O. SACTER

TRIGONOMETRIE

MANUAL PENTRU CLASA a X-a REALĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
București — 1963

Manualul a fost aprobat
cu nr. 129496/1961 de
Ministerul Învățămîntului și Culturii

Referenți:
Mihoc Gh., prof. univ., membru
corespondent al
Academiei R.P.R.
Mihăileanu N., prof. univ.
Dinescu M., prof.
Vidrașcu M., lector univ.
Drăgănel T., prof.

INTRODUCERE

1. În unele cazuri întîlnite în practică, precum şi în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii, se pun probleme de matematici care nu se pot rezolva numai prin cunoştinţele de geometrie însuşite de elevi pînă în clasa a X-a. În acest sens, este concludent următorul exemplu:

Se proiectează o linie ferată îngustă, care să unească două şantiere, A şi B, despărţite printr-un teren inundat (fig. 1). *În vederea începerii lucrărilor, e nevoie să se cunoască distanţa între cele două şantiere.*

Cum se poate calcula această distanţă AB?

Rezolvare grafică. Dintr-un punct C situat în afara terenului inundat, de unde se văd simultan A şi B, se măsoară unghiul ACB, precum şi distanţele CA şi CB. Construim un triunghi $A'B'C'$ (fig. 1), asemenea cu triunghiul ABC. Dacă alegem raportul de asemănare $\frac{A'C'}{AC} = k$ astfel ca triunghiul $A'B'C'$ să încapă pe

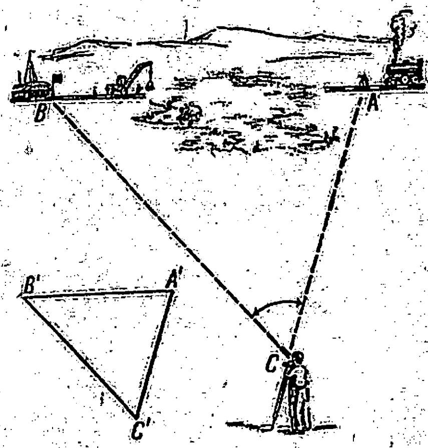


Fig. 1

hîrtia de desen, atunci putem măsura $A'B'$. Din raportul $\frac{A'B'}{AB} = k$ obţinem $AB = \frac{A'B'}{k}$, care ne va da distanţa AB în funcţie de $A'B'$ şi raportul k de asemănare.

2. În exemplul de mai sus am măsurat două lungimi şi un unghi, cu scopul de a calcula distanţa AB. Calculul direct nu a fost posibil, pentru că geometria nu ne dă relaţii

între laturile și unghiurile unui triunghi; de aceea am fost nevoiți să folosim construcții și măsurări, adică să rezolvăm grafic problema. Trebuie să constatăm că prin metoda grafică se introduc erori datorite imperfecțiunii aparatelor de măsură și reducerii la scară a figurii reale. Acestea fac ca rezultatele obținute pe cale „grafică" să nu aibă precizia cerută de împrejurări. Devine astfel necesară introducerea unei discipline matematice care să fie capabilă să rezolve prin calcul problemele geometrice privind triunghiuri și poligoane plane sau sferice, în care datele cuprind laturi și unghiuri.

Această disciplină este *trigonometria*.

3. *Trigonometria* poate fi *plană* sau *sferică*. Prin *trigonometrie plană* se înțelege acea parte a matematicii care se ocupă cu rezolvarea problemelor ce se pun în legătură cu triunghiurile rectilinii sau cu poligoanele ale căror laturi sînt segmente de dreaptă. De rezultatele ei se servesc în practică topografii, cînd măsoară terenuri nu prea întinse ce pot fi asimilate cu figuri plane, sau fizicienii, cînd li se pun probleme care pot fi reprezentate geometric prin figuri plane.

Dacă ținem seamă că suprafețele oceanelor se pot socoti ca suprafețe așezate pe sfera pămîntească și că aștrii de tot felul, de care se ocupă astronomia, sînt reprezentați prin puncte pe o boltă cerească sferică cu centrul în centrul Pămîntului, atunci în multe probleme de navigație și în unele probleme de astronomie se impune luarea în considerare a unor triunghiuri sau poligoane sferice. Astfel, în cazul determinării poziției unor aștri naturali sau artificiali, așa cum sînt sateliții artificiali creați de oamenii de știință și tehnicienii sovietici, este necesar să folosim relații între laturile și unghiurile unor triunghiuri sau poligoane ale căror laturi sînt arce de cercuri mari ale unei sfere (cercuri ale căror plane trec prin centrul sferei). Cu stabilirea unor asemenea relații se ocupă *trigonometria sferică*.

În manualul de față se vor trata numai elementele de trigonometrie plană absolut necesare studierii altor discipline și, totodată, în vederea unei pregătiri de specialitate.

CAPITOLUL I

UNGHIURI ŞI ARCE

4. La rezolvarea problemelor cu ajutorul formulelor trigonometrice se folosesc pentru unghiuri mai multe feluri de unităţi de măsură :

Unghiul drept (1 dr), adică unghiul format de două semidrepte perpendiculare, este uneori luat ca unitate de măsură pentru unghiuri.

E x e m p l u. Dacă A, B, C, D sînt unghiurile unui patrulater şi unghiul drept este luat ca unitate de măsură, atunci între cele patru unghiuri avem întotdeauna relaţia:

$$A + B + C + D = 4 \text{ dr}.$$

Aplicaţie. *O roată dinţată are 72 de dinţi. Cu ce unghi exprimat în unghiuri drepte se învîrteşte roata în cazul rotirii cu un dinte?*

Rezolvare. 72 de intervale egale fac 4 dr, rezultă deci că, rotindu-se cu un dinte, roata descrie $\frac{4}{72}$ dr $= \frac{1}{18}$ dr $\approx 0{,}0555...$dr.

5. *Unghiul de un grad sexagesimal este un unghi egal cu a 90-a parte dintr-un unghi drept. În sistemul de măsură sexagesimal, gradul este împărţit în 60 de minute şi minutul în 60 de secunde.*

Avem deci: $1°$ (un grad sexagesimal) $= 60'$ (60 de minute) şi: $1'$ (un minut sexagesimal) $= 60''$ (60 de secunde). În acest sistem, măsura unui unghi al poligonului regulat cu 7 laturi este:

$$\frac{2n-4}{n} \text{ dr} = \frac{2 \cdot 7 - 4}{7} \text{ dr} = \frac{10}{7} \text{ dr} = \frac{10}{7} \cdot 90° = 128° 34' 17 \frac{1}{7}''.$$

Aplicaţie. *Care este măsura în grade sexagesimale a unghiului descris de verticala unei localităţi de la ecuatorul pămîntesc în timp de o oră şi cinci minute?*

Rezolvare. În 24 de ore, verticala descrie 360° și, prin urmare, în 1^h5^m verticala va descrie unghiul de:

$$\frac{360° \cdot 1^h 5^m}{24^h} = \frac{360° \cdot 65^m}{24 \cdot 60^m} = \frac{6° \cdot 65}{24} = 16°15'.$$

6. *Unghiul de un grad centesimal este un unghi egal cu a 100-a parte dintr-un unghi drept. În sistemul centesimal subunitățile sînt: minutul centesimal, egal cu a 100-a parte dintr-un grad centesimal, și secunda centesimală, egală cu a 100-a parte dintr-un minut centesimal.*

Avem deci: 1^g (un grad centesimal) $= 100^c$ (100 minute centesimale) și

1^c(un minut centesimal) $= 100^{cc}$ (100 secunde centesimale).

Un unghi de $18^g21^c32^{cc}$ exprimat în sistemul centesimal se scrie simplificat $18^g{,}2132$, iar unghiul de $42^g{,}035$ exprimat în unități centesimale se citește 42 de grade centesimale, 3 minute centesimale și 50 de secunde centesimale.

Exemplu. Măsura unui unghi al poligonului regulat cu 11 laturi este:

$$\frac{2n-4}{n}\text{dr} = \frac{2 \cdot 11 - 4}{11}\text{dr} = \frac{18}{11} \cdot 100^g = \frac{1800}{11}\text{grade centesimale} \approx$$

$\approx 163^g{,}6363$, adică acest unghi este aproximativ egal cu $163^g63^c63^{cc}$.

Aplicație. *Elicea unui motor de avion face 2 000 de ture pe minut. Ce unghi exprimat în unități centesimale descrie elicea în 7 miimi de secundă de timp?*

Rezolvare. 7 miimi de secundă $= \frac{0{,}007}{60}$ minute de timp;

2 000 de ture înseamnă 2 000 · 400 de grade centesimale; rezultă deci că în 7 miimi de secundă elicea descrie unghiul de:

$$2\,000 \cdot 400 \cdot \frac{0{,}007}{60} \approx 93^g3333 = 93^g33^c33^{cc}.$$

7. Unele probleme de fizică, cum e de exemplu aceea prin care se cere calcularea accelerației radiale $a = \omega^2 R$ într-o mișcare circulară uniformă (v. *Fizica* clasa a VIII-a), impun folosirea unei noi unități de măsură pentru unghiuri: *radianul*.

Unghiul de un radian este un unghi la centru care cuprinde între laturile sale un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza R a arcului de cerc (fig. 2).

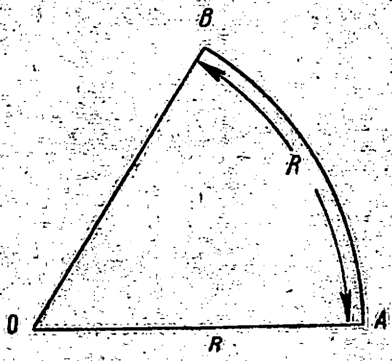


Fig. 2

Deoarece, între laturile unui unghi drept, arcul de cerc de rază R, avînd centrul în vîrful unghiului, are lungimea $\frac{\pi}{2} R$, adică de $\frac{\pi}{2}$ ori lungimea arcului de un radian, rezultă că un unghi drept are $\frac{\pi}{2}$ radiani. Un unghi de un grad sexagesimal va avea, prin urmare, $\frac{1}{90} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180}$ radiani și, în consecință, un unghi de $N°$ va avea un număr de radiani N_r, dat de formula:

$$\boxed{N_r = \frac{\pi}{180} \cdot N°}$$

Astfel, un unghi de 60° are $N_r = \frac{\pi \cdot 60°}{180°} = \frac{\pi}{3}$ radiani, iar unghiul de 135° are $N_r = \frac{\pi \cdot 135°}{180°} = \frac{3\pi}{4}$ radiani.

Din formula de mai sus obținem numărul de grade sexagesimale $N°$ ale unui unghi care are N_r radiani:

$$N° = \frac{180°}{\pi} \cdot N_r.$$

De exemplu, unghiul de 1 radian are $N° = \frac{180°}{\pi} \approx$ $\approx 57°17'44''$.

Să vedem cîţi radiani are un unghi la centru care cuprinde între laturile sale un arc de cerc de lungime L, raza cercului fiind R.

Dacă notăm cu N° numărul de grade sexagesimale ale unghiului, atunci se ştie din geometrie că avem: $L = \frac{\pi R N^\circ}{180^\circ}$, de unde:

$$N^\circ = \frac{180^\circ L}{\pi R}$$

şi, prin urmare, numărul de radiani al acestui arc este dat de:

$$N_r = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot N^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{180^\circ L}{\pi R} = \frac{L}{R}$$

sau:

$$\boxed{N_r = \frac{L}{R}}$$

Astfel, unghiul de 60°, care cuprinde între laturile sale un arc a cărui lungime este a şasea parte din lungimea cercului, adică $\frac{2\pi R}{6}$, are un număr de radiani egal cu:

$$N_r = \frac{\frac{2\pi R}{6}}{R} = \frac{\pi}{3} \text{ radiani.}$$

Dacă înlocuim în formula $N_r = \frac{L}{R}$ pe R cu 1, obţinem:

$$\boxed{N_r = L}$$

Cu alte cuvinte, *numărul de radiani al unui unghi este egal cu numărul care exprimă lungimea arcului de cerc corespunzător, atunci cînd raza cercului este luată ca unitate de măsură (raza cercului este egală cu* 1).

8. Această observare este foarte utilă la trecerea de la unităţi sexagesimale la radiani şi, invers, la folosirea tabelei care dă lungimea arcelor de cerc de rază 1 (v. *Tabele*

şi formule matematice, Ed. tehnică, 1954, p. 344—345 şi *Tabele matematice*, Ed. tehnică, 1959, p. 167).

Exemplul I. Să se transforme în radiani unghiul de 26°37′42″.

În tabelă se găseşte:

în dreptul lui 26°	numărul	0,453786
în dreptul lui 37′	numărul	0,010763
în dreptul lui 42″	numărul	0,000204
	Total:	0,464753;

prin urmare arcul de 26°37′42″ are 0,464753 radiani.

Exemplul II. Să se transforme în grade, minute şi secunde sexagesimale unghiul care are 1,236450 radiani.

Căutăm în tabelă, la coloana grade, numărul cel mai apropiat de 1,236450; acesta este 1,221730, care se află în dreptul a 70 de grade sexagesimale.

Cel mai apropiat număr de diferenţa 1,236450 − 1,221730 = = 0,014720 din coloana minute: 0,014544 se află în dreptul a 50 de minute.

Numărul cel mai apropiat de diferenţa 0,014720 — — 0,014544 = 0,000176 din coloana secunde este 0,000170, care se află în dreptul a 35 de secunde.

Rezultă deci că unghiul de 1,236450 radiani are măsura sexagesimală 70°50′35″.

Măsura unghiurilor în radiani este foarte mult folosită în matematică, în fizică, în tehnică etc. şi datorită faptului că numărul care exprimă radianii unui arc exprimă simultan atît mărimea unghiului la centru corespunzător, cît şi lungimea arcului măsurat cu raza cercului.

Aplicaţia I. *O placă de tablă are forma unui sector circular de rază 3,5* cm *şi cu unghiul la centru de 23°17′15″. Să se calculeze perimetrul şi aria sectorului.*

Pentru a calcula perimetrul şi aria avem nevoie de lungimea arcului. Din formula care dă numărul de radiani $N_r = \frac{L}{R}$, deducem că lungimea arcului de cerc este $L = RN_r$. Ţinînd seama că 23°17′15″ are 0,406443 radiani, rezultă $L \approx 3{,}5 \cdot 0{,}406443 = 1{,}4225505$ cm. Perimetrul sectorului are deci lungimea aproximativă $P = 3{,}5 + 3{,}5 +$

$+ 1{,}42 = 8{,}42$ cm. Pentru a calcula aria S a sectorului, luăm jumătate din produsul lungimii arcului prin rază. Avem deci:

$$S = \frac{L \cdot R}{2} = \frac{R^2}{2} \cdot N_r = \frac{3{,}5^2}{2} \cdot 0{,}406443 \approx 2{,}49 \text{ cm}^2.$$

Aplicaţia II. *Să se calculeze viteza unghiulară a Pămîntului în rotaţia sa în jurul axei polilor.*

Viteza unghiulară (v. *Fizica* clasa a VIII-a) este egală cu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ radiani, unde T este durata unei rotaţii complete.

De aici urmează că viteza unghiulară căutată este egală cu:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0{,}000072722 \text{ rad/s}.$$

9. Trecerea de la măsura unui unghi într-un sistem de unităţi la măsura aceluiaşi unghi în alt sistem de unităţi. Să notăm cu d măsura în unghiuri drepte, cu s° numărul de grade sexagesimale, cu c^g numărul de grade centesimale şi cu N_r numărul de radiani al unui aceluiaşi unghi u. Între aceste numere se stabileşte, printr-o regulă de trei simplă, următorul şir de rapoarte egale:

$$\boxed{\frac{d}{2} = \frac{s^\circ}{180} = \frac{c^g}{200} = \frac{N_r}{\pi}}$$

care permit trecerea cu uşurinţă de la un sistem de unităţi la altul.

10. Unghiuri şi arce negative, unghiuri şi arce mai mari de 360°. Faptul că, în aplicaţiile practice, unghiurile iau naştere prin rotaţia unei semidrepte într-un plan şi că această rotaţie se poate efectua în două sensuri opuse ne obligă să considerăm un anumit sens de rotaţie ca pozitiv, iar pe cel opus ca negativ. *Convenţional se consideră ca pozitiv sensul contrar mişcării acelor de ceasornic, iar ca sens negativ, sensul de rotaţie al acelor de ceasornic.*

Astfel unghiul $\widehat{AOB}$ din figura 3, *a*, care ia naştere prin rotaţia lui OA în jurul lui O, în sensul invers mişcării acelor de ceasornic, aşa cum indică săgeata, este un unghi pozitiv, iar arcul AB descris de punctul A este de asemenea un arc pozitiv. Din contră, unghiul $\widehat{BOA}$, din figura 3, *b* care ia naştere prin rotaţia segmentului OB în sensul mişcării acelor de ceasornic, este un unghi negativ, iar arcul corespunzător BA este de asemenea negativ.

În mişcarea roţilor în jurul axei lor, o spiţă de roată poate descrie unghiuri care depăşesc 360° ; pentru acest

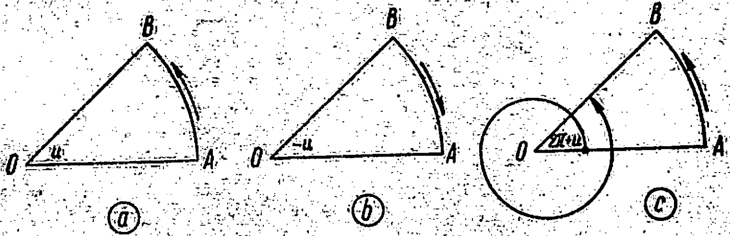


Fig. 3

motiv sîntem obligaţi să considerăm şi teoretic unghiuri mai mari de 360° şi în general unghiuri de orice mărime pozitivă sau negativă.

Un unghi mai mare de 360° este generat de o semidreaptă ale cărei puncte, în cursul rotaţiei, descriu arce mai mari decît lungimea unui cerc. Un astfel de exemplu îl avem în figura 3, *c*.

11. Unghiurile pozitive şi negative (unghiuri orientate), aşa cum au fost definite mai sus, se pot aduna după regula de adunare a unghiurilor definită în geometrie, respectînd însă şi sensurile.

Aplicaţie. *Să se efectueze suma dintre unghiurile* $\widehat{AOB} = \alpha$ *radiani şi unghiul de* π *radiani* (fig. 4).

a) Cazul cînd $\widehat{AOB} > 0$ (fig. 4, *a*) :

Urmînd regula de adunare a unghiurilor, descriem din vîrful O cercul de rază $OA = 1$ şi purtăm pe cerc arcul $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ şi apoi arcul $\overset{\frown}{BMB'} = \pi$, care este un semicerc pozitiv avînd originea sa B în extremitatea B a arcului $\overset{\frown}{AB}$. Unghiul $\widehat{AOB'}$, haşurat pe figură, are mărimea $\pi + \alpha$ radiani.

b) Cazul $\widehat{AOB} < 0$ (fig. 4, *b*):

Urmînd aceeaşi regulă de adunare, descriem cercul de rază $OA = 1$ şi purtăm pe cerc arcul $\overset{\frown}{AB} = \alpha$ în sens nega-

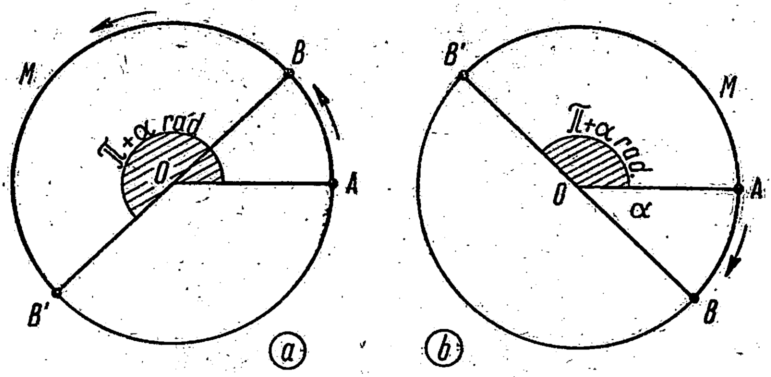


Fig. 4

tiv şi apoi arcul $\overset{\frown}{BMB'} = \pi$ în sens pozitiv; acesta din urmă este un semicerc avînd originea sa B în extremitatea B a arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Unghiul $\widehat{AOB'}$, haşurat pe figură, are mărimea $\pi + \alpha$ radiani, unde α este negativ.

O b s e r v a r e   i m p o r t a n t ă. Şi într-un caz şi în celălalt, unghiului $\pi + \alpha$ (pentru orice α, pozitiv sau negativ) îi corespunde pe cercul de rază 1 un arc care are ca *origine pe aceea a arcului* α *şi ca extremitate simetrica faţă de centrul cercului a extremităţii arcului* α.

12. **Expresia generală a măsurii în radiani a arcelor care au aceeaşi origine şi aceeaşi extremitate.** Să considerăm unghiul $\widehat{AOM}$ (fig. 5, *a*), căruia îi corespunde pe cercul de rază 1 arcul $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ (cu originea A şi extremitatea M). Se poate ajunge de la A la M, dacă la un număr întreg de rotaţii efectuate într-un sens sau altul în jurul lui O se adaugă măsura α a arcului $\overset{\frown}{AM}$.

Cu alte cuvinte, măsura în radiani a arcului parcurs în acest caz ca şi a unghiului corespunzător este : $n \cdot 2\pi + \alpha = \alpha + 2n\pi$, unde n este un întreg oarecare[1]. Cînd $n = 1$ şi α este pozitiv, atunci unghiul $u = \alpha + 2\pi$ este un unghi mai mare ca 360°.

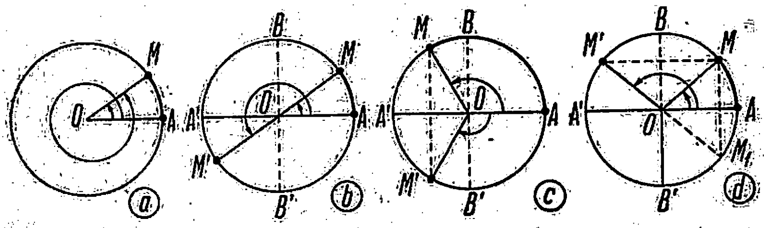


Fig. 5.

Aşadar, *măsura* θ *în radiani a arcelor care au aceeaşi origine şi aceeaşi extremitate cu un arc dat* α *este dată de formula*

$$\boxed{\theta = \alpha + 2n\pi}$$

unde n este un număr întreg oarecare.

Din observarea de mai sus şi din formula generală a arcelor deducem alte formule importante pentru lecţiile care urmează.

Aplicaţia I. *Fiind dat un cerc de rază 1 pe care s-a luat o origine A a arcelor, să se stabilească formula generală pentru măsura în radiani a arcelor care au aceeaşi origine şi ale căror extremităţi sînt capetele unui diametru.*

Fie arcul $\widehat{AM} = \alpha$ (fig. 5, *b*) ; arcul $\widehat{AMM'}$, a cărui extremitate M' se află în celălalt capăt al diametrului care trece prin M, se obţine luînd simetricul lui M faţă de centrul O al cercului ; aşa că avem $\widehat{AM'} = \pi + \alpha$. Scriind expresiile generale pentru măsura în radiani a acestor arce, pe baza formulei de mai sus, obţinem :

$$\widehat{AM} = \alpha + 2n\pi \text{ şi } \widehat{AM'} = \alpha + \pi + 2n'\pi = \alpha + (2n'+1)\pi,$$

unde n şi n' sînt întregi oarecare.

---

[1] Prin *întreg oarecare* se înţelege un număr întreg pozitiv, negativ sau zero.

Aşadar, *toate arcele care au aceeaşi origine şi extremităţile situate la capetele unui diametru sau într-un acelaşi capăt al diametrului ce trece prin extremitatea arcului α au mărimea θ în radiani, dată de formula:*

$$\boxed{\theta = \alpha + k\pi}$$

unde k este un întreg oarecare. Pentru două valori ale lui k de parităţi diferite obţinem extremităţile aşezate de o parte şi de alta a centrului O, iar pentru două valori ale lui k de aceeaşi paritate obţinem extremităţi confundate.

Aplicaţia II. *Să se găsească formula generală pentru măsura în radiani a arcelor care au aceeaşi origine A* (fig. 5, *c*) *şi ale căror extremităţi sînt simetrice faţă de diametrul ce trece prin A.*

Fie arcul $\overset{\frown}{AM} = \alpha$; arcul $\overset{\frown}{AM'}$, a cărui extremitate M' este simetricul lui M faţă de $A'A$, este egal în valoare absolută cu $\overset{\frown}{AM}$, însă îndreptat în sens contrar, aşa că avem $\overset{\frown}{AM'} = -\alpha$. Scriind expresiile generale pentru măsura în radiani a acestor arce, avem:

$$\overset{\frown}{AM} = \alpha + 2n\pi \text{ şi } \overset{\frown}{AM'} = -\alpha + 2n'\pi,$$

unde n şi n' sînt întregi oarecare.

Din formulele obţinute rezultă că: *toate arcele care au aceeaşi origine şi extremităţile simetrice faţă de diametrul ce trece prin originea arcelor au măsura în radiani dată de formula:*

$$\boxed{\theta = 2k\pi \pm \alpha}$$

unde k este un întreg oarecare. Semnele plus şi minus corespund celor două arce cu extremităţi situate de o parte şi de alta a diametrului ce trece prin originea arcelor.

Aplicaţia III. *Să se găsească formula generală pentru măsura în radiani a arcelor care au aceeaşi origine A* (fig. 5, *d*) *şi ale căror extremităţi sînt simetrice faţă de diametrul perpendicular pe diametrul ce trece prin originea A a arcelor.*

Fie arcul $\overset{\frown}{AM} = \alpha$; pentru a obţine arcul $\overset{\frown}{AM'}$, a cărui extremitate M' este simetricul lui M faţă de diametrul

BB' perpendicular pe AA', luăm simetricul M_1 al lui M față de AA' și apoi simetricul lui M_1 față de O, ceea ce ne conduce la M'. Așa fiind, rezultă că $\widehat{AM_1} = -\alpha$ și, prin urmare, $\widehat{AM'} = (-\alpha) + \pi = \pi - \alpha$.

Scriind expresia generală pentru măsura în radiani a arcelor $\widehat{AM}$ și $\widehat{AM'}$, avem:

$$\widehat{AM} = \alpha + 2n\pi \text{ și } \widehat{AM'} = \pi - \alpha + 2n'\pi = -\alpha + (2n' + 1)\pi.$$

Rezultă că: *toate arcele care au aceeași origine și extremități simetrice față de diametrul perpendicular pe acela care trece prin originea arcelor au măsura în radiani dată de formulele:*

$$\boxed{\theta_1 = 2k\pi + \alpha} \quad \text{și} \quad \boxed{\theta_2 = (2k + 1)\pi - \alpha}$$

care, reunite într-o singură formulă, se pot scrie:

$$\boxed{\theta = (-1)^k\alpha + k\pi}$$

unde k este un întreg oarecare.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

(Răspunsurile și indicațiile se găsesc la p. 244)

1. Un unghi u este egal cu 1,21 dr; să se exprime u în grade sexagesimale, centesimale și în radiani.

2. Un unghi u este egal cu 23°27′15″; să se exprime u în grade centesimale și în radiani.

3. Un unghi u este egal cu 2,52 radiani; să se exprime u în grade sexagesimale.

4. Să se exprime în grade sexagesimale unghiurile:

$$\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3};\ -\frac{4\pi}{9};\ \frac{\pi}{25};\ \frac{2\pi}{15};\ -\frac{5\pi}{3};\ -\frac{\pi}{12},$$

măsurate în radiani.

5. Să se exprime în radiani, cu ajutorul lui π, unghiurile date în grade sexagesimale: 12°; 7°30′; 15°30′; 22°30′; 135°; 200°; 215°; 345°; 720°; −1 800°; + 450°.

6. Dintr-un capac circular de tablă, cu diametrul de 24 cm, se taie un sector cu unghiul la centru de $84°15'12''$. Cu partea rămasă se construiește, prin lipirea marginilor, un vas conic. Să se afle lungimea cercului de bază al conului, precum și aria sa laterală.

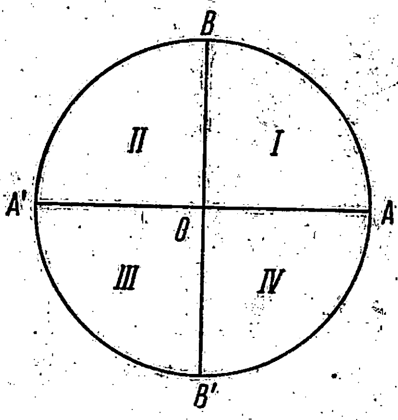


Fig. 6

7. Folosind împărțirea unui cerc în patru cadrane, formate prin ducerea a două diametre perpendiculare, $A'A \perp B'B$ (fig. 6), și luînd raza OA ca latură inițială pentru unghiuri, să se spună în ce cadran este așezată latura finală a următoarelor unghiuri date prin măsura lor în radiani:

1; -3; $3{,}14$; $4{,}12$; 5; $-3{,}26$; 114.

8. Să se exprime în radiani și grade sexagesimale unul din unghiurile egale din vîrfurile următoarelor poligoane regulate convexe: pentagon, exagon, octogon, dodecagon, pentadecagon, poligon cu 13 laturi, poligon cu 20 de laturi.

9. Să se exprime, luînd succesiv ca unitate de măsură radianul, gradul sexagesimal și cel centesimal, unghiul format de acele unui ceasornic la ora 12 și un sfert.

10. Ce unghi în grade sexagesimale și radiani descrie în 5 ore acul orar al unui ceasornic? Dar minutarul?

11. Primul satelit artificial, sovietic, al Pămîntului a făcut la început ocolul Pămîntului în 96,2 min. Să se afle cîți radiani a descris, pe secundă, linia care unea centrul Pămîntului cu centrul satelitului.

(Se va presupune orbita satelitului așezată într-un plan.)

12. O roată dințată are 90 de dinți. Să se exprime în radiani unghiul de rotire al roții, dacă ea se rotește cu: *a)* 30 de dinți; *b)* 25 de dinți; *c)* 40 de dinți; *d)* 200 de dinți.

13. Să se determine viteza unghiulară a mișcării de rotație a acului orar și a minutarului unui ceasornic.

14. Viteza unghiulară a unei pietre de şlefuit este de 4 500 rad/s. 1) Cîte rotaţii pe minut face piatra? 2) Care este viteza liniară a unui punct de pe circumferinţa pietrei, ştiind că diametrul pietrei este de 40 cm?

15. Ştiind că azimutul geografic pe o hartă a unei direcţii care pleacă dintr-o localitate A spre localitatea B (fig. 7) este unghiul format de această direcţie cu meridianul localităţii A şi că unghiul se măsoară de la $0°$ la $360°$, în sensul mişcării acelor de ceasornic, toate avînd ca latură iniţială direcţia AN (N = nord), să se afle cu ajutorul unui raportor şi al unei hărţi a Republicii Populare Romîne azimutul următoarelor direcţii (în radiani):

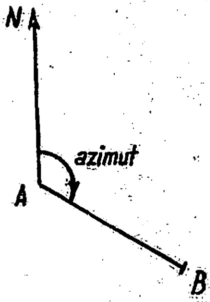


Fig. 7

1) Bucureşti—Iaşi
2) Bucureşti—Constanţa
3) Bucureşti—Craiova
4) Bucureşti—Oradea.

16. Rotindu-se uniform, roata unei maşini execută 40 de rotaţii în 5 min. Să se găsească viteza unghiulară a roţii în radiani pe secundă.

17. O roată de transmisie are viteza unghiulară $\omega = \frac{2\pi}{9}$ rad/s. În cît timp va executa ea o rotaţie completă?

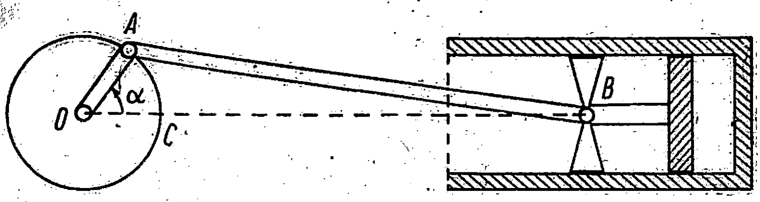


Fig. 8

18. Manivela OA a unei maşini cu vapori s-a rotit cu un unghi $\widehat{COA} = \alpha$ (fig. 8), iar biela AB descrie simultan un unghi $\widehat{CBA}$. Ştiind că $AB > OA$, să se spună care dintre cele două unghiuri este mai mare în valoare absolută şi de ce? Ce se poate spune despre semnele acestor unghiuri, dacă luăm ca origine a arcelor descrise de A punctul C?

19. Roata de transmisie a unui electromotor face 1 200 rotaţii/minut. Care este viteza unghiulară în grade/secundă şi radiani/secundă?

20. Artileriştii folosesc pentru măsurarea unghiurilor o unitate specială, denumită „diviziune goniometrică". Un cerc cuprinde 6 000 de diviziuni. 1) Să se exprime o diviziune în minute. 2) Să se exprime în diviziuni goniometrice unghiurile care conţin: $36'$; $3°$; $6°$; $12°$; $36°$; $48°$.

21. În geografie şi astronomie se folosesc pentru măsurarea unor unghiuri unităţile de timp: ora (h), minutul (m) şi secunda (s). Ştiind că la 1^h corespunde $\frac{1}{24}$ din $360° = 60^m = 3\,600^s$, să se exprime ce corespunde orei, minutului şi secundei de timp în grade, minute şi secunde sexagesimale.

22. Ştiind că longitudinea observatorului astronomic din Bucureşti (faţă de Greenwich) este $L = 1^h44^m23^s{,}18$, să se exprime L în unităţi sexagesimale.

CAPITOLUL II

FUNCŢII TRIGONOMETRICE

1. *Ne punem problema de a calcula înălţimea unui turn a cărui bază accesibilă este situată pe un teren orizontal.*

În acest scop măsurăm, în linie orizontală, de la un loc de observare C, distanţa $CA = b$ (fig. 9) pînă la turn şi unghiul u sub care se vede de pe masa trepiedului C porţiunea de turn AB, cuprinsă între vîrful B al turnului şi linia orizontală care pleacă din C.

Cu aceste date, singurele ce pot fi măsurate direct de observator, ne propunem să aflăm înălţimea turnului.

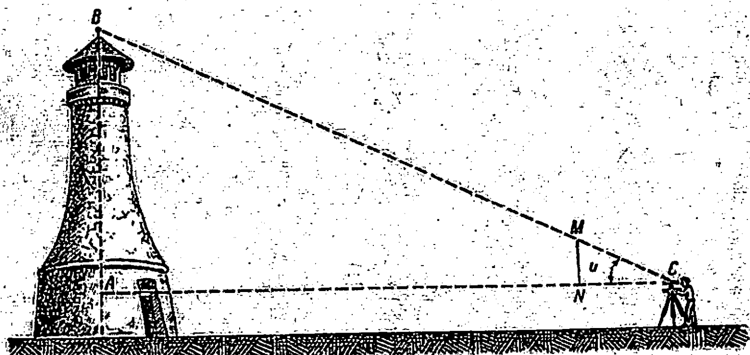


Fig. 9

Dacă observatorul ar cunoaşte valoarea y a raportului $\frac{AB}{AC}$, atunci lungimea AB s-ar calcula efectuînd produsul $AC \cdot y = by$. Pentru a rezolva problema, observatorul este condus deci la calcularea raportului y. Prin măsurarea directă a lungimilor AB, AC nu se poate calcula raportul; de aceea se caută alte două segmente foarte apropiate de locul de observare, al căror raport să fie cel căutat. Sîntem conduşi astfel să luăm un punct M apropiat de vîrful unghiului C, situat pe raza vizuală BC, de unde lăsăm o perpendiculară MN pe cateta AC a triunghiului ABC. Triunghiul MNC fiind asemenea cu BAC, avem:

$$y = \frac{AB}{AC} = \frac{NM}{NC}.$$

Aşadar, raportul căutat y se obţine din raportul segmentelor NM şi NC.

Acum nu ne rămîne decît să rezolvăm problema, construind pe o foaie de hîrtie un unghi egal cu u, pe care l-am aflat cu un instrument de măsurat unghiuri, şi să construim perpendiculara MN pe latura orizontală care pleacă din C (fig. 10). Numărul y se obţine împărţind lungimile segmentelor NM şi CN, iar lungimea căutată AB va fi egală cu $AC \cdot \frac{NM}{CN}$.

Raportul $\frac{NM}{CN}$ este dependent numai de mărimea unghiului şi variază o dată cu acesta. Într-adevăr, dacă păstrăm lungimea segmentului CN şi luăm punctul M situat în M' în interiorul unghiului u, pe perpendiculara ridicată în N pe latura CN, atunci numărătorul raportului devine NM', mai mic decît NM, deci şi raportul $\frac{NM'}{CN} < \frac{NM}{CN}$, de unde se observă că la un unghi $\widehat{M'CN}$, mai mic decît u, raportul este altul decît cel corespunzător lui u. La fel se constată că, dacă M este situat în M'' în afara unghiului u, pe perpendiculara ridi-

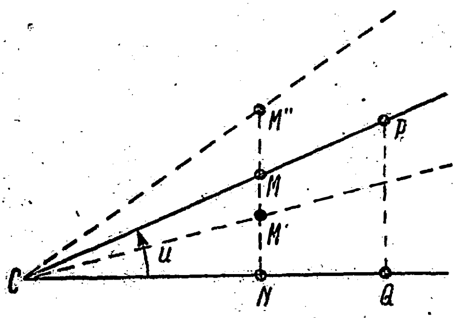


Fig. 10

cată din N pe CN, raportul $\frac{NM''}{CN}$ este mai mare decît $\frac{NM}{CN}$, adică diferit de raportul corespunzător lui u.

Raportul $\frac{NM}{CN}$ este independent de poziția punctului M pe latura CM a unghiului. Într-adevăr, dacă ducem perpendiculara PQ dintr-un punct P al laturii CM pe cealaltă latură, se formează triunghiul dreptunghic CPQ, asemenea cu triunghiul CMN, astfel că avem: $\frac{QP}{CQ} = \frac{NM}{CN}$ ceea ce arată că, de oriunde am duce perpendiculara MN pe cealaltă latură a unghiului u, raportul $\frac{NM}{CN}$ rămîne același.

De aceea, din cele stabilite mai sus, observatorul este condus să-și simplifice operațiile de calculare a raportului y, renunțînd la utilizarea calculului grafic însoțit de erori sistematice și accidentale, prin stabilirea unui tabel de valori ale lui y corespunzătoare diferitelor valori date unghiului u.

În acest mod se stabilește o corespondență între mulțimea valorilor unghiurilor ascuțite u și mulțimea valorilor lui y, adică se definește o funcție care — cum vom vedea mai tîrziu — se numește tangenta unghiului u și se scrie:

$$y = \operatorname{tg} u;$$

se citește y este tangenta unghiului u.

Funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit

2. Considerînd același unghi ascuțit u și coborînd dintr-un punct B al unei laturi o perpendiculară BA pe cealaltă latură, se formează un triunghi dreptunghic ABC, ale cărui laturi au lungimile $BC = a$; $CA = b$ și $AB = c$ (fig. 11). Întocmai ca în paragraful precedent, se poate constata că *raportul a două laturi oarecare ale triunghiului*

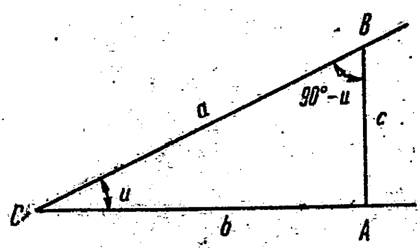


Fig. 11

nu depinde decît de mărimea unghiului u, oriunde am deplasa punctul B pe latura CB.

Se pot forma astfel şase rapoarte :

$$\frac{c}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c},$$

care sînt dependente numai de mărimea unghiului u.

Aceste şase rapoarte definesc şase funcţii trigonometrice :

1) Raportul $\frac{c}{a}$ dintre cateta c opusă unghiului u şi ipotenuza a se numeşte *sinusul* unghiului u şi se scrie :

$$\boxed{\frac{c}{a} = \sin u}$$

2) Raportul $\frac{b}{a}$ dintre cateta b alăturată unghiului u şi ipotenuza a se numeşte *cosinusul* unghiului şi se scrie :

$$\boxed{\frac{b}{a} = \cos u}$$

3) Raportul $\frac{c}{b}$ dintre cateta opusă unghiului u şi cateta alăturată acestui unghi se numeşte *tangenta* unghiului u şi se scrie :

$$\boxed{\frac{c}{b} = \operatorname{tg} u}$$

4) Raportul $\frac{b}{c}$ dintre cateta alăturată unghiului u şi cateta opusă acestui unghi se numeşte *cotangenta* unghiului u şi se scrie :

$$\boxed{\frac{b}{c} = \operatorname{ctg} u}$$

5) Raportul $\frac{a}{b}$ dintre ipotenuza a şi cateta alăturată unghiului u se numeşte *secanta* unghiului u şi se scrie :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \sec u}$$

6) Raportul $\frac{a}{c}$ dintre ipotenuza a și cateta opusă unghiului u se numește *cosecanta* unghiului u și se scrie :

$$\boxed{\frac{a}{c} = \operatorname{cosec} u}$$

O b s e r v a r e a I. Dacă aplicăm definițiile de mai sus unghiului din B, care valorează $90° - u$, obținem succesiv :

$$\sin (90° - u) = \frac{b}{a} = \cos u,$$

$$\cos (90° - u) = \frac{c}{a} = \sin u,$$

$$\operatorname{tg} (90° - u) = \frac{b}{c} = \operatorname{ctg} u,$$

$$\operatorname{ctg} (90° - u) = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} u,$$

$$\sec (90° - u) = \frac{a}{c} = \operatorname{cosec} u,$$

$$\operatorname{cosec} (90° - u) = \frac{a}{b} = \sec u.$$

Aceste relații se pot cuprinde în următoarea teoremă : *Dacă două unghiuri sînt complementare, atunci sinusul, tangenta și secanta unuia sînt respectiv egale cu cosinusul, cotangenta și cosecanta celuilalt, și reciproc.*

E x e m p l e. $\sin 40° = \cos 50°$; $\operatorname{tg} 70° = \operatorname{ctg} 20°$; $\sec 65° = \operatorname{cosec} 25°$; $\cos 40° = \sin 50°$; $\operatorname{ctg} 70° = \operatorname{tg} 20°$; $\operatorname{cosec} 65° = \sec 25°$.

O b s e r v a r e a II. În practică nu folosim decît patru din cele șase funcții trigonometrice, și anume :

$$\sin u ; \cos u ; \operatorname{tg} u \text{ și } \operatorname{ctg} u ;$$

din această cauză funcțiile $\sec u$ și $\operatorname{cosec} u$ vor fi rar amintite în expunerea care urmează.

O b s e r v a r e a III. Între funcțiile trigonometrice ale unui aceluiași unghi u există diferite relații. Aceasta rezultă din aplicarea teoremei lui Pitagora triunghiului dreptunghic şi din împărţirea cu a a termenilor fiecărui raport care defineşte pe tg u, ctg u, sec u, cosec u.

Împărţind ambii membri ai relaţiei cunoscute $b^2 + c^2 = a^2$ prin a^2, obţinem:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \text{ sau } \sin^2 u + \cos^2 u = 1,$$

iar din egalităţile $\operatorname{tg} u = \frac{c}{b}$, $\operatorname{ctg} u = \frac{b}{c}$, $\sec u = \frac{a}{b}$ şi $\operatorname{cosec} u = \frac{a}{c}$ deducem:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{\sin u}{\cos u}; \quad \operatorname{ctg} u = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{\operatorname{tg} u};$$

$$\sec u = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cos u} \text{ şi } \operatorname{cosec} u = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\sin u}.$$

O b s e r v a r e a IV. Valoarea fiecărui raport depinde numai de u şi variază o dată cu el. Aceasta s-a constatat pentru tg u (II-1). Să arătăm că şi celelalte funcţii variază o dată cu unghiul u. În acest scop să exprimăm $\sin u$, $\cos u$, ctg u, sec u şi cosec u în funcţie de $t = \operatorname{tg} u$.

Împărţind ambii membri ai egalităţii $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ prin $\cos^2 u$, obţinem:

$$\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} + 1 = \frac{1}{\cos^2 u} \text{ sau } \frac{1}{\cos^2 u} = 1 + t^2, \text{ de unde rezultă:}$$

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Din relaţia $\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$ se deduce:

$$\sin u = \operatorname{tg} u \cdot \cos u = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}; \quad \operatorname{ctg} u = \frac{1}{\operatorname{tg} u} = \frac{1}{t};$$

$$\sec u = \frac{1}{\cos u} = \sqrt{1 + t^2} \text{ şi } \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t}.$$

Din rezultatele obținute constatăm că toate funcțiile trigonometrice variază o dată cu t, care, precum se știe, variază cu unghiul u. Aceasta dovedește că funcțiile trigonometrice ale unghiului u variază o dată cu u.

Exerciții aplicative: nr. 23, 25 de la p. 86.

3. Valoarea funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30°, 45°, 60°. Ca o aplicare a celor arătate în paragraful precedent să calculăm valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30°, 60° și 45°.

a) Considerăm un triunghi echilateral cu laturile

$$AB = AC = BC = 2l$$

(fig. 12). Ducînd înălțimea vîrfului A, care este totodată și bisectoarea unghiului $A = 60°$, se formează triunghiul dreptunghic ADC, cu laturile:

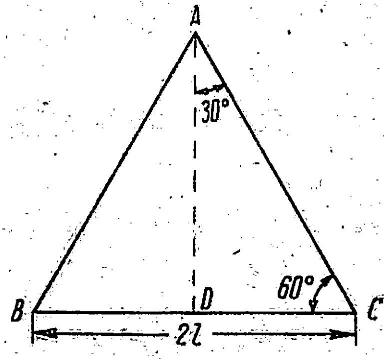


Fig. 12

$$DC = l;\ AC = 2l \text{ și } AD = \sqrt{4l^2 - l^2} = l\sqrt{3}.$$

Aplicăm definițiile din paragraful precedent pentru unghiul $\widehat{DAC} = 30°$ și găsim:

$$\sin 30° = \frac{DC}{AC} = \frac{l}{2l} = \frac{1}{2};\ \cos 30° = \frac{AD}{AC} = \frac{l\sqrt{3}}{2l} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{DC}{AD} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{și} \quad \operatorname{ctg} 30° = \frac{AD}{DC} = \sqrt{3}.$$

Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului de 60°, care este complementul celui de 30°, sînt date de relațiile:

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};\ \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

b) Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel avînd catetele AB, AC egale fiecare cu lungimea l (fig. 13). În acest caz, ipotenuza $BC = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$. Aplicînd definițiile funcțiilor trigonometrice pentru unghiul $B = 45°$, avem:

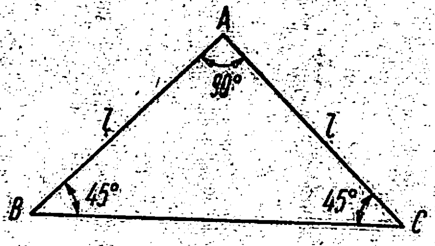


Fig. 13

$$\sin 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{AC}{AB} = 1 \text{ și}$$

$$\operatorname{ctg} 45° = \frac{AB}{AC} = 1.$$

Exerciții aplicative: nr. 26, 27, 28, 29, 30, 31 de la p. 86—87.

Funcții trigonometrice ale unui unghi oarecare

4. Să rezolvăm următoarea problemă de mecanică: *Un mobil M se mișcă uniform pe un cerc cu centrul în O și de rază R. Știind că durata unei rotații complete este T, se întreabă care este ecuația de mișcare a proiecției m a mobilului M (fig. 14) pe diametrul care trece prin A (locul unde se găsea M la momentul inițial).*

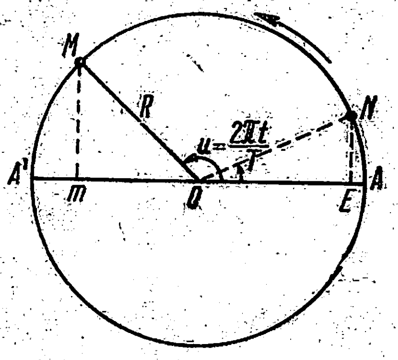


Fig. 14

Pentru a stabili ecuația de mișcare a proiecției m, se impune să aflăm lungimea Om a proiecției razei OM. În acest scop să evaluăm unghiul $u = \widehat{AOM}$. Să presupunem că au trecut t secunde pînă ce mobilul a ajuns în M. În acest interval de timp, raza OM a descris unghiul $\widehat{AOM}$. Întrucît mobilul M descrie în T secunde un cerc întreg, adică 2π radiani, rezultă că într-o secundă raza OM va descrie un unghi de $\frac{2\pi}{T}$ radiani şi, prin urmare, în t secunde raza OM va descrie unghiul

$$u = \widehat{AOM} = \frac{2\pi t}{T}.$$

Să găsim acum mărimea Om a proiecţiei. Dacă am cunoaşte raportul z între segmentul Om şi raza R a cercului, atunci din relaţia

$$\frac{Om}{R} = z$$

am deduce $Om = Rz$.

Rămîne să vedem care este acest raport. Din modul cum se construieşte segmentul Om se constată că el este dependent numai de valoarea unghiului u; rezultă deci că şi raportul $z = \frac{Om}{R}$ este de asemenea dependent numai de u. La fiecare valoare a unghiului u corespunde cîte o valoare a lui z. Această corespondenţă între totalitatea valorilor lui u şi z defineşte o funcţie.

Cînd u este un unghi ascuţit, $\widehat{EON}$, atunci raportul z este $\frac{OE}{ON} = \frac{OE}{R}$, care, precum se ştie, este cosinusul unghiului $\widehat{EON}$; de aceea numim şi funcţia z, definită mai sus, cosinusul unghiului u, pentru orice valoare ar avea u.

Această funcţie se scrie:

$$z = \frac{Om}{R} = \cos u;$$

de aici rezultă $Om = R \cos u$ sau, dacă notăm $Om = s$ şi ţinînd seamă că $u = \frac{2\pi t}{T}$, avem ecuaţia de mişcare:

$$s = R \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Din rezultatul obţinut se constată că se poate determina poziţia lui m pe diametrul ce trece prin A, la orice moment t, dacă se cunosc valorile lui $\cos \frac{2\pi t}{T}$. Aceasta impune introducerea cosinusului unghiului oarecare $u = \widehat{AOM}$, dat, fiindcă M poate ocupa orice poziție pe cerc.

Problema de mai sus și multe altele ce se ivesc în practică scot la iveală necesitatea introducerii funcțiilor trigonometrice ale unui unghi a cărui valoare poate fi orice număr real.

5. Considerăm cercul de centru O și rază R, pe care luăm punctul A origine a arcelor. Diametrul $A'A$ îl orientăm considerînd sensul OA pozitiv și OA' negativ; diametrul $B'B$, perpendicular pe $A'A$, îl orientăm considerînd OB pozitiv, iar OB' negativ. Se ia pe cerc (fig. 15) un punct M, astfel ca arcului $\widehat{AM}$ să-i corespundă unghiul la centru $\widehat{AOM} = u$. Perpendiculara din M pe diametrul punctului A determină în cerc segmentele OI și IM, iar diametrul punctului M determină pe tangenta în A segmentul AT și pe tangenta în B (extremitatea de sus a diametrului perpendicular pe $A'A$) segmentul BP. Unui unghi u îi corespunde un singur punct M, iar acestuia rapoartele bine determinate:

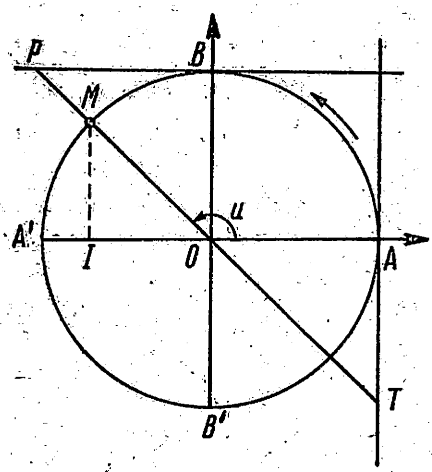


Fig. 15

$$\frac{IM}{R};\ \frac{OI}{R};\ \frac{AT}{R}\ \text{și}\ \frac{BP}{R},$$

unde segmentele IM, OI, AT și BP le orientăm astfel: *cele situate pe diametrul $A'A$ sau paralele cu $A'A$ le considerăm pozitive, dacă se proiectează pe semiaxa OA, și negative, dacă se proiectează pe semiaxa OA'; cele situate pe $B'B$ sau paralele cu $B'B$ le considerăm pozitive, dacă se proiectează pe semiaxa OB, și negative, dacă se proiectează pe semiaxa OB'.*

În figura 15, IM este pozitiv, OI negativ, AT negativ și BP negativ. Cînd unghiul u este mai mic decît 90°, cele patru rapoarte devin (fig. 16):

$$\frac{IM}{R} = \frac{IM}{OM} = \sin u$$

$$\frac{OI}{R} = \frac{OI}{OM} = \cos u$$

$$\frac{AT}{R} = \frac{AT}{OA} = \operatorname{tg} u$$

și

$$\frac{BP}{R} = \frac{BP}{OB} = \operatorname{ctg} u,$$

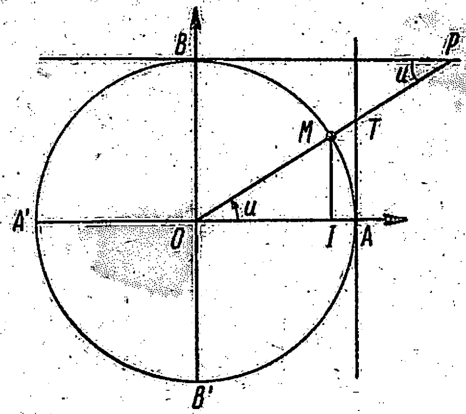


Fig. 16

De aceea, și în cazul cînd u este un unghi oarecare, numim funcțiile de unghi $\frac{IM}{R}$, $\frac{OI}{R}$, $\frac{AT}{R}$ și $\frac{BP}{R}$, respectiv: $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u$ și $\operatorname{ctg} u$, care sînt funcții trigonometrice ale unghiului u.

Aplicație. *Avînd în vedere cum s-a definit cosinusul unui unghi oarecare, că calculăm, de exemplu,* cos 120°.

Figurînd unghiul de 120° în cercul de rază R (fig. 17), avem, conform definiției de mai sus:

$$\cos 120° = \frac{OI}{R}.$$

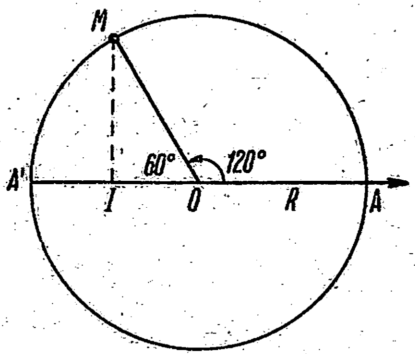


Fig. 17

În triunghiul dreptunghic OIM, unghiul $\widehat{IOM} = 180° - 120° = 60°$ și, cum segmentul OI este orientat negativ, rezultă că avem:

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

6. Reprezentarea geometrică a valorilor funcţiilor trigonometrice. Valorile funcţiilor trigonometrice definite mai sus se exprimă prin rapoarte de două lungimi măsurate cu aceeaşi unitate de măsură; ele sînt prin urmare numere abstracte.

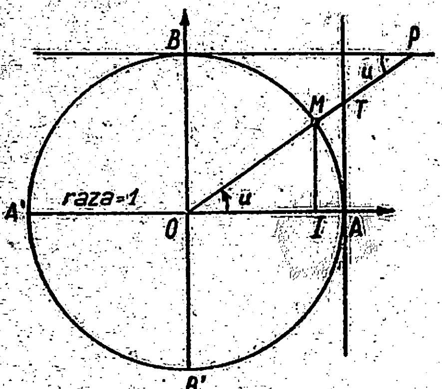


Fig. 18

Se poate da o reprezentare geometrică valorilor funcţiilor trigonometrice cu ajutorul unui cerc a cărui rază este luată ca unitate de măsură a lungimilor. Considerăm în acest cerc două diametre perpendiculare $A'A$ şi $B'B$ (fig. 18) şi un unghi $u = \widehat{AOM}$ oarecare. Construim $IM \perp A'A$ şi tangentele în A şi B. Prelungirea razei OM determină pe tangentele în A şi B segmentele AT şi BP.

Avem:

$$\sin u = \frac{IM}{OM} = \frac{IM}{1},$$

$$\cos u = \frac{OI}{OM} = \frac{OI}{1},$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} \qquad (OA = OB = OM = R = 1)$$

şi

$$\operatorname{ctg} u = \frac{BP}{OB} = \frac{BP}{1}.$$

Avînd în vedere că arcul AM cu originea A şi extremitatea M are aceeaşi măsură ca şi unghiul său la centru $u = \widehat{AOM}$, putem spune (se va considera în cele ce urmează un arc care aparţine unui cerc a cărui rază este luată ca unitate de măsură a lungimilor):

1) *Sinusul unui arc este măsura distanţei de la extremitatea arcului pînă la diametrul care trece prin originea*

acelui arc. *Această măsură este precedată de semnul „+" cînd extremitatea arcului se proiectează pe semiaxa OB și de semnul „—" cînd extremitatea arcului se proiectează pe semiaxa OB'*.

2) *Cosinusul unui arc este măsura distanței de la centrul cercului pînă la proiecția extremității arcului pe diametrul care trece prin origine. Această măsură este precedată de semnul „+" cînd extremitatea arcului se proiectează pe semiaxa OA și de semnul „—" cînd extremitatea arcului se proiectează pe semiaxa OA'*.

3) *Tangenta unui arc este măsura segmentului de pe tangenta dusă la cerc în originea arcului, cuprins între originea arcului și intersecția tangentei cu diametrul care trece prin extremitatea arcului. Această măsură este precedată de semnul „+" cînd segmentul se proiectează pe semiaxa OB și de semnul „—" cînd se proiectează pe semiaxa OB'*.

4) *Cotangenta unui arc este măsura segmentului de pe tangenta dusă la extremitatea B a diametrului perpendicular pe diametrul ce trece prin originea arcului, cuprins între B și intersecția tangentei în B cu diametrul ce trece prin extremitatea arcului. Măsura segmentului este precedată de semnul „+" cînd acest segment se proiectează pe semiaxa OA și de semnul „—" cînd se proiectează pe semiaxa OA'*.

Observarea I. În expunerea care urmează vom considera de multe ori expresia cercul avînd raza 1. Trebuie să înțelegem prin aceasta că raza acelui cerc este luată ca unitate de măsură pentru lungimi.

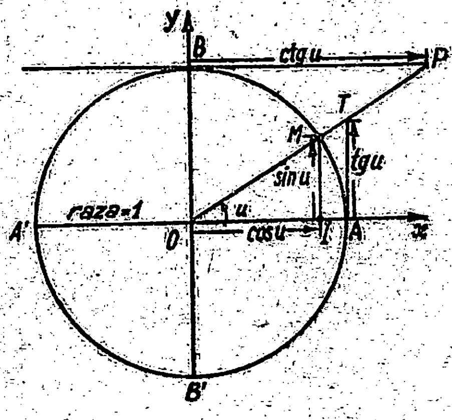


Fig. 19

Observarea II. Dacă alegem ca axe (Ox și Oy) două diametre perpendiculare ale cercului de centru O, avînd raza egală cu 1, astfel ca Ox să treacă prin A, — originea arcelor (fig. 19), — atunci *sinusul* și *cosinusul* unghiului $u = \widehat{AOM}$ sînt respectiv *ordonata* și *abscisa* punctului M de pe cerc. De asemenea *tangenta* și *cotangenta* sînt respectiv *ordonata* punctului de intersecție dintre tangenta în A cu diametrul punctului M și *abscisa* punctului de intersecție dintre tangenta în B cu diametrul punctului M.

Această observare este o consecință a definițiilor date mai sus și ea va fi utilizată în cele ce urmează la studiul variației funcțiilor trigonometrice.

Observarea III. Fie arcele $\overset{\frown}{AM}, \overset{\frown}{ABN}$ (fig. 20), cu extremitățile M și N simetrice față de BB'.

În acest caz, diametrul punctului N e simetricul diametrului punctului M față de BB', iar intersecția Q a lui ON cu cercul este simetricul lui M față de $A'A$. Diametrul punctului M taie cercul în P, care este simetricul lui N față de $A'A$. Punctul P este în același timp simetricul lui M față de centrul O.

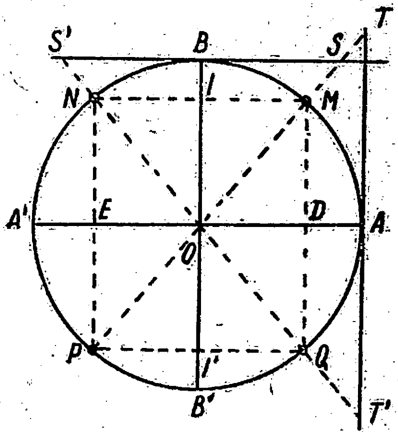


Fig. 20

Coardele egale NM și PQ, fiind perpendiculare pe BB', sînt împărțite de acesta în părți egale. Coardele NP și MQ, fiind de asemenea egale și perpendiculare pe $A'A$, sînt și ele împărțite de $A'A$ în părți egale.

Ținînd seama de egalitatea a două figuri simetrice față de o axă sau față de un centru și de cele arătate mai sus, pe baza definiției dată funcțiilor trigonometrice, rezultă următoarele:

1) Funcțiile trigonometrice de același nume ale arcelor $\overset{\frown}{AM}$ și $\overset{\frown}{ABN}$, cu extremitățile simetrice față de BB', sînt egale în valoare absolută.

2) Funcțiile trigonometrice de același nume ale arcelor $\overset{\frown}{AM}$ și $\overset{\frown}{AQ}$, cu extremitățile simetrice față de $A'A$, sînt egale în valoare absolută.

3) Funcțiile trigonometrice de același nume ale arcelor $\overset{\frown}{AM}$ și $\overset{\frown}{A'BP}$, cu extremitățile simetrice față de centrul O, sînt egale în valoare absolută.

Exerciții aplicative: nr. 32, 33 de la p. 87.

Variația funcțiilor trigonometrice

7. Deoarece funcțiile trigonometrice se exprimă prin rapoartele unor lungimi către raza cercului, pentru a ușura studierea variației funcțiilor trigonometrice, vom considera măsura unghiului în radiani, care se exprimă prin raportul dintre lungimea arcului și raza cercului. În acest fel, se introduce un sistem unitar de măsură atît pentru arce, cît și pentru funcțiile lor trigonometrice, unitatea de măsură fiind raza cercului. De asemenea, vom folosi, în același scop, cercul împărțit de două diametre perpendiculare, $A'A$, $B'B$, în patru cadrane (fig. 21).

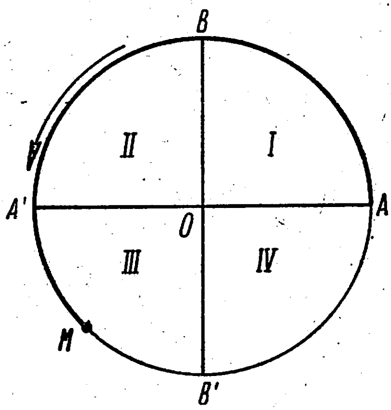


Fig. 21

Punctele A și A' sînt locurile de unde încep primul, respectiv al treilea cadran, iar B și B' punctele de unde încep al doilea, respectiv al patrulea cadran. Pentru a putea compara cu ușurință funcțiile trigonometrice a două unghiuri oarecare, toate arcele corespunzătoare acestor unghiuri vor fi considerate avînd originea așezată în A, iar extremitatea într-un punct oarecare M de pe cercul de rază 1. Dacă M este situat în cadranul I, II, III sau IV, arcul AM se va numi respectiv arc din cadranul I, II, III sau IV. Astfel arcul $\overset{\frown}{ABM}$ din figura 21 este un arc din cadranul III.

Sensul pozitiv al arcelor este sensul invers mișcării acelor de ceasornic, iar sensul negativ este sensul de mișcare al acelor de ceasornic.

Funcția sinus

8. Folosind observarea că sinusul unui arc (sau al unghiului la centru corespunzător) este ordonata extremității arcului de cerc cu raza 1, putem urmări cu ușurință variația funcției sinus. În vederea acestui studiu al variației demonstrăm următoarea teoremă :

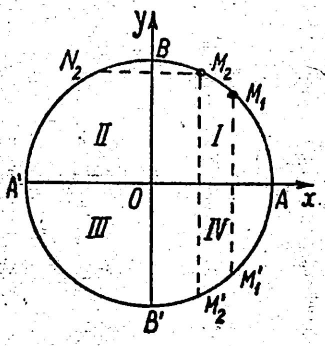


Fig. 22

Două arce neegale avînd extremitățile în primul cadran au sinusurile neegale, astfel încît arcul mai mare are sinusul mai mare.

Să considerăm arcele $\widehat{AM}_1$ și $\widehat{AM}_2$ avînd extremitățile M_1 și M_2 așezate în primul cadran, astfel că :

$$\widehat{AM}_1 < \widehat{AM}_2;$$

să demonstrăm că :

$$\sin \widehat{AM}_1 < \sin \widehat{AM}_2.$$

Luăm simetricele M_1', M_2' ale punctelor M_1 și M_2 față de diametrul $A'A$ (fig. 22).

Deoarece avem :

$$\sin \widehat{AM}_1 = \frac{1}{2} M_1M_1', \quad \sin \widehat{AM}_2 = \frac{1}{2} M_2M_2' \text{ și}$$

pentru că la arcul mai mare (dar mai mic decît un semicerc) corespunde coarda mai mare, rezultă că :

$$M_1'M_1 < M_2'M_2$$

și prin urmare :

$$\sin \widehat{AM}_1 < \sin \widehat{AM}_2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

O consecință a acestei teoreme este următoarea : *cînd arcul din primul cadran crește, atunci și sinusul său crește.*

Arcul cel mai mic din primul cadran este 0, iar sinusul său tot 0 ; arcul cel mai mare din primul cadran este $\frac{\pi}{2}$, iar sinusul său este 1. Ţinînd seama de consecinţa de mai sus, rezultă că *sinusul unui arc creşte de la 0 la 1 atunci cînd arcul creşte de la 0 la* $\frac{\pi}{2}$ (fig. 23, *a*).

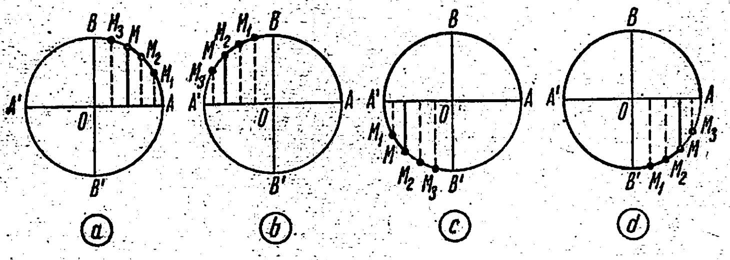


Fig. 23

Datorită simetriei cadranelor I şi II faţă de axa BB', rezultă că ordonatele a două puncte M_2, N_2 oarecare de pe cerc, simetrice faţă de BB', sînt egale (fig. 22).

Urmează de aici că ordonatele punctelor de pe cerc care merg de la A' spre B sînt crescătoare de la 0 la 1, întocmai ca în cadranul I. Aceste ordonate sînt şi pozitive, fiind situate deasupra axei $B'B$. Deducem, prin urmare, că *sinusul unui arc descreşte de la 1 la 0 atunci cînd arcul creşte de la* $\frac{\pi}{2}$ *la* π (fig. 23, *b*).

Punctele de pe arcul cadranului III sînt simetricele faţă de centrul cercului ale celor corespunzătoare de pe arcul cadranului I; de aceea ordonatele lor sînt respectiv egale în valoare absolută cu ordonatele corespunzătoare extremităţilor arcelor din cadranul I. Dacă un punct M se mişcă pe arcul cadranului I, atunci simetricul său faţă de centrul cercului se va mişca pe arcul cadranului III, trecînd de la A' la B'. Deoarece ordonatele punctelor de pe arcul cadranului III sînt negative, fiind aşezate sub diametrul $A'A$, ele vor primi toate valorile de la 0 la —1. Rezultă deci că *sinusul unui arc descreşte de la 0 la —1 atunci cînd arcul creşte de la* π *la* $\frac{3\pi}{2}$ (fig. 23, *c*).

Punctele de pe arcul cadranului IV au drept simetrice faţă de centrul cercului puncte de pe arcul cadranului II; valorile absolute ale ordonatelor lor vor fi deci respectiv egale cu acelea ale punctelor corespunzătoare de pe arcul cadranului II. Ordonatele punctelor de pe arcul cadranului IV sînt negative, fiind situate sub diametrul $A'A$, de unde rezultă că ele cresc de la —1 la 0 atunci cînd extremitatea arcului trece de la B' la A. Urmează de aici că *sinusul unui arc crește de la —1 la 0 atunci cînd arcul crește de la $\frac{3\pi}{2}$ la 2π* (fig. 23, *d*).

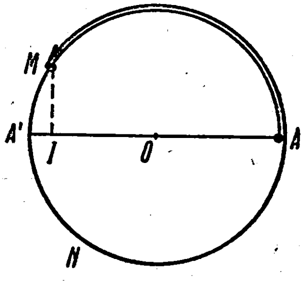


Fig. 24

9. **Periodicitatea funcției sinus.** Ținînd seama de definiția sinusului, toate arcele care au aceeași origine A și aceeași extremitate M au același sinus: măsura distanței de la M pînă la diametrul orizontal $A'A$ (fig. 24). Dacă notăm arcul AM cu x, se știe (v. I-12) că arcele care au aceeași origine A și aceeași extremitate M sînt date de expresia $AM = x + 2k\pi$, unde k este un întreg oarecare. Ținînd seama de cele spuse mai sus, avem:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

sau:

$$\sin(x + k \cdot 360°) = \sin x,$$

cînd arcul x este dat în grade sexagesimale.

Dintre arcele $x + 2k\pi$, cel mai mic arc ce urmează în ordine crescătoare după x este evident $x + 2\pi$; așa că și pentru aceasta avem:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Această relație exprimă proprietatea de periodicitate a funcției sinus.

Dacă *adăugăm unui arc oarecare x, exprimat în radiani, numărul 2π, sinusul arcului obținut este același ca și sinusul arcului inițial* (x).

Numărul 2π este *perioada*, iar funcția sinus este *funcție periodică*.

10. **Reprezentarea grafică a funcției sinus.** Din cele ce s-au spus pînă aici se constată că pentru orice valoare a arcului x corespunde o valoare bine determinată pentru sinusul acestui arc. Notînd valoarea lui $\sin x$ prin y, avem relația:

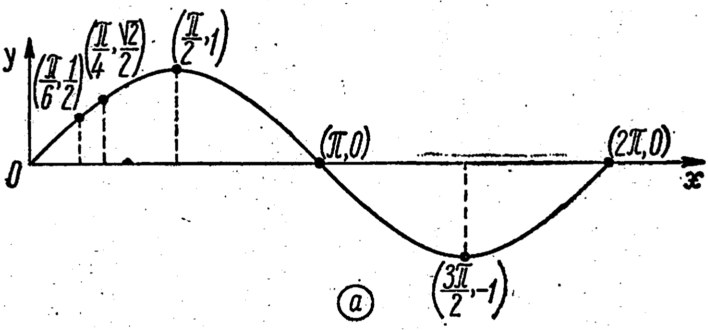
$$y = \sin x$$

Să înscriem într-un tabel valorile arcelor din primul cerc, exprimate în radiani, în ordine crescătoare, iar dedesubtul lor valorile corespunzătoare ale lui $y = \sin x$. Din studiul variației funcției sinus făcut mai sus rezultă următorul tabel:

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$y = \sin x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Săgeata $\nearrow$ indică creștere, iar săgeata $\searrow$ indică descreștere. În tabel sînt trecute cîteva arce al căror sinus a fost calculat în lecțiile precedente.

Dacă figurăm punctele ale căror coordonate sînt perechile de valori x și y înscrise în tabel, obținem pentru arcele care variază de la 0 la 2π următoarea curbă (fig. 25, *a*):



O construcție geometrică a graficului (reprezentarea grafică) funcției $y = \sin x$ se poate obține astfel:

Se împarte atît sfertul de cerc, cît și segmentul $OA = \frac{\pi}{2}$, a cărui măsură se obține luînd raza R a cercului ca unitate pentru lungimi (fig. 25, *b*), în același număr de părți egale. Valorile funcției sînt date de ordonatele punctelor de intersecție ale paralelelor duse la axele de coordonate prin punctele de diviziune corespunzătoare.

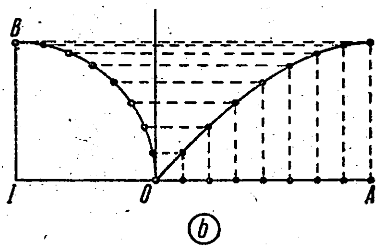


Fig. 25

Punctele astfel obținute, unite printr-o trăsătură continuă, formează, cu aproximație, graficul funcției $y = \sin x$ în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ținînd seama că arcele cu extremități simetrice față de BB' au același sinus, rezultă că paralela la Oy, dusă prin punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, este axă de simetrie a curbei, iar din faptul că valorile sinusurilor arcelor din cadranele III şi IV sînt opuse celor din cadranele I şi II urmează că graficul obţinut pentru x, cuprins în intervalul $(0, \pi)$, continuă în intervalul $(\pi, 2\pi)$ cu o ramură de curbă identică ca formă cu prima, însă aşezată sub Ox.

Mărind sau micşorînd argumentul x al funcţiei $y = \sin x$ cu 2π, funcţia y îşi reia valoarea. Aceasta înseamnă că porţiunile graficelor de variaţie ale funcţiei $y = \sin x$ pentru argumente cuprinse în intervalele $(2\pi, 4\pi)$, $(4\pi, 6\pi)$ etc. şi pentru argumente cuprinse în intervalele $(-2\pi, 0)$ $(-4\pi, -2\pi)$ etc. sînt identice cu porţiunea corespunzătoare intervalului $(0, 2\pi)$. De aceea, *graficul funcţiei $y = \sin x$ pentru orice valoare a lui x se obţine printr-o translaţie de mărime 2π sau -2π, paralelă cu Ox, o dată sau repetată, a graficului funcţiei corespunzător intervalului* $(0, 2\pi)$.

Procedînd astfel, găsim graficul funcţiei $y = \sin x$ (fig. 26), pentru orice valoare a lui x.

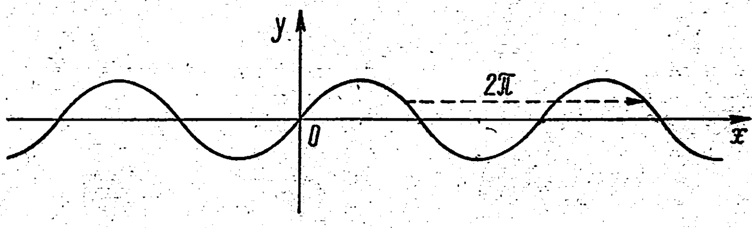


Fig. 26

Aplicaţia I. *Fiind dată funcţia $y = a \sin(\omega x + \varphi)$, care se întîlneşte în studiul fenomenelor oscilatorii din acustică, optică, electricitate ş.a., să se determine perioada acestei funcţii, cunoscînd că a, ω şi φ sînt numere date oarecare.*

Să presupunem că T este perioada căutată. Aşa fiind, trebuie să avem pentru orice valoare a argumentului x:

$$a \sin[\omega(x + T) + \varphi] = a \sin(\omega x + \varphi).$$

Ţinînd seama că primul arc, mai mare, care are acelaşi sinus cu $\omega x + \varphi$, diferă de acesta cu 2π, rezultă:

$$[\omega(x + T) + \varphi] - (\omega x + \varphi) = 2\pi,$$

de unde deducem: $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Aplicația II. *Să se construiască graficul funcției $y = 2 \sin 3x$ și să se compare rezultatul cu graficul funcției $y = \sin x$.*

Pe baza celor arătate mai sus, rezultă că perioada primei funcții este $T = \frac{2\pi}{3}$. Funcția $y = 2 \sin 3x$ ia toate valorile posibile cuprinse între -2 și $+2$, inclusiv valorile extreme, dacă x variază de la 0 la $\frac{2\pi}{3}$, pentru că la extremitățile intervalului de variație a lui x, a cărui mărime este de o perioadă $T = \frac{2\pi}{3}$, funcția ia aceeași valoare 0. Cea mai mare valoare a lui y este 2 și ea corespunde pentru x dat de relația $3x = \frac{\pi}{2}$; iar cea mai mică valoare a lui y este -2, care corespunde lui x, obținut din ecuația $3x = \frac{3\pi}{2}$.

Să înscriem într-un tabel cîteva valori ale lui x cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$ și valorile corespunzătoare ale lui $y = 2 \sin 3x$; se obține:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

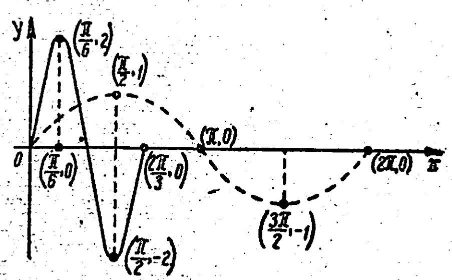


Fig. 27

Să considerăm un sistem de două axe rectangulare, Ox, Oy, (unde s-a construit la (II-10) graficul punctat al funcției $y = \sin x$). Față de acest sistem, figurăm punctele ale căror coordonate sînt valorile lui x înscrise în tabel și cele ale lui $y = 2 \sin 3x$ corespunzătoare. Se obține pentru valorile x, cuprinse între 0 și $\frac{2\pi}{3}$, curba din figura 27.

Cele două curbe din figura 27 se numesc *sinusoide*; ele se deosebesc în ce priveşte amplitudinile[1] şi perioadele. Sinusoida $y = 2 \sin 3x$ are amplitudinea de două ori mai mare decît aceea a sinusoidei $y = \sin x$, iar perioada de trei ori mai mică decît a acesteia din urmă.

Exerciţii aplicative: nr. 34(1); 34(3); 37(2); 37(5); 37(9); 37(10); 38; 39; 43 de la p. 87—89.

Funcţia cosinus

11. **Teoremă.** *Două arce neegale din cadranul I au cosinusurile neegale, astfel încît arcul mai mic are cosinusul mai mare.*

Fie $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ (fig. 28) două arce din cadranul I al cercului de rază 1, pentru care avem $\overset{\frown}{AM_1} < \overset{\frown}{AM_2}$.

Să demonstrăm:

$$\cos \overset{\frown}{AM_1} > \cos \overset{\frown}{AM_2}.$$

Luînd simetricele M'_1, M'_2 ale punctelor M_1, M_2, se formează coardele M'_1M_1, M'_2M_2 care corespund la arcele neegale $\overset{\frown}{M'_1M_1} < \overset{\frown}{M'_2M_2}$ şi, prin urmare, şi coardele corespunzătoare sînt neegale, după aceeaşi relaţie:

$$M'_1M_1 < M'_2M_2.$$

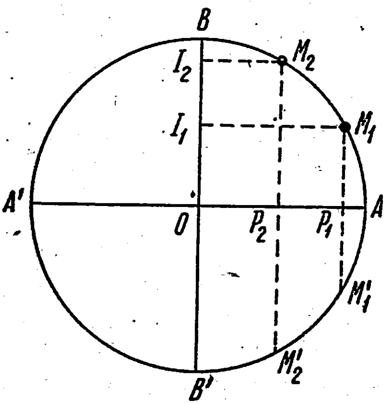


Fig. 28

Se ştie din geometrie că o coardă mai mare este mai apropiată de centru; urmează deci că între distanţele OP_1 şi OP_2 pînă la cele două coarde avem relaţia: $OP_1 > OP_2$, ceea ce e tot una cu $\cos AM_1 > \cos AM_2$; teorema este astfel demonstrată.

O b s e r v a r e. În loc de OP_1 şi OP_2 este evident

[1] Valorile absolute ale maximelor şi minimelor unei sinusoide se ntîlnesc în aplicaţiile fizicii sub denumirea de amplitudine.

că se pot lua pentru cos $\widehat{AM}_1$, cos $\widehat{AM}_2$ respectiv măsura distanțelor I_1M_1, I_2M_2 ale extremităților M_1, M_2, pînă la diametrul vertical BB'. Aceste distanțe sînt respectiv abscisele punctelor M_1 și M_2. Această observare ne va fi de folos la studiul variației funcției cosinus.

O consecință a teoremei de mai sus este următoarea: *Dacă un arc din primul cadran crește, atunci cosinusul său descrește.*

Arcul cel mai mic din primul cadran este 0 și cosinusul său este 1; arcul cel mai mare este $\frac{\pi}{2}$, iar cosinusul său este 0.

Rezultă deci că atunci *cînd arcul crește de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, cosinusul său descrește de la 1 la 0* (fig. 29, *a*).

Deoarece punctele de pe arcul cadranului II au drept simetrice față de diametrul vertical BB' punctele de pe arcul cadranului I, rezultă că și cosinusurile arcelor din cadranul II vor avea respectiv aceleași valori absolute ca și cosinusurile arcelor corespunzătoare din cadranul I. Avînd însă în vedere că arcele din cadranul II au cosinusurile negative, rezultă că atunci *cînd arcul crește de la $\frac{\pi}{2}$ la π, cosinusul său descrește de la 0 la —1* (fig. 29, *b*).

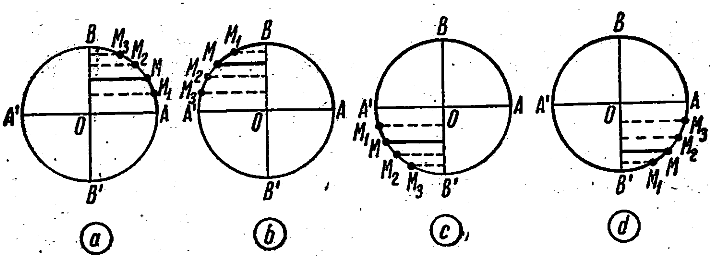


Fig. 29

Folosind apoi simetria față de centrul cercului a cadranului III cu cadranul I și a cadranului IV cu II, găsim în mod analog, ca și pentru funcția sinus, următoarele:

Cînd arcul crește de la π la $\frac{3\pi}{2}$, cosinusul său crește de la —1 la 0 (fig. 29, *c*).

Cînd arcul creşte de la $\frac{3\pi}{2}$ la 2π, cosinusul său creşte de la 0 la 1 (fig. 29, *d*).

12. **Periodicitatea funcţiei cosinus.** Ţinînd seama de definiţia cosinusului, rezultă că toate arcele care au aceeaşi origine A şi aceeaşi extremitate M au acelaşi cosinus: măsura distanţei de la extremitatea M pînă la diametrul $B'B$ (fig. 30).

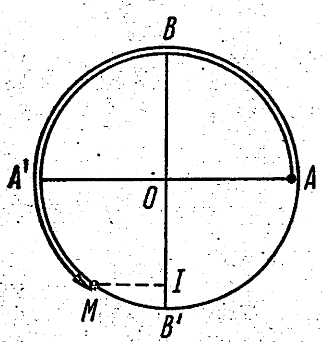


Fig. 30

Dacă notăm arcul $\overset{\frown}{AM}$ cu x, se ştie că arcele care au aceeaşi origine A şi aceeaşi extremitate M sînt date de expresia:

$$\overset{\frown}{AM} = x + 2k\pi,$$

unde k este un întreg oarecare. Ţinînd seama de cele spuse mai sus, avem:

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

sau:

$$\cos(x + k \cdot 360°) = \cos x,$$

cînd arcul x este exprimat în grade sexagesimale.

Dintre arcele $x + 2k\pi$, cel mai mic arc ce urmează în ordine crescătoare după x este evident $x + 2\pi$.

În virtutea relaţiei de mai sus avem deci şi egalitatea:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Această relaţie exprimă proprietatea de periodicitate a funcţiei cosinus.

Dacă adăugăm unui arc oarecare x, exprimat în radiani, numărul 2π, cosinusul arcului obţinut este acelaşi ca şi cosinusul arcului iniţial (x).

Numărul 2π este *perioada*, iar funcţia cosinus este o *funcţie periodică*.

13. **Reprezentarea grafică a funcţiei cosinus.** După cum s-a văzut mai sus, pentru fiecare valoare a arcului x corespunde cîte o valoare y pentru cosinusul arcului. Această corespondenţă se exprimă prin relaţia:

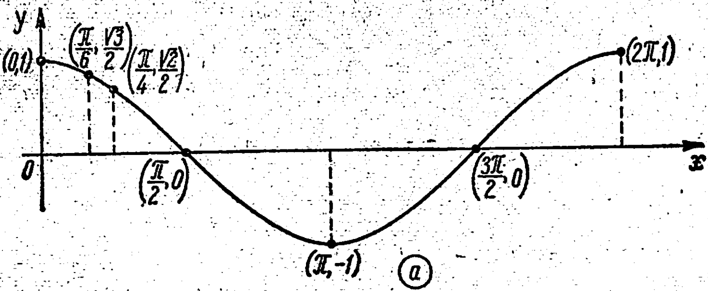
$$y = \cos x.$$

Înscriem într-un tabel valorile arcelor din primul cerc, exprimate în radiani, în ordine crescătoare, şi dedesubtul lor valorile corespunzătoare ale lui $y = \cos x$. Avem:

x	$0 \nearrow \frac{\pi}{6} \nearrow \frac{\pi}{4} \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$y = \cos x$	$1 \searrow \frac{\sqrt{3}}{2} \searrow \frac{\sqrt{2}}{2} \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1$

Figurînd punctele ale căror coordonate sînt perechile de valori x şi y înscrise în tabel, obţinem pentru arcele care variază de la 0 la 2π graficul aproximativ al funcţiei $y = \cos x$ (fig. 31, *a*).

Construcţia geometrică a graficului funcţiei $y = \cos x$ (fig. 31, *b*) se obţine în mod asemănător cu aceea indicată pentru funcţia sinus (v. p. 37). Dacă notăm cu $0; 1; 2; \ldots; n$ punctele de diviziune ale sfertului de



cerc şi cu $0; 1'; 2'; 3'; \ldots; n'$ acelea ale segmentului $OA = \frac{\pi}{2}$ (O notat 0, iar B şi A notate respectiv n şi n') şi ţinem seama de relaţia $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, atunci obţinem puncte ale graficului funcţiei $y = \cos x$ la intersecţia paralelelor cu Ox şi Oy, duse respectiv prin perechile de puncte $(n; 0)$, $(n-1; 1')$, $(n-2; 2')$, $(n-3; 3')$ ... (pe figura 31, *b* s-a luat $n = 8$).

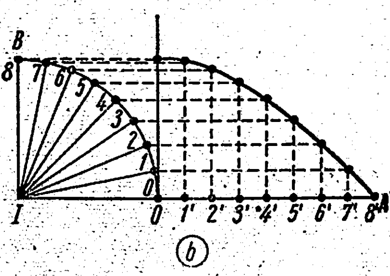


Fig. 31

Mărind sau micşorînd argumentul x al funcţiei $y = \cos x$ cu 2π, funcţia y îşi reia valoarea. Aceasta înseamnă că porţiunile graficelor de variaţie ale funcţiei $y = \cos x$ pentru argumente cuprinse în intervalele $(2\pi, 4\pi)$, $(4\pi, 6\pi)$ etc. şi pentru argumente cuprinse în intervalele $(-2\pi, 0)$, $(-4\pi, -2\pi)$ etc. sînt identice cu porțiunea corespunzătoare intervalului $(0, 2\pi)$. De aceea, *graficul funcției* $y = \cos x$

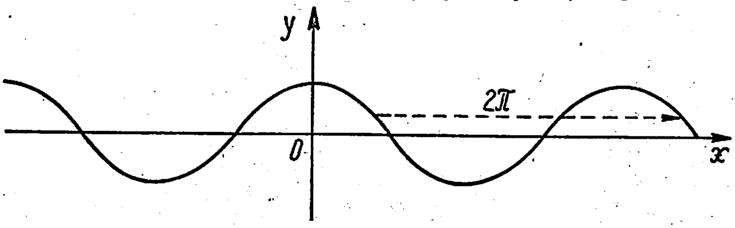


Fig. 32

pentru orice valoare a lui x se obține printr-o translație de mărime 2π *sau* -2π, *paralelă cu* Ox, *o dată sau repetată, a graficului funcției corespunzător intervalului* $(0, 2\pi)$.

Prin acest procedeu se obține graficul funcției $y = \cos x$, cînd x variază de la $-\infty$ la $+\infty$ (fig. 32).

Exerciții aplicative: nr. 34(2), 35, 37(1), 37(3), 37(6), 40 de la p. 87—88.

Funcția tangentă

14. **Teoremă.** 1) *În primul cadran, funcția tangentă ia orice valoare pozitivă dată și este crescătoare.*

2) *Fiind dat un număr pozitiv n, oricît de mare, există o valoare a arcului a cărui tangentă este mai mare decît n și această valoare este cu atît mai aproape de* $\frac{\pi}{2}$ *cu cît n este mai mare.*

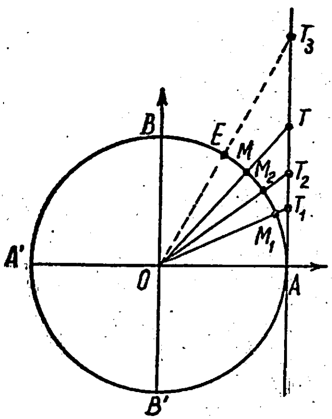


Fig. 33

1) Considerăm două arce din primul cadran $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ (fig. 33), astfel că $\overset{\frown}{AM_2} > \overset{\frown}{AM_1}$. În acest caz, să demonstrăm că între tangentele lor, AT_1 și AT_2, care pot avea orice valoare, avem relația $AT_2 > AT_1$ sau $\operatorname{tg} \overset{\frown}{AM_2} > \operatorname{tg} \overset{\frown}{AM_1}$.

Din cauză că unghiul $\widehat{M_2OA}$ este mai mare decît unghiul $\widehat{M_1OA}$, oblica OM_2T_2 cade în afara unghiului $\widehat{T_1OA}$ şi deci segmentul AT_2 este mai mare decît segmentul AT_1, ceea ce confirmă că în primul cadran funcţia este crescătoare. De asemenea, ea este pozitivă pentru că segmentele AT_1, AT_2 sînt situate deasupra diametrului $A'A$.

2) Se aşază pe linia tangentelor segmentul $AT = n$ şi se uneşte T cu O. Dreapta OT taie arcul cadranului I în M, situat între A şi B. Dacă luăm un punct E, situat între M şi B, atunci pe baza celor spuse la punctul 1 avem: $\operatorname{tg}\widehat{AE} > \operatorname{tg}\widehat{AM}$ sau $\operatorname{tg}\widehat{AE} > n$, ceea ce demonstrează că există un arc AE mai aproape de $\frac{\pi}{2}$, a cărui tangentă este mai mare decît n. Cu cît n este mai mare, cu atît şi M este mai aproape de B. Se spune, în acest caz, că tangenta tinde către $+\infty$ cînd arcul se apropie de $\frac{\pi}{2}$ prin valori mai mici decît $\frac{\pi}{2}$.

Deoarece cea mai mică valoare 0 a tangentei corespunde la arcul 0 şi pentru că tangentele cresc, rezultă că: *tangenta unui arc creşte de la 0 la $+\infty$ atunci cînd arcul creşte de la 0 la $\frac{\pi}{2}$* (fig. 34, *a*).

Din cauza simetriei cadranelor I şi II faţă de diametrul BB', tangentele AT_1, AP_1 a două arce $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AN_1}$, care au extremităţile M_1, N_1 simetrice faţă de diametrul BB', sînt egale în valoare absolută, dar de semne contrare. De aceea, arcele din cadranul II au tangentele respectiv egale în valoare absolută şi de semne contrare cu tangentele arcelor corespunzătoare din cadranul I.

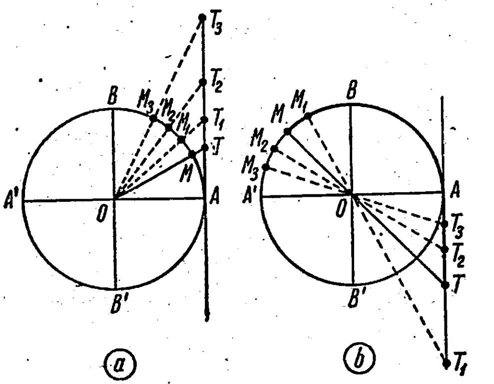


Fig. 34

Cînd extremitatea arcului din cadranul II vine de la A' spre B, tangentele primesc valori opuse tangentelor arcelor corespunzătoare din cadranul I, ale căror extremități vin de la A spre B.

Urmează de aici că: 1) *atunci cînd arcul tinde către* $\frac{\pi}{2}$ *prin valori mai mari decît* $\frac{\pi}{2}$ *(extremitatea arcului tinde către B venind dinspre A'), tangenta tinde către* $-\infty$; 2) *atunci cînd arcul variază de la* $\frac{\pi}{2}$ *la* π, *tangenta crește de la* $-\infty$ *la* 0 (fig. 34, *b*).

Înainte de a trece la variația tangentei unui arc din cadranele III și IV, facem următoarea:

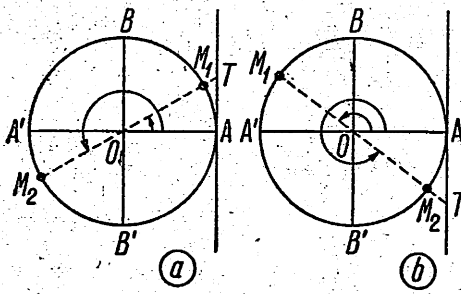


Fig. 35

Observare. Două arce ale căror extremități M_1 și M_2 sînt capetele unui diametru au aceeași tangentă (fig. 35, *a* și *b*). Aceasta rezultă din însăși definiția tangentei.

Din observarea făcută mai sus deducem că *tangentele arcelor din cadranul III sînt respectiv egale cu cele ale arcelor corespunzătoare din cadranul I, iar tangentele arcelor din cadranul IV sînt respectiv egale cu acelea ale arcelor corespunzătoare din cadranul II.*

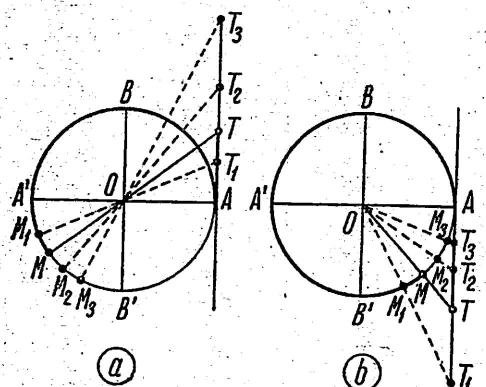


Fig. 36

Așadar, *cînd arcul crește de la* π *la* $\frac{3\pi}{2}$, *tangenta sa crește de la 0 la* $+\infty$, *iar cînd arcul crește de la* $\frac{3\pi}{2}$ *la* 2π, *tangenta sa crește de la* $-\infty$ *la 0* (fig. 36, *a* și *b*).

15. **Periodicitatea funcției tangentă.** Din cele arătate mai sus, se constată că două arce ale căror extremități

sînt capetele unui diametru au aceeaşi tangentă. Dacă ţinem seama de expresia pentru astfel de arce (I—12 aplicaţia I), $\widehat{AM} = x + k\pi$, avem:

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$$

sau:

$$\operatorname{tg}(x + k \cdot 180°) = \operatorname{tg} x,$$

dacă arcul x este exprimat în grade sexagesimale, unde k este un întreg oarecare.

Dintre arcele $x + k\pi$, cel mai mic arc care urmează în ordine crescătoare după x este evident $x + \pi$. Pe baza egalităţii de mai sus, avem relaţia:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

Această egalitate exprimă periodicitatea funcţiei tangentă.

Dacă adăugăm unui arc oarecare x, exprimat în radiani, numărul π, tangenta arcului obţinut este aceeaşi ca şi tangenta arcului iniţial (x).

Numărul π este *perioadă*, iar funcţia tangentă este o *funcţie periodică*.

16. Reprezentarea grafică a funcţiei tangentă. Dacă notăm cu x valoarea unui arc şi cu y tangenta arcului, între cele două mulţimi de valori există corespondenţa arătată mai sus, pe care o notăm prin egalitatea:

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Să rezumăm într-un tabel şi apoi grafic variaţia funcţiei y.

Avem:

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$			$\nearrow$	π
$y = \operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$		$\nearrow$	0

S-au introdus în tabel arce cuprinse între 0 şi π, deoarece tangenta are perioada π. Pentru arcele de la π la 2π se repetă variaţia din primele două cadrane.

Notînd cu x şi y coordonatele unui punct raportat la un sistem de două axe perpendiculare, atunci punctelor din tabelul de mai sus, atît celor înscrise în tabel, cît şi celor neînscrise, le corespunde graficul din figura 37, *a*.

La construirea geometrică a graficului funcţiei $y = \text{tg}\, x$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ procedăm în mod analog ca la construirea graficului funcţiei $y = \sin x$. Se obţine astfel curba din figura 37,*b*.

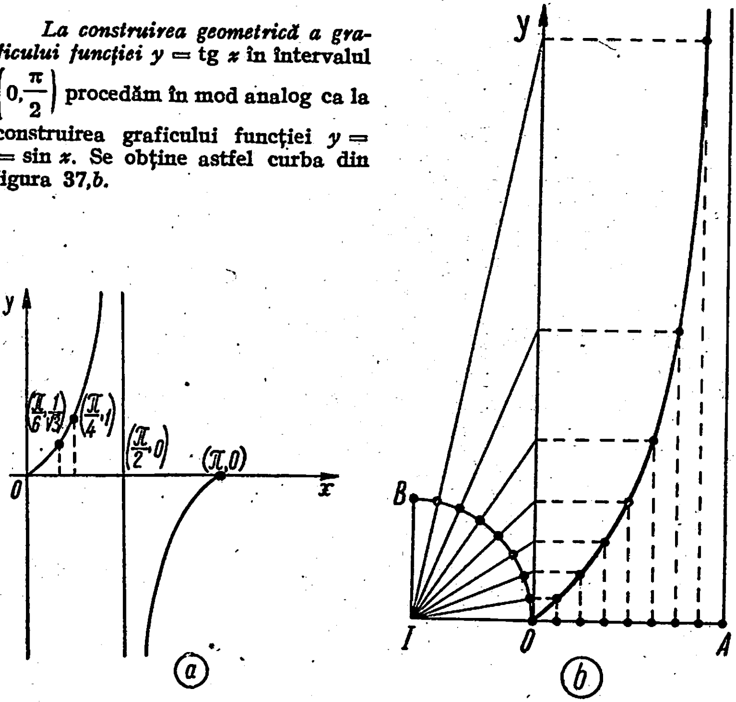


Fig. 37

Mărind sau micşorînd argumentul x al funcţiei $y = \text{tg}\, x$ cu π, funcţia y îşi reia valoarea. Aceasta înseamnă că porţiunile graficelor de variaţie ale funcţiei $y = \text{tg}\, x$, pentru argumentele cuprinse în intervalele $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ etc. şi pentru argumente cuprinse în intervalele $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$, sînt identice cu porţiunea corespunzătoare intervalului $(0, \pi)$. De aceea, *graficul funcţiei* $y = \text{tg}\, x$ *pentru orice valoare a lui* x *se obţine printr-o translaţie de mărime* π *sau* $-\pi$, *paralelă cu* Ox, *o dată sau repetată, a graficului funcţiei corespunzător intervalului* $(0, \pi)$.

Prin acest procedeu se obține graficul funcției $y = \text{tg}\, x$ cînd x variază de la $-\infty$ la $+\infty$ (fig. 38).

Exerciții aplicative: nr. 37(4), 37(7), 37(8), 41, 42 de la p. 88.

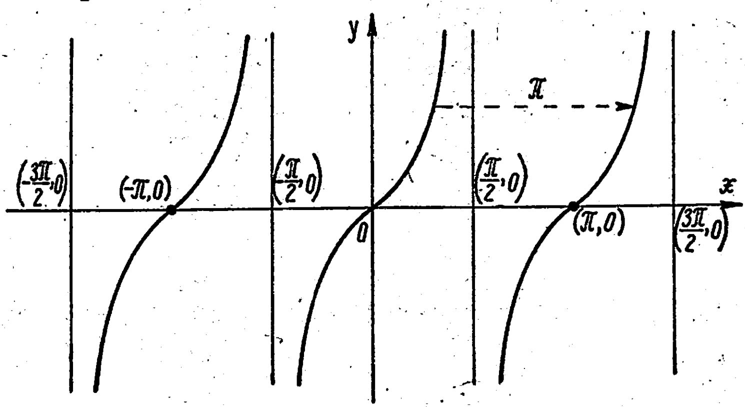


Fig. 38

Funcția cotangentă

17. **Teoremă.** 1) *În primul cadran, funcția cotangentă este descrescătoare și poate să aibă orice valoare pozitivă dată.*

2) *Fiind dat un număr pozitiv n, oricît de mare, există o valoare a arcului a cărui cotangentă este mai mare decît n și această valoare este cu atît mai aproape de zero cu cît n este mai mare.*

1) Considerăm două arce din primul cadran, $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ (fig. 39), astfel că $\overset{\frown}{AM_2} > \overset{\frown}{AM_1}$.

În acest caz, să demonstrăm că între cotangentele lor BT_1, BT_2, care pot avea orice valoare, avem relația:

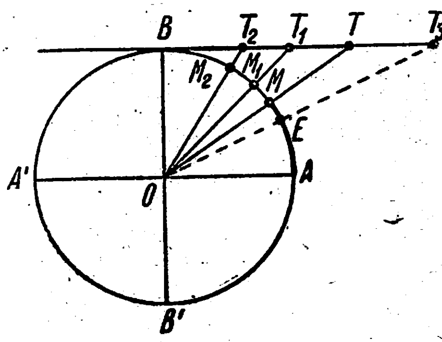


Fig. 39

$$\text{ctg}\, \overset{\frown}{AM_2} < \text{ctg}\, \overset{\frown}{AM_1}.$$

Din cauză că unghiul $\widehat{AOM_2}$ este mai mare ca $\widehat{AOM_1}$, avem $\widehat{BOM_2} < \widehat{BOM_1}$ şi, prin urmare, segmentele BT_1 şi BT_2 de pe linia cotangentelor sînt în relaţia $BT_2 < BT_1$ sau ctg $\overset{\frown}{AM_2} <$ ctg $\overset{\frown}{AM_1}$.

2) Aşezăm pe linia cotangentelor segmentul $BT = n$ şi unim T cu O. Dreapta OT taie cercul în M. Avem ctg $\overset{\frown}{AM} = BT = n$. Dacă luăm un punct E situat între M şi A, atunci $\overset{\frown}{AE}$ este mai mic decît $\overset{\frown}{AM}$ şi, prin urmare, pe baza celor spuse la punctul 1, avem :

$$\text{ctg}\,\overset{\frown}{AE} > \text{ctg}\,\overset{\frown}{AM} \text{ sau } \text{ctg}\,\overset{\frown}{AE} > n,$$

ceea ce demonstrează că există un arc AE mai aproape de zero, a cărui cotangentă este mai mare decît n. Cu cît n este mai mare, cu atît şi M este mai aproape de A. Se spune că, în acest caz, cotangenta tinde către $+\infty$ cînd arcul se apropie de zero prin valori pozitive.

Deoarece cea mai mică valoare 0 a cotangentei corespunde la arcul $\frac{\pi}{2}$ şi deoarece cotangenta descreşte cînd arcul creşte, rezultă că : *cotangenta unui arc descreşte de la* $+\infty$ *la 0 atunci cînd arcul creşte de la 0 la* $\frac{\pi}{2}$ (fig. 40, *a*).

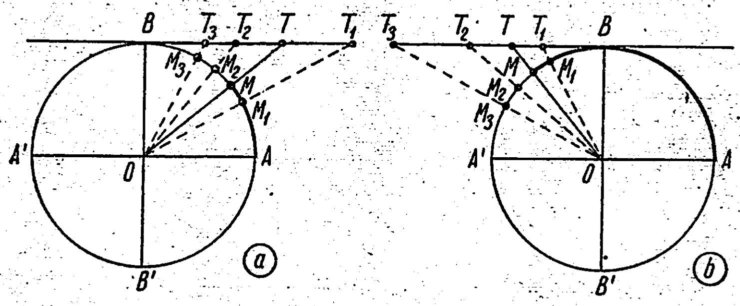


Fig. 40

Cadranele I şi II fiind simetrice faţă de diametrul vertical BB', cotangentele a două arce care au extremităţile simetrice faţă de BB' au valori opuse ; de aceea arcele din cadranul II au cotangentele negative şi respectiv egale în valoare absolută cu cotangentele arcelor corespunzătoare din cadranul I. Din această constatare rezultă: *cotangenta unui arc descrește de la 0 la $-\infty$ atunci cînd arcul crește de la $\frac{\pi}{2}$ la π* (fig. 40, *b*).

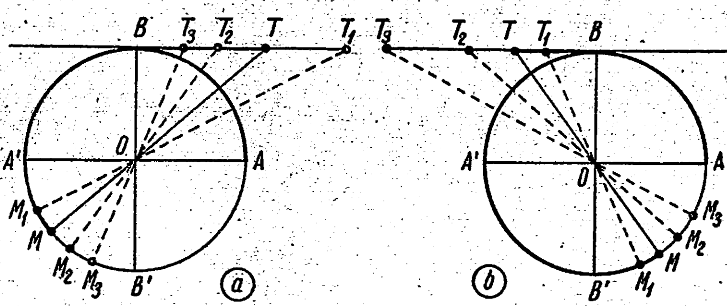


Fig. 41

Pe baza definiției cotangentei, arcele din cadranul III au cotangentele respectiv egale cu ale arcelor corespunzătoare din cadranul I, iar cotangentele arcelor din cadranul IV sînt respectiv egale cu cotangentele arcelor corespunzătoare din cadranul II. Rezultă de aici următoarele:

Cînd arcul crește de la π la $\frac{3\pi}{2}$, cotangenta sa descrește de la $+\infty$ la 0, iar cînd arcul crește de la $\frac{3\pi}{2}$ la 2π, cotangenta acestui arc descrește de la 0 la $-\infty$ (fig. 41, *a* și *b*).

18. Periodicitatea funcției cotangentă. Deoarece două arce care au extremitățile așezate la capetele unui diametru au aceeași cotangentă, rezultă, ca și la funcția tangentă, că avem:

$$\text{ctg}\,(x + k\pi) = \text{ctg}\,x$$

sau:

$$\text{ctg}\,(x + k \cdot 180°) = \text{ctg}\,x,$$

dacă arcul x este exprimat în grade sexagesimale, unde k este un întreg oarecare.

Dintre arcele $x + k\pi$, cel mai mic care urmează în ordine crescătoare după x este $x + \pi$. Pe baza relației de mai sus, avem prin urmare și: $\text{ctg}\,(x + \pi) = \text{ctg}\,x$.

Această egalitate exprimă periodicitatea funcției cotangentă.

Dacă adăugăm unui arc oarecare x, exprimat în radiani, numărul π, cotangenta arcului obținut este aceeași ca și cotangenta arcului inițial (x).

Numărul π este *perioada*, iar funcţia cotangentă este o *funcţie periodică*.

19. Reprezentarea grafică a funcţiei cotangentă. Dacă notăm cu x valoarea unui arc exprimat în radiani şi cu y valoarea respectivă a cotangentei, corespondenţa între cele două mulţimi de variabile se exprimă prin relaţia :

$$y = \mathrm{ctg}\, x.$$

Rezumînd într-un tabel variaţia cotangentei pentru arcele cuprinse între 0 şi π, obţinem :

x	0		$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	
$y = \mathrm{ctg}\, x$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$

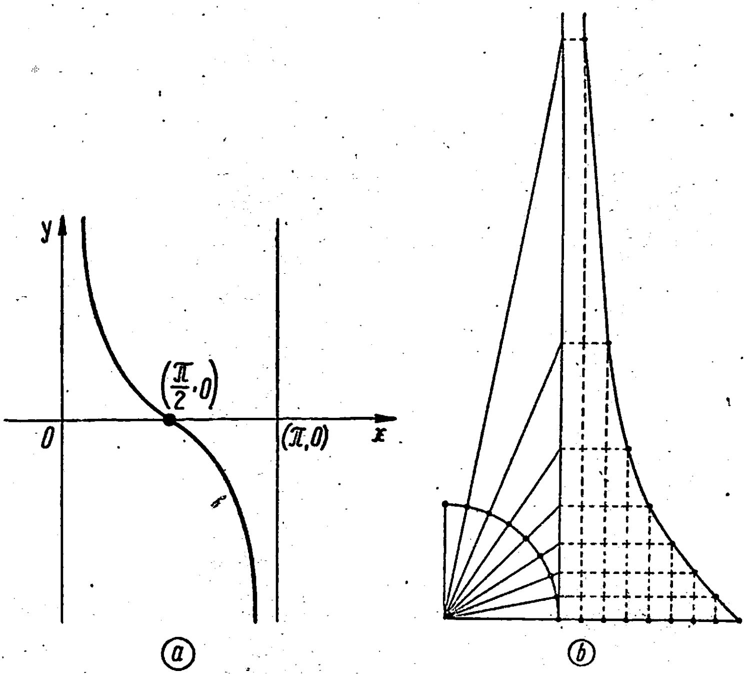


Fig. 42

Dacă socotim că x şi valoarea corespunzătoare pentru y reprezintă coordonatele unui punct în raport cu două axe perpendiculare, atunci, pe baza tabelului precedent, putem construi graficul din figura 42, *a*.

Construcția geometrică a graficului funcției $y = \text{ctg}\, x$ se obține într-un mod asemănător cu aceea efectuată pentru $y = \cos x$ și $y = \text{tg}\, x$. Din figura 42, *b* reiese felul cum se obțin cîteva puncte ale graficului.

Mărind sau micșorînd argumentul x al funcției $y = \text{ctg}\, x$ cu π, funcția y își reia valoarea.

Aceasta înseamnă că porțiunile graficelor de variație ale funcției $y = \text{ctg}\, x$, pentru argumente cuprinse în intervalele $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ etc. și pentru argumente cuprinse în intervalele $(-\pi, 0)$, $(-2\pi, -\pi)$ etc., sînt identice cu porțiunea corespunzătoare intervalului $(0, \pi)$. De aceea, *graficul funcției* $y = \text{ctg}\, x$ *pentru orice valoare a lui* x *se*

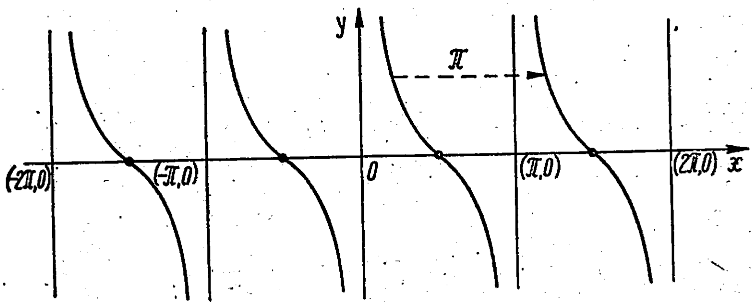


Fig. 43.

obține printr-o translație de mărime π *sau* $-\pi$, *paralelă cu* Ox, *o dată sau repetată, a graficului funcției corespunzător intervalului* $(0, \pi)$. Prin acest procedeu se obține graficul funcției $y = \text{ctg}\, x$, cînd x variază de la $-\infty$ la $+\infty$ (fig. 43).

Funcțiile secantă și cosecantă

20. Funcțiile $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$ și $y_2 = \dfrac{1}{\sin x}$ pentru orice valoare a argumentului x poartă respectiv numele *secantă de* x și *cosecantă de* x și se scriu:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Funcția sec x are același semn cu cos x, iar valoarea ei absolută este mai mare sau cel puțin egală cu 1, pentru că funcția cos x, a cărei valoare inversă este egală cu sec x, variază între -1 și $+1$. În primul cadran, sec x este pozitivă și crește de la 1 la $+\infty$; în al doilea cadran, sec x este negativă și crește de la $-\infty$ la -1; în al treilea cadran, funcția este negativă și descrește de la -1 la $-\infty$; în al patrulea cadran, ea este pozitivă și descrește de la $+\infty$ la 1.

Funcția cosec x are același semn cu sin x, iar valoarea ei absolută este mai mare sau cel puțin egală cu 1, pentru că funcția sin x, a cărei valoare inversă este egală cu cosec x, are valori cuprinse între -1 și $+1$. În primul cadran, cosec x este pozitivă și descrește de la $+\infty$ la 1; în al doilea cadran, cosec x este pozitivă și crește de la 1 la $+\infty$; în al treilea cadran funcția este negativă și crește de la $-\infty$ la -1; în al patrulea cadran, ea este negativă și descrește de la -1 la $-\infty$.

21. Tabel rezumativ al studiului variației funcțiilor trigonometrice

x	0 (0°)	Cadranul I $<x<$	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	Cadranul II $<x<$	π (180°)	Cadranul III $<x<$	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	Cadranul IV $<x<$	2π (360°)
sin x	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
cos x	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
tg x	0	↗ $+\infty$	nu există	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	nu există	$-\infty$ ↗	0
ctg x	nu există	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	nu există	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	nu există

Funcția $y = \sin x$ poate lua orice valoare cuprinsă între -1 și $+1$, inclusiv marginile.

Funcția $y = \cos x$ poate lua orice valoare cuprinsă între -1 și $+1$, inclusiv marginile.

Funcția $y = \operatorname{tg} x$ poate lua orice valoare; pentru $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, tg x nu există.

Funcția $y = \operatorname{ctg} x$ poate lua orice valoare; pentru $x = k\pi$, ctg x nu există.

Exerciții aplicative: nr. 36 de la p. 88.

Reducerea la primul cadran şi la primul octant. Relaţii între funcţiile trigonometrice ale unor arce asociate

22. Din studiul variaţiei funcţiilor trigonometrice s-a constatat că, orice valoare ar avea un arc x, fiecare funcţie trigonometrică a acestui arc are cîte o valoare unică şi bine determinată.

Problema pe care ne-o punem acum este să găsim metoda de a reduce calculul oricărei funcţii trigonometrice a unui arc x numai la calculul funcţiilor trigonometrice ale unor arce situate în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sau $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. În acest scop, vom demonstra cîteva teoreme pregătitoare.

Teorema I. *Două arce cu aceeaşi origine şi cu extremităţi simetrice faţă de diametrul vertical BB' au sinusurile şi cosecantele respectiv egale; celelalte funcţii trigonometrice de acelaşi nume ale acestor arce sînt respectiv egale în valoare absolută şi de semne contrare.*

Din cauza simetriei faţă de BB', extremităţile M_1 şi M_2 (fig. 44) ale arcelor $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$ sînt situate sau în cadranele I şi II sau în cadranele III şi IV; de aceea sinusurile lor au acelaşi semn, iar celelalte funcţii trigonometrice (cos, tg, ctg) au respectiv semne contrare. Egalitatea în valoare absolută a fost arătată la observarea III, p. 32. Funcţiile secantă şi cosecantă se comportă la fel ca şi funcţiile cosinus, respectiv sinus, deoarece $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ şi $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

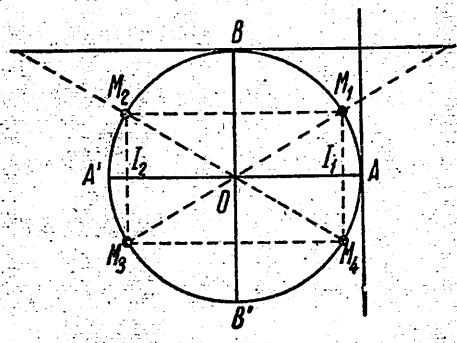


Fig. 44

Consecinţă. *Două arce suplimentare au sinusurile şi cosecantele respectiv egale; celelalte funcţii trigonometrice de acelaşi nume ale acestor arce sînt respectiv egale în valoare absolută şi de semne contrare.*

Aceasta rezultă din faptul că două arce suplimentare $\widehat{AM}_1 = x$ şi $\widehat{ABM}_2 = \pi - x$ au extremităţile simetrice faţă de BB'.

Avem deci:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(\pi - x) = \sin x;\quad \cos(\pi - x) = -\cos x;\\ \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x;\\ \operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x;\quad \sec(\pi - x) = -\sec x;\\ \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x\end{gathered}}$$

Dacă arcele sînt date în grade sexagesimale, π se înlocuieşte cu $180°$.

Aplicaţie. *Să se calculeze funcţiile trigonometrice ale unghiului de* $120°$.

Avem:

$$\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 120° = -\operatorname{ctg} 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec 120° = -\sec 60° = -\frac{1}{\cos 60°} = -2;$$

$$\operatorname{cosec} 120° = \operatorname{cosec} 60° = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

23. **Teorema II.** *Două arce care au aceeaşi origine şi extremităţi simetrice faţă de centrul O al cercului au tangentele, respectiv cotangentele, egale; celelalte funcţii trigonometrice de acelaşi nume ale acestor arce sînt respectiv egale în valoare absolută şi de semne contrare.*

Din cauza simetriei faţă de centrul O al cercului, extremităţile M_1, M_3 (fig. 44) ale arcelor $\widehat{AM}_1$, $\widehat{ABM}_3$ sînt situate sau în cadranele I şi III, sau în cadranele II şi IV; de aceea tangentele, respectiv cotangentele acestor arce au acelaşi semn, iar celelalte funcţii trigonometrice (sin, cos) de acelaşi nume ale acestor arce sînt de semne contrare.

Egalitatea în valoare absolută a fost arătată la observarea III, p. 32. Funcțiile secantă și cosecantă se comportă la fel ca și funcțiile cosinus, respectiv sinus, deoarece $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ și $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Consecință. *Două arce care diferă cu* π *au tangentele, respectiv cotangentele, egale; celelalte funcții trigonometrice de același nume ale acestor arce sînt respectiv egale în valoare absolută și de semne contrare.*

Aceasta rezultă din faptul că două arce, $\overset{\frown}{AM_1} = x$ și $\overset{\frown}{ABM_3} = \pi + x$, au extremitățile simetrice față de centrul cercului.

Avem deci:

$$\boxed{\begin{gathered} \sin(\pi + x) = -\sin x; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x; \\ \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x; \\ \operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x; \quad \sec(\pi + x) = -\sec x; \\ \operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x \end{gathered}}$$

Dacă arcele sînt date în grade sexagesimale, π se înlocuiește cu 180°.

Aplicație. *Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului de* 210°.

Avem:

$$\sin 210° = -\sin(210° - 180°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2};$$

$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{ctg} 210° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\sec 210° = -\sec 30° = -\frac{1}{\cos 30°} = -\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cosec} 210° = -\operatorname{cosec} 30° = -\frac{1}{\sin 30°} = -2.$$

24. **Teorema III.** *Două arce care au aceeași origine și extremități simetrice față de diametrul orizontal $A'A$ au cosinusurile, respectiv secantele, egale; celelalte funcții tri-*

gonometrice de acelaşi nume ale acestor arce sînt respectiv egale în valoare absolută şi de semne contrare.

Din cauza simetriei faţă de axa $A'A$, extremităţile M_1, M_4 (fig. 44) ale arcelor $\widehat{AM_1}$, $\widehat{AM_4}$ sînt situate sau în cadranele I şi IV, sau în cadranele II şi III; de aceea cosinusurile lor au acelaşi semn, iar celelalte funcţii trigonometrice (sin, tg, ctg) sînt respectiv de semne contrare. Egalitatea în valoare absolută a fost arătată la observarea III, p. 32. Funcţiile secantă şi cosecantă se comportă la fel ca şi funcţiile cosinus, respectiv sinus, deoarece $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ şi $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$.

Consecinţă. *Două arce de semne contrare sau a căror sumă este egală cu 2π au cosinusurile, respectiv secantele, egale; celelalte funcţii trigonometrice de acelaşi nume ale acestor arce sînt respectiv egale în valoare absolută şi de semne contrare.*

Aceasta rezultă din faptul că două arce de semne contrare, $\widehat{AM_1} = x$ şi $\widehat{AM_4} = -x$ sau $\widehat{AM_1} = x$ şi $\widehat{ABA'M_4} = 2\pi - x$, au extremităţile simetrice faţă de $A'A$.

Avem deci:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(-x) = -\sin x; \quad \cos(-x) = \cos x;\\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x;\\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x; \sec(-x) = \sec x;\\ \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x;\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(2\pi - x) = -\sin x; \quad \cos(2\pi - x) = \cos x;\\ \operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x;\\ \operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x; \quad \sec(2\pi - x) = \sec x;\\ \operatorname{cosec}(2\pi - x) = -\operatorname{cosec} x;\end{gathered}}$$

Dacă arcele sînt date în grade sexagesimale, 2π se înlocuieşte cu $360°$.

Aplicaţie. *Să se calculeze funcţiile trigonometrice ale unghiurilor: $-300°$ şi $315°$.*

Avem:

$$\sin(-300°) = -\sin 300° = \sin(360° - 300°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos(-300°) = \cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-300°) = -\operatorname{tg} 300° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg}(-300°) = -\operatorname{ctg} 300° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec(-300°) = \sec 300° = \sec 60° = \frac{1}{\cos 60°} = 2;$$

$$\operatorname{cosec}(-300°) = -\operatorname{cosec} 300° = \operatorname{cosec} 60° = \frac{1}{\sin 60°} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sin 315° = -\sin(360° - 315°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 315° = -\operatorname{tg} 45° = -1;$$

$$\operatorname{ctg} 315° = -\operatorname{ctg} 45° = -1;$$

$$\sec 315° = \sec 45° = \frac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec} 315° = -\operatorname{cosec} 45° = -\frac{1}{\sin 45°} = -\sqrt{2}.$$

25. **Funcțiile trigonometrice a două arce a căror sumă este $\frac{\pi}{2}$.** Fie arcul x oarecare și $\frac{\pi}{2} - x$ celălalt arc.

Teorema IV. *Să se demonstreze relațiile:*

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x}$$

și:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x}$$

Oricare ar fi valoarea lui x, putem scrie:

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \text{şi} \quad x = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Dacă notăm $\frac{\pi}{4} - x = \alpha$, atunci se constată că arcele $\widehat{AM}_1 = x$ şi $\widehat{AM}_2 = \frac{\pi}{2} - x$ sînt respectiv egale cu $\frac{\pi}{4} - \alpha$ şi $\frac{\pi}{4} + \alpha$, care sînt două arce de pe cercul de rază 1, cu extremităţile M_1 şi M_2 simetrice faţă de bisectoarea I a axelor.

Punctele M_1 şi M_2 se pot afla în una din următoarele poziţii:

1) amîndouă în cadranul I,
2) unul în cadranul II şi al doilea în cadranul IV,
3) amîndouă în cadranul III.

Din cauza simetriei faţă de bisectoarea I a axelor şi a posibilităţilor de aşezare a punctelor M_1 şi M_2, rezultă că abscisa lui M_2 este întotdeauna egală cu ordonata lui M_1, şi invers; cu alte cuvinte avem:

$$\cos \widehat{AM}_2 = \sin \widehat{AM}_1, \text{ sau } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ şi } \sin \widehat{AM}_2 =$$

$$= \cos \widehat{AM}_1, \text{ sau } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

În mod analog se demonstrează relaţia: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$$= \operatorname{tg} x \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x.$$

Aplicaţii

Reducerea la primul cadran şi la primul octant

26. Pe baza periodicităţii funcţiilor trigonometrice, a teoremelor de mai sus şi a consecinţelor lor, se poate reduce calculul oricărei funcţii trigonometrice la calculul unei funcţii al cărei argument este unul din arcele de la 0° la 90°, sau chiar de la 0° la 45°.

Exemplele de mai jos vor arăta procedeul de calcul.

Exemplul I. *Să se reducă la primul octant* ctg 2 631°.

Deoarece, dacă adăugăm sau scădem dintr-un arc un multiplu de 180°, obţinem un arc care are aceeaşi cotangentă (cotangenta are perioada π radiani sau 180°) vom scădea din 2 631° cel mai mare multiplu al lui 180°, care să fie mai mic sau cel mult egal cu 2 631. În acest scop împărţim 2 631° la 180° şi avem:

$$2\,631° = 180° \cdot 14 + 111°,$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{ctg} 2\,631° = \operatorname{ctg} 111° = -\operatorname{ctg}(180° - 111°) = -\operatorname{ctg} 69°.$$

Calculul valorii obţinute se poate reduce la primul octant (a opta parte din cerc) pe baza teoremei IV, care stabileşte relaţii între funcţiile trigonometrice a două unghiuri complementare.

Dacă $45° < \alpha < 90°$, atunci $0 < 90° - \alpha < 45°$.

În cazul numeric dat, $\alpha = 69°$ şi deci $90° - \alpha = 21°$.

Avem, prin urmare, $\operatorname{ctg} 69° = \operatorname{tg} 21°$ şi deci $\operatorname{ctg} 2\,631° = -\operatorname{tg} 21°$.

Exemplul II. *Să se reducă la primul cadran şi la primul octant calculul valorii funcţiilor trigonometrice ale unghiului* $u = -25\,633°52'16''$. Vom calcula valorile funcţiilor trigonometrice ale unghiului:

$$-u = 25\,633°52'16''.$$

Deoarece, dacă adăugăm sau scădem dintr-un arc un multiplu de 360°, obţinem un arc a cărui funcţie trigonometrică are aceeaşi valoare, vom scădea din 25 633°52′16″ cel mai mare multiplu de 360°. În acest scop împărţim $-u$ la 360° şi obţinem:

$$-u = 71 \cdot 360° + 73°52'16''.$$

De unde rezultă:

$\sin(-u) = -\sin u = \sin 73°52'16''$ sau $\sin u = -\sin 73°52'16''$;

$\cos(-u) = \cos u = \cos 73°52'16''$;

$\operatorname{tg}(-u) = -\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} 73°52'16''$ sau $\operatorname{tg} u = -\operatorname{tg} 73°52'16''$;

$\operatorname{ctg}(-u) = -\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} 73°52'16''$ sau $\operatorname{ctg} u = -\operatorname{ctg} 73°52'16''$.

Reducînd calculul valorilor obținute la primul octant, avem:

$$\sin u = -\sin 73°52'16'' = -\cos 16°7'44'';$$
$$\cos u = \cos 73°52'16'' = \sin 16°7'64'';$$
$$\operatorname{tg} u = -\operatorname{tg} 73°52'16'' = -\operatorname{ctg} 16°7'44'';$$
$$\operatorname{ctg} u = -\operatorname{ctg} 73°52'16'' = -\operatorname{tg} 16°7'44''.$$

Exemplul III. *Să se reducă* $\cos(270° + x)$ *la o funcție trigonometrică a arcului* x.

Se poate scrie:

$$\cos(270° + x) = \cos(360° - 90° + x) = \cos(-90° + x) = \\ = \cos(90° - x) = \sin x.$$

Exerciții aplicative: nr. 48, 49, 50, 51, 52, 53 de la p. 89 și 90.

Arce care corespund la o funcție trigonometrică dată. Funcții trigonometrice inverse

27. Pînă aici ne-am ocupat de valorile funcțiilor trigonometrice ale unor arce date. Se poate pune însă și problema inversă:

Fiind dată valoarea p *a unei funcții trigonometrice, să se găsească valorile corespunzătoare ale arcului care are valoarea unei funcții trigonometrice date egală cu* p.

În acest caz, rezolvăm problema pe baza cunoașterii modului de variație a funcțiilor trigonometrice, precum și a teoremelor care privesc funcțiile trigonometrice ale unor arce asociate.

Problema I. *Să se găsească toate arcele* x *în radiani, pentru care avem:*

$$\sin x = +\frac{1}{2}.$$

Pe partea pozitivă a diametrului vertical $B'B$ din cercul de rază 1 luăm segmentul $OI = \frac{1}{2}$ și ducem prin I o paralelă la diametrul orizontal $A'A$. Această paralelă determină pe cerc punctele M şi N (fig. 45). Pe baza definiţiei sinusului avem:

$$\sin \widehat{AM} = \sin \widehat{ABN} = OI = \frac{1}{2}.$$

Astfel că arcele x care au sinusul egal cu $\frac{1}{2}$ sînt $\widehat{AM}$ şi $\widehat{ABN}$ sau orice arc cu originea în A şi extremităţile în M sau N. Se ştie că arcul cel mai mic $\widehat{AM} = \frac{\pi}{6}$ $(30°)$, iar $\widehat{ABN} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, adică suplimentul lui $\widehat{AM}$.

Arcele care au originea în A şi extremităţile în M sau N sînt prin urmare:

$$\widehat{AM} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ şi } \widehat{ABN} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi,$$

unde k şi n sînt nişte întregi oarecare.

În general, *dacă trebuie să găsim toate arcele pentru care avem:*

$$\sin x = p,$$

problema este posibilă numai dacă $|p| \leqslant 1$, adică $-1 \leqslant p \leqslant 1$.

Presupunînd această condiţie îndeplinită, urmăm calea indicată în exemplul numeric.

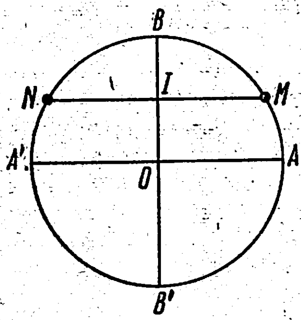


Fig. 45

Pe partea pozitivă sau negativă (după cum $p > 0$ sau $p < 0$) a diametrului $B'B$, din cercul de rază 1, aşezăm segmentul $OI = p$ şi ducem prin I o paralelă la diametrul orizontal $A'A$. Această paralelă determină pe cerc punctele M şi N, cărora le corespund două arce cu extremităţile simetrice faţă de diametrul vertical. Dacă notăm $\widehat{AM} = \alpha$ arcul cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$, al cărui sinus este p, atunci celălalt arc are măsura $\widehat{ABN} = \pi - \alpha$. Aşadar, toate arcele x care au sinusul egal cu p sînt date de formulele:

$$x' = \alpha + 2k\pi \quad \text{şi} \quad x'' = \pi - \alpha + 2m\pi = (2m + 1)\pi - \alpha$$

(v. I — 12, aplicația III) sau printr-o singură exprimare:

$$x = (-1)^n \alpha + n\pi,$$

unde k, m, n sînt niște întregi oarecare.

Din cele arătate mai sus constatăm că, dacă avem o relație de forma:

$$\sin y = x \text{ cu condiția } |x| \leqslant 1,$$

atunci există o infinitate de arce y avînd expresii bine determinate, al căror sinus este x. Expresia lui y este dependentă de x. La fiecare valoare pe care o poate avea x corespunde o mulțime de valori pentru y. Se definește astfel o mulțime de arce al căror sinus este x. Notăm această mulțime cu simbolul Arcsin x.

Cu alte cuvinte din relația $\sin y = x$ rezultă cea echivalentă $y = \text{Arcsin } x$.

Dacă în relația $x = \sin y$ ne limităm la valorile lui y cuprinse în intervalul $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ atunci la orice valoare a lui y corespunde cîte o singură valoare pentru x (cuprinsă în intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 1$) și invers: *pentru fiecare valoare a lui x astfel că $-1 \leqslant x \leqslant 1$, corespunde cîte o singură valoare a lui y astfel că $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.*

Această corespondență între cele două mulțimi de valori definește pe y ca o funcție de x. Notăm această funcție cu $y = \arcsin x$ (spre deosebire de Arcsin x care reprezintă mulțimea tuturor arcelor al căror sinus este x).

Funcția $y = \arcsin x$ este o funcție trigonometrică inversă (sau funcția circulară inversă).

Avem deci: $\text{Arcsin } \frac{1}{2} = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{și} \\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$\Big($fiindcă orice arc de forma $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ sau $(2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ are sinusul egal cu $\frac{1}{2}\Big)$, pe cînd $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\Big($pentru că funcţia $y = \arcsin x$ primeşte numai valori cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$).

Observăm că valoarea funcţiei $y = \arcsin x$ pentru o anumită valoare a lui x este una din valorile mulţimii definite de Arcsin x. Această valoare se mai numeşte *determinarea principală* a mulţimii definite de Arcsin x.

Dacă notăm cu α determinarea principală ($\sin \alpha = x$), atunci expresia generală a arcelor care au sinusul egal cu x este dată de:

$$y' = \alpha + 2k\pi \text{ şi } y'' = \pi - \alpha + 2m\pi = (2m+1)\pi - \alpha,$$

sau de expresia unică:

$$y = (-1)^n \alpha + n\pi.$$

Din cele expuse mai sus rezultă:

$$y = \text{Arcsin } x = \begin{cases} 2k\pi + \arcsin x \\ \text{şi} \\ (2m+1)\pi - \arcsin x, \end{cases}$$

sau $y = \text{Arcsin } x = n\pi + (-1)^n \arcsin x.$

Aplicaţie. *Să se calculeze Arcsin* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

În acest scop avem nevoie de $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \alpha$. Din $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ rezultă determinarea principală:

$$\alpha = \arcsin \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4} \text{ şi, prin urmare:}$$

$$\text{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \text{şi} \\ (2m+1)\pi + \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

sau $\text{Arcsin}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}.$

Exerciţii aplicative: nr. 44 (1) de la p. 89.

28. Problema II. *Să se găsească toate arcele x în grade sexagesimale pentru care avem:* $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Putem scrie: $\cos(180° - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pe partea pozitivă a diametrului $A'A$ din cercul de rază 1 luăm segmentul $OI = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (fig. 46) şi ducem din I o paralelă la $B'B$. Această paralelă determină pe cerc punctele M şi N. Pe baza definiţiei cosinusului, avem:

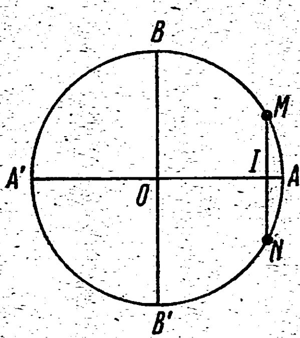


Fig. 46

$$\cos \widehat{AM} = \cos \widehat{AN} = OI = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Astfel, arcele $180° - x$ care au cosinusul egal cu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sînt $\widehat{AM}$ şi $\widehat{AN}$ sau orice arc cu originea în A şi extremităţile în M sau N. Se ştie că cel mai mic arc pozitiv $\widehat{AM} = 30°$, iar $\widehat{AN} = -30°$.

Arcele care au originea în A şi extremităţile în M sau N sînt prin urmare:

$\widehat{AM} = 30° + k \cdot 360°$ şi $\widehat{AN} = -30° + m \cdot 360°$, unde k şi m sînt numere întregi oarecare. Rezultă deci că arcele $180° - x$ pot fi:

$$180° - x' = 30° + k \cdot 360° \text{ sau } x' = 150° - k \cdot 360°$$

şi:

$$180° - x'' = -30° + n \cdot 360° \text{ sau } x'' = 210° - n \cdot 360°.$$

Aşadar, toate arcele pentru care avem $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sînt cuprinse în formulele:

$$x' = 150° - k \cdot 360° \text{ şi } x'' = 210° - m \cdot 360°.$$

Dacă punem în loc de k şi m respectiv $-k$ şi $-m$, ceea ce se poate face, dat fiind că numerele k şi m sînt întregi oarecare, atunci expresiile arcelor sînt date de:

$$x' = 150° + k \cdot 360° \text{ şi } x'' = 210° + m \cdot 360°.$$

În general, *dacă trebuie să găsim toate arcele pentru care avem:*

$$\cos x = p,$$

problema este posibilă numai dacă $|p| \leqslant 1$.

Presupunînd această condiție îndeplinită, putem afla arcele x întocmai ca în problema precedentă. Pe partea pozitivă sau negativă (după cum $p > 0$ sau $p < 0$) a diametrului $A'A$ din cercul de rază 1 purtăm segmentul $OI = p$. Din punctul I ducem o paralelă (fig. 46) la diametrul $B'B$. Această paralelă determină pe cerc punctele M și N, cărora le corespunde două arce cu extremități simetrice față de diametrul orizontal. Notînd $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ arcul cuprins între 0 și π, al cărui cosinus este p, atunci celălalt arc are măsura $\overset{\frown}{AN} = -\alpha$. Toate arcele x sînt date în acest caz de:

$$x = 2n\pi \pm \alpha \text{ (v. I — 12, aplicația II)},$$

unde n este un întreg oarecare.

Din cele arătate mai sus constatăm că, *dacă avem o relație de forma* $\cos y = x$, *cu condiția* $|x| \leqslant 1$, *atunci există o infinitate de arce* y, *avînd expresii bine determinate, al căror cosinus este* x. Expresia lui y este dependentă de x. La fiecare valoare pe care o poate lua x corespunde o mulțime de valori pentru y. Se definește astfel o mulțime de arce al căror cosinus este x. Notăm această mulțime cu simbolul $\operatorname{Arccos} x$. În acest caz, rezultă din egalitatea $\cos y = x$ relația echivalentă $y = \operatorname{Arccos} x$.

Dacă în relația $x = \cos y$ ne limităm la valorile lui y, cuprinse în intervalul $0 \leqslant y \leqslant \pi$, atunci la orice valoare a lui y corespunde cîte o singură valoare pentru x, cuprinsă în intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 1$, și invers: *pentru fiecare valoare a lui* x, *astfel că* $-1 \leqslant x \leqslant 1$, *corespunde o singură valoare a lui* y, *astfel că* $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Această corespondență între cele două mulțimi de valori definește pe y ca o funcție de x. Notăm această funcție cu $y = \arccos x$. Valoarea lui y din intervalul $(0,\pi)$, pentru care $\cos y = x$, face parte din mulțimea de arce definită de $\operatorname{Arccos} x$ și se mai numește *determinarea principală* a acestei mulțimi.

Notînd cu α determinarea principală pentru care avem $\cos\alpha = x$, atunci expresia generală a arcelor care au cosinusul egal cu x este dată de:

$$y' = \alpha + 2k\pi \text{ şi } y'' = -\alpha + 2m\pi,$$

sau de expresia unică $y = 2n\pi \pm \alpha$.

Din cele arătate mai sus rezultă:

$$y = \text{Arccos}\, x = \begin{cases} 2k\pi + \arccos x \\ \text{şi} \\ 2m\pi - \arccos x, \end{cases}$$

sau $y = \text{Arccos}\, x = 2n\pi \pm \arccos x$.

Aplicaţie. *Să se calculeze* $\text{Arccos}\, \frac{1}{2}$.

Avem de calculat $\arccos \frac{1}{2} = \alpha$. Din $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ deducem $\alpha = \frac{\pi}{3}$ şi, prin urmare:

$$\text{Arccos}\, \frac{1}{2} = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Exerciţii aplicative: nr. 45 (1) de la p. 89.

29. **Problema III.** *Să se găsească toate arcele x, în radiani pentru care avem:*

$$\text{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

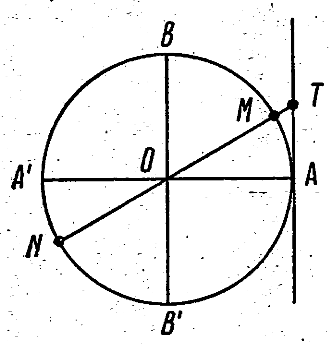


Fig. 47

Relaţia dată se poate scrie:

$$\text{tg}\,(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pe partea pozitivă a liniei tangentelor (fig. 47) a cercului de rază 1 purtăm segmentul $AT = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi ducem diametrul punctului T.

Acesta taie cercul în M şi N. Pe baza definiţiei tangentei, avem:

$$\text{tg}\, \overset{\frown}{AM} = \text{tg}\, \overset{\frown}{ABN} = AT =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Astfel că arcele $-x$ care au tangenta egală cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sînt $\overset{\frown}{AM}$ şi $\overset{\frown}{ABN}$, sau orice arc cu originea în A şi extremitatea în unul din capetele diametrului MN.

Se ştie că arcul cel mai mic $\overset{\frown}{AM}$ este egal cu $\frac{\pi}{6}$ şi, prin urmare, arcele cu originea în A şi extremitatea în unul din punctele M, N au expresia:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi,$$

unde k este un întreg oarecare.

Rezultă deci că arcele $-x$ sînt de forma $-x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. Punînd în această ecuaţie în loc de k, $-k$ (numărul k fiind un întreg oarecare), găsim:

$x = k\pi - \frac{\pi}{6}$ sau, în grade sexagesimale, $x = k \cdot 180° - 30°$.

În general, *dacă trebuie să găsim toate arcele pentru care avem:*

$$\operatorname{tg} x = p,$$

problema este posibilă pentru orice valoare reală a lui p, pentru că tangenta poate avea orice valoare de la $-\infty$ la $+\infty$.

Dacă notăm cu $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ un arc a cărui tangentă este p, atunci, conform proprietăţii de periodicitate a tangentei, toate arcele x care au aceeaşi tangentă au expresia:

$$x = \alpha + n\pi.$$

Din cele arătate mai sus se constată că, dacă avem o relaţie de forma $\operatorname{tg} y = x$, unde x este un număr real oarecare, *atunci există o infinitate de arce y avînd expresii bine determinate, a căror tangentă este x.* Expresia lui y este dependentă de x. La fiecare valoare pe care o poate avea x corespunde o mulţime de valori pentru y. Se defineşte astfel o mulţime de arce a căror tangentă este x. Notăm această mulţime cu simbolul $\operatorname{Arctg} x$. Cu o altă exprimare, relaţia $\operatorname{tg} y = x$ este echivalentă cu $y = \operatorname{Arctg} x$.

Dacă în relaţia $x = \operatorname{tg} y$ ne limităm la valorile lui y cuprinse în intervalul $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (nu s-a luat $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, deoarece cînd $y = \pm\frac{\pi}{2}$ nu există valori corespunzătoare pentru x), atunci la orice valoare a lui y corespunde cîte o singură valoare pentru x, şi invers: *pentru fiecare valoare a lui x* (cuprinsă între $-\infty$ şi $+\infty$) *corespunde cîte o singură valoare pentru y, astfel că* $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Această corespondenţă între cele două mulţimi de valori defineşte pe y ca o funcţie de x. Notăm această funcţie cu $y = \operatorname{arctg} x$.

Valoarea lui y din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru care $\operatorname{tg} y = x$, se mai numeşte *determinarea principală* a mulţimii de arce definită de $\operatorname{Arctg} x$.

Dacă notăm cu α determinarea principală pentru care avem $\operatorname{tg} \alpha = x$, atunci expresia generală a arcelor care au tangenta egală cu x este dată de:

$$y = \alpha + n\pi.$$

Totodată avem:

$$y = \operatorname{Arctg} x = n\pi + \operatorname{arctg} x.$$

Aplicaţie. *Să se calculeze* Arctg (—1).

Determinarea principală este $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ şi prin urmare, avem:

$\operatorname{Arctg}(-1) = n\pi - \frac{\pi}{4}$.

Exerciţii aplicative: nr. 46 (1) de la p. 89.

30. **Problema IV.** Să se găsească toate arcele pentru care avem:

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Egalitatea dată se poate scrie $\operatorname{ctg}(\pi - x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pe partea pozitivă a liniei cotangentelor a cercului de rază 1 (fig. 48) purtăm segmentul $BP = \frac{1}{\sqrt{3}}$ şi ducem diametrul punctului P. Acesta taie cercul în M şi N. Conform definiţiei cotangentei, avem:

$$\operatorname{ctg} \widehat{AM} = \operatorname{ctg} \widehat{ABN} = BP = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Astfel, arcele $\pi - x$ care au cotangenta egală cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sînt $\overset{\frown}{AM}$ şi $\overset{\frown}{ABN}$, sau orice arc cu originea în A şi extremitatea în unul din capetele diametrului MN.

Se ştie că arcul cel mai mic $\overset{\frown}{AM}$ este egal cu $\frac{\pi}{3}$ şi, prin urmare, arcele cu originea în A şi extremitatea în unul din punctele M, N au expresia:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

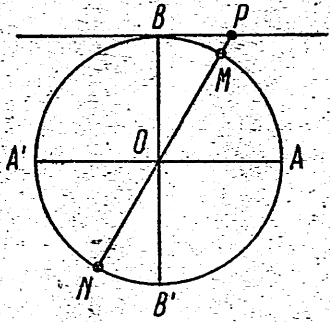


Fig. 48

Deducem că arcele $\pi - x$ pot fi:

$$\pi - x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Punînd $-k$, în loc de k, avem:

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ sau, în grade sexagesimale:}$$

$$x = 120° + k \cdot 180°.$$

În general, *dacă trebuie să găsim toate arcele pentru care avem:*

$$\operatorname{ctg} x = p,$$

problema este posibilă pentru orice valoare reală a lui p.

Dacă notăm cu $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ un arc a cărui cotangentă este p, atunci, pe baza proprietăţii de periodicitate a cotangentei, toate arcele x care au aceeaşi cotangentă au expresia:

$$x = \alpha + n\pi,$$

unde n este un întreg oarecare.

Din cele arătate mai sus rezultă că, *fiind dată relaţia*

$$\operatorname{ctg} y = x,$$

unde x este un număr real, există o infinitate de arce y avînd o expresie bine determinată şi a căror cotangentă este x. Această corespondenţă între mulţimea de valori x şi mulţimea de valori y defineşte o mulţime de arce a căror cotangentă este x. Notăm această mulţime cu simbolul Arcctg x. Din egalitatea $\operatorname{ctg} y = x$ rezultă relaţia echivalentă $y = \operatorname{Arcctg} x$.

Dacă în relaţia $x = \operatorname{ctg} y$ ne limităm la valorile lui y cuprinse în intervalul $0 < y < \pi$, atunci la orice valoare a lui y corespunde cîte o singură valoare pentru x, şi invers: *pentru fiecare valoare a lui x (cuprinsă între $-\infty$ şi $+\infty$) corespunde cîte o singură valoare a lui y, astfel că* $0 < y < \pi$ (nu s-a luat $0 \leqslant y \leqslant \pi$, deoarece, cînd y este egal cu 0 sau π, nu există valori corespunzătoare pentru x).

Această corespondenţă între cele două mulţimi de valori defineşte pe y ca o funcţie de x. Notăm această funcţie cu $y = \operatorname{arcctg} x$.

Valoarea lui y din intervalul $(0, \pi)$, pentru care $\operatorname{ctg} y = x$, se mai numeşte *determinarea principală* a mulţimii de arce definită de $\operatorname{Arcctg} x$.

Dacă notăm cu α arcul din intervalul $(0, \pi)$, pentru care avem $\operatorname{ctg} \alpha = x$, atunci expresia generală a arcelor care au cotangenta egală cu x este dată de:

$$y = n\pi + \alpha$$

sau:

$$y = \operatorname{Arcctg} x = n\pi + \operatorname{arcctg} x,$$

unde n este un întreg oarecare.

Aplicaţie. *Să se calculeze Arcctg* $(-\sqrt{3})$.

Determinarea principală este $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ şi prin urmare, avem:

$$\operatorname{Arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6} + n\pi.$$

Observare. Funcţiile $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, definite în paragrafele precedente se numesc *funcţii trigonometrice inverse* sau *funcţii circulare inverse*.

Exerciţii aplicative: nr. 47(1) de la p. 89.

Tabele trigonometrice

31. Tabelele trigonometrice conţin valorile aproximative ale funcţiilor trigonometrice sau ale logaritmilor acestor valori. Unele tabele dau aproximaţii mai bune decît altele, datorită numărului mai mare de zecimale cu care sînt calculate. Există tabele cu 3, 4, 5, 6, 7, 9 şi 11 zecimale.

Datorită faptului că funcţiile trigonometrice ale oricărui arc se pot exprima prin funcţii trigonometrice ale unui arc din primul octant, tabelele sînt întocmite numai pentru arce de la 0° la 45°, respectiv de la 0^g la 50^g. Tabelele care conţin valorile funcţiilor trigonometrice se numesc tabele de *valori naturale*, iar cele care conţin logaritmii acestor valori se numesc *tabele de logaritmi ai funcţiilor trigonometrice*.

În cele ce urmează vom folosi *Tabele şi formule matematice*, editate de Ed. tehnică, 1954. Ele conţin tabele de valori naturale cu 5 zecimale ale arcelor de la 0° la 90° sexagesimale, calculate din 10 în 10 minute (p. 330—333) şi tabele cu logaritmii funcţiilor trigonometrice cu 5 zecimale ale arcelor de la 0° la 90° sexagesimale, calculate din minut în minut (p. 53—144). Elevii care dispun de alte tabele le pot folosi în acelaşi mod după cum se descrie şi folosirea tabelelor mai sus amintite. Astfel de tabele în circulaţie în ţara noastră sînt cele din: *Memoratorul matematic şi tehnic*, ed. 1 şi a 2-a, Editura tehnică, *Tabele matematice* de V. M. Bradis, Ed. didactică şi pedagogică, *Tabele matematice*, Ed. tehnică, 1959 etc.

Tabele de valori naturale

32. Tabelele XXIII (p. 330—333) ale cărţii *Tabele şi formule matematice* dau valorile funcţiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă din 10 în 10 minute sexagesimale.

Aflarea acestor valori rezultă direct din tabele, astfel avem: $\sin 37°20' = 0{,}60645$; $\sin 53°40' = 0{,}80558$; $\cos 18°30' = 0{,}94832$; $\cos 83°10' = 0{,}11898$; $\operatorname{tg} 44° = 0{,}96569$; $\operatorname{tg} 63°50' = 2{,}03526$; $\operatorname{ctg} 28°20' = 1{,}85462$; $\operatorname{ctg} 77°50' = 0{,}21560$*.

Pentru a calcula funcţiile trigonometrice ale arcelor ale căror valori nu sînt trecute în tabele folosim interpolarea, admiţînd că variaţia funcţiilor trigonometrice în intervalul de 10 minute este proporţională cu variaţia arcului, deoarece creşterea arcului este foarte mică.

* S-a folosit semnul „=" la aflarea valorilor funcţiilor trigonometrice sau ale logaritmilor acestora direct din tabele şi semnul „≈" după rotunjirea valorilor prin interpolare. Să se reţină faptul că, în ambele cazuri, majoritatea acestor valori sînt aproximative.

Exemple:

1) *Să calculăm* $\sin 23°27'$:

Deoarece avem:

$$\sin 23°20' < \sin 23°27' < \sin 23°30'.$$

în tabele găsim:

$$\sin 23°20' = 0,39608 \text{ şi } \sin 23°30' = 0,39875.$$

Apoi raţionăm astfel:

dacă arcul creşte cu $10'$, (de la $23°20'$ la $23°30'$) sinusul creşte cu 0,00267 (de la 0,39608 la 0,39875)

dacă arcul creşte cu $7'$, (de la $23°20'$ la $23°27'$) sinusul creşte cu $\frac{7 \cdot 0,00267}{10} =$

$$= 0,001869 \approx 0,00187$$

Rezultă că $\sin 23°27' \approx \sin 23°20' + 0,00187 \approx 0,39608 +$

$$+ 0,00187 \approx 0,39795.$$

Aşadar $\sin 23°27' \approx 0,39795$.

Pentru calcularea valorii tangentei procedeul este identic, deoarece tangenta creşte cînd arcul creşte.

2) *Să calculăm* $\operatorname{ctg} 71°44'$:

Avem: $\operatorname{ctg} 71°40' = 0,33136$ şi $\operatorname{ctg} 71°50' = 0,32814$.

Judecînd ca în cazul precedent şi ţinînd seama că descreşterea valorii cotangentei este proporţională cu creşterea arcului, putem aranja calculul astfel:

71°40'	0,33136 −
	129
71°44'	0,33007
71°50'	0,32814
10'	322
4'	x

$$x = \frac{4' \cdot 322}{10'} \approx 129 \text{ unităţi de ordinul al cincilea zecimal.}$$

Aşadar, $\operatorname{ctg} 71°44' \approx 0,33007$.

Pentru calcularea valorii cosinusului procedeul este identic, deoarece cosinusul scade cînd arcul creşte.

33. Dacă ne propunem să aflăm arcul, atunci cînd se dă valoarea funcţiei trigonometrice, urmărim numărul ce s-a dat în tabele pe pagina şi coloana unde sînt trecute valorile funcţiei respective. În cazul cînd numărul se află printre cele înscrise în tabelă, nu avem decît să citim direct arcul corespunzător, ţinînd seama de felul cum sînt dispuse

arcele şi valorile corespunzătoare ale funcţiilor. Dacă valoarea funcţiei nu se află în tabele, se va încadra această valoare între două numere consecutive, după care, raţionînd ca mai înainte, obţinem prin interpolare arcul căutat.

E x e m p l e:

1) *Fiind dat* tg $x = 1{,}68643$, *să se afle arcul* x:

Căutăm numărul 1,68643 în tabela de valori ale tangentelor, urmărind pe prima coloană numărul cel mai apropiat de cel dat. Se găseşte în dreptul lui tg 59°0′ numărul mai apropiat 1,66428. Urmărim apoi pe linia lui 59°0′ un număr mai apropiat de cel dat (1,68643); se găseşte chiar 1,68643, ce se află în dreptul lui 59°20′. Arcul cuprins între 0° şi 90° este, aşadar:

$$x = 59°20',$$

iar toate arcele x sînt date de $x = 59°20' + n \cdot 180°$.

2) *Fiind dat* $\cos x = 0{,}44813$, *să se afle* x *din primul cadran*:

Urmărim prima coloană a tabelei care conţine valorile cosinusului şi, ţinînd seama că funcţia cosinus descreşte atunci cînd arcul din primul cadran creşte, ne oprim în dreptul lui 63°0′ la numărul 0,45399, mai mare decît cel dat. Urmărim apoi pe linia orizontală a lui 63°0′ un număr mai apropiat de cel dat (0,44813) şi găsim 0,44880, care corespunde lui 63°20′ şi 0,44620 care corespunde la 63°30′. Pentru a găsi arcul corespunzător lui 0,44813 facem o interpolare.

Aranjăm calculul astfel:

$$\begin{array}{lcr}
0{,}44880 & \ldots\ldots\ldots & 63°20' + \\
 & & 3' \\ \hline
0{,}44813 & \ldots\ldots\ldots & 63°23' \\
0{,}44620 & \ldots\ldots\ldots & 63°30' \\ \hline
260 & \ldots\ldots\ldots & 10' \\
67 & \ldots\ldots\ldots & z \\ \hline
\end{array}$$

$$z = \frac{67 \cdot 10'}{260} \approx 3'.$$

Aşadar, arcul x este aproximativ egal cu 63°23′.

La fel se calculează arcele atunci cînd se dau valorile sinusului, tangentei sau cotangentei. Se ţine seamă că sinusul şi tangenta cresc cînd arcul creşte şi că funcţia cotangentă descreşte cînd arcul creşte.

Exerciţii aplicative: nr. 54, 55, de la p. 90.

Tabele de logaritmi ai funcţiilor trigonometrice

În unele probleme practice intervin expresii numerice mai complicate, cum este, de exemplu:

$$x = \frac{12{,}753 \sin 54°33'15'' \sin 37°18'12''}{\sin 17°15'3''}.$$

În expresiile de acest fel şi altele întîlnim înmulţiri şi împărţiri de numere cu mai multe cifre, ceea ce duce la calcule greoaie. Se recomandă deci aplicarea logaritmilor.

Pentru a evita aflarea valorilor funcţiilor trigonometrice şi apoi a logaritmilor acestor funcţii, s-au alcătuit tabele speciale, care dau direct valorile pentru lg sin x, lg cos x, lg tg x şi lg ctg x.

34. În *Tabele şi formule matematice*, logaritmii funcţiilor trigonometrice sînt trecuţi la tabela VII (p. 53—144). Deasupra fiecărei pagini este trecut cîte un număr de grade de la 0° la 45°, iar dedesubtul fiecărei pagini este trecut cîte un număr de grade de la 45° la 90°. Pe prima coloană a fiecărei pagini din stînga sînt trecute arcele din minut în minut de la 0′ la 30′, iar pe prima coloană a fiecărei pagini din dreapta, arcele din minut în minut de la 30′ la 60′. Pe ultima coloană a fiecărei pagini din dreapta sînt trecute arcele din minut în minut, începînd de jos în sus, de la 0′ la 30′, iar pe ultima coloană a paginii din stînga sînt trecute de jos în sus arcele din minut în minut de la 30′ la 60′.

Fiecare pagină conţine apoi cîte o coloană unde sînt trecuţi logaritmii funcţiilor trigonometrice înscrişi deasupra fiecărei coloane pentru arcele de la 0° la 45° şi de jos în sus pentru arcele de la 45° la 90°.

Tabelele sînt astfel dispuse, încît într-un loc anumit de pe o coloană se află logaritmul unei funcţii trigonometrice al unui arc, avînd gradele notate sus şi minutele notate pe prima coloană din stînga, şi, totodată, logaritmul funcţiei arcului complementar, avînd gradele notate în josul paginii şi minutele de jos în sus pe ultima coloană a fiecărei pagini. De aceea coloanele sînt notate sus: *sin*, *tg*, *ctg*, *cos*, iar jos aceleaşi coloane sînt notate succesiv: *cos*, *ctg*, *tg*, *sin*.

Tot pe fiecare pagină se află coloanele notate *D*, în care sînt înscrise diferenţele de ordinul 5 zecimal între mantisele logaritmilor funcţiilor trigonometrice a două arce consecutive.

36	
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

35	
1	0,58
2	1,17
3	1,75
4	2,33
5	2,92
6	3,50
7	4,08
8	4,67
9	5,25

30	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

29	
1	0,48
2	0,97
3	1,45
4	1,93
5	2,42
6	2,90
7	3,38
8	3,87
9	4,35

	sin	D	tg	D	ctg	cos	D	
0	$\bar{1}$,5 9188	30	$\bar{1}$,6 2785	35	0,3 7215	$\bar{1}$,9 6403	6	**60**
1	9218	29	2820	35	7180	6397	5	59
2	9247	30	2855	35	7145	6392	5	58
3	9277	30	2890	36	7110	6387	6	57
4	9307	29	2926	35	7074	6381	5	56
5	9336	30	2961	35	7039	6376	6	55
6	9366	30	2996	35	7004	6370	5	54
7	9396	29	3031	35	6969	6365	5	53
8	9425	30	3066	35	6934	6360	6	52
9	9455	29	3101	34	6899	6354	5	51
10	9484	30	3135	35	6865	6349	6	**50**
11	9514	29	3170	35	6830	6343	5	49
12	9543	30	3205	35	6795	6338	5	48
13	9573	29	3240	35	6760	6333	6	47
14	9602	30	3275	35	6725	6327	5	46
15	9632	29	3310	35	6690	6322	6	45
16	9661	29	3345	34	6655	6316	5	44
17	9690	30	3379	35	6621	6311	6	43
18	9720	29	3414	35	6586	6305	5	42
19	9749	29	3449	35	6551	6300	6	41
20	9778	30	3484	35	6516	6294	5	**40**
21	9808	29	3519	34	6481	6289	5	39
22	9837	29	3553	35	6447	6284	6	38
23	9866	29	3588	35	6412	6278	5	37
24	9895	29	3623	34	6377	6273	6	36
25	9924	30	3657	35	6343	6267	5	35
26	9954	29	3692	34	6308	6262	6	34
27	$\bar{1}$,5 9983	29	3726	35	6274	6256	5	33
28	$\bar{1}$,6 0012	29	3761	35	6239	6251	6	32
29	0041	29	3796	34	6204	6245	5	31
30	$\bar{1}$,6 0070		$\bar{1}$,6 3830		0,3 6170	$\bar{1}$,9 6240		**30**
	cos		ctg		tg	sin		

Pe unele pagini ale tabelelor sînt trecute pe margini tabele mai mici pentru calcularea părților proporționale (v. pagina reprodusă din tabele cu logaritmii funcțiilor trigonometrice ale arcelor de la $23°—23°30'$ și $66°30'—$ $—66°60'$).

Cu ajutorul tabelelor de logaritmi putem rezolva următoarele probleme:

1° *Să se găsească logaritmul unei funcții trigonometrice.*

2° *Să se găsească arcul cînd se cunoaște logaritmul unei funcții trigonometrice.*

Aflarea logaritmului unei funcții trigonometrice cu ajutorul tabelelor de logaritmi

35. Cu tabelele de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice se poate calcula valoarea logaritmului oricărei funcții trigonometrice pentru orice unghi. În ce privește tehnica de folosire a tabelelor, deosebim două cazuri: a) *cînd arcul funcției se găsește în tabele;* b) *cînd arcul funcției nu se află înscris în tabele.*

Exemple pentru cazul a) *(arcul se află în tabele):*

1) Să se calculeze: $x = \lg \sin 23°17'$.

Căutăm pe pagina care are sus $23°$, pe coloana sinus, în dreptul lui $17'$, și găsim:

$$x = \bar{1},59690.$$

2) Să se calculeze: $x = \lg \operatorname{ctg} 66°47'$.

Pe pagina care are notat jos $66°$, pe coloana cotangentă, de jos în sus, în dreptul lui $47'$, ce se află pe ultima coloană a paginii, găsim:

$$x = \lg \operatorname{ctg} 66°47' = \bar{1},63240.$$

Exemple pentru cazul b) *(arcul nu se află înscris în tabele):*

1) Să se calculeze: $x = \lg \operatorname{tg} 66°37'42''$.

Ținînd seama că tangentele arcelor crescătoare din cadranul I sînt pozitive crescătoare și că logaritmii numerelor crescătoare într-o bază mai mare ca 1 sînt crescători, avem:

$$\lg \operatorname{tg} 66°37' < x < \lg \operatorname{tg} 66°38',$$

iar în tabele mai citim direct $\lg \operatorname{tg} 66°37' = 0,36412$ și

$$\lg \operatorname{tg} 66°38' = 0,36447.$$

Folosim interpolarea, admițînd că variația logaritmilor funcțiilor trigonometrice în intervalul de 1 minut este proporțională cu variația arcului.

Aranjăm calculul astfel:

$$\begin{array}{lr} 66°37' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,36412 + \\ & 25 \\ \hline 66°37'42'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,36437 \\ 66°38' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0,36447 \\ \hline 60'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 35 \\ 42'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & z \\ \hline \end{array}$$

$$z = \frac{42'' \cdot 35}{60''} \approx 25.$$

Rezultă deci că $x = \lg \operatorname{tg} 66°37'42'' \approx 0,36437$.

2) Să se calculeze : $x = \lg \cos 23°27'37''$.

Avînd în vedere că funcția cosinus este descrescătoare pentru arcele crescătoare din cadranul I și că logaritmii în baza 10 ai numerelor descrescătoare sînt descrescători, avem :

$$\lg \cos 23°27' > \lg \cos 23°28'.$$

Din tabele citim direct $\lg \cos 23°27' = \overline{1},96256$ și

$$\lg \cos 23°28' = \overline{1},96251.$$

Pentru a afla x, raționăm ca mai sus și aranjăm calculul astfel :

$$\begin{array}{lr} 23°27' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overline{1},96256 - \\ & 3 \\ \hline 23°27'37'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overline{1},96253 \\ 23°28' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \overline{1},96251 \\ \hline 60'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\ 37'' \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & z \\ \hline \end{array}$$

$$z = \frac{37'' \cdot 5}{60''} \approx 3 \text{ unități de ordinul al cincilea zecimal.}$$

Rezultă că $x = \lg \cos 23°27'37'' \approx \overline{1},96253$.

Aflarea arcului care corespunde la logaritmul unei funcţii trigonometrice

36. Cînd se dă logaritmul unei funcţii trigonometrice a unui arc din cadranul I şi se cere să se determine arcul, se urmăreşte în tabele locul unde se situează acest număr. Dacă logaritmul funcţiei trigonometrice determinat prin această operaţie se găseşte în tabele, arcul căutat se citeşte fără nici un calcul. Dacă logaritmul nu se află în tabele, atunci arcul se determină prin interpolare.

a) *Exemplu pentru cazul cînd logaritmul se află în tabele:*

Să se determine arcul a din primul cadran, pentru care avem:

$$\lg \operatorname{ctg} a = \bar{1},63484.$$

Pentru a determina arcul a, urmărim, în tabelele de logaritmi, pe coloana cotangentă, numărul cel mai apropiat de $\bar{1},63484$. Găsim chiar numărul $\bar{1},63484$ în dreptul lui $66°40'$, de unde rezultă $a = 66°\,40'$.

b) *Exemple pentru cazul cînd logaritmul nu se află în tabele:*

1) Să se determine arcul a din primul cadran, pentru care avem:

$$\lg \cos a = \bar{1},96374.$$

Urmărim acest număr pe coloana cosinus. Deoarece logaritmul nu se află în tabele, îl încadrăm între două numere consecutive ce se află pe coloana cosinus, pe pagina care are notat sus $23°$.

Numerele consecutive ce-l cuprind pe $\bar{1},96374$ sînt: $\bar{1},96376$, corespunzător arcului de $23°5'$, şi $\bar{1},96370$, corespunzător arcului de $23°6'$.

Pentru a afla arcul a se aşază calculul astfel:

$$\begin{array}{lcr}
\bar{1},96376 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 23°5' \; + \\
 & & 20'' \\
\hline
\bar{1},96374 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 23°5'20'' \\
\bar{1},96370 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 23°6' \\
\hline
6 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 60'' \\
2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x \\
\hline
\end{array}$$

$$x = \frac{2 \cdot 60''}{6} = 20''.$$

Aşadar, $a = 23°5'20''$.

Exerciţii aplicative: nr. 44 (2); 44 (4); 44 (5); 45 (2); 45 (3); 45 (4); 45 (5); 46 (2); 46 (3); 46 (4); 46 (5); 47 (2); 47 (3); 47 (4); 47 (5); 48; 54; 55 de la p. 89—90.

Aplicaţii

37. Studiul funcţiilor trigonometrice pe care l-am făcut pînă aici ne pune la dispoziţie rezultate care sînt utile în rezolvarea a numeroase probleme ce se ivesc în diferite domenii ale activităţii practice şi în multe probleme teoretice.

Din aplicaţiile care urmează se va vedea modul cum sînt folosite rezultatele obţinute la calcularea unor noi valori ale funcţiilor trigonometrice, la calcularea unor maxime sau minime.

Aplicaţia I. *În mecanică se demonstrează că un proiectil care porneşte din ţeava unei arme înclinată cu un unghi* α (fig. 49) *faţă de orizontală cade la o distanţă:*

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

unde v_0 *este viteza iniţială a proiectilului şi* g *acceleraţia gravitaţiei.*

Presupunînd v_0 şi g *constante, se întreabă care trebuie să fie înclinarea ţevii acelei arme pentru ca proiectilul să cadă la o distanţă maximă de locul de pornire.*

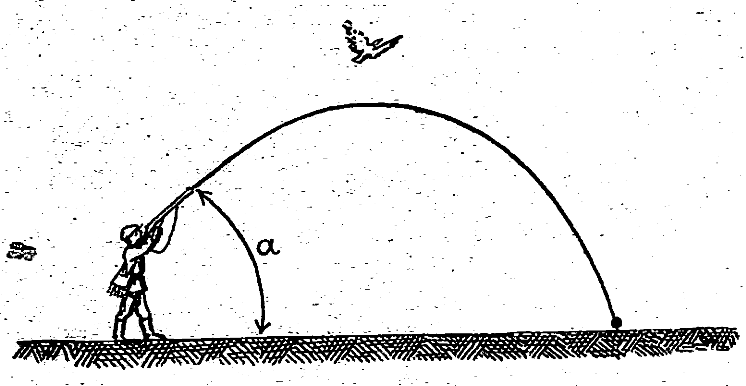


Fig. 49

Răspunsul la întrebare se bazează pe studiul variației funcției $y = \sin x$, care, precum se știe, ia valoarea maximă 1 pentru $x = 90°$. Urmează deci că și distanța $OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ va fi maximă cînd $\sin 2\alpha = 1$, adică atunci cînd $2\alpha = 90°$ sau $\alpha = 45°$.

Aplicația II. *În ce interval trebuie să varieze x pentru ca funcția*

$$y = \frac{\arcsin (2 + 3x)}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

să fie reală?

Deoarece $2 + 3x$ este un sinus, trebuie să avem:

$$-1 \leqslant 2 + 3x \leqslant 1$$

și, pentru ca radicalul să fie real, este necesar ca $1 - 4x^2 \geqslant 0$.

Rezolvînd cele două inecuații, căutînd apoi valorile lui x pentru care avem satisfăcute simultan cele două condiții și eliminînd pe acelea care anulează numitorul, obținem:

$$-\frac{1}{2} < x \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Aplicația III. *Să găsim cel mai mic arc x pozitiv în radiani, pentru care avem:*

$$\mathrm{tg}^3 x = \frac{\sin 3{,}5}{\sqrt[3]{2{,}315}},$$

unde argumentul sinusului reprezintă radiani.

Pentru că dispunem de tabele de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice pentru arce date în grade sexagesimale, vom transforma radianii în grade sexagesimale.

Avem:

$$3{,}5 \text{ rad.} = 200°32'7''$$

și, prin urmare:

$$\mathrm{tg}^3 x = \frac{\sin 200°32'7''}{\sqrt[3]{2{,}315}} = -\frac{\sin (200°32'7'' - 180°)}{\sqrt[3]{2{,}315}}.$$

Pentru a putea aplica logaritmii în membrul drept, schimbăm semnele în ambii membri și avem astfel:

$$-\mathrm{tg}^3 x = \mathrm{tg}^3(180° - x) = \frac{\sin 20°32'7''}{\sqrt[3]{2{,}315}},$$

apoi:

$$3 \lg \operatorname{tg} (180° - x) = \lg \sin 20°32'7'' + \frac{\operatorname{colg} 2{,}315}{3},$$

de unde rezultă: $3 \lg \operatorname{tg} (180° - x) = \bar{1},54504 + \bar{1},87848 = \bar{1},42352$

sau:

$$180° - x = 32°43'7''$$

și, prin urmare,

$$x = 180° - 32°43'7'' = 147°16'53'' = 2{,}570545 \text{ radiani}.$$

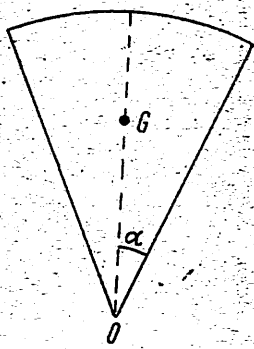


Fig. 50

Aplicația IV. *Cunoscînd că centrul de greutate G al unei plăci în formă de sector circular* (fig. 50) *de rază R se află pe axa de simetrie la o distanță de vîrful O al sectorului, egală cu:*

$$OG = \frac{2}{3} \cdot R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

unde α reprezintă semiunghiul de la centru exprimat în radiani, să se afle poziția centrului de greutate al unui sector care are $R = 4$ dm și unghiul la centru egal cu $47°15'12''$.

Transformăm gradele sexagesimale în radiani. Avem:

$$2\alpha = 47°15'12'' = 0{,}824726 \text{ radiani},$$

prin urmare:

$$\alpha = 23°37'36'' = 0{,}412363 \text{ radiani}.$$

Distanța căutată va fi:

$$OG = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sin 23°37'36''}{0{,}412363}$$

Aplicînd logaritmii, obținem:

$$\lg OG = 0{,}41359$$

și, prin urmare:

$$OG \approx 2{,}591 \text{ dm}.$$

Aplicația V. *Să demonstrăm că raportul $\frac{x}{\sin x}$ (x măsurat în radiani) este cu atît mai aproape de 1 cu cît arcul x este mai aproape de zero.*

Să considerăm cercul de rază 1 (fig. 51), pe care luăm arcul $\widehat{AM} = x < \frac{\pi}{2}$. Construim în acelaşi timp $IM = \sin x$ şi $AT = \operatorname{tg} x$.

Avem dubla inegalitate: aria triunghiului $OAM <$ aria sector $OAM <$ aria triunghiului OAT, unde vom înlocui: aria triunghiului $OAM = \frac{OA \cdot IM}{2} = \frac{IM}{2}$ (pentru că raza $OA = 1$), aria sectorului $OAM = \frac{OA \cdot \text{lungimea arcului } AM}{2} = \frac{x}{2}$ şi aria triunghiului $OAT = \frac{OA \cdot AT}{2} = \frac{AT}{2}$.

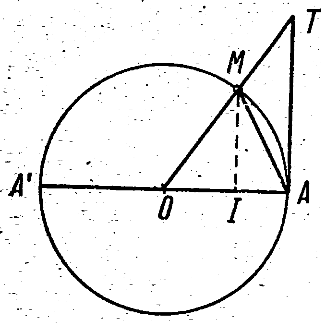


Fig. 51

Să calculăm AT. Din asemănarea triunghiurilor OAT şi OIM avem:

$$\frac{AT}{IM} = \frac{OT}{OM} \text{ sau } \frac{AT}{IM} = \frac{OT}{1}.$$

Rezultă $AT = IM \cdot OT$ şi, prin urmare, aria $OAT = \frac{IM \cdot OT}{2}$. Înlocuind rezultatele de mai sus în dubla inegalitate, obţinem:

$$\frac{IM}{2} < \frac{x}{2} < \frac{IM \cdot OT}{2}.$$

Împărţind peste tot cu $\frac{IM}{2} = \frac{\sin x}{2}$ $(IM > 0)$, deducem:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < OT.$$

Rezultatul obţinut ne arată că cu cît x se apropie de zero, cu atît OT se apropie de $OA = 1$ şi, prin urmare, $\frac{x}{\sin x}$ se apropie de 1.

Observare. Teorema demonstrată ne arată că, atunci cînd arcele sînt mici, sinusurile lor se pot înlocui cu numărul de radiani corespunzător. În calculele cu aproximație se arată că este suficient ca x să fie mai mic ca $10°$ pentru ca x și $\sin x$ să aibă primele trei zecimale respectiv egale. Cînd arcul x este foarte mic, atunci numărul primelor zecimale respectiv egale de la x și $\sin x$ este mult mai mare decît 3.

E x e m p l u. *Să se calculeze* $E = \sin 2°5'13''$.

Pe baza celor demonstrate mai sus, avem:

$$\sin 2°5'13'' \approx \text{arc } 2°5'13'' \approx 0{,}036424.$$

Calculînd E cu logaritmi, avem:

$$\lg E = \bar{2}{,}56128, \text{ și, prin urmare, } E = 0{,}036415,$$

care diferă cu mai puțin de $\frac{1}{100.000}$ de valoarea calculată prin înlocuirea lui $\sin x$ cu x.

Aplicația VI. *Prin măsurători și din calcule rezultă că raza Pămîntului se vede din Lună cînd aceasta se află în planul perpendicular pe raza Pămîntului, la extremitatea ei, sub un unghi de 57'2,7''. Cunoscînd aceasta și că raza Pămîntului are 6 371 km, să se determine distanța de la Pămînt la Lună.*

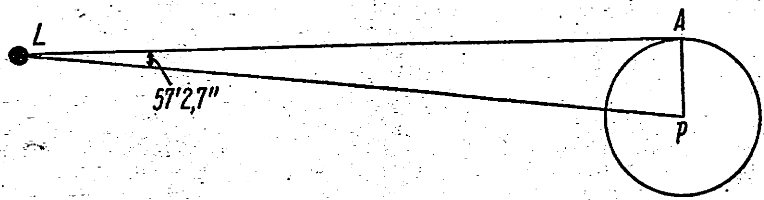


Fig. 52

Să figurăm centrul Lunii cu L (fig. 52). Unghiul ALP, sub care se vede raza PA a Pămîntului cînd $LA \perp AP$, este de $57'2{,}7''$. Folosind definiția sinusului unui unghi, avem:

$$\sin 57'2{,}7'' = \frac{AP}{LP},$$

de unde rezultă că distanța LP de la Pămînt la Lună este egală cu:

$$LP = \frac{AP}{\sin 57'2{,}7''} = \frac{6\,371}{\sin 57'2{,}7''}.$$

Unghiul de $57'2,7''$ fiind foarte mic, putem înlocui sinusul acestuia cu numărul de radiani și avem:

$$\sin 57'2,7'' \approx 0,016591.$$

Urmează deci că distanța LP este aproximativ egală cu

$$LP \approx \frac{6\,371}{0,016591}.$$

Aplicînd logaritmii, avem:

$$\lg LP \approx 3,80421 - \bar{2},21988 = 5,58433$$

și, prin urmare:

$$LP \approx 384\,000 \text{ km}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

(*Răspunsurile și indicațiile se găsesc la p. 244—246*)

23. Să se construiască cu rigla și cu compasul unghiurile ascuțite pentru care avem:

$$1)\ \sin u = 0,2;\quad 2)\ \cos u = \frac{3}{5};\quad 3)\ \operatorname{tg} u = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

24. Cunoscînd că sinusul unui unghi ascuțit u este egal cu $\frac{4}{5}$, să se calculeze $\cos u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, $\sec u$ și $\operatorname{cosec} u$.

25. Cunoscînd că tangenta unui unghi ascuțit este egală cu $\frac{24}{7}$, să se calculeze $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{ctg} u$, $\sec u$ și $\operatorname{cosec} u$.

26. Notînd cu l_n, a_n latura și apotema unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază R, să se exprime cu ajutorul acestor date: $\sin\frac{\pi}{n}$; $\cos\frac{\pi}{n}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

27. Folosind rezultatele exercițiului precedent, să se calculeze: $\sin 15°$; $\cos 15°$; $\operatorname{tg} 15°$; $\operatorname{ctg} 15°$.

28. Să se calculeze: $\sin 22°30'$; $\cos 22°30'$; $\operatorname{tg} 22°30'$ și $\operatorname{ctg} 22°30'$.

29. Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului de $75°$ și acelea ale unghiului de $67°30'$.

30. Cunoscînd valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 75° și de 67°30′, să se calculeze, în funcție de raza R, latura și apotema dodecagonului stelat, precum și ale octogonului stelat.

31. Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 18°; 36°; 54° și 72° (fig. 53).

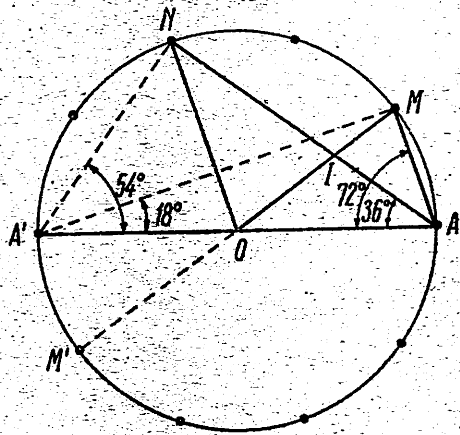


Fig. 53

32. Să se construiască, cu ajutorul unui cerc pe care s-a fixat o origine și un sens al arcelor (cerc trigonometric), unghiurile *a)* ale căror sinusuri sînt: 1) 0,4; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

b) ale căror cosinusuri sînt: 1) 0,6; 2) −0,4; 3) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$;

c) ale căror tangente sînt: 1) −2; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $\sqrt{2}$;

d) ale căror cotangente sînt: 1) −3; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\sqrt{5}$.

33. Folosind definițiile pentru funcțiile trigonometric ale unui unghi oarecare, să se calculeze:

$$\sin 225°;\ \cos 165°;\ \operatorname{tg} 202°30';\ \operatorname{ctg} 120°.$$

34. Între ce limite poate varia fiecare din următoarele funcții:

1) $2-3\sin x$; 2) $3+2\cos x$; 3) $4+5\sin x$?

35. Să se calculeze valoarea numerică a următoarelor expresii:

1) $\sin x+\cos x$ pentru: *a)* $x=0°$; *b)* $x=90°$; *c)* $x=270°$

2) $\sin(x+45°)+3\sin(x-45°)+5\cos 2x+3\cos(x+135°)$

pentru: *a)* $x=45°$; *b)* $x=135°$.

36. Care dintre funcţiile trigonometrice ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) pot avea valorile următoare:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-0{,}70$; 3) 1; 4) -1; 5) $1{,}3$;

6) $-3{,}25$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $\sqrt{0{,}6}$; 9) 2π; 10) $\frac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, dacă $m>0$ şi $n>0$? 11) $\frac{m+n}{2\sqrt{mn}}$, unde $m>0$ şi $n>0$?

12) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$? 13) $m+\frac{1}{m}$?

37. Ce semne au:

1) $\cos 0{,}8\pi$; 2) $\sin 3$; 3) $\cos 2$; 4) $\operatorname{tg} 4$;

5) $\sin 7{,}1$; 6) $\sin 1 - \cos 1$; 7) $\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 3$;

8) $\cos 284° \cdot \operatorname{tg} 92°$; 9) $\sin 3{,}1 - \sin 3{,}2$; 10) $\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6}$.

38. Să se construiască graficele următoarelor funcţii:

1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \sin\frac{x}{2}$;

3) $y = \cos\frac{x}{2}$; 4) $y = \frac{1}{2}\sin x$.

39. Să se afle perioadele funcţiilor:

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \sin\frac{x}{5}$; 3) $y = \sin nx$.

40. Să se afle perioadele funcţiilor:

1) $y = \cos 5x$; 2) $y = 2\cos\frac{x}{3}$; 3) $y = \cos nx$.

41. Să se reprezinte grafic funcţiile:

1) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, 2) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, 3) $y = \operatorname{ctg} 2x$.

42. Să se determine perioadele funcţiilor:

1) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$; 2) $y = \operatorname{tg} nx$.

43. Să se găsească valorile lui $y = \frac{3 \sin x}{\sin x - 2}$ pentru $x = 0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; π şi să se figureze punctele corespunzătoare în raport cu două axe de coordonate.

44. Să se calculeze: 1) Arcsin 0; Arcsin (−1); Arcsin 1; Arcsin $\frac{-\sqrt{3}}{2}$; Arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) arcsin $\frac{2}{3}$; 3) Arcsin $\frac{2}{3}$; 4) arcsin $\left(\frac{-\sqrt{2}}{3}\right)$; 5) Arcsin $\left(\frac{-\sqrt{2}}{3}\right)$

45. Să se calculeze: 1) Arccos 0; Arccos (−1); Arccos 1; Arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Arccos $\frac{-\sqrt{2}}{2}$; 2) arccos $\frac{3}{5}$; 3) Arccos $\frac{3}{5}$; 4) arccos $\left(-\frac{1}{3}\right)$; 5) Arccos $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

46. Să se calculeze: 1) Arctg 0; Arctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$; Arctg 1; Arctg $\sqrt{3}$; Arctg $(-\sqrt{3})$; 2) arctg 3; 3) Arctg 3; 4) arctg $\left(-\frac{1}{2}\right)$; 5) Arctg $\left(-\frac{1}{2}\right)$

47. Să se calculeze: 1) Arcctg 0; Arcctg $\frac{1}{\sqrt{3}}$; Arcctg $\sqrt{3}$; Arcctg 1. Arcctg (−1); 2) arcctg $\left(-\frac{2}{3}\right)$; 3) Arcctg $\left(-\frac{2}{3}\right)$; 4) arcctg $\sqrt{2}$; 5) Arcctg $\sqrt{2}$.

48. Să se reducă la primul cadran:

1) $\sin 947°33'23''$, 2) $\cos(-1\,237°44'48'')$;
3) $\operatorname{tg} 767°15'13''$; 4) $\operatorname{ctg}(-882°41'42'')$

49. Să se simplifice expresia: $\frac{\sin x \operatorname{tg}(\pi + x)}{\operatorname{tg} x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

50. Să se calculeze:

1) $\sin \frac{11\pi}{6}$; 2) $\cos \frac{17\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$ 4) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{4}$

51. Să se stabilească relațiile care există între funcțiile trigonometrice ale arcelor x și $270° + x$.

52. Să se simplifice expresia:

$$\frac{\operatorname{tg}(270° - x)\sin 130° \cos 320° \sin 270°}{\operatorname{ctg}(180° - x)\cos 50° \sin 220° \cos 360°}.$$

53. Să se demonstreze identitatea:

$$\sin(x + 150°) = \sin(30° - x).$$

54. Să se afle arcele x pentru care avem:

1) $\sin x = 0{,}8512$, unde $90° < x < 180°$;

2) $\cos x = -0{,}3415$, unde $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x = -0{,}3462$, unde $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$.

55. Să se calculeze în grade sexagesimale:

1) $\arcsin(-0{,}253)$; 2) $\arccos(0{,}4197)$;

3) $\operatorname{arctg} 1{,}327$; 4) $\operatorname{arcctg}(-0{,}3781)$.

56. Să se calculeze $\sin 1°1'1''$ fără tabele.

CAPITOLUL III

FORMULE CORELATIVE

1. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași arc. Fiind dată valoarea unei funcții trigonometrice a unui arc, se pune problema de a găsi cu ajutorul acesteia valorile celorlalte funcții trigonometrice.

În acest scop stabilim relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași arc α.

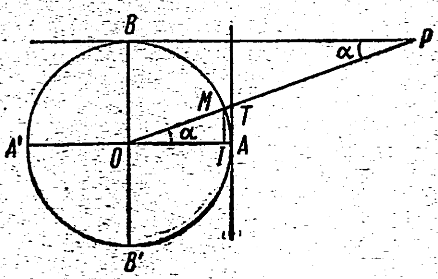


Fig. 54

C o n s i d e r ă m arcul $\widehat{AM} = \alpha$ cu extremitatea în primul cadran, precum și funcțiile trigonometrice: $IM = \sin\alpha$, $OI = \cos\alpha$, $AT = \operatorname{tg}\alpha$ și $BP = \operatorname{ctg}\alpha$ (fig. 54), unde IM, OI, AT, BP și alte segmente care intervin reprezintă măsurile lungimilor, luîndu-se raza cercului ca unitate de măsură.

Din triunghiul dreptunghic OIM avem:

$$IM^2 + OI^2 = OM^2$$

sau:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Din asemănarea triunghiurilor OIM și AOT, precum și din asemănarea lui OIM cu OBP rezultă:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{IM}{OI}$$

sau:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad (2)$$

şi :

$$\frac{BP}{OB} = \frac{OI}{IM}$$

sau :

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Înmulţind (2) cu (3), obţinem : $\text{tg}\ \alpha \cdot \text{ctg}\ \alpha = 1$.

Tot din aceleaşi triunghiuri asemenea mai deducem :

$$\frac{OT}{OA} = \frac{OM}{OI} \text{ sau } OT = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha \qquad (4)$$

şi :

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OM}{IM} \text{ sau } OP = \frac{1}{\sin\alpha} = \text{cosec}\ \alpha. \qquad (5)$$

Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice OAT şi OBP, obţinem :

$$OA^2 + AT^2 = OT^2 \text{ sau } 1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

şi :

$$OB^2 + BP^2 = OP^2 \text{ sau } 1 + \text{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Primele cinci formule :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \text{tg}\ \alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \text{ctg}\ \alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} \\ \text{cosec}\ \alpha &= \frac{1}{\sin\alpha} \end{aligned}} \qquad (I)$$

constituie cinci relații independente. Fiind dată valoarea uneia din cele șase funcții trigonometrice, ne rămîn cinci ecuații cu cinci necunoscute, ce formează un sistem care ne permite să aflăm cele cinci necunoscute.

Relațiile : $\boxed{\begin{array}{l} 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{array}}$ (II)

se pot deduce din relațiile (I). Ele sînt utile la calcularea tangentei sau a cotangentei, cînd se dă sinusul sau cosinusul.

Formulele I de mai sus, demonstrate pentru cazul cînd α este un unghi ascuțit, sînt valabile pentru orice valoare a argumentului α.

Într-adevăr, dacă u este un arc din cadranul II, atunci putem scrie $u = \pi - \alpha$, unde α este un arc din cadranul I.

În acest caz avem :

$$\sin^2 u + \cos^2 u = \sin^2(\pi - \alpha) + \cos^2(\pi - \alpha) =$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg} u,$$

$$\frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = \operatorname{ctg} u,$$

$$\sec u = \sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha = \frac{1}{-\cos\alpha} = \frac{1}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{1}{\cos u},$$

$$\operatorname{cosec} u = \operatorname{cosec}(\pi - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{1}{\sin u}.$$

În cazul cînd u este un arc în cadranul III, se poate pune $u = \pi + \alpha$, unde α este un arc în cadranul I. Procedînd analog ca mai sus, stabilim valabilitatea formulelor I pentru arce u din cadranul III.

Dacă u este un arc în cadranul IV, putem pune $u = 2\pi - \alpha$, unde α este un arc din cadranul I, și se procedează la fel ca mai sus.

Dacă φ este un arc oarecare mai mare sau mai mic ca 2π radiani, atunci se poate pune $\varphi = 2k\pi + u$, unde u este un arc în primul cadran, şi în acest caz avem : $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=$ $=\sin^2(2k\pi + u) + \cos^2(2k\pi + u) = \sin^2 u + \cos^2 u = 1.$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sin(2k\pi+u)}{\cos(2k\pi+u)} = \frac{\sin u}{\cos u} = \operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(2k\pi + u) = \operatorname{tg}\varphi$$

şi :

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos(2k\pi+u)}{\sin(2k\pi+u)} = \frac{\cos u}{\sin u} = \operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg}(u+2k\pi) = \operatorname{ctg}\varphi$$

La fel se arată că $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$ şi $\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi}$.

2. Următoarele aplicaţii ne arată prin cîteva exemple cum se folosesc formulele stabilite mai sus.

Aplicaţia I. *Fiind dat* $\sin x = -\frac{3}{5}$, *să se calculeze celelalte funcţii trigonometrice ale arcului* x.

Din relaţia $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ avem : $\frac{9}{25} + \cos^2 x = 1$ şi, prin urmare, $\cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ sau $\cos x = \pm\frac{4}{5}$ şi $\sec x = \pm\frac{5}{4}\cdot$ Din $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ deducem :

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\frac{3}{5}}{\pm\frac{4}{5}} = \mp\frac{3}{4}$$ şi, cum avem $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x = 1$, rezultă : $\operatorname{ctg} x = \mp\frac{4}{3}\cdot$ Din $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ obţinem $\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{3}$ (semnele superioare se corespund).

Astfel, dacă luăm $\cos x = +\frac{4}{5}$, atunci $\operatorname{tg} x = \frac{-3}{4}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{-4}{3}$ şi $\sec x = +\frac{5}{4}$.

Se observă că, deşi $\sin x$ şi $\operatorname{cosec} x$ au cîte o singură valoare, pentru celelalte funcţii trigonometrice obţinem cîte două valori de semne contrare. Aceasta se explică prin faptul că sinusul şi cosecanta fiind cu semnul minus, arcul x poate fi în cadranul III sau IV; ori, în aceste cadrane fiecare din celelalte funcţii trigonometrice are semne diferite.

Dacă se precizează de la început că x este în cadranul III de exemplu, atunci avem $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{4}{3}$ și $\sec x = -\frac{5}{4}$.

Aplicația II. *Fiind dat* $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{3}$, *să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale arcului* x.

Din formula $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$ obținem imediat:

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{1} = 3.$$

Pentru a afla sinusul și cosinusul folosim una din relațiile: $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ sau $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$.

Considerăm prima relație: $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Se obține $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + 9 = 10$ și, prin urmare, $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$. Pentru a obține $\sin x$ întrebuințăm formula $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ de unde rezultă: $\sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$. Valorile secantei și cosecantei sînt: $\sec x = \pm\sqrt{10}$ și $\operatorname{cosec} x = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Aplicația III. *Să se demonstreze că pentru orice valoare a lui a are loc egalitatea:*

$$\frac{\cos^2 a}{1 - \operatorname{tg} a} + \frac{\sin^2 a}{1 - \operatorname{ctg} a} = 1 + \sin a \cos a.$$

Înlocuind $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ și $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos a}{\sin a}$, primul membru, pe care-l notăm cu E, devine succesiv:

$$E = \frac{\cos^2 a}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}} + \frac{\sin^2 a}{1 - \frac{\cos a}{\sin a}} = \frac{\cos^3 a}{\cos a - \sin a} + \frac{\sin^3 a}{\sin a - \cos a} =$$

$$= \frac{\cos^3 a - \sin^3 a}{\cos a - \sin a} = \cos^2 a + \sin^2 a + \sin a \cos a = 1 + \sin a \cos a,$$

ceea ce trebuia dovedit.

Exerciții aplicative: nr. 57—90 de la p. 130—132.

3. Prin raportul $\frac{h}{1\,000}$ se măsoară în practică panta unei linii ferate drepte față de orizontala TE (fig. 55, *a*). Se înțelege prin aceasta că, ducînd de la un punct M oarecare al liniei ferate o paralelă cu orizontala, $MI = 1\,000$ m, extremitatea I a acestei paralele se află la o distanță de h metri pe verticală de linia ferată ($IL = h$ metri). Știind aceasta, să se rezolve următoarea:

Problemă. *O linie ferată AB are, față de orizontala AE* (fig. 55, b), *panta* $\frac{a}{1\,000}$. *Din B linia ferată își schimbă panta și are, față de aceeași orizontală AE, panta* $\frac{b}{1\,000}$. *Care este panta liniei ferate BC față de linia AB?*

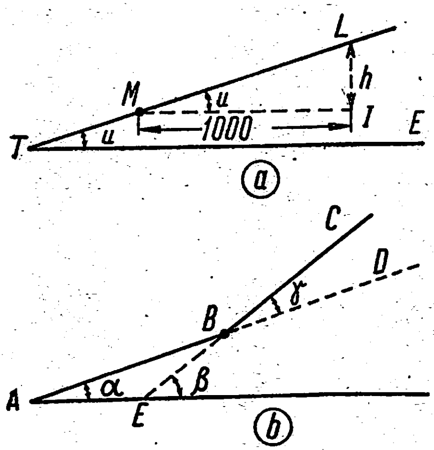


Fig. 55

Din modul cum se definește panta $\frac{h}{1\,000}$ se constată că acest raport este cîtul $\frac{IL}{MI} = \operatorname{tg} u$, adică tangenta înclinării u a liniei ferate TML (fig 55, *a*) față de orizontala TE. Așa fiind, dacă notăm cu α înclinarea liniei AB față de orizontala AE, cu β înclinarea liniei BC față de aceeași orizontală și cu γ înclinarea liniei ferate BC față de prelungirea liniei AB (fig. 55, *b*), atunci din triunghiul ABE obținem:

$$\gamma = \beta - \alpha,$$

care dă unghiul format de cele două linii AB și BC, iar panta căutată este:

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\beta - \alpha).$$

Avem deci de calculat această tangentă a unei diferențe de unghiuri cunoscînd că $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{1\,000}$ și $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{1\,000}$. Cu mijloacele de calcul de care dispunem pînă aici se obține mai întîi γ, calculînd unghiurile α și β cu ajutorul tabelelor și apoi tangenta lui $\gamma = \beta - \alpha$.

Urmărind o cale mai simplă, vom căuta să calculăm $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ numai cu ajutorul valorilor lui $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{1\,000}$ și $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{1\,000}$.

În problema de mai sus și în multe altele, teoretice și practice, se pune deci problema stabilirii unor formule care să dea valoarea unei funcții trigonometrice a unei sume sau a unei diferențe de arce pe o cale directă, atunci cînd se cunosc valorile funcțiilor trigonometrice ale fiecărui arc în parte.

Pentru a stabili astfel de formule avem nevoie de o pregătire teoretică privind proiecțiile unor segmente pe o axă.

Proiecții

4. **Segment orientat.** Un segment AB poate fi parcurs de un mobil în două sensuri: 1) de la A spre B, cînd scriem că drumul parcurs este $\overline{AB}$, sau 2) de la B spre A, și în acest caz drumul parcurs este $\overline{BA}$ (fig. 56).

Drumurile parcurse $\overline{AB}$ și $\overline{BA}$ au evident aceeași lungime (valoarea absolută a segmentului), însă, sensurile de parcurgere fiind contrare, convenim să spunem că ele sînt două segmente de semne contrare. Scriem acest lucru astfel:

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \text{ sau}$$
$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

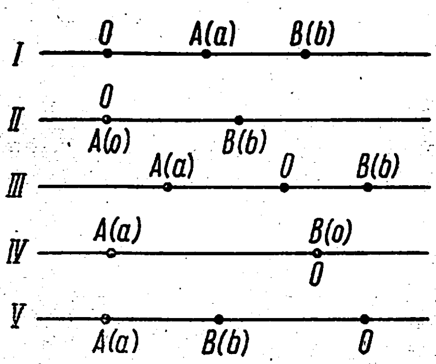


Fig. 56

Segmentul AB, pe care s-a fixat un sens de parcurgere, se numeşte un segment orientat. Primul punct, adică A, se numeşte *originea* segmentului, iar B este *extremitatea* segmentului AB.

Mărimea sau măsura unui segment orientat aşezat pe o axă este lungimea segmentului luată cu semnul + sau —, după cum segmentul are sau nu aceeaşi orientare cu axa pe care este aşezat.

Notînd segmentul orientat cu $\overline{AB}$, prin AB vom înţelege valoarea sa absolută. Dacă aşezăm segmentul orientat $\overline{AB}$ pe o axă Ox, pe care s-a fixat originea O, atunci A şi B au abscisele a şi b ($\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$).

Măsura pe axă a segmentului AB, exprimat cu ajutorul acestor abscise, este egală cu diferenţa dintre abscisa extremităţii B şi abscisa originii A a segmentului, adică avem întotdeauna : $AB = b - a$.

Demonstrarea acestei egalităţi se face dînd originii O toate poziţiile posibile faţă de segment. În prealabil arătăm că, dacă $\overline{AB} = b - a$, atunci avem şi $\overline{BA} = -\overline{AB} = -(b - a) = a - b$, adică tot diferenţa dintre abscisa extremităţii segmentului, care este acum A, şi abscisa originii segmentului, care este B.

I. În cazul cînd O se află la stînga lui AB (fig. 56, I), avem evident :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a.$$

II. Dacă O se află în A, atunci abscisa lui A este zero (fig. 56,II), iar $\overline{AB} = \overline{OB}$ şi, prin urmare, $\overline{AB} = b = b - 0$.

III. Cînd O se află între A şi B, avem : $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -a + b$ şi, prin urmare, $\overline{AB} = b - a$.

IV. Cînd O se află în B, atunci abscisa lui B este zero, iar $\overline{AB} = \overline{AO} = -\overline{OA} = -a = -a + 0$, astfel că şi în acest caz avem :

$$\overline{AB} = 0 - a.$$

V. Dacă originea O se află la dreapta lui B, atunci avem :

$$\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = b - a.$$

În urma celor arătate se verifică în toate cazurile *că măsura unui segment orientat de pe o axă este egală cu diferența dintre abscisa extremității și aceea a originii segmentului.*

5. **Proiecții.** *Proiecția ortogonală pe o axă a unui punct A este piciorul A' al perpendicularei coborîte din A pe axă* (fig. 57). *Proiecția pe o axă oarecare a unui segment orientat $\overline{AB}$ este măsura segmentului orientat de pe axă cuprins între proiecțiile A' și B' ale punctelor A și B, ordinea proiecțiilor fiind aceeași cu ordinea punctelor ce se proiectează.* Avem deci (fig. 57):

$$\overline{A'B'} = \text{pr}\,\overline{AB},$$

$$\overline{B'A'} = \text{pr}\,\overline{BA}.$$

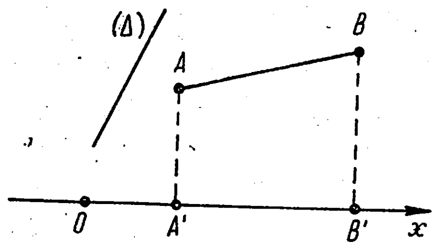


Fig. 57

6. **Segmente consecutive.** *Două segmente $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ orientate, astfel ca extremitatea unuia este originea celuilalt se numesc segmente consecutive.* De exemplu, $\overline{AB}$ și $\overline{BC}$ (fig. 58) sînt consecutive pentru că extremitatea B a lui $\overline{AB}$ este originea B a segmentului orientat $\overline{BC}$. La fel, $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$ sînt segmente consecutive.

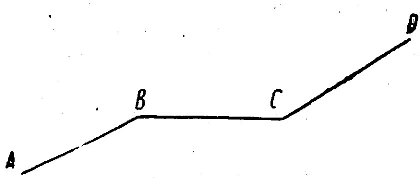


Fig. 58

Teoremă. *Suma proiecțiilor segmentelor consecutive din care este format un contur poligonal închis este nulă.*

Demonstrație. Pentru ușurință, considerăm conturul poligonal închis $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_1$ (fig. 59) și proiecțiile $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_6}$, $\overline{A_6A_1}$ ale segmentelor consecutive $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, $\overline{M_4M_5}$, $\overline{M_5M_6}$, $\overline{M_6M_1}$. Trebuie să arătăm că:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_6A_1} = 0.$$

Dacă alegem pe axa de proiecție o origine O, atunci fiecare din punctele $A_1, A_2, \ldots, A_6$ are cîte o abscisă, pe care le notăm respectiv cu $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Din cele spuse despre măsura unui segment orientat pe o axă rezultă:

$$\overline{A_1A_2} = a_2 - a_1;\ \overline{A_2A_3} = a_3 - a_2;\ \overline{A_3A_4} = a_4 - a_3;$$

$$\overline{A_4A_5} = a_5 - a_4;\ \overline{A_5A_6} = a_6 - a_5;\ \overline{A_6A_1} = a_1 - a_6$$

şi, prin urmare:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_6A_1} =$$

$$= a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + a_5 - a_4 + a_6 - a_5 + a_1 - a_6 = 0,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

Faptul că în demonstraţie am folosit 6 puncte în loc de n nu restrînge generalitatea, pentru că în cazul a n puncte demonstraţia este absolut identică.

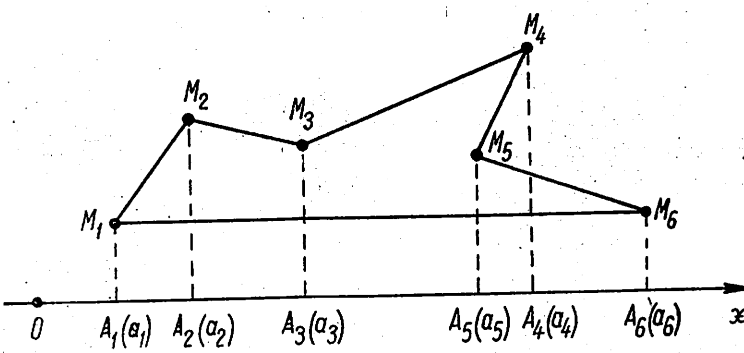


Fig. 59

Consecinţă. *Proiecţia unui segment care închide o linie poligonală oarecare este egală cu suma proiecţiilor segmentelor consecutive din care este formată linia poligonală.*

Aceasta rezultă din egalitatea demonstrată:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_6A_1} = 0,$$

prin trecerea unui termen din membrul stîng în cel drept.

De exemplu, dacă trecem pe $\overline{A_6A_1}$ în celălalt membru al egalităţii, avem:

$$-\overline{A_6A_1} = \overline{A_1A_6} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_5A_6}$$

sau:

$$\text{pr } \overline{M_1M_6} = \text{pr } \overline{M_1M_2} + \text{pr } \overline{M_2M_3} + \text{pr } \overline{M_3M_4} + \\ + \text{pr } \overline{M_4M_5} + \text{pr } \overline{M_5M_6},$$

ceea ce justifică consecința.

7. **Orientarea segmentelor în plan.** *Două segmente paralele și egale,* $\overline{AB}$ *și* $\overline{CD}$ ($\overline{AB} = \parallel \overline{CD}$), *sînt orientate la fel* (fig. 60), *dacă extremitățile B și D ale celor două segmente sînt așezate ambele pe aceeași latură a paralelogramului ABDC* (fig. 60, *a*). *Dacă extremitățile lor sînt așezate pe două laturi opuse BC și AD* (fig. 60, *b*), *atunci orientarea lor e contrară.*

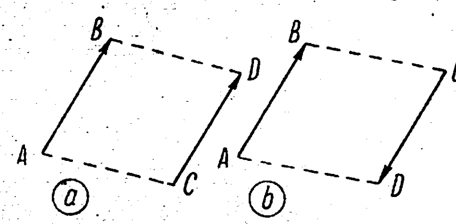


Fig. 60

Segmentele paralele și egale la fel orientate au proiecțiile egale și de același sens.

Fie segmentele $\overline{AB}$ și $\overline{DC}$, paralele și egale ($\overline{AB} = \parallel \overline{CD}$), la fel orientate (fig. 61) și proiecțiile lor $\overline{A'B'}$ și $\overline{C'D'}$.

Să arătăm că $\overline{A'B'}$ și $\overline{C'D'}$ sînt egale și de același sens.

Ducînd din A' și C' paralele, respectiv la $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$, se formează triunghiurile dreptunghice $A'MB'$ și $C'ND'$, care au $A'M = C'N$, ca paralele cuprinse între paralele, și unghiurile marcate din A' și C' egale, ca unghiuri corespondente formate de paralelele $A'M$ și $C'N$ cu secanta $A'B'C'D'$; rezultă deci că: $A'B' = C'D'$. Sensurile de parcurgere ale segmentelor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ fiind aceleași, rezultă că proiecțiile $\overline{A'B'}$ și $\overline{C'D'}$ au aceeași orientare, ceea ce trebuia dovedit.

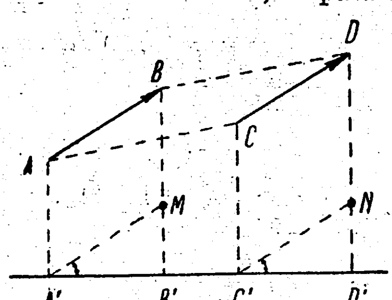


Fig. 61

8. **Lungimea (valoarea absolută) proiecției unui segment.** *Valoarea absolută a proiecției pe o axă a unui segment orientat este egală cu produsul dintre lungimea segmentului și cosinusul unghiului ascuțit format de segment cu axa de proiecție.*

Fie AB lungimea unui segment şi $A'B'$ (fig. 62) lungimea proiecţiei sale, iar u unghiul dintre ele sau al prelungirilor lor. Ducem din A o paralelă la $A'B'$, care întîlneşte proiectanta BB' în M. Unghiul $\widehat{MAB}$ din triunghiul

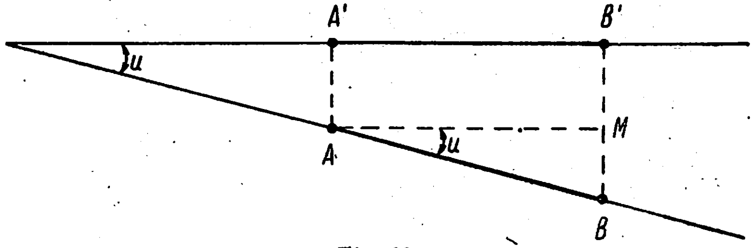


Fig. 62

dreptunghic MAB şi unghiul u sînt egale ca unghiuri corespondente, formate de paralelele AM, $A'B'$ cu secanta AB. Scriem, pe baza definiţiei, cosinusul unghiului $\widehat{MAB}$:

$$\cos \widehat{MAB} = \cos u = \frac{AM}{AB},$$

de unde rezultă:

$$AM = AB \cos u$$

sau:

$$\boxed{A'B' = AB \cos u}$$

9. **Proiecţia unui segment orientat.** În paragraful precedent nu am ţinut seama de semnul proiecţiei. Acum este vorba *să exprimăm proiecţia unui segment ţinînd seama de orientarea atît a segmentului, cît şi a axei.* În prealabil, să definim unghiul $u = (\widehat{\overline{AB}, \overline{CD}})$ a două segmente orientate, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ (fig. 63). În acest scop, să ducem printr-un punct O două segmente, OB' şi OD', respectiv

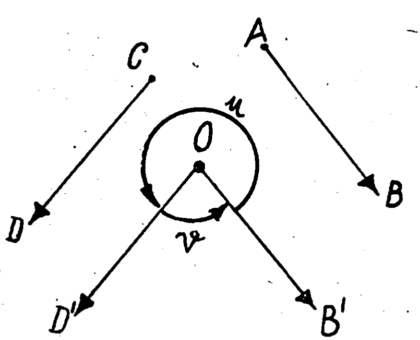


Fig. 63

egale, paralele şi la fel orientate cu $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Se numeşte unghiul segmentelor orientate $(\overline{AB}, \overline{CD})$ unghiul descris de OB' în sensul invers mişcării acelor de ceasornic, pînă ce acesta se suprapune peste $\overline{OD'}$. Astfel definit, între unghiurile $u = (\widehat{\overline{AB}, \overline{CD}})$ şi $v = (\widehat{\overline{CD}, \overline{AB}})$ există relaţia generală $u + v = k \cdot 360°$, unde k este un întreg oarecare.

Unghiul a două axe este unghiul a două segmente orientate, aşezate pe cele două axe şi avînd aceeaşi orientare cu axele respective.

Să demonstrăm că proiecţia pe o axă a unui segment orientat este egală cu produsul dintre lungimea segmentului şi cosinusul unghiului format de sensul pozitiv al segmentului cu sensul pozitiv al axei (sau cosinusul unghiului format de direcţiile indicate de săgeţi ale axei şi segmentului orientat).

Pentru demonstrarea teoremei, considerăm fixat sensul pozitiv al axei prin săgeata respectivă (fig. 64) şi urmărim cum variază proiecţia segmentului orientat $\overline{AB}$. În acest scop vom duce din originea O de pe axă un segment $\overline{OC}$, egal şi paralel cu $\overline{AB}$ şi cu aceeaşi orientare. După cum s-a arătat mai sus, proiecţia lui $\overline{OC}$ este egală şi de acelaşi semn cu proiecţia lui $\overline{AB}$. Construim şi cercul de rază 1 cu centrul în O. Se pot întîmpla următoarele cazuri:

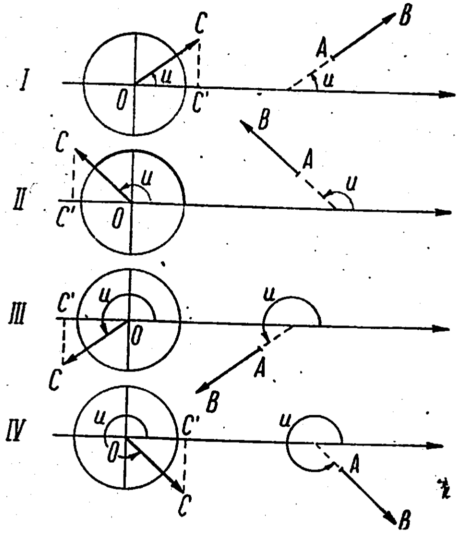


Fig. 64

I) $\overline{OC}$ cade în interiorul cadranului I (fig. 64, I) al cercului trigonometric. Unghiul dintre $\overline{OC}$ şi axă e acelaşi cu unghiul dintre $\overline{AB}$ şi axă, adică u. Avem: $\overline{OC'} = \overline{OC} \cos u$; prin urmare: $\overline{OC'} = \text{pr}\, \overline{OC} = \text{pr}\, \overline{AB} = AB \cos u$.

II) OC cade în interiorul cadranului II (fig. 64, II); proiecţia lui $\overline{OC}$ este în acest caz negativă. Unghiul ascuţit dintre $\overline{OC}$ şi axă este $180° - u$. Avem deci:

$$\overline{OC'} = -OC \cos (180° - u) = OC \cos u$$

şi, prin urmare:

$$\text{pr}\, \overline{OC} = \text{pr}\, \overline{AB} = AB \cos u.$$

III) OC cade în cadranul III (fig. 64, III); proiecţia sa $\overline{OC'}$ este negativă, iar unghiul ascuţit între $\overline{OC}$ şi axă este egal cu $u - 180°$. Avem deci: $\overline{OC'} = -OC \cos (u - 180°) = OC \cos u$

$$\text{sau: pr}\, \overline{OC} = \text{pr}\, \overline{AB} = AB \cos u.$$

IV) În cadranul IV (fig. 64, IV), proiecţia $\overline{OC'}$ a lui $\overline{OC}$ este pozitivă, iar unghiul ascuţit între $\overline{OC}$ şi axă este egal cu $360° - u$. Avem deci: $\overline{OC'} = OC \cos (360° - u)$ sau:

$$\boxed{\text{pr}\, \overline{OC} = \text{pr}\, \overline{AB} = AB \cos u}$$

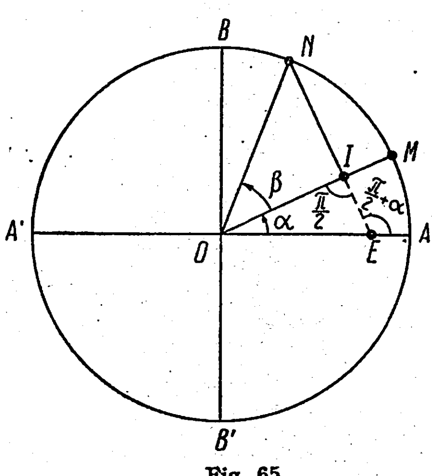


Fig. 65

Aşadar, *în toate cazurile posibile, proiecţia pe o axă a segmentului orientat $\overline{AB}$ este egală cu produsul dintre valoarea absolută a lui $\overline{AB}$ prin cosinusul unghiului format de direcţiile indicate de săgeţile axei şi segmentului orientat.*

10. **Cosinusul unei sume şi al unei diferenţe de arce (sau unghiuri).** Cu ajutorul teoremelor privind proiecţiile pe o

axă a unui contur poligonal şi a unui segment se pot stabili formule pentru funcţiile trigonometrice ale unei sume şi ale unei diferenţe de arce.

Să considerăm arcele $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ şi $\overset{\frown}{MN} = \beta$ (fig. 65) ale cercului de rază 1. Ele exprimă totodată şi măsura în radiani a unghiurilor la centru corespunzătoare.

Din N lăsăm o perpendiculară NI pe raza OM; se formează conturul poligonal OIN, căruia îi aplicăm teorema proiecţiilor. Avem : pr $\overline{ON}$ = pr $\overline{OI}$ + pr $\overline{IN}$. (1)
Luînd ca axă de proiecţie diametrul $A'A$ cu sensul pozitiv OA, obţinem :

$$\text{pr}\,\overline{ON} = ON\cos\widehat{AON} = 1\cdot\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta);$$

$$\text{pr}\,\overline{OI} = OI\cos\widehat{AOI} = \cos\beta\cos\alpha;$$

$$\text{pr}\,\overline{IN} = IN\cos\widehat{NEA} = \sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\beta\sin\alpha;$$

(punctul E este intersecţia dreptei IN cu OA).

Înlocuind aceste rezultate în (1), deducem :

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \tag{2}$$

Să presupunem acum arcul $\overset{\frown}{MN} = \beta$ orientat negativ (fig. 66). Ducem din extremitatea N a arcului $\overset{\frown}{MN}$ per-

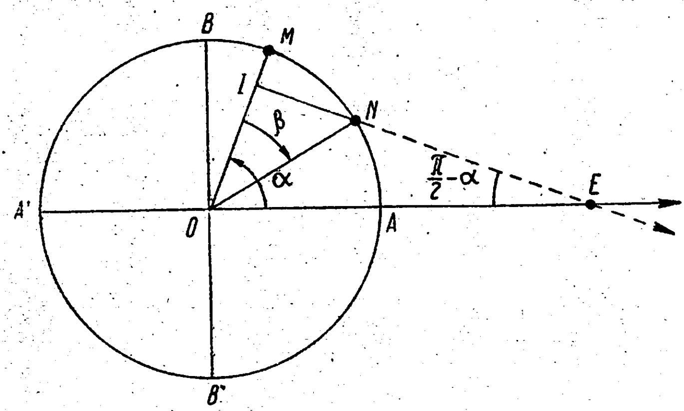


Fig. 66

pendiculara pe raza OM, întocmai ca în primul caz. Aplicînd aceeași teoremă a proiecțiilor, obținem:

$$\text{pr}\ \overline{ON} = \text{pr}\ \overline{OI} + \text{pr}\ \overline{IN}.$$

Luînd $A'A$ ca axă de proiecție și punctul E la intersecția dreptei IN cu axa, avem:

$$\text{pr}\ \overline{ON} = ON \cos \widehat{AON} = ON \cos (\widehat{AOM} + \widehat{MON}) = \\ = \cos (\alpha + \beta);$$

$$\text{pr}\ \overline{OI} = OI \cos \widehat{AOI} = \cos (-\beta) \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta;$$

$$\text{pr}\ \overline{IN} = IN \cos \widehat{IEO} = -\sin \beta \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\ = -\sin \alpha \sin \beta$$

(în ultima egalitate am luat pentru IN expresia $-\sin \beta$, pentru că β fiind negativ și $\sin \beta$ este negativ, iar teorema proiecției unui segment orientat cere ca IN să fie înlocuit prin valoarea absolută a segmentului orientat $\overline{IN}$).

Înlocuind expresiile lui pr $\overline{ON}$, pr $\overline{OI}$ și pr $\overline{IN}$, deducem:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Procedînd ca mai sus pentru orice poziție a punctelor M și N pe cerc, constatăm că formula (2) este generală. Aceasta se explică prin faptul că și teorema proiecțiilor care s-a folosit pentru stabilirea formulei (2) este de asemenea generală. Rezultă deci că formula (2) este valabilă pentru orice valoare a arcelor α și β.

Înlocuind în (2) pe β prin $-\beta$ și ținînd seama că avem $\sin (-\beta) = -\sin \beta$ și $\cos (-\beta) = \cos \beta$, obținem:

$$\boxed{\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \qquad (3)$$

11. **Sinusul unei sume și al unei diferențe de arce.** În formula (3) introducem în locul arcului α arcul $\frac{\pi}{2} - \alpha$, după care obținem:

$$\cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta.$$

Dacă ţinem seama că avem: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \sin(\alpha + \beta)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ şi $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, atunci relaţia dedusă mai sus devine:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha} \qquad (4)$$

Am obţinut astfel formula care dă sinusul unei sume de arce. Pentru a obţine sinusul unei diferenţe, punem în locul lui β din formula (4) arcul $-\beta$, după care deducem:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos\alpha$$

sau:

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha} \qquad (5)$$

12. Tangenta unei sume şi a unei diferenţe de arce. Din relaţia:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

unde împărţim atît numărătorul cît şi numitorul fracţiei prin $\cos\alpha\cos\beta$, obţinem:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

sau:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (6)$$

Punînd în formula (6) $-\beta$ în loc de β, deducem:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (7)$$

13. Cotangenta unei sume şi a unei diferenţe de arce. Din relaţia:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha},$$

unde împărţim atît numărătorul cît şi numitorul fracţiei prin $\sin\alpha\sin\beta$, deducem:

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}}\qquad(8)$$

Înlocuind în această formulă pe β prin $-\beta$, obţinem:

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}}\qquad(9)$$

Exerciţii aplicative: nr. 91—108 de la p. 132—134.

14. Aplicaţii

Aplicaţia I. *Să se arate, că dacă avem* $\cos\alpha=\frac{1}{7}$ *şi* $\cos\beta=\frac{13}{14}$, *unde* α *şi* β *sînt două arce din primul cadran, atunci* $\alpha-\beta=60°$.

Calculăm $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$. Ne sînt necesare pentru aceasta valorile lui $\sin\alpha$ şi $\sin\beta$.

$$\text{Avem: } \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{49}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{şi } \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{169}{196}}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

(am luat ambele sinusuri cu semnul plus pentru că arcele α şi β sînt din primul cadran).

Înlocuind mai sus, obţinem:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{7}\cdot\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{13+36}{98}=\frac{49}{98}=\frac{1}{2},$$

de unde rezultă: $\alpha-\beta=60°$.

Observare. Egalitatea pe care am demonstrat-o este echivalentă cu $\arccos\frac{1}{7}-\arccos\frac{13}{14}=\frac{\pi}{3}$.

Aplicaţia II. *Să se calculeze sin* $(\alpha+\beta+\gamma)$ *cu ajutorul valorilor funcţiilor trigonometrice ale arcelor* α, β *şi* γ.

Considerînd $\beta+\gamma$ ca un singur arc, avem de calculat sinusul sumei arcelor α şi $(\beta+\gamma)$; aplicăm formula cunoscută pentru sinusul unei sume de două arce.

Avem deci:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[\alpha+(\beta+\gamma)]=\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)+$$
$$+\cos\alpha\sin(\beta+\gamma).$$

Apoi, după dezvoltarea expresiilor $\cos(\beta+\gamma)$ şi $\sin(\beta+\gamma)$, obţinem: $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)+$ $+\cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)$ sau, în sfîrşit:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+$$
$$+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Aplicaţia III. *Să se calculeze laturile dodecagonului regulat convex şi stelat înscrise în cercul de rază* R.

Împărţind cercul în 12 părţi egale, fiecare arc are cîte 30°. Latura AB a dodecagonului convex subîntinde un arc, iar latura AC (fig. 67) a dodecagonului stelat subîntinde 5 arce. Ducînd perpendicularele OI şi OK, respectiv pe laturile AB şi AC, se formează triunghiurile dreptunghice AOI şi COK, în care avem:

$$\sin 15° = \frac{AI}{AO} = \frac{AB}{2R}$$

$$\text{şi } \sin 75° = \frac{CK}{OC} = \frac{AC}{2R}.$$

Rezultă:

latura dodecagonului convex $AB = 2R\sin 15°$ şi latura dodecagonului stelat $AC = 2R\sin 75°$.

Să calculăm sin 15° şi sin 75°.

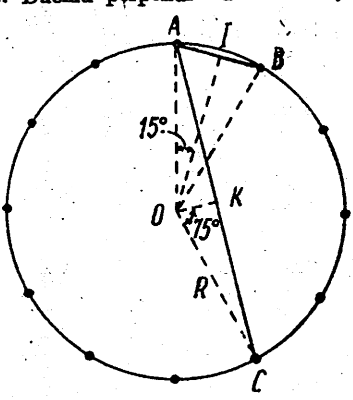


Fig. 67

Avem:

$$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° -$$
$$-\sin 30°\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

şi:

$$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cos 30° + \sin 30°\cos 45° =$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Prin urmare:

latura dodecagonului convex $AB = \frac{R(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2}$

şi latura dodecagonului stelat $AC = \frac{R(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$.

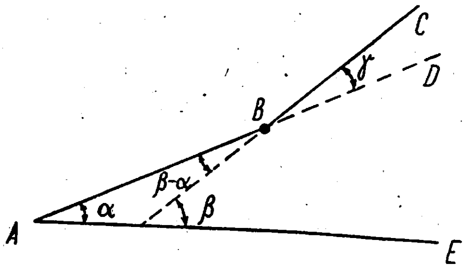


Fig. 68

Aplicaţia IV. *O linie ferată care porneşte de la staţia A pînă la staţia B* (fig. 68) *are panta* $\frac{2}{1\,000}$. *De la staţia B pînă la staţia C linia ferată are panta* $\frac{3}{1\,000}$. *Care este panta liniei ferate BC faţă de linia AB?*

Dacă notăm cu α înclinarea liniei AB faţă de orizontala AE, cu β înclinarea liniei BC faţă de aceeaşi orizontală, atunci panta liniei BC faţă de linia AB este: $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$.

$$\text{Calculăm } \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{3}{1\,000} - \frac{2}{1\,000}}{1 + \frac{2}{1\,000}\cdot\frac{3}{1\,000}} =$$

$$= \frac{1}{1\,000{,}006} \approx 0{,}000999.$$

Rezultă că panta căutată este $\approx \frac{0{,}999}{1\,000}$.

Funcţii trigonometrice ale unor arce multiple şi ale jumătăţii de arc

15. **Funcţiile trigonometrice ale arcului dublu.** Cunoscînd funcţiile trigonometrice ale unui arc α, să exprimăm $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ şi $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

În acest scop calculăm aceste expresii cu ajutorul formulelor care dau funcţiile trigonometrice ale unor sume de două arce (formulele 2, 4, 6, 8, p. 105—108), în care considerăm pe β egal cu α. Avem:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha$$

sau:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha} \qquad (1)$$

Această formulă se exprimă şi altfel. Dacă punem $\alpha = \frac{u}{2}$, atunci $2\alpha = u$, iar formula devine:

$$\boxed{\sin u = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}} \qquad (1')$$

Pentru celelalte funcţii trigonometrice ale arcului 2α obţinem:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha,$$

sau:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha},$$

sau:

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha},$$

sau:

$$\boxed{\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}} \qquad (4)$$

Pentru funcţia $\cos 2\alpha$ avem şi alte exprimări. Dacă înlocuim $\cos^2\alpha$ prin $1 - \sin^2\alpha$, sau $\sin^2\alpha$ prin $1 - \cos^2\alpha$, putem scrie: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$ sau:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

şi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$

sau :

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \qquad (6)$$

Din identităţile (5) şi (6) rezultă imediat următoarele :

$$\boxed{1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha} \qquad \boxed{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha} \qquad (7)$$

16. **Funcţiile trigonometrice ale arcului triplu.** Să exprimăm $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$ şi $\operatorname{ctg} 3\alpha$ cu ajutorul funcţiilor trigonometrice ale arcului α.

Avem :

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha$$

sau :

$$\sin 3\alpha = (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$
$$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha.$$

În sfîrşit :

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha} \qquad (8)$$

Înlocuind în această formulă pe α prin $\frac{\pi}{2} - \alpha$ şi schimbînd semnul după ce înlocuim $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right)$ prin $-\cos 3\alpha$ şi $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ prin $\cos\alpha$, obţinem :

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} \qquad (9)$$

Pentru $\operatorname{tg} 3\alpha$ avem :

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}};$$

după simplificare obţinem :

$$\boxed{\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad (10)$$

Dacă înlocuim în această formulă pe α prin $\frac{\pi}{2} - \alpha$ şi ţinem seama că $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right) = \operatorname{ctg} 3\alpha$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$, atunci formula (10) devine:

$$\boxed{\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \tag{11}$$

17. **Funcţiile trigonometrice ale jumătăţii de arc.** Să calculăm funcţiile trigonometrice ale arcului $\frac{\alpha}{2}$ cînd se cunosc acelea ale arcului α. Folosim în acest scop formulele:

$$1 - \cos 2u = 2 \sin^2 u \text{ şi } 1 + \cos 2u = 2 \cos^2 u.$$

Înlocuind în aceste relaţii pe u prin $\frac{\alpha}{2}$, obţinem:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha \text{ şi } 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha,$$

de unde rezultă:

$$\boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}} \tag{12}$$

şi:

$$\boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \tag{13}$$

Împărţind membru cu membru egalităţile (12) şi (13), obţinem:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} \text{ şi } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

sau:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} \text{ şi } \boxed{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}} \tag{14}$$

O b s e r v a r e a I. Formulele obținute (12, 13, 14) ne arată că, atunci cînd se dă $\cos\alpha = p$, obținem pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ cîte două valori egale în valoare absolută și de semne contrare. Să explicăm dublul semn pentru fiecare din ele. Fie α_0 cel mai mic arc pozitiv pentru care avem $\cos\alpha_0 = p$. Toate arcele α care au același cosinus cu α_0 sînt cuprinse în expresia:

$$\alpha = 2k\pi \pm \alpha_0$$

și, prin urmare:

$$\frac{\alpha}{2} = k\pi \pm \frac{\alpha_0}{2},$$

care ia pentru $k = 0$ și $k = 1$ patru valori:

$$\pm\frac{\alpha_0}{2} \text{ și } \pi \pm \frac{\alpha_0}{2}.$$

Funcția $\sin\frac{\alpha}{2}$ primește pentru aceste arce valorile:

$$\sin\frac{\alpha_0}{2};\ \sin\left(-\frac{\alpha_0}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha_0}{2};\ \sin\left(\pi + \frac{\alpha_0}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha_0}{2};$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\alpha_0}{2}\right) = \sin\frac{\alpha_0}{2},$$

din care numai două sînt distincte: $\sin\frac{\alpha_0}{2}$ și $-\sin\frac{\alpha_0}{2}$. Aceasta explică dublul semn pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$ exprimat în funcție de $\cos\alpha$. La fel se explică dublul semn și pentru $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

O b s e r v a r e a II. Pentru $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ se pot obține exprimări raționale, prin $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$, în care să nu figureze dublul semn.

Înmulțind ambii termeni ai fracției $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ prin $2\cos\frac{\alpha}{2}$, respectiv $2\sin\frac{\alpha}{2}$, obținem:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{şi}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Prin inversarea fracțiilor deducem:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{şi} \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

18. Exprimarea rațională a funcțiilor trigonometrice ale arcului x cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Din identitățile $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$, $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos x$ şi $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$ rezultă:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} \quad \text{şi} \quad \cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Împărțind termenii fiecărei fracții prin $\cos^2\frac{x}{2}$, obținem:

$$\boxed{\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} \quad \text{şi} \quad \boxed{\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}$$

Prin împărţirea membru cu membru a acestor egalităţi, obţinem:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}$$

Dacă notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, avem deci:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ \text{şi} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}\end{gathered}}$$

formule care exprimă raţional toate funcţiile trigonometrice ale arcului x cu ajutorul lui $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Exerciţii aplicative: nr. 109—110 de la p. 134.

19. Aplicaţii

Aplicaţia I. *Fiind date două arce* α *şi* β *din primul cadran, pentru care se dau:* $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$ şi $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{239}$, *să se arate că avem:*

$$4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Calculăm $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$; în acest scop să exprimăm valoarea lui $\operatorname{tg} 4\alpha$.

Avem: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12}$ şi, prin urmare: $\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{120}{119}$.

Rezultă deci: $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \dfrac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} = 1.$

Deoarece α şi β sînt arce din primul cadran şi, cum a reieşit din calcul că $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{5}{12} < 1$, rezultă că $2\alpha < \frac{\pi}{4}$, iar $4\alpha < \frac{\pi}{2}$. Prin urmare, $4\alpha - \beta$ fiind arcul din primul cadran, pentru care avem $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = 1$, urmează că $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, ceea ce trebuia dovedit.

O b s e r v a r e. Relaţia demonstrată se mai poate scrie:

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

Sub această formă relaţia este importantă pentru calcularea lui π cu un număr mare de zecimale.

Aplicaţia II. *Fiind dat* $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$, *să se calculeze* $\sin \frac{\alpha}{2}$ *şi* $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Din formula $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ deducem:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \frac{576}{49}} = \frac{49}{625}$$

şi, prin urmare, $\cos \alpha = \pm \frac{7}{25}$.

Cu ajutorul formulelor:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ şi } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

obţinem:

$$\text{pentru } \cos \alpha = -\frac{7}{25}; \ \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \pm \frac{4}{5}.$$

şi:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \pm \frac{3}{5}.$$

iar pentru $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \pm\frac{3}{5}$ şi

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Aşadar, luînd $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}$, corespund pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$ patru valori: $\pm\frac{4}{5}$ şi $\pm\frac{3}{5}$; la fel avem şi pentru $\cos\frac{\alpha}{2}$ tot patru valori: $\pm\frac{3}{5}$ şi $\pm\frac{4}{5}$.

Să explicăm de ce corespund cîte patru soluţii pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$ şi $\cos\frac{\alpha}{2}$, cînd se dă numai $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{24}{7}$.

Fie α_0 cel mai mic arc pozitiv pentru care avem $\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{24}{7}$; se ştie că în acest caz toate arcele care au aceeaşi tangentă sînt cuprinse în formula $\alpha = k\pi + \alpha_0$ şi deci $\frac{\alpha}{2} = \frac{k\pi + \alpha_0}{2}$. Valorile pentru $\sin\frac{\alpha}{2}$ sînt în acest caz $\sin\frac{k\pi+\alpha_0}{2}$, care pentru $k = 0, 1, 2, 3$ capătă patru valori distincte: $\sin\frac{\alpha_0}{2}$; $\sin\frac{\pi+\alpha_0}{2} = \cos\frac{\alpha_0}{2}$; $\sin\frac{2\pi+\alpha_0}{2} = -\sin\frac{\alpha_0}{2}$ şi $\sin\frac{3\pi+\alpha_0}{2} = -\cos\frac{\alpha_0}{2}$.

Valorile pe care le primeşte $\cos\frac{\alpha}{2}$ sînt: $\cos\frac{\alpha_0}{2}$; $\cos\frac{\pi+\alpha_0}{2} = -\sin\frac{\alpha_0}{2}$; $\cos\frac{2\pi+\alpha_0}{2} = -\cos\frac{\alpha_0}{2}$ şi $\cos\frac{3\pi+\alpha_0}{2} = +\sin\frac{\alpha_0}{2}$, care sînt de asemenea patru valori distincte.

Aplicaţia III. *Să se simplifice expresia:*

$$E = \frac{\sin x - 2\cos x \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sin^3 x}.$$

Dacă notăm $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, se știe că avem : $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Introducînd aceste expresii dependente de t în locul lui $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, obținem :

$$E=\frac{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2(1-t^2)t}{1+t^2}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}}=\frac{2t^3}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^3}{8t^3}=\frac{(1+t^2)^2}{4},$$

sau:
$$E=\frac{1}{4\cos^4\frac{x}{2}}.$$

Formule calculabile prin logaritmi

20. **Problemă.** *Avem de măsurat înălțimea unui turn de care nu ne putem apropia din cauza unui obstacol. În acest scop se măsoară din A, cu un aparat așezat pe un tripied înalt de* 1,2 m, *unghiul* α *format de raza vizuală care trece prin C, vîrful turnului, cu orizontala DA ; se găsește* $\alpha=36°15'12''$. *Apoi observatorul se depărtează de primul loc de observare cu distanța* $AB=39$ m *și măsoară din B unghiul* β, *format de raza vizuală CB cu orizontala, și găsește* $\beta=27°10'10''$. *Care este înălțimea turnului* (fig. 69) ?

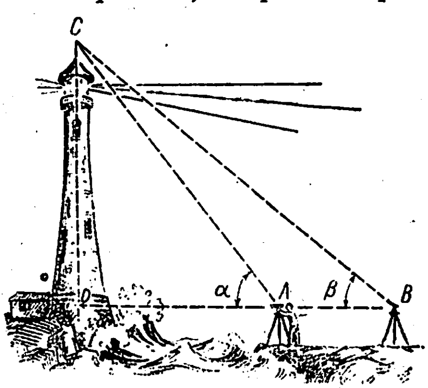


Fig. 69

Notînd cu x înălțimea turnului de la vîrf pînă la orizontala DAB, să formăm ecuația care ne dă pe x. Aplicînd definiția cotangentei unui unghi ascuțit în fiecare din triunghiurile dreptunghice CBD și CAD, avem :

$$\frac{DB}{DC}=\operatorname{ctg}\beta \text{ și } \frac{DA}{DC}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Scăzînd membru cu membru, obţinem :

$$\frac{DB - DA}{DC} = \text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha$$

sau :

$$\frac{AB}{x} = \text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha,$$

de unde rezultă: $x = \dfrac{AB}{\text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha} = \dfrac{39}{\text{ctg}\,27°10'10'' - \text{ctg}\,36°15'12''}$.

Pentru a afla valoarea numerică a lui x trebuie să calculăm separat cele două cotangente de la numitor şi apoi să împărţim pe 39 la diferenţa cotangentelor. Aceasta implică calcularea separată prin logaritmi întîi a cotangentelor şi apoi a cîtului. Pentru a evita aceste operaţii repetate, însoţite de erori, se preferă înlocuirea diferenţei de cotangente printr-o expresie care să fie calculabilă prin logaritmi, adică printr-o expresie formată numai din produse, cîturi, puteri sau radicali, astfel încît să putem aplica proprietăţile cunoscute ale logaritmilor.

În cazul problemei de mai sus, avem :

$$\text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

şi, prin urmare :

$$x = \frac{AB\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{39\sin 36°15'12''\sin 27°10'10''}{\sin 9°5'2''}.$$

Am obţinut astfel o expresie pentru x căreia i se pot aplica logaritmii.

Avem :

$$\lg x = \lg 39 + \lg\sin 36°15'12'' + \lg\sin 27°10'10'' + \text{colg}\sin 9°5'2''$$

sau :

$$\lg x = 1{,}59106 + \bar{1}{,}77185 + \bar{1}{,}65956 + 0{,}80167 = 1{,}82414,$$

de unde rezultă : $x \approx 66{,}70$ m, iar înălţimea turnului de la vîrf pînă la bază este $IC = 66{,}70 + 1{,}2 = 67{,}90$ m.

21. Întocmai ca în problema de mai sus şi în multe altele se impune transformarea unor expresii, conţinînd sume sau diferenţe de funcţii trigonometrice, în altele echivalente, formate din produse, cîturi, puteri sau radicali de funcţii trigonometrice, cu scopul de a simplifica expresiile date sau de a le face calculabile prin logaritmi.

Transformarea unora dintre expresii în altele calculabile prin logaritmi se bazează pe anumite formule care se întîlnesc mai des.

Formule de bază pentru transformarea unor expresii în altele calculabile prin logaritmi

Pornind de la identităţile:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y,$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\sin y\cos x,$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y,$$

în care introducem $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ şi $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$,

adică:

$$x+y=\alpha \text{ şi } x-y=\beta,$$

obţinem:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
&\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\
&\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\\
&\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\\
&\qquad=2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\alpha}{2}
\end{aligned}}$$

formule care transformă o sumă sau diferenţă de două sinusuri şi o sumă sau diferenţă de două cosinusuri în produse.

22. Pentru a transforma suma de tangente sau de cotagente în formule calculabile prin logaritmi, *înlocuim tangentele și cotangentele* prin sinusuri și cosinusuri și apoi efectuăm adunarea sau scăderea indicată:

Avem astfel:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Înlocuind în formulele obținute pe β prin $-\beta$, deducem:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \text{ și } \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

sau:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \text{ și } \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

unde semnele superioare se corespund.

23. Unele expresii pot fi transformate în formule calculabile prin logaritmi prin *introducerea unui unghi auxiliar* astfel ca noua expresie să aibă una din formele de mai sus sau o alta care să fie calculabilă prin logaritmi.

Astfel expresiile $1 \pm \sin\alpha$, $1 \pm \cos\alpha$, $1 \pm \operatorname{tg}\alpha$ capătă una din formele de mai sus în modul următor:

I) La expresiile $1 \pm \sin\alpha$ se introduce unghiul auxiliar $\frac{\pi}{2}$, punînd $1 = \sin\frac{\pi}{2}$. Avem deci:

$$1 \pm \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} \pm \sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{\alpha}{2}\right).$$

II) La expresiile $1 \pm \cos\alpha$ se introduce unghiul auxiliar 0, punînd $1 = \cos 0$. Avem:

$$1 + \cos\alpha = \cos 0 + \cos\alpha = 2\cos\frac{0+\alpha}{2}\cos\frac{0-\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

și:

$$1 - \cos\alpha = \cos 0 - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha-0}{2}\sin\frac{\alpha+0}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

III) La expresiile $1 \pm \operatorname{tg} \alpha$ se introduce unghiul auxiliar $\frac{\pi}{4}$, punînd $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, după care obținem:

$$1 \pm \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \pm \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha} = \sqrt{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \alpha\right)}{\cos\alpha}.$$

Analog se transformă:

$$1 \pm 2\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2} \pm \sin\alpha\right);$$

se introduce unghiul auxiliar $\frac{\pi}{6}$, punînd $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$;

$$1 \pm 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2} \pm \cos\alpha\right);$$

se introduce unghiul auxiliar $\frac{\pi}{3}$, punînd $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ etc...

24. Expresia mai generală $A\sin x + B\cos x$ se poate de asemenea transforma în alta calculabilă prin logaritmi scriind: $A\sin x + B\cos x = A\left(\sin x + \frac{B}{A}\cos x\right)$, unde introducem unghiul auxiliar φ pe care-l căutăm în tabele, astfel ca $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\varphi$.

Atunci avem:

$$A\sin x + B\cos x = A\left(\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right) =$$
$$= A\,\frac{\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x}{\cos\varphi} = \frac{A\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

De exemplu:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right).$$

Exerciții aplicative: nr. 118—126 de la p. 135—136.

25. Aplicații

Aplicația I. *Să se calculeze unghiul ascuțit* φ *pentru care avem:*

$$\operatorname{tg}^3\varphi = \frac{\cos 50°13' + \sin 36°12'}{\operatorname{ctg} 30°11' + \operatorname{tg} 43°10'}.$$

La numărător înlocuim $\cos 50°13' = \sin(90° - 50°13') = \sin 39°47'$, iar la numitor $\operatorname{ctg} 30°11' = \operatorname{tg}(90° - 30°11') = \operatorname{tg} 59°49'$, după care avem:

$$\operatorname{tg}^3\varphi = \frac{\sin 39°47' + \sin 36°12'}{\operatorname{tg} 59°49' + \operatorname{tg} 43°10'} =$$

$$= \frac{2 \sin \dfrac{39°47' + 36°12'}{2} \cos \dfrac{39°47' - 36°12'}{2}}{\dfrac{\sin(59°49' + 43°10')}{\cos 59°49' \cos 43°10'}}$$

sau:

$$\operatorname{tg}^3\varphi = \frac{2 \sin 37°59'30'' \cos 1°47'30'' \cos 59°49' \cos 43°10'}{\sin 102°59'}$$

Arcul de 102°59′ fiind în cadranul II, înlocuim $\sin 102°59' = \sin(180° - 102°59') = \sin 77°1'$, după care, aplicînd logaritmii, găsim:

$$3 \lg \operatorname{tg}\varphi = \lg 2 + \lg \sin 37°59'30'' + \lg \cos 1°47'30'' + \lg \cos 59°49' + \lg \cos 43°10' + \operatorname{colg} \sin 77°1'$$

sau:

$$3 \lg \operatorname{tg}\varphi = 0{,}30103 + \bar{1}{,}78926 + \bar{1}{,}99979 + \bar{1}{,}70137 + \bar{1}{,}86295 + 0{,}01125 = \bar{1}{,}66565.$$

Rezultă:

$$\lg \operatorname{tg}\varphi = \frac{\bar{1}{,}66565}{3} = \bar{1}{,}88855$$

și, prin urmare: $\varphi \approx 37°43'39''$.

Aplicația II. *Să se transforme în produs expresia:*

$$E = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

Grupînd termenii în modul cum urmează şi aplicînd formulele de transformare a unei sume şi a unei diferenţe de sinusuri, avem succesiv:

$$E = (\sin\alpha + \sin\beta) - [\sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin\gamma] =$$
$$= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right]$$

sau:

$$E = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2 \sin \frac{\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}}{2} \sin \frac{\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}}{2},$$

şi, în sfîrşit:

$$E = 4 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

O b s e r v a r e a I. Dacă în loc de α, β, γ, punem respectiv:

$$\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

identitatea obţinută devine:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) -$$
$$- \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha - \beta - \gamma\right) = 4 \sin \frac{\pi-\beta-\gamma}{2} \sin \frac{\pi-\alpha-\gamma}{2} \sin \frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$$

sau:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$= 4 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

O b s e r v a r e a II. Dacă α, β, γ sînt unghiurile A, B, C ale unui triunghi, atunci:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}; \quad \frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2};$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \quad \text{şi} \quad \alpha + \beta + \gamma = A + B + C = 180^\circ,$$

rezultatul de mai sus devenind :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

iar cel de la observarea I :

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

sau :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Aplicația III. *Să se exprime* $\sin 5\alpha$ *cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale arcului* α.

Calculăm, sub formă de produs, diferența :

$$\sin 5\alpha - \sin\alpha = 2 \sin \frac{5\alpha - \alpha}{2} \cos \frac{5\alpha + \alpha}{2} = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha =$$
$$= 4 \cos^3\alpha - 3 \cos \alpha.$$

Se deduce :

$\sin 5\alpha - \sin \alpha = 4 \sin \alpha (1 - \sin^2\alpha) [4(1 - \sin^2\alpha) - 3]$,

de unde rezultă : $\sin 5\alpha = \sin \alpha \ (5 - 20 \sin^2\alpha + 16 \sin^4\alpha)$

În mod analog se poate calcula $\cos 5\alpha$ și, în general, din aproape în aproape, $\sin m\alpha$ și $\cos m\alpha$, unde m este un întreg impar. Dacă m este par, se transformă în produs diferența $\sin m\alpha - \sin 2\alpha$, respectiv $\cos m\alpha - \cos 2\alpha$.

Transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume

26. Pentru simplificarea unor expresii, pentru demonstrarea unor identități și la înlocuirea unor expresii neliniare în altele liniare are însemnătate și transformarea inversă a unui produs de funcții trigonometrice în sume de funcții trigonometrice.

Ne bazăm pe identitățile :

$$\sin (x + y) + \sin (x - y) = 2 \sin x \cos y,$$
$$\cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 \cos x \cos y,$$
$$\cos (x + y) - \cos (x - y) = -2 \sin x \sin y,$$

de unde deducem :

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2} \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2} \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} \end{aligned}}$$

formule care transformă produsele dintre un sinus şi cosinus, dintre două cosinusuri şi dintre două sinusuri în sume algebrice de sinusuri sau cosinusuri.

Exerciţii aplicative : nr. 128—131 de la p. 137.

27. Aplicaţii

Aplicaţia I. *Să se simplifice expresia :*

$$E = 4 \sin\alpha \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha).$$

Transformăm produsul de sinusuri :

$$\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = \frac{\cos[(60^\circ - \alpha) - (60^\circ + \alpha)] -}{2}$$

$$\frac{-\cos[(60^\circ - \alpha) + (60^\circ + \alpha)]}{2} = \frac{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\alpha}{2}.$$

După aceasta, E devine :

$$E = 4\sin\alpha \cdot \frac{2\cos 2\alpha + 1}{4} = 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha.$$

Acum, transformînd în sumă produsul dintre sinus şi cosinus ; avem :

$$2\sin\alpha\cos 2\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) + \sin(\alpha - 2\alpha) = \sin 3\alpha - \sin\alpha$$

şi, prin urmare :

$$E = \sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha.$$

Aplicaţia II. *Să se calculeze suma :*

$$S = \sin a + \sin(a + r) + \sin(a + 2r) + \ldots + \sin[a + (n-1)r]$$

sinusurilor a n arce în progresie aritmetică cu raţia r.

Înmulțim ambii membri ai egalității de mai sus prin $2\sin\frac{r}{2}$, după care avem:

$$2S\sin\frac{r}{2} = 2\sin a\sin\frac{r}{2} + 2\sin(a+r)\sin\frac{r}{2} +$$
$$+ 2\sin(a+2r)\sin\frac{r}{2} + \ldots + 2\sin[a+(n-1)r]\sin\frac{r}{2}.$$

Înlocuind produsele de sinusuri prin diferențe de cosinusuri, obținem:

$$2S\sin\frac{r}{2} = \left[\cos\left(a-\frac{r}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{r}{2}\right)\right] + \left[\cos\left(a+\frac{r}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(a+\frac{3r}{2}\right)\right] + \left[\cos\left(a+\frac{3r}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{5r}{2}\right)\right] + \ldots +$$
$$+ \left[\cos\left(a+\frac{(2n-3)r}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{(2n-1)r}{2}\right)\right].$$

Efectuînd reducerile de termeni asemenea, deducem:

$$2S\sin\frac{r}{2} = \cos\left(a-\frac{r}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{(2n-1)r}{2}\right) =$$
$$= 2\sin\frac{a+\frac{(2n-1)r}{2}-\left(a-\frac{r}{2}\right)}{2}\cdot\sin\frac{a+\frac{(2n-1)r}{2}+a-\frac{r}{2}}{2}$$

sau:

$$2S\sin\frac{r}{2} = 2\sin\frac{nr}{2}\sin\left[a+\frac{(n-1)r}{2}\right].$$

Rezultă deci:

$$S = \frac{\sin\frac{nr}{2}\sin\left(a+\frac{(n-1)r}{2}\right)}{\sin\frac{r}{2}}.$$

O b s e r v a r e. Dacă în rezultatul dedus punem $\frac{\pi}{2} - a$ în loc de a și $-r$, în loc de r, atunci obținem suma cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică.

$$\cos a + \cos(a+r) + \cos(a+2r) + \ldots + \cos[a+(n-1)r] =$$
$$= \frac{\sin\frac{nr}{2}\cos\left[a+\frac{(n-1)r}{2}\right]}{\sin\frac{r}{2}}$$

Aplicația III. *Să se demonstreze identitatea:*

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)+$$
$$+\cos(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha)=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma.$$

Înlocuind produsele de cosinusuri prin sume, avem:

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]+\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]}{2}=$$
$$=\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}.$$

Analog se obțin și celelalte produse de cosinusuri.
Înlocuind, membrul sting devine:

$$\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2\gamma+\cos 2\alpha}{2}=$$
$$=\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma,$$

ceea ce trebuia dovedit.

Aplicația ~~IX~~. *Să se transforme expresia neliniară*

$$E=\cos x\cos 2x\cos 3x$$

într-o sumă de funcții trigonometrice.

Transformăm produsul de cosinusuri $\cos x \cos 2x$ în sume; avem: $\cos x\cos 2x=\frac{\cos(x+2x)+\cos(x-2x)}{2}=$

$$=\frac{\cos 3x+\cos x}{2}.$$

Înlocuind în E, găsim:

$$E=\frac{\cos 3x+\cos x}{2}\cdot\cos 3x=\frac{\cos^2 3x+\cos x\cos 3x}{2}.$$

Avem:

$$\cos^2 3x=\frac{1+\cos 6x}{2} \text{ și } \cos x\cos 3x=\frac{\cos 4x+\cos 2x}{2}.$$

Înlocuind în E, deducem:

$$E=\frac{1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x}{4},$$

ceea ce trebuia găsit.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

(Răspunsurile și indicațiile se găsesc la p. 245—247)

57. Să se exprime funcțiile trigonometrice ale arcului x, atunci cînd se cunoaște 1) $\sin x$; 2) $\cos x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$; 5) $\sec x$; 6) $\operatorname{cosec} x$ și să se treacă rezultatele într-un tabel.

58. Se dă $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale unghiului x.

59. Se dă $\cos x = \frac{3}{5}$; să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale unghiului x.

60. Se dă $\operatorname{tg} x = 2$; să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale unghiului x.

61. Se dă $\operatorname{ctg} x = \sqrt{6}$; să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale unghiului x.

62. Fiind dat $180° < x < 270°$, să se calculeze:

1) $\sin x$, știind că $\sec x = -2{,}125$;
2) $\sin x$, cunoscînd $\operatorname{ctg} x = 2$;
3) $\sec x$, dacă avem $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
4) $\operatorname{ctg} x$ pentru $\cos x = -\frac{5}{13}$;
5) $\cos x$, dacă $\operatorname{tg} x = \frac{15}{8}$;
6) $\cos x$, dacă avem $\sin x = -\sqrt{1 - a^2}$.

Cum trebuie să fie a în acest caz?

Să se simplifice următoarele expresii:

63. $\frac{\sin^2 x}{\cos x + 1}$.

64. $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$.

65. $\frac{\sin x + \cos x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$.

66. $(\sin 42°13' + \cos 42°13')^2 + (\sin 42°13' - \cos 42°13')^2$

67. $\frac{\operatorname{tg}^2 x\,(\operatorname{cosec}^2 x - 1)}{\sin^2 x \operatorname{cosec}^2 x}$.

68. $\frac{\sin x}{1-\cos x}-\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

69. $\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x}+\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

70. $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

71. $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

Să se demonstreze identitățile:

72. $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x$.

73. $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$.

74. $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$.

75. $\operatorname{ctg} x-\sec x \operatorname{cosec} x\,(1-2\sin^2 x)=\operatorname{tg} x$.

76. $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x=1$.

77. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\operatorname{cosec} x-\operatorname{ctg} x)^2$.

78. Să se verifice identitatea: $\frac{1+\sin^2 x}{2+\operatorname{ctg}^2 x}+\frac{1+\cos^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}=1$.

(Facultatea de geologie și geografie, București, 1954)

79. $\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=-2\operatorname{ctg} x$ pentru $180° < x < 270°$.

80. $\frac{1+\operatorname{tg} 315°14'+\operatorname{tg}^2 315°14'}{1+\operatorname{ctg} 315°14'+\operatorname{ctg}^2 315°14'}=\operatorname{tg} 44°46'$.

Să se exprime:

81. $\sin x\cos x$ numai prin $\operatorname{tg} x$.

82. $\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$ numai prin $\operatorname{tg} x$.

83. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$ numai prin $\cos x$.

Să se calculeze următoarele expresii:

84. $\operatorname{tg} 1°\operatorname{tg} 2°\operatorname{tg} 3°\ldots\operatorname{tg} 89°$.

85. $\frac{\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}$ pentru $\operatorname{tg} x=\frac{4}{5}$.

86. $\dfrac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ pentru $\operatorname{tg} x = 2$.

87. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cos x}$$ nu depinde de x.

(Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1955).

88. Fiind dat $\sin x + \cos x = m$, să se calculeze:

1) $\sin x \cos x$; 2) $\sin x - \cos x$.

89. Fiind dat $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = m$, să se determine valoarea expresiilor:

1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$; 2) $\operatorname{tg}^2 x + \sec x \operatorname{cosec} x + \operatorname{ctg}^2 x$.

90. Dacă x este un arc din cadranul I, să se demonstreze inegalităţile: 1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$; 2) $\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \geqslant 2$.

Să se calculeze:

91. $\sin(a+b)$ şi $\cos(a-b)$, unde a şi b sînt două unghiuri ascuţite pozitive, pentru care avem: $\sin a = \frac{5}{13}$ şi $\sin b = \frac{8}{17}$.

92. $\sin(a+b)$; $\cos(a+b)$; $\sin(a-b)$; $\cos(a-b)$, unde a şi b sînt două arce, primul situat în cadranul II şi al doilea în cadranul I, iar $\sin a = \frac{5}{13}$ şi $\cos b = \frac{3}{5}$.

93. $\sin(45^\circ + x)$, unde x este un unghi obtuz, iar $\cos x = -\frac{1}{2}$.

94. Să se calculeze pe calea cea mai simplă:

$$\cos 19^\circ \cos 11^\circ - \sin 19^\circ \sin 11^\circ.$$

95. Să se calculeze pe calea cea mai simplă:

1) $\sin(7^\circ + x)\cos(23^\circ - x) + \cos(7^\circ + x)\sin(23^\circ - x)$;

2) $\cos(47^\circ + x)\cos(43^\circ + x) - \sin(47^\circ + x)\sin(43^\circ + x)$

Să se simplifice expresiile:

96. 1) $\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}$;

2) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)}$.

97. 1) $\dfrac{\sin 23^\circ \cos 11^\circ + \sin 11^\circ \cos 23^\circ}{\sin 17^\circ \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cos 17^\circ}$;

2) $\dfrac{\cos 85^\circ \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \sin 25^\circ}{\sin 67^\circ \cos 7^\circ - \sin 7^\circ \cos 67^\circ}$.

98. Să se calculeze pe calea cea mai simplă valoarea numerică a următoarei expresii:

$$\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} \quad \text{pentru } a = 1{,}3113 \text{ rad.}$$

99. Să se demonstreze identitățile:

1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right) - \cos\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin a$;

2) $\sin(a+b)\cos(a-b) = \sin a \cos a + \sin b \cos b$;

3) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$;

4) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$;

5) $\dfrac{2\sin a\cos b - \sin(a-b)}{\cos(a-b) - 2\sin a \sin b} = \operatorname{tg}(a+b)$;

6) $\cos 20^\circ + \operatorname{tg} a \sin 20^\circ = \dfrac{\cos(20^\circ - a)}{\cos a}$.

100. Să se demonstreze următoarea egalitate:

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$$

101. Să se demonstreze egalitatea:

$$\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} - \arccos\frac{5}{\sqrt{26}} + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{12}.$$

Să se calculeze:

102. $\operatorname{tg}\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$, **ştiind că** $\operatorname{tg} a = 2$.

103. $\operatorname{tg}(a+b)$ şi $\operatorname{tg}(a-b)$, unde a şi b sînt arce din cadranul IV, iar $\cos a = \frac{3}{5}$ şi $\cos b = \frac{12}{13}$.

104. $\operatorname{tg}(a+b)$ şi $\operatorname{ctg}(a-b)$, dacă avem $\operatorname{tg} a = 0{,}5$ şi $\sin b = 0{,}6$, unghiul b fiind ascuţit şi pozitiv.

105. Să se simplifice expresiile:

1) $\frac{\operatorname{tg} 52° - \operatorname{tg} 15°}{1 + \operatorname{tg} 52° \operatorname{tg} 15°}$; 2) $\frac{\operatorname{ctg} 5a \operatorname{ctg} 3a + 1}{\operatorname{ctg} 3a - \operatorname{ctg} 5a}$.

Să se demonstreze identităţile:

106. 1) $\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b}$;

2) $\operatorname{tg}(a+b) - \operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg}(a+b)$.

107. 1) $\operatorname{ctg}\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} a = \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{ctg} a}$;

2) $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a+b)} - \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg}(a-b)} = -2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$.

108. Să se demonstreze egalităţile:

1) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$;

2) $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

109. Cunoscînd $\cos x = \frac{7}{8}$, unde unghiul x este ascuţit şi pozitiv, să se calculeze $\cos 2x$ şi $\operatorname{tg} 2x$.

110. Fiind dat $\cos x = \frac{4}{7}$, să se calculeze $2 \cos x$ şi $\cos 2x$.

111. Fiind dat $\operatorname{tg} x = 3$, să se calculeze $\sin 4x$, ştiind că x este un unghi ascuţit pozitiv.

112. Să se calculeze valoarea expresiei:

$E = \operatorname{tg} 4x + 4 \operatorname{tg} 2x + 2a$, ştiind că $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = a$.

(Institutul de construcţii, Bucureşti, 1957)

113. Se dă $\cos x = \frac{3}{4}$, ştiind că $0° < x < 90°$. Să se afle valoarea expresiei: $32 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2}$.

(Institutul pedagogic, Timişoara, 1955)

114. Să se caculeze pe calea cea mai simplă:

1) $2 \sin 25° \cos 25°$; 2) $\sin 37° \sin 53°$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 22°30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22°30'}$.

115. Să se simplifice expresiile:

1) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$;

2) $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$.

116. Să se verifice egalităţile:

1) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$;

2) $\cos^2 (a + b) + \cos^2 (a - b) = 1 + \cos 2a \cos 2b$.

117. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right).$$

Să se transforme sumele următoare în produse:

118. 1) $\sin 73° - \sin 34°$;

2) $\sin 14° + \cos 18°$.

119. 1) $\cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{6}$; 2) $\sin \frac{\pi}{10} - \cos \frac{\pi}{12}$.

120. 1) $\operatorname{ctg} 84^\circ + \operatorname{tg} 52^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

121. 1) $\sin 4a + \sin 2a$; 2) $\cos 2a - \cos 8a$;
3) $\operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} 5a$.

122. 1) $\sin a + \cos a$; 2) $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^2 b$.

123. Să se transforme în produse:

1) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$; 2) $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}$.

(Facultatea de mecanizare a agriculturii, Craiova, 1957).

124. Să se transforme în produse:

1) $\sin 10^\circ + \sin 11^\circ + \sin 15^\circ + \sin 16^\circ$;

2) $\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cos 4a$.

125. Să se transforme în produse cu ajutorul unghiului auxiliar:

1) $1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$; 2) $1 + 2\cos a$; 3) $\sqrt{2}\sin a - 1$;
4) $3 - \operatorname{tg}^2 a$.

126. Să se transforme în produse următoarele sume:

1) $1 - \cos a + \sin a$; 2) $1 + \sin a + \cos a + \operatorname{tg} a$;
3) $\sin(5a+b) + \sin(3a+b) + \sin 2a$.

127. Să se rezolve în raport cu x şi y sistemul:

$$x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a$$
$$x \sin 2a + y \sin 4a = \sin 6a.$$

1) Să se scrie rădăcinile sub forma cea mai simplă.

2) Să se discute sistemul în raport cu valorile parametrului a.

(Institutul politehnic, Bucureşti, 1957)

128. Să se transforme următoarele produse în sume:

1) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ$; 2) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{6}$.

129. Să se arate că expresia:

$E = \sin(b-a)\sin(d-c) + \sin(d-a)\sin(c-b)$ se poate scrie ca un produs de două sinusuri.

(Institutul politehnic, Iași, 1956)

130. Să se transforme următorul produs în sumă:

$$8\cos(a-b)\cos(a-c)\cos(c-b).$$

131. Să se transforme următoarele puteri în sume de funcții trigonometrice la puterea întîi:

1) $\sin^3 a$; 2) $\cos^4 a$; 3) $\sin^3 a \cos^2 a$.

132. Să se verifice egalitățile:

1) $\sin 18^\circ + \cos 48^\circ - \cos 12^\circ = 0$;

2) $\cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ =$
$= \sin(45^\circ + a) - \cos(45^\circ - a)$.

133. Să se demonstreze identitățile:

1) $\dfrac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{ctg}\dfrac{a+b}{2}$;

2) $\dfrac{\sin a - \sin b}{\cos a \sin b + \sin a \cos b} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$.

134. Să se verifice identitatea:

$$4\cos^2 a - 1 = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right).$$

135. Să se demonstreze identitățile:

1) $(\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2 = 4\sin^2\dfrac{a-b}{2}$;

2) $\cos^2 a + \cos^2 b - \sin^2(a+b) = 2\cos a \cos b \cos(a+b)$.

136. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{\cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a} = \operatorname{tg} a.$$

Să se verifice identitățile:

137. $\sin^2 a + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2}.$

(Institutul politehnic, Iași, 1957)

138. $$\frac{\left(\cos a + \cos \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\sin a + \sin \frac{a}{2}\right)^2}{2 \sin \frac{a}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{a}{4}.$$

CAPITOLUL IV

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR

REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

1. Relații între elementele unui triunghi dreptunghic. Să considerăm un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, avînd laturile de lungimi: $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$. Ne propunem să stabilim relații între laturile și unghiurile acestui triunghi.

Pe baza definițiilor funcțiilor trigonometrice ale unui unghi oarecare, avem:

$$\sin B = \frac{b}{a};\ \cos B = \frac{c}{a};\ \operatorname{tg} B = \frac{b}{c}\ \text{și}\ \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b},$$

de unde rezultă:

$$\boxed{b = a\sin B;\ c = a\cos B;\ b = c\operatorname{tg} B\ \text{și}\ c = b\operatorname{ctg} B}$$

Aceste formule exprimă într-o formă concisă următoarele reguli:

1° *Lungimea unei catete este egală cu produsul dintre ipotenuză prin sinusul unghiului opus sau prin cosinusul unghiului alăturat catetei pe care o calculăm.*

2° *Lungimea unei catete este egală cu produsul dintre cealaltă catetă prin tangenta unghiului opus sau prin cotangenta unghiului alăturat catetei pe care o calculăm.*

2. Rezolvarea triunghiului dreptunghic cînd se dă ipotenuza a și un unghi B. În acest caz, celelalte elemente principale ale triunghiului sînt date de formulele:

$$\boxed{C = 90° - B;\quad b = a\sin B\ \text{și}\ c = a\cos B}$$

Aplicație. *Să se calculeze perimetrul și aria unui poligon regulat cu 11 laturi înscris într-un cerc cu raza $R = 15{,}2$ cm.*

Unim extremitățile A și B ale unei laturi a poligonului (fig. 70) cu centrul O al cercului circumscris. Ducînd perpendiculara din O pe latura AB se formează două triunghiuri dreptunghice egale: AOI și BOI. În triunghiul dreptunghic AOI cunoaștem ipotenuza $OA = R = 15{,}2$ cm și unghiul ascuțit:

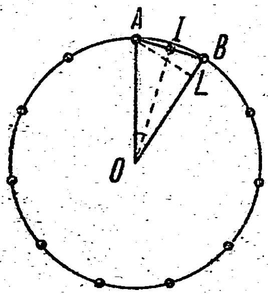


Fig. 70

$$\widehat{AOI} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{11} \approx$$

$$\approx 16^\circ 21' 49''.$$

Rezultă deci că avem:

$$AI \approx AO \sin 16^\circ 21' 49''$$

și, prin urmare, perimetrul poligonului este egal cu:

$$P = 11 \cdot AB = 11 \cdot 2AI \approx 22 \cdot AO \sin 16^\circ 21' 49''$$

sau:

$$P \approx 22 \cdot 15{,}2 \cdot \sin 16^\circ 21' 49''.$$

Aplicînd logaritmii, găsim: $P \approx 94{,}21$ cm.

Pentru a calcula aria poligonului putem folosi triunghiul dreptunghic AOL, format prin ducerea perpendicularei din A pe raza OB. Calculăm lungimea segmentului AL.

Avem:

$$AL = AO \sin \widehat{AOB} = AO \sin \frac{360^\circ}{11} \approx 15{,}2 \sin 32^\circ 43' 38''$$

și, prin urmare:

$$\text{aria } AOB = \frac{OB \cdot AL}{2} \approx \frac{15{,}2^2 \cdot \sin 32^\circ 43' 38''}{2}.$$

Rezultă că aria poligonului este dată de:

$$A = 11 \text{ aria } AOB \approx \frac{11 \cdot 15{,}2^2 \sin 32^\circ 43' 38''}{2}.$$

Aplicînd logaritmii, găsim: $A \approx 686{,}98$ cm².

3. Rezolvarea triunghiului dreptunghic cînd se dă o catetă b și un unghi C. Celelalte elemente sînt date de relațiile:

$$\boxed{B = 90° - C;\ c = b \operatorname{tg} C \quad \text{și} \quad a = \frac{b}{\cos C}}$$

Aplicație. *Între cele două manșoane cilindrice ale unui rulment trebuie introduse 25 de bile sferice, fiecare avînd același diametru egal cu* 18 mm.

Să se calculeze diametrele celor două manșoane.

Ne îndreptăm atenția asupra unei secțiuni perpendiculare pe axa comună a cilindrilor și care trece prin centrele bilelor sferice (fig. 71).

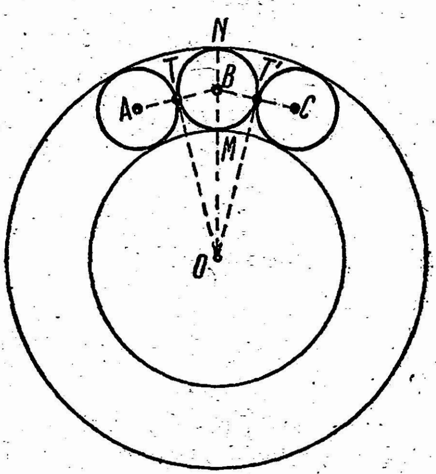


Fig. 71

Fie trei bile alăturate, cu centrele A, B, C tangente în punctele T și T'. Unghiul la centru $\widehat{TOT'}$, care cuprinde între tangentele OT, OT' una din cele 25 de secțiuni ale bilelor, este egal cu $\frac{360°}{25} = 14°24'$. În triunghiul dreptunghic OBT cunoaștem:

$$TB = \frac{18 \text{ mm}}{2} = 0{,}9 \text{ cm} \text{ și unghiul } TOB = \frac{14°24'}{2} = 7°12',$$

adică o catetă și un unghi; rezultă deci:

$$OB = \frac{9}{\sin 7°\,12'} \approx 7{,}18 \text{ cm}.$$

Notînd cu M şi N punctele de tangenţă ale bilei B cu cele două cercuri cu centrul în O, atunci razele r şi R ale manşoanelor cilindrice sînt date de expresiile:

$$r = OM = OB - MB = 7{,}18 - 0{,}9 = 6{,}28 \text{ cm} \quad \text{şi}$$

$$R = ON = OB + BN = 7{,}18 + 0{,}9 = 8{,}08 \text{ cm}.$$

4. **Rezolvarea triunghiului dreptunghic cînd se cunosc două laturi.** În cazul cînd sînt date cele două catete b şi c celelalte elemente se obţin din formulele cunoscute:

$$\boxed{\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}; \; C = 90° - B \text{ şi } a = \frac{b}{\sin B}}$$

În cazul cînd sînt date ipotenuza a şi o catetă b, celelalte elemente se deduc din egalităţile:

$$\boxed{c = \sqrt{(a - b)\,(a + b)}; \; \sin B = \frac{b}{a} \text{ şi } C = 90° - B}$$

Observare. Unghiul B se obţine cu o precizie mai mare cu ajutorul tabelelor, dacă folosim în locul formulei pentru $\sin B$ pe aceea care ne dă $\operatorname{tg} B$, adică:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{(a + b)\,(a - b)}}.$$

Aplicaţie. *Într-o fabrică trebuie instalate două maşini ale căror roţi au diametrele $d = 45$ cm şi $D = 65$ cm şi sînt legate printr-o curea de transmisie. Să se calculeze lungimea curelei, ştiind că distanţa dintre centrele roţilor va fi $a = 4{,}5$ m.*

Considerăm cazul cînd roţile figurate prin două cercuri cu centrele A şi B (fig. 72) trebuie să se învîrtească în acelaşi sens; atunci cureaua de transmisie se aşază pe porţiunile de arc de cerc CMC', DND' şi pe tangentele comune exterioare CD, $C'D'$. Lungimea curelei este dată de lungimea arcelor $\overset{\frown}{CMC'}$, $\overset{\frown}{DND'}$ şi a tangentelor exterioare CD, $C'D'$.

Ducem razele BC, AD ale punctelor de contact şi o paralelă AL la tangenta comună DC. Rezolvînd triunghiul dreptunghic ABL, în care cunoaştem laturile:

$AB = 4,5\ \text{m} = 450\ \text{cm}$ şi $BL = BC - AD = \frac{65}{2} - \frac{45}{2} = 10\ \text{cm}$, aflăm elementele cu care putem calcula lungimea curelei de transmisie.

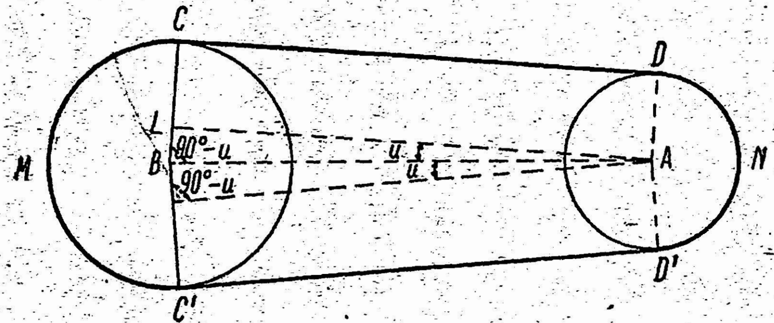


Fig. 72

Avem: $DC = AL = \sqrt{AB^2 - BL^2} = \sqrt{450^2 - 10^2} =$

$$= \sqrt{440 \cdot 460} \approx 449,88\ \text{cm}.$$

Notînd unghiul ascuţit din A cu u, găsim:

$$\sin u = \frac{BL}{AB} = \frac{10}{450} = \frac{1}{45}, \text{ apoi } u \approx 1°16'24''.$$

Arcul CMC' are în acest caz măsura $180° + 2u \approx 182°32'48''$ şi, prin urmare, lungimea sa este:

$$\frac{65}{2} \cdot \text{nr. de radiani corespunzători lui } 182°32'48'' \approx$$

$$\approx \frac{65}{2} \cdot 3,186040 \approx 103,54\ \text{cm},$$

iar arcul $\overset{\frown}{DND'}$ are mărimea $180° - 2u \approx 177°27'12''$, căruia îi corespunde lungimea:

$$\frac{45}{2} \cdot \text{nr. de radiani corespunzători lui } 177°27'12'' \approx$$

$$\approx \frac{45}{2} \cdot 3,097145 \approx 69,68\ \text{cm}.$$

Lungimea curelei este deci:

$$L \approx 103,54\ \text{cm} + 69,68\ \text{cm} + 2 \cdot 449,88\ \text{cm} = 1\,072,98\ \text{cm} \approx$$
$$\approx 10,73\ \text{m}.$$

Dacă roţile trebuie să se învîrtească în sens contrar, atunci ele se leagă printr-o curea de transmisie încrucişată, ca în figura 73, care se aşază pe arcele CMC', DND' şi pe tangentele interioare CD, $C'D'$ (C, D, C', D' — puncte de contact).

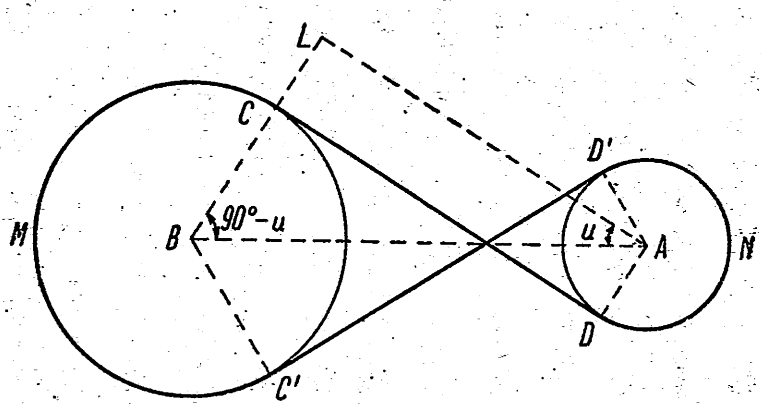


Fig. 73

Ducem din A o paralelă la tangenta CD, care întîlneşte prelungirea razei BC în punctul L. Prin rezolvarea triunghiului dreptunghic ABL, în care cunoaştem $AB = 450$ cm şi $BL = BC + AD = \frac{65}{2} + \frac{45}{2} = 55$ cm, obţinem elementele necesare pentru a afla lungimea curelei. Avem:

$$DC = AL = \sqrt{AB^2 - BL^2} = \sqrt{450^2 - 55^2},$$

adică: $DC \approx 446,62$ cm.

Notînd unghiul ascuţit din A cu u, găsim

$$\sin u = \frac{BL}{BA} = \frac{55}{450}; \; u \approx 7°1'13''.$$

Arcul $\overparen{CMC'}$ are lungimea:

$\frac{65}{2}$ · nr. de radiani corespunzători lui $(180° + 2u) \approx$

$$\approx \frac{65}{2} \cdot 3,386743 \approx 110,07 \text{ cm},$$

iar arcul $\overset{\frown}{DND'}$ are lungimea:

$$\frac{45}{2} \cdot \text{nr. de radiani corespunzători lui } (180° + 2u) \approx$$

$$\approx \frac{45}{2} \cdot 3{,}386743 \approx 76{,}20 \text{ cm}.$$

Lungimea curelei este deci:

$$L = 110{,}07 \text{ cm} + 76{,}20 \text{ cm} + 2 \cdot 446{,}62 \text{ cm} = 1079{,}51 \text{ cm} \approx$$
$$\approx 10{,}80 \text{ m}.$$

O b s e r v a r e. Pentru a calcula mai repede lungimea unei curele de transmisie pentru două roți de raze r, R și distanța centrelor a, tehnicienii folosesc formule aproximative.

Astfel de formule sînt:

a) pentru roți ce se învîrtesc în același sens:

$$L \approx \pi(R + r) + 2a + \frac{(R - r)^2}{a};$$

b) pentru roți ce se învîrtesc în sens contrar:

$$L \approx \pi(R + r) + 2a + \frac{(R + r)^2}{a}.$$

Exercițiu aplicativ. Să se refacă calculele din aplicația precedentă folosind formulele aproximative și să se compare rezultatele.

Relații între elementele unui triunghi oarecare

5. Mărimea unei coarde. Să considerăm coarda AB în cercul de rază R (fig. 74) și α măsura în grade a arcului $\overset{\frown}{AMB}$, cel mai mic dintre arcele cu extremitățile în A și B.

Ducînd diametrul AOC și unind B cu C, se formează triunghiul dreptunghic ABC, al cărui unghi ascuțit C are ca măsură jumătatea arcului $\overset{\frown}{AMB}$, adică $\frac{\alpha}{2}$.

Avem: $AB = AC \sin C = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \frac{\overset{\frown}{AMB}}{2}.$

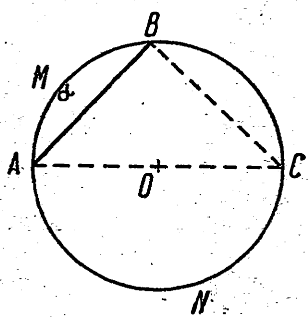


Fig. 74

Dacă ținem seama că:

$$\overset{\frown}{ANB} + \overset{\frown}{BMA} = 360°,$$

avem:
$$\frac{\overset{\frown}{BMA}}{2} = 180° - \frac{\overset{\frown}{ANB}}{2}$$

și deci:
$$\sin\frac{\overset{\frown}{BMA}}{2} = \sin\frac{\overset{\frown}{ANB}}{2},$$

iar:

$$\boxed{AB = 2R\sin\frac{\overset{\frown}{BMA}}{2} = 2R\sin\frac{\overset{\frown}{ANB}}{2}}$$

de unde rezultă:

Lungimea unei coarde dintr-un cerc este egală cu produsul dintre lungimea diametrului cercului și sinusul jumătății oricărui din cele două arce care au extremități comune cu coarda.

6. **Teorema sinusurilor.** Fie ABC un triunghi oarecare ale cărui unghiuri au mărimi pe care le însemnăm cu A, B, C, iar laturile opuse unghiurilor A, B, C au lungimi notate respectiv $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$. Vom stabili diferite relații între laturile și unghiurile triunghiului. Considerăm cercul O circumscris triunghiului ABC și a cărui rază o însemnăm cu R (fig. 75). Arcele corespunzătoare unghiurilor A, B, C au respectiv măsurile $\overset{\frown}{BA'C} = 2A$, $\overset{\frown}{CB'A} = 2B$ și $\overset{\frown}{AC'B} = 2C$. Pe baza celor spuse în paragraful precedent, avem:

$$a = 2R\sin A;$$
$$b = 2R\sin B \text{ și } c = 2R\sin C$$

și, prin urmare:

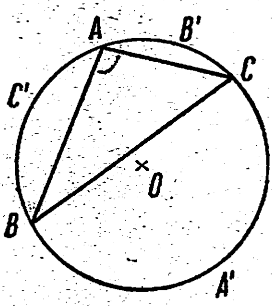


Fig. 75

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

de unde rezultă teorema:

În orice triunghi, laturile sînt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse, iar cîtul constant dintre o latură și sinusul unghiului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.

7. **Teorema cosinusului.** Să exprimăm o latură a unui triunghi cu ajutorul celorlalte două și al unghiurilor adiacente. În cazul cînd punctul D, piciorul perpendicularei coborîte din A pe BC, cade între B și C (fig. 76, *a*), avem:

$$a = BC = BD + DC = c \cos B + b \cos C,$$

iar atunci cînd piciorul D al perpendicularei cade pe prelungirea laturii BC (fig. 76,*b*), se obține:

$$a = BC = DC - DB = b \cos C - c \cos (180° - B);$$

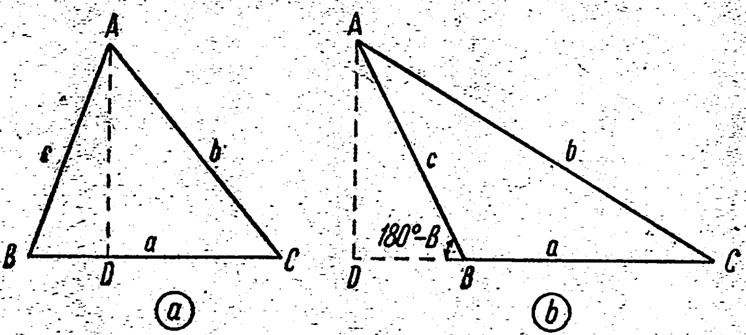


Fig. 76

Înlocuind $\cos (180° - B) = -\cos B$, rezultă că și în acest caz avem:

$$\boxed{a = b \cos C + c \cos B} \qquad (1)$$

Permutînd circular literele a, b, c și A, B, C, obținem:

$$\boxed{b = c \cos A + a \cos C} \qquad (2)$$

și:

$$\boxed{c = a \cos B + b \cos A} \qquad (3)$$

Înmulţind membru cu membru egalităţile (1), (2), (3) respectiv cu a, $-b$, $-c$ şi apoi adunînd se obţine:

$$a^2 - b^2 - c^2 = a(b\cos C + c\cos B) - b(c\cos A + a\cos C) -$$
$$- c(a\cos B + b\cos A) = -2\,bc\cos A, \text{ adică}$$

teorema cosinusului:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A}$$

sau, prin permutări circulare, deducem:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C.$$

Rezultă teorema: *Pătratul unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi, minus dublul produsului dintre aceste două laturi şi cosinusul unghiului cuprins între ele (laturile fiind exprimate prin aceleaşi unităţi de lungime).*

O b s e r v a r e a I. Teorema cosinusului înglobează într-o singură exprimare teorema lui Pitagora generalizată, cunoscută din *Geometria* clasa a IX-a.

O b s e r v a r e a II. Dacă în formula obţinută, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, punem în loc de a, b, c, respectiv $2R\sin A, 2R\sin B, 2R\sin C$ şi simplificăm cu $4R^2$, obţinem:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A, \text{ o identitate}$$

care leagă trei unghiuri oarecare, A, B, C, între care avem relaţia $A + B + C = 180°$.

8. **Teorema tangentelor.** Ţinînd seama că $a = 2R\sin A$ şi $b = 2R\sin B$, deducem:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2R(\sin A - \sin B)}{2R(\sin A + \sin B)} = \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} : \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$

sau:
$$\boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}}$$

relaţie care exprimă concis teorema tangentelor: *raportul dintre diferenţa şi suma a două laturi ale unui triunghi oarecare este egal cu raportul dintre tangenta semidiferenţei unghiurilor opuse celor două laturi şi tangenta semisumei aceloraşi unghiuri.*

Observare. Formula obţinută se foloseşte în practica rezolvărilor de triunghiuri înlocuind $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=$ $=\operatorname{tg}\frac{180^\circ-C}{2}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ după care formula devine:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}$$

Prin permutări circulare, deducem:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}&=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\\ \operatorname{tg}\frac{C-A}{2}&=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\end{aligned}}$$

9. **Unghiuri în funcţie de laturi.** Formulele stabilite (IV—7) permit calculul unghiurilor în funcţie de laturi. Astfel, din relaţia

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$$

deducem:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}.$$

Această formulă practică, pentru cazul cînd a, b, c se exprimă prin numere cu puţine cifre, nu este comodă în alte împrejurări; de aceea se înlocuieşte cu altele deduse din ea, dar care sînt calculabile prin logaritmi.

În acest scop se calculează:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=$$

$$=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=$$

$$=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

şi:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=$$

$$=\frac{(b^2+c^2+2bc)-a^2}{4bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}=$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}.$$

Folosind notaţia $a+b+c=2p$, atunci $b+c-a=$ $=2(p-a)$, $a+c-b=2(p-b)$ şi $a+b-c=2(p-c)$, iar formulele de mai sus devin:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4bc}$$

sau:

$$\boxed{\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$$

şi:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}$$

sau:

$$\boxed{\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}$$

Din ultimele formule obținem prin împărțire:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}:\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}:\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

sau:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}$$

În mod analog avem:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}};\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}};\\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\end{gathered}}$$

și

$$\boxed{\begin{gathered}\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}};\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}};\\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{gathered}}$$

unde $p=\frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului ale cărui laturi sînt a, b, c.

10. Aria triunghiului. Sînt multe formule care ne dau aria unui triunghi oarecare. Dăm pe cele mai des întîlnite în practică.

Considerăm un triunghi oarecare ABC (fig. 77). Din B se coboară perpendiculara BD pe latura opusă. Din formula pentru aria S a triunghiului:

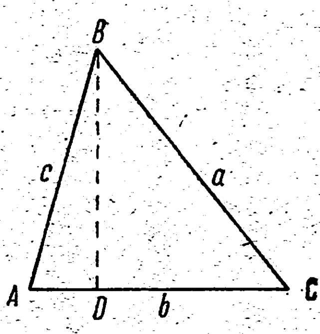


Fig. 77

$$S=\frac{AC\cdot BD}{2},$$

în care înlocuim $AC=b$ și $BD=c\sin A$, deducem :

$$\boxed{S = \frac{bc \sin A}{2}} \tag{1}$$

Analog avem :

$$\boxed{S = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{ab \sin C}{2}}$$

Acestea sînt formulele *care dau aria unui triunghi în funcție de două laturi și unghiul cuprins între ele.*

Dacă înlocuim în $S = \frac{ac \sin B}{2}$ pe c în funcție de a și două unghiuri, scos din teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, obținem :

$$S = \frac{a \cdot \frac{a \sin C}{\sin A} \cdot \sin B}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$$

sau :

$$\boxed{S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)}} \tag{2}$$

care exprimă aria unui triunghi în funcție de o latură și unghiurile alăturate ei.

Înlocuind în formula (1) pe $\sin A$ prin $2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$, obținem :

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}.$$

În aceasta din urmă înlocuim pe $\sin \frac{A}{2}$ și $\cos \frac{A}{2}$ în funcție de laturi (IV—9), de unde deducem :

$$S = bc \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

sau :

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \tag{3}$$

Aceasta este formula lui Heron, cunoscută şi din geometrie; *ea ne dă aria triunghiului în funcţie de laturi.*

Razele cercurilor: circumscris, înscris şi exînscrise

11. Raza cercului circumscris unui triunghi oarecare. Din teorema sinusurilor (IV—6) avem:

$$a = 2R \sin A \tag{1}$$

$$\text{deci: } R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

unde R este raza cercului circumscris. Înmulţind ambii membri ai egalităţii (1) cu bc şi ţinînd seama că $bc \sin A = 2S$, obţinem succesiv:

$$abc = 2R\, bc \sin A \quad \text{sau} \quad abc = 4RS,$$

de unde rezultă:

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

formulă care *ne dă raza cercului circumscris în funcţie de laturile triunghiului.*

12. Raza cercului înscris într-un triunghi oarecare. Centrul I al cercului înscris într-un triunghi ABC este situat la intersecţia bisectoarelor interioare (fig. 78). Ducînd perpendicularele ID, IE, IF pe laturi, ele determină segmentele BD, DC, CE, EA, AF, FB, egale două cîte două ca tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc

($AE=AF$; $BF=BD$; $CD=CE$)

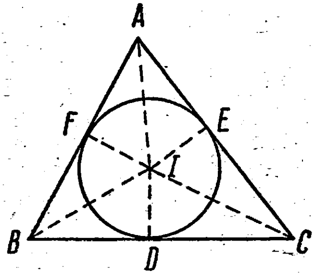


Fig. 78

Rezultă că suma a trei din segmentele neegale este egală cu semiperimetrul p al triunghiului. Aşadar, $BD + DC + AE = p$, dar cum: $BD + DC = a$, rezultă că: $AE = AF = p - a$. La fel avem:

$$BD = BF = p - b \quad \text{şi} \quad CD = CE = p - c.$$

Din triunghiul dreptunghic IAE, în care avem $\widehat{IAE} = \frac{A}{2}$ şi $AE = p - a$, deducem că raza r a cercului înscris, care este reprezentată de cateta IE, este dată de relaţia:

$$IE = AE \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

sau:

$$\boxed{r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}}$$

La fel avem:

$$\boxed{r = (p - b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p - c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}}$$

Înlocuind în expresia razei cercului înscris pe $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ în funcţie de laturi (IV—9), obţinem:

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p - a) \sqrt{\frac{(p - b)\ (p - c)}{p\,(p - a)}} =$$

$$= (p - a) \frac{\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}}{p(p - a)}$$

sau:

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

expresie simplă, care dă raza cercului înscris în funcţie de aria S şi semiperimetrul p.

Să aplicăm prima formulă la calcularea razei cercului înscris într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza a şi catetele b, c.

În acest scop înlocuim mai sus pe A cu $90°$, după care obţinem:

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{90°}{2} = p - a = \frac{b + c - a}{2}$$

13. Razele cercurilor exînscrise unui triunghi oarecare. Centrul I_a al cercului exînscris tangent laturii a este situat la intersecţia bisectoarelor exterioare ale vîrfurilor B şi C şi pe bisectoarea interioară a vîrfului A (fig. 79). Ducînd perpendicularele I_aD, I_aE, I_aF pe laturi, ele determină segmentele AE, AF, BD, BF, CD, CE, egale două cîte două ca tangente exterioare duse din acelaşi punct la un cerc:

$$(AE = AF;\ BD = BF;\ CD = CE).$$

Rezultă că cele două tangente egale AF şi AE formează împreună perimetrul triunghiului şi deci:

$$AF = AE = p,$$

iar: $$BD = BF = AF - AB = p - c$$

şi: $$CD = CE = AE - AC = p - b.$$

În triunghiul dreptunghic I_aAE, unghiul ascuţit din A valorează $\frac{A}{2}$, iar cateta AE este egală cu p. Rezultă deci că raza r_a a cercului exînscris laturii a, care este reprezentată de cateta I_aE, este dată de relaţia:

$$I_aE = AE\,\mathrm{tg}\frac{A}{2};$$

sau:

$$\boxed{r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}}$$

Dacă luăm în considerare triunghiul dreptunghic I_aCE, în care unghiul ascuţit I_aCE valorează $\frac{180° - C}{2} = 90° - \frac{C}{2}$ şi cateta CE este $p - b$, atunci avem:

$$I_aE = CE\,\mathrm{tg}\left(90° - \frac{C}{2}\right),$$

sau: $$\boxed{r_a = (p - b)\,\mathrm{ctg}\frac{C}{2}}$$

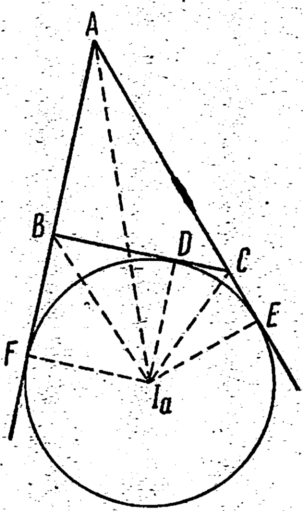


Fig. 79

La fel, dacă luăm în considerare triunghiul dreptunghic I_aFB, găsim:

$$\boxed{r_a = (p - c)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}}$$

Procedînd în acelaşi mod cu celelalte cercuri exînscrise laturilor b şi c, ale căror raze le notăm respectiv cu r_b şi r_c, aflăm:

$$\boxed{\begin{aligned} r_b &= p\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-a)\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = (p-c)\operatorname{ctg}\frac{A}{2} \\ r_c &= p\operatorname{tg}\frac{C}{2} = (p-b)\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = (p-a)\operatorname{ctg}\frac{B}{2} \end{aligned}}$$

Dacă înlocuim în formula $r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ expresia lui $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ în funcţie de laturi, obţinem:

$$r_a = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a},$$

sau:

$$\boxed{r_a = \frac{S}{p-a}}$$

o formulă simplă, *care dă raza cercului exînscris laturii a în funcţie de aria S şi segmentul $p - a$.*

14. **Relaţii între razele cercurilor circumscris, înscris şi exînscrise.** Între razele acestor cercuri ale unui triunghi oarecare există anumite relaţii. Astfel, *suma inverselor razelor cercurilor exînscrise este egală cu inversul razei cercului înscris*. Într-adevăr, avem:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p - (a+b+c)}{S} =$$

$$= \frac{3p - 2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

De asemenea, demonstrăm că *diferenţa între suma razelor cercurilor exînscrise şi raza cercului înscris este egală cu de patru ori raza cercului circumscris.*

Avem:
$$r_a + r_b = \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} = \frac{S(p-a+p-b)}{(p-a)(p-b)} =$$
$$= \frac{Sc}{(p-a)(p-b)}$$
şi:
$$r_c - r = \frac{S}{p-c} - \frac{S}{p} = \frac{S(p-p+c)}{p(p-c)} = \frac{Sc}{p(p-c)},$$
de unde rezultă:
$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{Sc}{(p-a)(p-b)} + \frac{Sc}{p(p-c)} =$$
$$= \frac{Sc[p(p-c) + (p-a)(p-b)]}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
sau:
$$r_a + r_b + r_c - r = \frac{Sc(p^2 - pc + p^2 - ap - bp + ab)}{S^2} = \frac{abc}{S} = 4R,$$
ceea ce trebuia dovedit.

Rezolvarea triunghiurilor oarecare

15. Se ştie din geometrie că, în general, un triunghi este bine determinat cînd i se dau trei elemente distincte. Dintre cele trei unghiuri numai două sînt distincte, pentru că între ele avem relaţia $A + B + C = 180°$, care determină măsura unui unghi în funcţie de măsura celorlalte două. De aici rezultă că se pot da cel mult două unghiuri printre datele necesare rezolvării unui triunghi.

A rezolva un triunghi înseamnă a găsi măsurile celorlalte elemente cînd se dau trei elemente distincte ale triunghiului. Relaţiile trigonometrice pe care le-am stabilit între laturile şi unghiurile unui triunghi dau posibilitatea de a face aceste rezolvări prin calcul, folosind şi tabelele trigonometrice.

În cele ce urmează, vom considera patru cazuri de rezolvare, care sînt fundamentale în sensul că servesc şi în multe alte cazuri de rezolvare.

Cazul I. *Rezolvarea unui triunghi cînd se dă o latură şi două unghiuri alăturate. Caz numeric :* $a = 273$ m, $B = 57°53'21''$ şi $C = 24°14'15''$.

Rezolvare. Fiind date a, B, C, elementele de aflat sînt A, b, c şi aria S. Unghiul A se obţine din $A + B + C = 180°$;
$$A = 180° - (B + C).$$

Laturile b şi c se deduc din teorema sinusurilor:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

de unde rezultă:

$$\boxed{b = \frac{a \sin B}{\sin A}, c = \frac{a \sin C}{\sin A}}$$

Aria este dată de formula (IV—10):

$$\boxed{S = \frac{bc \sin A}{2}}$$

Cazul numeric ne dă: $A = 180° - (57°53'21'' + 24°14'15'') = 97°52'24''$. Deoarece $A > 90°$, vom lua $\sin A = \sin(180° - A) = \sin 82°7'36''$. Pentru calculul lui b, c şi S avem nevoie şi de logaritmii lui a, $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

În tabele găsim: $\lg a = 2{,}43616$; $\lg \sin A = \overline{1}{,}99589$; $\lg \sin B = \overline{1}{,}92790$; $\lg \sin C = \overline{1}{,}61333$; $\lg 2 = 0{,}30103$.

Calculul lui b

Avem: $\lg b = \lg a + \lg \sin B + \operatorname{colg} \sin A$

$$\begin{array}{r} 2{,}43616\ + \\ \overline{1}{,}92790 \\ 0{,}00411 \\ \hline \lg b = 2{,}36817 \end{array}$$

Rezultă: $b \approx 233{,}43$ m.

Calculul lui c

Avem: $\lg c = \lg a + \lg \sin C + \operatorname{colg} \sin A$

$$\begin{array}{r} 2{,}43616\ + \\ \overline{1}{,}61333 \\ 0{,}00411 \\ \hline \lg c = 2{,}05360 \end{array}$$

Rezultă: $c \approx 113{,}13$ m.

Calculul lui S

Avem : $\lg S = \lg b + \lg c + \lg \sin A + \operatorname{colg} 2$

$$\begin{array}{rl} & 2{,}36817 + \\ & 2{,}05360 \\ & \overline{1}{,}99589 \\ & \overline{1}{,}69897 \\ \hline \lg S = & 4{,}11663 \end{array}$$

Rezultă : $S \approx 13\,080$ m^2.

16. **Cazul II.** *Rezolvarea unui triunghi cînd se cunosc două laturi și unghiul cuprins între ele. Caz numeric:* $b = 1\,213$ m; $c = 1\,572$ m; $A = 53°18'24''$.

Rezolvare. Fiind date b, c, A, avem de aflat B, C, a, S. Pentru a găsi unghiurile B, C avem nevoie de două ecuații. Ele sînt :

$$\boxed{\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}$$

O dată B, C aflate, latura a se scoate din teorema sinusurilor :

$$\boxed{a = \frac{b \sin A}{\sin B}}$$

Aria S este dată de :

$$\boxed{S = \frac{bc \sin A}{2}}$$

În cazul numeric dat :

$$\frac{B+C}{2} = 90° - 26°39'12'' = 63°20'48'' \text{ și}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b}\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{1\,572 - 1\,213}{1\,572 + 1\,213}\operatorname{ctg}\frac{53°18'24''}{2} =$$

$$= \frac{359}{2\,785}\operatorname{ctg} 26°39'12''.$$

Aplicînd logaritmii, obținem:

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C-B}{2} = \lg 359 + \operatorname{colg} 2\,785 + \lg \operatorname{ctg} 26°39'12'' =$$
$$= 2,55509 + \bar{4},55517 + 0,29936 = \bar{1},40962,$$

de unde rezultă:

$\frac{C-B}{2} = 14°24'11''$, care, împreună cu $\frac{C+B}{2} = 63°20'48''$,

dau:

$$C = 63°20'48'' + 14°24'11'' = 77°44'59''$$

și:

$$B = 63°20'48'' - 14°24'11'' = 48°56'37''.$$

Pentru aflarea laturii a, avem:

$$\lg a = \lg b + \lg \sin A + \operatorname{colg} \sin B = \lg 1\,213 +$$
$$+ \lg \sin 53°18'24'' + \operatorname{colg} \sin 48°56'37''$$

sau:

$$\lg a = 3,08386 + \bar{1},90409 + 0,12259 = 3,11054.$$

Rezultă: $a \approx 1\,289,8$ m.

Pentru a afla aria S, avem:

$$\lg S = \lg b + \lg c + \lg \sin A + \operatorname{colg} 2 = \lg 1\,213 +$$
$$+ \lg 1\,572 + \lg \sin 53°18'24'' + \operatorname{colg} 2,$$

sau:

$$\lg S = 3,08386 + 3,19645 + \bar{1},90409 + \bar{1},69897 = 5,88337,$$

de unde rezultă:

$$S \approx 764\,483 \text{m}^2 \approx 76,4483 \text{ ha}.$$

Observare. Dacă b și c au puține cifre, latura a se poate calcula prin teorema cosinusului: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

17. **Cazul III.** *Rezolvarea unui triunghi cînd se dau două laturi și unghiul opus uneia din ele. Caz numeric:* $a = 197,3$ m, $b = 213,2$ m; $A = 37°15'23''$.

Rezolvare. Fiind date a, b, A, se cer calculate B, C, c, și S.

Aplicînd teorema sinusurilor, avem $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$, de unde rezultă:

$$\boxed{\sin B = \frac{b \sin A}{a}}$$

Pentru ca problema să fie posibilă, este necesar ca $\sin B \leqslant 1$; prin urmare:

$$a \geqslant b \sin A.$$

Pentru $a < b \sin A$ problema nu admite soluţie, iar pentru $a = b \sin A$ avem $\sin B = 1$ şi deci $B = 90°$, adică o singură soluţie. În acest caz, $C = 90° - A$.

Cînd avem $a > b \sin A$, atunci corespund pentru B două soluţii: $B_1 < 90°$ şi $B_2 = 180° - B_1 > 90°$.

Cunoscînd soluţiile pentru unghiul B, putem afla şi unghiul C. Astfel, cînd luăm pentru B soluţia B_1, unghiurile triunghiului vor fi:

a) A, B_1 şi $C_1 = 180° - A - B_1$, iar în cazul cînd luăm pentru B soluţia $B_2 = 180° - B_1$, atunci unghiurile triunghiului vor fi:

b) A, B_2 şi $C_2 = 180° - A - (180° - B_1) = B_1 - A$.

Pentru ca soluţiile C_1 şi C_2 să fie acceptabile, este necesar ca ele să fie cuprinse între $0°$ şi $180°$. Examinarea soluţiei C_2 ne arată că ea este acceptabilă dacă $A < B_1 < 90°$ şi inacceptabilă dacă $A > B_1$.

Sîntem astfel conduşi să examinăm soluţiile în cazurile cînd $A < 90°$, $A = 90°$ sau $A > 90°$.

1) Dacă $A < 90°$, atunci $A + B_1 < 180°$, astfel că soluţia C_1 este acceptabilă; pentru ca şi soluţia C_2 să fie acceptabilă, este necesar să avem $A < B_1$ sau $\sin A < \sin B_1$ (pentru că ambele unghiuri A şi B_1 sînt ascuţite), însă $\sin B_1 = \frac{b \sin A}{a}$, deci $\sin A < \frac{b \sin A}{a}$ sau $a < b$.

Se vede deci că, în acest caz ($A < 90°$), soluţia C_2 nu este acceptabilă, dacă $a \geqslant b$. În această situaţie, numai C_1 este acceptabilă.

2) $A = 90°$, atunci C_2 nu este acceptabilă, iar $C_1 = 180° - A - B_1 = 90° - B_1$ e acceptabilă, dacă $a > b \sin A$, adică $a > b$. Dacă $a \leqslant b$, n-avem soluţie.

3) $A > 90°$, atunci soluţia C_2 este evident inacceptabilă, pentru că $C_2 = B_1 - A < 0$. Să vedem ce se întîmplă cu soluţia $C_1 = 180° - A - B_1$. Ca aceasta să fie acceptabilă, este necesar ca $C_1 > 0$ sau $180° - A > B_1$.

Deoarece $180° - A$ şi B_1 sînt ambele unghiuri ascuţite, putem pune, în loc de $180° - A > B_1$, $\sin(180° - A) > \sin B_1$ sau $\sin A > \sin B_1$, adică $\sin A > \frac{b \sin A}{a}$, sau $a > b$.

Aşadar, în cazul $A > 90°$ avem o singură soluţie, dacă $a > b$. În cazul cînd $a \leqslant b$ nu avem soluţie.

Rezumînd discuţia, avem următorul tabel:

$A < 90°$	$a < b \sin A$	0 soluţii (nici o soluţie)
	$a = b \sin A$	1 soluţie ($B = 90°$)
	$b \sin A < a < b$	2 soluţii
	$a \geqslant b$	1 soluţie
$A = 90°$	$a > b$	1 soluţie
	$a \leqslant b$	0 soluţii (nici o soluţie)
$A > 90°$	$a > b$	1 soluţie
	$a \leqslant b$	0 soluţii (nici o soluţie).

În cazul numeric dat avem $A < 90°$. Dacă punem $x = b \sin A$, deducem: $\lg x = \lg b + \lg \sin A = \lg 213{,}2 + \lg \sin 37°15'23'' = 2{,}32879 + \overline{1},78203 = 2{,}11082$ şi, prin urmare, $b \sin A = 129{,}06$. Avem deci $b \sin A < a < b = 213{,}2$; astfel că problema admite două soluţii.

Să determinăm cele două soluţii: aflăm B_1 şi B_2 din $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Pentru aceasta să calculăm:

$\lg \sin B = \lg(b \sin A) - \lg a = 2{,}11082 + \overline{3},70487 = \overline{1},81569$ şi, prin urmare:

$$B_1 \approx 40°51'24''; \quad B_2 \approx 180° - B_1 = 139°8'36''.$$

Soluţia I. $B_1 \approx 40°51'24''$; $C_1 = 180° - (37°15'23'' + 40°51'24'') = 101°53'13''$; $c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$;

$\lg c_1 = \lg a + \lg \sin C_1 + \operatorname{colg} \sin A = 2{,}29513 + \overline{1},99058 + 0{,}21797 = 2{,}50368$ şi, prin urmare, $c_1 = 318{,}92$ m.

Aria este dată de $S_1 = \frac{ab \sin C_1}{2}$; $\lg S_1 = \lg a + \lg b + \lg \sin C_1 + \operatorname{colg} 2 = 2{,}29513 + 2{,}32879 + \overline{1}{,}99058 + \overline{1}{,}69897 = 4{,}31347$, de unde rezultă: $S_1 \approx 20\,581\ m^2 = 2{,}0581$ ha.

Soluția II. $B_2 \approx 139°8'36''$; $C_2 \approx B_1 - A = 40°51'24'' - 37°15'23'' = 3°36'1''$; $c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A}$; $\lg c_2 = 2{,}29513 + \overline{2}{,}79792 + 0{,}21797 = 1{,}31102$, de unde rezultă: $c_2 \approx 20{,}465$ m.

Aria S_2 este dată de $S_2 = \frac{ab \sin C_2}{2}$.

Avem: $\lg S_2 = \lg a + \lg b + \lg \sin C_2 + \operatorname{colg} 2 = 2{,}29513 + 2{,}32879 + \overline{2}{,}79792 + \overline{1}{,}69897 = 3{,}12081$ și, prin urmare $S_2 = 1320{,}7\ m^2$.

18. **Cazul IV.** *Rezolvarea unui triunghi cînd se cunosc cele trei laturi ale sale. Caz numeric:* $a = 127{,}3$ m; $b = 223{,}1$ m; $c = 197{,}2$ m.

Rezolvare. Folosim formulele care dau unghiurile în funcție de laturi; una din ele este $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; pe aceasta o transformăm dîndu-i o formă mai comodă pentru calculul unghiurilor. Avem succesiv:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2(p-a)^2}} = \frac{S}{p(p-a)}.$$

Putem deci scrie:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{(S:p)}{(p-a)}};\ \text{analog avem:}\ \boxed{\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{(S:p)}{(p-b)}}$$

$$\text{și: } \boxed{\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{(S:p)}{(p-c)}}$$

Cu aceste formule vom calcula unghiurile, iar aria S se calculează cu formula:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

O b s e r v a r e. Pentru calculul unghiurilor unui triunghi, atunci cînd se cunosc laturile, folosim formulele care dau $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, pentru că acestea oferă o precizie mai mare la obţinerea unghiurilor şi necesită mai puţine calculări de logaritmi decît dacă am utiliza formulele pentru $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$.

Cazul numeric: Avînd $a = 127{,}3$ m; $b = 223{,}1$ m şi $c = 197{,}2$ m, rezultă $p = \frac{a+b+c}{2} = 273{,}8$; $p - a = 146{,}5$; $p - b = 50{,}7$; $p - c = 76{,}6$, iar logaritmii acestora: $\lg p = 2{,}43743$; $\lg(p-a) = 2{,}16584$; $\lg(p-b) = 1{,}70501$; $\lg(p-c) = 1{,}88423$.

Calculăm întîi S; avem:

$$\lg S = \frac{\lg p + \lg(p-a) + \lg(p-b) + \lg(p-c)}{2} =$$

$$= \frac{2{,}43743 + 2{,}16584 + 1{,}70501 + 1{,}88423}{2} = 4{,}09625,$$

de unde rezultă: $S \approx 12\,481$ m² $= 1{,}2481$ ha.

Pentru a afla unghiurile, calculăm $\lg(S:p) = \lg S - \lg p = 4{,}09625 - 2{,}43743 = 1{,}65882$.

Calculul unghiului A:

$$\text{Avem: } \lg \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \lg(S:p) + \operatorname{colg}(p-a) = \begin{array}{r} 1{,}65882\ + \\ \bar{3}{,}83416 \\ \hline \bar{1}{,}49298 \end{array}$$

de unde rezultă: $\frac{A}{2} \approx 17°17'3''$ sau $A \approx 34°34'6''$.

Calculul unghiului B:

Avem:

$$\lg \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \lg(S:p) + \operatorname{colg}(p-b) = \begin{array}{r} 1{,}65882\ + \\ \bar{2}{,}29499 \\ \hline \bar{1}{,}95381 \end{array}$$

de unde rezultă: $\frac{B}{2} \approx 41°57'31''$ sau $B \approx 83°55'2''$.

Calculul unghiului C:

Avem:

$$\lg \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \lg(S:p) + \operatorname{colg}(p-c) = \begin{array}{r} 1{,}65882\ + \\ \bar{2}{,}11577 \\ \hline \bar{1}{,}77459 \end{array}$$

de unde rezultă: $\frac{C}{2} \approx 30°45'25''$ sau $C \approx 61°30'50''$.

Ca verificare trebuie să avem: $A + B + C \approx 180°$. Într-adevăr, $A + B + C = 34°34'6'' + 83°55'2'' + 61°30'50'' = 179°59'58''$. Acest rezultat diferă de $180°$ cu $2''$, eroare datorită faptului că tabelele ne dau valorile aproximative ale funcțiilor trigonometrice pînă la sutimi de miimi.

Observare. În cazul cînd laturile au expresii numerice simple, este de preferat să se afle unghiurile triunghiului cu ajutorul teoremei cosinusului.

Exemplu: să se afle unghiurile unui triunghi ale cărui laturi sînt: $a = 4$ m; $b = 5$ m; $c = 6$ m.

Avem: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

de unde rezultă: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

La fel obținem: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{9}{16}$

și $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{8}$.

Căutînd în tabele, găsim: $A \approx 41°24'35''$; $B \approx 55°46'16''$

$C \approx 82°49'9''$.

Cazuri diverse de rezolvări de triunghiuri

19. După cum se știe din geometrie, un triunghi poate fi determinat și cu altfel de elemente decît laturi și unghiuri. Rezolvarea în aceste cazuri urmărește ca, pe baza datelor problemei, să găsească elementele principale, reducînd problema la unul din cazurile fundamentale tratate anterior. Exemplele care urmează vor arăta mersul rezolvării unui triunghi în astfel de cazuri.

Problema I. *Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a și raza cercului înscris r.*

Rezolvare. Urmărim să obținem unghiurile ascuțite B și C ale triunghiului, pentru a putea calcula laturile cu formulele: $b = a \sin B$ și $c = a \sin C$. În acest scop formăm două ecuații cu necunoscutele B și C. Una din ele este $B + C = 90°$, a doua o aflăm ținînd seama de relația $r = \frac{b + c - a}{2}$ (IV — 12). Înlocuind $b = a \sin B$ și $c = a \sin C$, obținem:

$$r = \frac{a}{2}(\sin B + \sin C - 1)$$

sau:

$$\sin B + \sin C = 1 + \frac{2r}{a}.$$

Transformînd suma de sinusuri în produs, avem:

$$2 \sin\frac{B+C}{2} \cos\frac{B-C}{2} = \frac{a+2r}{a},$$

de unde rezultă: $2 \sin\frac{90°}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{a+2r}{a}$

sau.
$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{a+2r}{a\sqrt{2}}.$$

În cazul cînd $a + 2r \leqslant a\sqrt{2}$ sau $r \leqslant \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}$, putem obține: $\frac{B-C}{2} = \arccos\frac{a+2r}{a\sqrt{2}}$, care, împreună cu $B + C = 90°$, ne dau unghiurile B și C și, prin urmare, putem calcula pe b și c.

Problema II. *Să se rezolve un triunghi oarecare cunoscînd perimetrul $2p$ și unghiurile A, B, C.*

Rezolvare. Vom urmări aflarea laturilor a, b, c în funcție de elementele date.

Folosim în acest scop relațiile dintre laturi și sinusurile unghiurilor opuse:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$$
$$= \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

unde am aplicat o proprietate a șirului de rapoarte egale.

Ținînd seama că $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ (III — 25) și că $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, obținem:

$$a = \frac{2p \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} =$$

$$= \frac{2p \cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{p\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

La fel obţinem:

$$b=\frac{p\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad \text{şi} \quad c=\frac{p\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Aplicaţii diverse ale rezolvării triunghiurilor oarecare

20. Relaţiile stabilite între elementele unui triunghi oarecare au numeroase aplicaţii în multe domenii teoretice şi practice în mecanică, în fizică etc. În cele ce urmează vom da cîteva aplicaţii la geometria plană, la geometria în spaţiu şi la mecanică.

Probleme de geometrie plană

Aplicaţia I. *Să se exprime aria unui patrulater convex oarecare în funcţie de lungimile d_1 şi d_2 ale diagonalelor şi de unghiul φ format de ele.*

Ducînd diagonalele $AC = d_1$ şi $BD = d_2$, acestea se taie într-un punct O şi descompun patrulaterul în patru triunghiuri AOB, BOC, COD, DOA (fig. 80). Făcînd suma ariilor acestor triunghiuri, obţinem aria S a patrulaterului.

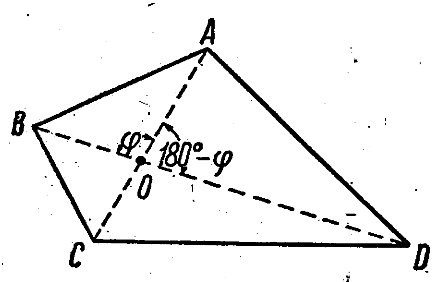


Fig. 80

Avem deci:

$$S=\frac{OA\cdot OB\sin\varphi}{2}+\frac{OB\cdot OC\sin(180^\circ-\varphi)}{2}+\frac{OC\cdot OD\sin\varphi}{2}+$$

$$+\frac{OD\cdot OA\sin(180^\circ-\varphi)}{2}.$$

Avînd în vedere că $\sin (180° - \varphi) = \sin \varphi$ şi dînd factor comun, deducem:

$$S = \frac{OB(OA + OC) \sin \varphi + OD(OA + OC) \sin \varphi}{2} =$$

$$= \frac{(OA + OC)(OB + OD) \sin \varphi}{2}$$

sau:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin \varphi}{2}.$$

Aplicaţia II. *Să se calculeze lungimile diagonalelor unui patrulater inscriptibil în funcţie de laturi şi să se deducă teorema lui Ptolemeu:*

Suma produselor laturilor opuse ale unui patrulater inscriptibil este egală cu produsul diagonalelor.

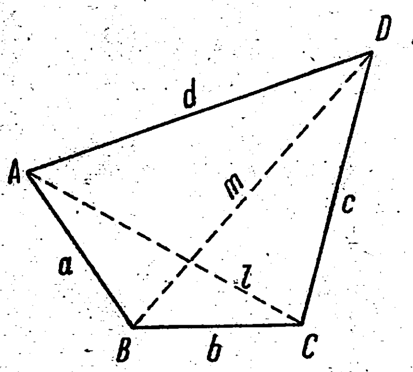


Fig. 81

Fie patrulaterul inscriptibil $ABCD$ (fig. 81) cu laturile $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ şi diagonalele $AC = l$, $BD = m$.

Aplicînd teorema cosinusului triunghiurilor ABC, ACD, obţinem:

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab}$$

$$\text{şi } \cos D = \frac{c^2 + d^2 - l^2}{2cd}.$$

Ţinînd seama că avem $\cos B = -\cos D$ pentru că $B + D = 180°$, rezultă:

$$\frac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab} = -\frac{c^2 + d^2 - l^2}{2cd}.$$

Urmează deci că avem:

$$cd\,(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) = (ab + cd)l^2$$

sau:

$$l = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.$$

La fel aflăm: $$m = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Efectuînd produsul lm, obţinem:

$$lm = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2(ad+bc)(ab+cd)}{(ab+cd)(ad+bc)}} = ac+bd,$$

relaţie care exprimă tocmai teorema lui Ptolemeu.

Observare. Tot din formulele de mai sus rezultă şi raportul dintre lungimile diagonalelor unui patrulater înscriptibil:

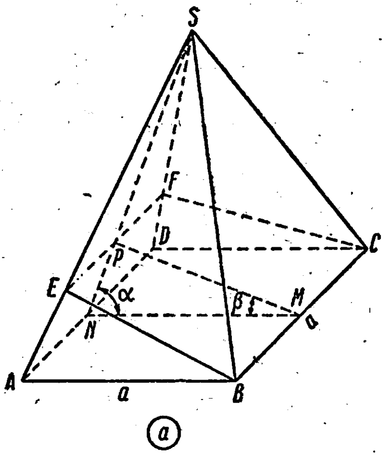
$$\frac{l}{m} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

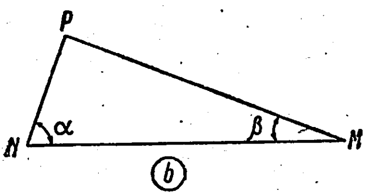
Probleme de geometrie în spaţiu

Aplicaţia I. *Într-o piramidă regulată patrulateră, unghiul diedru de la bază este egal cu α. Prin muchia acestui diedru se duce un plan care formează cu baza piramidei unghiul* $\beta < \alpha$ (fig. 82, *a*). *Să se determine aria secţiunii cunoscînd că latura bazei este egală cu a.*

Secţiunea $EFCB$, ce se formează prin ducerea planului prin muchia BC a diedrului de la bază, este un trapez isoscel. Ducînd prin vîrful S apotemele SM şi SN, se formează planul SMN, care este perpendicular pe baza $ABCD$, iar M, N şi P sînt respectiv mijloacele laturilor BC, AD şi EF.
(Elevii vor demonstra cele arătate mai sus pe baza cunoştinţelor de geometrie plană şi în spaţiu.)

Pentru a afla aria secţiunii, este necesar să obţinem lungimea segmentelor MP şi EF. În acest scop, calculăm elementele triunghiului NPM, reprezentat în figura 82, *b*. Unghiurile din N şi M sînt respectiv α şi β, iar segmentul NM este egal cu latura pătratului, adică cu a.





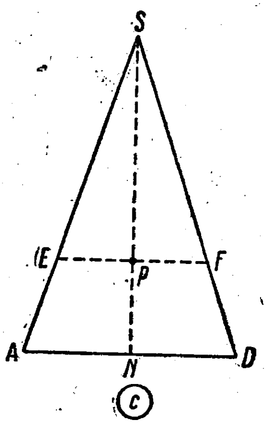


Fig. 82

Aplicînd teorema sinusurilor, avem:

$$\frac{NP}{\sin\beta} = \frac{MP}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}, \text{ de unde rezultă : } NP = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\text{şi } MP = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Din triunghiul isoscel SNM obţinem: $SN = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

Pentru a afla EF, scriem proporţionalitatea înălţimilor triunghiurilor isoscele SEF şi SAD, reprezentate în figura 82, *c*, cu bazele acestor triunghiuri:

$$\frac{EF}{AD} = \frac{SP}{SN} \text{ sau } \frac{EF}{a} = \frac{SN - NP}{SN} = 1 - \frac{\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}{\dfrac{a}{2\cos\alpha}}.$$

Făcînd calculele, deducem:

$$EF = a \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Acum cînd cunoaştem MP şi EF, putem afla aria secţiunii $EFBC$; avem:

$$S = \frac{BC + EF}{2} \cdot MP = \frac{a + a \cdot \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

După efectuarea calculelor şi a simplificărilor obţinem:

$$S = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

Aplicaţia II. *Cunoscînd unghiurile α, β, γ, formate de muchiile unui triedru, două cîte două, să se calculeze unghiurile diedre formate de feţele triedrului. Caz numeric:* $\alpha = 90°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 45°$.

Să considerăm un triedru format de planele BSC, CSA, ASB (fig. 83). Fiind date unghiurile $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA} = \beta$ şi $\widehat{ASB} = \gamma$, să calculăm cu ajutorul lor unghiurile diedre u, v, w, ale căror muchii sînt respectiv SA, SB, SC.

Calculăm unghiul diedru cu muchia SA. Luăm $SA = m$ şi din A ducem în planele ASB şi ASC perpendicularele BA şi CA pe muchia SA. Unghiul $BAC = u$ este, conform definiţiei, unghiul diedru cu muchia SA. Determinăm laturile triunghiului BAC, pentru a putea calcula apoi unghiul $BAC = u$. Din triunghiurile dreptunghice ASB şi ASC avem:

$m = SB \cos \gamma$; $AB = m \operatorname{tg} \gamma$;

$m = SC \cos \beta$; $AC = m \operatorname{tg} \beta$.

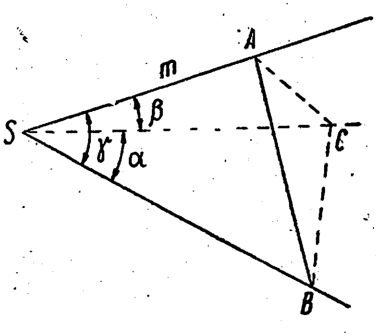


Fig. 83

Rezultă: $$BC^2 = SB^2 + CS^2 - 2SB \cdot CS \cos \alpha = \frac{m^2}{\cos^2 \gamma} + \frac{m^2}{\cos^2 \beta} - \frac{2m^2 \cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma},$$

iar din triunghiul BAC avem:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos u = m^2 \operatorname{tg}^2 \gamma + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 2m^2 \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \cos u.$$

Egalînd cele două expresii ale lui BC^2, obținem:

$$m^2\left(\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}-\frac{2\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}\right)=$$

$$=m^2\left(\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}-\frac{2\sin\beta\sin\gamma\cos u}{\cos\beta\cos\gamma}\right).$$

Simplificînd cu m^2 și grupînd termenii cu același numitor, avem:

$$\frac{1-\sin^2\beta}{\cos^2\beta}+\frac{1-\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\beta\sin\gamma\cos u)}{\cos\beta\cos\gamma}$$

sau:

$$1+1=\frac{2(\cos\alpha-\sin\beta\sin\gamma\cos u)}{\cos\beta\cos\gamma};$$

Împărțind ambii membri cu 2 și izolînd $\cos u$, obținem:

$$\cos u=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

La fel deducem:

$$\cos v=\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}\ \text{și}\ \cos w=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Cazul numeric ne dă:

$$\cos u=\frac{\cos 90^\circ-\cos 60^\circ\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ\sin 45^\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

de unde rezultă: $u\approx 125^\circ15'53''$;

$$\cos v=\frac{\cos 60^\circ-\cos 45^\circ\cos 90^\circ}{\sin 45^\circ\sin 90^\circ}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{de unde rezultă:}\ v=45^\circ;$$

$$\cos w=\frac{\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\cdot\cos 90^\circ}{\sin 60^\circ\sin 90^\circ}=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

de unde rezultă: $w\approx 35^\circ15'53''$.

21. Probleme de mecanică. Numeroase probleme de mecanică se pot rezolva folosind teoremele referitoare la relațiile între elementele unui triunghi oarecare, datorită faptului că rezultanta a două forțe concurente este diagonala paralelogramului construit pe cele două forțe. În următoarele aplicații se rezolvă unele din aceste probleme.

Aplicația I. *Să se exprime intensitatea R a rezultantei a două forțe ale căror intensități sînt P și Q și care fac între ele un unghi α. Caz numeric:* $P = 18$ kgf, $Q = 31$ kgf și $\alpha = 33°$.

Fie P și Q forțele în mărime, direcție și sens care au ca rezultantă R. Paralelogramul forțelor $ABCD$ (fig. 84) ne dă grafic mărimea, direcția și sensul rezultantei reprezentate prin segmentul orientat AC (v. *Fizica* clasa a VIII-a).

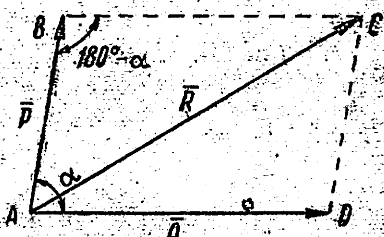


Fig. 84

Intensitatea rezultantei este reprezentată de lungimea segmentului AC din triunghiul ABC, în care celelalte laturi sînt: $AB = P$ (intensitate a forței P) și $BC = AD = Q$, iar unghiul dintre aceste laturi este $\widehat{ABC} = 180° - \alpha$. Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul ABC, avem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos(180° - \alpha)$$

sau:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha.$$

În cazul numeric dat, obținem:

$$R^2 = 18^2 + 31^2 + 2 \cdot 18 \cdot 31 \cos 33° = 324 + 961 + $$
$$+ 1\,116 \cdot 0{,}83867 \approx 2\,220{,}95$$

și, prin urmare: $R \approx \sqrt{2\,220{,}95} \approx 47{,}1$ kgf.

Aplicația II. *Două forțe concurente avînd intensitățile P și Q fac între ele un unghi α. Pentru ce valori ale acestui unghi este maximă și minimă intensitatea rezultantei celor două forțe?*

Din relația $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\alpha$, rezultă că R este maxim cînd $\cos\alpha$ are cea mai mare valoare, adică 1, ceea ce se întîmplă pentru $\alpha = 0$, în care caz avem:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2 \text{ sau } R = P + Q.$$

Rezultanta este minimă atunci cînd $\cos\alpha$ este minim, adică -1, ceea ce are loc pentru $\alpha = 180°$, în care caz rezultanta minimă este dată de $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ = (P - Q)^2$ sau $R = P - Q$.

Aplicația III. *Trei forțe, P, Q, R, concurente într-un punct O, sînt în echilibru. Să se demonstreze că între intensitățile P, Q, R ale acestor forțe și unghiurile dintre ele există relațiile:*

$$\frac{P}{\sin \widehat{QOR}} = \frac{Q}{\sin \widehat{ROP}} = \frac{R}{\sin \widehat{POQ}},$$

unde $\widehat{QOR}$ este unghiul forțelor Q și R etc...

Demonstrație. Din faptul că cele trei forțe sînt în echilibru rezultă că una din ele, R este egală și de sens contrar cu rezultanta celorlalte două, reprezentată prin diagonala OB a paralelogramului forțelor P și Q. Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul OAB (fig. 85), în care avem lungimile $OA = P$; $AB = Q$ și $OB = R$, obținem:

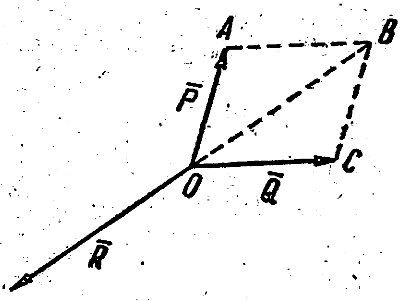


Fig. 85

$$\frac{OA}{\sin \widehat{ABO}} = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} = \frac{OB}{\sin \widehat{OAB}}$$

sau

$$\frac{P}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{Q}{\sin \widehat{AOB}} = \frac{R}{\sin (180° - \widehat{POQ})}.$$

Ținînd seamă că $\widehat{BOC} = 180° - \widehat{ROQ}$ și $\widehat{AOB} = 180° - \widehat{ROP}$, ultima relație devine:

$$\frac{P}{\sin \widehat{ROQ}} = \frac{Q}{\sin \widehat{ROP}} = \frac{R}{\sin \widehat{POQ}}.$$

Aplicaţia IV. *La capetele unui fir trecut peste doi scripeţi mici bine lustruiţi, A şi B* (fig. 86), *aflaţi la acelaşi nivel, sînt legate greutăţile P = = 33 kgf şi Q = 47 kfg. Dacă se prinde într-un punct C al firului o greutate G = 66 kfg, să se determine unghiurile pe care le formează firele AC şi BC cu verticala punctului C în poziţia de echilibru.*

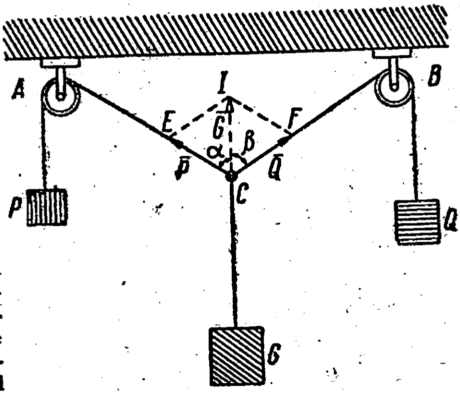


Fig. 86

În poziţia de echilibru, forţele P şi Q acţionează de-a lungul firelor AC, BC şi, împreună cu G, formează trei forţe concurente în C.

Dacă notăm cu α şi β unghiurile formate de firele AC şi BC cu verticala punctului C, adică cu direcţia forţei G, le putem calcula observînd că ele reprezintă unghiurile formate de diagonala IC a paralelogramului forţelor $ECFI$ cu cele două componente de intensităţi $CE = P = 33$ kgf şi $CF = Q = 47$ kgf.

Deoarece sistemul este în echilibru, diagonala CI reprezintă forţa direct opusă lui G. Avînd în vedere totodată că unghiul EIC este egal cu β şi că $EI = CF$, urmează că unghiurile α şi β sînt două unghiuri ale triunghiului ECI, ale cărui laturi sînt: $EC = 33$, $CI = 66$ şi $IE = 47$.

Aplicînd formulele care dau unghiurile în funcţie de laturi (IV — 9), unde ţinem seama că $a = 47$; $b = 33$; $c = 66$ şi deci $p = \frac{47 + 33 + 66}{2} = 73$, avem:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(73-33)\,(73-66)}{73\,(73-47)}} = \sqrt{\frac{40\cdot 7}{73\cdot 26}} \quad \text{sau } \alpha \approx 42°1'10''$$

şi:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(73-47)\,(73-66)}{73(73-33)}} = \sqrt{\frac{26\cdot 7}{73\cdot 40}} \quad \text{sau } \beta \approx 28°2'6''.$$

EXERCIŢII ŞI PROBLEME

(Răspunsurile şi indicaţiile se găsesc la p. 247—250)

I. Triunghiuri dreptunghice. (În cele ce urmează se consideră triunghiul dreptunghic cu unghiul drept $A = 90°$, ale cărui laturi sînt: a — ipotenuza, iar b, c — catetele ce se opun unghiurilor ascuţite B, C)

Să se demonstreze că între elementele unui triunghi dreptunghic există relațiile:

139. $\frac{\sin C + \cos B}{\sin B + \cos C} = \operatorname{tg} C.$ 140. $\operatorname{tg} 2C = \frac{2bc}{b^2 - c^2}$

141. $\cos (B - C) = \frac{2bc}{a^2}.$

142. $\operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{2(a^2 - bc)}{(a + b)(a + c)}.$

Să se demonstreze că un triunghi este dreptunghic cînd avem între elementele sale una din relațiile următoare:

143. $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}.$

144. $\operatorname{tg} B = \frac{\cos B - \sin C}{\cos C - \sin B}.$

Să se rezolve triunghiurile dreptunghice avînd datele trecute în dreptul fiecărei probleme.

145. $a=935$ m; $C=65°10'$. 146. $c=637$ m; $C=4°20'$.

147. $a=1\,710$; $b=823$. 148. $c=12{,}01$; $b=6{,}92$.

149. $b = 5\,734{,}25$ m; $B = 37°29'12''$.

150. $a = 117{,}80$ m; $b = 48$ m.

151. $a = 52{,}34$; $c = 28{,}80$.

152. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd unghiul B și diferența catetelor $b - c = k$. Discuție.

153. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, cunoscînd:

$$b + c = 6 \text{ m}; \operatorname{tg} B = 2 + 2 \cos 2C.$$

(Institutul de construcții, București, 1950).

Să se rezolve următoarele probleme, reducîndu-le la rezolvarea unui triunghi dreptunghic.

154. Într-un triunghi isoscel se dă baza b și înălțimea h. Să se afle unghiul din vîrf ($b = 31{,}26$; $h = 20{,}75$).

155. Baza unui triunghi isoscel este egală cu b dm, iar înălțimea dusă pe una din laturile egale are h dm. Să se afle unghiul x pe care-l face baza cu una din laturile egale.

156. Într-un dreptunghi se dau laturile a şi b. Să se calculeze unghiurile formate de diagonale cu laturile dreptunghiului ($a = 75,2$ dm; $b = 63,6$ dm).

157. Să se afle laturile unui dreptunghi, ale cărui diagonale se întretaie sub un unghi de $75°24'$ şi a cărui arie este de 562 m^2.

158. Să se determine unghiul ascuţit al unui romb a cărui latură este medie proporţională între diagonalele sale.

159. Bazele unui trapez sînt egale cu 25 cm şi 15 cm; una din laturile neparalele este de 12 cm, iar unghiul dintre această latură şi baza mare este de $50°$. Să se calculeze aria trapezului.

160. Dîndu-se latura a a unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc, să se afle latura b a poligonului regulat cu n laturi circumscris aceluiaşi cerc.

161. Să se calculeze diagonalele unui poligon regulat cu 7 laturi, mărimea laturii fiind de 10 cm.

162. Ştiind că latura unui poligon regulat cu n laturi este de a dm, să se afle aria, cînd: 1) $n = 7$; $a = 20$; 2) $n = 8$; $a = 1$; 3) $n = 12$; $a = 10$.

163. Să se calculeze aria unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc cu raza R, cînd: 1) $n = 12$; $R = 7$; 2) $n = 5$; $R = 7$.

164. Două poligoane regulate, avînd respectiv 9 şi 10 laturi, au perimetrele egale. Să se calculeze raportul ariilor lor.

165. Să se calculeze lungimea coardei care corespunde unui arc de $37°42'$ într-un cerc de rază 4,175 m.

166. O coardă împarte un cerc de lungime c metri în raportul $m : n$. Să se afle distanţa dintre centru şi coardă ($m : n = 3 : 7$; $c = 120$).

167. Un unghi α înscris într-un cerc cuprinde între laturile sale o coardă lungă de a cm. Să se afle raza acestui cerc.

168. Unui cerc de rază r i se circumscrie un romb al cărui unghi ascuţit este α. Să se afle aria rombului ($r = 5$; $\alpha = 36°47'$).

169. Să se afle aria unui segment de cerc, dîndu-se raza r şi arcul α, cînd: 1) $r = 4,73$; $\alpha = 46°44'$; 2) $r = 12$; $\alpha = 29°38'$.

170. O coardă lungă de a cm împarte cercul de rază R cm în două segmente de cerc. Să se calculeze aria segmentului mai mic ($a = 3{,}5$ şi $R = 6{,}2$).

171. Într-un cerc cu raza R cm se duc două coarde paralele; fiecare din ele subîntinde un arc de α grade. Să se afle aria porţiunii de cerc cuprinsă între cele două coarde paralele.

172. Pentru a determina lăţimea unui rîu se procedează astfel: se trasează, pe un mal o dreaptă AB; dintr-un punct A al dreptei se vizează un copac D de pe celălalt mal, astfel încît AD să fie perpendicular pe AB. Dintr-un alt punct, B, al dreptei, astfel că $AB = a$, se vizează acelaşi copac sub un unghi $\beta = \widehat{ABD}$. Să se afle lăţimea rîului cînd $a = 42$ m şi $\beta = 25°28'$.

173. Dintr-un punct situat la o distanţă de a metri de centrul bazei unui turn se vede vîrful turnului sub un unghi α. Să se afle înălţimea turnului ($a = 86{,}6$ şi $\alpha = 22°17'$).

174. De la o fereastră ce se află la o înălţime $h = 12$ m deasupra nivelului unui rîu se văd malurile sub unghiurile $\alpha_1 = 17°$ şi $\alpha_2 = 45°$ sub orizont. Ambele unghiuri sînt în acelaşi plan, perpendicular pe cursul rîului. Să se calculeze lăţimea rîului.

175. Intenţionăm să sădim pomi pe un deal la o distanţă de a metri unul de celălalt. La ce distanţă trebuie să săpăm gropile pentru sădirea pomilor dacă dealul are o înclinare α faţă de orizont (fig. 87)?

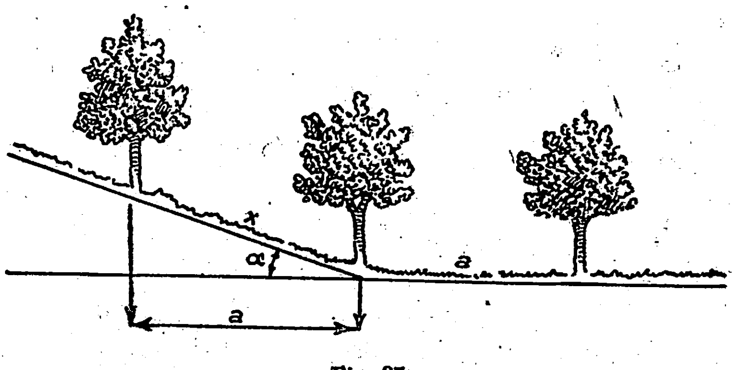


Fig. 87

176. O cale ferată forestieră se ridică cu 0,85 m la fiecare 40 m de parcurs. Să se găsească panta P şi înclinarea terenului.

177. Urcînd un deal şi parcurgînd 1 050 m, un om a ajuns la înălţimea de 90 m faţă de planul bazei dealului. Să se afle înclinarea dealului faţă de planul bazei.

178. Un automobil se urcă pe un deal, pe o şosea dreaptă, care formează cu orizontul un unghi de $3°20'$. La ce înălţime deasupra orizontului se ridică automobilul după ce parcurge 1,2 km de la începutul ascensiunii?

179. O stradă lungă de 728 m este în pantă uniformă, înălţimea la capătul străzii fiind de 37,4 m. Să se calculeze înclinarea străzii faţă de orizontală şi lungimea proiecţiei orizontale a străzii.

180. În vîrful unei coline s-a înfipt o prăjină lungă de a metri. Dintr-un punct oarecare, situat în planul orizontal al bazei colinei şi la distanţa de b metri de vîrful prăjinii, se vede vîrful prăjinii sub un unghi α. Să se afle înălţimea colinei ($a = 2$; $b = 14$; $\alpha = 63°18'$).

181. Două puncte mobile pornesc în acelaşi timp din vîrful unui unghi drept, fiecare mişcîndu-se uniform pe una din laturile unghiului. Primul punct are o viteză de a metri pe secundă, iar celălalt de b metri pe secundă. Să se calculeze unghiul φ, format de sensul mişcării primului mobil şi direcţia în care un observator situat în locul acestuia ar vedea cel de-al doilea mobil.

182. Scara de piatră a unei case are între două platforme succesive cîte 15 trepte (fig. 88). Lăţimea fiecărei trepte este $b=27$ cm, iar înălţimea treptei $a=18$ cm. Să se afle unghiul cu care este înclinată această scară.

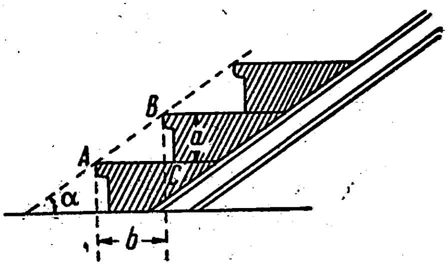


Fig. 88

183. O scară are trepte late de cîte 25 cm. Care trebuie să fie înălţimea unei trepte pentru ca unghiul de înclinare al scării să aibă 40°?

184. Două străzi drepte se întretaie sub un unghi de $51°50'$. Printr-un punct al uneia din aceste străzi, aflat la 1 625 m de punctul de întretăiere, trebuie dusă o stradelă care să unească pe prima cu a doua şi să fie perpendiculară pe aceasta. Să se calculeze lungimea stradelei.

185. De pe un far a cărui înălţime deasupra nivelului mării este $H \approx 170$ m se determină distanţa pînă la un

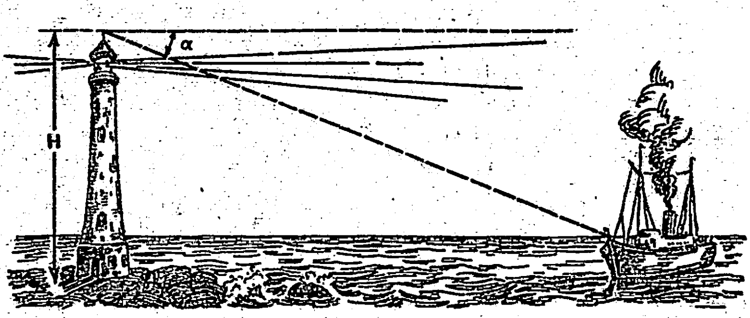


Fig. 89

vapor care trece prin apropiere. Unghiul de depresiune α este aproximativ de $11°37'$ (fig. 89). Să se calculeze distanţa căutată.

186. Un avion transmite prin radio căpitanului unui vas de pescuit că se află deasupra unui banc de peşti la o

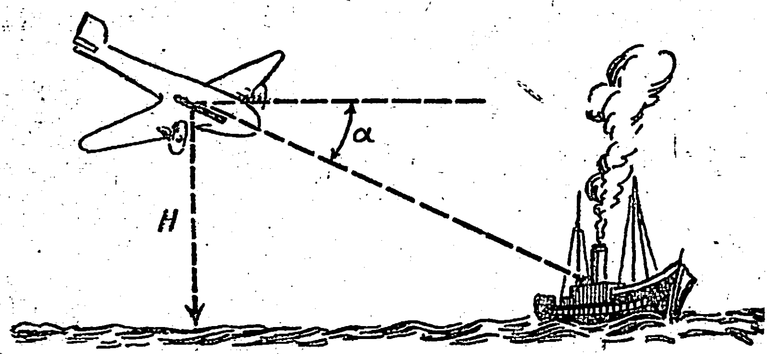


Fig. 90

înălţime de $H \approx 1\,150$ m. De pe vas se determină unghiul $\alpha \approx 23°35'$ al avionului deasupra orizontului. Să se calculeze distanţa de la vas pînă la bancul de peşti (fig. 90).

187. Ca să se măsoare înălţimea turnului situat deasupra intrării principale a clădirii Universităţii de stat din Moscova „M. V. Lomonosov" s-a măsurat cu un instrument goniometric unghiul razei vizuale faţă de orizont (fig. 91). Distanţa de la goniometru pînă la intrarea principală este a. Să se calculeze valoarea aproximativă a înălţimii turnului, dacă înălţimea planşetei pe care se află goniometrul este h ($\alpha \approx 53°$; $a \approx 180$ m şi $h \approx 1,2$ m).

Fig. 91

188. Fundaţia unei construcţii are secţiunea dreaptă în formă de trapez isoscel cu lungimile bazelor de 240 m şi 60 m. Părţile laterale sînt înclinate cu un unghi de 35° faţă de orizont. Să se calculeze înălţimea fundaţiei.

189. Secţiunea transversală făcută într-un terasament are forma unui trapez isoscel în care baza mare $a = 10$ m şi înălţimea $h = 3$ m. Să se calculeze baza mică, ştiind că înclinarea laturii neparalele faţă de baza mare este $\varphi = 39°$.

190. Secţiunea transversală a unui terasament de cale ferată are forma unui trapez isoscel cu înălţimea de 12 m, baza mare de 36 m şi baza mică de 6 m. Să se afle unghiul de înclinare a terasamentului faţă de planul orizontal.

191. O piesă tronconică (fig. 92) are diametrul inferior d, înălţimea h şi înclinarea generatoarei de 12% (dacă înălţimea creşte cu 100 mm, raza se măreşte cu 12 mm). Să se calculeze diametrul superior D şi înclinarea α ($h = 105$ mm; $d = 80$ mm).

192. 1) În figura 93 este desenată în secţiune o îmbinare între două piese. Să se afle unghiul α dintre o latură şi bază.

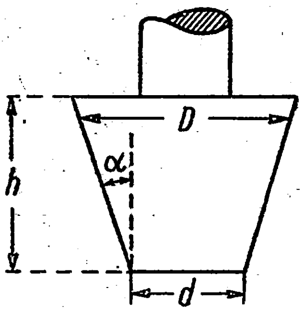


Fig. 92

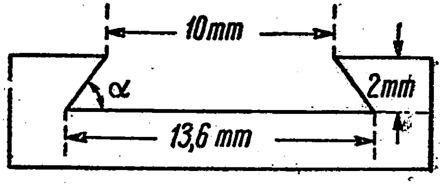


Fig. 93

2) În figura 94 este desenată o crestătură specială întrebuinţată la unele mecanisme. Să se afle unghiul α pe care-l

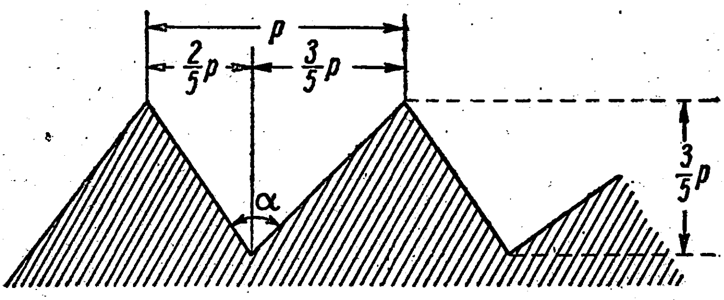


Fig. 94

formează muchiile cuţitului de strung ce a fost folosit la tăierea acestei crestături.

193. Să se afle unghiul dintre generatoarele, situate într-un plan axial la o bucşă conică indicată în figura 95.

194. Să se calculeze (cu aproximaţie de 1°) unghiul dintre generatoarele situate într-un plan axial la un trunchi de con pentru următoarele feluri de strunjire conică:

Diametrul mare, în mm	50	75	75	75	100	100
Diametrul mic, în mm	25	25	50	50	25	25
Înălțimea conului, în mm	50	75	75	25	40	25

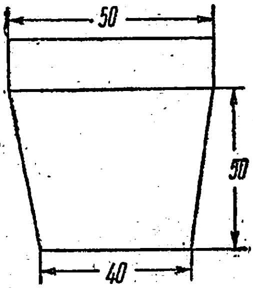


Fig. 95

195. Un balon este prins în axul lunetei unui teodolit în momentul cînd axul lunetei face cu orizontul un unghi de 51°12′. Cu ajutorul telemetrului se citește distanța în acel moment de la lunetă la balon egală cu 4,2 km. Să se afle cu aceste date înălțimea balonului deasupra terenului presupus orizontal, precum și distanța de la teodolit pînă la verticala balonului (fig. 96). (Se va neglija înălțimea observatorului.)

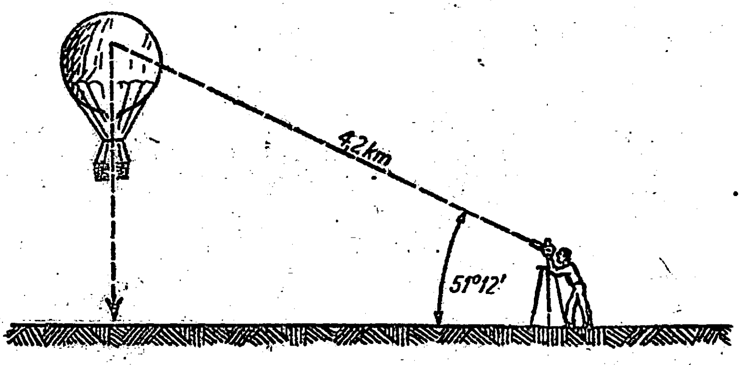


Fig. 96

196. Un avion comunică prin radio că se află deasupra unei păduri la 1 900 m înălțime (determinată cu altimetrul). În acel moment, observatorul de la bază vede avionul sub un unghi de 23°15′ deasupra orizontului. La ce distanță de bază se află pădurea?

197. Cu ajutorul unui telemetru se determină că distanța de la un post de observație situat pe malul mării pînă la un vapor este de 1 700 m. Știind că postul de observație se află la 270 m deasupra nivelului mării, să se afle cu ce unghi trebuie coborîtă luneta unui teodolit sub linia orizontului pentru ca ea să fie îndreptată spre vapor.

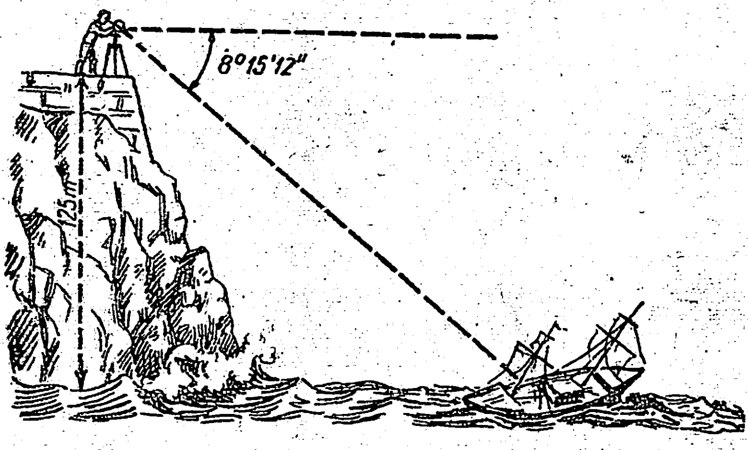


Fig. 97.

198. Un observator așezat la țărm la 125 m deasupra nivelului mării vizează o epavă la 8°15′12″ sub linia orizontului. Să se calculeze distanța de la observator pînă la epavă (fig. 97).

199. O armă ce trage în linie dreaptă asupra unei ținte T aflate la 2 500 m distanță și-a schimbat tirul asupra unei alte ținte, S, aflate la 1 500 m de T. Care este unghiul cu care trebuie întoarsă arma, știind că ST este perpendicular pe HT?

200. Cu ce unghi trebuie ridicată țeava unei arme ca să poată trage pe deasupra unei păduri ai cărei copaci au vîrfurile cu 15 m mai înalte decît nivelul armei și se găsesc la distanța de 200 m de armă. La aflarea înălțimii obstacolului (în cazul nostru a pădurii) se adaugă 0,01 din distanța la care se află arma de obstacol.

201. Dreapta care unește o armă cu o țintă formează cu orizontala un unghi numit „unghi de tragere". Să se calculeze mărimea acestui unghi în cazul cînd arma trage asupra unei ținte ce este situată la un nivel cu 65 m mai ridicat decît nivelul planului în care se află arma știind că distanța dintre armă și țintă, măsurată pe o hartă la scara de $\frac{1}{10\,000}$ este de 31,5 cm (fig. 98) (se va neglija înălțimea observatorului).

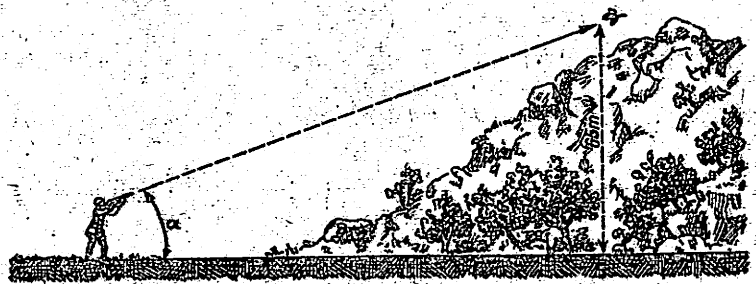


Fig. 98

202. Un căpitan de vas înseamnă pe o hartă itinerariul unei nave maritime. Cînd vasul trece pe lîngă far, căpitanul vasului măsoară unghiul α sub care se vede farul. Să se calculeze lungimea segmentului pe care trebuie să-l marcheze pe hartă de la punctul care reprezintă farul pentru a stabili locul unde se află vasul. Înălțimea farului este H, scara hărții este $\frac{1}{100\,000}$ (*caz numeric*: $\alpha = 3°15'$ și $H \approx 150$ m).

203. Un vas a avut următorul itinerar (vezi tabelul unghiurilor de drum[1]). Să se afle distanțele parcurse de vas în direcțiile nord și est față de punctul de plecare.

Direcția	Distanța parcursă exprimată în km
NE 23°	10
NE 37°	13
NE 82°	15

[1] Unghi de drum se numește unghiul dintre meridianul geografic al locului și o direcție dată. Acest unghi se măsoară în direcțiile nord sau sud de ambele părți ale meridianului, de la 0° la 90°. În fața unghiului de drum se notează cadranul ce conține direcția dată : NE = nord-est ; SE = sud-est ; SV = sud-vest ; NV = nord-vest.

204. Pe o hartă se dau trei puncte A, B şi C, aşezate astfel încît $AB = 0{,}85$ dm, $AC = 1{,}20$ dm şi $BC = 1{,}20$ dm. Punctul B se află exact în nordul punctului A. Să se afle direcţia în care se află C faţă de A.

205. Se ştie că diametrul globului pămîntesc are 12 740 km. Cunoscînd latitudinea φ a unui punct de pe Pămînt, să se afle lungimea paralelei ce trece prin acel punct ($\varphi = 57°5'$; $\pi = 3{,}14$).

206. Raza globului pămîntesc este (aproximativ de) 6 370 km. Oraşul Bucureşti se află la 44°26' latitudine nordică. Să se afle ra. cercului format de paralela respectivă.

207. Raza globului pămîntesc este de 6 370 km. Să se afle lungimea tropicului (latitudinea 23°27') şi cea a cercului polar (latitudinea 66°33').

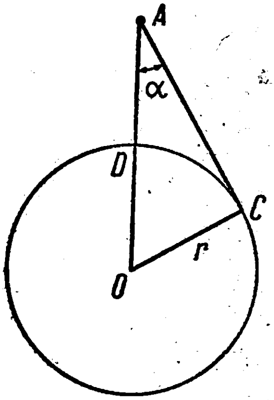


Fig. 99

208. Un observator aflat pe vîrful A al unui munte (fig. 99) a măsurat unghiul $\widehat{DAC} = \alpha$ dintre verticala AD şi raza vizuală AC îndreptată spre orizont. Cunoscînd raza r a Pămîntului, să se afle înălţimea muntelui.

209. O clădire înaltă de 30 m aruncă o umbră de 45 m. Să se determine înălţimea Soarelui deasupra orizontului.

210. Cînd Soarele se află la o înălţime de 28°, coşul unei fabrici aruncă o umbră de 76 m. Să se afle înălţimea coşului fabricii.

211. Să se calculeze înălţimea Soarelui deasupra orizontului în următoarele cazuri: 1) cînd lungimea umbrei aruncate de un om este egală cu jumătate din înălţimea omului; 2) cînd ea este de două ori mai mare decît înălţimea omului; 3) cînd umbra este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decît înălţimea omului.

212. Umbra aruncată de o prăjină aşezată vertical este mai scurtă decît prăjina cu $\frac{1}{n}$ din lungimea ei. Să se afle înălţimea Soarelui deasupra orizontului ($n = 10{,}5$).

213. O oglindă este așezată în fața a două puncte A și B, situate la distanța de 15 cm unul de celălalt. Distanța la oglindă a unuia dintre puncte este $a = 5$ cm, iar distanța celuilalt este de $b=7$ cm. Care este mărimea unghiului de incidență a razei de lumină care, pornind din A, este reflectată în B?

214. Amplitudinea oscilației unui pendul este de 11°. Care este distanța maximă a capătului pendulului față de verticală, dacă lungimea pendulului este de 45 cm?

215. Brațele unei pîrghii rectilinii au lungimile de 7 dm și 13 dm. Cu cîți decimetri deviază pe verticală fiecare capăt în cazul rotirii pîrghiei cu : 1) 35°; 2) 45°; 3) 63°12′, cînd un capăt se ridică, iar celălalt coboară?

216. Se dau două forțe, $P = 4{,}372$ kgf și $Q = 5{,}645$ kgf, perpendiculare între ele. Să se afle rezultanta acestor forțe și unghiul pe care-l face rezultanta cu forța P.

217. O forță $R = 32{,}5$ kgf se descompune în două componente perpendiculare, dintre care una face cu rezultanta un unghi de 52°10′. Ce mărime are fiecare din cele două componente?

218. Un vagonet cîntărește cu încărcătură cu tot 300 kgf (fig. 100). Cu ce forță trebuie tras vagonetul în sus, pe un plan înclinat cu 17° față de un sol orizontal, pentru ca vagonetul să se urnească din loc (neglijînd frecarea)?

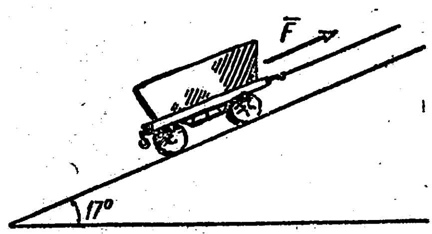


Fig. 100

219. În figura 101 este schițat un motor a cărui bielă AP este articulată cu manivela AO. 1) Să se calculeze

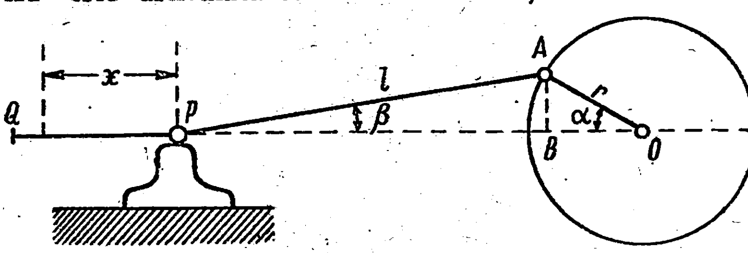


Fig. 101

segmentele OB şi AB, ştiind că $OA = r = 0,4$ m, iar unghiul $\alpha = 30°$. Să se calculeze apoi unghiul $\widehat{APB}$ şi lungimea proiecţiei PB a bielei pe dreapta OP, ştiind că lungimea l a bielei este de 2 m.

2) Să se demonstreze că între unghiurile α şi β, formate de bielă şi manivelă cu OP, există următoarea relaţie:

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha.$$

220. 1) Să se afle valoarea unghiului β din problema precedentă cînd raportul $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$, iar $\alpha = 0°$; $10°$; $20°$; $30°$; $40°$; $50°$; $60°$; $70°$; $80°$; $90°$.

2) De ce atunci cînd $\alpha = 90°$, unghiul β (din formula dată la punctul 2 al problemei precedente) are cea mai mare valoare posibilă?

3) Ce mărime are unghiul β cînd biela este perpendiculară pe manivelă?

4) Cînd $\alpha = 0$, punctul P se va găsi în Q. Să se demonstreze că deplasarea $QP = x$ a capătului bielei poate fi calculată prin formula: $x = r(1 - \cos\alpha) + l(1 - \cos\beta)$.

5) Să se afle mărimea lui x pentru valorile lui α indicate la punctul 1 al problemei, ştiind că lungimea manivelei este $r = 300$ mm şi cea a bielei $l = 1\,500$ mm.

II. Triunghiuri oarecare. (În cele ce urmează se consideră triunghiul ABC cu laturile a, b, c şi unghiurile opuse A, B, C.) Se mai notează: S — aria; $2p$ — perimetrul; R — raza cercului circumscris; r, r_a, r_b, r_c — razele cercului înscris şi ale celor exînscrise; h_a, h_b, h_c — înălţimile relative la laturile a, b, c; m_a, m_b, m_c — medianele; l_a, l_b, l_c — bisectoarele interioare şi l'_a, l'_b, l'_c cele exterioare.

Să se demonstreze că între elementele unui triunghi oarecare ABC există relaţiile:

221. $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$.

222. $\cos^2 A - \cos^2 B - \sin^2 C + 2\sin A\sin C\cos B = 0$.

(Institutul de transporturi şi căi ferate, Bucureşti, 1955)

223. $\frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$.

224. $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a + b + c$.

225. $S = r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = r_a^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

226. $r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = p^2$.

227. $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$.

228. $4S = b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B$.

229. $l_a = h_a \sec\frac{B - C}{2}$.

230. $l'_a = l_a \operatorname{ctg}\frac{C - B}{2}$.

Să se demonstreze că un triunghi este isoscel cînd între elementele sale există una din relațiile următoare:

231. $\sin A = 2 \sin B \cos C$.

232. $a = 2r \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

Să se demonstreze că un triunghi este dreptunghic sau isoscel cînd între elementele sale avem una din relațiile:

233. $a \cos A = b \cos B$.

234. $(b^2 + c^2) \sin (C - B) = (c^2 - b^2) \sin (C + B)$.

235. Dacă laturile a, b, c sînt în progresie aritmetică, atunci avem: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

236. Dacă laturile unui triunghi au ca lungimi: $m^2 + m + 1$; $2m + 1$ și $m^2 - 1$, unde m este un număr oarecare, atunci unul din unghiuri este de 120°.

237. Dacă între unghiurile unui triunghi există relația: $8 \cos A \cos B \cos C = 1$, triunghiul este echilateral.

238. Dacă între laturile unui triunghi există relația: $3a = b + c$, atunci există și relația: $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

Să se rezolve triunghiurile oarecare avînd datele trecute în dreptul fiecărei probleme:

239. $b = 6\,508$ m; $A = 46°4'$; $C = 18°52'$.

240. $b = 3\,070$ m; $A = 32°40'$; $B = 70°20'$.

241. $a = 8\,738$ m; $b = 6\,224$ m; $C = 82°46'$.

242. $b = 8\,342$ m; $c = 6\,732$ m; $B = 124°38'$.

243. $a = 217,5$ m; $c = 273,4$ m; $A = 49°54'$.

244. $a = 145$ m; $c = 211$ m; $A = 63°50'$.

245. $a = 42,16$ m; $b = 40,98$ m; $c = 33,59$ m.

246. În triunghiul ABC se dau $a = 150$ cm, $\operatorname{ctg} B = \frac{1}{8}$, $\operatorname{tg} C = 1$. Să se afle perimetrul triunghiului.

(Institutul de construcții, București, 1955).

247. $b = 20\,562,18$ m; $c = 17\,318,97$ m; $A = 24°26'56''$

248. $b = 107,2$ m; $c = 70,4$ m; $B = 71°15'$.

249. $a = 1\,631,7$ m; $b = 1\,792,8$ m; $c = 1\,877,7$ m.

Să se rezolve triunghiurile în care sînt date următoarele elemente:

250. A, B, C, R. **251.** A, B, C, h_a.

252. A, B, C, S. **253.** A, B, C, r.

254. Se dă un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$). Să se rezolve triunghiul cunoscînd mediana $BB_1 = m$ și unghiul $BB_1C = \alpha$.

(Institutul de petrol și gaze, București, 1955).

Să se rezolve următoarele probleme, reducîndu-le la rezolvarea unui triunghi oarecare:

255. Să se calculeze diagonalele unui paralelogram cu laturile a, b și unghiul ascuțit α.

256. Să se determine unghiurile pe care le formează diagonala cea mică a unui paralelogram cu laturile știind că acestea sînt respectiv egale cu $a = 23$ m; $b = 17$ m; iar unghiul ascuțit al paralelogramului este $\alpha = 28°42'$.

257. Una din diagonalele unui paralelogram este egală cu d și formează cu laturile unghiurile α și β. Să se afle laturile paralelogramului.

258. Într-un paralelogram se dau: unghiul ascuțit α și distanțele a și b de la punctul de intersecție al diagonalelor pînă la laturile neegale. Să se determine lungimile diagonalelor și aria paralelogramului.

259. Să se calculeze aria cuprinsă între trei cercuri tangente între ele, știind că razele sînt respectiv de 2m, 4m, 5m.

260. Trei cercuri tangente exterior două cîte două au razele egale respectiv cu R_1, R_2, R_3. Să se exprime aria cuprinsă între cele trei cercuri tangente.

261. Două cercuri de raze R şi r se taie sub un unghi α. Să se calculeze lungimea coardei lor comune.

262. Să se calculeze laturile triunghiului ortic în funcţie de acelea ale triunghiului dat.

263. Pentru a determina înălţimea unui obiect AB aşezat vertical (fig. 102), se procedează în felul următor: din punctul A se duce un segment AC, a cărui lungime este cunoscută şi egală cu b metri, care face cu planul orizontal un unghi α. Vîrful B al obiectului se vede din punctul C sub un unghi β faţă de orizont. Care este înălţimea obiectului AB?

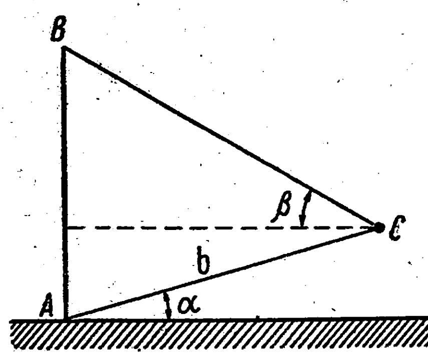


Fig. 102

264. O fabrică este situată în apropierea unui rîu (fig. 103). Pentru a măsura înălţimea coşului ei de pe celălalt mal al rîului, se procedează în felul următor: se consideră o dreaptă $AC = 11$ m, a cărei prelungire trece prin baza coşului fabricii

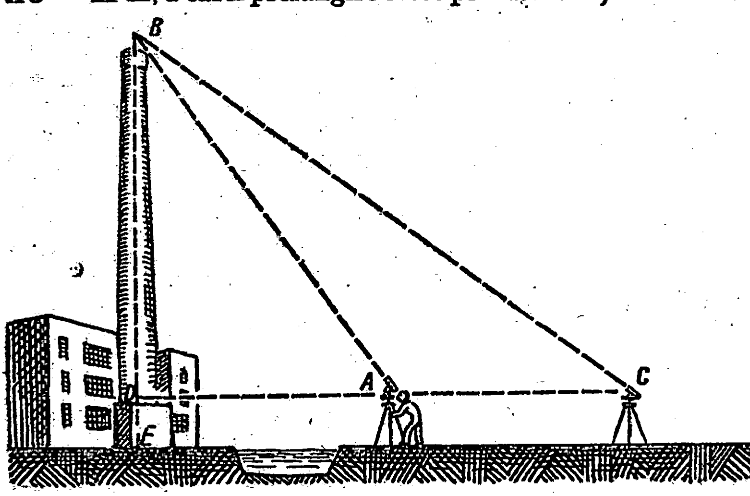


Fig. 103

şi se măsoară unghiurile: $\widehat{BAD} = 49°$; $\widehat{BCD} = 35°$. Înălţimea goniometrului cu care s-au efectuat măsurătorile unghiurilor este de 1,37 m. Să se determine înălţimea coşului.

265. Un copac se află pe coasta unui munte care face cu orizontul un unghi β. Cînd Soarele se află la înălţimea α, copacul aruncă în jos pe coasta muntelui o umbră egală cu l metri. Să se afle înălţimea copacului.

266. Lăţimea unui rîu s-a calculat în felul următor: pe unul din maluri s-a considerat chiar la marginea apei un segment de dreaptă $AB = c$ metri, s-a vizat un copac C aflat pe malul celălalt, tot la marginea apei. Apoi din ambele capete ale segmentului AB s-au măsurat următoarele unghiuri: $\widehat{CAB} = \alpha$ şi $\widehat{ABC} = \beta$. Să se afle lăţimea rîului în dreptul copacului C ($c = 400$; $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$).

267. Cu prilejul proiectării unei căi ferate a fost necesar să se determine lungimea unui tunel (fig. 104). În acest scop s-au măsurat distanţele de la un punct oarecare C pînă la două puncte A şi B accesibile, precum şi distanţele punctelor A şi B de gurile tunelului de 83 m şi 200 m. Cunoscînd $AC = 1\,800$ m, $BC = 2\,000$ m şi unghiul $\widehat{BCA} = 52°$, să se afle lungimea tunelului.

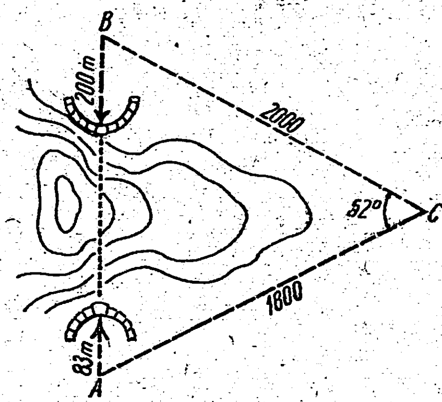


Fig. 104

268. Pentru a determina înălţimea unui far AB (fig. 105), s-a trasat pe teren o lungime $CD = a$, care nu trece prin baza turnului. S-au măsurat apoi: $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{BCD} = \beta$ şi $\widehat{BDC} = \gamma$. Care este înălţimea farului? Caz numeric: $a = 35$ m; $\alpha = 32°13'$, $\beta = 110°28'$ şi $\gamma = 47°43'$.

269. Pe un teren orizontal se măsoară o porțiune de drum BC egală cu a metri. Alături de drum se află un deal al cărui vîrf S este văzut din punctul C sub un unghi φ.

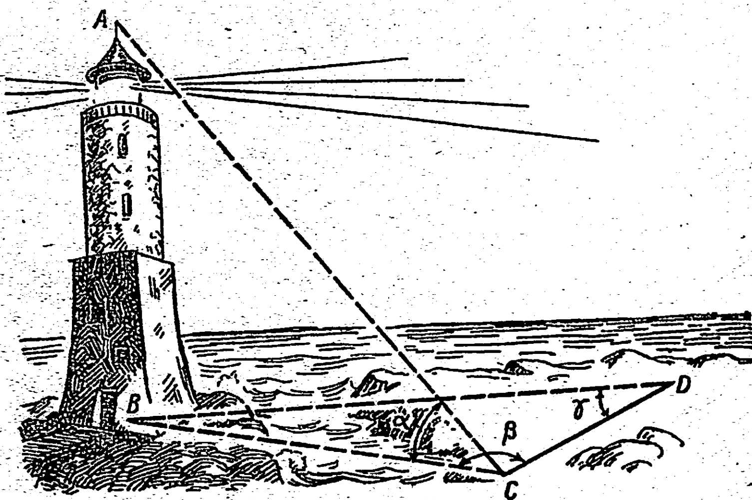


Fig. 105

față de orizont (fig. 106). Vîrful S se proiectează pe planul drumului în A. Segmentul BC formează cu razele vizuale duse din extremitățile segmentului la punctul A unghiurile $\widehat{ACB} = \gamma$ și $\widehat{ABC} = \beta$. Să se afle înălțimea dealului ($a = 400$; $\beta = 40°10'$; $\gamma = 60°40'$; $\varphi = 50°50'$).

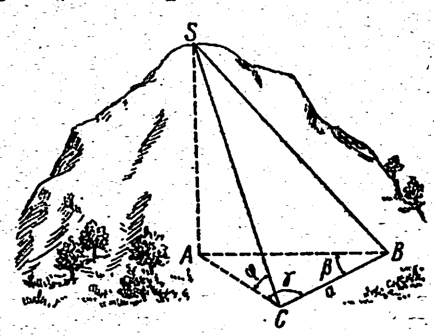


Fig. 106

270. Să se calculeze aria unui teren care are forma unui triunghi, știind că pe un plan la scara 1/100 000 al acestui teren două laturi sînt reprezentate prin segmente de lungimi 5,6 cm și 7,5 cm, iar unghiul acestor segmente este de 48°.

271. Un lot avînd forma unui pentagon a fost măsurat de către un inginer prin aşa-numita metodă polară (fig. 107). Din punctul O (polul) s-au măsurat distanţele $OA = 43$ m, $OB = 36$ m, $OC = 41$ m, $OD = 56$ m şi $OE = 34$ m. De asemenea, s-au măsurat unghiurile $\widehat{AOB} = 65°30'$, $\widehat{BOC} = 71°20'$, $\widehat{COD} = 80°$ şi $\widehat{DOE} = 61°35'$. Să se calculeze aria lotului.

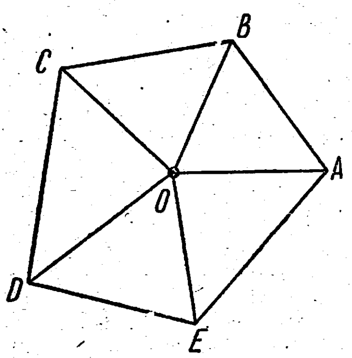


Fig. 107

272. Aria deschizăturii într-un acoperiş prin care trece un horn este de 2 100 cm². Unghiul de înclinare al acoperişului este de 32°. Coşul are forma unei prisme cu baza un pătrat. Să se afle latura bazei prismei.

273. Dimensiunile bazei unui horn sînt de 40 cm × 40 cm. Unghiul de înclinare al acoperişului este de 35°. Să se afle aria deschizăturii în acoperiş prin care trece hornul.

274. Un acoperiş cu patru pante acoperă o arie de 28 m². Toate aceste pante sînt înclinate faţă de tavan cu cîte un unghi de 32°53'. Să se afle aria acoperişului.

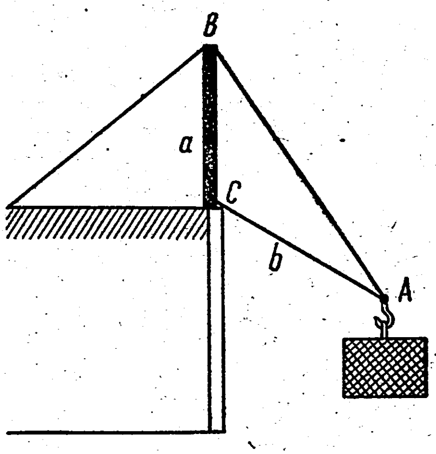


Fig. 108

275. În figura 108 este schiţat un elevator al cărui braţ $AC = b = 6{,}5$ m face la un moment dat un unghi $\widehat{BCA} = 125°$, cu stinghia fixă BC de lungime $a = 3{,}8$ m. Să se determine lungimea cablului AB.

276. Din acelaşi punct şi în acelaşi moment pleacă două mobile, A şi B, primul cu viteza de 2 m/s şi al doilea cu viteza de 3 m/s. Ce distanţă va fi între cele două mobile după 10 secunde, dacă se mişcă pe două drumuri drepte care formează între ele un unghi de 34°?

277. De pe un aerodrom decolează simultan două avioane: unul cu direcţia sud-est şi cu o viteză $v_1=192$ km/oră, celălalt într-o direcţie aşezată sub linia sud-est care formează cu direcţia celui dintîi un unghi de 23° şi cu o viteză $v_2 = 256$ km/oră. La ce distanţă între ele se vor găsi avioanele după 2 ore?

278. Să se descompună o forţă de 35 kgf după două direcţii care să formeze cu forţa dată unghiurile de 25°17′ şi 43°18′.

279. Două forţe concurente $F_1 = 12{,}6$ kgf şi $F_2 = 35$ kgf formează între ele un unghi de 81°50′. Să se calculeze rezultanta şi unghiurile pe care aceasta le formează cu fiecare dintre cele două componente.

280. Două forţe concurente, $F_1 = 42{,}74$ kgf şi $F_2 = 34{,}08$ kgf, formează între ele un unghi de 64°24′. Să se calculeze rezultanta şi unghiurile acesteia cu F_1 şi F_2.

281. Trei forţe, de 21 kgf, 24 kgf şi 30 kgf, situate în acelaşi plan, sînt în echilibru. Să se calculeze unghiurile dintre ele.

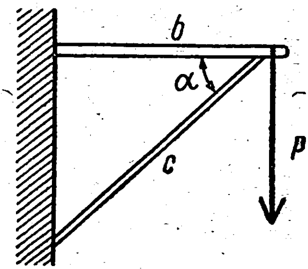


Fig. 109

282. De un suport (fig. 109) este atîrnată o sarcină cu o greutate P kgf. Să se calculeze forţa care întinde bara b şi forţa care acţionează de-a lungul barei c, ştiind că unghiul acestor bare este α.

CAPITOLUL V

IDENTITĂŢI ŞI ECUAŢII

IDENTITĂŢI TRIGONOMETRICE

1. Pentru simplificarea unor expresii care conţin funcţii trigonometrice, la calcularea unor valori numerice, la rezolvarea ecuaţiilor trigonometrice, la demonstrarea unor inegalităţi, la calculul maximului şi minimului unei expresii care conţine funcţii trigonometrice ş. a. se folosesc *identităţi trigonometrice.*

Identitatea trigonometrică, ca şi cea algebrică, *este o egalitate adevărată pentru orice valoare dată literelor* (cu excepţia acelora pentru care funcţiile ce intervin în această egalitate nu au sens).

Identităţile trigonometrice sînt nesfîrşit de multe; ele se deduc pe cale geometrică, pe cale algebrică, pornind de la identităţi evidente, sau pe alte căi. Pentru a demonstra o identitate dată, folosim transformările identice arătate la capitolele al III-lea şi al IV-lea, precum şi altele noi.

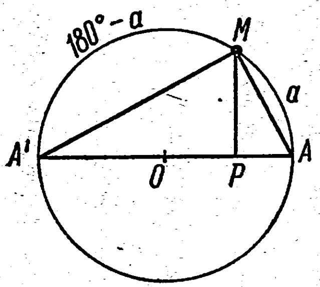


Fig. 110

2. **Deducerea unor identităţi.** *a)* Unele identităţi se pot obţine prin consideraţii geometrice. Să luăm, de exemplu, cercul de rază 1 (fig. 110) cu centrul O şi pe el arcul $\overset{\frown}{AM} = a$. Unim M cu extremităţile A' şi A ale diametrului orizontal şi ducem MP perpendiculară pe $A'A$. Coarda AM este egală cu $2\sin\frac{a}{2}$, iar coarda $A'M$ cu $2\sin\frac{180° - a}{2} = 2\cos\frac{a}{2}$ (IV — 5). Deoarece $OP = \cos a$, rezultă că $A'P = A'O + OP = 1 + \cos a$

şi $PA = OA - OP = 1 - \cos a$. Scriind relaţiile metrice dintr-un triunghi dreptunghic:

$AM^2 = A'A \cdot PA$ şi $A'M^2 = A'A \cdot A'P$, în care,

înlocuind lungimile segmentelor prin expresiile de mai sus, obţinem, după simplificarea cu 2, identităţile cunoscute;

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

şi:

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1 + \cos a.$$

b) Cele mai multe identităţi se obţin efectuînd diferite operaţii algebrice asupra unor identităţi trigonometrice cunoscute.

De exemplu, ridicînd la pătrat şi la cub ambii membri ai identităţii cunoscute, $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, obţinem:

$$\sin^4 a + \cos^4 a + 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1$$

şi:

$$\sin^6 a + \cos^6 a + 3 \sin^2 a \cos^2 a \ (\sin^2 a + \cos^2 a) = 1,$$

sau:

$$\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = -2 \sin^2 a \cos^2 a$$

şi:

$$\sin^6 a + \cos^6 a - 1 = -3 \sin^2 a \cos^2 a.$$

Împărţind membru cu membru aceste ultime egalităţi, obţinem identitatea:

$$\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}.$$

c) Pornind de la identităţi algebrice cunoscute cărora li se aplică o aceeaşi funcţie trigonometrică în ambii membri, se obţin identităţi noi.

Astfel, între unghiurile A, B, C ale unui triunghi avem relaţia evidentă:

$$A + B = 180° - C.$$

Aplicînd în ambii membri tangenta, obţinem:

$$\operatorname{tg}(A + B) = -\operatorname{tg} C$$

sau:

$$\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = -\operatorname{tg} C.$$

Eliminînd numitorii şi grupînd convenabil, obţinem identitatea :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

d) Există multe alte metode de obţinere a unor identităţi trigonometrice, printre ele se află metoda care foloseşte proprietăţi ale numerelor complexe.

3. **Demonstrarea unor identităţi.** O identitate dată se poate demonstra prin numeroase metode. Unele au fost arătate în paragraful precedent, altele se bazează pe înlocuirea unor expresii dintr-un membru al identităţii cu altele echivalente, după care se efectuează calcule pînă ce se ajunge la celălalt membru sau se fac înlocuirile în ambii membri pînă se obţine o identitate evidentă. Metodele de deducere a identităţilor pot servi şi la demonstrarea lor.

Exemplu. *Să se demonstreze identitatea:*

$$1 + 2(\cos 6x + \cos 12x) = \frac{\sin 15x}{\sin 3x}.$$

Demonstrare. Membrul stîng se mai poate scrie astfel :

$$E = \frac{\sin 3x\ (1 + 2\cos 6x + 2\cos 12x)}{\sin 3x} =$$

$$= \frac{\sin 3x + 2\sin 3x \cos 6x + 2\sin 3x \cos 12x}{\sin 3x}.$$

Înlocuind produsele de sinusuri prin cosinusuri cu sume după formula $2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$, obţinem :

$$E = \frac{\sin 3x + \sin 9x - \sin 3x + \sin 15x - \sin 9x}{\sin 3x} = \frac{\sin 15x}{\sin 3x}$$

ceea ce trebuia dovedit.

4. **Identităţi condiţionate.** Unele egalităţi sînt identităţi numai dacă între literele ce apar în egalitatea respectivă există o anumită relaţie. Astfel de identităţi se numesc *condiţionate*. Demonstrarea lor se face la fel ca şi la cele fără condiţii.

Exemplu. *Să se demonstreze că între unghiurile A, B, C, D ale unui patrulater există relaţia:*

$$(1)\ \sin A + \sin B + \sin C + \sin D =$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

Demonstrare. Relaţia de condiţie, în acest caz, este: $A + B + C + D = 360°$.

În egalitatea: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$, stabilită la aplicaţia II de la p. 124, înlocuind pe α cu A, pe β cu B şi pe γ cu C şi deoarece $\alpha+\beta+\gamma = A + B + C = 360° - D$, obţinem: $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D = 4 \sin\frac{A+B}{2} \sin\frac{B+C}{2} \sin\frac{A+C}{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

5. **Folosirea identităţilor.** Identităţile trigonometrice, ca şi cele algebrice, sînt folosite în diferite scopuri practice. Din exemplele ce vor urma vor rezulta unele întrebuinţări ale identităţilor.

a. *La simplificarea unor expresii.* Fie, de exemplu, expresia:

$$E = \frac{\sin 3a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos 3a + \cos 5a + \cos 7a},$$

pe care vrem să o simplificăm.

Utilizînd identităţile: $\sin a + \sin b = 2 \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2}$ şi $\cos a + \cos b = 2 \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2}$, putem scrie:

$$\sin 3a + \sin 7a = 2 \sin 5a \cos 2a$$

şi:

$$\cos 3a + \cos 7a = 2 \cos 5a \cos 2a$$

Înlocuind în E expresiile obţinute, deducem:

$$E = \frac{2 \sin 5a \cos 2a + \sin 5a}{2 \cos 5a \cos 2a + \cos 5a} = \frac{\sin 5a\,(2 \cos 2a + 1)}{\cos 5a\,(2 \cos 2a + 1)} = \operatorname{tg} 5a.$$

b. *La calcularea unor expresii numerice.* Să se calculeze valoarea produsului:

$$P = \cos 20° \cos 40° \cos 80°.$$

Înmulţind şi împărţind cu $\sin 20°$ şi ţinînd seama de identitatea $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, avem succesiv:

$$P = \frac{\sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°}{\sin 20°} = \frac{\frac{1}{2} \sin 40° \cos 40° \cos 80°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 80° \cos 80°}{\sin 20°} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 160°}{\sin 20°} = \frac{\frac{1}{8} \sin 20°}{\sin 20°} = \frac{1}{8}$$

c. *La demonstrarea unor inegalități trigonometrice*. În general, orice inegalitate se poate dovedi pornind de la o identitate.

Astfel, dacă vrem să arătăm că $A > B$, este suficient să calculăm expresia $A - B \equiv C$ și să urmărim semnul expresiei C. Dacă $C > 0$, atunci $A > B$, iar dacă $C < 0$, avem $A < B$.

De exemplu, *să se demonstreze inegalitatea trigonometrică :*

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg} a,$$

dacă $0 < a < 180°$.

În adevăr, ținînd seama de identitatea $\operatorname{ctg} a = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}$, avem :

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} - (1 + \operatorname{ctg} a) \equiv \operatorname{ctg} \frac{a}{2} - \left(1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{a}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}\right) \equiv \frac{\left(\operatorname{ctg} \frac{a}{2} - 1\right)^2}{2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2}}.$$

Din egalitatea obținută se vede că membrul drept al identității este mereu pozitiv pentru orice a, deoarece $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} > 0$, știind că $0 < \frac{a}{2} < 90°$.

Rezultă deci :

$$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} \geqslant 1 + \operatorname{ctg} a.$$

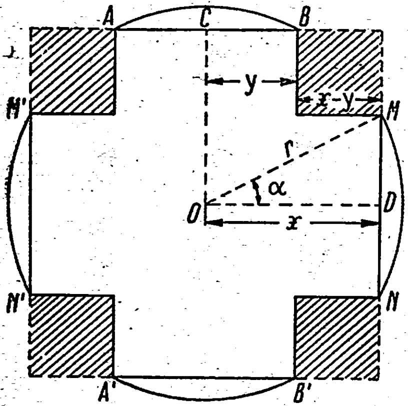


Fig. 111

d. *La calcularea maximului sau minimului unei funcții trigonometrice.*

Exemplu. *La construirea unui transformator de curent alternativ este necesar ca miezul de fier, format din două pachete egale de plăci de tablă dreptunghiulară ce se încrucișează, să umple cît mai mult bobina cilindrică* (fig. 111). *Ce dimensiuni trebuie să dăm pachetelor de plăci pentru a realiza aceasta?*

Să exprimăm volumul miezului de fier. Pentru aceasta avem nevoie de aria secțiunii formată de cele două dreptunghiuri încrucișate. Notăm cu x lungimea perpendicularei coborîtă din centrul O al cercului de secțiune a bobinei cilindrice, de rază r, pe una din laturile celor două dreptunghiuri egale, $ABA'B'$, $MNM'N'$, cu laturi perpendiculare şi cu centrul în O (fig. 111), iar cu y jumătatea laturii AB, care este totodată şi jumătatea laturii MN. Aria secţiunii încrucişate se obţine scăzînd din pătratul format de prelungirile laturilor AB, $A'B'$, MN, $M'N'$ cele patru pătrate haşurate din colţuri. Latura pătratului mare fiind $MM' = 2x$ şi a fiecărui pătrat haşurat $x - y$, rezultă că aria secţiunii este:

$$S = (2x)^2 - 4(x - y)^2 = 4y(2x - y).$$

Dacă notăm cu α unghiul variabil format de raza OM cu perpendiculara OD, atunci:

$x = r\cos\alpha$ şi $y = r\sin\alpha$, iar aria S devine în acest caz:

$$S = 4r^2 \sin\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) = 4r^2(2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha)$$

sau, după ce înlocuim $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ şi $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$,

obţinem:

$$S = 4r^2\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) - 2r^2$$

Notînd cu l lungimea bobinei volumul prismei cu secţiunea încrucişată este:

$$V = lS = 2r^2 l\left[2\left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) - 1\right]$$

Folosind un unghi auxiliar φ astfel ca $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{2}$ (ceea ce se întîmplă

cînd $\varphi = 26°33'54''$), avem:

$$\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha = \sin 2\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos 2\alpha = \frac{\sin(2\alpha + \varphi)}{\cos\varphi},$$

iar volumul devine:

$$V = 2r^2 l\left[\frac{2\sin(2\alpha + \varphi)}{\cos\varphi} - 1\right].$$

Acum se vede că volumul V este maxim cînd $\sin(2\alpha + \varphi)$ este maxim, adică atunci cînd $2\alpha + \varphi = 90°$, de unde rezultă:

$$\alpha = \frac{1}{2}(90° - \varphi) \approx \frac{1}{2}(90° - 26°33'54'') \approx 31°43'3''.$$

Dimensiunile x şi y sînt în acest caz:

$$x \approx 0{,}851r \text{ şi } y \approx 0{,}526r.$$

O b s e r v a r e. Pentru rezolvarea problemelor de maxim şi minim există metode mai generale, care se studiază în clasa a XI-a. Cele două exemple tratate mai sus au putut fi rezolvate cu metode trigonometrice numai datorită faptului că expresiile obţinute au o formă specială.

6. Numeroase probleme ne conduc la egalități în care literele figurează ca argumente ale unor funcții trigonometrice; *astfel de egalități, adevărate numai pentru anumite valori date literelor, se numesc ecuații trigonometrice.* Exemplul care urmează este edificator în această privință.

Problemă. *O bilă M, de greutate P, se află în interiorul unei emisfere ce se sprijină pe sol în A* (fig. 112), *astfel că planul diametral al emisferei rămîne paralel cu solul. Bila este reținută într-un punct M al emisferei datorită unei greutăți Q, care este legată de M printr-un fir ce trece peste marginea emisferei prin punctul C. Care este unghiul x pe care îl formează raza punctului M cu verticala OA în poziția de echilibru, presupunînd că se neglijează frecările?*

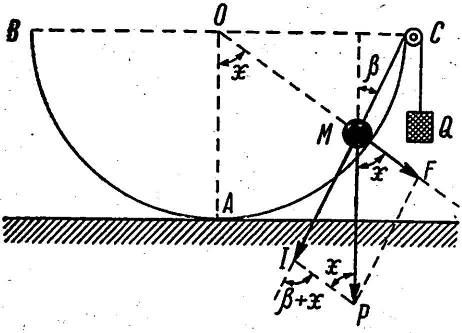


Fig. 112

Rezolvare. În poziția de echilibru (v. *Fizica* clasa a VIII-a), forța P se poate înlocui prin două componente: una MF, care să acționeze de-a lungul razei OM, iar alta MI de-a lungul prelungirii firului CM. Prima forță este echilibrată de reacțiunea emisferei, iar a doua, MI, trebuie să fie egală cu forța Q, pe care trebuie să o echilibreze. Notînd cu β unghiul format de componenta MI cu P și ținînd seama că MF formează cu MP același unghi x ca și OM cu verticala OA, după aplicarea teoremei sinusurilor în triunghiul IMP, avem:

$$\frac{MI}{\sin x} = \frac{MP}{\sin(\beta + x)} \quad \text{sau} \quad \frac{Q}{\sin x} = \frac{P}{\sin(\beta + x)}$$

sau:

$$\frac{\sin(\beta + x)}{\sin x} = \frac{P}{Q}.$$

În triunghiul isoscel OMC $(OM = OC)$ avem $\widehat{OMC} = \widehat{OCM} = \text{măs.}\frac{\widehat{BA} + \widehat{AM}}{2} = \frac{90° + x}{2}$, așa că rezultă $\widehat{IMF} = \beta + x = \widehat{OMC} = \frac{90° + x}{2}$.

Înlocuind $\beta + x$ în relația de mai sus, deducem:

$$\frac{\sin(\beta + x)}{\sin x} = \frac{\sin\left(45° + \frac{x}{2}\right)}{\sin x} = \frac{P}{Q},$$

care este o ecuație trigonometrică.

Rezolvarea problemei de mecanică depinde de rezolvarea ecuației obținute:

$$Q \sin\left(45° + \frac{x}{2}\right) = P \sin x. \qquad (1)$$

Folosind identitățile $\sin\left(45° + \frac{x}{2}\right) = \sin 45° \cos\frac{x}{2} + \cos 45° \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$ și $2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$, după ridicarea la pătrat a ambilor membri ai ecuației (1), obținem:

$$\frac{1}{2} Q^2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = P^2 \sin^2 x$$

sau:

$$2P^2 \sin^2 x - Q^2 \sin x - Q^2 = 0,$$

care, fiind rezolvată ca o ecuație de gradul al doilea în $\sin x$, ne dă:

$$\sin x = \frac{Q^2}{4P^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot \frac{P^2}{Q^2}}\right)$$

și, prin urmare, posibilitatea de a afla unghiul x cerut.

7. Obiectivul pe care-l urmărim în rezolvarea ecuațiilor trigonometrice este găsirea soluțiilor, adică a acelor valori pentru necunoscute care fac ca membrul stîng să fie egal cu membrul drept. Nu există o metodă generală de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice. În cele ce urmează

vom da procedee aplicabile multor ecuaţii care intervin în aplicaţii şi vom studia cîteva tipuri de ecuaţii trigonometrice.

8. *Relaţia între arcele u şi v pentru care avem :*

a) $\sin u = \sin v$:

Putem scrie $\sin u - \sin v = 0$ sau $2 \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2} = 0$, ceea ce înseamnă că trebuie să avem:

$\sin \frac{u-v}{2} = 0$, posibilă numai dacă $\frac{u-v}{2} = k\pi$, adică $u - v = 2k\pi$ sau $\cos \frac{u+v}{2} = 0$, posibilă numai dacă $\frac{u+v}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, adică: $u + v = (2k+1)\pi$, unde k este un întreg oarecare.

Aşadar, pentru ca două arce u şi v să aibă acelaşi sinus este necesar şi suficient ca diferenţa lor să fie egală cu un număr par de π sau suma lor să fie egală cu un număr impar de π.

b) $\cos u = \cos v$:

Această relaţie este echivalentă cu $\cos u - \cos v = 0$ sau cu $-2 \sin \frac{u-v}{2} \sin \frac{u+v}{2} = 0$.

Relaţia este posibilă dacă avem:

$\sin \frac{u-v}{2} = 0$, care este verificată dacă $\frac{u-v}{2} = k\pi$, adică $u - v = 2k\pi$ sau $\sin \frac{u+v}{2} = 0$, verificată pentru $\frac{u+v}{2} = k\pi$, adică $u + v = 2k\pi$, unde k este un întreg oarecare.

Rezultă: *pentru ca două arce u şi v să aibă acelaşi cosinus, e necesar şi suficient ca suma sau diferenţa lor să fie egală cu un număr par de π.*

c) $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ şi $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ sînt relaţii echivalente, pentru că avem: $\operatorname{ctg} u = \frac{1}{\operatorname{tg} u}$ şi $\operatorname{ctg} v = \frac{1}{\operatorname{tg} v}$.

Să stabilim deci relaţia între arcele u şi v pentru care avem $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$.

Relaţia se mai poate scrie $\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v = 0$ sau $\frac{\sin(u-v)}{\cos u \cos v} = 0$, care ne conduce la $\sin(u - v) = 0$ sau $u - v = k\pi$, unde k este un întreg oarecare sau zero.

Pentru ca două arce să aibă aceeaşi tangentă sau cotangentă, este necesar şi suficient ca diferenţa lor să fie egală cu un număr oarecare de π.

Regulile stabilite mai sus folosesc la rezolvarea ecuaţiilor care pot fi aduse la una din formele: *a*), *b*) sau *c*). Exemplele care urmează sînt edificatoare în acest sens.

Exemplul 1. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin^2 3x + \sin^2 5x = \sin^2 7x + \sin^2 9x.$$

Folosind identitatea $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$, ecuaţia dată devine:

$$\frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} = \frac{1 - \cos 14x}{2} + \frac{1 - \cos 18x}{2}$$

sau $\cos 6x + \cos 10x = \cos 14x + \cos 18x$.

Transformînd sumele în produse, obţinem:

$$2\cos 8x \cos 2x = 2\cos 16x \cos 2x$$

sau:

$$2\cos 2x(\cos 16x - \cos 8x) = 0,$$

care se desface în ecuaţiile:

$$\cos 2x = 0, \text{ cu soluţia generală } x' = \frac{(2n_1 + 1)\pi}{4},$$

şi:

$$\cos 16x = \cos 8x, \text{ de forma } \cos u = \cos v.$$

Avem deci ecuaţiile:

$$16x - 8x = 2n_2\pi, \text{ cu soluţia generală } x'' = \frac{n_2\pi}{4},$$

şi:

$$16x + 8x = 2n_3\pi, \text{ cu soluţia generală } x''' = \frac{n_3\pi}{12}.$$

Dacă vrem să obţinem soluţiile cuprinse între 0 şi 2π, dăm lui n diverse valori; obţinem în acest fel:

$$x'_0 = \frac{\pi}{4}; \quad x'_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$x_0'' = 0; \quad x_1'' = \frac{\pi}{4}; \quad x_2'' = \frac{\pi}{2}; \quad x_3'' = \frac{3\pi}{4}; \quad x_4'' = 2\pi.$$

$$x_0''' = 0; \quad x_1''' = \frac{\pi}{12}; \quad x_2''' = \frac{\pi}{6}; \quad x_3''' = \frac{\pi}{4} \dots x_{24}''' = 2\pi.$$

Se observă că ecuaţia dată admite în primul cerc un număr de 24 de soluţii, pentru că soluţiile x' şi x'' sînt cuprinse în şirul soluţiilor x'''.

E x e m p l u l 2. *Să se rezolve ecuaţia*:

$$1 + \operatorname{ctg} 5x \operatorname{ctg} 2x = 0$$

Ecuaţia dată se poate scrie succesiv:

$$\operatorname{ctg} 5x \cdot \operatorname{ctg} 2x = -1; \operatorname{ctg} 5x = -\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} = -\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(-2x)$$

sau:

$$\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right).$$

Această ultimă ecuaţie fiind de forma $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ rezultă:

$$5x - \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = m\pi,$$

cu soluţia generală $x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}$, unde m trebuie să fie un întreg astfel ales ca atît $5x$, cît şi $2x$ să fie diferite de $k\pi$. Căutînd un astfel de număr, aflăm că m trebuie să fie un întreg diferit de forma $3n + 1$.

9. Ecuaţii care se reduc la una din formele

$$\sin u = m; \cos u = m; \operatorname{tg} u = m; \operatorname{ctg} u = m \qquad (1)$$

se rezolvă cu ajutorul relaţiilor stabilite la V—8.

Ca metodă generală de urmat în aceste cazuri va fi transformarea ecuaţiei în alta cu membrul drept un număr pozitiv, ceea ce este întotdeauna posibil.

De exemplu, dacă am avea de rezolvat $\cos u = -\frac{2}{3}$, putem scrie $-\cos u = \frac{2}{3}$ şi, ţinînd seama de relaţia $\cos u = -\cos(\pi - u)$, ecuaţia dată devine:

$$\cos(\pi - u) = \frac{2}{3}.$$

La fel se pot transforma şi celelalte ecuaţii, dacă membrul drept ar fi un număr negativ pe baza relaţiilor $\sin(-u) = -\sin u$; $\operatorname{tg}(-u) = -\operatorname{tg} u$ şi $\operatorname{ctg}(\pi - u) = -\operatorname{ctg} u$.

Făcînd ca membrul drept al fiecăreia din ecuaţiile (1) să fie număr pozitiv, atunci se ştie că dacă:

a) $m \leqslant 1$; există un arc $\alpha = \arcsin m$, pentru care avem $\sin \alpha = m$; în acest caz, ecuaţia $\sin u = m$ devine $\sin u = \sin \alpha$, cu soluţii ce sînt date de:

I) $u - \alpha = 2k\pi$ sau, în grade, $u - \alpha = k \cdot 360°$;

II) $u + \alpha = (2k + 1)\pi$ sau, în grade, $u + \alpha = k \cdot 360° + 180°$ sau de:

I) $u = 2k\pi + \arcsin m$;

II) $u = (2k + 1)\pi - \arcsin m$;

unde k este un întreg oarecare.

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$3\cos 2x + 8 \sin x + 5 = 0.$$

În acest caz urmărim să avem peste tot aceeaşi funcţie trigonometrică cu acelaşi argument; de aceea înlocuim $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, după care obţinem ecuaţia de gradul al doilea în $\sin x$:

$$3 \sin^2 x - 4 \sin x - 4 = 0,$$

care dă:

$$\sin x = -\frac{2}{3} \text{ şi } \sin x = 2.$$

Singura ecuaţie care dă soluţii acceptabile este prima, pe care o scriem cu membrul drept avînd semnul plus, astfel:

$$\sin(-x) = \frac{2}{3}.$$

Aplicînd formulele de mai sus, avem următoarele soluţii generale:

$$\text{I)}\ -x' = k \cdot 360° + \arcsin \frac{2}{3};$$

$$\text{II)}\ -x'' = k \cdot 360° + 180° - \arcsin \frac{2}{3};$$

şi deci:

$$\text{I)}\ x' = k \cdot 360° - 138°11'29'';$$
$$\text{II)}\ x'' = k \cdot 360° - 41°48'31''.$$

b) $m \leqslant 1$; există un arc $\alpha = \arccos m$, pentru care avem $\cos \alpha = m$; ecuaţia $\cos u = m$ devine, în acest caz,

$$\cos u = \cos \alpha,$$

cu soluţiile $u \pm \alpha = 2k\pi$ sau: $u \pm \alpha = k \cdot 360°$ (în grade sexagesimale).

Folosind notaţia $\alpha = \arccos m$, atunci soluţiile ecuaţiei $\cos u = m$ sînt date de:

$$u = 2k\pi \pm \arccos m,$$

unde k este un întreg oarecare.

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia*

$$3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x = 3{,}5.$$

Putem ajunge ca o ecuaţie să conţină aceeaşi funcţie trigonometrică şi un acelaşi argument întrebuinţînd identităţile:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ şi } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Înlocuind în ecuaţie, obţinem:

$$3 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 5 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} = 3{,}5$$

sau, după reduceri, $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, care este echivalentă cu $\cos(\pi - 2x) = \frac{1}{2}$. Avînd în vedere că $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, atunci:

$$\pi - 2x = -2k\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

de unde rezultă:

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}.$$

c) m este un număr oarecare; există un arc $\alpha = \operatorname{arctg} m$, pentru care avem: $\operatorname{tg} \alpha = m$; ecuaţia $\operatorname{tg} u = m$ devine în acest caz:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} \alpha,$$

cu soluţii date de $u - \alpha = k\pi$ sau, dacă folosim notaţia $\alpha = \operatorname{arctg} m$, soluţiile sînt date de:

$$u = k\pi + \operatorname{arctg} m,$$

unde k este un întreg oarecare.

Exemplu: *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=1+\sin x.$$

Ținînd seama că $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, ecuația devine:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=\frac{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

sau, după trecerea în membrul stîng, obținem:

$$\frac{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}=0,$$

care se desface în ecuațiile $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, cu soluția generală $x'=2k\pi$, și $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1=0$, pe care o punem sub forma:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

a cărei soluție generală este dată de ecuația $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi$, și anume:

$$x''=2k\pi-\frac{\pi}{2}.$$

d) Dacă m este un număr oarecare, există un arc $\alpha=$ $=\operatorname{arcctg} m$, pentru care avem $\operatorname{ctg}\alpha=m$; ecuația $\operatorname{ctg} u=m$ devine în acest caz:

$$\operatorname{ctg} u=\operatorname{ctg}\alpha$$

sau $\operatorname{tg} u=\operatorname{tg}\alpha$, care se rezolvă ca mai sus.

10. Rezolvarea unor ecuaţii trigonometrice care pot fi reduse la ecuaţii algebrice

a) Astfel de ecuaţii sînt acelea în care necunoscuta x figurează ca argument numai al unei singure funcţii trigonometrice, astfel că, notînd această funcţie cu o necunoscută auxiliară y, ele se reduc la o ecuaţie algebrică.

Exemple:

1) $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$.

Punînd $\sin x = y$, obţinem o ecuaţie de gradul al doilea, cu rădăcinile: $y_1 = \frac{1}{2}$ şi $y_2 = 3$, dintre care numai prima este acceptabilă şi dă soluţiile:

$$x' = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{şi} \quad x'' = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

2) *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4.$$

Punînd $\operatorname{tg} x = y$, avem de rezolvat $y + \frac{3}{y} = 4$, cu rădăcinile $y' = 1$ şi $y'' = 3$, ambele acceptabile. Arcele x sînt date de ecuaţiile:

$\operatorname{tg} x = 1$, cu soluţia generală în grade sexagesimale:

$$x' = k \cdot 180° + 45°,$$

şi:

$\operatorname{tg} x = 3$, cu soluţia generală în grade sexagesimale:

$$x'' = k \cdot 180° + 71°33'54''.$$

3) *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin 3x = 8 \sin^3 x.$$

După înlocuirea lui $\sin 3x$ prin $3 \sin x - 4 \sin^3 x$, ecuaţia se reduce la una algebrică: $y(12y^2 - 3) = 0$, în care am înlocuit $\sin x$ cu y.

Soluţiile generale sînt date de:

$$\sin x = 0 \text{ cu } x' = k\pi$$

şi:

$$\sin x = \pm \frac{1}{2} \text{ cu } x'' = k\pi \pm \frac{\pi}{6}.$$

b) *O ecuaţie raţională în* $\sin x$ *şi* $\cos x$, *unde cel puţin* $\sin x$ *sau cel puţin* $\cos x$ *figurează la puteri pare, se transformă într-una algebrică, dacă punem* $\cos x = y$, *respectiv* $\sin x = y$.

Exemplu:

$$3 - 7\cos^2 x \sin x - 3 \sin^3 x = 0.$$

Făcînd substituţia $\sin x = y$, atunci $\cos^2 x = 1 - y^2$, iar ecuaţia devine:

$$4y^3 - 7y + 3 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$y_1 = 1\ ;\ y_2 = \frac{1}{2} \text{ şi } y_3 = -\frac{3}{2}.$$

Singurele soluţii acceptabile sînt numai 1 şi $\frac{1}{2}$, pentru care avem:

$$\sin x = 1, \text{ cu soluţia generală } x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

şi

$$\sin x = \frac{1}{2}, \text{ cu soluţiile } x'' = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ şi } x''' = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

c) *O ecuaţie raţională în* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ *se reduce la una algebrică făcînd substituţiile date de identităţile:*

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\text{şi apoi: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

Observare. Substituţiile de mai sus ne conduc întotdeauna la o ecuaţie algebrică care nu este în general o ecuaţie simplă. În unele cazuri putem ajunge la o ecuaţie algebrică mai simplă, aplicînd una din următoarele reguli:

1) Dacă ecuaţia dată nu se schimbă cînd punem $-\cos x$ şi $-\mathrm{tg}\, x$ în loc de $\cos x$, respectiv $\mathrm{tg}\, x$, atunci ecuaţia se rezolvă făcînd substituţia $y = \sin x$.

2) Dacă ecuaţia nu se modifică atunci cînd înlocuim $\sin x$ şi $\mathrm{tg}\, x$ prin $-\sin x$, respectiv $-\mathrm{tg}\, x$, atunci se face substituţia $y = \cos x$.

3) În cazul cînd ecuaţia dată nu se schimbă cînd punem $-\sin x$ şi $-\cos x$ în loc de $\sin x$, respectiv $\cos x$, atunci efectuăm substituţia $y = \mathrm{tg}\, x$.

4) În toate cazurile care nu se încadrează la 1), 2), 3) substituim $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Dacă în ecuaţia dată, avem şi $\mathrm{ctg}\, x$, reducem ecuaţia la una care conţine numai $\sin x$, $\cos x$ şi $\mathrm{tg}\, x$ punînd: $\mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg} x}$.

Exemplu. *Să se rezolve ecuaţia liniară:*

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Efectuînd substituţia arătată mai sus, în care punem $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, ecuaţia dată devine:

$$\frac{2at}{1+t^2} + \frac{b(1-t^2)}{1+t^2} = c$$

sau:

$$(c+b)t^2 - 2at + c - b = 0,$$

care are rădăcinile:

$$t_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b} \quad \text{şi} \quad t_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c+b}.$$

În cazul cînd $a^2 + b^2 > c^2$ şi $b \neq -c$, atunci:

$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t_1$ şi $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t_2$ dau două şiruri de soluţii.

Dacă $a^2 + b^2 = c^2$ şi $b \neq -c$, atunci avem un şir de soluţii date de:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{a}{c+b}.$$

Dacă $a^2 + b^2 < c^2$, ecuaţia nu admite soluţii reale. În cazul $b = -c$, ecuaţia dată devine:

$$a \sin x - c \cos x = c,$$

care se scrie succesiv:

$$a \sin x = c(1 + \cos x);\ 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2c \cos^2 \frac{x}{2} \quad \text{sau}$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(a \sin \frac{x}{2} - c \cos \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Această ultimă ecuaţie se desface în $\cos \frac{x}{2} = 0$, cu soluţia generală $x' = (2n + 1)\pi$, şi $a \sin \frac{x}{2} - c \cos \frac{x}{2} = 0$, cu soluţia generală $x'' = 2k\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{c}{a}$.

d) *O ecuaţie omogenă în sin x şi cos x de forma:*

$$a_0 \sin^m x + a_1 \sin^{m-1} x \cos x + a_2 \sin^{m-2} x \cos^2 x + \ldots + a_m \cos^m x = 0, \text{ unde } a_0 \neq 0, \tag{1}$$

se reduce la o ecuaţie algebrică dacă facem substituţia $\operatorname{tg} x = y$.

Într-adevăr, prin împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei date cu $\cos^m x$, obţinem ecuaţia:

$$a_0 \operatorname{tg}^m x + a_1 \operatorname{tg}^{m-1} x + \ldots + a_m = 0. \tag{2}$$

Menţionăm că prin împărţirea cu $\cos^m x$ s-ar fi putut pierde rădăcinile $x = \frac{(2n + 1)\pi}{2}$ ale ecuaţiei $\cos x = 0$. Dacă înlocuim însă în membrul stîng al ecuaţiei (1) pe x prin $\frac{(2n + 1)\pi}{2}$, acesta devine $a_0 \sin^m \frac{(2n + 1)\pi}{2}$, care nu este nul, de unde rezultă că împărţirea cu $\cos^m x$, în cazul de faţă, nu aduce o pierdere de rădăcini.

Substituind în (2) pe $\operatorname{tg} x$ cu y, obţinem ecuaţia algebrică:

$$a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

care are m rădăcini $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Ecuaţia dată se descompune astfel în ecuaţiile:

$$\operatorname{tg} x = y_1,\ \operatorname{tg} x = y_2, \ldots, \operatorname{tg} x = y_m.$$

În cazul cînd $a_0 = a_1 = \ldots = a_k = 0$, putem scoate factor comun $\cos^k x$, iar ecuaţia se descompune în $\cos^k x = 0$ şi într-o ecuaţie omogenă în $\sin x$ şi $\cos x$ de gradul $n-k$, care se rezolvă ca mai sus.

E x e m p l u. Să se rezolve ecuația:

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 2.$$

Putem face ca ecuația să fie omogenă punînd în loc de 2, din membrul drept, expresia echivalentă $2(\sin^2 x + \cos^2 x)$, după care obținem:

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

sau: $\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$, care se descompune în ecuațiile:

$\cos x = 0$ și $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ $\left(\text{echivalentă cu } \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, cu soluțiile $x' = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ și $x'' = k\pi + \frac{\pi}{6}$.

Verificarea soluției x''. Avem $\sin x = (-1)^k \sin\frac{\pi}{6} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2}$ și $\cos x = (-1)^k \cos\frac{\pi}{6} = (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2}$, prin urmare:

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\cdot(-1)^{2k}\cdot\frac{1}{4} +$$

$$+ \sqrt{3}\cdot(-1)^k\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)^k\frac{\sqrt{3}}{2} + (-1)^{2k}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2.$$

Rezolvarea unor ecuații trigonometrice prin metode speciale

11. Ecuația liniară $a\sin x + b\cos x = c$, pe care am rezolvat-o mai sus prin reducerea ei la o ecuație algebrică, se poate rezolva prin folosirea unui unghi auxiliar astfel: împărțim ambii membri prin a.

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a},$$

unde punem:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$$

după care ecuația devine:

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a} \text{ sau } \frac{\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{c}{a};$$

de aici rezultă:

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos\varphi \text{ şi apoi } x.$$

Ca exemplu să considerăm următoarea:

Problemă. *Un şopron de scînduri, avînd forma ca în figura* 113, *se înveleşte cu un acoperiş care are cele două feţe nişte dreptunghiuri ale căror plane sînt perpendiculare între ele. Ce înclinare faţă de planul orizontal al tavanului, care are o formă dreptunghiulară, trebuie să dăm grinzilor laterale ce servesc drept suport pentru bătutul scîndurilor, pentru a putea folosi scînduri cu lungimile de* 3,75 m *şi* 3 m, *fără a le tăia şi astfel ca ele să acopere perfect tavanul lat de* 4,5 m?

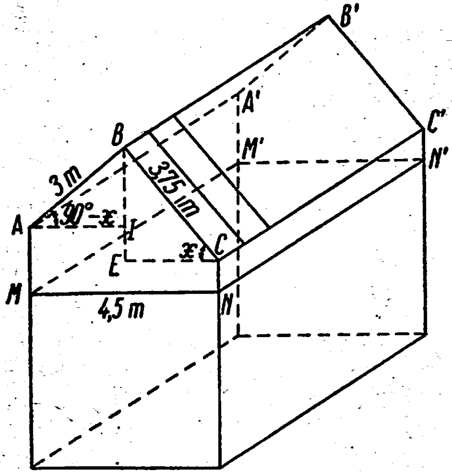


Fig. 113

Rezolvare. Grinzile laterale $AB = A'B'$ şi $BC = B'C'$ trebuie să fie cît lungimea scîndurilor de care dispunem şi pe care le aşezăm paralel cu aceste grinzi.

Pentru ca acoperişul să învelească şopronul perfect, trebuie ca proiecţia ortogonală a sistemului format de cele două dreptunghiuri să fie chiar tavanul $MNM'N'$.

Dacă notăm cu x înclinarea grinzii BC faţă de tavan, atunci înclinarea grinzii AB este de $90° - x$, pentru că cele două grinzi AB şi BC sînt perpendiculare între ele.

Deoarece proiecţia liniei ABC trebuie să fie chiar MN, rezultă că avem:

$$3\cos(90° - x) + 3{,}75\cos x = 4{,}5$$

sau, după simplificare:

$$4\sin x + 5\cos x = 6.$$

Avem de rezolvat astfel o ecuaţie de forma $a \sin x + b \cos x = c$.

Punînd $\frac{5}{4} = \operatorname{tg} \varphi$ sau $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{5}{4} = \operatorname{arctg} 1{,}25 \approx 51°20'27''$, ecuaţia devine:

$$\sin (x + \varphi) = \frac{6}{4} \cos 51°20'27''.$$

Aplicînd logaritmii, avem:

$$\lg \sin (x + \varphi) = \overline{1}{,}97175$$

şi, prin urmare:

$$x + \varphi = 69°33'24'' \quad \text{sau} \quad x + \varphi = 180° - 69°33'24''.$$

Rezultă:

$$x_1 = 69°33'24'' - 51°20'27'' = 18°12'57''$$

şi:

$$x_2 = 180° - 69°33'24'' - 51°20'27'' = 59°6'9''.$$

Am reţinut din soluţiile generale numai unghiurile ascuţite, singurele admisibile în această problemă.

Avem deci două soluţii:

1° Să dăm unei feţe a acoperişului înclinarea de 18°12'57'' faţă de orizontală; cealaltă faţă va avea în acest caz înclinarea de 90° — 18°12'57'' = 71°47'3''.

2° Să dăm unei feţe a acoperişului înclinarea de 59°6'9''; cealaltă faţă va avea în acest caz înclinarea de 90° — 59°6'9'' = 30°53'51''.

Observări privind echivalenţa ecuaţiilor trigonometrice.

Din exemplele de ecuaţii pe care le-am tratat pînă aici se vede că, pentru a ajunge la soluţie, transformăm ecuaţiile în altele echivalente, pînă ce se ajunge la forma cea mai simplă. Trebuie să observăm însă că în decursul acestor transformări să nu se introducă rădăcini străine sau să se piardă din rădăcinile ecuaţiei date; de aceea se impune ca soluţiile generale pe care le obţinem în anumite cazuri să fie verificate.

Se pot ivi exemple cînd ecuaţia este formată dintr-un produs de funcţii egal cu zero. În aceste cazuri este absolut necesar ca valorile lui x, care anulează un factor, să fie numere pentru care ceilalţi factori există (au sens).

Dacă membrul stîng al ecuaţiei este o fracţie care trebuie să fie nulă, atunci rădăcinile numărătorului trebuie să fie numere pentru care numitorul este diferit de zero.

E x e m p l u l 1. Rezolvînd ecuaţia $\cos x\,(1-\operatorname{tg} x)=0$, prin descompunerea ei în ecuaţiile $\cos x = 0$ şi $1-\operatorname{tg} x=0$, găsim soluţiile generale $x' = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ şi $x'' = n\pi + \frac{\pi}{4}$, dintre care cele dintîi, cele provenite de la $\cos x = 0$, nu pot fi luate în considerare, pentru că factorul $1-\operatorname{tg} x=0$ nu are sens pentru $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

Soluţiile bune sînt acelea care verifică $1-\operatorname{tg} x = 0$, adică $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, pentru care factorul $\cos x$ are sens.

E x e m p l u l 2. Din ecuaţia $\frac{\sin x}{1-\cos x} = 0$ rezultă succesiv $\sin x = 0$; $x = n\pi$. Pentru ca $n\pi$ să fie o soluţie, este necesar ca numitorul să nu se anuleze pentru această valoare, adică $1-\cos n\pi$ să fie diferit de zero. Aceasta implică ca numărul n să fie impar. Din analiza soluţiilor ecuaţiei deducem că rădăcinile admisibile sînt cele cuprinse în formula $x = (2k+1)\pi$.

Pe lîngă cazurile citate mai sus, trebuie să avem în vedere şi la ecuaţiile trigonometrice cazurile cînd se introduc rădăcini străine, precum şi pierderile de rădăcini, întocmai ca la ecuaţiile algebrice.

Cînd înmulţim ambii membri ai ecuaţiei cu o expresie care conţine necunoscuta, precum şi în cazurile cînd ridicăm ambii membri ai ecuaţiei la o aceeaşi putere, se pot introduce rădăcini străine. De aceea, în astfel de situaţii, este necesar să verificăm care anume dintre rădăcinile ecuaţiei transformate verifică ecuaţia dată.

Atunci cînd împărţim ambii membri ai ecuaţiei cu o expresie care conţine necunoscuta, în vederea simplificării ecuaţiei, se pot pierde dintre rădăcini acelea care anulează expresia prin care împărţim ambii membri ai ecuaţiei ; de aceea trebuie să căutăm care sînt valorile care anulează această expresie şi să cercetăm dacă ele sau unele din ele sînt soluţii ale ecuaţiilor date.

12. **Problemă.** *Un grup de geologi are misiunea să marcheze pe un podiş punctele unde urmează să se facă forări. În apropierea unor puncte marcate prin nişte copaci, A, B, C* (fig. 114), *ei găsesc un astfel de punct M. Pentru ca acesta să poată fi uşor găsit, se măsoară cu teodolitul unghiurile α şi β sub care se văd distanţele AB şi BC. Cum se va proceda pentru a marca poziţia punctului M pe hartă şi cum se vor stabili distanţele acestuia pînă la punctele vizibile A, B, C?*

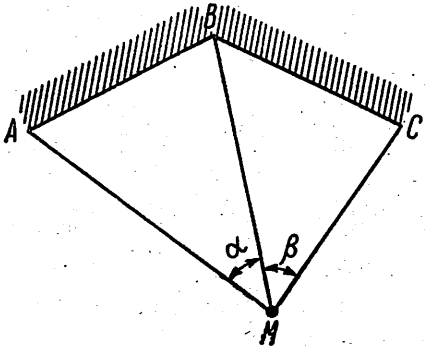


Fig. 114

În afară de unghiurile α, β se determină distanţele $AB = a$; $BC = b$ şi unghiul $\widehat{ABC} = u$. Să notăm unghiurile $\widehat{BAM} = x$ şi $\widehat{BCM} = y$. Dacă reuşim să determinăm aceste unghiuri, avem direcţiile dreptelor AM, CM şi, prin urmare, posibilitatea de a determina poziţia punctului M pe hartă, pentru că unghiurile se păstrează prin asemănare. Să formăm un sistem de ecuaţii care să ne dea cele două necunoscute.

Scriind că suma unghiurilor patrulaterului $ABCM$ este $360°$, avem prima ecuaţie:

$$x + y + u + \alpha + \beta = 360°. \qquad (1)$$

Prin aplicarea teoremei sinusurilor în triunghiurile ABM şi BCM, găsim:

$$\frac{MB}{\sin x} = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ şi } \frac{MB}{\sin y} = \frac{b}{\sin \beta},$$

şi prin urmare, obţinem a doua ecuaţie:

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta} \text{ sau } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}. \qquad (2)$$

Ecuațiile (1) și (2) formează un sistem cu necunoscutele x și y. Deoarece aceste necunoscute figurează ca argumente ale unor funcții trigonometrice, sistemul obținut este *un sistem de ecuații trigonometrice*. Rezolvarea sistemelor trigonometrice se face prin eliminarea pe rînd a necunoscutelor, ca și la sistemele de ecuații algebrice, dacă această eliminare este posibilă.

Sistemul obținut mai sus se poate însă rezolva printr-un artificiu de calcul. Din ecuația (2) deducem, prin aplicarea proprietăților proporțiilor:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{b \sin \alpha - a \sin \beta}{b \sin \alpha + a \sin \beta} = \frac{1 - \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}{1 + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}}.$$

Dacă notăm $\frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} = \operatorname{tg} \varphi$ și transformăm membrul stîng în formulă calculabilă prin logaritmi, obținem:

$$\frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg}(45° - \varphi),$$

de unde rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45° - \varphi) \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}. \qquad (3)$$

Ținînd seama de ecuația (1), din care rezultă $x + y = 360° - (u + \alpha + \beta)$, ecuația (3) devine:

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45°) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + u}{2}.$$

Sistemul de ecuații devine astfel:

$$x + y = 360° - (\alpha + \beta + u)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45°) \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + u}{2}.$$

Din ecuația a doua aflăm $x - y = q$, care, împreună cu $x + y = 360° - (\alpha + \beta + u)$, ne dau unghiurile x și y și deci posibilitatea de a determina prin calcul poziția punctului M.

Cunoscînd unghiurile x şi y, aflăm apoi distanţele MA, MB, MC din relaţiile:

$$\frac{MA}{\sin(x+\alpha)} = \frac{MB}{\sin x} = \frac{a}{\sin x} \text{ şi } \frac{MC}{\sin(\beta+y)} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Observare. Problema determinării punctului M este cunoscută sub numele de problema hărţii sau problema lui Pothenot.

13. Alte sisteme de ecuaţii; exemple de rezolvare.

Exemplul 1. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$x+y=\alpha; \quad \sin x + \sin y = a.$$

Rezolvare. Transformînd ecuaţia a doua în produs, avem:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a.$$

Înlocuind $x+y=\alpha$, obţinem:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

şi, prin urmare: $x-y = 2\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Această ultimă ecuaţie împreună cu $x+y=\alpha$ ne dau x şi y, dacă $\left|\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant 1$.

Exemplul 2. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$x+y=\alpha, \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a.$$

Rezolvare. Avem $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = a.$

Înlocuind produsul de cosinusuri prin sumă şi pe $x+y$ cu α, obţinem:

$$\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos(x-y)} = a,$$

de unde rezultă:

$$\cos(x-y)=\frac{2\sin\alpha}{a}-\cos\alpha$$

şi, prin urmare:

$$x-y=\operatorname{Arccos}\left(\frac{2\sin\alpha}{a}-\cos\alpha\right).$$

Această ecuaţie împreună cu $x+y=\alpha$ ne dau x şi y, dacă avem:

$$\left|\frac{2\sin\alpha}{a}-\cos\alpha\right|\leqslant 1.$$

Exemplul 3. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii*

$$x+y=\alpha;\quad \cos x\cos y=a.$$

Caz numeric: $\alpha=60°$; $a=\frac{1}{2}$.

Rezolvare. Transformînd produsul de cosinusuri în sumă, ecuaţia a doua devine:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2a.$$

Înlocuind $x+y=\alpha$, obţinem: $\cos(x-y)=2a-\cos\alpha$ şi, prin urmare: $x-y=\operatorname{Arccos}(2a-\cos\alpha)$.

Această ultimă ecuaţie împreună cu $x+y=\alpha$ ne dau x şi y, dacă avem:

$$|2a-\cos\alpha|\leqslant 1.$$

Pentru $\alpha=60°$ şi $a=\frac{1}{2}$, sistemul devine: $x+y=60°$; $x-y=\operatorname{Arcos}\frac{1}{2}=n\cdot 360°\pm 60°$, de unde rezultă: $x=30°\pm 30°+n\cdot 180°$; $y=30°\mp 30°-n\cdot 180°$.

Pentru $n=0$, avem soluţiile: $(x=60°;\ y=0°)$ şi $(x=0°;\ y=60°)$.

Exemplul 4. *Să se rezolve sistemul de ecuaţii:*

$$x-y=\alpha;\quad \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=a.$$

Rezolvare. Ecuația a doua se poate transforma succesiv, aplicînd proprietățile proporțiilor, astfel:

$$\frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} = \frac{a}{1}; \quad \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{a+1}{a-1}$$

sau:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{a+1}{a-1}.$$

Înlocuind $x - y = \alpha$, obținem $\cos(x+y) = \frac{a-1}{a+1}\cos\alpha$, și, prin urmare: $x + y = \operatorname{Arccos}\left(\frac{a-1}{a+1}\cos\alpha\right)$. Această ultimă ecuație împreună cu $x - y = \alpha$ ne dau x și y, dacă avem:

$$\left|\frac{a-1}{a+1}\cos\alpha\right| \leqslant 1.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

(*Răspunsurile și indicațiile se găsesc la p. 250—251.*)

Să se demonstreze identitățile:

283. $\operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a - \sin^2 b}.$

284. $2(\sin^6 a + \cos^6 a) = \frac{1}{2}\sin^2 2a + 2\cos^2 2a.$

285. $\frac{\cos 3a}{\cos a} = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}.$

286. $\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} 2a + 4\operatorname{tg} 4a + 8\operatorname{tg} 8a + 16\operatorname{ctg} 16a = \operatorname{ctg} a.$

287. $2 \cdot \frac{1 + \sin a}{1 + \cos a} = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{a}{2}\right)^2.$

Să se demonstreze identitățile condiționate (288—289), *adevărate dacă* $a = b + c$:

288. $\sin a + \sin b + \sin c = 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}.$

289. $\operatorname{tg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c.$

Să se demonstreze identitățile condiționate (290—291), *adevărate dacă* $a + b + c = 90°$:

290. $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1 - 2\sin a \sin b \sin c$.

291. $\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} c = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c$.

292. $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = 2\sin a \sin b \cos c$, dacă $a + b + c = 180°$.

293. $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 + 2\cos a \cos b \cos c$, dacă $a + b + c = 360°$.

294. $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} d = \dfrac{\sin(a+d)\sin(b+d)\sin(c+d)}{\cos a \cos b \cos c \cos d}$, dacă $a + b + c + d = 180°$.

295. $\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^{n+1} \cdot 4 \sin \dfrac{a}{2} \sin \dfrac{b}{2} \sin \dfrac{c}{2}$,

dacă $a + b + c = 2n\pi$.

Să se demonstreze că între elementele oricărui triunghi există următoarele relații:

296. $\dfrac{\cos A \cos B}{ab} + \dfrac{\cos B \cos C}{bc} + \dfrac{\cos C \cos A}{ca} = \dfrac{\sin^2 A}{a^2}$.

297. $\cos A = 1 + \dfrac{r - r_a}{2R}$.

298. $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{B}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{C}{2} = \dfrac{4R + r}{p}$.

299. $a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C = 4S$.

300. $4S = l_a l_b l_c \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a+b+c}\right)$

Să se rezolve ecuațiile trigonometrice:

301. $\sin 3x = \cos x$.

302. $\operatorname{tg} 7x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

303. $\sin 3x + \cos 3x = 0$.

304. $\operatorname{tg}(x + 45°) = \operatorname{ctg} x$.

305. $\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$.

306. $\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x = 0$.

307. $3\,\mathrm{tg}^2 3x - 1 = 0$.

308. $2\sin^2 2x - 1 = 0$.

309. $\cos^2\left(\frac{x}{2} + 60^\circ\right) - 1 = 0$.

310. $\sin^3\frac{x}{2} = \frac{1}{6}\sin^3 x$.

(Facultatea de matematică şi fizică „Babeş-Bolyai", Cluj, 1958)

311. $2\sin 2x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$.

(Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti, 1958)

312. $\sin(x + 10^\circ) - \sin(x - 50^\circ) + \sin(x + 70^\circ) = 1$.

(Facultatea de chimie, Cluj, 1957)

313. $2\sin^3 x - 3\sin x \cos x = 0$.

314. $\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 3x = 0$.

315. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1$.

(Facultatea de mecanizare a agriculturii, Craiova, 1957)

316. $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$.

(Facultatea de matematică şi fizică, Timişoara, 1956)

317. $3\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 3\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 0$

(Institutul politehnic, Braşov, 1956)

318. Să se găsească unghiurile unui triunghi ştiind că B este de trei ori mai mare ca C şi că raportul laturilor b şi c este egal cu $\frac{9}{25}$.

319. Laturile AB şi AC ale unui triunghi ABC sînt egale respectiv cu 2 cm şi 3 cm. Unghiul A fiind soluţia diferită de zero a ecuaţiei trigonometrice $\sin x + \cos 2x = 1$, să se calculeze lungimea laturii BC, precum şi funcţiile trigonometrice ale arcului $\frac{A}{2}$.

(Institutul politehnic, Iaşi, 1957)

320. $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$.

321. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x$

(Facultatea de industrie uşoară, Iaşi, 1955)

322. $\cos 7x - \sin 7x = \cos x - \sin x.$

(Facultatea de chimie, Cluj, 1957)

323. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

324. Trei forțe, egale fiecare cu a treia parte a greutății unui corp așezat pe un plan înclinat, mențin corpul în echilibru. O forță este verticală, alta este paralelă cu orizontala locului, iar a treia este paralelă cu planul înclinat. Să se determine înclinarea α a planului.

325. $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x.$

326. $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}.$

(Institutul de petrol și gaze, București, 1955)

327. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x.$

328. $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$

(Institutul de transporturi și căi ferate, București, 1955)

329. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4x\right) = \sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

(Institutul politehnic, Brașov 1956)

330. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}.$

(Facultatea de matematică și fizică, Iași, 1955).

331. $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$

332. Se demonstrează experimental și teoretic că o rază de lumină care trece dintr-un mediu mai puțin dens într-altul mai dens și invers se refractă după legea $\sin i : \sin r = n$, unde i este unghiul de incidență și r cel de refracție, iar n o constantă specifică numită indice de refracție (pentru aer-apă $n = 1{,}33$). Cunoscînd aceasta, să se determine drumul unei raze care trece din aer în apă, știind că unghiul de incidență este cu $1°$ mai mare decît cel de refracție.

333. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$

334. $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$.

(Facultatea de matematică şi fizică „Babeş-Bolyai", Cluj, 1956)

335. $\sin 4x + \operatorname{tg} 2x + \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0$.

(Institutul politehnic, Bucureşti, 1957)

336. $(\cos 2x + 2 \cos x + 1)(\cos 2x - 2 \cos x + 1) + 1 = 0$.

(Institutul politehnic, Bucureşti, 1958)

337. $\cos 5x = 16 \cos^5 x$.

338. $\sin^8 x - \cos^8 x - 2 \sin^2 x + 1 = 0$.

339. $\arcsin x + \arcsin x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

340. $\arccos x + \arccos(1 - x) = \arccos(-x)$.

341. $\operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1} = \operatorname{arctg} a$.

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii trigonometrice:

342. $\sin x + \sin y = a$; $\cos x + \cos y = b$.

343. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = a$; $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = b$.

344. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$; $\operatorname{tg}(x + y) = b$.

345. $4 \sin x \sin y = 1$; $4 \cos x \cos y = 3$.

346. $x - y = 15°$; $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}$.

(Institutul pedagogic, Timişoara, 1956)

347. Două plane înclinate formînd între ele un unghi de 110° sînt prinse printr-o muchie comună pe care se află un scripete. De capetele unei sfori ce trece peste scripete sînt prinse greutăţile 6,84 kgf şi 11,34 kgf. Ştiind că sistemul e în echilibru, să se determine înclinarea planelor pe sol, neglijînd frecarea.

348. $x + y = \frac{\pi}{2}$; $\sin x + \cos y = 1$ (soluţii din primul cadran).

349. $\sin x + \cos y = 0{,}5$; $\sin^2 x + \cos^2 y = 0{,}25$ (soluţii din primul cadran).

350. Pe un cerc de rază R se iau două puncte A şi B, astfel ca arcul $AB = \alpha$. Să se determine un al treilea punct C pe cerc, astfel ca raportul lungimilor coardelor AC şi BC să aibă o valoare dată m.

351. $\frac{\sin x}{3} = \frac{\sin y}{4} = \frac{\sin z}{5}$; $x + y + z = \pi$ (soluţii din primul cadran).

352. $\arcsin x = -\arccos y$; $\cos [3\pi(x + y)] = 1$.

CAPITOLUL VI

LUCRĂRI PRACTICE

MĂSURĂTORI PE TEREN

1. Aplicațiile trigonometriei în practică sînt numeroase. Unele dintre ele au fost arătate în cursul lecțiilor de pînă acum. Printre cele mai importante aplicații sînt măsurarea dimensiunilor și a ariei unui teren de pe suprafața Pămîntului.

Cînd avem de măsurat o mare parte din suprafața Pămîntului, nu putem neglija faptul că Pămîntul este rotund ca o sferă. În operațiile de măsurare din acest caz trebuie să ținem seama de sfericitatea Pămîntului. Problemele de acest fel sînt mai complexe. Cu astfel de probleme se ocupă *geodezia*.

Dacă avem de măsurat o parte din suprafața Pămîntului, unde se poate neglija sfericitatea, pentru că terenul este relativ mic, facem apel la știința măsurării unor astfel de suprafețe, adică la *topografie*.

Partea din topografie care se ocupă în special cu măsurarea terenurilor agricole se numește *agrimensură* sau *arpentaj*.

Pentru a putea duce la bun sfîrșit o măsurare de teren trebuie să culegem datele necesare: laturi și unghiuri. În acest scop folosim diverse instrumente de măsurat.

2. **Instrumente pentru măsurarea distanțelor pe teren.** Cele mai întrebuințate instrumente pentru măsurarea distanțelor sînt lanțul și panglica.

Lanțul (fig. 115) are de obicei lungimea de 10 m și este format din 50 de vergele de sîrmă groasă, terminate la capete cu cîte un inel; două vergele consecutive sînt legate prin inele. Vergelele sînt astfel dimensionate, încît distanța dintre centrele a două inele să fie de 20 cm.

Panglica (fig. 116). Pentru a economisi timp în operația de măsurare a distanțelor, avem nevoie de un instrument cu o lungime mai mare. Pentru această operație corespunde mult mai bine decît lanțul o panglică de metal lungă de

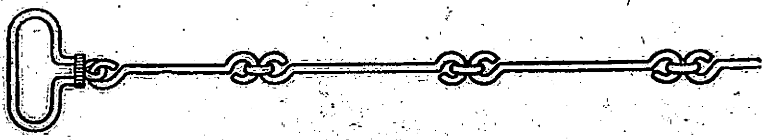


Fig. 115

10 m, 20 m sau 50 m, înfășurată pe o cruce de lemn. Panglica dă mai multă precizie în măsurarea lungimilor decît lanțul, prin care se introduc erori din cauza sugrumărilor care au loc în dreptul inelelor de legătură.

3. **Instrumente pentru măsurarea unghiurilor.** Pentru a afla unghiul a două direcții de pe teren se întrebuințează *grafometrul* și *teodolitul*.

Grafometrul (fig. 117) este compus dintr-un semicerc gradat. La extremitățile unui diametru fix, AB, al semicercu-

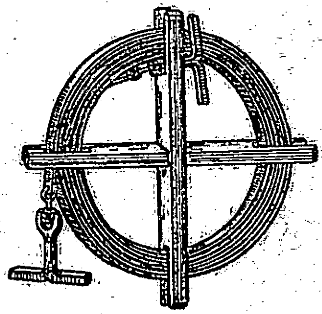


Fig. 116

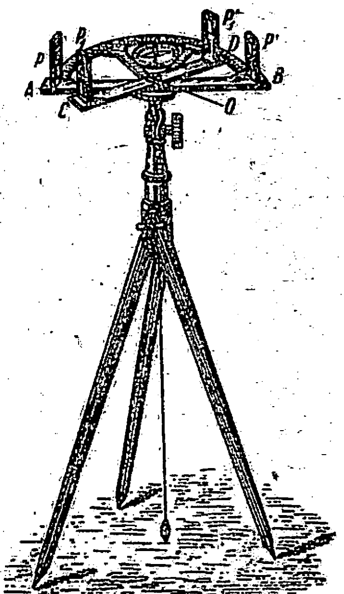


Fig. 117

lui gradat, unde sînt notate în cazul diviziunii sexagesimale 0° și 180°, se află două pinule, p și p', care determină prin niște deschideri verticale un plan de vizare fix. Sistemul de pinule fixate de diametrul fix formează *alidada* *fixă*. În jurul centrului O se mişcă, şi o *alidadă mobilă*, prevăzută şi ea cu două pinule, p_1, p_1', care determină un al doilea plan de vizare, mobil.

Grafometrul se aşază pe un trepied. El este prevăzut cu nivele de aer pentru verificarea orizontalităţii cercului gradat. De asemenea, se prinde de grafometru un fir de plumb, pentru a verifica dacă centrul O al cercului gradat se proiectează în vîrful unghiului pe care-l măsurăm. Pentru

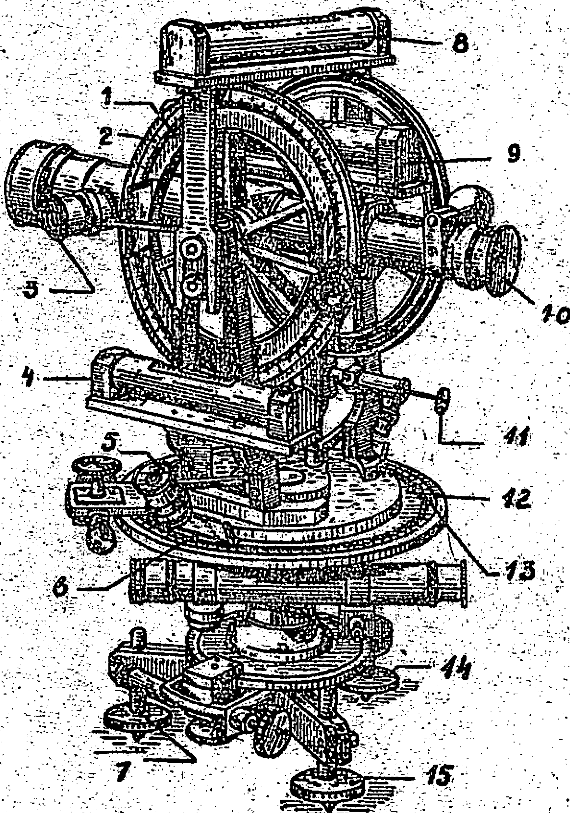


Fig. 118

1 — cerc alidadă vertical; 2 — limb vertical gradat; 3 — lupă acromatică; 4 — nivelă; 5 — lupă acromatică; 6 — vernier; 7 — şurub de calare; 8 — nivelă; 9 — nivelă; 10 — ocularul lunetei; 11 — şurub micrometric; 12 — cerc alidadă orizontal; 13 — limb orizontal gradat; 14, 15 — şurub de calare.

a măsura un unghi așezat într-un plan orizontal, se așază cercul gradat cu centrul deasupra vîrfului unghiului. Rotim cercul gradat pînă ce vedem obiectul de pe o latură a unghiului prin sistemul de pinule de pe alidada fixă, apoi rotim alidada mobilă pînă ce vedem prin pinulele ei obiectul de pe cealaltă latură a unghiului. În acest stadiu al operației citim mărimea unghiului direct pe cercul gradat.

Prin așezarea cercului gradat într-un plan vertical putem măsura și unghiurile așezate în acest plan.

Teodolitul (fig. 118) este un aparat mai perfecționat pentru măsurarea unghiurilor. El este prevăzut cu două cercuri gradate: unul orizontal și altul vertical. Teodolitul are în locul alidadelor cu pinule o lunetă așezată pe cercul vertical, cu care vizăm obiectele pentru măsurarea unghiului format de razele vizuale care pleacă din ochiul observatorului către cele două obiecte vizate. Pentru a obține un cerc așezat într-un plan orizontal și implicit axa aparatului pe verticală, se pot folosi diferite dispozitive cu care este prevăzut aparatul.

Pentru citirea unghiurilor, atît pe cercul orizontal cît și pe cel vertical, sînt fixate de aparat lupe, care ușurează citirea și permit evaluarea unghiurilor relativ mici.

Aplicații

4. În rezolvarea problemelor care urmează ne vom mărgini la cazul cînd lucrăm pe un teren ce poate fi considerat orizontal sau în care se pot duce cîteva linii avînd direcția orizontală.

Deoarece măsurarea liniilor pe teren este legată de greutăți, pentru că linia nu e perfect orizontală, vom evita, pe cît posibil, încărcarea datelor problemei prin măsurarea de linii. Preferăm măsurări de unghiuri și cît mai puține măsurători de lungimi urmînd ca distanțele necunoscute să fie determinate prin calcul.

5. **Măsurarea înălțimii unui coș de fabrică de care ne putem apropia.**

Problemă. *Să se măsoare înălțimea unui coș de fabrică AC (fig. 119), a cărui bază C este accesibilă.*

Rezolvare. Ne așezăm cu trepiedul a cărui înălțime este $IB = h$, într-un loc care se află așezat față de baza coșului la o distanță CI, pe care o putem măsura. Să presupunem că am găsit $CI = a$. Din B măsurăm cu teodolitul unghiul α, pe care-l formează raza vizuală ce pleacă din ochiul observatorului către vîrful coşului cu orizontala BD.

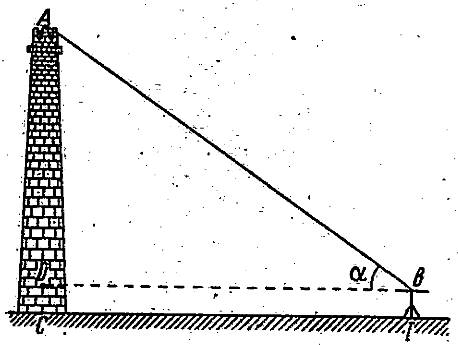


Fig. 119

Cu datele căpătate prin măsurare directă

$CI = a$ şi $\widehat{ABD} = \alpha$ obţinem din triunghiul dreptunghic ABD:

$$AD = BD \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha$$

şi, prin urmare, înălţimea coşului pînă la bază este:

$$AC = AD + DC = a \operatorname{tg} \alpha + h.$$

6. Aflarea înălţimii unui obiectiv de care nu ne putem apropia.

Vom arăta cum s-au efectuat măsurătorile pe teren, pentru determinarea înălţimii coşului fabricii, din problema 264. Deoarece nu ne-am putut apropia de coşul fabricii, am aşezat trepiedul într-un loc A.

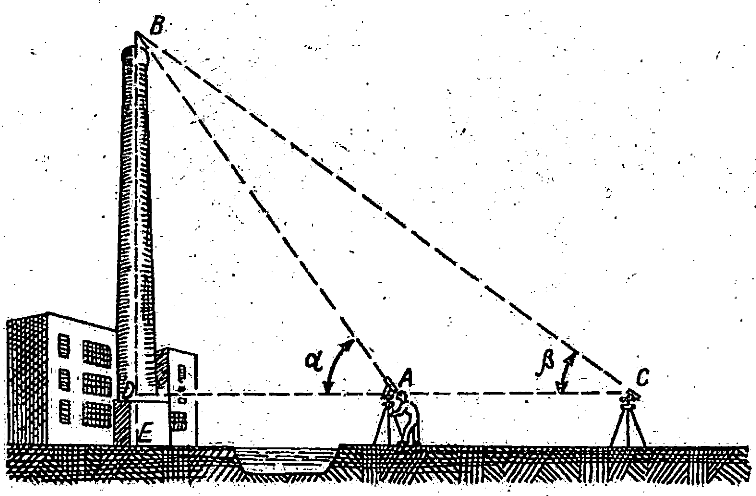


Fig. 120

De aici am măsurat unghiul α format de raza vizuală a extremităţii B a coşului (fig. 120) cu orizontala AD a locului de observaţie, apoi ne-am îndepărtat de locul A pe o distanţă $AC = c$, astfel ca linia dreaptă AC să treacă prin D (un punct al axei verticale ce trece prin gura coşului). Din C am măsurat unghiul β, format de raza vizuală BC cu orizontala CD. Cu aceste date se poate afla înălţimea BD a coşului. Exprimăm aria S a triunghiului CAB în două feluri:

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{c \cdot BD}{2},$$

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin (180^\circ - \alpha) \sin \beta}{2 \sin (\alpha - \beta)} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\alpha - \beta)}$$

Din egalitatea

$$\frac{c \cdot BD}{2} = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin (\alpha - \beta)}$$

rezultă:

$$BD = \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Pentru a afla înălţimea coşului adăugăm distanţa DE, care este înălţimea trepiedului, pe care o presupunem egală cu h.

Aşadar, avem:

$$BE = h + \frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

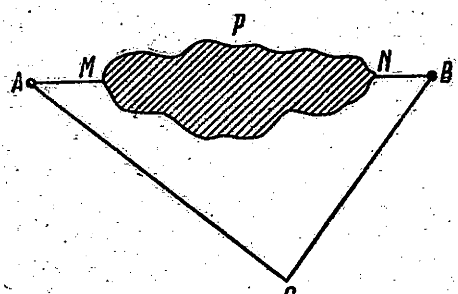


Fig. 121

7. Distanţa dintre două puncte accesibile între care se găseşte un obstacol

Problemă. *Pe un şes întins se află o pădurice. Să se arate cum se poate determina lungimea ei între două aşezări* A *şi* B *ce se află la marginea păduricii* (fig. 121).

Rezolvare. În această problemă avem de aflat distanţa dintre aşezările A şi B între care se află păduricea P, ce constituie un obstacol pentru o măsurare directă a distanţei

AB. De aceea ne alegem în afara pădurii un loc C de pe şes, de unde vizăm cu grafometrul locurile A şi B, marcate prin jaloane, şi măsurăm unghiul $\widehat{ACB} = \gamma$. De asemenea, se măsoară direct distanţele $AC = b$ şi $BC = a$, ceea ce este posibil, pentru că punctele A şi B sînt accesibile.

Avem astfel de rezolvat un triunghi ACB, în care cunoaştem două laturi şi unghiul cuprins între ele. Se pot determina astfel şi celelalte elemente: distanţa AB, precum şi unghiurile A şi B.

O b s e r v a r e a I. Dacă A şi B se află chiar la periferia pădurii, atunci AB reprezintă distanţa căutată. Dacă A şi B sînt la o oarecare distanţă de periferie, va trebui să scădem din AB lungimea distanţelor AM şi BN aşezate pe AB (M şi N fiind chiar la periferia pădurii). Pentru a măsura AM şi BN, folosim unghiurile calculate din A şi B, care ne dau direcţia distanţelor AM şi BN. Cunoscînd direcţia dreptelor AM şi BN, trecem la măsurarea directă a acestor distanţe. Scăzînd apoi suma $AM + BN$ din AB, vom afla lungimea pădurii între cele două aşezări A şi B.

O b s e r v a r e a II. Prin aflarea direcţiilor celor două drepte AM şi BN se rezolvă o altă problemă ce se iveşte în practică. Cele două drepte AM şi BN ne dau direcţiile după care trebuie să lucreze două echipe ce pornesc simultan din A şi B pentru a lega aşezările A şi B printr-o şosea care să treacă prin păduricea P.

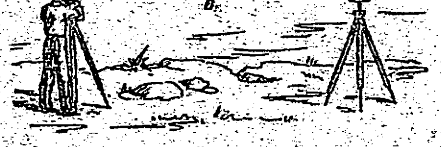


Fig. 122

Lucrînd pe direcţiile găsite, cele două echipe vor reuşi să facă joncţiunea între şoseaua ce pleacă din A cu aceea ce pleacă din B.

8. Distanţa de la un punct accesibil la un altul inaccesibil, dar vizibil.

Problemă. *Cineva care se află pe un mal al Dunării vrea să afle distanţa de la el pînă la un şlep acostat pe celălalt mal. Cum va proceda?*

Rezolvare. În această problemă trebuie să aflăm distanța de la un observator așezat în A (fig. 122) pînă la un punct B vizibil (șlepul), dar inaccesibil. În acest scop alegem pe malul unde se află A un al doilea punct, C, de unde să fie vizibil punctul B. Măsurăm cu instrumentele latura $AC = b$ și unghiurile $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BCA} = \gamma$. Se obține un triunghi ABC, în care cunoaștem o latură și două unghiuri alăturate. Aplicînd teorema sinusurilor, avem:

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)},$$ de

unde rezultă distanța căutată:

$$AB = \frac{b \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

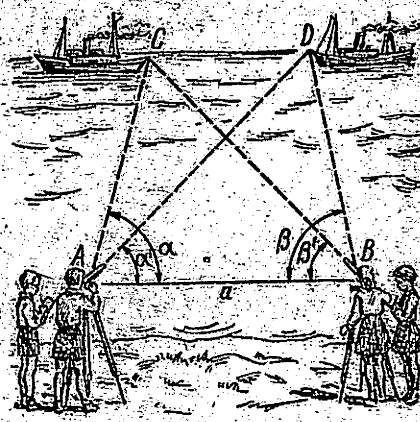


Fig. 123

9. Distanța între două puncte inaccesibile, ambele vizibile.

Problemă. *Elevii unei școli din Constanța se află la lucrări practice de trigonometrie pe o plajă. Ei își propun să calculeze distanța între două vapoare ancorate în larg ce se zăresc în acel moment. Cum vor proceda?*

Rezolvare. Fie C și D două puncte, cele mai apropiate de pe cele două vapoare a căror distanță trebuie aflată. Pentru aceasta, alegem pe plajă o bază $AB = a$ (fig. 123), iar din A și B măsurăm unghiurile $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{DAB} = \alpha'$, $\widehat{DBA} = \beta$ și $\widehat{CBA} = \beta'$. Cu aceste date se poate determina distanța CD între cele două vapoare.

Într-adevăr, din triunghiul DAB, în care aplicăm teorema sinusurilor, obținem:

$$\frac{AD}{\sin\widehat{ABD}} = \frac{AB}{\sin\widehat{ADB}}$$

sau:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha' + \beta)}, \quad AD = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha' + \beta)}.$$

În triunghiul CAB avem:

$$\frac{AC}{\sin\beta'}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta')} \text{ sau } AC=\frac{a\sin\beta'}{\sin(\alpha+\beta')}.$$

În acest mod aflăm două laturi și unghiul cuprins între ele din triunghiul CAD:

$$AC=\frac{a\sin\beta'}{\sin(\alpha+\beta')};\ AD=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha'+\beta)} \text{ și } \widehat{CAD}=\alpha-\alpha'.$$

Cunoscînd aceste elemente, putem calcula cu ajutorul lor distanța CD.

Triangulație

10. Problemă. *Un teren întins are forma ca în figura 124. Ce operații trebuie să facem pentru a ridica planul acestui teren efectuînd un număr minim de măsurători de lungimi?*

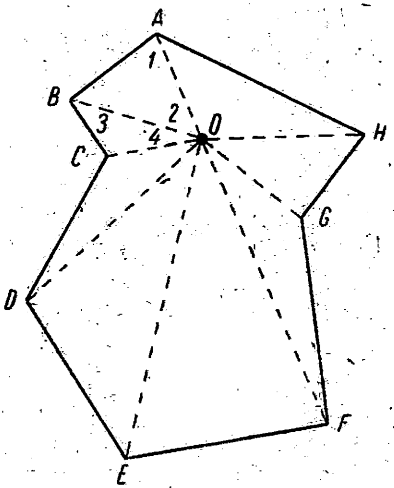


Fig. 124

Rezolvare. Terenul fiind foarte întins, este de altfel greu de presupus că vom putea măsura direct distanțele mari. Aceste distanțe trebuie găsite prin calcul. În acest scop alegem un punct O din interiorul terenului, de unde efectuăm observațiile. Unim O cu A și măsurăm distanța $OA=a$ precum și unghiurile $\widehat{BAO}=\hat{1}$ și $\widehat{AOB}=\hat{2}$. În triunghiul astfel format cunoaștem o latură a și două unghiuri $\hat{1}$ și $\hat{2}$. Calculăm cu ajutorul acestor elemente latura BO. În noul triunghi BOC cunoaștem latura calculată $BO=b$ și unghiurile pe care le măsurăm $\widehat{CBO}=\hat{3}$ și $\widehat{BOC}=\hat{4}$. Din nou dispunem de elemente cu ajutorul cărora putem calcula OC ș.a.m.d.

După aceste operații repetate vom cunoaște pînă la sfîrșit unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, ..., $\widehat{HOA}$ și lungimile OA, OB, OC, ..., OH, obținute prin calcul pornind numai de la cunoașterea lungimii OA și a unghiurilor pe care le măsurăm succesiv.

Fixăm pe o planșetă un punct O și în jurul său unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, ..., $\widehat{HOA}$, apoi purtăm pe aceste raze toate distanțele OA, OB, ..., OH reduse la o scară convenabil aleasă, astfel ca toate punctele A, B, C, ..., H să intre pe planșetă. Figura ce se va obține va fi planul terenului.

Dacă reducem distanțele OA, OB, ..., OH de k ori, atunci planul terenului va fi la scara $\frac{1}{k}$.

Metoda folosită de a determina toate distanțele OB, OC, ..., OH prin despărțirea terenului în triunghiuri și de a calcula elementele triunghiurilor, pornind de la elementele unui triunghi de bază, se numește *triangulație*.

Metoda triangulației a fost folosită cu succes la calcularea lungimii unui arc de meridian.

11. Măsurarea lungimii unui arc de meridian prin metoda triangulației.

Să presupunem că se măsoară lungimea arcului de meridian AA' (fig. 125).

De o parte și de alta a meridianului se aleg punctele apropiate ce se pot observa, B, C, D, E, F, și se construiesc triunghiurile ABC, BCD, CDE, EDF, EFA', ale căror laturi sînt întîlnite de meridian în L, M, N, P.

Se măsoară direct una din laturile triunghiurilor, de exemplu latura AB, pe care o numim bază. Se măsoară apoi cu teodolitul unghiurile A, B, C și se calculează latura BC.

Cunoscînd lungimea BC, se măsoară unghiurile triunghiului BCD și se calculează lungimea CD ș.a.m.d.

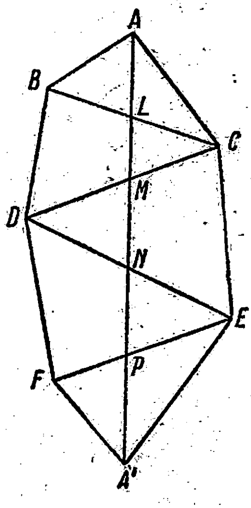


Fig. 125

Pe de altă parte măsurăm unghiul $\widehat{BAL}$. Cunoscînd în triunghiul BAL latura BA şi unghiurile $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAL}$, aflăm prin formule latura AL. La fel se calculează latura LM din triunghiul LCM, apoi MN din triunghiul DMN latura NP din triunghiul NEP şi PA' din triunghiul FPA'. Suma lungimilor calculate $AL + LM + MN + NP + PA'$ ne va da distanţa AA'.

Notă. Prima măsurare a lungimii unui arc de meridian a permis oamenilor de ştiinţă să găsească dimensiunile Pămîntului: raza, suprafaţa, volumul şi masa. De asemenea, măsurarea arcului de meridian a avut un rol imens în ştiinţă; ea a permis lui Newton să verifice rezultatele obţinute în legătură cu legea gravitaţiei, pe baza determinării razei pămînteşti efectuată de abatele Picard.

Lucrări practice pe teren

353. Să se măsoare cu instrumente şi prin calcul înălţimea unui coş de fabrică, a unei clădiri înalte sau a unui copac.

354. Să se determine înălţimea unui copac situat peste rîu sau a unui munte a cărui bază o presupunem inaccesibilă.

355. Să se determine lărgimea unei rîpe sau a unui şir de case.

356. Să se calculeze distanţa de la un loc de observaţie pînă la un punct vizibil situat dincolo de un obstacol.

357. Să se determine din curtea şcolii distanţa între două case situate la o mare depărtare de şcoală.

358. Să se ridice planul terenului care aparţine şcolii.

359. Să se calculeze aria unui teren agricol sau a unui teren sportiv prin triangulaţie.

PROBLEME DE RECAPITULARE ŞI SINTEZĂ

(*Răspunsurile şi indicaţiile se găsesc la p.* 251—252)

Probleme de geometrie în spaţiu

360. Unghiul format de o perpendiculară şi o oblică, duse dintr-un punct M pe un plan P, este egal cu α. Lungimea oblicei este egală cu a. Să se determine distanţa punctului M la planul P ($a = 11,22$; $\alpha = 72°45'$).

361. O dreaptă situată în afara unui plan taie o dreaptă din acel plan sub un unghi α. Dreapta cuprinsă în plan formează cu proiecția pe plan a primei drepte un unghi β; să se afle unghiul format de prima dreaptă cu planul ($\alpha = 8°26'$; $\beta = 5°40'$).

362. Din centrul unui cerc circumscris unui triunghi cu laturile a, b și c se ridică o perpendiculară h pe planul triunghiului. Să se afle unghiurile pe care acest plan le face cu dreptele ce unesc extremitatea perpendicularei cu vîrfurile triunghiului ($h = 60$; $a = 30$; $b = 5$; $c = 29$).

363. Se dă unghiul diedru α. Dintr-un punct, aflat pe una din fețele acestui unghi și la distanța a de muchie, se ridică o perpendiculară pînă la intersecția ei cu cealaltă față a unghiului diedru. Să se afle lungimea acestei perpendiculare ($a = 6,06$; $\alpha = 41°55'$).

364. Pe un acoperiș cu înclinarea de 20° se duce dreapta MN (fig. 126), care face cu linia de cea mai mare pantă MK un unghi de 25° (linie de cea mai mare pantă se numește dreapta dusă în planul înclinat, perpendiculară pe o dreaptă orizontală a aceluiași plan). Să se afle unghiul x pe care-l face dreapta MN cu orizontul.

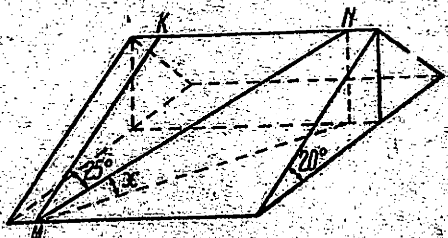


Fig. 126

365. Pe coasta unui munte cu înclinarea de 32° coboară un drum ce formează cu linia de cea mai mare pantă un unghi de 45°. Să se afle înclinarea drumului.

366. Să se afle unghiul cu care este înclinată diagonala unui cub față de fețele lui.

367. Unghiurile pe care le face diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile lui sînt respectiv α, β și γ.

1) Să se demonstreze relația: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2) Să se calculeze γ, dacă $\alpha = 31°10'$ și $\beta = 69°9'$.

368. Se dă o prismă dreaptă avînd ca bază un romb cu unghiul ascuțit α. Cum trebuie tăiată această prismă pentru a obține ca secțiune un pătrat cu vîrfurile situate pe muchiile laterale ale prismei?

369. Diagonala l a unui paralelipiped dreptunghic este înclinată cu un unghi φ față de planul bazei. Unghiul ascuțit dintre diagonalele bazei este egal cu β. Să se afle volumul paralelipipedului.

370. Deasupra unei gropi de var se construieşte un acoperiş de forma unei piramide regulate, avînd ca bază un pătrat. Latura bazei este de 6,5 m, iar înălţimea acoperişului trebuie să fie de 2,5 m. Să se afle lungimea muchiei SA şi să se calculeze unghiul pe care-l face această muchie cu planul bazei (fig. 127).

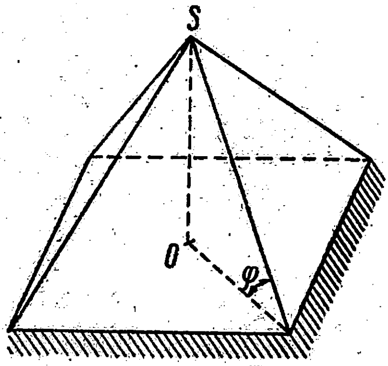


Fig. 127

371. Înălţimea unei piramide regulate, cu baza un pătrat, este de 7 cm, iar latura bazei este de 8 cm. Cu ce unghi este înclinată muchia laterală faţă de bază?

372. Într-o piramidă cu baza un triunghi echilateral, una din feţele laterale este perpendiculară pe bază, iar celelalte două formează cu baza un unghi φ. Să se afle unghiurile pe care le formează muchiile laterale cu baza ($\varphi = 30°$).

373. O piramidă regulată are ca bază un poligon cu n laturi. Unghiul unei feţe plane din vîrf este α. Să se afle unghiurile diedre de la bază ($n = 4$; $\alpha = 60°$).

374. Acoperişul unui turn are forma unei piramide octogonale regulate. Feţele laterale formează cu baza unghiuri de 60°. Latura bazei piramidei este de 1,23 m. Cîţi metri pătraţi de tablă de aramă sînt necesari pentru a acoperi turnul?

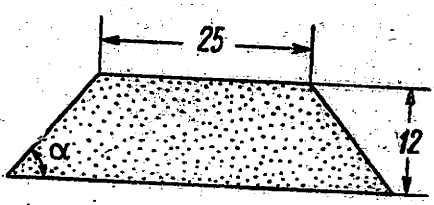


Fig. 128

375. În figura 128 se dă o secţiune a unui terasament de cale ferată. Unghiul α se determină din relaţia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Cîţi metri cubi de pămînt conţine o porţiune din acest terasament lungă de 1 m? (Dimensiunile de pe figură sînt date în metri.)

376. ⊙ O piramidă regulată are ca bază un poligon cu n laturi. Muchia laterală b este înclinată față de planul bazei cu un unghi β. Să se afle volumul acestei piramide ($n = 8$; $b = 3,5$ m; $\beta = 78°39'$).

377. ⊙ O piramidă are ca bază un dreptunghi. Dintre fețele laterale ale piramidei, două sînt perpendiculare pe bază, iar celelalte două formează cu aceasta respectiv unghiurile α și β. Să se afle aria laterală a piramidei, știind că înălțimea ei este h.

378. Groapa unui eleșteu are forma unui trunchi de piramidă regulată, avînd ca baze cîte un pătrat. Laturile bazelor sînt respectiv $a = 14$ m și $b = 10$ m. Fețele laterale sînt înclinate față de planul bazei cu un unghi $\alpha = 38°$. Ce cantitate de apă încape în această groapă?

379. Un rezervor de formă cilindrică, așezat orizontal, este umplut cu un lichid (fig. 129). Arcului AB îi corespunde un unghi la centru $\alpha = 135°$. Diametrul interior al rezervorului este $D = 1,7$ m, iar lungimea rezervorului (măsurată de asemenea în interior) este $l = 3,5$ m. Să se afle volumul lichidului din rezervor.

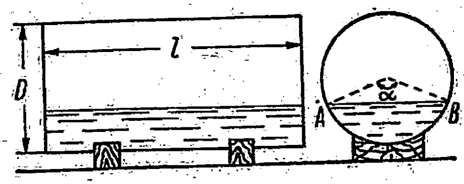


Fig. 129

380. Generatoarea a a unui con este înclinată față de planul bazei cu un unghi α. Să se afle aria totală a conului.

381. Aria laterală a unui con este de 3 ori mai mare decît aria bazei. Să se afle unghiul pe care îl face generatoarea conului cu planul bazei.

382. Unghiul de pantă pentru nisipul fin este $\varphi = 31°$. Să se afle greutatea unei grămezi de nisip care are forma unui con circular cu lungimea cercului de bază $c = 11$ m, știind că densitatea nisipului este $d = 1,6$.

383. Înălțimea unui trunchi de con este medie proporțională între razele bazelor sale; suma razelor este egală cu m. Unghiul dintre generatoarea trunchiului de con și planul bazei este egal cu α. Să se afle aria laterală a acestui trunchi de con.

384. În figura 130 este schițată o secțiune longitudinală într-un furnal înalt. Interiorul acestui furnal este alcătuit din două trunchiuri de con. Deschiderile de sus și de jos ale furnalului înalt au razele respectiv r_1 și r_2. Unghiurile cu care sînt înclinate generatoarele față de baza comună sînt respectiv α și β. Volumul total este V. Să se afle raza r a bazei comune celor două trunchiuri de con, precum și înălțimile h și h_1 ($2r_1=4,2$ m; $2r_2=4,9$m; $\alpha=86°$; $\beta=76°$; $V=572,6\text{m}^3$).

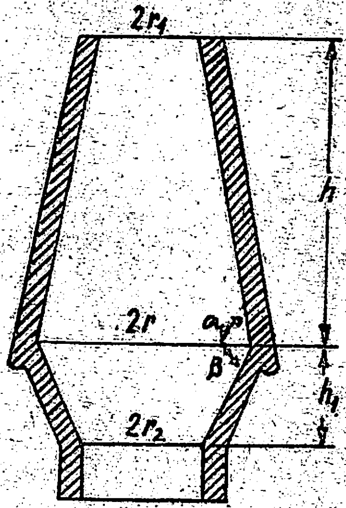


Fig. 130

385. Un rezervor sferic este umplut pînă la un nivel oarecare cu un lichid de densitate d. Unghiul AOB are $\varphi°$. Raza interioară a rezervorului este R. Să se afle greutatea lichidului.

386. Un rezervor de gaz este format dintr-un cilindru acoperit cu un segment sferic. Dimensiunile interioare ale cilindrului sînt: diametrul 24 m și înălțimea 6 m. Arcul format prin secțiunea axială a segmentului ce acoperă cilindrul are 73°44′. Să se afle capacitatea rezervorului.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

CAPITOLUL I

1. $u = 108°54' = 121^g \approx 1{,}9$ rad. **2.** $u = 26^g6^c2^{cc} \approx$ $\approx 0{,}409353$ rad. **3.** $u \approx 144°23'7''$. **4.** $30°$; $120°$; $-80°$; $7°12'$; $24°$; $-300°$; $-15°$. **5.** $\frac{\pi}{15}$; $\frac{\pi}{24}$; $\frac{31\pi}{360}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{10\pi}{9}$; $\frac{43\pi}{36}$; $\frac{23\pi}{12}$; 4π; -10π; $\frac{5\pi}{2}$. **6.** 57,75 cm și 346,51 cm². **7.** I; III; II; III; IV; II; I. **8.** pentagon $\left(\frac{3\pi}{5}; 108°\right)$; hexagon $\left(\frac{2\pi}{3}; 120°\right)$; octogon $\left(\frac{3\pi}{4}; 135°\right)$; dodecagon $\left(\frac{5\pi}{6}; 150°\right)$; pentadecagon $\left(\frac{13\pi}{15}; 156°\right)$; poligon cu 13 laturi $\left(\frac{11\pi}{13}; 152°18'27''\right)$; poligon cu 20 de laturi $\left(\frac{9\pi}{10}; 162°\right)$. **9.** $\frac{11\pi}{24}$; $82°30'$; $91^g66^c66^{cc}$. **10.** $-150° = -\frac{5\pi}{6}$; $-1800° = -10\pi$. **11.** $\frac{\pi}{2\,886}$ rad/s. **12.** *a)* $\frac{2\pi}{3}$; *b)* $\frac{5\pi}{9}$; *c)* $\frac{8\pi}{9}$; *d)* $\frac{40\pi}{9}$. **13.** $\frac{\pi}{21\,600}$ rad/s; $\frac{\pi}{1\,800}$ rad/s. **14.** 42 972 rot/min; 900 m/s. **16.** $\frac{4\pi}{15}$ rad/s. **17.** 9 s. **18.** $\widehat{AOC} > 0$ și $\widehat{ABO} < 0$. **19.** 7 200 de grade sexagesimale pe secundă; 40π rad/s. **20.** 1) $3',6$; 2) 10; 50; 100; 200; 600; 800. **21.** $1^h = 15°$; $1^m = 15'$; $1^s = 15''$. **22.** $26°5'47'',70$.

CAPITOLUL II

24. $\cos u = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} u = \frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} u = \frac{3}{4}$; $\sec u = \frac{5}{3}$; $\operatorname{cosec} u = \frac{5}{4}$. **25.** $\sin u = \frac{24}{25}$; $\cos u = \frac{7}{25}$; $\operatorname{ctg} u = \frac{7}{24}$; $\sec u = \frac{25}{7}$;

$\operatorname{cosec} u = \frac{25}{24}$. **26.** $\sin\frac{\pi}{n} = \frac{l_n}{2R}$; $\cos\frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{R}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{l_n}{2a_n}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} = \frac{2a_n}{l_n}$. **27.** Deoarece $15° = \frac{\pi}{12}$ rad, avem: $\sin 15° = \frac{l_{12}}{2R} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos 15° = \frac{a_{12}}{2R} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3}$. **28.** $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$. **29.** $\sin 75° = \cos(90° - 75°) = \cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 75° = 2+\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 75° = 2-\sqrt{3}$; $\sin 67°30' = \cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\cos 67°30' = \sin 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\operatorname{tg} 67°30' = \operatorname{ctg} 22°30' = \sqrt{2}+1$; $\operatorname{ctg} 67°30' = \operatorname{tg} 22°30' = \sqrt{2}-1$. **30.** $l_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$; $a_{12} = \frac{R}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $l_8 = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **31.** $\sin 18° = \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\sin 36° = \cos 54° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; $\sin 54° = \cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; $\sin 72° = \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **33.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sqrt{2}-1$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **34.** 1) Între -1 și 5; 2) între 1 și 5; 3) între -1 și 9. **35.** 1) *a*) 1; *b*) 1; *c*) -1; 2) *a*) -2; *b*) 3. **36.** 1) toate; 2) toate; 3) toate; 4) toate; 5) tangenta și cotangenta; 6) tangenta și cotangenta; 7) tangenta și cotangenta; 8) toate; 9) tangenta și cotangenta; 10) toate; 11) dacă $m \neq n$ tangenta și cotangenta; dacă $m = n$, toate; 12) toate; 13) tangenta și cotangenta. **37.** 1) Pentru că $\frac{\pi}{2} < 0{,}8\pi < \pi$, semnul este minus; 2) având $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, semnul este plus; 3) minus; 4) plus; 5) plus; 6) plus; 7) minus; 8) minus; 9) plus; 10) zero. **39.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) 10π; 3) $\frac{2\pi}{n}$. **40.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 6π; 3) $\frac{2\pi}{n}$

42. 1) 4π; 2) $\frac{\pi}{n}$. **44.** 1) $n\pi$; $n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}$; $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$; $n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}$; $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$; $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$; 2) $\approx 0{,}730$; 3) $\approx n\pi+(-1)^n\cdot 0{,}730$; 4) $\approx -0{,}491$; 5) $\approx n\pi+(-1)^{n+1}\cdot 0{,}491$. **45.** 1) $2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$; $(2n+1)\pi$; $2n\pi$; $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$; $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$. 2) $\approx 0{,}927$; 3) $\approx 2n\pi\pm 0{,}927$; 4) $\approx 1{,}911$; 5) $\approx 2n\pi\pm 1{,}911$. **46.** 1) $n\pi$; $n\pi+\frac{\pi}{6}$; $n\pi+\frac{\pi}{4}$; $n\pi+\frac{\pi}{3}$; $n\pi-\frac{\pi}{3}$; 2) $\approx 1{,}249$; 3) $\approx n\pi+1{,}249$; 4) $\approx -0{,}463$; 5) $\approx n\pi-0{,}463$. **47.** 1) $n\pi+\frac{\pi}{2}$; $n\pi+\frac{\pi}{3}$; $n\pi+\frac{\pi}{6}$; $n\pi+\frac{\pi}{4}$; $n\pi+\frac{3\pi}{4}$; 2) $\approx 2{,}159$; 3) $\approx n\pi+2{,}159$; 4) $\approx 0{,}615$; 5) $\approx n\pi+0{,}615$. **48.** 1) $-\sin 47^\circ 33'23''$; 2) $-\cos 22^\circ 15'12''$; 3) $\operatorname{tg} 47^\circ 15'13''$; 4) $\operatorname{ctg} 17^\circ 18'18''$. **49.** 1. **50.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 4) -1. **51.** $\sin(270^\circ+x)=-\cos x$; $\cos(270^\circ+x)=\sin x$; $\operatorname{tg}(270^\circ+x)=-\operatorname{ctg} x$; $\operatorname{ctg}(270^\circ+x)=-\operatorname{tg} x$. **52.** $-\operatorname{ctg}^2 40^\circ$. **54.** 1) $\approx 121^\circ 40'$; 2) $\approx 4{,}364$; 3) $\approx 5{,}950$. **55.** 1) $-14^\circ 39'$; 2) $\approx 65^\circ 11'$; 3) $\approx 53^\circ$; 4) $110^\circ 43'$. **56.** $\approx \frac{3\,661\pi}{648\,000}\approx 0{,}01775$.

CAPITOLUL III

58. $\cos x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$; $\operatorname{tg} x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{2}$; $\sec x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; $\operatorname{cosec} x=\sqrt{3}$. **59.** $\sin x=\pm\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} x=\pm\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} x=\pm\frac{3}{4}$; $\sec x=\frac{5}{3}$; $\operatorname{cosec} x=\pm\frac{5}{4}$. **60.** $\sin x=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{2}$; $\sec x=\pm\sqrt{5}$; $\operatorname{cosec} x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. **61.** $\sin x=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$; $\cos x=\pm\frac{\sqrt{42}}{7}$; $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\sec x=\pm\frac{\sqrt{42}}{6}$; $\operatorname{cosec} x=\pm\sqrt{7}$. **62.** 1) $-\frac{15}{17}$; 2) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; 3) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{5}{12}$; 5) $-\frac{8}{17}$; 6) $-|a|$, unde $|a|\leqslant 1$.

63. $1-\cos x$. **64.** $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$. **65.** $\sin x \cos x$. **66.** 2. **67.** 1. **68.** $2 \operatorname{ctg} x$. **69.** $\operatorname{cosec}^2 x$. **70.** $\operatorname{cosec} x$. **71.** $2\,|\operatorname{cosec} x|$. **81.** $\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. **82.** $\frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$. **83.** $\frac{1}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}$. **84.** 1. **85.** $\frac{41}{9}$. **86.** $\frac{13}{17}$. **87.** $E=1$. **88.** 1) $\frac{m^2-1}{2}$; 2) $\pm\sqrt{2-m^2}$. **89.** 1) $m(m^2-3)$; 2) m^2+m-2. **90.** 1) Avem: $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x-2=\frac{(\operatorname{tg} x-1)^2}{\operatorname{tg} x}\geqslant 0$, egalitatea are loc pentru $x=\frac{\pi}{4}$; 2) se demonstrează ca și 1). **91.** $\frac{171}{221}$; $\frac{220}{221}$. **92.** $-\frac{38}{65}$; $-\frac{56}{65}$; $\frac{63}{65}$; $-\frac{16}{65}$. **93.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **94.** $\cos(19°+11°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **95.** 1) $\sin[(7°+x)+(23°-x)]=\frac{1}{2}$; 2) $\cos[(47°+x)+(43°+x)]=\cos(90°+2x)=-\sin 2x$. **96.** 1) $\operatorname{tg} a \operatorname{ctg} b$; 2) $\operatorname{tg} a$. **97.** $\operatorname{ctg} 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **98.** $\approx 3{,}7667$. **100.** Notînd $\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ și $\beta=\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$, se constată că α și β sînt arce din primul cadran și, prin urmare, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Calculînd $\sin(\alpha+\beta)$, găsim: $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ și, prin urmare, $\alpha+\beta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$. **102.** $\frac{1}{3}$. **103.** $-\frac{63}{16}$; $-\frac{33}{56}$. **104.** 1) 2; 2) $-5{,}5$. **105.** 1) $\operatorname{tg}(52°-15°)=\operatorname{tg} 37°$; 2) $\operatorname{ctg}(5a-3a)=\operatorname{ctg} 2a$. **109.** $\frac{17}{32}$; $\frac{7\sqrt{15}}{17}$. **110.** $\frac{8}{7}$; $-\frac{17}{49}$. **111.** $-\frac{24}{25}$. **112.** $\frac{2(a^2-8)(a^2-2)}{a(a^2-4)}$. **113.** 11. **114.** 1) $\sin 2\cdot 25°=\sin 50°$; 2) $\sin 37°\sin 53°=\sin 37°\cos 37°=\frac{1}{2}\sin 2\cdot 37°=\frac{1}{2}\sin 74°=\frac{\cos 16°}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\cdot 22°30'=\frac{1}{2}\operatorname{tg} 45°=\frac{1}{2}$. **115.** 1) $\frac{\sin 8x}{8}$; 2) $\frac{1}{\cos x}$. **118.** 1) $2\sin 19°30'\cos 53°30'$; 2) $2\sin 43°\cos 29°$. **119.** 1) $2\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}$; 2) $-2\sin\frac{19\pi}{120}\cos\frac{31\pi}{120}$.

120. 1) $\frac{\sin 58°}{\cos 6° \cos 52°}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{3\pi}{5}}$. **121.** 1) $2 \sin 3a \cos a$;

2) $2\sin 5a \sin 3a$; 3) $\frac{\sin 4a}{\sin a \sin 5a}$. **122.** 1) $\sqrt{2} \cos(45° - a)$;

2) $\frac{\sin(a-b)\sin(a+b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$. **123.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $3 - 4 \sin^2 x$.

124. 1) $4 \cos 30' \cos 2°30' \sin 13°$; 2) $4 \cos a \cos \frac{a}{2} \cos \frac{5a}{2}$.

125. 1) $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a}{2}\right)$; 2) $4\cos\left(30° - \frac{a}{2}\right) \cos\left(30° + \frac{a}{2}\right)$;

3) $2\sqrt{2} \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\frac{4 \sin(60° - a) \sin(60° + a)}{\cos^2 a}$.

126. 1) $2\sqrt{2} \sin\frac{a}{2} \cos\left(45° - \frac{a}{2}\right)$; 2) $2\sqrt{2} \cos^2 \frac{a}{2} \frac{\sin(45° + a)}{\cos a}$;

3) $4 \cos a \sin\frac{5a+b}{2} \cos\frac{3a+b}{2}$. **127.** 1) $-2 \sin\frac{5a}{2}\cos\frac{3a}{2} \operatorname{cosec} a$;

$4\cos\frac{a}{2} \cos\frac{3a}{2}$; 2) dacă $a \neq n\pi$, sistemul admite soluție;

dacă $a = n\pi$, sistemul nu există. **128.** 1) $\frac{1}{4}(1 + 2 \cos 20°)$;

2) $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{24} - \sin\frac{\pi}{24}\right)$. **129.** $E = \sin(d - b) \sin(c - a)$.

130. $2[1 + \cos 2(a - b) + \cos 2(b - c) + \cos 2(c - a)]$.

131. 1) $\frac{1}{4}(3 \sin a - \sin 3a)$; 2) $\frac{1}{8}(3 + 4\cos 2a + \cos 4a)$;

3) $\frac{1}{16}(2 \sin a + \sin 3a - \sin 5a)$.

CAPITOLUL IV

145. $c \approx 849$ m; $b \approx 393$ m; $B \approx 24°50'$; $S \approx 16{,}7$ ha.
146. $b \approx 8\,407$ m; $a \approx 8\,430$ m; $B \approx 85°40'$; $S \approx 268$ ha.
147. $c \approx 1\,499$; $C \approx 61°14'$; $B \approx 28°46'$; $S \approx 616\,800$.
148. $a \approx 13{,}86$; $C \approx 60°3'$; $B \approx 29°57'$; $S \approx 41{,}55$.
149. $a \approx 9\,422{,}6$ m; $c \approx 7\,476{,}6$ m; $S \approx 2\,143{,}7$ ha.
150. $B = 24°2'45''$; $c \approx 107{,}57$ m; $S \approx 2\,581{,}82$ m^2.
151. $B \approx 61°10'42''$; $a \approx 59{,}73$ m; $S \approx 753{,}69$ m^2. **152.** Din relația $b - c = a(\sin B - \sin C) = \sqrt{2} \cdot a \sin(B - 45°)$ deducem a și apoi $b = a \sin B$, $c = b - k$. **153.** $B = 15°$;

$C = 75°$; $a = 2m\sqrt{6}$; $b = m(3 - \sqrt{3})$ şi $c = m(3 + \sqrt{3})$. **154.** 73°58′. **155.** $\arcsin \frac{h}{b}$. **156.** 40°13′ şi 49°47′. **157.** 26,97 m şi 20,84 m. **158.** 30°. **159.** 183,8 cm². **160.** $a \sec \frac{180°}{n}$. **161.** 18,02 cm şi 22,47 cm. **162.** $\frac{1}{4} na^2 \operatorname{ctg} \frac{180°}{n}$; 1) 1 453; 2) 4,829; 3) 1 120. **163.** $\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360°}{n}$; 1) 147; 2) 116,5. **164.** $S_9 : S_{10} = 10 \operatorname{ctg} 20° : 9 \operatorname{ctg} 18° = 0,992$. **165.** 2,698. **166.** $\frac{c}{2\pi} \cdot \cos \frac{180° m}{m + n} \approx 11,2$. **167.** $\frac{a}{2 \sin \alpha}$ **168.** $4r^2 \operatorname{cosec} \alpha \approx 167$. **169.** $\frac{\pi r^2 \alpha}{360°} - \frac{r^2 \sin \alpha}{2}$; 1) 0,98; 2) 1,63. **170.** $\frac{\pi R^2 \alpha}{360°} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$; $\alpha = 2 \arcsin \frac{a}{2R}$; 0,59. **171.** $R^2 \left[\frac{\pi (180° - \alpha)}{180°} + \sin \alpha\right]$. **172.** 20m. **173.** 35,5 m. **174.** 27,25 m. **175.** $x = \frac{a}{\cos \alpha}$. **176.** $p = \frac{21,25}{1\,000}$; $\alpha = 1°13'3''$. **177.** 4°55′. **178.** ≈ 69,768 m. **179.** 2°57′; 727 m. **180.** $b \sin \alpha - a = 10,5$ m. **181.** $\varphi = 180° - \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. **182.** 33°41′. **183.** 21 cm. **184.** 1 278 m. **185.** ≈ 844,2 m. **186.** ≈ 2 634 m. **187.** ≈ 240 m. **188.** ≈ 63 m. **189.** ≈ 2,6 m. **190.** 38°40′. **191.** 6°51′; 105,2 mm. **192.** 1) 48°1′; 2) 78°48′. **193.** 11°26′. **194.** 28°; 37°; 19°; 53°; 86°; 113°. **195.** ≈ 3 273 m; ≈ 2 631 m. **196.** ≈ 4 422 m. **197.** ≈ 9°8′. **198.** ≈ 870,7 m. **199.** 30°58′. **200.** 4°52′. **201.** 1°11′. **202.** ≈ 2,64 cm. **203.** 26,6 km spre est şi 21,7 km spre nord. **204.** 69°15′ spre nord. **205.** ≈ 21 741 km. **206.** ≈ 4 548 km. **207.** 36 710 km; 15 930 km. **208.** $\frac{2r \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}$.
209. 33°41′. **210.** ≈ 40 m. **211.** 1) 63°26′; 2) 26°34′; 3) 21°48′. **212.** $\operatorname{arctg} \frac{n}{n-1} = 47°52'$. **213.** 51°5′. **214.** ≈ 8,59 cm. **215.** 1) 4,015 dm şi 7,456 dm; 2) 4,949 dm şi 9,192 dm; 3) 6,248 dm şi 11,60 dm. **216.** 52°15′; 7,141 kgf. **217.** 19,93 kgf şi 25,66 kgf. **218.** ≈ 88 kgf. **219.** 1) $OB \approx 0,35$ m; $AB = 0,2$ m; $\beta = 5°44'$; $BP \approx 1,99$ m. **220.** 1) 0°; 1°59′; 3°55′; 5°44′; 7°23′; 8°49′; 9°59′; 10°50′; 11°22′; 11°32′; 3) 11°19′; 5) 0; 5 mm; 22 mm; 48 mm; 83 mm; 125 mm; 173 mm; 224 mm; 277 mm; 330 mm.

239. $a = 5\,174$ m ; $c = 2\,323$ m ; $B = 115°4'$; $S = 544{,}4$ ha. **240.** $a = 1\,759$ m ; $c = 3\,176$ m ; $C = 77°$; $S \approx 263$ ha. **241.** $c = 10\,070$ m ; $A = 59°25'$; $B = 37°49'$; $S \approx 2\,698$ ha. **242.** o singură soluție : $a = 2\,413$ m ; $A = 13°46'$; $C = 41°36'$; $S \approx 668{,}2$ ha. **243.** Două soluții : 1° $b_1 = 235{,}9$ mm ; $B_1 = 56°3'$; $C_1 = 74°3'$; $S_1 \approx 2{,}467$ ha ; 2° $b_2 = 116{,}2$ m ; $B_2 = 24°9'$; $C_2 = 105°57'$; $S_2 \approx 1{,}216$ ha. **244.** Imposibil. **245.** $A = 68°2'$; $B = 64°20'$; $C = 47°38'$; $S \approx 638$ m². **246.** $\frac{900}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}$. **247.** $a = 8\,624{,}40$ m ; $B = 99°20'18''$; $C = 56°12'46''$; $S \approx 7\,369{,}16$ ha. **248.** o singură soluție : $A = 70°17'50''$; $C = 38°27'10''$; $a = 106{,}58$ m ; $S \approx 3\,552{,}44$ m². **249.** $A = 52°43'36''$; $B = 60°57'52''$; $C = 66°18°34''$. **250.** $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$. **251.** $a = \frac{h_a \sin A}{\sin B \sin C}$; $b = \frac{h_a}{\sin C}$; $c = \frac{h_a}{\sin B}$. **252.** $a = \sqrt{\frac{2S \sin A}{\sin B \sin C}}$. **253.** $a = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}$.

254. Dacă notăm unghiul A de la vîrf cu $2x$, atunci x este dat de ecuația : $\sin(\alpha - 2x) = \frac{1}{2} \sin \alpha$.

255. $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$; $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}$.

256. $45°15'56''$ și $106°2'4''$. **257.** $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ și $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

258. $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$; $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$; $S = \frac{4ab}{\sin \alpha}$. **259.** $2\sqrt{110} - \left(2 \arccos \frac{1}{21} + 12{,}5 \arccos \frac{47}{63} + 8 \arccos \frac{17}{27}\right)$. **260.** Din aria triunghiului cu vîrfurile în centrele cercurilor, egală cu $\sqrt{R_1 R_2 R_3 (R_1 + R_2 + R_3)}$, se scad ariile celor trei sectoare. **261.** $\frac{2Rr \sin \alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos \alpha}}$.

262. $a \cos A$; $b \cos B$; $c \cos C$. **263.** $\frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$. **264.** 21,1 m.

265. $\frac{l \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$.

266. $\frac{c \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 146{,}4$ m. **267.** 1 392 m. **268.** 43,96 m.
269. $\frac{a \sin\beta \operatorname{tg}\varphi}{\sin(\gamma+\beta)} \approx 322{,}5$ m **270.** $\approx 1\,560$ ha. **271.** ≈ 41 a.
272. 42,2 cm. **273.** 1 953 cm². **274.** 33,35 m². **275.** 9,2 m.
276. $\approx 17{,}5$ m. **277.** 218 km. **278.** 25,78 kgf; 16,05 kgf.
279. 38,8 kgf; $\alpha = 63°6'21''$; $\beta = 18°43'39''$. **280.** $\approx 65{,}15$ kgf; $36°16'$ şi $28°8'$. **281.** $96°40'$; $135°57'$; $127°23'$.
282. $\frac{P}{\sin\alpha}$ şi $P \operatorname{ctg}\alpha$.

CAPITOLUL V

301. $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$; $n\pi + \frac{\pi}{4}$. **302.** $\frac{n\pi}{10}$ (unde $n \neq 10p + 5$).
303. $\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$. **304.** $n \cdot 90° + 22°30'$. **305.** $n \cdot 360° \pm 90°$.
306. $n \cdot 360° \pm 135°$. **307.** $n \cdot 60° \pm 10°$. **308.** $n \cdot 90° \pm 22°30'$. **309.** $n \cdot 360° - 120°$. **310.** $2n\pi$. **311.** $2n\pi + \frac{\pi}{6}$; $2n\pi - \frac{2\pi}{3}$; $n\pi + \frac{2\pi}{3}$. **312.** $n \cdot 360° - 40°$; $n \cdot 360° + 80°$.
313. $n\pi$; $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$. **314.** $\frac{(2n+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$; $(2n+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$.
315. $n\pi$; $n\pi + \frac{2\pi}{3}$. **316.** $n\pi + \frac{\pi}{4}$; $n\pi - \operatorname{arctg} 3$. **317.** $n\pi \pm \frac{\pi}{8}$. **318.** $B \approx 40°54'$; $C \approx 13°38'$. **319.** Dacă $A = 30°$, $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; dacă $A = 150°$, atunci $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, unghiurile de 30° şi 150° fiind soluţiile acceptabile ale ecuaţiei pentru A. **320.** $n\pi$; $n\pi + \frac{\pi}{4}$.
321. $2n\pi - \frac{\pi}{4}$; $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$. **322.** $\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$; $\frac{n\pi}{3}$. **323.** $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$. **324.** $\alpha \approx 53°8'$. **325.** $n\pi$; $n\pi + \frac{\pi}{4}$. **326.** $n\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{6}-2}{2}$. **327.** $\frac{n\pi}{2}$; $\frac{(2n+1)\pi}{8}$. **328.** $n\pi - \frac{\pi}{4}$; $2n\pi$; $2n\pi - \frac{\pi}{2}$. **329.** $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$; $n\pi + \frac{\pi}{4}$. **330.** $\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

331. $n\pi + \frac{\pi}{4}$. **332.** $\approx 2°51'40''$. **333.** $2n\pi + \arcsin\frac{1}{3}$; $(2n+1)\pi - \arcsin\frac{1}{3}$. **334.** $n\pi$; $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **335.** $\frac{n\pi}{3}$. **336.** $\frac{(2n+1)\pi}{4}$. **337.** $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $\frac{(2n+1)\pi}{2}$. **338.** $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$; $n\pi$; $\frac{(2n+1)\pi}{2}$. **339.** $\frac{1}{2}$. **340.** 0; $\frac{1}{2}$. **341.** $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. **342.** Sistemul este echivalent cu $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}$; $\cos\frac{x-y}{2} = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.
343. $\operatorname{tg} x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b}$; $\operatorname{tg} y = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a}$
344. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$; $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{b-a}{b}$ etc. **345.** $x = m\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $y = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **346.** $\left[n\pi + \frac{\pi}{3};\ n\pi + \frac{\pi}{4}\right]$, $[(n+1)\pi - \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{3})$; $n\pi + \operatorname{arctg}(4 + 3\sqrt{3})]$. **347.** $25°10'$; $44°50'$. **348.** $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$. **349.** $(0°; 60°)$, $(30°; 90°)$. **350.** Dacă notăm $\widehat{AOC} = x$ și $\widehat{BOC} = y$, avem de rezolvat sistemul: $\sin\frac{x}{2} = m\sin\frac{y}{2}$ și $y - x = 2\alpha$. **351.** $\arccos\frac{4}{5}$; $\arccos\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2}$. **352.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{2-\sqrt{14}}{6}; \frac{2+\sqrt{14}}{6}\right)$; $\left(\frac{-2-\sqrt{14}}{6}; \frac{-2+\sqrt{14}}{6}\right)$, $\left(\frac{4\pm\sqrt{2}}{6}; \frac{4\mp\sqrt{2}}{6}\right)$.

PROBLEME DE RECAPITULARE ȘI SINTEZĂ

360. 3,328; **361.** $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; $\varphi = 6°12'$. **362.** $x = y = z = \operatorname{arctg}\frac{4hS}{abc} = 75°52'$. **363.** $a \operatorname{tg}\alpha \approx 5{,}441$. **364.** $\sin x = \sin 20° \cos 25°$, $x = 18°4'$. **365.** $22°$. **366.** $35°16'$. **367.** $67°56'$. **368.** Planul secant este paralel cu diagonala cea mare a bazei și formează cu planul bazei unghiul φ, astfel încît $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **369.** $\frac{1}{2} l^3 \sin\beta \sin\varphi \cos^2\varphi$. **370.** 5,2 m; $28°33'$. **371.** $51°3'$. **372.** $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right) \approx 16°6'$; $y =$

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \approx 26°34'$. **373.** $x = \arccos\left(\operatorname{ctg} \frac{180°}{n} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \approx$ $\approx 54°44'$. **374.** 14,61 m². **375.** 516 m³. **376.** $\frac{1}{6} nb^3 \cos^2 \beta \sin \beta \cdot$ $\cdot \sin \frac{360°}{n} \approx 1{,}535$ m³. **377.** $\frac{2h^3}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot$ $\cos\left(45° - \frac{\beta}{2}\right)$. **378.** $V = \frac{a^3 - b^3}{6} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi$, unde $\sin^2 \varphi = \frac{b^3}{a^3}$; $V \approx 227$ m³. **379.** $V = \frac{D^2}{8} \cdot \frac{\pi\alpha}{180°} \cdot \frac{\sin (45° - \varphi)}{\cos 45° \cos \varphi} l$, unde $\operatorname{tg} \varphi = \frac{180° \cdot \sin \alpha}{\pi\alpha}$; $V \approx 2{,}1$ m³. **380.** $2\pi a^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. **381.** 70°32'. **382.** $\frac{c^3 d \operatorname{tg} \varphi}{24\pi^2} \approx 5{,}4$ *t*. **383.** $\frac{\pi m^2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}}$.

384. $r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi} V + r_1^3 \operatorname{tg} \alpha + r_2^3 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}} \approx 3{,}45$ m; $h = (r - r_1) \operatorname{tg} \alpha \approx$ ≈ 19 m; $h_1 = (r - r_2) \operatorname{tg} \beta \approx 4$m.

385. $\frac{4}{3} \pi R^3 d \cos^4 \frac{\varphi}{4} \cdot \left(3 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{4}\right)$. **386.** 3 652 m³.

TABEL

indicator al corespondenței dintre numerotarea exercițiilor și a problemelor din ediția I și a II-a

Exemplu ; 23 (27) înseamnă că exercițiul 23 din ediția a II-a are numărul 27 în ediția I.

1(1) ; 2(2) ; 3(4) ; 4(5) ; 5(6) ; 6(7) ; 7(8); 8(9); 9(10), 10(11) ; 11(12) ; 12(13) ; 13(14) ; 14(15) ; 15(16) ; 16(17) ; 17(20) ; 18(21) ; 19(22) ; 20(23) ; 21(24) ; 22(25) ; 23(27) ; 24(28) ; 25(29) ; 26(30) ; 27(31) ; 28(32) ; 29(33) ; 30(34) ; 31(35) ; 32(36—39) ; 33(40) ; 34(45) ; 35(47) ; 36(48) ; 37(49) ; 38(50) ; 39(51) ; 40(53) ; 41(54) ; 42(55); 43(61) ; 44(62); 45(63); 46(64) ; 47(65) ; 48(69) ; 49(67) ; 50(68) ; 51(70) ; 52(71) ; 53(72) ; 54(73) ; 55(74) ; 56(75) ; 57(76) ; 58(77) ; 59(78) ; 60(79) ; 61(80) ; 62(83) ; 63(85) ; 64(87) ; 65(88) ; 66(90) ; 67(91); 68(92) 69(95) ; 70(96) ; 71(98) ; 72(100) ; 73(101) ; 74(102); 75(103) ; 76(107) ; 77(109) ; 78(492) ; 79(113) ; 80(114) ; 81(115) ; 82(117) ; 83(118) ; 84(120) ; 85(121) ; 86(123) ; 87(493) ; 88(125) ; 89(126) ; 90(128) ; 91(130) ; 92(132) ; 93(133) ; 94(134) ; 95(135) ; 96(136) ; 97(137) ; 98(138) ; 99(139) ; 100(141) ; 101(142) ; 102(143); 103(144) ; 104(146) ; 105(147) ; 106(148) ; 107(149) ; 108(150); 109(152); 110(153) ; 111(154) ; 112(501) ; 113(497) ; 114(157) ; 115(158) ; 116 (159) ; 117(160) ; 118(161) ; 119(162) ; 120(163) ; 121(164) ; 122 (165) ; 123(166) ; 124(167) ; 125(168) ; 126(169) ; 127 (499) ; 128(170) ; 129(498) ; 130(172) ; 131(173) ; 132(174) ; 133 (175) ; 134(176) ; 135(177) ; 136(178); 137(496) ; 138(180) ; 139(182) ; 140(187) ; 141(188) ; 142(190) ; 143(192) ; 144(196) ; 145(197) ; 146(198) ; 147(199) ; 148(200) ; 149(201) ; 150(202) ; 151(203) ; 152(204) ; 153(525) ; 154(209) ; 155(211) ; 156(213) ; 157(215) ; 158(216) ; 159 (217) ; 160(218) ; 161(219) ; 162(220) ; 163(221) ; 164 (222) ; 165(223) ; 166(226) ; 167(227) ; 168(228) ; 169(229) ; 170(230) ; 171(231) ; 172(232) ; 173(233) ; 174(234) ; 175 (235) ; 176(236) ; 177(237) ; 178(238) ; 179(239) ; 180(240) ;

181(241) ; 182(242) ; 183(243) ; 184(244) ; 185(245) ; 186 (246) ; 187(247) ; 188(248) ; 189(249) ; 190(250) ; 191(251) ; 192(252) ; 193(253) ; 194(254) ; 195(255) ; 196(256) ; 197 (257) ; 198(258) ; 199(259) ; 200(260) ; 201(261) ; 202(262) ; 203(263) ; 204(264) ; 205(265) ; 206(266) ; 207(267) ; 208(268) ; 209(269) ; 210(270) ; 211(271) 212(272) ; 213(273) ; 214 (274) ; 215(275) ; 216(276) ; 217(277) ; 218(278) ; 219(279) ; 220(280) ; 221(281) ; 222(524) ; 223(283) ; 224(287) ; 225(289) ; 226(290) ; 227(293) ; 228(294) ; 229(296) ; 230(298) ; 231 (301) ; 232(307) ; 233(308) ; 234(310) ; 235(311) ; 236(314) ; 237(315) ; 238(316) ; 239(318) ; 240(319) ; 241(320) ; 242(321) ; 243(322) ; 244(323) ; 245(324) ; 246(527) ; 247(326) ; 248 (327) ; 249(328) ; 250(329) ; 251(330) ; 252(331) ; 253(333) ; 254(526) ; 255(341) ; 256(342) ; 257(343) ; 258(344) ; 259 (345) ; 260(346) ; 261(347) ; 262(350) ; 263(351) ; 264(352) ; 265(353) ; 266(354) ; 267(355) ; 268(356) ; 269(357) ; 270 (358) ; 271(359) ; 272(360) ; 273(361) ; 274(362) ; 275(363) ; 276(364) ; 277(365) ; 278(366) ; 279(367) ; 280(368) ; 281 (369) ; 282(370) ; 283(372) ; 284(374) ; 285(376) ; 286(377) ; 287 (378) ; 288(381) ; 289(383) ; 290(385) ; 291(386) ; 292(387) ; 293 (388) ; 294(389) ; 295(390) ; 296(391) ; 297(394) ; 298(395) ; 299 (397) ; 300(400) ; 301(401) ; 302(402) ; 303(403) ; 304(404) ; 305(405) ; 306(406) ; 307(407) ; 308(408) ; 309(409) ; 310(514) ; 311(529) ; 312(513) ; 313(413) ; 314(530) ; 315(516) ; 316(509) 317(510) ; 318(418) ; 319(528) ; 320(419) ; 321(504) ; 322(515) ; 323(422) ; 324(423) ; 325(424) ; 326 (505) ; 327(426) ; 328(506) ; 329 (512) ; 330(507) ; 331(430) ; 332(431) ; 333 (432) ; 334(508) ; 335(517) ; 336(521) ; 337(436) ; 338(437) ; 339(438) ; 340(439) ; 341(440) ; 342(441) ; 343(442) ; 344 (443) ; 345(444) ; 346(523) ; 347(445) ; 348(446) ; 349(447) ; 350(448) ; 351(449) ; 352(450) ; 353(451) ; 354(452) ; 355 (453) ; 356(454) ; 357(455) ; 358(456) ; 359(457) ; 360(458) ; 361(461) ; 362(462) ; 363(464) ; 364(466) ; 365(467) ; 366(468) ; 367(469) ; 368(470) ; 369(471) ; 370(472) ; 371(473) ; 372 (475) ; 373(476) ; 374(477) ; 375(478) ; 376(479) ; 377(481) ; 378(483) ; 379(484) ; 380(485) ; 381(486) ; 382(487) ; 383 (488) ; 384(389) ; 385(390) ; 386(491).

BIBLIOGRAFIE

1. Vasile Cristescu — *Culegere de probleme de trigonometrie*, ediţia 1938.
2. Traian Lalescu — *Geometria triunghiului*, ediţia 1958.
3. *Gazeta matematică şi fizică* — seria B.
4. *Culegere de probleme de trigonometrie pentru clasa a X-a*, Editura didactică şi pedagogică, ediţia 1957.
5. O. Saeter — *Culegere de probleme de matematici*, Editura tehnică, ediţiile 1 şi a 2-a 1957 şi 1960.
6. O. Saeter — *Probleme de matematici cu conţinut politehnic pentru clasele VIII—XI*, Editura didactică şi pedagogică, ediţia 1959.
7. O. Saeter — *Olimpiade matematice*, Editura tineretului, ediţia 1959.
8. P. S. Modenov — *Culegere de probleme* (în limba rusă), ediţia 1957.
9. K. S. Barîbin şi A. K. Isakov — *Culegere de probleme* (în limba rusă), ediţia 1952.
10. P. V. Stratilov — *Culegere de probleme de trigonometrie* (în limba rusă), ediţia 1957.
11. P. J. Kojeurov — *Curs de trigonometrie pentru şcoli tehnice* (în limba rusă), ediţia 1952.
12. A. I. Hudobin şi N. I. Hudobin — *Culegere de probleme* (în limba rusă), ediţia 1954.
13. F.G.M. — *Exerciţii de trigonometrie* (în limba franceză), ediţia 1915.

CUPRINS

Redactor responsabil: Drăguț Maria
Tehnoredactor: Gruia Iancu

Dat la cules 15.06.62 Bun de tipar: 30.10.62 Apărut 1962 Tiraj 54 000 + 145 vinilin Hîrtie: tipar 50 g/m², 16/54×84 Coli editoriale: 12,360 Coli de tipar: 16,25 A 01179 C.Z. pentru bibliotecile mari 514(075.3) C.Z. pentru bibliotecile mici 51.

Intreprinderea Poligrafică Cluj Str. Brassai nr. 5—7
Comanda nr. 5540/1962