac{1}{3}\,MB.$$

1° Să se demonstreze pe cale analitică faptul că C este un cerc pentru care se vor determina centrul şi raza.
2° Fie I şi J două puncte definite prin:

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \text{ şi } \overrightarrow{JA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JB}.$$

Să se demonstreze că pentru orice punct M din planul P, avem:

$$\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MI} \text{ şi } \overrightarrow{MA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MJ}.$$

Să se deducă de aici că:

$$MA^2 - \frac{1}{9}MB^2 = \frac{8}{9}\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}$$

Să se utilizeze această relaţie pentru a regăsi rezultatele de la punctul 1°.

13.11. Acelaşi exerciţiu cu punctele $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\2\\-2\end{pmatrix}$ şi relaţia: $MA = 4\,MB$.

13.12. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}-a\\0\end{pmatrix}$, a fiind un număr real strict pozitiv. Să se studieze pe cale analitică mulţimea Γ a punctelor M din planul P astfel încît: $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{2}$.

13.13. Acelaşi exerciţiu dacă mulţimea Γ este definită prin:

a) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{2}$; d) $\cos(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}) = 0$.

13.14. Fie C un cerc de centru O şi de rază r, inclus în planul P şi fie M un punct care aparţine lui P.
1° Să se demonstreze că pentru orice cuplu (A, B) de puncte diametral opuse ale cercului C, produsul scalar $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ este constant şi egal cu:

$$OM^2 - r^2.$$

Numărul real $OM^2 - r^2$ este numit puterea punctului M în raport cu cercul C şi este notat $C(M)$.
2° Fie f aplicaţia lui P în $\mathbf{R}$ definită prin:

$$\forall M \in P \quad f(M) = C(M).$$

a) k fiind un număr real, să se studieze mulţimea punctelor M din planul P astfel ca:

$$\mathfrak{f}(M) = k.$$

Să se discute după valorile lui k.

b) Aplicaţia $\mathfrak{f}$ este injectivă? Surjectivă?

Să se demonstreze că există un punct M_0, şi numai unul, astfel ca:

$$M \neq M_0 \Rightarrow \mathfrak{f}(M) > \mathfrak{f}(M_0)$$

13.15. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C cercul pentru care ecuaţia normalizată este:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Să se demonstreze că puterea punctului $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ în raport cu cercul C este:

$$C(M) = x_0^2 + y_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma.$$

13.16. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C şi C' două cercuri de ecuaţii carteziene respective:

$$C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0;$$
$$C': x^2 + y^2 - x + 5y - 4 = 0.$$

Care este mulţimea punctelor M din planul P care au aceeaşi putere în raport cu cele două cercuri C şi C'?

13.17. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C şi C' două cercuri de ecuaţii carteziene respective:

$$C: x^2 + y^2 - 1 = 0;$$
$$C': x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Care este mulţimea punctelor M din planul P astfel ca:

$$C(M) = 2C'(M)?$$

Se reaminteşte că $C(M)$ desemnează puterea punctului M în raport cu cercul C (Exerciţiul nr. 13.14).

13.18. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie A punctul de coordonate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La orice punct M din planul P se asociază punctul H, proiecţia ortogonală a punctului M pe dreapta ordonatelor. Care este mulţimea punctelor M astfel ca:

$$MA^2 = 2MH?$$

13.19. Acelaşi exerciţiu ca cel precedent cu punctul $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ şi relaţia

$$MA^2 = 2kMH$$

unde a şi k sînt două numere reale strict pozitive.

13.20. 1° Să se demonstreze identitatea:

$$\forall(x, y) \in R^2[(x-2)^2 + y^2][(x+2)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 - 4)^2 + 16\, y^2.$$

2° Planul euclidian P fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se dau punctele $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$.

La orice punct M din planul P se asociază punctul H, proiecţia ortogonală a punctului M pe dreapta absciselor.

Să se determine mulţimea punctelor M din planul P astfel ca: $MA \cdot MB = 5MH$.

13.2. INTERSECŢIA UNEI DREPTE CU UN CERC

13.2.1. Studiul analitic al intersecţiei unei drepte cu un cerc.

Problemă. — *Să se studieze intersecţia unei drepte D cu un cerc C de centru Ω şi de rază r, inclus în planul P.*

● *Alegerea unui reper în planul P.*

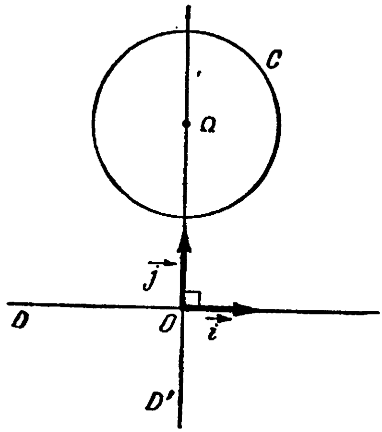
Dreapta D' inclusă în P, care conţine pe Ω şi este ortogonală cu dreapta D, taie pe D în punctul O, proiecţia ortogonală a lui Ω pe D (fig. 12).

$\vec{i}$ fiind un vector director unitar al dreptei D şi $\vec{j}$ un vector director unitar al dreptei D', urmează imediat că tripletul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ este un reper ortonormat al planului P.

Abscisa punctului Ω în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j})$ este nulă; desemnăm prin y_0 ordonata sa. Avem atunci:

$$d(\Omega, D) = d(\Omega, O) = |y_0|.$$

Fig. 12



În sfîrşit o ecuaţie a dreptei D este $y = 0$ şi o ecuaţie a cercului C este $x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

● *Studiul intersecţiei* $D \cap C$.

Fie M un punct din planul P de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Avem:

$$M \in D \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow I \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = r^2 - y_0^2. \end{cases}$$

Rezultă de aici că intersecţia $D \cap C$ este mulţimea punctelor M din planul P pentru care perechile de coordonate sînt soluţii ale sistemului I. Va trebui să rezolvăm sistemul I.

Cazul I: $r^2 - y_0^2 < 0 \Leftrightarrow r^2 < y_0^2 \Leftrightarrow r < |y_0|$

$$\Leftrightarrow r < d(\Omega, D).$$

Urmează atunci imediat că egalitatea $x^2 = r^2 - y_0^2$ nu este verificată de nici un număr real x ceea ce implică faptul că sistemul I nu are soluţie, deci că intersecţia $D \cap C$ este vidă (fig. 12).

Prin urmare:

$$d(\Omega, D) > r \Rightarrow D \cap C = \emptyset. \tag{1}$$

Cazul II: $r^2 - y_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = y_0^2 \Leftrightarrow r = |y_0|$
$\Leftrightarrow r = d(\Omega, D)$.

Sistemul I se scrie atunci:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0. \end{cases}$$

El are o soluție și numai una, anume (0, 0).
Rezultă deci că intersecția $D \cap C$ conține singurul punct O, proiecția ortogonală a lui Ω pe D (fig. 13).

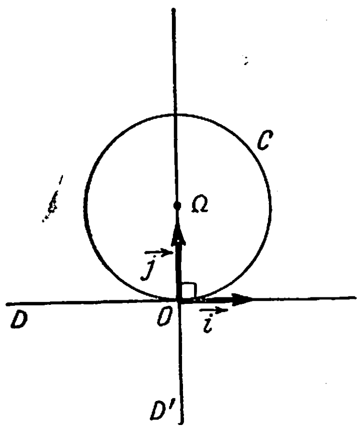


Fig. 13

Prin urmare:

$$d(\Omega, D) = r \Rightarrow D \cap C = \{O\}. \tag{2}$$

Cazul III: $r^2 - y_0^2 > 0 \Leftrightarrow r^2 > y_0^2 \Leftrightarrow r > |y_0|$
$\Leftrightarrow r > d(\Omega, D)$.

Sistemul I are atunci două soluții și numai două:

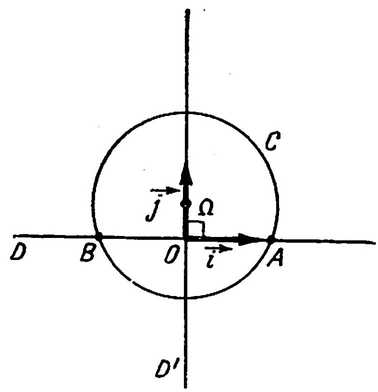
$$(\sqrt{r^2 - y_0^2}, 0), \quad (-\sqrt{r^2 - y_0^2}, 0).$$

Rezultă de aici că intersecţia $D \cap C$ conţine două puncte distincte:

$$A\begin{pmatrix}\sqrt{r^2 - y_0^2}\\ 0\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}-\sqrt{r^2 - y_0^2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

şi numai aceste două puncte (fig. 14).

Fig. 14



Prin urmare:

$$d(\Omega, D) < r \Leftrightarrow D \cap C = \{A, B\}. \quad (3)$$

Se demonstrează imediat prin *reducere la absurd* că implicaţiile reciproce ale implicaţiilor (1), (2), (3) sînt adevărate. Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Fie o dreaptă D şi un cerc C de centru Ω şi de rază r, incluse în acelaşi plan P. Avem:**

$$d(\Omega, D) > r \Leftrightarrow D \cap C = \varnothing$$

$$d(\Omega, D) = r \Leftrightarrow \left\{ D \cap C \text{ este o mulţime cu un singur element.} \right\}$$

$$d(\Omega, D) < r \Leftrightarrow \left\{ D \cap C \text{ este o mulţime cu două elemente.} \right\}$$

Observație. Dacă intersecția $D \cap C$ conține două puncte distincte A și B, se spune că **dreapta D și cercul C sînt secante în A și B.**

Exemple. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
I. *Să se studieze intersecția dreptei D cu ecuația carteziană* $x - 2y + 1 = 0$ *cu cercul C de centru* $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *și de rază* $\frac{5}{2}$.

Distanța de la punctul Ω, centrul cercului C, la dreapta D este:

$$d(\Omega, D) = \frac{\left|3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5};$$

inegalitatea $\sqrt{5} < \frac{5}{2}$ dovedește atunci că dreapta D și cercul C sînt secante.

O ecuație a cercului C este: $(x - 3)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$, adică:

$$x^2 + y^2 - 6x + y + 3 = 0.$$

Rezultă de aici că perechile de coordonate ale punctelor de intersecție a lui D cu C sînt soluțiile sistemului:

$$\mathrm{I} \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + y + 3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvarea sistemului I:

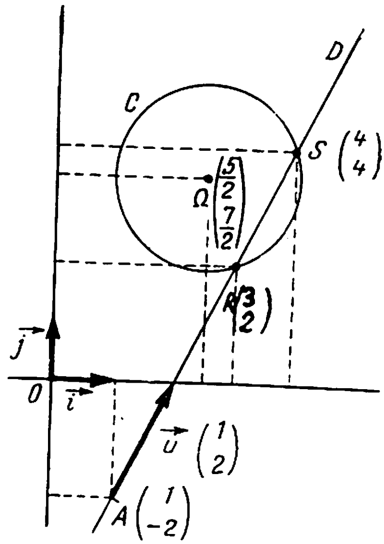
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5y^2 - 15y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ y = 1 \text{ sau } y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

dovedește că cele două puncte ale intersecției $D \cap C$ au respectiv coordonatele: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

I. *Să se studieze intersecția dreptei D, care conține punctul* $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *și pentru care un vector director este* $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, *cu cercul C de centru* $\Omega \begin{pmatrix} 5/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$ *și de rază* $\frac{\sqrt{10}}{2}$ (fig. 15).

Fig. 15



Fie M un punct din planul P cu coordonatele $\binom{x}{y}$; M aparţine dreptei D dacă şi numai dacă:

$$\exists t \in \mathbf{R} : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t. \end{cases}$$

M aparţine cercului C dacă şi numai dacă:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{10}{4},$$

adică dacă şi numai dacă: $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 16 = 0$.
Avem prin urmare:

$$M\binom{x}{y} \in D \cap C$$

$$\exists t \in \mathbf{R}; \begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = -2 + 2t & (2) \\ (1+t)^2+(-2+2t)^2-5(1+t)-7(-2+2t)+16=0. & (3) \end{cases}$$

Pentru a determina punctele de intersecţie a dreptei D cu cercul C trebuie rezolvată ecuaţia (3); pentru fiecare soluţie a ecuaţiei (3) corespunde un punct M care aparţine intersecţiei $D \cap C$, punct

pentru care coordonatele se obțin plecînd de la egalitățile (1) și (2).
Ecuația (3) care se scrie: $5t^2 - 25t + 30 = 0$, are ca rădăcini numerele 2 și 3; rezultă deci că dreapta D și cercul C sînt secante în două puncte R și S de coordonate respective: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

13.2.2. Tangenta la un cerc

DEFINIȚIE / **Fie un cerc C de centru Ω și de rază r inclus în planul P. Se spune că o dreaptă D este tangentă cercului C dacă D este inclusă în P și dacă distanța de la punctul Ω la dreapta D este egală cu r.**

Studiul făcut în paragraful nr. **13.2.1** permite să se enunțe:

TEOREMA / 1. **Fie un cerc C inclus în planul P. O dreaptă D inclusă în P este tangentă cercului C dacă și numai dacă intersecția $D \cap C$ conține un punct și numai unul.**

Dacă o dreaptă D este tangentă cercului C, se spune de asemenea că D și C sînt **tangente**; unicul punct al intersecției $D \cap C$ este atunci numit **punct de contact** al lui D cu C.
Fie o dreaptă D și un cerc C de centru Ω și de rază r, inclus în planul P și fie H proiecția ortogonală a lui Ω pe dreapta D (fig. 16); avem:

$$d(\Omega, D) = d(\Omega, H);$$

pe de altă parte, D este tangenta lui C dacă și numai dacă:

$$d(\Omega, D) = r.$$

Rezultă de aici:
D este tangenta lui $C \Leftrightarrow d(\Omega, H) = r \Leftrightarrow H \in C$; se poate deci enunța:

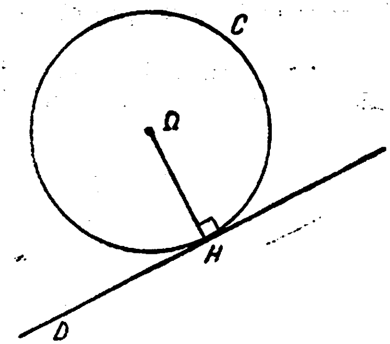


Fig. 16

TEOREMA / 2. **O dreaptă D şi un cerc C, incluse în acelaşi plan P, sînt tangente dacă şi numai dacă proiecţia ortogonală a centrului cercului C pe dreapta D aparţine lui C.**

EXERCIŢIU. *Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C cercul de centru O şi de rază r şi fie D cu ecuaţia carteziană :*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Să se demonstreze că dreapta D este tangentă cercului C dacă şi numai dacă: $r^2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2 = 0$.

Distanţa de la punctul O, centrul cercului C, la dreapta D este:

$$d(0, D) = \frac{|\gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Se ştie pe de altă parte că D este tangentă lui C dacă şi numai dacă: $d(0, D) = r$.

Rezultă de aici:

$$D \text{ este tangentă lui } C \Leftrightarrow d(0, D) = r \Leftrightarrow \frac{|\gamma|}{\alpha^2 + \beta^2} = r.$$

Cum egalitatea a două numere pozitive $\dfrac{\gamma}{\alpha^2 + \beta^2}$ şi r este echivalentă cu egalitatea pătratelor acestora, în cele din urmă avem:

$$D \text{ este tangenta lui } C \Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2} = r^2 \Leftrightarrow r^2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2 = 0.$$

13.2.3. Tangenta într-un punct de pe cerc

Fie C un cerc de centru Ω şi de rază r, inclus în planul P şi fie M un punct care aparţine lui C (fig. 17).

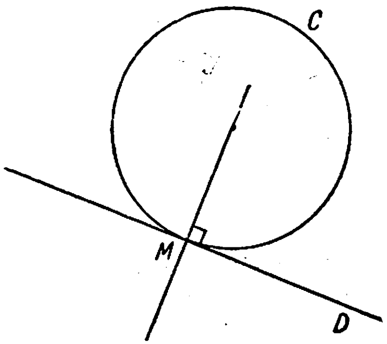


Fig. 17

Notăm cu D dreapta inclusă în P, care conţine pe M şi ortogonală dreptei ΩM. Punctul M este proiecţia ortogonală a punctului Ω pe dreapta D. Cum M aparţine cercului C, dreapta D este tangenta lui C în M.

Reciproc, dacă o dreaptă D' inclusă în P este tangentă la C în M, intersecţia $D' \cap C$ conţine singurul punct M şi acest punct este proiecţia ortogonală a punctului Ω pe dreapta D'. Rezultă de aici că D' este dreapta inclusă în P, care conţine pe M, şi este ortogonală cu dreapta ΩM, deci că $D' = D$. Se poate enunţa:

TEOREMĂ / **Există o dreaptă D, şi numai una, tangentă cercului C într-un punct M care aparţine cercului C. Ω fiind centrul lui C, D este dreapta inclusă în planul lui C, conţinînd punctul M şi ortogonală dreptei ΩM.**

Consecinţe. — Fie C un cerc de centru Ω inclus în planul P; tangenta la C într-un punct M al lui C

este dreapta inclusă în P care conţine pe M şi pentru care un vector normal nenul este $\overrightarrow{\Omega M}$. Noi vom utiliza acest rezultat pentru a obţine o ecuaţie carteziană a tangentei într-un punct al unui cerc.

EXEMPLE. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
I. *Să se determine o ecuaţie carteziană a tangentei în O la cercul C pentru care o ecuaţie carteziană este:*

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0,$$

unde α şi β sînt două numere reale dintre care cel puţin unul nu este nul.
Ecuaţia cercului C poate fi pusă sub forma:

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}$$

Rezultă de aici că centrul Ω al cercului C are coordonatele $\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$.

Tangenta la C în punctul O, punct care aparţine evident lui C, este dreapta definită de punctul O şi de vectorul normal, nenul $\overrightarrow{\Omega O}$ $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$; o ecuaţie carteziană a acestei tangente este deci:

$$\frac{\alpha}{2} x + \frac{\beta}{2} y = 0,$$

sau încă: $$\alpha x + \beta y = 0.$$

II. *Fie C cercul de centrul O şi de rază r şi fie $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un punct care aparţine lui C. Să se determine o ecuaţie carteziană a tangentei în M_0 la cercul C.*
O ecuaţie carteziană a cercului C este: $x^2 + y^2 = r^2$. (1) Tangenta lui C în M_0 este dreapta care conţine $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ şi pentru care un vector normal, nenul este $\overrightarrow{OM_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Rezultă de aici că o ecuaţie carteziană a acestei tangente este:

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0, \text{ adică } x_0 x + y_0 y - (x_0^2 + y_0^2) = 0.$$

Ținînd seama de egalitatea (1) se obține ca ecuație a tangentei la C în M_0:

$$x_0x + y_0y - r^2 = 0.$$

III. *Să se demonstreze că mulțimea* Γ *a punctelor* M *pentru care coordonatele* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *verifică relația* $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ *este un cerc care conține punctul* $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *și că tangenta la* Γ *în* A *conține punctul* O.

Relația $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ care caracterizează mulțimea Γ este echivalentă cu: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$;

rezultă de aici că mulțimea Γ este cercul cu centrul $\Omega\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ și de rază $\sqrt{5}$ (fig. 18). Urmează imediat că punctul A, ale cărui coordonate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ verifică egalitatea

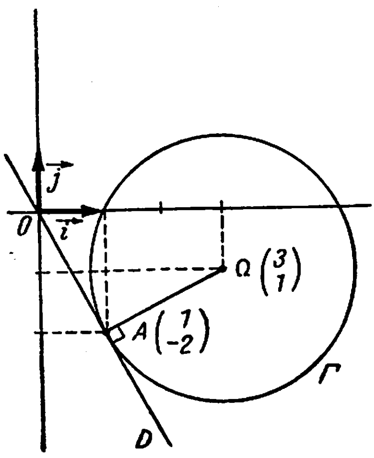


Fig. 18

$$1^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 1 + 2(-2) + 5 = 0,$$

aparține cercului Γ. Tangenta la Γ în punctul A este dreapta D care conține pe $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ și pentru care un vector normal nenul este $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rezultă de aici că ecuația carteziană a acestei tangente este $-2(x - 1) - 1(y + 2) = 0$, adică: $2x + y = 0$.

Punctul O aparține evident dreptei D.

13.2.4. Probleme asupra cercului

Problemele privind intersecţia a două cercuri, tangentele la un cerc paralele cu o dreaptă dată şi tangentele la un cerc care conţin un punct dat nu figurează în mod explicit în programă.
Prin tratarea unor cazuri particulare ne limităm să arătăm metoda care trebuie urmată pentru a trata pe cale analitică aceste diferite probleme.

Exerciţii. Planul P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. *Să se studieze intersecţia cercului C de centru* $\Omega\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ *şi de rază* $\frac{\sqrt{10}}{2}$ *cu cercul C' de centru* $\Omega'\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ *şi de rază* $\frac{5}{2}$ (fig. 19).

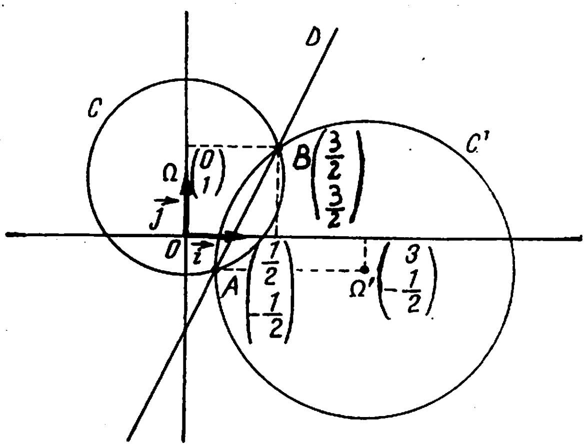


Fig. 19

Ecuaţia cercului C este: $x^2 + (y-1)^2 = \frac{10}{4}$,

adică: $x^2 + y^2 - 2y - \frac{3}{2} = 0$.

Ecuaţia cercului C' este:

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}, \text{ adică:}$$

$$x^2+y^2-6x+y+3=0. \qquad (2)$$

Rezultă de aici că:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C \cap C' \Leftrightarrow I \begin{cases} x^2+y^2-2y-\dfrac{3}{2}=0 & (1) \\ x^2+y^2-6x+y+3=0 & (2) \end{cases}$$

Sîntem deci conduşi la rezolvarea sistemului I. Acest sistem I este echivalent cu sistemul II format din ecuaţia (1) şi ecuaţia (3) obţinut scăzînd membru cu membru ecuaţiile (1) şi (2):

$$\text{II} \begin{cases} x^2-y^2-2y-\dfrac{3}{2}=0 & (1) \\ 6x-3y-\dfrac{9}{2}=0. & (3) \end{cases}$$

Dacă se desemnează prin D dreapta de ecuaţie carteziană $6x-3y-\frac{9}{2}=0$. Avem:

$$M \in C \cap C' \Leftrightarrow \text{II} \begin{cases} x^2+y^2-2y-\dfrac{3}{2}=0 \\ 6x-3y-\dfrac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in D \cap C.$$

Rezultă de aici că $C \cap C' = D \cap C$ ceea ce dovedeşte că studiul intersecţiei a două cercuri C şi C' se poate reduce la studiul intersecţiei dreptei D cu cercul C. Rezolvarea sistemului II:

$$\text{II} \begin{cases} x^2+y^2-2y-\dfrac{3}{2}=0 \\ 6x-3y-\dfrac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-10x+\dfrac{15}{4}=0 \\ y=2x-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \text{ sau } x=\dfrac{3}{2} \\ y=2x-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

arată că intersecţia $D \cap C$, şi prin urmare intersecţia $C \cap C'$, conţine punctele A şi B de coordonate respective:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ şi numai aceste două puncte.}$$

II. *Fie C cercul de centru $\Omega \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi de rază $\frac{\sqrt{5}}{2}$ şi fie D dreapta de ecuaţie carteziană $2x + y + 1 = 0$. Să se determine dreptele tangente la cercul C şi paralele cu dreapta D.*

Mulţimea dreptelor paralele cu D este mulţimea dreptelor D_m de ecuaţii carteziene:

$2x + y + m = 0$, atunci cînd numărul real m parcurge $\mathbf{R}$. Distanţa de la punctul Ω la o dreaptă D_m este

$$d(\Omega, D_m) = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) + m|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3 + m|}{5}$$

Rezultă de aici că dreapta D_m este tangentă cercului C dacă şi numai dacă $|3 + m| = \frac{5}{2}$.

Rezolvarea ecuaţiei (1):

$|3 + m| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3 + m = \frac{5}{2}$ sau $3 + m = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ sau $m = -\frac{11}{2}$, dovedeşte că există două drepte, şi numai două, tangente la C şi paralele cu D:

a) dreapta $D_{-\frac{1}{2}}$ de ecuaţie carteziană: $2x + y - \frac{1}{2} = 0$,

b) dreapta $D_{-\frac{11}{2}}$ de ecuaţie carteziană: $2x + y - \frac{11}{2} = 0$.

III. *Să se determine dreptele care conţin $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi sînt tangente cercului C de ecuaţie: $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$.* (1)

Scriind ecuaţia (1) sub forma echivalentă: $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{5}$, se constată că Ω, centrul cercului C are coordonatele $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi că raza sa este egală cu $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (fig. 20).

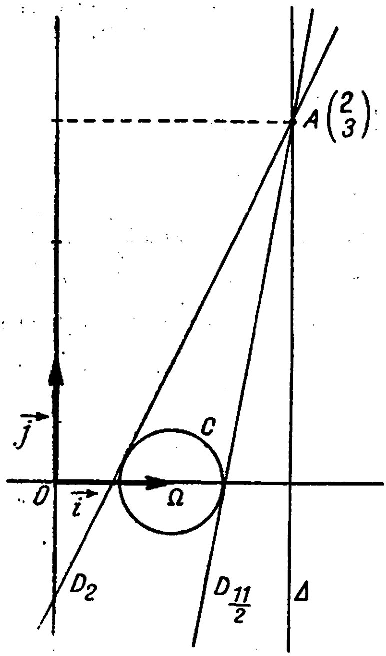


Fig. 20

● Dreapta Δ care conţine punctul $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ şi este paralelă dreptei ordonatelor are ecuaţia: $x - 2 = 0$.
Distanţa de la punctul Ω la dreapta Δ este:

$$d(\Omega, \Delta) = \frac{|1-2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 1$$

Cum această distanţă nu este egală cu $\frac{1}{\sqrt{5}}$ raza, raza cercului C, dreapta Δ nu este tangentă cercului C.

● Mulţimea dreptelor care conţin punctul $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, neparalele dreptei ordonatelor este mulţimea dreptelor D_m de ecuaţii:

$$y - 3 = m(x - 2),$$

sau

$mx - y + 3 - 2m = 0$, atunci cînd numărul real m parcurge $\mathbf{R}$. Distanța de la punctul Ω la o dreaptă D_m este: $d(\Omega, D_m) = \frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$. Rezultă de aici că dreapta D_m este tangentă cercului C dacă și numai dacă:

$$\frac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

adică dacă și numai dacă:

$$\frac{(-m+3)^2}{m^2+1} = \frac{1}{5}. \qquad (2)$$

Rezolvarea ecuației (2):

$\frac{(-m+3)^2}{m^2+1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 2m^2 - 15\,m + 22 = 0 \Rightarrow m = \frac{11}{2}$ sau $m = 2$, dovedește că dreptele $D_{\frac{11}{2}}$ și D_2 sînt tangente la C.

În concluzie există două drepte și numai două care conțin punctul A și sînt tangente cercului C:

a) dreapta $D_{\frac{11}{2}}$ cu ecuația carteziană: $\frac{11}{2}x - y - 8 = 0$;

b) dreapta D_2 cu ecuația carteziană: $2x - y - 1 = 0$.

IV Să se determine dreptele care conțin punctul $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ și sînt tangente cercului C de ecuație: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. (1)
Scriind relația (1) sub forma echivalentă: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, se constată că Ω, centrul cercului C are coordonatele $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ și că raza sa este egală cu 3 (fig. 21).

● Dreapta $\triangle$ care conține punctul $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ și este paralelă cu dreapta ordonatelor, are ecuația: $x - 5 = 0$.
Distanța de la punctul Ω la dreapta $\triangle$ este:
$d(\Omega, \triangle) = \frac{|2-5|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 3$. Cum această distanță este egală cu raza cercului C, dreapta $\triangle$ este tangentă cercului C.

● Mulțimea dreptelor care conțin punctul $A\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ și neparalele cu dreapta ordonatelor este mulțimea dreptelor D_m de ecuații:

$$y = m(x-5),$$

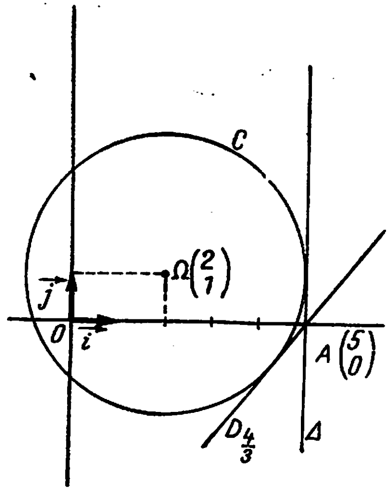


Fig. 21

sau $mx - y - 2m = 0$, atunci cînd numărul real m parcurge $\mathbf{R}$.
Distanța de la punctul Ω la o dreaptă D_m este:

$$d(\Omega, D_m) = \frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Rezultă de aici că dreapta D_m este tangentă cercului C dacă și numai dacă: $\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$, adică dacă și numai dacă:

$$\frac{(3m + 1)^2}{m^2 + 1} = 9. \tag{2}$$

Rezolvarea ecuației (2):

$$\frac{(3m + 1)^2}{m^2 + 1} = 9 \Leftrightarrow 6m = 8 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3},$$

dovedește că dreapta $D_{\frac{4}{3}}$ este tangentă cercului C.

În concluzie, există două drepte, și numai două, care conțin punctul A și sînt tangente cercului C:
a) dreapta Δ de ecuație carteziană: $x - 5 = 0$;
b) dreapta $D_{\frac{4}{3}}$ de ecuație carteziană: $\frac{4}{3} x - y - \frac{20}{3} = 0$.

EXERCIȚII

13.21. Fie un cerc C de centru Ω și de rază r, și o dreaptă D care conține un punct A interior cercului C.

1° Fie H proiecția ortogonală a punctului Ω pe D. Să se demonstreze că $OH < r$. Să se deducă de aici că dreapta D și cercul C sînt secante. Să se enunțe rezultatul obținut sub forma unei teoreme.

2° Există o dreaptă D tangentă cercului C și care conține un punct interior acestui cerc?

13.22. Fie un cerc C de centru O și de rază r și un punct A exterior acestui cerc.

1° Planul euclidian P, care conține C, fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ astfel încît $\vec{i} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|} \overrightarrow{OA}$, să se demonstreze analitic că există două drepte D și D' și numai două care conțin punctul A și sînt tangente cercului C.

2° Fie T și T' punctele de contact respective ale dreptelor D și D' cu cercul C. Să se demonstreze că cercul cu diametru $[O, A]$ conține punctele T și T' și că dreapta OA este mediatoarea segmentului $[T, T']$.

13.23. Fie un cerc C inclus în planul P și un punct A care aparține lui P. O dreaptă D care conține pe A este secantă la C în două puncte distincte M și M'. Să se demonstreze că puterea punctului A în raport cu cercul C este $C(A) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'}$.

13.24. Fie un cerc C inclus în planul P și un punct A care aparține lui P și este exterior acestui cerc. O dreaptă D care conține pe A este tangentă la C într-un punct T.

Să se demonstreze că puterea punctului A în raport cu cercul C este:

$$C(A) = AT^2.$$

13.25. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Să se scrie o ecuație a unui cerc C în cazurile următoare:

a) cercul C este tangent dreptei absciselor și centrul său Ω are coordonatele $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$;

b) cercul C este tangent dreptei ordonatelor și centrul său Ω are coordonatele $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$;

c) cercul C este tangent dreptei de ecuație $3x + 3y - 7 = 0$ și centrul său Ω are coordonatele $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$;

d) cercul C este tangent dreptei de ecuație $-2x + y = 0$ și centrul său Ω are coordonatele $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

13.26. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Să se studieze intersecția unui cerc C cu o dreaptă D ce se dau prin ecuații carteziene, în cazurile următoare:

a) $\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 7x + 2y - 53 = 0 \\ D: 2x - y + 3 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} C: x^2 + y^2 + 4x + 12y - 60 = 0 \\ D: 3x - y - 5 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} C: x^2 + y^2 - \dfrac{9}{2}x - 7y = 0 \\ D: 4x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} C: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0 \\ D: -2x + y = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} C: x^2 + y^2 - 6x - 2x - 2y + 6 = 0 \\ D: x + \dfrac{y}{2} - 1 = 0. \end{cases}$

2° Să se studieze intersecția cercului C definit printr-o ecuație carteziană cu o dreaptă D definită printr-unul din reperele sale $(A, \vec{u})$ în cazurile următoare:

a) $C: x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0,\qquad A\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix};$

b) $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0,\qquad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix};$

c) $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0,\qquad A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix};$

d) $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 2 = 0,\qquad A\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$

13.27. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie un cerc C definit printr-o ecuație carteziană și fie $\vec{u}$ un vector nenul. Să se determine dreptele tangente la C și care admit vectorul $\vec{u}$ ca vector director în cazurile următoare:

a) $C: x^2 + y^2 - 4 = 0,\qquad \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix};$

b) $C: x^2 + y^2 - 9 = 0,$ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$;

c) $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0,$ $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

d) $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0,$ $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pentru fiecare tangentă se vor determina coordonatele punctelor de contact.

13.28. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie un cerc C, definit printr-o ecuaţie carteziană, şi un punct A. Să se determine dreptele care conţin punctul A şi sînt tangente la cercul C în cazurile următoare:

a) $C: x^2 + y^2 - 4 = 0,$ $A\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $C: x^2 + y^2 - 9 = 0,$ $A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $C: x^2 + y^2 - 4x = 0,$ $A\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;

d) $C: x^2 + y^2 - 4x = 0,$ $A\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

e) $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0,$ $A\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$;

f) $C: x^2 + y^2 + 4x + 8y + 3 = 0,$ $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

g) $C: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0,$ $A\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pentru fiecare tangentă se vor determina coordonatele punctului de contact.

13.29. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fiecărui punct M de abscisă m care aparţine dreptei absciselor facem să-i corespundă punctul M' de ordonată $10 - 2m$ care aparţine dreptei ordonatelor şi cercul C_m de diametru $[M, M']$. Să se demonstreze că există un punct A diferit de O astfel că:

$$\forall m \in \mathbf{R} \quad A \in C_m.$$

13.30. Planul euclidian P este raportat la un reper $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C cercul pentru care o ecuaţie este:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0.$$

1° Fie D_m dreapta pentru care o ecuaţie este: $mx - y = 0$; dreapta D_m taie cercul C în O şi A. Să se calculeze în funcţie de m, coordonatele punctului A.
2° Fie Δ_m dreapta pentru care o ecuaţie este $mx + y = 0$. Dreapta Δ_m taie cercul C în O şi B. Să se calculeze în funcţie de m coordonatele punctului B.
3° Să se scrie o ecuaţie a dreptei AB. Ce se poate spune de această dreaptă cînd m parcurge $\mathbf{R}$?
13.31. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Să se scrie o ecuaţie a tangentei în O la cercul C pentru care o ecuaţie este $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$.
2° Să se scrie o ecuaţie a cercului C' care conţine punctul $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ şi este tangent în O la dreapta D pentru care o ecuaţie este $x + 2y = 0$.
13.32. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie D dreapta de ecuaţie $x - 2y - 3 = 0$ şi fie A punctul de coordonate $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Să se determine mulţimea centrelor cercurilor tangente în A dreptei D.
13.33. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie D şi D' două drepte de ecuaţii carteziene respective:

$$D: x + 2y + 3 = 0;$$

$$D': x + 2y + 1 = 0.$$

Să se determine mulţimea centrelor cercurilor tangente dreptelor D şi D'.
13.34. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie D şi D' două drepte de ecuaţii carteziene respective:

$$D: x - y - 2 = 0$$

$$D': 2x + y - 1 = 0.$$

Să se determine mulţimea centrelor cercurilor tangente dreptelor D şi D'.
13.35. Două cercuri distincte C şi C', incluse în planul P, de centre Ω şi Ω' sînt tangente unei drepte D într-un punct O care aparţine lui D. O dreaptă Δ care conţine pe O taie C în A şi C' în A'. Să se demonstreze că dreptele $\overrightarrow{\Omega A}$ şi $\overrightarrow{\Omega' A'}$ sînt paralele.
13.36. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C şi C' două cercuri de ecuaţii carteziene:

$$C: x^2 + y^2 - 2ax = 0, \qquad C': x^2 + y^2 - 2a'x = 0,$$

unde a şi a' sînt două numere reale nenule şi distincte.

1° Să se demonstreze că cercurile C şi C' sînt tangente în O dreptei D de reper $(O, \vec{j})$.
2° Fie M un punct al lui D, diferit de O. Cercul Γ de centru M şi de rază MO taie cercul C în O şi A şi cercul C' în O şi A'. Să se demonstreze că dreptele MA şi MA' sînt respectiv tangente la C şi la C'.

13.37. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, a fiind un număr real strict pozitiv.
1° Să se scrie ecuaţiile:
a) Cercului C de diametru $[A, B]$;
b) Dreptelor D şi D' tangente la C respectiv în A şi B.
2° Fie $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un punct care aparţine cercului C, diferit de A şi de B. Tangenta în M la cercul C taie dreapta D în R şi dreapta D' în S. Să se demonstreze că:

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{BS} = a^2 \text{ şi } AR + BS = RS.$$

3° Să se demonstreze că cercul de diametru $[R, S]$ este tangent dreptei AB în O.
4° Fie R şi S două puncte care aparţin respectiv lui D şi D' şi astfel încît $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{BS} = a^2$. Dreapta RS este tangentă cercului C?

13.38. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Cercul C taie dreapta de reper $(O, \vec{i})$ în O şi A şi dreapta de reper $(O, \vec{j})$ în O şi B.
1° Să se verifice că punctul $D\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aparţine lui C.
2° Să se scrie ecuaţiile cercurilor C_1, C_2, C_3 care au respectiv diametrele $[O, A]$, $[O, B]$, $[O, D]$.
3° Cercurile C_2 şi C_3 se taie în O şi M_1; cercurile C_3 şi C_1 se taie în O şi M_2; cercurile C_1 şi C_2 se taie în O şi M_3.
Să se calculeze coordonatele punctelor M_1, M_2 şi M_3 şi să se verifice că aceste trei puncte sînt coliniare.

13.39. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La fiecare număr real m, care aparţine intervalului $[-1, 1]$, facem să corespundă dreapta de ecuaţie:

$$mx + y\sqrt{1 - m^2} - 1 = 0.$$

1° Să se demonstreze că există un cerc C, pentru care se vor determina centrul şi raza, astfel încît oricare ar fi m din intervalul $[-1, +1]$, dreapta D_m este tangentă cercului C.
2° Fie $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un punct care aparţine cercului C şi fie tangenta

în M_0 la cercul C. Să se determine mulţimea punctelor M_0 pentru care există un număr real m astfel ca $\triangle = D_m$.

PROBLEME

13.40. Fie A şi B două puncte distincte din planul euclidian P şi fie k un număr real. Să se demonstreze pe cale analitică teorema 1 enunţată la nr. 13.1.6. (Se va raporta planul P la un reper o ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unde O este mijlocul lui $[A, B]$ şi $\vec{i}$ un vector director normal al dreptei AB.)

13.41. Fie A şi B două puncte distincte din planul euclidian P şi fie k un număr real strict pozitiv şi diferit de 1. Să se demonstreze pe cale analitică teorema 2 enunţată la nr. 13.1.6. (Se va raporta planul P la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unde O este mijlocul lui $[A, B]$ şi $\vec{i}$ un vector director normat al dreptei AB).

13.42. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fiecărui număr real m i se asociază mulţimea C_m a punctelor M din planul P pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifică relaţia:

$$x^2 + y^2 - 4mx - 2my + 10(m - 1) = 0$$

1° Să se demonstreze că oricare ar fi m, C_m este un cerc. Să se construiască pe aceeaşi figură C_0, C_1 şi C_{-1}.
2° Să se determine mulţimea punctelor Ω_m, centrele cercurilor C_m.
3° Să se demonstreze că există două puncte A şi B, pentru care se vor determina coordonatele, astfel ca: $\forall m \in \mathbf{R}\ \{A, B\} \subset C_m$.
4° Fie $\triangle$ dreapta AB. Să se demonstreze că, pentru orice punct $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ care nu aparţine dreptei $\triangle$, există un cerc C_m, şi numai unul, care conţine punctul M_0.
5° Să se demonstreze că mulţimea punctelor M din planul P avînd aceeaşi putere faţă de toate cercurile C_m este dreapta $\triangle$.

13.43. Aceeaşi problemă ca cea precedentă atunci cînd mulţimea C_m este definită prin:

a) C_m: $x^2 + y^2 - 2(1 + m)x + y(1 + 6m) + 5m - \dfrac{5}{4} = 0$;

b) C_m: $x^2 + y^2 + (2m + 1)x - 2(m - 1)y = 0$.

13.44. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fiecărui număr real m i se asociază mulţimea C_m a punctelor M din plan pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ verifică relaţia:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2(1 + m)y + 6m + 1 = 0.$$

1° Să se determine mulţimea E a numerelor reale m pentru care C_m nu este vidă şi să se demonstreze că pentru orice număr real m care aparţine lui E, C_m este un cerc.
Să se demonstreze că familia de cercuri C_m conţine două cercuri-puncte pe care le vom nota $\{A\}$ şi $\{B\}$.
2° Să se determine mulţimea centrelor Ω_m corespunzătoare cercurilor C_m atunci cînd numărul real m descrie mulţimea E.
3° Să se demonstreze că pentru orice cerc C_m de centru Ω_m şi de rază r_m, avem: $r_m^2 = \overrightarrow{\Omega_m A} \cdot \overrightarrow{\Omega_m B}$.
4° Să se demonstreze că mulţimea punctelor M din planul P avînd aceeaşi putere în raport cu toate cercurile C_m este dreapta $\triangle$, mediatoarea segmentului $[A, B]$.
Să se demonstreze că pentru orice punct M care aparţine lui $\triangle$, puterea lui M în raport cu orice cerc, C_m este egală cu MA^2.
5° Să se demonstreze că pentru orice punct $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ care nu aparţine lui $\triangle$, există un cerc C_m, şi numai unul, care conţine pe M_0.
6° Fie D o dreaptă neparalelă cu $\triangle$. Să se demonstreze că există două cercuri C_m, şi numai două, tangente dreptei D respectiv în T şi T'. Să se demonstreze că I, mijlocul lui T, T', aparţine lui $\triangle$ şi au loc egalităţile: $IT^2 = IT'^2 = IA^2$.
13.45. Aceeaşi problemă ca cea precedentă atunci cînd mulţimea C_m este definită prin relaţia:

$$x^2 + y^2 - 2(1 + m)x + 4my + 7m + 1 = 0.$$

13.46. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie D dreapta de reper $(O, \vec{i}, \vec{j})$ şi fie D' dreapta care conţine punctul $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ şi care admite vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ca vector director.
1° La orice punct M care aparţine lui D şi astfel încît $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$, facem să corespundă punctul M' care aparţine lui D' şi astfel încît $\overrightarrow{AM'} = m\vec{u}$. Fie D_m mediatoarea segmentului $[M, M']$. Să se demonstreze că există un punct I, pentru care se vor determina coordonatele, astfel încît

$$\forall m \in \mathbf{R} \qquad I \in D_m.$$

2° Fie B punctul de intersecţie al dreptelor D şi D'. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul real m, cele patru puncte M, M', I, B aparţin aceluiaşi cerc.
13.47. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ unde a şi b sînt două numere reale strict pozitive. Fie C cercul cu diametrul $[A, B]$.

La orice punct M din planul P se asociază punctele R, S, T, proiecțiile ortogonale respective ale punctului M pe dreptele OA, OB și AB. Să se demonstreze echivalența:

$$M \in C \Leftrightarrow R, S, T \text{ sînt coliniare.}$$

13.48. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Se dau punctele $A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ și $B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1° Să se determine pe cale analitică mulțimea punctelor M din planul P astfel încît $MA^2 + 3MB^2 = 96$.
2° Să se demonstreze că există un punct I și numai unul astfel ca $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Să se demonstreze că: $\forall M \in P$

$$MA^2 + 3MB^2 = 4MI^2 + \frac{3}{4}AB^2.$$

3° Să se utilizeze rezultatele de la punctul 2° pentru a le regăsi pe cele de la punctul 1°.

13.49. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fiecărui număr real m facem să-i corespundă dreapta D_m pentru care o ecuație carteziană este:

$$(1 - m^2)x + 2my - (4m + 2) = 0.$$

1° Să se demonstreze că există un cerc C, pentru care se vor determina centrul și raza astfel încît:

$$\forall m \in \mathbf{R} \; D_m \text{ este tangentă la } C.$$

2° Există un număr real m astfel încît $\triangle = D_m$ pentru orice dreaptă $\triangle$, tangentă la C?

13.50. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La fiecare număr real m facem să-i corespundă dreapta D_m care conține punctele:

$M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + m \end{pmatrix}$ și $M'\begin{pmatrix} 2a \\ 1 + \dfrac{a^2}{m} \end{pmatrix}$, a fiind un număr real strict pozitiv.

1° Să se scrie ecuația carteziană a dreptei D_m.
2° Să se demonstreze că există un cerc C, pentru care se vor determina centrul și raza astfel încît:

$$\forall m \in \mathbf{R}^* \quad D_m \text{ este tangenta la } C.$$

13.51. Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C și C' cercurile de ecuații carteziene:

$$C \; : x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0;$$
$$C' : x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0.$$

1° Să se determine coordonatele punctelor Ω şi Ω', centrele respective ale cercurilor C şi C' şi coordonatele punctelor A şi B de intersecţie a celor două cercuri.
2° Să se demonstreze că există două drepte D şi D', tangente la C şi C' şi că aceste două drepte se taie într-un punct I astfel încît $\overrightarrow{I\Omega'} = \frac{r'}{r}\overrightarrow{I\Omega}$. ($r$ şi r' sînt razele respective ale cercurilor C şi C').
3° Fie T şi T' punctele de contact respective ale dreptei D cu cercurile C şi C'. Să se demonstreze că mijlocul R al segmentului $[T, T']$, aparţine dreptei AB şi că

$$RT^2 = RT'^2 = \overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB}.$$

13.52. 1° Fie x_1, y_1, x_2, y_2 patru numere reale. Să se verifice egalitatea:

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2.$$

Să se deducă de aici implicaţia:

$$\left.\begin{matrix} x_1^2 + y_1^2 \leq 1 \\ x_2^2 + y_2^2 \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x_1x_2 + y_1y_2| \leq 1.$$

2° Planul euclidian P este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Fie C cercul de centru O şi de rază 1 şi fie $M_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ şi $M_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ două puncte interioare cercului C. Să se demonstreze că:

$$M \in [M_1, M_2] \Rightarrow M \text{ este interior lui } C.$$

Se va utiliza echivalenţa:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [M_1, M_2] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1]; \begin{cases} x = (1 - t)y_1 + tx_2 \\ y = (1 - t)y_1 + ty_2. \end{cases}$$

D E 14 SFERA

14.1. ECUAȚIA CARTEZIANĂ A UNEI SFERE

14.1.1. Generalități

Notă. *În acest capitol, E_3 desemnează un spațiu afin euclidian de dimensiune 3.*

Fie Ω un punct care aparține spațiului E_3 și fie r un număr real strict pozitiv.

DEFINIȚIA / 1. **Se numește sferă de centru Ω și rază r, mulțimea punctelor M din spațiul E_3 pentru care $d(\Omega, M) = r$.**

Sfera de centru Ω și rază r poate fi notată $S(\Omega, r)$ sau mai simplu $S, S', \Sigma, \ldots$.

DEFINIȚIA / 2. **Se numește interiorul (respectiv exteriorul) sferei $S(\Omega, r)$, mulțimea punctelor M din spațiul E_3 pentru care $d(\Omega, M) < r$ (respectiv $d(\Omega, M) > r$).**

Interiorul sferei $S(\Omega, r)$ este de asemenea numit **bulă deschisă** de *centru* Ω și de *rază* r și poate fi notată $B(\Omega, r)$.

Reuniunea $S(\Omega, r) \cup B(\Omega, r)$ este numită **bulă închisă** de *centru* Ω şi de *rază* r; această bulă închisă este mulţimea punctelor M din spaţiul E_3, pentru care $d(\Omega, M) \leq r$.
Consecinţe. Fie S o sferă de centru Ω şi de rază r şi fie D o dreaptă care conţine pe Ω (fig. 1).

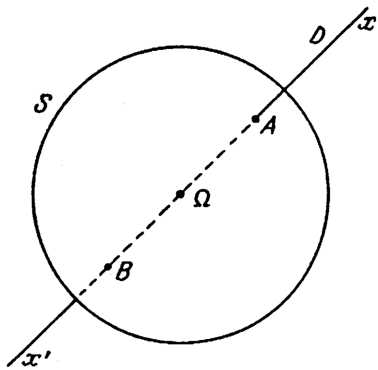


Fig. 1

Ωx şi $\Omega x'$ fiind două semidrepte de origine Ω incluse în D, punctul A al semidreptei Ωx pentru care $d(\Omega, A) = r$ este singurul care aparţine intersecţiei $\Omega x \cap S$. La fel punctul B al semidreptei $\Omega x'$ pentru care $d(\Omega, B) = r$ este singurul punct care aparţine intersecţiei $\Omega x' \cap S$. Rezultă de aici:

$$D \cap S = \{A, B\}.$$

Se spune că segmentul $\{A, B\}$ ale cărui extremităţi aparţin sferei S şi al cărui mijloc este centrul ei, este un **diametru** al lui S. Se spune de asemenea că punctele A şi B sînt două puncte **diametral opuse** ale sferei S.
Observaţii. — **1.** Mulţimea punctelor M din spaţiul E_3 pentru care $d(\Omega, M) = 0$ conţine singurul punct Ω. Această mulţime $\{\Omega\}$ poate fi numită sfera de centru Ω şi de rază nulă. Se spune de asemenea că mulţimea $\{\Omega\}$ este o **sferă — punct.**

2. Fie S o sferă din spaţiul E_3. Cele trei submulţimi din E_3: Sfera S, interiorul lui S, exteriorul lui S formează o *partiţie* a lui E_3.

14.1.2. Sfera care conţine două puncte distincte, trei puncte necoliniare

1. Fie A şi B două puncte *distincte.*
Dacă o sferă S de centru Ω şi de rază r conţine pe A şi B (fig. 2), avem: $\Omega A = \Omega B = r$, ceea ce implică faptul că punctul aparţine planului mediator P al segmentului $[A, B]$.
Reciproc, dacă un punct Ω aparţine planului P, urmează imediat că sfera S de centru Ω şi de rază ΩA conţine punctele A şi B. Se poate deci enunţa:

TEOREMA 1. / **Mulţimea centrelor sferelor care conţin două puncte distincte A şi B este planul mediator al segmentului $[A, B]$.**

2. Fie A, B, C trei puncte *necoliniare.*

● Studiem mulţimea F a punctelor K din spaţiul E_3 egal depărtate de trei puncte A, B, C.

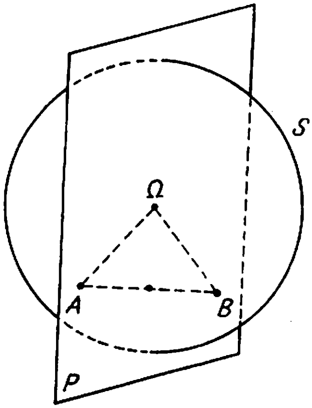
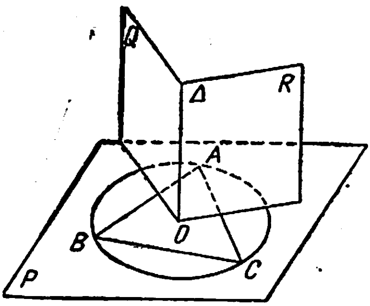


Fig. 2

Q şi R fiind planele mediatoare respective ale segmentelor $[A, B]$ şi $[A, C]$ (fig. 3), avem:

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow MA = MB \text{ şi } MA = MC \\ &\Leftrightarrow M \in Q \text{ şi } M \in R \\ &\Leftrightarrow M \in Q \cap R, \text{ ceea ce implică} \\ & F = Q \cap R. \end{aligned}$$

Fig. 3



Planele Q şi R nu sînt paralele, în caz contrar dreptele AB şi AC care sînt ortogonale acestora ar fi paralele şi deci egale ceea ce este contradictoriu deoarece punctele A, B, C nu sînt coliniare. Rezultă de aici că planele P şi R sînt secante după o dreaptă $\triangle$ astfel încît:

$$\left.\begin{array}{c} F = \triangle \\ \text{dreapta } AB \perp Q \\ \text{şi } \triangle \subset Q \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dreapta } AB \perp \triangle,$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{dreapta } AC \perp R \\ \text{şi } \triangle \subset R \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dreapta } AC \perp \triangle.$$

Dreapta $\triangle$, care este ortogonală celor două drepte concurente AB şi AC incluse în planul P, care conţine punctele A, B, C, este ortogonală planului P. Dreapta $\triangle$ taie deci planul P într-un punct O şi acest punct O care este egal depărtat de cele trei puncte necoliniare A, B,C este centrul cercului ABC.

DEFINIȚIE / **Se numește axă a unui cerc de centru O inclus în planul P, dreapta care conține pe O și este ortogonală lui P.**

Această definiție și studiul care a precedat-o permit să se enunțe:

TEOREMA / 2. **Mulțimea punctelor M din spațiul E_3, egal depărtate de trei puncte necoliniare A, B, C este axa cercului ABC.**

● Dacă o sferă S de centru Ω și de rază r conține trei puncte A, B, C, avem:

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = r,$$

ceea ce implică faptul că punctul Ω aparține dreptei $\triangle$, axa cercului A, B, C.
Reciproc, dacă un punct Ω aparține dreptei $\triangle$, urmează imediat că sfera S de centru Ω și de rază ΩA conține cele trei puncte A, B, C. Se poate deci enunța:

TEOREMA / 3. **Mulțimea centrelor sferelor care conțin trei puncte necoliniare A, B, C este axa cercului ABC.**

14.1.3. Sfera care conține patru puncte necoplanare

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare (fig. 4). Desemnăm prin $\triangle$ axa cercului ABC și prin P planul mediator al segmentului $[A, D]$.
Dacă o sferă S de centru Ω și de rază r conține patru puncte A, B, C, D, avem:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega A = \Omega B = \Omega C = r\\ \Omega A = \Omega D = r\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Omega \in \triangle\\ \Omega \in P\end{array}\right\} \Rightarrow \Omega \in \triangle \cap P.$$

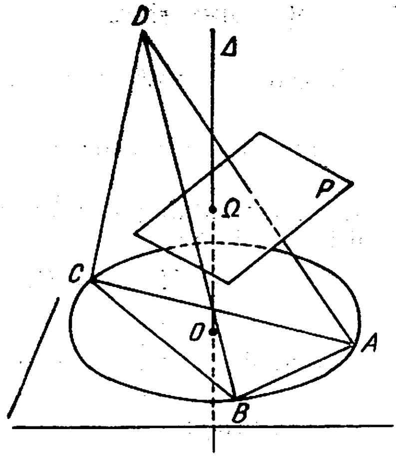


Fig. 4

Studiem intersecția $\Delta \cap P$. Dacă dreapta Δ ar fi paralelă cu planul P, dreapta AD, ortogonală lui P ar fi ortogonală lui Δ și am avea:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp \text{dreapta } AB\\ \Delta \perp \text{dreapta } AD\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta \perp \text{plan } ABD;$$

ar exista deci două plane distincte (planele ABC și ABD) care conțin punctul A și ortogonale cu Δ, ceea ce este contradictoriu.

Rezultă deci că dreapta Δ și planul P sînt secante ceea ce implică $\Delta \cap P = \{\Omega\}$.

În cele din urmă dacă o sferă S conține patru puncte A, B, C, D, centrul său Ω este punctul de intersecție al dreptei Δ cu planul P și raza sa este egală cu ΩA. *Reciproc,* urmează imediat că sfera de centru Ω, punctul de intersecție al lui Δ cu P, și de rază OA conține cele patru puncte A, B, C, D. Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **Există o sferă, și numai una, care conține patru puncte necoplanare.**

14.1.4. Ecuația unei sfere

Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie S o sferă de centru $\Omega \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ și de rază r (fig. 5). M fiind un punct din spațiul E_3, rezultă din definiția sferei că:

$$M \in S \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2.$$

Pe de altă parte dacă $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sînt coordonatele punctului M, avem (nr. **12.1.6**):

$$\Omega M^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

ceea ce dă în cele din urmă:

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Se spune că relația:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0,$$

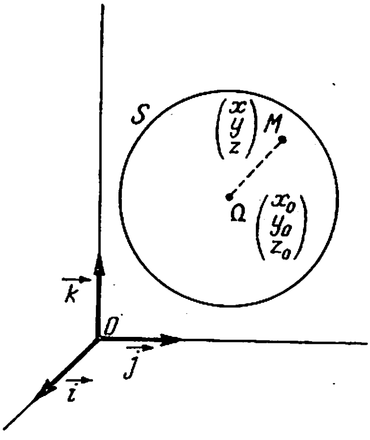


Fig. 5

care este verificată de coordonatele x, y, z ale unui punct M din spaţiul E_3 dacă şi numai dacă acest punct aparţine sferei S, este o **ecuaţie carteziană** sau, mai simplu, o **ecuaţie a sferei** S. Se poate deci enunţa:

TEOREMĂ / **Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat, o ecuaţie carteziană a sferei, S de centru $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ şi de rază r este:**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0.$$

EXEMPLE. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. O ecuaţie carteziană a sferei de centru O şi de rază r este:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

II. O ecuaţie carteziană a sferei de centru $\Omega\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ şi de rază 9 este: $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 8)^2 - 81 = 0$, adică

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y - 16z = 0.$$

Se constată că originea reperului, O pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verifică relaţia precedentă, aparţine acestei sfere.

Observaţii. — 1 Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie S sfera de centru $\Omega\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ şi de rază r. Un punct $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ din spaţiul E_3 aparţine interiorului sferei dacă şi numai dacă:

$$\Omega M < r \Leftrightarrow \Omega M^2 < r^2 \Leftrightarrow \Omega M^2 - r^2 < 0,$$

adică dacă şi numai dacă:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 < 0. \quad (1)$$

De asemenea, un punct $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aparţine exteriorului sferei S dacă şi numai dacă $\Omega M > r$, adică dacă şi numai dacă:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 > 0. \quad (2)$$

Relaţiile (1) şi (2) permit deci să se caracterizeze interiorul respectiv exteriorul sferei S.

2. Dacă se dezvoltă primul membru al ecuaţiei unei sfere S:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$$

se obţine:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + \\ + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0.$$

În această relaţie numerele x_0, y_0, z_0, r sînt date. Rezultă că ecuaţia sferei S este de forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt patru numere reale date.

14.1.5. Problemă

Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k},)$ să se studieze mulţimea Σ a punctelor M din spaţiul E_3 pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *verifică relaţia:*

$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, *unde* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sînt patru numere reale date.*

$$x^2 + \alpha x = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4},$$

$$y^2 + \beta y = \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4},$$

$$z^2 + \gamma z = \left(z + \frac{\gamma}{2}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{4};$$

rezultă de aici:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\gamma}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta.$$

Pe de altă parte Ω fiind punctul de coordonate $\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}$, avem (nr. **12.1.6**):

$$\Omega M^2 = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{\gamma}{2}\right)^2,$$

ceea ce implică:

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta.$$

Trei cazuri se pot prezenta:

1. $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta < 0$. Urmează atunci imediat că egalitatea : $\Omega M^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta$ nu este verificată de nici un punct K din spaţiul E_3, deci că : $\Sigma = \emptyset$.

2. $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta = 0$. Urmează atunci :

$$M \in \Sigma \Leftrightarrow \Omega M^2 = 0 \Leftrightarrow \Omega M = 0 \Leftrightarrow M = \Omega,$$

ceea ce dovedeşte că $\Sigma = \{\Omega\}$, deci că Σ este o sferă-punct.

3. $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta > 0$. Există atunci un număr real strict pozitiv r, şi numai unul, astfel ca :

$$r^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta;$$

$\left(r \text{ este rădăcina patrată pozitivă din } \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta\right)$.

Avem în acest caz : $M \in \Sigma \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow \Omega M = r$, ceea ce dovedeşte că Σ este sfera de centru Ω şi de rază r.

Studiul care a fost făcut mai înainte permite să se enunţe :

TEOREMĂ / **Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat, fie Σ mulţimea punctelor M din spaţiu pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ verifică relaţia :**

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0.$$

a) **Dacă :** $\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} - \delta < 0$, **atunci** Σ **este vidă.**

b) Dacă: $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta \geqslant 0$, **atunci**

Σ este sfera de centru $\Omega\begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{\beta}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} \end{vmatrix}$ **și de**

rază $r=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta}$.

Reținerea acestei teoreme nu este strict necesară. Într-adevăr aceste rezultate se regăsesc imediat transformînd relația:

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0,$$

în relația:

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\gamma}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\gamma^2}{4}-\delta.$$

EXEMPLE. *Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se studieze mulțimile Σ_1, Σ_2, Σ_3 definite respectiv prin relațiile:*

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+16=0; \tag{1}$$

$$x^2+y^2+z^2-3x+\ y-2z+\frac{7}{2}=0; \tag{2}$$

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y+8z+12=0. \tag{3}$$

● Relația (1) este echivalentă cu:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=-2;$$

rezultă de aici că mulțimea Σ_1 este vidă.

● Relația (2) este echivalentă cu:

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-1)^2=0;$$

rezultă de aici că mulţimea Σ_2 este sfera-punct de centru $\Omega_2\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

● Relaţia (3) este echivalentă cu:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z+4)^2=9;$$

rezultă de aici că mulţimea Σ_3 este sfera de centru $\Omega_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ şi de rază 3.

Observaţie. Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat, fie S o sferă de ecuaţie:

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0. \qquad (1)$$

Pentru orice număr real nenul k, relaţia (1) este echivalentă cu relaţia:

$$k(x^2+y^2+z^2)+k\alpha x+k\beta y+k\gamma z+k\delta=0, \qquad (2)$$

şi relaţia (2), care este verificată de coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ale unui punct M din spaţiu dacă şi numai dacă acest punct aparţine lui S, este o ecuaţie a sferei S. Sfera S are deci o infinitate de ecuaţii de forma:

$$k(x^2+y^2+z^2)+\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0;$$

una singură dintre aceste ecuaţii, numită **ecuaţia normalizată a lui** S este astfel încît $k=1$. Într-adevăr dacă $x^2+y^2+z^2+\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+$ $+\delta'=0$ este o ecuaţie a sferei S de centru $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ şi de rază r; avem:

$$x_0=-\frac{\alpha'}{2},\ y_0=-\frac{\beta'}{2},\ z_0=-\frac{\gamma'}{2},$$

$$r^2=\frac{\alpha'^2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}+\frac{\gamma'^2}{4}-\delta',$$

ceea ce dovedeşte că:

$$\alpha' = -2x_0, \ \beta' = -2y_0, \ \gamma' = -2z_0,$$
$$\delta' = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2,$$

deci că coeficienţii α', β', γ', δ' sînt determinaţi în mod unic.

14.1.6. Sfera definită de extremităţile unui diametru

Fie A şi B două puncte distincte din spaţiul E_3. Există o sferă S, şi numai una, care admite segmentul $[A, B]$ ca diametru; centrul acestei sfere este punctul Ω, mijlocul lui $[A, B]$ şi raza sa este $r = \frac{1}{2} AB$ (fig. 6). Prin urmare:

$$M \in S \Leftrightarrow \Omega M = \frac{1}{2} AB.$$

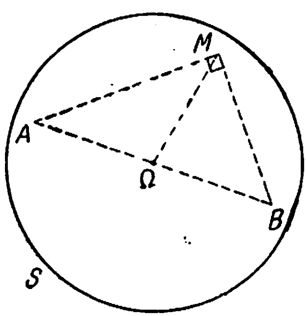


Fig. 6

Pe de altă patre, o demonstraţie analogă celei făcute la nr. **13.1.5** în legătură cu cercul dovedeşte că:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow QM = \frac{1}{2} AB.$$

Rezultă de aici: $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, ceea ce permite să se enunțe următoarea:

TEOREMĂ / **A şi B fiind două puncte distincte din spaţiul E_3, un punct M din E_3 aparţine unei sfere de diametru $[A, B]$ dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ sînt ortogonali.**

Consecinţă. Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, fie $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ şi $B\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ două puncte distincte din E_3 şi fie S sfera de diametru $[A, B]$.

Un punct $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aparţine sferei S dacă şi numai dacă: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Cum vectorii $\overrightarrow{MA}$ şi $\overrightarrow{MB}$ au coordonatele respective $\begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \\ z_0 - z \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \\ z_1 - z \end{pmatrix}$, produsul scalar $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ este egal cu:

$$(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y)(y_1 - y) + \\ + (z_0 - z)(z_1 - z).$$

Rezultă de aici:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow (x_0 - x)(x_1 - x) + \\ + (y_0 - y)(y_1 - y) + (z_0 - z)(z_1 - z) = 0,$$

ceea ce dovedeşte că ecuaţia sferei de diametru $[A, B]$ este:

$$(x_0 - x)(x_1 - x) + (y_0 - y)(y_1 - y) + \\ + (z_0 - z)(z_1 - z) = 0.$$

EXEMPLE. Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. *A fiind un punct de coordonate* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, *să se stabilească o ecuație a sferei S de diametru* $[O, A]$.

Un punct $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ din spațiul E_3 aparține sferei S de diametru $[O, A]$ dacă și numai dacă: $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, adică dacă și numai dacă:

$$-x(x_0 - x) - y(y_0 - y) - z(z_0 - z) = 0.$$

Rezultă de aici că o ecuație a sferei S este:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x_0x - y_0y - z_0z = 0.$$

II. *A și B fiind două puncte de coordonate respective* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ *și* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$, *să se stabilească o ecuație a sferei S de diametru* $[A, B]$.

Un punct $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ din spațiul E_3 aparține sferei S de diametru $[A, B]$ dacă și numai dacă: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, adică dacă și numai dacă:

$$(-x)(-x) + (-y)(-y) + (a - x)(b - x) = 0.$$

Rezultă de aici că o ecuație a sferei S este:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (a + b)z + ab = 0$$

EXERCIȚII

14.1. Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se determine o ecuație a sferei S care conține cele patru puncte A, B, C, D în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

b) $A\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$;

c) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Pentru fiecare caz se vor determina centrul și raza sferei S.

14.2. Fie un triunghi echilateral ABC astfel încît $AB = a$.
1° Să se demonstreze că mulţimea punctelor M din spaţiu pentru care: $MA = MB = MC = a$, conţine două elemente şi numai două.
2° D fiind unul din cele două puncte definite la punctul 1°, să se exprime în funcţie de a, raza sferei S care conţine cele patru puncte A, B, C, D.

14.3. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se scrie o ecuaţie a sferei S definită prin:

1° Centrul său $\Omega\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ şi raza sa 1.

2° Centrul său $\Omega\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ şi raza sa $\sqrt{2}$.

3° Centrul său $\Omega\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ şi punctul $A\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$ care îi aparţine.

4° Punctele diametral opuse A şi B:

a) $A\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$, b) $A\begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$;

c) $A\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\0\\7\end{pmatrix}$, d) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

14.4. Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se studieze mulţimea Σ a punctelor M pentru care coordonatele $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ verifică relaţia:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 4z + \dfrac{13}{2} = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 6z + \dfrac{21}{2} = 0$;

c) $2(x^2 + y^2 + z^2) + 6x - 2y + 8z + 9 = 0$;

d) $3(x^2 + y^2 + z^2) + 2x - z = 0$;

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 4ay - 6az + 5a^2 = 0$;

f) $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z - \dfrac{1}{4} = 0$.

14.5. Fie două puncte distincte A şi B şi fie D o dreaptă neortogonală dreptei AB.

1° Să se demonstreze că există o sferă S, şi numai una, care conţine punctele A şi B şi pentru care centrul Ω aparţine dreptei D.

2° Spaţiul fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi dreapta D fiind definită printr-unul din reperele sale $(M_0, \vec{u})$, să se determine o ecuaţie a sferei S în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$, $M_0\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$;

b) $A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $M_0\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

14.6. Fie trei puncte A, B, C necoliniare şi fie P un plan neperpendicular pe planul ABC.

1° Să se demonstreze că există o sferă S, şi numai una, care conţine punctele A, B, C şi pentru care centrul Ω aparţine planului P.

2° Spaţiul fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ şi planul P fiind definit printr-o ecuaţie carteziană, să se determine o ecuaţie a sferei S în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$, $P: 2x + y - z - 3 = 0$;

b) $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$, $P: 4x + 3y + 5z - 8 = 0$.

3° Planul P fiind definit printr-unul din reperele sale $(M_0, \vec{u}, \vec{u'})$, să se determine o ecuaţie a sferei S în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}$, $M_0\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

b) $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $M_0\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{u'}\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$.

14.7. Fie A şi B două puncte distincte din spaţiul E_3 şi fie k un număr real strict pozitiv şi diferit de 1. Se desemnează prin S mulţimea punctelor M din spaţiu astfel încît: $MA = kMB$.

1° Să se demonstreze că cele două puncte I şi J definite prin: $\overrightarrow{IA} = -k\overrightarrow{IB}$ şi $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JB}$, aparţin dreptei AB şi mulţimii S.

2° Să se demonstreze că:

$$M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0.$$

Să se deducă de aici că mulţimea S este sfera de diametru $[I, J]$.

3° Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se determine pe cale analitică mulţimea S în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k = 2$;

b) $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k = 3$.

14.8. Fie A, B, D, C, E cinci puncte din spaţiul E_3 şi fie k un număr real.

1° Să se demonstreze că, pentru orice punct M din spaţiu, vectorul:

$$\vec{v}_M = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} \text{ este constant.}$$

2° Să se demonstreze că, dacă numărul k este diferit de -3, există un punct G, şi numai unul, astfel încît:

$$\forall M \in E_3 \quad \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} = (3 + k)\overrightarrow{MG}.$$

3° Să se studieze, după valorile lui K, mulţimea Σ a punctelor M din spaţiu pentru care:

$$\| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + k\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} \|.$$

14.9. A, B, C fiind trei puncte necoliniare din spaţiul E_3, se consideră aplicaţia $\mathfrak{f}$ a lui E_3 în E_3 definită prin:

$$\mathfrak{f}(M) = \vec{v}_M = MA^2\overrightarrow{BC} + MB^2\overrightarrow{CA} + MC^2\overrightarrow{AB}.$$

1° Fie O centrul cercului ABC. Să se demonstreze că:

$$\forall M \in E_3 \quad \vec{v}_M = 2[(\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB})\overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC})\overrightarrow{AB}].$$

2° Să se demonstreze că vectorul $\vec{v}_M$ este nul dacă şi numai dacă punctul M aparţine axei cercului ABC.

3° Să se demonstreze că, pentru orice punct M din spaţiu, vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\vec{v}_M$ sînt ortogonali.

14.10. Fie A şi B două puncte din spaţiul E_3 şi fie k un număr real.

1° I fiind mijlocul segmentului $[A, B]$ să se demonstreze că:

$$\forall M \in E_3 \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

2° Să se studieze, după valorile lui k, mulţimea Σ a punctelor M din spaţiu pentru care: $MA^2 + MB^2 = k$.

3° Spațiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se determine pe cale analitică mulțimea Σ în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k = \frac{19}{2}$;

b) $A\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $k = 2$;

c) $A\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $k = 7$.

14.11. Fiecărui cuplu (m, p) de numere reale, se asociază mulțimea $S_{m,p}$ de puncte M din spațiul E_3 pentru care coordonatele $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ verifică relația:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(4 + 3m - p)x - 2my - 2pz + 10m - 6p - 1 = 0.$$

1° Să se demonstreze că există două puncte A și B, pentru care se vor determina coordonatele, astfel încît:

$$\forall (m, p) \in \mathbf{R}^2 \quad \{A, B\} \subset S_{m,p}.$$

Să se deducă de aici că oricare ar fi cuplul (m, p), mulțimea $S_{m,p}$ este o sferă.

2° Care este mulțimea centrelor sferelor $S_{m,p}$?

3° Care este mulțimea centrelor sferelor $S_{m,p}$ care conțin punctul $I\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$?

14.12. Fie un triunghi dreptunghic isoscel ABC $(AB = AC = a)$ și fie Γ cercul de diametru $[A, B]$ inclus în planul care conține dreapta AB și perpendicular planului ABC.

1° M fiind un punct al cercului Γ, diferit de A și de B, să se exprime $MB^2 + MC^2$ în funcție de a.

2° Să se determine centrul și raza sferei care conține cele patru puncte A, B, C, M.

14.13. Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie C cercul de centru $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ și de rază 1 inclus în planul de ecuație $z = 0$, și fie C' cercul de centru $\Omega'\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ și de rază $\sqrt{6}$, inclus în planul de ecuație $y = 0$.

Să se demonstreze că există o sferă S, și numai una, care conține pe C și pe C'.

14.2. INTERSECŢIA UNUI PLAN CU O SFERĂ, A UNEI DREPTE CU O SFERĂ

14.2.1. Intersecţia unui plan cu o sferă

Problemă. *Să se studieze pe cale analitică intersecţia unui plan cu o sferă S de centru Ω şi de rază r.*

● *Alegerea unui reper în spaţiul E_3.*

Dreapta D care conţine punctul Ω şi este ortogonală planului P, taie P în punctul O, proiecţia ortogonală a lui Ω pe P (fig. 7) $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fiind un reper orto-

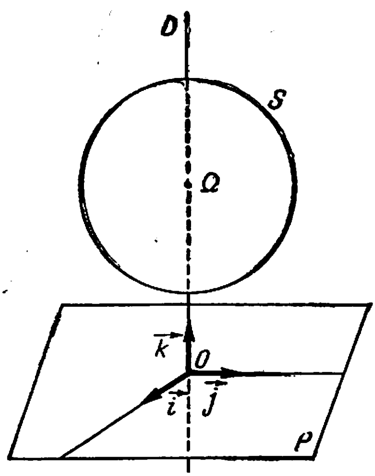


Fig. 7

normat al planului P cu originea O şi k fiind un vector director unitar al dreptei D, urmează imediat că reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este un reper ortonormat al spaţiului E_3.

Primele două coordonate ale punctului Ω în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sînt nule; desemnăm prin z_0 a treia coordonată a sa. Avem atunci:

$$d(\Omega, P) = d(\Omega, 0) = | z_0 |.$$

În sfîrşit, o ecuaţie a planului P în reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este: $z = 0$ şi o ecuaţie a sferei S este:

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0.$$

● *Studiul intersecţiei* $P \cap S$.

Fiecare punct M care nu aparţine planului P nu aparţine nici intersecţiei $P \cap S$.

Fie un punct M care aparţine planului P, de coordonate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ al planului P; coordonatele lui M în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ al spaţiului E_3 sînt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Prin urmare, punctul M aparţine sferei S dacă şi numai dacă:

$$x^2 + y^2 + (0 - z_0)^2 - r^2 = 0,$$

adică dacă şi numai dacă:

$$x^2 + y^2 + (0 - z_0)^2 - r^2 = 0,$$

adică dacă şi numai dacă:

$$x^2 + y^2 = r^2 - z_0^2.$$

Rezultă de aici că intersecţia $P \cap S$ este mulţimea punctelor M care aparţin planului P, pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ al lui P verifică relaţia: $x^2 + y^2 = r^2 - z_0^2$. (1) Se pot prezenta trei cazuri:

Primul caz:

$$r^2 - z_0^2 < 0 \Rightarrow r^2 < z_0^2 \Leftrightarrow r < |z_0|$$
$$\Leftrightarrow r < d(\Omega, P).$$

Urmează atunci imediat că relaţia (1) nu este verificată de nici un cuplu (x, y), deci că intersecţia $P \cap S$ este vidă (fig. 7). Prin urmare:

$$d(\Omega, P) > r \Rightarrow P \cap S = \emptyset. \qquad (2)$$

Cazul al doilea:

$$r^2 - z_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = z_0^2 \Leftrightarrow r = |z_0|$$
$$\Leftrightarrow r = d(\Omega, P).$$

Relația (1) care se scrie atunci $x^2 + y^2 = 0$ este ecuația, în reperul ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j})$ al planului P, al cercului-punct $\{O\}$ (fig. 8). Prin urmare:

$$d(\Omega, P) = r \Rightarrow P \cap S = \{O\}. \qquad (3)$$

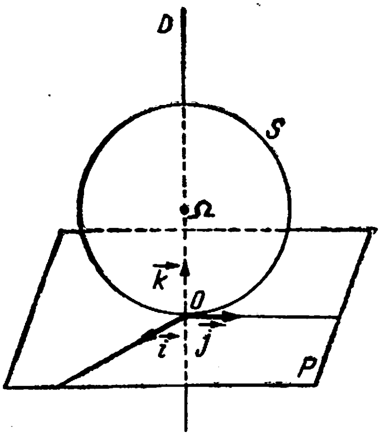


Fig. 8

Cazul al treilea:

$$r^2 - z_0^2 > 0 \Leftrightarrow r^2 > z_0^2 \Leftrightarrow r > |z_0| \Leftrightarrow r > d(\Omega, P).$$

Relația (1) este atunci ecuația, în reperul ortonormat $(0, \vec{i}, \vec{j})$ al planului P, a cercului de centru O și de rază $\sqrt{r^2 - y_0^2}$ inclus în P (fig. 9). Prin urmare:

$$d(\Omega, P) < r \Rightarrow P \cap S \text{ este un cerc.} \qquad (4)$$

Se demonstrează imediat, prin *reducere la absurd*, că implicațiile reciproce corespunzătoare implicațiilor (2), (3), (4) sînt adevărate. Se poate deci enunța:

TEOREMA / **Fie un plan P și o sferă S de centru Ω și de rază r.**

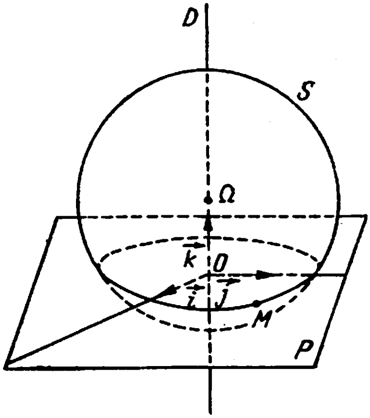


Fig 9

Avem:

$d(\Omega, P) > r \Leftrightarrow P \cap S = \emptyset.$

$d(\Omega, P) = r \Leftrightarrow P \cap S$ **este un cerc-punct.**

$d(\Omega, P) < r \Leftrightarrow P \cap S$ **este un cerc.**

Observație. Fie un plan P și o sferă S de centru Ω și de rază r. Dacă intersecția $P \cap S$ este un cerc C de rază nenulă, se spune că **planul** P **și sfera** S **sînt secante;** în acest caz, centrul cercului de intersecție, C este proiecția ortogonală a punctului Ω pe planul P și raza sa este egală cu $\sqrt{r^2 - h^2}$, h fiind distanța de la punctul Ω la planul P.

În particular, dacă planul P conține centrul sferei S, punctul Ω, distanța h este nulă și P și S sînt secante după cercul inclus în P de centru Ω și rază r (fig. 10).

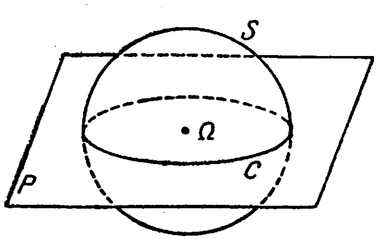


Fig. 10

Un astfel de plan este numit **plan diametral** al sferei S şi se spune că cercul de intersecţie dintre P şi S este un **cerc mare** al sferei S.

EXERCIŢIU. *Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat. Să se studieze intersecţia planului P de ecuaţie :*

$$x + 2y - z - 2 = 0,$$

cu sfera de ecuaţie :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + \frac{5}{2} = 0.$$

Ecuaţia sferei S se poate scrie sub forma:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = \frac{7}{2}.$$

Rezultă deci că centrul sferei S, punctul Ω, are coordonatele $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi că raza sa r este egală cu $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Distanţa de la punctul Ω la planul P este:

$$h = d(\Omega, P) = \frac{|2 + 2 + 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}};$$

această distanţă fiind inferioară razei sferei S $\left(\frac{3}{\sqrt{6}} < \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, P şi S sînt secante după un cerc C.

Raza cercului C este egală cu:

$$\sqrt{r^2 - h^2} = \sqrt{\frac{7}{2} - \frac{9}{6}} = \sqrt{2}.$$

Cercul Ω' al cercului C este punctul de intersecţie al planului P cu dreapta D care conţine pe Ω şi ortogonală cu P.

Un vector normal nenul al planului P este vectorul $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Cum dreapta D este ortogonală planului P, vectorul $\vec{u}$ este un vector director al dreptei D. Rezultă de aici că o reprezentare parametrică a dreptei D, pentru care un reper este $(\Omega, \vec{u})$, este:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Coordonatele punctului Ω' se obţin atunci rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \\ (2+t) + 2(1+2t) - (-1-t) - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Coordonatele punctului Ω' sînt deci: $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

14.2.2. Plan tangent la o sferă

DEFINIŢIE / **Se spune că un plan P este tangent la o sferă S de centru Ω şi de rază r dacă distanţa de la punctul Ω la planul P este egală cu r.**

Studiul făcut la nr. **14.2.1** permite să se enunţe:

TEOREMA / 1. **Un plan P este tangent unei sfere S dacă şi numai dacă intersecţia $P \cap S$ conţine un punct şi numai unul.**

Dacă un plan P este tangent unei sfere S, se spune de asemenea că P şi S sînt **tangente**; unicul punct al intersecţiei $P \cap S$ este numit atunci **punct de contact** al lui P cu S.
Fie un plan P şi o sferă S de centru Ω şi de rază r şi fie H proiecţia ortogonală a punctului Ω pe planul P (fig. 11). Avem:

$$d(\Omega, P) = d(\Omega, H).$$

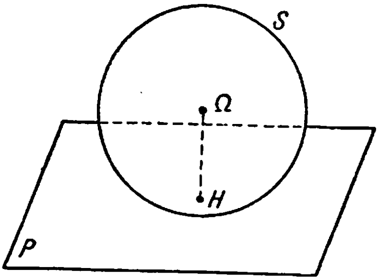


Fig. 11

Pe de altă parte, planul P este tangent sferei S dacă şi numai dacă:

$$d(\Omega, P) = r.$$

Rezultă de aici:
P este tangent lui $S \Leftrightarrow$ dacă $(\Omega, H) = r \Leftrightarrow H \in S$.
Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 2. **Un plan P şi o sferă S sînt tangente dacă şi numai dacă proiecţia ortogonală a centrului sferei S pe planul P aparţine lui S.**

EXERCIŢIU. *Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{j}, \vec{i}, \vec{k})$. A, B, C fiind trei puncte de coordonate respective $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, să se determine sferele tangente la patru plane OBC, OCA, OAB, ABC şi pentru care centrele au cele trei coordonate pozitive.*

Fie S o sferă de centru $\Omega\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ şi de rază r.

Ecuaţiile planelor OBC, OCA, OAB, ABC sînt:

planul $PBC: x = 0$
planul $OCA: y = 0$
planul $OAB: z = 0$

planul $ABC: x + y + \dfrac{z}{2} - 1 = 0$,

şi distanţele respective de la punctul Ω la cele patru plane precedente sînt: $|x_0|$, $|y_0|$, $|z_0|$, $\dfrac{2}{3}\left|x_0 + y_0 + \dfrac{z_0}{2} - 1\right|$.

Rezultă de aici că sfera S este soluție a problemei propuse dacă şi numai dacă:

$$\begin{cases} |x_0| = |y_0| = |z_0| = r \\ \dfrac{2}{3}\left|x_0 + y_0 + \dfrac{z_0}{2} - 1\right| = r \\ x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y_0 = z_0 = r \\ \left|\dfrac{5r}{2} - 1\right| = \dfrac{3r}{2} \\ r > 0 \end{cases}.$$

Rezolvarea ecuației $\left|\dfrac{5r}{2} - 1\right| = \dfrac{3r}{2}$:

$$\left|\frac{5r}{2} - 1\right| = \frac{3r}{2} \Leftrightarrow \frac{5r}{2} - 1 = \frac{3r}{2} \text{ sau } -\frac{5r}{2} + 1 = \frac{3r}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \text{ sau } r = \frac{1}{4},$$

dovedeşte că există două sfere, şi numai două, soluții ale problemei:

sfera S_1 de centru $\Omega_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ şi de rază 1;

sfera S_2 de centru $\Omega_2\begin{pmatrix}1/4\\1/4\\1/4\end{pmatrix}$ şi de rază $\dfrac{1}{4}$.

14.2.3. Planul tangent într-un punct al unei sfere

Fie S o sferă de centru Ω şi de rază r şi fie M un punct care aparține lui S (fig. 12).

● Desemnăm prin P planul care conține pe M şi este ortogonal dreptei ΩM. Punctul M este proiecția

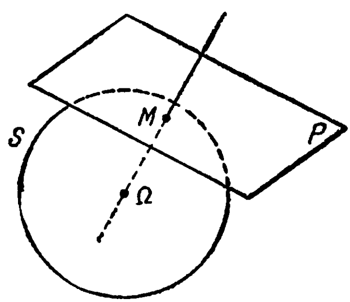


Fig. 12

ortogonală a punctului Ω pe planul P. Cum M aparține sferei S, planul P este tangent în M la S.

● *Reciproc*, dacă un plan P' este tangent sferei S în M, intersecția $P' \cap S$ conține singurul punct M și acest punct este proiecția ortogonală a punctului Ω pe planul P'.

Rezultă deci că P' este planul care conține pe M și este ortogonal dreptei ΩM, deci că $P = P'$.

Se poate enunța:

TEOREMĂ / **Există un plan P, și numai unul, tangent unei sfere S într-un punct M care aparține lui S. Ω fiind centrul lui S, P este planul care conține pe M și este ortogonal dreptei ΩM.**

Consecință. Fie S o sferă de centru Ω și fie M un punct care aparține lui S; planul tangent sferei S în M este planul care conține pe M și pentru care un vector normal, nenul este ΩM.

Vom utiliza acest rezultat pentru a obține o ecuație carteziană a planului tangent într-un punct al sferei.

EXEMPLE. Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I. *Fie S sfera de centru O și raza r și fie $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un punct care aparține lui S. Să se determine o ecuație carteziană a planului tangent în M_0 la S.*

O ecuație a sferei S este: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Cum M_0 aparține lui S, avem: $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2$. (1)

Planul tangent în M_0 la S este planul care conține punctul $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ și pentru care un vector normal, nenul este $\overrightarrow{OM_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

Rezultă de aici că o ecuație carteziană a acestui plan tangent este: $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$, adică:

$$x_0x + y_0y + z_0z - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0.$$

Ținînd seama de egalitatea (1), pentru planul tangent în M_0 la S se obține ecuația:

$$x_0x + y_0y + z_0z - r^2 = 0.$$

II. *Fie Σ mulţimea punctelor M din spaţiu pentru care coordonatele $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ verifică relaţia: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8z + 3 = 0$.*

Să se demonstreze că Σ este o sferă care conţine punctul $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi că planul tangent la Σ în A conţine punctul O.

Relaţia $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8z + 3$ care caracterizează mulţimea Σ este echivalentă cu relaţia:

$$(x + 1)^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 14.$$

Rezultă de aici că mulţimea Σ este sfera de centru $\Omega\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ şi de rază $\sqrt{14}$. Urmează imediat că punctul A cu coordonatele $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, pentru care are loc egalitatea:

$$1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 + 8(-1) + 3 = 0,$$

aparţine sferei Σ. Planul tangent la Σ în punctul A este planul P care conţine pe $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi pentru care un vector normal nenul este $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Rezultă de aici că o ecuaţie carteziană a planului P este:

$$2(x - 1) + 1 \cdot (y - 1) + 3(z + 1) = 0, \text{ adică}$$
$$2x + y + 3z = 0.$$

Punctul $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aparţine evident planului P.

14.2.4. Intersecţia unei drepte cu o sferă

Fie o dreaptă D şi o sferă S de centru Ω şi de rază r ($r > 0$).

1. Dacă distanţa $d(\Omega, D)$ de la punctul Ω la dreapta D este nulă, punctul Ω aparţine dreptei D. Se ştie atunci (nr. **14.1.1**) că intersecţia $D \cap S$ conţine două

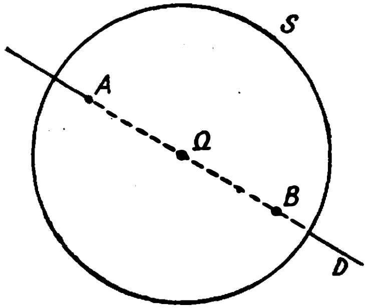


Fig. 13

puncte distincte A şi B şi numai două, diametral opuse pe sfera S (fig. 13).
Prin urmare:

$$d(\Omega, D) = 0 \Rightarrow \left\{ D \cap S \text{ este o mulţime cu două elemente.} \right.$$

2. Dacă distanţa $d(\Omega, D)$ nu este nulă, punctul Ω nu aparţine dreptei D. Se ştie atunci (nr. **14.2.1**) că planul diametral P, care conţine pe Ω şi D taie sfera S după un cerc mare C de centru Ω şi de rază r:

$$P \cap S = C.$$

Cum dreapta D este inclusă în planul P, avem:

$$D \cap P = D,$$

ceea ce implică:

$$D \cap S = (D \cap P) \cap S = D \cap (P \cap S) = D \cap C.$$

Rezultă de aici că intersecţia dreptei D cu sfera S este egală cu intersecţia dreptei D cu cercul C.
Concluziile relative la studiul intersecţiei unei drepte cu un cerc (nr. **13.2.1**) permit atunci să afirmăm că:

- Dacă $d(\Omega, D) > r$, $D \cap C$ şi prin urmare $D \cap S$ este mulţimea vidă (fig. 14).
- Dacă $d(\Omega, D) = r$, $D \cap C$ şi prin urmare $D \cap S$ este o mulţime cu un element (fig. 15).

Fig. 14

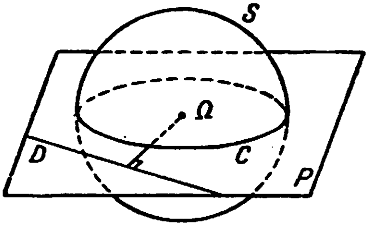


Fig. 15

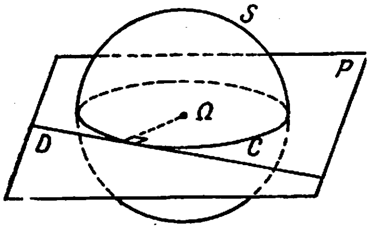
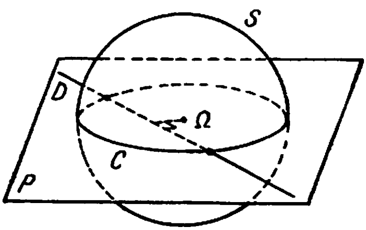


Fig. 16



● Dacă $d(\Omega, D) < r$, $D \cap C$ şi prin urmare $D \cap S$ este o mulţime cu două elemente (fig. 16).
Avem în cele din urmă:

$d(\Omega, D) > r \Leftrightarrow \quad D \cap S = \varnothing$; (1)

$d(\Omega, D) = r \Rightarrow \quad D \cap S$ este o mulţime cu un element; (2)

$0 < d(\Omega, D) < r \Rightarrow D \cap S$ este o mulţime cu două elemente; (3)

$d(\Omega, D) = 0 \Rightarrow \quad D \cap S$ este o mulţime cu două elemente; (3″).

Din implicaţiile (3′) şi (3″) se deduce următoarea:

$d(\Omega, D) < r \Rightarrow D \cap S$ este o mulţime cu două elemente (3)

Se demonstrează imediat, *prin reducere la absurd*, că implicațiile reciproce ale implicațiilor (1), (2), (3) sînt adevărate.
Se poate deci enunța:

TEOREMĂ / **Fie o dreaptă D și o sferă S de centru Ω și de rază r. Avem:**

$d(\Omega, D) > r \Leftrightarrow D \cap S$ **este mulțimea vidă.**

$d(\Omega, D) = r \Leftrightarrow D \cap S$ **este mulțimea cu un element.**

$d(\Omega, D) < r \Leftrightarrow D \cap S$ **este mulțime cu două elemente**

Observații. — **1.** Dacă intersecția $D \cap S$ este vidă, pentru orice punct M care aparține dreptei D, avem:

$$d(\Omega, M) \geq d(\Omega, D) > r,$$

ceea ce dovedește că orice punct al dreptei D aparține exteriorului sferei S.
Această proprietate se exprimă spunînd că **dreapta D este exterioară sferei S.**
2. Dacă intersecția $D \cap S$ conține două puncte distincte A și B, se spune că **dreapta D și sfera S sînt secante în A și B.**

EXERCIȚIU. *Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se studieze intersecția sferei S, cu ecuația carteziană:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 8 = 0$$

cu dreapta D care conține punctul $A\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}$ și pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Fie M un punct din spațiul E_3 de coordonate $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

M aparține dreptei D dacă și numai dacă:

$$\exists t \in \mathbb{R};\ \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$$

M aparține sferei S dacă și numai dacă:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 8 = 0.$$

Avem prin urmare: $M \in D \cap S$

$$\forall t \in \mathbf{R};\ \begin{cases} x = -1 + t & (1) \\ y = -3 + t & (2) \\ z = 4 - 2t & (3) \end{cases}$$

$$(-1 + t)^2 + (-3 + t)^2 + (4 - 2t)^2 - 4(-1 + t) + 6(-3 + t) - 2(4 - 2t) + 8 = 0. \quad (4)$$

Pentru a determina coordonatele punctelor de intersecție a dreptei D cu sfera S se rezolvă ecuația 4. Fiecărei soluții a ecuației (4) îi corespunde un punct M care aparține intersecției $D \cap S$, punct pentru care coordonatele se obțin cu ajutorul egalităților (1), (2), (3). Ecuația (4) care se scrie:

$$6t^2 - 18t + 12 = 0,$$

are ca rădăcină pe 1 și 2. Rezultă de aici că dreapta D și sfera S sînt secante în două puncte A și B de coordonate respective:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

14.2.5. Dreaptă tangentă la o sferă

DEFINIȚIE / **Fie S o sferă de centru Ω și de rază r. Se spune că o dreaptă D este tangentă la sfera S dacă distanța de la punctul Ω la dreapta D este egală cu r.**

Studiul făcut la nr. **14.2.4** permite să se enunțe:

TEOREMA / 1. **O dreaptă D este tangentă la o sferă S dacă și numai dacă intersecția $D \cap S$ conține un punct și numai unul.**

Dacă o dreaptă D este tangentă la o sferă, se spune de asemenea că D și S **sînt tangente**. Unicul punct al intersecției $D \cap S$ este atunci numit **punct de contact** al lui D cu S.

Fie o dreaptă D şi o sferă S de centru Ω şi de rază r. H fiind proiecţia ortogonală a punctului Ω pe dreapta D (fig. 17), avem:

$$d(\Omega, D) = d(\Omega, H).$$

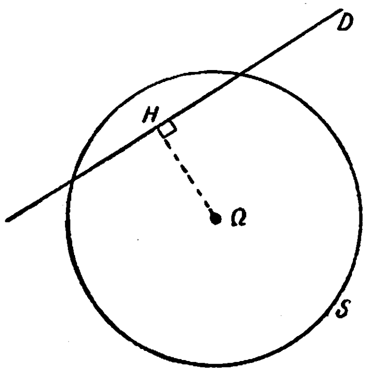


Fig. 17

Pe de altă parte, D este tangentă la S dacă şi numai dacă:

$$d(\Omega, D) = r.$$

Rezultă de aici:
D este tangentă la $S \Leftrightarrow d(\Omega, H) = r \Leftrightarrow H \in S$. Se poate deci enunţa:

TEOREMA / 2. **O dreaptă D este tangentă la o sferă S dacă şi numai dacă proiecţia ortogonală a centrului sferei S pe dreapta D aparţine lui S.**

Observaţii. — 1 Dacă o dreaptă D este tangentă la o sferă S, punctul de contact al lui D cu S este proiecţia ortogonală a centrului sferei S pe dreapta D.
2. Fie o dreaptă D şi o sferă S, tangente în H. Avem:

$$d(\Omega, H) = d(\Omega, D) = r.$$

şi fiecare punct M care aparţine dreptei D şi diferit de H, este astfel încît:

$$d(\Omega, M) > d(\Omega, H) = r.$$

Rezultă de aici că punctul M aparţine exteriorului sferei S, deci că mulţimea $D - \{H\}$ este inclusă în exteriorul lui S.

EXERCIŢII. I. *Spaţiul* E_3 *este raportat la un reper ortonormat* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *Să se demonstreze că dreapta* D *care conţine punctul* $M_0\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ *şi pentru care un vector director este* $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, *este tangenta la sfera* S *de ecuaţie:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0.$$

Fie M un punct din spaţiul E_3 de coordonate $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. M aparţine dreptei D dacă şi numai dacă:

$$\exists t \in \mathbf{R};\ \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

M aparţine sferei S dacă şi numai dacă:

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0.$$

Rezultă de aici că: $M \in D \cap S \Leftrightarrow$

$$\exists t \in \mathbf{R}\ \begin{cases} x = 3 - 2t & (1)\\ y = -3 + t & (2)\\ z = 1 + 2t & (3)\\ (3 - 2t)^2 + (-3 + t)^2 + (1 + 2t)^2 - (3 - 2t) + & \\ + 2(-3 + t) - 4(1 + 2t) + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Pentru a determina coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei D cu sfera S, se rezolvă ecuaţia (4). Fiecărei soluţii a lui (4) îi corespunde un punct M care aparţine intersecţiei $D \cap S$, punct pentru care coordonatele se obţin cu ajutorul egalităţilor (1), (2), (3). Ecuaţia (4), care se scrie:

$$9t^2 - 18t + 9 = 0$$

are o rădăcină dublă $t = 1$. Rezultă de aici că dreapta D şi sfera S sînt tangente în punctul de coordonate $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

II. *Fie un punct* M *care aparţine unei sfere* S *şi fie* P *planul tangent la* S *în* M. *Să se demonstreze că mulţimea dreptelor tangente la* S *în* M *este mulţimea dreptelor care conţin pe* M *şi sînt incluse în* P.

Ω fiind centrul sferei S, se ştie că planul P este planul care conţine pe M şi este ortogonal dreptei ΩM (fig. 18).

● Fie D o dreaptă care conţine pe M şi este inclusă în P. Avem:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{dreapta} & \Omega M \perp P \\ \text{şi} & D \subset P\end{array}\right\} \Rightarrow \text{dreapta } \Omega M \perp D$$

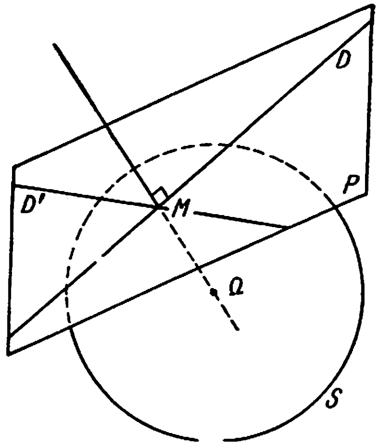


Fig. 18

ceea ce dovedeşte că punctul M este proiecţia ortogonală a punctului Ω pe dreapta D. Cum punctul M aparţine sferei S, dreapta D este tangentă în M la S.

● Fie D o dreaptă tangentă în M la S. Avem: dreapta $\Omega M \perp D$. Pe de altă parte D' fiind o dreaptă care conţine pe M, inclusă în P şi distinctă de D, avem: dreapta $\Omega M \perp D'$.

Dreapta ΩM fiind ortogonală cu două drepte concurente D şi D' este ortogonală cu planul P' care conţine pe D şi D'. Rezultă de aici că planul P' care conţine pe M şi care este ortogonal dreptei ΩM, este egal cu planul P. Prin urmare, dreapta D este inclusă în planul P.

EXERCIŢII

14.14. Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un plan P şi o sferă S sînt definite fiecare printr-o ecuaţie carteziană. Să se indice natura intersecţiei $P \cap S$ în cazurile următoare (dacă $P \cap S$ este un cerc, se va determina centrul şi raza acestui cerc):

a) $P: x - 2y + 2z + 3 = 0,$
$S: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0;$

b) $P: x + y + z = 0,$
$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0;$

c) $P: x - 2y + z + 1 = 0,$
$S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0;$

d) $P: x + y + z - 4 = 0,$
$S: x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 7 = 0.$

14.15. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La orice număr real m, se asociază planul P_m de ecuaţie:

$$x + y - z + m = 0.$$

1° Să se indice, după valorile lui m, natura intersecţiei planului P_m cu sfera S de centru $\Omega\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ şi de rază $\sqrt{3}$.

2° I fiind mulţimea numerelor m pentru care intersecţia $P_m \cap S = C_m$ este un cerc (eventual un cerc — punct), care este mulţimea centrelor cercurilor C_m atunci cînd m descrie pe I?

14.16. Fie S o sferă de centru Ω şi de rază r. Un plan P care nu conţine pe Ω este secant cu S după un cerc C. La fiecare punct M care aparţine lui C se asociază planul P_m tangent în M sferei S. Să se demonstreze că există un punct A astfel încît:

$$\forall M \in C \qquad A \in P_m$$

(Se va da acestui exerciţiu o soluţie analitică şi o soluţie neanalitică).

14.17. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie S sfera de centru O şi de rază r şi fie A punctul de coordonate $\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$, numărul real a fiind astfel încît: $a > r$.

1° Fie $M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ un punct care aparţine sferei S. Să se scrie o ecuaţie a planului P_m tangent la S în punctul M.

2° Să se demonstreze că: $A \in P_M \Leftrightarrow z_0 = \dfrac{r^2}{a}$.

3° Care este mulţimea punctelor de contact ale sferei S cu planele tangente la S conţinînd pe A?

14.18. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie S sfera de centru $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ şi de rază 3.

1° La orice număr real m se asociază planul P_m de ecuaţie:

$3mx + 2(2m - 1)y + (5 - m)z - 23m + 19 = 0.$

Să se demonstreze că există o dreaptă $\triangle$, pentru care se va determina o reprezentare parametrică, astfel încît: $\forall m \in \mathbf{R}$, $\triangle \subset P_m$. Să se demonstreze că dreapta $\triangle$ este exterioară sferei S.

2° Să se studieze, după valorile lui m, natura intersecţiei $P_m \cap S$. În cazurile în care planul P_m este tangent sferei S se vor determina coordonatele punctului de contact.

14.19. Care este mulţimea centrelor cercurilor de intersecţie ale unei sfere S cu planele care conţin o dreaptă dată D şi care sînt secante cu S? Se vor distinge trei cazuri:
a) D este exterioară lui S; b) D este tangentă la S; c) D este secantă cu S. (Se va trata primul caz neanalitic şi celelalte două cazuri, analitic).

14.20. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se studieze intersecţia unei drepte D, definită printr-unul din reperele sale $(M_0, \vec{u})$ şi o sferă S definită printr-o ecuaţie carteziană, în cazurile următoare:

a) $M_0\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 10 = 0;$$

b) $M_0\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}$,

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + x - y + 2z = 0;$$

c) $M_0\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$,

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 3 = 0;$$

d) $M_0\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 3 = 0.$$

14.21. Fie S o sferă de centru Ω. O dreaptă D care nu conţine pe Ω este secantă cu sfera S în punctele A şi B. Să se demonstreze că planele tangente la S în A şi B sînt secante după o dreaptă $\triangle$ ortogonală cu planul ΩAB.

14.22. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Să se determine o sferă S de rază 1, care conţine punctul $A\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ şi este tangentă la două plane P şi P' de ecuaţii respective

$$z = 0 \quad \text{şi} \quad 3y - 4z = 0.$$

14.23. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie D dreapta cu reperul $(O, \vec{i})$ şi fie D' dreapta care conţine punctul

$A\begin{pmatrix}0\\0\\2a\end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{j}$. (Se presupune: $a > 0$).

1° Să se demonstreze că dreptele D şi D' sînt tangente sferei S cu diametrul $[O, A]$.

2° Fie M un punct al dreptei D, de abscisă λ în reperul $(O, \vec{i})$ şi fie M' un punct al dreptei D' de abscisă μ în reperul $(A, \vec{j})$. Să se găsească o relaţie între λ şi μ verificată dacă şi numai dacă dreapta MM' este tangentă sferei S.

3° Să se demonstreze că relaţia găsită la punctul 2° este echivalentă cu:

$$OM + AM' = MM'.$$

14.24. O dreaptă D şi un plan P sînt secante într-un punct I. Fie A şi B două puncte distincte ale dreptei D astfel ca:

$$I \notin [A, B].$$

1° Să se demonstreze că dacă o sferă S conţine pe A şi B şi este tangentă în M planului P, atunci: $IM^2 = \vec{IA} \cdot \vec{IB}$.

2° Să se deducă pe baza punctului 1° mulţimea C a punctelor de contact ale planului P cu sferele care conţin punctele A şi B şi sînt tangente la P.

3° Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se determine pe cale analitică mulţimea C în cazul în care punctele A şi B au coordonatele respective $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ şi planul P are ecuaţia $z = 0$.

14.25. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Fie C cercul de centru O şi de rază 1 inclus în planul de ecuaţie $z = 0$ şi fie D dreapta care conţine punctul $A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ şi pentru care un vector director este $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1° Să se demonstreze că există două sfere, şi numai două, care conţin cercul C şi sînt tangente dreptei D.

2° Să se demonstreze că punctul A este mijlocul segmentului avînd ca extremităţi cele două puncte de contact ale dreptei D cu cele două sfere definite la punctul 1°.

14.26. Fie S o sferă de centru Ω şi de rază r şi fie S' o sferă de centru Ω' şi de rază r'; se presupune: $\Omega \neq \Omega'$.

1° Să se demonstreze pe cale analitică că există un plan P astfel ca:

$$S \cap S' = P \cap S = P \cap S'.$$

2° Spaţiul fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se studieze intersecţia $S \cap S'$ în cazurile următoare:

a) $\Omega\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\Omega'\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $r = 2$, $r' = 1$;

b) $\Omega\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\Omega'\begin{pmatrix}-2\\-5\\-3\end{pmatrix}$, $r = \sqrt{3}$, $r' = 3\sqrt{3}$;

c) $\Omega\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\Omega'\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $r = \sqrt{2}$, $r' = 1$;

d) $\Omega\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\Omega'\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$, $r = 3$, $r' = 2$.

(Dacă intersecţia $S \cap S'$ este un cerc, se vor determina centrul şi raza acestui cerc.)

PROBLEME

14.27. Fie A şi B două puncte distincte din spaţiul E_3.
1° Să se demonstreze că există un punct G, şi numai unul astfel ca:

$$3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = 0.$$

2° Să se demonstreze că, pentru orice punct din spaţiu, avem:

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG};$$

$$3MA^2 - 2MB^2 = MG^2 - 6AB^2.$$

3° Să se studieze, după valorile numărului real k, mulţimea Σ a punctelor M din spaţiu astfel încît: $3MA^2 - 2MB^2 = k$.
4° Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ să se determine pe cale analitică mulţimea Σ în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $k = -66$; b) $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $k = 0$.

14.28. Fie S o sferă de centru Ω şi de rază r. Se numeşte putere a unui punct M din spaţiu în raport cu sfera S, numărul real notat $S(M)$ şi egal cu $\Omega M^2 - r^2$.
1° Fie k un număr real. Să se studieze, după valorile lui k, natura mulţimii Σ_k a punctelor M din spaţiu astfel $S(M) = k$.
2° Să se demonstreze că, pentru orice diametru $[A, B]$ al sferei S, avem: $S(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.
3° O dreaptă D este secantă sferei S în punctele R şi R'. Să se demonstreze că: $\forall M \in D \; S(M) = \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{MR'}$.
4° Un plan P este tangent sferei S în punctul T. Să se demonstreze că: $\forall M \in P \; S(M) = MT^2$.

5° Un plan P este secant sferei S după un cerc C. Să se demonstreze că $\forall M \in P$ $S(M) = C(M)$.
(Se reamintește că $C(M)$ reprezintă puterea punctului M în raport cu cercul C.)

14.29. Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
1° S fiind o sferă de ecuație normalizată:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

și M_0 fiind un punct de coordonate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, să se demonstreze că:

$$S(M_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta.$$

2° Fie S și S' două sfere de ecuații:

$$S': x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + z - \frac{5}{2} = 0,$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x + y - z = 0.$$

a) Să se determine mulțimea P a punctelor M din spațiu astfel încît: $S(M) = S'(M)$ și să se demonstreze că $S \cap S' = P \cap S = P \cap S'$.
b) Să se determine mulțimea punctelor M din spațiu astfel încît: $S(M) = 2S'(M)$.

14.30. Spațiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La orice număr real m se asociază planul P_m de ecuație:

$$(m^2 - 2)x - m\sqrt{7}y + mz + m^2 + m + 6 = 0.$$

1° Să se demonstreze că există o infinitate de sfere S de aceeași rază, tangente la toate planele P_m.
2° Care este mulțimea centrelor sferelor S?

14.31. Reluați problema precedentă atunci cînd ecuația planului P_m este:

$$(m^2 - 2m - 1)x + 2(m - 1)y - 2(m - 1)z + 4m^2 - 10m + 10 = 0.$$

14.32. Fie C un cerc inclus în planul P și fie C' un cerc inclus în planul P'.
1° Se presupune că planele P și P' sînt strict paralele. Să se demonstreze că cercurile C și C' sînt incluse în aceeași sferă S dacă și numai dacă axa lui C este egală cu axa lui C'.
2° Se presupune că planele P și P' sînt secante după o dreaptă D.
a) Să se demonstreze că cercurile C și C' sînt incluse în aceeași sferă dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} \text{axele lor respective } \triangle \text{ și } \triangle' \text{ sînt secante} \\ \text{și} \\ \text{planul care conține pe } \triangle \text{ și } \triangle' \text{ taie } D \text{ într-un punct } H \text{ astfel încît} \\ C(H) = C'(H). \end{cases}$$

b) Să se demonstreze că dacă cercurile C și C' conțin două puncte distincte A și B ale dreptei D, aceste două cercuri sînt incluse în aceeași sferă.

c) Să se demonstreze că dacă cercurile C şi C' sînt tangente dreptei D într-un punct T, aceste două cercuri sînt incluse în aceeaşi sferă.

14.33. Fie A şi B două puncte distincte din spaţiul E_3 şi fie k un număr real.

1° I fiind mijlocul segmentului $[A, B]$, să se demonstreze că:

$$\forall M \in E_3 \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - \frac{AB^2}{2}.$$

2° Să se studieze, după valorile lui k, natura mulţimii Σ_k a punctelor M din spaţiu astfel încît: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

3° Spaţiul E_3 fiind raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, să se determine pe cale analitică mulţimea Σ_k în cazurile următoare:

a) $A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $k = \frac{5}{2}$; b) $A\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $k = -9$;

c) $A\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\end{pmatrix}$, $k = -10$; d) $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $k = -2$.

14.34. Fie un plan P, fie un punct A care nu aparţine lui P cu proiecţia ortogonală O pe planul P şi fie un punct B care aparţine lui P astfel ca $OA = OB$. Se desemnează prin C cercul de diametru $[O, B]$ inclus în planul P.

1° M fiind un punct al cercului C, diferit de O şi de A, să se determine centrul I al sferei care conţine cele patru puncte A, O, M, B.

2° H fiind proiecţia ortogonală a punctului O pe planul AMB, să se demonstreze că H aparţine uneia dintre laturile triunghiului AMB şi planului mediator al segmentului $[A, B]$.

3° Care este mulţimea punctelor H pentru care punctul M descrie mulţimea $C - \{B\}$?

14.35. Fie D şi D' două drepte concurente în A şi fie B şi B' două puncte distincte ale dreptei D astfel încît $A \notin [B, B']$.

1° Să se demonstreze că dacă sfera S conţine pe B şi pe B' şi este tangentă la D' în M, avem: $AM^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$.

2° Care este mulţimea centrelor sferelor care conţin pe B şi B' şi sînt tangente dreptei D'?

14.36. Spaţiul E_3 este raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La fiecare număr real m se asociază mulţimea S_m a punctelor M din spaţiu pentru care coordonatele $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ verifică relaţia:

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

1° Să se demonstreze că, oricare ar fi m, S_m este o sferă. Care este mulţimea centrelor sferelor S_m?

2° Să se demonstreze că există un cerc C pentru care se va determina planul P, centrul Ω şi raza r, astfel încît:

$$\forall m \in \mathbf{R} \qquad C \subset S_m.$$

3° Să se demonstreze că planul P este mulţimea punctelor M avînd aceeaşi putere faţă de toate sferele S_m.
4° Să se demonstreze că, pentru orice punct M_0 care nu aparţine planului P, există o sferă S_m, şi numai una, care conţine pe M_0.
5° Să se demonstreze că există două sfere S_m tangente planului de ecuaţie $z = 0$.
14.37. Reluaţi problema precedentă atunci cînd mulţimea S_m este definită prin relaţia:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4(1-m)x + 2(m+1)y + (m-6)z - 3m - 13 = 0.$$

$\overline{C}$ $\overline{D}$ 15 GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

15.1. REPREZENTAREA PUNCTULUI, A DREPTEI, A PLANULUI

15.1.1. Introducere

În acest capitol, studiem spaţiul euclidian E_3 de dimensiune 3. Putem deci să-l presupunem raportat la un reper ortonormat $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dacă se desemnează prin Ox, Oy, Oz cele trei semidrepte de origine O şi de vectori directori respectivi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cunoaşterea tripletului (Ox, Oy, Oz) caracterizează reperul $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ care poate fi atunci notat $Oxyz$.

În geometria descriptivă:

a) planul xOy este numit **plan orizontal de proiecţie** şi notat cu H;

b) planul yOz este numit **plan frontal de proiecție** și notat cu F;

c) dreapta $y'y$ este numită **linie de pămînt.**

Reciproc, fiind date două plane perpendiculare H și F (fig. 1), este ușor de a le asocia un reper $Oxyz$:

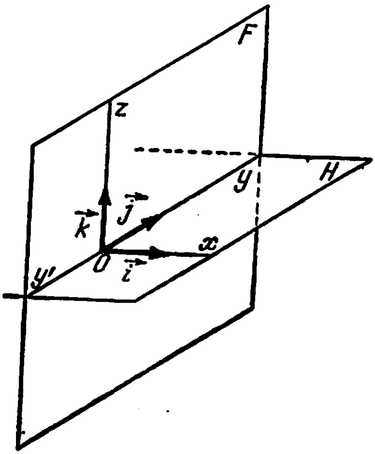


Fig. 1

a) se orientează în mod arbitrar dreapta de intersecție a celor două plane, fie $y'y$;

b) se alege O pe această dreaptă;

c) Se alege Ox ortogonală cu $y'y$ și inclusă în planul H și Oz ortogonală cu $y'y$ și inclusă în planul F.

În practică planul H este considerat fizic, orizontal.

Fie atunci, în reperul $Oxyz$, punctul $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; fie m și m' proiecțiile ortogonale ale punctului M respectiv pe planele H și F. Cele două puncte m și m' au aceeași proiecție ortogonală μ pe dreapta $y'y$ (fig. 2). Fie O_1 un punct oarecare de pe $y'y$, de abscisă y_0 și fie $O_1x_1y_1z_1$ reperul obținut din $Oxyz$ prin translația de vector $\overrightarrow{OO_1}$.

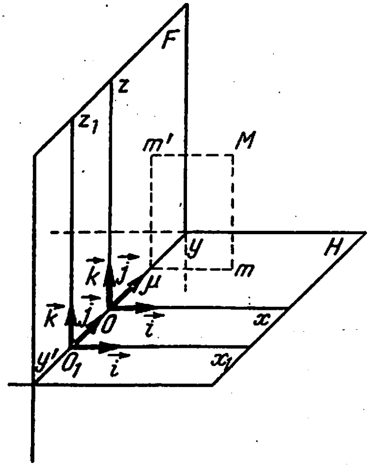


Fig. 2

Ştim că x_1, y_1, z_1, coordonatele punctului M în reperul $O_1x_1y_1z_1$ sînt date prin formulele: $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_0 + y_1 \\ z = z_1. \end{cases}$

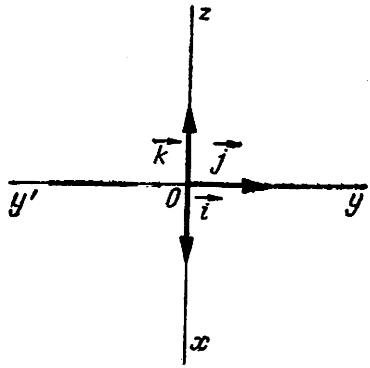
Consecinţe. 1. Cele două coordonate x şi z sînt invariante la această schimbare de reper. Se spune că:
x este **depărtarea** punctului M;
z este **cota** punctului M.
2. Pentru a determina un punct M avem două posibilităţi:
a) de a alege un reper şi a se da cele trei coordonate ale punctului M;
b) a se da cele două puncte m şi m' astfel ca ele să aibă aceeaşi proiecţie ortogonală μ pe $y'y$.

15.1.2. Convenţii fundamentale în geometria descriptivă

Se convine să se reprezinte pe aceeaşi foaie de hîrtie cele două plane H şi F. Se trasează linia de pămînt $y'y$, urmînd axa mică a hîrtiei, în general de la stînga

la dreapta (fig. 3). Vom plasa întotdeauna literele y' şi y desemnînd linia de pămînt în partea depărtărilor pozitive; rezultă de aici că cotele pozitive sînt în partea opusă.
În aceste condiţii, la un punct O ales pe linia de pămînt se asociază imediat un reper $Oxyz$, cum indică figura 3.

Fig. 3



Cele două plane H şi F împart spaţiul în patru regiuni numite diedre. Semnele depărtării şi ale cotei caracterizează diedrul în care se află punctul, după cum indică tabloul de mai jos:

diedre	1	2	3	4
depărtarea x	+	−	−	+
cota z	+	+	−	−

15.1.3. Reprezentarea punctului

La orice punct M din spaţiu corespund cele două proiecţii ale sale m şi m' aparţinînd aceleiaşi linii de rapel ortogonală cu $y'y$. Se spune:

m este proiecţia orizontală
m' este proiecţia frontală.

Ansamblul fomat din cele două puncte m şi m' constituie epura punctului M. Este necesar de a sublinia importanţa care trebuie acordată notaţiilor, în special convenţiei referitoare la accentuarea literei care reprezintă proiecţia frontală.

EXEMPLE. Pe figura 4 cele două puncte M (m, m') şi $P(p, p')$

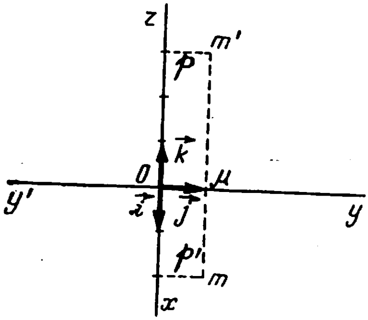


Fig. 4

sînt distincte. În reperul asociat epurei, coordonatele lui M sînt: $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; cele ale lui P sînt: $\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Figura 5 arată epurele punctelor în diferitele diedre:
A este în primul diedru,
B este în diedrul al doilea
C este în diedrul al treilea,
D este în diedrul al patrulea.

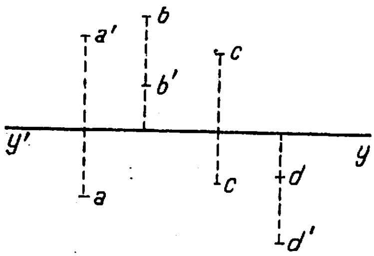


Fig. 5

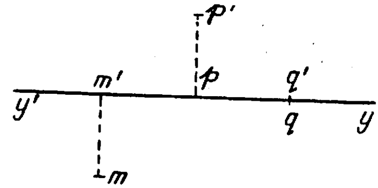


Fig. 6

Figura 6 pune în evidență punctele *M, P, Q* astfel că:
M aparține planului *H* (cotă nulă)
P aparține planului *F* (depărtare nulă)
Q este situat pe linia de pămînt.

15.1.4. Reprezentarea unei drepte

1. Dreaptă neortogonală cu linia de pămînt

Fie epura a două puncte *A* și *B* (fig. 7). Dreapta *D* pe care ele o determină nu este ortogonală planului orizontal de proiecție deoarece *a* și *b* sînt diferite.

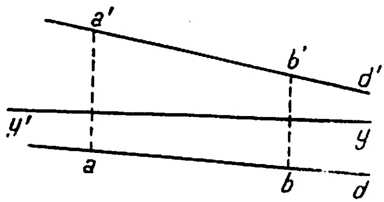


Fig. 7

Dreapta *D* nu este ortogonală planului frontal de proiecție deoarece *a'* și *b'* sînt diferite. În sfîrșit, dreapta *D* nu este ortogonală liniei de pămînt deoarece liniile de repel *aa'* și *bb'* sînt diferite.
Rezultă de aici că *proiecția orizontală* a dreptei *D* este dreapta determinată de punctele *a* și *b*; la fel, *proiecția frontală* a dreptei *D'* este dreapta *d'* determinată de punctele *a'* și *b'*. Ansamblul format din aceste două proiecții constituie epura dreptei *D*.

Reciproc, fie două drepte d şi d', nici una dintre ele nefiind ortogonală liniei de pămînt (fig. 8). Fie un punct a aparţinînd lui d şi un punct a' aparţinînd lui d', astfel ca dreapta aa' să fie o linie de repel. Se

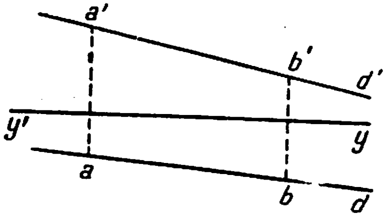


Fig. 8

determină astfel un punct din spaţiu. Plecînd de la un alt punct b care aparţine dreptei d, se determină un alt punct B. Epura dreptei D care conţine punctele A şi B este constituită din dreptele d şi d'. Dreptele d şi d' determină deci o dreaptă D din spaţiu; este singura deoarece orice dreaptă răspunzînd problemei puse trebuie să conţină punctele A şi B. Se va remarca şi aici importanţa notaţiilor: pentru o dreaptă D din spaţiu, d desemnează proiecţia orizontală şi d' proiecţia frontală. Este posibil (fig. 9) ca d să fie „deasupra" liniei de pămînt şi d' „dedesubt".

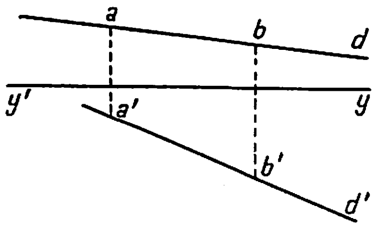


Fig. 9

Observaţie. — Utilizînd un reper asociat unei epure, se poate construi epura unei drepte de ecuaţii parametrice, deoarece se pot determina coordonatele a două puncte ale acestei drepte.

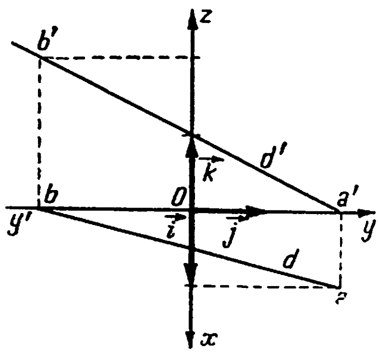
EXEMPLU. Fie dreapta D definită de ecuaţiile parametrice:

$$D\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$$

Dreapta conţine punctele: $\underset{t=0}{A}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\underset{t=1}{B}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Figura 10 reprezintă epura corespunzătoare.

Fig. 10



Dreapta d se poate da de asemenea printr-o ecuaţie în planul xOy şi dreapta d' printr-o ecuaţie în planul yOz. În exemplul precedent am avea:

$$d: 4x - \quad y - 2 = 0$$

$$d': \quad y + 2z - 2 = 0$$

2. Dreaptă ortogonală liniei de pămînt.

Reamintim pe scurt diferitele cazuri:
a) *Dreaptă verticală.* O astfel de dreaptă este ortogonală planului orizontal de proiecţie. Proiecţiile frontale ale tuturor punctelor sale aparţin aceleiaşi linii de rapel. Proiecţia orizontală este un punct (fig. 11).
b) *Dreaptă de capăt.* O astfel de dreaptă este orto-

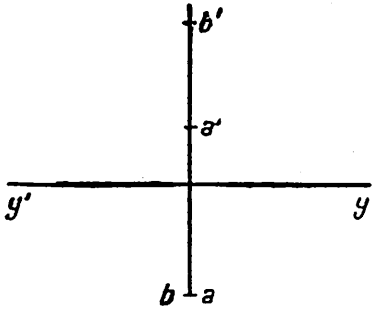


Fig. 11

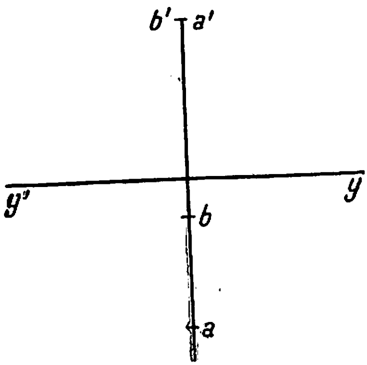
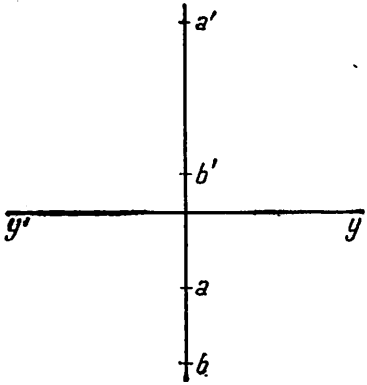


Fig. 12

gonală planului frontal de proiecție. Proiecțiile orizontale ale tuturor punctelor sale aparțin aceleiași linii de rapel. Proiecția frontală este un punct (fig. 12).

c) *Dreaptă de profil.* O astfel de dreaptă este ortogonală liniei de pămînt fără să fie ortogonală unui plan de proiecție. Cele două proiecții ale sale sînt confundate cu aceeași linie de repel. Dacă se dau pe epură două drepte d şi d' egale cu aceeași linie de repel, aceste drepte sînt proiecțiile unei drepte oarecare incluse în planul numit *plan de profil,* care conține pe d şi este ortogonal liniei de pămînt. Pentru a determina o dreaptă din acest plan este suficient să se marcheze proiecțiile (a, a') şi (b, b') a două

Fig. 13

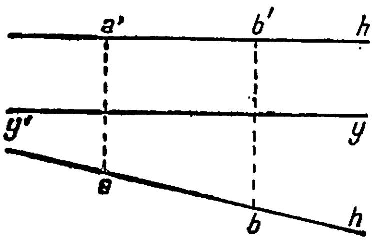


puncte (fig. 13). Să observăm că orice dreaptă care nu este de profil este determinată prin cele două proiecții ale ei.

15.1.5. Drepte orizontale și frontale

1° O **orizontală** este o dreaptă paralelă cu planul orizontal de proiecție. O dreaptă de capăt este o orizontală particulară. Toate punctele unei orizontale au aceeași cotă; proiecția frontală este paralelă liniei de pămînt (fig. 14).

Fig. 14



Fie $[A, B]$ un segment orizontal, $[a, b]$ proiecția sa orizontală. Avem: $AB = ab$.
2° O **frontală**, sau *dreaptă de front*, este o dreaptă paralelă cu planul frontal de proiecție. O verticală

este o frontală particulară. Toate punctele unei frontale au aceeaşi depărtare. Proiecţia orizontală este paralelă cu linia de pămînt (fig. 15).

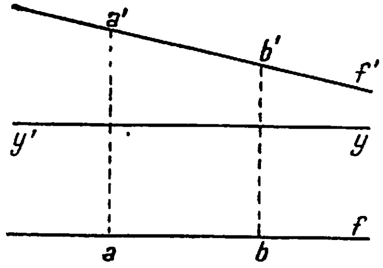


Fig. 15

Fie $[A, B]$ un segment de front, $[a', b']$ proiecţia sa frontală. Avem: $AB = a'b'$.

Observaţie. — O dreaptă paralelă liniei de pămînt este în acelaşi timp o orizontală şi frontală. Cele două proiecţii ale sale sînt paralele cu linia de pămînt (fig. 16).

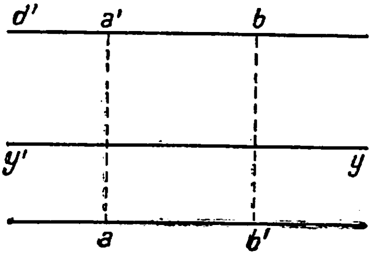


Fig. 16

Fie $[A, B]$ un segment paralel cu linia de pămînt şi fie $[a, b]$ şi $[a', b']$ proiecţiile sale. Avem: $AB = ab = a'b'$.

15.1.6. Problemă

O dreaptă D este determinată de cele două proiecţii ale sale d şi d'. Cunoscînd o proiecţie a unui punct M care aparţine acestei drepte, să se determine acest punct.

Remarcăm că punctul M va fi determinat atunci cînd se va determina cea de-a doua proiecţie a lui.

● Presupunem mai întîi că d şi d' sînt două drepte, nici una nefiind ortogonală cu linia de pămînt.

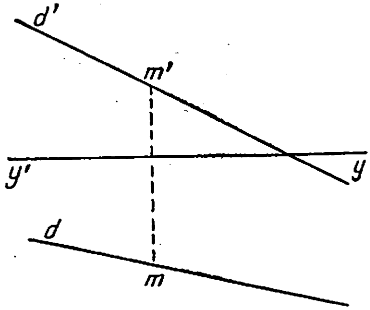
1° m este dat; m' se găseşte:

a) pe d';

b) pe linia de repel a lui m.

m' este deci determinat (fig. 17).

Fig. 17



2° Acelaşi procedeu dacă m' este dat.

● Să examinăm cazurile particulare.

1° *Dreapta D este verticală.*

Punctul M nu este determinat decît dacă se dă m'; punctul m' este atunci pe d.

2° *Dreapta D este de capăt.* Punctul M nu este determinat decît dacă se dă m, punctul m' este atunci pe d'.

3° *Dreapta D este de profil.*

Fie $A(a, a')$ şi $B(b, b')$ cele două puncte care determină pe D.

Fie dat m (se va raţiona în acelaşi mod dacă m' este dat).

După teorema lui Thales, avem:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}} \text{ şi } \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{m'a'}}{\overline{m'b'}},$$

de unde $\dfrac{\overline{m'a'}}{\overline{m'b'}} = \dfrac{\overline{ma}}{\overline{mb}}$; punctul m' este deci determinat.

Practic se procedează în modul următor (fig. 18). Fie α un punct oarecare al planului epurei. Dreapta care conţine pe b şi paralelă cu dreapta $a\alpha$

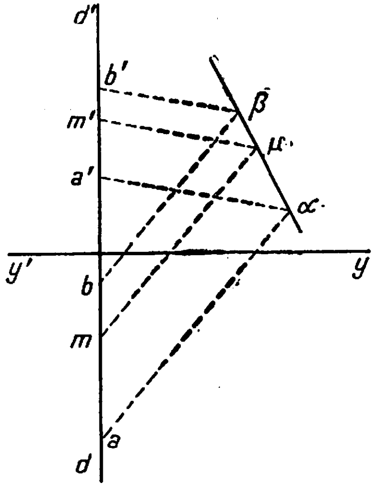


Fig. 18

şi dreapta care conţine pe b' şi paralelă cu dreapta $a'\alpha$ sînt concurente în β.
Dreapta care conţine pe m şi paralelă cu dreapta $a\alpha$ taie dreapta $\alpha\beta$ în μ; în sfîrşit, dreapta care conţine pe μ şi paralelă cu dreapta $a'\alpha$ taie dreapta $a'b'$ în m'. În adevăr avem:

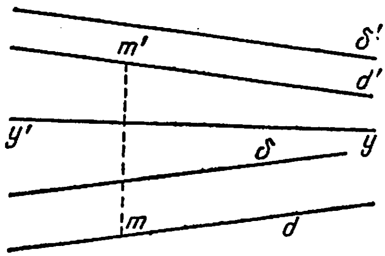
$$\frac{\overline{m'a'}}{\overline{m'b'}} = \frac{\overline{\mu\alpha}}{\overline{\mu\beta}} = \frac{\overline{ma}}{\overline{mb}}.$$

15.1.7. Drepte paralele

1° Toate verticalele sînt paralele între ele; toate dreptele de capăt sînt paralele între ele.
2° Fie D şi Δ două drepte paralele care nu sînt nici verticale nici de capăt. Proiecţiile lor de acelaşi nume sînt paralele.

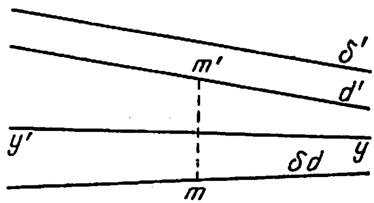
Reciproc, fie pe o epură (fig. 19) două drepte $D(d, d')$ şi $\Delta(\delta, \delta')$ pentru care proiecţiile de acelaşi nume sînt paralele.
Fie $M(m, m')$ un punct al lui D. Paralela la Δ care conţine pe M are ca proiecţii paralelele respective

Fig. 19



la δ şi δ' care conţin pe m şi m'. Aceste paralele sînt d şi d'. Rezultă de aici că D şi Δ sînt paralele. Figura 19 reprezintă două drepte strict paralele D şi Δ. Figura 20 reprezintă două drepte strict paralele,

Fig. 20



incluse în acelaşi plan perpendicular pe planul orizontal de proiecţie. Proiecţiile lor orizontale sînt egale.
Raţionamentul presupune că dreptele sînt determinate prin proiecţiile sale. El nu se aplică dreptelor de profil.
Observaţie. Se ştie să se construiască dreapta paralelă cu dreapta dată $D(d, d')$ şi care conţine un punct

dat $M(m, m')$, deoarece este suficient să se construiască:

δ care conține pe m și paralelă la d

δ' care conține pe m' și paralelă la d'.

Dreaptă (δ, δ') este dreapta căutată.
Dacă dreapta dată este de profil (fig. 21), ea este determinată prin două puncte A și B.

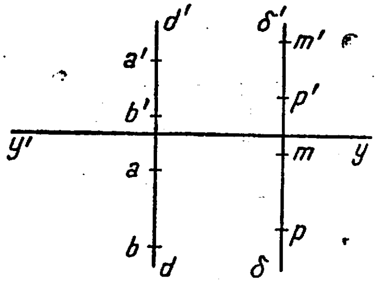


Fig. 21

Se construiește punctul P astfel ca $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$. Pe epură s-a construit:

$$\overrightarrow{mp} = \overrightarrow{ab} \text{ și } \overrightarrow{m'p'} = \overrightarrow{a'b'}.$$

15.1.8. Drepte concurente

Fie $D(d, d')$ și $\Delta(\delta, \delta')$ două drepte concurente în $M(m, m')$ (fig. 22 și 23). Presupunem că nici una din aceste drepte nu este de profil.
Avem: $\{m\} = d \cap \delta'$ $\{m'\} = d' \cap \delta.'$
Pe de altă parte m și m' aparțin aceleiași drepte de rapel.

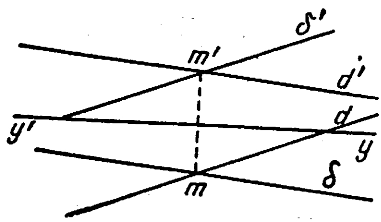


Fig. 22

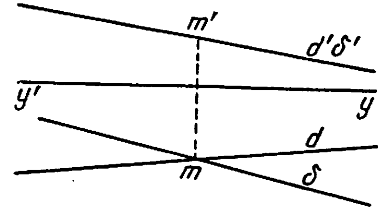


Fig. 23

Reciproc, fie D (d, d') și $\Delta(\delta, \delta')$ două drepte astfel ca: $d \cap \delta = \{m\}$ și $d' \cap \delta' = \{m'\}$ și astfel că m și m' aparțin aceleiași drepte de rapel. Urmează imediat că nici una din aceste drepte nu este de profil și că ele sînt concurente în $M(m, m')$.

15.1.9. Reprezentarea unui plan

Reamintim că un plan poate fi considerat întotdeauna ca determinat de două drepte concurente. În geometria descriptivă, dacă două drepte care definesc un plan nu sînt considerate utilizabile, se pot întotdeauna înlocui prin alte două drepte concurente și incluse în plan.

EXEMPLU. Fie un plan definit prin linia de pămînt $y'y$ și printr-o dreaptă $D(d, d')$ strict paralelă liniei de pămînt (fig. 24). Este

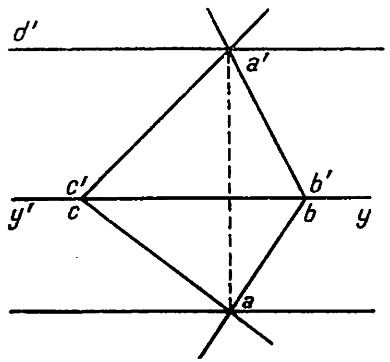


Fig. 24

suficient să se marcheze punctul A (a, a') pe D şi punctele B (b, b') şi $C(c, c')$ pe linia de pămînt. Planul este definit prin dreptele concurente AB şi AC.

15.1.10. Problema fundamentală pentru plan

Un plan care nu este ortogonal liniei de pămînt poate fi definit întotdeauna prin două drepte concurente astfel încît nici una să nu fie de profil. Vom studia în acest paragraf cazul unui astfel de plan.

Un plan P fiind definit, să se determine un punct care aparţine acestui plan, cunoscînd una din proiecţiile acestui punct.

Presupunem planul P definit prin cele două drepte concurente $D(d, d')$ şi $\Delta(\delta, \delta')$ (fig. 25). Fie, de exemplu, m proiecţia orizontală a unui punct M care aparţine planului P. Dreptele planului P care conţin pe M au proiecţii orizontale care conţin pe m.

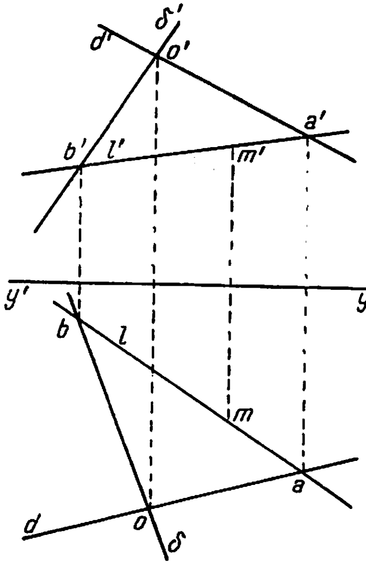


Fig. 25

Fie l proiecția orizontală a uneia din aceste drepte: l taie pe d în a și pe δ în b. Punctul $A(a, a')$ al dreptei D aparține planului P, tot așa ca punctul $B(b, b')$ al dreptei Δ.
Proiecția frontală a dreptei Δ este dreapta $a'b'$. Punctul (m, m') al acestei drepte este punctul M căutat.
Se tratează în același mod problema dacă este dată proiecția frontală m' a punctului.

Observație. — Problema precedentă se poate enunța sub una sau alta din formele următoare:

1° Să se determine intersecția unui plan P dat cu o dreaptă verticală sau de capăt.

2° Să se determine o dreaptă a unui plan P cunoscînd una din proiecțiile sale. În adevăr, noi am determinat dreapta L inclusă în planul P, cunoscînd proiecția sa orizontală l.

15.1.11. Drepte principale ale unui plan

Se numesc **orizontale** ale unui plan, dreptele din acest plan care sînt paralele cu planul orizontal de proiecție.
Se numesc **frontale** ale unui plan, dreptele din acest plan care sînt paralele cu planul frontal de proiecție.
Orizontalele și frontalele sînt dreptele **principale** ale planului. Orizontalele unui plan sînt paralele între ele; fiecare este caracterizată prin cota sa. În particular, orizontala de cotă nulă a unui plan este **urma** sa **orizontală**.

Frontalele unui plan sînt paralele între ele; fiecare este caracterizată prin depărtarea sa. În particular, frontala de depărtare nulă a unui plan este **urma** sa **frontală**. Un punct fiind dat, în planul care nu este nici orizontal nici frontal, există o orizontală și numai una, și o frontală, și numai una, care conțin acest punct.

EXEMPLU. Epura (fig. 26) arată determinarea orizontalei şi a frontalei unui plan cunoscînd proiecţia frontală a unui punct M din acest plan.
Planul este definit de dreptele $D(d, d')$ şi $\Delta(\delta, \delta')$ concurente în $O(o, o')$; punctul m' fiind cunoscut, se trasează dreapta h' paralelă

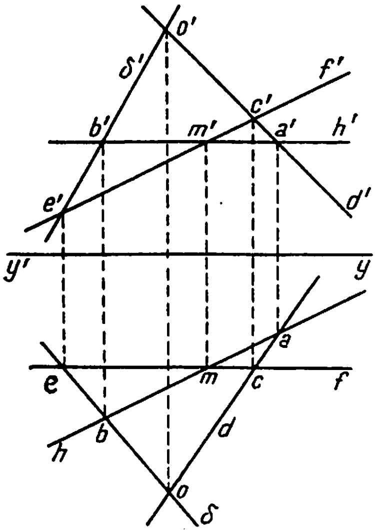


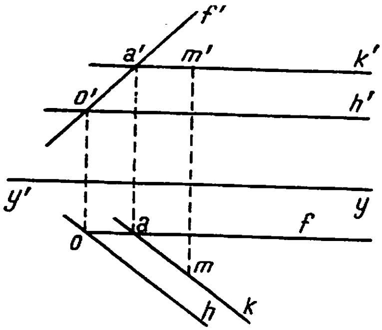
Fig. 26

cu linia de pămînt şi conţinînd pe m' : h' taie pe d' în a' şi pe δ' în b'. Rezultă de aici determinarea lui a şi b deci a lui h şi a lui m.
Se trasează atunci f care conţine pe m şi paralelă liniei de pămînt. Rezultă de aici determinarea lui f'.

Reciproc, orice plan poate fi definit printr-o frontală şi o orizontală, aceste două drepte conţinînd un punct O.

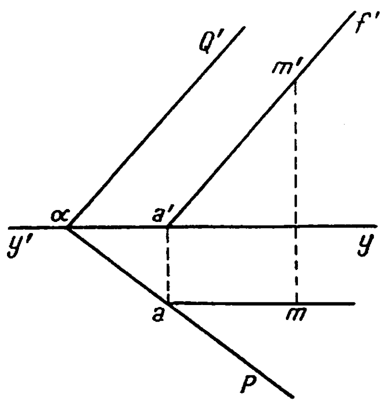
Epura (fig. 27) arată un plan definit de orizontală (h, h') şi de frontală (f, f') aceste două puncte conţinînd punctul $O(o, o')$. Punctul m' de exemplu fiind dat, orizontala k' a acestui punct taie f' în a' care dă a pe f. Proiecţia orizontală k este paralela la h care conţine pe a. Rezultă de aici m.

Fig. 27



Un plan poate de asemenea să fie definit prin două urme ale sale dacă ele există. Se remarcă:
1° Cele două urme se taie într-un punct (α, α') aparținînd liniei de pămînt.
2° Proiecția frontală a urmei orizontale este linia de pămînt, proiecția orizontală a urmei frontale este linia de pămînt. Se indică un plan definit prin urmele sale după cum arată fig. 28; $P\alpha$ este proiecția ori-

Fig. 28



zontală a urmei orizontale și $Q'\alpha$, proiecția frontală a urmei frontale.
Nu se indică pe figură dreptele P' și Q egale cu linia de pămînt.

Figura 28 reia problema fundamentală pentru un punct pentru care se dă proiecţia orizontală. S-a determinat frontala (f, f') a punctului M. Se putea de asemenea să se determine orizontala lui M.

15.1.12. Plane particulare

Poartă această denumire planele care sînt perpendiculare sau paralele cu unul din planele de proiecţie.

● *Plan vertical*. El este perpendicular pe planul orizontal de proiecţie. Frontalele unui astfel de plan sînt verticale. Orice punct al planului are proiecţia sa orizontală pe urma orizontală şi reciproc, orice punct a cărei proiecţie orizontală aparţine urmei orizontale, aparţine planului (fig. 29).

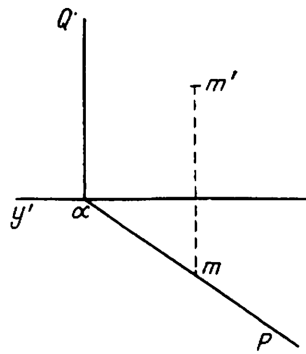
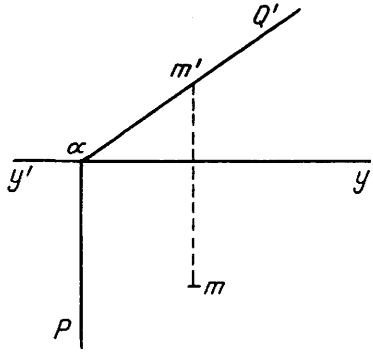


Fig. 29

● *Plan de capăt*. Este perpendicular planului frontal de proiecţie. Orizontalele acestui plan sînt drepte de capăt. Orice punct din plan are proiecţia sa frontală pe urma frontală a planului şi reciproc, orice punct pentru care proiecţia frontală aparţine urmei frontale, aparţine planului (fig. 30).

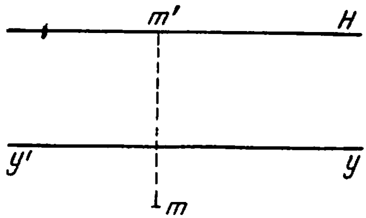
● *Plan orizontal*. Este paralel cu planul orizontal de proiecţie. El este caracterizat prin cota sa. El nu are

Fig. 30



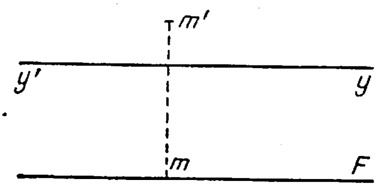
urmă orizontală. Urma sa frontală este paralelă cu linia de pămînt. Acesta este un plan de capăt particular. Toate dreptele incluse în acest plan sînt orizontale (fig. 31).

Fig. 31



● *Plan frontal.* Este paralel cu planul frontal de proiecție. El este caracterizat prin depărtarea sa. El nu are urmă frontală. Urma sa orizontală este paralelă cu linia de pămînt. Acesta este un plan vertical, particular. Toate dreptele incluse în acest plan sînt frontale (fig. 32).

Fig. 32



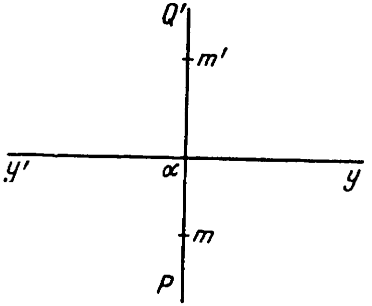


Fig. 33

● *Plan de profil.* Este ortogonal liniei de pămînt. Urmele sale sînt ambele ortogonale cu linia de pămînt, deci egale. Orice dreaptă a unui asemenea plan este de profil (fig. 33).

EXERCIŢII

Notă: *În exerciţiile de geometrie descriptivă atunci cînd avem nevoie de un reper asociat unei epure, fără a avea alte indicaţii, se va lua:*
a) *$y'y$ axa mică a filei, orientată de la stînga la dreapta;*
b) *$x'x$ şi $z'z$ duse prin axa mare, Ox orientată către bază, Oz către partea de sus; unitatea este cm.*

15.1. Să se facă epurele punctelor următoare date prin coordonatele lor:

$$A\begin{pmatrix}5\\-12\\3\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}-3\\-9\\5\end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix}-2\\-6\\-6\end{pmatrix},\quad D\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix},$$

$$E\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\quad F\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix},\quad G\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix},\quad H\begin{pmatrix}0\\9\\2\end{pmatrix},\quad I\begin{pmatrix}3\\12\\0\end{pmatrix}.$$

Să se indice o particularitate a fiecăruia din aceste puncte în raport cu planele de proiecţie.

15.2. Cu datele din exerciţiul precedent să se construiască în epura:
1° Simetricele A_1, B_1, C_1 ale punctelor A, B, C în raport cu planul orizontal de proiecţie.
2° Simetricele D_1, E_1, F_1 ale punctelor D, E, F în raport cu planul frontal de proiecţie.
3° Simetricele G_1, H_1, I_1 ale punctelor G, H, I în raport cu linia de pămînt.

15.3. Să se facă epurele dreptelor următoare date prin ecuaţiile lor parametrice:

$$1^\circ \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 3t. \\ z = -2t \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + 3t. \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad 3^\circ \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 3t. \\ z = 2 - t \end{cases}$$

15.4. Se numesc urme ale unei drepte punctele de intersecţie ale dreptei, dacă există, cu planele de proiecţie. Urma orizontală are cota 0, urma frontală are depărtarea 0.

1° Să se construiască urma frontală a unei orizontale date.
2° Să se construiască urma orizontală a unei frontale date.
3° Să se construiască urmele unei drepte date.
4° Să se construiască urmele unei drepte de profil date.

(Să se utilizeze metoda de la nr. **15.1.6**).

15.5. Să se construiască o orizontală care conţine un punct dat $A(a, a')$ şi care întîlneşte o dreaptă dată $D(d, d')$. Să se studieze cazul în care dreapta D este de profil.

15.6. Se dau două drepte D şi Δ, necoplanare. Să se construiască o verticală care le întîlneşte.

15.7. Să se construiască o dreaptă care conţine un punct dat şi care întîlneşte două drepte date, una din aceste două drepte fiind verticală.

15.8. Să se construiască un punct care aparţine unei drepte date şi pentru care cota este egală cu depărtarea.

15.9. Un plan este definit prin linia de pămînt şi un punct $A(a, a')$.
1° Să se determine un punct M din planul P, cunoscînd proiecţia sa orizontală m.
2° Să se determine orizontala planului care conţine punctul M.

15.10. Un plan P este definit printr-o orizontală (h, h') şi printr-o frontală (f, f'), secante în $O(o, o')$. Să se determine urmele planului P.

15.11. Un plan P este definit de o dreaptă (d, d') paralelă cu linia de pămînt şi de un punct $A(a, a')$ care nu aparţine lui D. Să se determine urmele planului P.

15.12. Se dă o dreaptă de profil BC şi un punct A care aparţine liniei de pămînt şi nu aparţine planului de profil care conţine dreapta BC.
1° Să se determine orizontala planului ABC care conţine punctul C.
2° Să se determine urmele planului ABC.

15.13. Se dă un punct A şi o dreaptă de profil BC, punctul B aparţinînd liniei de pămînt. Să se determine urmele planului ABC.

15.14. Un plan este definit prin urmele sale. Să se determine un punct al acestui plan de cotă şi depărtare date.

15.15. Se dau două drepte D şi Δ astfel încît:

$$d = \delta', \ \delta = d', \ d \text{ şi } \delta \text{ concurente.}$$

Să se determine punctul de intersecţie al acestor două drepte şi urmele planului definit de aceste două drepte.

15.16. Să se construiască urmele planului ABC astfel încît dreapta AB să fie paralelă cu linia de pămînt şi astfel încît AC să fie dreaptă de profil.
15.17. Cum se poate recunoaşte că un plan definit prin două drepte concurente este paralel cu linia de pămînt?

15.2. PROBLEME DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ

15.2.1. Intersecţia unei drepte cu un plan

Fie R planul şi D dreapta.
1° Dacă dreapta D este *verticală,* proiecţia sa orizontală este un punct a. Punctul a este proiecţia orizontală a punctului de intersecţie. Se ştie cum se determină proiecţia sa frontală. Se raţionează în acelaşi mod dacă dreapta D este *de capăt.*
2° Dacă planul R este vertical, proiecţia orizontală a punctului de intersecţie, dacă există, aparţine proiecţiei orizontale a dreptei D şi urmei orizontale a planului R. Această proiecţie este deci determinată. Se deduce de aici cealaltă proiecţie pe dreapta D (fig. 34).

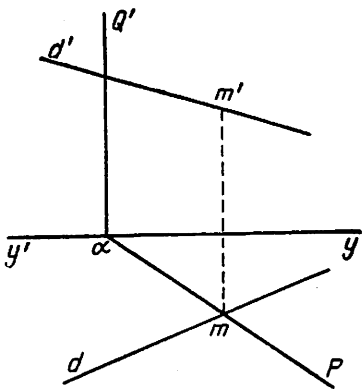
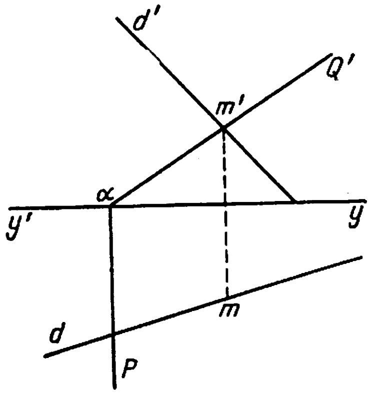


Fig. 34

Fig. 35

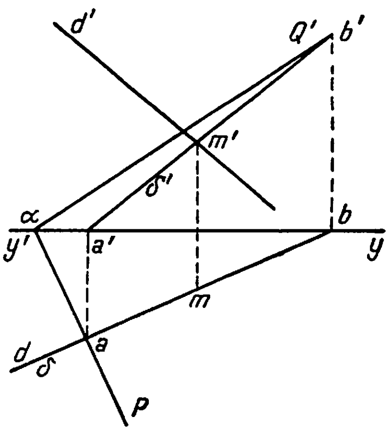


Construcţia este analoagă dacă planul *R* este de capăt (fig. 35).

3° Planul *R* şi dreapta *D* oarecare. În general, planul vertical care conţine dreapta *D* taie planul *R* după o dreaptă △. Punctul căutat, dacă există, este intersecţia lui *D* cu △.

Dreapta △ este dreapta conţinută în planul *R* şi deci proiecţia orizontală este aceea a lui *D*. Ştim să o determinăm. Figura 36 pune în evidenţă intersecţia

Fig. 36



planului $P\alpha Q'$ cu dreapta $D(d, d')$, utilizînd planul vertical care conţine pe D. Se poate de asemenea să se utilizeze planul de capăt care conţine dreapta D (fig. 37).

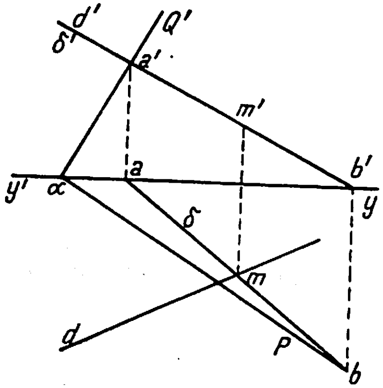


Fig. 37

Observaţie — În anumite cazuri se va putea utiliza un plan auxiliar altul decît planul vertical (sau de capăt) care conţine dreapta D. Problema se reduce la intersecţia a două plane, chestiune care este tratată în paragraful următor (a se vedea exerciţiul nr. **15.19**).

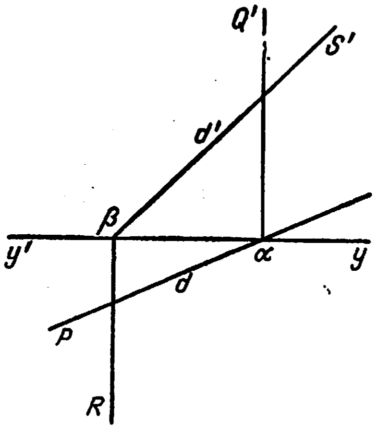
15.2.2. Intersecţia a două plane

1° *Unul din plane este perpendicular pe un plan de proiecţie.* De exemplu, dacă unul din plane este vertical, urma sa orizontală este proiecţia orizontală a dreptei de intersecţie, care este atunci determinată în celălalt plan.

Figura 38 pune în evidenţă intersecţia (d, d') a planului vertical $P\alpha Q'$ cu planul de capăt $R\beta S'$.

2° *Cele două plane sînt oarecare.*

Fig. 38



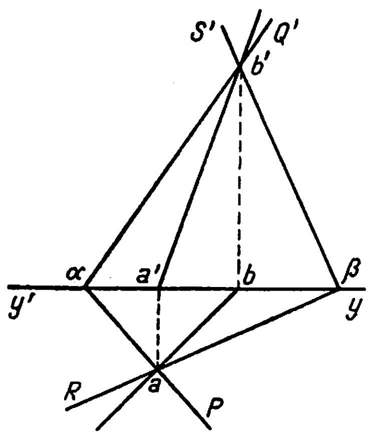
Se utilizează după caz una sau alta din metodele următoare:

a) Se determină două puncte de intersecție tăind planele date cu două plane auxiliare care se pot alege perpendiculare pe un plan de proiecție.

EXEMPLE. Figura 39 pune în evidență, intersecția planelor $P\alpha Q'$ și $R\beta S'$, ambele definite prin urmele lor.

S-au luat ca plane auxiliare cele două plane de proiecție; punctul

Fig. 39



$A(a, a')$ este punctul de intersecţie al urmelor orizontale corespunzătoare acestor plane; punctul $B(b, b')$ este punctul de intersecţie al urmelor frontale.

b) Se obţine un punct de intersecţie luînd intersecţia unuia din plane cu o dreaptă a celuilalt.

EXEMPLU. Unul din plane, R, este definit prin urmele sale $P\alpha Q'$; celălalt plan, S, este definit prin două drepte oarecare $D(d, d')$ şi $\Delta(\delta, \delta')$, concurente în $O(o, o')$. Pe epură (fig. 40) se determină

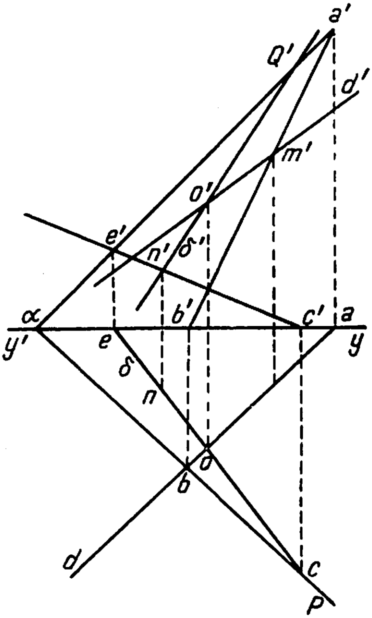


Fig. 40

punctul $M(m, m')$ de intersecţie dintre D cu R şi punctul $N(n, n')$ de intersecţie dintre Δ şi R.

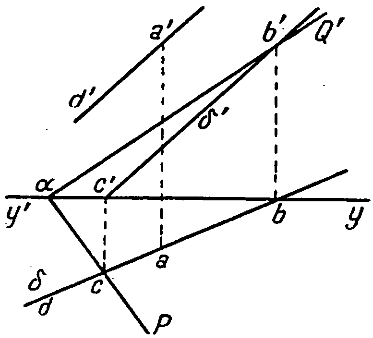
15.2.3. Probleme de paralelism şi de ortogonalitate

În acest paragraf, vom trata ca model cîteva probleme de geometrie ilustrînd teoremele asupra paralelismului şi ortogonalităţii.

1. Drepte şi plane paralele.

Un plan R este definit prin urmele sale. Să se determine dreapta D care conţine un punct A(a, a') dat, este paralelă cu R şi cunoscînd proiecţia sa orizontală d. Se determină dreapta $\triangle$ a planului pentru care proiecţia sa orizontală δ este egală cu *d*. Dreapta căutată este evident dreapta care conţine pe *A* şi paralelă cu $\triangle$ (fig. 41).

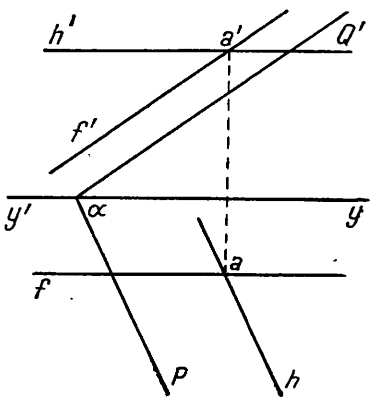
Fig. 41



2. Plane paralele.

Să se determine un plan R' paralel cu un plan R definit prin urmele sale şi care conţine un punct dat, A (fig. 42).

Fig. 42



Planul R' este definit prin:

1° Orizontala (h, h') care conține pe A și paralelă cu urma orizontală a planului R.

2° Frontala (f, f') care conține pe A și paralelă cu urma frontală a planului R.

3. Dreaptă ortogonală cu un plan.

Reamintim faptul că o dreaptă este ortogonală cu un plan dacă ea este ortogonală cu două drepte neparalele din acest plan.

Utilizînd teorema care se referă la proiecția ortogonală a două drepte ortogonale, se obțin următoarele două proprietăți:

1° Dacă o dreaptă D este ortogonală cu planul R, direcția proiecției sale orizontale este ortogonală cu direcția orizontalelor planului și direcția proiecției sale frontale este ortogonală cu direcția frontalelor planului.

2° Rezultă de aici epura fundamentală următoare: *Un plan R fiind definit prin urmele sale, să se determine o dreaptă D ortogonală planului R și care conține un punct dat, A (fig. 43).*

Proiecția orizontală d a lui D este dreapta care conține pe a și ortogonală cu $P\alpha$; proiecția frontală d' a lui D este dreapta care conține pe a' și ortogonală cu $Q'\alpha$.

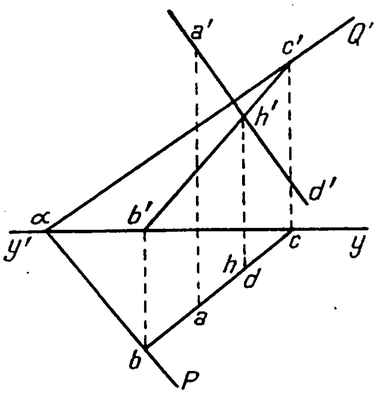


Fig. 43

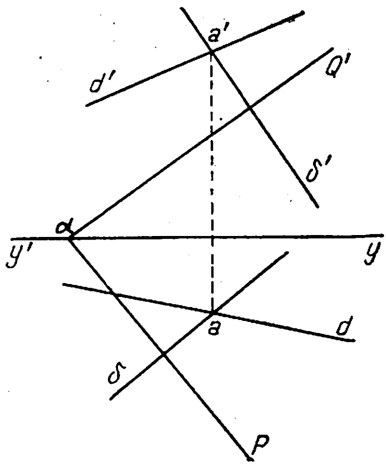
Pe epură s-a construit proiecţia ortogonală a punctului A pe planul R determinînd punctul $H(h, h')$, intersecţia dreptei D cu planul R.

4. Plane perpendiculare

Reamintim că un plan R este perpendicular pe un plan R' dacă şi numai dacă unul dintre plane conţine o dreaptă ortogonală cu celălalt plan; de unde problema următoare:

Un plan R fiind definit prin urmele sale, să se determine un plan R' perpendicular pe planul R şi conţinînd o dreaptă dată, D (fig. 44).

Fig. 44



Planul R' este definit de dreapta D şi de o dreaptă Δ ortogonală cu planul R şi care conţine un punct A aparţinînd dreptei D.

EXERCIŢII

Să se determine intersecţia unei drepte cu un plan în cazurile următoare:

15.18. Planul este definit prin două drepte concurente; dreapta este linia de pămînt.

15.19. Planul este definit prin urmele sale; dreapta este de profil.

(Se va putea lua ca plan auxiliar planul care conţine dreapta şi paralel cu orizontalele planului).

15.20. Planul este definit prin trei puncte O, A, B; dreapta D este în aşa fel încît d trece prin o şi d' este paralelă cu $o'a'$.

15.21. Urmele planului αP şi $\alpha Q'$ sînt conţinute în aceeaşi dreaptă; dreapta dată este orizontală.

Să se determine intersecţia a două plane în cazurile următoare:

15.22. Cele două plane sînt definite prin urmele lor; urmele frontale sînt paralele.

15.23. Unul din plane este definit prin urmele sale; celălalt plan este definit prin linia de pămînt şi un punct.

15.24. Planele sînt definite prin urmele lor; urmele de acelaşi nume nu se taie în limitele epurei.

15.25. Unul dintre plane este definit de un punct O şi de o frontală; celălalt plan este definit de acelaşi punct O şi de o orizontală.

15.26. Cele două plane sînt definite prin urmele lor şi taie linia de pămînt în acelaşi punct.

15.27. Fiecare plan este definit printr-o dreaptă de profil şi printr-un punct al liniei de pămînt.

15.28. Să se determine un plan paralel cu un plan de capăt dat şi care conţine un punct dat.

15.29. Să se determine planul paralel cu o dreaptă dată şi care conţine o verticală dată.

15.30. Se dă un plan P care conţine linia de pămînt şi un punct A. Să se determine o dreaptă paralelă cu P care conţine un punct dat, B şi cunoscînd proiecţia sa orizontală, d.

15.31. Un plan R este definit prin urmele sale.
Să se determine un plan vertical care conţine un punct dat, A şi perpendicular pe planul R.

15.32. Se dau două puncte $A(a, a')$ şi $B(b, b')$.

1° Să se determine punctul M, mijlocul segmentului $[A, B]$.

2° Să se determine prin orizontala şi frontala lui M, planul mediator al lui $[A, B]$.

15.33. Se dă o dreaptă $D(d, d')$ şi un punct $A(a, a')$.

1° Utilizînd planul care conţine pe A şi ortogonal cu D, să se determine punctul B, simetricul lui A în raport cu D.

2° Să se determine simetricul punctului A în raport cu planul vertical care conţine pe D.

15.34. Se dau două plane definite prin urmele lor şi un punct A. Să se determine planul care conţine pe A şi perpendicular pe două plane date.

În cazurile următoare să se determine o dreaptă care conține un punct dat A și care întîlnește două drepte date D și △.

	A	D	△
15.35.	oarecare	orizontală	frontală
15.36.	pe $y'y$	de profil	oarecare
15.37.	oarecare	oarecare	$y'y$
15.38.	oarecare	de profil	$y'y$

În cazurile următoare să se determine o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată L și care întîlnește două drepte date D și △:

	L	D	△
15.39.	frontală	orizontală	oarecare
15.40.	$y'y$	oarecare	oarecare
15.41.	oarecare	oarecare	de capăt
15.42.	de profil	orizontală	verticală

În cazurile următoare să se determine o dreaptă care conține un punct dat, A, este paralelă cu un plan dat, P și întîlnește o dreaptă dată, D:

	A	P	D
15.43.	oarecare	orizontal	oarecare
15.44.	oarecare	vertical	de profil
15.45.	oarecare	oarecare	$y'y$

15.3. SCHIMBĂRI DE PLAN

15.3.1. Introducere

Executarea unei epure prezintă uneori dificultăți deoarece, în raport cu planele de proiecție, datele ocupă poziții nefavorabile.

Invers, o dispunere particulară a datelor poate să dea o epură mai uşor de executat.

EXEMPLU. Fie o frontală D**; dreapta care conţine un punct dat,** A **şi ortogonală dreptei** D **este dreapta** AB **(fig. 45) pentru care**

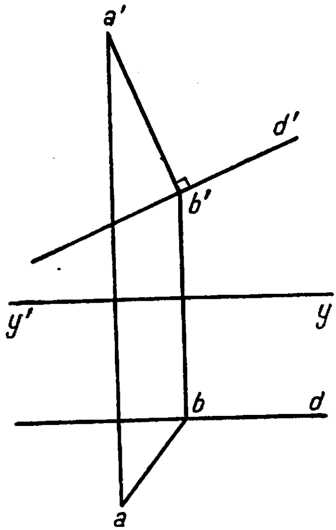


Fig. 45

proiecţia frontală $a'b'$ **este ortogonală proiecţiei frontale** d' **a dreptei** D.

Sîntem astfel conduşi să transformăm o epură **modificînd planele de proiecţie.** Aceasta este metoda numită *schimbare de plan.*

Un punct M fiind reperat în raportul cu două plane perpendiculare H şi F, se propune de a-l repera într-un nou sistem format de unul din plane H (sau F) şi un alt plan F_1 (sau H_1) perpendicular pe acela dintre cele două plane care a fost menţinut.

DEFINIŢIE. A face o schimbare de plan frontal, înseamnă a lua ca nou plan frontal de

proiecție, un plan vertical oarecare, planul orizontal nefiind schimbat.
A face o schimbare de plan orizontal, înseamnă a lua ca nou plan orizontal de proiecție, un plan de capăt oarecare, planul frontal nefiind schimbat.

15.3.2. Schimbarea planului pentru un punct

● SCHIMBAREA PLANULUI FRONTAL DE PROIECȚIE

Noul plan frontal este definit prin urma sa orizontală care este noua linie de pămînt y_1y_1'.
Planul orizontal nefiind schimbat, proiecția orizontală a punctului A nu se schimbă.
Noua proiecție frontală a punctului A se găsește pe linia de rapel a lui a, ortogonală cu y_1y_1' și deoarece planul orizontal nu a fost schimbat, cota este menținută cu semnul său.
Se va respecta convenția pe care am adoptat-o la nr. **15.1.2** pentru sensul cotelor și depărtărilor după partea în care s-au scris literele y_1y_1'. Figurile 46 și 47 pun în evidență cele două aspecte posibile ale schimbării de plan frontal pentru un punct.

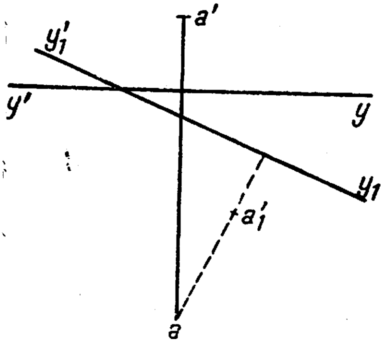


Fig. 46

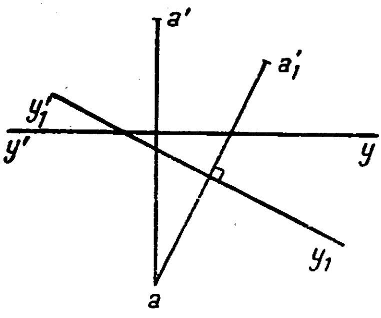


Fig. 47

Se va reţine esenţialul sub forma următoare:

REGULĂ. **Într-o schimbare a planului frontal de proiecţie:**
1° proiecţia orizontală a unui punct nu este schimbată;
2° cota unui punct rămîne aceeaşi.

● SCHIMBAREA PLANULUI ORIZONTAL DE PROIECŢIE

Figura 48 pune în evidenţă schimbarea planului orizontal pentru cele două puncte *A* şi *B*. Se va reţine esenţialul sub forma următoare:

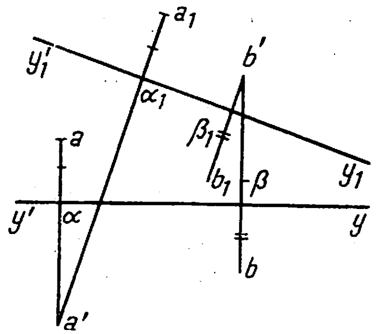


Fig. 48

REGULĂ. **Într-o schimbare a planului orizontal de proiecţie:**
1° proiecţia frontală a unui punct nu este schimbată;
2° depărtarea unui punct rămîne aceeaşi.

15.3.3. Schimbarea planului pentru o dreaptă

Este suficient să se facă schimbarea planului pentru două puncte. Pe cît este posibil se aleg punctele care simplifică urmele.

● SCHIMBAREA PLANULUI FRONTAL DE PROIECŢIE

S-a utilizat urma orizontală a dreptei, (a, a') şi un punct oarecare (fig. 49).

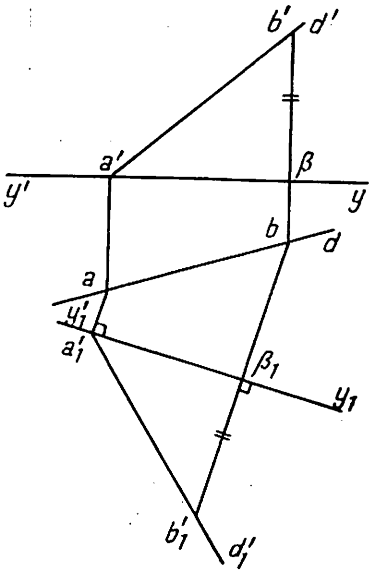


Fig. 49

● SCHIMBAREA PLANULUI ORIZONTAL DE PROIECŢIE

S-au utilizat două puncte oarecare A şi B (fig. 50).

APLICAŢIE. Epura (fig. 51) arată determinarea urmelor unei drepte de profil. S-a făcut o schimbare de plan frontal luînd ca nouă linie de pămînt proiecţia dreptei de profil.
Urma orizontală este (c, c'): punctul de cotă nulă.
Urma frontală este (e, e'): punctul pentru care proiecţia orizontală este e.

15.3.4. Schimbarea planului pentru un plan

Este suficient să facem schimbarea planului pentru trei puncte necoliniare ale planului. Se aleg şi aici puncte care simplifică epura.

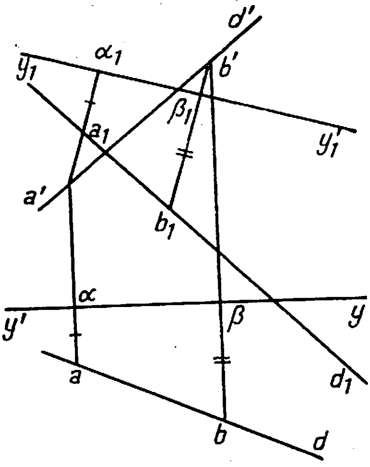


Fig. 50

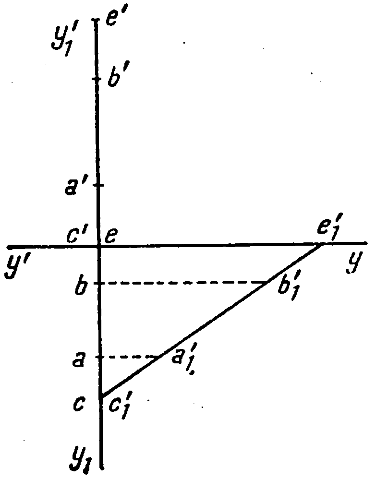


Fig. 51

● SCHIMBAREA PLANULUI FRONTAL DE PROIECŢIE

Epura (fig. 52) pune în evidenţă schimbarea planului pentru un plan definit prin urmele sale, fie $P\alpha Q'$. Planul orizontal fiind menţinut, urma orizontală este aceeaşi: proiecţia sa orizontală este P, noua sa pro-

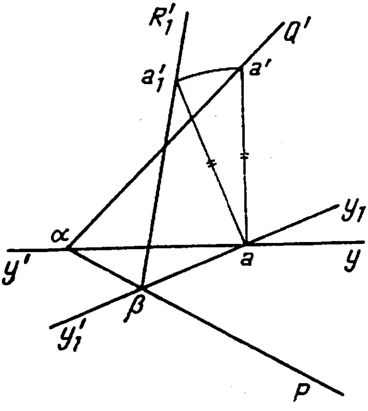


Fig. 52

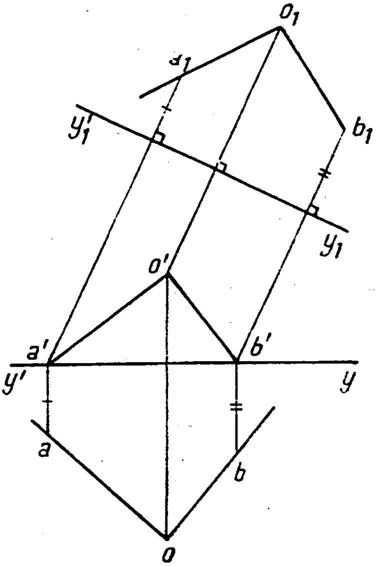
iecţie frontală se confundă cu noua linie de pămînt $y_1y'_1$; P taie pe $y_1y'_1$ în β.

Rămîne de făcut schimbarea de plan pentru un punct. S-a ales punctul $A(a, a')$ pentru care proiecţia orizontală a este pe $y_1y'_1$ şi pe yy'. Noua proiecţie frontală a lui A este a'_1. În noul sistem, punctul (a, a'_1) are depărtarea nulă; el aparţine noii proiecţii frontale care este $\beta a'_1$. Îl vom desemna prin R'_1 şi nu prin Q'_1 căci aceasta nu este noua proiecţia frontală a lui Q'.

● SCHIMBAREA PLANULUI ORIZONTAL DE PROIECŢIE

Epura (fig. 53) pune în evidenţă schimbarea planului orizontal pentru un plan definit prin două drepte

Fig. 53



concurente în O. S-a făcut schimbarea de plan pentru punctul O şi pentru urmele orizontale A şi B a două drepte.

15.3.5. Concluzie

În general, dispunînd într-o epură de alegerea a unei noi linii de pămînt, se va putea face ca unele elemente să ocupe poziţii particulare printr-o schimbare de plan.

EXEMPLU. Fie un plan definit prin dreptele D şi concurente în 0 (fig. 54). Noua linie de pămînt y_1y_1' este ortogonală proiecţiei frontale $a'b'$ a unei frontale din plan.

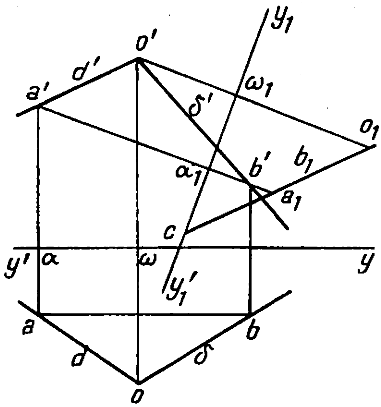


Fig. 54

schimbare de plan orizontal face planul dat, *vertical.*

Tabloul următor indică cîteva posibilităţi ale schimbării de plan.

Alegînd noua linie de pămînt	printr-o schimbare de plan	devine
paralelă la d	frontal	o dreaptă oarecare : frontală
paralelă cu d'	orizontal	o dreaptă oarecare : orizontală

Alegînd noua linie de pămînt	printr-o schimbare de plan	devine
ortogonală cu *P*	frontal	un plan oarecare: de capăt
ortogonală cu *Q'*	orizontal	un plan oarecare: vertical
ortogonală cu *d*	frontal	o orizontală: de capăt
ortogonală cu *d'*	orizontal	o frontală: verticală
paralelă cu *P*	frontal	un plan vertical: de front
paralelă cu *Q'*	orizontal	un plan de capăt: orizontal

Utilizînd acest tablou, se vede că, prin două schimbări de plan succesive, se poate face ca o dreaptă oarecare să devină verticală sau de capăt, iar un plan să devină de front sau orizontal.

EXERCIȚII

15.46. Printr-o schimbare convenabilă de plan o dreaptă dată să devină de profil.
15.47. Printr-o schimbare de plan să se determine punctul comun a două drepte de profil situate în același plan de profil.
15.48. Se dau proiecțiile a trei puncte oarecare *A*, *B*, *C* într-un plan de profil.
1° Să devină frontal acest plan.
2° Să se dea proprietățile figurii $a_1'b_1'c_1'$ obținute
15.49. 1° Să devină orizontal un plan de capăt
2° În planul de capăt s-au luat două puncte *A* și *B*.
Să se găsească proiecțiile punctelor *C* și *D* ale planului de capăt astfel încît *ABCD* să fie un pătrat.
15.50. Printr-o schimbare convenabilă de plan, un plan dat paralel cu linia de pămînt să devină de capăt. (Se va determina acest plan prin două drepte paralele cu linia de pămînt).

15.51. Se dă proiecţia orizontală a două drepte concurente şi ortogonale (proiecţiile celor două drepte nu sînt ortogonale) şi proiecţia frontală a uneia dintre ele. Să se determine proiecţia frontală a celeilalte, cu ajutorul unei schimbări de plan frontal.

15.52. Se dă un plan prin urmele sale. Să se facă o schimbare de plan în aşa fel încît, în noul sistem planul devine paralel cu noua linie de pămînt.

15.35. 1° Se dau două drepte nesituate în acelaşi plan. Să se efectueze o schimbare de plan frontal în aşa fel încît noile proiecţii frontale ale celor două drepte să fie paralele.

(Să se demonstreze că aceasta revine la a face ca un plan paralel cu cele două drepte să devină de capăt.)

2° Se dau proiecţiile unui patrulater strîmb. Să se facă o schimbare de plan orizontal astfel încît noua sa proiecţie orizontală să fie un trapez.

15.4. RABATERE

15.4.1. Observaţie preliminară

Într-un plan P oarecare vom considera o figură F. Pentru a obţine figura F în mărime reală — ceea ce permite să se efectueze pe F toate operaţiile grafice — se poate utiliza procedeul următor.

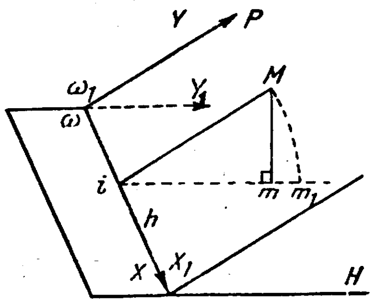
Fie, în planul P, un reper ortonormat $(\omega, \vec{I}, \vec{J})$. Dacă se desemnează prin ωX şi ωF semidreptele de vectori unitari respectiv : $\vec{I}$ şi $\vec{J}$, cunoaşterea cuplului $(\omega X, \omega Y)$ caracterizează reperul $(\omega, \vec{I}, \vec{J})$ care poate fi atunci notat ωXY.

La orice punct M al lui F, de coordonate a, b, în reperul $X\omega F$, facem să corespundă punctul m_1 cu aceleaşi coordonate în reperul $\omega_1 X_1 Y_1$.

Alegînd convenabil reperele ωXY şi $\omega_1 X_1 Y_1$, vom vedea că este posibil, să se realizeze grafic pe o epură, acest procedeu care se numeşte în acest caz **rabatere**. Vom considera un plan P neparalel cu planul orizon-

tal de proiecţie şi pentru care urma orizontală este dreapta *h* (fig. 55).
Remarcăm faptul că, în cazul în care planul *P* este orizontal, rabaterea este inutilă deoarece avem figura *F* în mărime reală, în proiecţie orizontală.

Fig. 55



Cele două repere sînt următoarele: ω şi ω_1 sînt egale şi aparţin dreptei *h*, ωX şi $\omega_1 X_1$ sînt egale şi au ca suport dreapta *h*, $\omega_1 Y_1$ este proiecţia orizontală a lui ωY.
Punctul $M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ în reperul ωXY are rabaterea în reperul $\omega_1 X_1 Y_1$, $m_1 \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Rezultă de aici imediat:
1° M şi m_1 au aceeaşi proiecţie ortogonală i pe dreapta h.
2° $iM = im_1$.
Remarcăm faptul că la un semiplan inclus în *P* de frontieră *h*, corespunde unul din semiplanele de frontieră *h* inclus în planul orizontal.
Totul se petrece deci ca şi cînd am roti planul *P* în jurul axei *h* pentru a-l aduce să coincidă cu planul orizontal.

15.4.2. Rabaterea unui punct

1. *Regula triunghiului dreptunghic*

Fie, pe epură, punctul $M(m, m')$ şi dreapta (h, h') inclusă în planul orizontal.

Punctul i, proiecţia ortogonală a lui m pe h, este determinat. Se remarcă (fig. 55) că iM este ipotenuza unui triunghi dreptunghic pentru care se cunosc lungimile celorlalte laturi: im şi mM cota lui M. Rezultă de aici construcţia următoare, făcută după regula triunghiului dreptunghic (fig. 56).

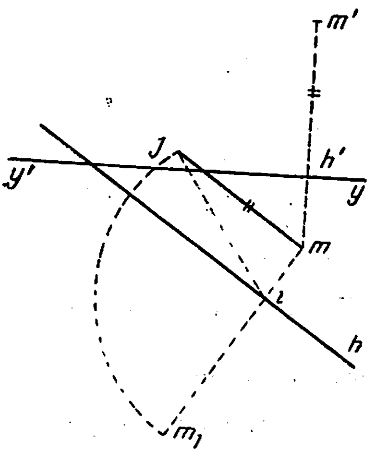


Fig. 56

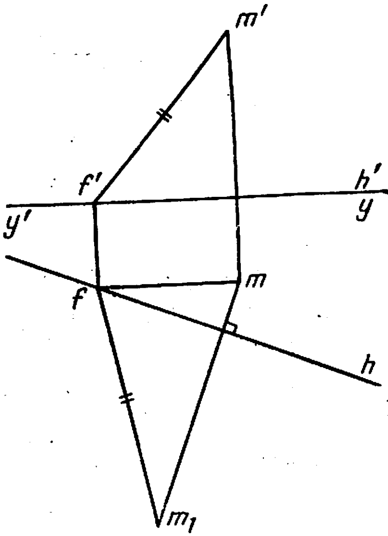


Fig. 57

Pe dreapta care conţine punctul m şi paralelă cu axa h, se marchează punctul j astfel încît mj să fie egal cu cota lui m. Rabaterea lui m este la intersecţia dreptei care conţine pe m şi ortogonală cu h şi a cercului de centru i şi de rază ij. Se alege m_1 de o parte sau de alta a dreptei h.

2. *Procedeu prin frontală*

Fie $(mf, m'f')$ frontala lui m în planul P (fig. 57). În rabatere, punctul F coincide cu rabaterea sa, dis-

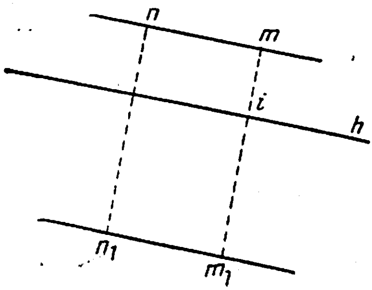


Fig. 58

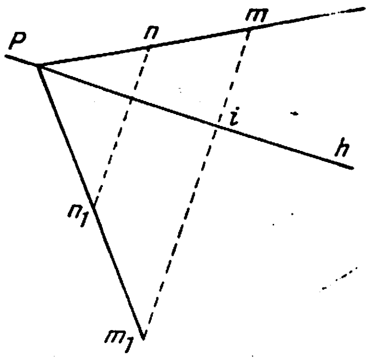


Fig. 59

tanţa MF este egală cu $m'f'$; urmează construcţia punctului m_1 care se găseşte:

1° pe dreapta care conţine pe m şi ortogonală cu h;
2° pe cercul de centru f şi de rază $m'f'$.

Observaţie. — Se poate construi rabaterea unui plan P pe un plan orizontal oarecare. Axa este intersecţia celor două plane; în loc de a utiliza cota punctului M, se utilizează diferenţa dintre cota punctului m şi aceea a planului orizontal.

15.4.3. Rabaterea unei figuri plane

Plecînd de la rabaterea unui punct, este mai simplu să se construiască rabaterea altui punct prin *metoda aliniamentelor*.

Fie un punct (m, m') şi rabaterea sa m_1, axa fiind dreapta h a planului orizontal; fie un alt punct al planului definit prin proiecţia sa orizontală n:

a) dacă mn este paralelă cu h, rabaterea acestei drepte care conţine pe m_1 este paralelă cu h; ea este determinată şi prin urmare n_1 (fig. 58);

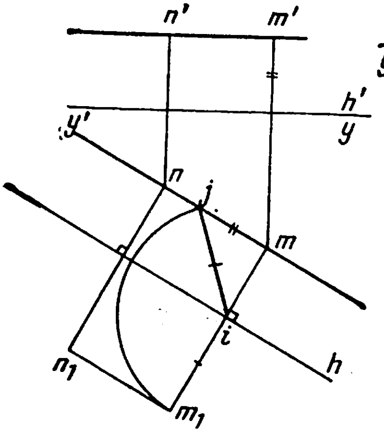


Fig. 60

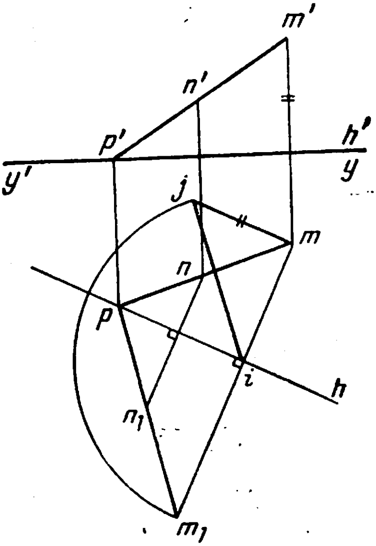


Fig. 61

b) dacă mn taie pe h în p, rabaterea dreptei pm este pm_1; rezultă de aici n_1 (fig. 59).

15.4.4. Ridicarea unei figuri plane

Avînd construită rabaterea unui plan P pe un plan orizontal în jurul axei (h, h'), s-au efectuat pe figura rabatată un anumit număr de operații grafice.

Un punct n_1 fiind obținut, a ridica acest punct înseamnă a-l determina pe epură prin cele două proiecții ale sale.

Metoda aliniamentelor permite această construcție:

a). dacă m_1n_1 este paralelă cu h, dreapta MN este o orizontală; cele două proiecții ale sale sînt determinate; rezultă de aici n și n' (fig. 60);

b) dacă m_1n_1 taie pe h în p, punctul p' este determinat pe h'; proiecţiile dreptei MN sînt pm şi pm'; rezultă de aici n şi n' (fig. 61).

15.4.5. Aplicaţii ale rabaterii

Ne vom mulţumi să dăm cîteva exemple importante.

● *Distanţa dintre două puncte A (a, a') şi $B(b, b')$.*

Dacă dreapta AB nu este paralelă cu un plan de proiecţie, se rabate planul vertical care conţine pe A şi B pe planul orizontal care conţine unul din puncte (fig. 62).
Se va remarca faptul că avem o construcţie identică făcînd o schimbare de plan frontal de proiecţie, noul plan frontal fiind planul vertical care conţine dreapta AB. Se poate astfel obţine distanţa de la un punct la un plan deoarece se ştie să se construiască proiecţia ortogonală a unui punct pe un plan (nr. **15.2.3**).

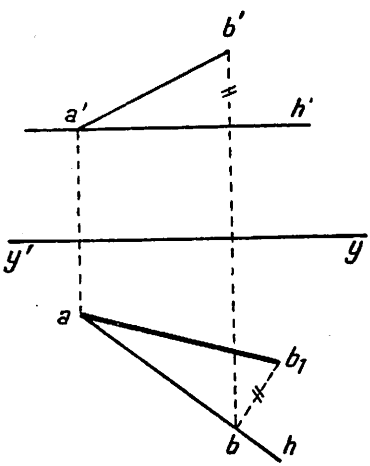


Fig. 62

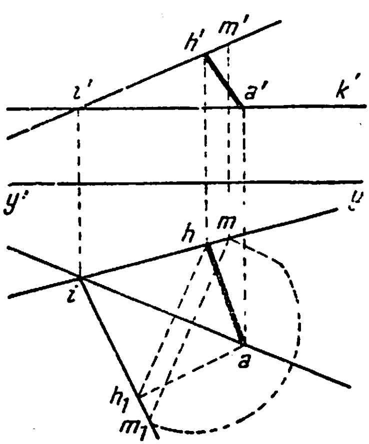


Fig. 63

● *Distanța de la un punct la o dreaptă.*

Se rabate planul definit de un punct dat, A și o dreaptă dată, D pe planul orizontal care conține punctul A.

Rabaterea dreptei D este determinată de rabaterea punctului M al lui D și de punctul I de intersecție a lui D cu axa. Se obține punctul $H(h, h')$, proiecția ortogonală a punctului A pe dreapta D (fig. 63). Distanța de la punctul A la dreapta D este ab_1.

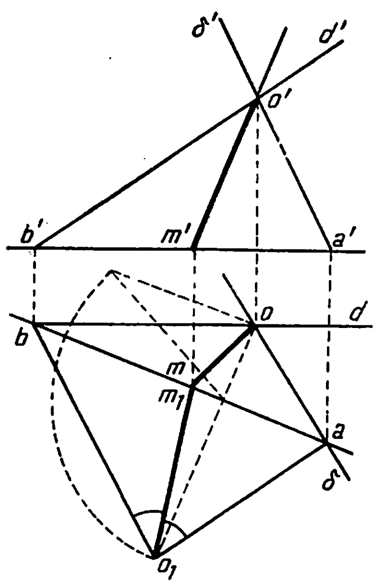


Fig. 64

● *Bisectoarele a două drepte*

Se dau în epură dreapta $D(d, d')$ și dreapta $\triangle(\delta, \delta')$ concurente în O. Se rabate punctul O în o_1 pe planul orizontal. Se obține o_1i și o_1j rabaterile celor două drepte. S-a construit o bisectoare o_1m_1 care se ridică în om, $o'm'$ (fig. 64).

EXERCIŢII

15.54. Să se construiască urmele unui plan cunoscînd proiecţiile (m, m') ale unuia dintre punctele sale şi rabatarea m_1 a acestui punct, axa fiind urma orizontală, necunoscută a planului.
15.55. Să se rabată, pe planul orizontal de proiecţie, un plan definit printr-un punct (a, a') şi printr-o dreaptă de profil $(bc, b'c')$. Să se construiască, în particular, rabatarea triunghiului ABC.
15.56. Se dă un plan prin urmele sale αP şi $\alpha Q'$ şi se rabate pe planul orizontal de proiecţie. Să se construiască rabaterea urmei frontale.
15.57. Se dau proiecţiile (a, a') ale unui punct. Rabatarea sa în jurul unei drepte a planului orizontal de proiecţie este un punct dat, a_1. Să se construiască axa de rabatere.
15.58. Se dă un punct (a,a') şi proiecţiile orizontale oa şi ob a două drepte concurente. Să se construiască proiecţiile frontale ale acestor drepte ştiind că dacă se rabate planul acestor două drepte pe planul orizontal al punctului (a, a'), punctul lor de intersecţie se rabate în o_1 dat.

*

Să se construiască bisectoarele a două drepte concurente în cazurile următoare :
15.59. Linia de pămînt şi o dreaptă oarecare. Cazul în care dreapta este de profil.
15.60. O frontală şi o dreaptă de profil.
15.61. Două drepte de profil.
15.62. Cele două urme ale unui plan.

*

15.63. Se dă o orizontală (h, h') şi un punct (o, o'). Să se construiască proiecţiile exagonului regulat care are ca centru punctul (o, o') şi pentru care o latură se proiectează după dreptele (h, h').

Tabla de materii

Tiraj: 21.400 ex. S.P.: 120 ex. broşate
Coli de tipar: 23,25.
Hîrtia: Tipar înalt A. 63 g/m²
Format: 16/54×84.
Bun de tipar: 29. VI. 74
Nr. plan: 6885. Ediţia: 1974

Întreprinderea Poligrafică Cluj
Str. Brassai Nr. 5—7
Republica Socialistă România
Comanda Nr. 102/1974