А.П. Ершова, В.В. Голобородько

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА ДЛЯ 10–11 КЛАССА

Издание четвертое, исправленное

ИЛЕКСА
Москва
2005

Рецензенты:

Ю. В. Гандель, доктор физико-математических наук, профессор Харьковского Национального университета им. В. Н. Каразина;

Е. Е. Харик, Заслуженный учитель Украины, преподаватель математики ФМЛ № 27 г. Харькова

Ершова А. П., Голобородько В. В.

Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов.— М.: Илекса, 2005,— 208 с.

ISBN 5-89237-137-9.

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по всем важнейшим темам курса математики 10–11 классов.

Работы состоят из 6 вариантов трех уровней сложности.

Дидактические материалы предназначены для организации дифференцированной самостоятельной работы учащихся.

ISBN 5-89237-137-9

Предисловие

Основные особенности предлагаемого сборника самостоятельных и контрольных работ:

1. Сборник содержит *полный набор самостоятельных и контрольных работ по всему курсу алгебры и начал анализа 10–11 классов*, как основному, так и углубленному.
   Контрольные работы рассчитаны на один урок, самостоятельные работы — на 25–40 минут, в зависимости от темы и уровня подготовки учащихся.
2. Сборник позволяет осуществить дифференцированный контроль знаний, так как задания распределены по трем уровням сложности А, Б и В. Уровень А соответствует обязательным программным требованиям, Б — среднему уровню сложности, задания уровня В предназначены для учеников, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах, школах, гимназиях и лицеях с углубленным изучением математики. Для каждого уровня приведено два расположенных рядом равноценных варианта (как они обычно записываются на доске), поэтому на уроке достаточно одной книги на парте.
3. Как правило, на одном развороте книги приводятся оба варианта всех трех уровней сложности. Благодаря этому учащиеся могут сравнить задания различных уровней и, с разрешения учителя, выбрать подходящий для себя уровень сложности.
4. В книгу включены *домашние самостоятельные и практические работы*, содержащие творческие, нестандартные задачи по каждой изучаемой теме, а также задачи повышенной сложности. Эти задания могут в полном объеме или частично предлагаться учащимся в качестве зачетных, а также использоваться как дополнительные задания для проведения контрольных работ. По усмотрению учителя выполнение нескольких или даже одного такого задания может оцениваться отличной оценкой.
   Ответы к контрольным и домашним самостоятельным работам приводятся в конце книги.
5. Тематика и содержание работ охватывают требования всех основных отечественных учебников алгебры и начал анализа 10–11 класса. Для удобства пользования книгой приводится таблица тематического распределения работ по учебникам А. Н. Колмогорова и др., Н. Я. Виленкина и др.

Наш адрес в Интернете: www.axiom.com.ua.

Тригонометрия

С-1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ГРАДУСНАЯ И РАДИАННАЯ МЕРЫ УГЛА*

Вариант А1

1 Вычислите:

а) $2\cos 60° - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$;

б) $\sin(-420°)$.

2 Сравните значения выражений:

а) $\sin\frac{8\pi}{7}$ и $\cos 90°$;

б) $\sin\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

3 Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$0{,}5\cos\alpha + 2$.

Вариант А2

1 Вычислите:

а) $\operatorname{ctg} 45° - 2\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos(-750°)$.

2 Сравните значения выражений:

а) $\cos\frac{4\pi}{7}$ и $\sin 180°$;

б) $\frac{\pi}{3}$ и $\cos\frac{\pi}{3}$.

3 Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$3\sin\alpha - 1$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1 Вычислите:

---

* Авторы обращают внимание на то, что работы по тригонометрии по уровню сложности ориентированы на учащихся, изучавших начала тригонометрии в 9 классе. Для учащихся, впервые изучающих основные формулы тригонометрии, рекомендуем набор самостоятельных работ, предложенный в сборнике авторов для 9 класса.

а) $2\cos 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ - \sin\frac{3\pi}{2}$;

б) $\frac{\sin 390^\circ - \sin(-390^\circ)}{\operatorname{tg}(-765^\circ)}$.

а) $2\sin 60^\circ \operatorname{tg} 30^\circ - \cos\pi$;

б) $\frac{\operatorname{ctg} 405^\circ - \operatorname{ctg}(-405^\circ)}{2\sin(-750^\circ)}$.

2

Сравните значения выражений:

а) $\cos\frac{25\pi}{13} \operatorname{tg}\frac{11\pi}{10}$ и $\sin(-330^\circ)\operatorname{ctg} 100^\circ$;

б) $\cos 2^\circ$ и $\cos 2$.

а) $\sin 1{,}2\pi \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{7}$ и $\cos(-300^\circ)\operatorname{tg} 110^\circ$;

б) $\sin 4$ и $\sin 4^\circ$.

3

При каких значениях *a* возможно равенство

$\sin x = a^2 + 1$?

$\cos x = -1 - a^2$?

Вариант В1

Вариант В2

1

Вычислите:

а) $\sin(-45^\circ)\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \cos(-45^\circ)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\frac{\cos 540^\circ - \sin 810^\circ}{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{2} - \operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$.

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg} 45^\circ + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg} 45^\circ$;

б) $\frac{\sin\frac{7\pi}{2} - \cos 6\pi}{\operatorname{tg} 540^\circ - \operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$.

2

Сравните значения выражений:

а) $\sin 2 \cos 3 \operatorname{tg} 4$ и $\cos 5$;

б) $\sin 200^\circ$ и $\sin(-200^\circ)$.

а) $\cos 1 \operatorname{tg} 2 \operatorname{ctg} 3$ и $\sin 4$;

б) $\operatorname{tg}(-100^\circ)$ и $\operatorname{tg} 100^\circ$.

3

При каких значениях *a* неравенство

$\sin x \le a^2 - a - 1$

$\cos x \ge a^2 - 3a + 1$

выполняется при любом значении *x*?

С-2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Вариант А1 | Вариант А2

1

Известно, что

А1: $\sin\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

А2: $\cos\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Найдите значения трех других тригонометрических функций угла α.

2

Упростите выражения:

А1:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)$.

А2:

а) $\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\beta - \sin^2\alpha$;

б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

3

Докажите тождество:

А1: $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

А2: $\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант Б1 | Вариант Б2

1

Известно, что

Б1: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Б2: $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Найдите значения трех других тригонометрических функций угла α.

2

Упростите выражения:

Б1:

а) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\beta$;

Б2:

а) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\beta$;

б) $\left(\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)$.

б) $\left(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)$.

❸

Докажите тождество:

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}+2\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Вариант B1

Вариант B2

❶

Известно, что

B1: $25\sin^2\alpha+5\sin\alpha-12=0$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

B2: $25\cos^2\alpha-5\cos\alpha-12=0$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Найдите значения четырех основных тригонометрических функций угла α.

❷

Упростите выражения:

B1:

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\dfrac{3-3\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

б) $\operatorname{ctg}^6\beta-\dfrac{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}$.

B2:

а) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha-\dfrac{3\sin^2\alpha-3}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}^6\beta-\dfrac{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}$.

❸

Докажите тождество:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=\frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}.$$

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

С-3. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\sin 300°$;

б) $\cos 62° \cos 28° - \sin 62° \sin 28°$.

2

Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}$;

б) $\dfrac{1}{2}\sin\alpha - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

3

Докажите тождество:

$\sin\alpha\cos 3\alpha - \cos\alpha\sin 3\alpha = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$.

Вариант А2

а) $\cos 210°$;

б) $\sin 112° \cos 22° - \sin 22° \cos 112°$.

а) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

$\sin 4\alpha\sin\alpha - \cos 4\alpha\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 5\alpha\right)$.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\sin\dfrac{17\pi}{6} + \cos 240°$;

б) $\dfrac{\cos 52° \cos 7° + \sin 52° \sin 7°}{\sin 29° \cos 16° + \sin 16° \cos 29°}$.

2

Упростите выражения:

Вариант Б2

а) $\cos\dfrac{10\pi}{3} + \sin 150°$;

б) $\dfrac{\sin 72° \cos 12° - \sin 12° \cos 72°}{\cos 18° \cos 12° - \sin 18° \sin 12°}$.

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\sin(\alpha-30^\circ)+\cos(60^\circ+\alpha)$

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

б) $\cos(60^\circ-\alpha)-\sin(\alpha+30^\circ)$.

3

Докажите тождество:

$$\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}5^\circ}.$$

$$\frac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}{1+\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}10^\circ}.$$

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\sin 530^\circ-\cos\dfrac{22\pi}{9}$;

б) $\dfrac{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}$.

2

Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha-\beta)}+$

$+\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(2\pi-\beta)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha-\beta)}$;

б) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+$

$+\cos^2\alpha+\sin^2\beta$.

Вариант В2

а) $\cos 770^\circ-\sin\dfrac{25\pi}{9}$;

б) $\dfrac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ+\cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ+\cos 157^\circ\cos 97^\circ}$.

а) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)}+$

$+\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi+\beta)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)}$;

б) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)+$

$+\sin^2\beta+\cos^2\alpha$.

3

Докажите тождество:

$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 1.$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

С-4. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО УГЛА

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;

б) $2\cos^2 15^\circ \operatorname{tg} 15^\circ$.

2

Найдите $\cos 2\alpha$, если

$\sin\alpha = -0,6$.

3

Упростите выражение:

$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$.

4

Докажите тождество:

$\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

Вариант А2

1

Вычислите:

а) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

б) $1 - 2\sin^2 22^\circ 30'$.

2

Найдите $\cos 2\alpha$, если

$\cos\alpha = 0,8$.

3

Упростите выражение:

$\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot(1+\cos 4\alpha)$.

4

Докажите тождество:

$\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вычислите:

а) $4\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$;

б) $\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ}$.

а) $\cos^4\frac{5\pi}{12} - \sin^4\frac{5\pi}{12}$;

б) $\operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ$.

❷

Известно, что

$\cos\alpha = -0{,}28$
и α — угол II четверти.

Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$.

$\cos\alpha = 0{,}28$
и α — угол I четверти.

Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$.

❸

Упростите выражение:

$4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

$\frac{1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$.

❹

Докажите тождество:

$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha$.

$\frac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вычислите:

а) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$;

б) $\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) \times \left(\cos^3\frac{\pi}{12} + \sin^3\frac{\pi}{12}\right)$.

а) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$;

б) $\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right) \times \left(\cos^3\frac{\pi}{8} - \sin^3\frac{\pi}{8}\right)$.

❷

Известно, что

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Найдите $\operatorname{tg}(\pi + 4\alpha)$.

Найдите $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)$.

❸

Упростите выражение:

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}.$$

$$\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

❹

Докажите тождество:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

$$1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

С-5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Преобразуйте выражение

а) в произведение:

$\sin 6\alpha - \sin 4\alpha$;

$\cos 7\alpha - \cos 3\alpha$;

б) в сумму:

$\cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

$\sin 5\alpha \cos 2\alpha$.

❷

Упростите выражения:

а) $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$;

б) $2\sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 25^\circ$.

а) $\dfrac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}$;

б) $\sin 25^\circ \sin 5^\circ - 0{,}5\cos 20^\circ$.

❸

Докажите тождество:

$$\frac{\sin 4\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha.$$

$$\frac{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Найдите значение выражения, используя представление тригонометрических выражений в виде

а) произведения:

$\frac{\cos 18^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 12^\circ}$;

$\frac{\cos 29^\circ - \cos 91^\circ}{\sin 31^\circ}$;

б) суммы:

$\sin 105^\circ \sin 15^\circ$.

$\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

❷

Упростите выражения:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$;

б) $2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - 1 + 2\sin^2\beta$.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$;

б) $2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + 2\cos^2\alpha - 1$.

❸

Докажите тождество:

$$\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha} = \frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

$$\frac{2\cos 3\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вычислите:

а) $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{18} - \sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{7\pi}{18} - \cos\frac{\pi}{9}}$;

а) $\dfrac{\sin\frac{5\pi}{18} + \sin\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{2\pi}{9}}$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = 0,6$.

б) $\sin\alpha\sin3\alpha$, если $\cos2\alpha = -0,8$.

❷

Упростите выражения:

а) $\frac{\sin6\alpha - \sin4\alpha + \sin2\alpha}{4\cos3\alpha\cos2\alpha}$;

а) $\frac{4\sin3\alpha\sin2\alpha}{\sin4\alpha - \sin6\alpha + \sin2\alpha}$;

б) $(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)\times$
$\times(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$.

б) $(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta)\times$
$\times(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

❸

Докажите тождество:

$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \mathrm{ctg}\frac{C}{2}$,

$\frac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} = -\mathrm{ctg}\frac{C}{2}$,

если A, B и C — углы треугольника.

С-6*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 **Вариант 2**

❶

Вычислите, используя умножение и деление на подходящее тригонометрическое выражение:

а) $\sin 18° \sin 54°$;

а) $\cos 36° \cos 72°$;

б) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

б) $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5}$.

❷

Упростите выражения, используя формулы понижения степени:

а) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} + \alpha\right)$;

а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{11\pi}{8} + \alpha\right)$;

б) $\sin^2 2\alpha + \sin^2\beta + \cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$.

б) $\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

3

Решите неравенства, применяя тригонометрические преобразования:

а) $\cos(91° - x)\cos x - \sin(91° - x)\sin x < 0$;

б) $x^2 + 2x\cos 3{,}5\sin 0{,}5 - \sin 3\sin 4 < 0$.

а) $\sin(179° + x)\cos x - \cos(179° + x)\sin x > 0$;

б) $x^2 - 2x\cos 6{,}5\cos 0{,}5 + \cos 6\cos 7 < 0$.

4

Оцените значения выражений, используя метод введения вспомогательного угла:

а) $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$;

б) $5\cos 2\alpha + 12\sin 2\alpha$.

а) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$;

б) $7\sin\alpha - 24\cos\alpha$.

5

Найдите значения выражений, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

а) $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$.

а) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$;

б) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = -\frac{7}{25}$.

К-1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $2\sin\frac{2\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

Вариант А2

а) $2\cos\frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

б) $\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ$.

б) $\cos 111^\circ \cos 69^\circ - \sin 111^\circ \sin 69^\circ$.

2

Известно, что

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдите $\sin 2\alpha$.

$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдите $\cos 2\alpha$.

3

Упростите выражения:

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;

б) $\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha} + 2\sin^2 \alpha$.

а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

б) $\frac{\sin 5\alpha - \sin\alpha}{2\cos 3\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1$.

4

Докажите тождество:

$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

$\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$.

5

Найдите значение *x* (в радианах), если *x* — угол I четверти и

$\sin 32^\circ + \sin 28^\circ = 2\sin x \cos 2^\circ$.

$\cos 74^\circ + \cos 16^\circ = 2\cos x \cos 29^\circ$.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\cos 25^\circ \cos 5^\circ + \sin 25^\circ \sin 5^\circ}$.

Вариант Б2

а) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}} + \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}$;

б) $\frac{\cos 25^\circ \cos 15^\circ - \sin 25^\circ \sin 15^\circ}{\cos 100^\circ + \cos 20^\circ}$.

2

Известно, что

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=0,5$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Найдите $\sin(60^\circ-\alpha)$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Найдите $\sin(30^\circ+\alpha)$.

3

Упростите выражения:

а) $\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2-2\sin^2\alpha$;

б) $\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha}(1-\cos4\alpha)$.

а) $2\cos^2\alpha-(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2-$
$-(\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2$;

б) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}(1+\cos4\alpha)$.

4

Докажите тождество:

$\operatorname{tg}2\alpha\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin2\alpha$.

$\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\cos2\alpha$.

5

Найдите значение x, если
x — угол II четверти и

$\sin57^\circ+\sin41^\circ=$
$=2\sin x\cos8^\circ$.

$\cos62^\circ-\cos18^\circ=$
$=-2\sin x\sin22^\circ$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\frac{\operatorname{tg}67^\circ-\operatorname{tg}22^\circ}{1+\operatorname{tg}67^\circ\operatorname{tg}22^\circ}+$
$+4\sin105^\circ\cos105^\circ$;

б) $\sqrt{\frac{1+\cos4}{2}}+\cos2$.

Вариант В2

а) $\frac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}16^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}16^\circ}-$
$-4\sin75^\circ\cos75^\circ$;

б) $\sqrt{\frac{1-\cos8}{2}}+\sin4$.

2

Известно, что

$\sin 2\alpha = 0{,}8$ и $45° < \alpha < 90°$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

$\cos 2\alpha = 0{,}6$ и $135° < \alpha < 180°$. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$.

3

Упростите выражения:

а) $\dfrac{4\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{ctg}^2 2\alpha}{4\operatorname{ctg} 4\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{1 - \cos 2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$.

4

Докажите тождество:

$4\sin\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin 3\alpha$.

$4\cos\alpha \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos 3\alpha$.

5

Найдите два значения x из промежутка $[-2\pi; 0]$, удовлетворяющие равенству:

$\cos 21° - \cos 51° = 2\sin x \sin 396°$.

$\sin 5° + \sin 65° = 2\sin 395° \cos x$.

С-7. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Вариант А1 / Вариант А2

1

В одной системе координат постройте графики функций:

$y = \cos x,$

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

$y = 2\cos x.$

$y = \sin x,$

$y = 3\sin x,$

$y = \sin x + 2.$

❷

Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x+1};$

б) $y = \operatorname{tg} x.$

а) $y = \frac{1}{x^2 + x};$

б) $y = \operatorname{ctg} x.$

❸

Найдите область значений функции:

$y = \sin x - 2.$

$y = 0{,}5 \cos x.$

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

В одной системе координат постройте графики функций:

$y = \sin x,$

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$

$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

$y = \cos x,$

$y = -0{,}5 \cos x,$

$y = -0{,}5 \cos x + 1.$

❷

Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1};$

б) $y = \operatorname{ctg} 3x.$

а) $y = \frac{x^2 \cdot 4}{\sqrt{x - 1}};$

б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

❸

Найдите область значений функции:

$y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 5.$

$y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$

Вариант В1 **Вариант В2**

1

В одной системе координат постройте графики функций

Вариант В1:

$y = \operatorname{ctg} x,$

$y = 2\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right),$

$y = \left|2\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|.$

Вариант В2:

$y = \operatorname{tg} x,$

$y = 0{,}5\operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right),$

$y = 0{,}5\operatorname{tg}\left|x + \dfrac{\pi}{4}\right|.$

2

Найдите область определения функции:

Вариант В1:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+6-x^2}}{x^2-1};$

б) $y = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}}.$

Вариант В2:

а) $y = \dfrac{\sqrt{20-x-x^2}}{4-x^2};$

б) $y = \dfrac{1}{4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}.$

3

Найдите область значений функции:

Вариант В1: $y = 4\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3.$

Вариант В2: $y = 4 - 6\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

С-8. ЧЕТНОСТЬ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Вариант А1 **Вариант А2**

1

Докажите, что функция $f(x)$ является четной, а функция $g(x)$ — нечетной, если

$f(x) = 3x^2 - \cos x,$
$g(x) = \sin 2x + x^3.$

$f(x) = 2x^4 + \cos x,$
$g(x) = \operatorname{tg} x - 4x^5.$

❷

Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin \frac{x}{3}$;

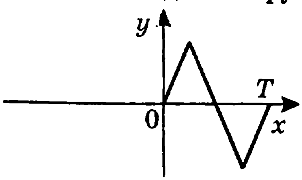
б) $y = \operatorname{tg} 4x$.

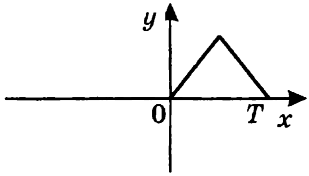
а) $y = \cos 2x$;

б) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

❸

На рисунке изображена часть графика функции, имеющей период T. Достройте график этой функции на промежутке $[-T;\ 2T]$. Является ли данная функция четной или нечетной?





Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Исследуйте функции на четность или нечетность:

а) $f(x) = x^3 \cos x$;

б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 4}$.

а) $f(x) = x^4 \sin x$;

б) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x^3}$.

❷

Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \sin 4x \cos x -$
$- \cos 4x \sin x$;

а) $y = \cos 5x \cos 3x +$
$+ \sin 5x \sin 3x$;

б) $y = \dfrac{2\cos 0,5x}{\sin 0,5x}$.

б) $y = \dfrac{3\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}$.

❸

Постройте на отрезке [−3; 3] график

четной функции с наименьшим положительным периодом 2.

нечетной функции с наименьшим положительным периодом 3.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Исследуйте функции на четность или нечетность:

а) $f(x) = x\operatorname{tg} x - \sin^2 x$;

б) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x - 1}$.

а) $f(x) = x^3 \operatorname{ctg} x + |\sin x|$;

б) $f(x) = \dfrac{x^5 + x}{\cos x + 1}$.

❷

Найдите наименьший положительный период функции:

а) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{3}}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{3}}$;

б) $y = 2\sin 2x\cos x - \sin x$.

а) $y = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 0,25x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 0,25x}$;

б) $y = \cos 3x - 2\cos 4x\cos x$.

❸

Приведите пример

двух нечетных периодических функций, произведение которых – четная периодическая функция.

четной и нечетной периодических функций, произведение которых — нечетная периодическая функция.

Ответ подтвердите доказательством.

С-9. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМЫ

Вариант А1

1 Используя свойства возрастания и убывания тригонометрических функций, сравните значения выражений:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{3\pi}{8}$.

2 Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = 2\sin x + 1$.

3 Функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке $(x_0; y_0)$. Найдите точку минимума и минимум функции $y = -3f(x)$.

Вариант А2

1 Используя свойства возрастания и убывания тригонометрических функций, сравните значения выражений:

а) $\sin\frac{\pi}{12}$ и $\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$.

2 Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = 0,5\cos x - 1$.

3 Функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке $(x_0; y_0)$. Найдите точку максимума и максимум функции $y = -f(x) - 2$.

Вариант Б1

1 Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}$;

б) $\cos(-1,8)$; $\cos 2,3$; $\cos 2$.

2 Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = 0,5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант Б2

1 Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sin\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $\operatorname{ctg}(-0,3)$; $\operatorname{ctg}1,2$; $\operatorname{ctg}1$.

2 Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

❸

Дана функция $y = f(x)$, у которой

$x_{min} = -1$, $y_{min} = 1$,
$x_{max} = 2$, $y_{max} = 4$.

$x_{min} = 0$, $y_{min} = -8$,
$x_{max} = 5$, $y_{max} = 10$.

Найдите точки экстремума и экстремумы функции

$y = -2f(x + 1)$.

$y = -0{,}5f(x - 2)$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Расположите данные числа

а) в порядке возрастания:

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

$\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{9\pi}{7}$; $\cos\frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$;

б) в порядке убывания:

$\cos(-\pi)$; $\cos 4$; $\cos 6$; $\sin 0{,}1$.

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} 5$; $\operatorname{ctg} 1{,}8$; $\operatorname{tg} 0{,}9$.

❷

Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 1.$

$y = \left|3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2.$

❸

Используя определения, докажите, что:

если $y = f(x)$ — четная функция, возрастающая на промежутке $[0;\ a]$, то на промежутке $[-a; 0]$ функция $y = -f(x)$ также возрастает.

если $y = f(x)$ — нечетная функция, убывающая на промежутке $[0;\ a]$, то на промежутке $[-a;\ 0]$ функция $y = -f(x)$ возрастает.

С-10*. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ (домашняя практическая работа)

Исследуйте функцию и постройте ее график:

Уровень А

1) $y = 1,5\sin 2x;$

2) $y = 2\cos\frac{x}{2};$

3) $y = -\operatorname{tg} 3x;$

4) $y = 0,5\operatorname{ctg} 0,5x;$

5) $y = \sin\frac{1}{3}x - 1;$

6) $y = 2 - \cos 2x;$

7) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x;$

8) $y = -2\operatorname{ctg}\frac{2x}{3};$

9) $y = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{4};$

10) $y = -3\cos 1,5x.$

Уровень Б

1) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$

2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right);$

3) $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right);$

4) $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1;$

5) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right);$

6) $y = 1 + \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right);$

7) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right);$

8) $y = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right);$

9) $y = 1 - \cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right);$

10) $y = -\sin\left(1,5x + \frac{\pi}{2}\right).$

Уровень В

1) $y = \left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right|;$

6) $y = 3\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right);$

2) $y = \operatorname{tg}\left(2|x| + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 3 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2x}{3}\right)$;

4) $y = -\operatorname{ctg}\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$;

5) $y = -0{,}5\sin\left|2x + \frac{\pi}{3}\right|$;

7) $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 2x}}$;

8) $y = \left|\operatorname{tg}\left|\frac{x}{2}\right|\right| - 1$;

9) $y = \frac{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2x}$;

10) $y = 2\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$.

К-2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

❶

Постройте график функции

А1: $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

А2: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

А1: б) промежутки убывания функции.

А2: б) промежутки возрастания функции.

❷

Определите, является ли функция $f(x)$ четной или нечетной, и найдите ее наименьший положительный период, если

А1: $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 3x$.

А2: $f(x) = 2 - 4\cos\frac{x}{3}$.

❸

Не выполняя построений, найдите:

а) область определения и область значений функции

$$y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2;$$

$$y - 0{,}5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1{,}5;$$

б) точки экстремума и экстремумы функции

$$y = -4\sin x.$$

$$y = -2\cos x.$$

4

Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2} - 1}.$$

$$y = \sqrt{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$$

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

$$y = 2\sin 2x + 2.$$

Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

б) точки экстремума и экстремумы функции.

2

Найдите область определения функции и выясните, является ли она четной или нечетной:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sin x}.$$

$$f(x) = \frac{x^3}{\cos x - 1}.$$

3

Не выполняя построений, найдите:

а) область значений и наименьший положительный период функции

$$y = 4\sin 5x\cos 2x - 4\cos 5x\sin 2x;$$

$$y - 2\cos^4 x - 2\sin^4 x;$$

б) область определения и промежутки монотонности функции

$y = \operatorname{tg} 2x$. $\qquad\qquad$ $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$.

4

Найдите область определения и область значений функции

$y = \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}$. $\qquad\qquad$ $y = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

Вариант В1 $\qquad$ Вариант В2

1

Постройте график функции

$y = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. $\qquad\qquad$ $y = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Пользуясь графиком, определите

а) промежутки знакопостоянства функции;

б) точки экстремума и экстремумы функции.

2

Исследуйте на четность и периодичность функцию

$f(x) = \cos 4x + \sin^2 x$. $\qquad\qquad$ $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

3

Не выполняя построений, найдите:

а) область значений и промежутки монотонности функции

$y = \cos x + \sqrt{3}\sin x$; $\qquad\qquad$ $y = \sin x - \cos x$;

б) асимптоты и нули функции

$y = 2\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. $\qquad\qquad$ $y = -\operatorname{ctg}\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4

Постройте схематически график функции

$y = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}} + \cos x.$ | $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}} \quad \sin x.$

Является ли эта функция периодической? Если да, то найдите ее наименьший положительный период.

С-11. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вариант А1 | Вариант А2

1

Вычислите:

Вариант А1

а) $\arcsin 1 - \operatorname{arctg} 0;$

б) $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \right);$

в) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right).$

Вариант А2

а) $\arccos 0 - \operatorname{arctg} 1;$

б) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2} \right) + \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{2};$

в) $\operatorname{tg}\left(\arccos -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \right).$

2

Сравните числа:

Вариант А1

$\arcsin\left(-\dfrac{1}{2} \right)$ и $\arccos\left(\dfrac{1}{2} \right).$

Вариант А2

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right)$ и $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \right).$

3

Определите, имеет ли смысл выражение

Вариант А1

$\arcsin(x-1)$ при $x \quad \sqrt{5};$ $x = 0{,}9;$ $x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6} \right).$

Вариант А2

$\arccos(x+1)$ при $x = -\sqrt{3};$ $x \quad \cos\dfrac{\pi}{3};$ $x = -\dfrac{1}{3}.$

Ответ объясните.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\arccos(-1) - 2\operatorname{arcctg} 0$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2

Сравните числа

$\sin 1$ и $\arcsin 1$.

3

Определите, при каких значениях a имеет смысл выражение

$\arccos(2a - 1)$.

Вариант Б2

а) $\arcsin(-1) + 2\operatorname{arctg} 0$;

б) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$;

в) $\arccos\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

$\arccos 0$ и $\cos 0$.

$\arcsin(3a + 2)$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) - 2\arcsin 1$;

б) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)$;

в) $\arccos(\sin(\operatorname{arctg} 0))$.

2

Сравните числа

$\operatorname{arctg}(a \quad 1)$ и $\operatorname{arctg}(a + 1)$.

3

Найдите область определения функции:

$y = \sqrt{-\arcsin(x - 1)}$.

Вариант В2

а) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right) + 2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $\arcsin(\cos(\operatorname{arcctg} 0))$.

$\operatorname{arcctg} a$ и $\operatorname{arcctg}(a + 2)$.

$y = \sqrt{\frac{\pi}{2} \quad \arccos(x \quad 1)}$.

С-12*. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

1

Определите, при каких значениях параметра a выполняется тождество, и докажите его:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2}$;	а) $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$;
б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{a}$;	б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \frac{1}{a}$;
в) $\operatorname{tg}(\arcsin a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$;	в) $\operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$;
г) $\cos(\operatorname{arcctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;	г) $\sin(\operatorname{arctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;
д) $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$.	д) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$.

2

Вычислите:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$;	а) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;
б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;	б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$;
в) $\sin\left(\operatorname{arctg}3 - \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.	в) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arcctg}3\right)$.

3

Учитывая область значений аркфункций, вычислите:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\arccos(\cos 10)$;	а) $\arcsin(\sin 6)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{5}\right)$. б) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$.

4

Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin(x^2 + x - 1)$; а) $y = \arccos(x^2 - 3)$;

б) $y = \arccos\sqrt{2 - x}$. б) $y = \arcsin\frac{1}{x-1}$.

5

Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \sqrt{-\arcsin x}$; а) $y = -\frac{1}{\arcsin x}$;

б) $y = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. б) $y = \frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

6

Решите уравнения:

а) $\cos\left(\arccos(x+2)\right) = x^2$; а) $\sin\left(\arcsin(4x-1)\right) = 3x^2$;

б) $6\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} = 2\pi$; б) $2\operatorname{arcctg}(2x - 3) = \pi$;

в) $\arcsin\left(x^2 - 4\right) = \arcsin(2x+4)$; в) $\arccos\left(x^2 - x\right) = \arccos(2x-2)$;

г) $(\operatorname{arcctg} x)^2 - 6\operatorname{arcctg} x + 8 = 0$. г) $2(\operatorname{arctg} x)^2 - 5\operatorname{arctg} x + 2 = 0$.

С-13. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант А1 **Вариант А2**

1

Решите уравнения:

а) $2\sin x = \sqrt{3}$; а) $2\cos x = 1$;

б) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1;$

в) $\operatorname{tg}3x=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

б) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1;$

в) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=-\sqrt{3}.$

❷

Найдите нули функции

$y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+1.$

$y=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1.$

❸

Решите уравнение и найдите

его наименьший положительный корень:

$\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}.$

его наибольший отрицательный корень:

$\operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right).$

Вариант Б1

❶

Решите уравнения:

а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0;$

б) $1-2\cos^2 2x=\frac{\sqrt{2}}{2};$

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-1.$

❷

Найдите нули функции

$y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1.$

❸

Решите уравнение и найдите его корни, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$:

$\left(\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\right)(\sin 2x-3)=0.$

Вариант Б2

❶

Решите уравнения:

а) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0;$

б) $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=-\frac{1}{4};$

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-3.$

❷

Найдите нули функции

$y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1.$

❸

Решите уравнение и найдите его корни, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$:

$\left(\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x+4)=0.$

Вариант В1

❶ **Решите уравнения:**

а) $4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{8}=0;$

б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{2}\right)=-\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6};$

в) $\left|\cos\left(x\sin\frac{\pi}{6}\right)+0,5\right|=0,5.$

❷ **Не выполняя построений, найдите абсциссы точек пересечения графиков функций**

$f(x)=\cos 5x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ и

$g(x)=\sin 5x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

❸ **Определите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$:**

$(\sin x-1)\left(\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=0.$

Вариант В2

❶ **Решите уравнения:**

а) $4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{12}=0;$

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi x}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right);$

в) $\left|0,5-\sin\left(x\cos\frac{\pi}{3}\right)\right|=0,5.$

❷ **Не выполняя построений, найдите абсциссы точек пересечения графиков функций**

$f(x)=\sin 3x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$g(x)=\cos 3x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

❸ **Определите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$:**

$(\cos x-1)\left(\mathrm{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0.$

С-14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант А1

❶ **Решите уравнения:**

а) $2\sin^2 x-3\sin x-2=0;$

Вариант А2

❶ **Решите уравнения:**

а) $2\cos^2 x-5\cos x+2=0;$

б) $\sin 2x - \cos x = 0$;
в) $\cos 7x + \cos x = 0$.

б) $\sqrt{3}\cos x + \sin 2x = 0$;
в) $\sin x + \sin 5x = 0$.

❷

Найдите корни уравнения на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2$.

$\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x = -1$.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Решите уравнения:

Б1:

а) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$;
б) $2\cos^2 x - \sin 2x = 0$;
в) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

Б2:

а) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$;
б) $\sin^2 x - 0{,}5\sin 2x = 0$;
в) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x$.

❷

Найдите корни уравнения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$:

$\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = -1$.

$3\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Решите уравнения:

В1:

а) $\cos 4x - 3\cos 2x = 1$;
б) $4\cos^2 x - \sin 2x = 1$;
в) $\sin 6x - 2\sin 2x = 0$.

В2:

а) $\cos x + 3\sin\frac{x}{2} = -1$;
б) $6\sin^2 x + \sin 2x = 4$;
в) $\cos 6x + 2\cos 2x = 0$.

❷

Докажите, что на промежутке $[0; \pi]$ данное уравнение имеет единственный корень, и найдите его:

$\sin x\operatorname{tg} x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$.

$1 - \operatorname{ctg} x = \cos x - \cos x\operatorname{ctg} x$.

С-15. ОТБОР КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вариант А1

1

Решите уравнения:

а) $(\operatorname{ctg} x - 1)(\cos x + 1) = 0$;

б) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 0$;

в) $\sin 2x\sqrt{\cos x} = 0$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ x + y = 2\pi. \end{cases}$$

Вариант А2

а) $(\operatorname{tg} x + 1)(\sin x - 1) = 0$;

б) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = 0$;

в) $\sin 2x\sqrt{\sin x} = 0$.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3}, \\ x + y = \pi. \end{cases}$$

Вариант Б1

1

Решите уравнения:

а) $(1 + \cos 2x) \operatorname{tg} x = \cos x$;

б) $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{1+\cos x} = 0$;

в) $\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \sqrt{2\cos x}$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}75, \\ \sin y \cos x = 0{,}25. \end{cases}$$

Вариант Б2

а) $(1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} x = \sin x$;

б) $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{1+\sin x} = 0$;

в) $\sqrt{\operatorname{tg} x} = \sqrt{2\sin x}$.

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75, \\ \sin x \sin y = 0{,}25. \end{cases}$$

Вариант В1

Вариант В2

1

Решите уравнения:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} \times$
$\times \left(\sqrt{2} \cos^2 x - \cos x\right) = 0;$

б) $\dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{1 - \sin 3x} = 0;$

в) $\sqrt{2 \sin^2 x - 1} = \cos x - \sin x.$

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} \times$
$\times \left(\sqrt{2} \sin^2 x + \sin x\right) = 0;$

б) $\dfrac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{1 + \cos 3x} = 0;$

в) $\sqrt{1 - 2\cos^2 x} = \sin x + \cos x.$

❷

Решите систему уравнений:

$\begin{cases} \cos x \cos y = \sin^2 x, \\ \sin x \sin y = \cos^2 x. \end{cases}$

$\begin{cases} \cos x \sin y = \sin^2 x, \\ \sin x \cos y = \cos^2 x. \end{cases}$

С-16*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Решите уравнения:

а) $\sin(\cos x) = 0{,}5;$

б) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 2x = 1;$

в) $\cos 4x \cos 7x = \cos 6x \cos 3x;$

г) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}.$

❷

Используя замену переменной, решите уравнения:

а) $2 \operatorname{tg}^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos x};$

б) $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x;$

в) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4.$

Вариант 2

❶

а) $\cos(\sin x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = -1;$

в) $\sin 7x \sin x = \sin 3x \sin 5x;$

г) $\sin 6x + \cos 6x \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}.$

❷

а) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3;$

б) $4(\cos x - \sin x) = 4 - \sin 2x;$

в) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = -4.$

3

Используя разложение на множители, решите уравнения:

а) $\cos 2x = \sin x - \cos x$;

б) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;

в) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

а) $\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$;

б) $1 + \sin x = \operatorname{ctg} x + \cos x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

4

Решите данное уравнение тремя способами (с помощью формул двойного угла, метода вспомогательного угла и универсальной тригонометрической подстановки) и докажите, что полученные ответы совпадают:

$2\sin x - 3\cos x = 2$.

$3\cos x - 4\sin x = 5$.

5

Используя умножение на тригонометрическую функцию, решите уравнения:

а) $4\cos x \cos 2x \cos 3x = \cos 6x$;

б) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = -0,5$.

а) $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}$;

б) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

6

Решите тригонометрические уравнения:

а) $2\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 3 - \operatorname{ctg} x$;

б) $\sqrt{0,5\cos x} = \sin\dfrac{x}{2}$;

в) $\sqrt{\sin 3x + \sin 5x} = \sqrt{\sin 4x}$.

а) $2 - \operatorname{tg} x = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

б) $\sqrt{-\cos 4x} = \sqrt{2}\cos 2x$;

в) $\sqrt{\cos 5x + \cos 7x} = \sqrt{\cos 6x}$.

С-17*. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 **Вариант 2**

1

Решите системы уравнений:

Вариант 1

а) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = \dfrac{4\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos 2x + 5\cos y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = \dfrac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} \pi x - \operatorname{tg} \pi y = 2. \end{cases}$

Вариант 2

а) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{2}, \\ \cos 2x + \sin y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{3}, \\ \operatorname{ctg} \pi x - \operatorname{ctg} \pi y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

2

Найдите решение системы, используя

а) подстановку и почленное сложение (вычитание) уравнений системы:

Вариант 1: $\begin{cases} \cos x \cos y = 0,75, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3; \end{cases}$

Вариант 2: $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1; \end{cases}$

б) разложение на множители и почленное деление уравнений системы:

Вариант 1: $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3}; \end{cases}$

Вариант 2: $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0,5, \\ \cos x - \cos y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$

в) замену переменных:

$$\begin{cases}\sin x + \cos y = 1,\\ \cos 2x + \cos 2y = 2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x + \cos y = 0{,}5,\\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1{,}75.\end{cases}$$

С-18. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Вариант А1

1

Решите неравенства:

а) $2\sin x > 1$;

б) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} 2x \le \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

2

Найдите значения x, при которых график функции

$y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$

лежит ниже оси x.

Вариант А2

1

Решите неравенства:

а) $\sqrt{2}\cos x < 1$;

б) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge -\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} \ge \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

2

Найдите значения x, при которых график функции

$y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

лежит выше оси x.

Вариант Б1

1

Решите неравенства:

а) $-2\sin 2x < \sqrt{3}$;

б) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \le \cos\frac{5\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3} \ge 0$.

Вариант Б2

1

Решите неравенства:

а) $-2\cos\frac{x}{3} > 1$;

б) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \ge \sin\frac{3\pi}{4}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1 \le 0$.

❷

Найдите значения x, при которых

график функции

$y = 1 - 2\cos^2 \frac{x}{8}$ лежит ниже

прямой $y = 0,5$.

график функции

$y = 2\sin^2 4x - 1$ лежит выше

прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант В1

❶

Решите неравенство:

а) $-4\sin\left(\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{4}\right) > -2\sqrt{2}$;

б) $\cos^2 x \geq 0,25$;

в) $\left|\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| \geq \sqrt{3}$.

❷

Найдите значения x, при которых

график функции

$y = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \mathrm{ctg}^2 x}$ лежит

выше оси x.

Вариант В2

❶

Решите неравенство:

а) $-\sqrt{3}\cos\left(1,5x + \frac{\pi}{6}\right) < -1,5$;

б) $\sin^2 x \leq 0,25$;

в) $\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right| \geq 1$.

❷

Найдите значения x, при которых

график функции

$y = \frac{\sin x - \cos x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$

лежит ниже оси x.

С-19*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Решите неравенства:

а) $\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)} < \sqrt{0,75}$;

Вариант 2

❶

Решите неравенства:

а) $\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{3}\right)} < \sqrt{0,25}$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x \le \frac{5}{8}$;

в) $\cos 2x\,(\sin 8x - 1) \le 0$.

б) $\sin^6 x + \cos^6 x \ge \frac{5}{8}$;

в) $\sin 3x\,(\cos 2x + 1) \ge 0$.

❷

Используя замену переменных, решите неравенства:

а) $\cos 2x + 3\sin x \ge -1$;

б) $\frac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x - 3 < 0$;

в) $\operatorname{tg} x + \sin 2x \ge 2$;

г) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x > 0$.

а) $\cos 2x + 3\cos x \le 1$;

б) $\frac{2}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x - 3 < 0$;

в) $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x \le 5$;

г) $2\sin^2 x + \sin 2x - 4\cos^2 x > 0$.

❸

Используя метод интервалов, решите неравенства:

а) $\cos 3x + 2\cos x \ge 0$;

б) $\sin x \cos 5x < \sin 2x \cos 4x$;

в) $1 - \cos x \le \operatorname{tg} x - \sin x$.

а) $\sin 3x - 2\sin x \le 0$;

б) $\cos x \cos 7x > \cos 3x \cos 5x$;

в) $1 + \sin x \le \operatorname{ctg} x + \cos x$.

К-3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Вариант А1

❶

Решите уравнения:

а) $2\sin x = \sqrt{3}$;

б) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

в) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;

г) $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos x} = 0$.

❷

Решите неравенства:

а) $1 - 2\cos\frac{x}{2} > 0$;

Вариант А2

❶

а) $\sqrt{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $2\cos^2 x - \sin x = -1$;

г) $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin x} = 0$.

❷

а) $-\sqrt{3} - 2\sin 3x < 0$;

б) $\operatorname{tg}(\pi - x) < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

б) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) > \sqrt{3}$.

❸

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ 2\cos^2 y + \sin x = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = \sin y, \\ \sin^2 y - \cos x = 2. \end{cases}$$

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Решите уравнения:

Вариант Б1:

а) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \dfrac{1}{2}\cos 3x = -1$;

б) $\sin^2 x - 2\sin 2x - 5\cos^2 x = 0$;

в) $1 - \cos x = \sin\dfrac{x}{2}$;

г) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$.

Вариант Б2:

а) $\dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1$;

б) $\cos^2 x + \sin 2x - 3\sin^2 x = 0$;

в) $1 + \cos 4x = \cos 2x$;

г) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\sin x$.

❷

Решите неравенства:

Вариант Б1:

а) $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} < 0$;

б) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) \geq 1$.

Вариант Б2:

а) $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 > 0$;

б) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{2}\right) \leq \sqrt{3}$.

❸

Решите систему уравнений:

Вариант Б1:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант Б2:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Вариант В1

1

Решите уравнения:

а) $\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,75;$

б) $2\cos^2\dfrac{x}{2}-3\sin x+2=0;$

в) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x;$

г) $\dfrac{\cos x-2\sin x\sin 2x}{1+\sin 3x}=0.$

2

Решите неравенства:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-2x\right)\geq 1;$

б) $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{4}\right)}<1.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\cos x-\dfrac{2}{\sin y}=3,\\ 2\cos x\sin y=1.\end{cases}$$

Вариант В2

1

а) $\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0,5;$

б) $2\sin^2\dfrac{x}{2}+3\sin x+2=0;$

в) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1,5;$

г) $\dfrac{2\cos x\cos 2x-\cos x}{1-\sin 3x}=0.$

2

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right)\leq 1;$

б) $\sqrt{-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)}<1.$

3

$$\begin{cases}\sin x+\dfrac{1}{\cos y}=3,\\ \dfrac{\sin x}{\cos y}=2.\end{cases}$$

Алгебра

С-20. КОРЕНЬ n-ОЙ СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

Вычислите:

Вариант А1:

а) $\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[4]{(-2)^4}$;

б) $\sqrt[7]{5-\sqrt{26}}\cdot\sqrt[7]{5+\sqrt{26}}$.

Вариант А2:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{-4}+\sqrt[6]{(-3)^6}$;

б) $\sqrt[9]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[9]{6-\sqrt{35}}$.

2

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

Вариант А1:

а) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Вариант А2:

а) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{5}}$;

б) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$.

3

Упростите выражения:

Вариант А1:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}+\sqrt[18]{a^3}$;

б) $6a\sqrt[4]{a^5}:\left(3\sqrt[4]{a}\right)$.

Вариант А2:

а) $\sqrt[20]{a^2}-\sqrt[5]{\sqrt{a}}$;

б) $2a\sqrt[3]{a^4}\cdot 3\sqrt[3]{a^2}$.

4

а) Вынесите множитель из-под знака корня ($x>0$, $y>0$):

Вариант А1: $\sqrt[4]{81x^5y^9}$.

Вариант А2: $\sqrt{25x^3y^7}$.

б) Внесите множитель под знак корня ($x>0$):

Вариант А1: $2x\sqrt[5]{x}$.

Вариант А2: $4x^2\sqrt[3]{x}$.

5

Упростите выражение и найдите его значение при $a = 3$:

$\sqrt{\left(2+\sqrt{a}\right)^2 - 8\sqrt{a}}.$

$\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(1+\sqrt{a}\right) - 2\left(\sqrt{a}-1\right)}.$

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}} + \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$;

б) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{a+\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{a-1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}$.

3

Упростите выражения:

а) $\sqrt{\sqrt[9]{a^6}} + \dfrac{2a}{\sqrt[3]{a^2}}$;

б) $\sqrt{2a^3}\cdot\sqrt[3]{2a} : \sqrt[6]{32a^{12}}$.

4

а) Вынесите множитель из-под знака корня:

$\sqrt[4]{32x^5y^{10}}$.

б) Внесите множитель под знак корня:

$-2ab^2\sqrt[6]{\dfrac{1}{16a^5b^{10}}}$.

Вариант Б2

1

а) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[10]{3} + \sqrt[5]{-3\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

2

а) $\dfrac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}$;

б) $\dfrac{a+1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}$.

3

а) $\sqrt{\sqrt[10]{a^4}} - \dfrac{3a}{\sqrt[5]{a^4}}$;

б) $\sqrt[6]{27a^5}\cdot\sqrt[4]{9a} : \sqrt{9a^2}$.

4

а) $\sqrt[3]{81x^4y^{10}}$.

б) $-\dfrac{1}{3a^2b}\sqrt[4]{243a^{10}b^5}$.

5

Упростите выражение и найдите его значение при $a = 0{,}8$:

$\sqrt{\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}+2}\right)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}-2}\right)(a-4)+a}.$

$\sqrt{\frac{a\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}-\sqrt{a}}+\sqrt{a}.$

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\sqrt{3+\sqrt[4]{(-8)^2}}-\sqrt{3-\sqrt[4]{(-8)^2}};$

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}}.$

2

Избавьтесь от иррациональности в числителе дроби и сравните ее с нулем:

а) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{12}}{2};$

б) $\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}.$

3

Упростите выражения:

а) $\sqrt[4]{8a}\cdot 9\sqrt[4]{12a^5}:\left(3\sqrt[4]{6a^2}\right);$

б) $\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\frac{1}{a}-\frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}}.$

4

а) Вынесите множитель из-под знака корня (n — натуральное число):

$\sqrt[n+1]{2^{n+3}\cdot a^{n^2-1}\cdot b^{3n-1}},$

если $a \geq 0,\ b \geq 0.$

Вариант В2

1

а) $\sqrt{4+\sqrt[8]{(-15)^4}}-\sqrt{4-\sqrt[8]{(-15)^4}};$

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{6+2\sqrt{5}}}.$

2

а) $\frac{\sqrt[6]{7}-\sqrt[3]{2}}{2};$

б) $\frac{3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}.$

3

а) $25\sqrt[3]{9a^5}\cdot\sqrt[3]{6a^2}:\left(5\sqrt[3]{2a}\right);$

б) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}-\frac{2a\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}}}.$

4

$\sqrt[n+2]{3^{n+3}\cdot a^{n^2-4}\cdot b^{5n-2}},$

если $a \geq 0,\ b \geq 0.$

б) Внесите множитель под знак корня:

$0,5ab\sqrt[4]{-16ab^2}$.

$-3a^2b\sqrt[6]{-\dfrac{b}{27a^4}}$.

❺

Упростите выражение и найдите его значение при $a = 6$:

$\sqrt{a+4\sqrt{a-4}}-\sqrt{a-4\sqrt{a-4}}$.

$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$.

С-21. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант А1

❶

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-4x}=\sqrt{6-3x}$;

б) $\sqrt{3x+1}=x-1$;

в) $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=1$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=3$.

❷

Определите, при каких значениях x

функция $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ принимает значение, равное 2.

Вариант А2

а) $\sqrt{x^2-10}=\sqrt{-3x}$;

б) $\sqrt{2x+4}=x-2$;

в) $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=5$;

г) $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$.

функция $y=\sqrt[3]{x^2+2}$ принимает значение, равное 3.

Вариант Б1

❶

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$;

б) $\sqrt{2x^2+7}=x^2-4$;

в) $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x}-2=0$;

Вариант Б2

а) $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}$;

б) $\sqrt{18x^2-9}=x^2-4$;

в) $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x}-3=0$;

г) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$.

г) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$.

❷

Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций

$y=\sqrt[3]{x-1}$ и $y=\sqrt[6]{x+5}$.

$y=\sqrt[6]{x+3}$ и $y=\sqrt[3]{x+1}$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Решите уравнения:

Вариант В1:

а) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}}=4$;

б) $\sqrt{3x+12}-\sqrt{x+1}=\sqrt{4x+13}$;

в) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$;

г) $\sqrt[3]{x-10}+\sqrt[3]{x-17}=3$.

Вариант В2:

а) $\sqrt{x-1+\sqrt{x+2}}=3$;

б) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$;

в) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$;

г) $\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{x+2}=1$.

❷

Найдите точки пересечения графиков функций

$y=\sqrt{x+2}$ и $y=\sqrt[3]{3x+2}$.

$y=\sqrt[3]{x+7}$ и $y=\sqrt{x+3}$.

С-22. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{xy}=3;\end{cases}$

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ \sqrt{xy}=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y+27}=3, \\ \sqrt{2x-y+2}=x. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y+8}=2, \\ \sqrt{3x-2y+6}=y. \end{cases}$

❷

Решите неравенства:

а) $(x+1)\sqrt{2-x}>0$; а) $(x-5)\sqrt{x+1}<0$;

б) $\sqrt{2x+4}\le 2$; б) $\sqrt{3x+1}\le 1$;

в) $\sqrt{x^2-3x+2}>-4$. в) $\sqrt{2+x-x^2}>-2$.

Вариант Б1 Вариант Б2

❶

Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4, \\ x-y=8; \end{cases}$ а) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1, \\ x-y=3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}, \\ \sqrt{x-3y}+\sqrt{x+5y}=4. \end{cases}$

❷

Решите неравенства:

а) $(9-x^2)\sqrt{x^2-4}\le 0$; а) $(x^2-4)\sqrt{25-x^2}\ge 0$;

б) $\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x+3}}>1$; б) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}}<1$;

в) $x+\sqrt{x}<2$. в) $x-3\sqrt{x}>4$.

Вариант В1 Вариант В2

❶

Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=9; \end{cases}$ а) $\begin{cases} x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=26, \\ x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2y-5x} = x, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{2y-5x} = y. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\sqrt{3y+x} - \sqrt{6y-x} = x, \\ \sqrt{3y+x} + \sqrt{6y-x} = 3y. \end{cases}$

❷

Решите неравенства:

а) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0;$

б) $\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+4};$

в) $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x} \leq 3.$

а) $(x-3)\sqrt{x^2-6x+8} \leq 0;$

б) $\sqrt{x^2+3} > \sqrt{3x+3};$

в) $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x} \leq 2.$

С-23*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

❶

Решите иррациональные уравнения, используя в решении указанные способы:

— разложение на множители (с учетом ОДЗ):

Вариант 1:

а) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20} = 6x+12;$

б) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2-4x+3} = \sqrt{x^2-1};$

Вариант 2:

а) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6;$

б) $2\sqrt{x^2-2x-8} - \sqrt{x^2-16} = \sqrt{3x^2-13x+4};$

— введение одной или нескольких новых переменных:

Вариант 1:

в) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}} + x = 2\sqrt{x+2};$

г) $\sqrt[3]{x-4} = 1 - \sqrt{x+1};$

д) $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2;$

Вариант 2:

в) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}} + \sqrt{2x+5} = 2x;$

г) $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1};$

д) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2;$

е) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=$
$=2x-15+2\sqrt{x^2+5x}$;

е) $\sqrt{x}+\sqrt{x-8}=$
$=2x-20+2\sqrt{x^2-8x}$;

— домножение на сопряженный радикал:

ж) $\sqrt{2x^2+3x+5}+$
$+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$;

ж) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x$;

з) $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{x}$;

з) $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6-x}}=\dfrac{x}{6}$;

— выделение полного квадрата:

и) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+$
$+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1$;

и) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-$
$-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$;

— сравнение значений обеих частей уравнения на ОДЗ:

к*) $\sqrt{4x^2-1}=1-\sqrt{4x-1}$.

к*) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{x}$.

❷

Решите неравенства, используя равносильные преобразования или метод интервалов:

а) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

а) $\sqrt{x^2+3x-4}>x+2$;

б) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$;

б) $\sqrt{x^2-x-2}<x-1$;

в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}<3$;

в) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}<5$;

г) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geq\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8}\leq\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$;

д) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+1}{x}\geq 1$.

д) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\leq 3$.

❸

Решите системы уравнений, используя в решении указанные способы:
а) введение новых переменных:

$\begin{cases}\sqrt[3]{x+y+4}+\sqrt[3]{y+7}=4,\\ x+2y=5;\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7;\end{cases}$

б) умножение уравнений системы:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{108x}{5y}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{3x}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y};\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y};\end{cases}$$

в) способ подстановки:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1.\end{cases}$$

С-24. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

Вариант А1 / **Вариант А2**

1

Представьте выражения в виде степени числа x ($x > 0$):

Вариант А1:

а) $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{x}$;

б) $\dfrac{x^{0,5}}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}$.

Вариант А2:

а) $\sqrt[10]{x^9}\cdot x^{1,1}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{\sqrt{x}}$.

2

Вычислите:

Вариант А1:

а) $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{8}}}$; б) $\left(10^{-\frac{1}{8}}\cdot 0,01^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$.

Вариант А2:

а) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{1}{2}}}$; б) $\left(25^{-\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

3

Упростите выражения:

Вариант А1:

а) $(16x)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{1}{8}x^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

Вариант А2:

а) $(1000x)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(0,01x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

3

Упростите выражение:

а) $\left(0{,}0625a^{1,2}b^{0,8}c^{-1}\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(\frac{1}{32}a^{\frac{3}{2}}bc^{\frac{5}{12}}\right)^{-0,6}$;

б) $\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$;

в) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y}{x-y}$.

а) $\left(0{,}00032a^{-\frac{1}{3}}b^{2}c^{-\frac{5}{6}}\right)^{0,4}\times\left(\frac{1}{125}a^{0,2}b^{1,2}c\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$;

в) $\dfrac{x^{1,5}+y^{1,5}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y-x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{2}}}$.

4

Запишите формулу зависимости между переменными a и b, если

а) $a=t^{\frac{1}{4}}$, $b=t^{\frac{1}{3}}$;

б) $a=t^{0,8}+1$, $b=t^{-0,8}-1$.

а) $a=t^{\frac{1}{2}}$, $b=t^{\frac{1}{5}}$;

б) $a=(t+1)^{\frac{2}{3}}$, $b=(t-1)^{\frac{2}{3}}$.

К-4. СТЕПЕНИ И КОРНИ

Вариант А1

1

Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$;

б) $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{x-4}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-2}$ при $x=9$.

Вариант А2

а) $\left(\sqrt{3^3\cdot\sqrt[3]{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$;

б) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-3}-\dfrac{6}{x^{\frac{2}{3}}-9}$ при $x=8$.

2

Решите уравнения:

а) $\left(y^2-1\right)^{\frac{1}{3}}=2;$

б) $\sqrt{x+12}=x;$

в) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-3x}=x+5;$

г) $x^2+x+2\sqrt{x^2+x}=0.$

а) $\left(y^2-19\right)^{\frac{1}{4}}=3;$

б) $\sqrt{7-x}=x-1;$

в) $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{1-4x}=x+8;$

г) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x}=0.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=7,\\ xy=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y-2\sqrt{xy}=2,\\ xy=9.\end{cases}$$

4

Определите значения a, для которых при $x=1$ выполняется неравенство:

$\sqrt{a-x}\geq x.$

$\sqrt{x-a}\geq\sqrt{x+3}.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите значения выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot\sqrt{3}}};$

б) $\left(\dfrac{x-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}-2\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

при $x=8.$

а) $\dfrac{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot\sqrt{2}}};$

б) $\left(1+2\sqrt[4]{x}+\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}$

при $x=16.$

2

Решите уравнения:

а) $2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-5=0;$

б) $\sqrt{6-4x-x^2}-x=4;$

а) $x^{0,4}+5x^{0,2}-14=0;$

б) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x;$

в) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2;$

г) $\left(x^2-9x+14\right)\sqrt{x^2-9}=0.$

в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2;$

г) $\left(x^2-9\right)\sqrt{x^2-5x+4}=0.$

❸

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+xy}=3,\\ x+y+x^2+xy=5.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x-y}=6,\\ x^2-y^2-x+y=12.\end{cases}$$

❹

Используя метод интервалов, решите неравенство:

$$\sqrt{x^2-x}<\frac{6}{\sqrt{x^2-x}}.$$

$$\sqrt{x^2+x}>\frac{2x^2-12}{\sqrt{x^2+x}}.$$

Вариант В1

❶

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right);$

б) $\dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x+x^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}\right)$

при $x=125.$

❷

Решите уравнения:

а) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x};$

б) $4\sqrt{3-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{3x-1}}=3;$

в) $\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x+3};$

г) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$

Вариант В2

❶

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right);$

б) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{3x^{\frac{1}{3}}-1}{x+1}\right):\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}$

при $x=64.$

❷

Решите уравнения:

а) $\sqrt{1+\sqrt{3x+1}}=\sqrt{x};$

б) $3\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-2,5=3\sqrt{1-\dfrac{1}{x}};$

в) $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2};$

г) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2x-1}.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=2, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}=12, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1. \end{cases}$$

4

Найдите значения *a*, при которых равносильны неравенства:

$(x-a)\sqrt{x-2}>0$ и $x>a$.

$(x-2)\sqrt{x-a}>0$ и $x>2$.

С-25. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариант А1

1

Решите уравнения:

а) $3^{x^2-x}=9$;

б) $2^{x-1}+2^{x+2}=36$;

в) $25^x+10\cdot 5^{x-1}-3=0$;

г) $2^x\cdot 5^{x+2}=2500$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x+2^y=6, \\ 3\cdot 2^x-2^y=10. \end{cases}$$

Вариант А2

1

Решите уравнения:

а) $2^{x^2-3x}=\dfrac{1}{4}$;

б) $5^x-5^{x-2}=600$;

в) $9^x+3^{x+1}-4=0$;

г) $7^{x+1}\cdot 2^x=98$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^x-3^y=6, \\ 2\cdot 3^x+3^y=21. \end{cases}$$

Вариант Б1

1

Решите уравнения:

а) $\left(2^{x+4}\right)^{x-3}=0{,}5^x\cdot 4^{x-4}$;

Вариант Б2

1

Решите уравнения:

а) $\left(3^{x-3}\right)^{x+4}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-1}\cdot 9^{x+1}$;

б) $3^{x-1}+3^{x}+3^{x+1}=13\cdot 3^{x^2-7}$;

в) $\dfrac{5^x-4}{5}=\dfrac{3-5^{x-1}}{2\cdot 5^x}$;

г) $2^{x^2+2x}\cdot 3^{x^2+2x}=216^{x+2}$.

б) $2^{x+2}+2^{x+3}+2^{x+4}=7\cdot 2^{x^2}$;

в) $\dfrac{7^x-1}{3}=\dfrac{7^{x+1}+49}{7^{x+1}}$;

г) $2^{x^2-2x}\cdot 5^{x^2-2x}=1000^{2-x}$.

❷

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}4^x-4^y=15,\\ x+y=2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}5^x+5^y=30,\\ x+y=3.\end{cases}$$

Вариант В1 / Вариант В2

❶

Решите уравнения:

Вариант В1:

а) $\sqrt[3]{3^{x+1}}=\left(\sqrt[4]{9^{x-2}}\right)^{x+1}$;

б) $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$;

в) $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$;

г) $6^{2x+4}=2^{x+8}\cdot 3^{3x}$.

Вариант В2:

а) $\sqrt[3]{2^{x-2}}=\left(\sqrt[4]{4^{x+3}}\right)^{x-2}$;

б) $3^{x-1}+3^x+3^{x+1}=12^{x-1}+12^x$;

в) $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24$;

г) $20^{3x+2}=4^{x+12}\cdot 5^{5x-8}$.

❷

Решите систему уравнений:

Вариант В1:

$$\begin{cases}3^x\cdot 5^y=75,\\ 3^y\cdot 5^x=45.\end{cases}$$

Вариант В2:

$$\begin{cases}2^x\cdot 3^y=12,\\ 2^y\cdot 3^x=18.\end{cases}$$

С-26. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вариант А1 / Вариант А2

❶

Решите неравенства:

Вариант А1:

а) $5^{1-2x}>\dfrac{1}{125}$;

Вариант А2:

а) $7^{3-x}<\dfrac{1}{49}$;

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+3x} \le 16;$

в) $3^x - 3^{x-3} > 26;$

г) $4^x - 2^x \ge 2.$

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3x} \ge 5;$

в) $2^{x+2} + 2^{x+5} < 9;$

г) $9^x - 3^x \le 6.$

❷

Решите графически неравенство:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 2.$

$2^x \ge \frac{1}{2}.$

Вариант Б1

❶

Решите неравенства:

а) $(1,5)^{\frac{x^2+x-20}{x}} \le 1;$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-1} > 9^{x-1};$

в) $3^{x^2+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2} > 162;$

г) $5^x + 5^{1-x} \ge 6.$

❷

Решите графически неравенство:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2^x.$

Вариант Б2

❶

Решите неравенства:

а) $(3,2)^{\frac{x^2+2x-3}{x}} \ge 1;$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} < 4^{x-1};$

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} + 2^{x^2+3} < 18;$

г) $4^{1-x} + 4^x \ge 5.$

❷

Решите графически неравенство:

$3^x < (0,5)^x.$

Вариант В1

❶

Решите неравенства:

а) $\frac{2^{x^2-x-2} - 1}{x^2 - x - 2} \ge 0;$

Вариант В2

❶

Решите неравенства:

а) $\frac{1 - 3^{x^2+2x-3}}{x^2 + 2x - 3} \le 0;$

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-7} - 5\cdot 0,2^x < 0;$

в) $5^x \cdot 2^{1-x} + 5^{x+1}\cdot 2^{-x} >$

$> 7\cdot(0,4)^{-\frac{1}{x}};$

г) $4^{x+1} - 13\cdot 6^x + 9^{x+1} \le 0.$

б) $(0,25)^{x^2-4} - 16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0;$

в) $4^{x+2}\cdot 3^{-x} - 4^x\cdot 3^{2-x} <$

$< 7\cdot(0,75)^{-\frac{4}{x}};$

г) $25^{x+0,5} - 7\cdot 10^x + 2^{2x+1} \ge 0.$

❷

Решите графически неравенство:

$2^{|x|} < -\frac{2}{x}.$

$3^{|x|} < \frac{3}{x}.$

С-27*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

❶

Решите показательные уравнения, используя в решении указанные способы:

— разложение на множители:

Вариант 1:

а) $6^x + 6\cdot 25^x - 6 = 5^x\cdot 30^x;$

б) $x^2\cdot 2^{\sqrt{-x}} + 4 = 2^{\sqrt{-x}} + 4x^2;$

Вариант 2:

а) $7^x\cdot 14^x + 8 = 2^x + 8\cdot 49^x;$

б) $x^2\cdot 3^{\sqrt{1-x}} - 9x^2 = 4\cdot 3^{\sqrt{1-x}} - 36;$

— введение новой переменной:

Вариант 1:

в) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12\cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0;$

г) $3^{2x+1} + 3^{1-2x} - 7\left(3^x + 3^{-x}\right) = 4;$

д) $7^{\cos^2 x} + 7^{\sin^2 x} = 8;$

е) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 8 = 3\cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}};$

Вариант 2:

в) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6;$

г) $5^{2x+1} + 5^{1-2x} - 31\left(5^x + 5^{-x}\right) + 36 = 0;$

д) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30;$

е) $3^{\cos 2x} = 3^{1+\cos^2 x} - 6;$

ж) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10;$

ж) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x-\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=4\sqrt{2};$

— применение свойств прогрессий:

з) $2\cdot 2^3\cdot 2^5\cdot\ldots\cdot 2^{2x-1}=512;$

з) $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x}=0{,}04^{-28};$

и) $5^{\sin x}\cdot 5^{\sin^2 x}\cdot 5^{\sin^3 x}\cdot\ldots=5;$

и) $4^{\cos x}\cdot 4^{\cos^2 x}\cdot 4^{\cos^3 x}\cdot\ldots=4;$

— деление на выражение, содержащее показательную функцию:

к) $3^x+4^x=5^x;$

к) $2^x+7^x=9^x;$

л) $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0.$

л) $3\sqrt[x]{16}+\sqrt[x]{36}-2\sqrt[x]{81}=0.$

2

Решите показательные неравенства:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\sqrt{x^2-3}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1};$

а) $(0{,}25)^{2-\sqrt{5x+1}}-4\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}\le 0;$

б) $2^{x+3}-5^x<7\cdot 2^{x-2}-3\cdot 5^{x-1};$

б) $3^{x+2}+7^x>4\cdot 7^{x-1}+34\cdot 3^{x-1};$

в) $x^2\cdot 2^x+4\ge x^2+2^{x-2};$

в) $x^2\cdot 3^x-3^{x+4}\le x^2-81;$

г) $\sqrt{9^x-3^{x+2}}>3^x-9;$

г) $\sqrt{9^x+3^x-2}>3^x-9;$

д) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}.$

д) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

С-28*. ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 / **Вариант 2**

1

Решите уравнения:

а) $(x+1)^{x^2-x}=(x+1)^2;$

а) $(x-1)^{x^2+x}=(x-1)^6;$

б) $\left(x^2-4x+3\right)^{x^2-1}=1;$

б) $\left(x^2+2x-8\right)^{x^2-4}=1;$

в) $|x-3|^{3-x}=|3-x|^{x-3};$

в) $|x-2|^{x-2}=|2-x|^{2-x};$

г) $\left(x^2-4\right)^x=\left(3x+6\right)^x$.

г) $\left(x^2-1\right)^x=\left(2x+2\right)^x$.

❷

Решите неравенства:

а) $x^{4x^2}<x,\quad x>0$;

б) $\left|x+5\right|^{x^2-4x+3}>1$;

в) $\left(x^2+x+1\right)^{2x^2+5x+2}\le 1$;

г) $\left(1+x^2\right)^{x-1}+1\ge 2\left(1+x^2\right)^{1-x}$.

а) $x^{x^2}>x^{0,5x},\quad x>0$;

б) $\left|x+3\right|^{x^2-5x+4}<1$;

в) $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}\ge 1$;

г) $\left(2x^2+1\right)^{2-x}+4\ge 5\left(2x^2+1\right)^{x-2}$.

❸

Решите системы:

а) $\begin{cases}\left(x^2+2x-7\right)^{x^2+2x-15}=1,\\ \left|x+1\right|^{x+6}>\left|x+1\right|;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^{y^2-7y+10}=1,\\ x+y=5.\end{cases}$

а) $\begin{cases}\left(x^2-3x-9\right)^{x^2-5x-6}=1,\\ \left|x-1\right|^{x-1}>\left|x-1\right|;\end{cases}$

б) $\begin{cases}y^{x^2-8x+15}=1,\\ x-y=3.\end{cases}$

К-5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Вариант А1

❶

Решите уравнения:

а) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3-2x}=125$;

б) $3^{x+3}-3^x=78$;

в) $2^{2x+1}-9\cdot 2^x+4=0$.

❷

Решите неравенства:

а) $(0,4)^{9-x^2}\le 1$;

Вариант А2

❶

Решите уравнения:

а) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4-2x}=9$;

б) $5^{x+2}+5^x=130$;

в) $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9=0$.

❷

Решите неравенства:

а) $(0,8)^{2x-x^2}\ge 1$;

б) $2^x \cdot 5^x < 10^{x^2} \cdot 0{,}01$;

б) $2^x \cdot 3^x > 6^{2x^2} \cdot \frac{1}{6}$;

в) $3^{x^2-x} \le \left(5^{x-1}\right)^x$.

в) $7^{x^2-4x} \ge \left(2^x\right)^{x+4}$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

4

Найдите

наибольшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$.

наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$.

При каких значениях x оно достигается?

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Решите уравнения:

а) $\left(\frac{1}{4} \cdot 8^x\right)^{3x+2} = \frac{1}{32^x}$;

а) $\left(\frac{1}{27} \cdot 9^x\right)^{2x+3} = \frac{1}{3^{9x}}$;

б) $9^x + 3^{2x+1} = 4^{x+1}$;

б) $5^{2x+1} - 25^x = 4^{x+1}$;

в) $5 \cdot 4^x + 3 \cdot 10^x = 2 \cdot 25^x$.

в) $3 \cdot 4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

2

Решите неравенства:

а) $\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^{x^2+x} < 1 \quad \sin^2\frac{\pi}{10}$;

а) $(\sin 3)^{x^2 \cdot x} > 1 - \cos^2 3$;

б) $3^{x^2-2x+2} - 3^{x^2-2x} \le 8 \cdot 27^{4-x}$;

б) $7^{x^2+x+1} - 7^{x^2+x} \ge 6 \cdot 49^{x+10}$;

в) $2^{4x} - 5 \cdot 4^x \ge -4$.

в) $9^x + 3 \le 4 \cdot 3^x$.

❸

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{2x}-(0,25)^y=5, \\ 3^x+(0,5)^y=5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,2)^x-2^{0,5y}=3, \\ (0,04)^x-2^y=21. \end{cases}$$

❹

Найдите область значений функций

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos x+1}$ и $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos x}+1$.

$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sin x}$ и $y=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sin x}$

Определите, у какой из данных функций областью значений является промежуток большей длины.

Вариант В1

❶

Решите уравнения:

а) $\left(4^{x+2}\right)^x\cdot\sqrt[3]{32^{x-1}}=64$;

б) $3^{2x-1}+11^{2x-1}=121^x-3^{2x+1}$;

в) $5^{\sin^2 x}-5^{\cos^2 x}=4$.

❷

Решите неравенства:

а) $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}}>\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $2^{x^2+x-1}\cdot3^{x^2+x-1}\le1,5\cdot216^{x+1}$;

в) $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1}\ge2\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+1}-1$.

❸

Решите систему:

$$\begin{cases} 4\cdot8^x-9\cdot18^x=4\cdot12^x-9\cdot27^x, \\ (0,25)^{|x+1|}\ge0,5. \end{cases}$$

Вариант В2

❶

а) $\left(9^x\right)^{x+1}\cdot\sqrt{27^{x-3}}=3$;

б) $2^{2x}+6^{2x}=6^{2x+1}-4^{x+1}$;

в) $2^{\cos2x}-2^{2\sin^2 x}=1$.

❷

а) $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{x^2-x-2}{x^2-4}}<\arcsin1$;

б) $3^{x^2-2x+1}\cdot5^{x^2-2x-1}\ge0,6\cdot225^{x-6}$;

в) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x-1}\le3\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-1}-2$.

❸

$$\begin{cases} 2\cdot27^x-3\cdot18^x=2\cdot12^x-3\cdot8^x, \\ 9^{|x-1|}\le3. \end{cases}$$

4

Среди нулей функции

$y = 3^{\sin\frac{\pi x}{2}} - 3$

$y = (0,5)^{\cos\frac{\pi x}{4}} - 1$

найдите точки, в которых функция

$f(x) = (0,2)^{\sqrt{15+2x-x^2}}$ принимает наибольшее значение.

$f(x) = 2^{\sqrt{8+2x-x^2}}$ принимает наименьшее значение.

С-29. ЛОГАРИФМ. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$;

б) $2^{1+\log_2 5}$;

в) $\lg 4 + 2\lg 5$;

г) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$.

2

Найдите значение x, если:

а) $3^x = 7$;

б) $\log_4 x = \log_{0,5} \sqrt{2}$.

3

С помощью логарифмических тождеств упростите выражения ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$):

а) $\dfrac{\lg b}{\lg a} + \dfrac{2}{\log_b a} - \log_a b^3$;

б) $a^{2\log_a b} - (\log_a a^b)^2$.

Вариант А2

1

а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$;

б) $5^{\log_5 10 - 1}$;

в) $\log_6 9 + 2\log_6 2$;

г) $\lg \sqrt{30} - \lg \sqrt{3}$.

2

а) $2^x = 11$;

б) $\log_{0,2} x = \log_{\sqrt{5}} 5$.

3

а) $\dfrac{3}{\log_a b} - \log_b a^2 - \dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$;

б) $\log_b b^a - b^{2\log_b \sqrt{a}}$.

4

Сравните числа:

а) $\log_3 10$ и $\lg 3$;

б) $\log_2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \log_2 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$ и 0.

а) $\log_2 7$ и $\log_7 2$;

б) $\lg\sin\frac{\pi}{4} - \lg\cos\frac{\pi}{4}$ и 0.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\log_5 \frac{1}{25} + \log_{\sqrt{3}} 27$;

б) $\log_{1,5} \log_4 8$;

в) $4^{\log_2 3 + 0,5\log_2 9}$;

г) $10^{\lg\frac{1}{5} - \lg 2}$.

2

Найдите значение x, если:

а) $2^{2x-4} = 9$;

б) $\log_4 x = \log_{\sqrt{2}} 6^{\frac{1}{\log_2 6}}$.

3

Сравните числа:

а) $\log_3 10$ и $\log_8 62$;

б) $\log_2 9 \cdot \log_3 4$ и $\dfrac{\lg\frac{1}{16\sqrt{2}}}{\lg\sin\frac{\pi}{6}}$.

4

Найдите значение выражения:

а) $\lg\operatorname{tg}31° + \lg\operatorname{tg}59°$;

Вариант Б2

1

а) $\log_{0,5} 4 + \log_{\sqrt{5}} 25$;

б) $\log_{0,75} \log_{27} 81$;

в) $100^{2\lg 2 + \lg 3}$;

г) $3^{\log_3 2 - \log_3 \frac{1}{6}}$.

2

а) $5^{3x+6} = 27$;

б) $\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\frac{1}{5}} 2^{\frac{1}{\log_5 2}}$.

3

а) $\log_2 9$ и $\lg 900$;

б) $\log_2 25 \cdot \log_5 \sqrt{2}$ и $\dfrac{\log_3 0,75}{\log_3 \sin\frac{\pi}{3}}$.

4

а) $\lg\operatorname{ctg}42° + \lg\operatorname{ctg}48°$;

б) $\dfrac{\log_3^2 6 - \log_3^2 2}{\log_3 12}$.

б) $\dfrac{\log_5^2 10 - \log_5^2 2}{\log_5 20}$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вычислите:

а) $10\log_9 \sqrt[5]{27} + \log_6 \log_5 \sqrt[3]{\sqrt{5}}$;

б) $12^{-\frac{1}{1+\log_3 4}}$;

в) $\log_2 \sin\dfrac{\pi}{8} + \log_2 2\cos\dfrac{\pi}{8}$;

г) $\log_{\sqrt{7}} 2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{125} 49$.

а) $\log_6 \log_7 \sqrt[4]{\sqrt[3]{49}} + 9\log_8 \sqrt[3]{16}$;

б) $18^{\frac{1}{1-\log_9 2}}$;

в) $\log_2 \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} + \log_2 2\cos^2\dfrac{\pi}{12}$;

г) $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{25} 6 \cdot \log_6 27$.

❷

Найдите *x*, если:

а) $4^{2x} - 2^{2x+4} + 15 = 0$;

б) $\log_2 x = \dfrac{\lg 5}{\lg 0,5} + \log_4 225$.

а) $9^{2x} - 3^{2x+2} + 14 = 0$;

б) $\lg x = \dfrac{\log_7 18}{\log_7 0,1} + \log_{\sqrt{10}} 6$.

❸

Найдите значение выражения:

а) $3^{\log_4 5} - 5^{\log_4 3}$;

б) $\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg^2 2$.

а) $2^{\lg 7} - 7^{\lg 2}$;

б) $\log_{15}^2 9 + \log_{15} 5 \cdot \log_{15} 45$.

❹

Выразите:

а) $\log_6 9$, если $\log_6 2 = a$;

б) $\lg 56$, если $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$.

а) $\lg 25$, если $\lg 2 = a$;

б) $\log_5 54$, если $\log_5 3 = a$ и $\log_3 2 = b$.

С-30. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Вариант А1

1

Решите уравнения:

а) $\log_4(x^2-15x)=2$;

б) $\lg(x^2-9)=\lg(4x+3)$;

в) $2\log_2(-x)=1+\log_2(x+4)$;

г) $\log_5^2 x+\log_5 x-2=0$.

2

Решите систему:

$$\begin{cases}\lg x+\lg y=2;\\ x^2+y^2=425.\end{cases}$$

Вариант А2

1

а) $\log_2(x^2-2x)=3$;

б) $\lg(2x^2+3x)=\lg(6x+2)$;

в) $2\log_3(-x)=1+\log_3(x+6)$;

г) $\log_4^2 x-2\log_4 x-3=0$.

2

$$\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1;\\ x^2-y^2=27.\end{cases}$$

Вариант Б1

1

Решите уравнения:

а) $\log_3(x+3)=\log_3(x^2+2x-3)$;

б) $\log_2(2x-1)-2=$
$=\log_2(x+2)-\log_2(x+1)$;

в) $\dfrac{\log_5(2x^2-x)}{\log_4(2x+2)}=0$;

г) $\log_{2x}(x^2+x-2)=1$.

2

Решите систему:

$$\begin{cases}\log_x y+2\log_y x=3;\\ x+y=26.\end{cases}$$

Вариант Б2

1

а) $\log_2(2x-4)=\log_2(x^2-3x+2)$;

б) $\log_3(3x-1)-1=$
$=\log_3(x+3)-\log_3(x+1)$;

в) $\dfrac{\log_4(2x^2+x)}{\log_5(2-2x)}=0$;

г) $\log_{-2x}(2x^2-x-1)=1$.

2

$$\begin{cases}3\log_x y+\log_y x=4;\\ x+y=10.\end{cases}$$

Вариант В1

1

Решите уравнения:

а) $\log_{x-1}(2x^2-5x-3)=2$;

б) $\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2$;

в) $\log_3^2(9x)+\log_3^2(3x)=1$;

г) $\log_2(9-2^x)=3^{\log_3(3-x)}$.

2

Решите систему:

$$\begin{cases} 1+\log_2 x+\log_2 y = \\ \qquad =\log_2(x^2+y^2-4), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3. \end{cases}$$

Вариант В2

1

а) $\log_{x+1}(2x^2+5x-3)=2$;

б) $\lg 5-1=\lg(x-3)-\frac{1}{2}\lg(3x+1)$;

в) $\log_2^2(4x)+\log_2^2(2x)=1$;

г) $\log_6(5+6^{-x})=10^{\lg(x+1)}$.

2

$$\begin{cases} \log_2(4-y)+\log_2(4+y)= \\ \qquad =\log_2 x+\log_2(x+2y), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3. \end{cases}$$

С-31*. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМОВ В РЕШЕНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Решите показательные уравнения:

а) $3^{x^2+4x}=\frac{1}{25}$;

б) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0$;

в) $5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=100$.

2

Используя метод логарифмирования, решите уравнения:

а) $x^{\log_2 x}=64x$;

Вариант 2

1

а) $5^{x^2-2x}=128$;

б) $16^x-5\cdot 36^x+4\cdot 81^x=0$;

в) $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=36$.

2

а) $x^{\log_3 x}=9x$;

б) $x^{2\lg^3 x-3\lg x}=0{,}1$;

в) $\frac{1}{4}x^{\log_4 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$;

г) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=6$.

б) $x^{9\lg^3 x-11\lg x}=0{,}01$;

в) $27x^{\log_{27} x}=9^{\log_{27} x^5}$;

г) $2\cdot 6^{\log_6^2 x}-x^{\log_6 x}=6$.

3

Решите системы:

а) $\begin{cases} x^{2y^2-1}=3, \\ x^{y^2+2}=27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=2+\log_3 y, \\ y^x=3^8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4, \\ \log_4 x-\log_4 y=1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} y^{x^2+1}=100, \\ y^{3x^2-2}=10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=1+\log_4 x, \\ x^y=4^6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{\log_5 y}+y^{\log_5 x}=50, \\ \log_5 y-\log_5 x=1. \end{cases}$

4*

Используя свойства логарифмической функции, решите уравнения:

а) $3^x=10-\log_2 x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{x^2})=$
$=2x^2-4x+1$.

а) $2^x=18-\log_2 x$;

б) $-3x^2+6x-2=$
$=\log_2(x^2+1)-\log_2 x$.

С-32. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Вариант А1

1

Решите неравенства:

а) $\log_2(8-x)<1$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\ge\log_{\frac{1}{3}}(3-x)$;

в) $\log_2 x+\log_2(x-1)\le 1$.

Вариант А2

а) $\log_3(x-2)<2$;

б) $\log_{0,5}(2x-4)\ge\log_{0,5}(x+1)$;

в) $\log_2(x-3)+\log_2(x-2)\le 1$.

2

С помощью метода интервалов определите, при каких значениях x функция

$y = (2 - x)\lg x$

$y = (x - 3)\lg(x + 1)$

принимает положительные значения.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Решите неравенства:

Б1:

а) $\log_2(x^2 - 3x) < 2;$

б) $\log_{0,3}(2x^2 - 9x + 4) \geq$
$\geq 2\log_{0,3}(x + 2);$

в) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 > 0.$

Б2:

а) $\log_3(x^2 + 2x) < 1;$

б) $\log_{0,5}(2x^2 + 3x + 1) \geq$
$\geq 2\log_{0,5}(x - 1);$

в) $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 > 0.$

2

Найдите область определения функции

$y = \sqrt{(4 - x^2)\log_{\frac{1}{2}}(x + 5)}.$

$y = \sqrt{(x^2 - 1)\log_{\frac{1}{3}}(3 - x)}.$

Вариант В1

Вариант В2

1

Решите неравенства:

В1:

а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_5(x^2 - 4) > 0;$

б) $2\log_2(x-2) + \log_{0,5}(x-3) > 2;$

в) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_x 3 - 2,5.$

В2:

а) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4(x^2 - 5) > 0;$

б) $2\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \log_2(x^2 - 2x - 1) < 1;$

в) $2\log_5 x - \log_x 125 \leq 1.$

2

Найдите область определения функции

$y = \lg\left(\dfrac{\log_2 x^2}{\lg(x + 3)}\right).$

$y = \log_2\left(\dfrac{\lg(x + 4)}{\log_2 x^4}\right).$

С-33*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ
(домашняя самостоятельная работа)

1

Решите уравнения, используя указанные способы:

— преобразование и потенцирование уравнения:

Вариант 1

а) $\log_3 \log_8 \log_2(x-5) = \log_3 2 - 1$;

б) $\lg(3^x + x - 12) = x\lg 30 - x$;

в) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$;

Вариант 2

а) $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}}(x+1) = 3^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$;

б) $\lg(2^x + x - 9) = x - x\lg 5$;

в) $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2(2\sqrt{2}x) = 1$;

— введение новой переменной:

Вариант 1

г) $\log_2^2(2-x) - \log_2(x-2)^2 + 3\log_2|x-2| = 2$;

д) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$;

е) $\log_{2\operatorname{tg} x}(2\operatorname{ctg} x) + \log_{2\operatorname{ctg} x}(2\operatorname{tg} x) = 2$;

ж) $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$;

Вариант 2

г) $\log_{0,5}^2(1-x) - \log_{0,5}(x-1)^2 + \log_{0,5}|x-1| = 2$;

д) $\log_2(\frac{1}{4}x)\cdot\log_2(4x) = \log_2 x^2 - 1$;

е) $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2$;

ж) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

— введение параметра:

Вариант 1

з) * $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$;

и) * $\lg(x^3 + x) = \log_2 x$.

Вариант 2

з) * $(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$;

и) * $\log_5(1+\sqrt{x}) = \log_{16} x$.

❷

Решите неравенства:

а) $\log_{0,5}\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}\le 0;$

б) $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\ge 0;$

в) $x^{2-4\log_2 x+\log_2^2 x}<\dfrac{1}{x};$

г) $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1;$

д) $\log_{x-2}(x^2-8x+15)>0;$

е) $\log_x\log_9(3^x-9)\le 1;$

ж) $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}>$
$>\log_3(3x^2-4x+2)-1;$

з) * $16^{-0,5+\log_4^2 x}+\dfrac{11}{16}\ge x^{\log_2\sqrt{x}}.$

а) $\log_{\frac{1}{2}}\log_8\dfrac{x^2-1}{x-2}\le 0;$

б) $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\ge 0;$

в) $x^{\lg^2 x-2\lg x-1}<x^2;$

г) $(4\cdot 3^x+3^{-x})^{2\log_3(x-1)-\log_3(2x+1)}>1;$

д) $\log_{2x+4}(x^2-x)>1;$

е) $\log_x\log_2(4^x-12)\le 1;$

ж) $\sqrt{1+\log_2(7x^2+14x+8)}<$
$<1+\log_8(7x^2+14x+8);$

з) * $(\sqrt{3})^{2+\log_{\sqrt{3}}^2 x}-1,5\le x^{\log_3 x^4}.$

❸

Решите системы:

а) $\begin{cases} x^{\log_2 y}=3,\\ xy=6;\end{cases}$

б) $\begin{cases} x^y=\dfrac{1}{\sqrt{1000}},\\ \dfrac{1}{y}\lg x=-6;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_x(xy)=\log_y x^2,\\ y^{2\log_y x}=4y-3.\end{cases}$

а) $\begin{cases} y^{\log_5 x}=64,\\ xy=500;\end{cases}$

б) $\begin{cases} y^x=100,\\ \dfrac{1}{x}\lg y=0,5;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_y\dfrac{x}{y}=\log_x y^2,\\ x^{-2\log_x y}=5x-4.\end{cases}$

К-6. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $3\log_2 \frac{1}{8} + 10^{\lg 2 + \lg 5}$;

б) $2\log_3 6 - \log_3 12$.

2

Решите уравнения:

а) $\log_{0,5}(x^2 + x) = -1$;

б) $2\log_3 x = \log_3(2x^2 - x)$.

3

Решите неравенства:

а) $\log_7(2 - x) \le \log_7(3x + 6)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) - 1$.

4

Решите систему:

$$\begin{cases} \log_3(x + y) = 2, \\ 9^{\log_3 \sqrt{x-y}} = 5. \end{cases}$$

5

Найдите значения x, при которых функция

$f(x) = x^{\log_2 x + 2}$

Вариант А2

1

а) $2\log_3 \frac{1}{27} + 6^{\log_6 72 - \log_6 2}$;

б) $3\lg 5 + \lg 8$.

2

а) $\log_{0,1}(x^2 - 3x) = -1$;

б) $2\log_5(-x) = \log_5(x + 2)$.

3

а) $\log_{0,2}(3x - 1) \ge \log_{0,2}(3 - x)$;

б) $\log_3(x^2 - 1) < \log_3(x + 1) + 1$.

4

$$\begin{cases} \log_2(x - y) = 3, \\ 4^{\log_2 \sqrt{x+y}} = 10. \end{cases}$$

5

$f(x) = x^{\log_3 x - 2}$

принимает значение,

равное 8. | равное 27.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Вычислите:

Б1:

а) $\log_{0.6}(\log_8 32) + 49^{\log_{\sqrt{7}}\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\lg 900 - 2}{2\lg 0,5 + \lg 12}$.

Б2:

а) $\log_{1.2}(\log_{64} 32) + 9^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{2\lg 0,2 + \lg 200}{\lg 20 - 1}$.

❷

Решите уравнения:

Б1:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x =$
$= \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$;

б) $\log_2^2 x^2 + 6\log_{0,25} x - 1 = 0$.

Б2:

а) $\log_{0,2}(x+1) =$
$= \log_{0,2}(8-x) - \log_{0,2} x$;

б) $\log_3^2 x^3 - 20\log_9 x + 1 = 0$.

❸

Решите неравенства:

Б1:

а) $\log_2(x^2 - 3x + 2) \le$
$\le 1 + \log_2(x-2)$;

б) $2\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x^2 > 4$.

Б2:

а) $\log_6(x^2 + 10x + 24) \le$
$\le 1 + \log_6(x+6)$;

б) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x^2 > 3$.

❹

Решите систему:

Б1:

$$\begin{cases} 2^{2+\log_2(x^2+y^2)} = 20, \\ \lg(x^2 - y^2) - \lg(x-y) = 0. \end{cases}$$

Б2:

$$\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2-y^2)} = 15, \\ \log_2(x^2 - y^2) - \log_2(x+y) = 0. \end{cases}$$

❺

Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций

Б1: $f(x) = x^{\log_3 x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{27}x^4$.

Б2: $f(x) = x^{\log_2 x}$ и $g(x) = \dfrac{8}{x^2}$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $3^{\frac{2}{\log_5 3}} + \dfrac{\log_2 \frac{1}{3}}{\log_4 81}$;

б) $\log_{\sqrt{2}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

2

Решите уравнения:

а) $\log_2(x-2)\cdot\log_3 2+\log_3(x+3) = 1 + \lg(x-1)\log_3 10$;

б) $\log_x\left(9x^2\right)\log_3^2 x = 4$.

3

Решите неравенства:

а) $\log_x(x+2) > 2$;

б) $\log_5(\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x^2 - 3) \geq 1$.

4

Решите систему:

$$\begin{cases} 3^{\log_3 y} - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

5

Решите уравнение:

$$\log_2(x^2 - x - 2) = 1 + \log_2(x-2)\log_2(x+1).$$

Вариант В2

а) $5^{-\frac{1}{\log_{0,5} 5}} + \dfrac{\log_3 \frac{1}{2}}{\log_9 16}$;

б) $\log_{\sqrt{3}}(\log_{27} 2 \cdot \log_2 3)$.

а) $\log_3(x-3)\cdot\log_2 3 + \log_2(x+2) = 1 + \log_5(x-1)\log_2 5$;

б) $\log_x\left(125x\right)\log_{25}^2 x = 1$.

а) $\log_x(6-x) > 2$;

б) $\log_2(\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2) \geq 2$.

$$\begin{cases} \log_5 x + 5^{\log_5 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

$$\log_3(x^2 - 2x - 3) = 1 + \log_3(x+1)\log_3(x-3).$$

С-34. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ МОДУЛЯ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Вариант А1	Вариант А2

1

Раскройте модули:

а) $\lvert\sqrt{5}-2\rvert$;	а) $\lvert 1-\sqrt{2}\rvert$;
б) $\lvert 3-\pi\rvert$;	б) $\lvert 4-\pi\rvert$;
в) $\lvert 1+x^2\rvert$;	в) $\lvert -x^4-2\rvert$;
г) $\lvert -\sqrt{x}-x^8\rvert$.	г) $\lvert x^2+\sqrt[4]{x}\rvert$.

2

Решите уравнения:

а) $\lvert 2x-3\rvert = 5$;	а) $\lvert 2x+4\rvert = 6$;
б) $\lvert x^2-4\rvert = x^2-4$;	б) $\lvert x^2-1\rvert = 1-x^2$;
в) $\lvert x^2+x\rvert = \lvert 3x+3\rvert$;	в) $\lvert x^2-x\rvert = \lvert 2x-2\rvert$;
г) $x^2-\lvert x\rvert-2=0$.	г) $x^2+\lvert x\rvert-6=0$.

3

Решите неравенства:

а) $\lvert x-2\rvert \le 2$;	а) $\lvert x+1\rvert \le 1$;
б) $\left\lvert 2+\frac{1}{x}\right\rvert > -3$;	б) $\left\lvert 1+\frac{1}{x-1}\right\rvert > -1$;
в) $\lvert x^2-9\rvert > 16$;	в) $\lvert x^2-4\rvert > 12$;
г) $\lvert 2+x\rvert \le x$.	г) $\lvert 4-x\rvert \le x$.

Вариант Б1	Вариант Б2

1

Раскройте модули:

а) $\lvert 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\rvert$;	а) $\lvert 3\sqrt{5}-5\sqrt{3}\rvert$;

б) $\left|2^{30} - 3^{20}\right|$;

в) $\left|-x^2 + 2x - 2\right|$;

г) $\left|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right|$.

б) $\left|3^{40} - 4^{30}\right|$;

в) $\left|x^2 + 6x + 10\right|$;

г) $\left|\sqrt{x-2} - \sqrt{x}\right|$.

❷

Решите уравнения:

а) $\left|x^2 + x\right| = 2$;

б) $|x - 1| = 3x + 5$;

в) $x^2 - 4\dfrac{x+2}{|x+2|} = 0$;

г) $x^2 - 6x + |x - 4| + 8 = 0$.

а) $\left|x^2 - x\right| = 6$;

б) $|x + 1| = 2x + 8$;

в) $x^2 + \dfrac{|x-1|}{x-1} = 0$;

г) $x^2 + 4x + |x + 3| + 3 = 0$.

❸

Решите неравенства:

а) $\left|\sqrt{x+1} - 1\right| > -2$;

б) $|4x + 1| \geq 3$;

в) $\left|x^2 - 4\right| \leq 3x$;

г) $|x + 1| < |x - 3|$.

а) $\left|4 - \sqrt{x-2}\right| > -5$;

б) $|4x - 3| \leq 1$;

в) $\left|x^2 - 2x\right| \geq x$;

г) $|x + 2| < |x - 4|$.

Вариант В1

❶

Раскройте модули:

а) $\left|\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right|$;

б) $\left|\cos 20^\circ - \cos 21^\circ\right|$;

в) $\left|2 - x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right|$;

г) $\left|x^6 + 3 - 2x^3\right|$.

Вариант В2

а) $\left|\sqrt[3]{2} - \sqrt[7]{5}\right|$;

б) $\left|\sin 1^\circ - \sin 2^\circ\right|$;

в) $\left|\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\right|$;

г) $\left|4x^5 - x^{10} - 5\right|$.

❷

Решите уравнения:

а) $||x^2 - x| - 1| = 1;$

б) $|x^2 + x - 3| = x;$

в) $\sqrt{9 - x^2} = -|x^2 + 4x + 3|;$

г) $|x| + |x - 2| = 4.$

а) $||x^2 + x| - 3| = 3;$

б) $|x^2 - x - 8| = -x;$

в) $\sqrt{25 - x^2} = -|x^2 + 2x - 15|;$

г) $|x - 1| + |x + 1| = 4.$

3

Решите неравенства:

а) $|x^2 + 3x| \geq 2 - x^2;$

б) $|x^2 - 2x| \leq x;$

в) $|x^2 + x - 2| > |x + 2|;$

г) $\left|\dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{x^2 - 1}\right| > 0.$

а) $|x^2 - 2x| \geq 12 - x^2;$

б) $|x^2 + 2x| \leq 4x;$

в) $|2x^2 + x - 1| > |x + 1|;$

г) $\left|\dfrac{\sqrt{x+5} - 2}{4 - x^2}\right| > 0.$

Начала анализа

С-35. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Вариант А1 / **Вариант А2**

❶

Найдите пределы числовых последовательностей:

Вариант А1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

Вариант А2

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3-2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-2}{4n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-3})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+2}}{2^n+2}$.

❷

Вычислите пределы:

Вариант А1

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1}{2x^3+x}$.

Вариант А2

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+4}{x^2-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{4-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{3\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{3x^2+5x}$.

❸

Пользуясь определением непрерывности функции в точке, докажите, что

функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ непрерывна в точке $x_0 = -1$, но не является непрерывной в точке $x_1 = 0$.

функция $g(x) = \frac{x}{x-2}$ непрерывна в точке $x_0 = 3$, но не является непрерывной в точке $x_1 = 2$.

Вариант Б1

1 **Найдите пределы числовых последовательностей:**

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8-3n}{n+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4}$.

2 **Вычислите пределы:**

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{\cos(x+2)}$.

3 **Определите, является ли непрерывной функция:**

а) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$;

Вариант Б2

1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^3-1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5-4n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-2n})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5^{n+2}}{5^{n+1}+4^{n+1}}$.

2

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{x^2+2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sin(x-1)}$.

3

а) $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ в точке $x_0 = -2$;

б) $g(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при } x\le -1,\\ 3x+4, & \text{при } x\ge -1\end{cases}$

в точке $x_0=-1$.

б) $g(x)=\begin{cases} 2x-3, & \text{при } x<1,\\ x^2-2, & \text{при } x\ge 1\end{cases}$

в точке $x_0=1$.

Вариант В1

1

Найдите пределы числовых последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\cos n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n-1}{n^2-1}\right)^3$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n+1})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-n)n!}{(n+1)!-n!}$.

2

Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\lg(3-x)}{2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\operatorname{tg} x}$.

3

Найдите значение a, при котором функция $f(x)$ является непрерывной на $D(f)$, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{при } x\le 2,\\ ax-6, & \text{при } x>2;\end{cases}$

Вариант В2

1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\sin n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-2}{2n^2-2}\right)^2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{(2-n)n!}$.

2

а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin(x+1)}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2\operatorname{ctg} x}$.

3

а) $f(x)=\begin{cases} 4+x, & \text{при } x\le 1,\\ 2x^2-a, & \text{при } x>1;\end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos 4x}{x^2}, & \text{при } x \neq 0, \\ a, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{2x}, & \text{при } x \neq 0, \\ a, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

С-36. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Найдите приращение функции:

Вариант А1:

а) $f(x) = 2x - 3$, если $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,2$;

б) $f(x) = x^2 + 2$, если $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,01$.

Вариант А2:

а) $f(x) = 3x + 1$, если $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,1$;

б) $f(x) = x^2 - 4$, если $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$.

2

Найдите производные функций:

Вариант А1:

а) $f(x) = 2x^5 - \dfrac{4}{x^2}$;

б) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot x^3$.

Вариант А2:

а) $f(x) = 3x^4 + \dfrac{2}{x^3}$;

б) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2) \cdot x^2$.

3

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

Вариант А1:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$;

б) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{5}$.

Вариант А2:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$;

б) $f(x) = -\dfrac{1}{x} - 9x + \sqrt{2}$.

4

Решите неравенство

Вариант А1: $f'(x) \quad 0$, если:

Вариант А2: $f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = 8x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}$;	а) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + x^2 - 6x$;
б) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.	б) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$.

Вариант Б1	Вариант Б2

1

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x,\ x_0 = 2$;	а) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x,\ x_0 = -1$;
б) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1,\ x_0 = -1$.	б) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x},\ x_0 = 2$.

2

Найдите производные функций:

а) $f(x) = x\sqrt{x} - 8x^3$;	а) $f(x) = 3x^5 + x^2\sqrt{x}$;
б) $f(x) = \left(3 - \dfrac{4}{x^4}\right)(x^2 + 1)$.	б) $f(x) = \left(2 + \dfrac{3}{x^3}\right)(x - 1)$.

3

Составьте и решите уравнения:

а) $f'(x) = f'(-2)$, если $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 4}$;	а) $f'(x) = f'(6)$, если $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}$;
б) $f'(x) = f(x) - 2x$, если $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.	б) $xf'(x) = f(x) + 4$, если $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

4

Составьте и решите неравенство

$f(x) \cdot f'(x) \ge 0$, если:	$f(x) \cdot f'(x) \le 0$, если:
а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;	а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

б) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+3}$.

б) $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x}$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в каждой точке $D(f)$:

а) $f(x) = \sqrt{x-2}$;

б) $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x^2}$.

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

б) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - 7$.

2

Найдите производные функций:

а) $f(x) = 4x^5 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$;

б) $f(x) =$
$= \left(x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)(2 + 5x - 3x^2)$.

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^2\sqrt{x}} + 3x^6$;

б) $f(x) =$
$= (15 - 2x - x^2)\left(2x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

3

Составьте и решите уравнения:

а) $|f(x)| = f'(x)$,
если $f(x) = x^2 + x + 1$;

б) $f'(x) = f'(5) - f'(1)$,
если $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x-3}$.

а) $|f(x)| = -f'(x)$,
если $f(x) = -x^2 - 4x - 1$;

б) $f'(x) = f'(-1) + f'(-5)$,
если $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+3}$.

4

Составьте и решите неравенство

$\dfrac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$, если:

а) $f(x) = x^4 - 4x^2$;

$\dfrac{f(x)}{f'(x)} \leq 0$, если:

а) $f(x) = 9x - x^3$;

б) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$.

б) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$.

С-37. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Вариант А1	Вариант А2

1

Найдите $f'(x_0)$, если:

Вариант А1:

а) $f(x) = (4x+3)^6$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = 2 - 2\cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$, $x_0 = 3$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

Вариант А2:

а) $f(x) = (3x-2)^5$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 4\sin x - x$, $x_0 - \dfrac{\pi}{3}$;

в) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = -2$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{4}\cos 4x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{16}$.

2

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

Вариант А1:

а) $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$;

б) $f(x) = \cos^2\dfrac{x}{4} - \sin^2\dfrac{x}{4}$.

Вариант А2:

а) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)^2$;

б) $f(x) = 4\sin\dfrac{x}{8}\cos\dfrac{x}{8}$.

3

Докажите тождества:

Вариант А1:

а) $f'(x) = \dfrac{1}{x-2} f'(3) \cdot f(x)$,

если $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$;

Вариант А2:

а) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} f'(0) \cdot f(x)$,

если $f(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^3}$;

б) $g'(x) = \left(\dfrac{g(x)}{\sin x}\right)^2$,

если $g(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi$.

б) $g'(x) = \left(\dfrac{g(x)}{\cos x}\right)^2$,

если $g(x) = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите $f'(x_0)$, если

Вариант Б1

а) $f(x) = (3x-5)^3 + \dfrac{1}{(3-x)^2}$,

$x_0 = 2$;

б) $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} x$,

$x_0 = 0$;

в) $f(x) = \sqrt{5 - 4x - x^2}, x_0 = -2$;

г) $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Вариант Б2

а) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+7)^4} - (1-x)^3$,

$x_0 = -3$;

б) $f(x) = \cos 4x + \operatorname{ctg} x$,

$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}, x_0 = 4$;

г) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$,

$x_0 = \pi$.

2

Решите уравнение $f'(x_0) = 0$, если:

Вариант Б1

а) $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$;

б) $f(x) = \cos 5x \cos 3x +$
$+ \sin 5x \sin 3x - x$.

Вариант Б2

а) $f(x) = \sqrt{x^3 + \dfrac{243}{x}}$;

б) $f(x) = \sin 4x \cos x -$
$- \cos 4x \sin x + 1{,}5x$.

3

Докажите, что при всех допустимых значениях x производная функции $g(x)$ не может принимать

положительных (Вариант Б1) / отрицательных (Вариант Б2)

значений, если:

а) $g(x)=\dfrac{1}{3(2x-1)^3}+2\sqrt{1-x^3}$;

б) $g(x)=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{9}+\cos\dfrac{\pi}{9}$.

а) $g(x)=\dfrac{0,2}{(5-4x)^5}-\sqrt{2-x^5}$;

б) $g(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{7}-\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите $f'(x_0)$, если:

Вариант В1:

а) $f(x)=$
$=(x^2+3x-4)^5-\sin\pi x$,
$x_0=1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3\dfrac{x}{3}}$, $x_0=-3\pi$;

в) $f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg}x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{\arccos x}$, $x_0=0$.

Вариант В2:

а) $f(x)=$
$=(2x^2-x-3)^6+\cos\pi x$,
$x_0=-1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^4\dfrac{x}{2}}$, $x_0=3\pi$;

в) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}x}$, $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$.

2

Решите уравнения $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=0$ и $\left(g\left(f(x)\right)\right)'=0$, если

$f(x)=x^2-x$ и $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

$f(x)=x^2-4x$ и $g(x)=\sqrt{x}$.

3

Докажите, что при всех допустимых значениях x верно равенство:

а) для $f(x)=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ и

а) для $f(x)=\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$ и

$$g(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$f'(x) \cdot g'(x) = -f(x) \cdot g(x)$;

б) для $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

$$\left(f\left(f(x)\right)\right)' = -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

$$g(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

$$\frac{1}{f'(x)} - \frac{1}{g'(x)} = 1;$$

б) для $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$$\left(f\left(f(x)\right)\right)' = \frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

С-38. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

Вариант А1:

а) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) - 4\cos x + x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант А2:

а) $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$, $x_0 - -3$;

б) $f(x) = 2x - 3\sin x$, $x_0 = \pi$.

❷

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке M:

Вариант А1:

а) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$, $M(-3; 9)$;

б) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $M(2; 3)$.

Вариант А2:

а) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x$, $M(3; 9)$;

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $M(-2; 3)$.

3

Тело движется по закону

$x(t) = t^4 + 0,5t^2 - 3t$

$x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$

(x — в метрах, t — в секундах).

Найдите скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

4

На графике функции $f(x)$ найдите точку, в которой касательная к $f(x)$ наклонена к оси абсцисс под углом α, если

$f(x) = \sqrt{2x-1}$, $\alpha = 45°$.

$f(x) = \sqrt{4x+8}$, $\alpha = 45°$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

Вариант Б1:

а) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + x)$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

Вариант Б2:

а) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{12}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

Вариант Б1:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \cos(1+4x)$, $x_0 = -0,25$.

Вариант Б2:

а) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = \sin(1-2x)$, $x_0 = 0,5$.

3

Тело массой m кг движется по закону $x(t)$ (x — в метрах, t — в секундах). Найдите силу, действующую на тело в момент времени t_0, если

$m = 3, t_0 = 2,$

$x(t) = 0,25t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 7t + 2.$

$m = 2, t_0 = 3,$

$x(t) = 2t^3 - 6t^2 + t + 3.$

4

На графике функции

$g(x) = \sqrt{8x - x^2}$

$g(x) = \sqrt{-x^2 - 10x}$

найдите точку, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите угол между осью абсцисс и касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

В1:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$, $x_0 = \sqrt{3}$;

б) $f(x) = -x\cos 2x$, $x_0 = 0$.

В2:

а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6}$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = -x\sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

В1:

а) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, x_0 — точка пересечения графика с осью абсцисс;

б) $f(x) = (7 - 3x)^3$, x_0 — точка пересечения графика с прямой $y = 1$.

В2:

а) $f(x) = \frac{3x^2+2}{x-1}$, x_0 — точка пересечения графика с осью ординат;

б) $f(x) = (4x + 3)^5$, x_0 — точка пересечения графика с прямой $y = -1$.

3

Из точки A вдоль координатных осей Ox и Oy движутся два тела по законам

$x(t) = \sqrt{t^4 + 3},$

$y(t) = \sqrt{4t^2 + 1},\ A(\sqrt{3};1)$

$x(t) = \sqrt{3t^4 + 4t^2},$

$y(t) = \sqrt{t^4 + 1},\ A(0;1)$

(x, y — в метрах, t — в секундах). Определите, с какой скоростью они удаляются друг от друга.

4

На графике функции

$f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

найдите точки, в которых касательная параллельна прямой

$y = x - 3.$ $\qquad$ $y = 2x + 3.$

К-7. ПРОИЗВОДНАЯ

Вариант А1 $\qquad$ Вариант А2

1

Найдите производные функций:

а) $y = 2x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 4;$ $\qquad$ а) $y = 4x^5 + \dfrac{x^3}{3} - 2;$

б) $y = 2\cos x - 3\operatorname{tg} x;$ $\qquad$ б) $y = 4\sin x - 5\operatorname{ctg} x;$

в) $y = \dfrac{x-3}{x+2}.$ $\qquad$ в) $y = \dfrac{x-2}{x+3}.$

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

$f(x) = \dfrac{2}{x^2} - x,\ x_0 = -1.$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{3}{x^3} + 2x,\ x_0 = 1.$

3

Составьте и решите уравнение:

$f'(x) = g'(x)$, если $\qquad$ $f'(x) = -g'(x)$, если

$f(x) = (2x-1)^5,\ g(x) = 10x + 7.$ $\qquad$ $f(x) = (3x-5)^4,\ g(x) = 96x - 17.$

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = t^3 + 1$

$x(t) = t^4 + 3t$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее координата равна 9 м.

координату точки в момент, когда ее скорость равна 7 м/с.

5

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции

$g(x) = \dfrac{1}{2-3x}$ в точке с ординатой −1.

$g(x) = \dfrac{2}{1-x}$ в точке с ординатой 1.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите производные функций:

Б1:

а) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{x^4} + 8\sqrt{x}$;

б) $y = (x^2 + 1)\cos x$;

в) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x-1}$.

Б2:

а) $y = \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{x^3}{3} - 6\sqrt{x}$;

б) $y = (4 - x^2)\sin x$;

в) $y = \dfrac{x^2 - 6x}{x+2}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

$f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$, $x_0 = 1$.

$f(x) = \dfrac{1}{(3x-8)^2}$, $x_0 = 3$.

3

Составьте и решите уравнение

$f'(x) = -g'(x)$, если

$f(x) = \sin^2 x$,

$g(x) = \cos x + \cos\dfrac{\pi}{12}$.

$f'(x) = g'(x)$, если

$f(x) = \cos^2 x$,

$g(x) = \sin x - \sin\dfrac{\pi}{10}$.

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$

$x(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 4$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее ускорение равно нулю.

ускорение точки в момент, когда ее скорость равна 1 м/с.

5

Найдите острый угол, который образует с осью ординат касательная к графику функции $g(x)$ в точке x_0, если

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 6}$, $x_0 = 3$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите производные функций:

Вариант В1:

а) $f(x) = (x+1)^2(x-1)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos 2x$;

в) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант В2:

а) $f(x) - (x-1)^2(x+1)$;

б) $f(x) = \sin\frac{x}{3} - \operatorname{tg}^2 x$;

в) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8}}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, если ее угловой коэффициент равен k:

$f(x) = \sqrt{2x+1}$, $k = \frac{1}{3}$.

$f(x) = \sqrt{1-4x}$, $k = -\frac{2}{3}$.

3

Составьте и решите неравенство:

$f'(x) \le f''(x)$, если

$f'(x) \ge f''(x)$, если

$f(x) = (3 - 2x)^4$.

$f(x) = (2x - 1)^6$.

❹

Материальная точка движется по закону

$x(t) = t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 3$

$x(t) = 1 + 6t + 3t^2 - t^3$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее ускорение минимально.

ускорение точки в момент, когда ее скорость максимальна.

❺

Прямая проходит через точки

$A(-4;-2)$ и $B(0;1)$.

$A(4;6)$ и $B(0;1)$.

Определите, в какой точке она касается графика функции

$g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

С-39. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

Вариант А1 | Вариант А2

❶

Найдите критические точки функции:

Вариант А1:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2$;

б) $f(x) = 2\sin x - x$.

Вариант А2:

а) $f(x) = 12x - x^3$;

б) $f(x) = x + \sqrt{2}\cos x$.

❷

Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.

$f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$.

3

Найдите точки экстремума функции:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

4

Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является

возрастающей, если $g(x) = 2x^5 + 4x^3 + 3x - 7$.

убывающей, если $g(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите критические точки функции:

Б1:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$;

б) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{4}$.

Б2:

а) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;

б) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{2}} - \pi$.

2

Найдите промежутки монотонности функции:

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 4}$.

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 4}$.

3

Найдите точки экстремума функции:

$f(x) = (x + 1)^2(x + 5)^2$.

$f(x) = (x + 3)^2(x - 5)^2$.

4

Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является возрастающей (убывающей), и определите, какой именно:

$g(x) = 4x + \sin^2 x$.

$g(x) = \cos^2 x - 3x$.

Вариант В1 **Вариант В2**

1

Найдите критические точки функции:

Вариант В1:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

б) $f(x) = x^2 - 4|x|$.

Вариант В2:

а) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$;

б) $f(x) = |2x + x^2|$.

2

Найдите промежутки монотонности функции:

Вариант В1: $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$.

Вариант В2: $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.

3

Найдите точки экстремума функции:

Вариант В1: $f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$.

Вариант В2: $f(x) = 35x^7 - x^5 + 1$.

4

Определите, при каких значениях *a* функция $g(x)$ на каждом из промежутков $D(g)$ является

Вариант В1: строго убывающей, если

$g(x) = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} + ax$.

Вариант В2: строго возрастающей, если

$g(x) = \operatorname{tg} 3x - ax$.

С-40*. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 **Вариант 2**

1

Исследуйте функцию на выпуклость:

Вариант 1:

а) $f(x) =$
$= x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 3$;

Вариант 2:

а) $f(x) =$
$= 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$;

б) $f(x)=\dfrac{x^6}{30}-3x^4;$ б) $f(x)=2x^6-5x^4;$

в) $f(x)=\sin 2x-x^2.$ в) $f(x)=\cos 2x+x^2.$

2

Найдите значение a, при котором точка x_0 будет точкой перегиба кривой $g(x)$, если

$g(x)=x^3+ax^2,\ x_0=-1.$ $g(x)=ax^3-6x^2,\ x_0=1.$

3

Изобразите схематически фрагмент графика функции $f(x)$ в окрестности точки разрыва x_0 (для каждого случая приведите пример такой функции), если:

а) $x_0=2,$ $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=4;$ а) $x_0=3,$ $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=6;$

б) $x_0=1,$ $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1,$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=2;$ б) $x_0=2,$ $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1,$ $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=-1;$

в) $x_0=0,$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty,$ $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=0;$ в) $x_0=0,$ $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=0,$ $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=+\infty;$

г) $x_0=-1,$ $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=+\infty,$ $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=-\infty.$ г) $x_0=-2,$ $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to -2+} f(x)=+\infty.$

4

Среди данных функций выберите те, которые имеют вертикальные асимптоты (ответ подтвердите доказательством):

1) $y=\dfrac{x^2-5x-6}{x+1};$ 1) $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-4};$

2) $y = \begin{cases} \sqrt{-x+1}, \text{ если } x \le 1, \\ \dfrac{1}{1+x}, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

3) $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$;

4) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ 3x, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 2x^2 - 7, \text{ если } x \le 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

3) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$;

4) $y = \begin{cases} 2x + 2, \text{ если } x \le -1, \\ -\dfrac{1}{x+2}, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

5

Исследуйте функцию на наличие асимптот:

а) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$;

г) $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{1 - x}}$;

д) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

а) $f(x) = \dfrac{4x^3}{2x^2 + 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 4}}$;

в) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$;

г) $f(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x - 1}}$;

д) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

С-41*. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ (домашняя практическая работа)

Исследуйте функцию и постройте ее график:

Уровень А

1) $y = x^3 - 3x$;

5) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$;

9) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

2) $y = x^3 - 4x^2 + 3;$

3) $y = (x - 2)^4;$

4) $y = 4x^2 - x^4;$

6) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1};$

7) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x};$

8) $y = \dfrac{1}{4 - x^2};$

10) $y = x + \dfrac{4}{x};$

11) $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 9};$

12) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}.$

Уровень Б

1) $y = 0{,}5x^2 - 0{,}2x^5;$

2) $y = x(x - 1)^2;$

3) $y = x^2(x - 2)^2;$

4) $y = -x^2(x + 4)^2;$

5) $y = \dfrac{x}{(x - 1)^2};$

6) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8};$

7) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4};$

8) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 9};$

9) $y = \dfrac{x}{4 - x^2};$

10) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1};$

11) $y = x\sqrt{2 - x};$

12) $y = (x - 1)\sqrt{x}.$

Уровень В

1) $y = 3x^4 - 4x^3 + 2;$

2) $y = (x^2 - 1)^3;$

3) $y = x^2 - \dfrac{2}{x};$

4) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2};$

5) $y = \dfrac{7x}{2x^2 - 3x - 2};$

6) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x};$

7) $y = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^3};$

8) $y = x^2\sqrt{x + 1};$

9) $y = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{x - 1}};$

10) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4};$

11) $y = 2\sin x - \cos 2x;$

12) $y = \sin x - \cos x + x.$

С-42. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вариант А1 / Вариант А2

❶

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

Вариант А1

а) $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$, $[-2; 0]$;

б) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[0; 2]$.

Вариант А2

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;

б) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $[1; 3]$.

❷

Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону

Вариант А1: $h(t) = 8t - t^2$

Вариант А2: $h(t) = 12t - 0,5t^2$

(h — в метрах, t — в секундах).

Определите, в какой момент времени тело достигнет наибольшей высоты и каково будет ее значение в этот момент.

❸

Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы

Вариант А1: их произведение было наибольшим.

Вариант А2: сумма их квадратов была наименьшей.

Вариант Б1 / Вариант Б2

❶

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

Вариант Б1

а) $f(x) = (x+1)^2(x-1)$, $[-2; 0]$;

б) $f(x) = \frac{x^2+8}{x+1}$, $[0; 3]$.

Вариант Б2

а) $f(x) = (1-x^2)(x-1)$, $[0; 2]$;

б) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

2

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = 18t^2 - t^3$ | $x(t) = t^3 - 12t^2 + 60t$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите, в какой момент времени

из промежутка [4; 8] | из промежутка [1; 5]

скорость точки будет наибольшей, и найдите значение скорости в этот момент.

3

Из всех прямоугольников с диагональю 18 см найдите прямоугольник наибольшей площади.

3

Из всех прямоугольников с площадью 25 см^2 найдите прямоугольник с наименьшем периметром.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите множество, на которое функция $f(x)$ отображает данный промежуток:

Вариант В1:

а) $f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right|, [0; 5]$;

б) $f(x) = x + \cos^2 x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Вариант В2:

а) $f(x) = x^2 - 4|x| - 5, [-1; 3]$;

б) $f(x) = x - \sin^2 x, [0; \pi]$.

2

Найдите кратчайшее расстояние от точки A до графика функции $f(x)$, если

$A(1; 0),\ f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$. | $A(-3; 0),\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$.

3

Среди всех равнобедренных треугольников

с боковой стороной a найдите треугольник наибольшей площади.

с данным периметром $2P$ найдите треугольник наибольшей площади.

С-43*. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

1

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, проходящей через точку M, не принадлежащую данному графику, если

Вариант 1: $f(x) = -x^2 - 5x - 6,\ M(-1;-1).$

Вариант 2: $f(x) = x^2 - 4,\ M(2;-1).$

2

Найдите уравнение общей касательной к графикам функций:

Вариант 1: $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x - 11.$

Вариант 2: $f(x) - x^2 + 4x + 8,$ $g(x) = x^2 + 8x + 4.$

3

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, перпендикулярной к прямой $g(x)$, если:

Вариант 1: $f(x) = x^2 + 2x,\ g(x) - x - 7.$

Вариант 2: $f(x) = -x^2 - 3,\ g(x) = x + 3.$

4

К графику функции $f(x)$ проведены две касательные в точках x_1 и x_2. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и

Вариант 1: осью абсцисс, если $f(x) = 4x - x^2,\ x_1 = 1,\ x_2 = 4.$

Вариант 2: осью ординат, если $f(x) = -8x - x^2,\ x_1 = -6,\ x_2 = 1.$

5

Вариант 1: Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника с заданной площадью, в который можно вписать

5

Вариант 2: В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r. Каким должен быть угол при основании, чтобы окружность наибольшего радиуса.

площадь треугольника была наименьшей?

6

Определите количество корней уравнения

$3x - x^3 - 1 = 0.$

$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$

К-8. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант А1

1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3;$

б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 4}.$

2

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = x^3 - 3x^2.$

3

Найдите число,

которое в сумме со своим квадратом давало бы наименьшую величину.

Вариант А2

1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = 2 + 18x^2 - x^4;$

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}.$

2

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x.$

3

Найдите число,

разность которого со своим квадратом была бы наибольшей.

Вариант Б1

1

Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = \dfrac{(x - 2)^2}{x + 1};$

Вариант Б2

1

Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = \dfrac{(x + 2)^2}{x - 1};$

б) $f(x)=\sqrt{x}-x$.

б) $f(x)=x-4\sqrt{x}$.

❷

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y=\frac{4x}{1+x^2}.$$

$$y=\frac{4}{x^2+1}.$$

❸

Представьте

число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба одного из них на удвоенное второе было наибольшим.

число 20 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на куб другого было наибольшим.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите точки экстремума функции:

Вариант В1:

а) $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$;

б) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$.

Вариант В2:

а) $f(x)=x\sqrt{2-x^2}$;

б) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$.

❷

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$$y=\frac{4x^2+1}{x}.$$

$$y=-\frac{9x^2+1}{x}.$$

❸

Известно, что

наименьшее значение функции $g(x)=3x^2-x^3$ на промежутке $[-1;a]$ равно нулю. При каком максимальном значении a выполняется это условие?

наибольшее значение функции $g(x)=x^4-2x^2+1$ на промежутке $[a;0]$ равно 1. При каком минимальном значении a выполняется это условие?

С-44. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Докажите, что функция F является первообразной для функции f на R:

Вариант А1:

$F(x) = x^2 - \sin 2x - 1,$
$f(x) = 2x - 2\cos 2x.$

Вариант А2:

$F(x) = -\cos\dfrac{x}{2} - x^3 + 4,$

$f(x) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} - 3x^2.$

2

Найдите общий вид первообразных для функции:

Вариант А1:

а) $f(x) = x^2 - \sin x;$

б) $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x^3}.$

Вариант А2:

а) $f(x) = 4x^3 + \cos x;$

б) $f(x) = \dfrac{4}{x^5} - 3.$

3

Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в указанной точке:

Вариант А1:

а) $f(x) = (x - 8)^3$, $F(8) = 1;$

б) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $F(9) = 9.$

Вариант А2:

а) $f(x) = (x + 4)^2$, $F(-4) = 3;$

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $F(4) = 4.$

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Определите, является ли функция F первообразной для функции f на R:

Вариант Б1:

$F(x) = 2x^4 + \cos^2 x - 3,$
$f(x) = 8x^3 + \sin 2x - 3x.$

Вариант Б2:

$F(x) = 3x^5 - \sin^2 x + 2,$
$f(x) = 15x^4 - \sin 2x.$

❷

Найдите общий вид первообразных для функций:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^5} - (1 - 2x)^3$;

б) $f(x) = x + \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1$.

а) $f(x) = (3x + 2)^4 - \dfrac{1}{x^6}$;

б) $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\sin^2 x} + 6$.

❸

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A:

а) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2$, $A(-1;0)$;

б) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 2\cos\dfrac{x}{2}$, $A(2\pi;2\pi)$.

а) $f(x) = 4x^3 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $A(2;0)$;

б) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$, $A\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите функцию f, для которой функция F является одной из первообразных на R:

$F(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) - \operatorname{arcctg} x + 2x$.

$F(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{x}{4}\right) + \operatorname{arctg} x - 3x^2$.

❷

Найдите неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\left(\frac{8}{\sin^2 x} + 6\cos^2\frac{x}{6}\right)dx$;

б) $\displaystyle\int\left(3 - \frac{2}{(2x+5)^2}\right)dx$.

а) $\displaystyle\int\left(\frac{8}{\cos^2 x} - 8\sin^2 2x\right)dx$;

б) $\displaystyle\int\left(\frac{6}{(3x-1)^3} - 5\right)dx$.

❸

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A:

Вариант А1:

а) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5-2x}}+4x,\ A(2;6);$

б) $f(x)=\sin x\sin 5x,\ A\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{24}\right).$

Вариант А2:

а) $f(x)=6x^2-\dfrac{1}{6\sqrt{2-\dfrac{x}{3}}},\ A(3;55);$

б) $f(x)=\cos x\cos 5x,\ A\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{24}\right).$

С-45. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вариант А1

❶

Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^3 (x^2+4x-1)dx;$

б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)dx;$

в) $\int\limits_0^3\left(\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}+3x^2\right)dx;$

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}dx.$

❷

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=x^2-1,\ y=3.$

Вариант А2

❶

а) $\int\limits_0^2\left(3x^2-2x+4\right)dx;$

б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\dfrac{2}{x^3}+8\right)dx;$

в) $\int\limits_3^6\left(4x-\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)dx;$

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}3\sin 3x dx.$

❷

$y=5-x^2,\ y=1.$

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Вычислите интегралы:

Вариант Б1

а) $\int\limits_1^2 \left(4x + 3 - \frac{4}{x^2}\right)dx$;

б) $\int\limits_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + 8(2x-5)^3\right)dx$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x - 1}$;

г) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos\frac{x}{8} - \sin\frac{x}{8}\right)^2 dx$.

Вариант Б2

а) $\int\limits_1^2 \left(\frac{6}{x^3} + 9x^2 - 5\right)dx$;

б) $\int\limits_4^{16} \left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{x^2} + \left(\frac{x}{4} - 3\right)^3\right)dx$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$.

❷

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант Б1

$y = x^2 - 4x + 4$,
$y = 4 - x$.

Вариант Б2

$y = x^2 + 4x + 4$,
$y = x + 4$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вычислите интегралы:

Вариант В1

а) $\int\limits_1^3 \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{x^2} dx$;

б) $\int\limits_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{11 - 2x}} + 1\right)dx$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{8}\right)dx$;

Вариант В2

а) $\int\limits_1^2 \frac{2x^5 - x^3 - 8}{x^3} dx$;

б) $\int\limits_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} \cdot 2\right)dx$;

в) $\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4}\right)dx$;

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^2\, x dx.$

г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x dx.$

❷

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 4x - x^2,\ y = x,\ y = 0.$

$y = x^2 + 4x,\ y = x,\ y = 0.$

С-46. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ И ИНТЕГРАЛА

Вариант А1 / Вариант А2

❶

Точка движется прямолинейно со скоростью

$v(t) = 6t^2 - 4t - 1$.

$v(t) = 4t^3 + 2t - 3$.

Найдите закон движения точки, если

в момент времени $t = 1$ с координата точки была равна 4 м.

в момент времени $t = 2$ с координата точки была равна 10 м.

❷

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x},\ x = 4,\ y = 0.$

$y = \sqrt{x},\ x = 9,\ y = 0.$

❸

Найдите работу, которую необходимо затратить

на растяжение пружины на 2 см, если сила в 2 Н растягивает ее на 4 см.

на растяжение пружины на 5 см, если сила в 4 Н растягивает ее на 10 см.

4

Докажите с помощью определенного интеграла

формулу объема цилиндра $V = \pi R^2 H$, где R – радиус цилиндра, Н – его высота.

формулу объема равностороннего цилиндра $V = 2\pi R^3$, где R – радиус цилиндра.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Точка движется прямолинейно с ускорением

$a(t) = \cos\frac{t}{2}$.

$a(t) = -\sin\frac{t}{3}$.

Найдите закон движения точки, если

в момент времени $t = \frac{2\pi}{3}$ с ее скорость равна $\sqrt{3}$ м/с, а координата равна 2 м.

в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ с ее скорость равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м/с, а координата равна 1,5 м.

2

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{x}$, $y = 0{,}5x$.

$y = \sqrt{-x}$, $y = x^2$.

3

Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону

$\rho(l) = 8l + 1$

$\rho(l) = 32l + 2$

(плотность измеряется в кг/м).

Найдите массу стержня, если его длина

равна 50 см.

равна 25 см.

4

Выведите с помощью определенного интеграла

формулу объема конуса с радиусом R и высотой H.

формулу объема усеченного конуса с радиусами R и r и высотой H.

Вариант В1

Вариант В2

1

Тело массой m движется прямолинейно под действием силы $F(t)$ (F — в ньютонах). Найдите закон его движения, если

В1: $m = 2$ кг, $F(t) = 12t - 8$, и в момент времени $t = 3$ с скорость тела равна 10 м/с, а координата 21 м.

В2: $m = 3$ кг, $F(t) = 36 - 18t$, и в момент времени $t = 2$ с скорость тела равна 14 м/с, а координата 20 м.

2

Найдите объем тела, ограниченного поверхностями:

В1: $x^2 + y^2 = 3z^2 + 1$, $z = 1$, $z = -1$.

В2: $x^2 + y^2 = 1 + 6z^2$, $z = 0$, $z = 1$.

3

Найдите работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, если

В1: резервуар имеет форму цилиндра радиуса 1 м и глубину 4 м.

В2: резервуар имеет глубину 2 м, а его поперечное сечение — квадрат со стороной 1 м.

4

Выведите с помощью определенного интеграла

В1: формулу объема пирамиды.

В2: формулу объема усеченной пирамиды.

С-47*. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 **Вариант 2**

1

Найдите неопределенные интегралы, используя в решении указанные способы:

— преобразование подынтегрального выражения:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\int \frac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + 1} dx;$	а) $\int \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} dx;$
б) $\int \frac{dx}{1 - \cos x};$	б) $\int \frac{dx}{1 + \cos x};$
в) $\int \sin^4 \frac{x}{8} dx;$	в) $\int \cos^4 2x dx;$
г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$	г) $\int \frac{dx}{-\sqrt{-2x - x^2}};$
д) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10};$	д) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5};$

— замена переменной:

Вариант 1	Вариант 2
е) $\int (x^3 - 1)^4 x^2 dx;$	е) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3};$
ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}};$	ж) $\int \frac{dx}{4x^2 + 25};$
з) $\int \frac{\mathrm{tg} x}{\cos x} dx;$	з) $\int \frac{\mathrm{ctg} x}{\sin^2 x} dx;$
и) $\int \cos^3 x dx;$	и) $\int \sin^3 x dx;$
к) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x - 1}};$	к) $\int x\sqrt{x - 4} dx;$

— интегрирование по частям:

л) $\int x\cos 2x\,dx$;

л) $\int x\sin\frac{x}{3}\,dx$;

м) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{9+16x}}$;

м) $\int(2x+1)^4 x\,dx$;

н) $\int\arcsin x\,dx$.

н) $\int\arccos x\,dx$.

❷

Используя геометрические или аналитические рассуждения, вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{-3}^{0}\sqrt{9-x^2}\,dx$;

а) $\int\limits_{6}^{6}-\sqrt{36-x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{1}(|x+1|+|x|)\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{2}(|x|+|x-1|)\,dx$;

в) $\int\limits_{-2}^{2}x^4\sin^5 x\,dx$.

в) $\int\limits_{1}^{1}x\sqrt{4-x^4}\,dx$.

❸

Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=4-x^2,\ y=3x,\ y=-3x$;

а) $y=2x\quad x^2,\ y=-x,\ y=x-2$;

б) $y=\sin x,\ y=\cos x,$

$$0\le x\le\frac{\pi}{2};$$

б) $y=\sin x,\ y=-\sin x,$

$$0\le x\le\frac{3\pi}{2};$$

в) $y=|x^2-2x|,\ y=11-|x-1|$;

в) $y=\frac{1}{4}|x^2-4|,\ y=7-|x|$;

г) $y=\frac{8}{x^2},\ y=x,\ y=4,\ x=0$.

г) $y=-\frac{4}{x^2},\ y=-4,\ y=-\frac{1}{2}x,\ x=0$.

❹

Найдите все значения a, при которых выполняется условие:

а) $\int\limits_0^a (2x-5)dx \le 6$;

б) $\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x)dx = \frac{1}{3}$;

в) функция $f(a) = \int\limits_a^{2a} (2x+1)dx$ принимает наименьшее значение.

а) $\int\limits_0^a (4-2x)dx \ge 3$;

б) $\int\limits_a^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)dx = \frac{1}{3}$;

в) функция $f(a) = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} (1-4x)dx$ принимает наибольшее значение.

К-9. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Вариант А1

1

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3\sin x$.

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $A(-1;0)$;

б) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $A\left(\frac{\pi}{3};1\right)$.

Вариант А2

1

а) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}} - x^2$;

б) $f(x) = 2\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$.

2

а) $f(x) = 4 + 2x - 6x^2$, $A(-2;0)$;

б) $f(x) = \sin 3x$, $A\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3

Вычислите интегралы:

а) $\int_1^2 (2x - \frac{1}{x^2})dx$;

б) $\int_2^0 (0,5x + 1)^5 dx$.

а) $\int_1^2 (3x^2 - \frac{2}{x^3})dx$;

б) $\int_{-1}^0 (2x + 1)^4 dx$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 + 2,\ y = 4 - x$.

$y = x^2 + 2,\ y = 4 + x$.

5

Известно, что $\int_a^b f(x)dx = 2$. **Найдите:**

$2\int_a^a f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$.

$\int_b^b f(x)dx - 3\int_b^a f(x)dx$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите общий вид первообразных для функции:

а) $f(x) = \frac{1}{3\sin^2 x} + \frac{1}{x^3}$;

б) $f(x) = 1 + \cos\frac{x}{4}$.

а) $f(x) = -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{5\cos^2 x}$;

б) $f(x) = \sin 5x - x$.

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку:

а) $f(x) = 2x + \frac{2}{\sqrt{1-x}}$, $A(-3; 1)$;

а) $f(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$, $A(-4; 0)$;

б) $f(x) = 6\sin 3x$,

$A\left(\dfrac{\pi}{9};0\right)$.

б) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{4}$,

$A\left(\dfrac{2\pi}{3};1\right)$.

3

Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} (1-2\sin^2 2x)dx$.

а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(2-0,5x)^2}$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x \cos 3x dx$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = -x^2 - 4x,\ y = x + 4$.

$y = 4x - x^2,\ y = 4 - x$.

5

Точка движется вдоль прямой со скоростью

$v(t) = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{t+2}}$

$v(t) = 4 - \dfrac{2}{\sqrt{t-1}}$

(v — в метрах за секунду, t — в секундах).

Найдите путь, пройденный точкой

в промежутке времени $[2;7]$.

в промежутке времени $[2;5]$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите интегралы:

а) $\int (x-1)(x+1)(x+2)dx$;

б) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$.

а) $\int (x+1)(x+2)(x-2)dx$;

б) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$.

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, обладающую указанными свойствами:

а) график первообразной имеет только одну общую точку с прямой y, если

$f(x) = 4x + 8,\ y = 3;$ $f(x) = 3 - x,\ y = 7;$

б) график первообразной проходит через точки A и B, если

$f'(x) = \dfrac{16}{x^3},\ A(1;10),\ B(4;-2).$ $f'(x) = \dfrac{54}{x^4},\ A(-1;4),\ B(3;4).$

3

Вычислите интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{9 - 4x^2 + \sqrt{3 - 2x}}{3 - 2x}\,dx;$ а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{9x^2 - 1 - \sqrt{3x + 1}}{3x + 1}\,dx;$

б) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} - 2\sin 2x\right)dx.$ б) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\sin 3x\right)dx.$

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \dfrac{4}{x^2},\ y = -3x + 7.$ $y = \dfrac{9}{x^2},\ y = -4x + 13.$

5

Подберите функцию $f(x)$, которая при любом значении a удовлетворяла бы равенству:

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 2a^2 - 3a.$ $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 4a - a^2.$

С-48. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

Найдите производные функций:

Вариант А1:

а) $f(x) = 4^x + 4x^3$;

б) $f(x) = 2e^x - e^{-2x}$.

Вариант А2:

а) $f(x) = 3x^2 - 2^x$;

б) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

Вариант А1: $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$.

Вариант А2: $f(x) = e^{-4x}$, $x_0 = 0$.

3

Найдите критические точки функции:

Вариант А1: $f(x) = x^2e^x$.

Вариант А2: $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

4

Вычислите интегралы:

Вариант А1:

а) $\int_0^1 3^x\,dx$;

б) $\int_2^4 0,5e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

Вариант А2:

а) $\int_1^2 2^x\,dx$;

б) $\int_3^6 \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\,dx$.

5

Найдите две различные первообразные для функции $g(x)$ и укажите, график какой из них лежит выше, если:

Вариант А1: $g(x) = e^{7-3x} - 0,5^{-x}$.

Вариант А2: $g(x) = e^{4x-3} + 0,1^{-x}$.

Вариант Б1 Вариант Б2

1

Найдите производные функций:

Вариант Б1:

а) $f(x) = 3e^{x} \cdot 3^{x}$;

б) $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + 0,5^{-x}$.

Вариант Б2:

а) $f(x) = 2^{x} + 2e^{x}$;

б) $f(x) = e^{x^2 \quad x} \quad 0,2^{-x}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

Вариант Б1: $f(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = 0$.

Вариант Б2: $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3

Найдите промежутки монотонности функции:

Вариант Б1: $f(x) = xe^{1-2x^2}$.

Вариант Б2: $f(x) = x^2e^{2x-1}$.

4

Вычислите интегралы:

Вариант Б1:

а) $\int\limits_0^1 (e^{-x} + 1)^2\,dx$;

б) $\int\limits_2^1 10^x 2^{\quad x}\,dx$.

Вариант Б2:

а) $\int\limits_0^1 (e^{-x} - 1)^2\,dx$;

б) $\int\limits_{-3}^{-1} 3^{-x}6^{x}\,dx$.

5

Для функции $f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную, которая при любых значениях x

Вариант Б1: положительна, если $f(x) = e^{x}(xe^{-x} - e^{5-3x})$.

Вариант Б2: отрицательна, если $f(x) = e^{-x}(e^{4-x} \quad x^3e^{x})$.

Вариант В1 Вариант В2

1

Найдите производные функций:

а) $f(x) = \sin e^{\sqrt{x}} - 2^{2x \cdot x^2}$;

б) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}(1 + x^2)$.

а) $f(x) = \cos e^{x^2 - x} + 3^{\sqrt{2x+1}}$;

б) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x} \cos^2 x$.

❷

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке, в которой угловой коэффициент равен k:

$f(x) = e^{3x\ \ 2}$, $k = 3$.

$f(x) = e^{5-2x}$, $k \quad -2$.

❸

Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 e^x}.$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

❹

Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x} dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{2^x + 3^x}{6^{x+1}} dx$.

а) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$;

б) $\int\limits_0^1 \frac{2^{x-1} + 5^{x-1}}{10^x} dx$.

❺

Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и определите, при каких значениях C первообразная при любом значении x

отрицательна, если

$f(x) = (5^{-x} - 0{,}1^{-x}) \times$

$\times (5^{-x} + 0{,}1^{-x})$.

положительна, если

$f(x) = (0{,}5^{-x} - 3^{-x}) \times$

$\times (0{,}5^{-x} + 3^{-x})$.

С-49. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Вариант А1	**Вариант А2**

1

Найдите производные функций:

Вариант А1	Вариант А2
а) $f(x) = 2\ln(x+1)$;	а) $f(x) = 3\ln(x-2)$;
б) $f(x) = \lg x + 1$.	б) $f(x) = 2 - \lg x$.

2

Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

Вариант А1	Вариант А2
$f(x) = \ln(x^2 + 4)$.	$f(x) = \ln(1 + x^4)$.

3

Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке:

Вариант А1	Вариант А2
а) $f(x) = \frac{4}{x}$ на $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$;	а) $f(x) = -\frac{2}{x}$ на $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$;
б) $f(x) = \frac{4}{2x-1}$ на $[0,5;+\infty)$.	б) $f(x) = \frac{3}{5+3x}$ на $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right)$.

4

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

Вариант А1	Вариант А2
$y = \frac{6}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$.	$y = \frac{4}{x},\ y = 0,\ x = e,\ x = e^2$.

5

Определите, при каких значениях x верно равенство:

Вариант А1	Вариант А2
$(\ln(x^2 - x - 2))' = \frac{2x-1}{x^2 - x - 2}$.	$(\ln(3 - 2x - x^2))' = -\frac{2x+2}{3-2x-x^2}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите производные функций:

Вариант Б1:

а) $f(x) = -3\ln\frac{x+1}{3}$;

б) $f(x) = \log_2 \cos x$.

Вариант Б2:

а) $f(x) = 4\ln\frac{x+3}{2}$;

б) $f(x) = \log_3 \sin x$.

2

Найдите точки экстремума функции:

Вариант Б1: $f(x) = \ln x^3 + \frac{6}{x}$.

Вариант Б2: $f(x) = \ln\frac{1}{x} - \frac{3}{x}$.

3

Вычислите интегралы:

Вариант Б1:

а) $\int\limits_e^{e^2} \frac{2}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_0^6 \frac{dx}{0,5x+1}$.

Вариант Б2:

а) $\int\limits_1^{e^3} -\frac{3}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_1^3 \frac{3}{3x-2}\,dx$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант Б1: $y = \frac{2}{x}$, $y = 2$, $x = \frac{1}{e^2}$.

Вариант Б2: $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = \frac{1}{e}$.

5

Определите, совпадает ли область определения функции $g(x)$ с областью определения

Вариант Б1: ее производной, если $g(x) = \ln(9x^2 + 6x + 1)$.

Вариант Б2: ее первообразной, если $g(x) = \frac{1}{8-x} + \frac{1}{\sqrt{4-0,5x}}$.

Вариант B1	Вариант B2

1

Найдите производные функций:

Вариант B1	Вариант B2
а) $f(x) = \lg\dfrac{x}{x+2}$;	а) $f(x) = \ln\dfrac{3x^2+2}{x^2+1}$;
б) $f(x) = x^{\ln x}$.	б) $f(x) = \log_x e^x$.

2

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

Вариант B1	Вариант B2
$f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$.	$f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$.

3

Вычислите интегралы:

Вариант B1	Вариант B2
а) $\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{3-2x}$;	а) $\int\limits_2^8 \dfrac{dx}{0,5x-5}$;
б) $\int\limits_0^{\sqrt{e-1}} \dfrac{2x\,dx}{x^2+1}$.	б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \dfrac{2x\,dx}{x^2-2}$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

Вариант B1	Вариант B2
$y = \dfrac{5}{x}$, $y = 6 - x$.	$y = \dfrac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

5

Найдите все значения a, при которых область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения ее производной, если

Вариант B1	Вариант B2
$g(x) = \ln(ax^2 - (a+1)x + 2a - 1)$.	$g(x) = \ln(ax^2 + 4x + a + 3)$.

С-50. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Вариант А1 | Вариант А2

1

Найдите значение производной функции $f(x)$ в указанной точке x_0:

Вариант А1	Вариант А2
а) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}},\ x_0 = 8;$	а) $f(x) = 2x^{1,5},\ x_0 = 9;$
б) $f(x) = x^{-\sqrt{3}},\ x_0 = 1.$	б) $f(x) = x^{\lg 2},\ x_0 = 1.$

2

Постройте схематически график функции на $(0;\infty)$:

Вариант А1	Вариант А2
а) $y = x^{\sqrt{5}-2};$	а) $y = x^{1\ \sqrt{2}};$
б) $y = x^{\frac{e}{2}}.$	б) $y = x^{\frac{\pi}{3}}.$

3

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

Вариант А1	Вариант А2
$f(x) = x^{-3},\ [1;3].$	$f(x) = \sqrt[3]{x},\ [1;8].$

4

Вычислите интегралы:

Вариант А1	Вариант А2
а) $\int\limits_1^8 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_4^9 \sqrt{x}dx.$	а) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int\limits_8^{27} \sqrt[3]{x}dx.$

5

Даны положительные числа a и b. Сравните $f(a)$ и $f(b)$, если

Вариант А1	Вариант А2
$a > b,\ f(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}.$	$a < b,\ f(x) = \frac{x^{\sqrt{3}}}{x}.$

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Найдите $f'(x_0)$, если:

Вариант Б1:

а) $f(x) = -x^{\pi}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = (16x)^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$.

Вариант Б2:

а) $f(x) = 2x^{\frac{e}{2}}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \left(\frac{x}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = \frac{8}{27}$.

❷

Постройте схематически график функции:

Вариант Б1:

а) $y = x^{2\sin\frac{\pi}{4}}$;

б) $y = x^{\ln 0,5}$.

Вариант Б2:

а) $y = x^{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}}$;

б) $y = x^{\ln 2}$.

❸

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

Вариант Б1:

$f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$, $[0;8]$.

Вариант Б2:

$f(x) = 4x^{\frac{3}{4}} - 3x$, $[0;16]$.

❹

Вычислите интегралы:

Вариант Б1:

а) $\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

б) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{3x+1}\,dx$.

Вариант Б2:

а) $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$;

б) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{7x+1}\,dx$.

❺

Дана функция $f(x) = x^{\alpha}$ и положительные числа a и b. Сравните $f(a)$ и $f(b)$, если

Вариант Б1:

$a > b$, $0 < \alpha < 1$.

Вариант Б2:

$a < b$, $\alpha < 0$.

Вариант В1 | Вариант В2

❶

Найдите $f'(x_0)$, если:

В1:

а) $f(x)=\sqrt[5]{x\sqrt{x}},\ x_0=1;$

б) $f(x)=(10x)^{\lg 30},\ x_0=10.$

В2:

а) $f(x)=\sqrt{x\sqrt[3]{x}},\ x_0=1;$

б) $f(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\log_2 6},\ x_0=2.$

❷

Постройте схематически график функции:

В1:

а) $y=x^{\frac{1}{\ln 3}}$; б) $y=\left(\dfrac{x}{3}\right)^{2\sin\frac{\pi}{5}}$.

В2:

а) $y=x^{\frac{1}{\lg 5}}$; б) $y=(4x)^{\cos\frac{3\pi}{5}}$.

❸

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

В1:

$f(x)=\ln x-\sqrt[3]{x},\ [1;64].$

В2:

$f(x)=\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{2}\ln x,\ [1;81].$

❹

Вычислите интегралы:

В1:

а) $\displaystyle\int_1^{81}\frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\,dx;$

б) $\displaystyle\int_1^{15}\frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}}.$

В2:

а) $\displaystyle\int_1^{64}\frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}\,dx;$

б) $\displaystyle\int_3^{19}\frac{dx}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-3}}.$

❺

Дана функция $f(x)=x^{\alpha}$ и положительные числа a и b, причем $a>b$. Сравните α с нулем и единицей, если

В1:

$f(a)>f(b),\ f'(a)<f'(b).$

В2:

$f(a)>f(b),\ f'(a)>f'(b).$

С-51*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

❶

Исследуйте функции и постройте их графики:

Вариант 1	Вариант 2
а) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$;	а) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;
б) $f(x) = xe^{-x^2}$;	б) $f(x) = x^2 e^{-x}$;
в) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;	в) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;
г) $f(x) = \ln \sin x$;	г) $f(x) = \ln \cos x$;
д) $f(x) = x^2 \ln^2 x$;	д) $f(x) = x \ln x$;
е) $f(x) = \log_2(4x - x^2)$.	е) $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

❷

Найдите неопределенные интегралы, используя при решении указанные способы:

— замена переменной:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\int xe^{x^2} dx$;	а) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;
б) $\int \frac{dx}{x \ln x}$;	б) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$;
в) $\int \mathrm{ctg} x dx$;	в) $\int \mathrm{tg} x dx$;
г) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$;	г) $\int \frac{2x dx}{x^2 + 3}$;
д) $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x}$;	д) $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x}$;
е) $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} dx$;	е) $\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 2} dx$;

— интегрирование по частям:

ж) $\int xe^{2x}dx$;

з) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

и) $\int \sin x \ln \cos x dx$;

ж) $\int xe^{-x}dx$;

з) $\int x^2 \ln x dx$;

и) $\int \cos x \ln \sin x dx$;

— комбинирование предыдущих методов:

к) $\int \arcsin x dx$;

л) $\int \frac{2x^3 dx}{\cos^2 x^2}$;

м*) $\int e^x \cos x dx$.

к) $\int \arccos x dx$;

л) $\int \frac{2x^3 dx}{\sin^2 x^2}$;

м*) $\int \sin(\ln x) dx$.

❸

Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным условиям:

а) $y' = 3y,\ y(0) = 2$;

б) $y'' = -4y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2\sqrt{3}$;

в) $y' = \frac{y}{1-x},\ y(0) = 3$;

г) $y' = 4x^3 y,\ y(0) = -2$.

а) $y' = -4y,\ y(0) = 3$;

б) $y'' = -3y,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6$;

в) $y' = \frac{y}{1+x},\ y(0) = 4$;

г) $y' = 3x^2 y,\ y(0) = -1$.

К-10. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ, ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

Вариант А1

❶

Найдите производные функций:

а) $f(x) = e^x + x^{2,5}$;

Вариант А2

а) $f(x) = x^{1,2} - e^x$;

б) $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 4^x$. б) $f(x) = \ln(8 - 3x) + 8^x$.

❷

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = e^{x^2 - 2x}$, $[0; 2]$. $f(x) = e^{4x - x^2}$, $[0; 4]$.

❸

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A:

$f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$, $A(-3; 1)$. $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$, $A(2; 3)$.

❹

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 9$. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1$, $x = 8$.

❺

Для функции

$g(x) = e^{2x} + \dfrac{1}{2x + 1}$ $g(x) = e^{3x} - \dfrac{1}{3x + 1}$

найдите первообразную, которая в точке $x_0 = 0$ принимала бы такое же значение, как и производная $g(x)$ в этой точке.

Вариант Б1 Вариант Б2

❶

Найдите производные функций:

а) $f(x) = e^{x^2 - 1} + \log_3 x$; а) $f(x) = \log_2 x - e^{4 - x^2}$;

б) $f(x) = x^{\ln 2e} - \ln \dfrac{1}{x}$. б) $f(x) = x^{\ln 3e} + \ln \sqrt{x}$.

❷

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = x^2e^{2x}$, $[-2;1]$.

$f(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}}$, $[-1;2]$.

❸

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой

пересекает ось Ox в точке с абсциссой 1, если $f(x) = 2x - \dfrac{2}{4x\ \ 5}$.

пересекает ось Oy в точке с ординатой 3, если $f(x) = 3x^2 + \dfrac{6}{3x - 1}$.

❹

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{2x}$, $y = x$.

$y = \sqrt{3x}$, $y - x$.

❺

Для функции $g(x)$ найдите первообразную, график которой пересекается с графиком производной этой функции в точке x_0, если

$g(x) = (3x-2)^{\frac{1}{3}}$, $x_0 = 1$.

$g(x) = (4x+5)^{\frac{1}{4}}$, $x_0 = \ 1$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите производные функций:

В1:

а) $f(x) = e^{\sin^3 x} - \lg\cos x$;

б) $f(x) = 2^{\sqrt[4]{x}} + \ln^2(x^2\ \ 1)$.

В2:

а) $f(x) = e^{\cos^2 x} + \log_2 \sin x$;

б) $f(x) = 3^{\sqrt[3]{x}} - \ln^3(9 - x^2)$.

❷

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = \ln\dfrac{2-4x}{2+x^2}$, $[-4;0]$.

$f(x) = \ln\dfrac{2x-1}{x^2+2}$, $[1;5]$.

3

Для функции

$f(x) = \dfrac{6}{7-3x}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{2}{0,5x-1}$

найдите первообразную, график которой проходит через точку *M*, если *M* – точка пересечения прямых в графическом решении уравнения

$xy - 3x - 2y + 6 = 0.$ $\qquad$ $xy + 2x - 4y - 8 = 0.$

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x+1},\ y = x + 1.$ $\qquad$ $y = 2\sqrt{x-1},\ y = x - 1.$

5

Для функции $g(x)$ найдите первообразную, наименьшее значение которой равно y_0:

$g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} + 6x^5e^{x^6},\ y_0 = 3.$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{4x^3}{x^4+1} + 2xe^{x^2},\ y_0 = 4.$

Комплексные числа

С-52. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вариант А1	Вариант А2

1

Даны комплексные числа

Вариант А1	Вариант А2
$z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 4i - 2$.	$z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -6 + 4i$.

Найдите:

а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите

Вариант А1	Вариант А2
$\operatorname{Re} z$;	$\operatorname{Im} z$;

б) разность $z = z_1 - z_2$ и укажите комплексное число, которое

Вариант А1	Вариант А2
сопряжено с z;	противоположно z;

в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$;

г) частное $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

2

По формуле разности квадратов разложите на множители:

Вариант А1	Вариант А2
$9x^2 + 25$.	$4x^2 + 1$.

3

Вычислите:

Вариант А1	Вариант А2
а) $(1 + 3i)(1 - 3i) - 2$;	а) $(5 - 2i)(5 + 2i) + 1$;
б) $(2 - i)^2 + i(3i + 4)$;	б) $(3 + i)^2 - 3i(2 + 3i)$;
в) $i^{16} + \dfrac{2}{i^6}$.	в) $i^{10} - \dfrac{3}{i^8}$.

4

Решите уравнения:

Вариант А1	Вариант А2
а) $2x^2 + 8 = 0$;	а) $3x^2 + 27 = 0$;

б) $3ix = 9 - 6i$.

б) $2ix = -10 + 8i$.

5

Найдите *x* и *y* из равенства

$(-2 - i)x + 4iy = 6 + 7i$.

$3x + (5 - 2i)y = 1 + 2i$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Даны комплексные числа

$z_1 = 15 - 5i,\ z_2 = 1 + 2i$.

$z_1 = 5 + 10i,\ z_2 = 2 - i$.

Найдите:

а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите ее вещественную и мнимую часть;

б) разность $z = z_1 - z_2$ и укажите комплексные числа, сопряженные и противоположные к z;

в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$;

г) частное $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

2

Разложите на множители по формуле разности квадратов ($a > 0$):

$a + 16$.

$a + 49$.

3

Вычислите:

а) $(2 - 3i)^2 + (1 + i\sqrt{2})(1 - i\sqrt{2})$;

б) $\dfrac{8 + 6i}{(1 - i)^2} - 2i(2 - i)$;

в) $(2i)^6 + \dfrac{32}{i^{20}}$.

а) $(3 + 2i)^2 - (1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})$;

б) $\dfrac{6 - 4i}{(1 + i)^2} + 3i(1 - 2i)$;

в) $10i^{18} + \left(\dfrac{2}{i}\right)^4$.

4

Решите уравнения:

а) $x^2 - 2x + 5 = 0$;

а) $x^2 + 4x + 13 = 0$;

б) $(1+i)x = 6-2i$.

б) $(1-i)x = 8+6i$.

5

Найдите x и y из равенства:

$(5+3i)x+(2-i)y = -1-5i$.

$(4-3i)x+(1+2i)y = 2-7i$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны комплексные числа $z_1 - 2i$ и $z_2 - 2i$, где z_1 и z_2 — корни уравнения

В1: $z^2+4z+5=0$.

В2: $z^2-2z+2=0$.

Найдите:

а) число, сопряженное к их сумме;
б) число, противоположное их разности;
в) произведение данных чисел;
г) частное данных чисел и обратное ему число.

2

Разложите двумя способами на комплексные множители по формуле разности квадратов

В1: число 17.

В2: число 10.

3

Вычислите:

В1:

а) $(2+i)^3-(1-i)^2$;

б) $\dfrac{1-i}{2i^{17}+i^{19}} + \dfrac{2i}{i-1}$;

в) $1+i^3+i^6+\ldots+i^{90}$.

В2:

а) $(2-i)^3+(1+2i)^2$;

б) $\dfrac{1+i}{i^{21}-2i^{25}} + \dfrac{2i}{1+i}$;

в) $1+i^5+i^{10}+\ldots+i^{100}$.

4

Решите уравнения:

В1:

а) $x^4+13x^2+36=0$;

б) $(1+2i)(1-i)x = 20-30i$.

В2:

а) $x^4+20x^2+64=0$;

б) $(1-2i)(1+i)x = -40+50i$.

5

Найдите комплексное число z, удовлетворяющее равенству:

$i + \operatorname{Re} z = iz.$

$i \cdot \operatorname{Im} z + 1 = iz.$

С-53. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вариант А1

1

Найдите модуль и главный аргумент комплексного числа:

а) $z = 4 + 4i$;

б) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

2

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $(4 + i) + (-1 + 3i)$;

б) $(1 - 3i) - (-2 - i).$

3

Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Im} z = -2$;

б) $|z| = 1.$

4

Решите уравнение:

$|z| = z - 3i + 1.$

Вариант А2

1

а) $z = 3 - 3i$;

б) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

2

а) $(3 - 2i) + (1 + 3i)$;

б) $(5 + i) - (3 - 2i).$

3

а) $\operatorname{Re} z = 3$;

б) $\operatorname{Arg} z - \frac{\pi}{4}.$

4

$|z| - z + 5i + 1.$

Вариант Б1 / Вариант Б2

❶

Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

Вариант Б1:

а) $z = (1 - 2i)^2$;

б) $z = \frac{2}{1+i}$.

Вариант Б2:

а) $z = (2 + i)^2$;

б) $z = \frac{2}{1-i}$.

❷

Выполните действия на комплексной плоскости:

Вариант Б1:

а) $2i + (1 - 4i)$;

б) $2(3 - 2i) - 3(1 + i)$.

Вариант Б2:

а) $(-3 + 2i) + 5$;

б) $4(-1 - i) - 2(-3 - 2i)$.

❸

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

Вариант Б1:

а) $\operatorname{Re} z < -1$;

б) $\frac{\pi}{4} \le \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{2}$.

Вариант Б2:

а) $\operatorname{Im} z > 2$;

б) $1 \le |z| \le 3$.

❹

Решите уравнение:

Вариант Б1: $|z|^2 + z^2 = 8 - 4i$.

Вариант Б2: $|z|^2 - z^2 = 2 - 4i$.

Вариант В1 / Вариант В2

❶

Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

Вариант В1:

а) $\frac{2 + 2i}{1 - i}$;

б) $(1 - i)(4 + 3i)(2 + i)(3 + i)$.

Вариант В2:

а) $\frac{3 - 3i}{1 + i}$;

б) $(1 + i)(4 - 3i)(2 - i)(3 - i)$.

❷

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $z + 2\overline{z}$, где $z = 1 + i$;

б) $\frac{2i - 3}{i} - 2i$.

а) $2z - \overline{z}$, где $z = 2 - i$;

б) $\frac{-4 + 3i}{i} - 3$.

❸

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\mathrm{Re}(z \cdot \overline{z}) < 4$;

б) $\frac{\pi}{4} \le \mathrm{Arg}(z + 2 - i) \le \frac{3\pi}{4}$.

а) $\mathrm{Im}\, z^2 > 2$;

б) $1 \le |z - 3 + 3i| \le 3$.

❹

Решите уравнение:

$z|iz| - z - 2i = 0$.

$z|iz| - z + 6i = 0$.

С-54. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ФОРМУЛА МУАВРА

Вариант А1 | **Вариант А2**

❶

Представьте данное комплексное число

а) в алгебраической форме:

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) в тригонометрической форме:

$z = 1 + \sqrt{3}i$.

$z = 2 + 2i$.

❷

Выполните действия:

а) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\times$
$\times\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$

б) $\frac{18(\cos 47^\circ+i\sin 47^\circ)}{9(\cos 17^\circ+i\sin 17^\circ)}.$

а) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times$
$\times\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$

б) $\frac{20(\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ)}{5(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)}.$

❸

Пользуясь формулой Муавра, вычислите:

а) $(-1+i)^4;$

б) $\sqrt[3]{8(\cos\pi+i\sin\pi)}.$

а) $(-1+\sqrt{3}i)^3;$

б) $\sqrt{16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}.$

❹

Разложите на линейные множители:

$z^4-16.$

$81-z^4.$

❺

Найдите все корни уравнения:

$4z^2+8i=0.$

$3z^3-24=0.$

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

Б1:

а) $z=-2-2i;$

б) $z=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}.$

Б2:

а) $z=\sqrt{3}-i;$

б) $z=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}.$

❷

Выполните действия и представьте ответ в тригонометрической форме:

Б1:

а) $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2i;$

Б2:

а) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot(-3i);$

б) $\dfrac{\sqrt{20}(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)}{\sqrt{5}(\cos 48^\circ + i\sin 48^\circ)}$.

б) $\dfrac{\sqrt{18}(\cos 4^\circ + i\sin 4^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 64^\circ + i\sin 64^\circ)}$.

3

Вычислите, пользуясь формулой Муавра, и представьте ответ в алгебраической форме:

а) $(1-\sqrt{3}i)^9$;

б) $\sqrt[4]{-4}$.

а) $(-1+i)^{10}$;

б) $\sqrt[3]{-8}$.

4

Разложите на линейные множители:

$3z^3 - 24$.

$2z^4 + 8$.

5

Решите уравнение:

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = \dfrac{2}{-1+i}$;

б) $z - \cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

а) $z = \dfrac{2}{1-i}$;

б) $z = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2

Выполните действия и представьте ответ в тригонометрической форме:

а) $4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{2}i$;

б) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)}$.

а) $6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}i\right)$;

б) $\dfrac{i-1}{2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}$.

❸

Вычислите и представьте ответ в алгебраической форме:

а) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{20}$;

б) $\sqrt[3]{8i}$.

а) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$;

б) $\sqrt[3]{-8i}$.

❹

Разложите на линейные множители:

z^4+2z^2+4.

z^4-4z^2+16.

❺

Решите уравнение:

$(z+i)^6=z^2+2iz-1$.

$(z-2i)^5=z^2-4iz-4$.

С-55*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

❶

Постройте на комплексной плоскости геометрические образы соотношений:

Вариант 1:

а) $z\bar{z}+2z+2\bar{z}=0$;

б) $z^2\bar{z}^2-5z\bar{z}+4\geq 0$;

в) $\operatorname{Im}\dfrac{2}{\bar{z}-1}\geq 1$;

г) $|z-1|^2+|z+1|^2=10$.

Вариант 2:

а) $z\bar{z}+2iz-2i\bar{z}=0$;

б) $z^2\bar{z}^2-10z\bar{z}+9\leq 0$;

в) $\operatorname{Re}\dfrac{-2i}{\bar{z}+1}\geq 1$;

г) $|z+i|^2+|z-i|^2=16$.

❷

Выведите с помощью формулы Муавра тригонометрические формулы, выражающие:

Вариант 1:

а) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$;

б) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Вариант 2:

а) $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$;

б) $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$.

3

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 докажите неравенство:

$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1| + |z_2|$.

$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 - z_2|$.

4

Найдите комплексное число, задающее четвертую вершину параллелограмма, три последовательных вершины которого находятся в точках:

$z_1 = 1 + 2i,$
$z_2 = -1 - i,$
$z_3 = 2 - 2i.$

$z_1 = -1 + 2i,$
$z_2 = -3 - i,$
$z_3 = 1 - 2i.$

5

Решите уравнения:

а) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0;$
б) $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0;$
в) $(z^2 + z)^4 = 1.$

а) $(z^2 + 4z + 8)^2 + 3z(z^2 + 4z + 8) + 2z^2 = 0;$
б) $z^3 + 8z^2 + 15z + 18 = 0;$
в) $(z^2 - z)^4 = 16.$

К-11. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вариант А1

Вариант А2

1

Выполните действия:

а) $2i(3 + i) - 6i^5;$
б) $\dfrac{-1 - i}{1 - i}.$

а) $3i(i - 4) - 12i^7;$
б) $\dfrac{3 - 3i}{1 + i}.$

2

Найдите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$\begin{cases} \operatorname{Re} z > 1, \\ |z| \le 3. \end{cases}$

$\begin{cases} \operatorname{Im} z < 1, \\ |z| \ge 2. \end{cases}$

3

Вычислите:

а) $(2+2i)^4$; а) $(\sqrt{3}+i)^3$;

б) $\sqrt{-16}$. б) $\sqrt{-25}$.

4

Решите уравнения:

а) $z+iz=1+7i$; а) $z-iz=8+2i$;

б) $z^2+4z+13=0$. б) $z^2-2z+10=0$.

5

Найдите значение a, при котором числа

a^2+1+6i и $5-3ai$ a^2-3-4i и $-2+4ai$

являются сопряженными.

Вариант Б1 Вариант Б2

1

Выполните действия:

а) $\dfrac{5-15i}{1+2i}-(1-3i)^2$; а) $\dfrac{30+20i}{3-i}+(2i-3)^2$;

б) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)}{i^{23}}\times$ $\times(2-2i)$. б) $\dfrac{2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)}{i^{17}}\times$ $\times(\sqrt{3}+3i)$.

2

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$\begin{cases} |z+3i|\le 3, \\ \operatorname{Re} z > -\operatorname{Im} z. \end{cases}$ $\begin{cases} |z-3| < 3, \\ \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z. \end{cases}$

3

Вычислите:

а) $(-1+i\sqrt{3})^{12}$;

б) $\sqrt[3]{27i}$.

а) $(\sqrt{3}-i)^{6}$;

б) $\sqrt{-9i}$.

4

Решите уравнения:

а) $|z+1|+i|z|=4\sqrt{2}+5i$;

б) $z^2+2iz-5=0$.

а) $|z-i|-i|z|=3\sqrt{2}-5i$;

б) $z^2-4iz-20=0$.

5

Даны комплексные числа

$z_1=-1+i\sqrt{3}$ и $z_2=-\sqrt{3}+i$.

$z_1=1-i\sqrt{3}$ и $z_2=\sqrt{3}-i$.

Задайте равенством геометрическое место точек комплексной плоскости, лежащих на биссектрисе угла z_1Oz_2.

Вариант B1

Вариант B2

1

Выполните действия:

а) $\dfrac{(2i+3)^2}{i-1}-\dfrac{i^{41}}{i+1}$;

б) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6+\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}}\right)^6$.

а) $\dfrac{(2i-3)^2}{i+1}+\dfrac{i^{43}}{i-1}$;

б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6+\left(\dfrac{1}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\dfrac{5\pi}{4}}\right)^6$.

2

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases}|z-1+i|\ge|z+1-i|,\\ \dfrac{\pi}{2}\le \operatorname{Arg}(z-2)\le\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}|z+1+i|\ge|z-1-i|,\\ \dfrac{3\pi}{2}\le \operatorname{Arg}(z+2)\le\dfrac{7\pi}{4}.\end{cases}$$

3

Вычислите:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-6}$;

б) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

а) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12}$;

б) $\sqrt{3+4i}$.

4

Решите уравнения:

а) $|z|^2+\bar{z}-2iz=2i$;

б) $(z+1)^4=(z-i)^4$.

а) $|z|^2-3z+3i=i\bar{z}$;

б) $(z+i)^4=(z-i)^4$.

5

Докажите, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=$$
$$=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

если $|z_1|=|z_2|=d$, то

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4d^2.$$

Какова геометрическая интерпретация этого равенства?

Комбинаторика

С-56. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

Пусть M — множество учебников математики, F — множество учебников физики, K — множество книг школьной библиотеки. Запишите с помощью знаков операций над множествами:

Вариант А1:

а) множество учебников физики, имеющихся в школьной библиотеке;
б) множество учебников физики и математики;
в) множество книг, имеющихся в школьной библиотеке, кроме учебников математики.

Вариант А2:

а) множество учебников математики, имеющихся в школьной библиотеке;
б) множество учебников физики и книг школьной библиотеки;
в) множество книг, имеющихся в школьной библиотеке, кроме учебников физики.

2

Пусть A, B и C — множества корней уравнений

Вариант А1: $x^2 = 4$, $(x+1)(x-2) = 0$ и $|x| = 1$

Вариант А2: $|x| = 9$, $(x-3)(x+4) = 0$ и $x^2 = 16$

соответственно.

Перечислите элементы множеств:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$;

г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

Назовите любое множество D из одного элемента такое, что $D \subset B$.

3

Каждый из 36 учеников класса изучает хотя бы один иностранный язык (английский или немецкий). Известно, что английский язык изучают 24 ученика, немецкий — 18 учеников. Сколько учеников изучают и немецкий, и английский языки?

3

Во всех домах деревни Уткино крестьяне держат скот (коров или свиней). Известно, что в 43 домах держат коров, в 39 домах — свиней, а в 12 домах — и коров, и свиней. Сколько всего домов в деревне Уткино?

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Пусть U — множество ученых, F — множество физиков, M — множество математиков, L — множество лауреатов Государственной премии. Запишите с помощью знаков операций над множествами:

Вариант Б1:

а) множество ученых и лауреатов Государственной премии;

б) множество ученых-лауреатов Государственной премии;

в) множество лауреатов Государственной премии, не работающих в области физики и математики.

Вариант Б2:

а) множество физиков и математиков;

б) множество людей, изучающих физику и математику;

в) множество ученых, не работающих в области физики и математики.

2

Пусть множества A, B и C — числовые промежутки, причем

Вариант Б1: $A = [-5;1]$, $B = [0;8]$, $C = [2;10]$.

Вариант Б2: $A = (-8;-2)$, $B = (-3;4)$, $C = (0;5)$.

Найдите:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$;

г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

Назовите любое множество D такое, что $D \subset C$.

❸

Из 40 участников конференции 6 не знают ни русского, ни немецкого языка, 19 знают русский язык, 5 знают оба языка. Сколько человек знают немецкий язык?

❸

Из 46 студентов 11 не занимаются ни баскетболом, ни футболом, 22 занимаются футболом, 8 — и футболом, и баскетболом. Сколько студентов занимаются баскетболом?

Вариант В1

Вариант В2

❶

Пусть A — множество четных чисел, B — множество нечетных чисел, C — множество чисел, кратных 3, D — множество чисел, кратных 5. Запишите с помощью знаков операций над множествами

В1:

а) множество чисел, кратных 2 или 3;
б) множество чисел, кратных 10;
в) множество нечетных чисел, не кратных 15.

В2:

а) множество чисел, кратных 2 или 5;
б) множество чисел, кратных 6;
в) множество четных чисел, не кратных 15.

❷

Пусть A, B, C и D — множества углов α, для которых выполняются условия:

В1:

$A: \sin\alpha \geq \frac{1}{2}$,

$B: \cos\alpha \geq \frac{1}{2}$,

$C: \operatorname{tg}\alpha \geq 0$,

$D: \operatorname{ctg}\alpha = -1$.

В2:

$A: \sin\alpha \leq -\frac{1}{2}$,

$B: \cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$,

$C: \operatorname{ctg}\alpha \leq 0$,

$D: \operatorname{tg}\alpha = 1$.

Отметьте часть дуги единичной окружности, соответствующую множеству:

а) $A \cap B$; б) $B \cup C$; в) $A \setminus D$;
г) $(A \cup B) \setminus C$; д) $(A \cup B) \cap C$; е) $C \setminus (A \cup B)$.

Запишите символами, подмножеством каких из данных множеств является множество *D*.

❸

Из 44 членов литературной студии 25 человек пишут стихи, 28 прозу и 26 — эссе, причем 15 человек пишут стихи и эссе, 13 прозу и эссе, а 5 человек — и стихи, и прозу, и эссе. Сколько человек пишут стихи и прозу?

❸

Из 120 участников экологической конференции 60 занимаются биологией, 48 — географией, 32 - химией, причем 21 человек занимаются биологией и географией, 19 - географией и химией, 15 — биологией и химией, а 10 — всеми тремя науками. Сколько участников не занимаются ни одной из этих наук?

С-57. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ. ПРОСТЕЙШИЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Вариант А1

❶

Вычислите:

а) $\frac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$;

б) $C_8^6 \cdot P_2$.

Вариант А2

а) $\frac{P_5}{P_9} \cdot A_9^5$;

б) $C_{10}^7 \cdot P_3$.

2

Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 6 различных уроков?

2

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в одном числе не должны повторяться)?

3

Сколькими способами из 7 членов президиума собрания можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря?

3

Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков?

4

Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?

4

Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

5

Решите уравнение:

$A_{x+1}^{2} = 20.$

$C_{x}^{x-1} \cdot (x-1) = 30.$

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\dfrac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \dfrac{A_{20}^{5}}{C_{20}^{5}};$

б) $C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1.$

Вариант Б2

а) $\dfrac{P_{14}}{A_{14}^{10}} - \dfrac{A_{14}^{4}}{C_{14}^{4}};$

б) $C_6^4 C_5^3 - C_5^3 C_4^2.$

2

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9, 0

2

Сколькими способами можно расставить на книжной полке тома 4-томника Эдга-

(цифры в одном числе не должны повторяться)?

3

Сколько можно составить различных правильных дробей, используя в числителе и знаменателе числа 2, 3, 5, 7, 11, если в записи каждой дроби использовать 2 числа?

4

Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

ра По так, чтобы четвертый том не стоял крайним слева?

3

Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры в одном числе не повторяются?

4

Сколько существует различных треугольников с вершинами в 7 данных точках, если известно, что 3 из них лежат на одной прямой?

5

Решите уравнение:

$A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$.

$12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{C_{11}^3}$;

б) $\dfrac{(k+1)C_{n+1}^{k+1}}{(n+1)C_n^k}$.

2

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 человек, если не существенно, кто на каком стуле сидит, а существенно, кто является соседом одного человека справа и слева?

Вариант В2

а) $\dfrac{A_{15}^5 - A_{14}^5}{C_{14}^4}$;

б) $\dfrac{C_n^k + C_n^{k-1}}{C_{n+1}^{k+1}}$.

2

Сколько различных «слов» (буквенных наборов) из 7 букв можно составить путем перестановки букв в слове «барабан»?

❸

Сколько различных неправильных дробей можно составить, используя в числителе и знаменателе числа 2, 3, 5, 7, 11, 13?

❸

Из 11 учебных предметов составляют расписание дня из 5 уроков. Сколькими способами это можно сделать при условии, чтобы в расписании была физкультура, но не на первых трех уроках?

❹

Сколько различных натуральных делителей имеет число 210?

❹

Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13?

❺

Найдите все значения *x*, удовлетворяющие неравенству:

$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 \le 9x^2 - 14x.$

$C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^{x} + C_x^{x-2} \le C_{x+3}^{x+1}.$

С-58. БИНОМ НЬЮТОНА. СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Вариант А1

Вариант А2

❶

По формуле бинома Ньютона раскройте скобки и упростите выражение:

Вариант А1:

а) $(x-2)^4$;

б) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^5$.

Вариант А2:

а) $(x+2)^5$;

б) $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^4$.

❷

Найдите член, не содержащий *x*, в разложении бинома

3

Дан бином

$(3a - b)^n$. $(2a^3 + b)^n$.

Найдите n, если сумма всех биномиальных коэффициентов

равна 128. равна 256.

4

С помощью формулы бинома Ньютона вычислите

99^3. 101^3.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(x + \sqrt{2})^6$;

б) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{y}\right)^5$.

а) $(x - \sqrt{3})^5$;

б) $\left(3x + \frac{1}{2y}\right)^6$.

2

Найдите показатель степени бинома

$\left(\sqrt[7]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$, если второй член разложения не зависит от x.

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x\right)^n$, если третий член разложения не зависит от x.

3

Найдите член разложения бинома

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, содержащий x в первой степени, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 512.

$\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, содержащий x в первой степени, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 128.

4

Докажите тождество

$(k,\ n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n)$:

$n(C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1}) = C_{2n}^{n+1}$.

$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$;

б) $(2\sqrt{3} + \sqrt{6})^5$.

а) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)^5$;

б) $(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})^4$.

2

В разложении бинома

$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коэффициенты третьего и пятого членов относятся как 2 : 7.

$\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)^n$ третий биномиальный коэффициент в 4 раза больше второго.

Найдите член разложения, содержащий

x^1.

x^4.

3

Найдите показатель бинома $(a+b)^n$, если

сумма всех его биномиальных коэффициентов на 256 больше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.

утроенная сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, на 512 больше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

4

Найдите количество рациональных членов в разложении бинома

$(\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{3})^{80}$.

$(\sqrt[5]{3}-\sqrt[10]{5})^{100}$.

С-59. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вариант А1 / Вариант А2

1

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет, состоящий из

А1: двух белых роз и одной красной розы.

А2: двух красных и одной белой розы.

2

Даны цифры 1, 2, 5, 8, 9. Определите, сколько четырехзначных чисел можно составить из них (цифры в одном числе не должны повторяться) при условии, что все составленные числа должны быть

А1: меньше 6000.

А2: больше 4000.

3 (А1)

Три стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут разделить мишени между собой?

3 (А2)

Три автора должны составить справочник из 9 глав (каждый составляет по 3 главы). Сколькими способами они могут разделить работу?

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими спосо-

бами из вазы можно выбрать букет из трех цветов, в котором будет

Вариант 1	Вариант 2
не менее двух белых роз.	не менее двух красных роз.

❷

12 человек разделены на группы

Вариант 1	Вариант 2
по 4 человека в каждой.	по 3 человека в каждой.

Сколькими способами это можно сделать?

❸

Шестерых новых учеников нужно распределить в три параллельных класса. Сколькими способами это можно сделать?

❸

Семь книг необходимо разместить на четырех книжных полках. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант В1

Вариант В2

❶

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет из трех цветов, в котором была бы

Вариант В1	Вариант В2
хотя бы одна белая роза.	хотя бы одна красная роза.

Вариант В1

❷

Из 8 юношей и 6 девушек выбирают три пары для участия в танцевальном конкурсе. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

❸

На четырех полках необходимо расставить пять книг. Сколькими способами это можно сделать, если на

Вариант В2

❷

Из 6 различных букв и 10 различных цифр составляют 4 кода «буква-цифра». Сколькими способами это можно сделать?

❸

За пять дней садовник должен высадить шесть различных деревьев. Сколькими способами он может распрепервой полке должна стоять только одна любая книга?

делить работу, если в первый день он должен высадить только одно любое дерево?

С-60*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 | **Вариант 2**

1

Докажите тождества:

Вариант 1

а) $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^{k+2}$;

б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

Вариант 2

а) $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$;

б) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n\ 1} nC_n^n = 0$.

2

Подставляя в разложение $(x+a)^n$ подходящие значения a и x, найдите сумму:

Вариант 1: $1 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n$.

Вариант 2: $1 + 10C_n^1 + 100C_n^2 + \ldots + 10^nC_n^n$.

3

Найдите коэффициент

Вариант 1: при x^8 в разложении выражения $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$.

Вариант 2: при x^4 в разложении выражения $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.

4

Найдите рациональные члены в разложении бинома

Вариант 1: $(\sqrt[4]{4} + \sqrt[7]{7})^{15}$.

Вариант 2: $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

5

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 8 мужчин и 8 женщин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом?

5

Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд, чтобы игроки одной команды не стояли рядом?

6

Какое минимальное количество жителей должно быть в населенном пункте, чтобы наверняка утверждать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы

фамилии и имени?

фамилии, имени и отчества?

К-12. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Вариант А1

1

Найдите:

а) $A_8^6 - P_4$;

б) третий член разложения бинома $(x+2)^4$.

2

На плоскости даны 8 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой.

а) Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

б) Сколько существует лучей с началом в любой из данных точек, проходящих через любую другую из данных точек?

Вариант А2

1

Найдите:

а) $A_7^3 - P_5$;

б) четвертый член разложения бинома $(2x+1)^5$.

2

На плоскости даны 8 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой.

а) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

б) Сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?

3

В разложении бинома $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$

второй и третий биномиальные коэффициенты равны.

второй и четвертый биномиальные коэффициенты равны.

Найдите и запишите формулу этого разложения.

4

Сколькими способами можно осуществить перестановку 10 различных шкафов вдоль двух стен, если вдоль одной стены поместится 6 шкафов, а вдоль другой – 4?

4

Сколькими способами можно организовать размещение тургруппы из 7 человек в два гостиничных номера на три и четыре человека?

5

Решите уравнение:

$A_x^2 - C_x^{x-1} = 24.$

$A_{x+1}^2 + C_x^1 = 24.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите:

Б1:

а) $\frac{A_9^3}{P_6} - C_{21}^1$;

б) средний член разложения бинома $(2x-1)^6$.

Б2:

а) $\frac{A_8^4}{P_5} - C_{14}^{13}$;

б) средний член разложения бинома $(3x+1)^4$.

2

На окружности выбрано 8 различных точек.

а) Сколько существует вписанных выпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках?

б) Сколько существует ненулевых векторов с началом и концом в данных точках?

а) Сколько существует вписанных треугольников с вершинами в данных точках?

б) Сколько существует вписанных углов с вершиной в одной из данных точек и сторонами, проходящими через две другие точки?

❸

Найдите сумму биномиальных коэффициентов бинома

$(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^n$, если четвертый коэффициент разложения в 5 раз больше второго.

$\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, если второй коэффициент разложения в 7 раз меньше четвертого.

❹

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 10 карт так, чтобы среди выбранных карт было

ровно два валета?

ровно три туза?

❺

Найдите все значения *n*, удовлетворяющие неравенству

$A_{n-1}^2 - C_n^{n-1} < 23.$

$A_{n+1}^2 + C_n^1 < 24.$

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите:

а) $\dfrac{A_n^{n-2}}{P_{n-2}} - C_n^2;$

а) $\dfrac{A_n^3}{P_3} - C_n^{n-3};$

б) сумму биномиальных коэффициентов и сумму коэффициентов разложения бинома

$(2x-1)^9.$

$(6x-7)^8.$

❷

На одной из двух параллельных прямых выбрано 5 различных точек, а на другой – 4 точки.

а) Сколько существует секущих данных прямых,

а) Сколько существует отрезков с концами в данных

проходящих через любые две данные точки?
б) Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

точках, не лежащих ни на одной из данных прямых?
б) Сколько существует выпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках?

3

Найдите наибольший член разложения

$(1+\sqrt{2})^{50}$.

$(1+\sqrt{3})^{60}$.

4

В списке выступающих на заседании 6 человек. Сколько существует вариантов регламента заседания, если

выступающий A должен выступить раньше B и C?

выступающий B должен выступить позже A, но раньше C?

5

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} C_{x-1}^{y} = 10, \\ C_{x}^{y+1} = \dfrac{5}{2}x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{x}^{y} = C_{x}^{y+2}, \\ C_{x}^{2} = 153. \end{cases}$$

Теория вероятностей

С-61. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Вариант А1	Вариант А2

❶

Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что

Вариант А1	Вариант А2
а) в этом томе окажется роман «Анна Каренина»? б) этот том будет иметь четный номер?	а) в этом томе окажется роман «Война и мир»? б) этот том будет иметь нечетный номер?

❷

Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что

Вариант А1	Вариант А2
выпадут «орел» и «решка»?	выпадут два «орла»?

❸

Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить

Вариант А1	Вариант А2
слово «право».	слово «повар».

❹

Из 28 костей домино наугад выбирают одну. Что вероятнее:

Вариант А1	Вариант А2
что сумма цифр на ней будет равна 6 или 8?	что сумма цифр на ней будет равна 3 или 4?

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Какова вероятность того, что ваш будущий ребенок

Б1: а) родится в апреле? б) родится 30-го числа?

Б2: а) родится в январе? б) родится 31-го числа?

2

Бросают два одинаковых игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет

Б1: равна 3?

Б2: равна 11?

3

Из букв слова «апельсин» последовательно выбирают 4 буквы. Найдите вероятность того, что выбранные буквы в порядке их выбора образуют

Б1: слово «лиса».

Б2: слово «плен».

4

Что вероятнее при бросании двух одинаковых игральных кубиков:

Б1: что выпавшая сумма будет равна 6 или что она будет больше 10?

Б2: что выпавшая сумма будет равна 10 или что она будет меньше 4?

Вариант В1 / Вариант В2

1

Из 28 костей домино выбирают одну. Какова вероятность того, что

В1: а) сумма цифр на ней меньше 3? б) обе цифры на ней — четные?

В2: а) сумма цифр на ней больше 9? б) обе цифры на ней — нечетные?

2

В ящике лежит 15 шаров, из которых 5 – черные. Какова вероятность

того, что при выборе из ящика трех шаров

один окажется черным?

два окажутся черными?

❸

Из букв слова «комбинаторика» наугад выбираются 4 буквы. Найдите вероятность того, что

из выбранных букв можно составить слово «корт».

выбранные буквы в порядке их выбора образуют слово «атом».

❹

В колоде 32 карты. Что вероятнее:

найти среди четырех выбранных карт ровно два туза или все четыре карты черные?

найти среди трех выбранных карт ровно одну даму или ровно две красные карты?

С-62. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант А1 | Вариант А2

❶

Из 30 учеников спорткласса 11 занимается футболом, 6 — волейболом, 8 — бегом, а остальные 5 — прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса

Вариант А1:

а) не занимается прыжками?

б) занимается игровым видом спорта?

Вариант А2:

а) не занимается футболом?

б) занимается легкой атлетикой?

❷

Нина и Лора пишут диктант. Вероятность того, что Нина допустит в нем ошибку, составляет 60%, веро-

ятность ошибки Лоры — 40%.
Найдите вероятность того, что

а) обе девочки напишут диктант без ошибок;
б) Нина напишет без ошибок, а Лора ошибется.

а) обе девочки в диктанте ошибутся;
б) Лора напишет без ошибок, а Нина ошибется.

❸

Монету бросают 6 раз подряд.
Найдите вероятность того, что

хотя бы один раз выпадет «решка».

хотя бы один раз не выпадет «решка».

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

В беспроигрышной лотерее выпущено 10000 билетов, среди которых 100 выигрышей по 1000 рублей, 200 выигрышей по 500 рублей, 500 выигрышей по 200 рублей и 1000 выигрышей по 100 рублей, а остальные билеты выигрывают по 1 рублю. Какова вероятность того, что при покупке одного билета выигрыш составит

а) не более 200 рублей?
б) более 200 рублей?

а) не менее 500 рублей?
б) менее 500 рублей?

❷

Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем вероятность попадания первого стрелка составляет 90%, второго — 80 %, третьего — 70 %. Найдите вероятность того, что

а) все три стрелка поразят мишень;
б) двое из трех стрелков промахнутся.

а) все три стрелка промахнутся;
б) двое из трех стрелков поразят мишень.

3

Монету бросают 5 раз подряд. Найдите вероятность того, что

«решка» выпадет не более 2 раз.

«орел» выпадет не менее 4 раз.

Вариант В1

Вариант В2

1

В ящике лежат 6 белых, 4 черных, 5 красных и 3 синих шарика. Из ящика наугад выбираются 2 шарика. Какова вероятность того, что

В1:

а) шарики будут оба белыми или оба черными?

б) один из шариков будет синим, а второй — красным?

В2:

а) шарики будут оба красными или оба синими?

б) один из шариков будет белым, а второй — черным?

2

Три референта стенографируют выступление министра. Известно, что вероятность составления дословной стенограммы у первого референта составляет 75%, у второго — 80%, у третьего — 90%. Кроме того, вероятность грамматической ошибки у каждого из референтов составляет 10%. Найдите вероятность того, что

В1:

а) ни один из референтов не составит дословной стенограммы;

б) ровно один из референтов сможет дословно записать выступление, но допустит грамматические ошибки.

В2:

а) все три референта составят дословную стенограмму;

б) ровно два референта смогут дословно записать выступление, но допустят грамматические ошибки.

3

Монету бросают 6 раз подряд. Найдите вероятность того, что

В1: «решка» будет выпадать чаще, чем «орел».

В2: «орел» будет выпадать не реже, чем «решка».

С-63. ВЕРОЯТНОСТЬ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Стрелок стреляет по мишени 4 раза подряд. Известно, что

Вариант А1: вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз.

Вариант А2: вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,1. Найдите вероятность того, что стрелок хотя бы один раз промахнется.

2

В классе 15 мальчиков и 10 девочек. Известно, что на каждом из 6 различных уроков к доске вызывают одного человека. Найдите вероятность того, что

Вариант А1:
а) на всех уроках вызовут девочек;
б) в течение дня вызовут 4 мальчиков и двух девочек.

Вариант А2:
а) на всех уроках вызовут мальчиков;
б) в течение дня вызовут 5 девочек и одного мальчика.

3

Что вероятнее при бросании монеты:

Вариант А1: выпадение «решки» четыре раза из пяти или шесть раз из девяти?

Вариант А2: выпадение «орла» четыре раза из семи или два раза из трех?

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Три лучших спортсмена школы принимают участие в общегородском забеге. Известно, что

вероятность стать призером для каждого из учеников составляет $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы один ученик станет призером?

вероятность не занять призовое место для каждого из учеников составляет $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы один ученик не станет призером?

❷

Найдите вероятность того, что при 6 бросаниях игрального кубика

а) пятерка выпадет 5 раз;
б) цифра меньше трех выпадет 3 раза.

а) тройка выпадет 3 раза;
б) цифра больше четырех выпадет 4 раза.

❸

Что вероятнее при игре с равным по силе соперником (без ничьих):

выиграть три партии из четырех или шести партий из восьми?

выиграть две партии из трех или четыре партии из шести?

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число

будет кратно 2 или 5 или 10.

будет кратно 3 или 10 или 30.

❷

Завод производит изделия, каждое из которых с вероятностью p — бракованное. При осмотре брак обнаруживают с вероятностью q. Для контроля продукции выбирают n изделий. Найдите вероятность того, что при осмотре

а) брак не обнаружат ни в одном изделии;
б) брак обнаружат не менее, чем в $(n-1)$ изделиях.

а) брак обнаружат во всех изделиях;
б) брак обнаружат не более, чем в одном изделии.

3

Что вероятнее при случайном выборе костей домино:

что шестерка будет хотя бы раз встречаться на двух костях из четырех или на трех из шести?

что единица будет хотя бы раз встречаться на двух костях из трех или на четырех из шести?

С-64*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 Вариант 2

1

Используя понятия условной и полной вероятности и формулу Байеса, решите задачи:

а) В ящике лежат 12 белых, 8 черных и 10 красных шариков. Какова вероятность того, что наугад выбранный шарик

будет красным, если известно, что он не черный?

будет черным, если известно, что он не белый?

б) На заводе 50% деталей типа А1 производит рабочий Уткин, 30% — рабочий Чайкин и 20% — рабочий Воронин. Вероятность брака у этих рабочих составляет 5%, 3% и 2% соответственно. Из партии деталей наугад выбирается одна. Найдите вероятность того, что эта деталь

1) качественная;
2) бракованная и изготовлена Уткиным.

1) бракованная;
2) качественная и изготовлена Чайкиным.

в) В цехе 10 станков марки А, 6 – марки В и 4 – марки С. Вероятность выпуска качественной продукции для каждого типа станков составляет 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно.

Какой процент

качественной

бракованной

продукции выпускает цех в целом?

❷

Используя понятие геометрической вероятности, решите задачи:

а) После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что обрыв произошел между

50-м и 55-м километрами?

60-м и 66-м километрами?

б) В круг случайным образом брошено n точек. Найдите вероятность того, что все точки окажутся внутри вписанного в этот круг правильного

шестиугольника.

треугольника.

в) Сумма модулей двух чисел не превосходит $\sqrt{2}$. Какова вероятность того, что сумма их квадратов

больше единицы?

меньше единицы?

г)* Коэффициенты p и q квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ произвольным образом выбираются из отрезка $[-1;1]$. Найдите вероятность того, что данный трехчлен

имеет действительные корни.

не имеет действительных корней.

❸

Решите задачи:

а) Стержень длины l разломали на 3 части, выбирая наугад места разлома. Определите вероятность того, что из получившихся частей

можно составить треугольник.

нельзя составить треугольник.

б) Двое друзей договорились о встрече в условленном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение a минут ($a < 60$). Какова вероятность того, что

друзья встретятся?

друзья не встретятся?

К-13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант А1

Вариант А2

❶

В игральной колоде 36 карт. Какова вероятность того, что взятая наугад карта окажется:

А1:
а) валетом?
б) бубновой?

А2:
а) тузом?
б) пиковой?

❷

Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку — 0,1, в восьмерку — 0,2, в семерку — 0,4.

Найдите вероятность выбить с одного выстрела

А1:
а) больше семи очков;
б) не больше восьми очков.

А2:
а) больше восьми очков;
б) не больше семи очков.

❸

В процессе производства заготовка последовательно обрабатывается на

двух станках. Первый станок производит 97% качественной продукции, а второй выдает 3% брака. Какова вероятность того, что деталь, полученная из заготовки,

будет качественной?

будет бракованной?

4

Монету бросают три раза подряд. Можно ли утверждать

с вероятностью 0,9, что «орел» не выпадет все три раза?

с вероятностью 0,8, что «решка» не выпадет все три раза?

5

Вероятность встретить на улице мужчину-блондина составляет 0,4.

Какова вероятность того, что среди четырех прохожих мужчин встретится

три блондина?

один блондин?

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число

Б1:

а) делится на 5;
б) содержит в записи цифру 0.

Б2:

а) делится на 10;
б) содержит в записи цифру 9.

2

При игре в шахматы Остап Бендер жульничает с вероятностью 0,6.

При этом он выигрывает с вероятностью 0,1, играет вничью с вероятностью 0,2, а в остальных случаях проигрывает. Найдите вероятность того, что в одной наугад взятой партии Бендер

Б1:

а) жульничал и не выиграл;
б) не жульничал и не проиграл.

Б2:

а) не жульничал и не выиграл;
б) жульничал и не проиграл.

3

Три ученика независимо друг от друга решают задачу. Первый ученик ошибается в 10% случаев, второй – в 15% случаев, а третий в 80% случаев решает задачи правильно. Какова вероятность того, что

хотя бы один ученик при решении задачи ошибется?

хотя бы один ученик решит задачу правильно?

4

Игральный кубик бросают два раза подряд. Можно ли утверждать

с вероятностью 0,95, что выпадет сумма больше трех?

с вероятностью 0,93, что выпадет сумма меньше одиннадцати?

5

Вероятность встретить на улице мужчину-блондина составляет 0,4.

Какова вероятность того, что среди четырех прохожих мужчин встретится

не менее двух блондинов?

не более двух блондинов?

Вариант B1

Вариант B2

1

Даны числа 1, 2, 3, 4, 6, 8. Найдите вероятность того, что

а) произведение любых двух из них будет нечетным;
б) любые три наугад взятых числа могут быть длинами сторон треугольника.

а) сумма любых двух из них будет нечетной;
б) любые четыре наугад взятых числа могут быть членами пропорции.

2

На класс из 30 учеников распределили туристические путевки:

12 – в Крым, 8 – в Санкт-Петербург, 5 – в Венгрию. Какова вероятность того, что

а) двое друзей поедут в Санкт-Петербург?
б) трое друзей поедут по одному маршруту?

а) трое друзей поедут в Крым?
б) двое друзей поедут по одному маршруту?

❸

В ящике лежат 10 шариков, среди которых 3 – белые. Из ящика последовательно вынимают и удаляют по одному шарику до тех пор, пока не появится белый шарик. Найдите вероятность появления белого шарика

в третьей попытке.

в четвертой попытке.

❹

Три стрелка стреляют по одной цели по 2 раза каждый. Известно, что вероятность попадания для каждого стрелка равна 0,5 и не зависит от результатов других стрелков и предыдущих выстрелов. Можно ли утверждать

с вероятностью 0,99, что в цель попадет хотя бы один выстрел?

с вероятностью 0,5, что каждый стрелок попадет в цель хотя бы один раз?

❺

Пять шариков случайным образом разбрасываются в 6 лунок. Найдите вероятность того, что

во вторую лунку попадут 2 шарика.

в третью лунку попадут 3 шарика.

Ответы

К–1	А 1	А 2	Б 1	Б 2	В 1	В 2
1а)	0	0	2	2	0	0
1б)	1	- 1	1	1	0	0
2	1	0	– 1	– 1	2	– 2
3а)	$-\cos^2\alpha$	$-\sin^2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$-1/\sin 4\alpha$
3б)	1	$\cos 2\alpha$	$-\sin 4\alpha$	$\sin 4\alpha$	$1/\sin\alpha$	$1/\cos\alpha$
5	$\pi/6$	$\pi/4$	131°	140°	- 345°; – 195°	– 30°; – 330°

К–2	А 1	А 2	Б 1
1а)	$\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$-\frac{\pi}{3}+\pi n$	$4\pi n$
1б)	$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$	$\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$	$x_{\min} = 2\pi + 4\pi n$ $y_{\min} = -1{,}5$ $x_{\max} = 4\pi n$; $y_{\max} = -0{,}5$
2	нечетная $T = \pi/3$	четная $T = 6\pi$	нечетная $x \neq \pi n$
3а)	$D(f) = R$ $E(f) = [-5;\ 1]$	$D(f) = R$ $E(f) = [1;\ 2]$	$[-4; 4]$; $T = \frac{2\pi}{3}$
3б)	$x_{\min} = \frac{\pi}{2}+2\pi n$ $y_{\min} = -4$ $x_{\max} = -\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $y_{\max} = 4$	$x_{\min} = 2\pi n$ $y_{\min} = -2$ $x_{\max} = \pi + 2\pi n$ $y_{\max} = 2$	$\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$ возрастает на каждом промежутке $D(y)$
4	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	$x \neq \pi n$; $(0;\ 1]$

Во всех приведенных ответах $n \in Z$, $k \in Z$.

	Б 2	В 1	В 2
1а)	$\pi/4 + \pi n$	$y > 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{5\pi}{8} + \pi n\right)$; $y < 0$, если $x \in \left(-\frac{3\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n\right)$.	$y > 0$, если $x \in \left(-\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right)$; $y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 4\pi n; \frac{7\pi}{3} + 4\pi n\right)$
1б)	$x_{min} = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $y_{min} = -1$ $x_{max} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $y_{max} = 3$	$x_{min} = -\frac{\pi}{8} + \pi n$ $y_{min} = -0{,}5$ $x_{max} = \frac{3\pi}{8} + \pi n$ $y_{max} = 0{,}5$	$x_{min} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi n$ $y_{min} = -2$ $x_{max} = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$ $y_{max} = 2$
2	нечетная $x \neq 2\pi n$	четная $T = \pi$	нечетная $T = 2\pi$
3а)	$[-2; 2]$ $T = \pi$	$[-2; 2]$ возрастает при $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$ убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$	$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$ возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$ убывает при $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right]$
3б)	$(2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$ убывает на каждом промежутке $D(y)$	$x = \pi + 4\pi n$. нули: $x = -\pi + 4\pi n$	$x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}$ нули: $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$
4	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$; $(0; 1]$	$y = \begin{cases} 2\cos x, \cos x \geq 0 \\ 0, \cos x < 0 \end{cases}$ $T = 2\pi$	$y = \begin{cases} 0, \sin x \geq 0 \\ -2\sin x, \sin x < 0 \end{cases}$ $T = 2\pi$

К–3	А 1	А 2	Б 1
1а)	$(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$
1б)	$\frac{\pi}{3}+\pi n$	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\operatorname{arctg}5+\pi n$ $-\frac{\pi}{4}+\pi k$
1в)	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n$ $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$
1г)	πn	$\frac{\pi}{2}+\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$
2а)	$\left(\frac{2\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{10\pi}{3}+4\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$
2б)	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}\right]$
3	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k\right)$	$\left(\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pi k\right)$ $\left(\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$

К–3	Б 2	В 1	В 2
1а)	$\frac{\pi}{6}+\pi n$	$(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$	$\frac{\pi n}{2}$
1б)	$-\operatorname{arctg}3+\pi n$ $\frac{\pi}{4}+\pi k$	$2\operatorname{arctg}2+2\pi k$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$
1в)	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$	$\frac{\pi n}{2}$ $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$ $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$

1г)	$\pi+2\pi n$ $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$	$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$
2а)	$\left(2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{12}+\pi n\right]$	$\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$
2б)	$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right]$	$(4\pi n; \pi+4\pi n]$	$\left[\frac{\pi}{2}+3\pi n; \frac{5\pi}{4}+3\pi n\right)$
3	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{\pi}{6}-\pi k\right)$	$\left(\pi+2\pi n; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$

К–4	А 1	А 2	Б 1
1а)	1	1	1
1б)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3
2а)	±3	±10	1
2б)	4	3	–1
2в)	–1	–2	6
2г)	–1; 0	0; 3	±3; 7
3	(1; 4); (4; 1)	(9; 1); (–1; –9)	$(4; -3)$; $\left(\frac{1}{4}; 3\frac{3}{4}\right)$
4	$a \geq 2$	$a \leq -3$	$(-2; 0) \cup (1; 3)$

	Б 2	В 1	В 2
1а)	1	1	- 1
1б)	3	6	3
2а)	32	4	5
2б)	– 1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{5}$
2в)	5	1	2
2г)	-3: 1; 4	8	1
3	(4; 0)	(25; 9); $\left(12\frac{1}{4}; 20\frac{1}{4}\right)$	(4; 1)
4	$(-3; -1) \cup (0; 4)$	$[2; \infty)$	$(-\infty; -2]$

К–5	А 1	А 2	Б 1
1а)	3	3	$-1; \frac{4}{9}$
1б)	1	1	0
1в)	$-1; 2$	$-1; 2$	1
2а)	$[-3; 3]$	$(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$	$(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
2б)	$(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$	$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$	$[-4; 3]$
2в)	$(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$	$(-\infty; -4] \cup (0; \infty)$	$(-\infty; 0] \cup [1; \infty)$
3	(1; 2); (2; 1)	(1; 3); (3; 1)	(1; -1)
4	3; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\frac{1}{3}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\left[\frac{1}{4}; 1\right]$; $\left[1\frac{1}{2}; 3\right]$; у второй

К–5	Б 2	В 1	В 2
1а)	$-3; \frac{3}{4}$	$1; -\frac{23}{6}$	$1; -\frac{11}{4}$
1б)	0	0	0
1в)	1	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn
2а)	$(-1; 2)$	$(-3; 3) \cup (3; \infty)$	$(-2; 2) \cup (2; \infty)$
2б)	$(-\infty; -4] \cup [5; \infty)$	$[-1; 3]$	$(-\infty; -6) \cup (2; \infty)$
2в)	$[0; 1]$	$(-\infty; 1]$	$[1; \infty)$
3	$(-1; 2)$	1	1
4	$\left[\frac{1}{27}; 27\right]$; $[1; 9]$; у первой	-3	-2

К–6	А 1	А 2	Б 1
1а)	1	30	3
1б)	1	3	2
2а)	$-2; 1$	$-2; 5$	3

2б)	1	− 1	$2; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
3а)	[− 1;2)	$(\frac{1}{3};1]$	(2; 3]
3б)	(2; 4)	(1; 4)	$(0; 0{,}04) \cup (5; \infty)$
4	(7; 2)	(9; 1)	(2; - 1)
5	$\frac{1}{8};2$	$\frac{1}{3};27$	3; 27
	Б 2	**В 1**	**В 2**
1а)	24	24,5	1,5
1б)	3	2	− 2
2а)	2	3	4
2б)	$3; \sqrt[9]{3}$	$\frac{1}{9};3$	$\frac{1}{625};5$
3а)	(− 4; 2]	(1; 2)	(1; 2)
3б)	$\left(0;\frac{1}{8}\right)\cup(2;\infty)$	$\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[16;\infty)$	$\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[4;\infty)$
4	(3; 2)	(27; 4)	(125; 4); (625; 3)
5	$\frac{1}{8};2$	4	6

К–7	А 1	А 2	Б 1
1а)	$6x^2 - x$	$20x^4 + x^2$	$x^3 + \frac{16}{x^5} + \frac{4}{\sqrt{x}}$
1б)	$-2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$4\cos x + \frac{5}{\sin^2 x}$	$2x\cos x - (x^2 + 1)\sin x$
1в)	$\frac{5}{(x+2)^2}$	$\frac{5}{(x+3)^2}$	$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$
2	$y = 3x + 6$	$y = -7x + 12$	$y = -4x + 5$

3	0; 1	1	$\pi n; \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$
4	12 м/с	4 м	17 м/с
5	3	1/2	π/3
	Б 2	**В 1**	**В 2**
1а)	$-\frac{9}{x^4} + x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$	$(x + 1)(3x - 1)$	$(x - 1)(3x + 1)$
1б)	$-2x\sin x +$ $+(1 - x^2)\cos x$	$-\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + 2\sin 2x$	$\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$
1в)	$\frac{x^2 + 4x - 12}{(x+2)^2}$	$\frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{4x-8}{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}$
2	$y = -6x + 19$	$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
3	$\frac{\pi}{2} + \pi n; (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$	$(-\infty; 4,5]$	$\{0,5\} \cup [5,5; \infty)$
4	0 м/с^2	16 м/с	0 м/с^2
5	π/6	(2; 2,5) (– 2; – 2,5)	(2; 1,5) (– 2; – 1,5)

К–8	А 1	А 2	Б 1
1а)	– 1; 0; 1	– 3; 0; 3	$\nearrow (-\infty; -4]; [2; \infty)$ $\searrow [-4; -1); (-1; 2]$
1б)	– 6; – 2	2; 6	$\nearrow [0; 1/4]$ $\searrow [1/4; \infty)$
3	– 1/2	1/2	12 = 9 + 3
	Б 2	**В 1**	**В 2**
1а)	$\nearrow (-\infty; -2]; [4; \infty)$ $\searrow [-2; 1); (1; 4]$	$x_{min} = 0$ $x_{max} = \frac{\pm\sqrt{2}}{3}$	$x_{min} = -1$ $x_{max} = 1$

1б)	$\nearrow[4;\infty)$ $\searrow[0;4]$	$x_{\max}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ $x_{\min}=\pi k$	$x_{\min}=\frac{\pi}{2}+\pi n$ $x_{\max}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$
3	$20=15+5$	3	$-\sqrt{2}$

К–9	А 1	А 2	Б 1
1а)	$\frac{x^4}{4}-4\sqrt{x}+c$	$\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{x^3}{3}+c$	$-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2x^2}+c$
1б)	$\operatorname{tg}x+3\cos x+c$	$2\sin x+\operatorname{ctg}x+c$	$x+4\sin\frac{x}{4}+c$
2а)	x^3-2x^2+2x+5	$4x+x^2-2x^3-12$	$x^2-4\sqrt{1-x}$
2б)	$2\sin\frac{x}{2}$	$-\frac{1}{3}\cos 3x$	$-2\cos 3x+1$
3а)	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$
3б)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
5	-2	6	12 м

	Б 2	В 1	В 2
1а)	$\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5}\operatorname{tg}x+c$	$\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c$	$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x+c$
1б)	$-\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{x^2}{2}+c$	$-\operatorname{ctg}x-2x+c$	$2x-\operatorname{tg}x+c$
2а)	$3x-2\sqrt{5-x}+18$	$2x^2+8x+11$	$3x-\frac{x^2}{2}+2,5$
2б)	$2\sin\frac{x}{4}$	$\frac{8}{x}-2x+4$	$\frac{9}{x^2}+2x-3$

3а)	1	$3+\sqrt{3}$	$-\dfrac{1}{6}$
3б)	$\dfrac{1}{12}$	1	1
4	$4\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	4
5	8 м	$4x-3$	$4-2x$

К–10	**А 1**	**А 2**	**Б 1**
1а)	$e^x+2{,}5x^{1,5}$	$1{,}2x^{0{,}2}-e^x$	$2xe^{x^2-1}+\dfrac{1}{x\ln 3}$
1б)	$\dfrac{2x}{x^2+1}-4^x\ln 4$	$-\dfrac{3}{8-3x}+8^x\ln 8$	$x^{\ln 2}(\ln 2+1)+\dfrac{1}{x}$
2	$1;\dfrac{1}{e}$	$1;e^4$	$e^2;0$
3	$3\ln\lvert x+2\rvert+1$	$2\ln\lvert x-3\rvert+3$	$x^2-\dfrac{1}{2}\ln\lvert 4x-5\rvert-1$
4	$17\dfrac{1}{3}$	$11\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{2}{3}$
5	$\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}\ln\lvert 2x+1\rvert-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{3}e^{-3x}-\dfrac{1}{3}\ln\lvert 3x+1\rvert+\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}(3x-2)^{\frac{4}{3}}+\dfrac{3}{4}$
	Б 2	**В 1**	**В 2**
1а)	$\dfrac{1}{x\ln 2}+3x^2e^{4-x^3}$	$3\sin^2 x\cos xe^{\sin^3 x}+$ $+\operatorname{tg} x$	$\sin 2xe^{-\cos^2 x}+$ $+\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}$
1б)	$x^{\ln 3}(\ln 3+1)+\dfrac{1}{2x}$	$\dfrac{2^{\sqrt[4]{x}-2}\ln 2}{\sqrt[4]{x^3}}+$ $+\dfrac{4x\ln(x^2-1)}{x^2-1}$	$\dfrac{3^{\sqrt[3]{x}-1}\ln 3}{\sqrt[3]{x^2}}+$ $+\dfrac{6x\ln^2(9-x^2)}{9-x^2}$
2	$e^2;0$	$\ln 2;0$	$-\ln 3;-\ln 2$

3	$x^3+2\ln\lvert 3x-1\rvert+3$	$-2\ln\lvert 7-3x\rvert+3$	$4\ln\lvert 0,5x-1\rvert-2$
4	1,5	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{5}(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$	$\ln(x^2+1)+e^{x^6}+2$	$\ln(x^4+1)+e^{x^2}+3$

К–11	А 1	А 2	Б 1	Б 2
1а)	-2	-3	$3+i$	$12-3i$
1б)	$-i$	$-3i$	-4	$-4\sqrt{3}$
3а)	-64	$8i$	2^{12}	-64
3б)	$\pm 4i$	$\pm 5i$	$\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3i}{2};-3i$	$\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$
4а)	$4+3i$	$3+5i$	$3\pm 4i$	$\pm 3+4i$
4б)	$-2\pm 3i$	$1\pm 3i$	$\pm 2-i$	$\pm 4\mp 2i$
5	$a=2$	$a=1$	$\operatorname{Re} z=-\operatorname{Im} z$	$\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$

К–11	В 1	В 2
1а)	$3-9i$	$-4-8i$
1б)	$2i$	$-2i$
3а)	1	1
3б)	$\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}};-\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$	$2+i;-2-i$
4а)	$-1;-2i$	$3;i$
4б)	$0;-1+i$	$0;\pm 1$
5	Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон	Сумма квадратов диагоналей ромба в 4 раза больше квадрата его стороны

К–12	А 1	А 2	Б 1	Б 2	В 1	В 2
1а)	32	162	0	0	0	0
1б)	$24x^2$	$40x^2$	$-160x^3$	$54x^2$	512; 1	256; 1
2а)	28	56	70	56	20	20
2б)	56	56	56	168	70	60
3	$x^3-3x+ +\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$	$x^4-4x^2+ +6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$	128	256	$2^{14}\sqrt[4]{2}\cdot C_{50}^{29}$	$C_{60}^{38}\cdot 3^{19}$
4	210	35	$C_4^2\cdot C_{32}^8$	$C_4^3\cdot C_{32}^7$	240	120
5	6	4	3, 4, 5, 6	1, 2, 3	(6; 3)	(18; 8)

К–13	А 1	А 2	Б 1	Б 2
1а)	1/9	1/9	0,2	0,1
1б)	1/4	1/4	0,1	0,2
2а)	0,35	0,15	0,54	0,36
2б)	0,85	0,65	0,12	0,18
3	$0{,}97^2$	$0{,}03^2$	0,388	0,997
4	нет	да	нет	нет
5	0,0384	0,0864	$1-0{,}6^4-0{,}4\cdot 0{,}6^3$	$1-0{,}4^4-0{,}6\cdot 0{,}4^3$

К–13	В 1	В 2
1а)	1/15	8/15
1б)	0,2	1/3
2а)	16/225	8/125
2б)	$\left(\frac{4}{15}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^3$	$\left(\frac{4}{15}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2$
3	7/40	1/8
4	нет	нет
5	$5^3/6^5$	$5^2/6^5$

ОТВЕТЫ К ДОМАШНИМ САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С–6*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1б)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2а)	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha$
2б)	1	1
3а)	R	R
3б)	$(\sin 3; -\sin 4)$	$(\cos 7; \cos 6)$
4а)	$[-2; 2]$	$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
4б)	$[-13; 13]$	$[-25; 25]$
5а)	$-0{,}8$	$0{,}6$
5б)	$-\frac{1}{3}; 2$	$\pm\frac{4}{3}$

С–12*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$[-1; 1]$	$[\ 1; 1]$
1б)	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$(\ \infty; 0) \cup (0; \infty)$
1в)	$(-1; 1)$	$[-1; 0) \cup (0; 1]$
1г)	R	R
1д)	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
2а)	120/169	$\frac{5}{\sqrt{26}}$
2б)	5	7/24

2в)	$\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{7}{5\sqrt{2}}$
3а)	$4\pi - 10$	$6 - 2\pi$
3б)	$-\pi/10$	$5\pi/8$
4а)	$[-2; -1] \cup [0; 1]$	$\left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$
4б)	$[1; 2]$	$(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$
5а)	$D(f) = [-1; 0]$; $E(f) = \left[0; \sqrt{\pi/2}\right]$	$D(f) = [-1; 0) \cup (0; 1]$; $E(f) = (-\infty; -2/\pi) \cup (2/\pi; \infty)$
5б)	$D(f) = [0; \infty)$; $E(f) = [0; \pi)$	$D(f) = [0; \infty)$; $E(f) - [3\pi/2; 5\pi/2)$
6а)	-1	$1/3$
6б)	$2\sqrt{3} - 1$	1,5
6в)	-2	1
6г)	ctg 2	tg 1/2

С–16*	**Вариант 1**	**Вариант 2**
1а)	$\pm \arccos\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$	$(\ \ 1)^n \arcsin\dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $(-1)^{k+1} \arcsin\dfrac{\pi}{4} + \pi k$
1б)	$\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$	корней нет
1в)	$\dfrac{\pi n}{10}$	$\dfrac{\pi n}{4}$
1г)	$\dfrac{\pi n}{6} + \dfrac{\pi n}{2}$	$\dfrac{\pi n}{18} + \dfrac{\pi n}{3}$
2а)	$2\pi n$	$-\dfrac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \pi k$
2б)	$2\pi n; -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi m$	$2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$

2в)	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$
3а)	$\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi m$	$-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi m$
3б)	$\frac{\pi}{4}+\pi n; 2\pi k$	$\frac{\pi}{4}+\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi k$
3в)	$\frac{\pi n}{9}; \frac{\pi}{2}+\pi k$	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$
5а)	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi k}{3}, k \neq 3m$	$\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9}, n \neq 4p; \frac{2\pi k}{7}, k \neq 7m$
5б)	$\frac{\pi k}{7}, k \neq 7n$	$\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$
6а)	$\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\frac{\pi}{4}+\pi n$
6б)	$\frac{\pi}{3}+2\pi n$	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$
6в)	$\frac{\pi n}{4}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$

С–17*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}; (-1)^k\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8}-\frac{\pi k}{2}\right)$
1б)	$\left(\frac{2\pi}{3}+\pi k; \frac{2\pi}{3}-\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right)$
1в)	$\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k; (-1)^k\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	$\left(2\pi k; \frac{5\pi}{2}-2\pi k\right)$
1г)	$\left(\frac{5}{12}+k; \frac{1}{3}-k\right); \left(\frac{1}{12}+k; \frac{2}{3}-k\right)$	$\left(\frac{1}{2}+k; \frac{1}{6}+k\right);$ $\left(-\frac{1}{6}+k; -\frac{1}{2}+k\right)$

С–17*	Вариант 1	Вариант 2
2а)	$\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(n+k);\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(n+2k);\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(n+2k);\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(n-2k)\right)$
2б)	$\left((-1)^n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi(2n+k);\ (-1)^n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\pi(2n-k)\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi(n+k);\frac{\pi}{6}+2\pi(n-k)\right)$
2в)	$(\pi k;\ 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

С–19*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)$	$(2\pi+3\pi n;\ 3\pi+3\pi n)$
1б)	$\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$
1в)	$\left\{\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}\right\}\cup\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right]$	$\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}\cup\left[\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right]$
2а)	$\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$	$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$
2б)	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi-\operatorname{arcctg}2+\pi n\right)$	$\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$
2в)	$\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$
2г)	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\operatorname{arctg}3+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\operatorname{arctg}2+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$

3а)	$\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$	$\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\pi+2\pi n;\frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$
3б)	$\left(\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$
3в)	$\{2\pi n\}\cup\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}\cup\left(\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right]$

С–23*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	- 7; 8	0; 5
1б)	1	4
1в)	$2-2\sqrt{3};2$	$1+\sqrt{6}$
1г)	3	1; 2; 10
1д)	8	– 15; 1
1е)	4	9
1ж)	4	– 1
1з)	± 2	± 6
1и)	[3; 8]	нет корней
1к*)	1/2	1
2а)	$(-\infty;-1]\cup(8;\infty)$	$(-\infty;-4]$
2б)	[2,5; 3)	[2; 3)
2в)	[5; 6) ∪ (9; 10]	$\left[\frac{1}{2};1\right)$
2г)	[– 2; 1] ∪ {3}	$\{-3\}\cup\left(-\frac{1}{2};1\right]$

2д)	$[1;\infty)$	$\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$
3а)	(3; 1)	$(2;3);\left(\frac{13}{3};\ \frac{5}{3}\right)$
3б)	(10; 6)	(5; 4)
3в)	(1; 81); (81; 1)	(64; 1)

С–27*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	0; 1	0;3
1б)	– 1; – 4	– 2; – 3
1в)	$3;2\frac{1}{4}$	1,5
1г)	± 1	± 1
1д)	$\frac{\pi n}{2}$	$\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$
1е)	$\pm\frac{\pi}{4}+\pi n;\pm\operatorname{arctg}2+\pi k$	πn
1ж)	± 2	2
1з)	3	7
1и)	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$
1к)	2	1
1л)	$\varnothing$	2
2а)	$\left(-\sqrt{7};-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};\sqrt{7}\right)$	$\left[-\frac{1}{5};7\right]$
2б)	$(3;\infty)$	$(2;\infty)$
2в)	$[-2;0]\cup[2;\infty)$	$[-\infty;-9]\cup[0;9]$
2г)	$(2,\infty)$	$[0;\infty)$
2з)	$(-1;2]\cup[3;\infty)$	$[-2;-1]\cup[1;\infty)$

С–28*	(в решении задач данной работы предполагается, что основание степени может принимать неположительные значения)	
	Вариант 1	**Вариант 2**
1а)	$-2; -1; 0; 2$	$-3; 0; 1; 2$
1б)	$-1; 2\pm\sqrt{2}$	$-2; -1\pm\sqrt{10}$
1в)	$2; 4$	$1; 3$
1г)	$0; 5$	0
2а)	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty)$
2б)	$(-\infty;-6)\cup(-4;1)\cup(3;\infty)$	$(-4;-2)\cup(1;4)$
2в)	$[-2;-1]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right]$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[1;\infty)\cup\{0\}$
2г)	$[1;\infty)\cup\{0\}$	$(-\infty;2]$
3а)	$-4; 2; 3$	$5; 6$
3б)	$(1; 4); (-1; 6); (3; 2)$	$(4; 1); (5; 2)$

С–31*	**Вариант 1**	**Вариант 2**
1а)	$-2\pm\sqrt{\log_3\frac{81}{25}}$	$1\pm\sqrt{\log_5 640}$
1б)	$\pm\frac{1}{\log_2 2,5}$	$0; \frac{1}{\log_2\frac{2}{3}}$
1в)	$2; -\frac{1}{\lg 5}$	$2; -\log_3 6$
2а)	$8; \frac{1}{4}$	$9; \frac{1}{3}$
2б)	$10; \frac{1}{10}; 10^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$10; \frac{1}{10}; 10^{\pm\frac{\sqrt{2}}{3}}$
2в)	$4^{\pm\sqrt{2}}$	$3; 3^9$
2г)	$3; \frac{1}{3}$	$6; \frac{1}{6}$

3а)	(3; 1); (3; −1)	(1; 10); (− 1; 10)
3б)	$(4;9);\left(-2;\frac{1}{81}\right)$	$(256;5);\left(\frac{1}{1024};-4\right);(16;3);\left(\frac{1}{64};-2\right)$
3в)	$\left(2\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right);$ $(8;2);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)$	$(5;25);\left(\frac{1}{25};\frac{1}{5}\right)$
4а)	2	4
4б)	1	1

С–33*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	21	24
1б)	12	9
1в)	16	8
1г)	0; 1,75	− 1; 0,75
1д)	10; 100	$\frac{1}{2};8$
1е)	$\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\frac{\pi}{4}+\pi n$
1ж)	$1;\frac{1}{\sqrt{2}};4$	$\sqrt{3};3$
1з*)	$\frac{1}{4};2$	$\frac{1}{81};3$
1и*)	2 (замена $y=\log_2 x$)	16 (замена $y=\log_{16} x$)
2а)	$(-4;-3]\cup[8;\infty)$	$(2;3]\cup[5;\infty)$
2б)	$\left(\log_2\frac{2}{3};0\right)\cup\left[\log_2\frac{4}{3};\infty\right)$	$[1;2)$
2в)	$(0;1)\cup(2;8)$	$(0;0,1)\cup(1;1000)$
2г)	$(3;\infty)$	$(4;\infty)$
2д)	$\left(4-\sqrt{2};3\right)\cup\left(4+\sqrt{2};\infty\right)$	$(-1,5;-1)\cup(4;\infty)$
2е)	$(\log_3 10;\infty)$	$(\log_4 13;2]$

2ж)	$\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup\left[1;2\frac{1}{3}\right)$	$(-\infty;\ -2]\cup[0;\infty)$
2з*)	$\left(0;2^{\sqrt{2\log_2\frac{4+\sqrt{5}}{2}}}\right]\cup\left[2^{\sqrt{2\log_2\frac{4+\sqrt{5}}{2}}};\infty\right)$	$\left(0;3^{\sqrt{0{,}5\log_3\frac{3+\sqrt{3}}{2}}}\right]\cup\left[3^{\sqrt{0{,}5\log_3\frac{3+\sqrt{2}}{2}}};\infty\right)$
3а)	(2; 3); (3; 2)	(125; 4); (4; 125)
3б)	$\left(0{,}001;\frac{1}{2}\right);\left(1000;-\frac{1}{2}\right)$	(2; 10); (– 2; 0,1)
3в)	(3; 3)	$\left(4;\frac{1}{4}\right)$

С–40*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	вып. вниз (– ∞; 1); (3; ∞) вып. вверх (– 1; 3)	вып. вниз $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right);(1;\infty)$ вып вверх $\left(\frac{1}{3};1\right)$
1б)	вып. вниз (–∞; 6); (6; ∞) вып. вверх (– 6; 6)	вып. вниз (–∞; 1); (1; ∞) вып. вверх (- 1; 1)
1в)	вып. вниз $\left(\frac{7\pi}{12}+\pi n;\frac{11\pi}{12}+\pi n\right)$ вып. вверх $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right)$	вып. вниз $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$ вып. вверх $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$
2	3	2
4	3); 4)	1); 2)
5а)	$y = x$	$y = 2x$
5б)	$y = 2$	$y = 1$
5в)	$x = -1;\ x = 2;\ y = 0$	$x = -3;\ x = 2;\ y = 0$
5г)	$x = 1$	$x = 1$
5д)	$x = -3;\ x = 3;\ y = x$	$x = -2;\ x = 2;\ y = x$

С–43*	Вариант 1	Вариант 2
1	$y = \ 5x - 6;\ y = -x - 2$	$y = 2x - 5;\ y = 6x \ 13$
2	$y = 8x \quad 20$	$y = 8x + 4$

3	$y = -x - 2{,}25$	$y = -x - 2{,}75$
4	13,5	175/4
5	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
6	3	3

С–47*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\frac{x^3}{3} - 2\operatorname{arctg} x + c$	$x - 2\operatorname{arctg} x + c$
1б)	$-\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + c$	$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$
1в)	$\frac{3}{8}x - 2\sin\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} + c$	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 2x + c$
1г)	$\arcsin(x - 1) + c$	$\arccos(x + 1) + c$
1д)	$\operatorname{arctg}(x + 3) + c$	$\operatorname{arctg}(x - 2) + c$
1е)	$\frac{1}{15}\left(x^3 - 1\right)^5 + c$	$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(x^2 + 1\right)^2} + c$
1ж)	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + c$	$\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + c$
1з)	$\frac{1}{\cos x} + c$	$-\frac{1}{2\sin^2 x} + c$
1и)	$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$	$\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$
1к)	$\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + c$	$\frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x-4)^3} + c$
1л)	$\frac{1}{2}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + c$	$9\sin\frac{x}{3} - 3x\cos\frac{x}{3} + c$
1м)	$\frac{1}{192}(8x - 9)\sqrt{9 + 16x} + c$	$\frac{1}{120}(2x + 1)^5(10x - 1) + c$
1н)	$x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$	$x\arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$
2а)	$\frac{9}{4}\pi$	-18π

2б)	5	5
2в)	0	0
3а)	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$
3б)	$2\left(\sqrt{2}-1\right)$	6
3в)	$42\frac{1}{3}$	32
3г)	$8\sqrt{2}-6$	5
4а)	$[-1; 6]$	$[1; 3]$
4б)	$\pi/4$	0
4в)	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

С–51*	Вариант 1	Вариант 2
2а)	$\frac{1}{2}e^{x^2}+c$	$-e^{1/x}+c$
2б)	$\ln\left\|\ln x\right\|+c$	$\frac{1}{3}\ln^3 x+c$
2в)	$\ln\left\|\sin x\right\|+c$	$-\ln\left\|\cos x\right\|+c$
2г)	$\frac{1}{3}\ln\left\|x^3+1\right\|+c$	$\ln\left(x^2+3\right)+c$
2д)	$-\ln\left(1+\cos^2 x\right)+c$	$\ln\left(1+\sin^2 x\right)+c$
2е)	$\frac{\left(x^2+2x\right)^{3/2}}{3}+c$	$\frac{2\left(x^2-3x+2\right)^{3/2}}{9}+c$
2ж)	$\frac{e^{2x}}{4}\cdot(2x-1)+c$	$e^{x}(x+1)+c$
2з)	$\frac{-2\ln x-1}{4x^2}+c$	$\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+c$
2и)	$\cos x(1-\ln\cos x)+c$	$\sin x(\ln\sin x-1)+c$
2к)	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$

2л)	$x^2 \operatorname{tg} x^2 + \ln\left\|\cos x^2\right\| + c$	$-x^2 \operatorname{ctg} x^2 + \ln\left\|\sin x^2\right\| + c$
2м*)	$\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c$	$\frac{1}{2} x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$
3а)	$2e^{3x}$	$3e^{-4x}$
3б)	$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$	$2\cos\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x$
3в)	$\frac{3}{1-x}$	$4x + 4$
3г)	$-2e^{x}$	$-e^x$

С–55*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$x^2 + y^2 + 4x = 0$ Окружность с центром в точке (– 2; 0) и $R = 2$	$x^2 + y^2 + 4y = 0$ Окружность с центром в точке (0; – 2) и $R = 2$
1б)	$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$ Точки вне кольца, образованного окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$	$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) \geq 0$ Точки внутри кольца, образованного окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 9$
1в)	Точки вне окружности $x^2 + (y+1)^2 = 2$ и сама окружность, кроме точки (1; 0)	Точки внутри окружности $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и сама окружность, кроме точки (–1; 0)
1г)	$x^2 + y^2 = 4$ Окружность с центром в т. (0; 0) и $R = 2$	$x^2 + y^2 = 9$ Окружность с центром в т. (0; 0) и $R = 3$
4	$z_4 = -4 + i$	$z_4 = 3 + i$
5а)	$-1 \pm i\sqrt{5}; -3 \pm \sqrt{3}$	$-4; -2; \frac{-5 \pm i\sqrt{7}}{2}$
5б)	$5; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$	$-6; -1 \pm i\sqrt{2}$
5в)	$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{1+4i}}{2}$	$\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}; 2; -1; \frac{1 \pm \sqrt{1 \pm 8i}}{2}$

С–60*	Вариант 1	Вариант 2
3	-555	8085
4	$112C_{15}^{8}$	$36\cdot C_{24}^{10}$
5	$\frac{1}{8}(8!)^2$	$2(11!)^2$
6	$A_{30}^{2}+1$	$A_{30}^{3}+1$

С–64*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	5/11	4/9
1б)$_{1)}$	0,962	0,038
1б)$_{2)}$	0,025	0,291
1в)	83%	17%
2а)	1/6	1/5
2б)	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^n$	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^n$
2в)	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
2г*)	1/12	11/12
3а)	1/4	3/4
3б)	$1-\left(1-\frac{a}{60}\right)^2$	$\left(1-\frac{a}{60}\right)^2$

Литература

1. *А. Н. Колмогоров* и др. Алгебра и начала анализа 10-11. М., 1999
2. *Н. И. Шкиль* и др. Алгебра и начала анализа 10-11. К., 1995
3. *Н. Я. Виленкин* и др. Алгебра и математический анализ 10, 11. М., 1997
4. *М. И. Башмаков*. Алгебра и начала анализа 10-11. М., 1999
5. *Ш. А. Алимов* и др. Алгебра и начала анализа 10-11. М., 1998
6. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под ред. *М. И. Сканави*. Мн, 1990
7. *В. В. Вавилов* и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., 1988
8. *В. В. Вавилов* и др. Задачи по математике. Алгебра. М., 1987
9. *А. Г. Мерзляк* и др. Тригонометрия. М., 1998
10. *А. Г. Мерзляк* и др. Алгебраический тренажер. М.—Х., 1998
11. *А. Г. Мерзляк* и др. Учимся решать задачи по началам анализа. К., 1998
12. *В. С. Лютикас*. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. М., 1990

Содержание

Работа	Колмогоров	Виленкин	стр.
К-4. Степени и корни	Гл. IV, § 9	Гл. VIII, IX, 11 кл.	56
С-25. Показательные уравнения. Системы показательных уравнений	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 2, 11 кл.	59
С-26. Показательные неравенства	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 2, 11 кл.	60
С-27*. Методы решения показательных уравнений и неравенств (домашняя самостоятельная работа)	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 2, 11 кл.	62
С-28*: Показательно-степенные уравнения и неравенства (домашняя самостоятельная работа)	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 2, 11 кл.	63
К-5. Показательная функция	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, 11 кл.	64
С-29. Логарифм. Свойства логарифмов	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 1, 11 кл.	67
С-30. Логарифмические уравнения и системы	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 2, Гл. IX, 11 кл.	70
С-31*. Применение логарифмов в решении трансцендентных уравнений и систем (домашняя самостоятельная работа)	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, Гл. IX, 11 кл.	71
С-32. Логарифмические неравенства	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, § 2, 11 кл.	72
С-33*. Методы решения логарифмических уравнений, неравенств, систем (домашняя самостоятельная работа)	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, IX, 11 кл.	74
К-6. Логарифмическая функция	Гл. IV, § 10	Гл. VIII, IX	76
С-34. Обобщение понятия модуля. Уравнения и неравенства с модулем	Гл. II	Гл. IV, 10 кл.	79
Начала анализа			82
С-35. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций. Непрерывность функции	Гл. II	Гл. IV, 10 кл.	82

Работа	Колмогоров	Виленкин	стр.
С-50. Степенная функция	Гл. IV, § 9	Гл. VIII, § 4, 11 кл.	127
С-51*. Дополнительные задачи математического анализа (домашняя самостоятельная работа)	Гл. III, IV	Гл. VII, VIII, 11 кл.	130
К-10. Производная и первообразная показательной, логарифмической и степенной функции	Гл. IV, § 11	Гл. VIII, 11 кл.	131
Комплексные числа			135
С-52. Понятие комплексного числа. Действия с комплексными числами в алгебраической форме	—	Гл. X, § 1, 11 кл.	135
С-53. Модуль и аргумент комплексного числа. Действия с комплексными числами в геометрической форме	--	Гл. X, § 2, 11 кл.	138
С-54. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.	—	Гл. X, § 2, 11 кл.	140
С-55*. Дополнительные задачи с комплексными числами (домашняя самостоятельная работа)	—	Гл. X, 11 кл.	143
К-11. Комплексные числа	—	Гл. X, 11 кл.	144
Комбинаторика			148
С-56. Множества. Операции над множествами	—	Гл. XI, 11 кл.	148
С-57. Основные формулы комбинаторики. Простейшие комбинаторные задачи	—	Гл. XI, 11 кл.	151
С-58. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов	—	Гл. XI, 11 кл.	154
С-59. Комбинаторные задачи. Правило суммы и правило произведения	—	Гл. XI, 11 кл.	157

Алла Петровна Ершова
Вадим Владимирович Голобородько

Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 класса

ИД № 03253 от 15.11.2000
Печать офсетная. Формат 60×88/16.
Уч.-изд. л. 13.00. Тираж 20 000 экз.
Заказ 5071.

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а
Заказы по телефонам: в Москве (095) 365-30-55

Ордена Трудового Красного Знамени
ОАО «Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области,
ул. Полиграфистов, д. 1