MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

12

Ион Акири
Валентин Гарит
Петру Ефрос
Василе Нягу
Андрей Поштару
Николае Продан
Думитру Тараган
Анатол Топалэ
Василе Чобану

Математика

Учебник для 12-го класса

EDITURA PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири
Валентин Гарит
Петру Ефрос
Василе Нягу
Андрей Поштару
Николае Продан
Думитру Тараган
Анатол Топалэ
Василе Чобану

Математика

Учебник для 12-го класса

EDITURA PRUT

Acest manual este proprietate publică, editat din sursele financiare ale Fondului special pentru manuale.

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 718 din 21 iunie 2023 ca urmare a evaluării calităţii metodico-ştiinţifice.

____

(наименование учебного заведения)

УЧЁТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УЧЕБНИКА

Год пользования	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи и любые пометки на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце учебного года оценивается как: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно* или *плохо*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferenţiar universitar, UPS „Ion Creangă” (modulele 4, 9)
Vasile Ciobanu, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 1, 9)
Petru Efros, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Valentin Garit, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (modulele 3, 9)
Andrei Poştaru, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 5, 6)
Nicolae Prodan, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 6, 9)
Dumitru Taragan, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 2, 9)
Anatol Topală, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 6, 9)

Traducere din limba română: Ion Achiri
Redactor: Vitalie Puţuntică
Corector: Olga Efremov
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu

Editura Prut Internaţional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Акири, Ион

Математика: Учебник для 12 класса / Ион Акири, Валентин Гарит, Петру Ефрос [и др.]; traducere din limba română: Ion Achiri; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internaţional, 2023 (Combinatul Poligrafic). – 264 p.

ISBN 978-9975-54-762-8

51(075.3)
A 394

Imprimat la Combinatul Poligrafic. Comanda nr. 23374

Предисловие

Данный учебник составлен в соответствии с куррикулумом для лицеев, издание 2019 г., и направлен на формирование компетенций и реализацию требований, предусмотренных для учащихся XII класса.

Учебник структурирован по модулям и содержит разделы по *математическому анализу*, *высшей алгебре*, *геометрии*, *биному Ньютона*, *комбинаторике*, *теории вероятностей*, *математической статистике* и *финансовой математике*.

В начале каждого модуля 1–8 приводятся образовательные цели, которые должны быть достигнуты в процессе изучения этого модуля.

В разделе З*адачи и упражнения на повторение* к каждому модулю предлагаются дидактические задания с более высоким уровнем сложности и обобщения в контексте интегрирования полученных знаний и формирования специфических компетенций по математике.

Для каждого модуля предлагается итоговая таблица – *Понятийная карта*, которая может быть использована при систематизации, классификации, обобщении изученного материала в рамках данного модуля.

Для итогового повторения и подготовки учащихся к экзамену за лицейский курс (экзамен на степень бакалавра) в учебник включен специальный модуль «Итоговое повторение» (Модуль 9), содержащий обзор теоретического материала, изученного в предыдущих классах, а также упражнения и задачи для повторения (§ 11). Учитывая, что на экзамене по БАКу тестовые задания не содержат ответов, авторы сознательно не предлагают ответы к упражнениям и задачам данного параграфа. Ученикам представляется возможность потренироваться в решении предложенных упражнений и задач. Учитель по мере необходимости окажет соответствующую помощь.

Учебник составлен таким образом, что им можно пользоваться при преподавании–учении–оценивании учащихся как реального, так и гуманитарного профилей, а также профилей искусство и спорт. Материал, **обозначенный слева вертикальной чертой, предусмотрен только для реального профиля. Для гуманитарного профиля, профилей искусство и спорт этот материал предлагается как дополнительный**.

Кроме того, в соответствии с предусмотренными целями, упражнения и задачи, приведенные в конце каждого параграфа, упражнения и задачи на повторение, а также проверочные работы в конце каждого модуля классифицированы по профилям[*)]. Более сложные задания обозначены звездочкой (*) и необязательны. Задания, помеченные 
, предлагались на экзаменах по БАКу в Республике Молдова.

Отметим, что итоговые тесты носят ориентировочный характер. В зависимости от уровня подготовки класса учитель может усовершенствовать предложенные или разработать другие итоговые тесты.

В данном учебнике использованы символы и обозначения, обычно встречаемые в литературе и рекомендованные Куррикулумом по математике для гимназий.

Уважаемые учителя и учительницы! Дорогие ученики и ученицы! Надеемся, что этот учебник станет полезным дидактическим инструментом в изучении математики и формировании компетенций. Будем благодарны за ваши пожелания и предложения по совершенствованию учебника.

Авторы

[*)] Для каждого профиля упражнения и задачи классифицированы по уровням:
а) гуманитарный профиль, профили искусство и спорт: **A** – знание и понимание, **B** – применение, **C** – интегрирование;
б) реальный профиль: $\mathbf{A_1}$ – знание и понимание, $\mathbf{B_1}$ – применение, $\mathbf{C_1}$ – интегрирование.
Упражнения и задачи, предусмотренные для гуманитарного профиля, профилей искусство и спорт, будут предложены для решения и учащимся реального профиля.

Модуль 1

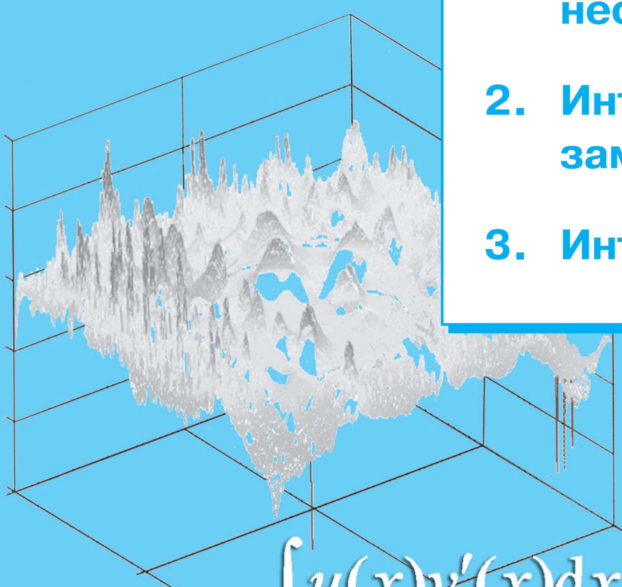
Первообразная и неопределенный интеграл

Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!

А. Нивен

Цели модуля

- вычисление первообразных и неопределенных интегралов путем применения соответствующих свойств и таблицы неопределенных интегралов;
- вычисление неопределенных интегралов путем применения:
  а) метода замены переменной;
  б) интегрирования по частям;
- применение в различных контекстах понятия первообразной и неопределенного интеграла.



$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

§ 1 ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ. ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1.1. Понятие первообразной

Одна из основных задач дифференциального исчисления состоит в определении производной заданной функции. Различные задачи математического анализа и разнообразное применение производной в геометрии, механике и технике приводят к обратной задаче: для заданной функции f необходимо найти такую функцию F, производная которой равна функции f.

Восстановление функции по ее производной является одной из основных задач интегрального исчисления.

Определение Пусть I – интервал из множества $\mathbb{R}$ и $f\colon I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Функция F, определенная на интервале I, называется **первообразной** для функции f на этом интервале, если:
1) функция F дифференцируема на интервале I; 2) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Если интервал I замкнут слева (справа) и точка a является его ограничением слева (справа), то под производной функции F в точке a понимается правая (левая) производная функции F в точке a.

Примеры

1 Функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$, является первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, так как $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 Функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x$, является первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3 Если $a > 0$, $a \neq 1$, то функция $F\colon D \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$, является первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4 Функция $F(x) = \dfrac{1}{x}$ не является первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ на интервале $(-\infty, +\infty)$, так как равенство $F'(x) = f(x)$ ложно в точке ноль. Однако на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ функция F является первообразной для функции f.

Замечание Задача нахождения первообразной заданной функции f решается неоднозначно. Действительно, если F является первообразной для f на интервале I, то есть $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для функции f на интервале I, поскольку $(F(x) + C)' = f(x)$, $\forall x \in I$.

Пример Первообразной для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, является не только функция $F_1(x) = \sin x$, но и функция $F(x) = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall C \in \mathbb{R}$.

Теорема 1 Если $F\colon I \to \mathbb{R}$ является первообразной для функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ на интервале I, то любая другая первообразная функции f на I имеет вид $F + C$, где C – произвольная постоянная.

Доказательство:

Пусть $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$ – первообразная функции f на интервале I, то есть $\Phi'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Тогда $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I$. Получили функцию $\Phi(x) - F(x) = C$, где C – произвольная постоянная.

Таким образом, $\Phi(x) = F(x) + C$. ►

Замечание

Графики любых двух первообразных для функции f получаются друг из друга путем параллельного переноса вдоль оси Oy (рис. 1.1).

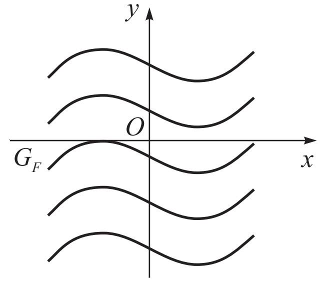


Рис. 1.1

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 2

Любая функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет первообразные на этом отрезке.

1.2. Понятие неопределенного интеграла

Определение

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ (интервал $I \subseteq \mathbb{R}$) – некоторая функция, имеющая первообразные. Множество первообразных функции f называется **неопределенным интегралом от функции** f.

Обозначается $\int f(x)\mathrm{d}x$ и читается: «Интеграл от эф от икс дэ икс».

Символ $\int$ называется ***знаком интеграла***.

Итак, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, где F – одна из первообразных для функции f на интервале I, то есть $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, а C – произвольная постоянная.

Нахождение первообразных некоторой функции (имеющей первообразные) называется ***интегрированием***. Обозначение $\int f(x)\mathrm{d}x$ является неделимым, то есть символам $\int$ и $f(x)\mathrm{d}x$, отдельно взятым, не придают какого-либо смысла. Функция f называется ***подынтегральной функцией***, переменная x – ***переменной интегрирования***, а C – ***постоянной интегрирования***.

Примеры

1 $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

2 $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

3 $\int e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, так как $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

4 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$, так как если $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ и производная правой части равна $(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}$.

Следовательно, она совпадает с подынтегральной функцией.

Если $x < 0$, то $\ln|x| = \ln(-x)$ и производная правой части равна

$$(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = -\frac{1}{x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Итак, формула верна для положительных и отрицательных значений x.

1.3. Таблица неопределенных интегралов (первообразных)

Ниже представлена таблица наиболее употребляемых неопределенных интегралов. Бóльшая часть формул получена непосредственно из определения действия интегрирования как действия, обратного дифференцированию. Достоверность остальных формул можно проверить дифференцированием.

1	$\int 0\,\mathrm{d}x = C,\ \forall x\in\mathbb{R}$
2	$\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x\in\mathbb{R}$
3	$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}$
4	$\int x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x\in(0,+\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
5	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ \forall x\in(0,+\infty)$
6	$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$
7	$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C,\ \forall x\in\mathbb{R}$
8	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\|x\| + C,\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
9	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ \forall x\in\mathbb{R}$
10	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \forall x\in\mathbb{R}$
11	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,\middle\|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
12	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,\|\,k\in\mathbb{Z}\}$
13	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x\in(-1,1)$
14	$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1,\ \forall x\in\mathbb{R}$
15	$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \forall x\in\mathbb{R},\ a\neq 0$
16	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \forall x\in(-a,a),\ a>0$
17	$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-a,a\},\ a\neq 0$
18	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\|x+\sqrt{a^2+x^2}\| + C,\ a\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$
19	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\|x+\sqrt{x^2-a^2}\| + C,\ a>0,\ x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$

1.4. Основные свойства неопределенного интеграла

1° Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство:

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ и

$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}(F(x)+C) = \mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}C = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$ ►

2° Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, то есть $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C.$

Доказательство:

Так как $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x$, то $\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$ ►

3° Если функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ (I – открытый интервал из $\mathbb{R}$) имеет первообразные и $k \in \mathbb{R}^*$, то и функция kf имеет первообразные на интервале I и верно соотношение: $\int k\cdot f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$, то есть постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

Доказательство:

Пусть F – первообразная для функции f, то есть $F'(x) = f(x)$. Тогда kF является первообразной функции kf. Значит, $(k\cdot F(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Отсюда следует равенство: $k\int f(x)\mathrm{d}x = k(F(x)+C) = kF(x)+C_1 = \int kf(x)\mathrm{d}x$, где $C_1 = kC$. ►

4° Если функции $f,\ g\colon I \to \mathbb{R}$ имеют первообразные на интервале I, то и функции $f+g,\ f-g$ имеют первообразные на этом интервале и верны соотношения:

а) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$; б) $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$,

то есть неопределенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов этих функций.

Доказательство:

а) Пусть F и G – первообразные для функций f и g соответственно.

Тогда функция $F+G$ является первообразной для функции $f+g$.

Значит, $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = [F(x)+C_1]+[G(x)+C_2] = [F(x)+G(x)]+[C_1+C_2] =$

$= [F(x)+G(x)]+C = \int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x.$

Соотношение б) доказывается аналогично. ►

5° Неопределенный интеграл является инвариантным при замене переменной интегрирования x на любую дифференцируемую функцию.

То есть, если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$, где $u = \varphi(x)$ – любая дифференцируемая функция по x.

Доказательство:

Так как $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$, то $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. Из инвариантности дифференциала следует, что $\mathrm{d}F(u) = F'(u)\mathrm{d}u = f(u)\mathrm{d}u$.

Отсюда: $\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u)+C.$ ►

6° Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ и $F: I \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на интервале I, а k и b – постоянные, $k \neq 0$. Тогда $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Доказательство:

Так как $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, то, согласно правилу вычисления производной сложной функции, имеем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),\ \forall x \in I.$$

Значит, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\mathrm{d}(kx+b) = \frac{1}{k}\int f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{k}F(u)+C$,

где $u = kx+b$. ►

7° Если числитель подынтегральной функции является производной знаменателя этой функции, то неопределенный интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя этой функции.

Доказательство:

Пусть заданы функции $f, f': I \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$, $\forall x \in I$.

Тогда $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|+C = \ln|f(x)|+C$. ►

Задания с решением

1 Вычислим:

а) $\int (6x^2-3x+5)\,\mathrm{d}x$; б) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x$; в) $\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x$.

Решение:

$\int k f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$

$\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

а) Используя свойства 3° и 4°, получим:

$$\int (6x^2-3x+5)\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Вычислим интегралы б) и в), применив свойства 6° и 7°.

б) Имеем $k=5$, $b=0$. Получаем: $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$.

в) Имеем $k=2$, $b=-1$.

$$\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}(2x-1)^{101}+C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101}+C.$$

2 Материальная точка движется по числовой оси в положительном направлении. Пусть $v(t)$ – мгновенная скорость этой точки в любой момент времени t. Найдем закон $s=s(t)$ движения этой точки, если известна мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t_0.

Решение:

Известно (см. Учебник математики для XI класса, модуль 4, §1, раздел 1.2.2), что мгновенная скорость $v(t)$ материальной точки в любой момент времени t равна производной функции $s(t)$, которой задается закон движения этой точки.

Итак, задача нахождения закона движения материальной точки $s=s(t)$, когда известно значение мгновенной скорости $v(t)$ в момент времени t_0, сводится к задаче нахождения первообразной функции $v(t)$, поскольку $s'(t)=v(t)$.

Любая первообразная функции $v(t)$ имеет форму $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C$.

Постоянную C можно определить, учитывая дополнительные условия.

Пусть, например, $v(t) = a(t-t_0)+v_0$, где $v_0 = v(t_0)$, a – ускорение.

Тогда $s(t) = \int [a(t-t_0)+v_0]\mathrm{d}t = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0 t + C$.

3 Материальная точка движется по оси Ox в положительном направлении с постоянным ускорением a. В исходный момент времени $t_0 = 0$ материальная точка имеет абсциссу x_0 и начальную скорость v_0. Найдем закон $x = x(t)$ движения этой материальной точки.

Решение:

Так как $x'(t) = v(t)$ и $v'(t) = a(t)$, из условия $a(t) = a$ получаем $v'(t) = a$.

Отсюда следует, что $v(t) = at + C_1$. При $t_0 = 0$ получаем $C_1 = v_0$.

Значит, $x'(t) = v(t) = at + v_0$. Следовательно, $x(t) = \int (at + v_0)\mathrm{d}t = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2$.

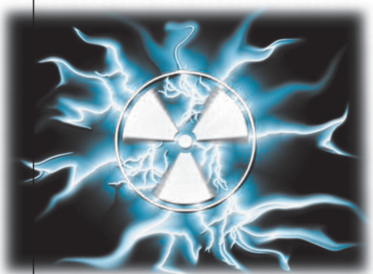
Для нахождения постоянной C_2 подставим $t_0 = 0$. Получаем $C_2 = x_0$.

Итак, $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$ – закон движения материальной точки в любой момент времени.

4* Определим закон распада радиоактивного вещества.

Решение:

Обозначим $x(t)$ – количество радиоактивного вещества в момент времени t, а x_0 – количество радиоактивного вещества в исходный момент времени $t_0 = 0$. За промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ количество радиоактивного вещества изменится следующим образом:



$x(t) - x(t + \Delta t) = \beta \cdot x(t) \cdot \Delta t$, или $\Delta x(t) = -\beta \cdot x(t) \cdot \Delta t$ (1), где β – коэффициент пропорциональности (положительное число), зависящий от радиоактивного вещества.

Разделим (1) на Δt и найдем предел при $\Delta t \to 0$. Получаем:

$$x'(t) = -\beta \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -\beta \cdot \mathrm{d}t.$$

Тогда $\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int (-\beta)\mathrm{d}t$. Значит, $\ln|x(t)| = -\beta t + \ln C \Leftrightarrow x(t) = C \cdot e^{-\beta t}$.

Из условия $x(0) = x_0$ находим $C = x_0$.

Итак, получили следующий закон распада радиоактивного вещества: $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t}$.

5* В сосуд налито a литров однородной жидкости, содержащей b кг соли. Через каждую минуту из сосуда отливают c литров жидкости и добавляют c литров разбавителя. Определим закон изменения количества соли $x(t)$ в однородной жидкости в любой момент времени.

Решение:

За период времени $[t, t + \Delta t]$ из сосуда отливают $c \cdot \Delta t$ литров однородного вещества. Это количество вещества заменяется за этот период времени $c \cdot \Delta t$ литрами разбавителя. Определим количество соли, удаляемое из сосуда за соответствующий период времени.

Концентрация соли в момент времени t равна $\frac{x(t)}{a}$ кг/л. Следовательно, в $c \cdot \Delta t$ литрах жидкости содержится соли в количестве $\Delta x(t) = -\frac{x(t)}{a} \cdot c \cdot \Delta t$ (кг) (2). Знак «минус» показывает, что количество соли в жидкости уменьшается. Разделим (2) на Δt и найдем предел при $\Delta t \to 0$. Получаем: $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{a} \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -\frac{c}{a} \cdot \mathrm{d}t$.

Тогда $\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int -\frac{c}{a}\mathrm{d}t$. Значит, $\ln|x(t)| = -\frac{c}{a}t + \ln C \Leftrightarrow x(t) = C \cdot e^{-\frac{c}{a}t}$.

Учитывая условие $x(0) = b$, находим $b = C \cdot e^0 = C$. Следовательно, $x(t) = b \cdot e^{-\frac{c}{a}t}$ – закон изменения количества соли в жидкости в момент времени t.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл:

а) $\int \frac{dx}{3x-1}$; б*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; в*) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$; г) $\int \sin^2 x\, dx$.

Решение:

а) $\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$

б*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{d(x+2)}{2^2+(x+2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$

в*) $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C.$

г) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2 Найдем для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$, первообразную F, которая удовлетворяет условию $F(0) = 1$.

Решение:

Одна из первообразных функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$, – это функция $F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \sin x - \cos x$. Любая другая первообразная функция f имеет вид $F(x) = \sin x - \cos x + C$, где C – произвольная постоянная. Для нахождения постоянной C учитываем условие $F(0) = 1$. Откуда получаем: $C = 2$.

Следовательно, функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x - \cos x + 2$, – искомая первообразная.

3 Найдем для функции $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)$, первообразную, график которой проходит через точку $M(1, 1)$.

Решение:

$$F(x) = \int\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)\right]dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \sin(2x+1)dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

$\int dF(x) = F(x) + C$

Так как график первообразной F должен проходить через точку $M(1, 1)$, получаем $1 = 2 - \frac{1}{2}\cos 3 + C$, откуда $C = \frac{1}{2}\cos 3 - 1$.

Следовательно, функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\cos 3 - 1$, – искомая первообразная.

4 Вычислите интеграл, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства: $\int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx.$

Решение:

$$\int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\ln|x| + \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 2\ln x + \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\ln|x| + \operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\sqrt{x} + C.$$

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A₁

1. Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=x^4+x^2$; б) $f(x)=(x^3+1)^2$; в) $f(x)=\dfrac{x^3+3x-1}{x}$; г) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$; д) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+x\sqrt{x}+2$.

2. *Работайте в парах!* Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=3x-5\cos x+e^x$; б) $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$; в) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$;

г) $f(x)=\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)^2$; д) $f(x)=2e^x-\sqrt[3]{x^2}$.

3. Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=\sqrt{x}+x$; б) $f(x)=\dfrac{1}{e^x}$; в) $f(x)=\dfrac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$; г) $f(x)=\dfrac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}$;

д) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$; е) $f(x)=2\sin^2\dfrac{x}{2}$; ж) $f(x)=-\sin x+\dfrac{3}{\sqrt{4-4x^2}}$; з) $f(x)=2^x+\sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

4. *Работайте в группах!* Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$; в) $f(x)=a^x\cdot e^x$; г) $f(x)=\dfrac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}$;

д) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$; е) $f(x)=\dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$; ж) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x+\cos 2x}$; з) $f(x)=\sqrt[8]{(8-3x)^6}$;

и) $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; к) $f(x)=\dfrac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$; л) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}$.

B₁

5. *Работайте в парах!* Найдите функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $f'(x)=5e^{3x}$ и $f(0)=4$.

6. Найдите функцию $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, если $f'(x)=\sqrt{x}$ и $f(1)=2$.

7. Для функции $f: \mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right) \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

8. *Работайте в группах!* Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=10^{-x}+\dfrac{x^2+2}{1+x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$;

в) $f(x)=\dfrac{3}{2+2x^2}$; г) $f(x)=\cos^2 x$.

$$\int dF(x)=F(x)+C$$

C₁

9. *Работайте в парах!* Найдите первообразные функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|\cdot(2x-1)$.

10. Для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2^x\cdot e^x$, найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(0, \dfrac{1}{1+\ln 2}\right)$.

11. *Исследуйте!* Пусть даны графики двух первообразных функции $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Один график проходит через точку $M_1(1, 2)$, а другой – через точку $M_2(8, 4)$. Какой из этих двух графиков расположен выше в декартовой системе координат? Чему равна разность этих двух первообразных?

12. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t)=\sqrt[3]{1+t}$ (время t измеряется в секундах, скорость v – в метрах в секунду). Найдите закон движения $s=s(t)$ этой материальной точки и пройденный путь за первые 7 секунд, если $s(0)=0$.

13. Для функции $f: D \to \mathbb{R}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку:

а) $f(x)=x^2$, $M(2, 1)$; б) $f(x)=\sqrt{x}$, $A(9, 1)$; в) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$, $B(-1, 5)$.

§ 2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

В некоторых случаях при переходе к новой переменной интегрирования вычисление заданного интеграла сводится к вычислению более простого интеграла.

Этот метод называется ***методом подстановки*** или ***методом замены переменной***. В основе этого метода лежит следующая теорема:

Теорема 3

Пусть I, J – открытые интервалы из $\mathbb{R}$ и $\varphi: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$ – функции со свойствами: 1) функция φ дифференцируема на интервале I;
2) функция f имеет первообразные на интервале J (пусть $F: J \to \mathbb{R}$ – одна из ее первообразных).

Тогда функция $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ имеет первообразные на интервале I, а $F \circ \varphi$ – одна из первообразных функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, то есть

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C. \tag{1}$$

Доказательство:

Поскольку функции F и φ дифференцируемы, то функция $F \circ \varphi$ дифференцируема и $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Значит, функция $F \circ \varphi$, по определению, является первообразной для функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. ►

Замечание

Формула (1) называется ***формулой замены переменной*** в неопределенном интеграле.

Задание с решением

Вычислим:

а) $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \mathrm{d}x$; б) $\int (7x-9)^{2017} \mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; г) $\int e^{\cos x} \sin x \, \mathrm{d}x$.

Решение:

а) Обозначим $x - 1 = t$, тогда $x = t + 1$. Отсюда $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. По формуле (1),

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} \mathrm{d}t = \int \left(\frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} \right) \mathrm{d}t = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + 3t + 3 \ln |t| - \frac{1}{t} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| + \frac{1}{1-x} + C.$$

б) Сделаем подстановку $7x - 9 = t$, то $x = \frac{1}{7}(t+9)$. Отсюда $\mathrm{d}x = \frac{1}{7} \mathrm{d}t$.

Согласно формуле (1), $\int (7x-9)^{2017} \mathrm{d}x = \int t^{2017} \frac{1}{7} \mathrm{d}t = \frac{1}{7} \cdot \frac{t^{2018}}{2\,018} + C$.

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int (7x-9)^{2017} \mathrm{d}x = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2\,018} (7x-9)^{2018} + C = \frac{1}{14126} (7x-9)^{2018} + C.$$

в) Чтобы определить подстановку, запишем данный интеграл следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\, dx}{1 - \sin^2 x}.$$

Сделаем подстановку $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x\, dx$.

Значит, $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

г) Обозначим $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x\, dx$.

Значит, $\int e^{\cos x} \sin x\, dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A_1

1. Найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (2x+3)^3$; б) $f(x) = (-4x+5)^{2023}$; в) $f(x) = (3x+1)^{\pi}$;

г) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+9}$; д) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; е) $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 7}{\sqrt{x^3 - x^2 + 7x - 2}}$;

ж) $f(x) = \frac{1}{12x+5}$; з) $f(x) = e^{4-3x}$; и) $f(x) = \sin(12x+7)$;

к) $f(x) = \frac{3x}{4x^2+5}$; л) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-9x^2}}$; м) $f(x) = \frac{1}{15x^2-7}$;

н) $f(x) = \frac{1}{6x^2+14}$; о) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; п) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(3x+\frac{\pi}{4})}$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\int \frac{dx}{(1-3x)^4}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$; в) $\int \sqrt{4x+3}\, dx$;

г) $\int \sqrt[3]{(2-3x)^2}\, dx$; д) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos x}}$; е) $\int \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$;

ж) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$; з) $\int \frac{x^2\, dx}{1+x^3}$; и) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin x}$.

B_1

3. Применив метод замены переменной, найдите первообразные функции $f: D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+3}$; б) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$; в) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

г) $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$; д) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; е) $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$;

ж) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$; з) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{1+x^2}}$; и) $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$;

к) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; л) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; м) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

4. Применив метод замены переменной, вычислите интеграл:

а) $\int (2x+1)e^{x^2+x+3}\,dx$; б) $\int \cos x e^{-\sin x}\,dx$; в) $\int x^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}\,dx$;

г) $\int (x+\frac{1}{2})\cos(x^2+x)\,dx$; д) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$; е) $\int \frac{x^3\,dx}{1+2x^4}$;

ж) $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$; з) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$; и) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

к) $\int xe^{2x^2+1}\,dx$; л) $\int x^2\sin x^3\,dx$; м) $\int 5xe^{1+3x^2}\,dx$.

5. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x^4+\cos 2x$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если высказывание ложно: «Функция f является функцией, которая имеет первообразные».

И	**Л**

б) Вычислите $\int f(x)\,dx$.

в) Найдите F, где F – первообразная функции f.

6. Вычислите интеграл:

а) $\int x(1-3x)^2\,dx$; б) $\int \sin(3x-1)\,dx$; в) $\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$;

г) $\int x^2\cdot\ln(1+x)\,dx$; д) $\int 5e^{1+2x}\,dx$; е) $\int \cos(3x+1)\,dx$.

7. Дана функция $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\cos 2x\cdot\sin x$, $D\in\mathbb{R}$. Одна из первообразных функции f принимает значение -1 при $x=\pi$. Найдите, при каких значениях x, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, эта первообразная принимает значение 0.

8. Дана функция $f:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sin^2 x-\sin 2x$. Найдите первообразную, график которой проходит через точку $A\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

C_1

9. Найдите, применив метод замены переменной, первообразные функции $f:D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{x+1}}$; б) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$; в) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$;

г) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}$; д) $f(x)=\frac{x}{x^4+2x^2+5}$; е) $f(x)=x\sqrt{2x+1}$;

ж) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-3x}}$; з) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$; и) $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-2x}}$;

к) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$; л) $f(x)=x\sqrt{5x^2-1}$; м) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$.

10. ***Работайте в парах!*** Применив метод замены переменной, вычислите интеграл:

а) $\int x\sqrt{1+5x}\,dx$; б) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-4}\,dx$; в) $\int x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$;

г) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; д) $\int \frac{(\sin x-\cos x)\,dx}{1+\sin 2x}$; е) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

§ 3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Теорема 4

Если функции $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ (открытый интервал $I \subseteq \mathbb{R}$) дифференцируемы и имеют непрерывные производные на интервале I, то для функций uv, $u'v$ и uv' существуют первообразные и:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

или на «языке дифференциалов»: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

Доказательство:

Из равенства $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),\ \forall x \in I$, следует:

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x). \qquad (2)$$

Значит, одна из первообразных функции $[u(x)v(x)]'$ на интервале I равна $u(x)v(x)$.

По условию теоремы, для функции $u'(x)v(x)$ существует первообразная на интервале I. Следовательно, для функции $u(x)v'(x)$ также существует первообразная на интервале I. Интегрируя равенство (2), получим (1). ►

Замечание

Формула (1) называется ***формулой интегрирования по частям*** неопределенного интеграла.

Так как $u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x)$, $v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v(x)$, то эта формула может быть записана в виде $\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$ или кратко: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

Задания с решением

1 Вычислим: а) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$; б) $\int x e^x \mathrm{d}x$; в) $\int \ln x \cdot x\,\mathrm{d}x$; г) $\int \cos x \cdot e^x \mathrm{d}x$.

Решение:

а) $$\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left(u = \operatorname{arctg} x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ v = \int \mathrm{d}x,\ v = x\right) =$$

$$= x\cdot\operatorname{arctg} x - \int x\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2} = x\cdot\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

б) $$\int x e^x \mathrm{d}x = (u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x,\ v = \int e^x \mathrm{d}x = e^x) = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

в) $$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \left(u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x},\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x,\ v = \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

г) $$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = (u = \cos x,\ \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x,\ v = e^x) = \cos x\cdot e^x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (u = \sin x,\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x,\ v = e^x) = \cos x\cdot e^x + \sin x\cdot e^x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Таким образом, $2\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = (\cos x + \sin x)e^x \Leftrightarrow \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$

2 Вычислим $I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$.

Решение:

Для $n = 1$ имеем $I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

Пусть $n > 1$. Умножив и разделив подынтегральную функцию на a^2, затем прибавив и отняв x^2 от числителя, получим:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - \frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[I_{n-1} - \int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x\right].$$

Применим формулу интегрирования по частям:

$$u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},\quad v = \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

и получим: $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\cdot x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}$.

Значит, $I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right]$ для $n>1$. (3)

Таким образом, выразили интеграл I_n через I_{n-1}.

Формула (3) называется ***рекуррентной формулой***.

Например, для $n=2$ получим:

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Замечание

Бóльшая часть интегралов, которые вычисляются посредством интегрирования по частям, может быть разбита на следующие три группы:

1) Интегралы, подынтегральная функция которых содержит в качестве множителя одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

   Эти интегралы вычисляются путем применения формулы интегрирования по частям, если принять в качестве $u(x)$ одну из указанных выше функций.

2) Интегралы вида $\int P_n(x)\cos cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)e^{cx}\mathrm{d}x$, где $c\in\mathbb{R}^*$, $P_n(x)$ – функция, соответствующая многочлену $P(X)$ степени n.

   Эти интегралы вычисляются путем n-кратного применения формулы интегрирования по частям, причем в качестве $u(x)$ берется $P_n(x)$. После каждого интегрирования степень $P_n(x)$ уменьшится на единицу.

3) Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$; $\int e^{cx}\sin bx\,\mathrm{d}x$; $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$; $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$, $a, b, c\in\mathbb{R}^*$.

   Обозначив через I любой из этих интегралов и произведя двукратное интегрирование по частям, получим уравнение I степени относительно I.

3 Вычислим $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x$, где функция $x\to\sqrt{x^2+\alpha}$ определена на интервале I, на котором $x^2+\alpha>0$, $\alpha\neq 0$.

Решение:

Имеем $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x = \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x + \int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x$.

Для вычисления интеграла $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x$ применим метод интегрирования по частям.

Имеем $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x = \int x\cdot(\sqrt{x^2+\alpha})'\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x$.

Получим соотношение $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x + \int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x$

и, следовательно, $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x + \int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x$.

Так как $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C$, делаем вывод, что:

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C.$$

Реальный профиль

A1

1. Вычислите неопределенные интегралы, применив метод интегрирования по частям:

а) $\int \ln x dx$; б) $\int x\cos 2x dx$; в) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int x\sin x dx$; д) $\int (2x-1)e^{3x} dx$; е) $\int x2^x dx$;

ж) $\int (x+1)\ln x dx$; з) $\int x^2e^x dx$; и) $\int x^2\cos x dx$;

к) $\int x^3\ln x dx$; л) $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$; м) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$;

н) $\int x\ln^2 x dx$; о) $\int x^2e^{-\frac{x}{2}} dx$; п) $\int x\sin^2 x dx$.

B1

2. ***Работайте в парах!*** Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$; б) $f(x)=\frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $f(x)=\arccos x$;

г) $f(x)=e^{3x}(\sin 2x-\cos 2x)$; д) $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$; е) $f(x)=(x^2+3x+3)\cos x$.

3. Вычислите неопределенные интегралы, применив метод интегрирования по частям:

а) $\int (1-3x-2x^2)e^{-\frac{x}{2}} dx$; б) $\int (x^2-4x+5)\sin\frac{2x}{3} dx$; в) $\int x\operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx,\ x\in(0, 1)$; д) $\int \frac{\ln x dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; е) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $F'(x)=0$, где F – одна из первообразных функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^{-x}$.

5. ***Исследуйте!*** Найдите закон распада радия, если известно, что скорость распада прямо пропорциональна его исходному количеству.

C1

6. Вычислите интеграл, применив метод интегрирования по частям:

а) $\int \ln(2x+5) dx$; б) $\int (1-2x)\cos\frac{x}{3} dx$; в) $\int (2x+1)\ln(x+1) dx$;

г) $\int x^2\ln^3 x dx$; д) $\int \sin(\ln x) dx$; е) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx$.

7. Вычислите неопределенные интегралы, применив сначала метод замены переменной, а затем метод интегрирования по частям:

а) $\int x\sin\sqrt{x} dx$; б) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; в) $\int x^3e^{x^2} dx$;

г) $\int (\arcsin x)^2 dx$; д) $\int x\cdot e^{\sqrt{x}} dx$; е) $\int x^8e^{x^3} dx$;

ж) $\int x^7\operatorname{arctg}(x^2) dx$; з) $\int (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 dx$; и) $\int e^{\sqrt{x}}\cos 2\sqrt{x} dx$.

Реальный профиль

A_1

1. ***Исследуйте!*** Покажите, что функция F является первообразной функции f на заданном интервале:

а) $F(x)=4-\cos x,\ f(x)=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)$;
б) $F(x)=\operatorname{tg}x-\sqrt{2},\ f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;
в) $F(x)=9-\dfrac{1}{x},\ f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$;
г) $F(x)=|x|,\ f(x)=-1,\ x\in(-\infty,0)$.

2. Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=\dfrac{1}{(3+2x)^4}$;
б) $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{7-3x}}$;
в) $f(x)=2\sin\dfrac{x}{5}+3\cos 6x$;
г) $f(x)=\dfrac{4}{(x+3)^2}+\dfrac{7}{\sin^2 3x}$.

3. ***Работайте в группах!*** Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$, применяя таблицу неопределенных интегралов и их свойства:

а) $f(x)=(x+1)^2-1$;
б) $f(x)=\dfrac{5}{3x+2}$;
в) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$;
г) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$;
д) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+x\sqrt[3]{x}+7$;
е) $f(x)=5^x-2\cos x$;
ж) $f(x)=\dfrac{x^2}{5(x^2+1)}$;
з) $f(x)=e^{4x}+\dfrac{1}{\sin^2 7x}$;
и) $f(x)=e^{2x}-\dfrac{1}{1-x}$;
к) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[5]{x^4}$;
л) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-x^3\cdot e^x+3x^2}{x^3}$.

4. ***Работайте в парах!*** Найдите для функции $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, первообразную, график которой проходит через точку $A\left(-\dfrac{1}{2},3\right)$.

5. Найдите для функции $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, первообразную $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, график которой проходит через точку $M\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$.

B_1

6. ***Работайте в парах!*** Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$, используя метод замены переменной:

а) $f(x)=\dfrac{3}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$;
б) $f(x)=\dfrac{3}{x\cdot\ln x}$.

7. Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$, применив метод интегрирования по частям:

а) $f(x)=e^x\cdot\sin x$;
б) $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2 x}$;
в) $f(x)=x^2\cdot\sin x$;
г) $f(x)=x\cdot\arccos x$;
д) $f(x)=e^{2x}\cdot\cos 3x$;
е) $f(x)=\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$.

8. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен x. Напишите уравнения всех таких кривых и найдите ту кривую, которая проходит через начало системы координат.

9. ***Работайте в парах!*** Согласно закону «естественного роста», скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдите формулу для определения количества вещества y в зависимости от времени, если в момент времени $t=0$ количество вещества было равно y_0.

C_1

10. Докажите, что функция $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x\cdot\frac{|x|}{2}$, является первообразной для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$.

11. Найдите функцию f такую, что $f''(x)=3x^2,\ f'(0)=1,\ f(0)=-1$.

12. Найдите кривую, обладающую свойством: отрезок касательной к этой кривой с концами в точке касания и в точке пересечения касательной с осью абсцисс делится осью ординат на два конгруэнтных отрезка.

13. Докажите, что функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } x\le 0\\ 1, & \text{если } x>0,\end{cases}$ не имеет первообразных.

14. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения неопределенных интегралов в науке и технике*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Реальный профиль

1. Дополните рамки, чтобы высказывание стало истинным:

$$\int(x^3-\sin 2x+6\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=\boxed{}+\boxed{}+\boxed{}+\boxed{}.$$

2. Найдите первообразные функции $f: D\to\mathbb{R}$, применив метод замены переменной: $f(x)=x\cdot\sqrt{1+x}$.

3. Вычислите интеграл, применив интегрирование по частям:

а) $\int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$;

б) $\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

4. Найдите действительные постоянные a и b такие, чтобы функция $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=e^{-x}\cdot(a\cos 4x+b\sin 4x)$, была первообразной для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-4x}\cos x$.

5. Скорость материальной точки меняется по закону $v(t)=Rt+a\sqrt{t}$. Найдите расстояние (в метрах), пройденное материальной точкой за промежуток времени $[0, 4]$ (в секундах), а также ее ускорение в момент времени $t=4$.

Первообразные и неопределенные интегралы

Первообразная функция

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – открытый интервал и функция $f\colon I \to \mathbb{R}$.
Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ называется первообразной для функции f на интервале I, если: 1) F дифференцируема на интервале I;
2) $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Неопределенный интеграл

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, где F – одна из первообразных функции f на интервале I, $I \subseteq \mathbb{R}$, а $C \in \mathbb{R}$.

Свойства неопределенного интеграла

1° $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ 2° $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

3° $\int kf(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x,\ k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$

4° $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

5° Если $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, то $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$,
где $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция.

6° Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, $F\colon I \to \mathbb{R}$ и $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, а k и b – постоянные, $k \neq 0$. Тогда $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

7° Пусть даны функции $f, f'\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, $f \neq 0$, $\forall x \in I$.
Тогда $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.

Методы вычисления неопределенных интегралов

1. *Метод замены переменной*

Пусть I, J – открытые интервалы из $\mathbb{R}$ и $\varphi\colon I \to J$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ – функции со свойствами: 1) φ дифференцируема на интервале I;
2) f имеет первообразные на интервале J (пусть $F\colon J \to \mathbb{R}$ – одна из ее первообразных).

Тогда функция $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ имеет первообразные на интервале I, а $F \circ \varphi$ является одной из первообразных для функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, то есть

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

2. *Метод интегрирования по частям*

Если функции $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ дифференцируемы и имеют непрерывные производные на интервале, то функции uv, $u'v$ и uv' имеют первообразные, и множество этих первообразных удовлетворяет соотношению:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\mathrm{d}x \quad \left(\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\right).$$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int 0\mathrm{d}x = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$

4. $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x \in (0, \infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ \forall x \in (0, +\infty)$

6. $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

7. $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

8. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

9. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

10. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

12. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x \in (-1, 1)$

14. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

15. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

16. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in (-a, a),\ a > 0$

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},\ a \neq 0$

18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C,\ a > 0,\ x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

Модуль

2

Определенный интеграл

Математическая истина, независимо от того, в Париже или в Тулузе, одна и та же.

Б. Паскаль

Цели модуля

- распознавание определенного интеграла в различных контекстах;
- применение формулы Ньютона-Лейбница при вычислении определенного интеграла;
- применение геометрического смысла определенного интеграла при решении задач;
- использование свойств определенного интеграла в различных контекстах;
- вычисление определенного интеграла при помощи таблицы интегралов;
- вычисление определенных интегралов путем применения:
  а) интегрирования по частям;
  б) метода замены переменной;
- распознавание определенного интеграла в различных областях.

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

§ 1 ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

В элементарной геометрии известен метод нахождения площади плоской геометрической фигуры, ограниченной отрезками и дугами окружности. В общем случае, когда плоская фигура ограничена произвольными кривыми, задачу нахождения ее площади можно решить только методами математического анализа, а именно методом интегрального исчисления.

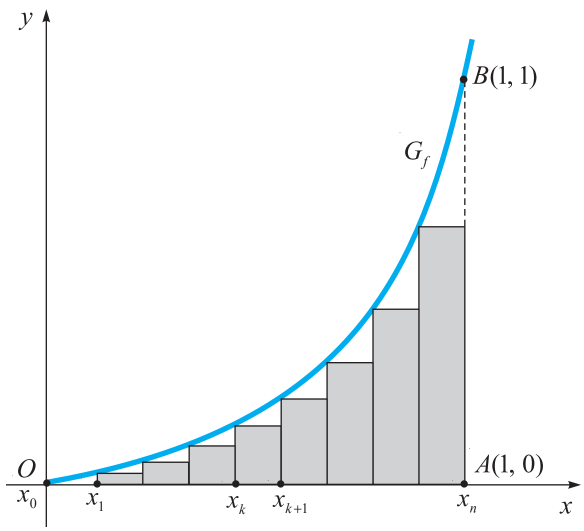


Рис. 2.1

Рассмотрим плоскую фигуру OAB, ограниченную параболой $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, осью Ox и вертикальной прямой, проходящей через точку $A(1,\ 0)$ (рис. 2.1). Найдем площадь этой фигуры методом предельного перехода, который является одним из основных методов математического анализа. Для этого разобьем отрезок $[0,1]$ на n $(n\ge 2)$ конгруэнтных отрезков длины $\frac{1}{n}$ при помощи $n+1$ точек деления $x_0<x_1<\ldots<x_n$, где $x_k=\frac{k}{n}$, $k=\overline{0,n}$. На каждом из полученных отрезков $[x_k,\ x_{k+1}]$ построим прямоугольник P_k высотой h_k, где $h_k=f(x_k)=\left(\frac{k}{n}\right)^2$, и основанием $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n}$, $k=\overline{0,n-1}$. В этом случае площадь прямоугольника P_k равна $f(x_k)\Delta x_k=\frac{k^2}{n^3}$.

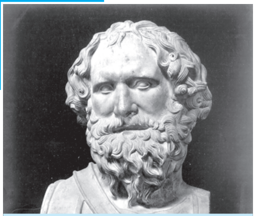
Просуммировав площади всех n прямоугольников, получим действительное число

$$\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^3}=\frac{0^2+1^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3},$$

которое является приближенным значением (с недостатком) площади $\mathscr{A}(OAB)$ плоской фигуры OAB. Интуитивно, чем больше число точек деления x_k, тем точнее число σ_n выражает площадь этой фигуры. Естественно полагать, что предел последовательности $(\sigma_n)_{n\ge1}$ при $n\to\infty$ равен $\mathscr{A}(OAB)$. Используя известную формулу $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получим $\sigma_n=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$. Значит,

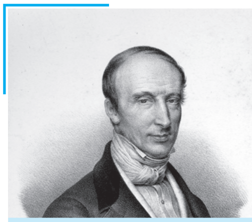
$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Итак, по определению, площадь фигуры OAB равна пределу последовательности $(\sigma_n)_{n\ge1}$, где $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\Delta x_k$, то есть $\mathscr{A}(OAB)=\frac{1}{3}$.



Архимед из Сиракуз (ок. 287–212 до н. э.) – древнегреческий ученый

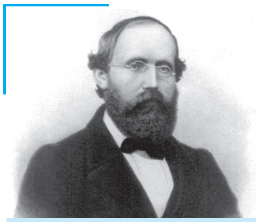
Этот же метод вычисления предела сумм вида $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$ при условии, что длины Δx_k соответствующих отрезков одновременно стремятся к нулю, встречается при решении многих задач из математики и физики (например, таких задач, как нахождение площади поверхности, объема тела, длины графика функции и др.).



Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик

Предполагают, что формула (1) была известна еще Архимеду. В 1823 году, используя суммы вида (1), французский математик О. Л. Коши применил этот прием для вычисления площадей фигур, ограниченных графиками непрерывных функций. Однако общая задача вычисления площадей с помощью таких сумм была решена лишь немецким математиком Б. Риманом. Он рассматривал более общие суммы, чем те, которые рассмотрены выше, и задал новый класс функций, для которых пределы таких сумм в определенном смысле являются конечными. Итак, применив интуитивное понятие площади, в итоге мы пришли естественно к выводу о необходимости изучения предела сумм специального вида:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k}.$$



Бернхард Риман (1826–1866) – немецкий математик

Предел сумм вида $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ играет важную роль в математическом анализе и его приложениях и будет изучен далее.

1.2. Определенный интеграл от непрерывной функции

Рассмотрим непрерывную функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

Согласно теореме 2 (модуль 2), функция f имеет первообразные на $[a, b]$. Пусть $F, \Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразные функции f на промежутке $[a, b]$. По теореме 1 (модуль 1) функции F и Φ отличаются между собой на произвольную постоянную. Значит, для любого $x \in [a, b]$ и любой постоянной $C \in \mathbb{R}$ имеем $F(x) = \Phi(x) + C$.

Следовательно, $F(b) - F(a) = [\Phi(b) + C] - [\Phi(a) + C] = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Полученное равенство $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$ устанавливает, что данная разность не зависит ни от первообразной F, ни от первообразной Φ, а зависит только от функции f и от чисел a и b. Этот факт позволяет сформулировать следующее понятие.

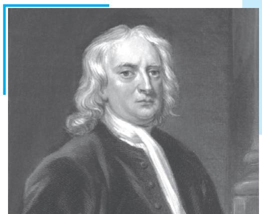
Определение 1

Пусть $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных непрерывной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Действительное число $F(b) - F(a)$ называется **определенным интегралом** от функции f от a до b и обозначается $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Итак,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad (\textit{формула Ньютона-Лейбница}).$$

(Формула будет доказана в разделе 1.3.)

Готфрид Вильгельм Фрейхер фон Лейбниц (1646–1716) – немецкий математик, один из выдающихся философов конца XVII и начала XVIII веков, один из основателей немецкого просветительства. В области математики Лейбниц в 1675 году разработал основы дифференциального и интегрального исчислений независимо от Ньютона, который объявил о принципах исчисления бесконечно малых в работе, изданной еще в 1666 году. Математические символы, введенные Лейбницем в дифференциальном и интегральном исчислении, используются в математике и сегодня.



Исаак Ньютон (1642–1727) – английский физик, математик и астроном

Замечания

1. Запись $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ читается как «Интеграл от а до бэ от эф от икс дэ икс».

2. Символ $\int$ называется ***знаком интеграла***. Числа a и b называются ***пределами интегрирования***: a – ***нижний предел***, b – ***верхний предел***; промежуток $[a, b]$ называется ***промежутком интегрирования***; x называется ***переменной интегрирования***, а функция f – ***подынтегральной функцией***; символ $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***. Переменную x можно заменить любой другой переменной: u, v, s, t и т. д. Таким образом:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \ldots$$

3. Если $a = b$, то по определению имеем $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$

4. Для разности $F(b) - F(a)$ используется обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, которое читается как «Эф от икс от а до бэ». Следовательно, формула Ньютона-Лейбница записывается и следующим образом:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b},$$

где $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x.$

5. Чтобы вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, сначала находим первообразную F для функции f, а затем вычисляем разность $F(b) - F(a)$.

6. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – это действительное число, тогда как неопределенный интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$ – это множество всех первообразных для функции f на промежутке $[a, b]$.

7. В разделе 1.3 будет сформулировано другое определение определенного интеграла, основанное на понятии «интегральные суммы», то есть суммы специального вида, рассмотренные в разделе 1.1. В итоге интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ получит геометрическое или механическое обоснование, что дает возможность применить интеграл в разделе 1.4. и в модуле 3 при решении задач по геометрии, физике, экономике и т. п.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x.$

Решение:

Функция $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, непрерывна на промежутке $[-1, 2]$, а значит, имеет первообразную $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [-1, 2]$.

Применим формулу Ньютона-Лейбница и получим:

$$\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = F(2) - F(-1) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

2 Вычислим интеграл $\int_2^3 \frac{dy}{y^2}$.

Решение:

Функция $f\colon [2, 3] \to \mathbb{R},\ f(y) = \frac{1}{y^2}$, непрерывна на $[2, 3]$, а значит, имеет первообразную $F(y) = -\frac{1}{y},\ y \in [2, 3]$.

На основании формулы Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_2^3 \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_2^3 = F(3) - F(2) = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

3 Вычислим интеграл $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)dt$.

Решение:

Первообразная непрерывной функции $f\colon [1, 4] \to \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}$, – это функция $F(t) = \sqrt{t} - \ln t,\ t \in [1, 4]$. Следовательно,

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)dt = (\sqrt{t} - \ln t)\Big|_1^4 = F(4) - F(1) = (2 - \ln 4) - (1 - \ln 1) = 1 - 2\ln 2.$$

4 Вычислим интеграл $\int_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\,dx$.

Решение:

Вычислим неопределенный интеграл от непрерывной функции $f\colon [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$, и получим множество первообразных этой функции:

$$\int (6x^2 - 2x + 1)\,dx = 6\int x^2 dx - 2\int x\,dx + \int dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C = 2x^3 - x^2 + x + C.$$

Рассмотрим первообразную $F\colon [-2, 0] \to \mathbb{R},\ F(x) = 2x^3 - x^2 + x$.

Так как $F(-2) = -16 - 4 - 2 = -22$ и $F(0) = 0$, согласно формуле Ньютона-Лейбница получим: $\int_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\,dx = (2x^3 - x^2 + x)\Big|_{-2}^0 = F(0) - F(-2) = 22.$

5 Вычислим интеграл $\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right)dx$.

Решение:

Одну из первообразных найдем следующим образом:

$$\int \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right)dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}\,dx - 2\int \frac{dx}{2x+3} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{1}{2}\ln|2x+3| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \ln|2x+3| + C.$$

Рассмотрим первообразную $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \ln|2x+3|$.

Поскольку $F(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \ln 9 = \frac{2}{3} \cdot 3^2 - \ln 3^2 = 6 - 2\ln 3,\ \ F(0) = -\ln 3$, получим:

$$\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right)dx = F(3) - F(0) = 6 - 2\ln 3 + \ln 3 = 6 - \ln 3.$$

6 Вычислим интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x.$

Решение:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x=\left(2\sin x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0=3.$$

7 Вычислим интеграл $\int\limits_0^1(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x.$

Решение:

Множеством первообразных для подынтегральной функции является:

$$\int(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x=\int 2^{3x}\mathrm{d}x-4\cdot\int 4^x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2}-4\cdot\frac{4^x}{\ln 4}=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{2\cdot 4^x}{\ln 2}+C.$$

Рассмотрим первообразную $F(x)=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{2\cdot 4^x}{\ln 2}$.

Тогда,

$$\int\limits_0^1(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\left(\frac{8}{3\ln 2}-\frac{8}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{3\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\right)=-\frac{16}{3\ln 2}+\frac{5}{3\ln 2}=-\frac{11}{3\ln 2}.$$

Приведенные ниже теоремы выражают основные свойства определенного интеграла от непрерывной функции.

Сначала сделаем следующее примечание: если $b>a$, то по определению полагаем $\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$, где $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – первообразная непрерывной функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$.

Теорема 1

Пусть $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Если в определенном интеграле поменять местами пределы интегрирования, то определенный интеграл меняет знак на противоположный, то есть $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство:

Если $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, – непрерывная функция на $[a,b]$, то она имеет первообразные (теорема 2, модуль 2). Пусть $F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на $[a,b]$.

Значит, $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]=-\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$ ►

Теорема 2

(свойство линейности определенного интеграла)

Пусть функции $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ и λ, μ – произвольные действительные числа.

Тогда $\int\limits_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x=\lambda\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Доказательство:

Если функции f и g непрерывны на $[a, b]$, то и функция $h=\lambda f+\mu g$ непрерывна и имеет первообразные на $[a, b]$. Пусть $H=\lambda F+\mu G$ – одна из первообразных на $[a, b]$ функции h, где F и G – первообразные функций f и g соответственно на отрезке $[a, b]$. Применив формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=H(b)-H(a)=(\lambda F(b)+\mu G(b))-(\lambda F(a)+\mu G(a))=$$

$$=\lambda(F(b)-F(a))+\mu(G(b)-G(a))=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Из теоремы 2, подставив, в частности, $\lambda\in\mathbb{R}$ и $\mu=0$ или $\lambda=1$ и $\mu=\pm1$, получим:

Следствие 1 Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то и функция λf, $\lambda\in\mathbb{R}$, непрерывна на $[a, b]$ и $\int_a^b\lambda f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (*определенный интеграл является однородным*).

Следствие 2 Если f и g – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, то и функции $f+g$ и $f-g$ непрерывны на $[a, b]$ и

$$\int_a^b(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\quad \int_a^b(f(x)-g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(*свойство аддитивности определенного интеграла*).

Замечание Согласно методу математической индукции, для любого $n\in\mathbb{N}^*$ получаем, что для любых функций $f_1, f_2, ..., f_n$: $[a, b]\to\mathbb{R}$, непрерывных на $[a, b]$, и любых действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ $(n\geq 1)$ справедливо равенство:

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\lambda_k\int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x.$$

Задание с решением Вычислим интеграл:

а) $I=\int_1^2\frac{3-2x-4x^2}{x}\mathrm{d}x$; б) $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}\right)\mathrm{d}x$; в*) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}8\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) Преобразуя подынтегральную функцию и применяя свойство линейности определенного интеграла, получаем:

$$I=\int_1^2\left(\frac{3}{x}-2-4x\right)\mathrm{d}x=3\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}-2\int_1^2\mathrm{d}x-4\int_1^2 x\mathrm{d}x=3(\ln x)\Big|_1^2-2(x)\Big|_1^2-\left(4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=3(\ln 2-\ln 1)-2(2-1)-2(2^2-1)=3\ln 2-2-6=-8+3\ln 2.$$

б) Из свойства линейности интеграла следует:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}=-2\left(\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\cdot\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos 0\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+(\sqrt{3}+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}.$$

в*) Так как

$$8\sin^4 x = 2(2\sin^2 x)^2 = 2(1-\cos 2x)^2 = 2-4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 3-4\cos 2x+\cos 4x,$$

из свойства линейности интеграла получим:

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\,dx = 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 2 + 0 = \frac{3\pi-8}{4}.$$

1.3. Определенный интеграл как предел интегральной суммы

В разделе 1.1 мы отметили, что площадь плоской геометрической фигуры может быть найдена приближенно, используя конечное объединение прямоугольных полосок. Для этого отрезок $[a, b]$, который является областью определения функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, делим на частичные отрезки и строим прямоугольники, основания которых – эти частичные отрезки, а высота – значение функции в произвольной точке основания (рис. 2.1).

Рассмотрим отрезок $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Определения 2

- **Разбиением** отрезка $[a, b]$ называется любое конечное упорядоченное множество точек $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$, где $n \geq 1$ и $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
- Точки x_k, $k = \overline{0, n}$, называются **точками деления**.
- Отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, называются **частичными отрезками** или **элементарными отрезками** разбиения T.
- Положительное число $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{0, n-1}$, называется **длиной** частичного отрезка $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, а положительное число $\|T\| = \max\limits_{0\leq k\leq n-1} \Delta x_k$ – наибольшая из длин всех частичных отрезков, – называется **нормой** разбиения T.

Примеры

1. Множество $T = (1, 2, 3, ..., 10)$ является разбиением отрезка $[1, 10]$ нормы $\|T\| = 1$.

2. Множество $T = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 1\right)$ является разбиением отрезка $[0, 1]$, норма которого $\|T\| = \frac{3}{4}$.

Определение 3

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. **Системой промежуточных точек**, соответствующей разбиению T, называется любая конечная система $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Определение 4

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – некоторая ограниченная функция, $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ – система промежуточных точек разбиения T. **Суммой Римана**, или **интегральной суммой**, соответствующей функции f, разбиению T и системе промежуточных точек ξ, называется действительное число

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Задание с решением

Вычислим интегральную сумму для функции $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3x$, где отрезок $[1, 3]$ поделен на n равных частей, а промежуточные точки представляют собой правые окончания частичных отрезков.

Решение:

Рассмотрим разбиение $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$, где $1=a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b=3$. Длины частичных отрезков равны, значит $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$ и точками деления будут $x_k=a+\frac{b-a}{n}k=1+\frac{2}{n}k,\ k=0, 1, ..., n.$

Промежуточные точки ξ_k совпадают с правыми окончаниями отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, значит $\xi_k=x_{k+1}=1+\frac{2}{n}(k+1),\ k=0, 1, ..., n-1$ и суммой Римана будет:

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(2+3\xi_k)\cdot\frac{2}{n}\right]=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[2+3(1+\frac{2}{n}(k+1))]=$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(5+\frac{6}{n}(k+1))=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}5+\frac{12}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)=$$

$$=\frac{2}{n}\cdot 5n+\frac{12}{n^2}(1+2+3+...+n)=10+\frac{12}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=10+\frac{6}{n}(1+n)=10+\frac{6}{n}+6=16+\frac{6}{n}.$$

Замечание

Геометрическая интерпретация суммы Римана. Если $f\colon [a, b]\to[0, +\infty)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, то произведение $f(\xi_k)\Delta x_k$ геометрически представляет собой площадь прямоугольника D_k с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Значит, сумма Римана $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь ступенчатой фигуры $D=\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$, образованной прямоугольниками $D_0, D_1, ..., D_{n-1}$ (рис. 2.2).

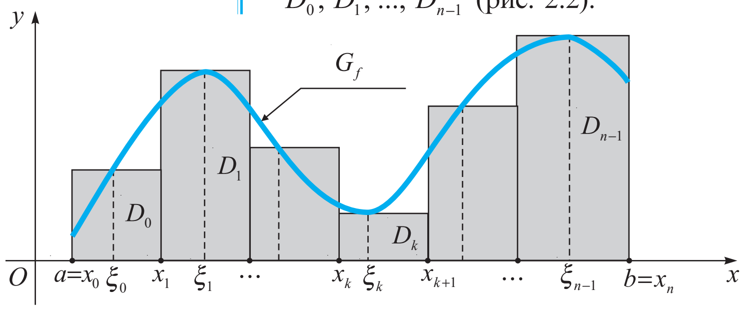


Рис. 2.2

Очевидно, что эта площадь $\sigma(T,\xi)$ приближенно выражает площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью Ox и графиком функции $f\colon [a, b]\to[0, +\infty)$. Приближенное значение искомой суммы будет точнее, если основания прямоугольников D_k, $k=\overline{0, n-1}$, будут сколь угодно малы, то есть, если норма $\|T\|\to 0$.

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Добавим на отрезке $[a, b]$ и другие точки деления, чтобы $\|T\|\to 0$. Тогда интегральная сумма $\sigma(T,\xi)$ изменится и в общем случае может приблизиться к некоторому числу $I\in\mathbb{R}$.

Определение 5

(предел интегральной суммы по Коши, или **«на языке $\varepsilon-\delta$»)**

Число $I\in\mathbb{R}$ называется **пределом интегральной суммы** $\sigma(T,\xi)$ при $\|T\|\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого разбиения T нормы $\|T\|<\delta$ и для любой системы промежуточных точек ξ следует, что $|\sigma(T,\xi)-I|<\varepsilon$.

Предел интегральной суммы обозначают: $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)=I.$

Определение 6

Будем говорить, что функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ **интегрируема (интегрируема по Риману)** на отрезке $[a, b]$, если интегральная сумма, соответствующая функции f, имеет конечный предел: $I=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)$, $I\in\mathbb{R}$. Число I называется **определенным интегралом (интегралом Римана)** от функции f на отрезке $[a, b]$.

Итак: $$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k}.$$

Теорема 3 **(формула Ньютона-Лейбница)**

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – интегрируемая функция, имеющая первообразные на отрезке $[a, b]$, и $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразная для функции f. Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\textbf{\textit{формула Ньютона-Лейбница}}).$$

Доказательство:

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях (см. Учебник математики для XI класса, модуль 4, раздел 6.3), примененной к функции F на частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, существует точка $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ такая, что $F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(c_k)(x_{k+1} - x_k)$. Поскольку F – первообразная функции f на отрезке $[a, b]$, то $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a, b]$.

Следовательно, $F(x_{k+1}) - F(x_k) = f(c_k)\Delta x_k$, $k = \overline{0, n-1}$.

Однако функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. На основании определения 6, существует конечный предел $I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$, где $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, и этот предел, по определению 5, не зависит ни от вида разбиения T, ни от способа выбора системы промежуточных точек ξ, то есть можно полагать, что $\xi_k = c_k$, $k = \overline{0, n-1}$. При таком выборе системы промежуточных точек ξ, предел I не изменяется. Вычислив интегральную сумму, соответствующую разбиению T и системе промежуточных точек $\xi = (c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, получим постоянную величину:

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a).$$

Следовательно, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = F(b) - F(a)$. ►

Замечания

1. Поскольку любая непрерывная функция имеет первообразные, теорема 3 устанавливает, что в случае непрерывной функции «интеграл Римана» совпадает с «определенным интегралом» из раздела 1.2.

2. Интеграл Римана определяется для класса функций, необязательно непрерывных на промежутке.

Примеры

1 Постоянная функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$, интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

В самом деле, каким бы ни были разбиение T и промежуточные точки ξ_k, получим, что $f(\xi_k) = c$. Значит, $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} c\Delta x_k = c \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = c(x_n - x_0) = c(b-a)$ и $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = c(b-a)$.

Таким образом, функция f интегрируема на $[a, b]$ и $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

2 Функция Дирихле $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ не интегрируема ни на одном из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$, где $a < b$.

Действительно, пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и пусть $\xi' = (\xi'_0, \xi'_1, ..., \xi'_{n-1})$, $\xi'' = (\xi''_0, \xi''_1, ..., \xi''_{n-1})$ – две системы промежуточных точек $\xi'_k, \xi''_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Если каждое из чисел ξ'_k является рациональным, то $D(\xi'_k)=1$ и, значит,

$$\sigma(T,\xi')=\sum_{k=0}^{n-1}D(\xi'_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=x_n-x_0=b-a,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi')=b-a$.

Если же каждое из чисел ξ''_k – иррациональное число, то $D(\xi''_k)=0$, и тогда соответствующая интегральная сумма $\sigma(T,\xi'')=\sum\limits_{k=0}^{n-1}D(\xi''_k)\Delta x_k=0$. Значит, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi'')=0$.

Поскольку для разных систем ξ' и ξ'' промежуточных точек интегральные суммы имеют разные пределы, то не существует предел $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)$ и, следовательно, функция D не интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Приведем без доказательства два важных результата из теории интегрального исчисления.

Теорема 4 **(необходимое условие интегрируемости)**

Если функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Замечания

1. Теорему 4 можно сформулировать по другому: *Если функция* $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ *не ограничена на отрезке* $[a, b]$, *то она не интегрируема на этом отрезке*.

Например, функция $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\in(0, 1],\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ не ограничена на отрезке $[0, 1]$, так как $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$. Значит, функция f не интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

2. Условие ограниченности функции f на отрезке $[a, b]$ является лишь необходимым, но не достаточным условием интегрируемости функции f. Например, существуют функции f, ограниченные на отрезке $[a, b]$, (функция Дирихле), но не интегрируемые на этом отрезке.

Теорема 5 **(классы интегрируемых функций)**

а) Любая функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.

б) Любая функция $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл:

а*) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin s\,ds}{2+\cos s}$; б*) $\displaystyle\int_1^{e}\frac{\ln x}{x}dx$; в) $\displaystyle\int_{-13}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$; г) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^3}{x+1}dx$.

Решение:

а*) Найдем первообразную $F(s)$, $s\in[0,\pi]$, для функции $f\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(s)=\dfrac{\sin s}{2+\cos s}$:

$$F(s)=\int\frac{\sin s\,ds}{2+\cos s}=-\int\frac{d(2+\cos s)}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s).$$

Значит, $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin s\,ds}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s)\Big|_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)=-\ln(2+\cos\pi)+\ln(2+\cos 0)=\ln 3$.

б*) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int\limits_1^e \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$

в) $\int\limits_{-13}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}} = -\int\limits_{-13}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-2x}} = -\int\limits_{-13}^{0}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{-2}\cdot\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Bigg|_{-13}^{0} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-2x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-13}^{0} = \frac{3}{4}(1-27^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{4}(1-9) = -6.$

г) Найдем первообразные для функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$. Для этого вычислим неопределенный интеграл: $\int \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{d}x =$

$= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C.$

Рассмотрим первообразную $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1),\ x \in [0, 1].$

Согласно формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) - (0 - \ln 1) = \frac{5}{6} - \ln 2.$$

2 Докажем (используя определения 5 и 6), что функция $f\colon [a, b] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Доказательство:

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, – произвольные промежуточные точки. Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях, примененной к первообразной $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x$, для функции f, на каждом элементарном (частичном) отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, существуют точки $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ такие, что

$$\sin x_{k+1} - \sin x_k = \cos c_k (x_{k+1} - x_k),\quad k = \overline{0, n-1}.$$

Отсюда следует, что:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos c_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(\sin x_{k+1} - \sin x_k) = \sin x_n - \sin x_0 = \sin b - \sin a.$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

Так как $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos\xi_k \Delta x_k$, можно записать:

$$\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a) = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos\xi_k - \cos c_k)\Delta x_k.$$

Согласно теореме Лагранжа, примененной к функции f на $[\xi_k, c_k]$ (или на $[c_k, \xi_k]$), существует точка $\Theta_k \in (\xi_k, c_k)$ такая, что $\cos\xi_k - \cos c_k = -\sin\Theta_k(\xi_k - c_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Поскольку производная $f'(x) = -\sin x$ ограничена на отрезке $[a, b]$, получим:

$$|\cos\xi_k - \cos c_k| = |\sin\Theta_k\|\xi_k - c_k| \le 1\cdot\Delta x_k \le \max_{0\le k\le n-1}\Delta x_k = \|T\|.$$

Следовательно,

$$|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \sum_{k=0}^{n-1}|\cos\xi_k - \cos c_k|\Delta x_k \le \|T\|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \|T\|(b-a). \quad (2)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$. Тогда из соотношения (2) следует, что для любого разбиения T нормы $\|T\| < \delta$ и для произвольного выбора системы промежуточных точек ξ справедливо неравенство $|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \|T\|(b-a) < \delta(b-a) = \varepsilon$.

На основании определений 5 и 6, функция $f\colon [a, b] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $\int\limits_a^b \cos x\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = \sin b - \sin a$. ►

1.4. Геометрический смысл определенного интеграла

Определение 7 Пусть даны действительные числа a, b, $a < b$, и непрерывная функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$. Плоская фигура, ограниченная графиком функции f, осью абсцисс Ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, называется **подграфиком функции** f (или **криволинейной трапецией**) (рис. 2.2).

Интегральные суммы $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, определенные для непрерывной и положительной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, геометрически представляют собой площадь фигуры $D = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} D_k$, составленной из прямоугольников $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ (рис. 2.2).

Эти суммы дают приближенное значение с определенной точностью для площади $\mathscr{A}$ подграфика функции f (рис. 2.2). Так как чем меньше норма $\|T\|$, тем точнее приближенное равенство $\mathscr{A} \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, то, переходя к пределу при $\|T\| \to 0$, это приближенное равенство становится точным равенством:

$$\boxed{\mathscr{A} = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Запомните! Геометрический смысл определенного интеграла от непрерывной и положительной функции f на отрезке $[a, b]$ состоит в том, что этот интеграл равен площади $\mathscr{A}$ подграфика функции f на отрезке $[a, b]$ (рис. 2.2).

Задания с решением

1 Найдем площадь подграфика функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (раздел 1.1, рис. 2.1).

Решение:

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2 Найдем площадь подграфика функции $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ (рис. 2.3).

Решение:

$$\mathscr{A} = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^3 = \left.\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

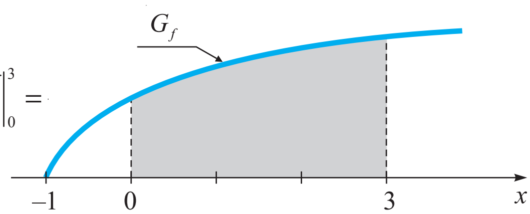


Рис. 2.3

3 Вычислим площадь подграфика функции $f\colon [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(3-x)$, изображенного на рисунке 2.4.

Решение:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} (x+1)(3-x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{3} (3+2x-x^2)\mathrm{d}x = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= (9+9-9) - \left(-3+1+\frac{1}{3}\right) = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

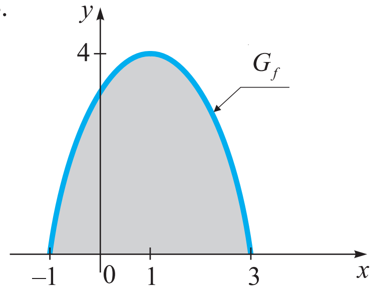


Рис. 2.4

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A_1

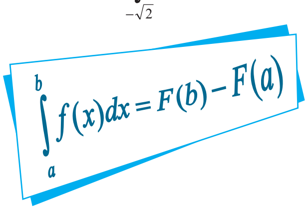
Применив формулу Ньютона-Лейбница, вычислите интеграл:

1. а) $\int_{0}^{\sqrt{2}} x^3\mathrm{d}x$; б) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^3\mathrm{d}x$; в) $\int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x$;

г) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} x^5\mathrm{d}x$; д) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; е) $\int_{4}^{9} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$;

ж) $\int_{0}^{1} \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; з) $\int_{-8}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

и) $\int_{1}^{9} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$; к) $\int_{1}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$.



2. ***Работайте в парах!***

а) $\int_{-1}^{1} (3x^2-2x+1)\mathrm{d}x$; б) $\int_{1}^{3} (2-x)^2\mathrm{d}x$;

в) $\int_{0}^{1} x(x-1)^2\mathrm{d}x$; г) $\int_{-1}^{2} (3x-2)(2-x)\mathrm{d}x$;

д) $\int_{0}^{1} (3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} - 1)\mathrm{d}x$; е) $\int_{1}^{4} \frac{1-3x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

3. а) $\int_{1}^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$; б) $\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$;

в) $\int_{1}^{2} \frac{3x^2+x+4}{x^3}\mathrm{d}x$; г) $\int_{-1}^{0} \left(1+\frac{3}{3x-1}\right)\mathrm{d}x$;

д) $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2x+1)}\right)\mathrm{d}x$; е) $\int_{-1}^{2} \left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x$;

ж) $\int_{-1}^{0} \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; з) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$;

и) $\int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; к) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

4. а) $\int_{0}^{\ln 2} e^x\mathrm{d}x$; б) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\mathrm{d}x$; в) $\int_{-\ln 2}^{\ln\sqrt{2}} e^{2x}\mathrm{d}x$; г) $\int_{-1}^{0} 2^x\mathrm{d}x$;

д) $\int_{0}^{\log_3 4} 3^{2x}\mathrm{d}x$; е) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$; ж) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin 3x\,\mathrm{d}x$; з) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

и) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; к) $\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{6}\mathrm{d}x$; л) $\int_{0}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$; м) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$;

н) $\int_{0}^{\pi} (\sin x + \cos x)^2\mathrm{d}x$; о) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x - \cos^2 x)\mathrm{d}x$;

п) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; р) $\int_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

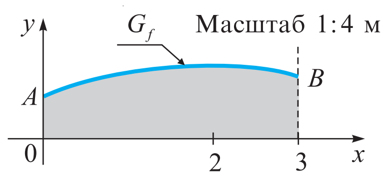
5. ***Работайте в группах!*** Вычислите площадь подграфика функции: а) $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;
б) $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;
в) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.

6. ***Исследуйте!*** На рисунке изображена одна из боковых стен теплицы. Дуга AB задана функцией $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{12}(6+4x-x^2)$.

а) Найдите площадь обеих боковых стен этой теплицы.

б) Какое количество краски потребуется для покраски снаружи этих двух стен теплицы, если расход краски составляет 150 г на 1 м²?

в) Какова стоимость краски, если цена одного килограмма 25 леев?



B_1

7. Вычислим интеграл:

а) $\int\limits_{-3}^{0}\sqrt[3]{1+3x}\,dx$; б) $\int\limits_{-6}^{-1}\sqrt{3-x}\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{6}\frac{dx}{\sqrt{2x+4}}$;

г) $\int\limits_{-3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[4]{1-5x}}$; д) $\int\limits_{0}^{1}(2-3x)^3\,dx$; е) $\int\limits_{0}^{\frac13}\frac{dx}{(3x+1)^5}$;

ж) $\int\limits_{e}^{e^3}\frac{\ln x}{x}\,dx$; з) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}\,dx$; и) $\int\limits_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$;

к) $\int\limits_{1}^{\sqrt2}\frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2-1}}$; л) $\int\limits_{0}^{2}\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}$; м) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,dx$;

н) $\int\limits_{0}^{\sqrt3}\frac{\mathrm{arctg}\,x\,dx}{1+x^2}$; о) $\int\limits_{0}^{\frac12}\frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; п) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}\,dx$;

р) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$; с) $\int\limits_{0}^{\sqrt[3]{4}}\frac{x^2dx}{16+x^6}$; т) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

у) $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; ф) $\int\limits_{0}^{\sqrt3}\frac{x\,dx}{1+x^2}$; х) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{4-x^2}$;

ц) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x\,dx}{1+4\sin^2 x}$; ч) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{2+\sin^2 x}$; ш) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{16+9x^2}}$;

щ) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$; э) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3+\sin^2 x}}$.

8. *Работайте в парах!* Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$; б) $\int\limits_{\frac13}^{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2}\right)dx$;

в) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$; г) $\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^3}\right)dx$;

д) $\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx$; е) $\int\limits_{0}^{\frac12}\left(\frac14+\frac{3}{4(1+4x^2)}+\frac{x}{1+4x^2}\right)dx$;

ж) $\int\limits_{0}^{1}\left(1-\frac{2x+3}{x^2+3x+4}\right)dx$; з) $\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{3x+6}+\frac{1}{6x+3}\right)dx$.

9. Найдите площадь подграфика функции:

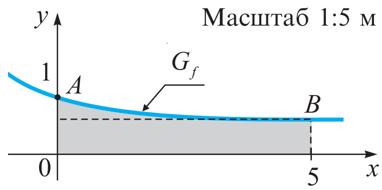
а) $f\colon\left[\frac12,\,2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac1x$;

б) $f\colon[1,\,8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$;

в) $f\colon[-\ln 3,\,\ln 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}$.

10. *Работайте в группах!*

Для постройки жилого дома нужно вырыть котлован под фундамент на склоне возвышенности. Поперечное сечение этого котлована изображено на рисунке. Склон возвышенности представлен дугой AB, заданной функцией:



$f\colon[0,\,5]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{275}(2x^2-32x+275)$.

а) Найдите площадь (в квадратных метрах) поперечного сечения котлована.

б) Найдите объем (в кубических метрах) вывезенного со строительной площадки грунта, если длина жилого дома будет приблизительно 110 м.

в) Оцените затраты строительной фирмы, если для выполнения всего технологического процесса (рытье, транспортировка и т. п.) по проекту запланировано до 5 леев за 1 м^3 грунта.

C_1

11. *Исследуйте!* Применяя определения 5 и 6 и используя метод, примененный при решении задания **2** (с. 32), докажите, что функция интегрируема, и вычислите определенный интеграл от этой функции, если:

а) $f\colon[a,\,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac1x,\ b>a>0$;

б) $f\colon[a,\,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

в) $f\colon[a,\,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$.

12. *Исследуйте!* Докажите, что функция f не интегрируема:

а) $f\colon[1,\,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=1,\\ \frac{1}{x-1}, & \text{если } 1<x\le 2;\end{cases}$

б) $f\colon[0,\,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ \ln x, & \text{если } 0<x\le e.\end{cases}$

$$\mathcal{A}=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{k=2}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\int\limits_a^b f(x)dx$$

§ 2 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Сформулируем и докажем основные свойства определенного интеграла. Эти свойства можно установить для общего случая интегрируемых функций на отрезке, однако соответствующие доказательства этих свойств требуют значительных усилий, поскольку они основаны на более глубоких понятиях и следствиях. В доказательствах свойств, которые приведены ниже, предполагается, что ***функции, указанные в условиях свойств, являются непрерывными***, а значит, и интегрируемыми. Это предположение существенно упрощает доказательство свойств, поскольку для непрерывных функций существуют первообразные.

Свойства определенного интеграла от непрерывной функции, сформулированные посредством теорем 1 и 2 и следствий 1 и 2 (раздел 1.2), справедливы и для функций, интегрируемых на отрезке. Дополним список этих свойств.

Теорема 6 **(свойство аддитивности определенного интеграла)**

Пусть $f\colon I\to\mathbb{R}$ ($I\subseteq\mathbb{R}$, где I – промежуток) – некоторая функция и $a, b, c\in I$, $a\le c\le b$. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Доказательство:

Пусть функция f непрерывна на промежутке I и $a\le c\le b$. Тогда функция f интегрируема на каждом из отрезков $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ (теорема 5) и для нее существуют первообразные на промежутке I (в силу теоремы 2, модуль 1). Пусть $F\colon I\to\mathbb{R}$ – одна из первообразных функции f на промежутке I. По формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

то есть равенство, указанное в условии теоремы, доказано. ►

Задание с решением

Для функции $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ вычислим определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

а) $f\colon [-1, 2]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } -1\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{если } 1<x\le 2;\end{cases}$

б) $f\colon [-2, 3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=|x-1|+|x+1|;$

в) $f\colon [0, \pi]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\max\{\sin x, \cos x\}.$

Решение:

а) Функция $f\colon [-1, 2]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } -1\le x\le 1,\\ 2-x, & \text{если } 1<x\le 2,\end{cases}$ непрерывна на отрезке $[-1, 2]$, а значит, и интегрируема. По теореме 6 и по формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

б) Функция $f\colon [-2, 3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=|x-1|+|x+1|$, непрерывна, а значит, и интегрируема, и ее можно записать в виде: $f\colon [-2, 3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если } -2\le x\le -1,\\ 2, & \text{если } -1<x<1,\\ 2x, & \text{если } 1\le x\le 3.\end{cases}$

Дважды применив свойство аддитивности определенного интеграла, получим:

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}(-2x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1 2\mathrm{d}x+\int_1^3 2x\mathrm{d}x=-x^2\Big|_{-2}^{-1}+2x\Big|_{-1}^1+x^2\Big|_1^3=3+4+8=15.$$

в) Функция $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$, непрерывна на отрезке $[0, \pi]$ и ее можно записать в следующем виде: $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ \sin x, \text{ если } \dfrac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases}$

Из свойства аддитивности определенного интеграла следует, что:

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

Теорема 7 **(свойство инвариантности знака определенного интеграла)**

Если функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

Доказательство:

Для любого разбиения $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ отрезка $[a, b]$ и любого выбора промежуточных точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, так как $f(\xi_k) \ge 0$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, получим, что $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\|T\| \to 0$, получим $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. ►

Теорема 8 **(свойство монотонности определенного интеграла)**

Если функции $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \le g(x)$ для любого $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Доказательство:

По условию теоремы, $g(x) - f(x) \ge 0$ для любого $x \in [a, b]$. В силу свойств линейности и инвариантности знака интеграла, получим:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \ge 0.$$

Следовательно, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. ►

Теорема 9 **(интегрируемость модуля функции)**

Если функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f|: [a, b] \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$, также интегрируема на этом отрезке и имеет место неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Теорема 10 **(оценка сумм Римана)**

Если функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, ограничена на отрезке $[a, b]$ и $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$, то для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ и любой системы промежуточных точек ξ справедливо двойное неравенство:

$$m(b-a) \le \sigma(T, \xi) \le M(b-a).$$

В частности, если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Теорема 11

(теорема о среднем значении для случая интегрируемых функций)

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$, то существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.

Теорема 12

(теорема о среднем значении для случая непрерывных функций)

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$.

Доказательство:

Если $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – одна из первообразных непрерывной функции f, то $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. Применив теорему Лагранжа о конечных приращениях к функции F (см. Учебник математики для XI класса, модуль 4, раздел 6.3), получим, что существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$F(b) - F(a) = F(c)(b-a) = f(c)(b-a).$$

Значит, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(c)(b-a)$. ►

Замечания

1. Число $M[f] = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ называется ***средним значением*** функции f на отрезке $[a, b]$. Теорема 12 показывает, что для непрерывных функций среднее значение достигается функцией f в некоторой точке $c \in (a, b)$.

2. *Теоремы о среднем значении имеют следующий геометрический смысл*: площадь подграфика непрерывной и положительной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ равна площади прямоугольника, основание которого $b-a$ и высота $\mu = f(c)$, то есть

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

Иначе говоря, площади закрашенных фигур равны (рис. 2.5).

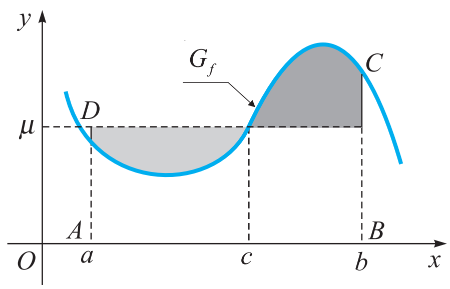


Рис. 2.5

Задания с решением

1 Вычислим определенный интеграл:

а) $\int_1^{\sqrt[5]{2}}\left(x^4 + \dfrac{1}{x^6}\right)\mathrm{d}x$; б) $\int_{-1}^{1}\dfrac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}\mathrm{d}x$; в*) $\int_1^2\sqrt{9x^2 + \dfrac{4}{x^2} + 12}\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) Применив свойство линейности определенного интеграла (теорема 2) и формулу Ньютона-Лейбница, получим:

$$\int_1^{\sqrt[5]{2}}\left(x^4 + \frac{1}{x^6}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt[5]{2}} x^4\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt[5]{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^6} = \frac{x^5}{5}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} + \frac{x^{-6+1}}{-6+1}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} = \frac{x^5}{5}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{5x^5}\Bigg|_1^{\sqrt[5]{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}.$$

б) Так как $4e^{2x}-9=(2e^x)^2-3^2=(2e^x-3)(2e^x+3)$, получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{(2e^x-3)(2e^x+3)}{2e^x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2e^x-3)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2e^x\Big|_{-1}^{1}-3x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2(e-e^{-1})-3(1+1)=2e-\frac{2}{e}-6=\frac{2(e^2-3e-1)}{e}.$$

в*) Замечаем, что $9x^2+12+\frac{4}{x^2}=\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2$, и если $x\in[1,2]$, то $3x+\frac{2}{x}>0$.

Следовательно, $\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}=\sqrt{\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2}=\left|3x+\frac{2}{x}\right|=3x+\frac{2}{x}$. Тогда

$$\int_{1}^{2}\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}\,\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\left(3x+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int_{1}^{2}x\mathrm{d}x+2\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{3x^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}+2\ln x\Big|_{1}^{2}=$$

$$=\frac{3}{2}(2^2-1)+2(\ln 2-\ln 1)=\frac{9}{2}+2\ln 2.$$

2 Определим знак интеграла:

а) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\sin x^2\mathrm{d}x$;   б) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

а) Если $x\in(0,\sqrt{3})$, то $x^2\in(0,3)\subset(0,\pi)$, а значит, $\sin x^2>0$. Применив теорему о среднем значении к непрерывной функции $f\colon[0,\sqrt{3}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x^2$, получим, что существует точка $c\in(0,\sqrt{3})$ такая, что $\int_{0}^{\sqrt{3}}\sin x^2\mathrm{d}x=\sqrt{3}\sin c^2>0$.

б) Для любого $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ имеем $x^{10}\ln x<0$. Поскольку функция $f\colon\left[\frac{1}{2},1\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{10}\ln x$, непрерывна, то согласно теореме 12, найдется точка $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ такая, что $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x=(c^{10}\ln c)\left(1-\frac{1}{2}\right)<0$.

3 Сравним интегралы $I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{100}x\,\mathrm{d}x$ и $I_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^{10}x-\sin^{100}x$.

Так как $\sin^{10}x>\sin^{100}x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, и равенство $\sin^{10}x=\sin^{100}x$ на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ возможно лишь при $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$, то $f(x)>0$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Из теоремы 12, примененной к непрерывной функции $f\colon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, следует, что существует точка $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ такая, что $I_2-I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{10}x-\sin^{100}x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(c)>0$. Следовательно, $I_2>I_1$.

4 Определим среднее значение функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2\sin x + 3\cos x$, на отрезке $[\pi, 2\pi]$.

Решение:

$$M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi - \pi}\int_\pi^{2\pi}(5 - 2\sin x + 3\cos x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}(5x + 2\cos x + 3\sin x)\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(10\pi + 2) - \frac{1}{\pi}(5\pi - 2) = 5 + \frac{4}{\pi}.$$

5 Найдем точку c из теоремы о среднем значении для случая непрерывных функций, примененной к функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, на отрезке $[-2, 4]$.

Решение:

Поскольку функция f непрерывна, то, согласно теореме 12, найдется хотя бы одна точка $c \in (-2, 4)$ такая, что $\int_{-2}^{4} x^2\mathrm{d}x = 6c^2$. Так как $\int_{-2}^{4} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{4} = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} = 24$, то есть $6c^2 = 24 \Leftrightarrow c^2 = 4$, то $c \in \{-2, 2\}$. Точка $c = 2$ является решением задачи, поскольку принадлежит промежутку $(-2, 4)$.

6 Дана непрерывная функция $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ и $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Докажем, что найдется точка $x_0 \in (0, 2)$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

Решение:

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 (f(x) - x)\mathrm{d}x = 0.$$

Из теоремы о среднем значении вытекает, что найдется точка $x_0 \in (0, 2)$ такая, что $(f(x_0) - x_0)(2 - 0) = 0$. Значит, $f(x_0) = x_0$.

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A_1

Вычислите интеграл:

1. а) $\int_1^4 (x^2 - 2\sqrt{x})\mathrm{d}x$; б) $\int_0^1 (3\sqrt{x} + x)\mathrm{d}x$;

в) $\int_{-1}^0 (2x - \sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; г) $\int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

д) $\int_{-1}^1 (x^2 - 8\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; е) $\int_9^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{13}\right)\mathrm{d}x$;

ж) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$; з) $\int_1^{16} \left(\frac{8}{x^2} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x$.

2. а) $\int_1^2 \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$; б) $\int_{-8}^{-1} \frac{(1-x)^2}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

в) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1+x)^3}{x^4}\mathrm{d}x$; г) $\int_1^{16} \frac{x-1}{x^2}\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

д) $\int_{-1}^1 (1+x)(1+2x)(1-x)\mathrm{d}x$; е) $\int_{-1}^0 (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)\mathrm{d}x$;

ж) $\int_{-4}^5 (\sqrt{x+20} - \sqrt{x+4})\mathrm{d}x$; з) $\int_{-9}^0 (\sqrt{25+x} + \sqrt{9+x})\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_{-3}^{13}\frac{dx}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x+3}}$; к) $\int\limits_{-5}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{10-3x}+\sqrt{1-3x}}$;

л) $\int\limits_{0}^{1}(3e^{3x}-4e^{2x})dx$; м) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(e^{2x}-e^{-2x})^2dx$;

н) $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{-x}(e^{5x}+e^{-x})}{e^{2x}}dx$; о) $\int\limits_{0}^{4}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$;

п) $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}dx$; р) $\int\limits_{2}^{3}\sqrt{x^4+x^{-4}+2}\,dx$;

с) $\int\limits_{0}^{1}2^x(3^x+1)dx$; т) $\int\limits_{0}^{1}(3^x-1)^2dx$.

3. ***Работайте в парах!***

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}}\left(\frac{3}{\cos^2 3x}+\frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$;

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}}\left(\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{8}{\sin^2 8x}+\frac{60}{\pi}\right)dx$.

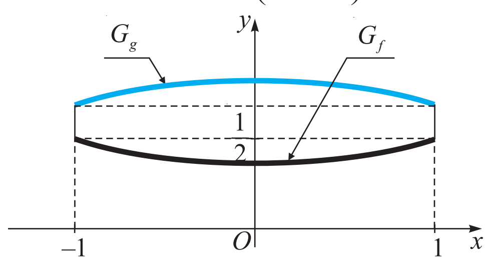
4. ***Работайте в группах!***

На рисунке изображена линза телескопа, масштаб 1:1 м.

Дуги, ограничивающие поверхность линзы, задаются функциями:

$f: [-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{20}(9+x^2)$;

$g: [-1, 1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{20}\left(\frac{59}{5}-x^2\right)$.



а) Найдите диаметр линзы.

б) Определите толщину края линзы.

в) Какова толщина в центре линзы?

г) Найдите площадь поперечного сечения линзы.

B₁

5. ***Исследуйте!*** Покажите, что функция f непрерывна, и вычислите определенный интеграл от этой функции:

а) $\int\limits_{-1}^{4}f(x)dx$, где $f: [-1, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x\in[-1, 0),\\ \sqrt{x}, \text{ если } x\in[0, 4];\end{cases}$$

б) $\int\limits_{-8}^{4}f(x)dx$, где $f: [-8, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, \text{ если } x\in[-8, 0),\\ 3\sqrt{x}, \text{ если } x\in[0, 4];\end{cases}$$

в) $\int\limits_{-1}^{3}f(x)dx$, $f: [-1, 3]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^3, \text{ если } x\in[-1, 1],\\ x^2, \text{ если } x\in(1, 2),\\ 4, \text{ если } x\in[2, 3].\end{cases}$$

г) $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$, где $f: [-1, 1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x, \text{ если } x\in[-1, 0],\\ x^3-x, \text{ если } x\in(0, 1];\end{cases}$$

д) $\int\limits_{0}^{2}f(x)dx$, где $f: [0, 2]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, \text{ если } x\in[0, 1),\\ 3\sqrt{x-1}, \text{ если } x\in[1, 2];\end{cases}$$

е) $\int\limits_{-1}^{2\sqrt[3]{6}}f(x)dx$, где $f: [-1, 2\sqrt[3]{6}]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sqrt{1+x^3}, \text{ если } x\in[-1, 2],\\ \dfrac{9x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \text{ если } x\in(2, 2\sqrt[3]{6}];\end{cases}$$

ж) $\int\limits_{1}^{4}f(x)dx$, где $f: [1, 4]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2, \text{ если } x=1,\\ \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}, \text{ если } x\in(1, 4];\end{cases}$$

з) $\int\limits_{0}^{\pi}f(x)dx$, где $f: [0, \pi]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}, \text{ если } x\in[0, \pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\},\\ 2, \text{ если } x=\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

и) $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$, где $f: [-1, 1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}1-2x+3x^2, \text{ если } x\in[-1, 0],\\ 1+2x-3x^2, \text{ если } x\in(0, 1];\end{cases}$$

к) $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx$, где $f: [-1, 1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^2}, \text{ если } x\in[-1, 0),\\ \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \text{ если } x\in[0, 1];\end{cases}$$

л) $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, где $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\min\{x, 2-x\}$, $\forall x\in[0, 2]$;

м) $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, где $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$,

$f(x)=\max\{x, 2-x\}$, $\forall x\in[0, 2]$.

6. Вычислите:

а) $\int\limits_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{-1}^1 |2x+1|\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_0^1 |1-3x|\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{-1}^1 |x^3|\,\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_{-2}^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_{-2}^3 |x^2-x-2|\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int\limits_{-1}^2 (x^2-|x|)\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_{-1}^2 (|x|+|1-x|)\mathrm{d}x$;

и) $\int\limits_0^4 (|1+x|-|2-x|)\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_0^2 |1-x^3|\,\mathrm{d}x$;

л) $\int\limits_{-1}^2 |x-x^3|\,\mathrm{d}x$; м) $\int\limits_0^3 \left|\dfrac{2-x}{1+x}\right|\mathrm{d}x$;

н) $\int\limits_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$; о) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{e^{2x}+e^{-2x}-2}\,\mathrm{d}x$;

п) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{9^x-2\cdot 3^x+1}\,\mathrm{d}x$; р) $\int\limits_{-1}^2 (|2-2^x|-|2^x-1|)\mathrm{d}x$;

с) $\int\limits_{-1}^2 \max\{x, x^2\}\,\mathrm{d}x$.

7. ***Работайте в парах!*** Не вычисляя интеграл, определите его знак:

а) $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \arcsin(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_2^{\frac{3}{2}} \log_2(x-1)\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{-2}^{-1} (\pi^x-e^x)\mathrm{d}x$.

8. Сравните определенные интегралы:

а) $I_1=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$ и $I_2=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}^{10} x\,\mathrm{d}x$;

б) $I_1=\int\limits_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ и $I_2=\int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$;

в) $I_1=\int\limits_0^1 \cos x^2\mathrm{d}x$ и $I_2=\int\limits_0^1 \cos x^5\mathrm{d}x$.

9. Найдите среднее значение функции:

а) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3\cos 3x-4\cos^2 2x$, на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

б) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x(4^x-2^x+1)$, ре $[-1, 1]$.

10. Рыночная цена товара, в зависимости от спроса и предложения, задается функцией $f\colon [1, 12]\to\mathbb{R}$,

$$f(t)=\int\limits_1^2 (12s^5-6ts^2+t^2-2)\mathrm{d}s,$$

где $t\in\{1, 2, ..., 12\}$, а $y=f(t)$ цена товара (в леях) в месяце t, в зависимости от спроса и предложения.

а) Определите функцию f.

б) Найдите цену товара в январе и декабре.

в) В каком месяце цена товара минимальна?

г) Найдите минимальную цену товара.

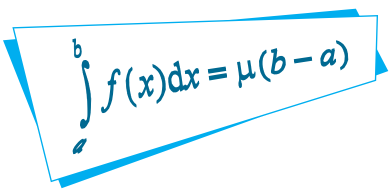
11. ***Работайте в группах!*** Найдите значение точки c из теоремы 12 о среднем значении для определенного интеграла:

а) $\int\limits_1^3 x^3\,\mathrm{d}x$;

б) $\int\limits_0^{2\pi} (2+3\sin x)\mathrm{d}x$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

г) $\int\limits_1^3 (3x^2-2x-1)\mathrm{d}x$.



C₁

12. Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x=6$ и $\int\limits_1^5 f(x)\mathrm{d}x=8$.

Вычислите $\int\limits_4^5 (3f(x)+2x)\mathrm{d}x$.

13. ***Исследуйте!*** Пусть $f\colon [2, 5]\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция, для которой $\int\limits_2^5 f(x)\mathrm{d}x=39$.

Докажите, что существует точка $c\in(2, 5)$ такая, что $f(c)=c^2$.

§ 3 МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В этом параграфе при вычислении определенного интеграла применим методы, изученные в модуле 1 (Первообразная и неопределенный интеграл).

3.1. Интегрирование по частям

В этом разделе найдем первообразную функции f методом интегрирования по частям, изученным в модуле 1. Напомним формулу интегрирования по частям: $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$, где u и v – дифференцируемые функции, производные которых u' и v' – непрерывные на промежутке, а классы функций, которые могут быть интегрированы этим методом, указаны в замечании в § 3 модуля 1.

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x$.

Решение:

Для нахождения первообразной для непрерывной функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{2x}$, вычислим неопределенный интеграл от функции f, применяя метод интегрирования по частям. Обозначим $u = x+1$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$. Тогда $\mathrm{d}u = (x+1)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ и $v = \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}$. Согласно формуле интегрирования по частям для неопределенного интеграла, имеем:

$$\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = \left\{ uv - \int v\mathrm{d}u \right\} = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} + C.$$

Итак, одна из первообразных для функции $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{2x}$, есть функция $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}$. Так как $F(1) = \frac{3}{4}e^2$, $F(0) = \frac{1}{4}$, из формулы Ньютона-Лейбница следует:

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}(3e^2 - 1).$$

2 Вычислим интеграл $I = \int_0^{\pi} (x^2 + x + 1)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Применив дважды метод интегрирования по частям, получим, что одной из первообразных функции $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos x$, является функция $F\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$\int (x^2 + x + 1)\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 + x + 1 & \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (x^2 + x + 1)'\mathrm{d}x & v = \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)\mathrm{d}x & v = \sin x \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ uv - \int v\mathrm{d}u \right\} = (x^2 + x + 1)\sin x - \int (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} u = 2x+1, & \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{matrix} \right\} =$$

$$= (x^2 + x + 1)\sin x - [-(2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x] =$$

$$= (x^2 + x + 1)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x = (x^2 + x - 1)\sin x + (2x+1)\cos x + C.$$

Значит, одна из первообразных для непрерывной функции $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos x$, является функция $F\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 + x - 1)\sin x + (2x+1)\cos x$.

Так как $F(\pi) = (\pi^2 + \pi - 1)\sin\pi + (2\pi + 1)\cos\pi = -(2\pi + 1)$, $F(0) = -\sin 0 + \cos 0 = 1$, из формулы Ньютона-Лейбница следует: $I = F(\pi) - F(0) = -2(\pi + 1)$.

Определенный интеграл можно вычислить методом интегрирования по частям, используя формулу, приведенную в следующей теореме:

Теорема 13

Пусть $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$, имеющие непрерывные производные $u'\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ и $v'\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ на этом отрезке. Тогда имеет место формула:

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}(v(x)) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}(u(x)),$$

называемая ***формулой интегрирования по частям*** определенного интеграла.

3 Вычислим интеграл $\int\limits_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x.$

Решение:

Представляем схему вычислений для решения упражнения **3** с использованием метода интегрирования по частям:

$$\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} u=\ln x & \mathrm{d}v=(3x^2+1)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=(\ln x)'\mathrm{d}x & v=\int(3x^2+1)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x} & v=x^3+x \end{matrix}\right\} = (x^3+x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= e^3+e-\int_1^e (x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = e^3+e-\int_1^e (x^2+1)\mathrm{d}x = e^3+e-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^e = \frac{2}{3}(e^3+2).$$

4 Вычислим интеграл $I = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\ \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x.$

Решение:

Приводим пример способа применения этой схемы, в котором не используются соответствующие обозначения для u и $\mathrm{d}v$. Этот способ применяется в случае, когда одна из функций из-под знака интеграла может быть записана с использованием дифференциала. Запишем выражение $2x\mathrm{d}x$ следующим образом: $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2)$.

Применим формулу интегрирования по частям и получим:

$$I = 2\int_0^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}(x^2) = x^2\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2\mathrm{d}(\mathrm{arctg}x) = 3\mathrm{arctg}\sqrt{3} - 0 - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi-(x-\mathrm{arctg}x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi-(\sqrt{3}-\mathrm{arctg}\sqrt{3}) = \pi+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}.$$

Замечание

Большинство интегралов, рассмотренных в модуле 1 на странице 17, могут быть вычислены методом интегрирования по частям.

3.2. Замена переменной или метод подстановки

В этом разделе первообразную для функции f вычислим с помощью метода замены переменной для неопределенных интегралов.

Теорема 14

Пусть $\varphi\colon [a, b] \to \mathbf{I}$ и $f\colon \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ – дифференцируемые функции со свойствами:
а) функция f непрерывна на промежутке $\mathbf{I}$;
б) функция φ дифференцируема и имеет непрерывную производную φ' на отрезке $[a, b]$.
Тогда верна формула: $\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t,$
названная ***первой формулой замены переменной***.

Для вычисления определенного интеграла путем применения первой формулы замены переменной используется следующая схема:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} t=\varphi(x), & \text{Новые пределы:} \\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x. & t_1=\varphi(a),\ t_2=\varphi(b). \end{matrix}\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Применим схему и получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} t=\sin x=\varphi(x), & \text{Новые пределы:} \\ \mathrm{d}t=(\sin x)'\mathrm{d}x, & \varphi(0)=\sin 0=0, \\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x. & \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1. \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt[3]{t^2}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right|_0^1 = \left.\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \frac{3}{5}(1^{\frac{5}{3}}-0)=\frac{3}{5}.$$

2 Вычислим интеграл $\int_0^1 x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Согласно схеме имеем:

$$\int_0^1 x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} t=3x^2-1=\varphi(x), & \text{Новые пределы:} \\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x=6x\,\mathrm{d}x, & \varphi(0)=-1, \\ x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{d}t. & \varphi(1)=2. \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-1}^2 t^5\,\mathrm{d}t = \left.\frac{1}{6}\cdot\frac{t^6}{6}\right|_{-1}^2 = \frac{1}{36}(2^6-(-1)^6)=\frac{63}{36}=\frac{7}{4}.$$

3 Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Решение:

Имеем:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} t=\operatorname{arctg} x=\varphi(x), & \text{Новые пределы:} \\ \mathrm{d}t=(\operatorname{arctg} x)'\mathrm{d}x, & \varphi(0)=\operatorname{arctg}0=0, \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. & \varphi(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}. \end{matrix}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{192}.$$

4 Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

Решение:

$$\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3} = \left\{\begin{matrix} t=1+x^3=\varphi(x), & \text{Новые пределы:} \\ \mathrm{d}t=(1+x^3)'\mathrm{d}x, & \varphi(0)=1, \\ \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x. & \varphi(1)=2. \end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \left.\frac{1}{3}\ln|t|\right|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{3}\ln 2.$$

5 Вычислим интеграл $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

Решение:

Применим первую формулу замены переменной и получим:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)} = \left\{\begin{matrix} t=\ln x=\varphi(x), & \text{Новые пределы:} \\ \mathrm{d}t=(\ln x)'\mathrm{d}x, & \varphi(1)=\ln 1=0, \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}. & \varphi(e)=\ln e=1. \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left.\operatorname{arctg}t\right|_0^1 = \operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

В некоторых случаях определенный интеграл можно вычислить проще, используя подстановку $x=\psi(t)$, а не подстановку $t=\psi^{-1}(x)=\varphi(x)$, рассмотренную в теореме 14.

Теорема 15

Пусть φ: $[\alpha, \beta]\to[a, b]$ и f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ – функции, удовлетворяющие свойствам:
а) функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$;
б) функция φ дифференцируема, обратима и имеет непрерывную производную φ' на отрезке $[\alpha, \beta]$ и $\varphi^{-1}(a)=\alpha$, $\varphi^{-1}(b)=\beta$.
Тогда имеет место формула: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$,
называемая ***второй формулой замены переменной***.

Приведем пример применения схемы вычисления определенного интеграла путем использования второй формулы замены переменной:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} x=\varphi(t)\Rightarrow t=\varphi^{-1}(x), & \text{Новые пределы:}\\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t. & \alpha=\varphi^{-1}(a),\ \beta=\varphi^{-1}(b).\end{array}\right\}=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Задания с решением

1 Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 x(2x-1)^5\mathrm{d}x$.

Решение:

Применим схему и получим:

$$\int\limits_0^1 x(2x-1)^5\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} t=2x-1=\varphi^{-1}(x), & \text{Новые пределы:}\\ x=\frac{1}{2}(t+1)=\varphi(t), & \alpha=\varphi^{-1}(0)=-1,\\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}(t+1)'\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}t. & \beta=\varphi^{-1}(1)=1.\end{array}\right\}=\int\limits_{-1}^1\left[\frac{1}{2}(t+1)\cdot t^5\cdot\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^1(t^6+t^5)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{14}.$$

2 Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x$.

Решение:

Согласно схеме имеем:

$$\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} t=e^x=\varphi^{-1}(x), & \text{Новые пределы:}\\ x=\ln t=\varphi(t), & \alpha=\varphi^{-1}(0)=e^0=1,\\ \mathrm{d}x=(\ln t)'\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}}. & \beta=\varphi^{-1}(\ln\sqrt{3})=e^{\ln\sqrt{3}}=\sqrt{3}.\end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}}}{1+\mathrm{t}^2}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{t}^2}=\mathrm{arctg}\,t\Big|_1^{\sqrt{3}}=\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

3 Вычислим интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Решение:

Имеем: $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} x=\sin t=\varphi(t), & \text{Новые пределы:}\\ t=\arcsin x=\varphi^{-1}(x), & \alpha=\varphi^{-1}(0)=\arcsin 0=0,\\ \mathrm{d}x=(\sin t)'\mathrm{d}t=\cos t\,\mathrm{d}t. & \beta=\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.\end{array}\right\}=$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)-0=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4 Вычислим интеграл $\int\limits_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решение:

Используем замену $x=t^6$ так, чтобы можно было извлечь оба корня, и получим:

$$\int\limits_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}=\left\{\begin{array}{ll} t=\sqrt[6]{x}=\varphi^{-1}(x), & \text{Новые пределы:} \\ x=t^6=\varphi(t), & \alpha=\varphi^{-1}(1)=1, \\ dx=(t^6)'dt=6t^5dt. & \beta=\varphi^{-1}(27)=\sqrt{3}. \end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{6t^5dt}{t(1+t^2)}=6\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt=6\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=6(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3})-6\left(\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1\right)=6\cdot\frac{\pi}{3}-6\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+4.$$

5 Вычислим интеграл $\int\limits_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a}\frac{dx}{x^4(a^2+x^2)}$.

Решение:

Применим первую и вторую формулы замены переменной и получим:

$$\int\limits_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a}\frac{dx}{x^4(a^2+x^2)}=\left\{\begin{array}{ll} x=a\operatorname{tg}t=\varphi(t), & \text{Новые пределы:} \\ t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}=\varphi^{-1}(x), & \alpha=\varphi^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}, \\ dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}. & \beta=\varphi^{-1}(a)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}. \end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{a^4\operatorname{tg}^4 t\cdot\frac{a}{\cos t}}=\frac{1}{a^4}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 t\,dt}{\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\sin^2 t)\cos t\,dt}{\sin^4 t}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} s=\sin t=\varphi(t), & \text{Новые пределы:} \\ ds=(\sin t)'dt, & \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}, \\ ds=\cos t\,dt. & \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(1-s^2)ds}{s^4}=\frac{1}{a^4}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(s^{-4}-s^{-2})ds=\frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{s}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{a^4}\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{\sqrt{2}}{3a^4}(1+\sqrt{2}).$$

6 Вычислим интеграл: а) $I_1=\int\limits_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,dx$; б) $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

Решение:

а) Дважды применим формулу интегрирования по частям для определенного интеграла и получим:

$$I_1=\int\limits_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin 3x\,d(e^{2x})=\frac{1}{2}\left[\sin 3xe^{2x}\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}e^{2x}d(\sin 3x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2\pi}\sin 3\pi-0)-\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi}e^{2x}\cos 3x\,dx=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos 3x\,d(e^{2x})=$$

$$=-\frac{3}{4}\left[e^{2x}\cos 3x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{2x}\mathrm{d}(\cos 3x)\right]=-\frac{3}{4}(e^{2\pi}\cos 3\pi-\cos 0)+\frac{3}{4}\int_0^{\pi}e^{2x}(-3)\sin 3x\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{3}{4}(-e^{2\pi}-1)-\frac{9}{4}\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(e^{2\pi}+1)-\frac{9}{4}I_1.$$

Значит, $I_1=\frac{3}{4}(e^{2\pi}+1)-\frac{9}{4}I_1$. Следовательно, $\frac{13}{4}I_1=\frac{3}{4}(e^{2\pi}+1)$, то есть $I_1=\frac{3}{13}(e^{2\pi}+1)$.

б) Для вычисления интеграла I_2 используем и интеграл $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$.
Складывая и вычитая интегралы I_2 и I_3, получим соответственно:

$$I_2+I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4};$$

$$I_2-I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Из системы уравнений $\begin{cases}I_2+I_3=\frac{\pi}{4}\\ I_2-I_3=-\frac{1}{2}\ln 2\end{cases}$ следует, что $I_2=\frac{1}{8}(\pi-2\ln 2)$, $I_3=\frac{1}{8}(\pi+2\ln 2)$.

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A₁

1. Применив метод интегрирования по частям для нахождения одной из первообразных, вычислите интеграл:

а) $\int_0^{\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x$; б) $\int_0^{1}xe^{x}\mathrm{d}x$;

в) $\int_0^{2\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$; г) $\int_1^{e}x^2\ln x\,\mathrm{d}x$;

д) $\int_1^{4}\sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$; е) $\int_1^{e}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

ж) $\int_0^{\pi}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$; з) $\int_{-1}^{1}xe^{-x}\mathrm{d}x$;

и) $\int_{-\frac{3}{2}}^{0}(3x+1)e^{-2x}\mathrm{d}x$; к) $\int_{\pi}^{2\pi}(1-2x)\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

л) $\int_0^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$; м) $\int_1^{2}\log_2 x\,\mathrm{d}x$;

н) $\int_0^{1}x^2e^{x}\mathrm{d}x$; о) $\int_0^{1}x\cdot 2^{x}\mathrm{d}x$.

2. Используя указанную подстановку, вычислите интеграл:

а) $\int_{-1}^{1}x(1+x)^4\mathrm{d}x$, $1+x=t$; б) $\int_{-1}^{0}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(2+x)^3}$, $2+x=t$;

в) $\int_1^{4}\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$, $2x+1=t$; г) $\int_0^{1}\sqrt{4+5x}\,\mathrm{d}x$, $4+5x=t$;

д) $\int_0^{\frac{1}{3}}2^{1-3x}\mathrm{d}x$, $1-3x=t$; е) $\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+7x}}$, $1+7x=t$;

ж) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$, $\frac{x}{2}=t$; з) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{3}}$, $\frac{x}{3}=t$.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

B₁

3. Применив метод интегрирования по частям, вычислите определенный интеграл:

а) $\int_2^{4}(2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$; б) $\int_0^{2}x\ln(2+x)\mathrm{d}x$; в) $\int_0^{1}\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; г) $\int_0^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$; д) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arccos x\,\mathrm{d}x$;

е) $\int_0^{1}x\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$; ж) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; з) $\int_1^{\sqrt{3}}x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$; и) $\int_0^{\sqrt{2}}x^5e^{-x^2}\mathrm{d}x$; к) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

л) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3}dx$; м) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}dx$; н) $\int\limits_1^e \ln^3 x\,dx$; о) $\int\limits_0^1 x^3e^{-x}dx$; п) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(3x^2-5x-2)e^{2x}dx$;

р) $\int\limits_{-2}^0 (1-3x-x^2)\sin\frac{\pi x}{2}dx$; с) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(2x-1)\cos^2 x\,dx$; т) $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$; у) $\int\limits_e^{e^2}\ln x\,dx$; ф) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arcsin x\,dx$.

4. ***Работайте в парах!*** Используя формулу замены переменной, вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; в) $\int\limits_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; г) $\int\limits_1^2 x^2\sqrt{2-x}\,dx$;

д) $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-2x}\,dx$; е) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$; ж) $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$; з) $\int\limits_0^1 x^9\sqrt{1+3x^5}\,dx$;

и) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\,dx$; к) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x}$; л) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$; м) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^3 x\,dx$;

н) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin^3 x\,dx$; о) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$; п) $\int\limits_{e^e}^{e^{\sqrt{e}}} \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$; р) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$;

с) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx$; т) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

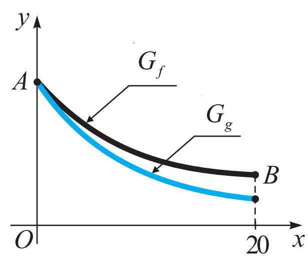
5. Выполните подходящую замену переменной, а затем вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$; б) $\int\limits_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{1+e^x}\,dx$; в) $\int\limits_0^7 \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{x+1}dx$; г) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$;

д) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$; е) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$; ж) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; з) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^{x+1}}$.

6. ***Работайте в группах!*** На рисунке точки A и B расположены на склоне горы (масштаб 1:100 м). Дуга AB задана функцией $f: [0, 20]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{288}{(x+6)^2}$.

В точке A расположен источник, который протекает по склону горы и впадает в море, образуя водопад. На протяжении лет вода образовала каньон, который сейчас задается функцией $g: [0, 20]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{200}{(x+5)^2}$.



а) Найдите высоту точек A и B над уровнем моря, заданным осью Ox.
б) Какова высота водопада?
в) Найдите площадь сечения каньона на протяжении всей длины ручья.
г) Найдите количество горной породы, вымытой водой при образовании каньона, если его ширина равна 3 м.

C_1

7. Докажите, что значения $a\in\mathbb{R},\ a\geq 2$, удовлетворяют неравенству $\int\limits_1^a (a-4x)dx\leq -4$.

8. ***Исследуйте!*** Найдите экстремумы функции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int\limits_x^{2x+1}(1+2t)dt$.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль

A₁

1. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{2}(x-6x^2)\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{0}^{1}(2x+1)(3x-2)\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_{-1}^{0}(1-3x)^2\,\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{1}^{4}(\sqrt{x}-3x^2)\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_{0}^{1}(6\sqrt[5]{x}+4\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_{1}^{9}\frac{1+x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(2\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)\mathrm{d}x$.

2. ***Работайте в парах!*** Вычислите площадь подграфика функции f:

а) $f:\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$;

б) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+x^2$;

в) $f:[0,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

3. ***Исследуйте!*** Найдите точку $a\in[1,6]$ такую, чтобы вертикальная прямая, проведенная через эту точку, разделила бы участок земли, заданный подграфиком функции $f:[1,6]\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-1$, на две части одинаковой площади. Вычислите площадь участка, если масштаб на каждой координатной оси равен 1:10 м. Найдите приближенное значение расстояния между точкой деления $a\in[1,6]$ и левым краем участка.

B₁

4. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-1}^{1}(8x^3-x^2+4x-3)\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{0}^{9}(4\sqrt[3]{3x}-6\sqrt{x})\mathrm{d}x$; в) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{6}{3x+1}-2x^2\right)\mathrm{d}x$; г) $\int\limits_{0}^{1}\left(5x\sqrt{x}-\frac{14}{\sqrt[3]{7x-8}}\right)\mathrm{d}x$;

д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{\cos^2 2x}-\sin 3x\right)\mathrm{d}x$; е) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(3\sin^2 x\cos x+\cos 2x)\,\mathrm{d}x$; ж) $\int\limits_{-1}^{0}x\sqrt{4-5x}\,\mathrm{d}x$; з) $\int\limits_{-2}^{5}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{3+x}}$;

и) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{11\sin x+25}\cos x\mathrm{d}x$; к) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{3\cos 2x+1}}$; л) $\int\limits_{-1}^{0}xe^{-3x}\mathrm{d}x$; м) $\int\limits_{1}^{e}x^3\ln x\mathrm{d}x$; н) $\int\limits_{0}^{1}(x^2+x)e^{2x}\mathrm{d}x$;

о) $\int\limits_{-1}^{1}(x^2-x)\cos\pi x\mathrm{d}x$; п) $\int\limits_{-1}^{1}|2-3x|\,\mathrm{d}x$; р) $\int\limits_{-1}^{2}(|x|+|1-x|)\mathrm{d}x$; с) $\int\limits_{0}^{3}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$, (БАК, 2018).

5. ***Работайте в парах!*** Вычислите определенный интеграл:

а) $\int\limits_{-2}^{3}f(x)\mathrm{d}x,\ f:[-2,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ если } x\in[-2,0],\\ x^3, \text{ если } x\in(0,1),\\ x, \text{ если } x\in[1,3];\end{cases}$

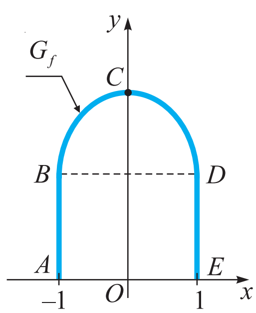
б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x,\ f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}, \text{ если } x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right],\\ \frac{\sin x}{1+4\cos^2 x}, \text{ если } x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

6. Дуга AB, заданная графиком функции $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$, представляет собой форму трассы для соревнования скейбордистов (масштаб на каждой координатной оси равен 1:4 м). Подграфик функции f представляет собой поперечное сечение трассы.

а) Найдите площадь поперечного сечения спортивной трассы.

б) Какое количество бетона потребовалось для заливки этой трассы, если ее длина равна 9 м?

7. На рисунке изображено дворцовое окно, где дуга BC задается функцией $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{5}(25+8x-2x^2)$.



а) Найдите размеры AE, AB и OC окна, если масштаб на каждой координатной оси равен 1:1 м.

б) Найдите площадь окна.

в) Сколько стекла необходимо для всех 15 дворцовых окон, если известно, что 90% поверхности окна остеклено?

г) Какова стоимость необходимого стекла, если цена 1 м² витражного стекла 500 леев?

C₁

8. *Исследуйте!* Докажите, что если функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывная, то
$$\int_a^b [f(a+b-x) - f(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

9. Пусть $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция такая, что $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{15}{4}$. Докажите, что существует хотя бы одно значение $c \in (1, 2)$, при котором $f(c) = c^3$.

10. БАК Вычислите $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$, где $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4\ln x - x$.

11. *Работайте в группах!* Проект *Приложения подграфика функции в дизайне*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Реальный профиль

1. Заполните рамки, чтобы получить истинное высказывание:
$$\int_0^1 (x^3 + x)\mathrm{d}x = (\boxed{} - \boxed{})\Big|_0^1 = \boxed{}.$$

2. Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
$$«\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^1 x^2\,\mathrm{d}x».$$

И	Л

3. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите интеграл: а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos 2x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$;

б) $\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 3\sqrt{1+8x}\right)\mathrm{d}x$.

4. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл: а) $\int_0^1 x\ln(x+1)\mathrm{d}x$;

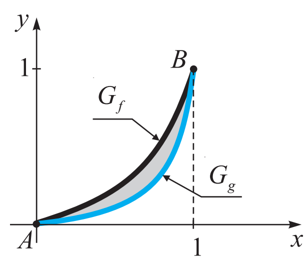
б) $\int_{-1}^0 (x^2 - x - 2)e^{-2x}\mathrm{d}x$.

5. Применив метод замены переменной и выполнив соответствующие преобразования, вычислите интеграл: а) $\int_{-1}^6 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2+x}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^4 x}$.

6. На рисунке изображено поперечное сечение санной трассы (масштаб 1:100 м на каждой координатной оси). Дуги, соединяющие точки A и B, задаются функциями $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{\frac{21}{10}}$.

а) Найдите площадь поперечного сечения трассы.
б) Какое количество снега разбросали по трассе, если ее ширина варьирует от 1,5 м до 2 м?



Определенный интеграл

Отрезок
$[a, b], \ a, b \in \mathbb{R}$

Разбиение отрезка
$T = (x_0, x_1, ..., x_n), \ n \ge 1,$
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

Норма разбиения
$\|T\| = \max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k$, где
$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

Функция
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

Система промежуточных точек
$\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$
$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \ k = \overline{0, n-1}$

Интегральная сумма
$\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$

Предел интегральной суммы
$I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$

Интегрируемая функция
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
$\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = I, \ I \in \mathbb{R}$

Определенный интеграл от функции *f* на отрезке [*a*, *b*]
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k, \ I \in \mathbb{R}$

Необходимое условие интегрируемости
f – ограниченная на отрезке $[a, b]$

Классы интегрируемых функций на отрезке [*a*, *b*]
а) непрерывные функции;
б) монотонные функции.

Геометрический смысл
$\mathcal{A} = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – площадь подграфика функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \ f(x) \ge 0$

Свойства определенного интеграла

1° а) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2° $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ – свойство аддитивности определенного интеграла.

3° $\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ – свойство линейности определенного интеграла.

4° Если $f(x) \ge 0, \ x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

5° Если $f(x) \le g(x), \ x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

6° $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

7° Если $m \le f(x) \le M, \ x \in [a, b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$.

8° Если $m \le f(x) \le M, \ (x \in [a, b])$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$, где $\mu \in [m, M]$ (теорема о среднем значении для интегрируемых функций).

9° Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$, где $c \in (a, b)$ (теорема о среднем значении для непрерывных функций).

10° Число $M[f] = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ называется средним значением функции f на отрезке $[a, b]$.

Формулы и методы вычисления определенного интеграла

а) Формула Ньютона-Лейбница:
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, где $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – первообразная для функции f.

б) Метод интегрирования по частям:
$\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$.

в) Метод замены переменной:
1) $\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$
2) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Модуль

3

Приложения определенного интеграла

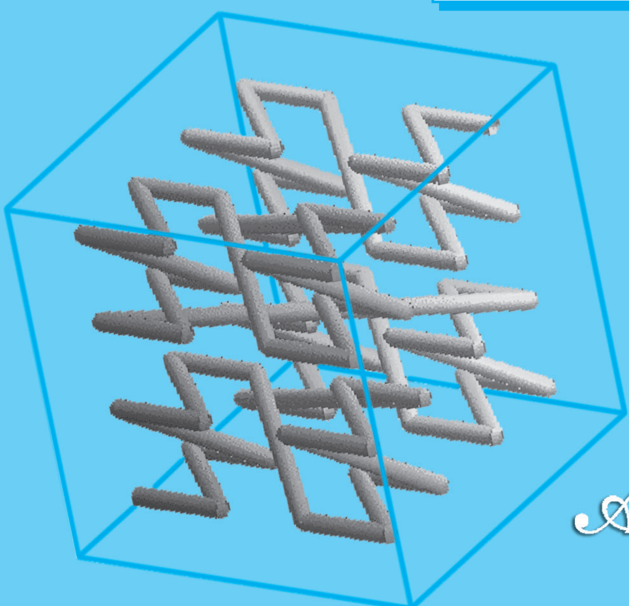
Великая книга природы может быть прочитана лишь тем, кто знает язык, на котором она написана. И этот язык – математика.

Галилео Галилей

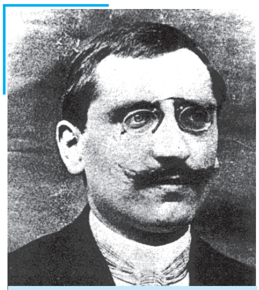
Цели модуля

- приложение определенного интеграла при вычислении площади подграфика функции;
- применение определенного интеграла при вычислении объема тела вращения.

1. Площадь подграфика функции
2. Объем тела вращения



$$\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$



Анри Леон Лебег (1875–1941) – французский математик

Задачи нахождения площадей плоской фигуры и поверхности вращения, длины графика функции или объема тела вращения способствовали развитию интегрального исчисления.

О. Л. Коши и Б. Риман являются основателями классической теории интегрального исчисления для действительной функции от действительной переменной. Позднее А. Л. Лебег основал современную теорию интегрального исчисления и меры (длины и площади).

Для определения площади геометрической фигуры или геометрического тела, объема геометрического тела будем использовать известные геометрические фигуры и тела: прямоугольник и усеченный конус (для площади), цилиндр (для объема), отрезок (для длины).

§ 1 ПЛОЩАДЬ ПОДГРАФИКА ФУНКЦИИ

В модуле 2 мы установили, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ геометрически представляет собой площадь плоской фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$. Множество точек такой плоской фигуры называется ***подграфиком функции f*** (или ***криволинейной трапецией***). Обозначают:

$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$,

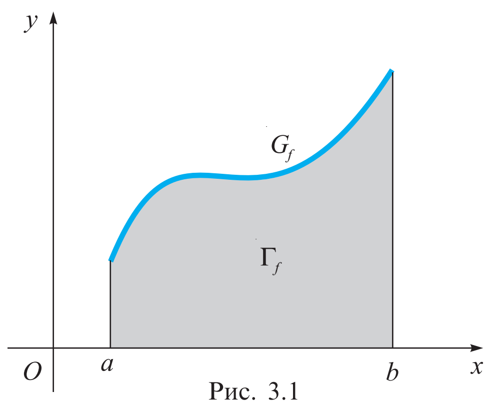


Рис. 3.1

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (рис. 3.1). Это множество имеет площадь, которую находят по формуле:

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\,. \tag{1}$$

Сначала изложим интуитивный метод вывода формулы (1).

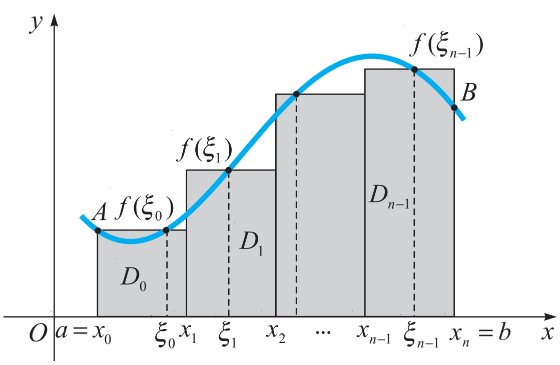


Рис. 3.2

Рассмотрим график функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, положительной на отрезке $[a, b]$ (рис. 3.2). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков (необязательно конгруэнтных) при помощи точек деления $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Обозначим это разбиение через $T = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. На каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ длины $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ зафиксируем произвольную точку ξ_k, $k = \overline{0, n-1}$.

Обозначим через D_k прямоугольник с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой $f(\xi_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда, с геометрической точки зрения, действительное число $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ является суммой площадей прямоугольников D_k. Интуитивно, если разбиение T выбрано достаточно мелким, то соответствующая интегральная сумма $\sigma(T,\xi)$ будет сколь угодно мало отличаться от площади множества Γ_f. Поскольку $\sigma(T,\xi)$ является суммой Римана, а f – непрерывная функция, а значит, интегрируема, то вышесказанное в некоторой степени обосновывает то, что площадь множества Γ_f можно найти по формуле (1).

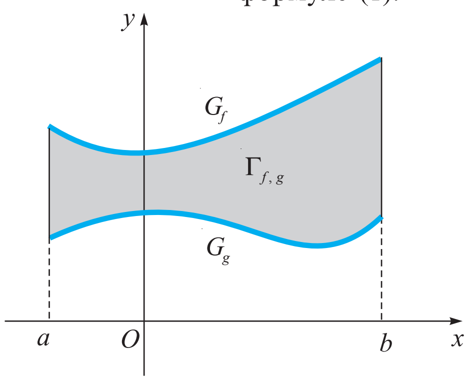


Рис. 3.3

1. Рассмотрим непрерывные функции $f, g: [a,b]\to\mathbb{R}$ такие, что $0\le g(x)\le f(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Тогда множество $\Gamma_{f,g}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ g(x)\le y\le f(x)\}$ (рис. 3.3), ограниченное графиками функций f, g и прямыми $x=a$, $x=b$, параллельными оси Oy, имеет площадь и

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x}\ . \qquad (2)$$

Формулу (2) можно получить непосредственно из (1), используя соотношение:

$$\mathscr{A}(\Gamma_{g,f})=\mathscr{A}(\Gamma_f)-\mathscr{A}(\Gamma_g).$$

Замечание

Если непрерывная функция f не положительна $(f(x)\le 0,\ \forall x\in[a,b])$, то ее график расположен под осью Ox (рис. 3.4).

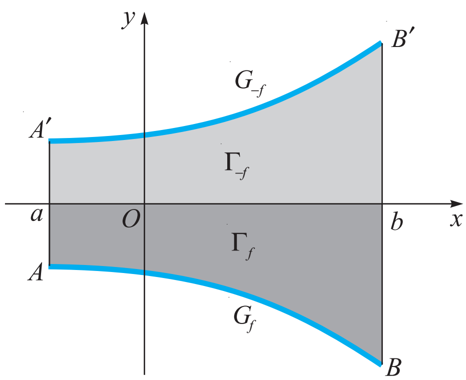


Рис. 3.4

Обозначим через Γ_f^- множество $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big|\ a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$.

График функции $-f$ расположен над осью Ox, так как $-f(x)=|f(x)|>0$. Графики функций f и $-f$ симметричны относительно оси Ox, значит, площади поверхностей $abBA$ и соответственно $abB'A'$ равны. Но поверхность $abB'A'$ является подграфиком функции $-f=|f|$ и его площадь равна интегралу от этой функции:

$$\mathscr{A}(\Gamma_{-f})=\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Следовательно,

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_f^-)=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\ .$$

2. Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из этих двух функций отрицательна. Пусть, например, $f(x)\ge 0$, $g(x)<0$, $\forall x\in[a,b]$ (рис. 3.5).

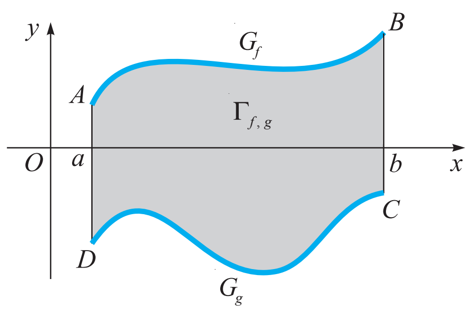


Рис. 3.5

Заметим, что площадь фигуры $ABCD$ равна сумме площадей

$$\mathcal{A}(abBA)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ и } \mathcal{A}(DCba)=-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Следовательно, $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x.$

Таким образом, формула (2) справедлива и в этом случае.

Аналогично рассматривается случай, когда обе функции отрицательны. При этом площадь множества $\Gamma_{f,g}$ вычисляется по формуле (2) при $g(x)\geq f(x),\ \forall x\in[a, b]$.

Следствие

Если пренебречь условием $g(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a, b]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций f, g и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 3.6), выражается формулой

$$\boxed{\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x}. \qquad (3)$$

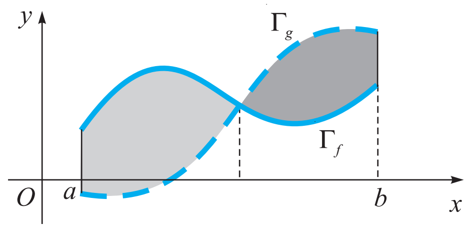


Рис. 3.6

Задания с решением

1 Найдем площадь треугольника OAB с вершинами $O(0, 0)$, $A(a, b)$ и $B(a, b')$, $b'>b$.

Решение:

Заметим, что прямая OA является графиком функции $f\colon [0, a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}x$, а прямая OB – графиком функции $g\colon [0, a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{b'}{a}x$ (рис. 3.7).

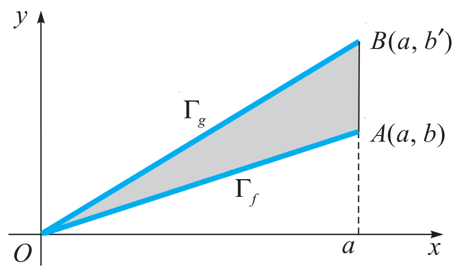


Рис. 3.7

В силу формулы (2) получим: $\mathcal{A}(\Delta OAB)=\int_0^a\left(\frac{b'}{a}x-\frac{b}{a}x\right)\mathrm{d}x=\frac{b'-b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{b'-b}{2}a.$

2 Вычислим площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=0$, $y=\frac{1}{3}x$, $x=1$ и $x=3$.

Решение:

Полученная фигура $ABCD$ является трапецией, у которой $BC=1$, $AD=\frac{1}{3}$, $AB=2$ (рис. 3.8).

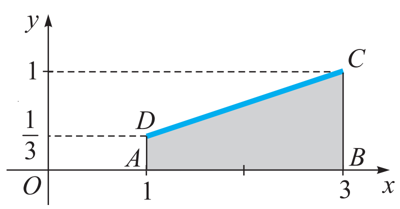


Рис. 3.8

Площадь трапеции $ABCD$ равна $\mathcal{A}=\int_1^3 \frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{3\cdot 2}\right|_1^3=\frac{4}{3}.$

3 Вычислим площадь поверхности, заключенной между графиками функций $f, g\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2$ (рис. 3.9).

Решение:

Решим систему уравнений $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2 \end{cases}$ и найдем координаты точки пересечения этих графиков: $M(\sqrt{2}, 2)$.

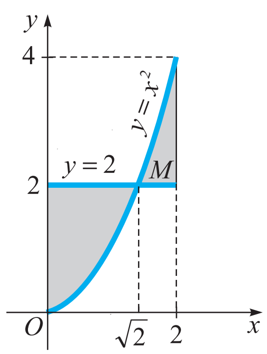


Рис. 3.9

По формуле (3):

$$\mathcal{A}=\int_0^2|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx+\int_{\sqrt{2}}^2(x^2-2)dx=$$

$$=2x\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^2-2x\Big|_{\sqrt{2}}^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Замечание

Для определения знака функции f на промежутке интегрирования применим свойства непрерывных функций.

Вывод. Для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции f, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, поступим следующим образом:

• проверим, имеет ли уравнение $f(x)=0$ решения на промежутке $[a,b]$;

• если уравнение не имеет решений, определим знак функции f на промежутке $[a,b]$. В этом случае получим $\mathcal{A}=\int_a^b f(x)dx$ или $\mathcal{A}=-\int_a^b f(x)dx$, в зависимости от того, какова функция на этом промежутке: положительная или отрицательная;

• если $c\in(a,b)$ – решение уравнения $f(x)=0$, определим знак функции на каждом из интервалов $[a,c]$, соответственно $[c,b]$, и затем вычислим площадь, учитывая, что $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$.

Замечание

Если плоская однородная пластинка (тело, масса которого пропорциональна его площади и толщина которого игнорируется) определена графиком функции $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ (совпадает с подграфиком Γ_f), то координаты центра тяжести (x_0, y_0) этой пластинки (рис. 3.10) равны:

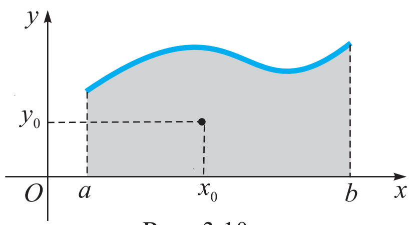


Рис. 3.10

$$\boxed{x_0=\frac{1}{\mathcal{A}}\int_a^b xf(x)dx,\ \ y_0=\frac{1}{2\mathcal{A}}\int_a^b f^2(x)dx},\qquad (4)$$

где $\mathcal{A}$ – площадь подграфика функции f:

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(x)dx.$$

4 Найдем координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, совпадающей с подграфиком функции $f\colon[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{ax}$ $(a>0)$ (рис. 3.11).

Решение:

Вычислим площадь подграфика функции f:

$$\mathcal{A}=\int_0^a\sqrt{ax}\,dx=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^2.$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^a xf(x)dx=\int_0^a x\sqrt{ax}\,dx=\frac{2}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{5}a^3;$$

$$\int_0^a f^2(x)dx=\int_0^a ax\,dx=\frac{a}{2}x^2\Big|_0^a=\frac{a^3}{2}.$$

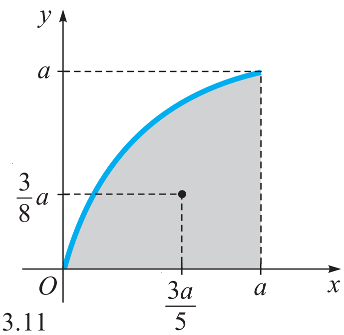


Рис. 3.11

Применим формулы (4): $x_0 = \dfrac{\frac{2}{5}a^3}{\frac{2}{3}a^2} = \dfrac{3}{5}a,\ y_0 = \dfrac{\frac{a^3}{2}}{2\cdot\frac{2}{3}a^2} = \dfrac{3}{8}a.$

Ответ: $\left(\dfrac{3}{5}a,\ \dfrac{3}{8}a\right).$

Упражнения

Реальный профиль

A_1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции и указанными прямыми:

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+4,\ x=0$ и $x=1;$

б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\cos x,\ x=0$ и $x=\pi;$

в) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 2x,\ x=0$ и $x=\dfrac{\pi}{4};$

г) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x=1$ и $x=e;$

д) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+3e^x,\ x=0$ и $x=\pi;$

е) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ x=1$ и $x=4;$

ж) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)^2+1,\ x=0$ и $x=1.$

$$\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=16-x^2,\ g(x)=0;$

б) $f, g\colon [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4,\ g(x)=0,$ и прямой $x=2;$

в) $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=7-x^2,\ g(x)=x^2-1;$

г) $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-1,\ g(x)=5-x;$

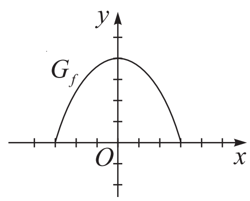
д) $f, g\colon [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x},\ g(x)=e^{2x},$ и прямой $x=1;$

е) $f,\ g\colon [-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|,\ g(x)=1.$

3. ***Работайте в парах!*** Найдите действительное число $a,\ a>0,$ такое, чтобы площадь подграфика функции $f\colon [0, a]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3,$ была равна 4.

4. На рисунке изображен график непрерывной четной функции $f\colon [-3, 3]\to[0, 4]$, для которой $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=7.$

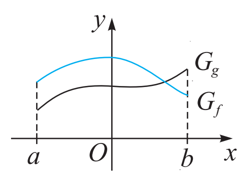
Запишите в рамки числовое значение площади фигуры, ограниченной графиком функции f и осью абсцисс.



$\mathscr{A}=$ $\boxed{}$

B_1

5. В декартовой системе координат изображены графики непрерывных функций $f,\ g\colon [a, b]\to\mathbb{R}$. Используя рисунок, запишите в рамки один из знаков <, >, = так, чтобы получить истинное высказывание. Обоснуйте ответ.



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $\boxed{}$ $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

6. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-1.$ Найдите числовое значение площади фигуры, ограниченной графиком функции f, прямой $x=1$ и осью Ox.

7. ***Исследуйте!*** Покажите, что площадь подграфика функции $f\colon [0, \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+e^x,$ больше площади подграфика функции $g\colon [0, 1]\to\mathbb{R},$ $g(x)=x^2-2x+9.$

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2,$ и прямой $x = 0$;

б) $f, g: \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x,\ g(x) = 3\sqrt{\frac{x}{\pi}}$;

в) $f, g: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x,\ g(x) = 3^x,$ и прямой $x = 0,\ x = 2.$

9. Дан квадрат P со стороной $2a,\ a > 0$. Стороны квадрата параллельны осям координат, а его диагонали пересекаются в начале прямоугольной системы координат xOy. Парабола $y = x^2$ делит квадрат P на две части: R_1 и R_2.
а) Найдите площади частей R_1 и R_2.
б) Докажите, что не существуют значения переменной a, при которых площади частей R_1 и R_2 равны.

10. ***Работайте в группах!*** Дана функция $f: [0, 30] \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{x^2}{40} + \frac{3}{4}x + 20.$

а) Постройте график функции f.

б) Заштрихуйте подграфик функции f.

в) Вычислите площадь (в квадратных метрах) земельного участка, имеющего форму подграфика функции f.

г) Какова стоимость этого участка, если известно, что цена одной сотки равна 30 000 леев?

11. ***Работайте в парах!*** После пошива костюма остался кусок ткани в форме фигуры, ограниченной линиями (графиками функций):
$f, g: \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x.$
Вычислите площадь оставшегося куска ткани (1 единица измерения = 1 дм).

12. Дана функция $f: [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$
Найдите числовое значение площади подграфика функции f.

13. Дана функция $f: [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x(x^2 + 3x + 2).$ Найдите действительное число $a > 1$, зная, что площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = a$, равна $(13e^3 - 3e)$ кв. ед.

14. ***Исследуйте!*** Дана функция $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},$ $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$
а) Докажите, что функция $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R},$ $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2),$ является первообразной для функции f.
б) Докажите, что любая первообразная G функции f является возрастающей на промежутке $[1, +\infty)$.
в) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, осью Ox и прямыми $x = \frac{1}{e}$ и $x = e$.

15. Дана функция $f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - x^2.$ Найдите $m \in \mathbb{R}$, при котором прямая $y = mx$ делит площадь подграфика функции f на две части одинаковой площади.

16. ***Работайте в парах!*** Внутренняя область подграфика функции $f: [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, разбита графиком функции $g: [2, 3] \to \mathbb{R},\ g(x) = 2\sqrt{2x}$, на две части. Найдите площадь каждой из этих частей.

$$\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$

C_1

17. Найдите координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, совпадающей с подграфиком функции:

а) $f: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x}$;

б) $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

в) $f: [-2, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$

18. Докажите, что площадь подграфика функции $f: \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + e^x$, равна площади подграфика функции $g: [0, \pi] \to \mathbb{R},$ $g(x) = \sin x + e^{x - \frac{\pi}{2}}.$

19. Дана функция $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \frac{1}{x}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f, наклонной асимптотой графика функции f и прямыми $x = 1,\ x = 2.$

§ 2 ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Тело вращения задается осью вращения и образующей. Далее рассмотрим тела вращения, для которых осью вращения является ось Ox, а образующей – график некоторой функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

Определение Пусть $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ – непрерывная функция. Множество

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le f^2(x),\ a \le x \le b\}$$

называется **телом вращения, определенным функцией f**, или **телом, полученным при вращении подграфика функции f вокруг оси Ox** (рис. 3.12).

Замечание Любая точка $(x, f(x))$ графика функции f описывает окружность с центром в точке x и радиусом $f(x)$ (рис. 3.12).

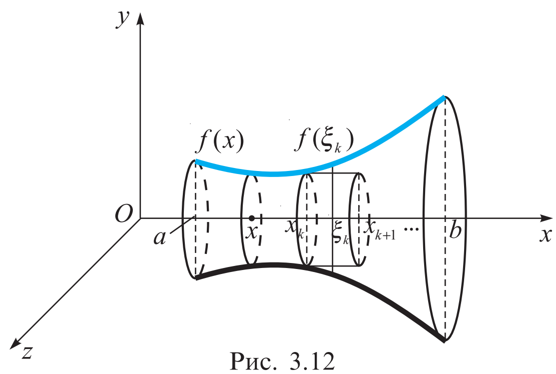


Рис. 3.12

Пусть $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, и на каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ возьмем некоторую точку ξ_k, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда прямоугольник с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ и высотой $f(\xi_k)$ при вращении вокруг оси Ox образует цилиндр. Объем этого цилиндра равен $\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Сумма объемов полученных цилиндров равна $\sigma(T, \xi) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k)\Delta x_k$ и является суммой Римана, соответствующей функции πf^2, разбиению T и системе промежуточных точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Интуитивно, если норма разбиения T стремится к нулю, то число $\sigma(T, \xi)$ будет сколь угодно мало отличаться от объема тела вращения C_f. Таким образом, вышесказанное в некоторой степени обосновывает вывод о том, что ***объем тела вращения C_f можно найти по формуле***:

$$\boxed{\mathcal{V}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{1}$$

Замечание Формула (1) верна и в случае, когда функция f отрицательна. Действительно, функция $-f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ положительна и тогда

$$\mathcal{V}(C_f) = \mathcal{V}(C_{-f}) = \pi \int_a^b [-f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Задания с решением

1 Найдем объем шара радиуса r $(r > 0)$.

Решение:

Рассмотрим функцию $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

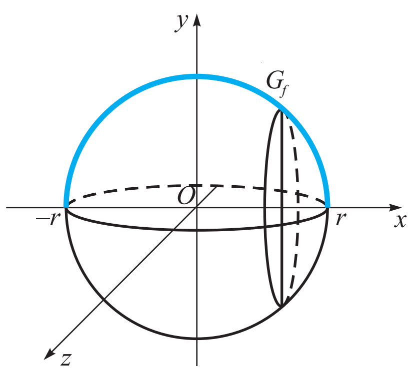


Рис. 3.13

При вращении подграфика G_f функции f вокруг оси Ox получим шар радиуса r с центром в начале прямоугольной системы координат xOy (рис. 3.13).

Очевидно, что функция f непрерывна, а значит, интегрируема.

Тогда в силу формулы (1),

$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\pi\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

2 Найдем объем усеченного конуса с радиусами оснований r и R и высотой H.

Решение:

Усеченный конус с радиусами оснований r и R и высотой H получим при вращении отрезка AB вокруг оси Ox (рис. 3.14).

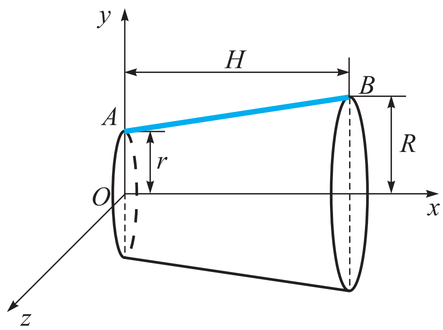


Рис. 3.14

Так как прямая AB задается уравнением $y=\dfrac{R-r}{H}x+r$, то усеченный конус – это тело вращения, определенное графиком функции $f\colon [0, H]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{R-r}{H}x+r.$

Следовательно, объем полученного тела вращения равен:

$$\mathcal{V}=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix}\dfrac{R-r}{H}x=t,\ x=\dfrac{H}{R-r}t,\ \mathrm{d}x=\dfrac{H}{R-r}\mathrm{d}t\\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=H\Rightarrow t=R-r\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\pi H}{R-r}\int_0^{R-r}(t+r)^2\mathrm{d}r=\frac{\pi H}{3(R-r)}(t+r)^3\Big|_0^{R-r}=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Замечание

Если в последней формуле $r=0$, то получим объем конуса с радиусом основания R и высотой H, то есть $\mathcal{V}=\dfrac{\pi R^2H}{3}$, а если $r=R$, то получим объем цилиндра с радиусом основания R и высотой H, то есть $\mathcal{V}=\pi R^2H$.

Упражнения

Реальный профиль

A_1

1. Найдите объем тела вращения C_f, определенного функцией:

а) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

б) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-\sqrt{x}$;

в) $f\colon \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$;

г) $f\colon [0, \sqrt{\ln 2}]\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{x^2}$;

д) $f\colon \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\sin x}\cdot e^{\cos x}$;

е) $f\colon [-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & \text{если } -1\le x\le 0\\ \sin\pi x, & \text{если } 0<x\le 1;\end{cases}$

ж) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$;

з) $f\colon [0, 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^2-4x+3|$;

и) $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}e^{-x^2}$;

к) $f\colon [1, e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

2. Найдите натуральное число n, при котором объем тела вращения G_f, определенного функцией $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(n \arccos x)$, равен $\frac{2\pi}{3}$.

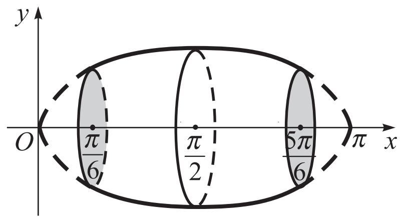
3. ***Работайте в парах!*** Найдите объем тела вращения $G_{f,g}$, определенного функцией:

а) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$; б) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$; в) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x$.

B₁

4. ***Работайте в группах!*** Дана функция $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, & 0 \le x \le 2 \\ -\frac{5}{2}x + 10, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$

а) Постройте график функции f.
б) Заштрихуйте подграфик функции f.
в) Определите, какое геометрическое тело получается при вращении подграфика функции f вокруг оси Ox.
г) Найдите объем полученного тела вращения.



5. Найдите объем бочки, полученной при вращении дуги синусоиды $y = a \sin x\ (a > 0)$ вокруг оси Ox, если длина бочки равна $\frac{2\pi}{3}$.

6. Найдите объем (вместимость) лейки, которая получена вращением вокруг оси Ox подграфика функции $f\colon [1, e] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x \ln x$.

C₁

7. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \le 0 \\ x \cdot e^x + 1, & x > 0. \end{cases}$

а) Докажите, что функция f имеет первообразные на множестве $\mathbb{R}$;

б) Вычислите объем тела вращения, полученного при вращении графика функции $g\colon [-2, -1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, вокруг оси Ox.

в) Вычислите $\int_1^e \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$.

8. Дана функция $f\colon [0, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0, 1], \\ \frac{e}{x}, & x \in [1, e]. \end{cases}$

а) Постройте график функции f.
б) Найдите площадь подграфика функции f.
в) Вычислите объем тела вращения, полученного при вращении подграфика функции f вокруг оси Ox.

9. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения определенного интеграла в различных областях*.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль

A₁

1. Найдите площадь подграфика функции:

а) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x - x^2$;

б) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin 3x$;

в) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$;

г) $f\colon [0, e-1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+1}$;

д) $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;

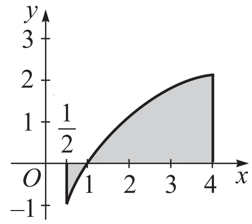
е) $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2x+1}$;

ж) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos 2x$;

з) $f\colon [0, \ln 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$.

2. На рисунке изображена фигура, ограниченная графиком функции $f\colon \left[\frac{1}{2}, 4\right] \to \mathbb{R}$ и прямыми $y=0$, $x=\frac{1}{2}$ и $x=4$.
Используя определенный интеграл, впишите в рамку формулу, с помощью которой можно вычислить площадь заштрихованной фигуры.

$\mathcal{A}_f = \boxed{}$



3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций f, g:
а) $f, g\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=x^2-x$;
б) $f, g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$, $g(x)=e^x$, и прямыми $x=0$, $x=2$;
в) $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$, и прямыми $x=0$, $x=1$.

4. ***Исследуйте!*** Покажите, что площади подграфиков функций $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$, и $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x+2$, равны.

5. ***Работайте в парах!*** Дана функция $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$.
а) Постройте график функции f.
б) Заштрихуйте подграфик функции f.
в) Найдите площадь поверхности стола, имеющего форму подграфика функции f.

$$\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

B₁

6. ***Исследуйте!*** Покажите, что площадь подграфика функции $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x$, больше, чем площадь подграфика функции $g\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x)=e^x+\cos x$.

7. а) Найдите значение $a \in \mathbb{R}_+$, при котором площадь подграфика функции $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+2x$, равна 1.
б) Дана функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+x+1$, $a \in \mathbb{R}$. Найдите действительные значения a, при которых площадь подграфика функции f равна 3.

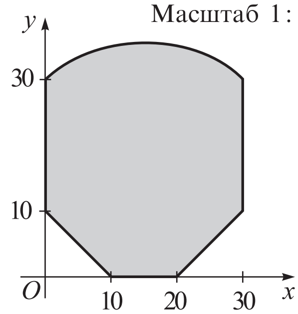
8. Дана функция $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Найдите $m \in [0, 2]$, при которых прямая $y=mx$ делит подграфик функции f на две части равной площади.

9. ***Работайте в парах!***
Участок земли имеет форму фигуры, ограниченной графиками функции

$$f, g\colon [0, 30] \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 30,\ g(x) = \begin{cases} -x+10, & 0 \le x \le 10 \\ 0, & 10 < x \le 20 \\ x-20, & 20 < x \le 30. \end{cases}$$

Найдите площадь этого участка и его стоимость, если известно, что цена одной сотки 30 000 леев.

Масштаб 1 : 1 м



10. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=1-x^2$. Найдите действительные значения $a \in (0, 1)$, при которых прямая $y=a$ делит фигуру, ограниченную графиком функции f и прямой $y=0$, на две части равной площади.

11. Найдите объем тела вращения, определенного функцией:
а) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$;
б) $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x)=\cos\frac{x}{2}$;
в) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x)=|x|$;
г) $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

12. Найдите координаты центра тяжести плоской однородной пластинки, определенной подграфиком функции $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x$.

13. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3-2x^2$, осью Ox и прямыми $x=-1$ и $x=2$.

14. Найдите действительные значения a, при которых прямая $x=a$ делит подграфик функции $f:[2,8]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{8}{x}$, на две части равной площади.

15. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$, осью Ox и прямой $x=-1$.

16. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+1$.

17. Найдите формулу для вычисления площади круга радиуса r, используя определенный интеграл.

18. Найдите действительные значения $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3},2\pi\right)$, при которых $\sin\alpha-2\int\limits_0^\alpha\cos 2x\,dx=0$.

19. Найдите объем тела вращения, определенного функцией $f:[0,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$.

20. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin|x|$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=|x|-\pi$.

21. Приведите примеры приложения определенного интеграла в физике и в других областях.

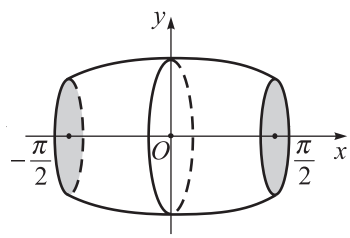
C₁

22. Даны функции $f,g:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=1+x^2$, $g(x)=1+ax,\ a>0$. Найдите действительное значение a, при котором площади подграфиков функций f и g равны.

23. Дана функция $f:[0,\lambda]\to\mathbb{R},\ \lambda>0,\ f(x)=xe^{-x}$. Найдите площадь $\mathscr{A}(\lambda)$ подграфика функции f и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathscr{A}(\lambda)$.

24. ***Исследуйте!*** Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции f и прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$, где x_1 – точка максимума для функции f, а x_2 – ее точка минимума.

25. Вычислите объем бочки, полученной при вращении вокруг оси Ox подграфика функции $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cos x+b\ (a,b>0)$.



$$\mathscr{A}(\Gamma_f)=\int\limits_a^b f(x)dx$$

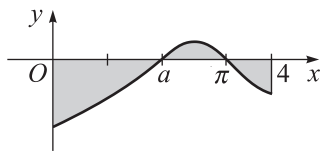
$$\mathscr{V}(C_f)=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Реальный профиль

1. На рисунке изображена фигура, ограниченная графиком функции $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$ и прямыми $x=0$ и $x=4$. Используя определенный интеграл, запишите в рамке формулу, с помощью которой можно вычислить площадь закрашенной фигуры.



$\mathcal{A}_f = \boxed{}$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x^2,\ g(x)=0;$

б) $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x,\ g(x)=x^2+x.$

3. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x+3x^2$. Найдите натуральное число n, при котором площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-e^x$, осью Ox и прямыми $x=0$ и $x=n$ равна n^2-n+1.

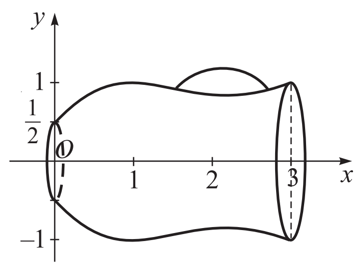
4. Найдите объем тела вращения, определенного функцией:

а) $g:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sin 2x;$

б) $g:[1, e]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{x}\ln x.$

5. Вычислите объем кувшина, который получается при вращении вокруг оси Ox подграфика функции $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$,

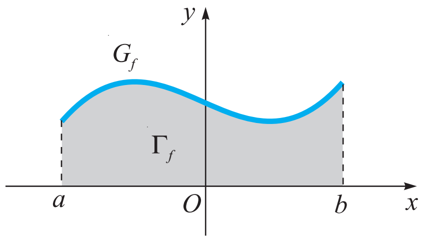
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & \text{если } 0\le x\le 2,\\ \dfrac{3}{2}x^2-7x+\dfrac{17}{2}, & \text{если } 2\le x\le 3.\end{cases}$$



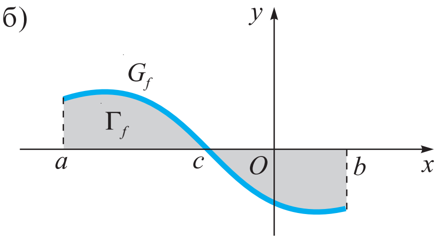
Непрерывная функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

Подграфик функции f

а)



б)



Площадь подграфика функции f

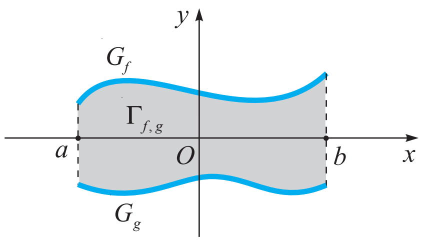
а) $\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

б) $\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$

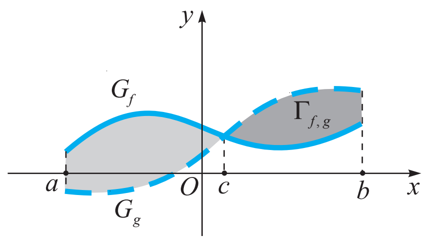
$f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции на $[a, b]$

Фигуры, ограниченные графиками двух функций и прямыми $x = a$, $x = b$

а)



б)

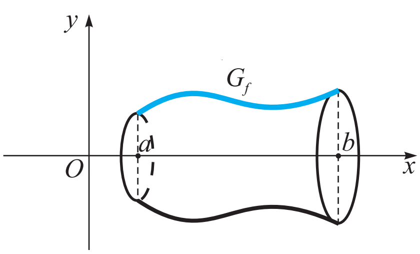


Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми $x = a$, $x = b$

а) $\mathscr{A}(\Gamma_{f,g}) = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

б) $\mathscr{A}(\Gamma_{f,g}) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x =$

$= \int\limits_a^c (f(x) - g(x))\mathrm{d}x - \int\limits_c^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

Тело вращения вокруг оси Ox	Объем тела
	$\mathscr{V} = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$

Модуль

4

Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

Учение – как золото – всегда в цене.

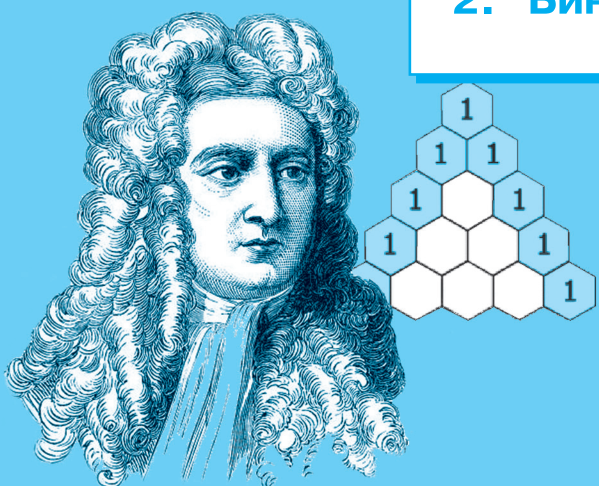
Эпиктет

Цели модуля

- идентификация понятий: *упорядоченное множество*, *факториал*, *размещение*, *перестановка*, *сочетание элементов конечных числовых множеств*;
- использование размещений, перестановок, сочетаний при решении уравнений, неравенств, простых задач из повседневной жизни;
- *применение бинома Ньютона и/или формулы общего члена разложения степени бинома в действительных или смоделированных ситуациях;
- *применение свойств биномиальных коэффициентов и разложения степени бинома при решении различных задач.

1. Элементы комбинаторики

2. Бином Ньютона



§ 1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Упорядоченные множества

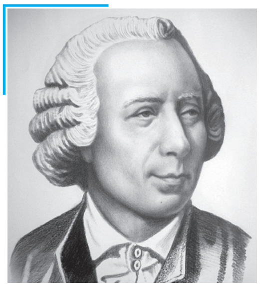
Задача 1. Необходимо обеспечить 150 000 квартир номерами телефонов, каждый из которых состоит из шести различных цифр. Возможно ли это, если известно, что номер телефона может начинаться и с цифры 0?

Задача 2. Для выступления на конференции были зарегистрированы 7 рефератов. Сколькими способами можно запрограммировать эти выступления?

Задача 3. В X классе обучается 24 учащихся. Каждый день группа из 3 учащихся дежурит по классу. Сколькими способами можно выбрать этих трех дежурных?

Заметим, что в подобных задачах речь идет о размещении элементов конечного множества в определенном порядке, о нахождении количества подмножеств данного конечного множества, обладающих определенными свойствами, о количестве тех или иных комбинаций элементов и т. п. Такие задачи называются ***комбинаторными задачами***. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют ***комбинаторикой***.

Комбинаторные задачи возникают как в быту, так и в различных областях науки и техники. Они встречаются при изучении теории вероятностей, теории чисел, математической логики, информатики, физики, химии и др. При решении комбинаторных задач в одних случаях мы будем искать хотя бы одно решение, в других – все решения или оптимальное из них, или только общее количество решений и т. д. Можно доказать, что некоторые комбинаторные задачи не имеют решения. Например, *Леонард Эйлер* сформулировал задачу, а позже было доказано, что нельзя записать имена 36 офицеров, имеющих 6 различных воинских званий и принадлежащих к 6 разным родам войск (по одному офицеру данного звания в каждом роде войск), в 36 клетках квадрата размером 6×6 так, чтобы в каждой горизонтали и каждой вертикали были представлены все рода войск и все звания.



Леонард Эйлер (1707–1783), швейцарский математик и физик

На рисунке 4.1 показано решение этой задачи для четырех родов войск (A, B, C, D) и четырех воинских званий (a, b, c, d). *Дополните таблицу и завершите решение.*

Aa	*Bd*		*Dc*
	Ac	*Da*	*Cd*
Cc		*Ad*	
	Ca	*Bc*	*Ab*

Рис. 4.1

Комбинаторные задачи возникают и в спортивных играх. Особенно часто они встречаются при игре в шахматы и шашки.

В учебнике приведены решения простейших (типовых) комбинаторных задач, то есть тех, в которых в каждой из учитываемых комбинаций элементы не повторяются.

Рассмотрим конечные числовые множества. Особое значение имеют в математике упорядоченные числовые множества. Каждое множество обладает собственной внутренней структурой, включающей как его элементы, так и порядок их расположения. Элементы множества могут быть упорядочены различными способами. Например, элементы множества $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ могут быть упорядочены следующим образом: $\{a_4, a_3, a_2, a_1\}$, $\{a_2, a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4, a_3\}$ и т. д. Каждое из этих множеств, несмотря на то что состоит из одних и тех же элементов, отличается порядком их расположения.

Определение

Конечное множество $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называется **упорядоченным множеством**, если его элементы расположены в определенном порядке. Другими словами, множество M называется **упорядоченным**, если каждому его элементу ставится в соответствие определенное натуральное число от 1 до n так, что различным элементам множества M соответствуют разные числа.

Одно и то же конечное множество может быть упорядочено различными способами. Например, множество учащихся X класса можно упорядочить по росту (в порядке возрастания или убывания), по массе тела или в алфавитном порядке фамилий.

Замечания

1. Упорядоченные множества, соответствующие данному множеству, принято записывать в круглых скобках.

Пример

$\{1, 2, 3\}$

$(1, 2, 3)$ $(1, 3, 2)$ $(3, 2, 1)$ $(2, 3, 1)$ $(2, 1, 3)$ $(3, 1, 2)$

2. Два упорядоченных множества ***равны***, если они состоят из одних и тех же элементов и у них одинаковый порядок расположения этих элементов.

Пример

Упорядоченные множества (a, b, c, d) и (a, b, c, e) различны. Также различны упорядоченные множества (8, 9, 10) и (8, 10, 9).

> Произведение первых n ненулевых натуральных чисел обозначается $n!$, то есть $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Обозначение $n!$ читается «эн факториал».

Примеры

$1! = 1;\ 2! = 1\cdot 2 = 2;\ 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6;\ 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720.$

Замечание

Считаем, по определению, что 0! = 1.

Позже мы обоснуем это определение. В частности,

$$n! = (n-1)!\cdot n \ \text{ для } \ n \ge 1 \ \text{ или}$$
$$n! = (n-2)!\cdot (n-1)n \ \text{ для } \ n \ge 2, \ \text{ или}$$
$$n! = (n-3)!\cdot (n-2)(n-1)n \ \text{ для } \ n \ge 3, \ \text{ или}$$
$$n! = (n-4)!\cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \ \text{ для } \ n \ge 4 \ \text{ и т. д.}$$

Примеры

1 $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!} = 90.$

2 $\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)!\cdot (n-1)}{(n-2)!} = n-1.$

3 $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!} = \dfrac{(2n-1)!\cdot 2n}{(2n-1)!} = 2n.$

Задания с решением

Решим на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $\dfrac{(n+2)!}{2(n-1)!} = 15(n+2).$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} n+2 \ge 0 \\ n-1 \ge 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \ge 1, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

На ОДЗ имеем:

$$\frac{(n+2)!}{2(n-1)!} = 15(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n-1)!\cdot n(n+1)(n+2)}{2(n-1)!} = 15(n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 30(n+2) \Leftrightarrow n(n+1) = 30 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -6 \notin \text{DVA}, \\ n = 5 \in \text{DVA}. \end{array}\right.$$

Ответ: $S = \{5\}$.

1.2. Размещения

Дано множество $M=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, $\text{card}\,M=n$.

Выберем любые m элементов из данных n $(0\le m\le n)$ элементов множества M и составим различные упорядоченные множества.

Определение

Упорядоченные m-элементные, где $0\le m\le n$, подмножества множества M, $\text{card}M=n$, называются **размещениями из *n* элементов по *m***.

Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m.

Считаем, по определению, что $A_n^0=1$.

Задание с решением

Дано множество $B=\{0, 2, 3\}$. Найдем число A_3^2.

Решение:

Из трех элементов 0, 2, 3 ($n=3$) можно составить 6 упорядоченных подмножеств, содержащих по два ($m=2$) элемента: (0, 2), (2, 0), (0, 3), (3, 0), (2, 3), (3, 2). Значит, $A_3^2=6$.

Найдем формулу для определения числа размещений из n элементов по m, то есть найдем формулу для вычисления числа A_n^m.

Очевидно, что $A_n^1=n$. Один элемент из данных n элементов можно выбрать n способами, а из одного элемента можно составить только одно упорядоченное множество.

Чтобы разместить любые $m+1$ элементов из данных n элементов на $m+1$ местах, можно разместить любые m элементов на первых m местах. Это можно сделать A_n^m способами. Каждый раз при выборе m элементов из данных n остаются $n-m$ элементов, каждый из которых может быть размещен на $(m+1)$-ом месте. Значит, для каждого из A_n^m способов размещения элементов на первых m местах получаем $n-m$ возможностей, посредством которых $(m+1)$-е место занимает один из $n-m$ оставшихся элементов. Отсюда следует, что $A_n^{m+1}=(n-m)A_n^m$. Учитывая, что $A_n^1=n$, последовательно получаем: $A_n^2=n(n-1)$,

$$A_n^3=n(n-1)(n-2),$$
$$A_n^4=n(n-1)(n-2)(n-3),\ ...,$$
$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\,...\,(n-m+1).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1

Если m и n – натуральные числа, где $0\le m\le n$, то

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

На практике удобнее пользоваться другой формулой для вычисления числа A_n^m.

Так как $n(n-1)(n-2)\,...\,(n-m+1)=n(n-1)(n-2)\,...\,(n-m+1)\times$ $\times\dfrac{(n-m)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)\cdot...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, то

$$\boxed{A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}}. \qquad (1)$$

Из формулы (1) для $m=0$ получаем $A_n^0=1$, а для $m=n$ получаем $A_n^n=n!$. Таким образом, теорема 1 и формула (1) справедливы для любых натуральных чисел m и n, где $0\le m\le n$.

Итак, задача 1 из раздела 1.1 решается следующим образом:

$$A_{10}^6=\frac{10!}{(10-6)!}=\frac{10!}{4!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!}=151\,200.$$

Следовательно, возможны 151 200 телефонных номеров, и ответ положителен.

1.3. Перестановки

Задача 4. Дано множество $B = \{0, 2, 3\}$. Найдем число A_3^3.

Решение:

Из трех элементов 0, 2, 3 можно составить следующие 6 упорядоченных подмножеств, содержащих по три элемента:

(0, 2, 3), (0, 3, 2), (3, 0, 2), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (2, 0, 3).

Значит, $A_3^3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$.

Замечаем, что эти размещения получены путем соответствующей перемены мест данных трех элементов. Таким образом, получили перестановки.

Определение

Размещения из n элементов по n множества $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ называются **перестановками из *n* элементов**.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n.

На основании формулы $A_n^n = n!$ и определения перестановок получаем:

$$\boxed{P_n = n!,\ n \in \mathbb{N}^*}. \qquad (2)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2

Если $n \in \mathbb{N}^*$, то $P_n = n!$.

Итак, задача 2, предложенная в разделе 1.1 (стр. 70), решается при помощи понятия перестановки. Имеем $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Тогда $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040$.

Следовательно, возможны 5 040 способов программирования 7 рефератов для выступления на конференции.

Из формул (1) и (2) получаем следующую формулу: $\boxed{A_n^m = \dfrac{P_n}{P_{n-m}}}$.

Замечание

Условимся, что пустое множество можно упорядочить единственным образом, то есть $P_0 = 1$. Следовательно, $0! = 1$. Тогда формула (2) справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$.

1.4. Сочетания

Задача 5. Дано множество $B = \{0, 2, 3\}$. Найдем все его неупорядоченные подмножества.

Решение:

Получаем следующие подмножества:

а) пустое множество: $\varnothing$;

б) подмножества, содержащие по одному элементу: $\{0\}, \{2\}, \{3\}$;

в) подмножества, содержащие по два элемента: $\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{2, 3\}$;

г) само множество $B = \{0, 2, 3\}$.

Значит, множество $B = \{0, 2, 3\}$ имеет всего восемь неупорядоченных подмножеств.

Определение

m-элементные неупорядоченные подмножества множества $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, где $0 \le m \le n$, называются **сочетаниями из *n* элементов по *m***.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m или $\dbinom{n}{m}$.

Значит, для задачи 5 получаем, что $C_3^0 = 1$, $C_3^1 = 3$, $C_3^2 = 3$, $C_3^3 = 1$, а число всех неупорядоченных подмножеств множества $B = \{0, 2, 3\}$ равно $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$.

Заметим, что $C_n^0 = 1$, поскольку любое множество M имеет только одно безэлементное подмножество – пустое множество. $C_n^1 = n$, так как n-элементное множество имеет ровно n одноэлементных подмножеств.

Замечание

Чтобы отличать сочетания от размещений, необходимо учесть, что:
– в сочетаниях все подмножества заданного множества не упорядочены, а в размещениях все подмножества упорядочены;
– элементы размещений записываются в круглых скобках, а элементы сочетаний – в фигурных скобках.

Например, размещения (1, 2) и (2, 1) считаются различными подмножествами, несмотря на то, что содержат одни и те же элементы, а подмножества {1, 2} и {2, 1} выражают одно и то же сочетание.

Итак, сочетания – это такие подмножества данного множества, которые отличаются между собой только элементами, без учета порядка их размещения.

Найдем формулу для определения числа сочетаний из n элементов по m, то есть найдем формулу для вычисления числа C_n^m.

Рассмотрим все m-элементные подмножества множества $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Упорядочим каждое из этих подмножеств всеми возможными способами и получим все m-элементные упорядоченные подмножества множества M. Известно, что число этих подмножеств равно A_n^m. Так как число всех m-элементных подмножеств множества M равно C_n^m, а каждое подмножество упорядочивается P_m способами, следует, что $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Значит, $\boxed{C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}}$.

Из формул (1) и (2) получаем:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}} \quad \text{или} \quad \boxed{C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3

Если m и n – натуральные числа, где $0 < m < n$, то

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3}$$

Замечание

Из формулы (3) для $m = 0$ получаем $C_n^0 = 1$, а для $m = n$ получаем $C_n^n = 1$.

Таким образом, теорема 3 и формула (3) справедливы для любых натуральных чисел m и n, удовлетворяющих условию $0 \le m \le n$.

Итак, задача 3 из раздела 1.1 (стр. 70) решается следующим образом:

$$C_{24}^3 = \frac{24!}{3!(24-3)!} = 2\,024.$$

Следовательно, группу дежурных по классу можно составить 2 024 способами.

Свойства чисел C_n^m

Справедливы следующие равенства:

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$, $0 \le m \le n$, $m, n \in \mathbb{N}$ – *формула взаимозаменяемых сочетаний*;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$, $0 \le m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$ – *рекуррентная формула для определения числа сочетаний*;

3° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ – число всех неупорядоченных подмножеств n-элементного множества M равно 2^n, то есть $\operatorname{card}\mathcal{B}(M) = 2^n$.

Задания. 1. Докажите свойства 1°–2°, пользуясь формулой для C_n^m.

2. Докажите свойство 3°, применив метод математической индукции.

Замечания

1. Другое доказательство свойства 3° представлено в следующем параграфе.

2. Эти свойства выражают разные отношения между числом различных неупорядоченных подмножеств данного конечного множества.

Задание с решением

Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$.

Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2n \geq 0 \\ 2n \geq 7 \\ 2n \geq 5 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3{,}5, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

На ОДЗ имеем:

$$C_{2n}^7 > C_{2n}^5 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{7!(2n-7)!} > \frac{(2n)!}{5!(2n-5)!} \Leftrightarrow \frac{5!(2n-5)!}{7!(2n-7)!} > 1 \Leftrightarrow \frac{5!(2n-7)!\cdot(2n-6)(2n-5)}{5!\cdot 6\cdot 7\cdot(2n-7)!} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n-6)(2n-5) > 42 \Leftrightarrow 4n^2 - 22n - 12 > 0 \Leftrightarrow 2n^2 - 11n - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n > 6, \\ n < -0{,}5. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получим: $n > 6$, $n \in \mathbb{N}$.

Ответ: $S = \{7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

1.5. Основные правила комбинаторики

1.5.1. *Правило умножения*

Задача 6. В XII классе 12 юношей и 15 девушек. Сколькими способами можно составить смешанные команды, состоящие из 4 юношей и 2 девушек, для участия в лицейских соревнованиях по волейболу?

Решение:

Четырех юношей из 12 можно выбрать C_{12}^4 способами, а двух девушек из 15 можно выбрать C_{15}^2 способами.

Тогда соответствующие команды можно составить

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^2 = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{14\cdot 15}{1\cdot 2} = 495\cdot 105 = 51\,975 \text{ (способами).}$$

Ответ: 51975 способами.

При решении этой задачи мы использовали ***правило умножения***.

Теорема 4

Если множества A и B конечны, то кардинал декартова произведения $A\times B$ равен произведению кардиналов этих множеств:

$$\operatorname{card}(A\times B) = \operatorname{card} A\cdot\operatorname{card} B.$$

Теорема 5

Если множества $B_1, B_2, \ldots, B_k$ конечны, то справедливо равенство:

$$\operatorname{card}(B_1\times B_2\times\ldots\times B_k) = \operatorname{card} B_1\cdot\operatorname{card} B_2\cdot\ldots\cdot\operatorname{card} B_k.$$

1.5.2. *Правило сложения*

Задача 7. Сколько натуральных делителей у числа 770?

Решение:

Разложим число 770 на простые множители: $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Таким образом, число 770 имеет четыре простых натуральных делителя (числа 2, 5, 7, 11).

Число натуральных делителей, составленных из произведения двух простых множителей, равно $C_4^2 = 6$ (это числа 10, 14, 22, 35, 55, 77), а число натуральных делителей, составленных из произведения трех простых множителей, равно $C_4^3 = 4$ (это числа 70, 110, 154, 385).

Кроме того, делителями числа 770 являются числа 1 и 770.

Итак, число 770 имеет всего $4 + 6 + 4 + 1 + 1 = 16$ натуральных делителей.

Ответ: 16 натуральных делителей.

При решении этой задачи мы использовали ***правило сложения***.

Теорема 6

Если конечные множества A и B – непересекающиеся, то есть $A \cap B = \varnothing$, то кардинал объединения множеств A, B равен сумме кардиналов этих множеств:

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Теорема 7

Если конечные множества $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – попарно непересекающиеся, то есть $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, то справедливо равенство:

$$\operatorname{card}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k) = \operatorname{card} B_1 + \operatorname{card} B_2 + \ldots + \operatorname{card} B_k.$$

Задание с решением

Из двух бухгалтеров и восьми экономистов нужно составить комиссию из 6 человек, в которую должен входить хотя бы один бухгалтер. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Если в комиссии будет один бухгалтер, то эта комиссия, согласно правилу умножения, может быть составлена $C_2^1 \cdot C_8^5 = 112$ (способами).

Если в комиссии будут два бухгалтера, то она, согласно правилу умножения, может быть составлена $C_2^2 \cdot C_8^4 = 70$ (способами).

Итак, согласно правилу сложения, соответствующая комиссия может быть составлена $C_2^1 \cdot C_8^5 + C_2^2 \cdot C_8^4 = 112 + 70 = 182$ (способами).

Ответ: 182 способами.

Замечание

Для нахождения количества натуральных делителей в случае, когда показатель степени простого множителя, полученного при разложении заданного числа на простые множители, больше либо равен 2, применим следующий способ.

Дано натуральное число n, а $P_1, P_2, \ldots, P_k$ – простые множители в его разложении.

Если $n = P_1^{d_1} \cdot P_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot P_k^{d_k}$, то количество делителей равно

$(d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (d_k + 1)$.

Например, для $n = 54 = 2 \cdot 3^3$ имеем $d_1 = 1$, $d_2 = 3$.

Значит, количество натуральных делителей числа 54 будет равно

$$(d_1 + 1) \cdot (d_2 + 1) = (1 + 1) \cdot (3 + 1) = 8.$$

Дополните: $D_{54} = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square\}$.

Уточним, что при решении этой задачи мы применили правило умножения.

Задача 8. Сколько натуральных делителей у числа:
а) 68; б) 110; в) 105; г) 200; д) 448?

Заметим, что до сих пор мы рассматривали простейшие (типовые) комбинаторные задачи, то есть **задачи без повторений элементов**. Комбинаторные задачи с повторениями элементов являются более сложными.
Например, при перестановке букв в слове «учитель» получаем $P_7 = 7! = 5\,040$ «слов».

Однако при перестановке букв в слове «класс» получаем меньше «слов», так как при перестановке двух букв «с» «слово» не меняется. В таких случаях имеем перестановки с повторениями элементов. Также существуют размещения с повторениями элементов и сочетания с повторениями элементов.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
а) Запишите все упорядоченные множества для множества A.
б) Запишите все упорядоченные подмножества, содержащие два элемента множества A.
в) Запишите все упорядоченные подмножества, содержащие три элемента множества A.

2. Вычислите:
а) $3!; 5!; 8!$; б) $\frac{10!}{6!\cdot 2!}$; в) $\frac{9!\cdot 4!}{16!}$.

3. Вычислите:
а) $A_5^3,\ A_8^1,\ A_7^5,\ A_8^8,\ A_3^6$;
б) $P_3,\ P_5,\ P_0,\ P_{10},\ P_8$;
в) $C_{10}^4,\ C_8^2,\ C_{16}^{16},\ C_{12}^7,\ C_9^8$.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

4. Вычислите:
а) $\frac{A_5^4}{P_4}$; б) $A_7^5 \cdot C_5^3$; в) $\frac{C_7^4}{P_6}$; г) $A_8^2 \cdot P_3$;
д) $C_4^3 \cdot A_3^2 \cdot P_4$; е) $\frac{A_5^3 + P_5}{C_6^4}$; ж) $\frac{C_2^4 - P_6}{A_6^4}$.

$$P_n = n!,\ n \in N^*$$

B

5. ***Работайте в парах!*** Дано множество:
1) $A = \{0, 1\}$;
2) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
а) Запишите все подмножества множества A.
б) Найдите кардинал булеана множества A.

6. Дано множество $B = \{2, 7, 8, 1\}$. Запишите все подмножества этого множества.

7. Дано множество $A = \{a, b, c, d\}$. Определите количество подмножеств множества A.

8. Определите, сколько натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если в каждом числе данные цифры используются не более одного раза.

9. Чтобы организовать экскурсию для класса, необходимо создать организационный комитет в следующем составе: председатель, секретарь и два члена. Сколько способов создания такого комитета существует, если в классе 25 учащихся?

10. В вазе 10 красных и 6 желтых гвоздик. Сколькими способами можно составить букет из пяти гвоздик?

11. Национальный чемпионат по футболу проходит в два круга. Команды дважды проводят матчи друг с другом. Определите, сколько всего матчей следует запланировать, если в чемпионате участвуют 18 команд.

12. Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще трех человек. Сколькими способами 5 человек могут распределить между собой эти обязанности?

13. Сколькими способами 8 детей могут расположиться на скамейке?

14. Сколькими способами можно сшить трехцветное знамя (в варианте вертикального размещения цветов) при наличии семи одинаковых по размерам разноцветных прямоугольных отрезов ткани?

15. Сколько «слов» можно составить из букв:
а) *р, о, д, и, н, а*; б) *з, о, в*;
в) *ц, е, н, а*; г) *ш, к, о, л, ь, н, ы, й*?

16. Сколькими способами можно расставить 7 книг на полке?

17. Сколькими способами покупатель может выбрать 3 компакт-диска с разными играми из 8 различных компакт-дисков, предложенных продавцом?

18. В команде 16 игроков. Сколькими способами тренер может составить волейбольную команду из 6 игроков?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

C

19. ***Работайте в парах!*** Из 11 бухгалтеров, работающих в фирме (7 из них – мужчины), формируется комиссия из 5 членов. Сколькими способами может быть составлена эта комиссия, чтобы в ее состав входили:
а) две женщины; б) не менее двух женщин?

20. ***Работайте в группах!*** Проект *Примеры применения размещений, перестановок и сочетаний в других школьных дисциплинах и в жизненных ситуациях*.

Реальный профиль

A_1

1. ***Работайте в парах!*** Дано множество $A = \{a, b, c, d\}$.
а) Запишите все упорядоченные множества для множества A.
б) Запишите все упорядоченные подмножества, содержащие два элемента множества A.
в) Запишите все упорядоченные подмножества, содержащие три элемента множества A.

2. Вычислите:
а) $\frac{12!}{5!\cdot 6!}$; б) $\frac{15!}{6!\cdot 8!} - 10$; в) $\frac{20!}{18!\cdot 4!} + 25$.

3. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:
а) $\frac{n!}{(n-2)!} = 12$; б) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{22n!}{(n-3)!}$; в) $\frac{n!}{(n-5)!} = \frac{6n!}{(n-3)!}$.

4. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:
а) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} \le 20$; б) $\frac{16n!}{(n-1)!} > \frac{5n!}{(n-2)!}$; в) $\frac{(n-4)!}{(n-2)!} \ge \frac{1}{20}$.

5. Вычислите:
а) $\frac{P_{10}}{A_8^6}$; б) $A_9^9 \cdot C_8^6$; в) $P_4 \cdot A_{20}^5$; г) $P_5 \cdot A_8^2 + C_{25}^{25}$; д) $\frac{C_{28}^{25} \cdot P_5}{A_{17}^8}$.

6. Вычислите:
а) $\frac{A_n^7 - A_n^9}{A_n^8}$; б) $\frac{A_{n-1}^{n-2} + P_{n-1}}{C_{n-1}^{n-3}}$; в) $\frac{A_n^3 \cdot P_n + 2P_{n+1}}{P_{n+1}}$; г) $\frac{A_n^m \cdot P_{n-m+1}}{P_{m-2}}$.

7. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:
а) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 4$; б) $A_x^3 - C_x^{x-2} = 4{,}5x$; в) $A_x^3 = 3A_x^2 + 2C_x^4$; г) $C_{x+1}^{x-1} = x^2 - 1$.

B_1

8. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 2n\}$ так, чтобы каждое четное число находилось на четном месте?

9. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:
а) $\frac{6(2n)!}{(2n-1)!} = \frac{n!}{(n-3)!}$; б) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!} = C_5^3$; в) $\frac{(3n)!}{(3n-2)!} = \frac{5(n+1)!}{(n-1)!}$.

10. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $\dfrac{(n-6)!}{(n-5)!(n-4)} \le \dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!} < 80$; в) $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \le 420$.

11. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $P_{x+5} = (x^2-25)\cdot A^{y}_{x+4}\cdot P_{x+4-y}$; б) $A^{y+1}_{x+1}\cdot P_{x-y} = 156P_{x-1}$; в) $A^2_x \cdot P_x = -6P_{x-3}$.

12. Во время летней сессии учащиеся XI класса должны сдать 4 семестровых теста по следующим дисциплинам: математика, физика, история, иностранный язык. Сколькими способами можно составить расписание так, чтобы тесты по математике и физике не следовали друг за другом?

13. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Определите количество подмножеств, состоящих из трех элементов множества A, среди которых есть 1.

14. Докажите, что для всех $n, m \in \mathbb{N}^*$ число $C^2_{n+m} + C^2_{n+m+1}$ является точным квадратом.

15. Докажите, что $P_m = (m-1)(P_{m-1} + P_{m-2}),\ m \in \mathbb{N},\ \ m \ge 2$.

16. В конкурсе участвуют 8 девушек и 9 юношей. На определенном этапе должны участвовать смешанные пары. Определите, сколькими способами можно составить 6 смешанных пар.

17. В футбольной команде 25 игроков, включая двух вратарей. Сколькими способами тренер может составить команду из 11 игроков для запланированного футбольного матча?

18. У Марины 7 различных компакт-дисков с классическими музыкальными произведениями, а у Коли 9 различных компакт-дисков народной музыки. Сколькими способами они смогут обменяться по 3 компакт-диска?

19. Сколько натуральных делителей у числа:

а) 210; б) 85; в) 101; г) 105?

20. У Ольги 10 красных и 6 желтых тюльпанов. Сколькими способами она может составить букет из 3 красных и 2 желтых тюльпанов?

21. На фирме работают 3 заместителя директора и 10 менеджеров. Сколькими способами можно составить комиссию из 5 человек, включающую хотя бы 2 заместителей директора?

22. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $2A^{x-3}_x > x\cdot P_{x-2}$; б) $A^3_x + C^{x-2}_x \le 14x$; в) $5C^3_x > C^4_{x+2}$; г) $A^3_x - 2C^4_x \ge 3A^2_x$.

23. Определите, сколько натуральных чисел, содержащих пять различных цифр, можно составить из цифр 0, 3, 5, 7, 9.

24. Вычислите сумму $C^2_n + 2C^3_n + 3C^4_n + \ldots + (n-1)C^n_n$.

C_1

25. ***Исследуйте!*** Найдите, используя сочетания, количество диагоналей выпуклого многоугольника с n сторонами.

26. Докажите, что: а) $C^m_n = C^m_{n-2} + 2C^{m-1}_{n-2} + C^{m-2}_{n-2}$; б) $C^m_n = C^m_{n-3} + 3C^{m-1}_{n-3} + 3C^{m-2}_{n-3} + C^{m-3}_{n-3}$.

27*. ***Работайте в парах!***

Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N},\ \ C^n_{2n}\cdot\sqrt{3n} < 4^n$.

(*Олимпиада по математике Республики Молдова*, 2010)

28. Докажите, что:

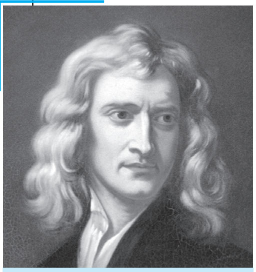
а) $C^0_n + 2C^1_n + 3C^2_n + \ldots + (n+1)C^n_n = (n+2)2^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*$.

б) $C^1_n - C^3_n + C^5_n - C^7_n + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\dfrac{n\pi}{4}$;

в) $1 - C^2_n + C^4_n - C^6_n + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

§ 2 БИНОМ НЬЮТОНА

2.1. Формула бинома Ньютона



Исаак Ньютон (1643–1727), английский математик

На основании тождеств $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ легко проверить, что

$$(a+b)^4=(a+b)^2(a+b)^2=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^5=(a+b)^2(a+b)^3=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Заметим, что эти формулы являются частными случаями общей формулы $(a+b)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, где a, b – любые алгебраические выражения.

Докажем, что для любого $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}$, $0\le m\le n$, справедлива формула

$$\boxed{(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^m a^{n-m}b^m+\ldots+C_n^n b^n,} \qquad (1)$$

Формулу (1) называют ***формулой бинома Ньютона***.

Доказательство:

Докажем формулу (1) методом математической индукции.

Обозначим высказывание (1) через $P(n)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Для $n=1$ высказывание $P(1)$ справедливо, так как $(a+b)^1=a+b=C_1^0a+C_1^1b.$

Предположим, что для любого натурального числа $n=m$, $m\ge 1$, высказывание $P(m)$ также справедливо, то есть

$(a+b)^m=C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+C_m^2a^{m-2}b^2+\ldots+C_m^k a^{m-k}b^k+\ldots+C_m^m b^m$, где $k\in\mathbb{N}$, $1\le k\le m.$

Докажем, что и для любого натурального числа $n=m+1$, $m\ge 1$, высказывание $P(m+1)$ также справедливо. Действительно,

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)^m\cdot(a+b)=(C_m^0a^m+C_m^1a^{m-1}b+\ldots+C_m^k a^{m-k}b^k+\ldots+C_m^m b^m)(a+b)=$$

$$=C_m^0a^{m+1}+(C_m^0+C_m^1)a^mb+\ldots+(C_m^k+C_m^{k+1})a^{m-k}b^{k+1}+\ldots+(C_m^{m-1}+C_m^m)ab^m+C_m^m b^{m+1}.$$

Учитывая, что $C_m^0=C_{m+1}^0=C_m^m=C_{m+1}^{m+1}=1$, и применяя рекуррентные формулы вычисления числа сочетаний $C_m^0+C_m^1=C_{m+1}^1$, ..., $C_m^k+C_m^{k+1}=C_{m+1}^{k+1}$, $C_m^{m-1}+C_m^m=C_{m+1}^m$, получаем:

$$(a+b)^{m+1}=C_{m+1}^0a^{m+1}+C_{m+1}^1a^mb+\ldots+C_{m+1}^{k+1}a^{m-k}b^{k+1}+\ldots+C_{m+1}^m ab^m+C_{m+1}^{m+1}b^{m+1}.$$

Следовательно, в силу метода математической индукции, высказывание $P(n)$ справедливо для любого натурального числа $n\ge 1$.

Итак, для любого $n\in\mathbb{N}^*$ имеем:

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^m a^{n-m}b^m+\ldots+C_n^n b^n$ или

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^m a^{n-m}b^m+\ldots+b^n$ или

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m,\ m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^*,\ 0\le m\le n. \quad ►$$

Замечание

Для краткой записи суммы членов конечной последовательности применяется символ «$\sum$» (сигма). Таким образом, $\sum_{i=1}^{n}a_i$ обозначает $a_1+a_2+\ldots+a_n$ и читается «сумма членов а-и, и от 1 до н».

Задание с решением

Запишем разложение степени бинома $(a+b)^{12}$.

Решение:

$$(a+b)^{12}=C_{12}^0a^{12}+C_{12}^1a^{11}b+C_{12}^2a^{10}b^2+C_{12}^3a^9b^3+C_{12}^4a^8b^4+C_{12}^5a^7b^5+$$

$$+C_{12}^6a^6b^6+C_{12}^7a^5b^7+C_{12}^8a^4b^8+C_{12}^9a^3b^9+C_{12}^{10}a^2b^{10}+C_{12}^{11}ab^{11}+C_{12}^{12}b^{12}=$$

$$=a^{12}+12a^{11}b+66a^{10}b^2+220a^9b^3+495a^8b^4+792a^7b^5+924a^6b^6+$$

$$+792a^5b^7+495a^4b^8+220a^3b^9+66a^2b^{10}+12ab^{11}+b^{12}.$$

Определения

- Правая часть формулы бинома Ньютона называется **разложением степени бинома**.
- Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^m, ..., C_n^n$ в формуле бинома Ньютона называются **биномиальными коэффициентами**.

Свойства разложения степени бинома

1° Количество слагаемых (членов) разложения степени бинома, а значит, и количество биномиальных коэффициентов $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, равно $n+1$.

2° В формуле бинома Ньютона показатели степени a убывают от n до 0, а показатели степени b возрастают от 0 до n.

3° В каждом слагаемом разложения степени бинома сумма показателей степеней a и b равна n.

4° $(k+1)$-й член разложения степени бинома $(a+b)^n$, то есть

$$\boxed{T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k,\ k\in\{0, 1, 2, ..., n\},}$$

называется ***общим членом разложения степени бинома***.

Подставляя в формулу для T_{k+1} вместо k натуральные значения от 0 до n, получаем все члены разложения степени бинома.

Например, $T_1=C_n^0a^nb^0$ – первый член разложения степени бинома, $T_5=C_n^4a^{n-4}b^4$ – пятый член разложения степени бинома.

Свойства биномиальных коэффициентов

1° Сумма всех биномиальных коэффициентов при заданном значении n равна 2^n:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n.$$

Действительно, пусть $a=b=1$. Подставляя эти значения в формулу бинома Ньютона, получаем:

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n.$$

2° Так как $C_n^m=C_n^{n-m}$, то биномиальные коэффициенты, равноудаленные от концов разложения, равны друг другу.

3° Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах в разложении степени бинома, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах этого же разложения, и равна 2^{n-1}.

Действительно, пусть $a=1,\ b=-1$. Подставляя эти значения в формулу бинома Ньютона, получаем $C_n^0-C_n^1+C_n^2+...+(-1)^nC_n^n=0$, что и подтверждает справедливость данного свойства.

4° а) При $n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*$, биномиальный коэффициент среднего члена разложения степени бинома (C_n^k) является наибольшим.

б) При $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$, биномиальные коэффициенты двух средних членов разложения степени бинома равны ($C_n^k=C_n^{k+1}$) и являются наибольшими.

Замечание

Следует различать коэффициент члена разложения степени бинома от биномиального коэффициента этого же члена разложения (в случае, когда a, b являются выражениями с коэффициентами).

Например, в разложении степени бинома $(3a+b)^3 = 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$ коэффициент третьего слагаемого равен 9, а биномиальный коэффициент этого же слагаемого равен $C_3^2 = 3$.

Биномиальные коэффициенты разложения степени бинома $(a+b)^n$ при различных значениях n могут быть вычислены при помощи ***треугольника Паскаля***.

Рекуррентная формула $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ позволяет последовательно вычислять биномиальные коэффициенты C_{n+1}^{m+1}, если известны коэффициенты C_n^m и C_n^{m+1}. Соответствующие значения удобно располагать в виде треугольника, называемого ***арифметическим треугольником*** или ***треугольником Паскаля***.

C_n^m	$n \in \mathbb{N}$	Бином степени n
1	$n = 0$	$(a+b)^0$
1 1	$n = 1$	$(a+b)^1$
1 2 1	$n = 2$	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$n = 3$	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$n = 4$	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$	$(a+b)^5$
1 6 15 20 15 6 1	$n = 6$	$(a+b)^6$
… … … … … … … … … … … … …	…	…

В $(n+1)$-й строке записаны числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n.

Правило составления последующей строки треугольника, при уже известной предыдущей строке, следующее: первый и последний элементы строки равны 1; каждый из остальных элементов строки равен сумме двух элементов предыдущей строки, стоящих слева и справа от вычисляемого.

Итак, для восьмой строки треугольника Паскаля получаем следующие числа:

1, $1+6=7$, $6+15=21$, $15+20=35$, $20+15=35$, $15+6=21$, $6+1=7$, 1.

Задание. Заполните девятую строку треугольника Паскаля.

Замечание

Отметим, что в математике существует и другой способ нахождения биномиальных коэффициентов – при помощи производной функции.

Задание. Изучите, используя Интернет, как определить биномиальные коэффициенты, применяя производную функции.

Степень с натуральным показателем разности двух выражений вычисляется по формуле, аналогичной формуле бинома Ньютона:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 - C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + (-1)^m C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

или:

$$\boxed{(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n.} \qquad (2)$$

Формула (2) выводится из формулы бинома Ньютона с учетом, что $(a-b)^n = [a+(-b)]^n$.

2.2. Приложения бинома Ньютона

Рассмотрим некоторые приложения биномиальных коэффициентов и разложения степени бинома.

Задания с решением

1 Найдем шестой член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+x)^{14}$.

Решение:

$T_6 = C_{14}^5(\sqrt{x})^{14-5}\cdot x^5 = \dfrac{14!}{5!\cdot 9!}(\sqrt{x})^9\cdot x^5 = 2002x^5\cdot\sqrt{x^9} = 2002x^9\cdot\sqrt{x}$.

2 Найдем слагаемое разложения степени бинома $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{20}$, не содержащее x.

Решение:

Пользуясь формулой общего члена разложения степени бинома, получаем:

$$T_{k+1} = C_{20}^k(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k.$$

Согласно условию, $(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k = x^0$. Значит, $\dfrac{20-k}{2}-2k=0 \Leftrightarrow k=4$.

Следовательно, 5-й член разложения степени бинома $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{20}$ не содержит x.

Ответ: Пятое слагаемое разложения степени бинома.

3 Найдем наибольший биномиальный коэффициент разложения степени бинома $\left(u^{\frac{1}{3}}-\sqrt[5]{y}\right)^{22}$.

Решение:

Так как $n=22$ – четное число, то наибольший биномиальный коэффициент этого разложения равен $C_{22}^{11} = \dfrac{22!}{11!\cdot 11!} = 705\,432$.

Ответ: $705\,432$.

4 Определим пятый член разложения степени бинома $\left(3a-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, если биномиальный коэффициент четвертого члена этого разложения равен 20.

Решение:

Поскольку $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = \dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}$, получаем:

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 20 \Leftrightarrow (n-2)(n-1)n = 120 \Leftrightarrow n^3-3n^2+2n-120=0 \Leftrightarrow n=6.$$

Итак, $T_5 = (-1)^4\cdot C_6^4\cdot(3a)^{6-4}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^4 = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 9a^2\cdot a^{-2} = 135$.

Ответ: $T_5 = 135$.

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A_1

1. Запишите разложение степени бинома:

а) $(x+y)^7$; б) $(3a+b)^8$; в) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$; г) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^5$; д) $(2a+3x)^4$.

2. Запишите разложение степени бинома:

а) $(4-x)^4$; б) $(\sqrt[3]{a}-b)^5$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^7$; г) $(2x-3)^6$; д) $(a-\frac{1}{2}b)^4$.

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

3. Найдите:

а) пятый член разложения степени бинома $(3x+4)^{10}$;

б) седьмой член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^9$;

в) десятый член разложения степени бинома $(\ln 2-5\lg 3)^{11}$.

4. Найдите сумму биномиальных коэффициентов разложения степени бинома:

а) $(4a+3b^2)^{25}$; б) $(\log_5 x-3y)^{108}$;

в) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{215}$; г) $(8x-2y)^{71}$.

$$(a-b)^n=\sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

B_1

5. Запишите разложение степени бинома:

а) $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{a^2}}+\sqrt[5]{\frac{3}{b^2}}\right)^5$;

б) $(x-\sqrt{x^2-1})^8-(x+\sqrt{x^2-1})^8$;

в) $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^6-(\sqrt{2x}-\sqrt{y})^6$.

6. Найдите сумму биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении степени бинома:

а) $(3x+4y)^{15}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{25}$;

в) $(a-15b)^{28}$; г) $(2\sqrt{x}+b)^{32}$.

7. ***Работайте в парах!*** Докажите, что значение выражения $(5-\sqrt{7})^n+(5+\sqrt{7})^n$ является натуральным числом при $n\in\mathbb{N}$.

8. Найдите:

а) член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+2x)^{16}$, содержащий x^{10};

б) член разложения степени бинома $(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{a})^{13}$, содержащий a^4;

в) член разложения степени бинома $(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2})^{30}$, не содержащий x.

9. Найдите средний член разложения степени бинома:

а) $(x^2+2y^4)^{16}$; б) $(\sqrt{a}+b^4)^{24}$;

в) $(x^3-y^2)^{14}$; г) $(\sqrt{x}-\lg x)^{18}$.

10. Найдите два средних члена разложения степени бинома:

а) $(x-y^3)^{25}$; б) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{13}$;

в) $(2x^3-3y^2)^{11}$; г) $(3+x)^{17}$.

11. Найдите средние члены разложения степени бинома:

а) $(a^2+3b)^{20}$; б) $(x-2y)^{30}$;

в) $(a^3+b^2)^{21}$; г) $(5-x)^{31}$.

12. Найдите слагаемое разложения степени бинома $(\sqrt{a}+2a^3)^{18}$, содержащее a^{14}.

13. Найдите биномиальный коэффициент средних членов разложения степени бинома $(x^3+y^3)^{15}$.

14. Биномиальный коэффициент третьего члена разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ на 44 больше биномиального коэффициента второго члена этого разложения. Найдите натуральное число n.

15. Найдите действительные значения x, при которых четвертый член разложения степени бинома $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ равен 200.

16. Найдите четвертый член разложения степени бинома $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{\sqrt[3]{y}}{3}\right)^6$.

17. Найдите сумму коэффициентов разложения степени бинома:

а) $(8x^2-5y^2)^9$; б) $(7x+8y^3)^6$.

18. Найдите рациональные члены разложения степени бинома:

а) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[7]{2})^{20}$; б) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$.

19. ***Работайте в парах!*** Сумма биномиальных коэффициентов разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right)^n$ равна 256. Найдите слагаемое этого разложения, содержащее $x^{-\frac{1}{4}}$.

20. Найдите значение n в разложении степени бинома $(x+y)^n$, если коэффициент при y^3 равен коэффициенту при y^5.

21. Найдите слагаемое разложения степени бинома $(\sqrt{x}+x)^n$, содержащее x^9, если известно, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах этого разложения, равна 2 048.

22. Найдите A_n^3, если пятый член разложения степени бинома $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{a}\right)^n$ не содержит a.

23. БАК Разложение степени бинома $\left(a\sqrt{a}-\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^n$ содержит 9 членов. Найдите средний член разложения.

24. БАК Найдите натуральное число n, при котором в разложении степени бинома $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^n$ отношение между третьим и вторым членами разложения равно $5\sqrt{6}$.

C₁

25. Методом математической индукции и при помощи формулы бинома Ньютона докажите *малую теорему Ферма*: «Если p – простое натуральное число и $n\in\mathbb{N}$, то n^p-n кратно p».

Замечание. Теорема Ферма часто формулируется следующим образом: «Если p – простое натуральное число и n – натуральное число, не кратное p, то $n^{p-1}-1$ кратно p».

26. ***Исследуйте!*** Рассмотрите треугольник Паскаля. Какие свойства чисел (последовательностей чисел) можно выявить из этого арифметического треугольника?

27. ***Работайте в парах!***

Используя бином Ньютона, составьте задачу на:

а) размещения; б) перестановки; в) сочетания.

28. Докажите, сравнивая коэффициенты при x в обеих частях равенства $(1+x)^k(1+x)^m=(1+x)^{k+m}$, что $C_k^lC_m^0+C_k^{l-1}C_m^1+\ldots+C_k^0C_m^l=C_{k+m}^l$, где $k, m, l\in\mathbb{N}$ и $l\le\min(k, m)$.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Вычислите:

а) $\frac{10!}{3!\cdot 8!}$; б) $\frac{25!}{6!\cdot 22!}$;

в) $\frac{0!}{(35-34)!}$; г) $\frac{100!}{(98+1)!}$.

2. Вычислите:

а) $\frac{A_5^3}{P_5}$; б) $C_{10}^8 - C_5^4 \cdot A_3^2$;

в) $P_4 \cdot A_4^3 \cdot C_4^4$; г) $C_5^3 \cdot C_{10}^9 \cdot C_8^1$.

3. На выпускном вечере 24 ученика XII класса обменялись фотографиями. Сколько фотографий понадобилось для этого?

4. В турнире по шахматам участвовали 14 спортсменов, каждые два шахматиста сыграли между собой по одной партии. Сколько партий было сыграно на турнире?

5. Сколькими способами 6 учащихся могут расположиться на 20 местах?

6. Пассажирский поезд состоит из 12 вагонов. Сколькими способами можно составить этот поезд?

7. 4 экзамена на степень бакалавра следует провести за 8 дней.

а) Сколькими способами можно составить расписание экзаменов?
б) Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если последний экзамен обязательно следует провести в последний, восьмой, день?

8. Сколькими способами 8 электрических лампочек можно распределить по 6 разноцветным патронам?

9. Сколькими способами можно построить 10 спортсменов на соревновании, если первым должен стоять самый высокий спортсмен, а последним – самый малорослый?

B

10. ***Работайте в парах!*** XII класс представлен на конкурсе по математике 12 учениками и 3 учителями. Сколькими способами можно составить команду, состоящую из 5 учащихся и:

а) одного учителя; б) двух учителей;

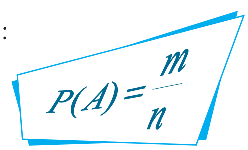
в) трех учителей; г) хотя бы одного учителя?

11. Сколько натуральных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

C

12. В урне находятся 6 белых и 8 черных шаров одинакового размера. Наугад извлекают одновременно два шара.

Вычислите вероятность события, используя формулу $P(A)=\frac{m}{n}$:



A = {извлечены два белых шара};

B = {извлечены два черных шара};

C = {извлечены два шара одинакового цвета}.

Реальный профиль

A_1

1. Сколько элементов должно содержать множество, чтобы число перестановок этих элементов было не меньше 3000 и не больше 5500?

2. Сергей пригласил на свой день рождения 8 школьных друзей.
а) Сколькими способами он может их разместить за овальным столом?
б) Обобщите для n друзей.

3. Определите, сколько натуральных чисел можно составить из десяти различных цифр.

4. В фирме Tempus работает 10 операторов и 5 инженеров. Требуется делегация из 6 человек, из которых по крайней мере 2 – инженеры. Сколькими способами можно составить эту делегацию?

5. Сколько натуральных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

6. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:
а) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^m\cdot(n-m)!}=90$; б) $A_n^4\cdot P_{n-4}=42P_{n-2}$;
в) $8C_{n+1}^5=3A_n^3$; г) $6(C_{n+1}^1+C_{n+3}^3)=13C_{n+2}^2$.

7. Найдите T_{12} в разложении степени бинома $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+2\right)^{15}$.

8. Дан бином $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^n$. Найдите натуральное число n, если известно, что $T_4:T_6=4:9$.

9. Найдите член разложения степени бинома $\left(\sqrt{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2000}$, не содержащего x.

10. Найдите средний член разложения степени бинома $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x}-\sqrt{y}\right)^{14}$.

B_1

11. Найдите натуральное число n, если известно, что $P_n\cdot A_{n+3}^3=30(n+1)!$.

12. Дан бином $(2a^m+1)^n$. Найдите натуральные числа m и n, если известно, что пятый член разложения степени этого бинома содержит a^{18}, а восьмой член содержит a^9.

13. Сколькими способами можно составить команды из 3 учеников, 2 учителей и одного родителя, если есть 26 учеников, 5 учителей и 10 родителей?

14. Из 14 сотрудников, среди которых 8 мужчин и 6 женщин, составляется комиссия из 5 человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в ее состав могут войти не более 3 мужчин?

15. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:
а) $C_n^3+C_n^4>n(n-2)$; б) $C_{n+8}^{n+3}\le 5A_{n+6}^3$;
в) $C_{10}^{n-1}>2C_{10}^n$; г) $5C_x^3>C_{x+2}^4$.

16. Пусть $(2a+b^2)^n$. Найдите n, если:
а) сумма биномиальных коэффициентов равна 256;
б) сумма биномиальных коэффициентов, расположенных на нечетных местах, равна 256;
в) биномиальный коэффициент при a^3 равен биномиальному коэффициенту при a^9;
г) биномиальный коэффициент третьего члена разложения равен среднему арифметическому биномиальных коэффициентов второго и четвертого членов разложения.

17. Найдите член разложения степени бинома $\left(\sqrt[5]{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{21}$, не содержащий a.

18. Дано $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^6$. Найдите x, если $T_5=\dfrac{5}{9}$.

19. БАК Найдите член разложения степени бинома $\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{25}$, содержащий a^{10}.

20. Найдите рациональные члены разложения степени бинома $(\sqrt{7}-\sqrt[3]{5})^n$, если:

а) $n=5$; б) $n=100$.

21. Докажите, что:

а) $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$; б) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, $n\in \mathbb{N}^*$.

22. Докажите, что для $\forall n\in \mathbb{N}^*$ числовое значение выражения $\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$ является целым числом.

23. Из цифр 0, 1, 2, 5, 6, 7 составляются всевозможные натуральные числа, содержащие 6 различных цифр.

а) Сколько таких чисел можно составить?

б) Сколько из них начинаются цифрой 2?

в) Сколько из них начинаются цифрой 1?

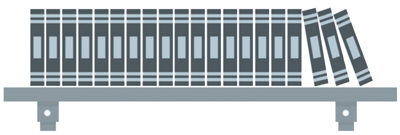
г) Сколько из них оканчиваются на цифру 1?

д) Сколько из них начинаются числом 20?

24. Сколько перестановок элементов 1, 2, ..., n существует, чтобы элемент 1 находился на первом месте?

25. Найдите целые значения n, при которых определено число $C_{3n-6}^{n^2-5n+10}$.

26. На полке расположено собрание сочинений из 20 томов. Сколькими способами можно расположить эти тома на полке, чтобы первый и второй том не оказались рядом?



27. Сколько различных пятизначных натуральных чисел можно составить из цифр 0, 3, 5, 7, 9?

28. Сколько существует сочетаний из элементов 1, 2, ..., n, взятых по m $(2 < m < n)$, содержащих одновременно 1 и 2?

29. БАК Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

$$A_n^3 = 4C_n^2 - 2n.$$

30. БАК Разложение степени бинома $\left(a\sqrt{a}-\dfrac{1}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^n$ содержит 9 членов. Найдите средний член разложения.

31. В XII классе 12 юношей и 18 девушек.

а) Сколькими способами можно составить группы из 3 девушек и 2 юношей для выполнения проекта?

б) Сколькими способами можно составить смешанные команды по 6 человек для участия в школьном соревновании по волейболу?

32. В фирме 40 работников, в том числе администратор и бухгалтер. Организуется комиссия, состоящая из администратора, бухгалтера и еще 5 человек. Сколькими способами можно составить такую комиссию?

C₁

33. Докажите, что для любых $n\in \mathbb{N}$, $n\geq 2$, справедливо неравенство $C_{2n}^n > \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

34. Докажите, что значение выражения $C_{2n+1}^1\cdot C_{2n+1}^2\cdot C_{2n+1}^3\cdot\ldots\cdot C_{2n+1}^{2n}$ является точным квадратом.

35*. Решите на множестве $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126,\\ P_{x+2} = 720;\end{cases}$ б) $\begin{cases}A_{2y}^{3x} - 5A_{2y}^{3x-1} = 0,\\ 12C_{2y}^{3x} - 5C_{2y}^{3x-1} = 0.\end{cases}$

36. Составьте задачу: а) на приложение бинома Ньютона в физике;
б) на приложение бинома Ньютона в химии.

37*. Решите на множестве $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ систему $C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}$.

38*. Докажите, что для любого $n\in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)! > 2^{2n}\cdot (n!)^2$.

Время выполнения работы: 45 минут

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

1. а) Замените рамку таким натуральным числом, чтобы полученное выражение имело смысл: $A^{10}_{\square}$
   б) Найдите число размещений, полученных в пункте а) после замены рамки соответствующим натуральным числом.

2. Для организации математического вечера учащиеся XII класса должны избрать оргкомитет в составе председателя, секретаря и еще двух человек. Сколькими способами можно избрать оргкомитет, если в классе 25 учащихся?

3. Сергей пригласил на день рождения 12 друзей. Сколькими способами Сергей может рассадить своих гостей за круглым столом.

4. На спортивном соревновании XII класс представлен 15 учащимися и 3 тренерами.
   а) Сколькими способами можно составить команды из шести учащихся?
   б) Сколькими способами можно составить команды из пяти учащихся и одного тренера?

5. Приведите пример применения элементов комбинаторики в повседневной жизни.

Реальный профиль

1. а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
   «Из цифр 2, 4, 6, 8, 0 можно составить 100 телефонных номеров, содержащих по пять различных цифр». **И** | **Л**
   б) Найдите кардинал булеана множества $A=\{2, 4, 6, 8, 0\}$.

2. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $C^{x-1}_{x+1}=x^2-1$.

3. В XII классе учатся 14 юношей и 18 девушек. Сколькими способами можно составить команды, состоящие из 3 юношей и 5 девушек?

4. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $7A^{x-1}_{x+1}+14P_{x-1}\le 30P_x$.

5. Найдите значение n, при котором 17-й член разложения степени бинома $\left(\frac{1}{x^2}+5\sqrt{x}\right)^n$ не содержит x.

6. Пусть $a, b\in\mathbb{N}$ и $\sqrt{b}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Докажите, что значение выражения $(a+\sqrt{b})^n+(a-\sqrt{b})^n$ является натуральным числом при любом $n\in\mathbb{N}$.

Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$

$n! = (n-1)!n$

$0! = 1$

Конечные множества

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Типовые комбинаторные задачи

Формула бинома Ньютона

$(a+b)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m, \; m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$

Упорядоченные множества

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Размещения

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$,

$0 \le m \le n, \; m \in \mathbb{N}, \; n \in \mathbb{N}^*$

Сочетания

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$,

$0 \le m \le n, \; m \in \mathbb{N}, \; n \in \mathbb{N}^*$

Свойства биномиальных коэффициентов

1° $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3° $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$;

4° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

5° а) Биномиальный коэффициент C_n^k является наибольшим при $n = 2k, \; k \in \mathbb{N}^*$;

б) Биномиальные коэффициенты $C_n^k = C_n^{k+1}$ являются наибольшими при $n = 2k+1, \; k \in \mathbb{N}^*$.

Перестановки

$P_n = n!, \; n \in \mathbb{N}^*$

Свойства чисел C_n^m, $0 \le m \le n$

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Общий член разложения степени бинома

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$,

$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \\
 & & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & & \\
 & & C_{n-1}^0 & & C_{n-1}^1 & & \ldots & & C_{n-1}^{n-2} & & C_{n-1}^{n-1} & & \\
 & C_n^0 & & C_n^1 & & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-2} & & C_n^{n-1} & & C_n^n &
\end{array}
$$

Треугольник Паскаля

Основные правила комбинаторики:

1. Правило умножения: $\text{card}(A \times B) = \text{card}\, A \cdot \text{card}\, B$.
2. Правило сложения: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B$, где $A \cap B = \varnothing$.

Приложения в различных областях науки и техники (физика, химия, теория вероятностей и т. д.), в повседневной жизни; решение комбинаторных уравнений/неравенств; решение систем, совокупностей комбинаторных уравнений/неравенств.

Приложения в различных областях науки и техники; решение комбинаторных уравнений/неравенств; решение систем, совокупностей комбинаторных уравнений/неравенств; разложение степени биномов.

Модуль

5

Элементы теории вероятностей

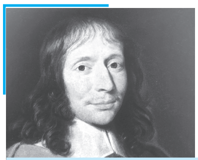
Изучая математику, учишься думать!
Григорий Мойсил

Цели модуля

- применение понятий *элементарные события* и *случайные события*, соответствующих некоторому эксперименту;
- использование классического определения при вычислении вероятности;
- применение формулы произведения вероятностей при определении независимости случайных событий;
- применение свойств вероятностей при решении задач;
- нахождение распределения простой дискретной случайной величины;
- понимание теории вероятностей как научного способа описания явлений реального мира.

Введение

Краткая историческая справка

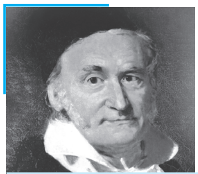


Блез Паскаль (1623–1662) – французский математик, писатель и философ

Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик

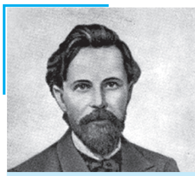
Основы теории вероятностей были заложены в XVII веке математиками Б. Паскалем и П. Ферма. Любитель азартных игр, кавалер де Мере, предложил Паскалю две задачи, которые не укладывались в рамки математики того времени. Решение этих задач, а также переписка Паскаля с Ферма по поводу найденных решений положили начало исследованиям, заложившим основу теории вероятностей. Среди видных математиков, содействовавших развитию теории вероятностей в XIX–XX столетиях, особо отметим К. Ф. Гаусса, С. Д. Пуассона, А. Маркова, А. Колмогорова, Б. Гнеденко, Е. Вентцель.

Сегодня теория вероятностей представляет собой один из важнейших разделов современной математики. Предмет исследований теории вероятностей – закономерности, проявляющиеся в случайных явлениях.



Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – немецкий математик, физик и астроном

Симеон Дени Пуассон (1781–1840) – французский математик



Андрей Марков (1856–1922) – русский математик

Андрей Колмогоров (1903–1987) – русский математик

Борис Гнеденко (1912–1995) – русский математик

Елена Вентцель (1907–2002) – русский математик

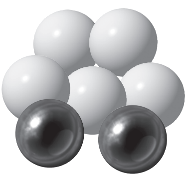
Мы уже встречались с понятием *событие*, которое означает результат некоторого *эксперимента* или *наблюдения*. Термин *эксперимент* применяется для описания любого действия, которое можно повторить, не изменяя его условий.

Примеры

1 Подбрасывая монету, мы проводим эксперимент. Возможные результаты – выпадение орла или решки* – это два случайных события.

2 Нагревание воды до 100° C – это эксперимент. Результат – закипание воды – событие.

3 Из урны, содержащей 5 белых и 2 черных шара, наугад извлекается один шар. Это – эксперимент. Извлечение белого шара является событием, так же как и извлечение черного шара. Извлечение шара другого цвета также является событием.



События можно разбить на три класса: ***достоверные***, ***невозможные*** и ***случайные***. Закипание воды при температуре 100 ° C (при нормальном атмосферном давлении – 760 мм ртутного столба) является достоверным событием. Извлечение шара цвета, отличного от белого и черного, является невозможным событием (пример **3**), равно как и одновременное выпадение орла и решки при подбрасывании монеты.

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит (или наступает) в результате эксперимента (обозначается через E).

Невозможным называется событие, которое в результате эксперимента не может произойти (обозначается через $\varnothing$).

При подбрасывании монеты орел может выпасть, но может и не выпасть. Таким образом, появление орла является случайным событием, равно как и появление решки.

Случайным называется событие, которое может произойти, а может и не произойти в результате эксперимента.

В примере **3** выбор белого шара и выбор черного шара являются случайными событиями.

---

* Орел – сторона монеты с рисунком, решка – сторона монеты с цифрой.

§ 1 КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Равновозможные события

Определение Несколько событий называются **несовместимыми**, если любые два из них не могут произойти одновременно при проведении одного и того же эксперимента. В противном случае события называются **совместимыми**.

Примеры

1 Выигрыш, проигрыш и ничья в шахматной партии для каждого из двух игроков – это три несовместимых события.

2 Бросается игральная кость и рассматриваются события:

$A_i = \{$выпадает i очков$\}$, $i = \overline{1, 6}$; $B_1 = \{$выпадает нечетное число очков$\}$;

$B_2 = \{$выпадает четное число очков$\}$; $B_3 = \{$выпадает не более трех очков$\}$.

Несовместимыми являются случайные события:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6;\ B_1, B_2;\ B_3, A_4, A_5, A_6.$$

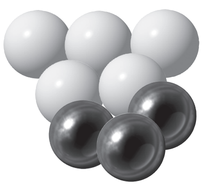
События B_2, B_3 являются совместимыми, так как выпадение двух очков будет означать наступление обоих событий. Совместимыми являются также события: B_1, B_3; A_1, B_1, B_3; A_1, B_1, B_2, B_3.

Результаты эксперимента считаются ***равновозможными***, если из соображений симметрии можно утверждать, что все они имеют одинаковые шансы произойти.

Примеры

1 При подбрасывании монеты, если она симметрична, не существует никаких оснований считать, что у одной стороны шансов выпасть больше, чем у другой. Следовательно, выпадение орла или решки – равновозможные события.

2 Бросается игральная кость. У всех граней одинаковые шансы выпасть. Таким образом, здесь имеются 6 равновозможных событий.



3 Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад извлекается один шар. Если шары идентичны по форме, величине и массе, то можно считать, что у всех восьми шаров есть одинаковые шансы быть извлеченными, то есть здесь имеются 8 равновозможных событий.

Понятие равновозможности событий позволяет судить о том, какое из двух данных случайных событий является более возможным. Вернемся к примеру **3** и рассмотрим событие A, состоящее в извлечении белого шара, и событие B, состоящее в извлечении черного шара. Событие A более возможно, чем B. Действительно, каждый из восьми шаров имеет одинаковые шансы быть извлеченным, но белых шаров в урне больше, чем черных. В таком случае говорят, что у события A имеется 5 ***благоприятствующих исходов***, а у B – лишь 3.

В примере с бросанием игральной кости событие, состоящее в выпадении не менее двух очков, более возможно, чем событие, состоящее в выпадении не более трех очков. Для первого события имеется 5 благоприятствующих исходов, а для второго – лишь 3.

1.2. Классическое определение вероятности

Определим понятие *вероятность* для случайных событий, связанных с экспериментом, имеющим *конечное число несовместимых равновозможных исходов*.

Определение

Вероятностью события A называется отношение ***числа m равновозможных исходов, благоприятствующих A***, к ***общему числу n всех равновозможных исходов эксперимента***.

Вероятность события A обозначается через $P(A)$. Согласно определению,

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Формула (1) представляет собой ***классическое определение вероятности***.

Из этого определения следуют ***свойства вероятности***:

1° Вероятность достоверного события E равна 1.

Действительно, так как $m = n$, то $P(E)=\frac{n}{n}=1$.

2° Вероятность невозможного события $\varnothing$ равна 0.

Действительно, так как $m=0$, то $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

3° Вероятность случайного события A есть положительное число меньше единицы.

В самом деле, число m равновозможных исходов, благоприятствующих случайному событию A, удовлетворяет двойному неравенству $0<m<n$ и, следовательно, $0<\frac{m}{n}<1$. Значит, $0<P(A)<1$.

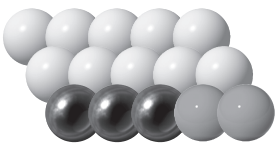
Из этих свойств следует, что вероятность любого события A удовлетворяет двойному неравенству $0\le P(A)\le 1$.

Задания с решением

1 Подбрасывается монета. Вычислим вероятность выпадения орла (событие A).

Решение:

Число всех равновозможных исходов равно 2. Событию A благоприятствует один из них. Следовательно, $n=2$, $m=1$ и $P(A)=\frac{1}{2}$. Очевидно, вероятность выпадения решки также равна $\frac{1}{2}$.



2 В урне 10 белых, 3 черных и 2 красных шара. Вынимают наугад один шар. Вычислим вероятность того, что этот шар будет белым (событие A).

Решение:

Общее число равновозможных исходов равно 15. Число благоприятствующих исходов равно 10. Таким образом, $n=15$, $m=10$ и $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

3 В урне 4 белых шара ($б_1$, $б_2$, $б_3$, $б_4$) и 2 черных ($ч_1$, $ч_2$). Извлекают сразу два шара. Определим вероятности случайных событий:

A_1 = {извлеченные шары разного цвета}; A_2 = {извлеченные шары одного цвета}.

Решение:

Обозначив через ($б_1$, $б_2$) случай выбора шаров $б_1$ и $б_2$, через ($б_1$, $б_3$) случай выбора шаров $б_1$ и $б_3$ и т. д. Равновозможные исходы эксперимента можно записать так:

$$\begin{array}{lllll}
(б_1, б_2), & (б_1, б_3), & (б_1, б_4), & (б_1, ч_1), & (б_1, ч_2), \\
(б_2, б_3), & (б_2, б_4), & (б_2, ч_1), & (б_2, ч_2), & \\
(б_3, б_4), & (б_3, ч_1), & (б_3, ч_2), & & \\
(б_4, ч_1), & (б_4, ч_2), & & & \\
(ч_1, ч_2). & & & &
\end{array}$$

Заметим, что $n=15$. Так как событию A_1 благоприятствуют 8 исходов, событию A_2 благоприятствуют 7, то в соответствии с определением, $P(A_1)=\frac{8}{15}$, $P(A_2)=\frac{7}{15}$.

Замечание

При решении более сложных задач нужны методы подсчета чисел n и m без перечисления возможных исходов. Подобные методы изучаются в *комбинаторике*.

Широко применяется ***правило произведения*** (основной принцип комбинаторики). Пусть выбираются два элемента x_1 и x_2 (шары, числа, книги, ученики и т. д.). Если x_1 можно выбрать n_1 способами, а x_2 – n_2 способами, то всего существует $n_1 \cdot n_2$ возможностей образования пары (x_1, x_2). В общем случае, если выбираются k элементов $x_1, x_2, ..., x_k$, тогда можно образовать всего $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ комбинаций вида $(x_1, x_2, ..., x_k)$ (где n_i – число способов выбора элемента x_i, $i=\overline{1, k}$).

Задания с решением

1 Берется наудачу пятизначное натуральное число. Найдем вероятность того, что оно не содержит цифру 9 (событие A).

Решение:

Возможные исходы – все натуральные пятизначные числа. Их первая цифра должна быть отличной от нуля. Остальные четыре цифры – любые из десяти цифр: 0, 1, 2, …, 9. Следовательно, каждую можно выбрать десятью способами. Согласно правилу произведения, число возможных исходов равно $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$, т. е. равно $9\cdot10^4$.

Благоприятствующими исходами являются пятизначные натуральные числа, не содержащие цифру 9. Первая цифра такого числа отлична от 0 и 9, а последующие четыре цифры отличны только от цифры 9. По правилу произведения, число благоприятствующих исходов равно $8\cdot9^4$.

Таким образом, согласно классическому определению, $P(A)=\frac{8\cdot9^4}{9\cdot10^4}=0{,}5832.$

2 Из урны, содержащей n шаров, пронумерованных числами $1, 2, ..., n$, выбирается k раз по одному шару с возвращением каждого выбранного шара обратно в урну (коротко скажем, что выбираются k шаров ***с возвращением***). Найдем вероятность того, что выбраны k разных шаров (событие A), $k \le n$.

Решение:

Возможные исходы – это все комбинации вида $(x_1, x_2, ..., x_k)$, составленные из номеров шаров, выбранных из урны с возвращением. Номер x_1, а также любой другой x_i, может быть любым из чисел $1, 2, ..., n$ и, таким образом, может быть выбран n способами. По правилу умножения, число всех возможных исходов равно n^k. Из них благоприятствующими событию A являются комбинации $(x_1, x_2, ..., x_k)$, составленные из попарно различных чисел. Количество этих комбинаций можно подсчитать следующим образом: представим себе, что выбираем k раз по одному шару без возвращения шара в урну после выбора (коротко – шары выбираются ***без возвращения***). Опять применим правило умножения и получим, что искомое число комбинаций есть $n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$.

Таким образом, $P(A)=\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k}=\frac{A_n^k}{n^k}.$

Замечание

Задача **2** допускает многочисленные интерпретации. К примеру, пусть в классе k учеников. Будем считать продолжительность года равной 365 дням, и что день рождения каждого ученика с одинаковой вероятностью приходится на любой из этих дней. Какова вероятность того, что все ученики класса родились в разные дни года (событие A)?

Представим себе урну, содержащую 365 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 365. Дни рождения учеников соответствуют номерам k шаров, извлеченных с возвращением из урны. Таким образом, ответ следует, очевидно, из результата, полученного в задаче **2**:

$$P(A)=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-(k-1))}{365^k}.$$

В принципе, для всякого случайного эксперимента можно найти такую схему, что каждое случайное событие аналогично определенному выбору шаров из некоторой урны. Например, подбрасывание симметричной монеты равносильно выбору одного шара из урны, содержащей два шара, помеченных буквами *о* и *р* (орел, решка). Подбрасывание игральной кости можно интерпретировать как выбор одного шара из урны с шестью шарами, помеченными цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

3 Жюри из 5 членов выбирается наудачу из группы, состоящей из 10 мужчин и 5 женщин. Найдем вероятность того, что жюри будет составлено из 3 мужчин и 2 женщин (событие A).

Решение:

Каждый возможный исход означает 5 лиц из 15. Следовательно, имеется столько возможных исходов, сколько подмножеств по 5 элементов можно составить из 15 элементов. Их число равно C_{15}^5. Из них событию A благоприятствуют те, которые состоят из 3 мужчин и 2 женщин. Для выбора 3 мужчин из 10 имеется C_{10}^3 возможностей, а для выбора 2 женщин из 5 – C_5^2 возможностей. По правилу произведения, для выбора жюри из 3 мужчин и 2 женщин имеется $C_{10}^3\cdot C_5^2$ возможностей. Таким образом,

$$P(A)=\frac{C_{10}^3\cdot C_5^2}{C_{15}^5}=\frac{400}{1001}\approx 0{,}40.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

4 К Новому году четырем детям Дед Мороз подготовил по подарку. Но он перепутал подарки и вручил их детям случайным образом. Найдем вероятность того, что каждый ребенок получит свой подарок.

Решение:

Пусть A, B, C, D – начальные буквы имен детей и a, b, c, d – подарки, подготовленные Дедом Морозом для A, B, C и D соответственно. Применим классическое определение вероятности: $P=\frac{m}{n}$.

Каждый возможный результат означает некоторый вариант вручения подарков и может быть описан некоторой перестановкой букв a, b, c, d. Например, перестановка $bacd$ означает, что A получит подарок, предназначенный для B, B получит подарок, предназначенный для A, а C и D получат свои подарки. Число всех возможных результатов равно числу перестановок букв a, b, c, d, т. е. 4!. Таким образом, $n=24$.

Очевидно, имеется один-единственный благоприятствующий результат, задаваемый перестановкой $abcd$: $m=1$. Итак, искомая вероятность равна

$$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}.$$

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Из множества $\{1, 2, \dots, 100\}$ выбирается наугад число. Являются ли несовместимыми события: {выбранное число делится на 10}, {выбранное число делится на 11}?

2. Саша пытается набрать по памяти номер телефона, но забыл две последние цифры. Однако он помнит, что одна из цифр – это 2, а вторая цифра – нечетная. Какова вероятность, что Саша правильно наберет номер телефона?

B

3. В урне белые и черные шары, всего 25 штук. Из урны наугад извлекают шар. Вероятность того, что шар белый, равна p, а вероятность того, что шар черный, равна $4p$. Найдите, сколько белых и сколько черных шаров изначально было в урне.

4. На десяти карточках записаны целые числа от 1 до 10. Случайным образом выбирают две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел на этих карточках равна 11?

5. Игральная кость бросается 4 раза. Найдите вероятность того, что при первом и последнем бросках выпадет четное число очков.

C

6. ***Работайте в парах!*** Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекают одновременно 3 шара. Найдите вероятность события:
а) A = {извлечены 3 белых шара}; б) B = {извлечены 3 шара одинакового цвета};
в) C = {извлечены 2 белых шара и 1 черный шар}; г) D = {извлечены шары разного цвета}.

7. Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются по одному все числа. Найдите вероятность события:
а) A = {числа выбраны в порядке возрастания: 1, 2, 3, 4}; б) B = {первым выбрано число 1};
в) C = {первым выбрано число 1, вторым – число 2}.

8. Случайным образом задумывается целое число из интервала $[-3, 6]$. Какова вероятность того, что задуманное число будет решением неравенства $|3x-2|\geq 6$ на множестве $\mathbb{Z}$?

Реальный профиль

A_1

1. Из урны, содержащей 3 белых и 1 черный шар, в случайном порядке без возвращения последовательно извлекаются 3 шара. Рассматриваются события: A_i = {при i-ом извлечении получен белый шар},
B_i = {при i-ом извлечении получен черный шар}, $i=\overline{1,3}$.
Какие из следующих пар составлены из несовместимых событий: A_1 и A_2; B_1 и B_2; B_2 и B_3; A_1 и B_1; A_1 и B_2?

2. ***Работайте в парах!*** Из множества $\{1, 2, \dots, 20\}$ случайно выбирается число k. Найдите вероятность события: а) $A=\{k>10\}$; б) $B=\{5<k\leq 13\}$; в) $C=\{k^2>20\}$.

B_1

3. Найдите вероятность события: количество воскресений в декабре наугад взятого года равна 5.

4. В лотерее 96 билетов, из которых 8 выигрышных. Участник лотереи купил 12 билетов. Найдите вероятность события: а) A = {2 купленных билета оказались выигрышными};
б) B = {не менее 3 купленных билетов оказались выигрышными}.

5. Каждая из букв слова *АНАНАС* написана на одной из шести одинаковых карточек. Карточки раскладываются наугад в ряд. Какова вероятность получить слово *АНАНАС*?

C_1

6. Из колоды, насчитывающей 36 карт, наудачу выбрана карта. Чему равна вероятность события:
а) A_1 = {выбранная карта – туз}; б) A_2 = {выбрана дама пик или выбрана карта треф};
в) A_3 = {выбрана карта пик или выбран король}.
(Напомним, колода содержит 4 типа игральных карт (черви, пики, бубны, трефы), причем все типы представлены одинаковым числом карт.)

7. ***Исследуйте!*** Какова вероятность того, что последняя цифра квадрата ненулевого целого числа равна 1? Сформулируйте подобную задачу.

§ 2 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. Пространство элементарных событий эксперимента

В данном параграфе *случайное событие* и *вероятность* как математические понятия будут уточнены, то есть «формализованы». Вместе с тем будут рассматриваться и эксперименты с конечным числом исходов, не обязательно равновозможных. С этой целью во множестве случайных событий, связанных с некоторым экспериментом, будут выделены «элементарные» события, из которых могут быть составлены все остальные случайные события.

Определение

Пространством элементарных событий эксперимента называется любое множество $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ возможных исходов эксперимента, удовлетворяющих условиям:

1) в результате эксперимента наступает один и только один из исходов $e_1, e_2, ..., e_n$;
2) по исходу e_i эксперимента для любого результата можно установить, появился он или нет.

Примеры

1 Подбрасывается монета. В качестве элементарных событий можно выбрать события o (выпал орел) и p (выпала решка). Таким образом, $E = \{o,\ p\}$.

2 Подбрасываются две монеты. Для этого эксперимента можно выбрать следующее пространство элементарных событий: $E = \{oo,\ op,\ po,\ pp\}$, где, к примеру, po означает, что первая монета падает решкой вверх, а вторая – орлом.

3 Дважды подбрасывается игральная кость. В качестве элементарных событий можно рассматривать упорядоченные пары чисел ij, где $i, j = \overline{1, 6}$. Следовательно, E будет множество:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Для этого же эксперимента можно построить другое пространство элементарных событий. Например, $E' = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$, где $e_i = \{$в сумме выпало $i+1$ очко$\}$, $i = \overline{1, 11}$. Какое пространство E элементарных событий выбрать, зависит от решаемой задачи.

2.2. Случайные события

Эксперименту с подбрасыванием игральной кости соответствуют не только 6 элементарных событий $e_i = \{$выпадают i очков$\}$, $i = \overline{1, 6}$, но и другие события (неэлементарные). Например:

A = {выпадает четное число очков} или

B = {выпадают не менее двух и не более пяти очков}.

Как A, так и B происходят при одних элементарных событиях и не происходят при других. Следовательно, каждому из них соответствует некоторое подмножество пространства элементарных событий $E = \{e_1, e_2, ..., e_6\}$. Например, для A это подмножество $\{e_2, e_4, e_6\}$, а для B это подмножество $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Определение

Случайным событием называется любое подмножество $A \subseteq E$ пространства элементарных событий E эксперимента.

В соответствии с определением, E и $\varnothing$ также являются случайными событиями. Для них удобно сохранить соответствующие названия ***достоверного события*** и ***невозможного события***.

Говоря об элементарных событиях, из которых состоит событие A, скажем, что они ***благоприятствуют событию*** A.

Заметим: если в результате эксперимента произошло некоторое элементарное событие из A, мы скажем, что ***произошло*** или ***наступило*** случайное событие A.

Пример

Рассмотрим снова эксперимент с подбрасыванием двух монет.

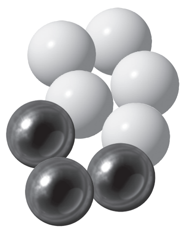
Мы установили, что $E = \{oo, op, po, pp\}$. Множества $A = \{oo, op, po\}$, $B = \{oo, pp\}$ и $C = \{op, po\}$, будучи подмножествами E, являются случайными событиями. A состоит в выпадении по крайней мере одного орла, B – в выпадении одинаковых сторон, C – в выпадении разных сторон монеты.

Замечание

Случайное событие может быть задано не только в виде подмножества пространства элементарных событий, но и словесным описанием.

Задание с решением

Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наугад извлекается один шар. Построим пространство элементарных событий E эксперимента и опишем в виде подмножеств множества E события: A = {извлечен белый шар}, B = {извлечен черный шар}.



Решение:

Очевидно, существуют 8 возможных исходов, каждый из которых состоит в извлечении из урны одного из 8 имеющихся там шаров. Для простоты пронумеруем шары, считая, что номера 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют белым, а 6, 7, 8 – черным шарам.

Тогда $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, где e_i означает выбор шара с номером i.

Очевидно, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ и $B = \{e_6, e_7, e_8\}$.

2.3. Операции над случайными событиями

Определения

- **Объединением** событий A и B называется событие, обозначаемое $A \cup B$, которое состоит в осуществлении *хотя бы одного* из данных событий.
- **Пересечением** событий A и B называется событие, обозначаемое $A \cap B$, которое состоит в осуществлении *обоих* данных событий.

Аналогичным образом эти операции определяются для любого конечного числа событий. Например, $A \cup B \cup C$ состоит в осуществлении хотя бы одного из событий A, B, C.

Определения

- События A и B называются **несовместимыми** (или **несовместными**), если $A \cap B = \varnothing$.
- **Событием, противоположным** событию A, называется событие, обозначаемое $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда A не происходит.
- **Разностью событий A и B** называется событие, обозначаемое $A \setminus B$, которое состоит в появлении A и не появлении B.
- Говорят, что **событие A влечет событие B** (обозначают $A \subseteq B$), если всякий раз, когда происходит A, происходит и B.

Задания с решением

1 Из множества чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} случайно одновременно выбирают два числа. Рассматриваются следующие случайные события:

A = {выбрано одно четное число},
B = {выбраны два четных числа},
C = {выбрано хотя бы одно четное число},
D = {выбраны числа одинаковой четности}.

а) Запишите словами, в чем состоят события: $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $\overline{A}$, $\overline{C}$.

б) Как связаны между собой события B и D?

Решение:

а) $A\bigcup B=${выбрано хотя бы одно четное число}, следовательно, $A\bigcup B=C$;

$A\bigcap B$ – невозможное событие, следовательно, $A\bigcap B=\varnothing$;

$\overline{A}=${выбранные числа оба четные либо оба нечетные}, следовательно, $\overline{A}=D$;

$\overline{C}=${не выбрано ни одного четного числа}.

б) $B\subseteq D$.

2 Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, наудачу последовательно без возвращения извлекается по одному шару до первого появления белого шара. Рассматриваются события $A_i=${при i-ом извлечении получен белый шар}, $i\geq 1$. Через эти события выразим с помощью операций следующие события:

а) B = {придется произвести два извлечения};

б) C = {придется произвести не более двух извлечений};

в) D = {придется произвести не более трех извлечений}.

Решение:

С учетом определений операций над событиями получим:

а) $B=\overline{A_1}\bigcap A_2$; б) $C=A_1\bigcup\overline{A_1}\bigcap A_2$; в) $D=A_1\bigcup\overline{A_1}\bigcap A_2\bigcup\overline{A_1}\bigcap\overline{A_2}\bigcap A_3$.

2.4. Формулы для вычисления некоторых вероятностей

1. Если A и B – несовместимые события, то $\boxed{P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)}$.

Доказательство:

Пусть n – число всех равновозможных исходов рассматриваемого эксперимента. Предположим, что из них событию A благоприятствуют m_A, а событию B – m_B исходов. Значит, $P(A)=\dfrac{m_A}{n}$, $P(B)=\dfrac{m_B}{n}$. Так как A и B несовместимы, то не существует ни одного исхода, благоприятствующего одновременно обоим событиям A и B. Следовательно, событию $A\bigcup B$ благоприятствуют m_A+m_B исходов и таким образом:

$$P(A\bigcup B)=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=P(A)+P(B).$$

Доказанную формулу можно обобщить: если $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – несовместимые события, то $\boxed{P(A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)}$.

2. Если A и B – совместимые события, то $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

Доказательство:

Воспользуемся введенными ранее обозначениями n, m_A, m_B. Так как события A и B – совместимые, то существует некоторое число исходов $s\neq 0$, благоприятствующих одновременно обоим событиям. Вследствие этого объединению $A\cup B$ благоприятствуют m_A+m_B-s, а не m_A+m_B исходов, так как в таком случае упомянутые s исходов учитывались бы дважды (один раз для A и один раз для B).

Далее имеем $P(A)=\frac{m_A}{n}$, $P(B)=\frac{m_B}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{s}{n}$.

Следовательно, $P(A\cup B)=\frac{m_A+m_B-s}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{s}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

3. $\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$.

Доказательство:

Заметим, что $A\cup\overline{A}=E$ и $A\cap\overline{A}=\varnothing$. Следовательно, $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$. Значит, $P(A)=1-P(\overline{A})$.

4. Если $A\subseteq B$, то $\boxed{P(A)\leq P(B)}$.

5. Если $A\subseteq B$, то $\boxed{P(B\setminus A)=P(B)-P(A)}$.

Упражнение. Докажите формулы **4**, **5**.

Задания с решением

1 На референдум были вынесены два вопроса, каждый с двумя вариантами ответа: «да» и «нет». На первый вопрос 65% участников референдума ответили «да», на второй вопрос ответили «да» 51% участников, и 45% участников ответили «да» на оба вопроса. Какова вероятность того, что выбранный наудачу участник референдума ответил «да» по крайней мере на один из вопросов (событие A)?

Решение:

Рассмотрим случайные события:

$A_1=\{$выбранный участник референдума ответил «да» на первый вопрос$\}$;

$A_2=\{$выбранный участник референдума ответил «да» на второй вопрос$\}$.

Очевидно, $A=A_1\cup A_2$. Задача сводится к нахождению вероятности $P(A_1\cup A_2)$.

Применим формулу $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$.

Из условий задачи следует, что $P(A_1)=0{,}65$, $P(A_2)=0{,}51$, $P(A_1\cap A_2)=0{,}45$.

Итак, $P(A)=0{,}65+0{,}51-0{,}45=0{,}71$.

$P(A)=1-P(\overline{A})$

2 В столовой гимназии 20 столов. В течение недели ученик обедает здесь 5 раз. Чему равна вероятность того, что по крайней мере дважды он сядет за один и тот же стол (событие A)?

Решение:

В данном случае проще найти вероятность события, противоположного A: $\overline{A}=\{$ученик 5 дней обедает за пятью разными столами$\}$. Чтобы вычислить $P(\overline{A})$, представим себе урну, содержащую 20 шаров, из которой извлекается последовательно по одному 5 шаров. Число исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$, можно получить по схеме выбора без возвращения, а число всех возможных исходов – если 5 шаров извлекать с возвращением из урны.

Таким образом, $P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{20^5}=0{,}5814$, а значит, $P(A)=0{,}4186$.

3 Рассмотрим случайные события A, B, и пусть $P(A)=0{,}5$, $P(B)=0{,}4$, $P(A\cap B)=0{,}2$. Найдем вероятность события:

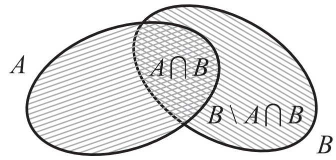
а) $A\cup B$; б) $\overline{A}$; в) $\overline{B}$; г) $\overline{A}\cap B$.

Решение:

а) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}5+0{,}4-0{,}2=0{,}7.$

б) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}5=0{,}5.$

в) $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}4=0{,}6.$



г) Чтобы найти $P(\overline{A}\cap B)$, заметим, что

$\overline{A}\cap B=B\setminus A\cap B$ (что проверяется просто).

Следовательно, $P(\overline{A}\cap B)=P(B\setminus A\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0{,}4-0{,}2=0{,}2.$

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. ***Работайте в парах!*** Для каждого эксперимента найдите пространство элементарных событий:
а) монету бросают 5 раз;
б) бросают монету, затем бросают игральную кость;
в) выбирают наугад одно из целых решений неравенства $|x-3|\le 7$.

2. Бросают монету и игральную кость. Какова вероятность того, что выпадет орел и четное количество очков?

3. Какая из сумм, 7 очков или 8 очков, более вероятна при подбрасывании двух игральных костей?

B

4. У Пети в левом кармане две монеты по 5 леев и три монеты по 10 леев. Он наугад берет три монеты и перекладывает их в правый карман. Рассмотрим случайные события: A = {монеты по 5 леев находятся теперь в левом кармане}; B = {монеты по 5 леев находятся теперь в правом кармане}.
Найдите вероятность $P(A\cup B)$.

5. 22% учеников XII класса не справились с тестом по математике, 18% учеников не справились с тестом по физике и 9% учеников не справились ни с одним из этих тестов. Какова вероятность того, что ученик, выбранный наудачу из данного класса, не справился по крайней мере с одним из этих тестов?

6. Из множества {1, 2, 3, ..., 100} случайным образом выбирают одно число. Какова вероятность того, что остаток от деления этого числа на 8 равен 2?

C

7. Монета подбрасывается три раза. Рассматриваются события A_i = {при i-ом бросании выпал орел}, $i=\overline{1,3}$.
При помощи соответствующих операций выразите через A_1, A_2 и A_3 событие:
а) B = {орел выпал 2 раза};
б) C = {орел выпал не менее 2 раз};
в) D = {орел выпал не более 2 раз}.

8. Одновременно подбрасывают две игральные кости. Рассмотрим случайные события: A = {на первой кости выпадает четное количество очков}; B = {на второй кости выпадает не более 4 очков}. Найдите вероятности: $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(A\cap\overline{B})$.

Реальный профиль

A₁

1. Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбирается наугад число, и после его возвращения обратно снова выбирается число. Для данного эксперимента укажите некоторое пространство элементарных событий E и опишите в виде подмножества множества E случайное событие: а) A = {наименьшее выбранное число равно 3};
б) B = {наибольшее выбранное число равно 3};
в) C = {выбрано хотя бы одно четное число}.

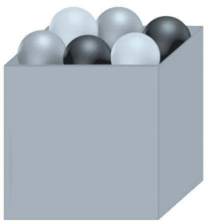
2. ***Работайте в парах!*** Рассматриваются случайные события $A, B \subset E$, для которых $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}3$, $P(A \cap B)=0{,}2$. Чему равна вероятность случайного события:
а) $A \cup B$; б) $\overline{A}$; в) $\overline{B}$; г) $\overline{A} \cap B$; д) $A \cup \overline{B}$; е) $\overline{A} \cup \overline{B}$?

B₁

3. Вероятность того, что в понедельник отсутствуют на уроках меньше 6 учеников, равна 0,95; вероятность того, что отсутствуют меньше 3 учеников, равна 0,62. Какова вероятность того, что в понедельник отсутствуют 3–5 учеников?

4. Из урны, содержащей 5 белых шаров, 2 черных, 4 красных и один зеленый шар, наудачу одновременно извлекают 4 шара. Найдите вероятность того, что будут извлечены шары по крайней мере двух цветов.

5. БАК В урне x черных шаров $(x \geq 2)$, 5 белых и 2 фиолетовых шара. Все шары одного размера. Наугад, одновременно из урны извлекают 2 шара. Пусть $P(x)$ вероятность того, что оба извлеченных шара одинакового цвета.
Докажите, что $P(x)=\dfrac{x^2-x+22}{(x+7)\cdot(x+6)}$.



6. БАК Для участия в опросе из 25 учащихся класса наугад выбирают двух. Вероятность того, что в опросе будут участвовать 2 девушки, равна $\dfrac{11}{50}$. Сколько девушек в классе?

7. БАК Из цифр 2, 3, 4, 5, 6 составляют пятизначное число, в котором цифры не повторяются.
Какова вероятность того, что последние две цифры составленного числа нечетные?

C₁

8. ***Работайте в парах!*** На множестве $\mathbb{Z}$ решаются неравенства $|x-3| \leq 4$, $|5-2x| \leq 1$, $|3x+2| \geq 5$. Найдите вероятность того, что решения одного наугад взятого неравенства являются решениями хотя бы одного из двух других неравенств.

9. ***Исследуйте!*** София и Мария родились в первую неделю одного и того же года. Найдите вероятность того, что София старше Марии по крайней мере на один день. Возможны два способа решения этой задачи. Какие? Обобщите задачу.

10. ***Исследуйте!*** Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока не выпадет грань с шестью очками.
Найдите вероятность того, что:
а) кость подбросили не более 3 раз;
б) рано или поздно шесть очков выпадут.

§ 3 НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

В повседневной жизни мы часто говорим о независимых событиях. При этом нередко доходят до противоречий: одни считают события независимыми, другие те же события – зависимыми. В теории вероятностей этой ситуации избегают, принимая следующее определение независимости случайных событий.

Определение Случайные события A и B называются **независимыми**, если
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Задание с решением Бросается игральная кость и рассматриваются случайные события:
A = {выпало не более трех очков}, B = {выпало 3 или 6 очков}.
Являются ли независимыми эти события?

Решение:

Сначала вычислим $P(A)$, $P(B)$ и $P(A \cap B)$:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

Так как $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, то в соответствии с определением события A и B являются независимыми.

Замечание Естественно ожидать, что события A и B, относящиеся к разным экспериментам, независимы. Как следствие, вероятность их совместного осуществления равна произведению $P(A) \cdot P(B)$.

Задание с решением В одной урне 3 белых и 2 черных шара, а в другой – 4 белых и 3 черных шара. Из первой урны извлекают наугад два шара (одновременно), а из второй – один шар. Найдем вероятность того, что все 3 шара будут белыми.

Решение:

Введем случайные события:
A = {шары, извлеченные из первой урны, – белые},
B = {шар, извлеченный из второй урны, – белый}.

Событие, состоящее в том, что все 3 шара будут белыми, задается пересечением $A \cap B$. Далее, очевидно $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{4}{7}$.

События A и B независимы, так как они относятся к разным экспериментам.

Таким образом, вероятность того, что все 3 извлеченных шара окажутся белыми, равна $\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}$.

Определение События A, B, C, ... называются **независимыми (в совокупности)**, если вероятность пересечения любых из них равна произведению вероятностей пересеченных событий.

Например, события A, B и C независимы, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

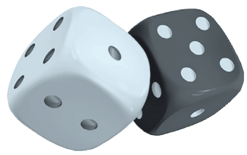
A

1. Дважды подбрасывается монета. Покажите, что события:
A = {при первом подбрасывании выпадает орел},
B = {при втором подбрасывании выпадает решка}
являются независимыми.

2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели по одному разу. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,8, второго – 0,75. Найдите вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

B

3. ***Работайте в группах!*** Подбрасывают две игральные кости. Рассматриваются события:
A = {на первой кости выпадает не более пяти очков};
B = {на второй кости выпадает не более двух очков};
C = {сумма выпавших очков будет больше четырех}.
Какие из пар событий A и B, A и C, B и C являются независимыми?



C

4. Подбрасывают игральную кость. Рассмотрим события: A = {выпадает не менее 4 очков}, B = {выпадает 3 или 4 очка}. Покажите, что события A и B независимы.

5. Из колоды с 36 картами наугад извлекают одну карту. Событие A состоит в том, что вытянули «пику», а событие B – вытянули «даму». Являются ли эти события независимыми?

Реальный профиль

A_1

1. Подбрасывают монету и игральную кость. Покажите, что случайные события A = {на монете выпадает орел} и B = {на игральной кости выпадает четное количество очков} независимы.

2. Две кости подбрасываются до тех пор, пока в сумме не выпадет 5 очков. Найдите вероятность того, что:
а) кости брошены два раза;
б) кости брошены не более двух раз.

B_1

3. Отдел технического контроля проверяет качество изделий. Вероятность, что наугад выбранное изделие будет дефектным, равна 0,1. Найдите вероятность того, что:
а) из трех выбранных изделий одно будет дефектным;
б) из трех выбранных изделий имеется не более одного дефектного.

4. На отрезке $[-5, 27]$ выбирают наугад целое число. Являются ли независимыми случайные события:
A = {выбранное число является целым решением неравенства $|x-3| \le 4$}; B = {выбранное число является целым решением неравенства $|x+3| \le 5$}?

C_1

5. В коммерческом центре установили два одинаковых кофейных аппарата. Вероятность того, что в конце дня закончится кофе в одном из аппаратов, равна 0,3; вероятность того, что в конце дня закончится кофе в обоих аппаратах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что в конце дня в обоих аппаратах кофе не закончится.

6. ***Исследуйте!*** Два игрока, A и B, поочередно бросают монету. Победителем считается тот, у кого раньше всех выпадет орел. Первым подбрасывает монету игрок A, вторым – игрок B, третьим – игрок A и т. д. до тех пор, пока не выпадет орел.
а) Найдите вероятность того, что игрок A выиграет до шестого подбрасывания монеты.
б) Определите для каждого игрока вероятность оказаться победителем в игре неограниченной продолжительности (то есть до тех пор, пока не выиграет один из игроков).

§ 4 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. Понятие дискретной случайной величины

Встречаются ситуации, когда некоторая величина принимает различные значения под влиянием случайных факторов. Например, невозможно знать заранее, сколько вызовов примет телефонная станция за определенный промежуток времени или сколько дорожно-транспортных происшествий произойдет завтра в Кишинэу. Также мы не сможем предсказать число мальчиков среди 100 новорожденных в некотором роддоме.

Величины, подобные количеству телефонных вызовов, дорожных происшествий и т. п., зависят от случайных обстоятельств или, по терминологии теории вероятностей, от результатов некоторых экспериментов.

Определение

Случайной (дискретной) величиной называется любая числовая функция, заданная на пространстве элементарных событий некоторого эксперимента.

Будем рассматривать только случайные величины с *конечным числом* возможных значений.

Определение

Совокупность всех возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ случайной величины ξ и вероятностей $p_1 = P(\xi = x_1),\ p_2 = P(\xi = x_2),\ ...,\ p_n = P(\xi = x_n)$ называется **распределением случайной величины** ξ.

Распределение случайной величины ξ задается в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения ξ, а вторая – вероятности, соответствующие этим значениям.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Легко доказать, что $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Задания с решением

1 Из урны, содержащей 4 белых и 2 черных шара, наугад одновременно извлекают 2 шара. Найдем распределение случайной величины ξ, равной числу извлеченных белых шаров.

Решение:

ξ может принимать значения 0, 1, 2. Вычислим вероятности, соответствующие этим значениям. При выборе двух шаров элементарными событиями являются неупорядоченные пары шаров, число которых равно $C_6^2 = 15$.

$$P(\xi = 0) = P\,(\text{извлечены два черных шара}) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15};$$

$$P(\xi = 1) = P\,(\text{извлечены один белый и один черный шар}) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15};$$

$$P(\xi = 2) = P\,(\text{извлечены два белых шара}) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}.$$

Таким образом, получили распределение ξ:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$

2 Из множества {1, 2, 3} дважды наугад берется по одному числу с возвращением первого числа обратно в заданное множество. Пусть ξ – наибольшее выбранное число. Найдем распределение ξ.

Решение:

Элементарными событиями являются упорядоченные пары: E = {11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33}.

Следовательно: $P(\xi=1)=\frac{1}{9}$, $P(\xi=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $P(\xi=3)=\frac{5}{9}$.

Итак, ξ имеет следующее распределение:

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

Замечание

В некоторых случаях распределение можно найти без перечисления элементарных событий E.

4.2. Математическое ожидание случайной величины

Определение

Математическим ожиданием случайной величины ξ с распределением

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

называется число $M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$.

Среднее значение случайной величины часто используется в повседневной жизни. Например, средняя температура, средняя зарплата, средний балл и т. д.

Задания с решением

1 Пусть ξ – случайная величина с распределением, задаваемым таблицей:

ξ	–1	1	3	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Вычислим математическое ожидание случайных величин $\eta=2\xi$.

Решение:

$M(\xi)=-1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{2}=3.$

Чтобы найти $M(\eta)$, сначала найдем распределение η.

η	–2	2	6	10
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Итак, $M(\eta)=-2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{2}=6.$

2 Стрелок, имея в запасе 3 патрона, ведет стрельбу по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Вероятность попадания при отдельном выстреле равна 0,8. Найдем распределение случайной величины ξ, равной числу израсходованных патронов, и вычислим математическое ожидание $M(\xi)$.

Решение:

Если стрелок попадает в цель при первом выстреле (что произойдет с вероятностью 0,8), то $\xi=1$ и, значит, $P(\xi=1)=0{,}8$. Если же стрелок при первом выстреле промахнется (событие A), но попадет при втором выстреле (событие B), то израсходовано два патрона и $\xi=2$. Далее, $P(\xi=2)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}16$ (A и B – независимые события). Если стрелок промахнется и в первый, и во второй раз, то производится третий выстрел, и в этом случае $\xi=3$.

Вероятность $P(\xi=3)$ можно найти из условия $P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=1$: $P(\xi=3)=1-0{,}8-0{,}16=0{,}04$.

Таким образом, найдено распределение случайной величины ξ.

ξ	1	2	3
P	0,8	0,16	0,04

Вычислим математическое ожидание:

$M(\xi)=1\cdot 0{,}8+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}04=1{,}24.$

Упражнения и задачи

Реальный профиль

A₁

1. Брошены две игральные кости. Пусть ξ – сумма выпавших очков. Найдите распределение случайной величины ξ и ее математическое ожидание $M(\xi)$.

2. В урне 5 белых и 3 черных шара. Одновременно наугад извлекаются 3 шара. Пусть ξ – число извлеченных белых шаров. Найдите распределение случайной величины ξ и ее математическое ожидание $M(\xi)$.

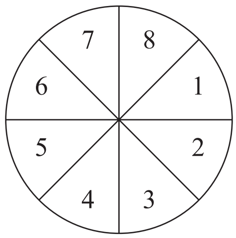
B₁

3. В ящике содержатся 5 изделий, одно из которых с дефектом. Из ящика извлекается по одному изделию без возвращения, пока не будет извлечено дефектное изделие. Найдите распределение случайной величины ξ, равной числу извлеченных изделий, и вычислите математическое ожидание $M(\xi)$.

4. ***Работайте в парах!***
На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите распределение случайной величины ξ, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Вычислите $M(\xi)$.

C₁

5. ***Исследуйте!*** Круглая мишень (разделенная на 8 секторов равной площади) установлена с возможностью вращения вокруг своей оси. Если скорость достаточно высока, то стрелок не может различить числа, написанные на секторах, и вынужден стрелять наугад. Если он попадает в сектор k, то выигрывает k леев. Выгодно ли участвовать в этой игре, если за каждый выстрел нужно платить 5 леев?



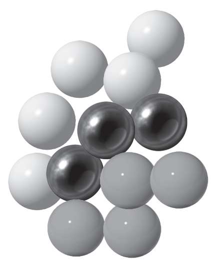
6. ***Исследуйте!*** Кто-то находится на оси Ox в начале координат и несколько раз подбрасывает монету. Когда выпадает орел, он делает шаг вправо, а когда выпадает решка, он делает шаг влево. Пусть ξ – абсцисса позиции этого человека после трех подбрасываний монеты. Определите распределение случайной величины ξ и ее математическое ожидание (длина шага равна длине единичного отрезка). Обобщите задачу для n подбрасываний монеты.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. ***Работайте в группах!*** В урне 5 белых, 3 черных и 4 красных шара. Одновременно наугад извлекаются 4 шара. Рассматриваются события:
$A_1 = \{$извлечены шары двух цветов$\}$,
$A_2 = \{$извлечены по крайней мере 2 белых шара$\}$,
$A_3 = \{$извлечены 3 красных шара$\}$,
$A_4 = \{$извлечены 1 черный и по крайней мере 1 красный шар$\}$.
а) Укажите пары несовместимых и пары совместимых событий.
б) Что представляют собой события $A_2 \cap A_3$, $A_3 \cap A_4$?



2. Дважды бросается игральная кость. Найдите вероятность события:
а) $A = \{$число очков, выпавших в первый раз, больше числа очков, выпавших во второй раз$\}$;
б) $B = \{$сумма очков, выпавших в первый раз и во второй раз, меньше 5$\}$.

B

3. Предположим, что вы забыли последние две цифры телефонного номера и набираете их наудачу, помня лишь, что эти цифры нечетные и различные.
Найдите вероятность того, что номер будет набран верно.

4. Дважды подбрасывается монета.

Рассматриваются события:
A = {при первом броске выпал орел},
B = {выпало 2 решки}.
Являются ли независимыми эти события?

5. Из букв *a*, *b*, *c*, *d*, *e* компьютер случайно составляет пятизначные коды таким образом, что каждая буква содержится в них по одному разу. Какова вероятность того, что первая буква в коде будет гласной?

6. Вероятность того, что в один из июльских дней пойдет дождь, равна $\frac{2}{5}$. Определите вероятность того, что два из трех первых дней июля будет идти дождь.

C

7. ***Исследуйте!*** Известно, что 5 из 40 пассажиров самолета причастны к похищению крупной денежной суммы. К трапу самолета подошел инспектор уголовного розыска и заявил, что для обнаружения хотя бы одного преступника ему достаточно произвести обыск у шести наугад выбранных пассажиров. Что руководило инспектором: трезвый расчет или риск?

8. Из множества чисел $\{1, 2, 3, ..., 350\}$ выбирается наудачу одно. Найдите вероятность, что это число делится хотя бы на одно из чисел 5 и 13.

9. В ящике 12 деталей, 4 из них бракованные. В другом ящике 15 деталей, из них 3 с браком. Из каждого ящика извлекается одна деталь. Найдите вероятность случайных событий:
A = {обе детали не бракованные},
B = {обе детали бракованные}.

10. ***Работайте в группах!*** Проект *Вероятность в повседневной жизни*.

Реальный профиль

A_1

1. ***Работайте в парах!*** A, B и C – случайные события. Дано:
$P(A) = 0{,}5;\ P(B) = 0{,}1;\ P(C) = 0{,}7;$
$P(B \cup C) = 0{,}8;\ P(A \cap B) = 0{,}3.$
а) Являются ли несовместимыми события A и B? Независимы ли они?
б) Являются ли несовместимыми события B и C? Независимы ли они?
в) Являются ли несовместимыми события A и C?

2. На пятиместную скамейку случайным образом садятся 5 человек. Какова вероятность того, что 3 определенных человека окажутся рядом?

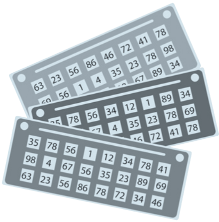
B_1

3. У женщины 8 подруг, и она хочет пригласить 5 из них на чай. Известно, что:
а) две ее подруги поссорились и категорически не соглашаются принимать участие в чаепитии;
б) две ее подруги точно не пришли бы одна без другой.
Женщина, забыв об отношениях между своими подругами, приглашает на мероприятие пятерых из них. Найдите вероятности случайных событий: A = {в приглашении выполнено условие а)}; B = {в приглашении выполнено условие б)}.

4. Из урны, содержащей 2 белых и 1 черный шар, извлекают по одному шару, без возвращения, до тех пор пока не будут извлечены два шара обоих цветов. Найдите математическое ожидание $M(\xi)$, где ξ – число выполненных извлечений.

5. 9 пассажиров садятся в поезд, состоящий из 3 вагонов, каждый выбирает вагон наугад. Найдите вероятность случайного события:
а) A = {в первый вагон садятся 3 пассажира};
б) B = {в каждый из вагонов садятся по 3 пассажира};
в) C = {в первый вагон садятся 4 пассажира, во второй – 3 пассажира и в третий – 2 пассажира}.

6. БАК В лотерее разыгрываются 100 билетов, среди которых 10 билетов с призом по 200 леев каждый, 20 билетов с выигрышем по 100 леев каждый, остальные билеты без приза. Определите вероятность выигрыша общей суммы 200 леев при покупке 2 билетов.

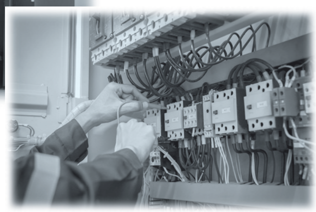


7. БАК В центре информационных технологий работают 4 программиста, 5 инженеров и 3 тестировщика. В июле 8 сотрудников центра, выбранных случайным образом, уйдут в отпуск. Определите вероятность того, что в центре хотя бы один специалист каждого профиля останется в июле на работе.

8. БАК Одновременно бросают 4 игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 22?

C_1

9. Мастер обслуживает 2 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены станки не потребуют внимания мастера, равна 0,95 для первого станка и 0,90 – для второго станка. Найдите вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.



10. Охотник стреляет по движущейся в его направлении мишени. Вероятность поражения цели с первого выстрела равна 0,4 и увеличивается на 0,1 с каждым последующим выстрелом. Определите вероятность попадания в цель два раза из трех выстрелов.

11. ***Исследуйте!*** Предлагается следующая игра. Вы ставите 6 леев и бросаете игральную кость. Если выпадает 6, 5 или 4 очка, то вы получаете соответственно 18 леев, 6 леев или 1 лей. В других случаях вы ничего не получаете.
а) Пусть ξ – случайная величина, равная выигрышу в одной партии (разность между полученной суммой и ставкой). Найдите распределение ξ и математическое ожидание $M(\xi)$.
б) В кармане игрока 10 леев. Какова вероятность того, что он сможет сыграть две партии?

12. ***Работайте в группах!*** Проект *Вероятность в профессиональной деятельности родителей.*

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

1. Из урны, содержащей 15 шаров с номерами $1, 2, ..., 15,$ вынимают наудачу шар.
   а) Постройте пространство элементарных событий E.
   Опишите в виде подмножества E событие: A = {номер вынутого шара кратен 4};
   B = {номер вынутого шара кратен 5}.
   б) Опишите, что означают события: $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$.

2. Молодой специалист экономист ищет работу. Он ходил на собеседования в банк и страховую компанию. Молодой человек оценивает вероятность успеха в банке как 0,5, а в страховой компании как 0,6. При этом он надеется с вероятностью 0,3 получить предложения о работе от обеих организаций. Определите вероятность того, что он получит хотя бы одно предложение.

3. Игральная кость брошена 2 раза. Пусть x_1 и x_2 – число очков, выпавших при первом и втором бросках соответственно.
   Докажите, что случайные события $A_1 =$ {число $x_1 + x_2$ является четным} и $A_2 =$ { число $x_1 + x_2$ кратно 3} являются независимыми, а события $A_3 =$ {число $x_1 + x_2$ является нечетным} и $A_4 =$ {число x_1 является кратным x_2} являются зависимыми.

4. Из 25 лотерейных билетов 5 – выигрышные. Куплено 6 билетов.
   Найдите вероятность события: A = {один и только один купленный билет выигрышный};
   B = {не более двух купленных билетов являются выигрышными}.

Реальный профиль

1. Из урны, содержащей 3 белых, 2 черных и 1 красный шар, одновременно извлекают 2 шара. Случайными событиями считаются: A = {среди извлеченных шаров один белый}, B = {среди извлеченных шаров есть и красный шар}.
   а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
   «$P(A) = \frac{2}{5}$.»

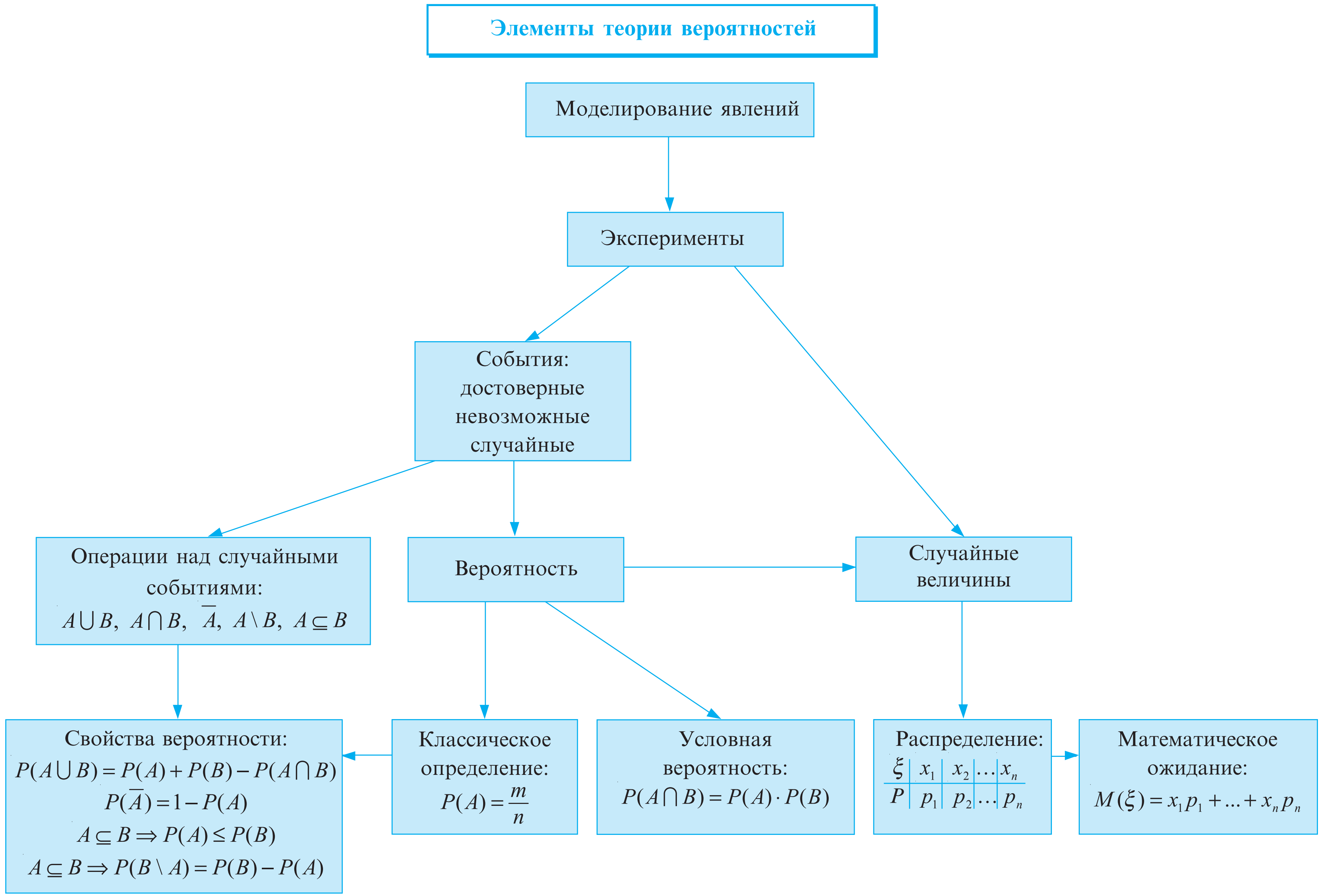
И	**Л**

   б) Заполните рамку: $P(B) = \boxed{}$.
   в) Покажите, что события A и B независимы.

2. Ученик должен вытянуть 3 вопроса из 20: 8 по алгебре, 7 по геометрии и 5 по тригонометрии. Он тянет вопросы последовательно по одному (без возвращения).
   Найдите вероятность события:
   $A_1 =$ {вытянуты 3 вопроса по алгебре};
   $A_2 =$ {вытянут один вопрос по алгебре};
   $A_3 =$ {вытянуты 3 вопроса в следующей последовательности: вопрос по алгебре, вопрос по геометрии, вопрос по тригонометрии}.

3. Из множества {1, 2, 3, 4, 5} одновременно извлекают наугад три числа, которые записываются в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < x_3$. Рассмотрим случайные события: $A = \{x_2 = 2\}$, $B = \{x_3 = 5\}$. Найдите вероятности:
   а) $P(A)$; б) $P(B)$; в) $P(A \cup B)$.

4. Из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} дважды извлекают по одному числу, причем после извлечения первое число возвращается обратно. Пусть ξ – случайная величина, равная количеству тех чисел из множества, которые ни разу не выбирались. Найдите:
   а) распределение случайной величины ξ;
   б) математическое ожидание случайной величины ξ.


Элементы теории вероятностей
Моделирование явлений
Эксперименты
События: достоверные невозможные случайные
Операции над случайными событиями: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $A \setminus B$, $A \subseteq B$
Вероятность
Случайные величины
Свойства вероятности:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
$A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
Классическое определение: $P(A) = \frac{m}{n}$
Условная вероятность: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Распределение:
ξ | x_1 | x_2 | … | x_n
P | p_1 | p_2 | … | p_n
Математическое ожидание: $M(\xi) = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n$

Модуль

6

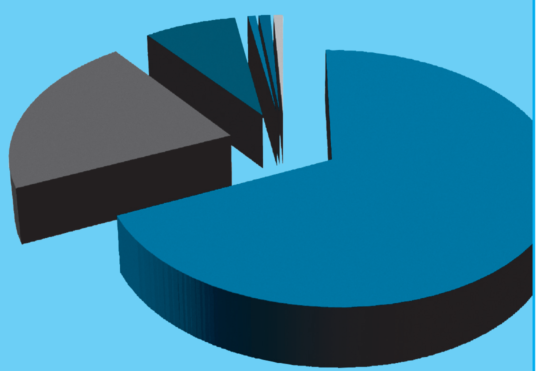
Элементы математической статистики и финансовой математики

Ученый человек всегда носит с собой свое богатство.

Пословица

Цели модуля

- представление результатов наблюдений при помощи рисунков и таблиц, построение и интерпретация статистических диаграмм;
- нахождение абсолютной, относительной, накопленной частот;
- определение средней арифметической, моды и медианы статистического ряда;
- извлечение информации, представленной в виде таблиц, диаграмм;
- применение элементов финансовой математики.



§ 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Статистика – это наука, занимающаяся *сбором*, *регистрацией*, *группировкой*, *анализом* и *интерпретацией результатов* наблюдений над некоторым явлением, а также *выдвижением некоторых предположений* относительно развития данного явления в будущем.

Статистическая совокупность – относительно однородная группа объектов или явлений, характеризующихся наличием некоторых общих черт и подвергающихся статистическому анализу.

Элементы статистической совокупности называются ***статистическими единицами***. Число статистических единиц называется ***объемом статистической совокупности***, а общая черта статистических единиц называется ***статистическим признаком***.

Примеры

1 Предположим, что нас интересуют результаты тестирования по математике учащихся XII класса. В этом случае статистическая совокупность – это множество учащихся класса. Ученики класса – статистические единицы, а число учеников – объем совокупности. Оценка по математике представляет собой статистический признак.

2 Пусть нас интересует численность жителей в населенных пунктах Республики Молдова. Тогда:

– статистическая совокупность – это множество всех населенных пунктов Республики Молдова (1 681 населенный пункт);
– статистические единицы – это населенные пункты;
– объем совокупности равен 1 681;
– статистический признак – это численность жителей в населенных пунктах.

Измеряемый признак (оценка, рост, масса тела и т. д.) называется ***количественным признаком*** (***числовым***).

Неизмеряемый признак (цвет глаз, профессия, пол и т. д.) называется ***качественным признаком***.

Количественный признак называется ***непрерывным***, если может принимать в определенных пределах любые числовые значения (рост, масса тела и т. д.).

Количественный признак называется ***дискретным***, если может принимать лишь изолированные значения, отличающиеся друг от друга на некоторую конечную величину (оценка, количество членов в семье и т. д.).

Статистические признаки называются также ***статистическими величинами***. Значения, принимаемые признаком у статистических единиц совокупности, называются ***вариантами***.

Первым этапом любого статистического исследования является ***сбор данных***, его еще называют ***статистическим наблюдением***. Обычно прибегают к выборочному наблюдению: из статистической совокупности случайным образом берут n статистических единиц и подвергают их изучению. Это подмножество статистической совокупности называют ***выборкой***.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке статистической совокупности, необходимо, чтобы выборка была ***репрезентативной*** (представительной), то есть она должна правильно отражать структуру статистической совокупности.

§ 2 УЧЕТ И ГРУППИРОВКА ДАННЫХ

С целью проверки успеваемости по математике каждому из 50 учеников предложили по 20 задач. Количество решенных учениками задач дано в порядке, в котором они сдали работы:

11, 14, 11, 12, 8, 17, 11, 14, 10, 12, 12, 10, 12, 8, 17, 11, 10,
11, 12, 10, 10, 11, 8, 11, 12, 11, 11, 17, 16, 10, 12, 8, 16, 12,
10, 11, 16, 10, 11, 12, 8, 10, 11, 12, 11, 11, 17, 11, 10, 12.

Эти числа составляют ***таблицу статистических данных***. В таком виде таблица представляет собой некоторую массу трудно обозримых результатов. Необходимо ***сгруппировать*** эти данные. Первичный способ группировки приводит к таблице 1.

Таблица 1

Число решенных задач	Число учеников
8	5
10	10
11	15
12	11
14	2
16	3
17	4

Анализируя данные таблицы 1, можем сделать некоторые выводы: большинство учеников решили 10–12 задач, что составляет 50–60% от числа предложенных задач; 4 ученика решили 17 задач, что составляет 85% от числа всех задач. Такая таблица позволяет сравнивать успеваемость подобных групп учеников.

Таблица 1 отражает ***группировку данных по вариантам***.

В результате группировки по вариантам получаем ряд пар значений, который называется ***статистическим рядом*** (для одного признака).

В общем виде статистический ряд представлен в таблице 2.

Таблица 2

Вариант признака x_i	Число единиц n_i
x_1	n_1
x_2	n_2
…	…
x_r	n_r
Всего	$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

Здесь предполагается, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$.

Элементы таблицы 2 означают следующее: x_i – это i-й вариант признака X; n_i – это количество статистических единиц, у которых зарегистрирован вариант x_i, он называется ***абсолютной частотой*** варианта x_i.

Таблицу 2 можно представить также в виде таблицы с двумя строками:

Вариант признака, x_i	x_1	x_2	…	x_r	Всего
Число единиц, n_i	n_1	n_2	…	n_r	$n=\sum_{i=1}^{r} n_i$

Если число вариантов количественного признака большое (особенно при непрерывном признаке), производится ***группировка данных по интервалам*** (***классам***).

Пример

Записав продолжительность работы 65 электронных ламп, получили результаты (в часах), приведенные в таблице 3:

Таблица 3

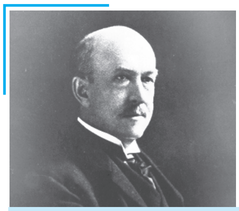
13,4	14,7	15,2	15,1	13,0	8,8	14,0	17,9	15,1	16,5	16,6
14,2	16,3	14,6	11,7	16,4	15,1	17,6	14,1	18,8	11,6	13,9
18,0	12,4	17,2	14,5	16,3	13,7	15,5	16,2	8,4	14,7	15,4
11,3	10,7	16,9	15,8	16,1	12,3	14,0	17,7	14,7	16,2	17,1
10,1	15,8	18,3	17,5	12,7	20,7	13,5	14,0	15,7	21,9	14,3
17,7	15,4	10,9	18,2	17,3	15,2	16,7	17,3	12,1	19,2	

Группируя эти данные по интервалам, получаем таблицу 4:

Таблица 4

Номер интервала	Границы интервала	Середина интервала	Частота n_i
1	8,4 – 10,4	9,4	3
2	10,4 – 12,4	11,4	7
3	12,4 – 14,4	13,4	13
4	14,4 – 16,4	15,4	21
5	16,4 – 18,4	17,4	17
6	18,4 – 20,4	19,4	2
7	20,4 – 22,4	21,4	2

При выборе интервалов точка отсчета определяется подходящим образом: берется 0, либо наименьший вариант, либо число несколько меньше наименьшего варианта. Условимся считать, что верхняя граница интервала (за исключением, быть может, последнего) не принадлежит этому интервалу. Так, в нашем примере интервал 8,4–10,4, который можно записать как $[8{,}4; 10{,}4)$, содержит варианты x_i такие, что $8{,}4 \le x_i < 10{,}4$.



Чарльз Х. Стерджес (1846–1926) – американский статистик

В данном примере все интервалы имеют одинаковую длину, что не обязательно. Первый и последний интервалы могут иметь длины, отличные от остальных интервалов, особенно в случае непрерывного признака. Для определения числа интервалов рекомендуется формула ***Стерджеса***:

$$r \approx 1 + 3{,}322 \lg n,$$

где n – объем выборки.

Длина интервала h вычисляется по формуле:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r},$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – соответственно максимальный и минимальный варианты выборки, а n – объем выборки.

Если длина интервала должна быть целым числом, то h округляется с избытком до целого.

В нашем примере $1 + 3{,}322\lg 65 \approx 7{,}02$, то есть $r = 7$;

$$x_{\max} = 21{,}9, \quad x_{\min} = 8{,}4, \quad \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} = \frac{21{,}9 - 8{,}4}{7} \approx 1{,}9, \text{ то есть } h = 2.$$

Замечание

Для вычисления r, кроме формулы Стерджеса, существуют и другие, более обоснованные формулы. Вообще выбор числа интервалов – неэлементарная задача. В дальнейшем будем придерживаться общего правила, согласно которому r выбирается между 5 и 20.

Число n_i вариантов, попавших в i-й интервал, называется ***абсолютной частотой интервала***, а $f_i = \frac{n_i}{n}$ – ***относительной частотой***. ***Накопленной абсолютной частотой*** i-го интервала называется величина $F_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, а ***накопленной относительной частотой*** i-го интервала – величина $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j$.

Аналогично определяются понятия ***абсолютная частота***, ***относительная частота*** и ***накопленные*** (***абсолютная*** и ***относительная***) ***частоты отдельного варианта*** x_i.

Замечание

Значение относительной частоты можно выразить в процентах.

Таблица статистического ряда может быть дополнена этими частотами. Дополнение таблицы 1 приводит к таблице 5.

Таблица 5

Число решенных задач x_i	Абсолютная частота n_i	Накопленная абсолютная частота F_i	Относительная частота f_i	Накопленная относительная частота
8	5	5	0,10	0,10
10	10	15	0,20	0,30
11	15	30	0,30	0,60
12	11	41	0,22	0,82
14	2	43	0,04	0,86
16	3	46	0,06	0,92
17	4	50	0,08	1,00

Проанализировав данные таблицы 5, сделаем вывод, что из 50 учеников 41 решил не более 12 задач каждый (из 20 предложенных). Заметим также, что накопленная относительная частота варианта $x_3 = 11$ равна 0,60. Это означает, что 60% учеников решили не более 11 задач каждый.

Отметим, что понятия случайной величины и вероятности являются теоретическими моделями понятий признака и соответственно относительной частоты.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. У детей проверили температуру. Результаты, округленные до сотых, следующие:
36,52; 36,57; 36,60; 36,65; 36,68; 36,69; 36,71; 36,76; 36,79; 36,83; 36,84; 36,87; 36,92; 36,98.
Сгруппируйте эти данные по 5 интервалам; для этого все данные должны принадлежать интервалу [36,5; 37,0]. Построенную таблицу дополните относительными частотами.

2. ***Работайте в парах!*** Месячное потребление электроэнергии (в квт·ч) в жилом доме по квартирам отражено в следующей таблице:

16	27	87	98	58	69	29	40	19	71
82	42	53	17	24	84	95	55	66	54
75	45	66	36	57	27	48	18	39	9
30	9	21	91	18	82	8	73	94	58
85	66	96	77	9	88	19	99	29	10

а) Какова статистическая совокупность и каков статистический признак?
б) Сгруппируйте эти данные по 10 интервалам: [0, 10), [10, 20), ..., [80, 90), [90, 100].

B

3. Рост (в см) игроков сборной Франции по волейболу (2007 г.) следующий:
196, 169, 186, 183, 180, 187, 191, 183, 168, 186, 181, 182.
а) Какова статистическая совокупность? б) Каков ее статистический признак?

4. Рассматривается выборка объема $n = 20$ из множества значений некоторого статистического признака (то есть из некоторой статистической совокупности):
30, 100, 70, 60, 40, 30, 60, 40, 40, 70, 60, 40, 70, 60, 70, 60, 60, 70, 60, 60.
Укажите вариант, накопленная относительная частота которого равна 0,7.

C

5. Рассмотрим фрагмент стихотворения Михая Еминеску «Звезда»:

Звезды новорожденной свет,
Стремясь к земле, проводит
В пространстве сотни тысяч лет,
Пока до нас доходит.

Быть может, он уже угас
В просторах мирозданья
В тот самый миг, когда до нас
Дошло его сиянье.

Найдите абсолютные частоты букв *а*, *е*, *и*, *о*, *у*, *т*. Результаты представьте в виде статистического ряда. Построенную таблицу дополните относительными частотами и накопленными относительными частотами.

Реальный профиль

A_1

1. Рассматривается выборка объема $n = 20$ из множества значений некоторого статистического признака (то есть из некоторой статистической совокупности): 5, 8, 3, 6, 7, 4, 3, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 4, 5, 6, 8, 4, 5, 8. Укажите вариант, накопленная относительная частота которого равна 0,75.

2. Часы, выставленные в витрине магазина, показывают случайное время. Записав показания 50 часов, получили следующие результаты:

00:39	03:05	07:13	09:04	02:34	04:35	11:05	05:16	10:33	06:50
11:32	04:19	10:19	00:27	06:08	01:56	09:37	02:28	03:49	11:21
01:07	06:41	11:04	02:07	04:42	08:06	00:09	04:30	07:16	08:39
05:44	09:21	01:25	10:52	09:40	02:41	10:11	03:18	10:14	00:41
08:43	02:14	04:05	05:07	03:27	06:20	04:15	07:01	00:53	02:30

а) Какова статистическая совокупность и каков ее статистический признак?
б) Сгруппируйте эти данные по 12 интервалам: [0, 1), [1, 2), ..., [11, 12].

B$_1$

3. На консервном заводе банки заполняют на автоматизированной линии. Для проверки работы линии взвешивают наугад содержимое 75 банок. Результаты представлены в следующей таблице:

Масса (г) интервал	[730, 740)	[740, 750)	[750, 760)	[760, 770)	[770, 780]
Число банок	5	7	52	9	2

а) Укажите изучаемую статистическую совокупность.
б) Укажите изучаемый статистический признак и его тип.
в) Каков процент банок, масса которых меньше 750 г?

4. Известны данные о возрасте некоторых актеров, в котором они были удостоены премии «Оскар»:

32	51	35	76	32	48	62	41	31	46
37	53	45	37	60	48	43	56	47	40
36	33	55	42	38	40	42	39	45	36
32	61	39	40	56	43	44	46	60	

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам, выбрав их число по формуле Стерджеса. Величину интервалов выберите, округляя с избытком до целого.
б) Дополните построенную таблицу относительными и накопленными относительными частотами.
в) Проанализируйте дополненную таблицу.

C$_1$

5. *Работайте в парах!* В таблице приводится вес новорожденных (в килограммах) в роддоме:

3,9	2,6	3,7	3,4	2,0	3,5	3,2	3,8	3,0	4,2
3,8	3,7	2,1	3,8	2,9	3,7	2,6	3,5	2,4	3,6
3,0	5,2	2,7	3,5	3,0	2,5	4,1	3,3	3,8	3,1
3,6	3,8	2,5	4,2	3,3	4,0	3,8	2,5	3,5	3,0
3,3	2,2	4,2	4,6	2,9	3,9	2,8	3,4	4,0	2,6
4,8	3,3	3,5	3,0	4,5	3,1				

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам:

$$[2{,}0;\ 2{,}4),\ [2{,}4;\ 2{,}8),\ [2{,}8;\ 3{,}2),\ [3{,}2;\ 3{,}6),\ [3{,}6;\ 4{,}0),\ [4{,}0;\ 4{,}4),\ [4{,}4;\ 4{,}8),\ [4{,}8;\ 5{,}2].$$

Дополните построенную таблицу относительными и накопленными относительными частотами.

б) Сгруппируйте эти же данные, выбрав число интервалов по формуле Стерджеса.

Указание. $n = 56$, $\lg 56 \approx 1{,}748$, $r = 6$, $h \approx 0{,}533...$; полагаем $h = 0{,}6$ (округляем с избытком до десятых).

6. *Исследуйте!* Пусть X – статистический признак, представляющий собой длину слов (количество букв) из первых 11 строк третьей страницы этого учебника. Составьте статистическую совокупность, группируя данные по интервалам. Построенную таблицу дополните относительными частотами. Выполните это же задание, используя литературный текст (стихотворение, рассказ, газетную статью и т. д.). Сравните результаты. Проанализируйте полученные данные.

§ 3 ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Чтобы придать большую наглядность статистическим данным, их изображают в виде графиков (диаграмм).

3.1. Гистограмма и полигон частот

Гистограмма применяется в случае, когда данные сгруппированы по интервалам. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладываем интервалы. На каждом из них строим прямоугольник, высота которого пропорциональна частоте (абсолютной или относительной) данного интервала.

Гистограмма абсолютных частот, соответствующая статистическому ряду таблицы 4, изображена на рисунке 6.1.

Полигон абсолютных частот – это ломаная, соединяющая точки (x_i^*, n_i), где x_i^* – середина i-го интервала, $i=\overline{1, r}$. Статистическому ряду таблицы 4 соответствует полигон, изображенный на рисунке 6.2. ***Полигон относительных частот*** – это ломаная, соединяющая точки (x_i^*, f_i), $i=\overline{1, r}$.

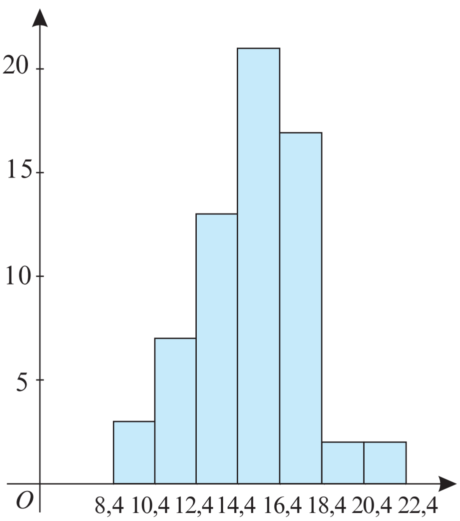


Рис. 6.1

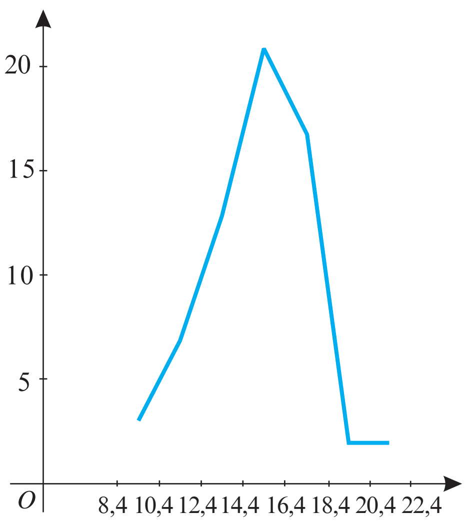


Рис. 6.2

Абрахам Муавр (1667–1754) – французский математик

А. Муавр измерил рост 1 375 женщин, выбранных случайным образом. Гистограмма, соответствующая данным, сгруппированным по интервалам, изображена на рисунке 6.3.

Если бы мы воспользовались данными измерений не 1375, а миллиона женщин, и измерения были бы проведены с точностью до миллиметра, то гистограмма была бы неотличима от колоколообразной кривой (рис. 6.3).

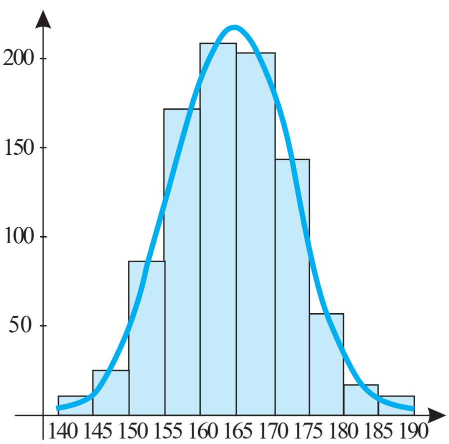


Рис. 6.3

3.2. Диаграммы в виде вертикальных отрезков и полосовые диаграммы

Диаграмма в виде вертикальных отрезков применяется для дискретных признаков, принимающих небольшое число значений. Она строится следующим образом: на оси абсцисс откладываются значения x_i признака X, и из каждой полученной точки восстанавливается перпендикуляр, длина которого пропорциональна абсолютной либо относительной частоте, соответствующей варианту x_i. Масштабы по осям координат могут быть разные.

Задание с решением

Счетчик Гейгера в течение 25 периодов по 7,5 секунды каждый регистрировал число излучаемых α-частиц. Получены следующие результаты:

3, 0, 4, 6, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 1, 5, 3, 4, 2, 5, 6, 4, 1, 2, 7, 6, 5, 3, 4.

Пусть x_i – число α-частиц, зафиксированных в i-ом периоде, и n_i – абсолютная частота варианта x_i. Представим эти данные в виде статистического ряда и построим диаграмму вертикальных отрезков.

Решение: Группировка по вариантам приводит к статистическому ряду таблицы 6. Диаграмма в виде отрезков этого ряда изображена на рисунке 6.4.

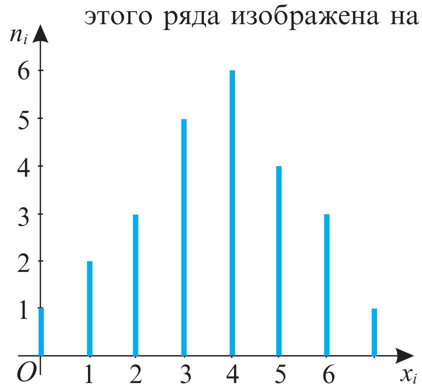


Рис. 6.4

Таблица 6

x_i	n_i
0	1
1	2
2	3
3	5
4	6
5	4
6	3
7	1

Полосовые диаграммы применяются в основном для качественных статистических признаков или для дискретных количественных признаков с небольшим числом вариантов. Эти диаграммы используются для наглядного сравнения вариантов одного и того же статистического ряда или нескольких статистических рядов.

Полосовая диаграмма состоит из горизонтальных полос в виде прямоугольников. Каждому варианту статистического признака соответствует прямоугольник. Основания прямоугольников одинаковой длины размещаются на оси ординат. Высота каждого прямоугольника равна частоте (абсолютной или относительной) соответствующего варианта либо пропорциональна частоте. Расстояния между прямоугольниками должны быть одинаковыми.

Задания с решением

1 В классе провели опрос среди учащихся о любимом занятии в свободное время. Результаты представлены в виде статистического ряда:



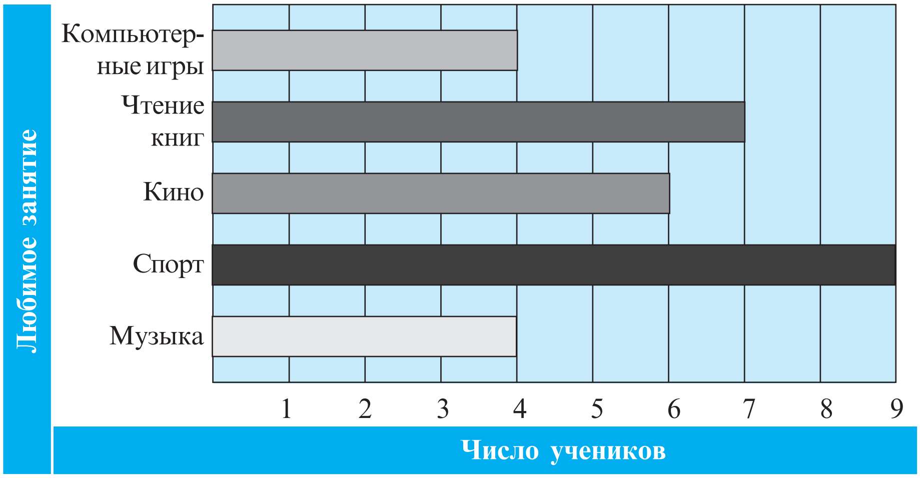


Любимое занятие	музыка	спорт	кино	чтение книг	компьютерные игры	Всего
Число учеников	4	9	6	7	4	30

Укажем статистический признак и его варианты. Построим полосовую диаграмму признака.

Решение:

Качественный статистический признак – «любимое занятие», вариантами являются: музыка, спорт, кино, чтение книг, компьютерные игры.
С помощью построенной диаграммы можно наглядно сравнивать варианты (по частотам).



Посредством данной диаграммы можно провести анализ предпочтений учащихся. Например, можно отметить, что одинаковое число учащихся отдает предпочтение музыке и компьютерным играм, а наиболее предпочтительным является спорт.

2 В условиях задачи **1**, с учетом пола учащихся, результаты, представленные в виде двух статистических рядов, оказались следующими:

Любимое занятие	музыка	спорт	кино	чтение книг	компьютерные игры	Всего
Девушки	3	4	3	4	1	**15**
Юноши	1	5	3	3	3	**15**
Всего	**4**	**9**	**6**	**7**	**4**	**30**

Построим полосовую диаграмму.

Решение:

Получаем следующую диаграмму:

Посредством данной диаграммы предпочтения юношей при выборе занятия в свободное время сравниваются с предпочтениями их коллег-девушек.
Проанализировав диаграмму, заключаем, например, что:
1) юноши предпочитают больше всего спорт;
2) девушки выбирают музыку и чтение книг чаще юношей;
3) девушки и юноши в равной мере предпочитают кино;
4) юноши в равной мере выбирают кино и чтение книг.

Задание. Проведите социологический опрос среди учащихся класса относительно проведения свободного времени. Постройте соответствующую полосовую диаграмму и проанализируйте результаты опроса.

3.3. Изображение структуры качественной совокупности

Для изображения структуры (состава) статистической совокупности с качественным признаком используются ***плоскостные секторные диаграммы*** (круговые, квадратные и т. п.). Площади соответствующих фигур представляют 100%, а площади их частей пропорциональны вариантам признака.

Пример

Рассмотрим следующий статистический ряд (таблица 7):

Таблица 7

Категории книг, выпущенных издательством в 2022 году

Категория книг	%
Учебники	42,5
Романы	20,4
Сборники стихов	15,8
Профессиональная литература	11,6
Словари	9,2
Другие	0,5

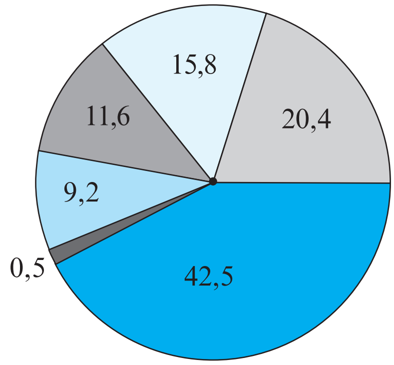


Рис. 6.5

На рисунке 6.5 данные из таблицы представлены при помощи структурного круга.

Квадратные и ***круговые диаграммы*** помогают легче ориентироваться в тенденциях явлений. Квадраты и круги строятся так, что их площади пропорциональны значениям (вариантам) соответствующих признаков.

Задание с решением

В таблице 8 дана численность населения (в тысячах) муниципия Кишинэу.

Таблица 8

Год	1939	1950	1965	1989	2016
Численность населения	112,0	134,0	279,2	661,4	746,8

Представим эти данные с помощью:
а) квадратной диаграммы;
б) круговой диаграммы.

Решение:

а) Представим численность населения в 2016 году в виде квадрата со стороной 27 единиц $(\sqrt{746{,}8} \approx 27)$, а численность населения в 1939, 1950, 1965 и 1989 годах – в виде квадратов со сторонами соответственно 11, 12, 17 и 26 единиц $(\sqrt{112} \approx 11,\ \sqrt{134} \approx 12, \ldots)$. Получаем диаграмму, изображенную на рисунке 6.6 (единицу можно выбрать равной $\frac{n}{27}$ см, где n – натуральное число, выбранное в зависимости от предполагаемых размеров диаграммы; в нашем случае $n = 4$).

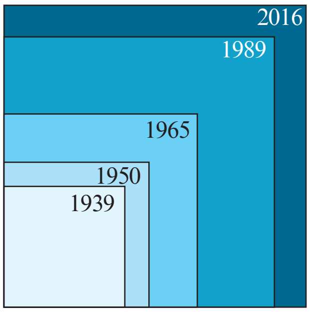


Рис. 6.6

б) Для круговой диаграммы сначала вычисляем радиусы кругов. Начинаем с наибольшего круга, т. е. с круга, соответствующего численности населения 2016 года. Его площадь должна быть пропорциональна численности населения (в тыс.): $\pi r^2 \approx 746{,}8$ (без потери общности, коэффициент пропорциональности выберем равным 1). Отсюда следует, что $r \approx 16$ единиц. Для остальных кругов аналогично получаем радиусы: 6, 7, 10 и 15 единиц. Остается выбрать значение единицы. Оно может быть любым, но достаточной величины для того, чтобы можно было провести и малые круги. Мы выберем значение единицы из условия: 16 единиц = 2 см.

Получаем диаграмму, изображенную на рисунке 6.7.

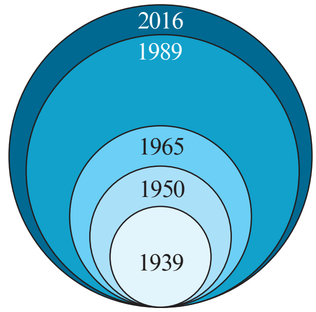


Рис. 6.7

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. По тесту по математике ученики XII класса получили следующие оценки (в порядке записи фамилий в журнале): 10, 9, 4, 5, 8, 3, 7, 8, 9, 5, 8, 7, 5, 7, 9, 8, 6, 7, 8, 6, 8, 5, 7, 6, 5, 8, 4, 3.
Изобразите эти данные при помощи диаграммы в виде вертикальных отрезков.

2. Во время отбора на важное соревнование два стрелка, X и Y, стреляли в мишени, каждый по 20 раз. Результаты представлены в прилагаемой таблице в виде двух статистических рядов. Постройте диаграмму в виде вертикальных отрезков.

Баллы	Стрелки	
	X	*Y*
50	4	6
30	6	4
20	5	3
10	4	6
0	1	1

B

3. ***Работайте в группах!*** Проведите среди учеников своего класса опрос: из скольких человек состоит твоя семья? Результаты сгруппируйте по вариантам и постройте соответствующую диаграмму вертикальных отрезков.

4. В лицейских классах провели опрос: «Как вы думаете, почему некоторые дети издеваются над сверстниками?» Результаты представлены в виде статистического ряда.

Номер варианта	Причина	Относительная частота (%)
1	Хотят казаться «крутыми»	35%
2	Неуверенность в себе	25%
3	Неблагополучная семья	12%
4	Зависть	10%
5	Это приносит им удовольствие	10%
6	Вредность	5%
7	Скука	3%

5. Среди родителей, чьи дети посещают детский сад «Красная Шапочка», был проведен опрос о продолжительности (в минутах) пути от дома до детского сада. Были получены следующие результаты:

18	30	12	15	13	26	23	35	28	17	5	20	10	14	15	40
30	25	31	5	9	15	16	5	7	11	16	19	9	24	8	32
23	36	7	21	20	6	18	30	10	12	41	16	30	21	34	5
27	23	41	39	19	19	37	43	13	24	6	23	32	14	43	32
25	39	20	37	38	38	24	42	31	40	16	35	13	27	12	44

а) Сгруппируйте эти результаты по интервалам: [5, 12); [12, 19); [19, 26); [26, 33); [33, 40); [40, 47].
б) Постройте гистограмму и полигон абсолютных частот.

C

6. ***Работайте в парах!*** 3 монеты одновременно подбросили 20 раз. Число выпавших орлов задано последовательностью: 1 0 1 3 2 3 2 0 3 2 0 2 2 0 3 2 1 2 1 1.
а) Сгруппируйте данные по вариантам (или по интервалам).
б) Дополните построенную таблицу абсолютными, относительными и накопленными частотами.
в) Постройте гистограмму и полигон частот (или диаграмму в виде вертикальных отрезков).

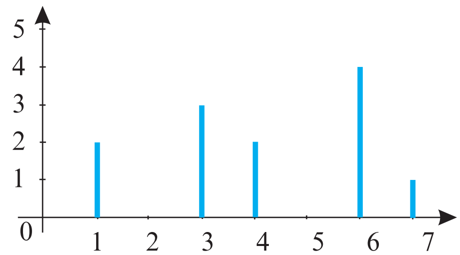
7. Спортивный клуб лицея насчитывает 30 членов.

Цвета спортивных форм отражены следующим статистическим рядом:

Цвет	Число спортсменов
красный	4
синий	10
желтый	1
зеленый	8
фиолетовый	7
Всего	**30**

Постройте круговую диаграмму.

8. На рисунке представлена диаграмма в виде вертикальных отрезков некоторого статистического ряда. Найдите этот статистический ряд.



Реальный профиль

A$_1$

1. Выясните у своих одноклассников, сколько времени (в минутах) занимает у них дорога в школу.
а) Сгруппируйте данные по вариантам (или по интервалам).
б) Дополните таблицу абсолютными, относительными и накопленными частотами.
в) Постройте гистограмму и полигон частот (или диаграмму в виде вертикальных отрезков).

2. Подбрасывайте монету до тех пор, пока два раза подряд не выпадет орел, и запишите число подбрасываний. Повторите эксперимент 20 раз. Изобразите полученные данные диаграммой в виде вертикальных отрезков.

B$_1$

3. Даны значения коэффициента интеллектуальности учеников некоторого класса: 75, 85, 87, 90, 94, 96, 97, 99, 100, 100, 102, 102, 102, 103, 104, 104, 105, 105, 106, 107, 108, 108, 111, 112, 114, 114, 114, 114, 116, 124.
а) Сгруппируйте эти данные по интервалам: [75, 85), [85, 95), [95, 105), [105, 115), [115, 125].
б) Постройте гистограмму и полигон относительных частот.

4. После экзамена по математике, который сдавали 100 учащихся, провели опрос. Учащихся попросили высказать мнение относительно полученной оценки, выбрав один из следующих вариантов:
1) «решительно нет»;
2) «нет»;
3) «в принципе да»;
4) «согласен»;
5) «полностью да».
Результаты опроса представлены в виде статистического ряда.

Номер варианта i	Мнение	Число учащихся n_i
1	решительно нет	1
2	нет	9
3	в принципе да	40
4	согласен	35
5	полностью да	15
	Всего	**100**

Постройте круговую диаграмму.

5. В таблице указаны 5 стран, из которых больше всего молодых людей приезжает учиться в вузы Республики Молдова (2021–2022 учебный год).
Для этого статистического ряда постройте:
а) полосовую диаграмму;
б) структурный круг.

Страна	Кол-во студентов
Румыния	2661
Израиль	983
Индия	690
Украина	391
Россия	78
Другие страны	351

C_1

6. ***Работайте в группах!***
1. Проведите среди одноклассников опрос, как они добираются в школу: пешком, общественным транспортом, на маршрутном такси, на велосипеде, на автомобиле, другим способом.
2. По результатам постройте статистический ряд.
3. Представьте статистический ряд с помощью полосовой диаграммы.
4. Проведите анализ диаграммы:
   а) Каким транспортным средством пользуется наибольшее число учеников?
   б) Каким транспортным средством пользуется наименьшее число учеников?

7. Постройте полосовую диаграмму и сравните возраст выхода на пенсию по странам и полу.
Возраст выхода на пенсию в Молдове и в некоторых европейских странах представлен следующими статистическими рядами.

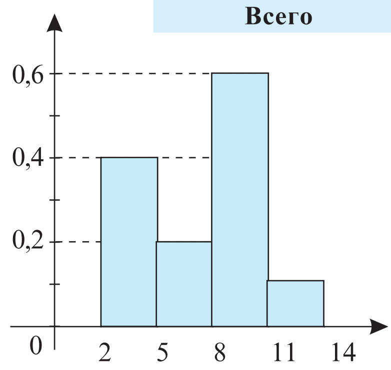
Страна	Женщины	Мужчины
Молдова	60	63
Румыния	63	65
Германия	65	65
Франция	62	62
Украина	60	60
Россия	60	65

8. ***Исследуйте!*** Рассмотрим фразу «Полосовая диаграмма состоит из горизонтальных полос».
а) Определите абсолютные и относительные частоты букв из этой фразы; результаты представьте в виде статистического ряда. Сравните относительные частоты букв в этой фразе с относительными частотами этих же букв в русском языке (для этого приведем относительные частоты в русском языке некоторых букв (в процентах): п – 2,3; о – 9,0; л – 3,5; с – 4,5; в – 3,8; а – 6,2; я – 1,8; д – 2,5; и – 6,2; г – 1,3; р – 4,0; м – 2,6; т – 5,3; з – 1,6; н – 5,3; ь – 0,014; ы – 1,6; х – 0,9).
б) Представьте с помощью диаграммы в виде вертикальных отрезков статистический ряд абсолютных частот гласных из данной фразы.

9. Центр переливания крови составил годовой баланс заготовок крови. Данные о возрасте доноров отражены в приложенном статистическом ряду.
а) Постройте структурный круг.
б) Каким углам соответствуют интервалы на построенной окружности?

Возраст донора	%
[0, 20)	5
[20, 30)	14
[30, 40)	26
[40, 50)	30
≥ 50	25
Всего	**100**

10. Дан полигон относительных частот некоторого статистического признака. Найдите статистический ряд, соответствующий этому полигону. Является ли он единственным? Обоснуйте.



§ 4 СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ

4.1. Средняя арифметическая

Пусть X – статистический признак. Рассмотрим выборку n различных его значений: $x_1, x_2, ..., x_n$. Величина $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ называется ***средней арифметической*** (простой) признака X.

Если ***данные выборки сгруппированы по вариантам***, то средняя арифметическая определяется формулой: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i n_i$, где $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

Если ***данные выборки сгруппированы по интервалам***, то средняя арифметическая определяется формулой: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^* n_i$, где x_i^* – середина i-го интервала.

В последних двух случаях $\bar{x}$ называют ***взвешенной средней арифметической статистического признака*** X.

Примеры

1 Для данных таблицы 1 имеем:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 11 + 11 \cdot 12 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 17}{50} = 11{,}62 \text{ (задачи)},$$

и это означает, что среднее число задач, решенных одним учеником, равно 11,62. Можно сделать вывод, что у 30 из 50 учеников результаты ниже среднего.

2 Для данных таблицы 4 имеем:

$$\bar{x} = \frac{9{,}14 \cdot 3 + 11{,}4 \cdot 7 + 13{,}4 \cdot 13 + 15{,}4 \cdot 21 + 17{,}4 \cdot 17 + 19{,}4 \cdot 2 + 21{,}4 \cdot 2}{65} \approx 15{,}11.$$

Средняя арифметическая отражает типичное значение статистического признака и позволяет перейти к последующим этапам статистического исследования, в первую очередь к сравнениям (сравнение средней арифметической некоторого признака в двух статистических совокупностях).

Иногда средняя арифметическая может скрывать реальную действительность. Пусть, например, 8, 2, 7, 7, 1 – оценки 5 учеников, полученные по контрольной работе. Здесь $\bar{x} = 5$ – таким образом, в среднем каждый ученик получил положительную оценку, что не соответствует действительности.

Помимо средней арифметической, для изучения статистических рядов используются значения некоторых конкретных вариантов признака, занимающих в ранжированном (построенном в порядке возрастания или убывания) ряду определенное положение. В первую очередь здесь имеются в виду *медиана* и *мода статистического ряда*.

4.2. Медиана

4.2.1. Медиана конечного набора чисел

Медианой (***Me***) конечного набора n чисел называется число, ***которое находится в середине набора*** указанных чисел, расположенных в порядке возрастания или убывания.

Если набор содержит нечетное число элементов, то медианой является элемент, занимающий центральное положение. Для ряда с четным числом элементов имеются два «серединных» элемента, и медиана равна их полусумме. Например, для ряда 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 10 имеем $Me = 6$, а для ряда 1, 2, 2, 4, 7, 9, 9, 10 имеем $Me = \frac{4+7}{2} = 5{,}5$.

4.2.2. Медиана статистического ряда

Пусть X – статистический признак. Рассмотрим его статистическую выборку, состоящую из n элементов. ***Медиана Me*** статистического ряда признака X – это число, которое разделяет ранжированный (то есть упорядоченный по возрастанию или убыванию) ряд на две равные по числу элементов части. Медиана статистического ряда может не совпадать ни с одним из вариантов статистического признака.

В случае, когда ***данные сгруппированы по вариантам***, медиана находится следующим образом:

1) вычисляем накопленные абсолютные частоты;

2) находим первую накопленную абсолютную частоту, бо́льшую $\frac{n+1}{2}$, где n – число вариантов признака; она указывает ***место медианы***: Me равна значению соответствующего варианта признака X.

Задание с решением

Найдем медиану статистического ряда, сгруппированного по вариантам:

x_i	n_i	Накопленная абсолютная частота
2	3	3
5	7	10
6	2	12
7	9	21
10	4	25
Всего	**25**	

Решение:

$\frac{n+1}{2}=\frac{25+1}{2}=13.$

Первая накопленная абсолютная частота, бо́льшая 13, равна 21, и она указывает место медианы: строка варианта $x_i = 7$. Следовательно, $Me = 7$.

Для статистических ***данных, сгруппированных по интервалам***, медиана содержится в первом интервале, накопленная абсолютная частота которого превышает величину $\frac{n+1}{2}$, где n – число вариантов признака.

Этот интервал называется ***медианным интервалом***.

Как найти само значение медианы, мы продемонстрируем на примере следующей задачи.

Задание с решением

Найдем медиану статистического ряда, сгруппированного по интервалам:

Интервал	Абсолютная частота n_i	Накопленная абсолютная частота
[4, 8)	7	7
[8, 12)	3	10
[12, 16)	8	18
[16, 20]	7	25
Всего	**25**	**25**

Решение:

У нас $n=25$, $\frac{n+1}{2}=13$. Интервал $[12, 16)$ – первый интервал, накопленная абсолютная частота которого больше 13: $18>13$. Следовательно, медиана содержится в этом интервале. Если представить себе, что все 25 вариантов признака записаны в порядке возрастания, то медианой окажется 13-й из них, и он заключен в интервале $[12, 16)$. Но в этом интервале находятся 8 вариантов. В статистике предполагают, что они возрастают равномерно от 12 до 16, с приращением $\frac{16-12}{8}=0{,}5$. С другой стороны, 13-й вариант статистического ряда – это 3-й из 8 вариантов, принадлежащих интервалу $[12, 16)$ (так как слева от этого интервала имеются 10 вариантов).

Таким образом, 13-й вариант равен $12+(13-10)\cdot\frac{16-12}{8}=13{,}5$, то есть $Me=13{,}5$.

4.3. Мода

Модой (Mo) статистического ряда называется значение признака, встречающееся с наибольшей частотой.

Если ***данные сгруппированы по вариантам***, то мода находится непосредственно по определению.

Задание с решением

Найдем моду статистического ряда, сгруппированного по вариантам:

а)

x_i	0	3	5	6	7
n_i	3	2	4	7	4

б)

x_i	0	1	3	4	8
n_i	3	5	4	5	3

Решение:

а) $Mo = 6$, так как частота значения 6, равная 7, наибольшая.

б) $Mo = 1$; $Mo = 4$. Здесь имеются два модальных значения (две моды). Подобный ряд является ***бимодальным***.

Замечание

Если у всех вариантов одинаковая частота, соответствующий ряд не имеет моды.

Если ***данные сгруппированы по интервалам***, для нахождения моды сначала определяют интервал с наибольшей частотой (который называется ***модальным интервалом***), в котором содержится мода. Затем мода рассчитывается по формуле:

$$Mo = x_{\inf} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')},$$

где $x_{\inf}$ – нижняя граница модального интервала, h – величина модального интервала, n_1', n_2', n_3' – частоты соответственно интервалов: предшествующего модальному, модального и следующего за модальным.

Задание с решением

Банк зарегистрировал суммы, снятые со счетов 100 клиентами. Результаты были сгруппированы по интервалам.

Номер интервала	Снятая сумма (в евро) интервал	Число клиентов n_i
1	$[0,\ 200)$	5
2	$[200,\ 400)$	20
3	$[400,\ 600)$	28
4	$[600,\ 800)$	25
5	$[800,\ 1000)$	18
6	≥ 1000	4
	Всего	**100**

Найдем моду снятой суммы.

Решение:

Модальным интервалом является интервал $[400, 600)$, так как его частота, равная 28, – наибольшая. При этом $x_{\inf} = 400$, $h = 200$, $n_1' = 20$, $n_2' = 28$, $n_3' = 25$. Следовательно,

$$Mo = 400 + 200\frac{28-20}{(28-20)+(28-25)} = 400 + 200 \cdot \frac{8}{11} \approx 545{,}4.$$

Замечание

Медиана и мода – важные характеристики статистического ряда, которые дополняют среднюю арифметическую. Вместе с тем можно привести примеры, которые показывают, что в некоторых случаях медиана и мода в качестве характеристик являются более эффективными, чем средняя арифметическая. Например, почтовый ящик или таксофон следует разместить не на середине улицы, а в том месте, где численность населения, проживающего в районе данной улицы, разбивается на две равные части (приблизительно равные).

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Владелец фирмы заинтересован в информации о продолжительности разговоров сотрудников по телефону в рабочее время. Были зарегистрированы следующие данные (в минутах):

3, 1, 4, 2, 5, 1, 1, 2, 7, 10, 5, 10, 1, 4, 5, 2, 3, 5, 4, 4, 2, 1, 7, 8, 10, 5, 1, 2, 7, 5.

Сгруппировав эти данные по вариантам, найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда из построенной таблицы.

2. В школе два девятых класса. В первом из них 29 учащихся, средний рост которых 162 см. Во втором классе 25 учащихся, средний рост которых 159 см. Найдите средний рост всех учащихся девятых классов.

B

3. В 2020 году в Республике Молдова зарегистрировано 1988 дорожно-транспортных происшествий. Их распределение по дням недели показано прилагаемым статистическим рядом.
а) Определите среднее количество происшествий, зарегистрированных за один день.
б) В какой день накопленная относительная частота больше, чем 0,7, и меньше, чем 0,8?

Дни недели	Кол-во происшествий (n_i)
понедельник	300
вторник	286
среда	273
четверг	274
пятница	281
суббота	297
воскресенье	277
Всего	**1988**

4. ***Работайте в парах!*** Рабочий стаж сотрудников фирмы отражен в таблице.
Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда.

Стаж (в годах)	Число сотрудников (n_i)
[0, 5)	3
[5, 10)	8
[10, 15)	10
[15, 20)	15
[20, 25)	19
[25, 30)	18
[30, 35)	5
[35, 40]	2
Всего	**80**

5. В первой четверти за контрольные и индивидуальные работы Ралука получила следующие оценки:
по математике: 8, 7, 10, 9, 8, 8, 9, 10;
по физике: 7, 8, 10, 8, 9, 8.
В какой из этих дисциплин результаты Ралуки лучше?

C

6. *Исследуйте!* Рассматривается выборка n различных значений статистического признака X: $x_1, x_2, ..., x_n$. Покажите, что сумма алгебраических отклонений вариантов от средней математической равна нулю: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$.
Какие еще очевидные свойства можно сформулировать?

7. В таблице даны результаты измерения длины 60 кукурузных початков.
а) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду длины кукурузного початка.
б) Каков процент кукурузных початков, длины которых отличаются от средней арифметической $\overline{x}$ не более, чем на 5 мм?

Длина початка (см)	Число початков (n_i)
19,5	2
20,0	4
20,5	5
21,0	7
21,5	16
22,0	15
22,5	8
23,0	3
Всего	**60**

Реальный профиль

A_1

1. Время, проведенное перед телевизором 100 лицами, приведено в следующей таблице.

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду соответствующего статистического ряда.

Время (мин.)	Число лиц (n_i)
До 30	24
[30, 60)	25
[60, 90)	39
[90, 120)	10
[120, 150]	2
Всего	**100**

2. Рассматривается рост учеников гимназических классов, сгруппированный по интервалам.
а) Постройте гистограмму относительных частот.
б) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда.

Рост (см)	Число учеников (n_i)
[150, 155)	12
[155, 160)	28
[160, 165)	51
[165, 170)	46
[170, 175]	13
Всего	**150**

3. В конце семестра XII классы, А и Б, сравнили свои результаты. Сделали вывод, что результаты подобны, так как в обоих случаях медианы равны 6. Что вы думаете об этом выводе?

Оценки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	1	0	2	1	6	4	5	3	1	2
B	0	3	1	1	4	5	6	2	1	2

B_1

4. Выбраны наугад 50 колосьев ячменя. Подсчитав число зерен, содержащихся в каждом колосе, получили следующие результаты (см. таблицу).

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду статистического ряда.

Число зерен	Число колосьев
[8, 11)	2
[11, 14)	3
[14, 17)	12
[17, 20)	14
[20, 23)	12
[23, 26)	6
[26, 29]	1
Всего	**50**

5. ***Работайте в парах!*** 60 учеников II класса были протестированы на скорость чтения (число слов, прочитанных за одну минуту). Результаты, упорядоченные по возрастанию, оказались следующими:

25	26	28	30	30	33	33	34	35	35	35	35	35	36	37
39	41	41	42	43	45	45	49	50	50	50	50	52	53	53
54	56	57	57	57	57	58	58	61	62	62	67	67	68	70
74	75	75	78	78	78	80	85	85	87	87	94	102	102	112

а) Составьте статистический ряд этой таблицы данных и найдите его среднюю арифметическую, медиану и моду.

б) Сгруппируйте данные таблицы по интервалам: [25; 35), [35; 45), [45; 55), [55; 65), [65; 75), [75; 85), [85; 95), [95; 105), [105; 115].

Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду после группирования данных по указанным интервалам и сравните их значения со значениями, найденными в пункте а).

6. На математической олимпиаде было предложено 9 задач. Лучшие из участников, ученики A, B и C, получили оценки, представленные в таблице.

A	7	9	7	6	8	10	8	9	9
B	7	8	6	10	10	6	6	10	10
C	10	8	9	10	7	6	6	8	8

Как вы думаете, каким образом были распределены между этими участниками первое, второе и третье места? Обоснуйте.

C₁

7. ***Исследуйте!*** Обоснуйте следующую формулу расчета медианы статистического ряда, сгруппированного по интервалам:

$$Me = x_{\inf}(Me) + h(Me) \cdot \frac{\frac{n+1}{2} - \sum \text{чипм}}{n_{Me}},$$

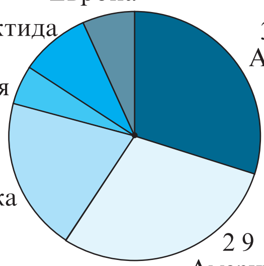
где $x_{\inf}(Me)$ – нижняя граница медианного интервала, $h(Me)$ – величина медианного интервала, $\sum \text{чипм}$ – сумма абсолютных **ч**астот **и**нтервалов, **п**редшествующих **м**едианному интервалу, n_{Me} – абсолютная частота медианного интервала.

8. ***Работайте в парах!*** Распределение земной суши, составляющей около 150 миллионов км^2, между шестью частями света показано на структурном круге. Найдите:

а) площадь поверхностей частей света: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (записанных в порядке возрастания);

б) среднюю площадь поверхностей частей света;

в) медиану набора чисел $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.



9. На предприятии работает 120 рабочих: слесари, токари и фрезеровщики. Их количество прямо пропорционально, соответственно, числам 5, 2, 3. Месячная заработная плата рабочих составляет соответственно 9050, 10200 и 11000 леев. Найдите среднее арифметическое, медиану и моду заработной платы одного рабочего.

10. В результате изучения продолжительности телефонных разговоров (в минутах) в сотовой фирме были получены данные, отраженные в следующем статистическом ряду.

Продолжительность (интервал)	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)	[10, 12]	**Всего**
Частота (n_i)	12	18	24	16	18	12	**100**

1) Вычислите среднюю продолжительность одного разговора.

2) Предположим, что интервалы сгруппированы по два, то есть получим интервалы: [0, 4), [4, 8), [8, 12]. Вычислите среднюю продолжительность одного разговора для нового статистического ряда.

3) Какой вывод можно сделать?

§ 5 ЭЛЕМЕНТЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

5.1. Проценты, простые проценты, сложные проценты

Напоминаем

Один процент – это одна сотая часть некоторой основной величины G.
Для вычисления числа T, составляющего $p\%$ от G, применяем формулу:

$$T = \frac{G}{100} \cdot p.$$

Задание с решением

Из 800 учащихся лицея 40% добираются до него пешком. Сколько учащихся ежедневно приходит в лицей пешком?

Решение:

Основная величина $G = 800$, число процентов $p = 40$, и поэтому

$$T = \frac{800}{100} \cdot 40 = 320 \text{ (учащихся).}$$

Ответ: 320 учащихся.

Напоминаем

Для того чтобы вычислить проценты p, которые составляет число T от основной величины G, применяем формулу:

$$p\% = \frac{T}{G} \cdot 100\%.$$

Задание с решением

Из 800 учеников и учениц 56 приезжают в лицей на автомобилях (с родителями). Сколько процентов учеников и учениц приезжают в лицей на автомобилях?

Решение:

Дано $G = 800$, $T = 56$. Следовательно, $p\% = \frac{56}{800} \cdot 100\% = 7\%$.

Ответ: 7%.

Напоминаем

Для вычисления неизвестной (основной) величины G, зная, что число T составляет $p\%$ от G, применяем формулу:

$$G = \frac{T}{p} \cdot 100.$$

Замечание

Можно решать такие задачи (соответственно, запоминать данные формулы), используя схему: G – 100%
T – $p\%$,

которая отражает тот факт, что величины T и p – прямо пропорциональны, т. е. верна пропорция: $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$.

Используя основное свойство пропорции: $G \cdot p = T \cdot 100$, можно найти одну из величин, если известны другие две.

Задание с решением

В начальных классах гимназии обучается 210 детей, что составляет 35% от общего числа учащихся гимназии. Сколько учеников учится в гимназии?

Решение:

$T = 210$, $p\% = 35\%$.

Следовательно, $G = \frac{210}{35} \cdot 100 = 600$ (учащихся).

Ответ: 600 учащихся.

Проценты широко применяют в финансовой области. В частности, они используются при определении суммы, выплачиваемой за использование капитала K, взятого в долг. Эта сумма S зависит от величины капитала и вычисляется, обычно, как некоторая его доля: например, $S=\frac{1}{10}K$. На практике устанавливается процент, который составляет выплачиваемая сумма от используемого капитала:

$$p\%=\frac{S}{K}\cdot 100=\frac{\frac{1}{10}K}{K}\cdot 100=10\%.$$

***Процентные деньги D* (*проценты*)** – это денежная сумма, которую необходимо выплатить за пользование капиталом K, взятым в долг (кредит).

Под ***процентной ставкой*** (определяется в процентах) понимают отношение процентных денег (как правило, за год) к сумме долга. Полученное отношение умножают на 100, чтобы определить количество процентов.

Зачастую физические лица (экономические агенты) предоставляют свои деньги банкам в долг на определенное время. В таких случаях оформляют ***депозитные счета***. В договорах определяются основные параметры, среди которых: первоначальная сумма, срок договора (счета), размер годовой процентной ставки, обязанности сторон и др.

Задание с решением

Клиент открывает в банке два депозитных счета по 5 тысяч леев каждый под 12% годовых: один счет на 1 год, а другой – на 1,5 года. Какую сумму должен вернуть банк клиенту в каждом случае?

Решение:

Основная величина $K=5\,000$, $p=12\%$, поэтому в первом случае процентные деньги составляют $D_1=\frac{5\,000}{100}\cdot 12=600$. Через 1 год банк должен вернуть клиенту первоначальную сумму и соответствующие процентные деньги, т. е. $5\,000+600=5\,600$ (леев).

Во втором случае проценты составят $D_2=\frac{5\,000}{100}\cdot 12\cdot 1{,}5=600\cdot 1{,}5=900$. Поэтому банк выплатит клиенту $5\,000+900=5\,900$ (леев).

Ответ: 5 600 леев; 5 900 леев.

Процентные деньги (проценты), вычисленные описанным выше способом, называются ***простыми процентами***.

Проценты за используемый капитал банки выплачивают периодически – в конце определенного договором периода (месяц, квартал, год). Поэтому клиент должен периодически являться в банк, чтобы либо получить начисленный доход, либо положить его на тот же счет (с тем, чтобы получить еще больший доход).

Найдем сумму, которая будет на счете при применении указанной процедуры последовательно t раз (периодов). Пусть первоначальная сумма равна S_0, процентная ставка для каждого периода равна p. Обозначим также $i=\frac{p}{100}$, S_k – сумму, которая будет на счете в конце периода k, $k=\overline{1,t}$, (прибавляя каждый раз проценты к предыдущей сумме). Имеем:

$$S_1=S_0+S_0\cdot\frac{p}{100}=S_0(1+i),\ S_2=S_1+S_1\cdot i=S_1(1+i)=S_0(1+i)^2,\ \ldots,$$

$$S_{t-1}=S_{t-2}+i\cdot S_{t-2}=S_{t-2}(1+i)=S_0(1+i)^{t-2}\cdot(1+i)=S_0(1+i)^{t-1},$$

$$S_t=S_{t-1}(1+i)=S_0(1+i)^t.$$

Следовательно, если к концу каждого периода проценты прибавлены к сумме, накопленной до предыдущего периода, процентная ставка фиксирована и равна p, первоначальная сумма составляет S_0, то к концу периода t получим сумму:

$$S_t = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Проценты (процентные деньги), определенные описанным выше способом (когда проценты, вычисленные на каждом этапе, прибавлены к основной сумме, что ведет к бóльшим процентам в следующем периоде), называются ***сложными процентами***. Ясно, что это больше, чем $S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t$ – сумма t простых процентов.

Чтобы банковские услуги были выгодными и привлекательными, банки предлагают депозитные вклады, при которых проценты присовокупляют к основной сумме по мере их накопления ежемесячно, ежеквартально, ежегодно. Эта процедура называется ***капитализацией процентов***, и этот факт оговаривается в договоре.

Задания с решением

1 В банке открыт счет на сумму 10 000 леев на 2 года под 7% годовых. Какая сумма будет на счете в конце периода, если:
а) начислять простые проценты;
б) проценты начислять с ежегодной капитализацией?
В каком случае сумма будет большей и на сколько?

Решение:

а) $S_2 = 10\,000\left(1+2\cdot\frac{7}{100}\right) = 11\,400$ (леев).

б) $\widetilde{S}_2 = 10000\left(1+\frac{7}{100}\right)^2 = 11\,449$ (леев).

Таким образом, $11\,449 - 11400 = 49$ (леев).

Ответ: а) 11 400 леев; б) 11 449 леев.
В случае б) сумма будет больше на 49 леев.

Замечание

Промежуточные вычисления рекомендуется выполнять с точностью до 4 десятичных знаков.

2 Сохранив условия предыдущего примера, вычислим сумму, которая будет на счете в конце периода, если капитализация осуществляется ежемесячно.

Решение:
Всего получается 24 периода с ежемесячной процентной ставкой $\frac{7}{12}$%.

Следовательно, $\widetilde{S}_{24} = 10000\left(1+\frac{7}{1200}\right)^{24} \approx 11\,498{,}06$ леев.

Ответ: 11 498,06 лея.

Замечания

1. Если процентная ставка по депозиту с начальной суммой S_0 меняется с течением времени t (плавающая процентная ставка) $\left(t = \sum_{k=1}^{m} t_k\right)$, и для каждого периода t_k процентная ставка составляет p_k (простого процента), то общий доход можно вычислить по формуле: $D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$.

2. Если промежуточные периоды являются частями (долями) года – четверти, месяцы, дни, то t_k имеет соответственно вид: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \ldots; \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots; \frac{1}{360}, \frac{2}{360}, \ldots$ В договоре уточняется число дней в банковском году: 360 или 365 (возможно 366) дней.

Задание с решением

В банке открыли счет под простые проценты на сумму 54 000 д. е. с процентными ставками в 10%, 12%, 13% на сроки 200, 150, 100 дней соответственно. Вычислим общие процентные деньги, если в банковском году 360 дней.

$$D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$$

Решение:

В данном случае имеем $p_1 = \frac{10}{360}$, $t_1 = 200$; $p_2 = \frac{12}{360}$, $t_2 = 150$; $p_3 = \frac{13}{360}$, $t_3 = 100$.

Следовательно, $D_t = 54\,000 \cdot \frac{10 \cdot 200 + 12 \cdot 150 + 13 \cdot 100}{100 \cdot 360} = 7\,650$ (д. е.).

Ответ: 7 650 д. е.

5.2. Бюджет. Прибыль. Цены

Жизнь каждой семьи, каждого человека связана с затратами (покупка продуктов, оплата услуг, транспорта и др.) и доходами (заработная плата, стипендия, проценты от вкладов и др.). Во избежание ситуации, когда можно оказаться без средств к существованию, или при планировании дорогостоящей покупки (приобретение дорогого предмета, подготовка к путешествию и др.) необходимо быть рачительным хозяином: вести учет всех расходов и доходов, планировать предстоящие затраты. В таких случаях говорят, что необходимо формировать бюджет семьи или личный бюджет.

Бюджет – это совокупность предстоящих доходов (с указанием источника) и расходов (с указанием цели) на определенный период.

Необходимо так формировать бюджет, чтобы в нем были не только предусмотрены обязательные расходы (продукты питания, транспорт, коммунальные услуги и др.), но и остались некоторые средства, которые будут пополнять сбережения на случай предстоящей крупной покупки или для непредвиденных затрат.

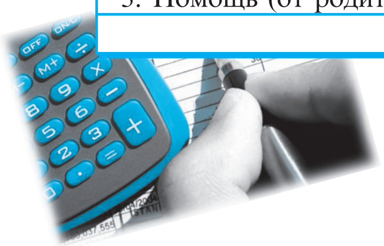
Примеры

Примеры месячных бюджетов (в леях)

Бюджет Михаила (студент)

Доход	
1. Резерв	500
2. Стипендия	700
3. Помощь (от родителей)	2 100
	3 300

Расходы	
1. Транспорт	70
2. Оплата квартиры	600
3. Учебники, ксерокопирование, Интернет	300
4. Продовольственные, непродовольственные товары	2 100
5. Отдых и досуг (кино, клуб и др.)	200
	3 270



Бюджет семьи Петровых

Доход	
1. Зарплаты	14 200
2. Процентные деньги	200
	14 400

Расходы	
1. Коммунальные услуги, квартплата	1 610
2. Абонемент TV, Интернет	200
3. Одежда	510
4. Продовольственные, непродовольственные товары	6 000
5. Транспорт, бензин	890
6. Отдых (кино, театр и др.)	650
7. Карманные деньги	500
8. Обслуживание кредита	450
	10 810

Для успешного управления собственными фондами (средствами) необходимо учесть: возможности пополнения доходов, возможности сокращения расходов, правила грамотного и выгодного оформления кредита, условия формирования цен и многое другое.

Себестоимость – это совокупность затрат на производство одной единицы товара.

Себестоимость включает затраты на оплату рабочей силы, средств производства (сырье, электроэнергия, оборудование, обслуживание, аренда помещений и т. д.).

Любой производитель стремится, чтобы дело, которым он занимается, было прибыльным, т. е. чтобы после продажи были не только восполнены затраты, но и получена как можно бóльшая прибыль.

Общая прибыль P некоего предприятия – это разность между полученным доходом D и совокупными затратами C в определенный период времени:

$$P = D - C.$$

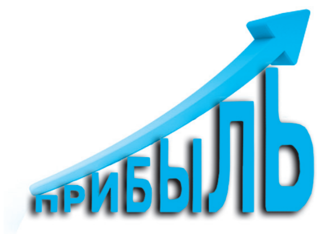
Степень рентабельности предприятия, т. е. его возможность (потенциал) создавать прибыль, определяется ***экономической рентабельностью***:

$$R_{\text{эк.}} = \frac{P}{K}, \qquad (1)$$

где P – общая прибыль, K – величина всего капитала.

Задание с решением

Предприятие за год получило 2 000 000 д. е. дохода, а общие расходы составили 1 100 000 д. е. Вычислим экономическую рентабельность предприятия, если известно, что капитал предприятия составляет 9 миллионов д. е.



Решение:

Общая прибыль, полученная предприятием, составляет:

$$P = 2\,000\,000 - 1\,100\,000 = 900\,000 \text{ д. е.}$$

В соответствии с формулой (1) имеем $R_{ec} = \dfrac{900\,000}{9\,000\,000} = 0{,}1.$

Ответ: 0,1.

Необходимо знать, что не все деньги, которыми покупатель расплачивается за приобретаемый в магазине товар, достаются (перечисляются) производителю товара. В общих чертах ценообразование происходит по следующей схеме:

Себестоимость
+
Прибыль (надбавка) производителя
+
НДС
+
Торговая надбавка
+
НДС

→ Общая сумма, полученная производителем от продаж, или цена покупки торговой сетью.

→ Сумма, полученная магазином при продаже (окончательная цена).

НДС (***налог на добавленную стоимость***) – это налог (в пользу государства), устанавливаемый при смене собственника товара или же при предоставлении услуг (выполнении профессиональных обязанностей).

Величина НДС зависит от величины суммы, которую желает получить собственник товара. При каждой смене собственника товара в госбюджет перечисляется сумма, составляющая разность $T_1 - T_2$, где T_1 – НДС, вычисленный при текущей операции (сделке), а T_2 – НДС, вычисленный при предыдущей операции (и оплаченный предыдущим собственником). Следовательно, в госбюджет перечисляется только налог на добавленную каждым собственником стоимость (т. е. на его прибыль). Этот налог каждый раз прибавляется к стоимости товара (услуги) и оплачивается покупателем (потребителем).

Задания с решением

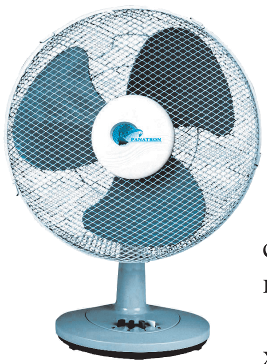
1 Вычислим прибыль от производства одного литра молока, если известно, что его себестоимость составляет 6 д. е., НДС – 8%, и магазин перечисляет производителю по 7,2 д. е. за каждый литр молока.

Решение:

Для вычисления прибыли от производства 1 л молока нужно найти доход x, полученный производителем. Зная, что магазин оплачивает этот доход и НДС, получим уравнение $x + x\dfrac{8}{100} = 7{,}2$, которое имеет решение $x \approx 6{,}67$.

Таким образом, за каждый 1 л молока производитель получает 6,67 д. е. Прибыль от производства одного литра молока составляет разность $6{,}67 - 6 = 0{,}67$ (д. е.).

Ответ: 0,67 д. е.



2 Магазин перечисляет производителю 360 д. е. за один вентилятор, включая 20% НДС. Какова будет цена вентилятора в магазине, если торговая надбавка составляет 75 д. е.?

Решение:

Сумма 360 состоит из дохода x производителя и НДС (T_2), поэтому верно равенство $x + x \cdot 0{,}2 = 360$, откуда $x = 300$. Таким образом, доход производителя от производства данного вентилятора составляет 300 д. е.

Окончательная цена P_f (оплачиваемая покупателем) состоит из: 300 д. е. – доход производителя, 75 д. е. – торговая надбавка, и НДС (T_1), исчисляемый от суммы 375 (д. е.) и составляющий $375 \cdot 0{,}2 = 75$ (д. е.).

Таким образом, $P_f = 300 + 75 + 75 = 450$ д. е.

Ответ: 450 д. е.

Для увеличения потока посетителей коммерческие организации предоставляют ***скидки*** (по различным поводам). Этот факт необходимо принимать во внимание, особенно если сформированный бюджет является дефицитным.

Задание с решением

Студент запланировал приобрести футболку по цене 110 леев. По случаю рождественских праздников магазин предоставил скидки в размере 15%. Сколько денег сэкономил студент?

Решение:

15% от 110 составляет $\dfrac{110}{100} \cdot 15 = 16{,}5$ (леев).

Ответ: 16,5 лея.

Для большинства граждан основным источником дохода является зарплата. Следует знать, что размер (величина) заявленной заработной платы для указанной должности (выполнения определенного объема работ) отличается от фактически выплачиваемой работнику. ***Начисленная заработная плата*** – это сумма, которую выделяет предприятие за выполнение определенного объема работы. Из этой суммы производится ряд отчислений: обязательное медицинское страхование, фонд социального страхования, подоходный налог и др. Оставшаяся после этих отчислений сумма и есть ***выданная заработная плата*** – та, что составляет доход работника.

Задание с решением

Начисленная заработная плата врача Марии Ивановой составляет 3 800 леев. Какую зарплату получит врач «на руки» (выданная заработная плата), если сумма всех отчислений составила 27% от начисленной ей зарплаты?

Решение:

Выданная зарплата составляет 73% от начисленной, поэтому ее размер (величина) составит $\frac{3800}{100} \cdot 73 = 2774$ (д. е.).

Ответ: 2 774 д. е.

Возвращаясь к вопросу о формировании личного или семейного бюджета, следует отметить, что для пополнения дохода существуют различные возможности из области финансов. Об одной из них – относительно открытия банковских депозитных счетов – уже сказано выше. По этим счетам банки выплачивают проценты.

Другая возможность пополнения дохода или решения финансовых проблем – ***кредит***, т. е. сумма, взятая в долг на определенное время. Лицо (экономический агент), предоставляющее (дающее) капитал в долг, называется ***кредитором***, одалживаемая сумма – ***кредитом***, а лицо (экономический агент), берущее в долг, – ***дебитором***.

Кредитом пользуются при крупных покупках (сделках): значительную финансовую сумму получают единовременно, а возвращают частями. При оформлении кредита оговариваются и фиксируются в договоре сроки его погашения, процентная ставка, размер возвращаемых частичных сумм, обязанности сторон и т. д.

Кредиты классифицируются в зависимости от:

- ***вида кредита*** – *банковский, коммерческий, инвестиционный*, …;
- ***срока кредитования*** – *краткосрочный* (до одного года), *среднесрочный* (сроком от года до пяти лет) и *долгосрочный* (свыше 5 лет);
- ***места нахождения кредитора*** – *внутренний* или *международный* (если дебитор и кредитор находятся в разных странах).

Задание с решением

Предприниматель выдает кредит в сумме 16 000 д. е. сроком на 1,5 года под 18% годовых (в режиме простого процента). Вычислим сумму, которую он получит в конце срока кредитования.

Решение:

Вычислим простой процент $(S_0 = 16000)$:

$$D_t = \frac{p}{100} \cdot S_0 \cdot t = \frac{18}{100} \cdot 16000 \cdot 1{,}5 = 4320 \text{ (д. е.)}.$$

Следовательно, в конце срока предприниматель получит сумму:

$$S_t = S_0 + D_t = 16\,000 + 4\,320 = 20320 \text{ (д. е.)}.$$

Ответ: 20 320 д. е.

Краткосрочный кредит может быть погашен единовременно в конце оговоренного срока. В таких случаях применяется простая процентная ставка. Погашение долгосрочного кредита может осуществляться по различным схемам. Например, первоначальная сумма делится на равные части, которые дебитор выплачивает периодически, наряду с процентами за неоплаченный кредит, или первоначальную сумму и все процентные деньги делят на число периодов, и дебитор выплачивает равные суммы в каждый оговоренный договором срок.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Годовой доход семьи составляет 120 000 д. е.
а) В годовом бюджете семьи для летнего отдыха предусмотрено 16 000 д. е. Какой процент составляет эта сумма от годового дохода?
б) Какую сумму необходимо предусмотреть на продукты питания, если их доля в семейном бюджете составляет 22%?

2. Ежемесячный бюджет студента составляет 200 д. е.: 80 д. е. – стипендия и 120 д. е. – помощь родителей. На городском конкурсе молодых изобретателей он получил премию – именную стипендию, которая на 25% выше той, которую он получал. На сколько процентов увеличился месячный бюджет студента, если он получает только именную стипендию, а помощь родителей остается прежней?

3. Клиент открыл счет в банке с простой процентной ставкой в 9%. Какова первоначальная сумма, если после 1 года клиенту выдали 2 452,5 лея?

B

4. ***Работайте в парах!*** В банке открыт счет на 1000 леев с процентной ставкой в 4,5%.
Какую сумму получит клиент по истечении 4 лет:
а) при обыкновенном простом проценте;
б) при сложном проценте с годовой капитализацией;
в) при сложном проценте с месячной капитализацией?

5. Банк выдал кредит в сумме 4 500 леев под 7% сложных годовых процентов. Какую сумму получит банк через 2 года:
а) при годовой капитализации;
б) при ежемесячной капитализации?

6. Клиент открыл депозитный счет в банке под 6,5% сложных годовых процентов с годовой капитализацией. Какова была первоначальная сумма, если через 2 года клиент получил 3 970 леев?

C

7. За компьютер заплатили в магазине 2500 д. е., в том числе 20% НДС и 31% – торговая надбавка. Какова себестоимость компьютера (у производителя)?

8. В семейном годовом бюджете на продукты питания первоначально запланировали 20% от общего дохода. Удалось сэкономить 8% от этих расходов, что составляет 400 леев. Сколько средств предусмотрено на отдых, если они составляют 5% от общего дохода?

Реальный профиль

A_1

1. ***Работайте в группах!*** Банк предлагает 3 вида депозитных счетов:
а) под 9% простых годовых процентов;
б) под 8% сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией;
в) под 8% сложных годовых процентов с ежемесячной капитализацией.
Какой депозит принесет больший доход за 1,5 года?

2. На производство 15 самокатов всего было израсходовано 2 040 д. е., а в результате их реализации получена прибыль в 244,8 д. е. Какова цена одного самоката, если НДС составляет 10%?

3. ***Исследуйте!*** Клиент хочет открыть счет в банке на 10 000 д. е. на 2 года и должен выбрать из следующих двух видов депозитов:
а) первый год под 5% простых годовых процентов, второй год – под 7% простых годовых процентов (от накопленной за первый год суммы);
б) под 6,1% сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией.
Какой из этих вариантов выгоднее?

B_1

4. На покупку одежды семья затрачивает 8% от общего годового дохода, а на отдых – 6%. Если бы затраты на покупку одежды сократились на 40%, а на отдых – на 25%, то было бы сэкономлено 114,24 д. е. Определите годовой доход семьи.

5. По истечении 3 лет на депозитном счете под r сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией оказалось 5 788,125 д. е. Найдите величину r, если первоначальная сумма на счете составляла:
а) 5 000 д. е.; б) 4 500 д. е.

6. Кредит в сумме 10 000 д. е. необходимо погасить через 10 лет. Какую общую сумму должен вернуть дебитор, если процентные деньги исчисляются в виде сложных годовых процентов с ежегодной капитализацией под: а) 10%; б) 16% ?

C_1

7. Фабрика изготовила 200 костюмов. Магазин перечислил ей 90 д. е. за каждый костюм. Найдите общую прибыль фабрики, если сырье стоит 10 000 д. е., производственные затраты составляют 30% от стоимости сырья и НДС равен 20%.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Определите, какие из следующих примеров задают некоторый статистический признак:
а) количество дней в ноябре;
б) возраст студентов, принятых в 2017 г. на первый курс Государственного Университета Молдовы;
в) расход топлива (в литрах) на 100 км пути для автомобилей определенной марки;
г) возраст, который дает право гражданину Республики Молдова впервые принять участие в выборах.

2. Елена Петрова имеет месячную начисленную зарплату 2 700 леев. Из этой суммы отчисляются в фонд социального страхования, в фонд обязательного медицинского страхования и др. всего 37% (от начисленной зарплаты). Ее коллега Анна Лукьян имеет начисленную зарплату 2 550 леев, из которой отчисляются 32%. У кого больше и на сколько выданная зарплата?

B

3. Дано расстояние, пройденное 50 автомобилями определенной марки при расходе 10 л бензина.

а) Постройте гистограмму и полигон абсолютных частот.

б) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду данного статистического ряда.

Расстояние (км) интервал	Число автомобилей (n_i)
[85, 90)	2
[90, 95)	8
[95, 100)	18
[100, 105)	14
[105, 110)	5
[110, 115]	3
Всего	**50**

4. Для организации концертного турне музыкальный коллектив взял кредит в банке в размере 100 000 д. е. (сроком на один месяц, с годовой процентной ставкой 18%). Каждый концерт приносит прибыль не менее 5 000 д. е. Сколько концертов должен дать коллектив в этом месяце, чтобы после возврата кредита он получил прибыль не менее 15 000 д. е.?

C

5. ***Работайте в парах!*** Известно количество братьев и сестер каждого из 30 учеников класса, что отражено в виде статистического ряда.
а) Найдите среднее количество братьев и сестер у одного ученика.

б) Укажите количество братьев и сестер, накопленная относительная частота которого больше 0,8, но меньше 0,9.

в) Постройте полосовую диаграмму данного статистического ряда.

Количество братьев и сестер	Число учеников
0	7
1	12
2	6
3	2
4	2
5	1

6. Деятельность художественного коллектива финансируется государством в размере 50 000 д. е. ежемесячно. Однако он имеет право заниматься концертной деятельностью для увеличения своего дохода. На сколько процентов увеличится месячный доход, если ежемесячно прибыль от концертов составляет 42 000 д. е., из которых 12% налогов перечисляются государству?

7. ***Исследуйте!*** Представьте эволюцию рекордов в прыжках в высоту от первого рекорда (2 м, 1912 г., Джордж Хорайн) до текущего рекорда (2,45 м, 1993 г., Хавьер Сотомайор) с помощью статистического ряда, где рекорды будут сгруппированы на 5 промежутках. Статистической характеристикой X является высота (рекорд). Определите среднее арифметическое $\overline{X}$.

8. ***Работайте в группах!*** Проект *Кредит для моего дома*.

Реальный профиль

A₁

1. В классе 35 учеников, 14 из них – юноши. Средний рост учеников равен 1,64 м, средний рост девушек 1,6 м. Найдите средний рост юношей.

2. ***Исследуйте!*** *Кредиты: преимущества и риски.*

3. Спортивная школа намерена приобрести 150 спортивных костюмов по 110 леев каждый. Поскольку объем покупки большой, то магазин предоставляет скидку в размере 15%. Сколько всего будет уплачено денег, если НДС составляет 10% от реальной цены (после понижения)?

B₁

4. ***Работайте в группах!*** Приготовили 70-процентный раствор азотной кислоты (HNO_3). При проверке в результате 60 измерений получили следующие значения концентрации (см. таблицу).
а) Сгруппируйте эти данные по интервалам:
[67, 68), [68, 69), [69, 70), [70, 71), [71, 72), [72, 73).
б) Постройте гистограмму относительных частот.
в) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду концентрации раствора.

70,4	71,3	70,1	69,9	70,6	69,8
68,4	70,9	69,8	69,3	70,9	71,9
69,2	70,3	69,7	68,2	69,1	70,9
71,5	70,5	69,4	70,5	72,2	71,7
70,4	68,1	67,6	70,3	68,7	71,1
69,7	70,4	67,3	68,4	70,2	69,6
70,1	67,7	68,9	70,9	69,9	72,4
70,6	69,8	70,1	72,5	70,3	71,8
70,4	69,2	70,2	71,6	70,5	72,3
70,8	70,6	68,9	70,4	71,6	70,9

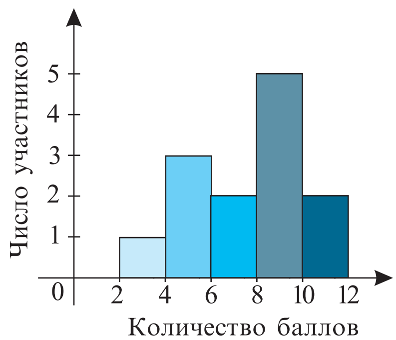
5. ***Работайте в парах!*** Продажи автомобилей специализированным магазином отражены в таблице.
а) Что является здесь статистическим признаком? Является ли он количественным или качественным? Если он количественный, то дискретный или непрерывный?
б) Постройте круговую диаграмму данного статистического ряда.

Марка	Продано автомобилей (n_i)
Renault	27
Peugeot	25
Citroën	22
BMW	7
Mercedes	6
Toyota	3
Всего	**90**

6. Телевизор стоит в магазине 2 900 леев, а склад предлагает его со скидкой в 25%. Поскольку нужно заплатить (на складе) и НДС 16%, то покупатель рассудил, что окончательную цену можно определить, если вычесть из первоначальной цены сумму, составляющую 9% от нее. Прав ли покупатель?

C₁

7. Количество баллов, набранных участниками некоторого конкурса, задано с помощью следующей гистограммы абсолютных частот.
а) Найдите среднюю арифметическую, медиану и моду соответствующего статистического ряда.
б) Каков процент участников конкурса, набравших меньше 6 баллов?



8. ***Исследуйте!*** После проверки контрольных работ по математике оказалось, что средняя оценка учеников класса равна 6,9 (баллов).
а) Если бы оценка каждой работы была на 1,1 балла больше, то какова была бы средняя оценка?
б) Если бы оценка каждой работы была на 10% больше, то какова была бы средняя оценка?

9. ***Работайте в группах!*** Проект *Финансовая безопасность государства*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

1. Дополните так, чтобы высказывание было истинным:

а) «Статистические данные могут быть сгруппированы по ______________ или ______________».

б) «Гистограмма применяется в случае, когда данные сгруппированы по ______________».

в) «Медиана набора чисел, расположенных в порядке __________ или __________, это число, которое находится __________».

2. В таблице приводятся самые популярные имена новорожденных, появившихся на свет в Республике Молдова в 2020 году. Постройте полосовую диаграмму.

Имя	Абсолютная частота
Давид	846
София	747
Амелия	729
Матвей	663
Богдан	586

3. Оформляется кредит в сумме 6000 д. е. сроком на 2 года. Какую сумму должен вернуть дебитор, если:

а) кредит выдан под 20% простых процентов;

б) кредит выдан под 18% сложных процентов с ежегодной капитализацией?

4. Эволюция мировых рекордов в беге на 100 м (мужчины) с 1912 по 2007 год отражена в приложенной таблице, где рекорды сгруппированы по интервалам.

а) Укажите статистический признак X.

б) Найдите среднее арифметическое для X.

в) Кому принадлежит последний рекорд на этой дистанции?

Время	К-во рекордов (n_i)
[9,58; 9,79)	7
[9,79; 10,00)	10
[10,00; 10,21)	3
[10,21; 10,42)	7
[10,42; 10,63]	1

Реальный профиль

1. В таблице задано распределение работников фирмы по уровню заработной платы.

а) Дополните, чтобы получить истинное высказывание: «Статистические данные сгруппированы по ________».

б) Найдите среднее арифметическое.

в) Найдите медиану статистического ряда.

Зар. плата (тыс. леев)	Число работников (n_i)
[3,0; 3,5)	4
[3,5; 4,0)	6
[4,0; 4,5)	16
[4,5; 5,0)	10
[5,0; 5,5]	4
[5,5; 6,0]	3
Всего	**43**

2. В таблице приводятся самые популярные имена для девочек, появившихся на свет в Республике Молдова в 2020 году.

Постройте полосовую диаграмму.

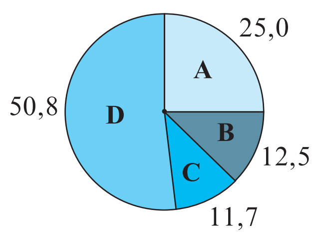
Имя	Абсолютная частота
София	747
Амелия	729
Анастасия	448
Мария	438
Виктория	431

3. Кредит в сумме 10000 д. е. выплатят через 10 лет.
Какую сумму должен вернуть дебитор, если:

а) кредит выдан под 19% простых процентов;

б) кредит выдан под 16% сложных процентов с ежегодной капитализацией?

4. Рассматривается статистический ряд объема 120, представленный структурным кругом.
Найдите абсолютную частоту значения **B** соответствующего статистического признака.



Элементы математической статистики и финансовой математики

Средние величины:

- средняя арифметическая: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^* n_i$, где x_i^* – середина интервала
- медиана: $Me = x_{\inf}(m_e) + h(m_e) \cdot \frac{\frac{n+1}{2} - \sum_{i=1}^{m_e - 1} n_i}{n_{m_e}}$, где n – объем статистической совокупности,
  $h(m_e)$ – длина медианного интервала,
  m_e – индекс медианного интервала,
  n_{m_e} – абсолютная частота в медианном интервале.
- мода: $Mo = x_{\inf} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')}$

Модуль

7

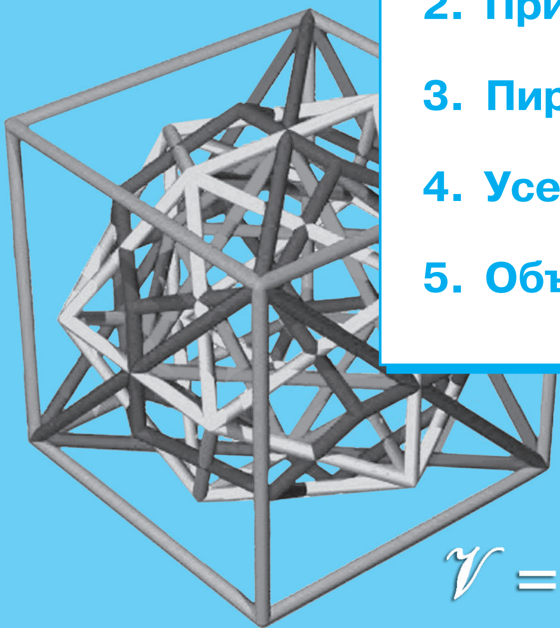
Многогранники

Геометрия – это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах.

Нильс Г. Абель

Цели модуля

- распознавание многогранников и их классификация по разным критериям;
- построение сечений многогранников плоскостями;
- распознавание в многогранниках плоских геометрических фигур;
- применение свойств многогранников в различных контекстах;
- применение формул вычисления площадей и объемов многогранников в различных контекстах.



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}H(\mathcal{A}' + \sqrt{\mathcal{A}'\mathcal{A}} + \mathcal{A})$$

§ 1 ПОНЯТИЕ МНОГОГРАННИКА

Напомним, что в геометрии под фигурой понимают некоторое множество точек. Простейшие геометрические фигуры: точки, прямые, полупрямые, отрезки, плоскости, полуплоскости – это *плоские геометрические фигуры*. Куб, прямоугольный параллелепипед, двугранный угол являются *пространственными геометрическими фигурами*, так как они содержат и некомпланарные точки.

Определения

• **Сферой** с центром O и радиусом $R > 0$ называется множество точек пространства, находящихся на расстоянии R от точки O. Отрезок, соединяющий точку O с произвольной точкой сферы, называется **радиусом** сферы.

• **Открытым (замкнутым) сферическим телом** или **открытым (замкнутым) шаром** с центром O и радиусом $R > 0$ называется геометрическое место точек пространства, расстояние от каждой из которых до точки O меньше, чем число R (не больше числа R).

• Точка пространственной фигуры называется **внутренней точкой** фигуры, если существует открытое сферическое тело, все точки которого принадлежат данной фигуре. Множество внутренних точек фигуры называется **внутренней областью** этой фигуры.

• Точка пространства называется **внешней точкой** фигуры, если существует такое открытое сферическое тело с центром в этой точке, которое не содержит точек данной фигуры.

• Геометрическая фигура называется **областью**, если все ее точки являются внутренними и любые две из них можно соединить ломаной, состоящей из точек данной фигуры.

• Точка пространства называется **граничной точкой** фигуры, если любое открытое сферическое тело с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие этой фигуре. Множество всех граничных точек данной фигуры называется **границей** фигуры.

• Фигура называется **ограниченной** или **конечной**, если существует сферическое тело, содержащее ее.

• **Геометрическим телом** (**телом**) называется конечная область вместе с ее границей.

• Граница тела называется **поверхностью** тела.

Примеры

1 Замкнутое сферическое тело с центром O и радиусом R является геометрическим телом (рис. 7.1). Сфера с центром O и радиуса R является поверхностью этого тела. Множество всех точек, расположенных на расстоянии меньшем, чем R от центра O, образует внутреннюю часть сферического тела и является областью. Точки A и C – граничные точки, точка B – внутренняя точка.

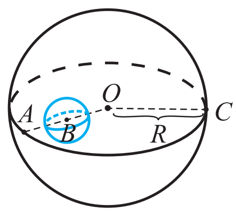


Рис. 7.1

2 На рисунке 7.2 изображен двугранный угол. Эта фигура не является ограниченной и образована только из граничных точек. Двугранный угол не является геометрическим телом.

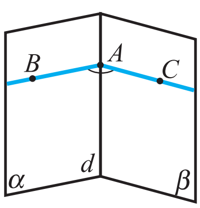


Рис. 7.2

3 Пусть A, B, C, D – некомпланарные точки. Фигура, образованная объединением отрезков AB, AC, AD, BD, BC, DC, называется ***прозрачным тетраэдром***. Прозрачный тетраэдр не является геометрическим телом, так как состоит только из граничных точек (рис. 7.3).

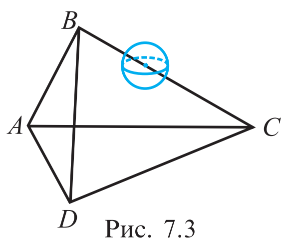


Рис. 7.3

4 Напоминаем, что фигура, состоящая из конечной части плоскости, ограниченной многоугольником, называется ***плоским многоугольником***. Пусть A, B, C, D – некомпланарные точки. Фигура, образованная объединением плоских треугольников ABC, DBC, ADC, DAB, называется ***непрозрачным тетраэдром*** (рис. 7.4). Эта фигура не имеет внутренних точек, поэтому не является геометрическим телом.

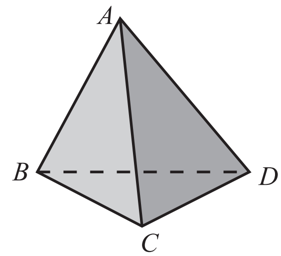


Рис. 7.4

5 Пусть A, B, C, D – некомпланарные точки. Фигура, образованная объединением всех отрезков DM, где точка M принадлежит плоскому треугольнику ABC, называется ***тетраэдром*** или ***треугольной пирамидой*** (рис. 7.5).

Эта фигура является геометрическим телом, так как она ограничена и состоит только из внутренних и граничных точек. Точки плоских треугольников ABC, ABD, ACD, BCD являются граничными точками, а все точки $N \in (DM)$ являются внутренними (рис. 7.5).

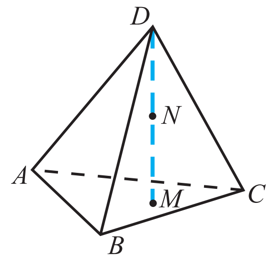


Рис. 7.5

Действительно, пусть R – кратчайшее расстояние от точки N до плоскостей ABC, ABD, ACD, BCD. Тогда сферическое тело с центром N и радиусом $\frac{R}{2}$ состоит только из точек тетраэдра.

Примем без доказательства следующую теорему:

Теорема 1

Любая полупрямая, началом которой является внутренняя точка геометрического тела, пересекает границу тела хотя бы в одной точке.

Определения

- **Многогранником** называется ограниченное тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.
- Плоские многоугольники, ограничивающие многогранник, называются **гранями** многогранника, стороны граней называются **ребрами**, а концы ребер – **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

Замечание

В дальнейшем грань многогранника будет именоваться так же, как и многоугольник, ограничивающий эту грань.

Определения

- Многогранник называется **выпуклым многогранником**, если он находится по одну сторону каждой плоскости, содержащей грань многогранника.
- Выпуклый многогранник называется **правильным многогранником**, если его грани – конгруэнтные правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Существуют только пять типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, куб, правильный октаэдр, правильный додекаэдр, правильный икосаэдр (см. *Понятийную карту*, с. 168).

Определения

- Тело T **конгруэнтно** телу T', если существует такая изометрия f пространства, что $f(T) = T'$.
- Тело T называется **подобным** телу T', если существует преобразование подобия f пространства с коэффициентом λ такое, что $f(T) = T'$. Число λ называется **коэффициентом подобия** тел T и T'.

§ 2 ПРИЗМА

Говорим, что ***точка C расположена между различными параллельными плоскостями*** α и β, если существует отрезок AB, содержащий точку C, концы которого принадлежат данным плоскостям (рис. 7.6).

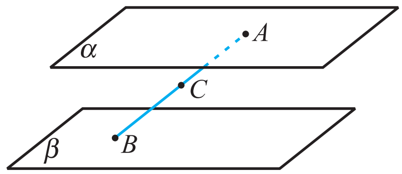


Рис. 7.6

Заметим, что множество точек, находящихся между параллельными плоскостями α и β, является областью, а данные плоскости образуют ее границу.

Определение

Слоем, определенным параллельными плоскостями α и β, называется объединение множества всех точек, расположенных между этими плоскостями, и плоскостей α и β.

Определение

Пусть $A_1A_2...A_n$ – плоский многоугольник на плоскости α, g – прямая, непараллельная плоскости α, и β – плоскость, параллельная плоскости α, $\beta \neq \alpha$. Многогранник, образованный пересечением слоя, определенного плоскостями α и β, с объединением прямых, параллельных прямой g и проходящих через каждую точку плоского многоугольника $A_1A_2...A_n$, называется **призмой** (рис. 7.7).

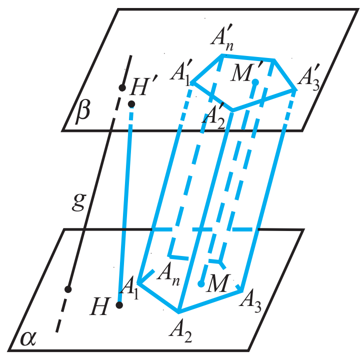


Рис. 7.7

Параллельный перенос в направлении прямой g отображает плоскость α на плоскость β, многоугольник $A_1A_2...A_n$ – на многоугольник $A'_1A'_2...A'_n$. Следовательно, эти многоугольники конгруэнтны.

Грани $A_1A_2...A_n$ и $A'_1A'_2...A'_n$ называются ***основаниями призмы***.

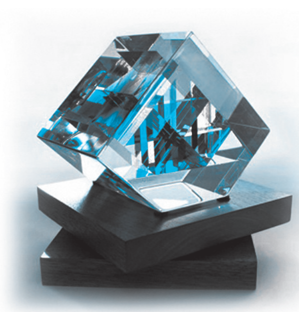
Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2

Основания призмы являются конгруэнтными многоугольниками.

Остальные грани призмы ($A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ...) называются ***боковыми гранями***; ребра, параллельные прямой g ($A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...), называются ***боковыми ребрами***.

Отрезок HH', концы которого принадлежат плоскостям оснований α и β, перпендикулярный этим плоскостям, называется ***высотой*** призмы (рис. 7.7). Расстояние между плоскостями оснований призмы также называется ***высотой*** призмы.



Из определения следует, что боковые ребра призмы параллельны и конгруэнтны. Из этого заключаем, что боковые грани призмы являются параллелограммами.

Призма называется ***треугольной*** (***четырехугольной*** или ***n-угольной***), если ее основание – треугольник (четырехугольник или n-угольник).

Поверхность n-угольной призмы состоит из двух n-угольников (основания призмы) и n параллелограммов (боковые грани призмы).

Определения

- Сумма площадей всех граней призмы называется **площадью полной поверхности** призмы.
- Сумма площадей боковых граней призмы называется **площадью боковой поверхности** призмы.

Если обозначим: $\mathcal{A}_{\text{полн.}}$ – площадь полной поверхности, $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$ – площадь боковой поверхности, $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы, то:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + 2\mathcal{A}_{\text{осн.}}}.$$

Определения

• Призма называется **прямой призмой**, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 7.8).

• Призма называется **наклонной призмой**, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям (рис. 7.7).

Заметим, что боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками, а боковое ребро совпадает с высотой призмы. Если обозначим длину бокового ребра прямой призмы через l, а периметр многоугольника основания через $\mathcal{P}$, то ***площадь боковой поверхности прямой призмы*** вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \mathcal{P} \cdot l}.$$

Определение

Прямая призма, основание которой – правильный многоугольник, называется **правильной призмой**.

Если обозначим радиус окружности, вписанной в основание правильной призмы, через r, получим ***формулу вычисления площади полной поверхности правильной призмы***:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{P} \cdot l + \mathcal{P} \cdot r}, \quad \text{или} \quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{P}(l + r)}.$$

Определение

Параллелепипедом называется призма, основание которой – параллелограмм.

Все грани параллелепипеда являются параллелограммами (рис. 7.8).

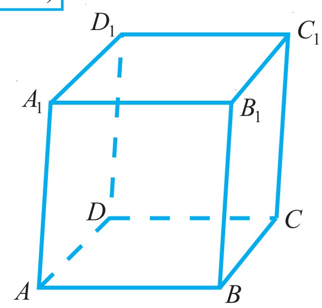


Рис. 7.8

Определение

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник, называется **прямоугольным параллелепипедом**.

Теорема 3

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его ребер, исходящих из одной вершины.

Задание. Докажите теорему 3.

Определение

Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого конгруэнтны, называется **кубом**.

Очевидно, что все грани куба являются конгруэнтными квадратами. У куба девять плоскостей симметрии.

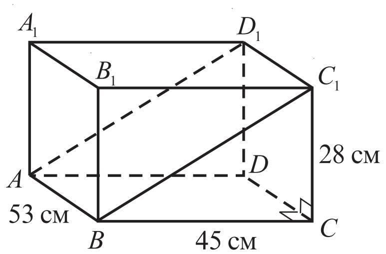
Задание с решением

Картонная коробка имеет вид и размеры, указанные на рисунке 7.9 а). Она открывается вращением крышки $ABB_1A_1D_1C_1$ вокруг прямой AB (рис. 7.9 б).

а) Вычислим длину липкой ленты, необходимой для заклеивания коробки по ломаной линии AD_1C_1B, если известно, что все грани коробки являются прямоугольниками.

б) Можно ли упаковать в эту коробку саблю длиной 72 см?

а)



б)

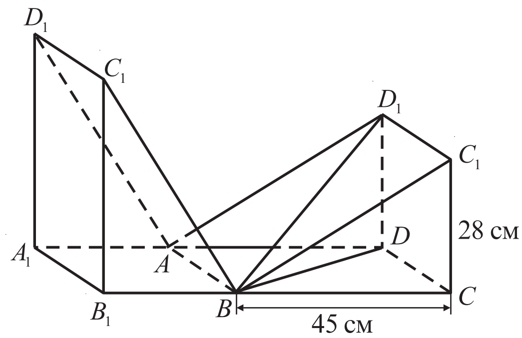


Рис. 7.9

Решение:

а) Коробка является прямоугольным параллелепипедом. Так как $AD_1 = BC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2} = \sqrt{2\,809} = 53$ (см), то длина липкой ленты равна $AD_1 + D_1C_1 + C_1B = 159$ см.

б) Согласно теореме 3, диагональ $AC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2 + 53^2} = 53\sqrt{2} \approx 74{,}9$ (см).

Следовательно, саблю длиной 72 см можно упаковать в коробку, уложив ее по диагонали коробки (рис. 7.10).

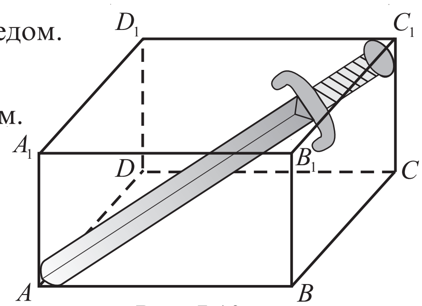


Рис. 7.10

Определение

Непустое пересечение многогранника и плоскости называется **сечением** многогранника данной плоскостью. В этом случае говорим, что плоскость пересекает многогранник и называется **секущей плоскостью**.

Сечения многогранника плоскостью могут быть:

а) точками; б) отрезками; в) многоугольниками.

Рассмотрим только сечения-многоугольники, так как остальные случаи тривиальны.

Построить сечение многогранника данной плоскостью – значит, указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Вообще, точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника являются вершинами многоугольника, полученного при пересечении многогранника данной плоскостью, а отрезки, принадлежащие граням, являются сторонами этого многоугольника.

Для построения сечения многогранника данной плоскостью поступаем следующим образом:

1) на плоскости каждой грани, пересеченной секущей плоскостью, отмечаем две точки, принадлежащие сечению;
2) находим точки пересечения ребер многогранника с прямыми, проходящими через отмеченные точки;
3) соединяем эти точки и выделяем сечение.

Секущая плоскость может быть определена разными способами (тремя неколлинеарными точками, точкой и прямой и др.).

Примеры

1 Сечение призмы плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не принадлежащих одной грани, является параллелограммом. Это сечение называется ***диагональным сечением*** призмы.

2 Сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ параллелепипеда, является параллелограммом. В этом случае секущая плоскость определяется концами диагонали и точкой на грани (или на ребре).

3 Сечение призмы плоскостью, параллельной основаниям, является многоугольником, конгруэнтным ее основаниям.

Задания с решением

1 Построим сечение четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и C (рис. 7.11).

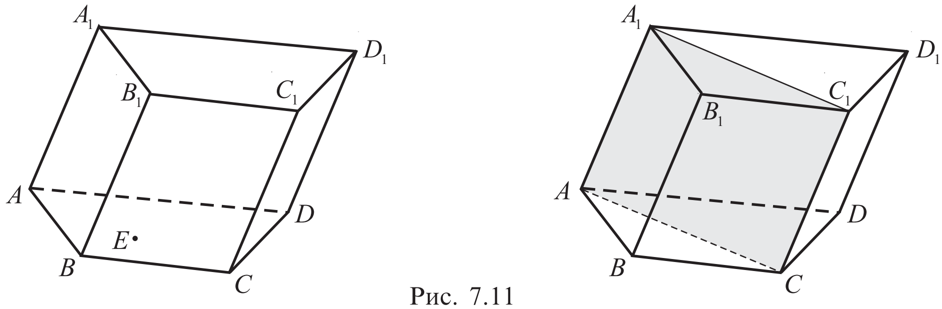


Рис. 7.11

Решение:

Плоскость A_1C_1C содержит параллельные ребра AA_1 и CC_1, которые не принадлежат одной грани. Следовательно, получим диагональное сечение – параллелограмм ACC_1A_1.

2 В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 пересекает плоскость BDA_1 в точке M (рис. 7.12). Найдем $AM : MC_1$.

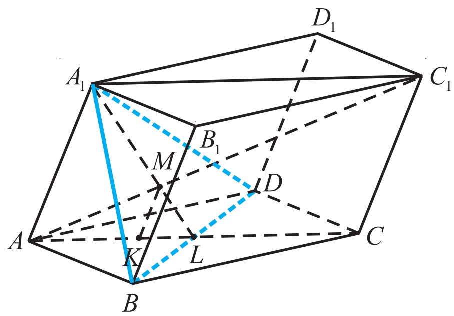


Рис. 7.12

Решение:

Точка M является точкой пересечения медиан треугольника BA_1D. Действительно, плоскость BA_1D пересечена плоскостями AA_1C_1, ABC_1, ADC_1, определяемыми диагональю AC_1 и ребрами AA_1, AB, AD соответственно, по прямым, содержащим медианы треугольника BA_1D.

Рассмотрим сечение параллелепипеда плоскостью AA_1C_1. Пусть $[A_1L]$ – медиана стороны BD треугольника BA_1D, а $[MK] \| [AA_1]$, $K \in [AC]$.

Из того, что $\Delta AA_1L \sim \Delta KML$, $\Delta AKM \sim \Delta ACC_1$ и так как M – центр тяжести треугольника BA_1D, получаем:

$$1:3 = ML : LA_1 = KM : AA_1 = KM : CC_1 = AM : AC_1.$$

Откуда получаем: $AM : MC_1 = 1:2$.

3 Длина бокового ребра призмы равна l, а периметр многоугольника, вершины которого являются точками пересечения боковых ребер с перпендикулярной им плоскостью (сечение, перпендикулярное боковым ребрам), равен $\mathscr{P}$. Вычислим площадь боковой поверхности призмы.

$\mathscr{A}_{бок.} = \mathscr{P} \cdot l$

Решение:

Рассмотрим призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ и сечение $FGHKL$, перпендикулярное боковым ребрам (рис. 7.13). Площадь боковой поверхности призмы:

$$\mathscr{A}_{бок.} = AA_1 \cdot FG + BB_1 \cdot GH + ... + EE_1 \cdot FL =$$
$$= l(FG + GH + ... + FL) = l \cdot \mathscr{P}.$$

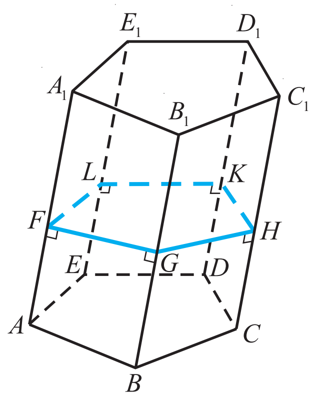


Рис. 7.13

Итак, площадь боковой поверхности призмы равна произведению длины бокового ребра и периметра сечения, перпендикулярного боковому ребру призмы.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Площадь полной поверхности куба равна 96 см^2. Найдите длину:
а) диагонали куба;
б) диагонали грани куба.

2. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, если длина диагонали призмы равна 13 см, а длина диагонали боковой грани 12 см.

3. Основание прямой призмы – ромб с острым углом в 30°. Все ребра призмы равны 4 см. Найдите площадь полной поверхности призмы.

4. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого в два раза больше длины одного катета. Найдите величины двугранных углов, образованных боковыми гранями.

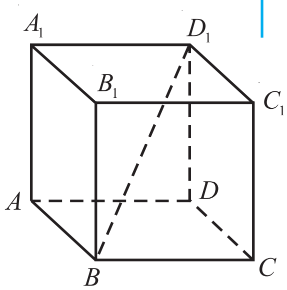
B

5. Основание прямой призмы – ромб со стороной 6 см и острым углом 60°. Бо́льшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите:
а) диагонали призмы;
б) площадь полной поверхности призмы.

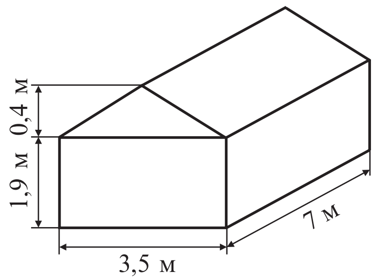
6. Все ребра правильной шестиугольной призмы равны 6 см. Найдите:
а) диагонали призмы;
б) площади диагональных сечений;
в) площадь полной поверхности призмы.

7. ***Работайте в парах!*** Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 10 см и 4 см. Острый угол трапеции конгруэнтен углу, образованному диагональю призмы с плоскостью основания, и равен 45°. Найдите длину:
а) бокового ребра призмы;
б) диагонали призмы.

8. На рисунке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Постройте ортогональную проекцию отрезка BD_1 на плоскость (ABB_1).



9. Сколько краски потребуется для покраски внешней поверхности гаража, размеры которого даны на рисунке, если на покраску 1 м^2 идет 40 г краски?



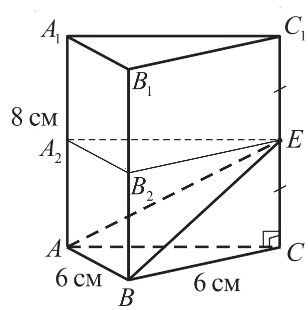
10. Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, размеры которого 1 см, 2 см и 3 см.

11. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 6 см и 8 см и образуют угол в 60°. Длина бокового ребра 8 см. Найдите:
а) длины диагоналей параллелепипеда;
б) площадь полной поверхности параллелепипеда.

C

12. В правильной треугольной призме длина стороны основания равна 6 см, а высота призмы 8 см. Найдите углы, образованные двумя диагоналями боковых граней, исходящих из одной вершины.

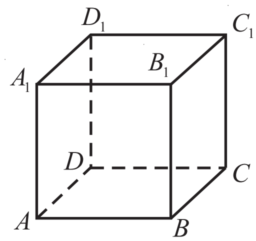
13. Через сторону основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость, которая пересекает противоположное боковое ребро в его середине (точка E). Длина стороны основания призмы равна 6 см, а длина бокового ребра 8 см. Найдите:
а) площадь треугольника ABE;
б) площадь полной поверхности многогранника $EABB_2A_2$, где A_2B_2E является сечением, параллельным основаниям.



14. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда 2 см, 3 см, 6 см. Найдите:
а) длины диагоналей параллелепипеда;
б) величину угла, образованного диагональю и гранями параллелепипеда.

Реальный профиль

A_1



1. Если длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок) равна 2 см, то расстояние от вершины B_1 до плоскости (AA_1C) равно ☐ см.

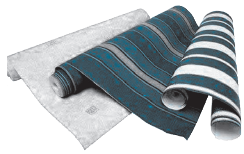
2. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1 см (см. рисунок). Запишите длину диагонали AC_1. $AC_1 =$ ☐ см.

3. Основание прямого параллелепипеда – ромб со стороной 6 см и острым углом 60°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда равна 144 см². Найдите длины диагоналей параллелепипеда.

4. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат со стороной 10 см, боковое ребро равно 12 см. Найдите:
а) площадь полной поверхности призмы;
б) расстояние от центра одного основания до прямой, проходящей через вершину этого основания и центр другого основания.

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{P}(l + r)$$

B_1



5. ***Работайте в парах!*** Стены двух комнат, размеры которых 4 м × 5 м × 2,6 м и 3 м × 4 м × 2,6 м, необходимо оклеить обоями. Поверхность дверей и окон составляет 10% от полной поверхности стен. Сколько рулонов обоев нужно купить, если лист рулона имеет размеры 0,5 м × 10 м?

6. Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – правильный треугольник со стороной a. Боковое ребро AA_1 образует со сторонами основания AB и AC конгруэнтные углы, равные α. Известно, что $AA_1 = b$. Найдите:
а) площадь боковой поверхности призмы;
б) высоту призмы.

7. ***Работайте в парах!*** Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – правильный треугольник со стороной 6 см. Боковое ребро AA_1 образует с плоскостью основания угол 60°. Известно, что проекция точки A_1 на плоскость основания является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите:
а) высоту призмы;
б) расстояние от точки A_1 до середины стороны BC;
в) расстояние от точки A до середины стороны B_1C_1;
г) площадь боковой поверхности призмы.

8. Основание треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – правильный треугольник со стороной 6 см. Боковое ребро AA_1 образует с плоскостью основания угол 60°. Известно, что проекцией точки A_1 на плоскость основания является середина стороны BC. Найдите:
а) высоту призмы;
б) расстояние от точки A до середины стороны B_1C_1.

9. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = a$, $AA_1 = h$. Найдите величину угла, образованного прямыми: а) AB_1 и BC_1; б) A_1C_1 и AB_1.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра конгруэнтны. Найдите величину угла, образованного прямыми:
а) AB_1 и BC; б) AB_1 и CD_1;
в) AB_1 и DE_1; г) AB_1 и EF_1;
д) AB_1 и BD_1; е) AB_1 и BE_1.

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \mathcal{P} \cdot l$$

C_1

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = a$, $AA_1 = h$.
а) Найдите величину угла, образованного прямыми A_1B и B_1C.
б) При каком соотношении a и h указанные прямые будут взаимно перпендикулярными?

12. Основание призмы – равнобедренная трапеция, основания которой равны 88 см и 56 см, а боковые стороны равны 34 см. Одно из диагональных сечений призмы перпендикулярно основаниям и является ромбом с острым углом 30°. Найдите высоту призмы.

13. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и образует с плоскостью основания угол, равный φ. Найдите: а) площадь боковой поверхности призмы;
б) площадь диагонального сечения призмы.

§ 3 ПИРАМИДА

Определение Пусть $A_1A_2...A_n$ – плоский многоугольник, V – точка, не принадлежащая плоскости многоугольника. Объединение всех отрезков VA, где A принадлежит многоугольнику $A_1A_2...A_n$, называется **пирамидой** с вершиной V и основанием $A_1A_2...A_n$ (рис. 7.14).

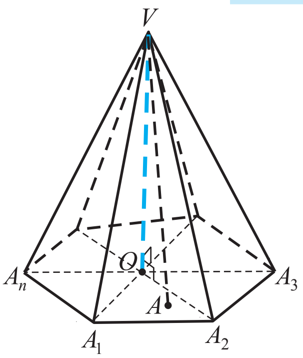


Рис. 7.14

Пирамида с вершиной V и основанием $A_1A_2...A_n$ обозначается $VA_1A_2...A_n$. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***вершинами основания***, отрезки $VA_1, VA_2, ..., VA_n$ называются ***боковыми ребрами***, треугольники $VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_{n-1}A_n$ называются ***боковыми гранями пирамиды***, углы $A_1VA_2, A_2VA_3, ..., A_nVA_1$ называются ***плоскими углами при вершине пирамиды*** (рис. 7.14).

Рассмотрим прямую, проходящую через вершину V пирамиды, перпендикулярную плоскости основания и пересекающую это основание в точке O. Отрезок VO называется ***высотой*** пирамиды (рис. 7.14). Длина этого отрезка также называется ***высотой*** пирамиды.

Напомним, что пирамиды можно классифицировать по числу сторон многоугольника основания: треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д.

Определение Пирамида называется **правильной**, если ее основанием является правильный многоугольник, и проекция вершины на плоскость основания является центром симметрии основания.

Все боковые грани правильной пирамиды являются конгруэнтными равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная к стороне основания, называется ***апофемой*** этой пирамиды.

Площадь полной поверхности пирамиды (обозначают $\mathcal{A}_{\text{полн.}}$) равна сумме площадей всех граней пирамиды.

Площадь боковой поверхности (обозначают $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$) равна сумме площадей боковых граней.

Если обозначить площадь основания через $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$, то $\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_{\text{осн.}}}$.

Если в правильной пирамиде известны длина апофемы h, полупериметр основания p и длина радиуса окружности, вписанной в основание пирамиды r, то:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = h \cdot p}, \quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{осн.}} = r \cdot p} \quad \text{и} \quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = p(h+r)}.$$

Теорема 4 Если боковые ребра пирамиды конгруэнтны, то многоугольник основания является вписываемым, и высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания.

Доказательство:

Пусть $A_1A_2...A_n$ – основание пирамиды, V – ее вершина, O – основание высоты (рис. 7.14).

Получаем $\Delta A_1VO \equiv \Delta A_2VO \equiv ... \equiv \Delta A_nVO$ как прямоугольные треугольники с общим катетом и конгруэнтными гипотенузами. Из конгруэнтности названных треугольников следует, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, то есть вершины многоугольника основания находятся на равном расстоянии от точки O. Итак, точка O является центром окружности, описанной около основания. ►

Следствие

Если углы, образованные высотой пирамиды и боковыми ребрами (или углы, образованные боковыми ребрами с плоскостью основания) конгруэнтны, то многоугольник основания является вписываемым, и высота проходит через центр окружности, описанной около основания.

Теорема 5

Если боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания двугранные конгруэнтные углы, то в многоугольник основания можно вписать окружность, и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Отметим, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с ее основанием, называются ***двугранными углами при основании пирамиды***.

Задание. Докажите теорему 5.

Следствие 1

Если высота пирамиды образует с боковыми гранями конгруэнтные углы, то в многоугольник основания можно вписать окружность, а высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Следствие 2

Если высоты боковых граней пирамиды, проведенные из ее вершины, конгруэнтны, то в многоугольник основания можно вписать окружность, и высота пирамиды проходит через центр этой окружности.

Определение

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и диагональ основания, называется **диагональным сечением**.

Сечение пирамиды плоскостью строится так же, как сечение призмы плоскостью.

Задание с решением

Основание пирамиды $SABCD$ – параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=6$см и $AD=10$см. Боковые грани SAB и SAD перпендикулярны плоскости основания и образуют двугранный угол в 120°. Наибольшее боковое ребро пирамиды равно 14 см (рис. 7.15). Построим диагональные сечения пирамиды. Вычислим площади построенных сечений.

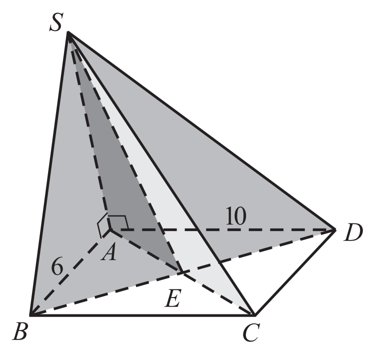


Рис. 7.15

Решение:

Искомые сечения – треугольники SAC и SBD.

Согласно теореме косинусов, из треугольников ABC и ABD получаем $AC=\sqrt{76}$ см, $BD=14$ см.

Так как $[AB]$, $[AC]$ и $[AD]$ являются проекциями наклонных, проведенных из точки S к плоскости ABC, то $[SD]$ является наибольшей наклонной (она имеет наибольшую проекцию).

Таким образом, SD = 14 см.

Вычислим высоту SA пирамиды:

$$SA=\sqrt{14^2-10^2}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_{\Delta SAC}=\frac{1}{2}SA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{19}=4\sqrt{114}$ (см^2).

Так как ΔSBD – равнобедренный со сторонами $SD=BD=14$ см, $SB=2\sqrt{33}$ см, получаем $\mathcal{A}_{\Delta SBD}=\sqrt{5379}$ см^2.

Теорема 6 Если пирамида высотой H пересечена плоскостью, параллельной основанию пирамиды, и расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости равно h, то сечение пирамиды этой плоскостью является многоугольником, подобным основанию, с коэффициентом подобия, равным $\frac{h}{H}$.

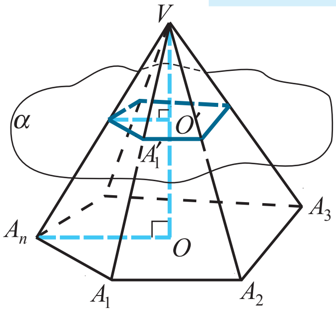


Рис. 7.16

Доказательство:

Пусть плоскость α, параллельная основанию пирамиды $VA_1A_2...A_n$, пересекает ребро VA_1 в точке A_1' (рис. 7.16). Рассмотрим гомотетию с центром V и коэффициентом $k=\frac{h}{H}=\frac{VO'}{VO}$.

Эта гомотетия отображает точку A_1 на точку A_1', а плоскость основания – на плоскость, параллельную основанию, проходящую через точку A_1', то есть на плоскость α. Так как гомотетия – это преобразование подобия, получаем, что сечение пирамиды плоскостью α является многоугольником, подобным основанию. ►

Следствие $\mathcal{A}_{\text{сеч.}} : \mathcal{A}_{\text{осн.}} = h^2 : H^2 = k^2$, где $\mathcal{A}_{\text{сеч.}}$ – площадь сечения, $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Основание пирамиды – прямоугольник, длины сторон которого равны 3 см и 4 см. Длина каждого бокового ребра пирамиды равна 6,5 см. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды.

2. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, а высота пирамиды 7 см. Найдите:
а) длину бокового ребра;
б) величину двугранного угла, образованного плоскостью основания и боковой гранью.

3. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 140 см^2, а площадь ее полной поверхности 165 см^2. Найдите:
а) длину стороны основания пирамиды;
б) высоту пирамиды;
в) расстояние от вершины пирамиды до секущей плоскости, параллельной основанию, если площадь сечения равна $\frac{1200}{253}$ см^2.

B

4. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 5 см и 12 см. Боковые ребра образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы в 45°. Найдите высоту пирамиды.

5. Основание пирамиды – прямоугольник, длины сторон которого 6 см и 8 см. Высота пирамиды равна 10 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите величину угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания.

6. ***Работайте в парах!*** Основание пирамиды – равносторонний треугольник со стороной 12 см. Боковые ребра образуют с плоскостью основания двугранные конгруэнтные углы в 30°. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) площадь полной поверхности пирамиды.

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_{\text{осн.}}$$

C

7. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания и конгруэнтно стороне основания. Найдите боковую поверхность пирамиды.

8. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 12 см и 16 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 45°. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) площадь боковой поверхности пирамиды.

Реальный профиль

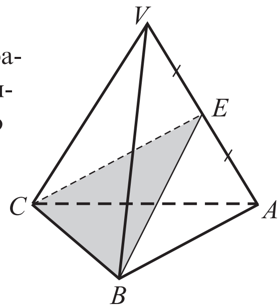
A₁

1. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 5 см и 12 см. Боковые ребра образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы, равные 60°. Найдите высоту пирамиды.

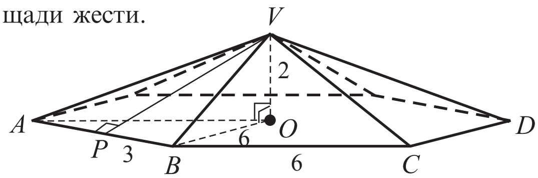
2. ***Работайте в парах!*** Основание пирамиды – равнобедренная трапеция, длины оснований которой равны 10 см и 40 см. Высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны 12,5 см. Найдите:
а) высоту пирамиды;
б) площадь боковой поверхности пирамиды;
в) величины двугранных углов при основании пирамиды;
г) площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию и проходящей через середину высоты пирамиды.

B₁

3. Основание правильной пирамиды $VABC$ – равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 12 см. Боковое ребро равно 5 см. Найдите площадь треугольника BCE, где E – середина бокового ребра VA.



4. ***Исследуйте!*** Крыша резервуара имеет форму правильной шестиугольной пирамиды высотой 2 м и стороной основания 6 м. Вычислите, сколько листов жести прямоугольной формы размера 0,7 м × 1,4 м потребуется для изготовления крыши, если на швы используется 10% необходимой площади жести.



5. Найдите длину бокового ребра и площадь боковой поверхности правильной пирамиды, у которой длина стороны основания равна 20 см и величина двугранного угла при основании равна 60°, если пирамида:
а) треугольная;
б) четырехугольная;
в) шестиугольная;
г) n-угольная, $n \geq 3$.

$$\mathcal{A}_{бок} = h \cdot p$$

6. Основание пирамиды $VABC$ – равносторонний треугольник ABC со стороной a. Боковая грань VCB перпендикулярна плоскости ABC.
Известно, что $m(\angle VAB) = m(\angle VAC) = \alpha$. Найдите:
а) длины боковых ребер пирамиды;
б) площадь боковой поверхности пирамиды;
в) величину φ двугранного угла, образованного гранями VAB и CAB.

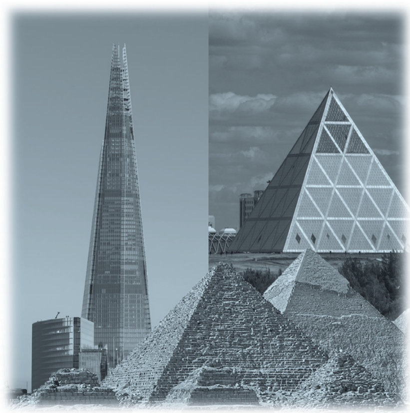
$$\mathcal{A}_{полн.} = p(h + r)$$

C₁

7. Основание пирамиды – параллелограмм, длины диагоналей которого равны d_1 и d_2. Величины двугранных углов при основании равны φ. Найдите: а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) площади диагональных сечений пирамиды.

8. Основание пирамиды – ромб. Проекция вершины пирамиды на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания. Докажите, что двугранные углы при основании пирамиды конгруэнтны.

9. Основание пирамиды – равнобокая трапеция. Проекция вершины пирамиды на плоскость основания совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров боковых сторон трапеции. Докажите, что:
а) углы, образованные боковыми ребрами с плоскостью основания, конгруэнтны;
б) боковые ребра конгруэнтны.



10. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения пирамид: от египетских пирамид до пирамид современных.*

§ 4 УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

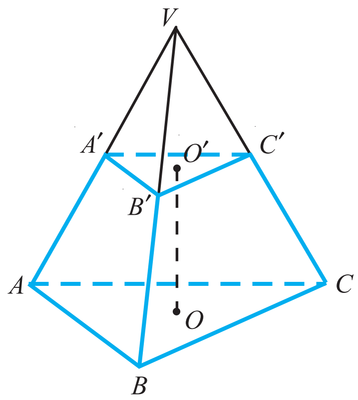
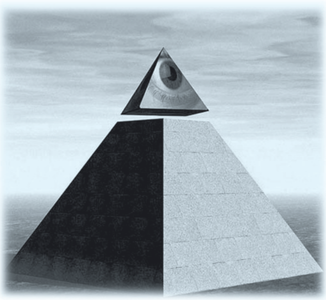


Рис. 7.17

Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то эта плоскость отсечет от пирамиды два тела, расположенных в разных полупространствах, разграниченных этой плоскостью. Одно из этих тел – пирамида, а другое тело называется ***усеченной пирамидой*** (рис. 7.17).

Многоугольник сечения и многоугольник основания пирамиды называются соответственно ***верхним основанием*** и ***нижним основанием*** усеченной пирамиды, остальные грани усеченной пирамиды являются трапециями и называются ***боковыми гранями***. Непараллельные стороны боковых граней называются ***боковыми ребрами***. Отрезок, концы которого принадлежат плоскостям оснований усеченной пирамиды, перпендикулярный им, называется ***высотой*** усеченной пирамиды ($[OO']$, рис. 7.17). Длина этого отрезка также называется ***высотой*** усеченной пирамиды.



Площадь полной поверхности усеченной пирамиды обозначается $\mathcal{A}_{\text{полн.}}$ и равна сумме площадей всех граней усеченной пирамиды. Сумма площадей боковых граней называется ***площадью боковой поверхности*** и обозначается $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$. Если площадь меньшего основания – $\mathcal{A}_o$, а площадь большего основания – $\mathcal{A}_O$, то:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_o + \mathcal{A}_O}.$$

Усеченная пирамида, полученная из правильной пирамиды, называется ***правильной усеченной пирамидой***. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды называется ***апофемой***. Если длина апофемы правильной усеченной пирамиды равна h, длины сторон оснований равны a и b, то $\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = n\dfrac{a+b}{2}h}$,

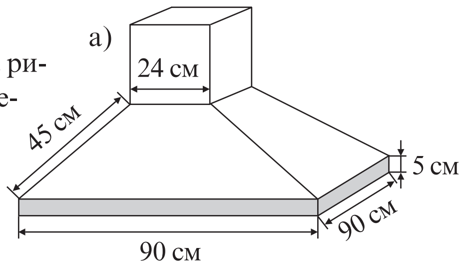
где n – число сторон основания.

Замечание

Могут быть построены различные сечения усеченной пирамиды плоскостью: диагональные сечения; сечения, параллельные основаниям; сечения, содержащие высоту и др.

Задания с решением

Вытяжка камина имеет размеры, указанные на рисунке. Сколько квадратных метров жести потребуется для изготовления вытяжки, если на швы используется 10% необходимой площади жести (рис. 7.18 а)?



Решение:

Вытяжка имеет форму усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$, к которой примыкает прямоугольный параллелепипед $A_2B_2C_2D_2ABCD$ (рис. 7.18 б).

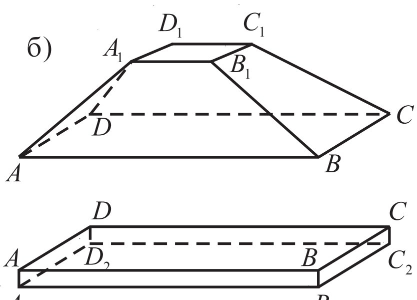


Рис. 7.18

Вычислим площадь боковой поверхности $\mathcal{A}_1$ параллелепипеда: $\mathcal{A}_1 = 4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}05 = 0{,}18$ (м^2).

Находим высоту h трапеции ABB_1A_1 и вычисляем площадь боковой поверхности $\mathcal{A}_2$ усеченной пирамиды:

$$h=\sqrt{0{,}45^2-0{,}33^2}\approx 0{,}306 \text{ (м)},\quad \mathcal{A}_2 = 4\cdot\frac{0{,}9+0{,}24}{2}\cdot 0{,}306\approx 0{,}70 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Вычисляем площадь вытяжки: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0{,}18 + 0{,}70 = 0{,}88$ (м^2).

Таким образом, потребуется: $0{,}88 + 0{,}1\cdot 0{,}88 = 0{,}968 \approx 1$ м^2 жести.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 14 см, а длина бокового ребра 13 см. Найдите: а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) высоту усеченной пирамиды;
в) площади диагональных сечений усеченной пирамиды.

2. ***Работайте в парах!*** Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 10 см, а длина бокового ребра 5 см. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) высоту усеченной пирамиды;
в) площадь сечения усеченной пирамиды плоскостью, параллельной ее основаниям и проходящей через середину высоты.

B

3. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 6 см и 16 см, а ее высота 10 см. Найдите:
а) длину бокового ребра усеченной пирамиды;
б) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

4. Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 2 см и 8 см, а ее высота 6 см. Найдите:
а) длину бокового ребра усеченной пирамиды;
б) площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

C

5. Глубина ямы, вырытой в виде правильной усеченной четырехугольной пирамиды, равна 1,5 м. Длина стороны нижнего основания равна 0,8 м, а верхнего основания – 1,6 м. Найдите длину бокового ребра усеченной пирамиды (ямы).

$$S_{полн.} = S_{бок.} + S_o + S_o$$

Реальный профиль

A₁

1. Длины сторон оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a < b$), а величина двугранного угла при большем основании равна φ. Найдите:
а) высоту усеченной пирамиды; б) апофему усеченной пирамиды;
в) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

B₁

2. ***Работайте в парах!*** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1 = a$, $AB = b$ $(a < b)$ и угол, образованный боковым ребром с плоскостью большего основания, равен α. Найдите:
а) площадь треугольника AB_1D_1;
б) косинус двугранного угла, образованного плоскостью AB_1D_1 и плоскостью основания $ABCD$;
в) площади диагональных сечений.

3. Гранитный постамент имеет вид правильной четырехугольной усеченной пирамиды. Стороны оснований равны 2,8 м и 2 м. Длина бокового ребра равна 3,64 м.
Найдите высоту постамента с точностью до 0,01 м.

C₁

4. Основания усеченной пирамиды – прямоугольники. Длины сторон меньшего основания равны 3 см и 4 см, а большего основания – 9 см и 12 см. Длина бокового ребра равна 13 см. Найдите:
а) площади диагональных сечений усеченной пирамиды;
б) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

$$S_{бок.} = n\frac{a+b}{2}h$$

§ 5 ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

5.1. Понятие объема тела

В предыдущих классах мы уже вычисляли объемы некоторых тел, но соответствующие формулы не были доказаны.

В дальнейшем они будут доказаны. Будем рассматривать только ***простые тела***, то есть тела, которые можно разбить на конечное число тетраэдров, не имеющих общих внутренних точек.

Определение

Функцией объема называется функция $f\colon K \to \mathbb{R}_+$, $f = \mathcal{V}(K)$, где K – множество тел, которая каждому простому телу T ставит в соответствие действительное неотрицательное число $\mathcal{V}(T)$, называемое **объемом данного тела** и обладающее следующими свойствами:

1° если тела T_1 и T_2 конгруэнтны, то $\mathcal{V}(T_1) = \mathcal{V}(T_2)$;

2° если тело T является объединением тел T_1 и T_2, которые не имеют общих внутренних точек, то $\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}(T_1) + \mathcal{V}(T_2)$ (*свойство аддитивности*);

3° существует тело T_0, объем которого равен единице объема, то есть $\mathcal{V}(T_0) = 1$.

В качестве единицы объема, как правило, берут объем куба, длина ребра которого равна 1, без уточнения единицы измерения длины стороны. Таким образом, если сторона куба 1 мм, 1 см, 1 м и т. д., то соответствующая единица объема будет 1 мм³, 1 см³, 1 м³ и т. д.

Из свойства 2° функции объема получаем следующее:

Следствие

Если тело T_1 содержится в теле T_2, то есть $T_1 \subseteq T_2$, то: $\mathcal{V}(T_1) \le \mathcal{V}(T_2)$.

Для упрощения вычислений объемов тел примем без доказательства следующую теорему:

Теорема 7

Принцип Кавальери

Пусть T_1 и T_2 – простые тела и α – плоскость. Если тела T_1 и T_2 расположены относительно плоскости α так, что для любой плоскости $\beta \parallel \alpha$ сечения тел T_1 и T_2 плоскостью β имеют равные площади, то $\mathcal{V}(T_1) = \mathcal{V}(T_2)$.

Бонавентура Франческо Кавальери (1598–1647 гг.) – итальянский математик

Для иллюстрации этой теоремы рассмотрим две пирамиды, T_1 и T_2, имеющие равные высоты: основание пирамиды T_1 – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными $\sqrt{2}a$, а основание пирамиды T_2 – квадрат со стороной, равной a (рис. 7.19).

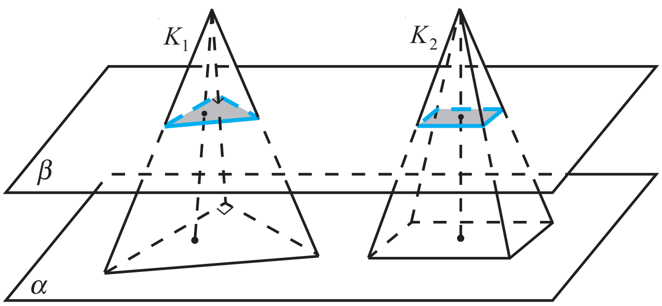


Рис. 7.19

Пусть α – произвольная фиксированная плоскость. Расположим пирамиды так, чтобы их основания лежали на плоскости α, а вершины находились в одном и том же полупространстве, ограниченном плоскостью α (рис. 7.19).

Пусть плоскость $\beta \parallel \alpha$ пересекает пирамиды T_1 и T_2.

Если площадь сечения пирамиды T_1 плоскостью β равна $\mathcal{A}_1$, а площадь сечения пирамиды T_2 плоскостью β равна $\mathcal{A}_2$, то можно показать, что $\frac{\mathcal{A}_1}{a^2} = \frac{\mathcal{A}_2}{a^2}$ (следствие из теоремы 6 (§3), площади оснований пирамид равны a^2), откуда $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Следовательно, $\mathcal{V}(T_1) = \mathcal{V}(T_2)$.

Замечание Из изложенного следует, что пирамиды (соответственно призмы), площади оснований которых равны, а высоты конгруэнтны, имеют равные объемы.

5.2. Объем параллелепипеда

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 8 Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин ребер, исходящих из одной его вершины.

$$\boxed{\mathcal{V} = abc}$$

Замечание В этой и следующих теоремах будем считать, что длины ребер выражены в одинаковых единицах измерения.

Следствие Объем куба, ребра которого равны a, вычисляется по формуле: $\boxed{\mathcal{V} = a^3}$.

5.3. Объем призмы

Теорема 9 Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

Доказательство:

Пусть α – плоскость, на которой расположено основание данной призмы, H – высота призмы, $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы. Построим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, одно из оснований которого находится в плоскости α, а параллелепипед расположен в том же полупространстве, ограниченном плоскостью α, что и данная призма. Измерения параллелепипеда:

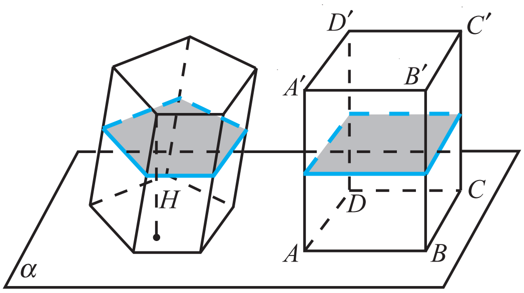


Рис. 7.20

$$AB = a = \sqrt[3]{\mathcal{A}_B \cdot H},\quad BC = \frac{a^2}{H},\quad AA' = H \text{ (рис. 7.20).}$$

Итак, площадь основания параллелепипеда равна:

$$AB \cdot BC = a \cdot \frac{a^2}{H} = \frac{a^3}{H} = \frac{\mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H}{H} = \mathcal{A}_{\text{осн.}}.$$

Сечения данной призмы и построенного параллелепипеда плоскостью, параллельной плоскости α, имеют площади, равные $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$, потому что многоугольники, полученные в сечении, конгруэнтны соответственно основаниям призмы. Из теоремы 8 следует, что объем построенного параллелепипеда $\mathcal{V}_{\text{пар.}} = a \cdot \frac{a^2}{H} \cdot H = a^3 = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H$, а из теоремы 7 следует, что $\mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{V}_{\text{пар.}} = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H$, то есть $\boxed{\mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H}$. ►

5.4. Объем пирамиды

Пусть $ABCA_1$ – треугольная пирамида.

Дополним пирамиду до треугольной призмы с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$ и боковым ребром AA_1 (рис. 7.21). В пирамидах $ABCA_1$ и $A_1B_1C_1B$ площади оснований равны, а высоты конгруэнтны, следовательно, $\mathcal{V}_{ABCA_1} = \mathcal{V}_{A_1B_1C_1B}$.

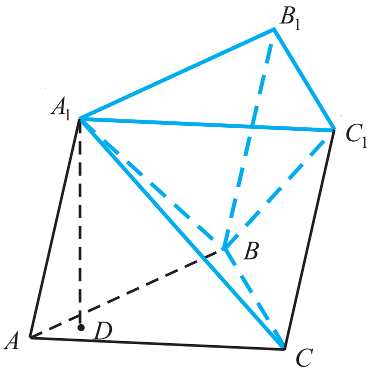


Рис. 7.21

С другой стороны, плоскость A_1BC_1 делит пирамиду $A_1BCC_1B_1$ с вершиной в точке A_1 на две треугольные пирамиды, BCC_1A_1 и $BC_1B_1A_1$, с общей вершиной A_1 и основаниями BCC_1 и BC_1B_1 соответственно. Эти пирамиды имеют одну и ту же высоту (проведенную из общей вершины A_1) и основания равных площадей ($\mathcal{A}_{\Delta BCC_1} = \mathcal{A}_{\Delta BB_1C_1}$), следовательно $\mathcal{V}_{B_1C_1BA_1} = \mathcal{V}_{BC_1CA_1}$ (см. примечание раздела 5.1).

Построенная призма разбита на три треугольные пирамиды ($ABCA_1$, $A_1B_1C_1B$, BC_1CA_1), которые не имеют общих внутренних точек и объемы которых равны. Если обозначим объем одной пирамиды через $\mathcal{V}_{\text{пир.}}$, то $3\mathcal{V}_{\text{пир.}} = \mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H$, где $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь треугольника ABC, а H – общая высота призмы и пирамиды.

Следовательно, ***объем треугольной пирамиды*** вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H}.$$

Если основание пирамиды – выпуклый n-угольник, то в многоугольнике основания проведем все его диагонали и рассмотрим плоскости, определенные этими диагоналями и боковым ребром, соединяющим вершину пирамиды с общей вершиной проведенных диагоналей. Эти плоскости разбивают данную пирамиду на $n-2$ треугольные пирамиды, которые имеют одну и ту же высоту и площади оснований которых равны $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-2}$ (рис. 7.22, $n = 5$). Согласно свойству аддитивности функции объема, делаем вывод, что объем данной пирамиды равен сумме объемов треугольных пирамид, на которые разбита данная пирамида, то есть:

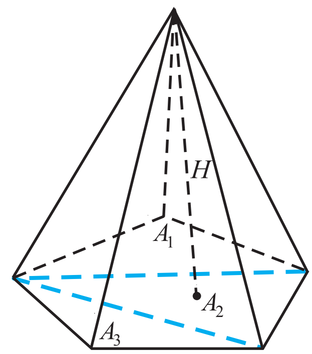


Рис. 7.22

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_1 \cdot H + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 \cdot H + \ldots + \frac{1}{3}\mathcal{A}_{n-2} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_{n-2}) = \frac{1}{3}H \cdot \mathcal{A}_{\text{осн.}},$$

где $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания данной пирамиды.

Теорема 10

Если H – высота пирамиды, а $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ – площадь основания этой пирамиды, то объем пирамиды вычисляется по формуле:

$$\mathcal{V}_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн.}} \cdot H.$$

5.5. Объем усеченной пирамиды

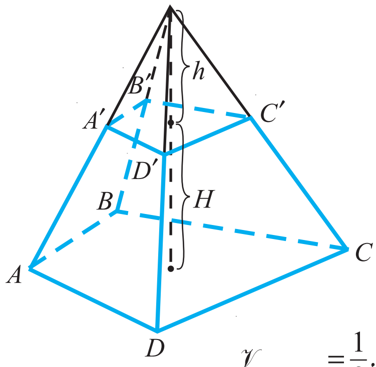


Рис. 7.23

Дана усеченная пирамида, высота которой рав-на H, а $\mathcal{S}_o$ и $\mathcal{S}_O$ ($\mathcal{S}_o < \mathcal{S}_O$) – площади оснований.

Дополним усеченную пирамиду до полной пирамиды, вершина которой – пересечение прямых, содержащих боковые ребра (на рис. 7.23 рассмотрен случай $n = 4$).

Таким образом, получаем две пирамиды с общей вершиной, а основания усеченной пирамиды являются основаниями этих двух пирамид. Обозначим через h высоту пирамиды, площадь основания которой $\mathcal{S}_o$. Тогда объем усеченной пирамиды равен разности объемов построенных пирамид. Получаем:

$$\mathcal{V}_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}\mathcal{S}_O(h+H) - \frac{1}{3}\mathcal{S}_o \cdot h = \frac{1}{3}H\left[\mathcal{S}_O\left(\frac{h}{H}+1\right) - \mathcal{S}_o \cdot \frac{h}{H}\right] = \frac{1}{3}H\left[\frac{h}{H}(\mathcal{S}_O - \mathcal{S}_o) + \mathcal{S}_O\right]. \quad (1)$$

Меньшее основание усеченной пирамиды может быть рассмотрено как сечение построенной пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания. Знаем (следствие теоремы 6, §3), что отношение площадей сечений, параллельных основанию, равно квадрату отношения расстояний от этих сечений до вершины пирамиды, то есть $\frac{\mathcal{S}_o}{\mathcal{S}_O} = \left(\frac{h}{h+H}\right)^2$, откуда $\frac{h}{h+H} = \frac{\sqrt{\mathcal{S}_o}}{\sqrt{\mathcal{S}_O}}$, или $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt{\mathcal{S}_o}}{\sqrt{\mathcal{S}_O} - \sqrt{\mathcal{S}_o}}$.

После подстановки этого выражения $\frac{h}{H}$ в (1) получим:

$$\mathcal{V}_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H\left[\frac{\sqrt{\mathcal{S}_o}}{\sqrt{\mathcal{S}_O} - \sqrt{\mathcal{S}_o}}(\mathcal{S}_O - \mathcal{S}_o) + \mathcal{S}_O\right] = \frac{1}{3}H[\sqrt{\mathcal{S}_o}(\sqrt{\mathcal{S}_O} + \sqrt{\mathcal{S}_o}) + \mathcal{S}_O], \text{ или}$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H(\mathcal{S}_o + \sqrt{\mathcal{S}_o\mathcal{S}_O} + \mathcal{S}_O)}\ .$$

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Диагональ куба равна 8 см. Найдите объем куба.
2. Площадь одной грани куба равна 16 см^2. Найдите объем куба.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 3 см.
   а) Найдите длину диагонали A_1C.
   б) Найдите площадь полной поверхности куба.
   в) Вычислите объем куба.
4. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда относятся как 2:3:5. Известно, что длина большего ребра равна 15 см. Найдите:
   а) длину диагонали параллелепипеда;
   б) площадь полной поверхности параллелепипеда;
   в) объем параллелепипеда.

$\mathcal{V} = a^3$

B

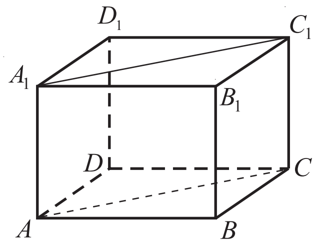
5. ***Работайте в парах!*** Бассейн имеет форму параллелепипеда. В какой-то момент времени в бассейне было определенное количество воды. Через некоторое время из бассейна испарилось 600 м^3 воды. Известно, что площадь основания бассейна равна 500 м^2. Если бы к первоначальному количеству воды добавили оставшееся после испарения количество воды, то уровень, до которого дошла бы вода, составил бы 3 м.
   а) Определите первоначальное количество воды в бассейне.
   б) Найдите конечный уровень воды в бассейне.

6. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 5 см и 12 см. Величина угла, образованного диагональю усеченной пирамиды и плоскостью большего основания, равна 60°. Найдите:
а) площадь диагонального сечения усеченной пирамиды;
б) объем усеченной пирамиды.

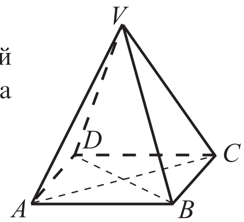
7. Основание прямой призмы – треугольник, две стороны которого равны 7 см и 8 см, а угол между ними – 60°. Длина бокового ребра равна 6 см. Найдите:
а) площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и медиану основания, проведенную к неизвестной стороне;
б) объем призмы.

8. *Исследуйте!* Длина деревянной балки 235 см, ее поперечное сечение является равнобедренной трапецией, длины оснований которой равны 12 см и 30 см, а боковая сторона – 15 см. Грузоподъемность машины 3,5 т. Какое максимальное число балок может перевезти машина, если плотность дерева равна 0,7 г/см^3?

9. Для строительства стены понадобилось 5 286 котельцовых блоков, имеющих вид прямоугольного параллелепипеда. Размеры каждого котельца 20 см × 20 см × 40 см. Найдите объем построенной стены с точностью до 0,1 м³, если известно, что раствор увеличил объем стены на 12%.



10. Объем правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 24 см^3, а ее высота равна 6 см. Найдите площадь диагонального сечения ACC_1A_1.



11. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 32 см^2. Найдите длину бокового ребра пирамиды, если ее объем равен 32 см^3.

12. Практическая работа *Вычисление объема вашего класса*.

C

13. Длина каждого ребра треугольной пирамиды равна 6 см. Найдите:

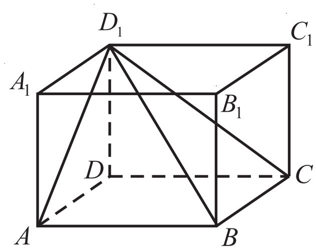
$$V = \frac{1}{3} A_{осн.} \cdot H$$

а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

14. Куб с ребром 4 см и прямоугольный параллелепипед с ребрами 8 см, 14 см, 4 см сделаны из свинца. Их расплавили и выплавили куб. Найдите длину ребра полученного куба.

Реальный профиль

A$_1$



1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма, объем которой равен 9 см^3 (см. рисунок). Запишите в рамку объем пирамиды $ABCDD_1$.

☐ см³

2. Основание призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 16 см и острым углом 45°. Проекцией одного бокового ребра на плоскость основания является боковая сторона трапеции. Найдите объем призмы, если величина угла между боковым ребром и плоскостью основания равна 60°.

3. Основание призмы – равнобедренная трапеция с основаниями 28 см и 44 см, боковая сторона – 17 см. Проекцией одного бокового ребра на плоскость основания является радиус окружности, описанной около основания призмы. Найдите объем призмы, если длина бокового ребра равна 32 см.

4. Основание призмы – трапеция, основания которой 8 см и 16 см, а длина одной из боковых сторон – 10 см. Одна из вершин одного основания находится на расстоянии 15 см от всех сторон другого основания. Найдите объем призмы.

$$V_{призмы} = A_{осн.} \cdot H$$

B_1

5. Основание прямого параллелепипеда – ромб. Высота параллелепипеда равна $\sqrt{3}$ см, а его диагонали образуют с плоскостью основания углы 45° и 30°. Найдите объем параллелепипеда.

6. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5 см, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите объем пирамиды.

7. ***Работайте в парах!*** Грани параллелепипеда – конгруэнтные ромбы. Длина стороны ромба равна a, острый угол ромба равен α. Найдите:
а) площадь полной поверхности параллелепипеда;
б) объем параллелепипеда.

8. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 10 см, 10 см, 12 см. Длина каждого бокового ребра равна 14 см. Вычислите объем пирамиды.

$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_{\text{осн.}}$

9. ***Работайте в парах!*** Основание пирамиды – трапеция, длины оснований которой равны 4 см и 10 см, а длина одной из боковых сторон 5 см. Двугранные углы при основании пирамиды конгруэнтны и равны 60°. Найдите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

10. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого 4 м, 6 м и 0,9 м. Бассейн наполняется водой через две трубы. За какое время бассейн наполнится водой, если через одну из труб поступает 60 л воды в минуту, а через другую – 40 л в минуту?

11. Основанием прямой призмы является параллелограмм со сторонами 2 см и 4 см и углом 60°. Найдите объем призмы, если наибольшая диагональ призмы образует с плоскостью основания угол 30°.

12. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна 8 см, а угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания, равен 60°. Вычислите:
а) площадь боковой поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

13. ***Работайте в парах!*** Длины сторон основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 4 см и 10 см. Величина двугранного угла при большем основании равна 60°.
Вычислите:
а) площадь полной поверхности усеченной пирамиды;
б) объем усеченной пирамиды.

C_1

14. Высота правильной треугольной пирамиды конгруэнтна стороне основания. Вычислите величину угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания.

15. Длины ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 18 см. Площадь полной поверхности параллелепипеда равна 198 см^2. Найдите обьем параллелепипеда.

16. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, $AC = b$, $CB = a$, $CC_1 = l$, $m(\angle ACB) = \gamma$, $\angle BCC_1 \equiv \angle ACC_1$. Найдите объем призмы, если высота призмы, проведенная из вершины C_1, пересекает сторону AB.

17. Основания наклонной призмы – правильные n-угольники. Длина каждого ребра призмы равна a. Найдите величину угла, образованного боковым ребром с плоскостью основания, если объем призмы равен $\mathcal{V}$.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. В классе решили покрасить стены и потолок двумя слоями краски одного цвета. При нанесении первого слоя расход краски составляет 1 кг на каждые 8 м^2 поверхности, а при нанесении второго слоя – 1 кг на каждые 11 м^2 поверхности. Какое количество краски потребуется для выполнения этой работы, если класс имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 14 м, шириной 7 м, высотой 3,5 м, и площадь окон и двери составляет $\frac{1}{10}$ окрашиваемой поверхности?

2. ***Работайте в парах!***
В классе из задачи **1** – 40 учеников. Учитель проводит урок математики. Известно, что в помещении воздух становится вредным для здоровья, если в каждом кубическом метре содержится 4 дм^3 двуокиси углерода. Известно также, что каждый человек выдыхает 16 раз в минуту, а объем выдыхаемого воздуха равен 0,5 дм^3 и содержит 5% двуокиси углерода. Какое максимальное время можно находиться в классе без проветривания?

$$V = \frac{1}{3} A_{осн.} \cdot H$$

B

3. ***Исследуйте!*** В прямоугольной коробке длиной 51 см, шириной 24 см и высотой 15 см плотно упакованы кубики. Ребра кубиков равны 3 см. Сколько кубиков в коробке?

4. ***Работайте в парах!*** Сторона основания правильной пирамиды $VABCD$ равна 12 см, а боковое ребро – 10 см.
а) Нарисуйте пирамиду $VABCD$ и проведите высоту VO.
б) Вычислите площадь треугольника VAC.
в) Найдите площадь полной поверхности пирамиды $VABCD$.
г) Вычислите объем пирамиды $VABCD$.

5. Лабораторная работа *Вычисление объемов объектов в форме многогранника*.

C

6. Разность длин ребер двух кубов равна d, а разность их объемов равна $37d^3$. Найдите длины ребер кубов.

7. Ребра прямоугольного параллелепипеда конгруэнтны сторонам прямоугольного треугольника, сумма длин которых – 60 см. Объем параллелепипеда – 6,24 дм^3. Найдите длины ребер параллелепипеда.

8. ***Работайте в группах!*** Проект *Многогранники в архитектуре вашего города/села*.

Реальный профиль

A$_1$

1. В сосуд с водой погружается тяжелый куб с ребром 5 см. На сколько поднимется уровень воды в сосуде, если сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда, у которого стороны основания 20 см и 25 см, высота 10 см, а вода налита до половины высоты сосуда?

2. ***Исследуйте!*** На сколько поднимется уровень воды в сосуде, если куб из задачи **1** изготовлен из дерева (удельный вес дерева равен 0,5 г/см^3)?

B$_1$

3. БАК Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник с катетом 8 см. Радиус окружности, вписанной в треугольник основания, равен 3 см и конгруэнтен высоте призмы. Найдите объем призмы.

4. БАК Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 64 см^2, а ее боковое ребро $\sqrt{41}$ см. Найдите объем пирамиды.

5. БАК Основание пирамиды $VABCD$ – ромб $ABCD$, площадь которого равна $18\sqrt{3}$ см^2 и $m(\angle ABC) = 60°$. Ребро VB, длиной $6\sqrt{3}$ см, перпендикулярно плоскости основания. Найдите величину угла, образованного ребром VD и плоскостью основания пирамиды.

6. ***Работайте в парах!*** Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды равны 36 см и 22 см, а двугранные углы при большем основании равны 60°. Найдите объем усеченной пирамиды.

7. Лабораторная работа *Вычисление объемов объектов в форме многогранника*.

C_1

8. Прямые AA_1, CC_1 перпендикулярны плоскости ромба $ABCD$. Точки A_1 и C_1 лежат по одну сторону от этой плоскости. Известно, что $AC = 2d$, $BD = 2b$, $AA_1 = a$, $CC_1 = c$.
Найдите объемы пирамид $BACC_1A_1$, $BADA_1$, $BCDC_1$, BDA_1C_1.

9. Грани OAB, OAC и OBC пирамиды $OABC$ являются прямоугольными равнобедренными треугольниками: $OA = OB = OC = a$. Найдите:
а) объем пирамиды; б) площадь грани ABC; в) высоту пирамиды, проведенную из точки O.

10. ***Работайте в группах!*** Проект *Многогранники в архитектуре вашего города/села*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

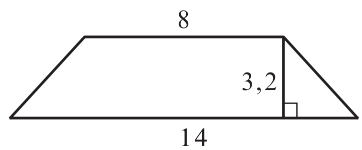
Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

1. Дополните, чтобы полученные высказывания были истинными:
а) «Боковыми гранями прямой призмы являются ____________, а боковое ребро является ____________ призмы».
б) «Все боковые грани правильной пирамиды – ________________________ треугольники».
в) «Диагональным сечением правильной четырехугольной усеченной пирамиды является ____________».

2. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 12 см и образует с плоскостью основания угол в 60°. Найдите:
а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) сколько процентов площади боковой поверхности пирамиды составляет площадь основания пирамиды;
в) объем пирамиды.

3. Постамент имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды, длины сторон основания которой равны 4 см и 8 см, а ее высота 12 см. Определите, сколько краски потребуется для покраски боковой поверхности постамента, если для 1 м^2 требуется 200 г краски. Округлите ответ до десятых.

4. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид равнобедренной трапеции, размеры которой (в метрах) указаны на рисунке. Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.



Реальный профиль

1. Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
а) «Сечение призмы плоскостью, содержащей высоту, представляет собой прямоугольник». **И** | **Л**
б) «Сечение пирамиды плоскостью, содержащей высоту, представляет собой треугольник». **И** | **Л**
в) «Диагональное сечение усеченной четырехугольной пирамиды представляет собой равнобедренную трапецию». **И** | **Л**

2. Основание четырехугольной пирамиды $EABCD$ – ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом BAD, равным α. Двугранные углы при основании пирамиды конгруэнтны и равны β. Найдите:
а) площадь полной поверхности пирамиды;
б) объем пирамиды.

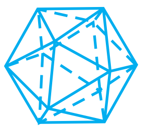
3. Длины сторон оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $2:3$. Боковое ребро равно l и образует с плоскостью большего основания угол α. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченной пирамиды;
б) объем усеченной пирамиды.

4. Поперечное сечение водосточного канала имеет вид равнобедренного треугольника с основанием, равным 1,4 м, и высотой, проведенной к основанию, 1,2 м. Найдите пропускную способность канала (в кубических метрах за 1 час), если скорость течения воды 2 м/с.

Многогранники

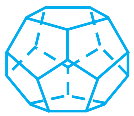
Правильные многогранники

Правильный икосаэдр



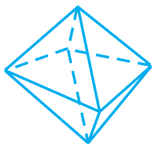
Все грани – правильные конгруэнтные треугольники, число ребер при каждой вершине равно пяти

Правильный додекаэдр



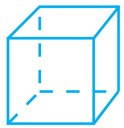
Все грани – правильные конгруэнтные пятиугольники, число ребер при каждой вершине равно трем

Правильный октаэдр



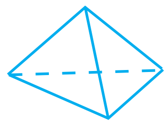
Все грани – правильные конгруэнтные треугольники, число ребер при каждой вершине равно четырем

Куб



Все грани – конгруэнтные квадраты

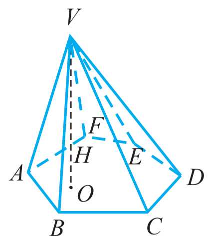
Правильный тетраэдр



Все грани – конгруэнтные равносторонние треугольники

Другие многогранники

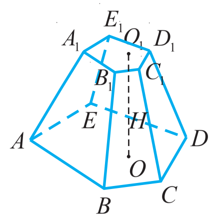
Пирамида



$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{S}_{\text{осн.}} \cdot H;$

$\mathcal{S}_{\text{полн.}} = \mathcal{S}_{\text{бок.}} + \mathcal{S}_{\text{осн.}}$

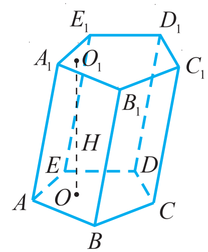
Усеченная пирамида



$\mathcal{V} = \frac{1}{3}H(\mathcal{S}_o + \mathcal{S}_O + \sqrt{\mathcal{S}_o \mathcal{S}_O})$

$\mathcal{S}_{\text{полн.}} = \mathcal{S}_{\text{бок.}} + \mathcal{S}_o + \mathcal{S}_O$

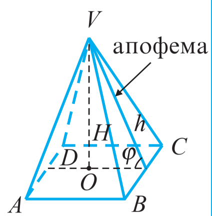
Призма



$\mathcal{V} = \mathcal{S}_{\text{осн.}} \cdot H;$

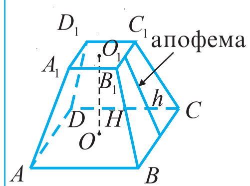
$\mathcal{S}_{\text{полн.}} = \mathcal{S}_{\text{осн.}} + \mathcal{S}_{\text{бок.}}$

Правильная пирамида



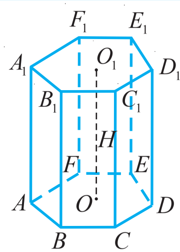
$\mathcal{S}_{\text{бок.}} = \mathcal{P}_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{\mathcal{S}_{\text{осн.}}}{\cos\varphi}$

Правильная усеченная пирамида



$\mathcal{S}_{\text{бок.}} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) \cdot h$

Правильная призма



$\mathcal{S}_{\text{бок.}} = \mathcal{P}_{\text{осн.}} \cdot H$

Модуль

8

Тела вращения

То, что мы знаем, – ограничено, а то, чего мы не знаем, – бесконечно.

Пьер-Симон де Лаплас

Цели модуля

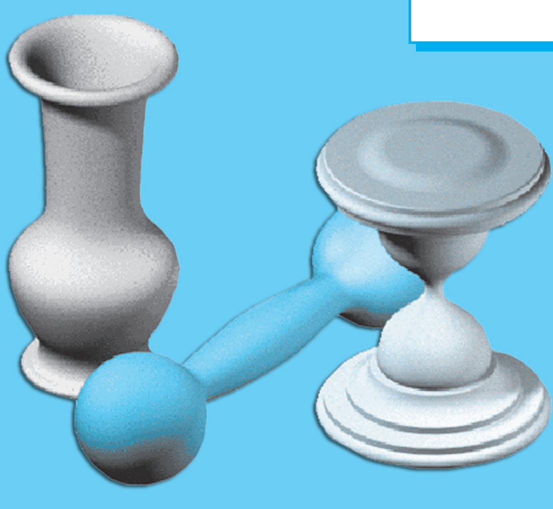
- распознавание тел вращения, их классификация по разным критериям;
- построение сечений тел вращения плоскостями;
- распознавание плоских геометрических фигур в телах вращения;
- применение свойств фигур вращения в разных контекстах;
- применение формул вычисления площадей и объемов тел вращения в различных контекстах;
- *распознавание конических сечений и их приложений в различных контекстах.

1. Цилиндр

2. Конус

3. Усеченный конус

4. Сфера и шар



$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \pi R(G+R)$$

$$\mathcal{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

§ 1 ЦИЛИНДР

1.1. Понятие цилиндра

Определение цилиндра аналогично определению призмы.

Определение

Пусть на плоскости α расположен круг $\mathcal{D}$, прямая g пересекает плоскость α в единственной точке и плоскость β параллельна плоскости α $(\alpha \neq \beta)$ (рис. 8.1).
Пересечение слоя, определенного плоскостями α и β, с множеством прямых, параллельных прямой g и проходящих через каждую точку круга $\mathcal{D}$, называется **круговым цилиндром** (рис. 8.1).

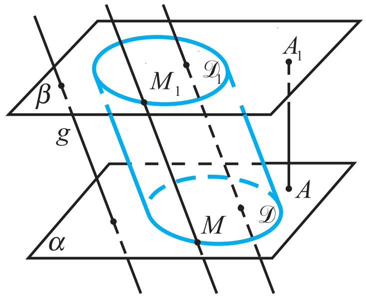


Рис. 8.1

Пересечением множества всех прямых, параллельных прямой g и проходящих через каждую точку круга $\mathcal{D}$, с плоскостью β является круг $\mathcal{D}_1$. Круги $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}$ конгруэнтны, поскольку при параллельном переносе в направлении прямой g, при котором плоскость α отображается на плоскость β, круг $\mathcal{D}$ отображается на круг $\mathcal{D}_1$.

Круги $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$ называются ***основаниями*** цилиндра. Отрезок MM_1, где точка M принадлежит окружности, ограничивающей круг $\mathcal{D}$, а M_1 принадлежит окружности, ограничивающей круг $\mathcal{D}_1$, и $[MM_1] \parallel g$, называется ***образующей*** цилиндра (рис. 8. 1). Отрезок AA_1, где точка $A \in \alpha$, а $A_1 \in \beta$ и $[AA_1] \perp \alpha$, называется ***высотой*** цилиндра. Длина этого отрезка также называется ***высотой*** цилиндра.

Объединение всех образующих цилиндра называется ***боковой поверхностью*** цилиндра.

Заметим, что любая точка, принадлежащая основаниям или боковой поверхности цилиндра, является граничной точкой цилиндра, а остальные точки цилиндра являются внутренними точками цилиндра. Они образуют ***внутреннюю область цилиндра***.

Мы будем рассматривать лишь случай, когда прямая g перпендикулярна плоскости α. Такой цилиндр называется ***прямым круговым цилиндром***.

В соответствии с определением вращения (см. Учебник математики для XI класса, модуль X, §7), *прямой круговой цилиндр может быть получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой, содержащей одну из его сторон* (рис. 8. 2).

Эта прямая называется ***осью вращения*** цилиндра или ***осью симметрии*** цилиндра. Сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется ***осевым сечением*** ($LMNP$, рис. 8.2). Стороны цилиндра (ML и NP), параллельные оси, называются **образующими цилиндра**. Круги, полученные вращением сторон, перпендикулярные оси ($[BA]$ и $[CD]$, рис. 8.2), называются **основаниями цилиндра**. Радиус основания также называется **радиусом цилиндра**. Каждая образующая перпендикулярна основаниям цилиндра. Длина образующей называется **высотой цилиндра**.

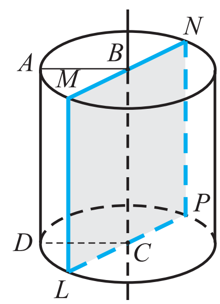


Рис. 8.2

1.2. Боковая поверхность, полная поверхность и объем цилиндра

В IX классе мы получили ***формулу для вычисления боковой поверхности цилиндра***, используя его развертку:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}} = 2\pi RH}\,.$$

Определение Сумма площадей боковой поверхности прямого кругового цилиндра и двух его оснований называется **площадью полной поверхности цилиндра**:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + 2\mathcal{A}_{\text{осн.}} = 2\pi HR + 2\pi R^2}\text{, или } \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 2\pi R(H+R)}\,.$$

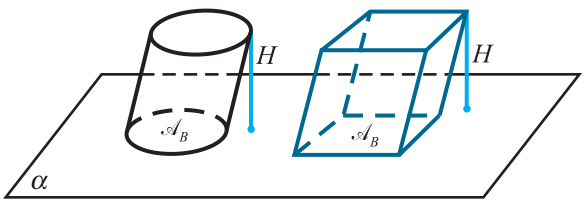


Рис. 8.3

Чтобы вывести формулу вычисления объема цилиндра, рассмотрим призму, высота которой равна высоте цилиндра (обозначенная H), а площадь основания призмы равна площади основания цилиндра: $\mathcal{A}_{\text{осн.}} = \pi R^2$. Если основание цилиндра и основание призмы лежат в плоскости α (рис. 8.3), то по принципу Кавальери призма и цилиндр имеют равные объемы, то есть: $\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \mathcal{V}_{\text{призмы}} = H \cdot \mathcal{A}_{\text{осн.}} = H \cdot \pi R^2$, где H – высота цилиндра, а R – радиус его основания.

Таким образом, ***объем кругового цилиндра*** можно вычислить по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \pi R^2 H}\,.$$

Заметим, что формулу $\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \pi R^2 H$ для прямого кругового цилиндра можно получить при помощи определенного интеграла (модуль 3, §2).

Задания с решением

1 Площадь полной поверхности прямого кругового цилиндра равна $72\pi(1+\sqrt{3})$ см^2. Отрезок, соединяющий центр одного основания с точкой, лежащей на окружности другого основания, конгруэнтен диаметру основания. Найдем объем цилиндра.

Решение:

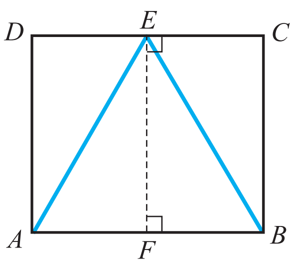


Рис. 8.4

Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ цилиндра (рис. 8.4). Пусть точки E и F – центры оснований цилиндра.

Из условия задачи следует, что ΔEAB – равносторонний и $EA = EB = AB = 2R$, где R – радиус основания цилиндра. Высота цилиндра $EF = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = H$.

Площадь полной поверхности цилиндра:

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 2\pi R(R+H) = 2\pi R(R+R\sqrt{3}) = 2\pi R^2(1+\sqrt{3}).$$

Составляем уравнение: $2\pi R^2(1+\sqrt{3}) = 72\pi(1+\sqrt{3})$, из которого находим $R = 6$ (см).

Следовательно, объем цилиндра $\mathcal{V} = \pi FB^2 \cdot EF = \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 216\pi\sqrt{3}$ (см^3).

Ответ: $216\pi\sqrt{3}$ см^3.

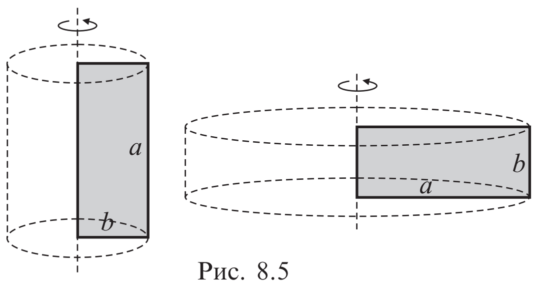


Рис. 8.5

2 При полном вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей бóльшую сторону длиной a, и прямой, содержащей меньшую сторону длиной b, образуются два цилиндра, площади полных поверхностей которых равны 150π см^2 и 300π см^2 соответственно (рис. 8.5).

а) Найдем стороны прямоугольника.

б) Сравним площади боковых поверхностей цилиндров.

в) Сравним объемы цилиндров.

Решение:

а) Используя формулу для вычисления площади полной поверхности цилиндра и данные задачи, составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}2\pi b(a+b)=150\pi\\ 2\pi a(a+b)=300\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b(a+b)=75\\ a(a+b)=150\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=5,\\ a=10.\end{cases}$$

Таким образом, бóльшая сторона прямоугольника $a=10$ см, а меньшая сторона прямоугольника $b=5$ см.

б) Площади боковых поверхностей цилиндров равны между собой и равны 100π см^2.

в) Объем цилиндра, образованного при вращении вокруг меньшей стороны, вычисляется по формуле $\mathcal{V}=\pi a^2 b$ и равен 500π см^3, а объем цилиндра, образованного при вращении вокруг большей стороны, вычисляется по формуле $\mathcal{V}=\pi b^2 a$ и равен 250π см^3.

Таким образом, цилиндр, образованный вращением вокруг большей стороны прямоугольника, имеет объем меньше, чем цилиндр, образованный вращением вокруг меньшей стороны прямоугольника.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Осевым сечением прямого кругового цилиндра является квадрат, площадь которого равна 16 см^2. Найдите:
а) площадь боковой поверхности цилиндра;
б) объем цилиндра.

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}}=2\pi RH$$

2. Сумма длин высоты и радиуса основания цилиндра равна 30 см, а площадь боковой поверхности цилиндра относится к сумме площадей оснований как 7 : 3. Найдите объем цилиндра.

3. Высота прямого кругового цилиндра равна 5 см, а радиус его основания 6 см. Вычислите длину диагонали осевого сечения цилиндра.

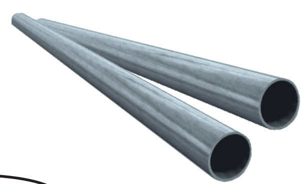
B

4. Периметр осевого сечения цилиндра равен 18 см, а площадь полной поверхности цилиндра относится к площади его боковой поверхности как 7 : 5. Найдите объем цилиндра.

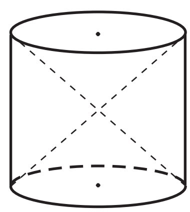
5. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 32π см^2. Найдите его высоту, зная, что она на 4 см больше, чем диаметр основания цилиндра.

6. ***Работайте в парах!*** Фабрика производит жестяные коробки в форме цилиндра высотой 6 см и с радиусом основания 5 см. Сколько квадратных метров жести понадобится для изготовления 5 000 000 коробок, если для соединения оснований с боковой поверхностью коробки дополнительно расходуется жести 13% от общей поверхности? ($\pi \approx 3{,}14$)

7. ***Исследуйте!*** Грузоподъемность машины 3,5 тонны. Какое максимальное число труб может перевезти машина, если трубы изготовлены из свинца, длина трубы 4 м, внешний диаметр трубы 16 см, внутренний диаметр 12 см, а плотность свинца 11,38 г/см^3? ($\pi \approx 3{,}14$)



8. Диагонали осевого сечения прямого кругового цилиндра взаимоперпендикулярны. Длина диагонали равна 4 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



C

9. Деревянные балки имеют форму прямого кругового цилиндра. Длина балки 3,3 м. Диаметр балок не меньше 14 см и не больше 26 см. Грузоподъемность машины 3,5 т. В каких пределах варьируется максимальное число балок, перевозимых одной машиной, если плотность дерева 0,8 г/см³?

$$V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H$$

10. Емкость без крышки имеет форму цилиндра. Ее высота равна 1,5 м, а диаметр основания составляет 40% высоты. Определите, достаточно ли 1 кг краски для полной покраски емкости с обеих сторон, если расход краски составляет 150 г на 1 м^2 ($\pi \approx 3{,}14$).

Реальный профиль

A₁

1. Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра равна A. Вычислите площадь осевого сечения цилиндра.

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = 2\pi RH$$

B₁

2. ***Работайте в парах!*** Площади боковых поверхностей двух цилиндров равны. Докажите, что их объемы относятся как радиусы оснований.

$$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + 2\mathcal{A}_{\text{осн.}}$$

C₁

3. Высота прямого кругового цилиндра H, а радиус основания R. Плоскость пересекает основания цилиндра по двум конгруэнтным хордам длины R (плоскость пересекает ось цилиндра). Найдите расстояние между этими двумя хордами.

4. Концы отрезка AB принадлежат окружностям оснований прямого цилиндра, высота которого 6 см, а радиус основания 5 см. Расстояние от оси цилиндра до прямой AB равно 3 см. Найдите:

а) длину отрезка AB;

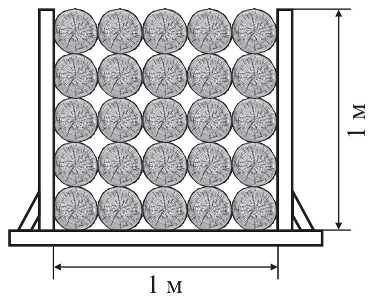
б) величину угла, образованного прямой AB и одним из оснований цилиндра.

5. Кубометр бревен цилиндрической формы уложен как указано на рисунке. Диаметр каждого бревна равен 20 см, а длина 1 м.

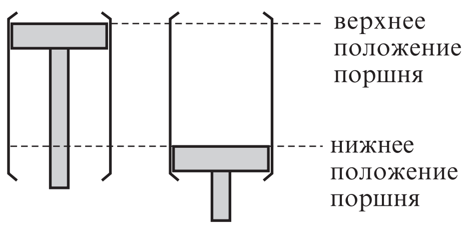
а) Найдите объем пустот между бревнами ($\pi \approx 3{,}14$).

б) Сколько процентов всего объема занимают бревна?

в) Изменится ли объем пустот, если диаметр бревна будет равен 25 см? 10 см?



6. Двигатель легкового автомобиля имеет четыре цилиндра, внутренний диаметр каждого из которых – 79 мм. Поршень каждого цилиндра совершает поступательное движение вверх и вниз. Расстояние между верхним и нижним положениями поршня называется *ходом поршня* и равно 80 мм. Рабочий объем двигателя равен объему с одним ходом всех четырех цилиндров. Найдите рабочий объем цилиндра (в кубических сантиметрах) ($\pi \approx 3{,}14$).



7. Основание цилиндрической бочки радиуса 0,6 м и высотой 1,6 м находится на полу в помещении высотой 1,95 м. Можно ли выкатить бочку из этого помещения?

§ 2 КОНУС

2.1. Основные понятия

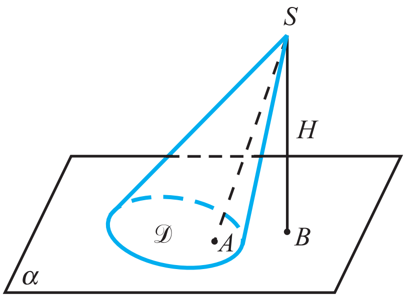


Рис. 8.6

Пусть круг $\mathscr{D}$ расположен на плоскости α, и точка S не принадлежит плоскости α.

Определение

Фигура, образованная объединением отрезков, соединяющих точки круга $\mathscr{D}$ с точкой S, называется **круговым конусом** (рис. 8.6).

Точка S называется ***вершиной*** конуса, а круг $\mathscr{D}$ называется ***основанием*** конуса.

Пусть B – проекция вершины S на плоскость α. Отрезок SB называется ***высотой*** конуса. Длина отрезка SB, которую обозначим через H, также называется ***высотой*** конуса.

Отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой окружности основания, называется ***образующей*** конуса.

Объединение всех образующих конуса состоит из граничных точек и образует ***боковую поверхность*** конуса. Напомним, что любая точка основания также является граничной точкой.

Множество всех точек конуса, не являющихся граничными точками, называется ***внутренней областью*** конуса.

Если проекция вершины конуса на плоскость основания совпадает с центром основания, то конус называется ***прямым круговым*** (рис. 8.7).

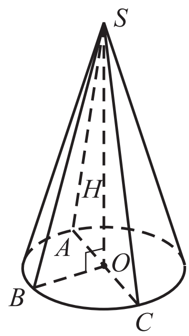


Рис. 8.7

Определение

Круговым конусом называется фигура, образованная при вращении прямоугольного треугольника $\Delta(SOB)$ вокруг прямой, содержащей один из катетов (SO) (рис. 8.7).

Образующие прямого кругового конуса конгруэнтны. Действительно, если $[SA]$ и $[SB]$ – две образующие конуса (рис. 8.7), то треугольники SOA и SOB конгруэнтны как прямоугольные треугольники с соответственно конгруэнтными катетами.

Имеет место равенство $SB^2 = BO^2 + OS^2$, или $G^2 = R^2 + H^2$, где G – длина образующей, R – радиус основания, H – высота прямого кругового конуса.

Как и прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус является телом вращения. Он может быть получен *вращением прямоугольного треугольника BSO вокруг одного из катетов* (рис. 8.7). В этом случае катет SO, определяющий ось, является высотой конуса, другой катет BO является радиусом основания конуса, а гипотенуза SB описывает боковую поверхность конуса и является его образующей.

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым сечением*** конуса и является равнобедренным треугольником (рис. 8.7, ΔSAC).

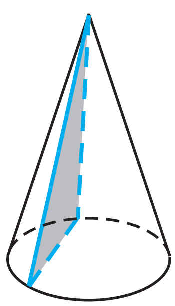


Рис. 8.8

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через две его образующие, является равнобедренным треугольником (рис. 8.8).

Далее рассмотрим сечение кругового конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания.

Теорема 1 Сечение кругового конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является кругом.

Задание. Докажите теорему 1.

Следствие 1 Любой конус, пересеченный плоскостью, параллельной основанию и пересекающей высоту конуса во внутренней точке, разбивается на два тела, одно из которых является конусом. Если радиус основания данного конуса равен R, высота $AS=H$, образующая $SB=G$ и радиус основания конуса, полученного при сечении, равен R', высота $SA'=H'$, образующая $B'S=G'$, то $\frac{R'}{R}=\frac{H'}{H}=\frac{G'}{G}$.

Следствие 2 Отношение площади основания $\mathcal{A}_{\text{осн}}$ кругового конуса к площади $\mathcal{A}'_{\text{осн}}$ сечения, параллельного основанию, равно квадрату отношения высоты данного конуса к высоте конуса, образованного при сечении. Действительно, $\frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}'_B}=\frac{\pi R^2}{\pi R'^2}=\left(\frac{H}{H'}\right)^2$. Следовательно, $\frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}'_B}=\left(\frac{H}{H'}\right)^2$.

2.2. Площадь и объем прямого кругового конуса

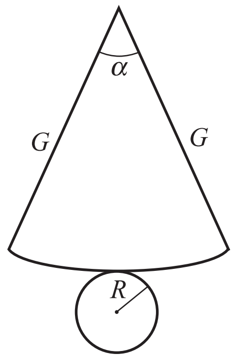


Рис. 8.9

Пусть $\mathcal{C}$ – прямой круговой конус, у которого радиус основания R и образующая G, тогда развертка конуса состоит из круга радиуса R и кругового сектора радиуса G (рис. 8.9). Длина дуги этого сектора равна $2\pi R$, а угол $\alpha=\frac{2\pi R}{G}$. Площадь боковой поверхности конуса $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$ равна площади сектора развертки. Следовательно, $\mathcal{A}_{\text{бок.}}=\frac{1}{2}G^2\alpha=\frac{1}{2}G^2\frac{2\pi R}{G}=\pi RG.$

Таким образом, ***площадь боковой поверхности прямого кругового конуса*** вычисляется по формуле $\boxed{\mathcal{A}_{\text{бок.}}(\mathcal{C})=\pi RG}$.

Определения Сумма площади боковой поверхности прямого кругового конуса $\mathcal{A}_{\text{бок.}}$ и площади его основания $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ называется **площадью полной поверхности** $\mathcal{A}_{\text{полн.}}$ прямого кругового конуса:

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}}=\mathcal{A}_{\text{бок.}}+\mathcal{A}_{\text{осн.}}=\pi RG+\pi R^2}, \quad \text{или} \quad \boxed{\mathcal{A}_{\text{полн.}}=\pi R(G+R)}.$$

Объем кругового конуса вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{C})=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн.}}\cdot H}.$$

Для доказательства этой формулы рассмотрим пирамиду $\mathcal{P}$, основание которой принадлежит плоскости основания конуса, а высота пирамиды равна высоте конуса. Площадь основания конуса $\mathcal{A}_{\text{осн.}}$ равна площади основания пирамиды.

Согласно принципу Кавальери, получаем $\mathcal{V}(\mathcal{C})=\mathcal{V}(\mathcal{P})=\frac{1}{3}\mathcal{A}_{\text{осн.}}\cdot H.$

Так как $\mathcal{A}_{\text{осн.}}=\pi R^2$, то получаем ***формулу для вычисления объема прямого кругового конуса***:

$$\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{C})=\frac{1}{3}\pi R^2 H}. \qquad (2)$$

Этот же результат можно получить при помощи определенного интеграла (см. модуль 3, §2, задача с решением 2, полагая $r=0$).

Задание с решением

Высота конуса равна h. Две образующие конуса взаимно перпендикулярны и делят площадь боковой поверхности конуса в отношении 1:2. Вычислим площадь боковой поверхности конуса.

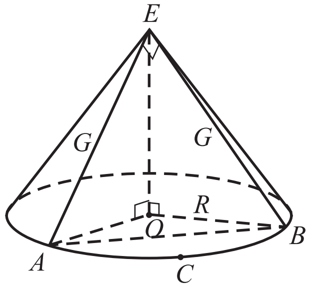


Рис. 8.10

Решение:

Пусть радиус основания конуса равен R, а длина образующей равна G (рис. 8.10). Обозначим взаимно перпендикулярные образующие через $[EA]$ и $[EB]$, а высоту конуса через $[EO]$. Предположим, что меньшая часть площади боковой поверхности конуса определяет дугу ACB. Так как площадь боковой поверхности конуса равна πRG, а отношение площадей равно $1:2$, то площадь меньшей части равна $\frac{1}{3}\pi RG$. Если обозначим через α угол при вершине развертки меньшей части боковой поверхности конуса, то ее площадь равна $\frac{\alpha G^2}{2}$.

Из равенства $\frac{\alpha G^2}{2}=\frac{\pi RG}{3}$ следует, что $\alpha=\frac{2\pi R}{3G}$.

Длина дуги ABC сектора $EACB$ равна $l=\alpha G=\frac{2\pi R}{3}$.

Пусть $x=\mathrm{m}(\angle AOB)$. Тогда длина дуги ACB кругового сектора $OACB$ равна $l=xR$. Из равенства $xR=\frac{2\pi R}{3}$ получаем $x=\frac{2\pi}{3}$. Из прямоугольного треугольника AEB получаем $AB=G\sqrt{2}$, а из треугольника AOB получаем $AB=R\sqrt{3}$. Следовательно, $G=R\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$. Из ΔEOB получаем $R=\sqrt{2}h$ и $G=\sqrt{3}h$.

Находим $\mathcal{A}_L=\pi RG=\pi\sqrt{6}h^2$, $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{2}{3}\pi h^3$.

Ответ: $\pi\sqrt{6}h^2$ см^2, $\frac{2}{3}\pi h^3$ см^3.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

$\mathcal{A}_{бок.}(\mathcal{C})=\pi RG$

1. Длина образующей прямого кругового конуса равна 13 см, а радиус основания 5 см. Найдите: а) площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности конуса; б) объем конуса; в) площадь осевого сечения конуса.

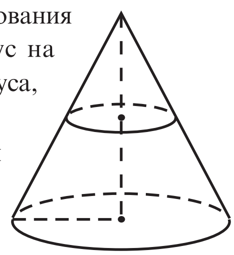
2. ***Работайте в парах!*** Площадь полной поверхности прямого кругового конуса равна 384π см^2, а площадь его основания 144π см^2. Найдите объем конуса.

3. Осевым сечением прямого кругового конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, длина катета которого равна 5 см. Найдите: а) площадь полной поверхности конуса; б) объем конуса.

B

4. ***Работайте в парах!*** Крыша колодца имеет форму конуса с диаметром основания 6 м и высотой 2 м. Сколько листов жести необходимо для изготовления крыши, если размеры одного листа 0,6 м × 1,5 м, а швы и отходы составляют 11% от поверхности крыши ($\pi\approx 3{,}14$)?

5. БАК Высота прямого кругового конуса равна 24 см, а радиус его основания равен 10 см. Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус на расстоянии 6 см от вершины. Найдите длину образующей малого конуса, полученного при сечении изначального конуса плоскостью.



6. БАК Осевое сечение прямого кругового конуса представляет собой равносторонний треугольник с высотой $4\sqrt{3}$ см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

7. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна 544π см^2, а высота конуса 30 см. Найдите образующую и радиус основания конуса.

C

8. Отношение длины образующей к радиусу основания прямого кругового конуса равно 2:1, а площадь боковой поверхности конуса 162π см^2. Найдите объем конуса.

$$\mathcal{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

9. Образующая прямого кругового конуса равна 26 см, а отношение высоты к радиусу основания равно 12:5. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, если отсекаемые части конуса имеют равные объемы.

Реальный профиль

A_1

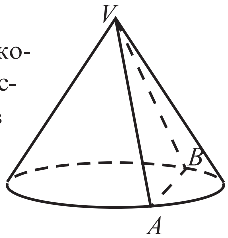
1. Радиус основания прямого кругового конуса равен R, а угол между образующей и плоскостью основания равен φ. Плоскость α параллельна основанию и пересекает конус. Найдите, на каком расстоянии от вершины проходит плоскость α, если:
а) площадь сечения равна половине площади основания;
б) объемы тел, полученных при сечении конуса, равны;
в) площадь боковой поверхности конуса, полученного при сечении данного конуса, равна половине площади боковой поверхности данного конуса.

2. В основании прямого кругового конуса хорда длиной 24 см стягивает дугу, величина которой 120°. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите:
а) площадь полной поверхности конуса;
б) площадь осевого сечения конуса;
в) объем конуса.

3. ***Работайте в парах!*** Прямоугольный треугольник вращается вокруг гипотенузы. Длина одного из катетов равна a, а угол, противолежащий этому катету, равен α. Найдите:
а) площадь поверхности тела вращения;
б) объем тела вращения.

B_1

4. Дан прямой круговой конус с вершиной V и радиусом основания $2\sqrt{6}$ см. Хорда AB в основании конуса имеет длину $5\sqrt{3}$ см, а $m(\angle AVB) = 120°$. Найдите объем конуса.



5. Радиус основания прямого кругового конуса конгруэнтен его высоте. Выразите площади сечений конуса плоскостями, параллельными основанию, через расстояние x от плоскости основания до плоскости сечения.

6. ***Исследуйте!*** Рассмотрим множество конусов, образующая которых постоянна и равна G, а радиус основания является переменным. Найдите:
а) радиус основания конуса, площадь осевого сечения которого наибольшая;
б) объем конуса, радиус основания которого получен в а).

7. ***Работайте в парах!*** Свинцовый конус высотой 21 см расплавили в цилиндр с таким же основанием, что и у конуса. Найдите высоту цилиндра.

8. Радиус R основания прямого кругового конуса равен его высоте. Выразите площади сечений конуса, проходящих через его вершину, через расстояние x от центра основания до секущей плоскости.

9. ***Исследуйте!*** Образующие двух конусов составляют с плоскостями оснований равные углы. Докажите, что отношение площадей боковых поверхностей конусов равно отношению квадратов образующих этих конусов.

10. Сколько квадратных метров ткани потребуется для изготовления конусообразной палатки высотой 3 м и диаметром основания 4 м, если швы и отходы составляют 5% ткани?

11. ***Работайте в парах!*** В сосуд, имеющий форму конуса, обращенного вершиной вниз, влили 340 г ртути. Найдите уровень, до которого налита в сосуде ртуть, если угол при вершине осевого сечения конуса равен 60°, а удельный вес ртути 13,6 г/см^3 $(\pi \approx 3{,}14)$.

12. Значение отношения площади основания прямого кругового конуса к площади осевого сечения равно π. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью его основания.

C_1

13. Докажите, что объем тела, образованного при вращении прямоугольного треугольника, с гипотенузой c и острым углом α, вокруг гипотенузы, равен $\mathcal{V} = \dfrac{\pi c^3}{12}\sin^2 2\alpha$.

14. ***Исследуйте!*** Докажите, что из всех сечений конуса плоскостями, проходящими через его вершину, наибольший периметр имеет осевое сечение.

§ 3 УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

3.1. Основные понятия

Пусть $\mathscr{C}$ – круговой конус с вершиной S и основанием $\mathscr{D}(O, R)$ (рис. 8.11).

Пересекая конус $\mathscr{C}$ плоскостью $\beta \parallel \alpha$ (β пересекает $[SO]$ во внутренней точке), получим два тела. Первое тело – это конус $\mathscr{C}'$ с вершиной S, основание которого круг $\mathscr{D}'$, расположенный на секущей плоскости β. Второе тело называется ***усеченным круговым конусом***.

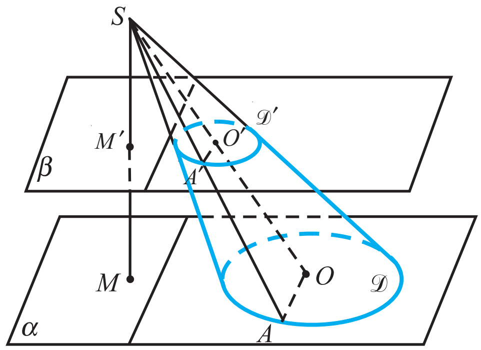


Рис. 8.11

Часть боковой поверхности конуса $\mathscr{C}$, которая остается после удаления конуса $\mathscr{C}'$, называется ***боковой поверхностью*** усеченного конуса.

Пересечением боковой поверхности усеченного конуса с любой образующей конуса $\mathscr{C}$ является отрезок, который называется ***образующей*** усеченного конуса (на рисунке 8.11 $[AA']$ – образующая).

Расстояние между плоскостями α и β называется ***высотой*** усеченного конуса (рис. 8.11, MM').

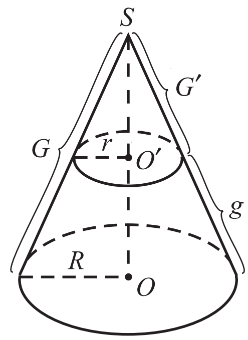


Рис. 8.12

Определения

Усеченный конус называется **прямым круговым**, если прямая, проходящая через центры оснований, перпендикулярна им (рис. 8.12).

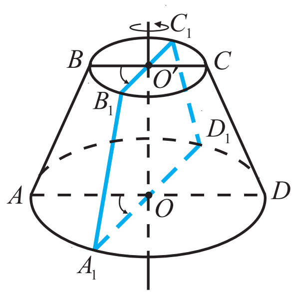


Рис. 8.13

Прямой круговой усеченный конус может быть получен вращением равнобедренной трапеции вокруг прямой OO', проходящей через середины оснований (рис. 8.13). Прямая OO' называется ***осью симметрии*** (или ***осью вращения***) усеченного конуса. Боковая поверхность усеченного конуса получается при вращении отрезка AB вокруг оси OO'.

Сечение прямого кругового усеченного конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется ***осевым сечением*** усеченного конуса и является равнобедренной трапецией (рис. 8.13, трапеция $A_1B_1C_1D_1$).

3.2. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем усеченного конуса

Из определения боковой поверхности усеченного конуса следует, что площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса равна разности площадей боковых поверхностей конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$, имеющих одну и ту же ось вращения SO и одну и ту же вершину S, то есть $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C})-\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}')$, где $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)$ – площадь боковой поверхности усеченного конуса, $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C})$ – площадь боковой поверхности конуса, из которого получен усеченный, $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}')$ – площадь боковой поверхности конуса, который отсекается.

Используя обозначения рисунка 8.12, получаем $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C})=\pi RG$ и $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(\mathscr{C}')=\pi rG'$, где R и r – радиусы оснований, а G и G' – образующие конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$.

Следовательно,

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi(RG-rG'). \qquad (1)$$

Согласно следствию 1 теоремы 1 (§2), имеем $\frac{R}{r}=\frac{G}{G'}$.

Получаем, что $\frac{R-r}{r}=\frac{G-G'}{G'}=\frac{g}{G'}$, где $g=G-G'$ – образующая усеченного конуса.

Из последнего равенства следует, что $G'=\frac{gr}{R-r}$.

Аналогичным образом получаем, что $G=\frac{Rg}{R-r}$.

Подставляя G и G' в равенство (1), получаем:

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi\left(\frac{R^2g}{R-r}-\frac{r^2g}{R-r}\right)=\pi g\frac{R^2-r^2}{R-r}=\pi g(R+r).$$

Таким образом: $\boxed{\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi g(R+r)}$.

Площадь полной поверхности прямого кругового усеченного конуса равна сумме площадей боковой поверхности и его оснований:

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi g(R+r)+\pi R^2+\pi r^2}.$$

Площадь боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса может быть вычислена и другим способом.

Теорема 2

Пусть прямой круговой усеченный конус T получен при вращении равнобедренной трапеции вокруг прямой, проходящей через середины ее оснований, h – высота трапеции, d – расстояние от точки пересечения медиатрисы боковой стороны с осью симметрии до середины боковой стороны (рис. 8.14). Тогда площадь боковой поверхности усеченного конуса $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)$ вычисляется по формуле: $\boxed{\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=2\pi hd}$.

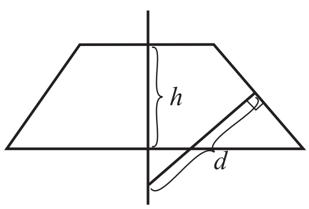


Рис. 8.14

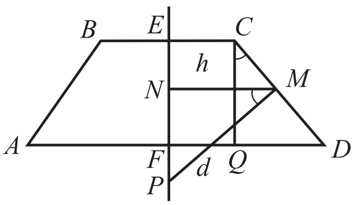


Рис. 8.15

Доказательство:

Площадь боковой поверхности усеченного конуса, полученного вращением равнобедренной трапеции $ABCD$ вокруг оси EF (рис. 8.15), где точки E и F – середины оснований трапеции, вычисляется по формуле:

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=\pi CD(EC+FD)=2\pi CD\cdot MN \qquad (2)$$

($[MN]$ – средняя линия трапеции $FECD$, а значит, $EC+FD=2MN$ (рис. 8.15).

Построим высоту CQ данной трапеции и медиатрису MP стороны CD, где P – точка пересечения оси и медиатрисы. Прямоугольные треугольники CQD и MNP подобны, так как $\angle PMN \equiv \angle DCQ$ как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Из подобия этих двух треугольников следует, что

$$\frac{CD}{MP}=\frac{CQ}{MN}, \qquad \text{или} \qquad CD\cdot MN = CQ\cdot MP.$$

Заменяя в формуле (2) произведение $CD\cdot MN$ на произведение $CQ\cdot MP$, получаем

$$\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=2\pi CQ\cdot MP,$$

или $\mathscr{A}_{\text{бок.}}(T)=2\pi h\cdot d$, где $h=CQ$, $d=MP$. ►

Объем усеченного конуса равен разности объемов конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$, то есть

$$\mathscr{V}(T)=\mathscr{V}(\mathscr{C})-\mathscr{V}(\mathscr{C}')=\frac{\pi}{3}R^2H-\frac{\pi}{3}r^2H'=\frac{\pi}{3}(R^2H-r^2H'), \tag{3}$$

где H и H' – высоты конусов $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ соответственно.

Если обозначим через h высоту усеченного конуса ($h=H-H'$) и применим следствие 1 теоремы 1 (§2), получим: $\dfrac{H}{H'}=\dfrac{R}{r}$, $\dfrac{H-H'}{H'}=\dfrac{R-r}{r}$, $\dfrac{H}{H-H'}=\dfrac{R}{R-r}$, откуда $H=\dfrac{Rh}{R-r}$, $H'=\dfrac{rh}{R-r}$.

Подставив H и H' в равенство (3), получим:

$$\mathscr{V}(T)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{R-r}-\frac{r^3h}{R-r}\right)=\frac{\pi h}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Таким образом, ***объем усеченного конуса*** вычисляется по формуле

$$\boxed{\mathscr{V}(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)},$$

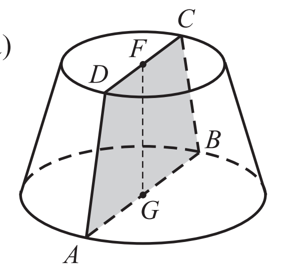
где h – высота усеченного конуса, R и r – радиусы оснований усеченного конуса.

Эта же формула была получена при помощи определенного интеграла (см. модуль 3, § 2, задача с решением 2).

Задания с решением

1 Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 2:3. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна сумме площадей оснований, а объем усеченного конуса равен 1900π см^3. Найдем высоту усеченного конуса (рис. 8.16 а).

а)



Решение:

Рассмотрим одно из осевых сечений усеченного конуса. В сечении получаем равнобедренную трапецию $ABCD$, основания которой AB и CD являются диаметрами оснований усеченного конуса, а боковая сторона и высота CE трапеции являются соответственно образующей и высотой усеченного конуса (рис. 8.16 б).

б)

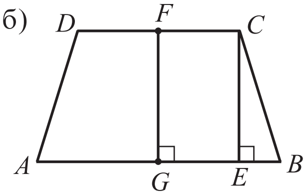


Рис. 8.16

Обозначим середины оснований DC и AB через F и G соответственно. Согласно условию задачи, имеем:

$$FC=2x,\quad GB=3x,\quad x>0 \text{ и } \pi\cdot BC(FC+GB)=\pi(FC^2+GB^2).$$

Последнее равенство можно привести к виду:

$5x\cdot BC=13x^2$, откуда $BC=\dfrac{13x}{5}$.

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику CEB, получаем:

$$CE=\sqrt{CB^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{5}x\right)^2-x^2}=\frac{12}{5}x.$$

Приравниваем объем усеченного конуса, выраженный через x, с заданным объемом:

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\pi CE(FC^2+GB^2+FC\cdot GB)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{12x}{5}(4x^2+9x^2+6x^2)=\frac{4\pi\cdot 19x^3}{5}=1900\pi.$$

Находим $x=5$. Следовательно, $CE=\frac{12x}{5}=12$ (см).

Ответ: 12 см.

2 Равносторонний треугольник со стороной a вращается вокруг оси, лежащей в плоскости треугольника и параллельной высоте треугольника. Расстояние d между высотой и осью больше, чем $\frac{a}{2}$. Найдем объем тела вращения.

Решение:

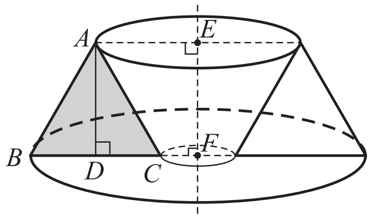


Рис. 8.17

Пусть ΔABC вращается вокруг прямой EF (рис. 8.17). Объем полученного тела равен разности объемов двух усеченных конусов.

При вращении прямоугольной трапеции $EFBA$ вокруг оси EF получается усеченный конус с радиусами оснований $AE=d$, $FB=d+\frac{a}{2}$ и высотой $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Его объем равен $\mathscr{V}_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)$.

При вращении прямоугольной трапеции $EFCA$ вокруг оси EF получается усеченный конус с радиусами оснований $AE=d$, $FC=d-\frac{a}{2}$ и высотой $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Его объем равен $\mathscr{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right)$.

Значит, объем тела вращения равен

$$\mathscr{V}=\mathscr{V}_1-\mathscr{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\left(d+\frac{a}{2}\right)^2-\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}-d+\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 3ad=\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

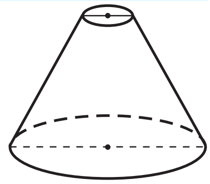
A

1. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса равны 18 см и 30 см, а длина образующей 20 см. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченного конуса;
б) объем усеченного конуса;
в) радиус круга, описанного около одного из осевых сечений усеченного конуса.

2. ***Работайте в парах!*** Образующая прямого кругового усеченного конуса составляет с плоскостью большего основания угол 45°. Радиусы оснований – 3 см и 6 см.
Найдите площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса.

$$\mathscr{A}_{бок.}(T)=\pi g(R+r)$$

B



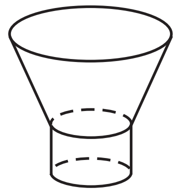
3. Дан прямой круговой усеченный конус с радиусами оснований 1 см и 4 см. Найдите величину угла, образованного плоскостью большего основания и образующей, если объем усеченного конуса равен $21\sqrt{3}\pi$ см³.

4. В сосуд, имеющий форму прямого кругового усеченного конуса, налили 312π см^3 жидкости, что составляет $\frac{3}{4}$ емкости сосуда. Найдите радиус горловины сосуда, если радиус дна равен 2 см, а высота сосуда 24 см.

5. Найдите вместимость ведра, имеющего форму прямого кругового усеченного конуса, если радиус дна равен 9 см, диаметр отверстия 35 см и глубина 38,5 см.

6. Чугунную деталь, имеющую форму прямого кругового усеченного конуса, переплавили в прямой круговой цилиндр, высота которого равна высоте усеченного конуса (объемы цилиндра и усеченного конуса равны). Найдите радиус основания цилиндра, если радиусы оснований усеченного конуса равны 4 см и 22 см.

C



7. Мельничный желоб имеет форму боковой поверхности прямого кругового усеченного конуса и боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Радиусы оснований усеченного конуса равны 1,3 м и 0,25 м, высота усеченного конуса 0,95 м, а длина образующей цилиндра 0,75 м. Найдите количество листов жести, необходимой для изготовления желоба, если размеры одного листа 0,75 м × 1,75 м, а швы и отходы составляют 23% от полной поверхности желоба $(\pi \approx 3{,}14)$.

Реальный профиль

A_1

1. Ведро имеет форму прямого усеченного конуса, радиусы оснований которого 15 см и 10 см, а образующая 30 см. Сколько краски нужно для покраски ведра с обеих сторон, если на 1 м^2 расходуется 200 г краски?

2. Найдите радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна 30π дм^2, высота 3 дм и произведение радиусов оснований равно 5.

B_1

3. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса R и r, а площадь осевого сечения равна сумме площадей оснований. Найдите объем усеченного конуса.

4. ***Работайте в парах!*** Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса R и r, а высота h. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченного конуса;
б) величину угла наклона образующей к плоскости большего основания;
в) величину угла, образованного плоскостью основания и плоскостью, пересекающей основания усеченного конуса по хордам, конгруэнтным сторонам правильных шестиугольников, вписанных в основания (секущая плоскость не пересекает отрезок, соединяющий центры оснований).

5. Радиус одного из оснований усеченного конуса в два раза больше радиуса другого основания. Найдите отношение объемов усеченных конусов, отсекаемых плоскостью, проходящей через середину высоты данного усеченного конуса и параллельной его основаниям.

6. Радиусы оснований прямого кругового усеченного конуса R и r, образующая составляет с плоскостью большего основания угол, равный α. Найдите:
а) площадь боковой поверхности усеченного конуса;
б) объем усеченного конуса.

7. ***Работайте в парах!*** Высота прямого кругового конуса разделена на четыре конгруэнтных отрезка. Через полученные точки проведены плоскости, параллельные плоскости основания. Найдите объемы полученных усеченных конусов, если высота конуса H, а радиус основания конуса R.

C_1

8. На каком расстоянии от меньшего основания прямого кругового усеченного конуса с радиусами оснований R и r и высотой H надо провести плоскость, чтобы в сечении получить круг, площадь которого равна:
а) среднему арифметическому площадей оснований; б) среднему геометрическому площадей оснований?

9. ***Исследуйте!*** Высота прямого кругового усеченного конуса является средним геометрическим радиусов оснований. Докажите, что в осевое сечение усеченного конуса можно вписать окружность.

10. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения тел вращения в строениях вашего города/села.*

§ 4 СФЕРА И ШАР

4.1. Основные понятия

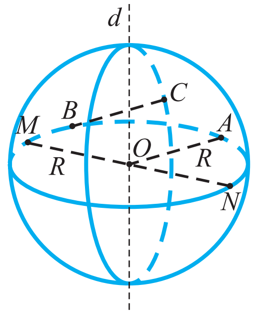


Рис. 8.18

Напоминаем, что ***сферой*** называется геометрическое место точек пространства, расположенных от данной точки O, называемой центром, на данном расстоянии R, называемом ***радиусом***. Обозначают: $\mathscr{S}(O, R)$. Радиусом сферы будем также называть любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой на сфере ($[OA]$ – радиус сферы, изображенной на рисунке 8.18). Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется ***хордой*** ($[BC]$ – хорда сферы, изображенной на рисунке 8.18).

Сфера может быть получена вращением полукруга вокруг несущей d его диаметра (рис. 8.18).

Хорда, проходящая через центр сферы, называется ***диаметром*** сферы ($[MN]$ – диаметр сферы, изображенной на рисунке 8.18).

Взаимное расположение прямой и сферы

1) Прямая и сфера не имеют общих точек. В этом случае расстояние от центра сферы до прямой больше радиуса сферы, и мы говорим, что ***прямая не пересекает сферу*** (рис. 8.19).
2) Прямая и сфера имеют одну общую точку. В этом случае говорим, что прямая является ***касательной*** к сфере. Напоминаем, что радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой ($[OT] \perp d$, рис. 8.20).
3) Прямая и сфера имеют две общие точки. В этом случае говорим, что прямая является ***секущей*** по отношению к сфере. Заметим, что расстояние от центра сферы до секущей прямой меньше радиуса сферы (рис. 8.21).

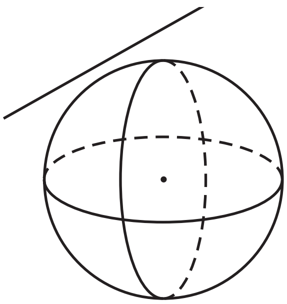


Рис. 8.19

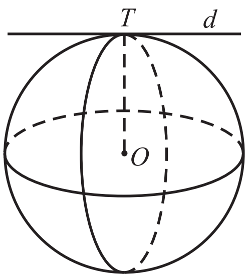


Рис. 8.20

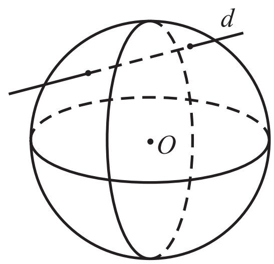


Рис. 8.21

Взаимное расположение плоскости и сферы

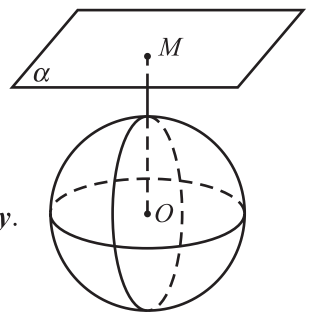


Рис. 8.22

1) Сфера $\mathscr{S}(O, R)$ и плоскость α не имеют общих точек (рис. 8.22).
   В этом случае говорим, что ***плоскость не пересекает сферу***.
   Если точка M принадлежит плоскости α, то $OM > R$.

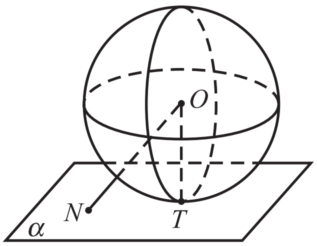


Рис. 8.23

2) Сфера $\mathscr{S}(O, R)$ и плоскость α имеют одну общую точку (рис. 8.23).
В этом случае говорим, что плоскость α является ***касательной*** к сфере, а общая точка T плоскости и сферы называется ***точкой касания***.
Если точка N принадлежит плоскости α, то $ON \geq R$ (равенство имеет место в случае, когда точка N совпадает с точкой T). Получаем, что OT – расстояние от точки O до плоскости α, откуда следует, что $[OT] \perp \alpha$ (рис. 8.23).
Итак, радиус, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен этой плоскости.

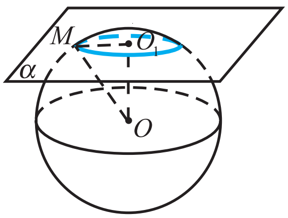


Рис. 8.24

3) Сфера $\mathscr{S}$ и плоскость α пересекаются (рис. 8.24).
В этом случае говорим, что плоскость α является ***секущей плоскостью*** сферы.
Пусть M – общая точка сферы и плоскости, точка O_1 является проекцией центра сферы на плоскость α. Обозначим $OO_1 = d$ и $OM = R$ (рис. 8.24). Треугольник OO_1M – прямоугольный, и $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$.
Точки плоскости α, находящиеся на расстоянии $\sqrt{R^2 - d^2}$ от точки O_1, образуют окружность и в то же время принадлежат сфере, так как $OM = R$. Таким образом, пересечением сферы с плоскостью α является окружность с центром в точке O_1 и радиусом $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Хотите знать больше? (Дополнительный материал)

Пересечение сферы со слоем, ограниченным параллельными плоскостями α и β, секущими по отношению к сфере, называется ***сферической зоной***, или ***сферическим поясом***. Расстояние между плоскостями α и β называется ***высотой зоны***.

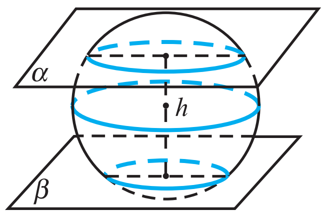


Рис. 8.25

Окружности, которые получаются при пересечении сферы с плоскостями α и β, называются ***основаниями сферической зоны*** (рис. 8.25).

Если одна из плоскостей слоя является касательной к сфере, а другая является секущей, то в пересечении получается поверхность, которая называется ***сферическим сегментом***. В этом случае окружность сечения называется ***основанием сегмента***.

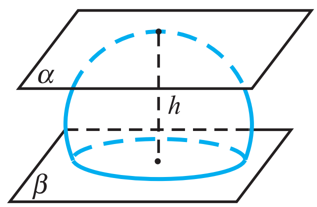


Рис. 8.26

Расстояние h между плоскостями α и β называется ***высотой сегмента*** (рис. 8.26).

Если центр сферы принадлежит основанию сферического сегмента, то сегмент называется ***полусферой***.

Тело, полученное при вращении кругового сектора вокруг диаметра, который не содержит внутренние точки сектора, называется ***сферическим сектором***. Диаметр, вокруг которого вращается круговой сектор, является ***осью сферического сектора***, а радиус кругового сектора является ***радиусом сферического сектора***.

Расстояние между центрами окружностей, описываемых концами дуги кругового сектора, является ***высотой сферического сектора***.

На рисунке 8.27 изображен сферический сектор, полученный при вращении кругового сектора OAB вокруг диаметра AA_1 (его высота $h = CA$), а на рисунке 8.28 – сферический сектор, полученный при вращении кругового сектора OBC вокруг диаметра AA_1 (его высота $h = DE$).

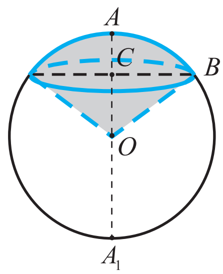


Рис. 8.27

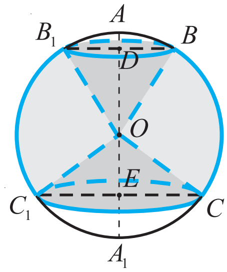


Рис. 8.28

Замечание

Можно показать, что ***площадь сферической зоны*** Z вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathscr{A}(Z) = 2\pi Rh}.$$

Заметим, что полученная формула действительна и для вычисления ***площади сферического сегмента*** (рис. 8.29), поскольку сферический сегмент можно считать частным случаем сферической зоны (рис. 8.29):

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{сегмента}} = 2\pi Rh}.$$

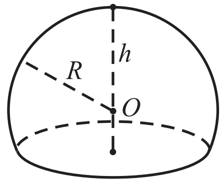


Рис. 8.29

Так как сфера является сферической зоной высоты $h = 2R$, то эта формула подходит и для вычисления ***площади сферы***, т. е.

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{сферы}} = 4\pi R^2}.$$

4.2. Площадь сферы

Сфера не имеет площади боковой поверхности и площади полной поверхности. У нее есть просто площадь. Можно доказать формулу для вычисления площади сферы $\mathscr{A}_{\text{сферы}} = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы. Эту формулу вы узнали в IX классе.

Запомните! $\boxed{\mathscr{A}_{\text{сферы}} = 4\pi R^2}$

4.3. Объем шара

Рассмотрим шар $\mathscr{S}(O, R)$ и тело T, которое получено удалением из прямого кругового цилиндра радиуса R и высотой $2R$ двух конусов с общей вершиной O_2 – серединой оси BC данного цилиндра. Основаниями конусов являются основания цилиндра. Пусть эти тела расположены на плоскости α так, как показано на рисунке 8.30.

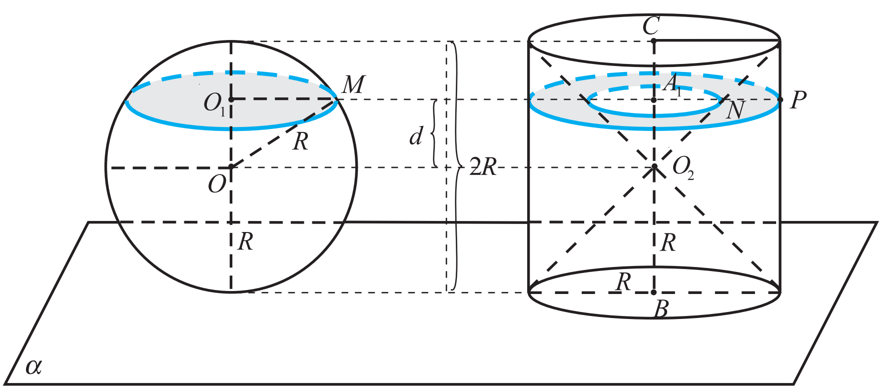


Рис. 8.30

При пересечении данных тел плоскостью $\beta \parallel \alpha$ на расстоянии $d < R$ от центра шара получим в сечениях фигуры, площади которых равны.

Действительно, площадь круга, полученного при пересечении шара плоскостью β, равна

$$\pi O_1M^2 = \pi(OM^2 - OO_1^2) = \pi(R^2 - d^2),$$

а площадь кольца, полученного при пересечении тела T плоскостью β, равна

$$\pi A_1P^2 - \pi A_1N^2 = \pi A_1P^2 - \pi O_2A_1^2 = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2),$$

откуда получаем, что для любых значений d $(0 \le d \le R)$ площадь круга равна площади кольца.

Применив принцип Кавальери, получаем, что объем шара равен объему тела T, т. е. равен разности объема цилиндра и объема двух конусов с высотой и радиусом основания R.

Таким образом, $\mathcal{V}_{\text{шара}} = \mathcal{V}_{\text{тела}} = \mathcal{V}_{\text{цил.}} - 2\mathcal{V}_{\text{кон.}} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Следовательно, $\boxed{\mathcal{V}_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Эта же формула была получена при помощи определенного интеграла (см. модуль 3, § 2, задача с решением 1).

Хотите знать больше? (Дополнительный материал)

Объем шарового сегмента, высота которого h и радиус шара R, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{шар.сегм.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)}.$$

Объем шарового сектора, высота которого h и радиус шара R, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{шар.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}.$$

4.4. Сечение конической поверхности плоскостью

4.4.1. Конические сечения

Рассмотрим в пространстве прямую g, которая пересекает данную прямую a, $g \not\perp a$, в точке V.

Определения

- Поверхность, образованная вращением прямой a (рис. 8, 31), называется **прямой круговой поверхностью с двумя полами** (рис. 8.31).
- Прямая g и любая прямая g' конической поверхности называются **образующими конической поверхности**.
- Ось вращения a является и осью симметрии конической поверхности. Точка V называется **вершиной конической поверхности**.
- Линии, которые получаются в пересечении конической поверхности плоскостями, не проходящими через ее вершину, называются **коническими сечениями**.

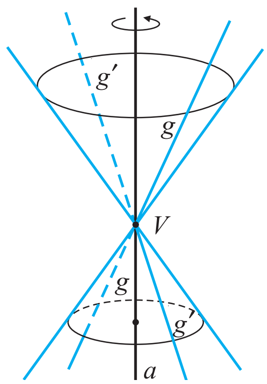


Рис. 8.31

Возможны три различных случая:

1. Секущая плоскость пересекает все образующие одной полы конической поверхности. В этом случае коническое сечение называется ***эллипсом***; в частности, если секущая плоскость перпендикулярна оси конической поверхности, то в сечении получается ***окружность*** (рис. 8.32 а).
2. Секущая плоскость параллельна одной из образующих конической поверхности: коническим сечением является ***парабола*** (рис. 8.32 б).
3. Секущая плоскость пересекает обе полы конической поверхности (плоскость параллельна двум образующим): коническим сечением является ***гипербола*** (рис. 8.32 в).

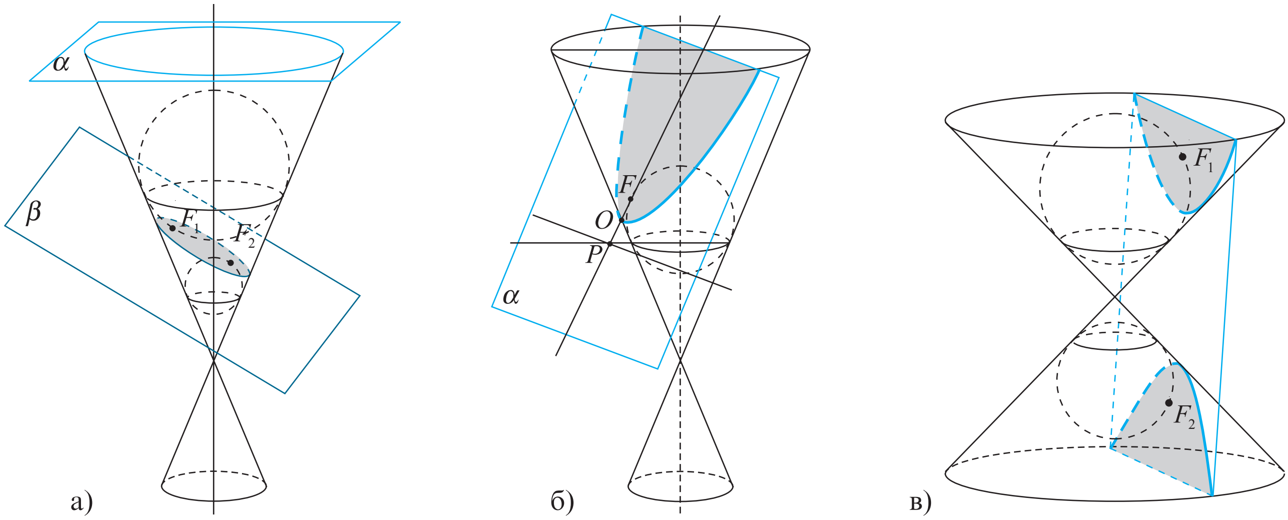
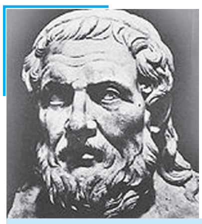


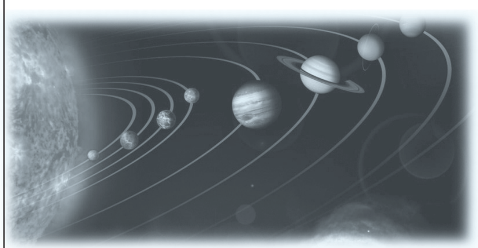
Рис. 8.32



Аполлоний Пергский (262–180 до н. э.) – древнегреческий геометр и астроном

Первое изложение теории конических сечений принадлежит одному из самых великих геометров древности, Аполлонию Пергскому. В трактате из восьми книг, названном «О конических сечениях» Аполлоний систематизировал все свойства конических сечений, изученных до него, открыл ряд новых важных свойств этих линий и дал им названия, которые используются и в наши дни.

Конические сечения имеют много применений. Например, осевые сечения автомобильных фар, карманных фонарей, прожекторов являются параболами. Параболическая антенна представляет собой часть поверхности, получаемой вращением параболы вокруг ее оси.



Планеты Солнечной системы вращаются вокруг Солнца по эллиптическим траекториям. Искусственные спутники также вращаются вокруг Земли по эллиптическим траекториям. Эллипсы наблюдаются, когда наклоняется стакан, в который налита вода (рис. 8.33).

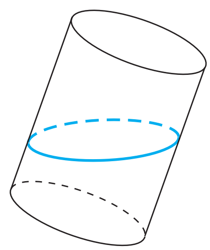
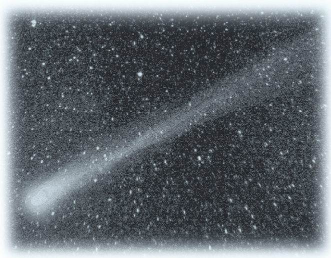


Рис. 8.33

Тень на столе от наклонного абажура настольной лампы имеет форму эллипса (рис. 8.34).

Рис. 8.34



Траектории некоторых комет являются гиперболами, осевые сечения охлаждающих башен атомных станций имеют форму гипербол (рис. 8.35).

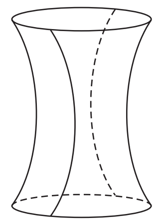


Рис. 8.35

4.4.2. Конические сечения как геометрические места точек

I. Окружность

Определение Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки C, называется **окружностью**. Точка C – **центр окружности**.

Пусть декартовый репер $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ в секущей плоскости α перпендикулярен оси конической поверхности (рис. 8.32 а), $C(a, b)$ – точка плоскости и R – положительное число. Окружность $\mathscr{C}(C, R)$ с центром C и радиусом R (рис. 8.36) задается ***каноническим уравнением***:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

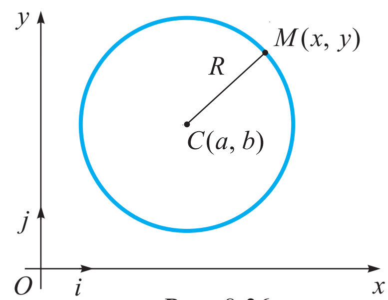


Рис. 8.36

II. Эллипс

Определение Пусть даны точки F_1 и F_2, расстояние между которыми $F_1F_2=2c$, $c>0$, и число a, большее, чем c. Геометрическое место точек M плоскости, обладающих свойством

$$MF_1+MF_2=2a \ \ (a>c), \qquad (1)$$

называется **эллипсом**.

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами эллипса***, прямая F_1F_2 – ***фокальной осью*** секущей плоскости.

Если по разные стороны секущей плоскости β (рис. 8.32 а) вписать две сферы, касающиеся конической поверхности и секущей плоскости β, то точки касания сфер с плоскостью будут фокусами эллипса из сечения.

Выберем в секущей плоскости декартову систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$, как указано на рисунке 8.37. Тогда равенство (1) в координатах имеет вид:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Избавляясь от иррациональности, получаем ***каноническое уравнение эллипса***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (b^2=a^2-c^2). \qquad (2)$$

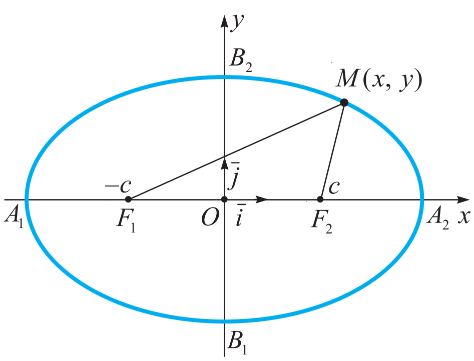


Рис. 8.37

Эллипс (2) пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, а ось Oy – в точках $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$. Эти точки называются ***вершинами эллипса***. Отрезок A_1A_2 называется ***большой осью***, а отрезок B_1B_2 – ***малой осью*** (рис. 8.37).

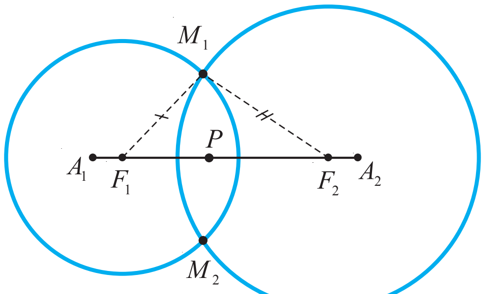


Рис. 8.38

Для построения точек эллипса при помощи циркуля и линейки, если заданы его фокусы F_1 и F_2 и бóльшая ось A_1A_2, построим две окружности $\mathscr{C}_1(F_1, A_1P)$ и $\mathscr{C}_2(F_2, A_2P)$, где $P \in [F_1F_2]$. Точки M_1 и M_2 пересечения окружностей $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ очевидно принадлежат эллипсу (рис. 8.38). Таким образом, можно построить достаточное число точек, что позволит начертить эллипс.

III. Гипербола

Определение

Пусть даны точки F_1 и F_2, расстояние между которыми $F_1F_2 = 2c > 0$, и положительное число a, $a < c$. Геометрическое место точек M плоскости, обладающих свойством

$$|MF_1 - MF_2| = 2a, \qquad (3)$$

называется **гиперболой**.

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами гиперболы***, прямая F_1F_2 – ***фокальной осью***, расстояние $F_1F_2 = 2c$ – ***фокальным расстоянием***.

Если по одну и ту же сторону секущей плоскости из рисунка 8.32 в) вписываются две сферы, которые касаются конической поверхности и секущей плоскости, то точки касания сфер с секущей плоскостью являются фокусами гиперболы из сечения.

Выберем в секущей плоскости декартову систему координат $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, как указано на рисунке 8.39. Тогда равенство (3) в координатах имеет вид:

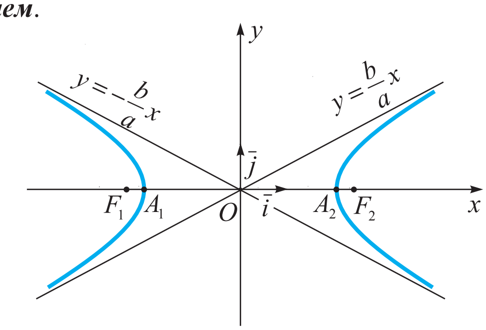


Рис. 8.39

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Избавляясь от иррациональности, получаем ***каноническое уравнение гиперболы***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2). \qquad (4)$$

Гипербола (4) пересекает ось Ox в точках $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$, которые называются ***вершинами гиперболы***, а отрезок A_1A_2 называется ***фокальной осью***.

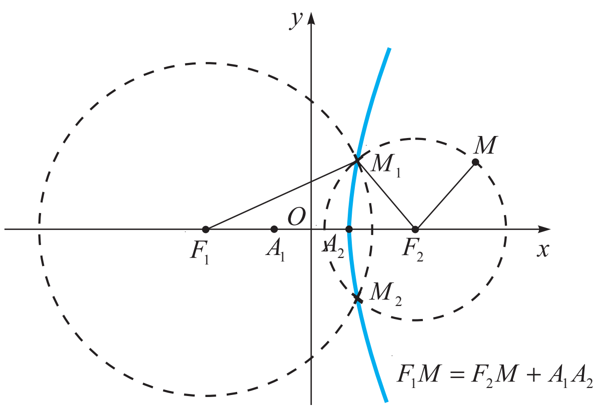


Рис. 8.40

Прямые $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$ называются ***асимптотами гиперболы*** (рис. 8.39).

Для построения точек гиперболы при помощи циркуля и линейки, если указаны ее фокусы F_1, F_2 и фокальная ось A_1A_2, построим две окружности $\mathscr{C}_1(F_2, F_2M)$ и $\mathscr{C}_2(F_1, F_2M + A_1A_2)$. Точки M_1 и M_2 пересечения этих окружностей принадлежат гиперболе (рис. 8.40).

IV. Парабола

Определение Пусть даны прямая d и точка F, не лежащая на этой прямой. **Параболой** называется геометрическое место точек M плоскости, обладающих свойством $\mathrm{d}(M, d) = MF$ (5) (рис. 8.41).

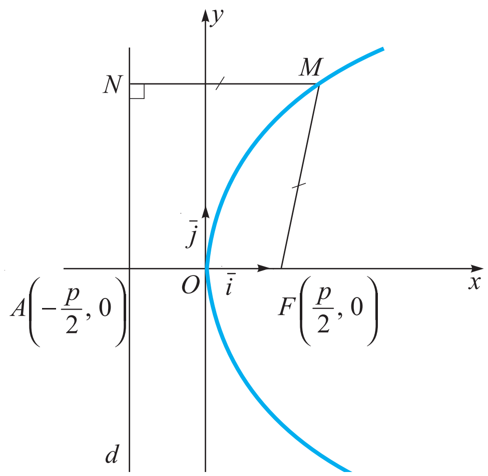


Рис. 8.41

Точка F называется ***фокусом параболы***, прямая d – ***директрисой параболы***.

Если рассмотреть сферу, указанную на рисунке 8.32 б), которая касается конической поверхности и секущей плоскости, то точка касания сферы с секущей плоскостью является фокусом параболы, а пересечение секущей плоскости с плоскостью касательной окружности является директрисой параболы.

Выберем в секущей плоскости декартову систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$, как показано на рисунке 8.41. Тогда равенство (5) в координатах имеет вид:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

где $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

Избавляясь от иррациональности, получаем ***каноническое уравнение параболы***:

$$y^2 = 2px.$$

Число p равно расстоянию от фокуса до директрисы и называется ***параметром параболы***.

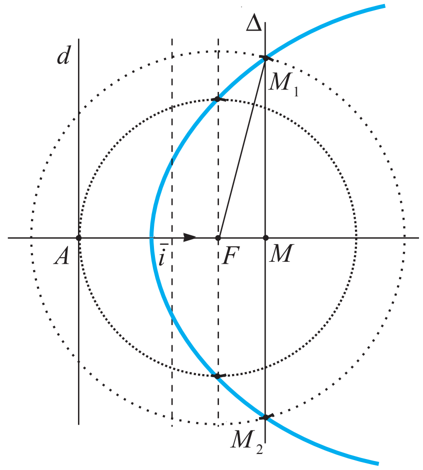


Рис. 8.42

Для построения точек параболы, если указаны ее фокус F и директриса d, построим прямую $\Delta \parallel d$ по ту же сторону от директрисы, что и фокус F. Точки пересечения M_1 и M_2 прямой Δ и окружности $\mathscr{C}(F, AM)$ принадлежат параболе (рис. 8.42).

Замечание. Известно, что график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, называется параболой. Можно показать, что этот график действительно является параболой, ось симметрии которой параллельна оси ординат. Вершиной, фокусом, директрисой и параметром этой параболы соответственно являются:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right),\ F\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\right),\ d\colon y=-\frac{\Delta}{4a}-\frac{1}{4a} \text{ и } p=\frac{1}{2a}.$$

Задания с решением

1 Найдем координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

Решение:

Запишем уравнение окружности в виде:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Значит, точка $C(4, -1)$ – центр окружности и $R = 5$ – ее радиус.

2 Найдем точки пересечения эллипса $x^2+9y^2=36$ с прямой $x-3y+6=0$.

Решение:

Координаты искомых точек являются решениями системы $\begin{cases} x^2+9y^2=36 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Таким образом, получаем две точки: $(-6,\ 0)$ и $(0,\ 2)$.

3 Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найдем:

а) числа a и b; б) координаты фокусов; в) уравнения асимптот.

Решение:

Запишем каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Отсюда следует, что $a^2=9,\ b^2=16,\ c^2=a^2+b^2=25$. Таким образом, получаем:

а) $a=3,\ b=4$; б) $F_1(-5,\ 0),\ F_2(5,\ 0)$; в) $y=-\dfrac{4}{3}x,\ y=\dfrac{4}{3}x$.

4 Составим каноническое уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси абсцисс, $F_1F_2=10\sqrt{2}$ и асимптоты гиперболы заданы уравнениями $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.

Решение:

Так как уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, находим, что $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$.

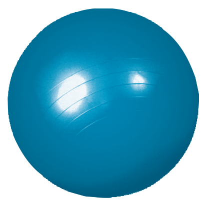
Из соотношений $c^2-a^2=b^2$ и $F_1F_2=2c$ получаем уравнение $50-a^2=b^2$.

Решая систему $\begin{cases} \dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4} \\ 50-a^2=b^2, \end{cases}$ получаем $a^2=32,\ b^2=18$. Итак, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{18}=1$.

Упражнения и задачи

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A



1. Внешний диаметр резинового мяча равен 22 см, а толщина резины 1 см. Найдите объем резины, из которой изготовлен мяч.

B

2. ***Работайте в парах!*** Два свинцовых шара радиусов 12 см и 18 см переплавили в один шар. Найдите:

а) площадь сферической поверхности, ограничивающей шар;

б) объем полученного шара.

3. БАК Найдите объем шара, если площадь поверхности сферы равна 36π см^2.

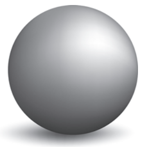
$$V_{\text{шара}}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

4. БАК ***Исследуйте!*** Пересыпав песок из сосуда, имеющего форму полушария радиуса r, в сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, радиус и высота которого равны r, ученик пришел к выводу, что объем сосуда в форме полушария в этих условиях вдвое больше объема сосуда в форме прямого кругового конуса. Выполните вычисления и обведите букву **И**, если вывод верный, или букву **Л**, если вывод ложный.

И	Л

C

5. Масса чугунного шара 262,44 г. Найдите диаметр шара, если плотность чугуна $7{,}29\ \text{г/см}^3$.



6. Сосуд имеет форму полусферы радиуса 6 см, дополненной цилиндром, радиус основания которого 6 см. Какой высоты должен быть цилиндр, чтобы объем сосуда был равен $1800\ \text{см}^3$?

7. Лабораторная работа *Вычисление объемов предметов, имеющих форму тел вращения*.

Реальный профиль

$\mathbf{A_1}$

1. Найдите координаты центра и радиус окружности:
а) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
б) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$;
в) $x^2+y^2-7x+3y-1{,}5=0$;
г) $2x^2+2y^2+4x-3y+1=0$.

2. Составьте каноническое уравнение окружности диаметра AB, если:
а) $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$; б) $A(-1, 1)$, $B(4, 6)$.

3. Найдите точки пересечения окружности $x^2+y^2=25$ и прямой:
а) $x-y+1=0$; б) $x-7y-25=0$.

4. Составьте каноническое уравнение эллипса, который проходит через точки $A(-3, 4)$, $B(6, -2)$.

5. Составьте уравнение эллипса, если:
а) длина большой оси 20 см, а малой оси 12 см;
б) расстояние между фокусами равно 16 см, а длина большой оси 20 см.

$\mathbf{B_1}$

6. Расстояния от одного из фокусов эллипса до концов фокальной оси равны 7 см и 1 см. Составьте каноническое уравнение эллипса.

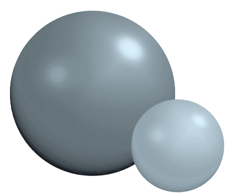
7. Составьте каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
а) точка $M(2\sqrt{5}, -2)$ принадлежит эллипсу, а длина малой оси равна 6;
б) точка $M(-2, 2)$ принадлежит эллипсу, а длина большой оси равна 8;
в) точка $M(\sqrt{15}, 1)$ принадлежит эллипсу и расстояние между фокусами равно 8.

8. Найдите точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, расположенные на расстоянии, равном 7 от левого фокуса.

9. Найдите координаты фокуса F и уравнение директрисы параболы $y^2=24x$.

10. Найдите координаты точек параболы $y^2=16x$, которые расположены на расстоянии, равном 13 от фокуса.

11. Найдите точки пересечения параболы $x^2=4y$ и прямой $x+y-3=0$.

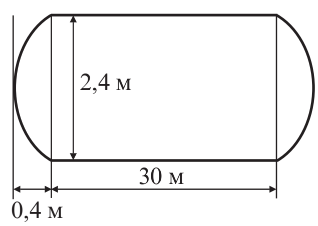


12. ***Исследуйте!*** Фабрика игрушек выпускает резиновые мячи. Сколько банок краски необходимо для покраски 15000 мячей с внешним диаметром 32 см и 42000 мячей с внешним диаметром 18 см, если в банке 5 кг краски и для покраски $1\ \text{м}^2$ расходуется 180 г краски?

13. ***Работайте в парах!*** Вершины треугольника со сторонами 4 см, 5 см, 7 см принадлежат сфере. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен $4\sqrt{6}$ см.

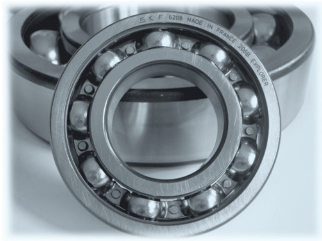
14. Через один конец диаметра шара проведена плоскость, образующая с этим диаметром угол, равный α. Вычислите площадь круга, полученного в сечении, если радиус шара равен R.

15. ***Исследуйте!***
В депо доставили 23 цистерны, форма и размеры которых изображены на рисунке (цилиндр и два сферических сегмента). Цистерны должны покрасить. Сколько килограммов краски потребуется, если расход краски составляет 150 г на 1 м²? ($\pi \approx 3{,}14$)



16. Лабораторная работа *Вычисление объемов предметов, имеющих форму тел вращения*.

C₁



17. Для изготовления одного подшипника используют 12 шариков радиуса 1 см. Заводу по сборке оборудования нужно изготовить 200 000 подшипников. Найдите массу стали, которую надо расплавить, чтобы отлить нужное количество шариков, если в результате плавления и отлива стали потери составляют 0,7% от первоначального веса, а плотность стали $7{,}3\ г/см^3$.

18. ***Работайте в парах!*** Чугунолитейный завод получил заказ на изготовление 400 000 казанов в форме полусферы с толщиной стенок 3 мм и внутренним радиусом 15 см. Найдите массу чугуна, который необходимо расплавить для выполнения заказа, если плотность чугуна $3{,}2\ г/см^3$ и в процессе плавления и отлива потери составляют 0,9% от первоначальной массы.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Высота цилиндра равна половине диагонали осевого сечения, а площадь полной поверхности цилиндра равна $16(3+2\sqrt{3})\ см^2$. Найдите:

а) угол, образованный диагональю осевого сечения и высотой цилиндра;
б) площадь боковой поверхности цилиндра;
в) объем цилиндра.

$$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = 2\pi RH$$

$$\mathcal{V}_{\text{цил.}} = \pi R^2 H$$

B

2. Сколько квадратных метров жести потребуется для изготовления 100 000 консервных банок в форме цилиндра с высотой 4 см и диаметром основания 8 см, если на швы и издержки расходуется 15% жести?

3. Образующая конуса равна 10 м, а его высота 6 м. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса.

4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 6 м и 3 м, а длина образующей 5 м. Найдите:
а) площадь осевого сечения усеченного конуса;
б) угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания;
в) объем и площадь боковой поверхности конуса, из которого происходит усеченный конус.

5. ***Работайте в парах!***
Бокал имеет форму прямого кругового конуса. Угол между образующей конуса и его высотой равен α. Расстояние от центра основания до образующей равно m.
а) Найдите емкость бокала.
б) Сколько таких бокалов необходимо, чтобы разлить сок из пакета емкостью 1 л, если $\alpha = 30°$, а $m = 5$ см?

6. БАК Длина образующей прямого кругового конуса относится к длине его радиуса как 2:1. Найдите высоту конуса, если известно, что площадь его боковой поверхности равна $72\pi\ дм^2$.

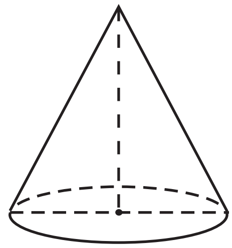
$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

C

7. Найдите диаметр чугунного шара, масса которого равна 252π г (плотность чугуна $7\ г/см^3$).

8. ***Работайте в группах!*** Проект *Дом моей мечты.*

Реальный профиль



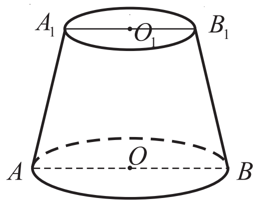
A₁

1. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса в 2 раза больше, чем площадь его основания.
Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью его основания.

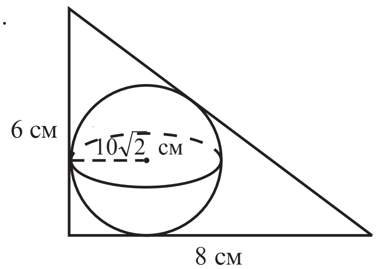
B₁

2. Высота усеченного конуса равна среднему геометрическому диаметров оснований. Угол между образующей усеченного конуса и плоскостью большего основания равен φ. Найдите радиусы R и r оснований усеченного конуса, если:
а) $R+r=s$; б) $R-r=d$.

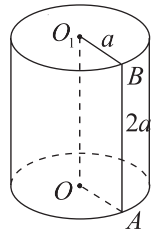
3. В осевое сечение усеченного конуса, образующая которого равна G, можно вписать окружность радиуса R. Найдите площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса.



4. Сфера радиуса $10\sqrt{2}$ см касается всех сторон прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 8 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.



5. Поместится ли металлический шар в сосуд в виде прямого кругового конуса, если его объем в 2 раза меньше объема сосуда? Используя данные рисунка, обведите **Да** в случае положительного ответа, или **Нет**, если ответ отрицательный.
Обоснуйте ответ.



Да | **Нет**

6. Сосуд имеет вид прямого кругового цилиндра с радиусом основания 18 см и высотой 15 см. $\frac{2}{3}$ сосуда заполнено водой.

Выльется ли из сосуда вода, если поместить в него металлический шар с радиусом 9 см? Обведите **Да** в случае положительного ответа, или **Нет**, если ответ отрицательный.
Обоснуйте ответ.

Да | **Нет**

7. Лабораторная работа *Вычисление объемов предметов, имеющих форму тел вращения.*

$$\mathcal{A}_{бок.}(T)=\pi g(R+r)$$

C₁

8. Из одной точки сферы проведены три взаимно перпендикулярные хорды, длины которых равны a, b и c. Найдите радиус сферы.

9. В прямом круговом конусе, радиус основания которого равен R, расположены две сферы радиуса r с центрами на оси конуса. Одна из сфер касается боковой поверхности конуса, а другая сфера касается первой сферы и плоскости основания конуса. Найдите объем конуса, если $R=3r$.

$$\mathcal{V}(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

10. ***Работайте в группах!*** Проект *Дом моей мечты.*

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

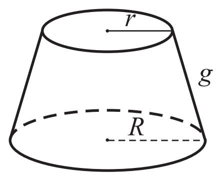
Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

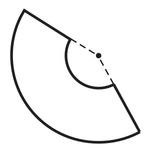
1. Образующая конуса равна 10 см и составляет с плоскостью основания угол, равный 30°.
   а) Заполните, чтобы получить истинное высказывание:
   «Осевое сечение прямого кругового конуса является ____________________».
   б) Найдите площадь полной поверхности конуса.

2. Два металлических шара с диаметрами 8 см и 10 см переплавили в один шар. Найдите:
   а) объем полученного шара;
   б) сколько процентов составляет площадь поверхности меньшего шара от площади поверхности полученного шара.

3. Радиус основания прямого кругового цилиндра равен 5 см, а его высота 12 см.
   а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
   «$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \mathcal{A}_{\text{бок.}} + \mathcal{A}_{\text{осн.}}$». **И** | **Л**
   б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра;
   в) Найдите объем цилиндра.

4. Абажур имеет форму усеченного конуса. Найдите площадь абажура, если $r = 12$ м, $R = 18$ см, $g = 20$ см.





Реальный профиль

1. Площадь осевого сечения цилиндра равна $16\sqrt{3}$ м², а угол между диагональю этого сечения и образующей цилиндра равен 60°.
   а) Заполните, чтобы получить истинное высказывание:
   «Осевое сечение прямого кругового цилиндра является ____________________».
   б) Найдите объем цилиндра.

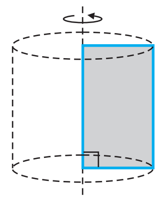
2. Основание пирамиды – ромб со стороной $4\sqrt{5}$ дм и острым углом 60°. Проекцией вершины пирамиды на плоскость основания является точка пересечения диагоналей ромба. Высота пирамиды равна 4 дм. Найдите объем шара, радиус которого равен радиусу окружности, вписанной в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и перпендикулярной двум параллельным ребрам основания пирамиды.

3. Высота прямого кругового конуса равна 15 см, а сумма длин образующей и радиуса основания 25 см.
   а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
   «Сечением конуса плоскостью, содержащей его высоту, является треугольник». **И** | **Л**
   б) Вычислите общую площадь поверхности прямого кругового конуса.

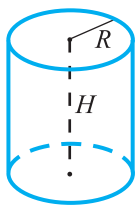
4. Металлический шар радиуса 0,5 см покрыт тонким слоем никеля. Найдите необходимое количество никеля для покрытия 10 000 таких шаров, если расход никеля составляет 0,22 г на 100 см^2 ($\pi \approx 3{,}14$).

Тела вращения

Цилиндр



Прямой круговой цилиндр

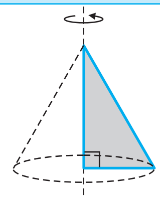


$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = 2\pi RH$

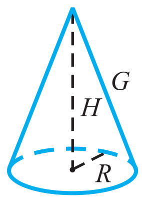
$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = 2\pi R(H+R)$

$\mathcal{V} = \pi R^2 H$

Конус



Прямой круговой конус

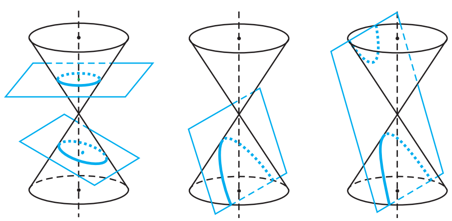


$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \pi RG$

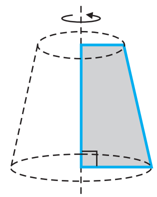
$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \pi R(R+G)$

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

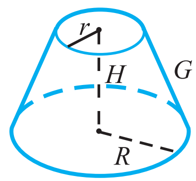
Конические сечения: окружность, эллипс, гипербола, парабола



Усеченный конус



Прямой круговой усеченный конус

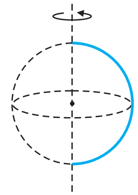


$\mathcal{A}_{\text{бок.}} = \pi G(R+r)$

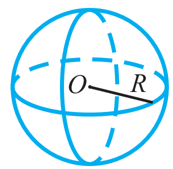
$\mathcal{A}_{\text{полн.}} = \pi[G(R+r)+R^2+r^2]$

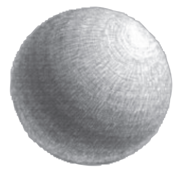
$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3}H(R^2+r^2+Rr)$

Сфера, шар



Сфера, шар

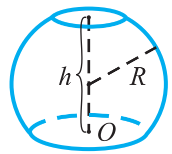


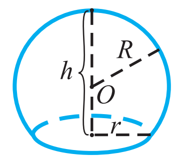


$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\mathcal{A} = 4\pi R^2$

Сферическая зона, сферический сегмент, сферический сектор

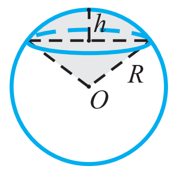




$\mathcal{A}(Z) = 2\pi Rh$

$\mathcal{A}_{\text{сегмента}} = 2\pi Rh = \pi(r^2+h^2)$

$\mathcal{V}_{\text{сегмента}} = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$



$\mathcal{V}_{\text{сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

Модуль

9 Итоговое повторение

1. Комплексные числа
2. Многочлены
3. Уравнения. Неравенства. Системы. Совокупности
4. Последовательности действительных чисел. Предел последовательности
5. Предел функции. Непрерывные функции
6. Дифференцируемые функции
7. Основные свойства и приложения дифференцируемых функций
8. Геометрия на плоскости и в пространстве
9. Элементы тригонометрии
10. Элементы высшей алгебры
11. Упражнения и задачи для повторения

§ 1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Комплексные числа. Алгебраическая форма

Множество $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a, b\in\mathbb{R}\}$, где $\mathrm{i}^2=-1$, является *множеством комплексных чисел*.

Действия сложения и умножения комплексных чисел $z=a+b\mathrm{i}$, $u=c+d\mathrm{i}$ выполняются следующим образом:

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i},\qquad (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

Комплексное число $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$ называется ***сопряженным*** числу $z=a+b\mathrm{i}$.

Свойства сопряженных комплексных чисел $(z, z_1, z_2\in\mathbf{C})$:

1° $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$ **2°** $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ **3°** $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ z_2\neq0$ **4°** $z\cdot\overline{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2\in\mathbb{R}$

5° $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ **6°** $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ **7°** $\overline{\overline{z}}=z$

Число $|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}=r\in\mathbb{R}_+$ называется ***модулем*** комплексного числа z.

Свойства модуля $(z, z_1, z_2\in\mathbf{C})$:

1° $|z|=|\overline{z}|$; **2°** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; **3°** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2\neq0$;

4° $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; **5°** $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|$.

Частное комплексных чисел $z=a+b\mathrm{i}$ и $u=c+d\mathrm{i}\neq0$ можно вычислить следующим образом: $\dfrac{z}{u}=\dfrac{z\cdot\overline{u}}{u\cdot\overline{u}}=\dfrac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$

Действия сложения и умножения на множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и на множестве $\mathbb{R}$. Поэтому на множестве $\mathbf{C}$ остаются справедливыми формулы сокращенного умножения, формула решения квадратного уравнения и т. д. Следует лишь учитывать, что множеством корней второй степени из числа $-a$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, является $\{-\mathrm{i}\sqrt{a},\ \mathrm{i}\sqrt{a}\}$.

Корни второй степени α_1, α_2 из ненулевого комплексного числа $a+b\mathrm{i}$ являются противоположными числами и могут быть вычислены без использования их тригонометрической формы:

1) при $b\neq0$, $\alpha_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$;

2) при $b=0$, $\alpha_{1,2}=\begin{cases}\pm\sqrt{a}, & \text{если } a\ge0\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{|a|}, & \text{если } a<0,\end{cases}$ где $\mathrm{sgn}\,b=\begin{cases}1, & \text{если } b>0\\ 0, & \text{если } b=0\\ -1, & \text{если } b<0.\end{cases}$

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbf{C}$ уравнение $x^2+(1-2\mathrm{i})x+1+5\mathrm{i}=0$.

Решение:

Чтобы использовать известную формулу решения квадратного уравнения, вычислим $\Delta=1-4\mathrm{i}-4-4-20\mathrm{i}=-7-24\mathrm{i}$.

В нашем случае для $\sqrt{-7-24\mathrm{i}}$ получаем $u\in\{-3, 3\}$, $v\in\{-4, 4\}$, и произведение $u\cdot v$ имеет знак «–». Таким образом, $\sqrt{-7-24\mathrm{i}}=\pm(3-4\mathrm{i})$.

Значит, $x_1=\dfrac{-1+2\mathrm{i}-(3-4\mathrm{i})}{2}=-2+3\mathrm{i}$, $x_2=\dfrac{-1+2\mathrm{i}+(3-4\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}$.

Ответ: $S=\{-2+3\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$.

Главный аргумент числа $u = x + \mathrm{i}y$, $u \neq 0$, вычисляется следующим образом:

$$\arg u = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ если } y \geq 0, u \neq -1 \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ если } y < 0 \\ -\pi, \text{ если } u = -1. \end{cases}$$

Числа $\arg u + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, называются ***аргументами*** комплексного числа u.

Замечание

В некоторых учебниках применяется обозначение $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, а условие $\arg z \in (-\pi, \pi]$ заменено условием $\arg z \in [0, 2\pi)$.

Очевидно, что для $z = a + b\mathrm{i}$, $b \neq 0$, имеем $\arg \bar{z} = -\arg z$. Главный аргумент числа $z = a + b\mathrm{i}$, $z \neq 0$, может быть найден с помощью функции arccos:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{r}, \text{ если } b \geq 0 \\ -\arccos\dfrac{a}{r}, \text{ если } b < 0, \ r = \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Если на плоскости задана ортогональная система координат xOy, то существует биекция $f\colon \mathbf{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid x, y \in \mathbb{R}\} \to P = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, определенная формулой $f(x + \mathrm{i}y) = M(x, y)$. В этом случае аргумент числа u имеет следующее геометрическое толкование: это величина (ориентированного) угла, образованного положительной полуосью $[Ox$ и $\overrightarrow{OM}$.

1.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Для ***действительной части*** $x = \operatorname{Re} z$, ***мнимой части*** $y = \operatorname{Im} z$, модуля r и аргумента φ комплексного числа $z = x + \mathrm{i}y$ имеют место соотношения $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, откуда получаем запись

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

которая называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа z.

Если $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, то:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$;

$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$ (формула Муавра).

Число t называется ***корнем n-ой степени***, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, из комплексного числа z, если $t^n = z$.

Теорема

Если $z \neq 0$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, то существует n различных корней n-ой степени, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, из комплексного числа z:

$$\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \,\middle|\, k = \overline{0, n-1}\right\}.$$

Множество корней n-ой степени из комплексного числа z, $z \neq 0$, изображают на комплексной плоскости вершинами правильного n-угольника (если $n \geq 3$), вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

§ 2 МНОГОЧЛЕНЫ

2.1. Операции над одночленами, многочленами

Одночленом является рациональное алгебраическое выражение, в котором над числами и буквами выполняются только операции умножения, возведения в степень с натуральным показателем.

Степень одночлена (ненулевого) ***относительно некоторой переменной*** равна показателю соответствующей переменной при условии, что она появляется лишь один раз. ***Степень одночлена*** (относительно всех переменных) равна сумме степеней его переменных. Степень ненулевого одночлена, не содержащего переменных, равна 0.

Пример

Одночлен $\sqrt{2}X^2Y$ имеет: степень 2 относительно переменной X, степень 1 относительно переменной Y и степень 3 относительно обеих переменных.

Одночлены, у которых совпадают буквенные выражения (с точностью до порядка следования множителей), называются ***подобными одночленами*** или (при сложении) ***подобными слагаемыми***.

Сложение, вычитание, умножение, возведение в степень с натуральным показателем одночленов выполняются в соответствии со свойствами этих операций (известными для чисел) с соблюдением порядка их выполнения.

Пример

$$3\cdot(2X)^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=3\cdot4\cdot X^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=9X^2+Y^2+7Y^2Z.$$

Многочлен – это алгебраическая сумма одночленов. ***Нулевой многочлен*** – это многочлен с нулевыми коэффициентами. Слагаемое, не содержащее переменных, называется ***свободным членом***.

Важные приложения имеют многочлены от одной переменной. Многочлен от одной переменной имеет ***канонический вид***, если его ненулевые члены записаны в порядке убывания их степеней. Канонический вид многочлена определяется однозначно. ***Многочлены***, имеющие один и тот же канонический вид, ***равны***.

Пример

Многочлен $P(X)=3-2X^2-X^3+7X^2-10X$ имеет канонический вид $-X^3+5X^2-10X+3$.

Максимальная степень ненулевых членов многочлена $Q(X)$ называется ***степенью*** $Q(X)$ и обозначается $\operatorname{grad}Q(X)$. Степень ненулевого многочлена не определяется. Многочлен степени n записывается в виде:

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\quad(a_n\neq0).$$

Коэффициент a_n называется ***старшим коэффициентом***, a_0 – ***свободным членом***.

Сложение и вычитание многочленов выполняются путем приведения подобных членов в соответствующей сумме. Умножение двух многочленов выполняется путем умножения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена, затем приведением подобных членов в полученной сумме.

Замечание

Степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей; степень суммы двух многочленов не превосходит максимальную степень многочленов.

Пример

Рассмотрим многочлены $P(X)=X^2+X+1$, $Q(X)=X^2+X+2$, $R(X)=X^2+3$.

Каноническая форма многочлена $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)$ определяется относительно просто, если его записать в виде:

$$P(X)(Q(X)-R(X))=(X^2+X+1)(X^2+X+2-X^2-3)=(X^2+X+1)(X-1)=X^3-1.$$

Для решения некоторых задач используют представление многочлена в виде произведения множителей.

Для ***разложения на множители многочленов*** применяется:

• *метод общего множителя*: $X^5-16X^4=X^4(X-16)$;

• *метод группировки*:
$X^3-6X^2+12X-72=X^2(X-6)+12(X-6)=(X-6)(X^2+12)$;

• *формулы сокращенного умножения*:
$27X^3-1=(3X)^3-1^3=(3X-1)((3X)^2+3X\cdot 1+1)=(3X-1)(9X^2+3X+1)$;

• *разложение на множители квадратного трехчлена*:

$$X^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})X-\sqrt{12}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{6}),$$

так как решениями уравнения $x^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})x-\sqrt{12}=0$ являются $x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{6}$;

• *сочетание различных методов и приемов*:

$$64X^3+4X^2+X+1=(64X^3+1)+4X^2+X=((4X)^3+1^3)+X(4X+1)=$$
$$=(4X+1)(16X^2-4X+1)+X(4X+1)=(4X+1)(16X^2-3X+1).$$

Многочлены первой степени с действительными коэффициентами и многочлены второй степени (трехчлены) с действительными коэффициентами, которые нельзя представить в виде произведения множителей первой степени с действительными коэффициентами (например, $16X^2-3X+1,\ X^2+X+1$), называются ***неприводимыми*** (над $\mathbb{R}$).

Задание с решением

Разложим на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:

$$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1.$$

Решение:

$$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1=X^4+X^2+X^2+1-2X(X^2+1)=$$
$$=X^2(X^2+1)+X^2+1-2X(X^2+1)=(X^2+1)(X^2-2X+1)=(X-1)^2(X^2+1).$$

Если $P(X)=Q(X)\cdot H(X)$, то говорят, что ***многочлен $P(X)$ делится на*** $Q(X)$ (на $H(X)$), а $H(X)$ (соответственно $Q(X)$) называется ***частным*** от деления $P(X)$ на $Q(X)$ (соответственно на $H(X)$).

Пример

Многочлен $P(X)=X^5-16X^4$ разлагается на множители: $X^4\cdot(X-16)$. Следовательно, $P(X)$ делится на X^4 (соответственно на $X-16$); многочлен X^4 (соответственно $X-16$) является частным от деления многочлена $P(X)$ на многочлен $X-16$ (соответственно на X^4).

Чтобы выяснить, делится ли многочлен на другой многочлен, можно (кроме разложения на множители) применить алгоритм деления многочленов.

Задание с решением

Разделим многочлен $P(X)=8X^3-2X^2+X+3$ на бином $X+2$.

Решение:

Напомним, что слагаемые частного представляют собой частные от деления старшего члена многочлена $P(X)$ и старших членов полученных остатков на старший член многочлена $Q(X)$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,8X^3-2X^2+X+3 & X+2 \\
\cline{2-2}
8X^3+16X^2 & 8X^2-18X+37 \\
\cline{1-1}
-\,-18X^2+X+3 & \\
-18X^2-36X & \\
\cline{1-1}
-\,37X+3 & \\
37X+74 & \\
\cline{1-1}
-71 &
\end{array}
$$

Получили частное $8X^2-18X+37$ и остаток –71. Поэтому
$8X^3-2X^2+X+3=(X+2)(8X^2-18X+37)+(-71)$.

Степень остатка обязательно меньше степени делителя либо остаток равен 0, поэтому, разделив многочлен $P(X)$ на бином $X-\alpha$, получим в остатке некоторое число.

Если $P(X)=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0$, то число $P(\alpha)=a_n\alpha^n+\ldots+a_1\alpha+a_0$ называется ***числовым значением*** $P(X)$ для $X=\alpha$.

Теорема

(теорема Безу)
Остаток от деления многочлена $P(X)$ на бином $X-\alpha$ равен числовому значению этого многочлена для $X=\alpha$, то есть $P(\alpha)$.

Задание с решением

Найдем остаток от деления многочлена $P(X)=2X^3+aX^2+aX-3$ на бином $X-2$, зная, что при делении $P(X)$ на $X+2$ получается остаток –9.

Решение:

Применим теорему Безу.

Из условия $P(-2)=-9$ получим уравнение $2\cdot(-8)+4a-2a-3=-9$, решение которого $a=5$. Таким образом, $P(X)=2X^3+5X^2+5X-3$.

Найдем остаток от деления $P(X)$ на $X-2$: $R=P(2)=2\cdot 8+5\cdot 4+5\cdot 2-3=43$.

Ответ: R = 43.

2.2. Корни многочлена

Из теоремы Безу следует, что если при делении многочлена $P(X)$ на бином $X-\alpha$ получается нулевой остаток, т. е. $P(\alpha)=0$, то многочлен $P(X)$ разлагается на множители: $P(X)=(X-\alpha)\cdot Q(X)$.

Определение

Число α называется **корнем** многочлена $P(X)$, если $P(\alpha)=0$.

Для нахождения корней многочлена $P(X)$ можно использовать ***соответствующее ему уравнение***: $P(x)=0$.

Задание с решением

Найдем корни многочлена $P(X)=X^3-6X^2+81$.

Решение:

Решим соответствующее ему уравнение $x^3-6x^2+81=0$, разложив на множители выражение из левой части:

$$x^3+27-6(x^2-9)=(x+3)(x^2-3x+9)-6(x-3)(x+3)=(x+3)(x^2-9x+27).$$

Полученное уравнение $(x+3)(x^2-9x+27)=0$ имеет единственное действительное решение $x_1=-3$ и два комплексных решения $x_{2,3}=\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Таким образом, корнями многочлена являются -3 и $\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Полезным для нахождения корней многочлена является следующее следствие теоремы Безу.

Следствие

Число α является корнем многочлена $P(X)$ тогда и только тогда, когда $P(X)$ делится нацело на $X-\alpha$.

Задание с решением

Разложим на множители многочлен $P(X)=X^3-3X^2+4$.

Решение:

Нетрудно заметить, что $P(2)=0$, следовательно, $\alpha=2$ является корнем $P(X)$. Разделив многочлен $P(X)$ на $X-2$, получим $P(X)=(X-2)(X^2-X-2)$. Для многочлена X^2-X-2 число 2 также является корнем, поэтому $X^2-X-2=(X-2)(X+1)$.

Таким образом, $P(X)$ можно представить в виде: $P(X)=(X-2)^2(X+1)$.

Определение

Действительное число α называется **корнем кратности** m, $m\in\mathbb{N}^*$, многочлена $P(X)$, если $P(X)$ делится на $(X-\alpha)^m$, но не делится на $(X-\alpha)^{m+1}$.

Для многочлена из предыдущего задания $\alpha=2$ является корнем кратности 2 (***двойной корень***), а $\beta=-1$ – корнем кратности 1 (***простой корень***).

Задание с решением

а) Разложим многочлен $P(X)=X^6-2X^5+3X^4-4X^3+3X^2-2X+1$ на неприводимые над $\mathbb{R}$ (с действительными коэффициентами) множители.

б) Найдем корни многочлена и их соответствующие кратности.

Решение:

а) Нетрудно заметить, что $P(1)=0$.

Следовательно, разделив $P(X)$ на $X-1$, получим:

$$P(X)=(X-1)(X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1).$$

Вновь разделим многочлен $Q(X)=X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1$ на $X-1$ и получим $Q(X)=(X-1)(X^4+2X^2+1)$.

Итак, $P(X)=(X-1)^2(X^4+2X^2+1)=(X-1)^2(X^2+1)^2$.

Многочлены $X-1$, X^2+1 неприводимы (над $\mathbb{R}$).

б) Из предыдущего разложения многочлена $P(X)$ получим:
$P(X)=(X-1)^2(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2$ – разложение на неприводимые (с комплексными коэффициентами) множители. Значит, 1 и $\pm\mathrm{i}$ – двойные корни многочлена $P(X)$.

§ 3 УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ. СОВОКУПНОСТИ

3.1. Основные понятия

Определение

Уравнением (**неравенством**) с одним неизвестным называется равенство (неравенство) вида $A(x)=B(x)$, ($A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geq B(x)$ или $A(x)\leq B(x)$), где $A(x)$, $B(x)$ – выражения от x.

Аналогично определяются уравнения (неравенства) с несколькими неизвестными.

Определения

• **Решением** уравнения (неравенства) с одним неизвестным называется значение неизвестного, подстановка которого в уравнение (неравенство) обращает это уравнение (неравенство) в верное числовое равенство (неравенство).

• **Решением** системы из двух (трех) уравнений с двумя (тремя) неизвестными называется упорядоченная пара (a, b) (тройка (a, b, c) значений неизвестных, которая является решением каждого из уравнений системы. Другими словами, которая обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Множество решений совокупности уравнений (***систем***) есть объединение множеств решений уравнений (систем) этой совокупности.

Область допустимых значений (***ОДЗ***) уравнения (неравенства, системы) есть множество значений неизвестного (неизвестных), при которых определены все выражения уравнения (неравенства, системы).

Решениями уравнения (неравенства, системы) могут быть только те значения неизвестного (неизвестных), которые принадлежат ОДЗ данного уравнения (неравенства, системы).

Определение

Два уравнения (неравенства, системы, совокупности) называются **равносильными**, если множества их решений равны.

При решении уравнений, неравенств, систем и совокупностей, как правило, применяются преобразования, приводящие к равносильным уравнениям, неравенствам, системам, совокупностям. Применимы также преобразования, приводящие к образованию посторонних решений, но никак не преобразования, приводящие к потере решений. Посторонние решения исключают проверкой. Если все выполненные в ходе решения преобразования равносильны, то проверка не обязательна.

Например, при возведении в степень с натуральным показателем возможно получить посторонние решения, а при делении на выражение, содержащее неизвестное, рискуем потерять решения.

3.2. Преобразования, созраняющие на ОДЗ равносильность систем уравнений

1. Изменение порядка записи уравнений в системе уравнений.
2. Замена некоторого уравнения системы равносильным уравнением.
3. Выражение одного неизвестного из некоторого уравнения системы через остальные неизвестные и замена этого неизвестного его выражением в остальных уравнениях системы.
4. Замена одного уравнения системы уравнением, полученным при алгебраическом сложении этого уравнения с любым другим уравнением системы.

3.3. Основные методы решения уравнений

1. Применение формул для решений уравнений (например, для уравнений II степени, тригонометрических уравнений и т. д.).
2. Метод введения вспомогательного неизвестного (вспомогательных неизвестных), или метод замены.
3. Метод разложения на множители.
4. Графический метод.

Для некоторых классов уравнений применяются и специальные методы решения. Например, деление обеих частей однородного уравнения на одно и то же ненулевое выражение, возведение в степень с натуральным показателем иррациональных уравнений, приведение некоторых тригонометрических уравнений к однородным, метод интервалов для уравнений, содержащих знак модуля и др.

При решении неравенств применяются аналогичные методы решения уравнений.

3.4. Основные методы решения уравнений, содержащих знак модуля

Выделим наиболее часто используемые методы решения уравнений, содержащих выражения с модулем.

1. *Применение определения модуля*

Пример

$$|2x-3|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3=7\\ 2x-3=-7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-2.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $S=\{-2,\ 5\}$.

2. *Использование соотношения* $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Пример

$$|x+2|=|3x-2| \Leftrightarrow (x+2)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=9x^2-12x+4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$ *Ответ*: $S=\{0,\ 2\}$.

3. *Метод введения вспомогательного неизвестного*

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2\lg^2 x+|\lg x|-3=0$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}_+^*$. Сделаем подстановку $|\lg x|=t$. Из соотношения $\lg^2 x=|\lg x|^2$ получаем уравнение $2t^2+t-3=0$, имеющее решения $t_1=1,\ t_2=-\frac{3}{2}$. Значит, решение исходного уравнения свелось к решению совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}|\lg x|=1\\ |\lg x|=-\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=1\\ \lg x=-1\\ S_1=\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\ x=\frac{1}{10}.\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\left\{10,\ \frac{1}{10}\right\}$.

4. *Метод интервалов*

Задание с решением

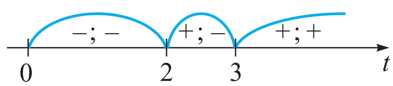
Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=x-1$.

Решение:

ОДЗ: $x\in[1,\ +\infty)$. Сделаем подстановку $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0$, тогда $x-1=t^2$.

Получаем и решаем уравнение $|t-2|+|t-3|=t^2$.

Нулями выражений, стоящих под знаками модулей, являются значения $t_1=2,\ t_2=3$.



а) При $t\in[0, 2)$ решаем уравнение (в интервалах отмечены знаки выражений под знаком модуля):

$$-(t-2)-(t-3)=t^2 \Leftrightarrow t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{6}\notin[0, 2), \\ t=-1+\sqrt{6}\in[0, 2). \end{array}\right.$$

б) При $t\in[2, 3)$ решаем уравнение $t-2-t+3=t^2 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\notin[2, 3), \\ t=-1\notin[2, 3). \end{array}\right.$

в) При $t\in[3, +\infty)$ решаем уравнение $t-2+t-3=t^2 \Leftrightarrow t^2-2t+5=0$. Имеем $S_1=\varnothing$.

Итак, единственным решением уравнения является $t=-1+\sqrt{6}$. Тогда получаем уравнение $\sqrt{x-1}=-1+\sqrt{6}$ с неизвестным x, имеющее решение $8-2\sqrt{6}\in DVA$.

Ответ: $S=\{8-2\sqrt{6}\}$.

5. *Графический метод*

В некоторых случаях использование графика функции, соответствующей заданному уравнению, упрощает нахождение его решений.

3.5. Основные методы решения неравенств, содержащих знак модуля

Выделим наиболее часто используемые методы.

1. *Использование соотношения*

$$|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge -g(x) \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$$

2. *Использование соотношения* $|f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x) \\ f(x)\le -g(x) \end{array}\right.$

3. *Метод введения вспомогательного неизвестного*

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $3^{2|x|}-5\cdot 3^{|x|}+6\le 0$.

Решение:

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}$. Подстановка $3^{|x|}=t$, $t>0$, приводит к неравенству $t^2-5t+6\le 0$, которое имеет решение $t\in[2, 3]$, или $2\le t\le 3$.

Теперь решим неравенство с неизвестным x:

$$2\le 3^{|x|}\le 3 \Leftrightarrow \log_3 2\le \log_3 3^{|x|}\le \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 2\le |x|\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 1 \\ |x|\ge \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \log_3 2 \\ x\le -\log_3 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x\ge \log_3 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x\le -\log_3 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 2\le x\le 1 \\ -1\le x\le -\log_3 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-1; -\log_3 2]\cup[\log_3 2; 1].$$

Ответ: $S=[-1; -\log_3 2]\cup[\log_3 2; 1]$.

4. *Метод интервалов*

Алгоритм решения методом интервалов неравенств, содержащих знак модуля, аналогичен алгоритму решения уравнений, содержащих знак модуля.

3.6. Основные методы решения систем уравнений

1. Метод подстановки.
2. Метод сложения.
3. Метод введения вспомогательного неизвестного (вспомогательных неизвестных), или метод замены.
4. Графический метод.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет решения.

Система уравнений называется ***совместной и определенной***, если она имеет конечное множество решений, и ***совместной и неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

Система уравнений называется ***несовместной***, если она не имеет решений.

Приведем еще два вида преобразований, сохраняющих на ОДЗ равносильность:

1. $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(x)=0,\\ E_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ E_n(x)=0;\end{array}\right.$ **2.** $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(x)=E_2(x),\\ E_1(x)=-E_2(x).\end{array}\right.$

При решении систем (совокупностей) неравенств применяются методы, аналогичные методам решения неравенств.

Задание с решением

Решим на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases}\log_x(x+2)>2,\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x.\end{cases}$

Решение:

ОДЗ: $x\in(0,1)\cup(1,\log_2 9)$.

$$\begin{cases}\log_x(x+2)>2\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x+2<x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x+2>x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0,1)\\ x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\\ x\in(-\infty,\log_2 9)\\ x\in[0,3]\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1,+\infty)\\ x\in(-1,2)\\ x\in(-\infty,\log_2 9)\\ x\in[0,3]\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S=\varnothing,\\ x\in(1,2).\end{array}\right.$$

Ответ: $S=(1,2)$.

Решения уравнений, неравенств, систем и совокупностей уравнений (неравенств) необходимо найти с учетом множества, на котором они отыскиваются.

Задание с решением

Решим на множестве **C** уравнение $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

Решение:

Поскольку уравнение – симметрическое нечетной степени, то $x=-1$ – его решение.

Разложим на множители и получим: $3x^3+2x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=0\\ 3x^2-x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\\ x=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}.\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\left\{-1,\ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\ \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}\right\}$.

§ 4 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

4.1. Понятие числовой последовательности. Монотонные последовательности. *Ограниченные последовательности

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \frac{n+3}{n+4}$

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \frac{1}{n+1}$

Последовательностью действительных чисел, или ***числовой последовательностью*** называется числовая функция $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Обозначим $f(n) = x_n$. Тогда последовательность может быть записана в виде $x_1, x_2, x_n, \ldots$ или $(x_n)_{n\geq 1}$.

Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется ***возрастающей*** (соответственно ***убывающей***), если $x_n \leq x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$ называется ***строго возрастающей*** (соответственно ***строго убывающей***), если $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются ***строго монотонными***.

Последовательность действительных чисел $(x_n)_{n\geq 1}$ называется ***ограниченной***, если выполнено одно из следующих условий:

а) существуют числа $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$, такие, что $a \leq x_n \leq b,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$;

б) существует число $M \in \mathbb{R}_+$ такое, что $|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Определение

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа.

Любой член арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов, то есть для любого $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Общий член арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ задается формулой:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ где } d \text{ – разность этой прогрессии.}$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq 1}$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Определение

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на одно и то же число.

Любой член геометрической прогрессии с положительными членами $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$, начиная со второго, равен среднему геометрическому соседних с ним членов, то есть для любого $n \geq 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Общий член геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ задается формулой:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ где } q \text{ – знаменатель этой прогрессии.}$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq 1}$ вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

Сумма бесконечно убывающей арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ |q| < 1.$$

Задание с решением

Велосипедист проехал за первый час 5 км. За каждый последующий час он преодолевал на 2 км больше, чем за предыдущий час. За сколько часов велосипедист проехал 32 км?

Решение:

Расстояния, пройденные велосипедистом за каждый час, составляют арифметическую прогрессию, первый член которой равен $a_1 = 5$, а разность равна $q = 2$. Используя формулу вычисления первых n членов арифметической прогрессии, получаем уравнение $\frac{2\cdot 5 + 2(n-1)}{2}\cdot n = 32 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 32 = 0$, решениями которого являются $n_1 = 4$, $n_2 = -8$ (которое не удовлетворяет условию задачи).

Ответ: За 4 часа.

4.3. Предел последовательности. Подпоследовательности

Определения

- **Окрестностью** точки $a \in \mathbb{R}$ называется интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.
- **Определение предела последовательности «на языке окрестностей»**

Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – последовательность действительных чисел и a – действительное число. Число a называется **пределом** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если в любую окрестность числа a попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Предел последовательности обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

- **Определение предела последовательности «на языке ε»**

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, при котором для любого $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пусть $(x_n)_{n\geq 1}$ – последовательность действительных чисел, $(n_k)_{k\geq 1}$ – строго возрастающая последовательность чисел, $n_k \in \mathbb{N}^*$. Последовательность $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ называется ***подпоследовательностью*** последовательности $(x_n)_{n\geq 1}$.

Говорят, что последовательность действительных чисел $(x_n)_{n\geq 1}$ имеет ***бесконечный предел*** (обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, при котором для любого $n > n_\varepsilon$ верно неравенство $|x_n| > \varepsilon$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется ***сходящейся последовательностью***. Последовательность, не являющаяся сходящейся (то есть последовательность, у которой нет предела или предел равен бесконечности), называется ***расходящейся последовательностью***.

4.4. Число e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182818284590...$$

Задание с решением

Вычислим пределы последовательностей, заданных формулой общего члена:

а) $x_n = \sqrt[3]{n^3-3n+5}-\sqrt{n+8}$; б) $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$; в) $x_n = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}\right)^n$.

Решение:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-3n+5}-\sqrt{n+8}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}\right) = \infty\cdot 1 = \infty$, так как $n\to\infty$, а выражение в скобках имеет предел 1.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}$ (согласно формуле вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\dfrac{b_1}{1-q}$).

в) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}-1\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4n-1}{n^2-3n+2}\right)^{\frac{n^2-3n+2}{4n-1}}\right]^{\frac{n(4n-1)}{n^2-3n+2}} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2-3n+1}} = e^4.$$

§ 5 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

5.1. Предел функции

Определения

• Пусть E – подмножество множества $\mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$. Точка x_0 (конечная или бесконечная) называется **предельной точкой** множества E, если для любой окрестности V точки x_0 верно соотношение $V \bigcap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ или если существует последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

• Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – предельная точка множества E. Говорят, что число l (конечное или бесконечное) называется **пределом** функции f в точке x_0 (обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$), если для любой окрестности U числа l существует окрестность V числа x_0 такая, что для любого $x \in V \bigcap (E \setminus \{x_0\})$ следует, что $f(x) \in U$.

• Число $l_л$ (соответственно $l_п$) называется **левым пределом** (соответственно **правым пределом**) функции f в точке x_0, если для любой окрестности U точки $l_л$ (соответственно $l_п$) существует окрестность V точки x_0 такая, что для любого $x < x_0$ (соответственно для любого $x > x_0$), $x \in V \bigcap (E \setminus \{x_0\})$ следует, что $f(x) \in U$.

• Числа $l_л = l_л(x_0)$, $l_п = l_п(x_0)$ называются **односторонними пределами** функции f в точке x_0 и обозначаются $l_л(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, $l_п(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

5.1.1. Критерий существования предела функции в точке

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – предельная точка множества E.

Критерий «на языке односторонних пределов»

Пусть x_0 – предельная точка множеств $E \bigcap (-\infty, x_0)$ и $E \bigcap (x_0, +\infty)$. Функция f имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ тогда и только тогда, когда функция f имеет в точке x_0 односторонние пределы $l_л(x_0)$, $l_п(x_0)$ и $l_л(x_0) = l_п(x_0) = l$.

5.1.2. Операции над пределами функций. Свойства пределов функций

Операции над пределами функций

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторые функции, где $E \subseteq \mathbb{R}$, x_0 – предельная точка множества E, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ и имеют смысл следующие операции:

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b},\ a^b.$$

Тогда:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [cf(x)] = ca$ $(c \in \mathbb{R})$;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = a+b$, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-g(x)] = a-b$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b$;
4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $g(x) \neq 0$;
5) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b$, где $f(x) > 0$, $\forall x \in E$.

Свойства пределов функций

1° Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то этот предел единственный.

2° Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, то существует окрестность V точки x_0 такая, что функция f ограничена на множестве $V \bigcap E$.

3° Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in E$ или в некоторой окрестности точки x_0 из E, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

4° Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и если функция g ограничена в некоторой окрестности точки x_0 из E, то функция $f\cdot g$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

5° Пусть $u\colon D\to E$, $f\colon E\to\mathbb{R}$ – некоторые функции, где $D, E\subseteq\mathbb{R}$, и x_0 – предельная точка множества D. Если $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=y_0$, $u(x)\neq y_0$ для любого $x\in D$, $x\neq x_0$, и существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$, то сложная функция $f\circ u$ имеет предел в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$. Подстановка $y=u(x)$ из последнего равенства называется ***заменой переменной***.

5.1.3. Замечательные пределы. Другие пределы

Замечательные пределы (применяются при вычислении пределов функции)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 2) а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Другие пределы (часто применяемые при вычислении пределов функции)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R};$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2};$

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0;$

9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0,\ \alpha>0,\ a>1;$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,\ a>1.$

Все указанные выше пределы верны, на основании свойства 5° предела сложной функции, и в том случае, когда переменная x является функцией $x=u(t)$, предел которой при $t\to t_0$ равен нулю или бесконечности.

5.1.4. Неопределенности в операциях над пределами функций

Вычисления пределов функций приводят к неопределенностям вида:

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0}\,.$$

Для раскрытия неопределенностей такого вида рекомендуется:

– разложить, если возможно, выражения на множители и сократить на общий множитель или применить замечательные пределы или другие пределы $\left(\text{случай } \dfrac{0}{0}\right)$;

– вынести за скобки числителя и знаменателя отношения, как общий множитель, функции, дающие наибольший рост на бесконечность, и применить, если это необходимо, замечательные или другие пределы $\left(\text{случай } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$;

– привести к общему знаменателю, избавиться от иррациональности при помощи сопряженных выражений, применить равносильные преобразования и т. д. (случай $\infty-\infty$);

– применить тождества $u\cdot v=\frac{u}{\frac{1}{v}}=\frac{v}{\frac{1}{u}}$ (случай $0\cdot\infty$), $u^v=e^{v\ln u}$ (случаи 1^∞, 0^0, ∞^0) и перейти к неопределенности вида $0\cdot\infty$;

– использовать замечательные пределы, относящиеся к числу e (случай 1^∞). Если $[u(x)]^{v(x)}$ – неопределенность вида 1^∞, то полезно применить формулу

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}}.$$

5.1.5. Таблица определенностей

1) $\infty+a=\infty$	10) $a\cdot(-\infty)=+\infty\ \ (a<0)$	18) $a^{+\infty}=+\infty$, если $a>1$
2) $(+\infty)+a=+\infty$	11) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	19) $a^{-\infty}=0$, если $a>1$
3) $(-\infty)+a=-\infty$	12) $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	20) $a^{+\infty}=0$, если $0<a<1$
4) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	13) $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	21) $a^{-\infty}=+\infty$, если $0<a<1$
5) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	14) $\infty\cdot\infty=\infty$	22) $(+\infty)^a=+\infty$, если $a>0$
6) $a\cdot\infty=\infty\ \ (a\neq 0)$	15) $\frac{a}{\infty}=0$	23) $(+\infty)^a=0$, если $a<0$
7) $a\cdot(+\infty)=+\infty\ \ (a>0)$	16) $\frac{\infty}{a}=\infty$	24) $0^{+\infty}=0$
8) $a\cdot(-\infty)=-\infty\ \ (a>0)$	17) $\frac{a}{0}=\infty\ \ (a\neq 0)$	25) $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$
9) $a\cdot(+\infty)=-\infty\ \ (a<0)$		26) $(+\infty)^{-\infty}=0$

Задания с решением

1 Вычислим $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{3}{2}.$$

2 Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^4, \text{ так как}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x-3x}{2}\cdot\sin\frac{x+3x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin 2x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=4\cdot 1\cdot 1=4.$$

3 Найдем значения параметра $m\in\mathbb{R}$, при которых функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin m(x-1)}{x-1}+3x^2, & \text{если } x<1,\\ \sqrt{x+3}+2m^2x, & \text{если } x\geq 1,\end{cases}$$

имеет предел в точке $x_0=1$, а затем вычислим значение этого предела.

Решение:

Так как $l_л(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left[m\frac{\sin m(x-1)}{m(x-1)}+3x^2\right]=m+3$, $l_п(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\sqrt{x+3}+2m^2x)=2+2m^2$,

то функция f имеет предел в точке $x_0=1$, если $m+3=l_л(1)=l_п(1)=2+2m^2$.

Следовательно, $2m^2 - m - 1 = 0$, то есть $m = -\frac{1}{2}$ или $m = 1$.

Если $m = -\frac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = l_л(1) = l_п(1) = \frac{5}{2}$.

Если $m = 1$, то $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = l_л(1) = l_п(1) = 4$.

4 Предприятие производит минеральную воду. Автоматические линии розлива получают минеральную воду из накопительного бассейна, в котором изначально было 1000 л первичного материала. Согласно производственной технологии, за каждую секунду из бассейна откачивают 10% содержимого и одновременно из артезианского колодца вливают в бассейн 120 л минеральной воды. Сколько литров минеральной воды будет в накопительном бассейне через неограниченный период времени, если автоматические линии будут работать без остановок?

Решение:

Пусть $f(n)$ – количество воды (в литрах) в бассейне в первую секунду, где $f(0) = 1000\ l$. Тогда на $(n+1)$-й секунде будет:

$$f(n+1) = f(n) - 0{,}1 \cdot f(n) + 120 = 0{,}9 f(n) + 120.$$

Если $a = \lim\limits_{n \to \infty} f(n)$, то такой же предел будем иметь и для $f(n+1)$, то есть $a = \lim\limits_{n \to \infty} f(n+1)$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $f(n+1) = 0{,}9 \cdot f(n) + 120$, получаем $\lim\limits_{n \to \infty} f(n+1) = 0{,}9 \cdot \lim\limits_{n \to \infty} f(n) + 120$, то есть $a = 0{,}9a + 120$.

Из этого уравнения найдем, что $a = 1200$ л. Это и есть количество воды, которое будет в накопительном бассейне через неограниченный период времени.

5.2. Непрерывные функции

Определения

• Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – некоторая функция и x_0 – некоторая точка множества E. Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и этот предел равен $f(x_0)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• Точка x_0 называется **точкой непрерывности** функции f, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in E$.

• Функция f, непрерывная в любой точке множества $A \subseteq E$, называется **непрерывной на множестве** A.

• Функция f называется **разрывной** в точке x_0, если она не является непрерывной в точке $x_0 \in E$. В таком случае точка x_0 называется **точкой разрыва**. Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва первого рода** функции f, если односторонние пределы функции f в точке x_0 существуют и конечны, однако $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ или $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$.

• Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется **скачком** функции f в точке x_0, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$.

• Точка разрыва x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции f, если она не является точкой разрыва первого рода, то есть, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равен бесконечности или не существует.

• Функция f называется **непрерывной слева** (соответственно **непрерывной справа**) в точке x_0, если в точке x_0 существует предел слева $f(x_0 - 0)$ (соответственно предел справа $f(x_0 + 0)$) и, кроме того, $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + 0) = f(x_0)$).

Теорема 1

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ непрерывна в точке $x_0 \in E$ (x_0 – внутренняя точка множества E) тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа в точке x_0, то есть $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Вывод. Элементарные функции (рациональные, тригонометрические, показательные и др.) непрерывны на любом промежутке, на котором они определены.

Операции над непрерывными функциями

Теорема 2

Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции в точке $x_0 \in E$ (соответственно на множестве E). Тогда функции αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ являются непрерывными в точке x_0 (соответственно на множестве E). Если, кроме того, $g(x_0) \neq 0$, то $\dfrac{f}{g}$ – непрерывная функция в точке x_0 (соответственно на множестве $E \setminus \{x \mid x \in E,\ g(x) = 0\}$).

Теорема 3

Пусть $g\colon E_1 \to E_2$, $f\colon E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$ – некоторые функции и $h = f \circ g\colon E_1 \to \mathbb{R}$ – их композиция. Если функция g непрерывна в точке $x_0 \in E_1$ и функция f непрерывна в точке $y_0 = g(x_0) \in E_2$, то функция h непрерывна в точке x_0.

Основные свойства непрерывных функций

Теорема 4

Первая теорема Вейерштрасса об ограниченности

Любая функция, непрерывная на отрезке, является ограниченной на этом отрезке.

Теорема 5

Вторая теорема Вейерштрасса

Любая функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своих точных граней, верхней и нижней.

Теорема 6

Первая теорема Больцано-Коши о прохождении функции через нуль

Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения противоположных знаков: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Задание с решением

Исследуем на непрерывность функцию:

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } x < 0, \\ \sin x + \cos x, & \text{если } x \geq 0; \end{cases}$

б) $g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 + x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

в) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x^2 - 1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Решение:

а) Функция f, будучи элементарной, непрерывна на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Остается исследовать ее на непрерывность в точке $x_0 = 0$. Так как $f(0) = 1$, $f(-0) = 1$, $f(+0) = 1$ и $f(-0) = f(+0) = f(0)$, то функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

б) Функция g непрерывна в любой точке $x \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$, а в точке $x_0 = 1$ имеем: $f(1) = 1$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 3$. Следовательно, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва первого рода. Еще заметим, что функция g непрерывна слева в точке $x_0 = 1$.

в) Очевидно, что функция h непрерывна на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$, а в точке $x_0 = 1$ имеем $\lim\limits_{x \to 1-0} h(x) = e = h(1)$, $\lim\limits_{x \to 1+0} h(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty$, то есть $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода.

§ 6 ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Производная функции

Пусть функция $f: I \to \mathbb{R}$ определена на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, а x – произвольная точка некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Пусть $x - x_0 = \Delta x$ – приращение аргумента в точке x_0, а $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ – приращение функции f в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента.

Определение

Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ и $f: I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция. Будем говорить, что функция f **имеет производную в точке x_0**, если существует предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1) \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2).$$

Этот предел называется **производной функции f в точке x_0** и обозначается $f'(x_0)$. Если, кроме этого, значение $f'(x_0)$ – конечное, то функция f называется **дифференцируемой в точке x_0**.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{или} \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Замечания

1. Если предел (1) (или (2) существует и бесконечен или не существует, то ***функция f не дифференцируема в точке x_0***.

2. В исследовании дифференцируемости некоторой функции в определенной точке принимаются во внимание лишь соответствующие значения этой функции из окрестности этой точки. Поэтому говорят, что *свойство дифференцируемости функции является ее локальным свойством*.

3. Будем говорить, что ***функция f* дифференцируема на множестве** M $(M \subseteq I)$, если она дифференцируема в каждой точке множества M.

Теорема 1

Если функция дифференцируема в данной точке, то она непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. (Приведите пример.)

Определения

• Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ и $f: I \to \mathbb{R}$ – некоторая функция.
Предел

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (3) \ \text{(соответственно} \ \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (4)$$

(если существует), конечный или бесконечный, называется **левой** (соответственно **правой**) **производной функции f в точке x_0**.
Обозначают: $f'_л(x_0)$, $f'_п(x_0)$.

• Функция $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ называется **дифференцируемой слева** (соответственно **дифференцируемой справа**) **в точке x_0**, если предел (3) (соответственно предел (4) существует и конечен.

Теорема 2

Функция $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ дифференцируема в точке $x_0 \in I$, если и только если она дифференцируема слева и справа в точке x_0 и $f'_л(x_0) = f'_п(x_0)$.
В этом случае $f'_л(x_0) = f'_п(x_0) = f'(x_0)$.

6.2. Дифференциал функции

Определение Линейная функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$, называется **дифференциалом функции** f **в точке** x_0 и обозначается $\mathrm{d}f(x_0)$.

В частности, для функции $f(x) = x$ имеем $f'(x_0) = 1$. Тогда $\mathrm{d}x(x_0) = \Delta x$, $\forall \Delta x \in \mathbb{R}$.

Если функция f дифференцируема в любой точке интервала $I \subseteq \mathbb{R}$, получаем формулу для вычисления дифференциала функции:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x,\ \forall x \in I}.$$

Например, для функции $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos 2x$, имеем:

$$\mathrm{d}(\cos 2x) = (\cos 2x)'\mathrm{d}x = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x.$$

6.3. Геометрический смысл производной и дифференциала функции

Геометрический смысл производной функции f, дифференцируемой в точке x_0

Существование конечной производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию невертикальной касательной (непараллельной оси Oy) в точке $(x_0, f(x_0))$ графика G_f, при этом угловой коэффициент m этой касательной равен $f'(x_0)$ (рис. 9.2). То есть $m = f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$.

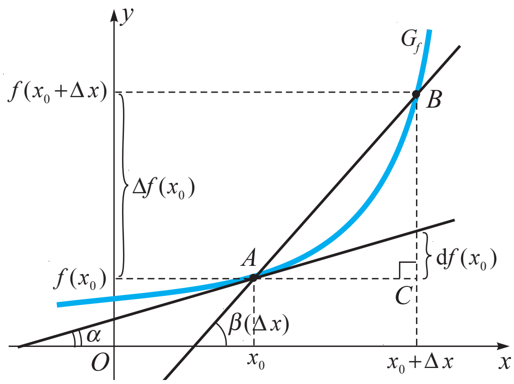


Рис. 9.2

Касательная (невертикальная) в точке $(x_0, f(x_0))$ графика функции f, непрерывной в точке x_0, есть прямая, уравнение которой имеет вид

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Если $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$), то касательная в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Oy, то есть уравнение касательной имеет вид $\boxed{x = x_0}$.

Для графика G_f функции f, непрерывной в точке $A(x_0, f(x_0))$, но не дифференцированной в ней, эта точка может быть:

- ***возвратной точкой***, если $f'_л(x_0) \neq f'_п(x_0)$ и обе производные бесконечны;
- ***угловой точкой***, если $f'_л(x_0) \neq f'_п(x_0)$ и хотя бы одна из этих производных конечная;
- ***точкой перегиба***, если $f'_л(x_0) = f'_п(x_0) = \pm\infty$ и обе производные имеют один и тот же знак.

Геометрический смысл дифференциала функции f

$\Delta f(x_0)$ представляет собой приращение «ординаты функции f», соответствующее приращению Δx ее аргумента, а $\mathrm{d}f(x_0)$ представляет собой приращение «ординаты касательной» в точке $(x_0, f(x_0))$ графика G_f, соответствующее тому же приращению Δx аргумента функции f (рис. 9.2).

6.4. Правила вычисления производных и дифференциалов

Основные правила вычисления производных и дифференциалов
(без уточнения условий, когда они применимы)

1° $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

2° $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

3° $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

4° $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

5° Производная сложной функции:
$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

1°′ $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$.

2°′ $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$, c – постоянная.

3°′ $\mathrm{d}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{d}f + f \cdot \mathrm{d}g$.

4°′ $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \mathrm{d}f - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$.

5°′ Дифференциал сложной функции:
$\mathrm{d}f(g) = f'(g) \cdot \mathrm{d}g$.

6° Производная обратной функции: $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

7° Производные высших порядков: $f'' = (f')'$; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

8° Если $f, g: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, где I – интервал, и $f(x) > 0$, $\forall x \in I$, то

$$(f^g)' = f^g\left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right).$$

Примеры

1 Для функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin^2 x - 5x$, имеем:

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(2\sin^2 x - 5x) =$$
$$= \mathrm{d}(2\sin^2 x) - \mathrm{d}(5x) = 2\mathrm{d}(\sin^2 x) - 5\mathrm{d}x =$$
$$= 2 \cdot 2\sin x \cos \mathrm{d}x - 5\mathrm{d}x = (2\sin 2x - 5)\mathrm{d}x.$$

2 Для функции $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{2\sqrt{x}}$, имеем:

$$(x^{2\sqrt{x}})' = x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{2\sqrt{x}-0,5}(\ln x + 2).$$

6.5. Таблица производных и дифференциалов некоторых элементарных функций

№	f	D_f	f'	$D_{f'}$	df
1	c (постоян.)	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$	0
2	$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$
3	$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(0,\ +\infty)$	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$
4	$\sqrt{x}$	$[0,\ +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\ +\infty)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
5	$a^x,\ a>0,\ a\neq1$	$\mathbb{R}$	$a^x\ln a$	$\mathbb{R}$	$a^x\ln a\,\mathrm{d}x$
6	e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^x\mathrm{d}x$
7	$\log_a x,\ \ a>0,\ a\neq1$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$(0,\ +\infty)$	$\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$
8	$\ln x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0,\ +\infty)$	$\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
9	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos x\,\mathrm{d}x$
10	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x\,\mathrm{d}x$
11	$\mathrm{tg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$
12	$\mathrm{ctg}\,x$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$
13	$\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
14	$\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,\ 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
15	$\mathrm{arctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
16	$\mathrm{arcctg}\,x$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

§ 7 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

7.1. Основные свойства дифференцируемых функций

Определение

• Точка $x_0 \in I$ называется **точкой локального максимума** функции f, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. В этом случае значение $f(x_0)$ называется **локальным максимумом** функции f в точке x_0.

• Точка $x_0 \in I$ называется **точкой локального минимума** функции f, если существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. В этом случае значение $f(x_0)$ называется **локальным минимумом** функции f в точке x_0.

• Точки локального максимума и локального минимума функции f называются **точками локального экстремума** этой функции.

• Значения функции f в ее точках локального экстремума называются **локальными экстремумами** этой функции.

Теорема 1

Теорема Ферма

Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq R)$ – дифференцируемая функция на интервале I. Если $x_0 \in I$ – точка локального экстремума функции f, то $f'(x_0) = 0$ (рис. 9.3).

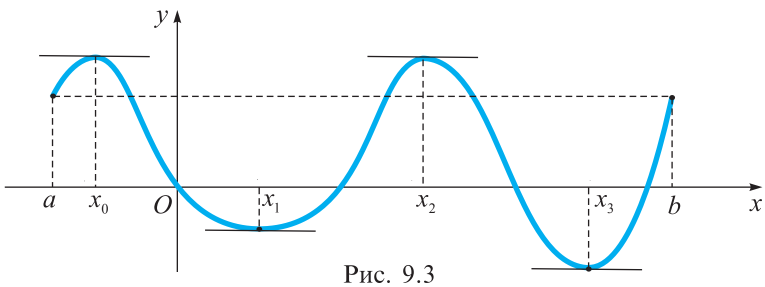


Рис. 9.3

Так как x_1, x_2 и x_3 точки локального экстремума функции f, имеем $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$ и $f'(x_3) = 0$ (рис. 9.3).

Замечания

1. Обратное утверждение теоремы Ферма ложно, поскольку могут существовать нули функции f', которые не являются точками локального экстремума функции f. Например, для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, имеем $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не является ни точкой максимума, ни точкой минимума функции f.

2. Теорема Ферма утверждает, что точки локального экстремума находятся среди критических точек функции f.

Теорема 2

Теорема Ролля

Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b);

3) $f(a) = f(b)$,

то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$ (рис. 9.3).

Замечание

Точка c из теоремы Ролля не всегда единственная для соответствующей функции.

Следствия из теоремы Ролля

1. Между двумя последовательными нулями дифференцируемой на интервале функции всегда содержится хотя бы один нуль ее производной (рис. 9.3).

2. Между двумя последовательными нулями производной дифференцируемой на интервале функции содержится не более одного нуля этой функции (рис. 9.3).

Теорема 3

Теорема Лагранжа

Если функция $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) дифференцируема на интервале (a, b),

то существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$.

Формула $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$, или $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, называется ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений***.

Замечания

1. Точка c из теоремы Лагранжа не всегда единственная для соответствующей функции.

2. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля.

Задание с решением

Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)(2x+1)(3x+4)$. Покажем, что функция f' имеет только действительные нули.

Решение:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 3\right\}$. Так как $f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, то на отрезке $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right]$ производная функции f имеет хотя бы один действительный нуль. Значит, существует точка $c_1 \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ такая, что $f'(c_1) = 0$.

Аналогично $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(3) = 0$. Значит, существует точка $c_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ такая, что $f'(c_2) = 0$. Итак, существуют по меньшей мере два действительных нуля c_1, c_2 на соответствующих интервалах. Так как $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть полиномиальная функция, соответствующая многочлену второй степени, который имеет не более двух действительных корней, следует, что функция f' имеет точно два действительных нуля.

7.2. Приложения производных при вычислении пределов функций

Некоторые пределы функций могут быть вычислены при помощи производных.

Правило Лопиталя для неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$

Теорема 4

Пусть I – числовой интервал $(I \subseteq R)$, $x_0 \in I$ и $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ – некоторые функции. Если

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;

2) функции f и g дифференцируемы на множестве $I \setminus \{x_0\}$;

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$;

4) существует предел (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Правило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ аналогично теореме 4.

Замечания

1. Правила Лопиталя верны и при $x_0 \to \infty$, и для односторонних пределов в указанной точке.
2. При необходимости, если это возможно, правила Лопиталя могут быть применены два, три и более раз.
3. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 можно свести различными методами к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Задание с решением

Вычислим: а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x^3 - 8}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{5^x}$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\ln \frac{x}{2}}{x^3 - 8} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\left(\ln \frac{x}{2}\right)'}{(x^3 - 8)'} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{24}$.

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{5^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(3x^2)'}{(5^x)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x}{5^x \ln 5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(6x)'}{(5^x \ln 5)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{5^x \ln^2 5} = 0$.

7.3. Приложения производной при исследовании функций

Теорема 5

Если $f\colon I \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция на интервале I, то она возрастает (убывает) на I тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$, $\forall x \in I$.

Замечание

Если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, $\forall x \in I$, то функция f строго возрастает (строго убывает) на промежутке I.

Интервалы монотонности и точки экстремума функции $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, дифференцируемой на интервале I, могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

I. Находят производную f'.

II. Находят решения уравнения $f'(x) = 0$, $x \in I$ (решение этого уравнения (нули функции f') являются предполагаемыми точками экстремума функции f).

III. Определяют знак функции f' на интервалах, на которых она не обращается в нуль.

IV. Находят интервалы знакопостоянства функции f', которые и являются интервалами монотонности функции f.

V. Находят точки экстремума функции.

1. Если $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, и $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x > x_0$, то x_0 – точка локального максимума функции f.
2. Если $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, $x < x_0$, и $f'(x) > 0$, $\forall x \in I, x > x_0$, то x_0 – точка локального минимума функции f.

Точки локального экстремума могут быть найдены и с помощью f''.

Определение

Функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$, дважды дифференцируемая на интервале I, называется **выпуклой вверх** (**выпуклой вниз**) на интервале I, если график функции f расположен ниже (выше) любой своей касательной.

Определение Пусть функция $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ – дифференцируема на интервале (a, b). Точка $x_0 \in (a, b)$ называется **точкой перегиба** функции f, если существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такая, что функция f выпукла вниз на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и выпукла вверх на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ или наоборот.

Интервалы выпуклости и точки перегиба дважды дифференцируемой функции f могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

I. Вычисляют f'', а затем находят решения уравнения $f''(x) = 0$, которые могут быть точками перегиба функции f.

II. Находят интервалы знакопостоянства функции f'', которые являются интервалами выпуклости функции f.

III. Находят точки перегиба (если они существуют) функции f.

Определение Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $+\infty$ – предельная точка множества E. Прямая $y = l$ является **горизонтальной асимптотой** графика функции f (функции f) при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Аналогичное определение можно сформулировать и для горизонтальной асимптоты при $x \to -\infty$.

Определение Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $+\infty$ – предельная точка множества E. Прямая $y = mx + n$, $m \neq 0$, является **наклонной асимптотой** графика функции f (функции f) при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - mx - n) = 0$.

Аналогичное определение можно сформулировать и для наклонной асимптоты при $x \to -\infty$.

Теорема 6 Прямая $y = mx + n$, $m \neq 0$, является наклонной асимптотой графика функции $f: E \to \mathbb{R}$ при $x \to +\infty$, если и только если $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $(m \neq 0)$ и $n = \lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - mx)$.

Аналогичная теорема верна и при $x \to -\infty$.

Определение Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ – некоторая функция и $a \in \mathbb{R}$ – предельная точка множества E. Если предел слева $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (предел справа $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$) равен $+\infty$ или $-\infty$, будем говорить, что прямая $x = a$ является **левой (правой) вертикальной асимптотой** графика функции f.

Чтобы исследовать функцию и построить ее график, рекомендуем пройти следующие *этапы*:

I. Найти область определения функции.

II. Исследовать функцию на четность и периодичность.

III*. Вычислить пределы функции на концах интервалов, исследовать функцию на непрерывность и найти ее асимптоты.

IV. Найти первую производную функции, интервалы возрастания и убывания функции и ее экстремумы.

V*. Найти вторую производную функции, интервалы выпуклости функции и ее точки перегиба.

VI. Заполнить таблицу поведения функции на основании результатов, полученных на I–V этапах исследования.

VII. Построить график функции.

7.4. Задачи на максимум и минимум

При решении некоторых задач из геометрии, физики, экономики и т. п. требуется найти максимальное (наибольшее) или минимальное (наименьшее) значение, которое может принимать некоторая переменная величина при соответствующих условиях. Решения таких задач могут быть найдены по следующему *алгоритму*:

I. Задачу переводят на математический язык при помощи некоторой функции (для этого выбирают подходящий параметр x, а изучаемую величину выражают функцией от x).

II. Применив изученные методы, находят наименьшее или наибольшее значение этой функции на промежутке, полученном при решении задачи.

III. Разъясняют практический смысл (в соответствии с поставленной задачей) полученного результата.

IV. Записывают ответ.

Задания с решением

1 Найдем точку графика функции $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}$, удаленную на наименьшее расстояние от точки $A(2, 0)$ (рис. 9.4).

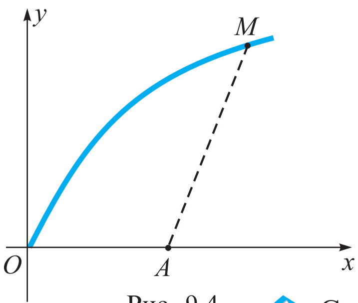


Рис. 9.4

Решение:

Любая точка M графика функции f имеет координаты $(x, 2\sqrt{x})$, $x\geq 0$.

Обозначим через $d(x)$ расстояние между точками A и M.

Тогда $d(x)=\sqrt{(x-2)^2+(2\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{x^2+4}$.

Минимум функции $d\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, $d(x)=\sqrt{x^2+4}$, достигается в точке с абсциссой $x_0=0$.

Ответ: Искомая точка M совпадает с точкой $O(0, 0)$, и наименьшее расстояние между точками $M(0, 0)$ и $A(2, 0)$ равно 2.

2 Средние затраты (в леях) на производство товара выражены функцией, заданной формулой $C(x)=5+11x$, а спрос – функцией, заданной формулой $p(x)=-x^2+15x+11$, $4<x<12$. Найдем количество товара x, при котором доход (валовой) будет максимален, и величину этого дохода.

Решение:

Валовой доход выражается формулой:

$$V(x)=p(x)\cdot x-C(x)=(-x^2+15x+11)x-(5+11x)=-x^3+15x^2-5.$$

Производная равна $V'(x)=-3x^2+30x$.

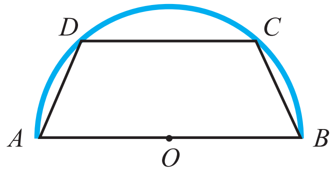
Из $V'(x)=0$ получаем уравнение $-3x^2+30x=0$, решениями которого являются $x_1=0$, $x_2=10$ ($x_1=0$ не удовлетворяет условию задачи). Так как $V''(10)<0$, то $x=10$ – точка максимума.

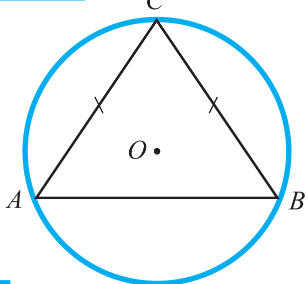
Значит, максимальный валовой доход $V(10)=-10^3+15\cdot 10^2-5=495$ (леев).

Ответ: 10 изделий; 495 леев.

Задания, предложенные для решения

1. Дан полукруг диаметром $AB = 2r$. Из всех хорд $[CD]$, параллельных диаметру $[AB]$, найдите ту, при которой площадь трапеции $ABCD$ максимальна.





2. Докажите, что из всех треугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

3. Сумма длин высоты и стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна 3. Найдите максимально возможный объем пирамиды.

§ 8 ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

8.1. Элементы векторного исчисления

Определения

• Любая упорядоченная пара точек A и B на плоскости определяет **направленный отрезок**, обозначенный $\overrightarrow{AB}$ (рис. 9.5).

• Точка A называется **началом**, а точка B – **концом** направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.

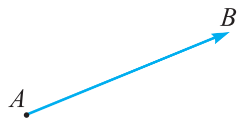


Рис. 9.5

Кроме начала и конца направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ характеризуется:

1. **модулем (абсолютной величиной)** – длиной отрезка AB (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$);
2. **направлением**, определенным прямой AB или любой другой прямой, параллельной AB;
3. **стрелкой** (в данном случае говорят «от A к B»).

Определение

Множество равных направленных отрезков называется **вектором** и обозначается $\overline{a}$.

Равенство $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$ означает, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ является представителем вектора $\overline{a}$.

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, определяет ***нулевой вектор*** $\overline{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{OO} = \ldots$

✓ Сумма векторов

Если вектор $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, вектор $\overline{b} = \overrightarrow{AB}$, то $\overline{a} + \overline{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overline{c}$ (*правило треугольника*) (рис. 9.6).

Если вектор $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, вектор $\overline{b} = \overrightarrow{OB}$, и $OACB$ – параллелограмм, то $\overline{a} + \overline{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overline{c}$ (*правило параллелограмма*) (рис. 9.7).

Два вектора называются ***противоположными векторами***, если их сумма равна нулевому вектору. Если $\overline{a} = \overrightarrow{AB}$, то вектор $-\overline{a} = \overrightarrow{BA}$, является противоположным вектору $\overline{a}$:

$$-\overline{a} + \overline{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overline{0}.$$

Если $\overline{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overline{b} = \overrightarrow{OB}$, то $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$ (рис. 9.8).

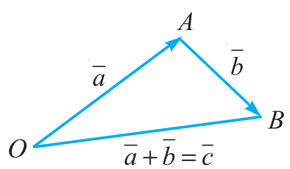


Рис. 9.6

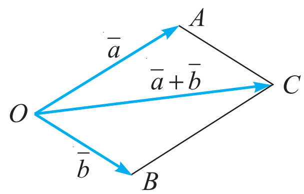


Рис. 9.7

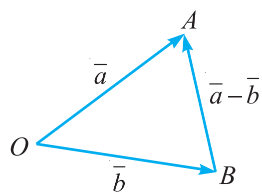


Рис. 9.8

✓ Умножение вектора на число

Произведением вектора $\overline{b}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется вектор $\overline{a}$, который удовлетворяет условиям: 1) $|\overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{b}|$; 2) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, если $\lambda \geq 0$; $\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{b}$, если $\lambda < 0$. Такой вектор $\overline{a}$ обозначается через $\lambda\overline{b}$.

✓ Свойства сложения векторов и умножения векторов на число

1° $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$; 2° $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$; 3° $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;

4° $(\lambda\mu)\overline{a} = \lambda(\mu\overline{a})$; 5° $\lambda\overline{a} + \mu\overline{a} = (\lambda + \mu)\overline{a}$; 6° $\lambda\overline{a} + \lambda\overline{b} = \lambda(\overline{a} + \overline{b})$;

7° $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$, для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

✓ Скалярное произведение векторов

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$ $(\varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$ – угол, образованный векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, имеющими общее начало).

✓ Свойства скалярного произведения двух векторов

1° $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

2° $(\lambda\bar{a})\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$;

3° $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$;

4° $\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow\bar{a}\perp\bar{b}$;

5° $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

✓ Операции над векторами в координатах

В декартовой системе координат xOy плоскости, репер которой $\{O,\bar{i},\bar{j}\}$, любой вектор $\bar{a}$ плоскости может быть представлен в виде $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}$.

Числа x, y называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$ и обозначаются $\bar{a}=(x,y)$.

Если $\bar{a}=(x_1,y_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2)$, то:

1) $\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow x_1=x_2$ и $y_1=y_2$;

2) $\bar{a}\pm\bar{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2)$;

3) $\lambda\bar{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$;

4) $\bar{a}\parallel\bar{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$;

5) $\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2$;

6) $|\bar{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$;

7) $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Если $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ и $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Если $M(x,y)$ является серединой отрезка AB, то $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

8.2. Основные формулы для треугольников

✓ Произвольный треугольник

Пусть ABC – произвольный треугольник (рис. 9.9). Обозначим через:

a, b, c – длины сторон BC, AC, AB соответственно;

α, β, γ – величины углов, противолежащих сторонам BC, AC, AB соответственно;

p – полупериметр;

R – радиус описанной окружности;

r – радиус вписанной окружности;

$\mathscr{A}$ – площадь треугольника;

$h_a=AD$, $m_a=AA_1$ – соответственно высота и медиана, проведенные к стороне BC;

$l_a=AE$ – биссектриса угла A.

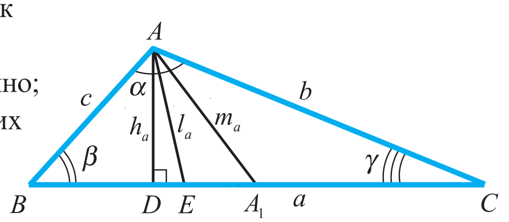


Рис. 9.9

Тогда:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$;

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (*теорема косинуса*);

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (*теорема синусов*);

$\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$; $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$; $\mathscr{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*формула Герона*);

$r=\dfrac{\mathscr{A}}{p}$; $R=\dfrac{abc}{4\mathscr{A}}$;

$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$;

$\frac{b}{c}=\frac{EC}{BE}$ (*свойство биссектрисы*);

$l_a=\sqrt{b\cdot c-BE\cdot EC}$; $l_a=\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

✓ **Прямоугольный треугольник**

Пусть ABC – прямоугольный треугольник (рис. 9.10), длины его катетов – a, b, длина гипотенузы – c, длины проекций катетов на гипотенузу – a_c, b_c соответственно.

Тогда: $c^2=a^2+b^2$ (*теорема Пифагора*);

$\mathscr{A}=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$;

$r=\frac{a+b-c}{2}$; $R=\frac{c}{2}$;

$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,\mathrm{tg}\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

$h_c^2=a_c\cdot b_c$; $b^2=c\cdot b_c$; $a^2=c\cdot a_c$.

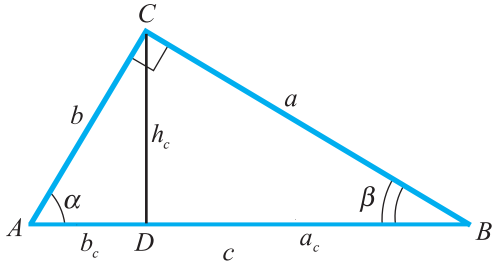


Рис. 9.10

✓ **Равносторонний треугольник**

$\mathscr{A}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, где a – длина стороны треугольника.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ *подобны* $(\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из равносильных условий:

1) $AB:BC:CA=A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$;
2) $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$ и $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$;
3) $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$ и $\mathrm{m}(\angle A)=\mathrm{m}(\angle A_1)$.

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника, и ее длина равна половине длины этой стороны.

Биссектрисы треугольника пересекаются в *центре окружности, вписанной в треугольник*.

Медиатрисы (*серединные перпендикуляры*) сторон треугольника пересекаются в *центре окружности, описанной около треугольника*.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой *центром тяжести* треугольника. Эта точка делит каждую из медиан в отношении 2:1 от вершины.

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника.

8.3. Основные формулы для четырехугольников и многоугольников

✓ *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ (φ – угол, образованный диагоналями AC и BD, $\mathscr{A}$ – площадь четырехугольника:

$$\mathrm{m}(\angle A)+\mathrm{m}(\angle B)+\mathrm{m}(\angle C)+\mathrm{m}(\angle D)=360^\circ;\quad \mathscr{A}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi.$$

✓ *Параллелограмм* (a и b – стороны, φ – угол, образованный сторонами a и b, h_a – высота, проведенная к стороне a, d_1 и d_2 – диагонали, $\mathscr{A}$ – площадь:

$$\mathscr{A}=ah_a=ab\sin\varphi;\qquad d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

✓ *Ромб*: $\mathscr{A}=ah_a=a^2\sin\varphi=\frac{1}{2}d_1d_2$.

✓ *Прямоугольник*: $\mathscr{A}=ab$.

✓ *Квадрат* (d – диагональ): $\mathcal{A}=a^2=\dfrac{d^2}{2}$.

✓ *Трапеция* с основаниями a и b, высотой h и средней линией l:

$$l=\frac{a+b}{2};\ \mathcal{A}=\frac{a+b}{2}h=lh.$$

✓ *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ является вписываемым тогда и только тогда, когда $\mathrm{m}(\angle ABC)+\mathrm{m}(\angle ADC)=180°$.

✓ *Выпуклый четырехугольник* $ABCD$ является вписываемым тогда и только тогда, когда $\mathrm{m}(\angle ABD)=\mathrm{m}(\angle ACD)$.

✓ *Теоремы Птолемея* для вписываемого четырехугольника:

1. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписываемым тогда и только тогда, когда
$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$
2. Для вписываемого четырехугольника $ABCD$ справедливо соотношение:
$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+BC\cdot CD}{AD\cdot CD+AB\cdot BC}.$$

В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противолежащих сторон равны:

$$AB+CD=AD+BC.$$

✓ *Правильный многоугольник*, у которого n сторон (a_n – длина стороны многоугольника, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, $\mathcal{A}$ – площадь многоугольника, p – полупериметр):

$$a_3=R\sqrt{3};\quad a_4=R\sqrt{2};\quad a_6=R;\quad a_n=2R\sin\frac{180°}{n};\quad \mathcal{A}=\frac{na_nr}{2}=pr.$$

✓ *Окружность* и *круг* радиуса R (L – длина окружности, l – длина дуги окружности, α – величина дуги (центрального угла) в градусах, φ – величина дуги в радианах, $\mathcal{A}$ – площадь круга, $\mathcal{A}_{\text{сект. кр.}}$ – площадь сектора круга):

$$L=2\pi R;\quad l=\frac{\pi R\alpha}{180°};\quad l=R\varphi;$$

$$\mathcal{A}=\pi R^2;\quad \mathcal{A}_{\text{сект. кр.}}=\frac{\pi R^2\alpha}{360°};\quad \mathcal{A}_{\text{сект. кр.}}=\frac{1}{2}R^2\varphi.$$

8.4. Параллельность прямых и плоскостей

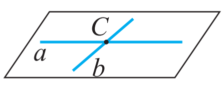
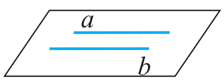
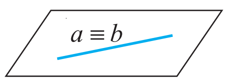
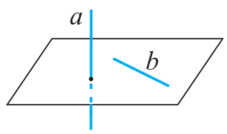
Две прямые называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются или если они совпадают.

Прямая и плоскость называются ***параллельными***, если они не пересекаются или прямая принадлежит плоскости.

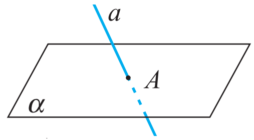
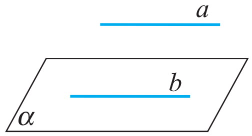
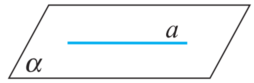
Две плоскости называются ***параллельными***, если они не пересекаются или совпадают.

Взаимное расположение прямых и плоскостей

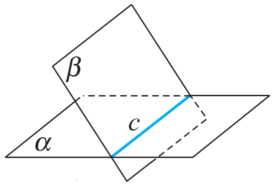
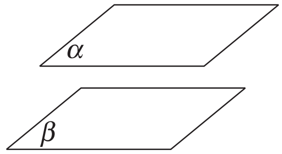
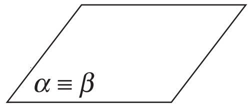
1. Взаимное расположение двух прямых

a и b – компланарные			a и b – скрещивающиеся
			
$a\cap b=\{C\}$	$a\cap b=\varnothing$	$a\equiv b$	$a\cap b=\varnothing$

2. Взаимное расположение прямой и плоскости

a пересекает α	a параллельна α	
 $a\cap\alpha=\{A\}$	 $(b\subset\alpha,\ a\parallel b)\Rightarrow a\parallel\alpha$	 $a\subset\alpha$

3. Взаимное расположение двух плоскостей

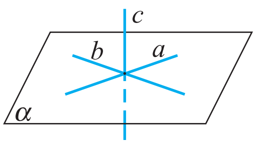
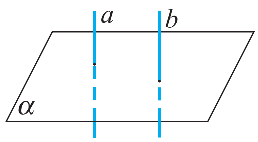
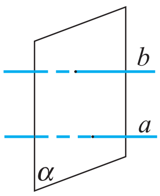
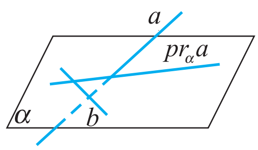
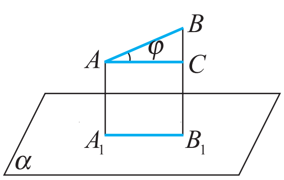
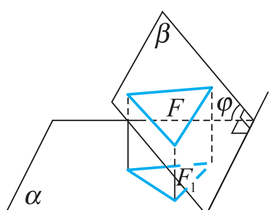
α пересекает β	α и β параллельны	
 $\alpha\cap\beta=c$	 $\alpha\cap\beta=\varnothing$	

8.5. Перпендикулярность в пространстве

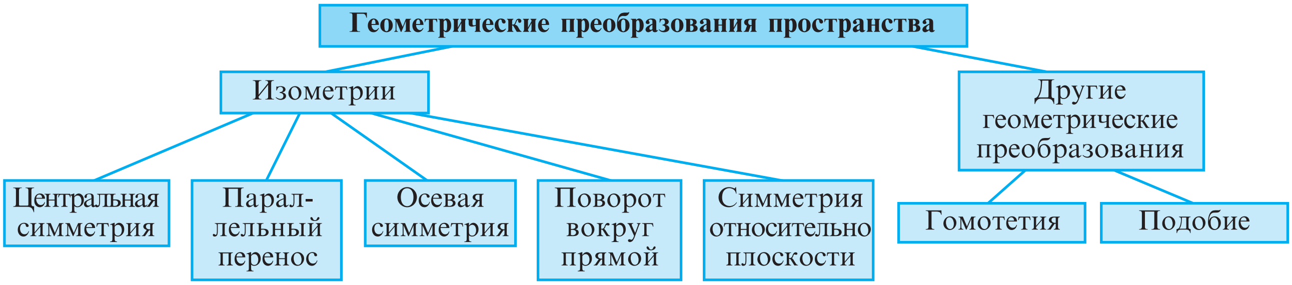
Две прямые в пространстве называются ***перпендикулярными***, если величина угла между ними равна 90°.

Прямая называется ***перпендикулярной данной плоскости***, если она пересекает эту плоскость в какой-то точке и перпендикулярна всякой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через ту же точку.

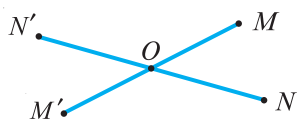
Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения, то она перпендикулярна плоскости.

 $(a\subset\alpha,\ b\subset\alpha,\ a\nparallel b,\ c\perp a,\ c\perp b)\Rightarrow c\perp\alpha$	 $(a\parallel b,\ a\perp\alpha)\Rightarrow b\perp\alpha$
 $(a\perp\alpha,\ b\perp\alpha)\Rightarrow a\parallel b$	 $b\subset\alpha$ 1) $a\perp b\Rightarrow pr_\alpha a\perp b$ 2) $b\perp pr_\alpha a\Rightarrow a\perp b$
 $([A_1B_1]\equiv pr_\alpha[AB],\ \ AC\parallel A_1B_1)\Rightarrow$ $\Rightarrow$ длина проекции $[AB]$ равна $AB\cos\varphi$	 $(F\subset\beta,\ F_1=pr_\alpha F,$ $\mathrm{m}(\angle(\alpha\beta))=\varphi)\Rightarrow\mathcal{A}_{F_1}=\mathcal{A}_F\cos\varphi$

8.6. Геометрические преобразования

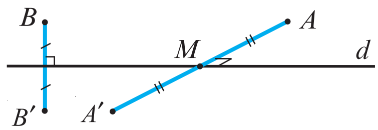


Центральная симметрия: S_O



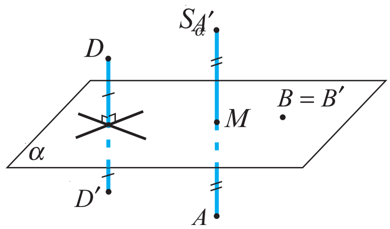
1. $S_O(O) = O$;
2. $\forall M \neq O,\ S_O(M) = M'$, где O – середина отрезка MM'.

Осевая симметрия: S_d



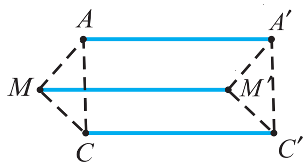
1. $\forall M \in d,\ S_d(M) = M$;
2. $\forall A \notin d,\ S_d(A) = A'$, где $AA' \perp d$, и если $AA' \cap d = \{M\}$, то точка M – середина отрезка AA'.

Симметрия относительно плоскости: S_α



1. $\forall B \in \alpha,\ S_\alpha(B) = B$;
2. $\forall A \notin \alpha,\ S_\alpha(A) = A'$, где $AA' \perp \alpha$, и если $AA' \cap \alpha = \{M\}$, то точка M – середина отрезка AA'.

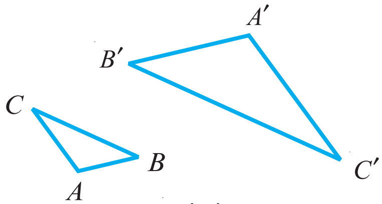
Параллельный перенос, заданный упорядоченной парой точек (A, A'): $t_{AA'}$



$\forall M \notin (AA'),\ t_{AA'}(M) = M'$, где $AA'M'M$ – параллелограмм.
$t_{AA'}(C) = C'$.

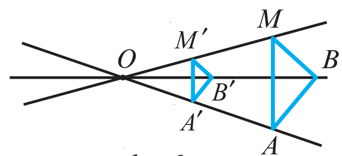
Подобие с коэффициентом $k,\ k > 0$

Для любых точек A, B пространства и их образов A', B' имеет место равенство $A'B' = k \cdot AB$.

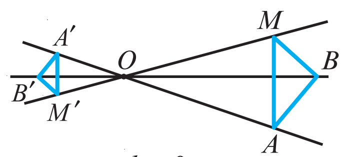


$A'B' = 2AB$,
$A'C' = 2AC$,
$B'C' = 2BC$.

Гомотетия с центром O и коэффициентом k



$k > 0$



$k < 0$

§ 9 ЭЛЕМЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

9.1. Тригонометрические функции

Определение **Тригонометрической окружностью** называется окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

В тригонометрии используются градусная и радианная мера измерения углов.

Переход от одной меры к другой осуществляется при помощи формулы $\frac{a}{\alpha} = \frac{180°}{\pi}$, где a – градусная мера, а α – радианная мера угла. Отсюда $a = \frac{\alpha}{\pi} 180°$, а $\alpha = \frac{a}{180°} \cdot \pi$ для любого угла.

Пример Угол в π радиан имеет градусную меру, равную $180°$. Значит, угол в 1 радиан имеет градусную меру, равную $\frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°17'44''$. И наоборот, угол в $1°$ равен $\frac{\pi}{180}$ радиан.

Пусть $M(x, y)$ – точка на тригонометрической окружности, t – величина угла, образованного $(OM$ с Ox (рис. 9.11).

Тогда:

$\sin t = y;$

$\cos t = x;$

$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{y}{x}, \; t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z};$

$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{x}{y}, \; t \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}.$

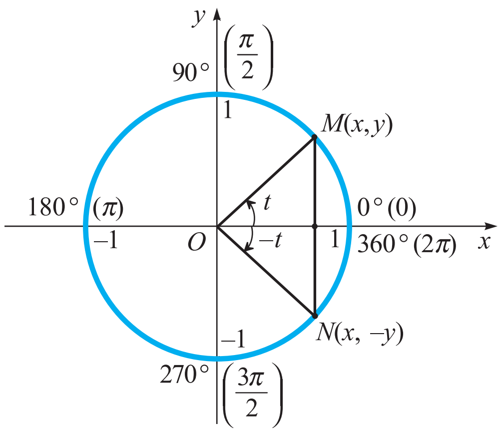


Рис. 9.11

Определения Функция

а) $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1], \; f(t) = \sin t$, называется функцией **синус**;

б) $f\colon \mathbb{R} \to [-1, 1], \; f(t) = \cos t$, называется функцией **косинус**;

в) $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}, \; f(t) = \operatorname{tg} t$, называется функцией **тангенс**;

г) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \; f(t) = \operatorname{ctg} t$, называется функцией **котангенс**.

Тригонометрические функции применяются в различных областях: в геометрии, физике, в повседневной жизни и т. д.

Задание с решением Выполнив необходимые измерения, найдем расстояние от точки A до точки B (недоступной), разделенных преградой (рекой) (рис. 9.12).

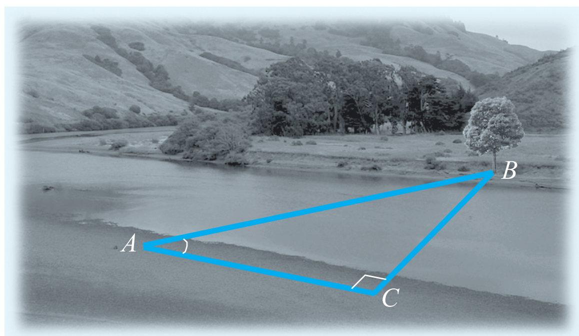


Рис. 9.12

Решение:

Выбираем точку C (доступную) так, чтобы прямые CA и CB (воображаемые) пересекались под углом в 90°. Находим величину угла A и измеряем расстояние AC. Используя определение косинуса, получаем $AB = \dfrac{AC}{\cos(\angle A)}$ (значение косинуса находим, используя соответствующие таблицы, калькулятор и т. п.).

Подставив полученные значения, находим расстояние AB.

Задание

Сформулируйте, используя графики (рис. 9.13–9.16), свойства четырех тригонометрических функций.

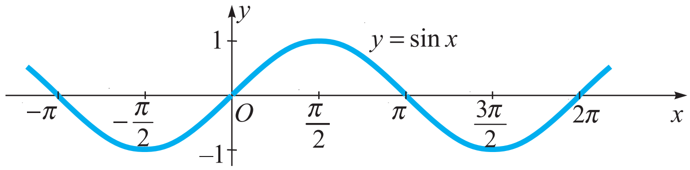


Рис. 9.13

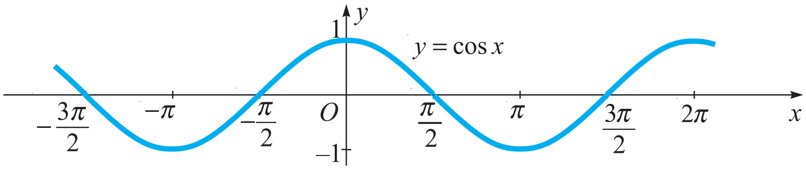


Рис. 9.14

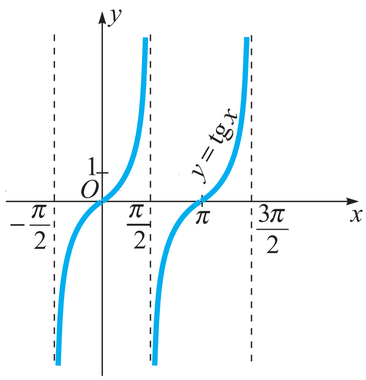


Рис. 9.15

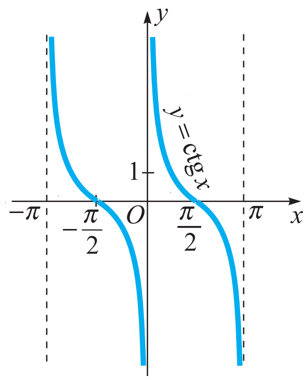


Рис. 9.16

Вспомним

$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ \ x \in [-1, 1],\ \ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right];$

$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ \ x \in [-1, 1],\ \ y \in [0, \pi];$

$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right);$

$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y \in (0, \pi).$

Замечание

Некоторые значения для arcsin, arccos, arctg и arcctg можно найти, используя таблицу значений функций sin, cos, tg, ctg (таблица 1).

Пример

$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, так как $\dfrac{\pi}{3} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, так как $\dfrac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$ и $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$, так как $\dfrac{\pi}{6} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Значения тригонометрических функций для некоторых углов

Таблица 1

	α (радианы)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	α (градусы)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$
Значение функции	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не существ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существ.
	$\operatorname{ctg}\alpha$	Не существ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не существ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

9.2. Тригонометрические формулы (тождества)

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \alpha\in\mathbb{R};$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z};$

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$ $\qquad$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Формулы сложения[1]

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, при которых имеет смысл $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ и $1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq0$.

Формулы для тригонометрических функций углов вида $n\alpha$, где $n\in\mathbb{N}^*$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$ $\qquad$ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$ $\qquad$ $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

Замечание

Эти формулы можно вывести, используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha,$$

при $n=2$ и $n=3$.

Аналогично выводят формулы для тригонометрических функций угла $n\alpha$ для любого $n\in\mathbb{N}^*$. Например, приравнивая действительные и соответственно мнимые части в обеих частях равенства, соответствующего формуле Муавра при $n=4$, получаем формулы:

$$\cos4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha;$$

$$\sin4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

[1] В дальнейшем будем считать, что $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, если не уточняется другое.

Формулы понижения степени тригонометрических функций

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы половинного аргумента $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha \ne (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы универсальных подстановок

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne (2n+1)\pi,\ \alpha \ne \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Формулы преобразования суммы в произведение и преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

При решении тригонометрических уравнений и неравенств полезно знать, что:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x\in[-1, 1]; \qquad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x\in[-1, 1]; \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ x\in\mathbb{R}.$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1, 1);$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1, 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R};$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Примеры

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}; \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

9.3. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a \Leftrightarrow S=\{(-1)^k \arcsin a+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\},\ a\in[-1, 1];$

$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow S=\{\operatorname{arctg} a+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\},\ a\in\mathbb{R};$

$\cos x = a \Leftrightarrow S=\{(\pm\arccos a+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\},\ a\in[-1, 1];$

$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow S=\{\operatorname{arcctg} a+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\},\ a\in\mathbb{R}.$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

1. Метод введения вспомогательного неизвестного (метод замены).
2. Метод разложения на множители.
3. Метод разделения обеих частей однородного тригонометрического уравнения на $\sin^n x$ (или на $\cos^n x$), $n\in\mathbb{N}^*$.
4. Метод сведения к однородному тригонометрическому уравнению.
5. Метод введения вспомогательного угла.
6. Метод применения формул универсальных подстановок.
7. Метод сведения к системе алгебраических уравнений.

Задание с решением

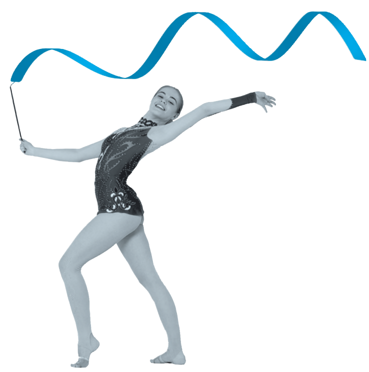
Решим на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sin x+\cos 2x-1=0$.

Решение:

$$\sin x+\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \sin x+1-2\sin^2 x-1=0 \Leftrightarrow \sin x-2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $S=\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$.



9.4. Тригонометрические неравенства

Простейшие тригонометрические неравенства

$$\sin t>a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\arcsin a+2\pi k,\ \pi-\arcsin a+2\pi k),\ a\in[-1, 1);$$

$$\sin t<a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\pi-\arcsin a+2\pi k,\ \arcsin a+2\pi k),\ a\in(-1, 1];$$

$$\cos t>a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k=\mathbb{Z}}(-\arccos a+2\pi k,\ \arccos a+2\pi k),\ a\in[-1, 1);$$

$$\cos t<a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\arccos a+2\pi k,\ 2\pi-\arccos a+2\pi k),\ a\in(-1, 1];$$

$$\operatorname{tg} t>a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\operatorname{arctg} a+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ a\in\mathbb{R};\quad \operatorname{tg} t<a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \operatorname{arctg} a+\pi k\right),\ a\in\mathbb{R};$$

$$\operatorname{ctg} t>a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\pi k,\ \operatorname{arcctg} a+\pi k),\ a\in\mathbb{R};\quad \operatorname{ctg} t<a \Leftrightarrow S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\operatorname{arcctg} a+\pi k,\ \pi+\pi k),\ a\in\mathbb{R}.$$

Замечание

Решения нестрогих тригонометрических неравенств содержат: оба конца интервалов для неравенств $\sin t\ge a$, $\sin t\le a$, $\cos t\le a$, $\cos t\ge a$; левые концы соответствующих интервалов для неравенств $\operatorname{tg} t\ge a$, $\operatorname{ctg} t\le a$; правые концы соответствующих интервалов для неравенств $\operatorname{tg} t\le a$, $\operatorname{ctg} t\ge a$.

§ 10 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

10.1. Операции над матрицами

Множество матриц размера $m\times n$ с элементами из множества $\mathbb{Z}$ (соответственно $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$) обозначают через $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$ (соответственно $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{C})$). Для $m=n$ матрица называется ***квадратной порядка n***, а соответствующие множества обозначают через $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. В квадратной матрице $A=(a_{ij})$, $i,j=\overline{1,n}$, элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} образуют ***главную диагональ***, а элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$, ..., $a_{n-1\,2}$, a_{n1} – ***второстепенную диагональ***. Квадратная матрица называется ***верхнетреугольной*** (соответственно ***нижнетреугольной***), если все ее элементы, расположенные ниже (соответственно выше) главной диагонали, равны нулю.

Единичная матрица порядка n есть квадратная матрица вида $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$.

Нулевая матрица (O) есть матрица любого порядка, элементы которой равны нулю.

Сумма матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ есть матрица того же размера $C=A+B=(a_{ij}+b_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. ***Произведение*** матрицы $A=(a_{ij})$ на число λ есть матрица $C=\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij})$. ***Транспонированная*** к матрице $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,\,n}\mathbf{C}$ есть матрица ${}^tA=(a_{ji})\in\mathcal{M}_{n,\,m}\mathbf{C}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. ***Произведение*** матрицы $A=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, на матрицу $B=(b_{jk})$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,s}$ (определено лишь в случае, когда число столбцов первой матрицы равну числу строк второй матрицы) есть матрица $D=(d_{ik})$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,s}$, где $d_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$.

Задание с решением

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&0&8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5&-3\\2&1\end{pmatrix}$.

Выясним, существуют ли, и, в случае положительного ответа, вычислим:

а) $A+B$; б) $A+C$; в) $3C$; г) $A\cdot B$; д) $B\cdot C$; е) ${}^tA$.

Решение:

а) $A+B$ не существует, так как A и B – матрицы различных размеров;

б) $A+C=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3\\1&4\end{pmatrix}$; в) $3C=3\cdot\begin{pmatrix}5&-3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&-9\\6&3\end{pmatrix}$;

г) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot2-0&2\cdot3+0&2\cdot1+0\\-1\cdot2+3\cdot(-1)&-1\cdot3+3\cdot0&-1\cdot1+3\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&2\\-5&-3&23\end{pmatrix}$;

д) $B\cdot C$ не существует, так как число столбцов матрицы B отлично от числа строк матрицы C;

е) ${}^tA=\begin{pmatrix}2&-1\\0&3\end{pmatrix}$.

Операции сложения и умножения матриц обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над числами, за исключением свойства коммутативности умножения матриц. Напомним *свойства операции транспонирования матриц*:

1° ${}^t(\lambda\cdot A)=\lambda\cdot{}^tA$; **2°** ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$; **3°** ${}^t({}^tA)=A$; **4°** ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$.

Обратной к квадратной матрице A порядка n называется квадратная порядка n матрица A^{-1}, удовлетворяющая условиям $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$.

Свойства обратимых матриц:

1° $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

2° если существует обратная к матрице A (т. е. матрица A ***обратима***), то A^{-1} единственна.

Задание с решением

Решим уравнение $3X-2A=({}^tB)^2\cdot C$, если:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1-i\\ 0 & 3+i\\ 1 & -2+2i\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение:

В силу свойств операций над матрицами имеем:

$$3X=2A+({}^tB)^2\cdot C,\quad X=\frac{1}{3}(2A+({}^tB)^2\cdot C).$$

Так как $({}^tB)^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 6\\ -1 & 3 & -3\\ -5 & 0 & 10\end{pmatrix}$, то $({}^tB)^2\cdot C=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}$.

Итак, $X=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4 & 2-2i\\ 0 & 6+2i\\ 2 & -4+4i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & 10-2i\\ 5 & -3+2i\\ -3 & 16+4i\end{pmatrix}$.

Для нахождения обратной матрицы, для решения систем линейных уравнений применяются ***элементарные преобразования*** строк матрицы, а именно:

а) перестановка двух строк;

б) умножение всех элементов строки на одно и то же ненулевое число;

в) прибавление к элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Говорят, что ненулевая матрица A имеет ***ступенчатый вид*** (является ***ступенчатой***), если первый (слева) ненулевой элемент (называемый ***ведущим***) в каждой строке, начиная со второй, расположен правее первого ненулевого элемента из предыдущей строки.

Для нахождения обратной к квадратной матрице A порядка n строится матрица $(A \mid I_n)$. К полученной матрице применяются элементарные преобразования строк так, чтобы получить ступенчатую матрицу вида $(I_n \mid B)$ (если возможно). Матрица B равна A^{-1}. Если такое преобразование невозможно, то не существует обратной к матрице A.

Задание с решением

Найдем обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -9\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Решение:

$$(A \mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{3}{}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)_{-2}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)_{-4\ -2}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6\end{array}\right).\ \text{Итак, } A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -13\\ 9 & -4 & 27\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}.\ \text{(Проверьте.)}$$

10.2. Определители

Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, соответственно $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, или ***определителем порядка 2***, соответственно 3, называется число, обозначаемое $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, соответственно $|C|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$, которое можно обозначить также через $\det A$, соответственно $\det C$, или Δ.

Определитель квадратной матрицы A произвольного порядка n, $n\geq 2$, есть число $|A|=a_{i1}(-1)^{i+1}\overline{M}_1^i+\ldots+a_{in}(-1)^{i+n}\overline{M}_n^i$ или $|A|=a_{1i}(-1)^{1+i}\overline{M}_i^1+\ldots+a_{ni}(-1)^{n+i}\overline{M}_i^n$, где $\overline{M}_s^i$ – ***дополнительный минор*** элемента a_{is} – это определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из A вычеркиванием строки i и столбца s. Эти выражения называются ***разложением определителя по строке i*** (соответственно ***по столбцу i***).

Задание с решением

Вычислим $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$.

Решение:

$\Delta=1\cdot 1\cdot \mathrm{i}+2\cdot 2\cdot 2+0\cdot 0\cdot(-1)-(-1)\cdot 1\cdot 2-1\cdot 2\cdot 0-2\cdot 0\cdot \mathrm{i}=10+\mathrm{i}$.

Такой же результат получим, если разложим определитель по некоторой строке (столбцу), например, по третьей строке:

$$\Delta=2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+\mathrm{i}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(4+1)+0+\mathrm{i}\cdot 1=10+\mathrm{i}.$$

Свойства определителей, применение которых упрощает их вычисление:

1° Определитель матрицы равен нулю, если выполнено одно из условий:
- а) все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю;
- б) элементы какой-либо строки (столбца) получаются из соответствующих элементов другой строки (столбца) умножением на одно и то же число (говорят, что такие строки (столбцы) пропорциональны);
- в) в частности, две строки (столбца) равны.

2° Определитель матрицы A равен определителю матрицы ^{t}A.

3° Если матрица B получается из матрицы A перестановкой двух строк (столбцов), то:
$$\det B=-\det A.$$

4° Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

5° Если матрица B получается из матрицы A прибавлением к элементам некоторой строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число, то $|B|=|A|$.

Изложим два эффективных метода вычисления определителей:

1) преобразование определителя так, чтобы одна строка (столбец) содержала не более одного ненулевого элемента, и затем его разложение по соответствующей строке (столбцу);

2) преобразование определителя так, чтобы все элементы, расположенные выше или ниже главной (или второстепенной) диагонали, были равны нулю.

Во втором случае получаем определители вида:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\ldots a_{n1}.$$

10.3. Системы линейных уравнений

Произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbf{C},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ m,n\in\mathbb{N}^*. \qquad (1)$$

Матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ называются соответственно ***матрицей*** и ***расширенной матрицей*** системы (1).

Если система (1) имеет производную форму (m не обязательно равно n), применяют ***метод Гаусса***, который состоит в следующем:

1. Составляем расширенную матрицу $\overline{A}=(A \mid B)$ системы (1) и приводим эту матрицу к ступенчатому виду $\overline{A_1}=(A_1 \mid B_1)$.

2. Если число ненулевых строк матрицы A_1 меньше, чем число ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то система несовместна.

3. Если число ненулевых строк матрицы A_1 равно числу ненулевых строк матрицы $\overline{A_1}$, то составляем систему уравнений (равносильную исходной), соответствующую матрице $\overline{A_1}$. Возможны два случая:

3.1. Число уравнений полученной системы равно числу неизвестных (***система треугольная***). В этом случае система имеет единственное решение, которое находим следующим образом: из последнего уравнения вычисляем значение неизвестного x_n и подставляем в остальные уравнения, затем из предпоследнего уравнения вычисляем значение x_{n-1}, которое подставляем в предыдущие уравнения, и т. д., пока не вычислим значение неизвестного x_1.

3.2. Соответствующая система содержит меньше уравнений, чем неизвестных (является ***трапециевидной***, или ***ступенчатой системой***).
В таком случае определяем главные неизвестные (например, неизвестные, коэффициенты при которых являются ведущими элементами матрицы $\overline{A_1}$). Остальные неизвестные являются свободными. Обозначим их $x_q=\alpha, \ldots, x_v=\gamma$, где $\alpha, \ldots, \gamma\in\mathbf{C}$. Перенесем в правые части уравнений слагаемые, содержащие свободные неизвестные (параметры), и получим треугольную систему относительно главных неизвестных. Как и в случае 2.1, выражаем главные неизвестные через параметры $\alpha, \ldots, \gamma$ и получаем общее решение $x_1=f_1(\alpha, \ldots, \gamma), \ldots, x_n=f_n(\alpha, \ldots, \gamma)$. Очевидно, что система уравнений имеет бесконечно много решений.

Для решения систем, содержащих одинаковое число уравнений и неизвестных, и матрицы которых имеют ненулевой определитель, можно применять два метода: правило Крамера и использование обратной матрицы.

Теорема 1

Правило Крамера

Если в (1) $m=n$ и определитель $\Delta=|A|$ ненулевой, то система имеет единственное решение (совместно определена), и ее решением является $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$, где Δ_i, $i=\overline{1,n}$, получается из Δ путем замены столбца i столбцом свободных членов.

Замечание

В условиях теоремы 1 решение системы (1) можно получить и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

§ 11 УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

$$4:[5(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1{,}8(3))\cdot 12{,}8]=$$
$$=0{,}125x:[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8(9)].$$

2. Пусть $a=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(-49+20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$.

Определите, истинно или ложно высказывание:

а) $a\in\mathbb{N}$; б) $a\in\mathbb{Z}$; в) $a\in\mathbb{Q}$;
г) $a\in\mathbb{R}$; д) $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; е) $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

3. Поставьте один из знаков (>, =, <), чтобы полученное высказывание стало истинным:

а) $2\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{13}$; б) $\sqrt{19}\ \square\ \sqrt{26}-1$;
в) $3\sqrt{5}\ \square\ 5\sqrt{3}$; г) $0{,}2\sqrt{25}\ \square\ 0{,}1\sqrt{100}$.

4. Найдите множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если:

а) $A=[\sqrt{3};\,3)$, $B=[1{,}9;\,\sqrt{10}]$;
б) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-x-2\ge 0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 3-x-x^2>0\}$.

5. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}$;

б) $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

6. Вычислите:

а) $\dfrac{7!-5!}{6!}$; б) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$; в) P_{n+1}; г) A_{k+3}^{k-1}.

7. Выполните действия:

а) $\dfrac{(n-8)!}{(n-10)!(n-9)}$; б) $\dfrac{(n+2)\,!}{(n-3)!\,(n+1)n}$.

8. Выполните действия:

а) $\dfrac{A_n^3\cdot P_{n+1}}{n!}$; б) $\dfrac{C_n^5-C_n^6}{C_n^3}$; в) $\dfrac{A_n^5C_n^4-P_n}{P_{n+1}}$.

9. Сколько различных пятизначных натуральных чисел можно составить из всех нечетных цифр без повторения цифр в записи каждого числа?

10. Сколькими способами из 20 учеников можно назначить двух дежурных, имеющих одинаковые обязанности?

11. Сколькими способами из 20 учеников можно назначить двух дежурных, имеющих различные обязанности?

12. Сколькими способами можно составить список из 10 учащихся?

13. Даны числа: 1) $a=272$, $b=150$; 2) $a=41$, $b=246$.

а) Разложите на простые множители числа a и b.
б) Найдите НОД чисел a, b, то есть $(a,\,b)$.
в) Найдите НОК чисел a, b, то есть $[a,\,b]$.

14. Наугад выбирается одна буква из пословицы: «Настоящий друг познается в беде».

а) Какова вероятность, что это будет буква *е*?
б) Какова вероятность, что это будет буква *а*?

B

15. Допишите такое действительное число, чтобы множество решений уравнения $2x^2-\square x+1=0$ содержало:

а) одно действительное решение;
б) два действительных решения;
в) два комплексных решения.

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\ge 0$; б) $\dfrac{3|x-3|}{x^2(x-1)}\le 0$; в) $\dfrac{x^3(1-x)}{x^2-1}\le 0$.

17. Решите на множестве $\mathbf{C}$ уравнение:

а) $3z^2-z+1=0$; б) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

18. Из 100 лотерейных билетов 6 выигрышные. Найдите вероятность того, что из 10 наугад купленных билетов ни один не окажется выигрышным.

19. Какова вероятность того, что у наугад выбранного числа меньше 40, но больше 9, обе цифры окажутся различными?

20. Иван и Василий бросают по одной игральной кости. Если сумма выпавших очков равна 7 или произведение чисел (очков) равно 6, то побеждает Иван. Если сумма очков равна 6 или произведение чисел (очков) равно 4, то побеждает Василий. На кого вы поставите? Кто выиграет?

21. Решите на множестве $\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ методом Крамера систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=1,\\ -x_1+2x_2=2,\\ x_1+3x_2+2x_3=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x_1+\mathrm{i}x_2+3x_3=1,\\ -x_1+4x_3=2,\\ 3\mathrm{i}x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$

22. Три брата, возрасты которых представляют собой последовательные члены геометрической прогрессии, делят денежную сумму пропорционально возрасту каждого из них. Если они поделят эти деньги через три года, когда младший брат будет в два раза моложе старшего брата, то младший получит на 105 леев, а средний – на 15 леев больше. Сколько лет каждому из братьев?

23. Вычислите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии $(a_n)_{n\geq1}$, если:
а) $a_{10}=131$, $r=12$; б) $a_5=27$, $a_{27}=60$.

24. Вычислите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии $(b_n)_{n\geq1}$, если:
а) $b_8=384$, $q=2$; б) $b_3=20$, $b_4=1280$.

25. У Юры 120 леев. Каждый следующий день он тратит больше на одну и ту же сумму денег, чем в предыдущий день. В первый день он потратил 10 леев. Сколько денег истратил Юра в последний день, если известно, что все деньги были потрачены за 6 дней?

26. Типография выпускает тетради по 24 и 48 листов. Набор из 4 тонких и 5 толстых тетрадей продается по 51 лею, а набор из 8 тонких и 3 толстых тетрадей стоит 53 лея (включая НДС – 20%). Типография предоставляет скидку в 10%, если покупают 50 тонких или 30 толстых тетрадей.
а) Сколько будут стоить эти тетради в магазине (поштучно), если торговая надбавка составляет 1 лей для тонкой и 2 лея для толстой тетради?
б) Сколько тонких тетрадей можно купить в магазине на сумму, потраченную для приобретения 50 тонких тетрадей в типографии?

27. В 2014 году в городе было 30 000 жителей. В 2015 году за счет новых построек население города увеличилось на 9%, а в 2016 – на 10% (сравнительно с 2015 годом). Сколько жителей было в городе в 2016 году?

28. Предприниматель Петров в 2000 году получил прибыль в 10 000 леев. В каждый последующий год его прибыль возрастала на 200% сравнительно с предыдущим годом.
а) Сколько всего леев заработал предприниматель с 2000 по 2005 годы?
б) На сколько процентов доход в 2005 году больше, чем в 2000 году?

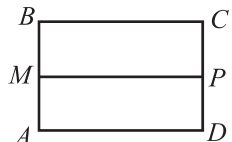
29. Один из операторов мобильной связи в Республике Молдова проводит акцию: каждая минута, начиная со второй, стоит на 10 банов дешевле, чем предыдущая минута. Сколько сэкономит пользователь за 15-минутный разговор в рамках этой акции?

30. Фермер выращивает кроликов и страусов. Всего на ферме насчитывается 200 голов и 700 лап. Сколько кроликов и сколько страусов?
(Решите задачу алгебраическим методом и методом фальшивой гипотезы.)

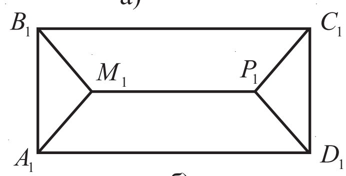
31. Коммерческая фирма VinProm экспортирует в Европу вино в цистернах цилиндрической формы, каждая длиной 10 м и шириной 2 м. В Европе вино переливают в бутылки по 0,7 л каждая. Бутылка вина продается по цене 2,5 €. Сколько леев получено за товар, если продали 6 таких цистерн? (1 € = 21,14 лея).

32. Фабричная труба имеет форму усеченного прямого кругового конуса, у которого высота равна 30 м, внешний диаметр при основании равен 3,6 м, а внешний диаметр при вершине 2,4 м. Внутренняя часть трубы имеет форму прямого кругового цилиндра, диаметр которого равен 1,6 м. Сколько весит эта труба, если масса одного кубического метра этого строения равна 1800 кг?

33. Согласно проекту, дом, основание которого – прямоугольник со сторонами 8 м и 12 м (рис. а), должен был иметь двускатную крышу, угол наклона которой относительно горизонтальной поверхности равен 45°. Для уменьшения объема чердака, не меняя площади его поверхности, было принято решение изменить форму крыши и сделать ее четырехскатной так, чтобы две по две части крыши были конгруэнтными (рис. б).
На сколько процентов уменьшился объем чердака, если известно, что длина вершины новой крыши 8 м (то есть $M_1P_1=8$ м)?



а)



б)

34. Величина острого угла ромба равна α, а его высота равна h.
а) Найдите длины диагоналей ромба.
б) Вычислите площадь ромба, используя найденные длины его диагоналей.
в) Найдите объем прямой призмы, основанием которой является данный ромб, а ее высота конгруэнтна стороне ромба.

35. В равнобокую трапецию с основаниями 1 см и 9 см вписана окружность. Найдите:
а) длину боковой (непараллельной) стороны трапеции;
б) радиус окружности, вписанной в трапецию;
в) высоту трапеции;
г) длину диагонали трапеции;
д) радиус окружности, описанной около трапеции;
е) площадь трапеции;
ж) площади треугольников, на которые делит трапецию ее диагональ.

36. Дана окружность радиуса 12 см. Найдите:
а) длину стороны равностороннего треугольника, описанного около этой окружности;
б) периметр правильного четырехугольника, описанного около этой окружности;
в) площадь правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

37. В ромбе $ABCD$, $AB=6$ см, $m(\angle A)=60°$, $K\in[CD]$ и $CK=2$ см. Из точки K восстановлен перпендикуляр KM к плоскости ромба такой, что $KM=6$ см.

Найдите:
а) величину угла, образованного прямой AD и плоскостью MCD;
б) величину двугранного угла, ребро которого AB;
в) расстояние между прямыми MK и BD;
г) величину угла, образованного прямыми MC и BD.

38. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если известно, что ее объем равен 4 дм^3, а сумма длин всех ее ребер минимальна.

39. В параллелограмме $ABCD$, $m(\angle A)=45°$, $AP\perp(ABC)$, $AD=3\sqrt{2}$ см, $AP=4$ см, $AB=3$ см.
а) Найдите расстояние от точки P до прямой DC.
б) Найдите расстояние от точки P до всех вершин параллелограмма.
в) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
г) Найдите площадь треугольника PAC.

40. Допишите выражение, используя факториал, чтобы полученное высказывание стало истинным:
$$C_{m+3}^{m-2}=\boxed{}.$$

41. Даны цены единицы одного и того же товара, выставленного для продажи в разных магазинах:

45	60	40	52,5	50	60	47,5	62,5
45	50	45	60	55	60	45	42,5
60	50	50	62,5	40	55	55	60

а) Сгруппируйте эти данные по интервалам: [40, 45), [45, 50), [50, 55), [55, 60), [60,65]. Дополните полученную таблицу, включая в нее накопленные относительные частоты.
б) Предложите два способа для определения средней цены единицы соответствующего товара

42. Металлическая деталь в форме прямого кругового цилиндра, дополненного прямым круговым конусом того же радиуса, имеет высоту 40 см. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 15°. Площадь боковой поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 1,5:1. Сколько краски потребуется для покраски этой детали, если расход краски составляет 2 г на 0,01 дм^2?

43. На фирме работают 15 специалистов (9 мужчин и 6 женщин). Из них составляют команду из 7 человек, в которую входят хотя бы 3 женщины. Сколькими способами можно составить эту команду?

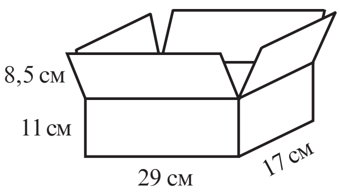
44. У одного меломана 9 музыкальных CD, а у другого – 7 музыкальных CD.
а) Сколькими способами они могут обменяться CD: один CD на один CD?
б) Сколькими способами они могут обменяться CD: два CD на два CD?

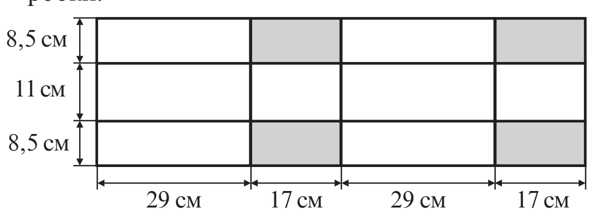
C

45. Сколько элементов содержит множество, если число их перестановок больше 500 и меньше 600?

46. Банк выделяет кредит на следующих условиях: банк выдает клиенту по 100 000 леев ежедневно на протяжении месяца (30 дней); клиент же возвращает банку в первый день 1 бан, во второй – 2 бана, в третий – 4 бана, в четвертый – 8 банов и т. д. (на протяжении 30 дней). Согласны ли вы стать клиентом этого банка? Обоснуйте ответ.

47. Упаковочная картонная коробка имеет форму прямоугольного параллелепипеда, размеры которого указаны на рисунке. Исследуйте развертку этой коробки и соответствующие размеры. При сборке коробки некоторые прямоугольники (закрашенные) накладываются друг на друга. Найдите площадь полной поверхности закрытой коробки.





48. Числа x, y, z являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа x, $2y$, $3z$ – последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите отличный от единицы знаменатель геометрической прогрессии.

49. В городе 3 миллиона жителей. Некто прибыл в город, владея новой информацией. Через 10 минут он сообщил эту информацию двум жителям. Каждый из них сообщил эту новость через 10 минут еще двум жителям (которые не владели этой информацией) и т. д. Через сколько минут все горожане будут владеть новой информацией?

50. Найдите все геометрические прогрессии, для которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух членов, предшествующих ему.

51. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Найдите первый член геометрической прогрессии, если известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый ее члены являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии.

52. Сумма первых тринадцати членов арифметической прогрессии равна 130. Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно, что четвертый, десятый и седьмой члены этой прогрессии являются в этой последовательности тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии.

Реальный профиль

A₁

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $2^{x^2-x}=1$; б) $0{,}5^{2(x-5)}=0{,}25$;
в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^3+5x^2}=-\frac{1}{2}$; г) $5\cdot4^x=4\cdot5^x$; д) $19^x=38^x$.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $\log_2(x^2-3x)=2$; б) $\lg(x^2-9x)=1$;
в) $\log_3(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$;
г) $\log_5(x^2-16)+\log_5\sqrt{125}=\log_5(x+4)$.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $5^{2x}+5^x-600=0$; б) $10^x+4^x-2\cdot25^x=0$.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:
а) $\begin{cases}x^2+y^2=400,\\2x-y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\5^{x-y+1}=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-y=16,\\\lg x+\lg y=2.\end{cases}$

5. Найдите значение выражения
$-3\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ при $\sin\alpha=-\frac{1}{8}$.

6. Найдите значение выражения $\frac{-3\cos33^\circ}{\sin(-57^\circ)}$.

7. Известно, что: а) $\cos\alpha=-0{,}4$; б) $\sin\alpha=-0{,}6$.
Найдите $\cos2\alpha$.

8. Известно, что $\sin\alpha+\cos\beta=2$. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$.

9. Представьте в тригонометрической форме число:
а) i; б) $-i$; в) 10; г) $i-\sqrt{3}$; д) $2-3i$.

10. Определите, истинно или ложно высказывание:
а) $(\exists x\in\mathbb{R})(|x+2|<3)$;
б) $(\forall x\in\mathbb{R})(x^2+4x+4+|x^2-x+1|>0)$.

11. Решите на множестве **C** уравнение:
а) $ix^2-3x+i=0$; б) $z^4-z^2-12=0$;
в) $3x^3-x^2-x+3=0$; г) $(1+i)z^2-(5+2i)z+5=0$.

12. Допишите выражение, чтобы получить истинное высказывание:
$$3A_n^2+A_n^3=\boxed{}-C_n^{n-1}.$$

13. Даны условия. A: «Треугольник MNP равнобедренный», B: «Величины углов M и N равны 30°». Сформулируйте теорему «Если A, то B» и обратную к ней. Найдите их истинностные значения.

14. Даны условия. A: «Целое число a кратно 4», B: «Целое число a кратно 8». Определите, равносильны ли эти условия.

B₁

15. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:
а) $C_x^3+C_x^4=A_x^2$; б) $\frac{A_x^2}{C_{x+1}^3}=48(x-1)$;
в) $2A_n^3+6A_n^2=P_{n+1}$.

16. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-x^2-3x$.
а) Найдите промежутки, на которых функция f возрастает.
б) Найдите координаты точки локального максимума функции f.
в) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(x)\le0$.

17. Найдите промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции $f: D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=2x^3-3x^2$; б) $f(x)=1-16x^4$.

18. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:
а) $f:[1, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-x^3$;
б) $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\sqrt{x}$.

19. Запишите уравнение касательной к графику функции $f:\mathbb{R}\setminus\{-8\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-96}{x+8}$, в точке пересечения графика:
а) с осью ординат;
б) с осью абсцисс.

20. Установите, выполняются ли в точке $x_0=2$ условия теоремы Ферма для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=(x-2)^2$; б) $f(x)=(x-2)^3$.

21. Начертите график функции, для которой в точках $x_0=0$, $x_1=3$ выполняются условия теоремы Ферма.

22. Найдите промежутки возрастания, убывания, точки экстремума и локальные экстремумы функции f на ее области определения, если $f: D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=x^3-3x^2-4x+10$;
б) $f(x)=x^3-18x$;
в) $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

23. Постройте график функции $f: D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=x^3-2x+1$; б) $f(x)=x^4-2x^2$.

24. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом Гаусса систему уравнений:
а) $\begin{cases}x_1-2x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+x_2=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\2x_1-x_3=0,\\-x_1+2x_2-2x_3=0.\end{cases}$

25. Вычислите $P(X)+Q(X)$, $P(X)-Q(X)$ и $P(X)\cdot Q(X)$, если
$P(X)=2-3X+2X^3$, $Q(X)=3+4X-2X^2$.

26. Найдите частное и остаток при делении многочлена $P(X)$ на многочлен $Q(X)$, где:

а) $P(X)=2X^4+3X^3-2X^2+3X+1$,
$Q(X)=X^2+3X+1$;

б) $P(X)=3X^5-2X^4-3X^2+5X+4$,
$Q(X)=X^3+2X+3$.

27. Дан многочлен $F(X)=X^5+5X^4+8X^3+5X^2+7X+3$.

а) Выберите его корни из множества $M=\{\pm\mathrm{i}, 1, 3, 0\}$.

б) Найдите кратность каждого корня многочлена.

в) Разложите многочлен на неприводимые множители с действительными коэффициентами.

г) Упростите выражение $H(X)=\dfrac{F(X)}{G(X)}$, где $G(X)=X^3+X^2+X+1$.

28. Найдите корни многочлена $P(X)$, зная, что $P(\alpha)=0$, если:

а) $P(X)=X^3-2X^2-X+2$, $\alpha=1$;

б) $P(X)=X^3+5X^2+5X+4$, $\alpha=-4$.

29. Разложите на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлен:

а) X^3-1; б) X^4-16; в) X^4-3X^2-4.

30. Цена единицы товара 150 леев. Затраты на производство товара выражены функцией

$$c(x)=4x^2+30x+300,$$

где x – количество единиц товара. Найдите максимальный валовой доход.

31. Материальная точка движется по оси согласно закону $s(t)=27t-t^3+1$ (где s – расстояние, выраженное в метрах, а t – время, выраженное в секундах).

а) Какова начальная скорость материальной точки?

б) Через какое время после начала движения материальная точка остановится? Чему равно расстояние, пройденное за это время?

32. Найдите кардинал множества $M=\mathbb{Z}\cap D$, $D\subseteq\mathbb{R}$, где D – область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x^2-9}{-x^2+25}$, а $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

33. Вычислите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 1), (1; 4), (4; 3).

34. Вычислите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (1; 2), (1; 4), (5; 3), (5;1).

35. Прямая $y=2x-3$ касательна к графику функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.
Найдите абсциссу точки касания.

36. Высота, на которой находится мяч, брошенный вертикально вверх относительно поверхности земли, вычисляется по формуле $h(t)=-4t^2+22t$; где h – высота (в метрах), t – время (в секундах), пройденное после броска. Сколько секунд будет находиться мяч на высоте не меньше 10 м?

37. Найдите цифру a, при которой:

а) число $\overline{235a}$ кратно 18; б) число $\overline{120a}$ кратно 15;

в) число $\overline{345a}$ кратно 6.

38. Вычислите:

а) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{2011}}{(1+\mathrm{i})^{2011}}$; б) $\mathrm{i}^{2012}\cdot(\mathrm{i}^{27})^{15}$;

в) $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{vmatrix}$.

39. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 5=\log_3 10, \\ \log_5 x^3+\log_5 y^2=\log_5 32; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3y+xy^3=1010, \\ \lg x+2\log_{100} y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=2, \\ 3^{\log_2(2y-x)}=1. \end{cases}$

40. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x+\sqrt{5x+10}=8$; б) $4x-5=-2\sqrt{5-4x}$;

в) $(x^2-4)\sqrt{x-3}=0$; г) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$;

д) $3^{x+1}+18\cdot3^{-x}=29$;

е) $\log_{\frac{1}{5}}(3-2x)+\log_5(-x-6)=-1$.

41. Дано уравнение $5x^2-x-4=0$.

а) Решите уравнение на множестве $\mathbb{R}$.

б) Составьте многочлен II степени, корнями которого являются противоположные решения данного уравнения.

в) Найдите первообразную функции g, соответствующую многочлену из пункта б), график которой проходит через точку $A(-1, 5)$.

г) Вычислите интеграл $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$, где G – первообразная, найденная в пункте в).

д) Найдите объем правильного тетраэдра, длина ребра которого равна значению определенного интеграла из пункта г).

42. Определите взаимное расположение окружностей, заданных уравнениями: $x^2+y^2-6x+8y=0$ и $x^2+y^2+4x-6y=3$.

43. Запишите уравнение окружности радиуса 5 м, которая касается окружности $x^2+y^2-10y=0$ в точке $P(3, 1)$.

44. Найдите координаты общих точек прямой $y=4-0{,}4x$ и окружности $x^2+x+y^2=1$.

45. Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Касательная, проведенная к графику G_f, пересекает ось Ox в точке M, а ось Oy – в точке N. Найдите координаты точки касания, если площадь треугольника NOM равна 6,75 см^2.

46. Площадь прямоугольника равна 32 $см^2$. Найдите наименьшее значение периметра этого прямоугольника.

47. Докажите методом математической индукции:
$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}.$$

48. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$;

б) $2x^2-8x+3\sqrt{x^2-4x+1}=3$;

в) $(x^2-6x+5)\sqrt{2x+8-x^2}=0$;

г) $\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}+\sqrt{4^x-8\cdot 2^x+16}=3$;

д) $x^{\log_2 x+2}=256$;

е) $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot 6^{\log_3 x}=-6$;

ж) $\log_{x+2} x+\log_x(x+2)=2{,}5$.

49. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=16, \\ \log_2 x-\log_2 y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2, \\ x+y=26; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2\log_y x+2\log_x y=5, \\ xy=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x|^{\lg y}=4, \\ xy=40. \end{cases}$

50. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\log_{0,1}(-x)\le\frac{1}{2}\log_{0,1}(8-7x)$;

б) $27\cdot 4^x-30\cdot 6^x+8\cdot 9^x\ge 0$;

в) $32^{1-x^2}<16^x$; г) $0{,}2^{x^2-6}\ge 0{,}008$;

д) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-3}{1-x}>-1$; е) $\log_x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}\right)\le 1$.

51. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(x^2-4x+4)(\ln x-1)<0$;

б) $|x^2-5x+6|(4^x-64)\ge 0$.

52. Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\log_2(x^2-1)}}$;

б) $f(x)=\ln|x^2-1|+\dfrac{\sqrt[4]{3x^4-x^2-2}}{x^3-x^2+x-1}$.

53. Вычислите $\sqrt[3]{z_1z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные решения уравнения $z^2-(2\mathrm{i}+1)z+(\mathrm{i}-1)=0$.

54. При каких значениях действительного параметра a система уравнений $\begin{cases} |x|+y=5 \\ (y-a)^2+x^2=9 \end{cases}$ имеет единственное решение?

55. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-x)(1-2x^2)(1-3x^3)}{(3+2x^2)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{6}{1-x^6}-\dfrac{4}{1-x^4}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\,\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2(3x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

56. Определите форму графика функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, если известно, что на интервале (a,b):

а) $f(x)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)<0$;

б) $f(x)<0,\ f'(x)>0,\ f''(x)>0$.

*В заданиях **57–59** укажите букву, соответствующую верному варианту.*

57. Разложение степени бинома $(5x+3y)^{17}$ состоит из

A 17 членов. **B** 16 членов.

C 18 членов. **D** 15 членов.

58. Шестой член разложения степени бинома $(a^2-b^2)^{10}$ равен

A $C_{10}^6(a^2)^4\cdot(b^2)^6$. **B** $-C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$.

C $C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$. **D** $-C_{10}^6(a^2)^4(b^2)^6$.

59. Сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении степени бинома $(x^3-y^3)^6$, равна

A 32. **B** 64. **C** 128. **D** 16.

60. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $2C_n^3\ge A_n^2$; б) $4(C_{n-1}^4-C_{n-1}^3)\ge 5A_{n-2}^2$.

61. Найдите (если существует):

а) член разложения степени бинома $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}\right)^{14}$, содержащий x^3;

б) член разложения степени бинома $(y-\sqrt{2})^9$, содержащий y^7;

в) член разложения степени бинома $(2a^3-a^2)^{20}$, не содержащий a.

62. Найдите C_n^4, если известно, что в разложении степени бинома $(1+\sqrt{a})^n$ биномиальные коэффициенты при a^3 и a^5 равны.

63. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах в разложении степени бинома $\left(a^2-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, равна 64. Найдите член разложения, содержащий a^{-3}.

64. Используя разложение степени бинома, вычислите $P(2-\mathrm{i})$, если $P(X)=X^5-3X^3+\mathrm{i}X-\mathrm{i}$.

65. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3\cos^2 x+7\sin x-5=0$;

б) $1-\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$;

в) $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$;

г) $2\sin^2 x-3\sin 2x=2$;

д) $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-5\,\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}=-4$;

е) $2\sin^2 x-1{,}5\sin 2x-3\cos^2 x=0$.

66. Найдите решения уравнения $\cos 2x-5\sin x=3$, которые принадлежит отрезку $\left[-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

67. Зная, что $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 3 & i \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$C_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, решите матричное уравнение:

а) ${}^tAB-2X=3C_1$; б) $3X+AB^t+2C_2=0$.

68. Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом Гаусса систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-4x_4=1, \\ x_1+4x_3-2x_4=2, \\ 4x_1+x_2+11x_3-8x_4=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_1+2x_2-4x_3+x_4=2, \\ 2x_1-x_2+6x_3-4x_4=-2, \\ 5x_1+5x_2-6x_3-x_4=4. \end{cases}$

69. Дана функция $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{если } x\in[-1,1]\setminus\{0\}, \\ \alpha, & \text{если } x=0,\ \alpha\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Найдите значения α, при которых функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$.

70. Найдите точки разрыва функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ x+\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ e^x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

71. Пусть $a\in\mathbb{R}$ и функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+a^2, & x\in(-\infty, a] \\ 2x+1, & x\in(a,+\infty). \end{cases}$$

Найдите a, при котором функция f непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

72. Определите, ограничена ли функция:

а) $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$;

б) $f\colon (0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x(1+e^x)}$;

в) $f\colon [0,3\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{2+\sin x}$;

г) $f\colon (-\infty,+\infty)$, $f(x)=\sin x+e^{-x}$.

73. Докажите, что функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет хотя бы один нуль на указанном множестве:

а) $f(x)=3^x-2-\sin x$ ре $[0, 1]$;

б) $f(x)=\ln x+x^2$ ре $(0, 1]$.

74. Примените теорему Ролля к функции f и найдите соответствующее число c:

а) $f\colon [-2,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)(x-5)$;

б) $f\colon [-1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-2|$.

75. Примените теорему Лагранжа к функции f и найдите соответствующее число c:

а) $f\colon [1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x\ln x$;

б) $f\colon [-1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3e^x$;

в) $f\colon [0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{если } x\in[0,1], \\ x-2, & \text{если } x\in(1,4]. \end{cases}$

76. Используя правила Лопиталя, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

77. Постройте график функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2\ln x$; б) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; в) $f(x)=\dfrac{|x^2-4|}{2x}$.

78. Найдите наибольшую площадь прямоугольника, диагональ которого равна l.

79. Покажите, что график функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$, имеет 3 точки перегиба, которые лежат на одной прямой.

80. Найдите положительное число x, при котором сумма $x+\dfrac{1}{x}$ минимальна.

81. Постройте прямую, проходящую через точку $A(1, 4)$ так, чтобы сумма длин отрезков, полученных при пересечении этой прямой с положительными полуосями Ox и Oy, была минимальной.

82. Найдите величину налога для каждой единицы товара, при которой доход от налогообложения максимален, если известна функция спроса $p(x)=900-\dfrac{1}{3}x$ и функция предложения $p_1(x)=800+3x$ (x – количество единиц товара).

Указание. Доход от налогообложения вычисляется по формуле $V(x)=I\cdot x$, где I – величина налога на единицу товара, и определяется из соотношения $p(x)=p_1(x)+I$.

83. Закон движения материальной точки по оси задается формулой $s(t)=te^{-t}+2$. Найдите:

а) момент времени, когда ускорение материальной точки равно нулю;

б) минимальное значение скорости и расстояние, пройденное в соответствующий момент времени.

84. Выполните действия: $\dfrac{C_{2n}^3 C_{2n}^1}{(C_{2n}^2)^2} - \dfrac{P_{2n}P_{2n+1}(4n^2-2n)^2}{4(C_{2n}^2)^2((2n)!)^2}$.

85. Найдите сумму $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + ... + 3^n C_n^n$.

86. Решите на множестве $\mathbb{N}$ уравнение:

а) $\dfrac{C_{2n+1}^{n-1}}{C_{2n}^{n+1}} = \dfrac{13}{7}$; б) $C_{2n-1}^{2n-2} = n^3 + 13$.

87. Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

а) $C_{2n}^5 > C_{2n}^3$; б) $C_{11}^n < C_{11}^{n+2}$; в) $\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^3} \ge \dfrac{4}{5}$.

88. Найдите в разложении степени бинома $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^n$ значение n, при котором $T_5 : T_7 = 5$.

89. Сколько рациональных слагаемых в разложении степени бинома?

а) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3})^{100}$.

90. Найдите число x, если известно, что четвертое слагаемое разложения степени бинома $(x-x^{\lg x})^9$ равно $-84\cdot 10^8$.

91. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{\sin 2t}{1-\sin t} = 2\cos t$;

б) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin 3x$;

в) $3^{1-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 8\cdot 3^{\cos x - \sin x} - 9 = 0$;

г) $\cos 4x + \sin^2 3x = 1$.

92. Найдите действительные решения уравнения

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x,$$

которые удовлетворяют условию $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

93. Найдите двумя способами обратную к матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

94. Установите, совместна ли система уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

95. Допустим, что вы забыли одну цифру номера телефона и набираете ее наугад. Какова вероятность, что вы сделаете не более двух попыток?

96. В двух урнах содержатся 13 шаров, белых и черных. Из каждой урны извлекается наугад по одному шару. Вероятность того, что оба шара белые, равна $\dfrac{7}{18}$. Чему равна вероятность того, что оба извлеченных шара будут черными?

97. Найдите значения параметра a, при которых остаток от деления многочлена $P(X)$ на двучлен $Q(X)$ равен r, если:

а) $P(X) = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 3X + 4$,
$Q(X) = X + 3$, $R = -5$;

б) $P(X) = X^3 + (a^2+3)X^2 + 2aX + 4a + 5$,
$Q(X) = X - 2$, $R = 37$.

98. Найдите корни многочлена $P(X)$, зная, что $P(\alpha)=0$, если $P(X) = X^3 - 21X^2 - 73X + 24$, $\alpha = 24$.

99. Найдите остальные рациональные корни многочлена, если α_1 – один из его корней:

а) $X^3 + 9X^2 + 18X + 26$, $\alpha_1 = -2$;

б) $2X^3 + 12X^2 + 60X + 50$, $\alpha_1 = -1$.

100. Разложите многочлен на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители и найдите его корни:

а) $X^4 + X^3 - X^2 - 1$; б) $X^4 - 2X^2 + 1$;

в) $3X^4 - X^2 - 2$.

101. На соревновании по стрельбе за каждый промах из серии в 25 выстрелов спортсмена штрафуют следующим образом: за первый промах – 1 балл, за каждый последующий промах – на $\dfrac{1}{2}$ больше, чем за предыдущий промах. Сколько раз спортсмен попал в цель, если его оштрафовали 7 баллами за промахи?

102. При каких значениях $x \in (1, +\infty)$ числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются последующими членами арифметической прогрессии?

103. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 - x^2 - mx$. Известно, что точка $x_0 = -2$ – точка максимума для функции f.

а) Найдите значение параметра m.

б) Определите точку минимума для функции f при m, найденном в пункте а).

в) Вычислите расстояние между точками максимума и минимума функции f.

104. Прямая $y = 4x + 6$ – касательная к графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 7$.

а) Найдите координаты точки касания.

б) Сколько общих точек имеют прямая $y = 4x + 6$ и G_f?

в) Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 4x + 6$, G_f, $x = -1$ и $x = 4$.

105. Найдите кардинал множества:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{6n-7}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

106. Имея отрез ткани треугольной формы, портниха хочет сшить покрывало прямоугольной формы. Как она должна покроить это покрывало, чтобы отходы ткани были минимальными?

107. Даны функции:
$f: D_1 \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$,
$g: D_2 \to \mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$.
а) Найдите D_1 и D_2.
б) Сократите отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
в) Решите на множестве $D_1 \cap D_2 \cap \mathbb{R}$ уравнение:
$$f(x)+g(x)=2\sqrt{2}.$$

108. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$.

109. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ такие, что $|z_1|=|z_2|=1$. Докажите, что $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

110. Найдите комплексное число z, при котором:
а) $|z|-2z=3-4\mathrm{i}$; б) $|z-\mathrm{i}|=|z-1|+|z+\mathrm{i}z|$.

111. Пусть $z=a+b\mathrm{i}$. Найдите все комплексные числа $z_1=x+\mathrm{i}y$ такие, что $z^2=a+b\mathrm{i}$.

112. Сколько словарей необходимо, для того чтобы переводить напрямую с одного языка на другой следующие 6 языков: румынский, украинский, русский, греческий, итальянский, английский?

113. Найдите:
а) рациональные члены разложения бинома $(\sqrt[5]{2}-\sqrt[7]{3})^{24}$;
б) иррациональные члены разложения бинома $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$.

114. Дана функция $f: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $f(x)=2x^2+1$, а f^{-1} – обратная к функции f. Найдите:
а) $f(f^{-1}(x))$; б) $f^{-1}(f(x))$.

115. Докажите, что многочлен $X^{n+1}-X^{n+2}-3X+3$ делится без остатка на многочлен $(X-1)^2$.

116. Докажите, что многочлен $X^{1993}+X^2+1$ делится без остатка на многочлен X^2+X+1, и найдите соответствующее частное.

117. Решите на множестве $\mathbf{C}$ возвратное уравнение:
а) $x^3-8x^2-8x+1=0$; б) $4x^4+5x^3+2x^2+5x+4=0$.

118. Решите на множестве $\mathbf{C}$ биквадратное уравнение:
а) $x^4+20x^2+96=0$; б) $x^6-19x^3-216=0$;
в) $x^4-(m+1)x^2+m=0$, где m – действительный параметр.

119. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Найдите A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

120. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите a и b, при которых $AX=XA$.

121. Пусть A – квадратная матрица третьего порядка с элементами -1 и 1.
а) Покажите, что $\det A$ есть четное число.
б) Определите наибольшее возможное значение для $\det A$.
в) Определите наименьшее возможное значение для $\det A$.

122. Найдите матрицы $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, при которых $A^2+A+I_2=O_2$.
а) Покажите, что матрица A обратима.
б) Найдите обратную к матрице A.

123. Дана точка $A(-1, 2)$. Найдите координаты образа точки A:
а) при центральной симметрии относительно точки $M(2, -5)$;
б) при осевой симметрии относительно точки $x=2$;
в) при повороте против часовой стрелки на $120°$ вокруг начала координат O;
г) при параллельном переносе t_{OM}.

124. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ содержится в плоскости ABM, а сторона BC образует угол α с этой плоскостью. Какой угол образует диагональ BD с плоскостью ABM, если:
а) $ABCD$ – квадрат;
б) $ABCD$ – ромб и $m(\angle B)=120°$?

125. Возможно ли, чтобы все ребра правильной шестиугольной пирамиды были конгруэнтны? Обоснуйте ответ.

126. Катет прямоугольного треугольника равен m, а острый угол при этом катете равен β. Треугольник вращается вокруг гипотенузы.
а) Найдите площадь полной поверхности полученного тела.
б) Найдите объем полученного тела.

127. Вычислите интеграл $\int_{-1}^{1} x^4 \operatorname{arctg} x\,dx$.

128. Дана функция $f: D \to \mathbb{R}$,
$f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}-\dfrac{1}{|x+2|-3}$.
а) Исследуйте функцию на непрерывность и дифференцируемость.
б) Постройте график функции f.
в) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком G_f, наклонной асимптотой к этому графику и прямыми $x=3$ и $x=4$.

C₁

129. Вычислите $\lim\limits_{a\to+\infty} a\cdot I(a)$, если $I(a)=\int_1^2 \dfrac{dx}{|x+a|+1}$.

130. Вычислите $\lim\limits_{a\to+\infty} a(I(a)-1)$, если $I(a)=\int_a^{a+1} \dfrac{|1-x|\,dx}{1+|x|}$.

131. Найдите значения действительных параметров a и b, при которых
$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[4]{x^4+x^3}+ax+b)=\frac{1}{12}$.

132. Найдите значения действительного параметра a, при которых

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+1}{x^2+2x-1}\right)^x=e$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)^{x\sqrt{x}}=\sqrt{e},\ a\neq 0$.

133. Докажите, что если функции $f, g\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$ непрерывны в некоторой точке $x_0\in I$ и если $f(x_0)<g(x_0)$, то существует $\delta>0$ такое, что $f(x)<g(x)$ для любого $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\cap I$. Останется ли верным заключение, если одна из функций f, g разрывна в точке x_0?

134. Пусть $f\colon[-1,1]\to[-a,a]$ – непрерывная функция, где a, $a>0$, фиксированный параметр. Покажите, что уравнения $f(x)-ax=0$ и $f(x)+ax=0$ имеют хотя бы одно действительное решение, принадлежащее отрезку $[-1,1]$.

135. Пусть $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ – непрерывная, отличная от константы функция и $f(a)=f(b)$. Покажите, что если $m=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ и $M=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, то функция f принимает не менее двух раз любое значение из промежутка (m, M).

136. Пусть $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ – некоторая непрерывная функция. Докажите, что функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(\alpha)=\int\limits_0^1 g(x)\sin\alpha x\,\mathrm{d}x$, непрерывна на множестве $\mathbb{R}$.

137. При каких значениях параметров $a, b\in\mathbb{R}$ точка $M(1, 3)$ является точкой перегиба для графика функции $f(x)=ax^3+bx^2$?

138. Докажите, что если некоторая функция $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ строго выпукла вверх или строго выпукла вниз, то она имеет не более одной точки экстремума.

139. При каких значениях $x\in\mathbb{R}_+^*$ последовательность чисел $\log_8 x, (\log_8 x)^2, \ldots, (\log_8 x)^n, \ldots$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, сумма которой равна $\frac{1}{2}$?

140. При каких действительных значениях параметра a уравнения $\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ и $\left(\sin x-\frac{a}{3}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ равносильны?

141. Докажите, что числа $\frac{1}{6}\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, если $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

142. Докажите, что если для показательной функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$, последовательность значений аргумента $x=x_n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ образует арифметическую прогрессию, то последовательность соответствующих значений функций $(f(x_n))_{n\geq 1}$ образует геометрическую прогрессию.

143. При каких действительных значениях параметра a функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-x)^2-ax+3a$, четная?

144. Дано множество $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+2=0\}\cup$ $\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+8x+2m^2=0\}$.
Докажите, что $\operatorname{card}B=2$ при любых $m\in\mathbb{N}$.

145. Докажите, что $\log_2 3+\log_3 4+\log_3 5+\log_5 6>5$.

146. Найдите сумму и затем методом математической индукции докажите, что формула верна $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

а) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)$;

б) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$;

в) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

147. Докажите, что для $n\in\mathbb{N}$ число $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ – натуральное.

148. В начале года М. И. разместил 10 000 леев на банковском счете со сложными процентами, с годовой капитализацией, по годовой процентной ставке 10%. В конце каждого года М. И. снимает со счета постоянную сумму в 800 леев. Какая сумма будет на счете М. И. через n лет? Будет ли исчерпан счет М. И. при n стремящимся к бесконечности?

149. Последовательность $(a_n)_{n\geq 1}$ задана формулой общего члена: а) $a_n=\frac{1}{n}$; б) $a_n=\sqrt{n}$.
Докажите, что какими бы ни были три последовательных члена этой последовательности, они не являются последовательными членами арифметической прогрессии.

150. Вычислите сумму $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ раз}}$.

151. Докажите, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами геометрической прогрессии с положительными членами.

152. Найдите значение действительного параметра m, при котором остаток от деления многочлена
$$P(X)=X^6-mX^4+(m^2+4)X^2-2$$
на бином $X-1$ равен 5.

153. Докажите, что $\begin{vmatrix}1 & a & h_b\cdot h_c\\ 1 & b & h_c\cdot h_a\\ 1 & c & h_b\cdot h_a\end{vmatrix}=0$, где a, b, c – длины сторон треугольника, а h_a, h_b, h_c – соответствующие высоты этого треугольника.

Время выполнения работы: 90 минут

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

1. В рамках реализации проекта «Дерево для нашей жизни» примэрия приобрела 390 саженцев по 25,5 лея за один саженец. Саженцы были посажены учениками XI и XII классов местного лицея. Известно, что ученики XII класса посадили на 30% саженцев больше, чем ученики XI класса.

а) Дополните предложение, чтобы получить истинное высказывание:

«Примэрия заплатила $\boxed{}$ леев за приобретенные саженцы».

б) Вычислите, сколько саженцев посадили ученики XII класса.

в) Известно, что взрослое дерево за год вырабатывает около 100 м^3 кислорода, а один человек за сутки потребляет около 19 м^3 кислорода. Найдите, сколько человек за сутки смогут использовать количество кислорода, которое выработают 390 деревьев за год.

2. Даны функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 - 4t + 3$, и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = -2t^2 - t + 3$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л,** если оно ложно:

«$f(0) > g(1)$». | **И** | **Л** |

б) Найдите координаты точек пересечения графиков функций f и g.

в) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(t) \le g(t)$.

г) Траектория движения брошенного камня представляет собой часть графика функции g. Определите, какой максимальной высоты может достигнуть брошенный камень.

3. Фермер сложил сено в скирду, имеющую форму прямого кругового конуса, радиус основания которого 4 м, а высота 3 м.

а) Дополните запись одним из терминов «многогранник», «круг», «геометрическое тело», чтобы получить истинное высказывание:

«Прямой круговой конус – это ________________________________».

б) Вычислите площадь поверхности скирды.

в) В ноябре, для того чтобы прокормить свою лошадь, фермер использовал сено с вершины скирды. Оставшееся сено приняло форму прямого усеченного конуса, высота которого равна 1,2 м. Вычислите объем сена, использованного фермером в ноябре. (Ответ округлите до десятых.)

Реальный профиль

1. Для перевода температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта следует умножить эту температуру на $\frac{9}{5}$, а затем сложить с числом 32.

а) Запишите формулу перевода температуры из градусов Цельсия в градусы Фаренгейта.

$$t°\mathrm{F} = \boxed{\qquad\qquad}.$$

б) Известно, что в холодильнике температура колеблется от 2°C до 7°C. Определите, каковы будут эти показатели в градусах Фаренгейта.

в) Летним днем в одном из штатов США температура воздуха менялась от 70°F до 90°F. Переведите эти температуры в градусы Цельсия.

2. Дана функция $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

а) Обведите букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно.

«Функция f непрерывна в точке $x_0 = 0$». **И** | **Л**

б) Найдите первообразную F_1 функции f, график которой проходит через точку $A(1, 2)$.

в) Найдите первообразную F_2 функции f, график которой проходит через точку $B(8, 4)$.

г) Определите, какой из графиков этих первообразных расположен выше в системе координат.

д) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками первообразных F_1, F_2 и прямыми $x_1 = 8$ и $x_2 = 27$.

3. В магазине продается молоко в пакетах, имеющих форму правильной треугольной пирамиды с ребром 13,5 см.

а) Дополните запись, чтобы получить соответствующее определение:

«Треугольная пирамида, у которой все ребра конгруэнтны, называется ____________________».

б) Найдите объем пакета.

в) Определите, сколько процентов объема пакета остаются незаполненными после того, как в пакет нальют 0,5 л молока. (Вычислите для $\pi \approx 3{,}14$.)

4. Дано множество $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| + 2\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}z\} \cup \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \mathrm{tg}^2 x & \cos 2x \end{vmatrix} = 5 \text{ и } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right\}$.

а) Заполните рамки, чтобы получить истинное высказывание:

$$«\boxed{\quad}\cdot\cos^2 2x + \boxed{\quad}\cdot\sin^2 2x = -\sqrt{10}».$$

б) Найдите кардинал множества A.

в) Докажите, что $(1+\mathrm{i})^{6n} = (-\mathrm{i})^n \cdot 2^{3n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответы и указания

Модуль 1. Первообразная и неопределенный интеграл

§1. ***Реальный профиль.*** **A₁. 1.** а) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$; б) $\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^4+x+C$; в) $\frac{1}{3}x^3+3x-\ln|x|+C$; г) $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}-2x\cdot\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$; д) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2x+C$. **2.** а) $\frac{3}{2}x^2-5\sin x+e^x+C$; б) $2\ln|x|+\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$; в) $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$; г) $x+\cos x+C$; д) $2e^x-\frac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$. **3.** а) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C$; б) $-e^{-x}+C$; в) $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; г) $3x-\frac{2(1,5)^x}{\ln 1,5}+C$; д) $\operatorname{tg}x-x+C$; е) $x-\sin x+C$; ж) $\cos x+\frac{3}{2}\arcsin x+C$; з) $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}+C$.
4. а) $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$; б) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C$; в) $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$; г) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$; д) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$; е) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C$; ж) $\operatorname{tg}x+C$; з) $C-\frac{4}{21}(8-3x)^{\frac{7}{4}}$; и) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$; к) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$; л) $C-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **B₁. 5.** $f(x)=\frac{5}{3}e^{3x}+\frac{7}{3}$. **6.** $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$. **7.** $F(x)=\operatorname{tg}x-1$. **8.** а) $x+\operatorname{arctg}x-\frac{10^{-x}}{\ln 10}+C$; б) $x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; в) $\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C$; г) $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$. **C₁. 9.** $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C_1, \text{ если } x\geq 1,\\ -\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C_2, \text{ если } x<1,\ C\in\mathbb{R}.\end{cases}$ **10.** $F(x)=\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}$. **11.** $F_1(x)=3\sqrt[3]{x}-1$, $F_2(x)=3\sqrt[3]{x}-2$, $F_1(x)-F_2(x)=1$. **12.** $s(t)=\frac{3}{4}(1+t)^{\frac{4}{3}}+C$; $s(7)=11,25$ м. **15.** а) $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$; б) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-17$; в) $-2\sqrt{3-x}+9$.

§2. ***Реальный профиль.*** **A₁. 1.** а) $\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$; б) $C-\frac{(5-4x)^{2024}}{8096}$; в) $\frac{(3x+1)^{\pi+1}}{3\pi+3}+C$; г) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{3}+C$; д) $C-\frac{1}{\sin x}$; е) $2\sqrt{x^3-x^2+7x-2}+C$; ж) $\frac{1}{12}\ln|12x+5|+C$; з) $-\frac{1}{3}e^{4-3x}+C$; и) $C-\frac{1}{12}\cos(12x+7)$; к) $\frac{3}{8}\ln(4x^2+5)+C$; л) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{2}}+C$; м) $\frac{\sqrt{15}}{30\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{15}}}{x+\sqrt{\frac{7}{15}}}\right|+C$; н) $\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$; о) $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$; п) $C-\frac{1}{3}\cdot\operatorname{ctg}(3x+\frac{\pi}{4})$.
2. а) $\frac{1}{9(1-3x)^3}+C$; б) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-1)^2}+C$; в) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x+3)^3}+C$; г) $-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(2-3x)^5}+C$; д) $-2\sqrt{\cos x}+C$; е) $\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3}+C$; ж) $\ln(1+e^x)+C$; з) $\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C$; и) $\ln|\sin x|+C$. **B₁. 3.** а) $2\ln(x^2+x+3)+C$; б) $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$; в) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$; г) $\ln|1+\ln x|+C$; д) $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{2x-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)+C$; е) $\frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; ж) $2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$; з) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$; и) $\operatorname{arctg}e^x+C$; к) $\ln|\sin x-\cos x|+C$; л) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C$; м) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **4.** а) $e^{x^2+x+3}+C$; б) $-e^{-\sin x}+C$; в) $2e^{\sqrt{x}}+C$; г) $\frac{1}{2}\sin(x^2+x)+C$; д) $\cos\frac{1}{x}+C$; е) $\frac{1}{8}\ln(1+2x^4)+C$; ж) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$; з) $\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$; и) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$; к) $\frac{1}{4}e^{2x^2+1}+C$; л) $-\frac{1}{3}\cos x^3+C$; м) $\frac{5}{6}e^{1+3x^2}+C$. **7.** $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{7\pi}{6}$. **8.** $F\colon(0,2\pi)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$.
C₁. 9. а) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; б) $2(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x})+C$; в) $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$; г) $\ln\left(\frac{\sin x-3}{\sin x-2}\right)+C$; д) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C$; е) $\frac{1}{15}\sqrt{(2x+1)^3}(3x-1)+C$; ж) $-\frac{2}{27}(2+3x)\sqrt{1-3x}+C$; з) $-\frac{2}{15}\sqrt{1-x}(3x^2+4x+8)+C$; и) $-\frac{3}{2}(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|)+C$, где $t=\sqrt{1-2x}$; к) $2t\left(\frac{t^2}{3}+\frac{t}{2}+1\right)+2\ln|t-1|+C$, где $t=\sqrt{x}$; л) $\frac{1}{15}\sqrt{(5x^2-1)^3}+C$; м) $2(t-\operatorname{arctg}t)+C$, где $t=\sqrt{e^x-1}$.
10. а) $\frac{2}{125}(1+5x)^2\cdot\sqrt{1+5x}-\frac{2}{75}(1+5x)\cdot\sqrt{1+5x}+C$; б) $\ln|\sin^2 x-4|+C$; в) $\frac{1}{36}t^3\left(\frac{t^2}{5}-\frac{1}{3}\right)+C$, где $t=\sqrt{1+3x^8}$; г) $\arcsin^2(\sqrt{x})+C$; д) $\frac{1}{\sin x+\cos x}+C$; е) $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}+C$.

§3. ***Реальный профиль.*** **A₁. 1.** а) $x\cdot\ln x-x+C$; б) $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$; в) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; г) $\sin x-x\cos x+C$; д) $\frac{6x-5}{2}\cdot e^{3x}+C$; е) $\frac{2^x}{\ln^2 2}(x\ln 2-1)+C$; ж) $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x+C$; з) $(x-1)^2e^x+C$; и) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$; к) $\frac{x^4}{4}(\ln x-\frac{1}{4})+C$; л) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}(\ln x-\frac{3}{4})+C$; м) $-\frac{1}{x}(1+\ln x)+C$; н) $\frac{x^2}{2}(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})+C$; о) $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8)+C$; п) $\frac{1}{4}(x^2-x\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x)+C$. **B₁. 2.** а) $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$; б) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; в) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$; г) $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x-5\cos 2x)+C$; д) $e^x(x^2-4x+3)+C$; е) $(x^2+3x+1)\sin x+(2x+3)\cos x+C$.

3. $x(t)=x_0e^{-kt}$, где $x_0=x(0)$, $k\in\mathbb{R}_+$. **3.** а) $2e^{-\frac{x}{2}}(2x^2+11x+21)+C$; б) $\frac{9}{2}(x-2)\sin\frac{2x}{3}-\frac{3}{2}(x^2-4x+\frac{1}{2})\cos\frac{2x}{3}+C$; в) $\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; г) $\ln x-\frac{\arcsin x}{x}-\ln(1+\sqrt{1-x^2})+C$; д) $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$; е) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$. **C₁. 6.** а) $x\ln(2x+5)-x+\frac{5}{2}\ln(2x+5)+C$; б) $3(1-2x)\sin\frac{x}{3}-18\cos\frac{x}{3}+C$; в) $(x^2+x)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}+C$; г) $\frac{x^3}{3}(\ln^3 x-\ln^2 x+\frac{2}{3}\ln x-\frac{2}{9})+C$; д) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$; е) $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)}+C$. **7.** а) $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+6(x-2)\sin\sqrt{x}+C$; б) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$; в) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C$; г) $x\cdot\arcsin^2 x+2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x-2x+C$; д) $2e^t(t^3-3t^2+6t-6)+C$, где $t=\sqrt{x}$; е) $\frac{1}{3}e^t(t^2-2t+2)+C$, где $t=x^3$; ж) $\frac{1}{8}(t^4-1)\operatorname{atctg}t-\frac{1}{8}(\frac{t^3}{3}-t)+C$, где $t=x^2$; з) $(t^2+1)\operatorname{arctg}^2 t-2t\operatorname{arctg}t+\ln(1+t^2)+C$, где $t=\sqrt{x}$; и) $\frac{4}{5}te^t(\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t)-\frac{2}{25}e^t(4\sin 2t-3\cos 2t)+C$, где $t=\sqrt{x}$.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль. **A₁. 2.** а) $F(x)=-\frac{1}{6}(3+2x)^{-3}+C$; б) $F(x)=-\frac{10}{3}\sqrt{7-3x}+C$; в) $F(x)=-10\cos\frac{x}{5}+\frac{1}{2}\sin 6x+C$; г) $F(x)=-\frac{4}{x+3}-\frac{7}{3}\operatorname{ctg}3x+C$. **3.** а) $F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+C$; б) $F(x)=\frac{5}{3}\ln|3x+2|+C$; в) $F(x)=-\ln|3-x|+C$; г) $F(x)=\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x+C$; д) $F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x}+7x+C$; е) $F(x)=\frac{5^x}{\ln 5}-2\sin x+C$; ж) $F(x)=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x+C$; з) $F(x)=\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x+C$; и) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+\ln|1-x|+C$; к) $F(x)=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt{x}-12\sqrt[3]{x}+\frac{5}{9}x\cdot\sqrt[5]{x^4}+C$; л) $F(x)=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x}}-e^x+3\ln|x|+C$. **4.** $-\frac{1}{2x^2}+5$. **5.** $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+1$. **B₁. 6.** а) $F(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C$; б) $F(x)=3\ln|\ln x|+C$. **7.** а) $F(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$; б) $F(x)=-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$; в) $F(x)=-x^2\cdot\cos x+2x\cdot\sin x+2\cos x+C$; г) $F(x)=\frac{x^2}{2}\arccos x-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x+C$; д) $F(x)=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$; е) $F(x)=-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C$. **8.** $y=\frac{x^2}{2}+C$, $y=\frac{x^2}{2}$. **9.** $y(t)=y_0\cdot e^{kt}$, $k>0$. **C₁. 11.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^4}{4}+x-1$. **12.** $y^2=Cx$. **13.** Используйте свойство Дарбу.

Итоговый тест

Реальный профиль. **2.** $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$. **3.** а) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$; б) $\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C$. **4.** $-\frac{1}{17}$, $\frac{4}{17}$. **5.** $\left(8R+\frac{16}{3}a\right)$м; $\left(R+\frac{a}{4}\right)$м/с^2. $a, R\in\mathbb{R}_+$.

Модуль 2. Определенный интеграл

§1. ***Реальный профиль.*** **A₁.** **1.** а) 1; б) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $-\frac{7}{6}$; д) $\frac{14}{3}$; е) 1; ж) $\frac{4}{7}$; з) $-\frac{9}{2}$; и) $\frac{4}{3}$; к) 3. **2.** а) 4; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{12}$; г) –9; д) –2; е) –12. **3.** а) 2; б) ln3; в) $2+3\ln 2$; г) $1-2\ln 2$; д) $\frac{1}{4}(6-\ln 3)$; е) $-\frac{9}{2}+8\ln 2$; ж) $\frac{5}{6}-\ln 2$; з) ln2; и) $\ln\frac{3}{8}$; к) $1-\ln 3$. **4.** а) 1; б) $e-e^{-1}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{1}{2\ln 2}$; д) $\frac{15}{2\ln 3}$; е) 1; ж) $-\frac{2}{3}$; з) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; и) 1; к) 3; л) $\frac{9}{2}$; м) $\frac{2}{3}$; н) π; о) 0; п) $\frac{1}{8}$; р) $\pi-2$. **5.** а) $3\frac{3}{4}$; б) $5\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{2\ln 2}$. **6.** а) 72 м^2; б) 10,8 кг; в) 270 леев. **B₁.** **7.** а) $-3\frac{3}{4}$; б) $12\frac{2}{3}$; в) 2; г) $\frac{28}{15}$; д) $\frac{5}{4}$; е) $-\frac{5}{64}$; ж) 4; з) $\frac{1}{5}$; и) $\frac{1}{2}$; к) $\frac{1}{5}$; л) ln7; м) 2; н) $\frac{\pi^2}{18}$; о) $\frac{\pi^2}{72}$; п) $\frac{1}{2}$; р) $\frac{\pi}{2}$; с) $\frac{\pi}{48}$; т) $\frac{\pi}{3}$; у) $\frac{\pi}{6}$; ф) ln2; х) $\frac{1}{2}\ln 3$; ц) $\frac{\pi}{6}$; ч) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 3$; ш) $\frac{2}{3}\ln 2$; щ) $\frac{\pi}{4}$; э) $\frac{1}{2}\ln 3$. **8.** а) $\ln\frac{3}{2}$; б) $\frac{8}{3}-\ln 3$; в) 0; г) $\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$; д) $2(1-\ln 3)$; е) $\frac{3\pi}{2}+2+2\ln 2$; ж) $1-\ln 2$; з) $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{3}\ln 2$. **9.** а) $2\sqrt{2}$; б) $11\frac{1}{4}$; в) $2\frac{3}{4}$. **10.** а) $\frac{3\,175}{33}\approx 96{,}2$ м^2; б) 10 583 м^3; в) 52 916 леев.

C₁. **11.** а) $\ln b-\ln a$; б) $\cos a-\cos b$; в) e^b-e^a.

§2. ***Реальный профиль.*** **A₁.** **1.** а) $11\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{2}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) 24; д) $\frac{2}{3}$; е) $\frac{4}{9}$; ж) $\frac{13}{8}$; з) $35\frac{1}{2}$. **2.** а) $\frac{3}{2}-\ln 2$; б) 20,1; в) $9\frac{5}{6}+\ln 2$; г) 2; д) $\frac{4}{3}$; е) $\frac{1}{5}$; ж) $\frac{68}{3}$; з) $58\frac{2}{3}$; и) 12; к) $\frac{68}{81}$; л) e^3-2e^2+1; м) $\frac{1}{2}(e^2-4-e^{-2})$; н) $\frac{2}{3}(e-e^{-1})$; о) $(e^2-e^{-2})^2$; п) $\frac{1}{2}(e^2-2e+3)$; р) $6\frac{1}{2}$; с) $\frac{5}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 2}$; т) 1. **3.** а) $-1+\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** а) 2 м; б) 4 см; в) 14 см; г) $\frac{16}{75}$ м$^2 = 2\,133\frac{1}{3}$ см^2. **B₁.** **5.** а) $\frac{35}{6}$; б) 4; в) $\frac{19}{3}$; г) $-\frac{5}{12}$; д) 3; е) 30; ж) 5; з) $2+\pi$; и) 4; к) $-1+\ln\frac{1+e^2}{2\sqrt{2}}$; л) 1; м) 3. **6.** а) 1; б) $\frac{5}{2}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 4; е) $8\frac{1}{6}$; ж) $\frac{1}{2}$; з) 5; и) 8; к) $\frac{7}{2}$; л) $\frac{11}{4}$; м) $-1+6\ln\frac{3}{2}$; н) 2; о) $\frac{2}{e}(e-1)^2$; п) $\frac{4}{3\ln 3}$; р) $3-\frac{2}{\ln 2}$; с) $\frac{19}{6}$. **7.** а) +; б) –; в) +; г) –. **8.** а) $I_1>I_2$; б) $I_1<I_2$; в) $I_1<I_2$. **9.** а) $-\frac{2}{\pi}(1+\pi)$; б) $\frac{9}{8\ln 2}$. **10.** а) $f(t)=t^2-14t+124$; б) 111 леев и 100 леев; в) июль; г) 75 леев. **11.** а) $\sqrt[3]{10}$; б) π; в) $\pm\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{1+\sqrt{28}}{3}$. **C₁.** **12.** 3.

§3. ***Реальный профиль.*** **A₁.** **1.** а) –2; б) 1; в) -2π; г) $\frac{1}{9}(2e^3+1)$; д) $\frac{4}{3}\left(8\ln 2-\frac{7}{3}\right)$; е) $1-\frac{2}{e}$; ж) $-\frac{1}{2}$; з) $-\frac{2}{e}$; и) $-\frac{5}{4}-e^3$; к) $2(3+4\pi)$; л) $-1+2\ln 2$; м) $2-\log_2 e$; н) –1; о) $(2-\log_2 e)\log_2 e$. **2.** а) $2\frac{2}{5}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2}\ln 3$; г) $2\frac{8}{15}$; д) $\frac{1}{3\ln 2}$; е) $\frac{9}{14}$; ж) 4; з) $3\sqrt{3}$. **B₁.** **3.** а) $-4+22\ln 2$; б) $1+2\ln 2$; в) $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$; г) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$; д) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; ж) $-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; з) e^3; и) $1-5e^{-2}$; к) $-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$; л) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{e^2}\right)$; м) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{7\pi}{36}\right)$; н) $-2(3+e)$; о) $\frac{2}{e}(3e-8)$; п) $-1-\frac{5}{8}e$; р) $-\frac{8}{\pi}\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)$; с) $\frac{1}{8}(\pi^2-2\pi-4)$; т) $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; у) e^2; ф) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$. **4.** а) $x=t^2$, $2(2-\ln 2)$; б) $x=t^3$, $\frac{5}{2}-3\ln 2$; в) $x=t^6$, $4\left(5+12\ln\frac{3}{4}\right)$; г) $t=\sqrt{2-x}$, $\frac{142}{105}$; д) $t=\sqrt[3]{1-2x}$, $\frac{3}{14}$; е) $t=x^3$, $\frac{\pi}{12}$; ж) $t=1+x^3$, $\frac{52}{9}$; з) $t=1+3x^5$, $\frac{116}{675}$; и) $t=\cos x$, $\frac{1}{4}$; к) $t=\sin x$, $\frac{7}{3}$; л) $t=\sin x$, $\frac{8}{15}$; м) $t=\cos x$, $\frac{2}{35}$; н) $t=\sin^2 x$, $\frac{1}{24}$; о) $t=\ln x$, $\frac{3}{8}$; п) $t=\ln(\ln x)$, $-\ln 2$; р) $t=\sin x+\cos x$, $\frac{1}{2}\ln 2$; с) $t=\sin x+\cos$, $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; т) $t=\sin x$, $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** а) $2-\frac{\pi}{2}$; б) $2+\ln\frac{3}{2}$; в) $4\sqrt{2}+6$; г) $\ln\frac{3}{2}$; д) $\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{16}$; е) $\frac{\pi}{16}$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$; з) $\ln\frac{2e}{e+1}$. **6.** а) 800 м и 42,6 м; б) 32 м; в) $\frac{192}{39}$ кв.ед., $\approx 49\,230$ м^2; г) 147 692 м^3.

C₁. **9.** $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ – точка локального минимума.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль. **A₁.** **1.** а) $-\frac{33}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 7; г) $-58\frac{1}{3}$; д) 8; е) $21\frac{1}{3}$; ж) 2; з) $\frac{1}{3}(9-4\sqrt{3})$. **2.** а) $\frac{3}{2}$; б) $4\frac{2}{3}$; в) 2. **3.** $\frac{1+\sqrt{61}}{2}$, 3000 м^2, 34 м. **B₁.** **4.** а) $-6\frac{2}{3}$; б) –27; в) $2\left(\ln 2-\frac{26}{81}\right)$; г) 65; д) $2\sqrt{3}-\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{8}(7-2\sqrt{3})$; ж) $-\frac{506}{375}$; з) $\frac{51}{10}$;

и) $\frac{182}{33}$; к) $\frac{1}{3}$; л) $-\frac{1}{9}(2e^3+1)$; м) $\frac{1}{16}(3e^4+1)$; н) $\frac{1}{2}e^2$; о) $-\frac{4}{\pi^2}$; п) $\frac{13}{3}$; р) 5; с) $\frac{4}{3}$. **5.** а) $6\frac{11}{12}$; б) $\frac{\pi}{8}+\ln(2+\sqrt{3})$. **6.** а) $10\frac{2}{3}$ м^2; б) 96 м^3. **7.** а) 2 м, 3 м, 5 м; б) $8\frac{2}{15}$ м^2; в) 109,8 м^2; г) 54 900 леев. **C$_1$.** **10.** $3-e$.

Итоговый тест

Реальный профиль. **1.** $\left.\left(\frac{x^4}{4}-\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\right|_0^1=\frac{3}{4}$. **2.** И. **3.** а) -3; б) $-\frac{13}{2}+2\ln 2$. **4.** а) $\frac{1}{4}$; б) $1-\frac{1}{2}e^2$. **5.** а) $\frac{48}{5}$; б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **6.** а) $107\frac{49}{93}$ м$^2\approx 107{,}5$ м^2; б) 160 м^3 – 215 м^3.

Модуль 3. Приложения определенного интеграла

§1. ***Реальный профиль.*** **A$_1$.** **1.** а) $\frac{10}{3}$; б) $\frac{\pi^2}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1; д) $3(e^\pi-1)$; е) 7; ж) $\frac{4}{3}$. **2.** а) $\frac{256}{3}$; б) $\frac{32}{5}$; в) $\frac{64}{3}$; г) $\frac{125}{6}$; д) $\frac{1}{2}(e^2+2e^{-1}-3)$; е) 1. **3.** $a=\sqrt{17}-3$. **4.** 14. **B$_1$.** **6.** $e-2$. **8.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\ln 2$; в) $\frac{8}{\ln 3}-2$. **9.** *Указание*. Если $0<a\le 1$, то площади полученных частей равны $2\left(a^2-\frac{a^3}{3}\right)$ и $2\left(a^2+\frac{a^3}{3}\right)$, и эти площади не могут быть одинаковы. Если $a>1$, то площадь части квадрата, расположенной над осью Ox, численно равна $2\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$, а площадь другой части равна $4a^2-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. И опять эти площади не равны. **10.** в) ≈ 713 м$^2=7{,}13$ а; г) $\approx 213{,}9$ тыс. леев. **11.** $2\sqrt{2}$ дм². **12.** 2. **13.** $a=3$. **14.** $8-6e^{-\frac{1}{2}}-2e^{\frac{1}{2}}$. **15.** $m=2-\sqrt[3]{4}$. *Указание*. Пусть $\mathscr{A}_1$ – площадь подграфика функции f, а $\mathscr{A}_2$ – площадь множества, ограниченного кривыми $f(x)=2x-x^2$ и $y=mx$ $(0<m<2)$, $x\in[0,\,2-m]$. Необходимо, чтобы $\mathscr{A}_2=\frac{\mathscr{A}_1}{2}$. **17.** $\mathscr{A}_1=\frac{12\sqrt{6}-8}{3}$, $\mathscr{A}_2=\frac{35-12\sqrt{6}}{3}$. **C$_1$.** **17.** а) $\left(\frac{e^2+1}{2(e^2-1)},\ \frac{e^2+1}{4}\right)$; б) $\left(1,\ \frac{\pi}{8}\right)$; в) $\left(-\frac{5}{4},\ \frac{11}{10}\right)$. **19.** ln2.

§2. ***Реальный профиль.*** **A$_1$.** **1.** а) $\frac{\pi^2}{4}$; б) $\frac{\pi}{10}$; в) π; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$; е) $\frac{17\pi}{6}+4$; ж) $\frac{\pi}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$; з) $\frac{92\pi}{5}$; и) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-8})$; к) $\frac{\pi}{3}$. **2.** *Указание*. Обозначьте $n\cdot\arccos x=t\Rightarrow x=\cos\frac{t}{n}$. Тогда $\mathscr{V}=\pi\left(1+\frac{1}{1-4n^2}\right)$. Так как $\mathscr{V}=\frac{2\pi}{3}$, то $n=1$. **3.** а) $\frac{\pi^2}{2}$; б) $\frac{28\pi}{15}$; в) $\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$. **B$_1$.** **4.** г) $\frac{148}{3}\pi$. **5.** $\mathscr{V}=\pi a^2\left(\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}\right)$. **6.** $\mathscr{V}=\frac{\pi}{27}(5e^3-2)$. *Указание*. Вычислите интеграл $\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$ методом интегрирования по частям. **C$_1$.** **7.** б) $\frac{\pi}{2}(2+4e^{-1}-3e^{-2}-e^{-4})$; в) $1+e^e-e$. **8.** б) $2e-1$; в) $\frac{\pi}{2}(3e^2-2e-1)$.

Упражнения и задачи на повторение

Реальный профиль. **A$_1$.** **1.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 1; е) $\frac{1}{2}\ln 3$; ж) $\frac{1}{2}$; з) 1. **3.** а) 2; б) e^2-3; в) $\log_2 e-\frac{1}{3}$. **5.** в) $\frac{8}{3}$. **B$_1$.** **7.** а) $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $a=\frac{9}{2}$. **8.** $m=\frac{7}{6}$. **9.** 10,25 а; 307,5 тыс. леев. **10.** $a=1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. **11.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}(2+\pi)$; в) 3π; г) $\frac{38\pi}{15}$. **12.** $\left(e-2,\ \frac{e^2-1}{8}\right)$. **13.** $2\frac{1}{4}$. **14.** $a=4$. **15.** 0,75. **16.** 4,5. **17.** $59\frac{1}{3}$ у. е. **18.** $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\right\}$. **19.** $V=\pi(7{,}5-8\ln 2)$. **20.** $(4+\pi^2)$. **C$_1$.** **22.** $a=\frac{2}{3}$. **23.** $\mathscr{A}(\lambda)=1-(1+\lambda)e^{-\lambda}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathscr{A}(\lambda)=1$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** $\pi\left(\frac{a^2}{2}\pi+4ab+\pi b^2\right)$.

Итоговый тест

Реальный профиль. **2.** а) $4\sqrt{3}$; б) $\frac{32}{3}$. **3.** $n=1$. **4.** а) $\frac{\pi^2}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **5.** $\approx 1{,}717\,\pi$.

Модуль 4. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

§1. ***Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.*** **A.** **3.** а) Выражение A_3^6 не имеет смысла. **4.** а) 5; б) 25 200; в) $\frac{7}{144}$; г) 336; д) 576; е) 12; ж) не имеет смысла. **B.** **7.** 16 подмножеств. **9.** 12 650 способов. **10.** 4 368 способов. **11.** 306 партий. **12.** 20 способов. **13.** 40 320 способов. **14.** 210 способов. **15.** а) 720 «слов». **16.** 5 040 способов. **17.** 56 способов. **18.** 8 008 способов. **C.** **19.** а) 210 способов; б) 301 способ.

Реальный профиль. $\mathbf{A_1}$. **2.** а) 5 544; б) 45 035; в) $40\frac{5}{6}$. **3.** а) $S=\{4\}$; б) $S=\{25\}$; в) $S=\{6\}$. **4.** а) $S=\{3, 4, 5, 6\}$; б) $S=\{2, 3, 4\}$; в) $S=\{4, 5, 6, 7\}$. **5.** а) 180; б) 10 160 640; в) 4 651 520; г) 6721; д) $\frac{27}{67320}$. **7.** а) $S=\{2\}$; б) $S=\{4\}$; в) $S=\{6, 11\}$; г) $S=\{2\}$. $\mathbf{B_1}$. **9.** а) $S=\{5\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{2\}$. **10.** а) $n\in[6, +\infty)$, $n\in\mathbb{N}$; б) $n\in[1, 4]$, $n\in\mathbb{N}$; в) $n\in[0, 9]$, $n\in\mathbb{N}$. **11.** а) $x=6$, $y\in[0, 10]$, $y\in\mathbb{N}$; б) $x=12$, $y\in[0, 12]$, $y\in\mathbb{N}$; в) $S=\varnothing$. **12.** 12 способов. **13.** $C_4^2=6$. **16.** $C_8^6\cdot A_9^6=1\,693\,440$ (способов). **17.** $C_2^1\cdot C_{23}^{10}=2\,288\,132$ (способов). **18.** $C_7^3\cdot C_9^3=2\,940$ (способов). **19.** *Указание.* Примените алгоритм решения задачи 7 из раздела 1.5.2. **20.** $C_{10}^3\cdot C_6^2$ способов. **21.** $(C_3^1\cdot C_{10}^4+C_3^2\cdot C_{10}^3)$ способов. **22.** а) $S=\{x\,|\,x\in(4, +\infty),\ x\in\mathbb{N}\}$; б) $S=\{3, 4, 5\}$; в) $x\in[4, 13]$, $n\in\mathbb{N}$; г) $x\in[6, 11]$, $n\in\mathbb{N}$. **23.** $A_5^5-A_4^4=96$ пятизначных чисел с различными цифрами; $A_5^4-A_4^3=96$ четырехзначных чисел с различными цифрами; $A_5^3-A_4^2=48$ трехзначных чисел с различными цифрами; $A_5^2-A_4^1=16$ двузначных чисел с различными цифрами; 5 однозначных чисел. Всего 261 число. **24.** $(n-2)\cdot 2^{n-1}+1$.

§2. ***Реальный профиль.*** $\mathbf{A_1}$. **1.** б) $6561a^8+17496a^7b+20412a^6b^2+13608a^5b^3+5670a^4b^4+1\,512a^3b^5+252a^2b^6+24ab^7+b^8$; в) $a^3+6a^2\sqrt{ab}+15a^2b+20ab\sqrt{ab}+15ab^2+6b^2\sqrt{ab}+b^3$. **2.** б) $a\cdot\sqrt[3]{a^2}-5ab\cdot\sqrt[3]{a}+10ab^2-10b^3\cdot\sqrt[3]{a^2}+5b^4\cdot\sqrt[3]{a}-b^5$; в) $\frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x}}-\frac{7}{x^3\cdot\sqrt{y}}+\frac{21}{x^2y\cdot\sqrt{x}}-\frac{35}{x^2y\cdot\sqrt{y}}+\frac{35}{xy^2\cdot\sqrt{x}}-\frac{21}{xy^2\cdot\sqrt{y}}+\frac{7}{y^3\cdot\sqrt{y}}-\frac{1}{y^3\cdot\sqrt{y}}$. **3.** а) $T_5=39191040x^6$; б) $T_7=5376xy^3\cdot\sqrt{x}$; в) $T_{10}=-4330260a^2b^9$. **4.** а) 2^{25}; б) 2^{108}; в) 2^{215}; г) 2^{71}. $\mathbf{B_1}$. **6.** а) 2^{14}; б) 2^{24}; в) 2^{27}; г) 2^{31}. **7.** *Указание.* Примените метод математической индукции и бином Ньютона. **8.** а) $T_5=29120x^{10}$; б) $T_9=329\,472\,x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot a^4$; в) $T_7=593775$. **9.** а) $T_9=3294720x^{16}y^{32}$; в) $T_8=-3\,432x^{21}y^{14}$. **10.** а) $T_{13}=5200300x^{13}y^{36}$, $T_{14}=-5200300x^{12}y^{39}$; б) $T_7=1716a^3b^3\cdot\sqrt{a}$, $T_8=1716a^3b^3\cdot\sqrt{b}$. **12.** $T_3=612a^{14}$. **14.** $n=11$. **15.** 10^{-4} и 10. **16.** $T_4=-\frac{5xy\sqrt{x}}{54}$. **17.** а) *Указание.* В формуле бинома Ньютона замените x^2 и y^2 на 1; б) *Указание.* В формуле бинома Ньютона замените x и y^3 на 1. **18.** а) $T_{15}=3876000$. **19.** $T_6=56x^{-\frac{1}{4}}$. **20.** $n=8$. **21.** $T_7=924x^9$. **22.** 3360. **23.** $T_5=70a^3$.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **А.** **1.** а) 15; б) $19\frac{1}{6}$; в) 1; г) 100. **2.** а) $\frac{1}{2}$; б) 15; в) 576; г) 800. **3.** 552 фотографий. **4.** 91 партия. **5.** 27 907 200 способов. **6.** 479 001 600 способов. **7.** а) 1 680 способов; б) $4\cdot A_7^3=840$ способов. **8.** 20160 способов. **9.** 40320 способов. **В.** **10.** а) $C_{12}^5\cdot C_3^1=2\,376$ (способов); б) 2376 способов; в) 792 способа; г) 5 544 способа. **С.** **12.** $P(A)=\frac{2}{15}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(C)=\frac{7}{15}$.

Реальный профиль. $\mathbf{A_1}$. **1.** 7 элементов. **2.** а) 5040 способов; б) $(n-1)!$. **3.** $9\cdot 9!$ чисел. **4.** *Указание.* $C_{10}^4\cdot C_5^2+C_{10}^3\cdot C_5^3+$ $+C_{10}^2\cdot C_5^4+C_{10}^1\cdot C_5^5$. **5.** 261 число. **6.** а) $S=\{8\}$; б) $S=\{7\}$; в) $S=\{8\}$; г) $S=\{2\}$. $\mathbf{B_1}$. **15.** а) $S=\{6, 7, 8, \ldots\}$; б) $S=\{0, 1, 2, 3, \ldots, 16\}$; в) $S=\{8, 9, 10\}$. **16.** а) $n=8$; б) $n=9$; в) $n=12$; г) $n=7$. **17.** $T_7=54\,264$. **18.** $x=27$. **19.** $T_4=2300a^{10}$. **20.** а) Одно рациональное число; б) 17 рациональных членов. **22.** *Указание.* Примените метод математической индукции. $\mathbf{C_1}$. **37.** $S=\{(2; 1)\}$. **38.** *Указание.* Примените метод математической индукции.

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **2.** 12 650 способов. **4.** а) 5 005 способов; б) 9 009 способов.
Реальный профиль. **1.** а) И; б) 32. **2.** $S=\{2\}$. **3.** 3 118 752 способа. **4.** $S=\{4, 5, 6, 7, \ldots, 49\}$. **5.** $n=20$.

Модуль 5. Элементы теории вероятностей

§1. ***Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.*** **А.** **1.** Да. **2.** 0,1. **В.** **3.** 5 белых, 20 черных. **4.** $\frac{1}{9}$. **5.** $\frac{1}{4}$. **С.** **6.** а) $P(A)=\frac{1}{56}$; б) $P(B)=\frac{11}{56}$; в) $P(C)=\frac{15}{56}$; г) $P(D)=\frac{45}{56}$. **7.** а) $P(A)=\frac{1}{24}$; б) $P(B)=\frac{1}{4}$; в) $P(C)=\frac{1}{12}$. **8.** 0,6.

Реальный профиль. $\mathbf{A_1}$. **1.** B_1 и B_2; B_2 и B_3; A_1 и B_1. **2.** а) $P(A)=\frac{1}{2}$; б) $P(B)=\frac{2}{5}$; в) $P(C)=\frac{4}{5}$. $\mathbf{B_1}$. **3.** $\frac{3}{7}$. **4.** а) $P(A)=\frac{C_8^2\cdot C_{88}^{10}}{C_{96}^{12}}$; б) $P(B)=\frac{C_{96}^{12}-(C_8^0C_{88}^{12}+C_8^1C_{88}^{11}+C_8^2C_{88}^{10})}{C_{96}^{12}}$. **5.** $\approx 0{,}0167$. $\mathbf{C_1}$. **6.** а) $P(A_1)=\frac{1}{9}$; б) $P(A_2)=\frac{5}{18}$; в) $P(A_3)=\frac{1}{3}$. **7.** 0,2.

§2. ***Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.*** **А.** **2.** $\frac{1}{4}$. **3.** Сумма в 7 очков. **В.** **4.** $\frac{2}{5}$. **5.** 0,31. **6.** 0,13. **С.** **7.** $B=A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$; $C=B\cup A_1\cap A_2\cap A_3$; $D=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup$ $\cup\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup B$. **8.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$.

***Реальный профиль.* A₁.** **1.** Элементарными событиями являются упорядоченные пары: $E = \{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$; а) $A = \{33, 34, 43\}$; б) $B = \{13, 23, 31, 32, 33\}$. **2.** а) 0,5; б) 0,6; в) 0,7; г) 0,1; д) 0,9; е) 0,8. **B₁.** **3.** 0,33. **4.** $\frac{163}{165}$. *Указание*. Примените формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A})$, где {извлечены шары по крайней мере двух цветов}, $\overline{A}$ = {извлечены шары одного цвета}. **6.** 12 девочек. **7.** $\frac{1}{10}$. **C₁.** **8.** $\frac{7}{9}$. **9.** $\frac{3}{7}$. **10.** а) $\frac{91}{216}$.

***§ 3. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A.** **2.** 0,95. **B.** **3.** A и B. **C.** **4.** *Указание*. Примените определение независимости двух случайных событий; заметьте, что $A \cap B$ = {выпадает не менее 4 пунктов}. **5.** События независимые.

***Реальный профиль.* A₁.** **2.** а) $\frac{8}{81}$; б) $\frac{17}{81}$. **B₁.** **3.** а) 0,243; б) 0,972. **4.** Зависимые. **C₁.** **5.** 0,52. **6.** а) $\frac{21}{32}$; б) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$.

***§ 4. Реальный профиль.* A₁.** **1.**

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$M(\xi) = 7$.

2.

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

$M(\xi) = 1{,}875$. **B₁.** **3.** $P(\xi = i) = \frac{1}{5}$, $i = \overline{1, 5}$; $M(\xi) = 3$.

4.

ξ	0	1	2	3	4
P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

$M(\xi) = 0{,}9375$.

Указание. $P(\xi = 0) = P$ (первый светофор запрещает дальнейшее движение) $= \frac{1}{2}$; если $1 \le i \le 4$, то $P(\xi = i) = P(A \cap B)$, где A и B – независимые случайные события: A = {первые i светофоров разрешают дальнейшее движение}, B = {i + 1-й светофор запрещает дальнейшее движение}; $\{\xi = 5\}$ = {все светофоры разрешают движение}.

C₁. **6.**

ξ	–3	–1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$M(\xi) = 0$.

Упражнения и задачи на повторение

***Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A.** **1.** а) Совместные: A_1 и A_3; A_1 и A_4; A_2 и A_4; несовместные: A_2 и A_3; $\overline{A}_3$ и A_4; б) $A_2 \cap A_3 = \varnothing$ – невозможные; $A_3 \cap A_4$ = {извлечены 1 черный и 3 красных шара}. **2.** а) $P(A) = \frac{5}{12}$; б) $P(B) = \frac{1}{6}$. **B.** **3.** 0,2. **4.** События зависимы. **5.** $P = \frac{2}{5}$. **6.** $P = \frac{36}{125}$. **C.** **7.** Вероятность, что среди k пассажиров, выбранных наудачу, находится хотя бы один преступник, меньше, чем 0,5, при $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; при $k = 6$ эта вероятность больше, чем 0,5. **8.** $\frac{91}{350}$. **9.** $P(A) = \frac{8}{15}$, $P(B) = \frac{1}{15}$.

***Реальный профиль.* A₁.** **1.** а) Совместные, зависимые; б) несовместные, зависимые; в) совместные. **2.** 0,3. **B₁.** **3.** $P(A) = \frac{9}{14}$, $P(B) = \frac{5}{14}$. **4.** $2\frac{1}{3}$. **5.** а) $P(A) \approx 0{,}273$; б) $P(B) \approx 0{,}085$; в) $P(C) \approx 0{,}064$. *Указание*. Примените схему: из урны, содержащей 3 шара с номерами 1, 2, 3, извлекается шар 9 раз, при этом вынутый шар возвращается в урну. **6.** $P = \frac{89}{495}$. **7.** $P = \frac{6}{11}$. **8.** $P = \frac{5}{648}$. **C₁.** **9.** 0,995. *Указание*. Введите случайные события: A_1 = {первый станок не потребует внимания мастера}; A_2 = {второй станок не потребует внимания мастера}. Объединение $A_1 \cup A_2$ состоит в том, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера. В задаче требуется вычислить вероятность $P(A_1 \cup A_2)$ по соответствующей формуле. **10.** 0,38.

11. а)

ξ	12	0	–5	–6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

$M(\xi) = -\frac{11}{6}$. *Указание*. Возможные значения ξ – это возможные значения «чистого» выигрыша $12 (= 18 - 6)$, $0 (= 6 - 6)$, $-5 (= 1 - 6)$, $-6 (= 0 - 6)$.

б) $\frac{2}{6}$. *Указание*. Две партии можно сыграть, если выпадает 6 очков или 5 очков.

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **2.** 0,8. **4.** $P(A) \approx 0{,}44$; $P(B) \approx 0{,}78$.

Реальный профиль. **1.** а) $P(A) = \frac{3}{5}$; $P(B) = \frac{1}{3}$. **2.** $P(A_1) \approx 0{,}05$; $P(A_2) \approx 0{,}46$; $P(A_3) \approx 0{,}04$. **3.** а) $P(A) = \frac{3}{10}$; б) $P(B) = \frac{6}{10}$; в) $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$. **4.**

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$M(\xi) = 2$.

Модуль 6. Элементы математической статистики и финансовой математики

§ 2. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* А.

1.

Интервалы (t)	Абсолютная частота (n_i)	Относительная частота (f_i)
[36,5; 36,6)	2	0,14
[36,6; 36,7)	4	0,28
[36,7; 36,8)	3	0,22
[36,8; 36,9)	3	0,22
[36,9; 37,0]	2	0,14
Всего	14	1,00

2. а) Множество квартир в жилом доме; месячное потребление электроэнергии одной квартирой;

б)

Границы интервала	Частота (n_i)
[0, 10)	4
[10, 20)	7
[20, 30)	6
[30, 40)	3
[40, 50)	4
[50, 60)	6
[60, 70)	4
[70, 80)	4
[80, 90)	6
[90, 100]	6
Всего	50

B. 3. а) Игроки (которые формируют команду);
б) Рост игроков.

4. 60.

C. 5.

Буква	Абсолютная частота (n_i)	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота (F_i)
а	21	0,28	0,28
е	16	0,21	0,49
и	17	0,23	0,72
о	3	0,04	0,76
у	10	0,13	0,89
т	8	0,11	1,00
Всего	75	1	

***Реальный профиль.* A₁. 1.** 6.

2. а) Часы на витрине; время, указанное часами;

б)

Границы интервала	Частота (n_i)
[0; 1)	5
[1; 2)	3
[2; 3)	6
[3; 4)	4
[4; 5)	6
[5; 6)	3
[6; 7)	4
[7; 8)	3
[8; 9)	3
[9; 10)	4
[10; 11)	5
[11; 12]	4
Всего	50

B₁. 3. а) Продукция консервной фабрики (банки); б) масса содержимого одной банки; непрерывный количественный признак; в) 16%.

4.

Возраст (лет)	Абсолютная частота (n_i)	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота (F_i)
[31; 39)	11	0,28	0,28
[39; 47)	15	0,38	0,66
[47; 55)	5	0,13	0,79
[55; 63)	7	0,18	0,97
[63; 71)	0	0,00	0,97
[71; 79]	1	0,03	1,00
Всего	39	1	

C₁. 5. а)

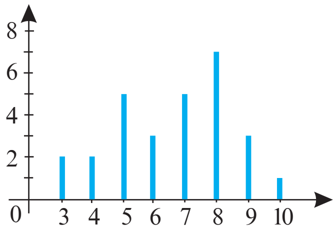
Масса (кг)	[2,0; 2,4)	[2,4; 2,8)	[2,8; 3,2)	[3,2; 3,6)	[3,6; 4,0)	[4,0; 4,4)	[4,4; 4,8)	[4,8; 5,2]	Всего
Новорожденные (n_i)	3	8	10	12	13	6	2	2	56
Накопленная абсолютная частота (F_i)	3	11	21	33	46	52	54	56	56
Относительная частота (f_i)	0,05	0,14	0,18	0,21	0,23	0,11	0,04	0,04	1
Накопленная относительная частота	0,05	0,19	0,37	0,58	0,81	0,92	0,96	1,00	1

б)

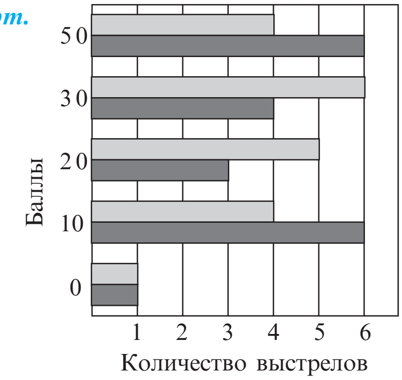
Масса (кг)	[2,0; 2,6)	[2,6; 3,2)	[3,2; 3,8)	[3,8; 4,4)	[4,4; 5,0)	[5,0; 5,6]	Всего
Новорожденные (n_i)	7	14	17	14	3	1	56

§ 3. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.*

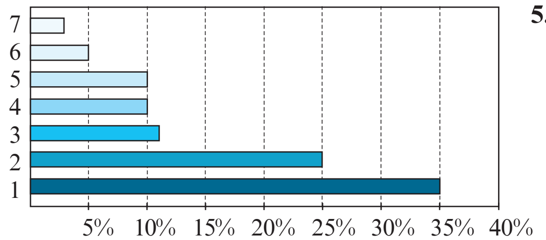
А. 1.



2.



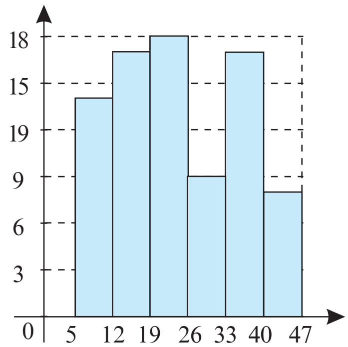
В. 4.



5. а)

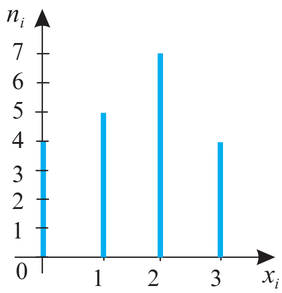
Границы интервала	Абсолютная частота (n_i)
[5; 12)	14
[12; 19)	17
[19; 26)	18
[26; 33)	9
[33; 40)	14
[40; 47]	8
Всего	80

б)

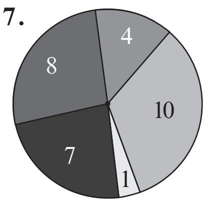


С. 6.

x_i	n_i	Накопленная абсолютная частота	Относительная частота (f_i)	Накопленная относительная частота
0	4	4	0,20	0,20
1	5	9	0,25	0,45
2	7	16	0,35	0,80
3	4	20	0,20	1,00



7.



8.

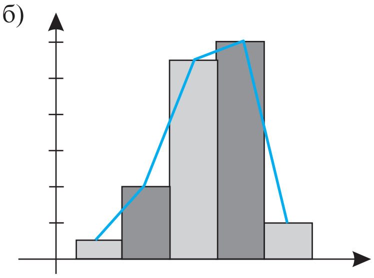
x_i	n_i
1	2
3	3
4	2
6	4
7	1
Всего	12

Реальный профиль. В₁.

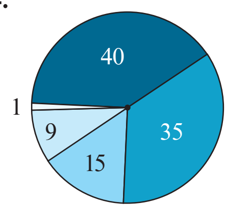
3. а)

Коэффициент (Δ)	Количество учеников (n_i)
[75; 85)	1
[85; 95)	4
[95; 105)	11
[105; 115)	12
[115; 125)	2
Всего	30

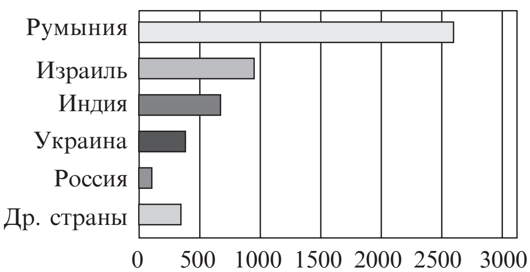
б)



4.

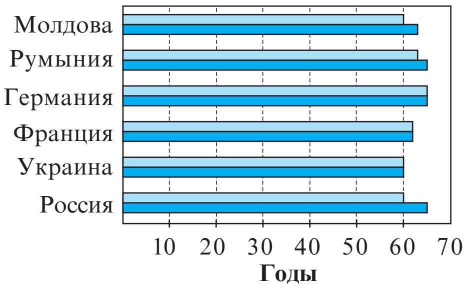


5. а)



б)

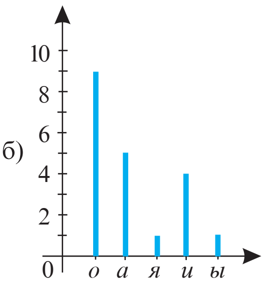
C₁. **7.**



8. а)

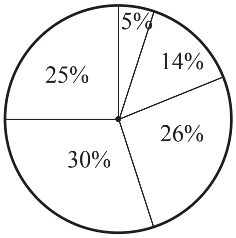
Буква	п	о	л	с	в	а	я	д	и	г	р	м	т	з	н	ь	ы	х	Всего
(n_i)	2	9	3	4	1	5	1	1	4	2	2	2	3	2	2	1	1	1	46
(f_i)	4,3	19,6	6,5	8,7	2,2	10,9	2,2	2,2	8,7	4,3	4,3	4,3	6,5	4,3	4,3	2,2	2,2	2,2	100

б)



Не единственный.

9. а)



б) $[0,\ 20)$ – 18% $\left(\dfrac{5\cdot 360^\circ}{100}=18^\circ\right)$;
$[20,\ 30)$ – 50,4%;
$[30,\ 40)$ – 93,6%;
$[40,\ 50)$ – 108%;
≥ 50 – 90%.

10.

Интервал Δ	Абсолютная частота (n_i)
[2; 5)	8
[5; 8)	4
[8; 11)	6
[11; 14]	2
Всего	20

§4. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **A.** **1.** $\bar{x}\approx 4{,}23$; $Me=4$; $Mo=1$, $Mo=5$ (ряд бимодальный). **2.** $\approx 160{,}06$ см. **B.** **3.** а) $\bar{x}=284$; б) пятница. **4.** $\bar{x}\approx 20{,}19$; $Me\approx 21{,}18$; $Mo=24$. **5.** По математике, так как $\bar{x}(M)>\bar{x}(F)$, $M_e(M)>M_e(F)$, $M_0(M)=M_0(F)$. **C.** **7.** а) $\bar{x}\approx 21{,}525$ см; $Me=21{,}5$ см; $Mo=21{,}5$ см; б) 51,67%.
Реальный профиль. **A₁.** **1.** $\bar{x}=57{,}6$; $Me\approx 61{,}15$; $Mo\approx 69{,}76$. **2.** б) $\bar{x}\approx 163{,}17$; $Me\approx 163{,}48$; $Mo\approx 164{,}10$. **3.** В данной ситуации необходимо сравнивать и другие средние значения статистического ряда. **B₁.** **4.** $\bar{x}\approx 18{,}68$; $Me\approx 18{,}82$; $Mo=18{,}5$. **5.** а) $\bar{x}\approx 56{,}55$; $Me\approx 53{,}5$; $Mo=35$; б) $\bar{x}\approx 57{,}67$; $Me\approx 54{,}54$; $Mo=43$. **6.** B – I, A – II, C – III.
C₁. **8.** а) $x_1=7{,}5$; $x_2=10{,}5$; $x_3=13{,}5$; $x_4=30{,}0$; $x_5=43{,}5$; $x_6=45{,}0$ (млн. км²); б) $\bar{x}=25{,}0$ (млн. км²); в) $Me=21{,}75$ (млн. км²). **9.** $\bar{x}=9865$, $M_e=9625$, $M_0=9050$. **10.** 1) 5,92 минуты. 2) 6 минут.
3) Средняя продолжительность меняется в зависимости от того, как сгруппированы интервалы.

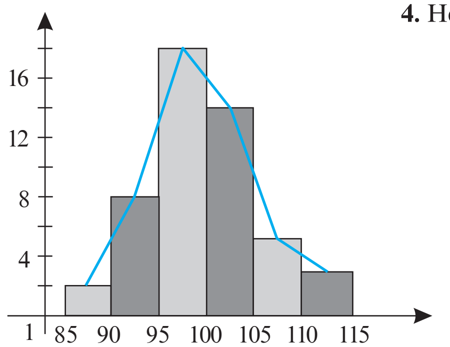
§5. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **A.** **1.** а) 13,33 %; б) 26400 д. е. **2.** 10 %. **3.** 2 250 леев. **B.** **4.** а) 1 180 леев; б) 1 192,52 лея; в) 1 196,79 лея. **5.** а) 5 152,05 лея; б) 5 173,7 лея. **6.** 3500,88 лея.
C. **7.** 1590,33 д. е. **8.** 1 250 д. е.
Реальный профиль. **A₁.** **1.** а) Увеличивается в 1,135 раза; б) увеличивается в 1,1232 раза; в) увеличивается в 1,127 раза. Вариант а). **2.** 167,55 д. е. **3.** а) 11 235 д. е.; б) 11 298,5 д. е. Вариант б). **B₁.** **4.** 2 430,64 д. е. **5.** а) 5%; б) 8,75%. **6.** а) 25 937 д. е.; б) 44 114 д. е. **C₁.** **7.** 2 000 д. е.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт

A. **1.** б), в). **2.** Елена Петрова – 1 701,0 лея, Анна Лукьян – 1 734,0 лея.

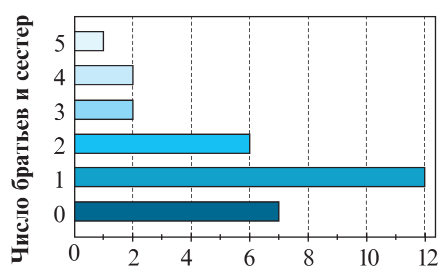
B. **3.** а)



б) $\bar{x}=99{,}6$; $Me\approx 99{,}3$; $Mo\approx 98{,}57$.

4. Не менее 24.

C. **5.** а) $\bar{x}\approx 14{,}3$; б) 2;
в)



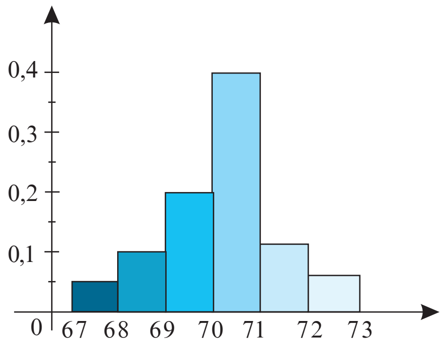
6. 73,92 %.

***Реальный профиль.* А$_1$.** **1.** 1,7 м. **3.** 15427,5 д. е.

В$_1$. 4. а)

Концентрация (%) (интервал)	x_i^*	Абсолютная частота (n_i)	Накопленная абсолютная частота	Относительная частота (f_i)
[67, 68)	67,5	3	3	0,05
[68, 69)	68,5	7	10	0,12
[69, 70)	69,5	13	23	0,22
[70, 71)	70,5	25	48	0,41
[71, 72)	71,5	8	56	0,13
[72, 73]	72,5	4	60	0,07
Всего		60		

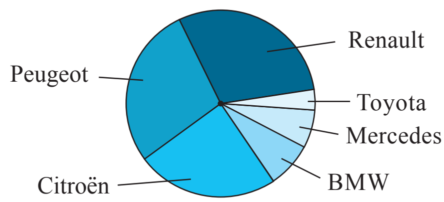
б)



в) $\overline{x} \approx 70{,}17$; $Me = 70{,}3$; $Mo \approx 70{,}41$.

5. а) Марка автомобиля – качественный статистический признак.

б)



6. Покупатель не прав.

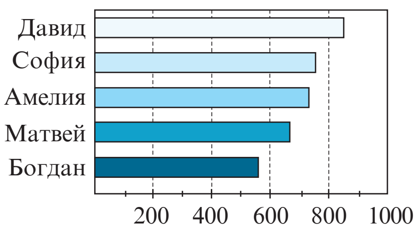
С$_1$. 7. а) $\overline{x} \approx 7{,}62$; $Me = 8{,}4$; $Mo = 9$; б) $\approx 31\%$.

8. а) $6{,}9 + 1{,}1 = 8$; б) $6{,}9 \cdot \frac{11}{10} = 7{,}59$.

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.

2.

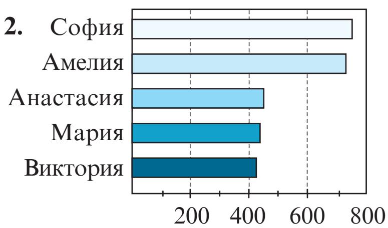


3. а) 8400 д. е.; б) 8354,4 д. е.

4. а) Время преодоления дистанции 100 м;
б) $\overline{X} \approx 9{,}9925$;
в) Усэйн Болт.

Реальный профиль. **1.** б) $Me = 4{,}375$; в) $Mo = 4{,}3125$.

2.



3. а) 29000 д. е.; б) 44114,35 д. е.

4. 15.

Модуль 7. Многогранники

§2. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* А. **1.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{2}$ см. **2.** $10(5+2\sqrt{119})$ см^2. **3.** 80 см^2. **4.** 90°, 60°, 30°. **В. 5.** а) $6\sqrt{6}$ см, 12 см; б) $180\sqrt{3}$ см^2. **6.** а) 12 см, $6\sqrt{5}$ см; б) $36\sqrt{3}$ см^2, 72 см^2; в) $108(2+\sqrt{3})$ см^2. **7.** а) $\sqrt{58}$ см; б) $2\sqrt{29}$ см. **8.** $[BA_1]$. **9.** $\approx 2{,}66$ кг. **10.** 22 см². **11.** а) $2\sqrt{53}$ см, $2\sqrt{29}$ см; б) $16(14+3\sqrt{3})$ см^2.

С. 12. а) $\arccos\frac{41}{50}$; б) $\arccos\frac{23}{50}$. **13.** а) $3\sqrt{43}$ см^2; б) $(48+9\sqrt{3}+3\sqrt{43})$ см^2.

14. а) 7 см; б) $\arcsin\frac{6}{7}$, $\arcsin\frac{2}{7}$, $\arcsin\frac{3}{7}$; в) arctg 3, arctg 2, arctg1,5.

Реальный профиль. **A₁.** **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $6\sqrt{2}$ см, 12 см. **4.** а) 680 см^2; б) $\dfrac{60}{\sqrt{97}}$ см. **B₁.** **5.** 15 рулонов. **6.** а) $ab(1+2\sin\alpha)$; б) $b\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\cos^2\alpha}$. **7.** а) 6 см; б) $\sqrt{39}$ см; в) $\sqrt{111}$ см; г) $12\sqrt{3}(2+\sqrt{13})$ см^2. **8.** а) 9 см; б) $3\sqrt{21}$ см. **9.** а) $\arccos\dfrac{h^2}{a^2+h^2}$; б) $\arccos\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+h^2}}$. **10.** а) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\dfrac{1}{4}$; в) 0; г) $\dfrac{1}{4}$; д) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; е) 0. **C₁.** **11.** а) $\arccos\dfrac{2h^2-a^2}{2(h^2+a^2)}$; б) $a=h\sqrt{2}$. **12.** 39 см. **13.** а) $\sqrt{2}d^2\sin 2\varphi$; б) $\dfrac{1}{2}d^2\sin 2\varphi$.

§ 3. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **A.** **1.** 15 см^2. **2.** а) 9 см; б) arctg 1,75. **3.** а) 5 см; б) $\sqrt{189{,}75}$ см; в) 6 см. **B.** **4.** 6,5 см. **5.** arctg 2. **C.** **7.** $9(4+\sqrt{7})$ см^2. **8.** а) 4 см; б) $96\sqrt{2}$ см^2.

Реальный профиль. **A₁.** **1.** $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **2.** а) $\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2-ab}$; б) $h(a+b)$; в) $\arccos\dfrac{\sqrt{ab}}{2h}$; г) $\dfrac{(a+b)\sqrt{ab}}{8}$.

B₁. **3.** $\dfrac{a}{4}\sqrt{a^2+b^2}$. **4.** 113 листов. **5.** г) $\dfrac{a}{2\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi}{n}}$, $\dfrac{na^2\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}}{4\cos\varphi}$. **6.** а) $VB=VC=\dfrac{a}{4}\sqrt{1+9\operatorname{tg}^2\alpha}$, $VA=\dfrac{3a}{4\cos\alpha}$; б) $\dfrac{a^2}{8}(6\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{9\operatorname{tg}^2\alpha-3})$; в) $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}$. **C₁.** **7.** а) $\dfrac{d_1\cdot d_2}{2\cos\varphi}$; б) $\dfrac{d_1d_2^2}{4\sqrt{d_1^2+d_2^2}}\operatorname{tg}\varphi$.

§ 4. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **A.** **1.** а) 432 см^2; б) $\sqrt{119}$ см; в) $9\sqrt{238}$ см^2. **2.** а) 84 см^2; б) $\sqrt{13}$ см; в) $12{,}25\sqrt{3}$ см^2. **B.** **3.** а) $\sqrt{150}$ см; б) $220\sqrt{5}$ см^2. **4.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $(15\sqrt{39}+17\sqrt{3})$ см^2. **C.** **5.** $\approx 1{,}6$ м.

Реальный профиль. **A₁.** **1.** а) $\dfrac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\operatorname{tg}\varphi$; б) $\dfrac{\sqrt{3}(b-a)}{6\cos\varphi}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4\cos\varphi}$. **B₁.** **2.** а) $\dfrac{a}{2}\sqrt{(b-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2}$; б) $\dfrac{b}{\sqrt{(b-a)^2\operatorname{tg}^2\varphi+b^2}}$; в) $\dfrac{b^2-a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **3.** 3,59 м. **C₁.** **4.** а) 120 см^2; б) $48(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ см^2.

§ 5. Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **A.** **1.** $\dfrac{512\sqrt{3}}{9}$ см^3. **2.** 64 см^3. **4.** а) $3\sqrt{38}$ см; б) 558 см^2; в) 810 см^3. **B.** **6.** а) $144{,}5\sqrt{3}$ см^2; б) $\dfrac{3\,893\sqrt{6}}{6}$ см^3. **7.** а) 39; б) $84\sqrt{3}$ см^3. **8.** 84. **9.** 94,7 м^3. **10.** $12\sqrt{2}$ см^2. **11.** 5 см. **C.** **13.** а) $36\sqrt{3}$ см^2; б) $18\sqrt{2}$ см^3. **14.** 8 см.

Реальный профиль. **A₁.** **1.** 3. **2.** $192\sqrt{6}$ см^3. **3.** $162\sqrt{5951}$ см^3. **4.** $144\sqrt{134}$ см^3. **B₁.** **6.** $12\sqrt{3}$ см^3. **7.** а) $6a^2\sin\alpha$; б) $2a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$. **8.** $36\sqrt{31}$ см^3. **9.** а) $\dfrac{140\sqrt{2}}{3}$ см^2; б) $\dfrac{700\sqrt{3}}{27}$ см^3. **10.** 216 мин. **11.** $8\sqrt{7}$ см^3. **12.** а) $16\sqrt{39}$ см^2; б) $\dfrac{128\sqrt{3}}{3}$ см^3. **13.** а) 284 см^2; б) $156\sqrt{3}$ см^3. **C₁.** **14.** 60°. **15.** 162 см^3.

16. $\dfrac{ab\sin\gamma}{2(a+b)}\sqrt{l^2(a+b)^2-4a^2b^2\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}$. **17.** $\arcsin\dfrac{4\gamma\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}{na^3}$.

Упражнения и задачи на повторение

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **A.** **1.** ≈ 48 кг. **2.** $\approx 83{,}6$ мин. **B.** **3.** 680 кубиков. **C.** **6.** $3d$, $4d$. **7.** 10 см, 24 см, 26 см.

Реальный профиль. **A₁.** **1.** 0,25 см. **2.** 0,125 см. **B₁.** **3.** 180 см^3. **4.** 64 см^3. **5.** 45°. **6.** $27\,006\sqrt{3}$ см^3. **C₁.** **8.** $\dfrac{bd(a+c)}{3}$, $\dfrac{abd}{3}$, $\dfrac{bcd}{3}$, $\dfrac{bd(a+c)}{3}$. **9.** а) $\dfrac{1}{6}a^3$; б) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$; в) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **2.** а) $72(1+\sqrt{7})$ см^2; б) $\dfrac{100\sqrt{7}}{7}$ %; в) $144\sqrt{3}$ см^3. **4.** 35200 м^3.

Реальный профиль. **2.** а) $\dfrac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}(1+\cos\beta)$; б) $\dfrac{a^3}{6}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **3.** а) $10l^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{38}{3}l^2\sin\alpha\cos^2\alpha$. **4.** 6048 м^3.

Модуль 8. Тела вращения

§1. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A. **1.** а) 16π см^2; б) 16π см^3. **2.** 1701π см^3. **3.** 13 см. **B.** **4.** 20π см^3. **5.** 8 см. **6.** 195 151 м^2. **7.** 8. **8.** 8π см^2. **C.** **9.** 24 и 86. **10.** Достаточно.

***Реальный профиль.* C₁.** **3.** $\sqrt{H^2+3R^2}$. **4.** а) 10 см; б) $\arccos 0{,}8$. **5.** а) 0,215 м^3; б) 78,5%; в) не изменится. **6.** $V\approx 1\,568$ см^3. **7.** Нет.

§2. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A. **1.** а) 65π см^2, 90π см^2 б) 100π см^3; в) 60 см^2. **2.** 768π см^3. **3.** а) $12{,}5\pi(1+\sqrt{2})$ см^2; б) $\dfrac{125\pi\sqrt{2}}{12}$ см^3. **B.** **4.** 42 листа. **5.** 6,5 см. **6.** 32π см^2. **7.** 34 см; 16 см. **C.** **8.** $243\pi\sqrt{3}$ см^3. **9.** $50\pi\sqrt[3]{2}$ см^2.

***Реальный профиль.* A₁.** **1.** а) $0{,}5\sqrt{2}R\operatorname{tg}\varphi$; б) $0{,}5\sqrt[3]{4}R\operatorname{tg}\varphi$; в) $0{,}5\sqrt{2}R\operatorname{tg}\varphi$. **2.** а) $\dfrac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(\dfrac{1}{\cos\varphi}+1\right)$; б) $\dfrac{a^2\operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2\alpha}$; в) $\dfrac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi}{24\sin^3\alpha}$. **3.** а) $\pi a^2\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)$; б) $\dfrac{\pi a^3\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$. **B₁.** **4.** 8π см^3. **5.** πx^2. **6.** а) $0{,}5\sqrt{2G}$; б) $\dfrac{\sqrt{2\pi G^3}}{12}$. **7.** 7 см. **8.** $\dfrac{R^3\sqrt{R^2-2x^2}}{R^2-x^2}$. **10.** ≈ 24 м^2. **11.** $\approx 4{,}15$ см. **12.** $\dfrac{\pi}{4}$.

§3. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A. **1.** а) 960π см^2; б) 9408π см^3; в) $10\sqrt{10}$ см. **2.** $27\sqrt{2}\pi$ см^2, 63π см^3. **B.** **3.** 60°. **4.** 6 см. **5.** $\approx 21{,}9$ литра. **6.** 14 см. **C.** **7.** 8.

***Реальный профиль.* A₁.** **1.** ≈ 107 г. **2.** 5 дм и 1 дм. **B₁.** **3.** $\dfrac{\pi^2(R^2+r^2)(R^2+Rr+r^2)}{3(R+r)}$. **4.** а) $\pi(R+r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{h}{R-r}$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{2h\sqrt{3}}{3(R-r)}$. **5.** $\dfrac{19}{37}$. **6.** а) $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$; б) $\dfrac{\pi(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha}{3}$. **7.** $\dfrac{37\pi R^2H}{192}$, $\dfrac{19\pi R^2H}{192}$, $\dfrac{7\pi R^2H}{192}$. **C₁.** **8.** а) $\dfrac{H}{R-r}\left(\sqrt{\dfrac{R^2+r^2}{2}}-r\right)$; б) $\dfrac{H(\sqrt{Rr}-r)}{R-r}$.

§4. *Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A. **1.** $\dfrac{1324\pi}{3}$ см^3. **B.** **2.** а) $144\sqrt[3]{1\,225\pi}$ см^2; б) $10\,080\pi$ см^3. **3.** 36π см^3. **4.** А. **C.** **5.** $\dfrac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ см. **6.** $\dfrac{50-4\pi}{\pi}$.

***Реальный профиль.* A₁.** **1.** а) $C(-3,4)$, $R=5$; б) $C(-2,3)$, $R=4$; в) $C\left(\dfrac{7}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$, $R=4$; г) $C\left(-1,\dfrac{3}{4}\right)$, $R=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$. **2.** а) $(x-1)^2+(y-3)^2=8$; б) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$. **3.** а) $(-4,-3)$, $(3,4)$; б) $(-3,-4)$, $(4,-3)$. **4.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{20}=1$. **5.** а) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$; б) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$. **B₁.** **6.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. **7.** а) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=9$; б) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$; в) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{4}=1$. **8.** $(-6,-4\sqrt{3})$, $(-6,4\sqrt{3})$. **9.** $F(6,0)$; $x+6=0$. **10.** $(9,12)$, $(9,-12)$. **11.** $(-6,9)$, $(2,1)$. **12.** 328 коробок. **13.** $\dfrac{\sqrt{7991}}{4\sqrt{6}}$ см. **14.** $\pi R^2\cos^2\alpha$ кв. ед. **15.** $\approx 814{,}7$ кг. **C₁.** **17.** 73 864 кг. **18.** 558,5 тонны.

Упражнения и задачи на повторение

***Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт.* A.** **1.** а) 60°; б) $32\sqrt{3}$ см^2; в) $\dfrac{96\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ см^3. **B.** **2.** $\approx 2\,312$ м^3. **3.** 144π м^2, 128π м^3. **4.** а) 36 м^2; б) $\arccos 0{,}6$; в) 96π м^3, 60π м^2. **6.** $6\sqrt{3}$ дм. **C.** **7.** 6 см.

***Реальный профиль.* B₁.** **2.** а) $R=\dfrac{s}{2}(1+\cos\varphi)$, $r=\dfrac{s}{2}(1-\cos\varphi)$; б) $R=\dfrac{d}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\varphi}\right)$, $r=\dfrac{d}{2}\left(-1+\dfrac{1}{\cos\varphi}\right)$. **3.** πG^2; $\dfrac{2\pi R(G^2-R^2)}{3}$. **4.** 14 см. **5.** Да. **C₁.** **8.** $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **9.** $\dfrac{9+\sqrt{17}}{24}\pi R^3$.

Итоговый тест

Гуманитарный профиль, профили искусство и спорт. **2.** а) 252π см^3; б) $\dfrac{1600\sqrt[3]{7}}{63}$%. **3.** б) 120π см^2; в) 300π см^3. **4.** 600π см^2.

Реальный профиль. **2.** $\dfrac{4\pi a^3H^3\sin^3\alpha}{3(a\sin\alpha+\sqrt{4H^2+a^2\sin^2\alpha})^3}$. **4.** $\approx 69{,}1$ г.

СОДЕРЖАНИЕ

12

Математика

Учебник для 12-го класса