VICTOR IAVORSCHI

MATEMATICA

TESTE PREGĂTITOARE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

clasa a XII-a

CHIȘINĂU, 2026

VICTOR IAVORSCHI

MATEMATICA

TESTE PREGĂTITOARE

pentru examenul de bacalaureat

clasa a XII-a

CHIȘINĂU 2026

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Iavorschi, Victor.
Matematica : Teste pregătitoare : pentru examenul de bacalaureat : clasa a 12-a / Victor Iavorschi. – Chişinău : [S. n.], 2026 (Bons Offices). – 192 p
1000 ex.

ISBN 978-5-36241-708-6.

51(079)(075.3
I-31

Tipărit la tipografia „Bons Offices"

PREFAŢĂ

Prezenta lucrare este recomandată profesorilor de matematică și elevilor claselor a XII-a pentru pregătirea susținerii examenului de BAC.

Culegerea conține 60 de teste, primele 10 sunt însoțite de soluții complete, iar 50 de teste numai de soluții.

Culegerea de teste este elaborată conform Curriculumului 2019 la matematică și după modelul testelor de la examenul de BAC 2025.

Sperăm că lucrarea dată va fi un suport bun pentru pregătirea de examenul de BAC la matematică, profilul real.

SUCCES!

Autorul

TESTUL 1

ALGEBRA

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{-\log_{\frac{1}{2}}16-8^{-\frac{2}{3}}}$.

2. Determinați modulul numărului complex $z=(2-i)(2+i)-12i^3$, unde $i^2=-1$.

3. Rezolvați în R inecuația $\begin{vmatrix}\log_2(1-x) & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}>0$.

4. Polinomul $P(X)=X^3+aX^2+bX-6$, $a,b\in R$ se divide cu binomul $X-3$, iar prin împărțirea la binomul $X-2$ dă restul -16. Determinați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X+2$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sin 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.

GEOMETRIE

6. Punctele A, B și C se află pe cercul $C(O;R)$, astfel încât $m(\angle ABC)=90°$. Lungimea cercului este $L=12\pi\ cm$.Să se afle lungimea segmentului $[AC]$.

7. Lungimile razei și generatoarei unui cilindru circular drept sunt direct proporționale cu numerele 2 și respectiv $2,5$, iar volumul cilindrului este egal cu $2160\pi\ cm^3$. Aflați aria totală a cilindrului.

8. Lungimile laturillor laterale ale unui trapez sunt egale cu $3cm$ și $5cm$. Se știe că în trapez poate fi înscris un cerc. Linia mijlocie a trapezului îl împarte în două părți, raportul ariilor cărora este egal cu $\frac{5}{11}$. Să se afle lungimile bazelor trapezului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ avem $b_2=6$, $b_4=24$. Să se afle b_6.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2+5}{x-2}$.

a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

b) Determinați intervalele de monotoniei și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I=\int_3^5 f(x)dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-un lot de 10 piese 7 sunt de calitate superioară. Să se afle probabilitatea ca din 6 piese, luate la întâmplare, 4 vor fi de calitate superioară.

12. Se dă relația $C_{3x}^{x^2-7x}=C_{3x}^{x+8}$. Notăm cu S suma termenilor raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^x$. Să se afle S.

SOLUȚII

1. $E=\sqrt{-\log_{\frac{1}{2}}16-8^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{-(-\log_2 16)-\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{-(-4)-2^{-2}}=\sqrt{4}-\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

■ **RĂSPUNS:** $E=\frac{7}{4}$.

2. $z=(2-i)(2+i)-12i^3=4-i^2+12\cdot(-i)=4+1-12i=5-12i$. Atunci $|z|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$.

■ **RĂSPUNS:** $|z|=13$.

3. Avem $\log_2(1-x)+2>0$. DVA al ultimei inecuații se determină din condiția $1-x>0$, de unde $x<1$. Așadar, $DVA=(-\infty;1)$. Inecuația se scrie: $\log_2(1-x)>-2 \Leftrightarrow \log_2(1-x)>\log_2\frac{1}{4} \Leftrightarrow 1-x>\frac{1}{4} \Leftrightarrow -x>\frac{1}{4}-1 \Leftrightarrow -x>-\frac{3}{4} \Leftrightarrow x<\frac{3}{4}$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)$.

4. Dacă polinomul $P(X)$ se divide cu $X-3$, rezultă că $P(3)=0$, iar deoarece $P(X)$ prin împărțirea la $X-2$ dă restul -16, rezultă că $P(2)=-16$. Obținem sistemul $\begin{cases} P(3)=0 \\ P(2)=-16 \end{cases}$, sau $\begin{cases} 27+9a+3b-6=0 \\ 8+4a+2b-6=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+3b=-21 \\ 4a+2b=-18 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=-7 \\ 2a+b=-9 \end{cases}$, de unde $a=2$ și $b=-13$. Așadar, avem polinomul $P(X)=X^3+2X^2-13X-6$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X+2$ este $r=P(-2)=-8+8+26-6=20$.

■ **RĂSPUNS:** $r=20$.

5. *DVA* al ecuației este mulțimea R. Folosind formulele $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ și $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$, ecuația inițială se scrie: $2\sin x\cos x = \sqrt{2}\cos x + 2\cos^2 x \Leftrightarrow$ $2\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\right)=0$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\cdot\left[\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\cdot\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\right]=0$.

Așadar, ecuația inițială este echivalentă cu totalitatea a două ecuații: $\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Mulțimea soluțiilor primei ecuații este $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

Rezolvând ecuația a doua obținem $x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$, de unde $x=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

6. Lungimea cercului este $12\pi\, cm \Rightarrow 2\pi R = 12\pi \Rightarrow R = 6cm$. Triunghiul ABC este înscris în cercul $C(O;\, R)$, și deoarece $m(\angle ABC)=90^\circ$, rezultă că este dreptunghic, în care $[AC]$ este ipotenuză. Dar $[AC]$ este diametru al cercului, deci $AC=2R=2\cdot 6=12cm$.

■ **RĂSPUNS:** $AC=12cm$.

7. Fie un cilindru circular drept cu raza $R=2k$ și generatoarea (înălțimea) $G=R=2{,}5k$, unde $k\in R_+^*$. Volumul cilindrului este $V=\pi R^2 H \Rightarrow$ $\pi\cdot(2k)^2\cdot 2{,}5k = 2160\pi \Rightarrow 10k^3=2160 \Rightarrow k^3=216$, de unde $k=6$. Atunci $R=12cm$, $H=15cm$. Aria bazei cilindrului este $A_b=\pi R^2=144\pi\, cm^2$. Aria laterală a cilindrului este $A_l=2\pi RH=2\pi\cdot 12\cdot 15=360\pi\, cm^2$. Atunci $A_{tot}=2\cdot A_b + A_l = 2\cdot 144\pi + 360\pi = 648\pi\, cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{tot}=648\pi\, cm^2$.

8. Fie trapezul $ABCD$, în care $BC\|AD$, $BC<AD$, $AB=5cm$, $CD=3cm$ și $[KL]$ linie mijlocie a trapezului. Notăm $BC=x$, $AD=y$. Așa cum în trapez poate fi înscris un cerc, avem $BC+AD=AB+CD \Rightarrow BC+AD=8cm$. Deoarece $[KL]$ este linie mijlocie a trapezului, atunci $KL=\frac{BC+AD}{2}=4cm$. Fie h înălțimea trapezului, atunci înălțimile trapezelor $MBCN$ și $AMND$ sunt egale cu $\frac{h}{2}$.

Atunci $A_{MBCN}=\frac{BC+MN}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{x+4}{2}\cdot\frac{h}{2}$, $A_{AMND}=\frac{AD+MN}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{y+4}{2}\cdot\frac{h}{2}$.

Conform enunțului avem $\frac{A_{MBCN}}{A_{AMND}}=\frac{5}{11} \Rightarrow \frac{x+4}{y+4}=\frac{5}{11}$. Obținem sistemul $\begin{cases} x+y=8 \\ \frac{x+4}{y+4}=\frac{5}{11} \end{cases}$, de unde $x=1$, $y=7$. Așadar, $BC=1cm$, $AD=7cm$.

■ **RĂSPUNS:** $BC=1cm$, $AD=7cm$.

9. $b_2=6 \Rightarrow b_1q=6$. Mai avem $b_4=24 \Rightarrow b_1q^3=24$. Atunci $\frac{b_2}{b_4}=\frac{b_1q}{b_1q^3}=\frac{6}{24}$ $\Rightarrow \frac{1}{q^2}=\frac{1}{4}$, de unde $q^2=4$. Avem $b_6=b_5q=b_4q\cdot q=b_4\cdot q^2=24\cdot 4=96$. (Se poate aplica proprietatea caracteristică a progresiei geometrice).

■ **RĂSPUNS:** $b_6=96$.

10. $D=R\setminus\{2\}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x-2}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+5}{x-2}=-\infty$, rezultă că nu există asimptote orizontale la graficul funcției f la $+\infty$ și la $-\infty$. Verificăm dacă există asimptote oblice la graficul funcției f.

Avem $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{x^2-2x}=1$. La fel $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. Atunci $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\pm}\frac{2x+5}{x-2}=2$.

Așadar, $m=1$, $n=2$, deci dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și la $-\infty$. Deoarece $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2+5}{x-2}=\frac{9}{0^-}=-\infty$ și $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{x^2+5}{x-2}=\frac{9}{0^+}=+\infty$, rezultă că dreapta $x=2$ este asimptotă verticală.

■ **RĂSPUNS:** Dreapa de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și la $-\infty$. Dreapta de ecuație $x=2$ este asimptotă verticală.

b) $f'(x)=\left(\frac{x^2+5}{x-2}\right)'=\frac{(x^2+5)'(x-2)-(x-2)'(x^2+5)}{(x-2)^2}=\frac{2x\cdot(x-2)-x^2-5}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2-5}{(x-2)^2}=$

$\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$. Aflăm punctele critice, rezolvând ecuația $f'(x)=0$, adică $\dfrac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=0$. Avem $x^2-4x-5=0$ cu soluțiile $x_1=-1$, $x_2=5$. Deci, avem punctele critice $x_1=-1$ și $x_2=5$. Tabloul de variație al funcției.

-1	$2 \qquad 5$
$+ + + + + + 0 - - - - - -$	$- - - - - - 0 + + + + + +$
max	min

Obținem: funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(5; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1; 2)$ și $(2; 5)$. $x=-1$ este punct de maxim local, $x=5$ este punct de minim local.

■ **RĂSPUNS:** funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(5; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1; 2)$ și $(2; 5)$. $x=-1$ este punct de maxim local, $x=5$ este punct de minim local.

c) Calculăm primitiva F a funcției f.

Avem $F(x)=\int f(x)dx=\int\dfrac{x^2+5}{x-2}dx=\int\dfrac{x^2-4+9}{x-2}dx=\int\dfrac{x^2-4}{x-2}dx+\int\dfrac{9}{x-2}dx=$
$=\int\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}dx+9\int\dfrac{1}{x-2}dx=\int(x+2)dx+9\ln|x-2|=\dfrac{x^2}{2}+2x+9\ln|x-2|$.

Atunci $I=\int_3^5 f(x)dx=F(x)\Big|_3^5=F(5)-F(3)=\dfrac{25}{2}+10+9\ln 3-\left(\dfrac{9}{2}+6+9\ln 1\right)=$ $12+9\ln 3$.

■ **RĂSPUNS:** $I=12+9\ln 3$.

11. Considerăm evenimentul A: „Din 6 piese luate la întâmplare, 4 vor fi de calitate superioară". $P(A)=\dfrac{m(A)}{n}$. În total avem 10 piese. Din ele luăm 6, deci $n=C_{10}^6=\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}=\dfrac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!\cdot 6!}=210$. În lot sunt 7 piese de calitate superioară, iar printre cele luate noi dorim să avem 4 de acest fel, cazuri vor fi $C_7^4=35$. Restul pieselor printre cele luate, deci 2, nu vor avea aceeași calitate. Numărul de cazuri favoraile este $C_3^2=3$. În final rezultă $m(A)=C_7^4\cdot C_3^2$. Prin urmare, $P(A)=\dfrac{C_7^4\cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\dfrac{35\cdot 3}{210}=\dfrac{1}{2}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\dfrac{1}{2}$.

12. Se impun condițiile: $3x\in N^*$, $x+8\in N$, $x^2-7x\in N$, $x^2-7x\le 3x$, $x+8\le 3x$. Ținem seama de următoarea echivalență: $C_n^m=C_n^p$ dacă și numai dacă $m=p$ sau $m+p=n$ (formula combinărilor complementare). Relația dată este verificată în următoarele cazuri:

a) $x^2-7x=x+8$, atunci $x^2-8x-8=0$ și în acest caz nu se obțin soluții.

b) Dacă $(x^2-7x)+(x+8)=3x$, atunci $x^2-9x+8=0$, și obținem soluțiile $x_1=1$, $x_2=8$. Dacă $x=1$, atunci $x^2-7x=-6\notin N$. Prin urmare $x=8$. Așadar, avem dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)^8$. Termenul de rang $k+1$ al dezvoltării este $T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{3}\right)^{8-k}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^k=C_8^k\cdot 3^{\frac{8-k}{2}}\cdot 2^{\frac{k}{3}}$. Un termen al dezvoltării este rațional dacă și numai dacă $\dfrac{8-k}{2}\in N$ și $\dfrac{k}{3}\in N$, unde $k\in N$, $0<k<8$. Deducem $k=0$ sau $k=6$, și atunci $S=T_1+T_7=C_8^0\left(\sqrt{3}\right)^8+C_8^6\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=3^4+C_8^6\cdot 3\cdot 2^2=81+336=417$.

■ **RĂSPUNS:** $S=417$.

TESTUL 2

ALGEBRA

1. Calculați valoarea expresiei $E=\dfrac{2\lg 2+\lg 3}{\lg 48-\lg 4}+\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$.

2. Rezolvați în R ecuația $2^{x^2-2x}=8$.

3. Aflați modulul numărului complex $z=\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

4. Calculați valoarea determinantului $D=\begin{vmatrix} \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{vmatrix}$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_x \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC, în care AM și CN sunt mediane, $M\in(BC)$, $N\in(AB)$. Dacă $MN=7\,cm$, perimetrul triunghiului este egal cu $36\,cm$, iar lungimea laturii BC este cu $2\,cm$ mai mare decât lungimea laturii AB, aflați lungimile laturilor triunghiului ABC.

7. Într-un triunghi dreptunghic este înscris un cerc. Punctul de tangență al cercului cu ipotenuza împarte ipotenuza în două segmente de lungimi $5\,cm$ și $12\,cm$. Să se afle aria triunghiului.

8. Să se afle aria totală a unei piramide triunghiulare regulate care are latura bazei de $6\,cm$, iar unghiul diedru de la baza piramidei are măsura de 60°.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul numeric $(x_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $x_n=\dfrac{5n}{3n-2}$. Să se afle media aritmetică a primilor trei termeni ai șirului.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}$, $a\in R$.

a) Determinați valorile parametrului real a pentru care funcția f admite un extrem local situat la distanța 1 față de axa O_Y.

b) Pentru $a=3$ scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x_0=0$.

c) Pentru $a=-3$ determinați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia trece prin punctul $A(0;\,5)$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6 se formează toate numerele naturale de câte trei cifre distincte două câte două. Să se afle probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din cele formate, el se va divide cu 5.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{2^{\lg(10-2^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-4)\cdot\lg 2}}\right)^7$. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care al șaselea termen al dezvoltării este egal cu 21.

SOLUȚII

1. $E=\dfrac{2\lg 2+\lg 3}{\lg 48-\lg 4}+\left(2^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=\dfrac{\lg 4+\lg 3}{\lg 48-\lg 4}+2^3=\dfrac{\lg(4\cdot 3)}{\lg\frac{48}{4}}+8=\dfrac{\lg 12}{\lg 12}+8=1+8=9$.

■ **RĂSPUNS:** $E=9$.

2. *DVA* al ecuației este mulțimea R. Ecuația inițială se scrie $2^{x^2-2x}=2^3 \Leftrightarrow x^2-2x=3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ cu soluțiile $x_1=-1$, $x_2=3$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{-1;\,3\}$.

3. $z=\dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}=\dfrac{5+i}{2-3i+2i-3i^2}=\dfrac{5+i}{2-i+3}=\dfrac{5+i}{5-i}=\dfrac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\dfrac{(5+i)^2}{5^2-i^2}=\dfrac{25+10i+i^2}{25+1}=$

$\dfrac{25+10i-1}{26}=\dfrac{24+10i}{26}=\dfrac{12}{13}+\dfrac{5}{13}i$. Atunci $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{12}{13}\right)^2+\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{144}{169}+\dfrac{25}{169}}=1$.

■ **RĂSPUNS:** $|z|=1$.

4. $D=\begin{vmatrix} \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{vmatrix}=\sin 15^\circ\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 15^\circ=2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

■ **RĂSPUNS:** $D=\dfrac{1}{2}$.

5. Așa cum proprietățile logaritmilor depind de baza lui, vom precăuta două cazuri: *a*) $x>1$ și *b*) $0<x<1$.

$a)$ Fie $x>1$, atunci inecuația inițială se scrie $\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}-1>0$ $\Leftrightarrow \dfrac{7x-\frac{23}{5}}{5(1-x)}>0$. Rezolvând ultima inecuație folosind metoda intervalelor, obținem mulțimea soluțiilor $S=\left(\frac{23}{35};1\right)$. Dar numerele din acest interval nu satisfac condiția $x>1$. Rezultă că în cazul $a)$ inecuația nu are soluții.

$b)$ Fie $0<x<1$, atunci inecuația din enunț este echivalentă cu inecuația dublă $0<\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}<1$, care la rândul său este echivalentă cu sistemul de inecuații $\begin{cases}\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0\\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>0\\ \dfrac{7x-\frac{23}{5}}{5(1-x)}<0\end{cases}$. Rezolvând fiecare inecuație a sistemului, folosind metoda intervalelor, obținem că mulțimea soluțiilor primei inecuații este $S_1=\left(-\frac{1}{5};1\right)$, iar mulțimea soluțiilor inuației a doua este $S_2=\left(-\infty;\frac{23}{35}\right)\cup(1;+\infty)$. Mulțimea soluțiilor sistemului este $S_{sist}=S_1\cap S_2=\left(-\frac{1}{5};\frac{23}{35}\right)$. Mulțimea soluțiilor inecuației inițiale este $S=S_{sist}\cap(0;1)=\left(0;\frac{23}{35}\right)$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left(0;\frac{23}{35}\right)$.

6. Fie triunghiul ABC, în care AM și CN sunt mediane, $M\in(BC)$, $N\in(AB)$. Rezultă că $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, atunci $AC=2MN=2\cdot7=14cm$. Deoarece $P=36cm$ și $AC=14cm$, obținem că $AB+BC=P-AC=36-14=22cm$. $BC=AB+2cm \Rightarrow AB+AB+2=22$ sau $2AB=20$, de unde $AB=10cm$. Atunci $BC=12cm$.

■ **RĂSPUNS:** $AB=10cm$, $BC=12cm$, $AC=14cm$.

7. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, în care este înscris cercul $C(O;R)$. Fie M punctul de tangență al cercului cu ipotenuza BC, astfel încât $BM=12cm$, $CM=5cm$, iar N și P punctele de tangență ale cercului cu catetele AC și respectiv AB. Avem $OM\perp BC$, $ON\perp AC$, $OP\perp AB$. Conform proprietății tangentelor duse la un cerc dintr-un punct exterior cercului avem: $CN=CM=5cm$, $BP=BM=12cm$. Patrulaterul $APON$ este pătrat, și fie latura lui x. Atunci $AC=x+5$, $AB=x+12$, iar $BC=AM+MC=12+5=17cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABC avem: $AB^2+AC^2=BC^2$, sau $(x+12)^2+(x+5)^2=17^2 \Leftrightarrow x^2+24x+144+x^2+10x+25=289 \Leftrightarrow$ $2x^2+34x-120=0 \Leftrightarrow x^2+17x-60=0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1=3$, $x_2=-20$ (nu convine). Așadar, $x=3$, deci $AC=8cm$, $AB=15cm$. Aria triunghiului ABC este $A=\dfrac{AC\cdot AB}{2}=\dfrac{8\cdot15}{2}=60cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A=60cm^2$.

8. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V și baza triunghiul echilateral ABC cu $AB=BC=AC=6cm$. Fie M mijlocul laturii $[AB]$ a triunghiului ABC. Atunci $CM\perp AB$, $CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,cm$. Fie $VO\perp(ABC) \Rightarrow O$ este centrul triunghiului ABC, deci O este centrul de greutate a triunghiului $ABC \Rightarrow OM=\frac{1}{3}CM=\frac{1}{3}\cdot3\sqrt{3}=\sqrt{3}\,cm$. Deoarece triunghiul VAB este isoscel și M este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow VM\perp AB$, deci VM este apotema piramidei. Atunci $m(\angle VMO)=60^\circ$, iar $m(\angle MVO)=30^\circ \Rightarrow$ $VM=2OM=2\sqrt{3}\,cm$. $A_{lat}=3\cdot A_{VAB}=3\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot VM=3\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\sqrt{3}=18\sqrt{3}\,cm^2$.

Aria bazei piramidei este $A_{baz}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\,cm$. Atunci aria totală este $A_{tot}=A_{lat}+A_{baz}=18\sqrt{3}+9\sqrt{3}=27\sqrt{3}\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{tot}=27\sqrt{3}\,cm^2$.

9. $x_1=\dfrac{5\cdot1}{3\cdot1-2}=5$; $x_2=\dfrac{5\cdot2}{3\cdot2-2}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$; $x_3=\dfrac{5\cdot3}{3\cdot3-2}=\dfrac{15}{7}$. Media aritmetică a numerelor x_1, x_2 și x_3 este $m_a=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=\dfrac{5+\frac{5}{2}+\frac{15}{7}}{3}=\dfrac{\frac{135}{14}}{3}=\dfrac{45}{14}$.

■ **RĂSPUNS:** $m_a=\dfrac{45}{14}$.

10. $a)$ Deoarece punctele de extrem sunt situate la distanța 1 de la axa O_Y, rezultă că ele au abscisele $x_1=-1$ și $x_2=1$. Avem $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=$

$$\frac{\left(x^2-ax\right)'\cdot\sqrt{x^2+1}-\left(x^2-ax\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{(2x-a)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x\left(x^2-ax\right)}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\frac{(2x-a)\cdot\left(x^2+1\right)-x\left(x^2-ax\right)}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^3+2x-ax^2-a-x^3+ax^2}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^3+2x-a}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

Deoarece $x=-1$ este punct de extrem local, rezultă că $f'(-1)=0$, de unde $a=-3$. Deoarece $x=1$ este punct de extrem local, rezultă că $f'(1)=0$, de unde $a=3$.

■ **RĂSPUNS:** $a\in\{-3;\ 3\}$.

b) Pentru $a=3$, avem funcția $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+1}}$ și

$f'(x)=\dfrac{x^3+2x-3}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}$. Pentru $x_0=0$ avem $f(x_0)=f(0)=0$ și $f'(x_0)=$

$f'(0)=-3$. Atunci ecuația tangentei este $y=-3x$.

■ **RĂSPUNS:** $y=-3x$.

c) Pentru $a=-3$ avem funcția $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Atunci primitiva funcției f este $F(x)=\int\dfrac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\dfrac{x^2+1+3x-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\sqrt{x^2+1}dx+3\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+3\sqrt{x^2+1}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+c=$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+3\sqrt{x^2+1}+c.$$

Din $F(0)=5$ obținem $F(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+3\sqrt{x^2+1}+2$.

■ **RĂSPUNS:** $F(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+3\sqrt{x^2+1}+2$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=A_6^3=\dfrac{6!}{3!}=\dfrac{3!\cdot4\cdot5\cdot6}{3!}=120$. Deoarece numărul se divide cu 5, rezultă că ultima lui cifră trebuie să fie 5, deci primele două poziții vor fi ocupate de două cifre din cele 5 rămase. Atunci numărul de cazuri favorabile va fi $m=A_5^2=\dfrac{5!}{3!}=\dfrac{3!\cdot4\cdot5}{3!}=20$. Probabilitatea va fi $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\dfrac{1}{6}$.

12. Dacă $T_6=21$, atunci $C_7^5\left(\sqrt{2^{\lg\left(10-2^x\right)}}\right)^2\cdot\left(\sqrt[5]{2^{(x-4)\lg2}}\right)^5=21$. Cum $C_7^5=21$, rezultă $2^{\lg\left(10-2^x\right)}\cdot2^{(x-4)\lg2}=1$, și atunci $\lg\left(10-2^x\right)+(x-4)\cdot\lg2=0$ $\Leftrightarrow$ $\lg\left(10-2^x\right)+\lg2^{x-4}=0$ $\Leftrightarrow$ $\lg\left[\left(10-2^x\right)\cdot2^{x-4}\right]=\lg1$. Avem $\left(10-2^x\right)\cdot2^{x-4}=1$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\left(10-2^x\right)\cdot2^x}{2^4}=1$ $\Leftrightarrow$ $\left(10-2^x\right)\cdot2^x=16$ $\Leftrightarrow$ $2^{2x}-10\cdot2^x+16=0$. Ultima ecuație are soluțiile $x_1=1$, $x_2=3$.

■ **RĂSPUNS:** $x\in\{1;\ 3\}$.

TESTUL 3

ALGEBRA

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt[3]{\sin^2 43^\circ+\cos^2 43^\circ-(27)^{\frac{2}{3}}}$.

2. Rezolvați în R ecuația $(16-x^2)\sqrt{3-x}=0$.

3. Să se arate că pentru orice $x\in R$, valoarea expresiei $E=\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x$ este un număr natural.

4. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ i & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1-i & 1+i\\ -i & 2\end{pmatrix}$, iar $d=\det(A\cdot B)$. Determinați toate soluțiile întregi ale inecuației $\frac{x^2+d}{x^2-4}<d$.

5. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $2\lg^2+(1-\sqrt{2})\lg x^2=2\sqrt{2}$.

GEOMETRIE

6. Într-un triunghi dreptunghic măsura unui unghi ascuțit este de două ori mai mare decât măsura celuilat unghi ascuțit. Cateta opusă unghiului mai mic are lungimea de $8\,cm$. Să se afle perimetrul triunghiului.

7. Se consideră triunghiul ABC în care $[AA_1]$ și $[BB_1]$ sunt mediane, $A_1\in(BC)$, $B_1\in(AC)$, astfel încât $AA_1=27\,cm$, $BB_1=36\,cm$, iar $AB=30\,cm$. Aflați aria triunghiului ABC.

8. Raza bazei unui con circular drept are lungimea $20\,cm$, distanța de la centrul bazei la o generatoare este de $12\,cm$. Să se afle volumul conului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=8$ și $a_5=14$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Scrieți ecuația asimpotei spre $+\infty$ la graficul funcției f

b) Aflați intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

c) Calculați integrala $I=\int_1^4 f(x)dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; . . . ; 9 se formează toate numerele naturale distincte de câte 6 cifre distincte două câte două. Să se afle probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din cele formate, acesta să aibă primele două cifre impare, iar celelalte cifre pare.

12. Se consideră binomul $\left(x+x^{\lg x-3}\right)^5$. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care termenul al treilea al dezvoltării binomului este egal cu 1000.

SOLUȚII

1. Avem $\sin^2 43^\circ+\cos^2 43^\circ=1$ și $27^{\frac{2}{3}}=(3^3)^{\frac{2}{3}}=3^2=9$.
Atunci $E=\sqrt[3]{1-9}=\sqrt[3]{-8}=-2$.
■ **RĂSPUNS:** $E=-2$.

2. DVA al ecuației este mulțimea $D=(-\infty;\,3]$. Ecuația inițială este echivalentă cu totalitatea a două ecuații: $\left[\begin{array}{l}16-x^2=0\\ \sqrt{3-x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_1=-4\\ x_2=4\end{array}\right.\\ x=3\end{array}\right.$. Deoarece $x=4\notin DVA$ $\Rightarrow$ $S=\{-4;\,3\}$.
■ **RĂSPUNS:** $S=\{-4;\,3\}$.

3. $E=\sin^4 x-\cos^4 x-\sin^2 x+\cos^2 x=(\sin^4 x-\cos^4 x)-(\sin^2 x-\cos^2 x)=$
$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)-(\sin^2 x-\cos^2 x)=1\cdot(\sin^2 x-\cos^2 x)-\sin^2 x+\cos^2 x=0$.
■ **RĂSPUNS:** $E=0$.

4. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1+i & 1-i\\ i & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-i & 1+i\\ -i & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-i & 2\\ 1 & 1+i\end{pmatrix}$. $d=\det(A\cdot B)=\begin{vmatrix}1-i & 2\\ 1 & 1+i\end{vmatrix}=$ $(1-i)(1+i)-2=\ 1-i^2-2=1+1-2=0$. Obținem inecuația $\frac{x^2}{x^2-4}<0$. DVA

al ultimei inecuații este $R\setminus\{-2;\ 2\}$ și mai avem condiția $x\neq 0$. Deoarece $x^2>0$ pentru orice $x\in DVA \Rightarrow x^2-4<0$. Aplicând metoda intervalelor, obținem $x\in(-2;\ 2)$. Ținând cont de DVA și de condiția $x\neq 0$, obținem că mulțimea soluțiilor inecuației inițiale este $S=(-2;\ 0)\cup(0;\ 2)$. Numerele întregi din S sunt -1 și 1.

■ **RĂSPUNS:** $x\in\{-1;\ 1\}$.

5. DVA al ecuației este mulțimea $(0;\ +\infty)$. Ecuația se scrie: $2\lg^2 x+2\left(1-\sqrt{2}\right)\lg|x|-2\sqrt{2}=0$. Deoarece $x\in(0;\ +\infty)$, rezultă că $|x|=x$ și ecuația se scrie: $2\lg^2 x+2\left(1-\sqrt{2}\right)\lg x-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \lg^2 x+\left(1-\sqrt{2}\right)\lg x-\sqrt{2}=0$.
Notăm $\lg x=t$, și ecuația se scrie $t^2+\left(1-\sqrt{2}\right)t-\sqrt{2}=0$. Ultima ecuație are soluțiile $t_1=-1$ și $t_2=\sqrt{2}$. Obținem ecuațiile: $\lg x=-1$, de unde $x=\frac{1}{10}$, și $\lg x=\sqrt{2}$, de unde $x=10^{\sqrt{2}}$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left\{\frac{1}{10};\ 10^{\sqrt{2}}\right\}$.

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, în care $m(\angle C)=2\cdot m(\angle B) \Rightarrow m(\angle B)=30^\circ$, $m(\angle C)=60^\circ$. Atunci $AC=8cm \Rightarrow BC=2\cdot AC=2\cdot 8=16cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul ABC, $AB^2=BC^2-AC^2 \Rightarrow AB^2=16^2-8^2 \Rightarrow AC=8\sqrt{3}\,cm$.
$P_{ABC}=AB+AC+BC=8\sqrt{3}+16+8=\left(24+8\sqrt{3}\right)=8\left(3+\sqrt{3}\right)cm$.

■ **RĂSPUNS:** $P=8\left(3+\sqrt{3}\right)cm$.

7. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC, adică $AA_1\cap BB_1=\{G\}$. Conform proprietății centrului de greutate avem: $AG=\frac{2}{3}AA_1=\frac{2}{3}\cdot 27=18cm$. Analog $BG=\frac{2}{3}\cdot BB_1=\frac{2}{3}\cdot 36=24cm$. În triunghiul ABG avem: $AG=18cm$, $BG=24cm$, $AB=30cm$. Deoarece $AB^2=AG^2+BG^2$, conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul ABG este dreptunghic cu ipotenuza $[AB]$. Aria triunghiului ABB_1 este $A_{ABB_1}=\frac{1}{2}\cdot BB_1\cdot AG=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 18=324cm^2$. Atunci $A_{ABC}=2\cdot A_{ABB_1}=2\cdot 324=648cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABC}=648cm^2$.

8. Fie conul circular drept cu vârful V și baza cercul $C(O;\ R)$, unde $R=20cm$. $[AB]$ este un diametru în cercul din baza conului, deci triunghiul isoscel VAB este o secțiune axială a conului, $VA=VB$ fiind generatoare.

$[VO]\perp C(O;\ R)$, deci $[VO]$ este înălțime a conului. $OM\perp VA$, $M\in(VA)$, deci OM este distanța de la centrul bazei conului la generatoarea VA, $OM=12cm$. Din triunghiul dreptunghic AOM, conform teoremei lui Pitagora avem $AM=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{20^2-12^2}=\sqrt{400-144}=\sqrt{256}=16cm$. Din triunghiul dreptunghic VOA, conform teoremei catetei, $OA^2=VA\cdot MA \Rightarrow 20^2=16\cdot VA \Rightarrow 400=16\cdot VA$, de unde $VA=25cm$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA, obținem $VO=\sqrt{VA^2-OA^2}=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{625-400}=\sqrt{225}=15cm$.
Volumul conului este $V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot 20^2\cdot 15=2000\pi\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=2000\pi\,cm^3$.

9. Conform proprietății caracteristice a progresiei aritmetice avem $a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{8+14}{2}=11$. Rația progresiei va fi $r=a_4-a_3=11-8=3$. Așadar, $r=3$. Folosind formula termenului general al progresiei aritmetice, obținem $a_3=a_1+2r \Rightarrow 8=a_1+2\cdot 3$, de unde $a_1=2$.

■ **RĂSPUNS:** $a_1=2$, $r=3$.

10. Domeniul de definiție al funcției este $D=(0;\ +\infty)$.

a) Folosind regula lui L'Hospital, avem: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$. Așadar, dreapta de ecuație $y=0$ (axa absciselor) este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. Aflăm punctele critice ale funcției. Rezolvând ecuația $f'(x)=0$. Obținem $\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0$, de unde $2-\ln x=0$, de unde $x=e^2$. Completând tabloul de variație al funcției obținem că funcția f este crescătoare pe intervalul $\left(0;\ e^2\right)$ și este descrescătoare pe intervalul $\left(e^2;\ +\infty\right)$. $x=e^2$ este punct de maxim local.

■ **RĂSPUNS:** funcția f este crescătoare pe intervalul $\left(0;\ e^2\right)$ și este descrescătoare pe intervalul $\left(e^2;\ +\infty\right)$. $x=e^2$ este punct de maxim local.

c) Aflăm primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, folosind metoda integrării prin părți

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix} u=\ln x \\ dv=\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ du=\frac{1}{x}dx \\ v=2\sqrt{x}\end{bmatrix}=2\sqrt{x}\ln x-\int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\ 2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$. Atunci valoarea integralei este

$I=F(4)-F(1)=4\cdot\ln 4-8-(-4)=8\ln 2-4$.

■ **RĂSPUNS:** $I=8\ln 2-4$.

11. Avem numărul cazurilor posibile $n=A_9^6$, numărul cazurilor favorabile $m=A_5^2\cdot P_4$.

Atunci probabilitatea va fi $P=\frac{m}{n}=\frac{A_5^2\cdot P_4}{A_9^6}=\frac{1}{126}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{1}{126}$.

12. Avem $T_3=C_5^2\cdot x^3\cdot\left(x^{\lg x-3}\right)^2=10\cdot x^{3+2(\lg x-3)}=10\cdot x^{2\lg x-3}\Rightarrow 10\cdot x^{2\lg x-3}=1000$ $\Leftrightarrow x^{2\lg x-3}=10^2$. Logaritmând în baza 10 obținem $(2\lg x-3)\cdot\lg x=2 \Leftrightarrow$ $2\lg^2 x-3\lg x-2=0 \Leftrightarrow (\lg x-2)(2\lg x+1)=0$. Rezultă $\lg x-2=0$ sau $2\lg x+1=0$ și obținem soluțiile $x_1=100$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

■ **RĂSPUNS:** $x\in\left\{\frac{1}{\sqrt{10}};100\right\}$.

TESTUL 4

ALGEBRA

1. Aflați suma numerelor $a=\log_2 36$ și $b=\log_{\frac{1}{2}} 9$.

2. Rezolvați în mulțimea C ecuația $(4-3i)\cdot z=2+i$.

3. Se consideră polinomul $P(X)=X^3+aX^2+5X-3$, unde $a\in R$. Știind că $P(2)=7$, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X+3$.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{3}\sin 2x=2\cos^2 x$.

5. Fie x_1 și x_2 soluțiile reale ale ecuației $x^2-4mx+4m^2=0$, unde $m\in R$. Demonstrați că $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_1 & 1 \\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=0$, oricare ar fi $m\in R$.

GEOMETRIE

6. Determinați raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de măsură 30°.

7. În prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ raza cercului circumscris triunghiului din bază este de $6\sqrt{3}\,cm$, iar aria laterală a prismei este egală cu $270\,cm^2$. Să se afle volumul prismei.

8. În trapezul $ABCD$ cu bazele $[BC]$ și $[AD]$ și laturile laterale $[AB]$ și $[CD]$ este înscris cercul $C(O;R)$. Să se afle aria trapezului, știind că $m(\angle BAD)=90^\circ$ și $OC=2\,cm$, $OD=4\,cm$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n=\frac{2n+5}{n+1}$.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$.

a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane determinate de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 3$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă simultan două zaruri. Să se afle probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două fețe apărute, să fie un număr prim.

12. Aflați termenul care-l conține pe x^5 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 128.

SOLUȚII

1. $a + b = \log_2 36 + \log_{\frac{1}{2}} 9 = \log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 \dfrac{36}{9} = \log_2 4 = 2$.

■ **RĂSPUNS:** $E = 2$.

2. $z = \dfrac{2+i}{4-3i} = \dfrac{(2+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{8+6i+4i+3i^2}{16-9i^2} = \dfrac{8+10i-3}{16+9} = \dfrac{5+10i}{25} = \dfrac{5}{25} + \dfrac{10}{25}i = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

■ **RĂSPUNS:** $z = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$.

3. $P(2) = 7 \Rightarrow 8 + 4a + 10 - 3 = 7 \Leftrightarrow 4a = -8$, de unde $a = -2$. Deci, avem polinomul $P(X) = X^3 - 2X^2 + 5X - 3$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X + 3$ este $r = P(-3)$. Obținem $r = (-3)^3 - 2\cdot(-3)^2 + 5\cdot(-3) - 3 = -63$.

■ **RĂSPUNS:** $r = -63$.

4. Folosind formula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, ecuația se scrie: $2\sqrt{3}\sin x \cos x = 2\cos^2 x$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ $\Leftrightarrow$ $\cos x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0\end{array}\right.$. Ecuația $\cos x = 0$ are mulțimea soluțiilor $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Ecuația $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ este o ecuației trigonometrică omogenă de gradul I. Împărțind ambele părți ale ecuației la $\cos x$, obținem ecuația $\sqrt{3}tgx = 1$, de unde $tgx = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, sau $tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, care are mulțimea soluțiilor $x = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \pi n$, $n \in Z$, sau $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

5. $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2m)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2m$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4x_1x_2 + 2x_2 + 3x_2 - 2x_1 - 4x_1x_2 - 3x_1 =$$

$5x_2 - 5x_1 = 5(x_2 - x_1) = 5(2m - 2m) = 0$, pentru orice $m \in R$.

■ **RĂSPUNS:** Propoziția este adevărată.

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 30^\circ$ și cateta $AC = a$, atunci ipotenuza $BC = 2a$. Conform teoremei lui Pitagora avem $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$. Atunci $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$, sau $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

■ **RĂSPUNS:** Raportul lungimilor catetelor este $\sqrt{3}$ sau $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ cu una dintre baze triunghiul echilateral ABC. Dacă latura triunghiului echilateral are lungimea a, atunci raza cercului circumscris triunghiului este $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $a = 18$. Deci, latura triunghiului din baza prismei are lungimea $18cm$. Fie înălțimea prismei egală cu h. Atunci $A_{lat} = 3\cdot 18\cdot h$. Obținem $54h = 270$ $\Rightarrow$ $h = 5cm$. Aria bazei prismei este $A_{baz} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{18^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{324\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}\,cm^2$. Volumul prismei este $V = A_{baz}\cdot h = 81\sqrt{3}\cdot 5 = 405\sqrt{3}\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V = 405\sqrt{3}\,cm^3$.

8. Fie trapezul $ABCD$ cu $BC \parallel AD$, în care $m(\angle BAD) = 90^\circ$, rezultă că trapezul este dreptunghic. Fie M, N și P punctele de tangență ale cercului înscris în trapez cu laturile CD, BC și respectiv AD. Atunci $OM \perp CD$, $ON \perp BC$, $OP \perp AD$ și OM, ON, OP sunt raze ale cercului, deci NP este înălțime a trapezului. Deoarece

O este centrul cercului înscris în trapez, rezultă că $(CO$ este bisectoare a unghiului BCD, iar $(DO$ este bisectoare a unghiului ADC, deci $m(\angle OCD)=\frac{1}{2}m(\angle BCD)$, $m(\angle ODC)=\frac{1}{2}m(\angle ADC)$. Dar $m(\angle BCD)+m(\angle ADC)=180^\circ$, atunci $m(\angle OCD)+m(\angle ODC)=90^\circ \Rightarrow m(\angle COD)=90^\circ$, deci triunghiul COD este dreptunghic cu ipotenuza CD. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul COD, avem $CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\,cm$. În triunghiul dreptunghic COD, OM este înălțime corespunzătoare ipotenuzei, atunci $OM=\frac{OC\cdot OD}{CD}=\frac{2\cdot 4}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}cm$. Așadar raza cercului are lungimea $R=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Înălțimea trapezului este $NP=2R=\frac{8}{\sqrt{5}}cm \Rightarrow AB=\frac{8}{\sqrt{5}}cm$. Deoarece cercul este înscris în trapez, rezultă că $BC+AD=AB+CD$ $\Rightarrow BC+AD=\frac{8}{\sqrt{5}}+2\sqrt{5}=\frac{18}{\sqrt{5}}cm$. Aria trapezului $ABCD$ este $A=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{\sqrt{5}}\cdot\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{72}{5}cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A=\frac{72}{5}cm^2$.

9. Avem $a_{n+1}=\frac{2(n+1)+5}{n+1+1}=\frac{2n+2+5}{n+2}=\frac{2n+7}{n+2}$. Precăutăm semnul diferenței $a_{n+1}-a_n$. Avem $a_{n+1}-a_n=\frac{2n+7}{n+2}-\frac{2n+5}{n+1}=\frac{(2n+7)(n+1)-(2n+5)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=$

$$\frac{2n^2+2n+7n+7-2n^2-4n-5n-10}{(n+2)(n+1)}=\frac{-3}{(n+2)(n+1)}<0.$$

Așadar, $a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n$, deci șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

■ **RĂSPUNS:** Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

10. $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1.$

Rezultă că dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. Analog se obține că dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$. Dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la dreapta.

■ **RĂSPUNS:** Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală la $+\infty$, dreapta $y=-1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$, dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală la dreapta.

b) Avem $f'(x)=\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}\right)'=\frac{(x+2)'\cdot\sqrt{x^2-1}-(x+2)\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-(x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(x^2-1)'}{x^2-1}=\frac{\sqrt{x^2-1}-(x+2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x}{x^2-1}=$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{x^2-1-x^2-2x}{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}=\frac{-2x-1}{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}.$$ Așadar,

$f'(x)=\frac{-2x-1}{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}$. Aflăm punctele critice ale funcției f, Rezolvând ecuația $f'(x)=0$, sau $\frac{-2x-1}{(x^2-1)\cdot\sqrt{x^2-1}}=0$, de unde $-2x-1=0$, și $x=-\frac{1}{2}$.

Dar $x=-\frac{1}{2}\notin D$, deci funcția nu are puncte critice, deci nu are nici puncte de extrem. Pentru $x\in(-\infty;-1)$ avem $f'(x)>0$, iar pentru $x\in(1;+\infty)$ avem $f'(x)<0$. Obținem că pe intervalul $(-\infty;-1)$ funcția f este crescătoare, iar pe intervalul $(1;+\infty)$ funcția f este descrescătoare. Funcția f nu are puncte de extrem local.

■ **RĂSPUNS:** Funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty;-1)$ și este descrescătoare pe intervalul $(1;+\infty)$. Funcția f nu are puncte de extrem local.

c) $F(x)=\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx+2\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\sqrt{x^2-1}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|.$

Atunci aria este $A=F(3)-F(2)=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right)(u.p)$.

■ **RĂSPUNS:** $A=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}}\right)(u.p)$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=6\cdot 6=36$. Perechile de numere de pe fețele apărute care în sumă ne dau un număr prim sunt: $(1;1)$, $(1;2)$, $(1;4)$, $(1;6)$, $(2;1)$, $(2;3)$, $(2;5)$, $(3;2)$, $(3;4)$, $(4;1)$, $(4;3)$, $(5;2)$, $(5;6)$, $(6;1)$, $(6;5)$, în total 15 perechi, deci $m=15$. Atunci probabilitatea va fi $p=\frac{m}{n}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{5}{12}$.

12. Deoarece suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 128, rezul[...] că $2^n=128$, sau $2^n=2^7$, de unde $n=7$. Atunci avem dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$[...] sau $\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^7$. Conform formulei termenului general al dezvoltării ave[...]

$T_{k+1}=C_7^k\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_7^k\cdot x^{\frac{21-3k}{2}}\cdot x^{-\frac{k}{3}} = C_7^k\cdot x^{\frac{21-3k}{2}-\frac{k}{3}}$. Deoarece termen[...] dezvoltării trebuie să-l conțină pe x^5, obținem $\frac{21-3k}{2}-\frac{k}{3}=5$, de unde $k=$[...]
Atunci termenul căutat va fi $T_4=C_7^3x^5 = 35x^5$.

■ **RĂSPUNS:** $T_4=35x^5$.

TESTUL 5

ALGEBRA

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+\log_3\sqrt{27}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\begin{vmatrix}3\cdot 2^x & 2^x\\ 2 & 2\end{vmatrix}=32$.

3. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $z+2\cdot\bar{z}=3-2i$, unde $\bar{z}$ reprezintă conjugatul numărului complex z

4. Rezolvați în R inecuația $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}2-\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3(1-\sin x)=1+\cos 2x$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $AC=8cm$, $BC=16cm$. Dacă $(CD$ este bisectoarea unghiului ACB, să se afle $m(\angle ACD)$.

7. În triunghiul ABC, $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle B)=30^\circ$. În triunghi este înscris cercul $C(O;R)$ cu raza de $\sqrt{3}\,cm$. Să se afle distanța de la vârful C la punctul de tangență al cercului cu cateta AB.

8. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu baza de $6cm$ și înălțimea corespunzătoare bazei de $9cm$. Toate muchiile laterale ale piramidei au lungimile de câte $13cm$. Determinați volumul piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se afle numerele întregi pozitive x, pentru care numerele $x-5$, $x-1$, $x+11$, în această ordine, sunt în progresie geometrică.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x^2+a}{bx-1}$, $a,b\in R$.

$a)$ Să se determine parametrii reali a și b, astfel încât punctele de abscise $x=-1$ și $x=3$ să fie puncte de extrem local pentru funcția f.

b) Cu a și b determinați la punctul *a*), scrieți ecuațiile asimptotelor la graficu[l] funcției f.

c) Determinați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersecteaz[ă] asimptota oblică în punctul de abscisă $x=3$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 se formează aleator un număr natural de șapte cifr[e] distincte două câte două. Determinați probabilitatea ca primele patru cifre al[e] numărului să fie numere naturale prime.

12. Aflați termenul care-l conține pe x^6 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$, știind c[ă] suma coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 2048.

SOLUȚII

1. $E=\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+\log_3\sqrt{27}=\frac{7}{2}+\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cdot\log_3 3=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$.

■ **RĂSPUNS:** $E=5$.

2. $\begin{vmatrix}3\cdot 2^x & 2^x\\ 2 & 2\end{vmatrix}=32 \Leftrightarrow 6\cdot 2^x-2\cdot 2^x=32 \Leftrightarrow 4\cdot 2^x=32 \Leftrightarrow 2^x=8 \Leftrightarrow 2^x=2^3$

$\Rightarrow x=3$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{3\}$.

3. Fie $z=a+bi$, $a,b\in R$, atunci $\bar{z}=a-bi$. Atunci ecuația din enunț se scrie: $a+bi+2(a-bi)=3-2i \Leftrightarrow a+bi+2a-2bi=3-2i \Leftrightarrow 3a-bi=3-2i$. Folosind definiția egalității a două numere complexe, obținem $3a=3$, de unde $a=1$ și $-b=-2$, de unde $b=2$. Așadar, $z=1+2i$.

■ **RĂSPUNS:** $z=1+2i$.

4. *DVA* al inecuației se determină din condițiile $\begin{cases}4-x>0\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<4\\ x>1\end{cases}$, deci $DVA=(1;\,4)$. Obținem $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)\geq\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1} \Leftrightarrow 4-x\leq\frac{2}{x-1}$. Deoarece $x\in(1;\,4) \Rightarrow x-1>0$, și atunci obținem $(4-x)(x-1)\leq 2 \Leftrightarrow -x^2+5x-6\leq 0$ $\Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0$. Folosind metoda intervalelor, obținem mulțimea soluțiilor ultimei inecuații: $x\in(-\infty;\,2]\cup[3;\,+\infty)$. Ținând cont de *DVA*, obținem mulțimea soluțiilor inecuației inițiale: $S=(1;\,2]\cup[3;\,4)$.

■ **RĂSPUNS:** $S=(1;\,2]\cup[3;\,4)$.

5. $3(1-\sin x)=1+\cos 2x \Leftrightarrow 3(1-\sin x)=\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow$ $3(1-\sin x)=2\cos^2 x \Leftrightarrow 3(1-\sin x)=2(1-\sin^2 x) \Leftrightarrow 3-3\sin x=2-2\sin^2 x$ $\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+1=0$. Notăm $\sin x=t$ și obținem ecuația de gradul al doilea $2t^2-3t+1=0$ cu soluțiile $t_1=\frac{1}{2}$ și $t_2=1$. Obținem ecuațiile trigonometrice $\sin x=\frac{1}{2}$ și $\sin x=1$. Ecuația $\sin x=\frac{1}{2}$ are mulțimea soluțiilor $x_1=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n$, $n\in Z$ sau $x_1=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. Ecuația $\sin x=1$ are mulțimea soluțiilor $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $x_1=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

6. Deoarece triunghiul ABC este dreptunghic și $AC=\frac{1}{2}BC$, rezultă că $m(\angle ABC)=30^\circ$, atunci $m(\angle ACB)=60^\circ$, și deoarece $(CD$ este bisectoare, rezultă că $m(\angle ACD)=30^\circ$.

■ **RĂSPUNS:** $m(\angle ACD)=30^\circ$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle B)=30^\circ$, în care este înscris cercul $C(O;\,R)$ cu raza $R=\sqrt{3}\,cm$. Atunci $m(\angle C)=60^\circ$. Fie M și N punctele de tangență ale cercului înscris cu catetele AC și respectiv AB. Atunci avem $OM\perp AC$, $ON\perp AB$, și deoarece OM și ON sunt raze, rezultă că $OM=ON=\sqrt{3}\,cm$. Patrulaterul $AMON$ este pătrat $\Rightarrow AM=AN=\sqrt{3}\,cm$. Deoarece cercul $C(O;\,R)$ este înscris în triunghiul ABC, rezultă că $(CO$ este bisectoarea unghiului $C \Rightarrow m(\angle OCM)=30^\circ$. Din triunghiul dreptunghic OCM avem $OC=2OM=2\sqrt{3}\,cm$. La fel din triunghiul dreptunghic OCM, conform teoremei lui Pitagora obținem $MC=\sqrt{OC^2-OM^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$ $\sqrt{12-3}=3\,cm$. Atunci $AC=AM+MC=\left(\sqrt{3}+3\right)cm$.

Din triunghiul dreptunghic ANC, conform teoremei lui Pitagora avem $NC=\sqrt{AC^2+AN^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}+3\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{15+6\sqrt{3}}\,cm$.

■ **RĂSPUNS:** $NC=\sqrt{15+6\sqrt{3}}\,cm$.

8. Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu vârful V şi baza triunghiul isoscel ABC cu $AB = BC$ şi baza $AC = 6cm$. BM este înălţimea corespunzătoare bazei în triunghiul ABC, $M \in (AC)$, $BM = 9cm$. BM este şi mediană corespunzătoare bazei AC în triunghiul ABC, deci $AM = MC = 3cm$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABM avem $AB = \sqrt{BM^2 + AM^2} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\,cm$. Deci, $AB = BC = 3\sqrt{10}\,cm$. Deoarece toate muchiile laterale sunt congruente, rezultă că piciorul înălţimii piramidei coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC din baza piramidei. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, atunci VO este înălţimea piramidei. Raza cercului o aflăm folosind formula $R = \frac{abc}{4 \cdot A}$. Aflăm aria triunghiului ABC: $A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27cm^2$.
Atunci $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot A_{ABC}} = \frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 6}{4 \cdot 27} = 5cm$. $VA = VB = VC = 13cm$, $OA = OB = OC = 5cm$ ca raze. Din triunghiul dreptunghic VOA, conform teoremei lui Pitagora, avem $VO = \sqrt{VA^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12cm$. Atunci volumul piramidei este $V = \frac{1}{3} \cdot A_{baz} \cdot VO = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 12 = 108cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V = 108cm^3$.

9. Conform proprietăţii caracteristice a progresiei geometrice avem:
$(x-1)^2 = (x-5)(x+11) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 11x - 5x - 55 \Leftrightarrow -8x = -56$, de unde $x = 7$.

■ **RĂSPUNS:** $x = 7$.

10. *a)* $f'(x) = \left(\frac{x^2+a}{bx-1}\right)' = \frac{(x^2+a)' \cdot (bx-1) - (bx-1)'(x^2-a)}{(bx-1)^2} = \frac{2x(bx-1) - b(x^2+a)}{(bx-1)^2} = \frac{2bx^2 - 2x - bx^2 - ab}{(bx-1)^2} = \frac{bx^2 - 2x - ab}{(bx-1)^2}$. Deoarece $x = -1$ şi $x = 3$ sunt puncte de extrem local, obţinem $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases}$, sau $\begin{cases} b + 2 - ab = 0 \\ 9b - 6 - ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - ab = -2 \\ 9b - ab = 6 \end{cases}$.
Rezolvând ultimul sistem de ecuaţii obţinem $a = 3$ şi $b = 1$.

■ **RĂSPUNS:** $a = 3$, $b = 1$.

b) Pentru $a = 3$ şi $b = 1$, avem funcţia $f : R \setminus \{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$, rezultă că nu există asimptote orizontale la $-\infty$ şi la $+\infty$. Verificăm dacă există asimptote oblice. Dacă $x \to +\infty$,

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$. $n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2 + x}{x-1} = 1$. Aşadar, dreapta de ecuaţie $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Analog se obţine că dreapta de ecuaţie $y = x + 1$ este asimptotă oblică şi la $-\infty$. $L_s(1) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$, $L_d(1) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$, rezultă că dreapta de ecuaţie $x = 1$ este asimptotă verticală.

■ **RĂSPUNS:** Dreapta de ecuaţie $y = x + 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$, dreapta de ecuaţie $x = 1$ este asimptotă verticală.

c) $F(x) = \int \frac{x^2+3}{x-1} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 4}{x-1} dx = \int \frac{x^2-1}{x-1} dx + \int \frac{4}{x-1} dx = \int (x+1) dx + 4\int \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-1| + c$. Dacă graficul lui $F(x)$ se intersectează cu dreapta $y = x + 1$ în punctul cu abscisa $x = 1$, rezultă că $y(3) = 4$, atunci $F(3) = 4$. Obţinem $\frac{9}{2} + 3 + 4\ln 2 + c = 4$, de unde $c = -\frac{7}{2} - 4\ln 2$. Atunci $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{7}{2} - 4\ln 2$.

■ **RĂSPUNS:** $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{7}{2} - 4\ln 2$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n = P_7 = 7!$. Deoarece printre cele 7 numere sunt 4 numere prime, atunci numărul cazurilor favorabile este $P_4 \cdot P_3$. Atunci probabilitatea va fi $P = \frac{P_4 \cdot P_3}{P_7} = \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{4! \cdot 6}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{35}$.

■ **RĂSPUNS:** $P = \frac{1}{35}$.

12. Deoarece suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este egală cu 2048, rezultă că $2^n = 2048$, sau $2^n = 2^{11}$, de unde $n = 11$. Atunci avem dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{11}$, sau $\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^{11}$. Aplicând formula termenului general al dezvoltării obţinem $T_{k+1} = C_{11}^k \cdot \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{11-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^k = C_{11}^k \cdot x^{\frac{33-3k}{2}} \cdot x^{-\frac{k}{4}} = C_{11}^k \cdot x^{\frac{33-3k}{2} - \frac{k}{4}}$.
Deoarece termenul trebuie să-l conţină pe x^6, obţinem $\frac{33-3k}{2} - \frac{k}{4} = 6$, de unde $k = 6$. Atunci avem $T_7 = C_{11}^6 x^6 = 462x^6$.

■ **RĂSPUNS:** $T_7 = 462x^6$.

TESTUL 6

ALGEBRA

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt[4]{27}\cdot 9^{\frac{1}{8}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$.

2. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\sqrt{8-2x}\le 2$.

3. Se consideră polinomul $P(X)=X^3+aX^2-5X+6$, unde $a\in R$. Știind că $X=-2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-4$.

4. Să se rezolve în C ecuația $z^2-2(1-i)z+1-2i=0$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+8\cos^2 x=2$.

GEOMETRIE

6. Punctele A, B, C se află pe cercul C cu centrul în O și raza $R=5$ *cm*, astfel încât $m(\angle BAC)=30^\circ$. Să se afle perimetrul triunghiului BOC.

7. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[BC]$, $AC=15cm$ și $AE\perp BC$, $AE=12cm$. Să se afle aria triunghiului ABC.

8. Lungimile laturilor bazei unei prisme triunghiulare drepte sunt de $10cm$, $17cm$ și $21cm$, iar volumul prismei este egal cu $1512cm^3$. Calculați aria secțiunii ce trece prin muchia laterală a prismei și înălțimea mai mică a triunghiului din baza prismei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați numerele întregi a și b știind că numerele 2; a; 8; 11; b, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}$.

a) Determinați parametrii reali a, b, c, d, astfel încât graficul funcției să admită asimptotele $x=3$ și $y=x+2$, iar punctul $A(1;1)$ să se afle pe graficul funcției f.

b) Să se afle intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f, cu a, b, c, d determinați la punctul *a*).

c) Fie $F(x)$ primitiva funcției $f(x)$ determinate la punctul *a*). Dacă $x=2$ este zerou al funcției $F(x)$, să se afle $F(4)$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 7 bile de coloare roșie și 5 bile de culoare verde. Se extrag la întâmplare 5 bile. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase să fie 3 de culoare roșie și 2 de culoare verde.

12. Fie dezvoltarea $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$. Aflați termenul dexvoltării care nu-l conține pe x, știind că suma primilor trei coeficienți (nu binomiali) ai dezvoltării este egală cu 49.

SOLUȚII

1. $E=\sqrt[4]{27}\cdot 9^{\frac{1}{8}}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\sqrt[4]{3^3}\cdot\left(3^2\right)^{\frac{1}{8}}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=3^{\frac{3}{4}}3^{\frac{1}{4}}-\frac{4}{9}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

■ **RĂSPUNS:** $E=\frac{5}{9}$.

2. Fie inecuația $\sqrt{8-2x}\le 2$. DVA al inecuației se află din condiția $8-2x\ge 0 \Leftrightarrow -2x\ge -8 \Leftrightarrow x\le 4$, deci $DVA=(-\infty;\ 4]$. Ridicând ambele părți ale inecuației din enunț la puterea a doua obținem $8-2x\le 4 \Leftrightarrow -2x\le -4 \Leftrightarrow x\ge 2$. Ținând cont de DVA, obținem mulțimea soluțiilor inecuației inițiale $S=[2;\ 4]$.

■ **RĂSPUNS:** $S=[2;\ 4]$.

3. Deoarece $X=-2$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, rezultă că $P(-2)=0$. Obținem $-8+4a+10+6=0$, de unde $a=-2$. Atunci avem polinomul $P(X)=X^3-2X^2-5X+6$. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-4$ este egal cu $P(4)$. Avem $r=P(4)=64-32-20+6=18$.

■ **RĂSPUNS:** $r=18$.

4. $\Delta=b^2-4ac=\left[-2(1-i)\right]^2-4\cdot 1\cdot(1-2i)=4(1-i)^2-4\cdot(1-2i)=4\left(1-2i+i^2\right)-4(1-2i)=4\cdot(-2i)-4+8i=-8i-4+8i=-4$.

Aşadar, $\Delta=-4$. $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(1-i)-\sqrt{-4}}{2\cdot 1}=\frac{2-2i-2i}{2}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$

$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2(1-i)+\sqrt{-4}}{2\cdot 1}=\frac{2-2i+2i}{2}=1$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{1;\,1-2i\}$.

5. Pentru a reduce ecuaţia din enunţ la o ecuaţie trigonometrică omogenă de gradul doi, folosim identitatea $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ şi obţinem $3\sin^2 x-5\sin x\cos x+8\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)$. După unele transformări obţinem ecuaţia $\sin^2 x-5\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$. Împărţind ambele părţi ale ultimei ecuaţii la $\cos^2 x$, obţinem ecuaţia $tg^2x-5tgx+6=0$. Notăm $tgx=t$ şi avem ecuaţia de gradul doi $t^2-5t+6=0$ cu soluţiile $t_1=2$ şi $t_2=3$. Obţinem ecuaţiile trigonometrice $tgx=2$ şi $tgx=3$. Prima ecuaţie are mulţimea soluţiilor $x_1=arctg2+\pi n$, $n\in Z$, a doua ecuaţie are mulţimea soluţiilor $x_2=arctg3+\pi k$, $k\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $x_1=arctg2+\pi n$, $n\in Z$; $x_2=arctg3+\pi k$, $k\in Z$.

6. Unghiul BAC este unghi înscris în cerc, şi deoarece $m(\angle BAC)=30^\circ$, rezultă că măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ este egală cu 60°. Atunci măsura unghiului la centru BOC este egală cu 60°. Rezultă că triunghiul BOC este echilateral cu latura de lungime $5cm$. Perimetrul triunghiului BOC este $P_{BOC}=3\cdot 5=15cm$.

■ **RĂSPUNS:** $P_{BOC}=15cm$.

7. Fie triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[BC]$, $AC=15cm$, $AE\perp BC$, $AE=12cm$ $\Rightarrow$ $[AE]$ este înălţime în triunghiul ABC. Din triunghiul dreptunghic AEC, folosind teorema lui Pitagora, obţinem $EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9cm$.

Notăm $BE=x$, atunci $BC=x+9$ $\Rightarrow$ $AB=x+9$. În triunghiul dreptunghic ABE, aplicând teorema lui Pitagora, avem: $AB^2=BE^2+AE^2$ $\Rightarrow$ $(x+9)^2=x^2+12^2$ $\Rightarrow$ $x^2+18x+81=x^2+144$ $\Leftrightarrow$ $18x=63$, de unde $x=\frac{63}{18}=\frac{7}{2}$. Atunci $BC=\frac{7}{2}+9=\frac{25}{2}cm$. Aria triunghiului ABC este $A=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot 12=75cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A=75cm^2$.

8. Fie prisma triunghiulară dreaptă $ABCA_1B_1C_1$ cu o bază triunghiul ABC cu $AB=10cm$, $BC=17cm$, $AC=21cm$. Aflăm aria triunghiului ABC. Semiperimetrul triunghiului ABC este $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{10+17+21}{2}=24cm$. Aflăm aria triunghiului ABC folosind formula lui Heron: $A=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=\sqrt{24(24-10)(24-17)(27-21)}=84cm^2$. Volumul prismei este $V=A_{baz}\cdot H=84\cdot H$, unde H este înălţimea prismei. Obţinem $84\cdot H=1512$, de unde $H=18cm$. Cea mai mică înălţime a triunghiului ABC din baza prismei este înălţimea corespunzătoare laturii $AC=21cm$. Avem $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h_{AC}=84$, sau $\frac{1}{2}\cdot 21\cdot h_{AC}=84$, de unde $h_{AC}=8cm$. Atunci aria secţiunii este $A_s=AA_1\cdot h_{AC}=18\cdot 8=144cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_s=144cm^2$.

9. Conform proprietăţii caracteristice a progresiei aritmetice avem $a=\frac{2+8}{2}=5$. Raţia progresiei este $a-2=5-2=3$. Atunci $b=11+3=14$.

■ **RĂSPUNS:** $a=5$, $b=14$.

10. *a*) Deoarece $x=3$ este asimptotă verticală, rezultă că $d=-3$. Atunci funcţia f se scrie $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-3}$. Asimptota oblică la $-\infty$ sau la $+\infty$ are ecuaţia $y=mx+n$. În cazul nostru $m=1$, $n=2$. Avem $m=\lim\limits_{x\to\pm}\frac{f(x)}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-3x}=a$. Din $m=a$ şi $m=1$, rezultă că $a=1$. Atunci funcţia f devine $f(x)=\frac{x^2+bx+c}{x-3}$. $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+bx+c}{x-3}-x\right)=$ $\lim\limits_{x\to\pm}\frac{x^2+bx+c-x^2+3x}{x-3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(b+3)x+c}{x-3}=b+3$. Aşadar, $n=b+3$, dar pe de altă parte $n=2$, rezultă $b+3=2$, de unde $b=-1$. Atunci avem funcţia $f(x)=\frac{x^2-x+c}{x-3}$. Deoarece punctul $A(1;\,1)$ se află pe graficul funcţiei f, rezultă că $f(1)=1$. Obţinem $\frac{1-1+c}{1-3}=1$, de unde $c=-2$. În final obţinem funcţia $f:R\setminus\{3\}\to R$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-3}$.

■ **RĂSPUNS:** $a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=-3$.

b) Avem $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-3}$, $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x-2}{x-3}\right)'=$ $\dfrac{(x^2-x-2)'\cdot(x-3)-(x-3)'\cdot(x^2-x-2)}{(x-3)^2}=$ $\dfrac{(2x-1)(x-3)-x^2+x+2}{(x-3)^2}=$ $\dfrac{2x^2-6x-x+3-x^2+x+2}{(x-3)^2}=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$. Aflăm punctele critice ale funcției f Rezolvând ecuația $f'(x)=0$, adică $\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=0$. Obținem $x^2-6x+5=0$, de unde $x_1=1$, $x_2=5$. Completând tabloul de variație al funcției f, obținem că $f'(x)>0$ pe intervalele $(-\infty;1)$ și $(5;+\infty)$, și $f'(x)<0$ pe intervalele $(1;3)$ și $(3;+5)$. Așadar, funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;1)$ și $(5;+\infty)$, și este descrescătoare pe intervalele $(1;3)$ și $(3;5)$. Punctul $A(1;1)$ este punct de maxim local, punctul $B(5;9)$ este punct de minim local.

■ **RĂSPUNS:** Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;1)$ și $(5;+\infty)$, și este descrescătoare pe intervalele $(1;3)$ și $(3;5)$. Punctul $A(1;1)$ este punct de maxim local, punctul $B(5;9)$ este punct de minim local.

c) $F(x)=\int\dfrac{x^2-x-2}{x-3}dx=$ $\int\left(x+2+\dfrac{4}{x-3}\right)dx=$ $\dfrac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-3|+c$. Deoarece $x=2$ este zerou pentru funcția $F(x)$, rezultă că $F(2)=0$, sau $\dfrac{2^2}{2}+2\cdot2+4\ln1+c=0$, de unde $c=-6$. Atunci avem $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-3|-6$. Rezultă $F(4)=\dfrac{4^2}{2}+2\cdot4+4\ln1-6=10$.

■ **RĂSPUNS:** $F(4)=10$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_{12}^5=\dfrac{12!}{5!\cdot7!}=\dfrac{7!\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7!}=792$.

Numărul cazurilor favorabile este $m=C_7^3\cdot C_5^2=350$. Atunci probabilitatea este $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{350}{792}=\dfrac{175}{396}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\dfrac{175}{396}$.

12. Conform formulei binomului lui Newton avem $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n=(x^2-2x^{-1})n=$ $C_n^0(x^2)^n-C_n^1(x^2)^{n-1}\cdot2x^{-1}+C_n^2(x^2)^{n-2}\cdot(2x^{-1})^2-\ldots=$

$1\cdot x^{2n}-2n\cdot x^{2n-3}+4\cdot\dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!}-\ldots$. Suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este $1-2n+4\cdot\dfrac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=$ $1-2n+4\cdot\dfrac{(n-2)!}{2(n-2)!}=$ $1-2n+2(n^2-n)=$ $2n^2-4n+1$. Obținem $2n^2-4n+1=49$ $\Leftrightarrow$ $2n^2-4n-48=0$ $\Leftrightarrow$ $n^2-2n-24=0$. Ultima ecuație are soluțiile $n_1=-4$ (nu convine) și $n=6$. Atunci avem dezvoltarea $(x^2-2x^{-1})^6$. Folosind formula termenului general al dezvoltării avem $T_{k+1}=(-1)^k\cdot C_6^k(x^2)^{6-k}\cdot(2x^{-1})^k=$ $(-1)^k\cdot C_6^k\cdot x^{12-2k}\cdot2^k\cdot x^{-k}=$ $(-1)^k\cdot C_6^k\cdot2^k\cdot x^{12-3k}$. Deoarece termenul dezvoltării nu trebuie să-l conțină pe x, rezultă că $12-3k=0$, de unde $k=4$. Termenul căutat este $T_5=(-1)^4\cdot C_6^4\cdot2^4=15\cdot16=240$.

■ **RĂSPUNS:** $T_5=240$.

TESTUL 7

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(\sqrt{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-\log_{25}5$.

2. Să se afle produsul dintre partea reală și partea imaginară a numărului compl
$z=\dfrac{2-3i}{4+2i}\cdot(4-i)$.

3. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}$.

4. Determinați valoarea expresiei $E=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$, știind că $\sin x=\dfrac{3}{5}$ și
$x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

5. Polinomul $P(X)$ se împarte la polinomul $Q(X)=X^2-1$, obținându-se câtu
$C(X)=X^3-X+1$. Determinați polinomul $P(X)$, știind că $P(2)=6$ și
$P(-2)=2$.

GEOMETRIE

6. Aria bazei unui cilindru circular drept este egală cu aria laterală și este egală cu $36\pi\, cm^2$. Determinați volumul cilindrului.

7. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu lungimile catetelor egale cu $12cm$ și $16cm$, iar volumul piramidei este egal cu $640cm^3$. Toate muchiile laterale ale piramidei sunt congruente. Să se afle lungimea muchiei laterale a piramidei.

8. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=11cm$ și $BC=3\sqrt{3}\,cm$. Aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului ABC este egală cu $49\pi\, cm^2$. Să se afle măsura unghiului ABC al triunghiului ABC.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia și mărginirea șirului $(a_n)_{n\ge1}$ cu termenul general $a_n=\dfrac{3n+8}{2n}$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-2}$.
 a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
 b) Arătați că funcția f admite două puncte de extrem $(x_1; f(x_1))$, $(x_2; f(x_2))$ și calculați $f(x_1)+f(x_2)$.
 c) Calculați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x=5$ și $x=7$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. O urnă conține x bile negre ($x\ge2$), 5 bile albe și 2 bile de culoare violetă. Toate bilele sunt identice ca mărime. La întâmplare, din urnă se extrag 2 bile. Fie $P(x)$ probabilitatea ca ambele bile extrase vor fi de aceeași culoare. Demonstrați că $P(x)=\dfrac{x^2-x+22}{(x+7)(x+6)}$.

12. Să se afle termenul al șaselea al dezvoltării $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali de rang par ai dezvoltării este egală cu 256.

SOLUȚII

1. $E=\left(\sqrt{8}\right)^{-\frac{2}{3}}-\log_{25}5=\left(\sqrt{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}}-\log_{5^2}5=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{2}\log_5 5=2^{-1}-\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$.

■ **RĂSPUNS:** $E=0$.

2. $z=\dfrac{(2-3i)\cdot(4-i)}{4+2i}=\dfrac{8-2i-12i+3i^2}{4+2i}=\dfrac{8-14i-3}{4+2i}=\dfrac{5-14i}{4+2i}=\dfrac{(5-14i)\cdot(4-2i)}{(4+2i)\cdot(4-2i)}=$
$\dfrac{20-10i-56i+28i^2}{16-4i^2}=\dfrac{20-66i-28}{16+4}=\dfrac{-8-66i}{20}=-\dfrac{8}{20}-\dfrac{66}{20}i=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{33}{10}i$. Atunci
$P=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z=-\dfrac{2}{5}\cdot\left(-\dfrac{33}{10}\right)=\dfrac{33}{25}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\dfrac{33}{25}$.

3. $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}\Leftrightarrow 5^{|4x-6|}=\left(5^2\right)^{3x-4}\Leftrightarrow 5^{|4x-6|}=5^{6x-8}\Leftrightarrow |4x-6|=6x-8$. Se impune condiția $6x-8\ge0$, adică $x\ge\dfrac{4}{3}$. Ultima ecuație este echivalentă cu

totalitatea $\left[\begin{array}{l}4x-6=6x-8\\4x-6=-6x+8\end{array}\right.$. Prima ecuație are soluția $x=1$, care nu satisface condiția $x\geq\frac{4}{3}$. A doua ecuație are soluția $x=\frac{7}{5}$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\left\{\frac{7}{5}\right\}$.

4. Deoarece $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow\sin x>0$ și $\cos x<0$. Din relația $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, obținem $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$.

Aplicând formula $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, obținem:

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{4\sqrt{3}}{10}-\frac{3}{10}=-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

■ **RĂSPUNS:** $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

5. Deoarece împărțitorul este un polinom de gradul 2, rezultă că restul va fi un polinom de grad cel mult 1. Fie restul $R(X)=aX+b$. Atunci conform teoremei împărțirii cu rest avem: $P(X)=(X^2-1)(X^3-X+1)+aX+b$. Conform enunțului avem $\begin{cases}P(2)=6\\P(-2)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}21+2a+b=6\\-15-2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}2a+b=-15\\-2a+b=17\end{cases}$. Rezolvând ultimul sistem obținem $a=-8,\ b=1$. Atunci avem $P(X)=(X^2-1)(X^3-X+1)-8X+1$. Aducând $P(X)$ la forma canonică, obținem $P(X)=X^5-2X^3+X^2-7X$

■ **RĂSPUNS:** $P(X)=X^5-2X^3+X^2-7X$.

6. Fie un cilindru circular drept cu raza bazei R și înălțimea H, în care $A_{baz}=36\pi\,cm^2$ și aria laterală $A_{lat}=36\pi\,cm^2$. Din $A_{baz}=36\pi\,cm^2$, rezultă $\pi R^2=36\pi\Rightarrow R^2=36$, de unde $R_1=-6$ (nu convine) și $R=6cm$. Din $A_{lat}=36\pi\,cm^2$, rezultă $2\pi RH=36\pi$, de unde $H=3cm$. Atunci volumul cilindrului este $V=\pi R^2H=\pi\cdot6^2\cdot3=108\pi\,cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=108\pi\,cm^3$.

7. Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu vârful V și baza triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și catetele $AB=12cm$ și $AC=16cm$. Din triunghiul dreptunghic ABC, conform teoremei lui Pitagora aflăm $BC=20cm$. Deoarece toate muchiile laterale ale piramidei sunt congruente, rezultă că piciorul înălțimii piramidei coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului din baza piramidei. Dar centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC este mijlocul ipotenuzei $[BC]$. Așadar, $VO\perp BC$, unde O este mijlocul ipotenuzei $[BC]$, deci $BO=OC=10cm$. Aria triunghilui dreptunghic ABC din baza piramidei este $A_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot12\cdot16=96cm^2$. Volumul piramidei este $V=\frac{1}{3}\cdot A_{baz}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot96\cdot VO=32\cdot VO$. Obținem $32\cdot VO=640\Rightarrow VO=20cm$. Din triunghiul dreptunghic VOB, conform teoremei lui Pitagora, avem $VB=\sqrt{VO^2+BO^2}=\sqrt{20^2+10^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}\,cm$.

■ **RĂSPUNS:** Muchia laterală are lungimea $10\sqrt{5}\,cm$.

8. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=11cm$, $BC=3\sqrt{3}\,cm$, astfel încât aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului ABC este egală cu $49\pi\,cm^2$. $A_{disc}=\pi R^2\Rightarrow\pi R^2=49\pi\Rightarrow R^2=49$, de unde $R=-7$ (nu convine) și $R=7cm$. Fie $m(\angle B)=x$. Conform teoremei sinusurilor în triunghiul ABC avem $\frac{AC}{\sin B}=2R$, sau $\frac{AC}{\sin x}=14$, de unde $AC=14\sin x$. Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul ABC avem $AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos B\Rightarrow$ $196\sin^2 x=11^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot11\cdot3\sqrt{3}\cdot\cos x\Rightarrow196\sin^2 x=148-66\sqrt{3}\cdot\cos x$ $\Leftrightarrow196\sin^2 x+66\sqrt{3}\cos x-148=0\Leftrightarrow98\sin^2 x+33\sqrt{3}\cdot\cos x-74=0\Leftrightarrow$ $98(1-\cos^2 x)+33\sqrt{3}\cdot\cos x-74=0\Leftrightarrow98-98\cos^2 x+33\sqrt{3}\cos x-74=0$ $\Leftrightarrow-98\cos^2 x+33\sqrt{3}\cos x+24=0\Leftrightarrow98\cos^2-33\sqrt{3}\cos x-24=0$. Notăm $\cos x=t$ și obținem ecuația de gradul al doilea în raport cu t: $98t^2-33\sqrt{3}t-24=0$. Discriminantul $\Delta=b^2-4ac=(-33\sqrt{3})^2-4\cdot98\cdot(-24)=3267+9408=12675$. Avem $\sqrt{12675}=65\sqrt{3}$. Atunci $t_1=\frac{33\sqrt{3}-65\sqrt{3}}{2\cdot98}=-\frac{32\sqrt{3}}{196}$, nu convine, deoarece $t=\cos x$, dar în cazul nostru $\cos x>0$. $t_2=\frac{33\sqrt{3}+65\sqrt{3}}{196}=\frac{98\sqrt{3}}{196}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Așadar, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $m(\angle x)=30^\circ$.

■ **RĂSPUNS:** $m(\angle ABC)=30^\circ$.

9. Avem $a_1=\frac{3\cdot1+8}{2\cdot1}=\frac{11}{2}$. Studiem monotonia șirului $(a_n)_{n\geq1}$. Avem $a_{n+1}=\frac{3(n+1)+8}{2(n+1)}=\frac{3n+11}{2n+2}$. Studiem semnul diferenței $a_{n+1}-a_n$. Obținem

$a_{n+1}-a_n=\frac{3n+11}{2n+2}-\frac{3n+8}{2n}=\frac{3n+11}{2(n+1)}-\frac{3n+8}{2n}=\frac{n(3n+11)-(n+1)(3n+8)}{2n(n+1)}=$
$\frac{3n^2+11n-3n^2-8n-3n-8}{2n(n+1)}=\frac{-8}{2n(n+1)}<0$. Aşadar, $a_{n+1}-a_n<0\Rightarrow a_{n+1}<a_n$, deci şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este descrescător. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n+8}{2n}=\frac{3}{2}$. Obţinem că şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit inferior şi superior şi $a_n\in\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right]$.

■ **RĂSPUNS:** Şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit şi $a_n\in\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right]$.

10. $D(f)=R\setminus\{2\}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x}{x-2}=-\infty$, deci graficul funcţiei nu are asimptote orizontale la $+\infty$ şi la $-\infty$. Verificăm dacă există asimptote oblice: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2-2x}=1$. Atunci $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-2}-x\right)=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x-2}=3$. Aşadar, $m=1$, $n=3$, deci dreapta de ecuaţie $y=x+3$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Analog se obţine că dreapta $y=x+3$ este asimptotă oblică şi la $-\infty$. Cercetăm dacă există asimptote verticale: $l_s(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2+x}{x-2}=\frac{6}{0^-}=-\infty$, iar $l_d(2)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x^2+x}{x-2}=\frac{6}{0^+}=+\infty$, rezultă că dreapta de ecuaţie $x=2$ este asimptotă verticală.

■ **RĂSPUNS:** Dreapta $y=x+3$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$, dreapta $x=2$ este asimptotă verticală.

b) $f'(x)=\left(\frac{x^2+x}{x-2}\right)'=\frac{(x^2+x)'\cdot(x-2)-(x-2)'\cdot(x^2+x)}{(x-2)^2}=\frac{(2x+1)(x-2)-x^2-x}{(x-2)^2}=$
$\frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$. Aflăm punctele critice ale funcţiei f, Rezolvând ecuaţia $f'(x)=0$, adică $\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}=0$, sau $x^2-4x-2=0$.

Ultima ecuaţie are soluţiile $x_1=2-\sqrt{6}$, $x_2=2+\sqrt{6}$. Din tabloul de variaţie al funcţiei f obţinem că $x_1=2-\sqrt{6}$ este punct de maxim local şi $f(x_1)=5-2\sqrt{6}$, iar $x_2=2+\sqrt{6}$ este punct de minim local şi $f(x_2)=5+2\sqrt{6}$. Obţinem $f(x_1)+f(x_2)=10$.

■ **RĂSPUNS:** $f(x_1)+f(x_2)=10$.

c) $A=\int_5^7\frac{x^2+x}{x-2}dx=\int_5^7\left(x+3+\frac{6}{x-2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x+6\ln|x-2|\right)\Big|_5^7=$
$\frac{49}{2}+21+6\ln5-\left(\frac{25}{2}+15+6\ln3\right)=12+6+6\ln\frac{5}{3}=\left(18+6\ln\frac{5}{3}\right)(u.p)$.

■ **RĂSPUNS:** $A=\left(18+6\ln\frac{5}{3}\right)(u.p)$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_{x+7}^2=\frac{(x+7)!}{2!\cdot(x+5)!}=\frac{(x+5)!\cdot(x+6)\cdot(x+7)}{2\cdot(x+5)!}=\frac{(x+6)(x+7)}{2}$. Numărul cazurilor favorabile este $m=C_x^2+C_5^2+C_2^2=\frac{(x-1)\cdot x}{2}+10+1=\frac{x^2-x}{2}+11=\frac{x^2-x+22}{2}$. Atunci

$$P(x)=\frac{m}{n}=\frac{\frac{x^2-x+22}{2}}{\frac{(x+6)(x+7)}{2}}=\frac{x^2-x+22}{(x+7)(x+6)}.$$

■ **RĂSPUNS:** $P(x)=\frac{x^2-x+22}{(x+6)(x+7)}$.

12. Deoarece suma coeficienţilor binomiali de rang par ai dezvoltării este egală cu 256, rezultă că $2^{n-1}=512\Rightarrow 2^{n-1}=2^8$, de unde $n-1=8$ şi $n=9$. Aşadar, avem dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^9$. Termenul al şaselea al dezvoltării este $T_6=T_{5+1}=C_9^5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^5=126\cdot2^2\cdot9\sqrt{3}=4536\sqrt{3}$.

■ **RĂSPUNS:** $T_6=4536\sqrt{3}$.

TESTUL 8

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\sqrt[3]{\log_3\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-2}}$.

2. Fie $D(x)=\begin{vmatrix}3^{x-1} & 27\\ 9 & 9^x\end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $D(x)=0$.

3. Calculați $\sin\alpha$, știind că $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$.

4. Să se afle numărul complex $z=x+yi$, dacă $|z|-z=1+4i$, unde $x,y\in R$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0$.

GEOMETRIE

6. Se consideră cercul $C(O;\,R)$. Punctele A și B se află pe cercul $C(O;\,R)$, astfel încât punctele A, O și B sunt colineare. Punctul C se află pe cerc, astfel încât $m(\angle ABC)=2\cdot m(\angle CAB)$. Dacă $BC=6cm$, să se afle lungimea cercului $C(O;\,R)$.

7. În triunghiul ABC avem $AC=20cm$, $[AM]$ și $[CN]$ sunt mediane, $M\in(BC)$, $N\in(AB)$. Știind că $AM=24cm$ și $CN=18cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

8. Lungimile laturilor bazei unui paralelipiped drept sunt egale cu $8cm$ și $15cm$, măsura unghiului dintre ele este egală cu 60°. Diagonala mai mică a paralelipipedului formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 30°. Aflați volumul paralelipipedului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi b_1, 6, b_3, 54, ...

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x-1}$, $a,b\in R$.

   a) Determinați parametrii reali a și b pentru care dreapta de ecuație $y=2x-1$ este asimptotă la graficul funcției f spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

   b) Pentru a și b determinați la punctul a) aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

   c) Fie $F(x)$ primitiva funcției $f(x)$. Dacă $x=2$ este un zerou al primitivei $F(x)$, să se afle celălalt zerou al primitivei $F(x)$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele naturale distincte de câte trei cifre cu cifre distincte două câte două. Să se afle probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr din cele formate, el să se dividă cu 4.

12. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 128. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe a^3.

SOLUȚII

1. $E=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\sqrt[3]{\log_3\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-2}}=3^2+\sqrt[3]{-2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=9+\sqrt[3]{-2-6}=9+\sqrt[3]{-8}=9-2=7$.

■ **RĂSPUNS:** $E=7$.

2. Avem $\begin{vmatrix}3^{x-1} & 27\\ 9 & 9^x\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3^{x-1}\cdot 9^x-9\cdot 27=0 \Leftrightarrow \frac{3^x\cdot 3^{2x}}{3}-243=0 \Leftrightarrow 3^{3x}=729$ $\Leftrightarrow 3^{3x}=3^6 \Leftrightarrow 3x=6$, de unde $x=2$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{2\}$.

3. Ridicând ambele părți ale egalității $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=1{,}4$ la pătrat, obținem: $\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1{,}96$, de unde $1+\sin\alpha=1{,}96$ și $\sin\alpha=0{,}96$.

■ **RĂSPUNS:** $\sin\alpha=0{,}96$.

4. Fie $z=x+yi$, atunci $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, și relația din enunț se scrie: $\sqrt{x^2+y^2}-x-yi=1+4i$. Folosind definiția egalității a două numere complexe,

obținem sistemul $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-x=1\\ -y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+(-4)^2}-x=1\\ y=-4\end{cases}$. Rezolvăm prima ecuație a sistemului. Avem $\sqrt{x^2+16}=x+1$. Se impune condiția $x+1\geq 0$, adică $x\geq -1$. Ridicând ambele părți ale ultimei ecuații la pătrat obținem $x^2+16=x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x=15$, de unde $x=7{,}5$. Așadar, $z=7{,}5-4i$.

■ **RĂSPUNS:** $z=7{,}5-4i$.

5. Se impun condițiile: $\begin{cases}x-5\geq 0\\ x-4>0\\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 5\\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)\neq \log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}x\geq 5\\ x\neq 4+\sqrt{2}\end{cases}$. Observăm că $x=5$ este soluție a inecuației. Deoarece pentru orice $x\in R$, $x>5$, avem $\sqrt{x-5}>0$, rezultă că $\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1>0 \Leftrightarrow$ $\log_{\sqrt{2}}(x-4)>1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(x-4)>\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2} \Leftrightarrow x>4+\sqrt{2}$. Ținând cont de cele determinate mai sus obținem $S=\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$.

■ **RĂSPUNS:** $S=\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$.

6. Deoarece punctele A, O, B sunt colineare, rezultă că $[AB]$ este diametru al cercului, atunci $m(\angle ACB)=90^\circ$, deci triunghiul ACB este dreptunghic cu ipotenuza $[AB]$. Din $m(\angle ABC)=2\cdot m(\angle CAB)$, obținem că $m(\angle CAB)=30^\circ$, $m(\angle ABC)=60^\circ$. Dacă $BC=6cm$, rezultă că $AB=12cm$, atunci raza cercului este $R=6cm$. Lungimea cercului este $L=2\pi R=12\pi\, cm$.

■ **RĂSPUNS:** $L_{cerc}=12\pi\, cm$.

7. Fie $\{O\}=AM\cap CN \Rightarrow O$ este centrul de greutate al triunghiului ABC. Folosind proprietatea centrului de greutate al triunghiului obținem $AO=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot 24=16cm$ și $CO=\frac{2}{3}\cdot CN=\frac{2}{3}\cdot 18=12cm$. Observăm că $AC^2=AO^2+CO^2$, atunci conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul AOC este dreptunghic cu ipotenuza $[AC]$. Aria triunghiului AOC este $A=\frac{AO\cdot CO}{2}=96cm^2$. Aria triunghiului ABC este $A_{ABC}=3\cdot A_{AOC}=3\cdot 96=288cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABC}=288cm^2$.

8. Fie paralelipipedul drept $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu o bază paralelogramul $ABCD$, în care $AB=8cm$, $AD=15cm$ și $m(\angle BAD)=60^\circ$. Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul ABD avem: $BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos 60^\circ$,

sau $BD^2=8^2+15^2-2\cdot 8\cdot 15\cdot\frac{1}{2}$, sau $BD^2=169$, de unde $BD=13cm$. $[B_1D]$ este diagonala mai mică a paralelipipedului, și $m(\angle B_1DB)=30^\circ$. Din triunghiul dreptunghic B_1BD avem $\frac{B_1B}{BD}=tg30^\circ \Rightarrow \frac{B_1B}{13}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B_1B=\frac{13\sqrt{3}}{3}cm$. Aria bazei paralelipipedului este $A_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ = 8\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}= 60\sqrt{3}\,cm^2$.

Volumul paralelipipedului este $V=A_{baz}\cdot B_1B=60\sqrt{3}\cdot\frac{13\sqrt{3}}{3}=780cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=780cm^3$.

9. Conform proprietății caracteristice a unei progresii geometrice avem: $b_3=\sqrt{b_2\cdot b_4}=\sqrt{6\cdot 54}=\sqrt{324}=18$. Deci, $b_3=18$. Rația progresiei este $q=\frac{b_3}{b_2}=\frac{18}{6}=3$. Atunci primul termen al progresiei este $b_1=\frac{b_2}{q}=\frac{6}{3}=2$.

■ **RĂSPUNS:** $b_1=2$.

10. $D(f)=R\setminus\{1\}$.

a) Dreapta $y=2x-1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$, rezultă că $m=2$ și $n=-1$. Avem $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^2+bx+1}{x^2-x}=a$. Din $m=a$ și $m=2$ rezultă că $a=2$. Atunci avem funcția $f(x)=\frac{2x^2+bx+1}{x-1}$.

$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+bx+1}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+bx+1-2x^2+2x}{x-1}=$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(b+2)x+1}{x-1}=b+2$. Din $n=b+2$ și $n=-1$ obținem $b=-3$. Așadar, $a=2$, $b=-3$.

■ **RĂSPUNS:** $a=2$, $b=-3$.

b) Pentru $a=2$ și $b=-3$ obținem funcția $f(x)=\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$. Avem

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2-3x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x^2-3x+1)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(2x^2-3x+1)}{(x-1)^2}=$$

$$\frac{(4x-3)(x-1)-2x^2+3x-1}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-3x+3-2x^2+3x-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+2}{(x-1)^2}=$$

$\frac{2(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2}=2$. Așadar, $f'(x)=2$ pentru orice $x\in D$, deci

$f'(x)>0$ pentru orice $x\in D$, rezultă că $f(x)$ este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\,1)$ și $(1;\,+\infty)$. Funcția f nu are puncte de extrem local.

■ **RĂSPUNS:** $f'(x)>0$ pentru orice $x\in D$, rezultă că $f(x)$ este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\,1)$ și $(1;\,+\infty)$. Funcția f nu are puncte de extrem local.

c) $F(x)=\int\frac{2x^2-3x+1}{x-1}dx=\int(2x-1)dx=2\cdot\frac{x^2}{2}-x+c=x^2-x+c$, unde $c\in R$. Dacă $x=2$ este zerou al funcției $F(x)$, rezultă că $F(2)=0\Rightarrow 2^2-2+c=0$, de unde $c=-2$. Atunci avem $F(x)=x^2-x-2$. Rezolvând ecuația $x^2-x-2=0$, obținem soluțiile $x_1=-1$, $x_2=2$.

■ **RĂSPUNS:** Zeourile funcției $F(x)$ sunt $x_1=-1$ și $x_2=2$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=A_5^3=\frac{2!\cdot3\cdot4\cdot5}{2!}=60$. Numerele naturale de trei cifre distincte formate cu cifrele date divizibile cu 4 sunt: 124, 132, 152, 312, 324, 352, 412, 432, 452, 512, 524, 532, adică $m=12$. Atunci probabilitatea este $P=\frac{m}{n}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{1}{5}$.

12. Deoarece suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 128, rezultă că $2^{n-1}=128\Leftrightarrow 2^{n-1}=2^7$, de unde $n=8$. Așadar, avem dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^8$, sau $\left(a^{\frac{5}{4}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^8$. Folosind formula termenului general al dezvoltării obținem $T_{k+1}=C_8^k\cdot\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{8-k}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_8^k\cdot a^{\frac{40-5k}{4}}\cdot a^{-\frac{k}{2}}=C_8^k\cdot a^{\frac{40-5k}{4}-\frac{k}{2}}$. Deoarece termenul dezvoltării trebuie să-l conțină pe a^3, obținem $\frac{40-5k}{4}-\frac{k}{2}=3$, de unde $k=4$. Atunci avem termenul $T_5=C_8^4\cdot a^3=70a^3$.

■ **RĂSPUNS:** $T_5=70a^3$.

TESTUL 9

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_{27}9+\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$.

2. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $\begin{vmatrix}9^x & -1\\ 2 & 3^x\end{vmatrix}=11$.

3. Să se scrie în formă algebrică numărul complex $z=\frac{\sin x+i\cos x}{\sin x-i\cos x}+\frac{-\sin x+i\cos x}{\sin x+i\cos x}$, $x\in R$.

4. Fie polinomul $P(X)=2X^3+aX^2+bX+12$. Știind că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-3$ este egal cu restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X+1$ și este egal cu 15, să se afle rădăcinile polinomului $P(X)$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_{\frac{1}{4}}\frac{2x-1}{x+1}<\cos\frac{2\pi}{3}$.

GEOMETRIE

6. În triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, măsura unghiului format de înălțimea AD și mediana AM este de 60°, $D,M\in(BC)$, $D\in(MC)$. Dacă $AD=6\,cm$, să se afle BC.

7. Generatoarea unui con circular drept formează cu planul bazei un unghi de 30°. Determinați aria laterală a conului, dacă se știe că volumul lui este egal cu $8\pi\,cm^3$.

8. În trapezul $ABCD$ cu $BC\parallel AD$ avem $AD=5\,cm$, $AB=3\,cm$, $BD\perp AB$, iar diagonala AC este bisectoarea unghiului BAD. Să se afle aria trapezului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie șirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu termenul general $a_n=3n+2$. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este o progresie aritmetică și aflați a_{2024}.

10 Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x-1}$.

a) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

b) Să se afle intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează axa O_X în punctul cu abscisa $x = 2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. S-au cumpărat 6 bilete la un spectacol, dintre care 4 bilete sunt cu locuri pe rândul întâi. Să se afle probabilitatea ca luând la întâmplare 3 bilete, 2 dintre ele vor avea locuri pe rândul întâi.

12. Termenul din mijloc al dezvoltării $\left(x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ este egal cu 4480. Să se afle x, $x > 0$.

SOLUȚII

1. $E = \log_{27} 9 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1} = \log_{3^3} 3^2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$.

■ **RĂSPUNS:** $E = 2$.

2. $\begin{vmatrix} 9^x & -1 \\ 2 & 3^x \end{vmatrix} = 11 \Leftrightarrow 9^x \cdot 3^x + 2 = 11 \Leftrightarrow 27^x = 9 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^2 \Leftrightarrow 3x = 2$, de unde $x = \dfrac{2}{3}$.

■ **RĂSPUNS:** $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

3. $z = \dfrac{\sin x + i\cos x}{\sin x - i\cos x} + \dfrac{-\sin x + i\cos x}{\sin x + i\cos x} = \dfrac{\sin x + i\cos x}{\sin x - i\cos x} - \dfrac{\sin x - i\cos x}{\sin x + i\cos x} =$

$\dfrac{(\sin x + i\cos x)^2 - (\sin x - i\cos x)^2}{(\sin x - i\cos x)(\sin x + i\cos x)} =$

$\dfrac{\sin^2 x + 2i\sin x\cos x + i^2\cos^2 x - (\sin^2 x - 2i\sin x\cos x + i^2\cos^2 x)}{\sin^2 x - i^2\cos^2 x} =$

$\dfrac{\sin^2 x + 2i\sin x\cos x + i^2\cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x - i^2\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} =$

$\dfrac{4i\sin x\cos x}{1} = 2i\sin 2x$.

■ **RĂSPUNS:** $z = 2i\sin 2x$.

4. Conform enunțului avem: $\begin{cases} P(3) = 15 \\ P(-1) = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 54 + 9a + 3b + 12 = 15 \\ -2 + a - b + 12 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 9a + 3b = -51 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = -17 \\ a - b = 5 \end{cases}$. Adunând ecuațiile ulimului sistem membru obținem $4a = -12$, de unde $a = -3$, apoi $b = -8$. Așadar, avem polinomul $P(X) = 2X^3 - 3X^2 - 8X + 12$. Aflăm rădăcinile polinomului, Rezolvând ecuația $P(X) = 0$, adică $2X^3 - 3X^2 - 8X + 12 = 0 \Leftrightarrow (2X^3 - 3X^2) - (8X - 12) = 0$ $\Leftrightarrow X^2(2X-3) - 4(2X-3) = 0 \Leftrightarrow (2X-3)(X^2-4) = 0 \Leftrightarrow$ $(2X-3)(X-2)(X+2) = 0$, de unde $X_1 = \dfrac{3}{2}$, $X_2 = 2$, $X_3 = -2$.

■ **RĂSPUNS:** $X \in \left\{\dfrac{3}{2};\ 2;\ -2\right\}$.

5. *DVA* al inecuației se determină din condiția $\dfrac{2x-1}{x+1} > 0$. Aplicând metoda intervalelor, obținem $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. Deci, $DVA = (-\infty; -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Deoarece $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, inecuația se scrie: $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{2x-1}{x+1} < -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$ $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{2x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{4}} 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+1} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1-2x-2}{x+1} > 0$ $\Leftrightarrow \dfrac{-3}{x+1} > 0$, de unde $x + 1 < 0$, adică $x < -1$. Ținând cont de *DVA* obținem mulțimea soluțiilor inecuației $S = (-\infty; -1)$.

■ **RĂSPUNS:** $S = (-\infty; -1)$.

6. În triunghiul dreptunghic ADM, deoarece $m(\angle DAM) = 60^\circ$, rezultă că $m(\angle AMD) = 30^\circ$. Atunci $AM = 2 \cdot AD = 2 \cdot 6 = 12cm$. AM este mediană corespunzătoare ipotenuzei BC, rezultă că $BC = 2 \cdot AM = 2 \cdot 12 = 24cm$.

■ **RĂSPUNS:** $BC = 24cm$.

7. Fie un con circular drept cu vârful V și baza un cerc cu centrul O și diametrul $[AB]$. $[AO]$ este o rază a cercului din baza conului, $[VA]$ este o generatoare a conului, iar $[VO]$ este înălțimea conului și $m(\angle VAO) = 30^\circ$. Fie $VO = x$, atunci $VA=2x$, iar $AO=x\sqrt{3}$. Volumul conului este $V=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(x\sqrt{3}\right)^2\cdot x=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(3x^2\right)\cdot x=\pi x^3$. Obținem $\pi x^3=8\pi \Rightarrow x^3=8$, de unde $x=2$. Așadar, $h=2\,cm$, $G=4\,cm$, $R=2\sqrt{3}\,cm$. Atunci $A_{lat}=\pi RG=\pi\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4=8\sqrt{3}\,\pi\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{lat}=8\sqrt{3}\,\pi\,cm^2$.

8. Din triunghiul dreptunghic ABD, aplicând teorema lui Pitagora aflăm $BD=4\,cm$. AC este bisectoarea unghiului $BAD \Rightarrow \angle BAC\equiv\angle CAD$. Deoarece $BC\parallel AD$ și AC secantă $\Rightarrow \angle CAD\equiv\angle ACB$ ca unghiuri alterne interne. Obținem că $\angle BAC\equiv\angle BCA$, deci triunghiul ABC este isoscel cu baza $AC \Rightarrow BC=AB=3\,cm$. Fie $BM\perp AD$, $CN\perp AD$, $M,N\in(AD)$. Conform teoremei catetei în triunghiul dreptunghic ABD avem $AB^2=AD\cdot AM$ sau $9=5AM$, de unde $AM=\frac{9}{5}cm$. Din triunghiul dreptunghic ABM, conform teoremei lui Pitagora avem $BM=\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{3^3-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{81}{25}}=\sqrt{\frac{144}{25}}=\frac{12}{5}$.

Așadar, înălțimea trapezului este $BM=\frac{12}{5}cm$. Aria trapezului $ABCD$ este $A=\frac{BC+AD}{2}\cdot BM=\frac{3+5}{2}\cdot\frac{12}{5}=\frac{48}{5}cm^2=9{,}6\,cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A=9{,}6\,cm^2$.

9. Avem $a_{n+1}=3(n+1)+2=3n+5$. Obținem $a_{n+1}-a_n=3n+5-(3n+2)=3$, de unde rezultă că șirul este o progresie aritmetică cu rația $r=3$ și primul termen $a_1=5$. Atunci $a_{2024}=3\cdot 2024+2=6074$ sau $a_{2024}=a_1+2023r=5+2023\cdot 3=6074$.

■ **RĂSPUNS:** Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_1=5$ și $r=3$. $a_{2024}=6074$.

10. $D(f)=R\setminus\{1\}$.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-7x+10}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-7x+10}{x-1}=-\infty$, rezultă că nu există asimptote orizontale. Studiem existența asimptotelor oblice: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-7x+10}{x^2-x}=1$. $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-7x+10}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-7x+10-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-6x+10}{x-1}=-6$. Așadar, $m=1$, $n=-6$, rezultă că dreapta de ecuație $y=x-6$ este asimptotă oblică la $+\infty$. Analog obținem că dreapta $y=x-6$ este asimptotă oblică și la $-\infty$. Avem $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2-7x+10}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$, $l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{x^2-7x+10}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$, rezultă că dreapte de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală.

■ **RĂSPUNS:** Dreapta de ecuație $y=x-6$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și la $-\infty$, dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală.

b) Avem $f'(x)=\left(\frac{x^2-7x+10}{x-1}\right)'=\frac{\left(x^2-7x+10\right)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot\left(x^2-7x+10\right)}{(x-1)^2}=\frac{(2x-7)(x-1)-x^2+7x-10}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Aflăm punctele critice ale funcției f Rezolvând ecuația $f'(x)=0$, adică $\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=0$, sau $x^2-2x-3=0$, care are soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=3$. Completând tabloul de variație al funcției, obținem că $f(x)$ este crescătoare pe intervalele $(-\infty;-1)$ și $(3;+\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1;1)$ și $(1;3)$. Punctul $A(-1;-9)$ este punct de maxim local, punctul $B(3;0)$ este punct de minim local.

■ **RĂSPUNS:** Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;-1)$ și $(3;+\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1;1)$ și $(1;3)$. Punctul $A(-1;-9)$ este punct de maxim local, punctul $B(3;0)$ este punct de minim local.

c) $F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{x^2-7x+10}{x-1}dx=\int\left(x-6+\frac{4}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-6x+4\ln|x-1|+c$. Deoarece graficul lui $F(x)$ intersectează axa O_X în punctul cu abscisa $x=2$, rezultă că $F(2)=0 \Rightarrow 2-12+4\ln 1+c=0 \Rightarrow c=10$. Atunci $F(x)=\frac{x^2}{2}-6x+4\ln|x-1|+10$.

■ **RĂSPUNS:** $F(x)=\frac{x^2}{2}-6x+4\ln|x-1|+10$.

11. Numărul cazurilor posibile este $n=C_6^3=20$. Numărul cazurilor favorabile este $m=C_4^2=6$. Atunci probabilitatea este $P=\frac{m}{n}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{3}{10}$.

12. Deoarece $n=8$, rezultă că dezvoltarea are 9 termeni, iar termenul din mijloc va fi T_5. Avem $T_5=C_8^4\cdot\left(x^2\right)^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=\frac{8!}{4!\cdot4!}\cdot x^8\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^4=\frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{4!\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot x^8\cdot x^{-2}=70x^6$. Obținem $70x^6=4480$, de unde $x^6=64$, și deoarece $x>0$, rezultă $x=2$.

■ **RĂSPUNS:** $x=2$.

TESTUL 10

1. Calculați valoarea expresiei $E=25^{\log_5 3}-32^{\frac{1}{5}}$.

2. Rezolvați în R ecuația $\det A=\sqrt{4-x}$, unde $\det A$ reprezintă determinantul matricei $A=\begin{pmatrix}1 & x+1\\ 2 & 3x\end{pmatrix}$.

3. Să se determine modulul numărului complex $z=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,i$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\log_2^2 x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{4-2\log_2 x^3}$.

5. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $\frac{1+tgx}{1+ctgx}=2\sin x$.

GEOMETRIE

6. Fie dreptunghiul $ABCD$, în care M este mijlocul laturii $[AB]$, N este mijlocul laturii $[BC]$ și $MN=5cm$. Dacă $AD=2\cdot CD$, aflați aria dreptunghiului $ABCD$.

7. Să se afle lungimea laturii $[BC]$ a triunghiului ABC, știind că $AB=6cm$, $AC=10cm$ și că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}\,cm^2$.

8. Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu baza triunghiul dreptunghic ABC în care $m(\angle ACB)=90^\circ$. și $BC=\sqrt{5}\,cm$, iar $CN\perp AB$, $AN=4cm$. Muchia laterală $[VC]$ este perpendiculară pe baza piramidei, iar $m(\angle VNC)=45^\circ$. Să se afle volumul piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_3=12$ și $a_6=27$. Să se afle a_{2025}.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\frac{e^{ax}}{x^2+a^2}$, unde $a\in R^*$.
   a) Să se afle valorile parametrului real a pentru care funcția f este strict crescătoare.
   b) Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $f'(x)=0$, să se calculeze $\lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$.
   c) Să se calculeze $\int(x^2+a^2)\cdot\sin x\cdot f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a\neq b$.

12. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$, $n\in N^*$ suma coeficienților binomiali ai ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care suma dintre termenul al treilea și al cincilea este egală cu 135.

SOLUȚII

1. $E=25^{\log_5 3}-32^{\frac{1}{5}}=\left(5^2\right)^{\log_5 3}-\left(2^5\right)^{\frac{1}{5}}=5^{2\log_5 3}-2=5^{\log_5 3^2}-2=5^{\log_5 9}-2=9-2=7$.
■ **RĂSPUNS:** $E=7$.

2. $\det A=3x-2(x+1)=3x-2x-2=x-2$. Obținem ecuația $x-2=\sqrt{4-x}$.
Se impun condițiile: $\begin{cases}4-x\geq 0\\ x-2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 4\\ x\geq 2\end{cases}$, deci $x\in[2;\,4]$. Așadar, DVA al ecuației este $[2;\,4]$. Ridicând ambele părți ale ultimei ecuații la pătrat, obținem: $x^2-4x+4=4-x\ \Leftrightarrow\ x^2-3x=0$ cu soluțiile $x_1=0$, $x_2=3$. $x_1\notin DVA$, deci unica soluție a ecuației este $x=3$.
■ **RĂSPUNS:** $S=\{3\}$.

3. $|z|=\left|\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2+\left(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=$
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}+2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4}=2$.
■ **RĂSPUNS:** $|z|=2$.

4. Inecuația din enunț se mai scrie: $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\log_2^2 x}<\left(\frac{2}{5}\right)^{2\log_2 x^3-4}$, de unde $1+\log_2^2 x>2\log_2 x^3-4$. DVA al ultimei inecuații este mulțimea $(0;\,+\infty)$. Obținem $\log_2^2 x-6\log_2 x+5>0$. Notăm $\log_2 x=t$ și obținem inecuația de gradul al doilea $t^2-6t+5>0$ cu mulțimea soluțiilor $t\in(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$ sau $\left[\begin{array}{l}t<1\\ t>5\end{array}\right.$
$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x<1\\ \log_2 x>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x<\log_2 2\\ \log_2 x>\log_2 32\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2\\ x>32\end{array}\right.$, sau $x\in(-\infty;\,2)\cup(32;\,+\infty)$.
Ținând cont de DVA obținem $x\in(0;\,2)\cup(32;\,+\infty)$.
■ **RĂSPUNS:** $S=(0;\,2)\cup(32;\,+\infty)$.

5. Avem $\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}}=2\sin x$. Se impun condițiile $\sin x\neq 0$, $\cos x\neq 0$. Ecuația se mai scrie: $\dfrac{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}}=2\sin x \Leftrightarrow \dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}=2\sin x$ $\Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}-2\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-2\right)=0$. Deoarece $\sin x\neq 0 \Rightarrow$ $\dfrac{1}{\cos x}-2=0$, de unde $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Atunci $x=\pm\arccos\dfrac{1}{2}+2\pi k$, $k\in Z$, sau $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

■ **RĂSPUNS:** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

6. Fie dreptunghiul $ABCD$. Dacă M este mijlocul laturii $[AB]$ și N este mijlocul laturii $[BC]$, rezultă că $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul dreptunghic ABC. Atunci $AC=2\cdot MN=2\cdot 5=10cm$. Fie $CD=x$, atunci, conform enunțului, $AD=2x$. Din triunghiul dreptunghic ADC, conform teoremei lui Pitagora avem $CD^2+AD^2=AC^2 \Rightarrow x^2+(2x)^2=10^2 \Leftrightarrow x^2+4x^2=100 \Leftrightarrow 5x^2=100$, de unde $x^2=20$, și $x=\sqrt{20}$ sau $x=2\sqrt{5}$. Obținem $CD=2\sqrt{5}\,cm$, $AD=4\sqrt{5}\,cm$. $A_{ABCD}=CD\cdot AD=2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}=40cm^2$.

■ **RĂSPUNS:** $A_{ABCD}=40cm^2$.

7. Fie triunghiul ABC cu $AB=6cm$, $AC=10cm$ și notăm $m(\angle A)=\alpha$. Aria triunghiului ABC este $A=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot\sin\alpha=30\sin\alpha$. Obținem $30\sin\alpha=15\sqrt{3} \Rightarrow \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de unde rezultă $\alpha=60^\circ$ sau $\alpha=120^\circ$. Dacă $\alpha=60^\circ$, atunci conform teoremei cosinusurilor avem $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=6^2+10^2-2\cdot 6\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=136-60=76$. Așadar, $BC^2=76$, de unde $BC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}\,cm$. Dacă $\alpha=120^\circ$, la fel conform teoremei cosinusurilor avem $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 120^\circ=$ $6^2+10^2+2\cdot 6\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=196$. Așadar, $BC^2=196$, de unde $BC=14cm$.

■ **RĂSPUNS:** $BC=2\sqrt{19}\,cm$ sau $BC=14cm$.

8. Baza piramidei este triunghiul dreptunghic ACB cu $m(\angle ACB)=90^\circ$ și $BC=\sqrt{5}\,cm$. În triunghiul dreptunghic ACB, $[CN]$ este înălțime corespunzătoare ipotenuzei $[AB]$ și $AN=4cm$. Fie $BN=x$, atunci $AB=x+4$. Conform teoremei catetei în triunghiul dreptunghic ACB, avem $BN\cdot AB=BC^2$, atunci $x(x+4)=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow x^2+4x=5 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$, de unde $x_1=-5$, $x_2=1$. $x_1=-5$ nu satisface condițiilor problemei, deci rămâne $x=1$, adică $BN=1cm$, atunci $AB=AN+BN=4+1=5cm$. Din triunghiul dreptunghic CNB, conform teoremei lui Pitagora, avem $CN=\sqrt{BC^2-BN^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\sqrt{4}=2cm$. Triunghiul VCN este dreptunghic isoscel, deci $VN=CN=2cm$. Aria bazei piramidei este $A_b=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CN=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5cm^2$. Atunci volumul piramidei este $V=\dfrac{1}{3}\cdot A_b\cdot VC=\dfrac{1}{3}\cdot 5\cdot 2=\dfrac{10}{3}cm^3=3\dfrac{1}{3}cm^3$.

■ **RĂSPUNS:** $V=10\dfrac{1}{3}cm^3$.

9. Avem $\begin{cases}a_3=12\\ a_6=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1+2r=12\\ a_1+5r=27\end{cases}$, de unde obținem $r=5$ și $a_1=2$. Atunci $a_{2025}=a_1+2024r=2+2024\cdot 5=10122$.

■ **RĂSPUNS:** $a_{2025}=10122$.

10. *a)* $f'(x)=\dfrac{\left(e^{ax}\right)'\cdot\left(x^2+a^2\right)-e^{ax}\cdot\left(x^2+a^2\right)'}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\dfrac{a\cdot e^{ax}\cdot\left(x^2+a^2\right)-2x\cdot e^{ax}}{\left(x^2+a^2\right)^2}=$ $\dfrac{e^{ax}\cdot\left(ax^2-2x+a^3\right)}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\dfrac{e^{ax}}{\left(x^2+a^2\right)^2}\cdot\left(ax^2-2x+a^3\right)$. Pentru ca funcția f să fie strict crescătoare trebuie ca $f'(x)>0$. Dar deoarece $\dfrac{e^{ax}}{\left(x^2+a^2\right)^2}>0$ pentru orice $x\in R$, rezultă că $ax^2-2x+a^3>0$. Se impun condițiile $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$. Avem $\Delta=4-4a^4=4\left(1-a^4\right)=4\left(1+a^2\right)\left(1-a^2\right)$. Obținem $\Delta<0$ pentru $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Deoarece $a>0$, rezultă că $a\in(1;+\infty)$. Pentru $a=1$, $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x^2}$. $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. Obținem că pentru $a=1$ funcția f este strict crescătoare. Așadar, $f(x)$ este strict crescătoare pentru $a\in[1;+\infty)$.

■ **RĂSPUNS:** $f(x)$ este strict crescătoare pentru $a\in[1;+\infty)$.

b) Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile trinomului ax^2-2x+a^3, atunci conform relațiilor lui Viete avem $x_1+x_2=\frac{2}{a}$ și $x_1x_2=a^2$. Avem $\lim\limits_{a\to 0}\left(\frac{1+x_1x_2}{1-x_1x_2}\right)^{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}=$

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1}{a^2}}=\lim_{a\to 0}\left(1+\frac{2a^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1}{a^2}}=\lim_{a\to 0}\left[\left(1+\frac{2a^2}{1-a^2}\right)^{\frac{1-a^2}{2a^2}}\right]^{\frac{2a^2}{1-a^2}\cdot\frac{1}{a^2}}=e^{\lim\limits_{a\to 0}\frac{2}{1-a^2}}=e^2.$$

■ **RĂSPUNS:** Limita este egală cu e^2.

c) $\int\left(x^2+a^2\right)\cdot\sin x\cdot\frac{e^{ax}}{x^2+a^2}dx=\int e^{ax}\cdot\sin x dx$. Folosind metoda integrării prin părți, obținem $\int e^{ax}\cdot\sin x dx=\frac{e^{ax}\left(a\sin x-\cos x\right)}{1+a^2}+c$.

■ **RĂSPUNS:** $\int\left(x^2+a^2\right)\cdot\sin x\cdot f(x)=\frac{e^{ax}\left(a\sin x-\cos x\right)}{1+a^2}+C$.

11. Numere naturale de două cifre sunt în total 90 (de la 10 la 99). Numerele pentru care $a=b$ sunt 9, (și anume: 11, 22, 33, . . . , 99), deci sunt 81 numere cu $a\neq b$. Atunci $P=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$.

■ **RĂSPUNS:** $P=\frac{9}{10}$.

12. Din enunț rezultă: $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=22$ și $T_3+T_5=135$. Folosind formula combinărilor complementare $C_n^k=C_n^{n-k}$, $k\leq n$, prima condiție devine: $1+C_n^1+C_n^2=22$, sau $1+n+\frac{n(n-1)}{2}=22$, adică $n^2+n-42=0$. Ultima ecuație are soluțiile $n_1=-7$, $n_2=6$. Convine doar $n=6$. Așadar, avem dezvoltarea $\left(\sqrt{2^x}+\sqrt{2^{1-x}}\right)^6$. Folosind formula termenului general al dezvoltării obținem: $T_3=C_6^2\left(\sqrt{2^x}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2=\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 2^{2x}\cdot 2^{1-x}=15\cdot 2^{x+1}$. $T_5=C_6^4\cdot\left(\sqrt{2^x}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4=15\cdot 2^{-x+2}$. De aici rezultă: $15\cdot\left(2^{x+1}+2^{-x+2}\right)=135$, sau $2\cdot 2^x+\frac{4}{2^x}=9$. Notăm $2^x=y$ și obținem ecuația $2y^2-9y+4=0$ cu soluțiile $y_1=4$ și $y_2=\frac{1}{2}$. Pentru $y=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $2^x=2^{-1}$ $\Rightarrow$ $x=-1$. Pentru $y=4$ $\Rightarrow$ $2^x=4$ $\Rightarrow$ $x=2$. Ambele souții sunt acceptabile, deci $S=\{-1;\ 2\}$.

■ **RĂSPUNS:** $x\in\{-1;\ 2\}$.

TESTUL 11

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_6 96+\log_{\frac{1}{6}}16+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

2. Aflați valoarea expresiei $E=\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

3. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3^{|3x-4|}=9^{2x-2}$.

4. Să se determine numărul complex $z=x+yi$, dacă $2z=|z|+2i$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\frac{\sqrt{2x-3}}{\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-3x+3\right)}\geq 0$.

GEOMETRIE

6. Triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB=12cm$, $AC=5cm$ este înscris în cercul $C(O;\ R)$. Să se fle perimetrul triunghiului AOB.

7. Aflați aria unui triunghi isoscel, știind că înălțimea corespunzătoare bazei are lungimea $10cm$, iar înălțimea corespunzătoare laturii laterale are lungimea $12cm$.

8. Într-un trunchi de con circular drept raportul lungimilor razelor bazelor este $\frac{1}{3}$. Generatoarea trunchiului are lungimea de $4cm$ și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Să se afle volumul trunchiului de con.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică în care $a_2=3$, $a_5=9$. Determinați a_{10}.

10. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{2(x-1)^2}{2x-5}$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$;

b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f;

c) Calculați $I=\int_3^5 f(x)dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 se formează toate numerele naturale distincte de câte șase cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr din cele formate, el să aibă prima și ultima cifră pare.

12. Care sunt termenii raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[6]{6}+\sqrt{2}\right)^{30}$?.

ANEXĂ

1) $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\cdot\log_a b$, unde $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $k\neq 0$.

2) $\log_a b-\log_a c=\log\frac{b}{c}$, unde $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$.

3) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$, unde $\alpha\in R$.

4) Modulul numărului complex $z=a+bi$ este numărul real $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, unde $a,b\in R$.

5) Numerele complexe $z_1=a_1+b_1i$ și $z_2=a_2+b_2i$ sunt egale dacă și numai dacă $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, unde a_1, a_2, b_1, $b_2\in R$.

6) Proprietatea caracteristică a progresiei aritmetice: $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, unde $n\in N$, $n\geq 2$.

7) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă x_0 de pe graficul funcției este $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

8) $(x^a)'=a\cdot x^{a-1}$, unde $a\in R$.

9) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$.

10) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$, unde $a\in R$, $a\neq -1$, $c\in R$.

11) $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+c$, unde $a,b\in R$, $a\neq 0$, $c\in R$.

12) Formula aranjamentelor: $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, unde $m,n\in N^*$, $m\leq n$.

13) Formula termenului general al dezvoltării $(a+b)^n$ este $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$, $n,k\in N^*$, $k\leq n$.

14) Aria triunghiului: $A=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, unde a este lungimea unei laturi a triunghiului, h_a este lungimea înălțimii corespunzătoare laturii de lungime a.

15) Volumul trunchiului de con: $V=\frac{\pi H}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)$, unde R este lungimea razei bazei mari, r este lungimea razei bazei mici, H este lungimea înălțimii trunchiului de con.

TESTUL 12

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 27^{-\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} + (0,25)^{-2}$.

2. Să se arate că valoarea determinantului $d = \begin{vmatrix} \log_3 54 & 1 \\ 2\log_3 \sqrt{6} & 1 \end{vmatrix}$ este un număr natural.

3. Aflați valoarea expresiei $E = \dfrac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$, dacă $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ și $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(2-\log_2 x)\cdot\sqrt{x^2-1} \geq 0$.

5. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$, de grad cel puțin 2 la polinomul $Q(X) = X^2 - X - 6$, știind că resturile împărțirii lui $P(X)$ la $X-3$ și $X+2$ sunt 7 și respectiv -8.

GEOMETRIE

6. Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 2; 5; 11 și 12.

7. Volumul unui con circular drept este egal cu $\dfrac{512}{3}\pi\, cm^3$, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45°. Aflați aria totală a conului.

8. Aria unui paralelogram este egală cu $120\,cm^2$, iar două laturi ale lui au lungimile $15\,cm$ și $10\,cm$. Să se afle lungimea diagonalei mai mari a paralelogramului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$.

   a) Să se scrie ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f;
   b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f;
   c) Să se determine aria figurii plane determinate de graficul funcției f și de dreptele de ecuații $x=3$ și $x=5$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5 se formează toate numerele naturale distincte de câte patru cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr din cele formate, el se va divide cu 4.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(3x + x^{\ln x}\right)^6$. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care termenul al treilea al dezvoltării este egal cu 1215.

ANEXĂ

1) Formula determinantului de ordinul doi: $d = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

2) $k \cdot \log_a b = \log_a b^k$, unde $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $k\neq 0$.

3) $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$, unde $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$.

4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, unde $\alpha \in R$.

5) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, unde $\alpha\in R$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k\in Z$.

6) Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-a$ este $r = P(a)$.

7) Aria laterală a conului circular drept este: $A_{lat} = \pi\cdot R\cdot G$, unde R este lungimea razei bazei conului, G este lungimea generatoarei conului.

8) Volumul conului circular drept: $V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot H$, unde R este lungimea razei bazei conului, H este lungimea înălțimii conului.

9) Aria paralelogramului: $a\cdot b\cdot\sin\alpha$, unde a și b sunt lungimile a două lauri ale paralelogramului, α este măsura unghiului dintre laturile de lungimi a și b.

10) Teorema cosinusurilor: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a\cdot b\cdot\cos\gamma$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar γ este măsura unghiului opus laturii de lungime c.

11) Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, atunci dreapta $y=a$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.
Dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, atunci dreapta $y=a$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

12) $\left(x^a\right)' = a\cdot x^{a-1}$, unde $a\in R$.

13) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

14) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c$, $a \neq 0$.

15) Formula aranjamentelor: $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, unde $m, n \in N$, $n \leq m$.

16) Formula termenului general al dezvoltării $(a+b)^n$: $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, $n, k \in N$, $k \leq n$.

TESTUL 13

ALGEBRĂ

1. Să se afle valoarea expresiei $E = \log_{36} 84 - \log_{36} 14 + \sqrt[3]{-27}$.

2. Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + 9x - 9$. Să se determine $a \in R$ pentru care $X = 3$ este rădăcină a polinomului $P(X)$.

3. Aflați modulul numărului complex $z = \frac{5+8i}{8-5i}$.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $(2\cos x - 1) \cdot \sqrt{-\sin x} = 0$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\frac{\sqrt{\log_2(x-1)}}{x^2-3x-4} \geq 0$.

GEOMETRIE

6. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $[AB]$ și N este mijlocul laturii $[AC]$. Știind că perimetrul triunghiului AMN este de $60cm$, iar $BC = 36cm$, aflați perimetrul triunghiului ABC.

7. În trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \| CD$) se știe că $AB = AD$, $DC = 88cm$ și $\cos C = 0,6$. Să se afle aria trapezului $ABCD$.

8. O piramidă patrulateră regulată are volumul $288\sqrt{2}\,cm^3$, iar secțiunea diagonală a piramidei este un triunghi dreptunghic. Să se afle aria laterală a piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie progresia aritmetică: $8;\ 11;\ 14;\ \ldots$. Aflați al zecelea termen al progresiei.

10. Se consideră funcția $f:(0; +\infty) \to R$, $f(x) = x \ln x$.
    a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, care formează cu direcția pozitivă a axei O_X un unghi de 45°;
    b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f;
    c) Să se determine primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, știind că $F(2) = 1$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 5 bile albe și 7 bile roșii, de aceeași mărime. Să se afle probabilitatea că luând la întâmplare 3 bile din urnă, ele vor fi de culoare roșie.

12. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6$. Calculați suma termenilor raționali ai dezvoltării.

ANEXĂ

1) $\log_a b-\log_a c=\log_a \frac{b}{c}$, unde $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$.
2) Numărul real a este rădăcină a polinomului $P(X)$, dacă $P(a)=0$.
3) Modulul numărului complex $z=a+bi$ este numărul real $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, unde $a,b\in R$.
4) Aria trapezului: $A_{tr}=\frac{a+b}{2}\cdot h$, unde a și b sunt lungimile bazelor trapezului, iar h este lungimea înălțimii trapezului.
5) Aria laterală a unei piramide regulate: $A_{lat}=p\cdot a_p$, unde p este semiperimetrul bazei, iar a_p este lungimea apotemei piramidei.
6) Volumul piramidei: $V_{pir}=\frac{1}{3}\cdot A_{baz}\cdot H$, unde A_{baz} reprezintă aria bazei piramidei, iar H este lungimea înălțimii piramidei.
7) Formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este $a_n=a_1+r(n-1)$, unde a_1 este primul termen al progresie, iar r este rația progresiei.
8) Ecuația tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul cu abscisa x_0 de pe graficul funcției: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
9) Sensul geometric al derivatei funcției $f(x)$ într-un punct x_0 de pe graficul funcției f: Tangenta la graficul funcției f derivabile în punctul x_0 este dreapta ce trece prin puctul $(x_0;\ f(x_0))$, a cărei pantă m este egală cu $f'(x_0)$, adică $m=f'(x_0)=tg\alpha$.
10) Formula integrării prin părți: $\int udv=u\cdot v-\int vdu$
11) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, unde $x\in(0;+\infty)$.
12) Formula combinărilor: $C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, unde $n\in N^*$, $m\in N$, $m\leq n$.

TESTUL 14

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{\sqrt{65}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{65}+7}$.

2. Fie numărul complex $z=(3-i)^2+2i^5-4$. Determinați suma dintre partea reală și partea imaginară a numărului z.

3. Calculați valoarea expresiei $E=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{12}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}}$.

4. Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)=2X^3-3X^2+mX+1$ la binomul $X+3$, știind că împărțit la binomul $X-2$ dă restul 15.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $2^{2x+1}-21\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geq 0$.

GEOMETRIE

6. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu $32\,cm$, iar lungimea dreptunghiului este de 3 ori mai mare decât lățimea lui. Să se afle aria dreptunghiului.

7. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ latura bazei are lungimea $12\,cm$, iar înălțimea $VO=6\sqrt{2}\,cm$. Aflați aria totală a piramidei.

8. Triunghiul ABC are lungimile laturilor: $AB=4\,cm$, $BC=3\,cm$ și $AC=2\,cm$. Să se afle lungimea bisectoarei $(CD$ a unghiului ACB a triunghiului ABC.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$: 2; −6; 18; .... Aflați b_5.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$.
a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f;
b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f;
c) Aflați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f și de dreptele de ecuații $x=1$ și $x=3$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o cutie sunt 12 creioane, dintre care 5 sunt de culoare roșie. Se iau la întâmplare 4 creioane din cutie. Să se afle probabilitatea că printre creioanele scoase cel puțin două vor fi de culoare roșie.

12. Suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $\left(2nx+\frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ este egală cu 64. Să se afle termenul dezvoltării care nu-l conține pe x.

ANEXĂ

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, unde $\alpha\in R$.

2) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$, unde $\alpha\in R$.

3) Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-a$ este egal cu $P(a)$, unde $a\in R$.

4) Aria laterală a unei piramide regulate este: $A_{lat}=p\cdot a_p$, unde p este semiperimetrul bazei piramidei, a_p este lungimea apotemei piramidei.

5) Teorema bisectoarei: Fie triunghiul ABC în care $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, $D\in(BC)$. Atunci $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$.

6) Teorema cosinusurilor: $c^2=a^2+b^2-2a\cdot b\cdot\cos\gamma$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar γ este măsura unghiului opus laturii de lungime c.

7) Formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $b_n=b_1q^{n-1}$, unde b_1 este primul termen, iar q este rația progresiei.

8) Ecuația asimptotei oblice la graficu funcției f spre $+\infty$ sau $-\infty$ este $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ sau $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, iar $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ sau $n=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-mx)$.

9) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$.

10) $\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1}$, unde $x\in R^*$, $a\in R$.

11) $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|+c$, unde $a,b,c\in R$, $a\neq 0$.

12) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$, unde $a,c\in R$, $a\neq -1$.

13) Formula combinărilor: $C_n^m=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, unde $n\in N^*$, $m\in N$, $m\leq n$.

14) Formula termenului general al dezvoltării $(a+b)^n$: $T_{k+1}=C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k$, $n\in N^*, k\in N$, $k\leq n$.

TESTUL 15

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 3\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 64 - \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2$.

2. Fie numărul complex $z = \frac{2-i}{4+3i}$. Să se scrie în formă algebrică numărul $w = 5z + 10\bar{z}$.

3. Rezolvați în mulțimea R inecuația $4^{0,5x^2-3} > 8$.

4. Calculați $\cos x$, dacă $tg\frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3(3x) - 1 = 0$.

GEOMETRIE

6. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu diagonala de $12\sqrt{2}\,cm$. Aflați volumul cilindrului.

7. Să se afle lungimea diagonalei și aria unui trapez isoscel care are bazele de lungimi $3cm$ și $8cm$, iar latura laterală de $7\,cm$.

8. Un con circular drept are secțiunea axială un triunghi isoscel cu perimetrul de $32\,cm$. Să se afle volumul conului, știind că aria totală a conului este egală cu $96\pi\,cm^2$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 4 + a_n$. Calculați valoarea expresiei $a_2 + a_4$.

10. Fie funcția $f: D \to R$, $f(x) = \frac{mx^2 + (m-1)x}{x+1}$.

a) Determinați valorile reale ale lui m pentru care funcția f admite punctul de extrem $x = -2$;

b) Pentru m determinat la punctul *a)*, să se afle coordonatele punctului A de intersecție al tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$ cu asimptota oblică la graficul funcției f.

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia trece prin punctul $B(1; 2)$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 se formează toate numerele naturale de câte cinci cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr din cele formate el să aibă primele trei cifre impare și restul pare.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ care-l conține pe a^8.

ANEXĂ

1) $k \cdot \log_a b = \log_a b^k$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \in R^*$.

2) $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$, unde $a, b, c \in (0; +\infty)$, $a \neq 1$.

3) Volumul cilindrului circular drept: $V_{cil} = \pi R^2 H$, unde R este lungimea razei bazei cilindrului, H este lungimea înălțimii cilindrului.

4) Aria trapezului: $A_{tr} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, unde a și b sunt lungimile bazelor trapezului, h este înălțimea trapezului.

5) Volumul conului circular drept: $V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, unde R este lungimea razei bazei conului, H este lungimea înălțimii conului.

6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

7) $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$, unde $x \in R^*$, $a \in R$.

8) Ecuația tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul cu abscisa x_0 de pe graficul funcției: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

9) Ecuația asimptotei oblice la graficu funciei f spre $+\infty$ sau $-\infty$ este $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ sau $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, iar $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$ sau $n = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$.

10) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a \in R$, $a \neq -1$.

11) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c$, unde $a,b,c \in R$, $a \neq 0$.

12) Formula aranjamentelor: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, unde $n \in N^*$, $k \in N$, $k \le n$.

13) Formula termenului general al dezvoltării $(a+b)^n$: $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, $n \in N^*, k \in N$, $k \le n$.

TESTUL 16

ALGEBRĂ

1. Aflați valoarea expresiei $E = \sqrt[3]{7 - \sqrt{22}} \cdot \sqrt[3]{7 + \sqrt{22}}$.

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 2x & x \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

3. Rezolvați în mulțimea C ecuația $(3+2i)z = 5+i$.

4. Aflați domeniul maxim de definiție D pentru funcția $f : D \to R$, $f(x) = \sqrt{\log_{0,2}(4-2x) + 1}$.

5. Rezolvați în R ecuația $2(\cos x - 1) \cdot \sin 2x = 3\sin x$.

GEOMETRIE

6. Fie un trapez $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB < CD$, $AD = 6cm$ și $BC = 9cm$. Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, să se determine MC.

7. În pătratul $ABCD$ cu $AB = 12cm$, se ia punctul $N \in (AD)$ astfel încât $AN = \frac{2}{3} AD$ și $M \in (AB)$ astfel încât $[AM] \equiv [BM]$. Calculați:

a) Aria triunghiului MNC.

b) Distanța de la punctul M la dreapta NC.

8. Generatoarea unui trunchi de con circular drept are lungimea de $8cm$ și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Diagonala secțiunii axiale a trunchiului împarte acest unghi în două unghiuri congruente. Să se afle volumul trunchiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Șirul $(a_n)_{n\ge1}$ este o progresie aritmetică în care $a_{36} = 26$ și $r = 0,7$. Aflați a_1.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f;

b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f și valorile funcției f în punctele de extrem local.

c) Calculați valoarea integralei $I=\int_2^5 f(x)dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 8 bile de culoare roșie și 4 bile de culoare albă, identice ca mărime. Se extrag la întâmplare 5 bile din urnă. Să se afle probabilitatea că printre bilele extrase vor fi 3 de culoare roșie și 2 de culoare albă.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}}\right)^{24}$ în care x și y au exponenții egali.

ANEXĂ

1) $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$.

2) Mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$ este $x=(-1)^k\arcsin a+\pi k$, $k\in Z$, dacă $a\in[-1;1]$.

3) Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$ este $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in Z$, dacă $a\in[-1;1]$.

4) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$.

5) $V_{tr.con}=\dfrac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$, unde R și r sunt razele bazelor trunchiului, iar h este înălțimea trunchiului de con.

6) $A_{tr.dr}=\dfrac{1}{2}ab$ – aria triunghiului dreptunghic, unde a,b sunt lungimile catetelor.

7) $A_{tr}=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$ – aria triunghiului, unde a este lungimea unei laturi, h_a este înălțimea triunghiului corespunzătoare laturii de lungime a.

8) $a_n=a_1+r(n-1)$ – formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$.

9) Ecuația asimptotei oblice la $-\infty$ sau $+\infty$: $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, iar $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

10) Dreapta de ecuație $x=a$ este asimptotă vertcală, dacă limitele laterale în punctul a sunt egale cu $+\infty$ sau $-\infty$.

11) $\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1}$.

12) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$.

13) $\int x^a dx=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a\in R\setminus\{-1\}$.

14) $\int\dfrac{1}{ax+b}dx=\dfrac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|$, unde $a\neq 0$.

15) Dacă $F(x)$ este o primitivă a funcției $f(x)$, atunci $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

16) $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, unde $n\in N^*$, $k\in N$, $k\leq n$ – formula combinărilor.

17) $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$, $k\in\{0;1;2;\ldots;n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a+b)^n$ din binomul lui Newton.

TESTUL 17

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 3,5 + \log_3 \sqrt{27}$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z = \begin{vmatrix} 3+i & 1-i \\ 2+i & 3-i \end{vmatrix}$.

3. Să se rezolve în R inecuația $3^{|x|+2} < 27$.

4. Calculați $\sin 2\alpha$, știind că $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ și $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

5. Să se rezolve în R inecuația $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$.

GEOMETRIE

6. Se dă triunghiul ABC în care $[AB] \equiv [AC]$. Fie M și N mijloacele laturilor $[AB]$ și respectiv $[AC]$. Știind că $MN = 9cm$ și $AB = 15cm$, aflați aria triunghiului ABC.

7. Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei are lungimea $24cm$, iar înălțimea este de $12\sqrt{2}\,cm$. Să se afle aria totală a piramidei.

8. În trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$ avem $AB = 12cm$, $CD = 24cm$ și $\sin(\angle D) = \frac{1}{2}$.
Aflați: *a*) Aria trapezului; *b*) Distanța de la punctul D la dreapta AC.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Aflați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_6 = 3$ și $q = 3$.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x+1}$.
   a) Să se afle valorile parametrului real a pentru care graficul funcției f admite spre $+\infty$ ca asimptotă dreapta de ecuație $y = x+1$.
   b) Pentru a determinat anterior, scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, care trece prin originea sistemului de coordonate.
   c) Pentru a determinat anterior, calculați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de tangenta la grafic care trece prin origine și de dreapta de ecuație $x = 2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 se formează toate numerele naturale de câte cinci cifre distincte. Să se afle probabilitatea că alegând un număr din cele formate, el va avea prima cifră 3 și va fi divizibil cu 5.

12. Aflați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

ANEXĂ

1) $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \in R^*$.

2) Fie numărul complex z scris în formă algebrică $z = a + bi$, atunci $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, pentru orice $\alpha \in R$.

4) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, pentru orice $\alpha \in R$.

5) Aria triunghiului: $A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului, $p = \frac{a+b+c}{2}$, (formula lui Heron).

6) $A_{trapez} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, unde a și b sunt lungimile bazelor trapezului, iar h este înălțimea trapezului.

7) Formula termenului general al progrsiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $b_n = b_1 q^{n-1}$, unde b_1 este primul termen, iar q este rația progresiei.

8) Ecuația asimptotei oblice la $-\infty$ sau $+\infty$: $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, iar $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$.

9) $\left(x^a\right)' = a \cdot x^{a-1}$, $a \in R$

10) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$.

11) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) -$ ecuația tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul x_0.

12) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a \in R\setminus\{-1\}$.

13) $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot \ln|ax+b|$, unde $a \neq 0$.

14) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (formula aranjamentelor), unde $n,k \in N^*$, $k \le n$.

15) $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, unde unde $n \in N^*$, $k \in N$, $k \le n$, formula combinărilor.

16) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$, $k \in \{0; 1; 2; \ldots ; n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a+b)^n$ din binomul lui Newton.

TESTUL 18

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \frac{\sqrt[3]{16}\cdot 4^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{8}}$.

2. Aflați valoarea expresiei $E = \begin{vmatrix} \sin\alpha\cos\alpha & 1 \\ \cos 2\alpha & 2 \end{vmatrix}$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

3. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$.

4. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $(z^2-3z)^2 + 3(z^2-3z) - 28 = 0$.

5. Să se rezolve în R inecuația $2\cdot(\log_2 x)^2 - 3\cdot\log_2\frac{x}{4} - 11 \ge 0$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC cu $BC = 14cm$, M este mijlocul laturii $[BC]$, $AM \perp BC$ și $m(\angle CAM) = 30^\circ$. Dacă N este mijlocul laturii $[AC]$, să se afle MN.

7. În triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $AB < AC$, $AD \perp BC$, $D \in (BC)$ și AM mediană, $M \in (BC)$. Știind că $AD = 6\sqrt{3}\,cm$ și $AM = 12cm$, să se afle aria triunghiului AMC.

8. Aria laterală a unui con circular drept este egală cu $60\pi\, cm^2$, iar aria secțiunii axiale a conului este egală cu $48\,cm^2$. Să se afle aria totală și volumul conului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\ge 1}$, $a_n = \frac{n}{4n-3}$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2-6x+m}{2x-4}$.
   a) Să se determine parametrul real m, astfel încât funcția f să admită un extrem în punctul $x = 1$.
   b) Pentru m determinat anterior aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.
   c) Pentru m determinat anterior, să se calculeze aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de asimptota sa oblică și de dreptele de ecuații $x = 5$ și $x = 6$.

11. Într-o clasă sunt 16 fete și 11 băieți. Pentru a efectua o lucrare se formează o echipă de 6 elevi. Să se afle probabilitatea că echipa va fi formată din 4 fete și 2 băieți.

12. Aflați toți termenii raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^5$.

ANEXĂ

1) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, $m,n\in N$, $a>0$, $n\geq 2$.
2) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha$.
3) $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$, unde $a>0$, $a\neq 1$ și $b>0$, $c>0$.
4) $A_{tr}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$ – aria triunghiului, unde a este lungimea unei laturi, h_a este înălțimea triunghiului corespunzătoare laturii de lungime a.
5) $A_{lat.con}=\pi RG$, unde R este lungimea razei bazei conului, G este lungimea generatoarei conului.
6) $A_{tot.con}=\pi R^2+\pi RG$ sau $A_{tot.con}=\pi R(G+R)$, unde R este lungimea razei bazei conului, G este lungimea generatoarei conului.
7) $V_{con}=\frac{1}{3}\pi R^2 H$, unde R este lungimea razei bazei conului, iar H este lungimea înălțimii conului.
8) Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător dacă $a_{n+1}-a_n>0$ și este strict descrescător dacă $a_{n+1}-a_n<0$.
9) $\left(x^a\right)'=a\cdot x^{a-1}$, $a\in R$, $x\in R^*$.
10) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$.
11) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a\in R\setminus\{-1\}$.
12) $\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}\cdot\ln|ax+b|$, unde $a\neq 0$.
13) $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, unde $n\in N^*$, $k\in N$, $k\leq n$, formula combinărilor.
14) $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$, $k\in\{0;1;2;\ldots;n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a+b)^n$ a binomului lui Newton.

TESTUL 19

ALGEBRĂ

1. Calculați suma numerelor $a=\log_3 24$ și $b=\log_{\frac{1}{3}}8$.

2. Fie numerele complexe $z_1=2+i$ și $z_2=1+2i$. Să se afle conjugatul numărului complex $z=z_1+z_2+z_1\cdot z_2$.

3. Rezolvați în R ecuația $3^{|\sin x-1|}=9$.

4. Rezolvați sistemul de ecuații matriceale $\begin{cases} X-Y=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 4\end{pmatrix}\\ X+Y=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\end{cases}$.

5. Determinați soluțiile ecuației $2\cos 2x-4\cos x=1$, care verifică condiția $\sin x\geq 0$.

GEOMETRIE

6. Trapezul isoscel $ABCD$ este circumscris unui cerc. Dacă $AB=8cm$, să se afle lungimea liniei mijlocii a trapezului.

7. Secțiunea axială a unui trunchi de con circular drept este un trapez isoscel cu bazele de $12cm$ și $24cm$ și laturile neparalele de $10cm$. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului.

8. Triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ are cateta $AC=18\sqrt{3}\,cm$. Știind că unghiul dintre înălțimea și mediana corespunzătoare ipotenuzei are măsura de 30°, să se afle aria triunghiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Aflați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=8$ și $a_6=17$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{2x^2 + ax + 1}{x - 2}$.

a) Să se determine valorile parametrului real a, astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă la $+\infty$ dreapta de ecuație $y = 2x + 3$.

b) Pentru a determinat anterior, scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Pentru a determinat anterior, considerăm $F(x)$ primitiva funcției $f(x)$. Să se afle $F(x)$, știind că $x = 3$ este zerou al primitivei $F(x)$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5 se formează toate numerele naturale de câte trei cifre distincte. Să se afle probabilitatea că alegând la întâmplare un număr din cele formate, el să aibă prima cifră 3 și să fie divizibil cu 9.

12. Să se afle termenul care-l conține pe x^7 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali de rang impar ai dezvoltării este egală cu 64.

ANEXĂ

1) $\log_{a^k} = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$, unde $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $k \neq 0$.

2) $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

3) $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

4) Conjugatul numărului complex $z = a + bi$ este numărul complex $\bar{z} = a - bi$.

5) Mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$ este $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$, dacă $a \in [-1; 1]$.

6) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

7) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ sau $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, $\alpha \in R$.

8) Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$ este $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$, dacă $a \in [-1; 1]$.

9) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

10) Dacă patrulaterul convex $ABCD$ este circumscris unui cerc $C(O; R)$, atunci $AB + CD = BC + AD$.

11) Aria laterală a trunchiului de con: $A_{lat.tr} = \pi G(R + r)$, unde G este lungimea generatoarei trunchiului, iar R și r sunt lungimile razelor bazelor trunchiului de con.

12) Volumul trunchiului de con: $V_{tr} = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$, unde H este înălțimea trunchiului, iar R și r sunt lungimile razelor bazelor trunchiului de con.

13) $A_{tr.dr} = \frac{1}{2} a \cdot b$, unde a, b sunt lungimile catetelor triunghiului.

14) $a_n = a_1 + r(n-1)$ – formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$.

15) Ecuația asimptotei oblice la $-\infty$ sau $+\infty$: $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, iar $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$.

16) $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $a \in R$, $x \neq 0$.

17) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

18) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – ecuația tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul x_0.

19) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a \in R \setminus \{-1\}$.

20) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b|$, unde $a \neq 0$.

21) În dezvoltarea $(a+b)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu suma coeficienților de rang par și este egală cu 2^{n-1}.

22) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, unde $n \in N^*$, $k \in N$, $k \leq n$, formula aranjamentelor.

23) $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, unde $n \in N^*$, $k \in N$, $k \leq n$, formula combinărilor.

24) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$, $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a+b)^n$ din binomul lui Newton.

TESTUL 20

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{16} 32 - 2^{-2}$.

2. Rezolvați în R ecuația $\begin{vmatrix} 3^x & -2 \\ 3^x & 4 \end{vmatrix} = 54$.

3. Aflați numerele reale x și y din egalitatea $2 + 5ix - 3iy = 14i + 3x - 5y$.

4. Aflați valoarea expresiei $E = \dfrac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, știind că $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$.

5. Rezolvați în R ecuația $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, M este mijlocul lui $[BC]$ și $MN \perp AB$, $N \in (AB)$. Dacă $MN = 4cm$ și $BC = 16cm$, să se afle $m(\angle ACB)$.

7. Aflați perimetrul unui trapez dreptunghic circumscris unui cerc de rază $4cm$, știind că lungimea unei baze a trapezului este cu $6cm$ mai mare decât lungimea celeilalte baze.

8. Diagonalele unui paralelipiped drept au lungimile de $9cm$ și $\sqrt{33}\,cm$. Perimetrul bazei paralelipipedului este egal cu $18cm$, iar muchia laterală are $4cm$. Aflați aria totală și volumul paralelipipedului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_3 = 12$ și $b_6 = 96$.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
    a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
    b) Aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.
    c) Fie funcția $g : R \to R$, $g(x) = \dfrac{x}{f(x)}$. Aflați primitiva $G(x)$ a funcției $g(x)$, graficul căreia intersectează asimptota oblică spre $+\infty$ a funcției $f(x)$ în punctul cu abscisa $x = 2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Șapte copii se așează la întâmplare pe o bancă. Să se afle probabilitatea ca trei copii: Radu, Costel și Ana vor sta pe bancă alături.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{a} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{a}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali este egală cu 256. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe $\sqrt[3]{a^2}$.

ANEXĂ

1) $\log_{a^k} b^n = \dfrac{n}{k}\log_a b$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n,k \in R$, $k \neq 0$.

2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, unde $a \neq 0$ și $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, unde $a \neq 0$, $b \neq 0$.

3) Fie numerele complexe $z_1 = a_1 + b_1 i$ și $z_2 = a_2 + b_2 i$. Atunci $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$ (definiția egalității a două numere complexe).

4) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, unde $\cos\alpha \neq 0$, adică $a \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

5) Teorema înălțimii: Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Atunci $AD = \sqrt{CD \cdot BD}$, sau $AD^2 = CD \cdot BD$.

6) $b_n = b_1 q^{n-1}$ – formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$.

7) Teorema cosinusurilor: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar γ este măsura unghiului opus laturii de lungime c.

8) Aria paralelogramului: $A_{par} = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, unde a și b sunt lungimile laturilor paralelogramului, iar α este măsura unghiului cuprins între laturile a și b.

9) $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $a \in R$.

10) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$.

11) În dezvoltarea $(a+b)^n$ suma coeficienților binomiali este egală cu 2^n.

12) $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, unde $n \in N^*$, $k \in N$, $k \leq n$, formula combinărilor.

TESTUL 21

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \sqrt[3]{1 + \frac{61}{64}} - 2^{-2}$.

2. Fie $d = \begin{vmatrix} x & 2 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $d = \sqrt{4+x}$.

3. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $(2+i)z - (3+6i)z = 5+2i$.

4. Să se afle rădăcinile polinomului $P(X) = 2X^3 - X^2 + aX - 6$, $a \in R$, știind că el se divide cu plinomul $Q(X) = X + 2$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\cos\left(2x - \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu perimetrul de $32cm$ și $AB = AC = 10cm$. Dacă $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, să se afle CD.

7. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ are înălțimea $DD_1 = 8\sqrt{3}\,cm$, raportul dimensiunilor bazei este $2\frac{1}{12}$, iar diagonala paralelipipedului are lungimea $31cm$. Să se afle aria totală și volumul paralelipipedului.

8. Laturile triunghiului ABC au lungimile: $AB = 6cm$, $BC = 7cm$, $AC = 5cm$. Bisectoarea unghiului C intersectează latura AB în punctul D. Determinați aria triunghiului ADC.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = (-2)^n + 3^n$. Calculați $S = a_2 + a_3 + a_4$.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Să se scrie ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Calculați valoarea integralei $I = \int_0^{2\sqrt{2}} f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$. Să se afle probabilitatea că alegând o submulțime cu trei elemente ale mulțimii A, aceasta să conțină numărul 1.

12. În dezvoltarea $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ raportul coeficienților binomiali ai termenilor al patrulea și al treilea este egal cu $\frac{5}{3}$. Să se afle termenul dezvoltării care nu-l conține pe x.

ANEXĂ

1) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, unde $a \neq 0$ și $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, unde $a \neq 0$, $b \neq 0$.

2) Polinomul $P(X)$ se divide cu binomul $X - a$, dacă și numai dacă $P(a) = 0$.

3) Restul împărțirii polinomui $P(X)$ la binomul $X - a$ este $r = P(a)$.

4) $A_{tot.par.dr} = 2(ab + ac + bc)$ (aria totală a paralelipipedului dreptunghic), unde a,b,c sunt dimensiunile paralelipipedului.

5) $V_{par.dr} = abc$ (volumul paralelipipedului dreptunghic), unde a,b,c sunt dimensiunile paralelipipedului.

6) Teorema bisectoarei: Fie triunghiul ABC în care $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, $D \in (BC)$. Atunci $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

7) Aria triunghiului: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (formula lui Heron), unde a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului, iar p este semiperimetrul său.

8) Aria triunghiului: $A = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, unde a este lungimea unei laturi, iar h_a este lungimea înălțimii corespunzătoare laturii de lungime a.

9) Dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ a funcției $f(x)$, dacă $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, Dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ a funcției $f(x)$, dacă $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$.

10) $\left(x^{a}\right)' = a \cdot x^{a-1}$, $a \in R$.

11) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$.

12) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

13) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$, $\forall x \in (0; +\infty)$.

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$, $a \neq 0$, $x \in R^*$.

15) $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, unde $0 \le k \le n$, $n \in N^*$, formula combinărilor.

16) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$, $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a+b)^n$ din binomul lui Newton.

TESTUL 22

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 8^{-\frac{2}{3}} - \log_2\sqrt{2}$.

2. Rezolvați în R inecuația $0,25 \cdot 2^{3x} > 16$.

3. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $(3-2i)z = 3+i$.

4. Fie expresia $E(\alpha) = \frac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+1+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Aflați $E\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

5. Să se afle valorile lui $a \in R$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

GEOMETRIE

6. Fie pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$, $BO = 3\sqrt{2}\,cm$ și M mijlocul laturii $[CD]$. Să se afle aria triunghiului AMD.

7. O piramidă patrulateră regulată are înălțimea de $8\,cm$ și volumul $384\,cm^3$. Să se afle lungimea laturii bazei și aria laterală a piramidei.

8. Diagonalele unui trapez dreptunghic sunt reciproc perpendiculare. Aflați aria trapezului, știind că înălțimea trapezului are lungimea $2\,cm$, iar baza mare are lungimea de $3\,cm$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. În progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ avem $a_5 = 24$ și $a_9 = 76$. Aflați a_{12}.

10. Se consideră funcția $f: R \to R$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$.
    a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
    b) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.
    c) Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția f, dacă $x \in [0; 2]$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă se află 12 bile, dintre care câteva sunt de culoare roșie. Probabilitatea ca două bile luate la întimplare din urnă să fie de culoare roșie este egală cu $\frac{5}{33}$. Să se afle câte bile roșii sunt în urnă.

12. Să se determine cel mai mare coeficient binomial din dezvoltarea $\left(a^2+b^3\right)^n$, știind că suma tuturor coeficienților binomiali ai dezvoltorii este egală cu 4096.

ANEXĂ

1) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a\neq 0$.

2) $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$.

3) $\log_a b^k=k\cdot\log_a b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $k\in R$.

4) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha\in R$.

5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\alpha\in R$.

6) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\alpha\in R$.

7) $A_{tr.dr}=\frac{1}{2}ab$, unde a și b sunt lungimile catetelor triunghiului dreptunghic.

8) $A_{lat.pir}=p\cdot a_p$, unde p este semiperimetrul bazei, a_p este lungimea apotemei piramidei, (doar pentru piramida regulată).

9) $V_{pir}=\frac{1}{3}\cdot A_{baz}\cdot h$, unde A_{baz} este aria bazei piramidei, h este înălțimea piramidei.

10) $a_n=a_1+r(n-1)$ – formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$.

11) Dacă $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=a$, atunci dreapta de ecuație $y=a$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ sau spre $+\infty$.

12) $\left(x^a\right)'=ax^{a-1}$, $a\in R$.

13) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

14) $\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$.

15) $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$, $\forall x\in R$, $a\neq 0$.

16) Volumul corpului de rotație C_f poate fi calculat cu formula $V\left(C_f\right)=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

17) $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}\cdot b+C_n^2a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+C_n^nb^n$.

18) În dezvoltarea $(a+b)^n$ suma coeficienților binomiali este egală cu 2^n.

19) $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, unde $n\in N^*$, $k\in N$, $k\leq n$, formula combinărilor.

TESTUL 23

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 8^{\frac{5}{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{9}\right)^{\frac{9}{2}}$.

2. Fie matricea X, astfel încât $3X + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați dacă matricea X este inversabilă.

3. Arătați că numărul $z = \frac{1}{1+2i} + \frac{1}{1-2i}$ este real.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $2 - \cos 2x + 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

5. Să se rezolve în R inecuația $\frac{2 - 4\cdot\log_9 x}{\sqrt{2x^2 - x - 6}} \geq 0$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$ și $m(\angle B) = 2\cdot m(\angle C)$. Dacă $AB = 8cm$ și M este mijlocul laturii $[BC]$, să se afle AM.

7. Centrul cercului înscris într-un triunghi isoscel împarte înălțimea corespunzătoare bazei în două segmente cu lungimile de $5cm$ și $3cm$, socotind de la vârful triunghiului. Să se afle aria triunghiului și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii laterale a triunghiului.

8. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are: latura bazei mari $24cm$, lungimea muchiei laterale de $15cm$ și lungimea apotemei de $12cm$. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. În progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ avem $b_2 = 6$, $b_5 = 162$. Aflați b_3.

10. Fie funcția $f: D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$.
   a) Determinați parametrii reali a și b, astfel încât graficul funcției să admită ca asimptotă la $+\infty$ dreapta de ecuație $y = x + 2$, iar $A(2; 6)$ să fie punct al graficului.
   b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f, cu a și b determinați la punctul a).
   c) Determinați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează asimptota oblică la graficul funcției f în punctul cu abscisa $x = -4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Se formează o delegație compusă din 5 elevi. Să se afle probabilitatea că delegația va fi formată din 3 fete și 2 băieți.

12. Coeficientul binomial al termenului al treilea în dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ este cu 44 mai mare decât coeficientul binomial al termenului al doilea. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe a^2.

ANEXĂ

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
2) $\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}$.
3) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
4) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.
5) Mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$ este $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$ și $a \in [-1; 1]$.
6) $\log_{a^k} = \frac{1}{k}\cdot\log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $k \neq 0$.
7) $A_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, unde a este lungimea unei laturi a triunghiului, iar h_a este lungimea înălțimii corespunzătoare laturii de lungime a a triunghiului (formula pentru aria triunghiului).

8) $A_{lat.tr.pir} = n \cdot \frac{L+l}{2} \cdot a_p$ (pentru trunchiul de piramidă regulată), unde L es[te] lungimea laturii bazei mari, l este lungimea laturii bazei mici, a_p este lungim[ea] apotemei trunchiului de piramidă, iar n este numărul de laturi ale bazelor.

9) Volumul trunchiului de piramidă: $V_{tr.pir} = \frac{H}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$, unde A_B es[te] aria bazei mari, A_b este aria bazei mici, iar H este înălțimea trunchiului d[e] piramidă.

10) $b_n = b_1 q^{n-1}$ – formula termenului general al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$.

11) Ecuația asimptotei oblice la $+\infty$: $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, ia[r] $n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right)$.

12) $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$, $a \in R$.

13) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

14) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a \in R \setminus \{-1\}$.

15) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|$, unde $a \neq 0$.

16) $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, unde $n \in N^*$, $k \in N$, $k \leq n$, formula combinărilor.

17) $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$, $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a-b)^n$ din binomul lui Newton.

TESTUL 24

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{36} 84 - \log_{36} 14 - \sqrt{2^{-2}}$.

2. Aflați conjugatul numărului complex $z = (2+3i)(1-i) + i + 3i^2$.

3. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\log_{\sqrt{3}}\left(x^2 - 5x - 3\right) = 2$.

4. Calculați valoarea expresiei $E = \frac{tg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha}$, știind că $\cos\alpha = -0,4$.

5. Determinați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{7 - \log_3 x} & \sqrt{8} \\ \sqrt{5} & \sqrt{7 + \log_3 x} \end{pmatrix}$ este inversabilă.

GEOMETRIE

6. Se consideră pătratul $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Fie M mijlocul laturii $[BC]$ și N mijlocul laturii $[CD]$. Dacă $MN = 5\sqrt{2}\,cm$, să se afle aria pătratului.

7. O prismă patrulateră regulată are diagonala de $18\,cm$, iar diagonala unei fețe laterale de $6\sqrt{5}\,cm$. Calculați:
   a) Aria secțiunii diagonale a prismei.
   b) Volumul prismei.

8. Triunghiul ABC are $AB = 18\,cm$, $AC = 24\,cm$, iar perimetrul triunghiului este egal cu $72\,cm$. Fie $D \in (AB)$, astfel încât $AD = 6\,cm$ și $E \in (AC)$, astfel încât $EC = 16\,cm$. Aflați perimetrul și aria patrulaterului $BCED$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați mărginirea șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \frac{2}{n+2}$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$.
    a) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.
    b) Determinați cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției f (extremele globale) pe intervalul $[1; 6]$.
    c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f și de dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 6$.

11. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se formează un număr de 3 cifre. Determinați probabilitatea că suma cifrelor numărului format este egală cu 5.

12. Să se afle termenul al doilea al dezvoltării $\left(\sqrt[13]{a}+\frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^n$, știind că coeficientul binomial al termenului al patrulea este de patru ori mai mare decât coeficientul binomial al termenului al treilea al dezvoltării.

ANEXĂ

1) $\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$, unde $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$.

2) $\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\log_a b$, unde $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $k\neq0$.

3) Conjugatul numărului complex $z=a+bi$ este numărul complex $\bar{z}=a-bi$.

4) $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, unde $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

5) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, unde $\alpha\in R$.

6) $V_{prism}=A_{baz}\cdot H$, unde A_{baz} este aria bazei prismei, iar H este lungimea înălțimii prismei.

7) Ecuația asimptotei oblice la $+\infty$ sau la $-\infty$: $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, iar $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

8) Dreapta de ecuație $x=a$ este asimptotă vertcală, dacă limitele laterale în punctul a sunt egale cu $+\infty$ sau $-\infty$.

9) $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a\in R\setminus\{-1\}$.

10) $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$, unde $x\neq0$.

11) $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$, unde $0\le k\le n$, formula aranjamentelor, $k\in N$, $n\in N$.

12) $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, unde $0\le k\le n$, formula combinărilor, $k\in N$, $n\in N$.

TESTUL 25

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=2\lg5+\frac{1}{2}\lg16$.

2. Fie determinantul $d=\begin{vmatrix}1 & x+1\\ 2 & 3x\end{vmatrix}$. Rezolvați în R ecuația $d=\sqrt{4-x}$.

3. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-1}\le\frac{9}{4}$.

4. Determinați numerele reale a și b, astfel încât $\frac{2i-i^2}{3i+i^2}=a+bi$.

5. Să se afle soluțiile ecuației $3+2\sin^2x-5\cos4x=\frac{8}{1+tg^2x}$, care aparțin intervalului $[\pi;\,2\pi]$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $D\in(AC)$, astfel încât $[AD]\equiv[CD]$ și $\angle ABD\equiv\angle CBD$. Dacă $AC=12cm$ și $BD=8cm$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

7. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un dreptunghi care are o latură de $12cm$, iar unghiul dintre diagonale are măsura de 60°. Să se afle aria laterală și volumul cilindrului.

8. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu $35cm$, $AB=12cm$, $BC=16cm$. Aflați lungimea bisectoarei $[BD$ a unghiului ABC al triunghiului ABC, $D\in(AC)$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ (să se determine primul termen și rația), dacă $a_2=5$ și $a_4=1$.

10. Fie funcţia $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 + ax}{bx - 2}$.

a) Determinaţi parametrii reali a şi b, astfel încât funcţia f sa admită extre
în punctele $x = 2$ şi $x = 6$.

b) Scrieţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

c) Determinaţi primitiva $F(x)$ a funcţiei $f(x)$, graficul căreia intersectea asimptota oblică în punctul de abscisă $x = -3$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂŢILOR ŞI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3;. . . ;9 se formează toate numerele naturale de câte şase cif distincte. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr din cele formate, număr format din ultimele două cifre ale lui să fie pătrat perfect sau cub perfect.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ suma coeficienţilor binomiali de rang par este egal cu 512. Să se afle termenul dezvoltării care nu-l conţine pe x.

ANEXĂ

1) $k \cdot \log_a b = \log_a b^k$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

2) $A_{lat.cil.} = 2\pi RH$, unde R este raza bazei cilindrului, iar H este înălţime cilindrului.

3) $V_{cil} = A_{baz} \cdot H = \pi R^2 H$, unde R este raza bazei cilindrului, iar H este înălţime cilindrului.

4) $a_n = a_1 + r(n-1)$ – formula termenului general al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$

5) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică. Atunci $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ (proprietat caracteristică a progresiei aritmetice).

6) Ecuaţia asimptotei oblice la $+\infty$ sau la $-\infty$: $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, i $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx\right)$.

7) Dreapta de ecuaţie $x = a$ este asimptotă vertcală, dacă limitele laterale în punct a sunt egale cu $+\infty$ sau $-\infty$.

8) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$, unde $a \in R \setminus \{-1\}$.

9) $\int \dfrac{1}{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|$, unde $a \neq 0$.

10) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, unde $0 \leq k \leq n$, formula aranjamentelor.

11) $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, unde $0 \leq k \leq n$, formula combinărilor.

12) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$, $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$, formula termenului general din dezvoltarea $(a+b)^n$ din binomul lui Newton.

13) $1 + tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, unde $x \in R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\}$.

14) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ sau $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, unde $x \in R$.

15) Teorema cosinusurilor: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar α este măsura unghiului opus laturii de lungime a.

TESTUL 26

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_2 18 - \log_2 9 + (1,5)^{-1}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $8 \cdot 2^{x-4} = 16$.

3. Să se afle numerele reale x și y din egalitatea $3xi - (10x + 2yi) = -5y + 3i$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(\log_3 x - 2)\sqrt{x^2 - 4} \leq 0$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$.

GEOMETRIE

6. Punctele A, B și C se află pe cercul $C(O;\ R)$. Dacă $m(\angle ABC) = 36^\circ$ ș lungimea arcului $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu $4\pi\, cm$, aflați lungimea cercului $C(O;\ R)$.

7. Baza unei prisme drepte este un triunghi cu laturile de $10cm$, $17cm$ și $21cm$. Să se afle aria secțiunii duse prin muchia laterală și înălțimea mai mică a baze prismei, știind că muchia laterală a prismei are lungimea de $18cm$.

8. Într-un triunghi isoscel unghiul de la bază are măsura 30°. Înălțime corespunzătoare bazei are lungimea cu $2cm$ mai mare decât raza cercului înscri în triunghi. Aflați lungimea bazei triunghiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine primul termen și rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind c $b_3 = 3\sqrt{2}$ și $b_4 = 3$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -2$

b) Detrerminați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f

c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de tangenta dus la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -2$ și de dreptele de ecuați $x = 3$ și $x = 4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe un raft se află 15 cărți, dintre care 10 sunt în limba română, iar restul cărților sunt în limba engleză. Se iau la întâmplare 5 cărți de pe raft. Să se afle probabilitatea că printre ele vor fi 2 cărți în limba română și 3 cărți în limba engleză.

12. Suma coeficienților binomiali de rang par în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ este egală cu 256. Determinați coeficientul lui $\frac{1}{x^2}$ din dezvoltare.

TESTUL 27

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt[3]{-3-\left(2\sqrt{6}\right)^2}$.

2. Fie polinomul $P(X)=X^2+aX-7$. Știind că $P(1)=-2$, aflați $P(2)$.

3. Rezolvați în mulțimea C ecuația $(2-3i)\cdot z=-1-5i$.

4. Calculați valoarea expresiei $E(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, dacă $tg\alpha=1{,}5$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația: $3\cdot\log_{\sqrt{5}}2+\log_{\sqrt{5}}\left(2^{x^2-1}-\dfrac{1}{8}\right)<\log_{\sqrt{5}}7$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC cu $[AB]\equiv[BC]$, $BD\perp AC$, $D\in(AC)$. Dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu $26cm$, iar perimetrul triunghiului ABD este egal cu $16cm$, să se afle BD.

7. În paralelogramul $ABCD$ avem: $BD=2\sqrt{41}\,cm$, $AC=26cm$, $AD=16cm$. Prin punctul O de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$ este dusă o dreaptă perpendiculară pe latura $[BC]$ a paralelogramului. Aflați lungimile segmentelor determinate de acestă perpendiculară pe latura $[AD]$.

8. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu baza de $12cm$ și latura laterală de $10cm$. Toate fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri de câte 45°. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Calculați limita șirului $a_n=\dfrac{\sqrt{4n^2+3}}{n+1}$.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=\ln(x^2+1)$.

    a) Calculați limita $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

    b) Aflați punctele de extrem local ale funcției f.

    c) Aflați valoarea integralei $I=\int_{-1}^{1}x\cdot f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 se formează toate numerele naturale de câte șase cifre distincte. Să se afle probabilitatea că alegând un număr din cele formate, el să aibă prima și ultima cifră pare.

12. Să se afle termenul al patrulea al dezvoltării $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt[3]{x}\right)^n$, știind că suma tuturor coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 2048.

TESTUL 28

ALGEBRĂ

1. Să se afle valoarea expresiei $E = \log_5 80 - \log_5 16 - \sqrt{3^{-2}}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\begin{vmatrix} 2^x & 12 \\ 4 & 4^x \end{vmatrix} = 16$.

3. Să se afle modulul numărului complex $z = \dfrac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

4. Rezolvați în $R \times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_3 (x+y) = 2 \end{cases}$.

5. Aflați toate soluțiile ecuației $(1-\cos 2x)\cdot \sin 2x = \sqrt{3}\sin^2 x$, care se află pe intervalul $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

GEOMETRIE

6. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB \| CD$, $BC \| AD$. Dacă $AC + BD = 30\,cm$ și $AD + BC = 16\,cm$, să se afle perimetrul triunghiului AOD.

7. Fie triunghiul isoscel ABC, în care $AB = BC = 26\,cm$, $AC = 20\,cm$. Dreapta MN, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $MN \| AC$, este situată la distanța de $18\,cm$ de la vârful B. Determinați aria patrulaterului $AMNC$.

8. Baza unei piramde este un triunghi dreptunghic cu catetele de $6\,cm$ și $8\,cm$. Toate unghiurile diedre de la baza piramidei au măsurile de câte 60°. Să se afle lungimea înălțimii piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se afle rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_{12} = 24$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = -2$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Calculați valoarea integralei $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o grupă sunt 15 băieți și 10 fete. S-au cumpărat 5 bilete la teatru și s-au repartizat la întâmplare. Să se afle probabilitatea, că la teatru vor merge 3 băieți și 2 fete.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ diferența dintre coeficientul binomial al termenului al treilea și coeficientul binomial al termenului al doilea este egală cu 170. Să se afle termenul care-l conține pe a^3 din această dezvotare.

TESTUL 29

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \dfrac{3^{-1,5} \cdot 9^2}{\sqrt{27}}$.

2. Determinați matricea A, dacă $3 \cdot A + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{5+\sqrt{x-1}} = 3$.

4. Rezolvați în mulțimea C ecuația $z^2 + |z| = 0$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $9^{\sin^2 x} - 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} = 6$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $(BD$ este bisectoarea unghiului ABC, $D \in (AC)$. Dacă $AB = 12\,cm$, $BC = 8\,cm$ și $AD = 10\,cm$, să se afle AC.

7. Fie ABC un triunghi oarecare cu înălțimea $AD = 3\sqrt{3}\,cm$, $D \in (BC)$, mediana $[AM] = 6\,cm$, $M \in (BD)$ și $m(\angle B) = 30^\circ$. Să se afle perimetrul triunghiului ABC.

8. Baza unei prisme drepte este un triunghi cu lungimile laturilor de $4\,cm$, $5\,cm$ și $7\,cm$. Înălțimea prismei este congruentă cu înălțimea mai mare a triunghiului din baza prismei. Să se afle volumul prismei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. În progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ avem $b_1 = -\dfrac{2}{9}$, $b_3 = -2$. Să se afle b_7.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.
 a) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
 b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe R.
 c) Să se calculeze $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Să se afle probabilitatea ca alegând un termen al dezvoltării $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{40}$, acesta să fie număr rațional.

12. Să se afle termenul al patrulea al dezvoltării $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{y} - \dfrac{y}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$.

TESTUL 30

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(\log_{25}75-\log_{25}3\right)^{-15}$.

2. Să se afle conjugatul numărului complex $z=(1+i)(2+3i)$.

3. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $\log_2\left(x^2-3x+10\right)=3$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(x-1)\cdot\sqrt{-x^2+x+6}\geq 0$.

5. Să se afle valorile reale ale lui m pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 0 & x & -1\\ m & 1 & 2\end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x\in R$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC care are aria egală cu $16cm^2$ și $BD\perp AC$, $D\in(AC)$. Dacă $AC=8\cdot BD$, să se afle BD.

7. O piramidă patrulateră regulată are aria laterală egală cu $14,76cm^2$, iar aria totală este egală cu $18cm^2$. Să se afle lungimea laturii bazei și lunginea înălțimii piramidei.

8. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$, $(CD$ este bisectoarea unghiului ACB, $D\in(AB)$, astfel încât împarte cateta opusă în două segmente cu lungimile de $8cm$ și $10cm$. Să se afle perimetrul triunghiului BDC.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1=3$ și $a_{n+1}=a_n+2$. Să se afle a_{10}.

10. Fie funcția $f:R\setminus\{-1\}\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.
a) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.
b) Determinați asimptota oblică la $+\infty$ a graficului funcției f.
c) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-un lot se află 25 de piese de calitatea întâi și 5 piese de calitatea a doua. Pentru controlul tehnic se iau la întâmplare 10 piese. Să se calculeze probabilitatea, că printre piesele luate se vor afla 2 piese de calitatea a doua.

12. Să se afle termenul al șaselea al dezvoltării $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{15}$.

TESTUL 31

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 8^{-\frac{2}{3}} + \log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Aflați modulul numărului complex $z = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$.

3. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(0,7)^{x-4} < \left(2\frac{2}{49}\right)^3$.

4. Se consideră polinomul $P(X) = 2X^3 - aX^2 + 3X - 9$. Dacă $X = 3$ este rădăcină a polinomului $P(X)$, să se descompună $P(X)$ în factori.

5. Aflați soluțiile ecuației $2\sin^4 2x - \sin^2 2x \cdot \sin 4x = 2\sin^2 2x - \sin 4x$, care aparțin intervalului $[0; \pi]$.

GEOMETRIE

6. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\angle A) = m(\angle B) = 90^\circ$, $BC \parallel AD$, $BC = 12cm$, $AD = 18cm$ și $m(\angle D) = 45^\circ$. Să se afle aria trapezului $ABCD$.

7. Baza unei piramide este un paralelogram cu laturile de $3cm$ și $7cm$, iar una dintre diagonalele bazei are lungimea de $6cm$. Piciorul înălțimii piramidei coincide cu punctul de intersecție ale diagonalelor paralelogramului din baza piramidei. Să se afle lungimile muchiilor laterale ale piramidei, știind că lungimea înălțimii piramidei este de $4cm$.

8. Într-un trapez isoscel lungimile bazelor sunt de $8cm$ și $14cm$, iar aria trapezului este egală cu $44cm^2$. Să se afle lungimea laturii laterale a trapezului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine numerele $a, b \in N$, știind că numerele 2; a; b sunt în progresie geometrică, iar numerele 2; 8; a sunt în progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f: R\setminus\{1\} \to R$, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-2}$.
    a) Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $x = \frac{3}{2}$ este zerou al primitivei F.
    b) Determinați intervalele pe care funcția f este convexă.
    c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{x+1}$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 se formează toate numerele naturale de câte șase cifre distincte. Să se afle probabilitatea că alegând la întâmplare un număr din cele formate, în el cifrele 2 și 5 să fie alături.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ diferența dintre coeficienții binomiali ai termenilor al treilea și al doilea este egală cu 90. Să se afle termenul dezvoltării care nu-l conține pe x.

TESTUL 32

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 4^{-\frac{3}{2}} + \left(\log_2 \frac{1}{16}\right)^{-1}$.

2. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $\sqrt{7-3x} = x+7$.

3. Determinați pentru care valori reale ale lui m numerele complexe $z_1 = (m^2 - 7) + 2i$ și $z_2 = 2 + (m-1)i$ sunt egale.

4. Se știe că $tg\alpha = \frac{2}{5}$ și $tg\beta = \frac{3}{7}$, unde $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Să se afle $\alpha + \beta$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq -2$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [BC]$ și $BD \perp AC$. $(AE$ este bisectoarea unghiului BAC, $E \in (BD)$, astfel încât $BE : ED = 27 : 15$. Dacă $AC = 60\,cm$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

7. Perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu $36\sqrt{2}\,cm$, iar diagonala $BD = 6\sqrt{6}\,cm$. Să se afle lungimea diagonalei $[AC]$ a rombului și distanța de la centrul rombului la latura AB.

8. Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu laturile de lungimi $2\sqrt{2}\,cm$ și $5\,cm$, iar măsura unghiului dintre ele este de 45°. Diagonala mai mică a paralelipipedului are lungimea $7\,cm$. Să se afle volumul paralelipipedului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se afle primul termen și rația unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $\begin{cases} b_4 - b_2 = 18 \\ b_5 - b_3 = 36 \end{cases}$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.

a) Să se calculeze $L = \lim_{x \to +\infty} \left(x - f(x)\right)^x$.

b) Să se determine intervalale de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe un raft se află 15 cărți, dintre care 5 sunt de matematică. Se iau la întâmplare 7 cărți de pe raft. Să se afle probabilitatea că 4 dintre ele vor fi cărți de matematică.

12. Să se afle termenul al cincilea al dezvoltării $\left(\sqrt{x} + x\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali de rang par ai dezvoltării este egală cu 512.

TESTUL 33

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{12+\sqrt{80}}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\begin{vmatrix} 3^x & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=29$.

3. Calculați valoarea expresiei $E=2tg\alpha-3ctg\alpha$, știind că $\sin\alpha=\frac{12}{13}$ și $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

4. Rezolvați în mulțimea C ecuația $z^2-(2-i)z+3-i=0$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_4^2 x+\log_4\sqrt{x}>1,5$.

GEOMETRIE

6. Fie paralelogramul $ABCD$ în care $(AM$ este bisectoarea unghiului BAD, $M\in(BC)$. Dacă $BM=17cm$ și $MC=13cm$, să se afle perimetrul paralelogramului $ABCD$.

7. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ bisectoarea $(CD$ a unghiului C, $D\in(AB)$, împarte cateta $[AB]$ în segmentele $AD=4cm$ și $BD=5cm$. Să se afle perimetrul triunghiului BDC.

8. Într-un con circular drept înălțimea are $20cm$, iar raza bazei conului are $25cm$. Prin înălțimea conului este dus un plan secant, care se află la distanța de $12cm$ de la centrul cercului din baza conului. Aflați aria secțiunii.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se afle numărul $x\in N$, pentru care numerele: $x+2$; $2x+3$; $6x-5$, în această ordine, să formeze o progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$, unde $a,b\in R$.

   a) Să se determine parametrii reali a și b, astfel încât graficul funcției f să admită asimptota $y=x+2$.

   b) Determinați intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f pentru a și b determinați la punctul a).

   c) Pentru a și b determinați la punctul a), calculați aria figurii mărginite de graficul funcției f, asimptota oblică și de dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe 15 cartonașe au fost scrise toate numerele naturale de la 1 la 15 inclusiv. Se extrag la întâmplare două cartonașe. Să se afle probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două cartonașe să fie egală cu 10.

12. În dezvoltarea $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este egală cu 46. Să se afle termenul dezvoltării care nu-l conține pe x. $n,k\in N$, $k\le n$.

TESTUL 34

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt[3]{2\frac{3}{8}-\frac{9}{4}}+\log_3\sqrt{3}$.

2. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\begin{vmatrix}\log_3 x & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}<-4$.

3. Fie z_1 și z_2 soluțiile complexe ale ecuației $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$. Calculați $|z_1|+|z_2|$.

4. Fie polinomul $P(X)=X^3+aX^2+2X+b$. Știind că $P(2)=-6$ și că $X=3$ este rădăcină a polinomului, să descompună $P(X)$ în factori în mulțimea R.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $2(1-\cos 2x)=\sqrt{3}tgx$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$ și $AC=BC$. $[CD]$ și $[AK]$ sunt mediane, $D\in(AB)$, $K\in(BC)$ și $CD\cap AK=\{O\}$. Dacă $CO=\frac{8}{3}cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

7. Un triunghi dreptunghic are măsura unui unghi ascuțit de două ori mai mare decât măsura celuilalt unghi ascuțit. Aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului este egală cu $36\pi\, cm^2$. Să se afle aria triunghiului.

8. Aflați lungimea laturii bazei și a apotemei unei piramide triunghiulare regulate, știind că muchia laterală a piramidei are lungimea $10cm$, iar aria laterală este egală cu $144cm^2$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\frac{n}{2n+1}$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$.

a) Aflați în care puncte tangenta la graficul funcției f formează cu semiaxa pozitivă a axei O_X un unghi cu măsura de 135°. Scrieți ecuațiile tangentelor la graficul funcției f în aceste puncte.

b) Să se afle intervalele de monotonie ale funcției f.

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează axa O_y într-un punct cu ordonata egală cu 4.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A=\{1;2;3;\ldots;10\}$. Se formează toate submulțimile cu 5 elemente ale mulțimii A. Să se afle probabilitatea ca alegând o submulțime din cele formate, ea să conțină exact două numere pare.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ raportul coeficienților binomiali ai termenilor al patrulea și al treilea este egal cu $\frac{4}{3}$. Să se afle termenul din mijloc al dezvoltării.

TESTUL 35

ALGEBRĂ

1. Aflați valoarea expresiei $E = a - b$, unde $a = 2\log_3 6$ și $b = \log_3 4$.

2. Fie numerele complexe $z_1 = 2 + i$ și $z_2 = 1 + 2i$. Calculați modulul numărului complex $z = 3z_1 - 2z_2$.

3. Fie expresia $E(\alpha) = 1 - \sin^2\alpha \cdot ctg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$. Calculați valoarea expresiei $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$.

5. Se consideră matricea $A \in M_3(C)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$. Determinați valorile complexe ale lui m pentru care matricea A este inversabilă.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $MK \parallel AC$, $M \in (AB)$, $K \in (BC)$. Dacă $MK = 3cm$, $AC = 15cm$ și $KC = 8cm$, să se afle BC.

7. Într-un cilindru circular drept cu raza bazei de $5cm$ este dus un plan paralel la axa cilindrului la distanța de $3cm$ de la axă. Să se afle înălțimea cilindrului, știind că aria secțiunii obținute este egală cu $64cm^2$.

8. Bisectoarea unui unghi al unui triunghi împarte latura opusă în două segmente cu lungimile de $8cm$ și $10cm$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, știind că centrul cercului înscris în triunghi împarte această bisectoare în raportul $3:2$, socotind de la vârful triunghiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Aflați ultimul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 3$, $r = 4$, $n = 15$.

10. *a*) Să se determine $a, b \in R$, astfel încât funcția $F(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x^2 + b}$ să fie o primitivă a funcției $f(x)$, unde $f(x) = \dfrac{1 + 2x - x^2}{1 + 2x^2 + x^4}$.

b) Să se afle măsura unghiului format de tangente la graficul funcției $F(x)$ în punctul de abscisă $x_0 = 0$ cu semiaxa pozitivă a axei absciselor.

c) Să se afle primitiva $G(x)$ a funcției $F(x)$, graficul căreia trece prin originea sistemului de coordonate.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe șase cartonașe sunt scrise primele șase numere naturale prime, care se pun într-un săculeț. Să se afle probabilitatea că scoțând cele șase cartonașe din săculeț și aranjându-le într-un rând, cartonașele cu numerele 3 și 7 să fie alături.

12. Să se afle termenul al nouălea al dezvoltării $\left(a + \sqrt{b}\right)^n$, știind că suma tuturor coeficienților binomiali ai dezvoltării este egală cu 4096.

TESTUL 36

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{\sqrt{70}-3\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{70}+3\sqrt{5}}$.

2. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $\begin{vmatrix} 4^x & 2 \\ 3 & 2^x \end{vmatrix}=10$.

3. Rezolvați în mulțimea C ecuația $(1+i)z=1-i$.

4. Rezolvați în $R\times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \\ x+y-3\sqrt{xy}=1 \end{cases}$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2-ctgx$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $MK\parallel AC$, $M\in(AB)$, $K\in(BC)$ și $BK=10cm$. Dacă perimetrul triunghiului MBK este egal cu $20cm$, iar perimetrul triunghiului ABC este egal cu $120cm$, să se afle BC.

7. Într-un paralelipiped drept muchia laterală are lungimea $10cm$, laturile bazei au lungimile $11cm$ și $23cm$, iar raportul lungimilor diagonalelor bazei este egal cu $\dfrac{2}{3}$. Să se afle ariile secțiunilor diagonale ale paralelipipedului.

8. Dintr-un punct al cercului $C(O;R)$ sunt construite două coarde cu lungimile de $10cm$ și $12cm$. Să se afle lungimea razei cercului, știind că distanța de la mijlocul coardei mai mici la coarda mai mare este de $4cm$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine numărul $x\in N$ pentru care numerele $x-4$; 6; $x+5$, în această ordine, să formeze o progresie geometrică.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$.

a) Să se srie ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Să se afle intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f, precum și valorile funcției f în punctele de extrem.

c) Calculați integrala $I=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă simultan două zaruri. Determinați probabilitatea ca suma punctelor de pe fețele apărute să fie un număr prim.

12. Să se determine $x\in R$, știind că al patrulea termen al dezvoltării $\left(x^{\frac{1}{2(1+\lg x)}}+x^{\frac{1}{12}}\right)^6$ este egal cu 200.

TESTUL 37

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 1,(6) + \log_{27} 9$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = (1,5)^3$.

3. Determinați numerele reale x și y, știind că $(2x + yi) - (y + 3xi) = 3 - 5i$.

4. Să se arate că valoarea expresiei $E = \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} : \frac{1+ctg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ este un număr natural, oricare ar fi $\alpha \in DVA$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_2 x^2 + \log_{\sqrt{2}}(x-1) < \log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\sqrt{2}} 2\right)$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$, $BC = 12\,cm$. Dacă aria triunghiului ABC este egală cu $30\,cm^2$, să se afle perimetrul triunghiului ABC.

7. Din punctul A sunt trasate două tangente AM și AN la cercul $C(O;\, R)$, M și N fiind puncte de tangență. BC este tangentă la cercul $C(O;\, R)$ în punctul P, $B \in (AN)$, $C \in (AM)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC, dacă $AM = 7\,cm$.

8. Baza unei piramide este un romb cu diagonalele de $6\,cm$ și $8\,cm$, iar înălțimea piramidei are $1\,cm$ și trece prin punctul de intersecție al diagonalelor rombului din bază. Aflați aria totală a piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ avem $a_4 - a_2 = 6$ și $a_1 + a_3 + a_5 = 25,5$. Să se afle suma primilor zece termeni ai progresiei.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Determinați măsura unghiului format de tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$ cu semiaxa pozitivă a axei OX.

b) Să se afle intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.

c) Aflați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$ pentru care $x = 1$ este zero.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o clasă sunt 12 băieți și 18 fete. Se formează aleator o delegație din 2 elevi. Determinați probabilitatea ca delegația să fie formată din o fată și un băiat.

12. În dezvoltarea $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 2048. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe a^7.

TESTUL 38

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 81^{\frac{3}{4}} + (0,25)^{-2}$.

2. Determinați valorile reale ale lui x și y pentru care matricele $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+y \\ 0 & x-2y \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & -x-1 \\ 0 & 9-2x \end{pmatrix}$ sunt egale.

3. Fie $E(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \sin\alpha & tg\alpha \cdot ctg\alpha \end{vmatrix}$. Calculați $E\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4. Rezolvați în mulțimea C ecuația $|z| - 2iz = 1 - 2i$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [BC]$, în care $BD \perp AC$. Dacă $AB = 5cm$ și $AC = BD + 2cm$, să se afle AC.

7. Un cilindru circular drept este înscris într-o prismă triunghiulară dreaptă cu laturile bazei de $13cm$, $14cm$, $15cm$ și muchia laterală de $20cm$. Să se afle aria secțiunii axiale a cilindrului.

8. Într-un triunghi cu lungimile laturilor de $3cm$, $4cm$ și $6cm$ este dusă mediana corespunzătoare laturii mai mari a triunghiului. Aflați cosinusul unghiului format de mediană cu latura mai mică a triunghiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul numeric $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin formula termenului general $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Precizați rangul termenului șirului care este egal cu $\frac{8}{15}$.

10. Fie funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-1}$.

a) Determinați parametrii reali a și b, astfel încât funcția f să admită un extrem egal cu 1 în punctul de abscisă $x = 0$.

b) Scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane determinate de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă concomitent două zaruri. Să se afle probabilitatea ca suma numerelor de pe cele două fețe să fie un pătrat perfect.

12. Aflați termenul care-l conține pe a^7 din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{14}$.

TESTUL 39

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 3\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 64$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\frac{1}{8} \cdot 4^x = \frac{1}{16}$.

3. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $\bar{z} - 2z = i(2i + 9)$.

4. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\frac{1}{tgx} - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + tgx}$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $D \in (AB)$. Dacă $AC = 8cm$ și $AD = 4cm$, să se afle BD.

7. O piramidă patrulateră regulată are muchia laterală de $5cm$, iar aria totală a piramidei este egală cu $16cm^2$. Aflați lungimea laturii bazei piramidei.

8. În triunghiul ABC se cunosc: $AB = 3cm$, $BC = 5cm$, $AC = 6cm$. Pe latura $[AB]$ se ia punctul M, astfel încât $BM = 2 \cdot AM$, iar pe latura $[BC]$ se ia punctul N, astfel încât $3 \cdot BN = 2 \cdot NC$. Aflați lungimea segmentului $[MN]$

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni pozitivi: b_1; 6; b_3; 54; ....

10. Fie funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + m}{x^2}$, unde m este un parametru real.
    a) Determinați m astfel încât funcția să admită un extrem local în $x = 2$.
    b) Pentru m aflat la punctul *a*) determinați asimptotele la graficul funcției f.
    c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează asimptota oblică în punctul de abscisă $x = 4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A = \{1; 2; 3; ...; 10\}$. Să se afle probabilitatea ca alegând o submulțime cu trei elemente a mulțimii A, aceasta să conțină numărul 2.

12. În dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^n$ coeficientul binomial al termenului al treilea este de 8 ori mai mare decât coeficientul binomial al termenului al doilea. Să se afle termenul care nu-l conține pe a din această dezvoltare.

TESTUL 40

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$.

2. Fie numărul complex $z = (-2+3i)(1-4i) - 5 + i$. Să se determine $|z|$.

3. Aflați $\sin(\alpha+\beta)$, știind că $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ și $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

4. Determinați rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 + 2aX^2 - 5X - a - 9$, $a \in R$, știind că restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-2$ este egal cu restul împărțirii lui $P(X)$ la binomul $X+1$.

5. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $AC : BC = 4:3$. Dacă $CD = 12\,cm$, să se afle AD.

7. Într-un cerc coardele $[MP]$ și $[NF]$ se intersectează în punctul E. Determinați lungimea coardei $[MP]$, dacă $NE = 3\,cm$, $EF = 4\,cm$ și $EP = 6\,cm$.

8. Într-un trunchi de con circular drept raza bazei mari are lungimea $21\,cm$, generatoarea are $39\,cm$ și diagonala secțiunii axiale a trunchiului are $45\,cm$. Să se afle volumul trunchiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Scrieți între numerele -3 și 13 trei numere, astfel încât împreună cu numerele date să formeze o progresie aritmetică.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = e^x - 2x$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției.

b) Să se afle intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f, precum și valorile funcției în punctele de extrem.

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia trece prin punctul $A(0; 5)$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pe un raft se află un număr de cărți în limba română și limba engleză. Se știe că probabilitatea de a lua la întâmplare o carte în limba română de pe raft este egală cu $\dfrac{3}{4}$. Știind că pe raft se află 5 cărți în limba engleză, să se afle câte cărți în limba română se află pe raft.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^{-3}}\right)^4$ care-l conține pe x^6, știind că termenul al nouălea al dezvoltării are cel mai mare coeficient binomial.

TESTUL 41

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(27^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

2. Se consideră funcția $f:R^{*}\to R$, $f(x)=\dfrac{5^{x}}{5^{2x}-1}$. Calculați $f(\log_5 3)$.

3. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}\sqrt{5-x^2} & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}$. Rezolvați în mulțimea ecuația $D(x)=1$.

4. Determinați numerele complexe z care verifică egalitatea $z^2=-5+12i$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3ctgx-3tgx+4\sin 2x=0$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$, $CD\perp AB$, $D\in(AB)$ și $[CM]$ mediană, $M\in(DB)$. Dacă $AD=2cm$, $DB=18cm$, să se afle perimetrul triunghiului CDM.

7. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată înălțimea are lungimea de $7cm$, iar lungimile laturilor bazelor sunt de $10cm$ și $2cm$. Să se afle lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă.

8. Se consideră rombul $ABCD$ cu $m(\angle ABC)=120^\circ$, $AC\cap BD=\{O\}$. Fie punctul M mijlocul laturii $[BC]$, $AM\cap BD=\{E\}$ și $OE=2cm$. Să se afle aria rombului $ABCD$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=3$ și $b_4=192$.

10. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{2x+m}$.

a) Aflați valorile parametrului real m, astfel încât funcția f să admită un extrem local în punctul $x=1$ și determinați natura acestui extrem.

b) Pentru m determinat la punctul *a*) scrieți ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x=3$ și $x=4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Care este probabilitatea ca o submulțime a mulțimii $\{1;\,2;\,3;\,4\}$ să conțină simultan elementele 1 și 2?

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2y}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 32. Să se afle termenul din mijloc al dezvoltării.

TESTUL 42

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_4\sqrt{2}-\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$.

2. Să se afle modulul numărului complex $z=\frac{(1+2i)(2+i)}{1+i}$.

3. Aflați domeniul de definiție al funcției $f:D\rightarrow R$, $f(x)=\frac{3x-2}{\sqrt{2^{3-6x}-1}}$.

4. Fie expresia $E(\alpha)=\frac{\sin^4\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{tg2\alpha-1}$. Aduceți expresia $E(\alpha)$ la o formă mai simplă și aflați $E\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\log_3\sqrt{130-7^{\log_x(6-x)}}=2$.

GEOMETRIE

6. Punctele A, B și C se află pe cercul $C(O;R)$, astfel încât $m(\angle AOB)+m(\angle ACB)=120^\circ$. Să se afle $m(\angle ACB)$.

7. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 3 *cm*, 4 *cm*, 5 *cm*. Dacă toate dimensiunile paralelipipedului se vor mări cu x *cm*, atunci aria lui totală se va mări cu $54cm^2$. Cum se va schimba volumul paralelipipedului?

8. În triunghiul ABC avem: $AB=15cm$, $BC=12cm$, $AC=18cm$. Să se afle lungimile segmentelor în care centrul cercului înscris în triunghi împarte bisectoarea unghiului ACB.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se studieze mărginirea șirului $a_n=\frac{2n+1}{n^2+5}$.

10. Fie funcția $f:R\rightarrow R$, $f(x)=2\sin^2x-\sin 2x$.

a) Aduceți la o formă mai simplă expresia $E(x)=f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

b) Determinați soluțiile ecuației $f(x)=0$ de pe intervalul $[\pi;2\pi]$.

c) Pentru funcția $f:(0;2\pi)\rightarrow R$, determinați primitiva al cărei grafic trece prin punctul $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

d) Determinați valorile reale ale parametrului b pentru care dreapta de ecuație $y=2x+b$ este tangentă la graficul funcției f în punctul $x_0=\frac{\pi}{4}$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 10 bile albe, 8 bile roșii și 6 bile galbene. Să se afle probabilitatea ca extrăgând două bile din urnă, ambele să fie de culoare roșie.

12. În dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)^n$ raportul dintre termenul al patrulea și termenul al treilea este egal cu $3\sqrt{2}$. Să se afle n.

TESTUL 43

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = 0,(5) + (1,5)^{-2}$.

2. Fie funcția $f : R \to R$, $f(x) = -2 \cdot 3^x$. Calculați $f\left(\log_2 56 + \log_{0,5} 7\right)$.

3. Determinați numerle reale x și y din relația $(4-i)x + (2+5i)y = 8+5i$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} \le \frac{\lg 4}{\lg 8}$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $3^{\log_{\sqrt{3}}(x-2)} > \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^4 x}{4} - \frac{\sin^4 x}{4}$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [BC]$ în care $BD \perp AC$, $D \in (AC)$ și $AK \perp BC$, $K \in (BC)$. Dacă $BK = 4cm$ și $KC = 1cm$, să se afle AC.

7. Un cilindru circular drept are înălțimea (generatoarea) egală cu $8cm$, iar raza bazei cilindrului este de $5cm$. Cilindrul este secționat cu un plan paralel cu axa cilindrului, astfel încât în secțiune se obține un pătrat. Să se afle distanța de la axa cilindrului la planul de secțiune.

8. În paralelogramul $ABCD$ se cunosc diagonalele $AC = 15cm$, $BD = 5cm$. Raza cercului circumscris triunghiului ADC are lungimea $10cm$. Aflați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABD.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine primul termen și rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_4 = 17$ și $a_6 - 3a_2 = 6$.

10. Fie funcțiile $f : R \to R$, $f(x) = (x+1)^2 e^x$ și $F : R \to R$, $F(x) = (ax^2 + b)e^x$.
a) Determinați $a, b \in R$, astfel încât funcția $F(x)$ să fie o primitivă a funcției $f(x)$.

b) Să se afle cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției f pe intervalul $[-4; 0]$, (extremele globale).
c) Să se determine primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, pentru care $F(1) = 2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se ia la întâmplare un număr natural din mulțimea numerelor naturale de două cifre. Să se afle probabilitatea că numărul ales să dea restul 3 prin împărțirea la 5.

12. Să se afle termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{10}$.

TESTUL 44

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \sqrt{\log_2\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(2\sqrt{3}\right)^2}$.

2. Aflați domeniul de definiție al funcției $f : D \to R$, $f(x) = 5^{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

3. Determinați conjugatul numărului complex z, pentru care $\frac{z}{1+i} = 2 - i^3$.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Fie polinomul $P(X) = a^2X^4 - 2abX^3 + b^2X^2 + a^2X - 2a + 1$. Să se determine $a, b \in Z$, astfel încât $P(X)$ să admită ca rădăcină $X = 1$.

GEOMETRIE

6. Punctele A, B și C se află pe cercul $C(O; R)$, astfel încât $m(\angle AOB) - m(\angle ACB) = 36^\circ$. Să se afle $m(\angle AOB)$.

7. Aflați lungimea înălțimii unei piramide triunghiulare regulate care are aria laterală egală cu $60\sqrt{3}\,cm^2$ și aria totală egală cu $108\sqrt{3}\,cm^2$.

8. Linia mijlocie a unui trapez are lungimea egală cu $5cm$, iar segmentul care unește mijloacele bazelor trapezului are lungimea egală cu $3cm$. Unghiurile de la baza mare a trapezului au măsurile de 30° și 60°. Să se afle aria trapezului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Scrieți trei numere între numerele $\frac{1}{8}$ și 2, astfel încât ele să formeze împreună cu numerele date o progresie geometrică.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Să se afle punctele de extrem local ale funcției f și valorile funcției în punctele de extrem.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei O_X a suprafeței mărginite de axa O_X și de graficul funcției f.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă un zar de patru ori. Determinați probabilitatea ca suma punctelor de pe fețele apărute va fi egală cu 22.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x^2}\right)^8$ care-l conține pe x^2.

TESTUL 45

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left[8^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{125^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $2^{\frac{3}{\log_2 x}}=\frac{1}{64}$.

3. Rezolvați în mulțimea R inecuația $(x^2-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

4. Determinați numerele complexe z pentru care se verifică condițiile: $z^2=-5+12i$ și $\operatorname{Re} z<0$.

5. Arătați că pentru orice $\alpha\in R$, valoarea determinantului $d=\begin{vmatrix}1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1\\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ este un număr natural.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C)=90^\circ$ în care $\frac{AB}{BC}=\frac{5}{3}$. Dacă aria triunghiului ABC este egală cu $54cm^2$, să se afle AC.

7. Fie triunghiul ABC în care $[AE]$, $[BD]$ și $[CM]$ sunt mediane, $E\in(BC)$, $D\in(AC)$, $M\in(AB)$, iar punctul O este centrul de greutate al triunghiului. Dacă $AE=12cm$, $BD=9cm$ și $AB=10cm$, să se afle CM.

8. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu laturile de $6cm$, $6cm$ și $8cm$. Toate muchiile laterale ale piramidei au lungimile de câte $9cm$. Să se afle volumul piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula termenului general $a_n=n^2+8n-65$. Stabiliți dacă numărul 115 este termen al șirului, și în caz afirmativ precizați rangul termenului.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x-1}$, $a,b\in R$.
    a) Determinați parametrii reali a și b, astfel încât graficul funcției f să admită asimptota $y=x+2$.
    b) Să se afle intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f, cu a și b determinați la puctul a).
    c) Determinați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează asimptota oblică în punctul cu ordonata $y=1$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 10 persoane (6 bărbați și 4 femei) se formează o echipă din 4 persoane. Să se afle probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 bărbați și 2 femei.

12. În dezvolterea $\left(\frac{1}{x}-\sqrt[3]{x}\right)^n$ coeficientul binomial al termenului al patrulea este de patru ori mai mare decât coeficientul binomial al termenului al treilea. Să se afle termenul din mijloc al dezvoltării.

TESTUL 46

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{\sqrt{2}} 8 - \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

2. Rezolvați în mulțimea R inecuația $16^x > 0,125$.

3. Să se rezolve ecuația $x^2 - 2x = -\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3}i & 5+\sqrt{3} \\ 5-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3}i \end{vmatrix}$.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $1,5\sin 2x = 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

GEOMETRIE

6. Triunghiul ascuțitunghic ABC este înscris în cercul $C(O; R)$. Dacă $m(\angle BAC) + m(\angle ACB) = 120^\circ$, să se afle $m(\angle AOC)$.

7. Perimetrul unui triunghi este egal cu $36\,cm$, iar lungimile laturilor triunghiului formează o progresie aritmetică cu rația $r = 3$. Să se afle lungimea cercului circumscris triunghiului.

8. Volumul unui trunchi de con circular drept este egal cu $181\pi\,cm^3$, iar lungimile generatoarei și ale razelor bazelor trunchiului sunt direct proporționale cu numerele 25; 11 și respectiv 4. Să se determine lungimile razelor bazelor și a generatoarei trunchiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Un triunghi ABC are măsurile unghiurilor A, B, C, în această ordine, în progresie aritmetică. Să se afle măsura unghiului B.

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$, unde $a, b \in R$.

a) Determinați a și b, astfel încât funcția f să admită un extrem egal cu 1 în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

b) Cu a și b aflați la punctul *a*), determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă simultan două zaruri. Determinați probabilitatea ca suma punctelor de pe cele două fețe apărute să fie un divizor al numărului 12.

12. Să se afle termenul dezvoltării $\left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^9$ în care x și y au exponenții egali.

TESTUL 47

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \dfrac{9^{-3} \cdot 27^{2}}{\left(\log_{\sqrt{2}} 2\right)^{-2}}$.

2. Să se afle $a \in R$, știind că restul împărțirii polinomului $P(X) = X^3 - 2X^2 + aX - 7$ la binomul $X - 1$ este egal cu -3.

3. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\begin{vmatrix} \log_2(x-3) & \sqrt{5}-i \\ \sqrt{5}+i & 2 \end{vmatrix} \le 2$.

4. Fie expresia $E(\alpha) = (\cos\alpha + 1)^2 + (\cos\alpha - 1)^2 - 3$. Arătați că valoarea expresiei $2\sqrt{3} \cdot E(15^\circ)$ este un număr natural.

5. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \cdot \log_{\sqrt{2}} \dfrac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle ACB) = 90^\circ$, $D \in (AB)$, astfel încât $AD = DB$. Dacă $CD = 12cm$, să se afle AB

7. Baza unei piramide este un dreptunghi cu laturile de $9cm$ și $12cm$. Toate muchiile laterale ale piramidei au lungimile de câte $12,5cm$. Să se afle volumul piramidei.

8. Perimetrul unui triunghi dreptunghic este egal cu $24cm$, iar aria triunghiului este egală cu $24cm^2$. Să se afle aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\ge1}$ sunt $b_3 = 1$ și $b_5 = 4$, determinați b_7.

10. Fie polinomul $P(x) = X^3 + aX^2 + 3X + 1$, $a, X \in R$.

a) Să se determine parametrul real a, astfel încât $P'(1) - 12 = 0$.

b) Pentru a determinat la punctul *a*), să se afle intervalele de monotonie ale funcției $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$.

c) Pentru a determinat la punctul *a*), calculați integrala $I = \int_2^5 \dfrac{P(x)}{P'(x)} dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 se formează toate numerele naturale de câte 5 cifre distincte. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr din cele formate, el să aibă primele trei cifre impare, iar restul pare.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 256. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe x.

TESTUL 48

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \sqrt[3]{9-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$.

2. Fie $z = 4i^3 + (3+i)^2 - 5$. Determinați suma dintre partea reală și partea imaginară a numărului complex z.

3. Determinați $m \in R$, astfel încât restul împărțirii polinomului $P(X) = 2X^3 + mX^2 + mX + 2$ la binomul $Q(X) = X - \sqrt{2}$ să fie egal cu $4\sqrt{2}$.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\begin{vmatrix} \sin x & tgx \\ ctgx & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$.

5. Rezolvați în $R \times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases} 2^x \cdot 8^{-y} = 2\sqrt{2} \\ \log_9 \dfrac{1}{x} + 0,5 = \dfrac{1}{2}\log_3(9y) \end{cases}$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC în care $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, astfel încât $MN \parallel AC$. Dacă $MN = 3cm$, $AC = 15cm$ și $NC = 8cm$, să se afle BC.

7. Să se afle lungimea înălțimii unei piramide triunghiulare regulate, care are aria bazei egală cu $27\sqrt{3}\,cm^2$ și aria totală egală cu $72\sqrt{3}\,cm^2$.

8. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este de $15cm$, iar raza cercului înscris în triunghi este de $6cm$. Să se afle lungimea înălțimii coborâte din vârful unghiului drept pe ipotenuză în triunghiul dat.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați numărul real x, astfel încât numerele: x; $2x+1$; $7x-6$, în această ordine, să formeze o progresie aritmetică.

10. Fie funcția $f: D \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$.

a) Determinați parametrii reali a și b, astfel încât graficul funcției f să treacă prin punctul $A(2;\,8)$ și $f'(2) = -3$.

b) Să se scrie ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f, pentru a și b determinați la punctul *a*).

c) Să se afle primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia se intersectează cu asimptota oblică într-un punct situat pe axa ordonatelor.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră mulțimea $A = \{\log_2 n \mid n \in \{1;\,2;\,3;\,...;20\}\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un element oarecare din mulțimea A, acesta să fie număr rațional.

12. În dezvoltarea $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$ suma tuturor coeficienților binomiali este egală cu 1024. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe x^5.

TESTUL 49

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_{\sqrt{3}} 18 - \log_3 4$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{|x-3|+2} = 3$.

3. Fie funcția $f : R^* \to R$, $f(x) = \frac{3^x}{3^{2x}-1}$. Calculați $f(\log_3 2)$.

4. Rezolvați în mulțimea C ecuația $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

5. Rezolvați ecuația $4 \cdot |\cos x| + 3 = a \cdot \cos 2x$, știind că una dintre soluțiile ei este $x = \frac{2\pi}{3}$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$ și $m(\angle A) = 30^\circ$. Dacă $BC = 8cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

7. În trapezul isoscel $ABCD$ latura laterală $[AB]$ și baza mică $[BC]$ au lungimile de câte $2cm$, iar $BD \perp AB$. Să se afle aria trapezului.

8. Baza unei piramide este triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$, $m(\angle B) = 60^\circ$, $AC = 12\sqrt{3}\,cm$. Aflați volumul piramidei, dacă toate muchiile laterale au lungimile de câte $13cm$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați numărul real x, știind că numerele 3; 15; x sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

10. Se consideră funcția $f : R \to R$, $f(x) = (x+1) \cdot e^{2x}$.
    a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.
    b) Aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.
    c) Să se afle aria figurii plane determinate de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt bile roșii și albastre. Se știe că probabilitatea extragerii la întâmplare a unei bile albastre este egală cu $\frac{7}{8}$. Știind că în urnă sunt 5 bile roșii, aflați câte bile albastre sunt în urnă.

12. În dezvoltarea $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 256. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe x^6.

TESTUL 50

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}-\left(\log_3 27\right)^{-1}$.

2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}2m & 12\\ 2,5 & 3\end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

3. Determinați valorile reale ale lui a pentru care numărul complex $z=a+3i$ are modulul egal cu 5.

4. Rezolvați în mulțimea R ecuația $0,5\lg(8-x)=\lg\left(1+\sqrt{x+5}\right)$.

5. Aflați soluțiile ecuației $\left(1+tg^2x\right)\cdot\sin x-tg^2x+1=0$, care verifică condiția $tgx<0$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[BC]$, în care $BD\perp AC$. Dacă $AB=10cm$ și $AC=16cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

7. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB\|CD$ și $m(\angle A)=90^\circ$, se dă: $AD=2\sqrt{3}\,cm$, $BC=6cm$ și $AB=3\cdot CD$. Să se afle lungimile diagonalelor și aria trapezului $ABCD$.

8. Se consideră un con circular drept cu secțiunea axială triunghiul echilateral VAB cu latura de $12cm$. Pe generatoarea $[VA]$ se ia punctul A_1, astfel încât $m(\angle AOA_1)=60^\circ$, O fiind centrul bazei conului. Se secționează conul cu un plan paralel cu baza, care conține punctul A_1.
a) Aflați aria laterală și volumul conului mic format;
b) Aflați volumul trunchiului de con format.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=1$, $a_{n+1}=1+2a_n$. Să se afle $E=a_1a_4-a_2a_3$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+ax+b}$, unde $a,b\in R$.

a) Determinați pentru care valori ale parametrilor a și b funcția f are asimptota verticală $x=1$, iar în $x=3$ admite un extrem local.

b) Cu a și b determinați la punctul *a*), scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_2=2$.

c) Pentru a și b determinați la punctul *a*), calculați integrala $I=\int_0^2 f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă simultan două zaruri. Să se afle probabilitatea ca cifrele apărute pe cele două fețe să formeze un număr, în care cifrele să fie prime între ele.

12. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}}-\frac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$ suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 2048. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe a^3.

TESTUL 51

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \dfrac{9^{-2} \cdot 81^{\frac{3}{4}}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $2^{x^3-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$.

3. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $(3-i)z = 2+3i$.

4. Știind că $\lg 5 = a$ și $\lg 3 = b$, să se afle $\log_{30} 8$ (să se exprime $\log_{30} 8$ prin a și b).

5. Determinați valorile reale nenule ale lui m, astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & x & -1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in R$.

GEOMETRIE

6. Măsura unui unghi al unui romb este de două ori mai mare decât măsura altui unghi al rombului. Știind că diagonala mai mică a rombului are lungimea $8cm$, să se afle lungimea diagonalei mai mari a rombului.

7. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu lungimile laturilor de $25cm$, $25cm$ și $40cm$. Înălțimea piramidei trece prin vârful opus laturii mai mari a trunghiului din bază și are lungimea $8cm$. Să se afle aria laterală a piramidei.

8. Să se afle lungimea liniei mijlocii a unui trapez dreptunghic circumscris unui cerc, știind că distanțele de la centrul cercului la extremitățile laturii laterale mai mari sunt egale cu $6cm$ și $8cm$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine primul termen al progresiei aritmetice: a_1; a_2; 13; 17; .....

10. Se consideră funcția $f: D \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

    a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

    b) Determinați intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

    c) Calculați integrala $I = \int_1^3 f(x)\,dx$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 se formează în mod aleator un cod din trei cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea ca cifrele 5 și 7 să nu se conțină în cod.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^n$ raportul coeficienților binomiali ai termenilor al treilea și al patrulea este egal cu $\dfrac{3}{10}$. Să se afle termenul dezvoltării care conține pe $\sqrt{a}$.

TESTUL 52

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_{\sqrt{3}}24-\log_9 4^6$.

2. Aflați domeniul de definiție al funcției $f:D\to R$, $f(x)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

3. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$. Stabiliți dacă matricea $B\cdot A$ este inversabilă.

4. Să se rezolve în mulțimea C ecuația $z^2-2(1-i)z+1-2i=0$.

5. Știind că $2\cos 2\alpha+4\sqrt{3}\sin\alpha=5$ și $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, să se afle $tg\alpha$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul ABC în care $[BD]$ este înălțime, $D\in(AC)$ și $[AM]$ este mediană, $M\in(BC)$. Dacă $MN\perp AC$ și $MN=7cm$, să se afle BD.

7. Fie triunghiul isoscel ABC cu $[AB]\equiv[BC]$, în care $[AE]$ este mediană, $E\in(BC)$. Dacă $AC=7cm$ și $AB=\sqrt{23}\,cm$, să se afle AE.

8. Baza unei piramide este un trapez isoscel cu $BC\parallel AD$, $BC=11cm$, $AD=21cm$ și $AB=CD=13cm$. Toate muchiile laterale ale piramidei sunt congruente și au lungimile de $12,5cm$. Să se afle volumul piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ cu rația $r=3$ și $a_3+a_4=25$. Să se determine a_1.

10. Se consideră funcția $f:R\to R$, $f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

b) Determinați intervalele de monotonie și coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

c) Calculați aria figurii plane determinate de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x=3$ și $x=5$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Din 13 persoane, dintre care 9 bărbați și 4 femei, se formează o delegație alcătuită din 7 persoane. Să se afle probabilitatea că în delegație vor fi cel puțin două femei.

12. În dezvoltarea $\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ avem $\frac{C_n^3}{C_n^2}=\frac{4}{3}$. Să se determine termenul care nu conține x din dezvoltarea dată.

TESTUL 53

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

2. Fie z_1 și z_2 soluțiile complexe ale ecuației $z^2-4z+5=0$. Să se afle valoarea expresiei $z_1^2+z_2^2$.

3. Să se rezolve în R inecuația $25^{\frac{1}{2x}+1}<125^{-\frac{2}{3}}$.

4. Să se aducă la o formă mai simplă expresia $E(\alpha)=\dfrac{\ln(\pi-\alpha)+\ln 2\alpha}{2\cos\alpha+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$ și aflați valoarea ei pentru $\alpha=-\dfrac{5\pi}{4}$.

5. Să se rezolve în R ecuația $\lg\left(3\cdot5^x+24\cdot20^x\right)=x+\lg18$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC în care $m(\angle C)=90^\circ$ și $CD\perp AB$. Dacă $AD=2cm$ și $DB=8cm$, să se afle aria triunghiului ABC.

7. Raza bazei unui cilindru circular drept are lungimea $26cm$, iar generatoarea cilindrului are $48cm$. La ce distanță de la axa cilindrului trebuie dus un plan paralel la axă, ca secțiunea să fie un pătrat?

8. Latura laterală a unui trapez isoscel are lungimea $10cm$. Diagonala trapezului împarte linia mijlocie a trapezului în două segmente cu lungimile de $6cm$ și $14cm$. Aflați aria trapezului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq1}$ avem: $b_4=11$, $b_7=88$. Să se afle b_9.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta de ecuație $y=ax+b$ reprezintă ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$.

c) Aflați primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, graficul căreia intersectează tangenta la graficul funcției în $x_0=1$ în punctul cu abscisa $x=3$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Să se afle probabilitatea ca alegând la întâmplare un termen al dezvoltării $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{50}$, el să fie număr rațional.

12. Termenul al treilea al dezvoltării $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ nu-l conține pe x. Să se afle valorile reale ale lui x pentru care acest termen este egal cu termenul al doilea al dezvoltării $\left(1+x^3\right)^{30}$.

TESTUL 54

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_4(\log_9 81) + \log_3 \sqrt{3}$.

2. Calculați $E = 2^x + 2^{-x}$, știind că $4^x + 4^{-x} = 23$.

3. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Calculați $z + \frac{1}{z}$.

4. Arătați că matricea $A = \begin{pmatrix} 2\sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$ este inversabilă oricare ar fi $\alpha \in R$.

5. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_{\frac{1}{3}} \left| \frac{3 - 2x}{1 - x} \right| > -1$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $[AB] \equiv [BC]$, în care $[AE]$ și $[BD]$ sunt mediane, $E \in (BC)$, $D \in (AC)$. Dacă $AB = 15cm$ și $AC = 24cm$, să se afle OD, unde $\{O\} = AE \cap BD$.

7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(A) = 90^\circ$, $AB = 20cm$, iar aria triunghiului ABC egală cu $150cm^2$. Fie $AD \perp BC$, $D \in (BC)$. Să se afle BD și DC.

8. Baza unei piramide este un triunghi cu lungimile laturilor de $13cm$, $14cm$, $15cm$ Unghiurile diedre de la baza piramidei au măsurile de câte 45°. Determinați aria laterală a piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Studiați monotonia șirului $a_n = \frac{n+1}{2n+3}$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.
    a) Aflați coordonatele punctelor de pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{4}$.
    b) Să se determine intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f, precum și mulțimea E a valorilor funcției f.
    c) Să se determine primitiva $F(x)$ a funcției $f(x)$, pentru care $F(3) = 2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se aruncă simultan două zaruri. Să se afle probabilitatea ca produsul numerelor de pe cele două fețe apărute să fie egal cu 6

12. Să se afle termenii raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

TESTUL 55

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_3 54 - \log_3 6 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\lg\left(x^2 - x + 8\right) = 1$.

3. Determinați $z \in C$, dacă $2\bar{z} + z = 3 + 4i$.

4. Rezolvați în mulțimea R inecuația $x^2 \cdot 3^x + 9 > x^2 + 9 \cdot 3^x$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{\cos^2 2x + \left|\sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}} = \cos\frac{20\pi}{12}$.

GEOMETRIE

6. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $BC \| AD$. Punctul M este mijlocul laturii $[AB]$, iar punctul N este mijlocul laturii $[CD]$. Dacă $MN = 10cm$ și $AD = 3 \cdot BC$, să se afle BC și AD.

7. Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu $BC \| AD$, $BC = 11cm$, $AD = 21cm$ și $AB = CD = 13cm$. Aria secțiunii diagonale a prismei este egală cu $180cm^2$. Să se afle aria totală a prismei.

8. Într-un trapez care are baza mică de $6cm$ este înscris un cerc. Una dintre laturile laterale este împărțită de punctul de tangență în segmente de lungimi $9cm$ și $4cm$. Să se afle aria trapezului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Perimetrul unui triunghi este egal cu $27cm$. Lungimile laturilor triunghiului formează o progresie aritmetică cu rația 3. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

10. Se consideră funcția $f:(0; +\infty) \to R$, $f(x) = x\ln x$.

a) Determinați inervalele pe care funcția f este monoton descrescătoare.

b) Comparați $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 + x - 2}$ și $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Determinați valoarea numerică a ariei figurii plane mărginite de graficul funcției f și de dreptele de ecuații $x = 1$, $x = 2$, $y = x$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-o urnă sunt 12 bile, 8 de culoare albă și 4 de culoare roșie. Se extrag la întâmplare 6 bile. Să se afle probabilitatea ca printre bilele extrase două să fie de culoare roșie.

12. Să se afle termenul al patrulea al dezvoltării $\left(\sqrt{2x} - \frac{x}{2}\right)^n$, știind că suma tuturor coeficienților binomiali ai acestei dezvoltări este egală cu 64.

TESTUL 56

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\sqrt{25^{\frac{1}{2}\log_5 12}+7^{2\log_7 2}}$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{2x-2}=1\frac{7}{9}$.

3. Determinați $a,b\in R$, știind că $z=3+4i$ este soluție a ecuației $z^2+az+b=0$.

4. Determinați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & x-1\\ 2x & 1 & 0\\ 4 & x+2 & 2\end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

5. Să se rezolve în mulțimea R inecuația $\frac{\log_{x-1}^2(5-x)}{x^2-3x}\le 0$.

GEOMETRIE

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și $BC=12cm$. Punctul M este mijlocul laturii $[AB]$, punctul N este mijlocul laturii $[AC]$, iar E este mijlocul segmentului $[MN]$. Să se afle AE.

7. Lungimea laturii pătratului $ABCD$ este egală cu $4cm$. Latura $[AB]$ a pătratului se prelungește după punctul B cu segmentul $BM=\frac{1}{2}AB$. Perpendiculara în M pe AM intersectează dreapta AC în punctul T. Determinați lungimea segmentului $[DT]$.

8. Înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată are lungimea $3cm$, volumul trunchiului este egal cu $38cm^3$. Ariile bazelor trunchiului se raportă ca $4:9$. Determinați aria laterală a trunchiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Să se determine numerele întregi x, pentru care numerele: $x-1$; $x+1$; $4x+1$, în această ordine, formează o progresie geometrică.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=x+\frac{ax}{x^2-1}$.

a) Determinați parametrul real a, astfel încât funcția f să admită un punct de extrem local în $x=0$.

b) Pentru a determinat la punctul *a*), determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

c) Să se afle aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x=2$ și $x=4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Cu cifrele 1; 2; 3; 4; 5; 6 se formează toate numerele naturale distincte de câte patru cifre, cifrele fiind diferite două câte două. Să se afle probabilitatea că alegând la întâmplare un număr din cele formate, ultimele două cifre ale lui să formeze un număr prim.

12. În dezvoltarea $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$ avem $\frac{T_3}{T_4}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Să se afle n.

TESTUL 57

ALGEBRĂ

1. Aflați valoarea expresiei $E=\sqrt[4]{7-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{7+\sqrt{33}}$.

2. Să se afle x, știind că $\log_5 x=2\cdot\log_5 3+\frac{1}{2}\cdot\log_5 49-\frac{1}{3}\cdot\log_5 27$.

3. Restul împărțirii polinomului $P(X)=X^3+3X^2+aX+5$ la binomul $X+2$ este egal cu 13. Să se afle restul împărțirii lui $P(X)$ la binomul $X-3$.

4. Se consideră numărul complex $z=2+(2a-3)i$, unde $a\in R$. Determinați a, astfel încât numărul $z+iz$ să fie real.

5. Să se rezolve în R ecuația $\begin{vmatrix} 2\cos 2x & \sqrt{6}\sin x \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=\sqrt{6}\cos x$.

GEOMETRIE

6. Raza bazei unui con circular drept are lungimea $5\,cm$, iar înălțimea conului are $12\,cm$. Să se afle aria totală a conului.

7. Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu $BC\parallel AD$, $BC=11\,cm$, $AD=21\,cm$ și $AB=CD=13\,cm$. Aria secțiunii diagonale a prismei este egală cu $180\,cm^2$. Să se afle aria totală a prismei.

8. În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle A)=90^\circ$ și $m(\angle B)=30^\circ$, lungimea razei cercului înscris în triunghi este de $\sqrt{3}\,cm$. Să se afle distanța de la vârful C al triunghiului până la punctul de tangență al cercului înscris cu cateta $[AB]$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Aflați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ și numărul de termeni ai progresiei, știind că $r=-2$, $a_n=17$ și $S_n=161$.

10. Fie funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax-2}{x^2-bx+1}$.

    a) Determinați valorile parametrilor reali a și b, astfel încât $x=0$ și $x=2$ să fie puncte de extrem local pentru funcția f.

b) Pentru a și b determinați anterior, scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției intersectează axa O_X.

c) Determinați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X și de dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ (cu a și b determinați anterior).

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Într-un birou lucrează 2 contabili și 10 economiști. Se formează o comisie din 8 specialiști. Să se afle probabilitatea că în comisie va fi cel puțin un contabil.

12. În dezvoltarea $\left(a^2+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^n$ raportul coeficienților binomiali ai termenilor al treilea și al patrulea este egal cu $\frac{3}{7}$. Să se afle termenul dezvoltării care-l conține pe a^4.

TESTUL 58

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_6 60 - \log_6 5 + \log_6 3$.

2. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2$.

3. Simplificați fracția $F = \dfrac{x^2+4}{x-2i}$.

4. Rezolvați în $R \times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_3 (x+y) = 2 \end{cases}$.

5. Rezolvați în mulțimea R ecuația $\sqrt{1-\cos^2 x} + \sin 2x = \lg\left(tg\dfrac{5\pi}{4} \right)$.

GEOMETRIE

6. Fie trapezul $ABCD$ cu $BC \| AD$, care este circumscris cercului $C(O;\ R)$. Dacă $AB + CD = 16cm$, determinați lungimea liniei mijlocii a trapezului.

7. O latură a unui triunghi are lungimea $20cm$, iar medianele corespunzătoare celorlalte două laturi au lungimile de $18cm$ și $24cm$. Să se afle aria triunghiului.

8. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul isoscel ABC cu $AB = BC = 10cm$, $AC = 12cm$. Înălțimea piramidei $VO = 4cm$. Toate fețele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri congruente.
a) Determinați măsura unghiului format de muchia larerală VB cu planul bazei;
b) Determinați aria laterală a piramidei.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = -3$ și $a_{n+1} = 3a_n + 7$. Calculați media aritmetică a numerelor a_3, a_4, a_5.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$.
a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f.

b) Determinați intervalele de monotonie și punctele de extrem local ale funcției f.
c) Determinați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X, și de dreptele de ecuații $x = \dfrac{1}{e}$ și $x = e$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se ia la întâmplare un număr natural din mulțimea numerelor naturale de două cifre. Să se afle probabilitatea ca un număr ales să dea restul 2 prin împărțirea la 4.

12. Aflați termenul care-l conține pe y^2 din dezvoltarea $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}\right)^n$, știind că n este cel mai mare număr natural care verifică inegalitatea $\log_{\frac{1}{3}} n + \log_{\frac{n}{3}} n > 0$.

TESTUL 59

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E = \log_2\left(16^{\frac{1}{2}}\right) - \log_3\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Să se rezolve în mulțimea R ecuația $\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{3x-4} = \sqrt{8}$.

3. Determinați numărul real pozitiv m, știind că modulul numărului complex $z = 3 + mi$ este egal cu 5.

4. Aflați valoarea expresiei $E = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, dacă $ctg\alpha = 0,8$.

5. Rezolvați în mulțimea Z inecuația $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 5|x| + 4\right) \geq -2$.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = BC$, $AC = AB + 9cm$ și perimetrul triunghiului este egal cu $54cm$. Determinați aria triunghiului ABC.

7. Se consideră un con circular drept cu raza bazei de $15cm$. La distanța de $24cm$ de la vârful conului se face o secțiune paralelă cu baza conului. Generatoarea conului mic obținut este de $26cm$. Să se afle volumul conului inițial.

8. Determinați aria unui triunghi care are două laturi de lungimi $27cm$ și $29cm$, iar mediana corespunzătoare laturii a treia a triunghiului are lungimea $26cm$.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Determinați $a + b + c$, dacă primii cinci termeni ai unei progresii aritmetice sunt: $a, b, 12, c, 18$.

10. Se consideră funcția $f : D \to R$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + 1}$.

    a) Să se determine parametrii reali a și b pentru care dreapta $y = x + 1$ este asimptotă la graficul funcției f, iar $x = 1$ este punct de extrem local.

    b) Pentru a și b determinați la punctul *a*), aflați coordonatele punctelor de extrem local ale funcției f.

    c) Calculați aria figurii plane mărginite de graficul funcției f, de axa O_X, și de dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = 4$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Pentru a obține nota trecătoare la examen, un student trebuie să răspundă corect la 3 întrebări. Programa conține 30 de întrebări, dintre care studentul a pregătit doar 25. Să se afle probabilitatea că studentul va susține examenul.

12. Aflați termenul al șaselea al dezvoltării $\left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^n$, știind că coeficientul binomial al termenului al patrulea este egal cu 56.

TESTUL 60

ALGEBRĂ

1. Calculați valoarea expresiei $E=\log_3 27-\sqrt{6\frac{1}{4}+3^{\log_{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

2. Rezolvați în mulțimea R inecuația $\log_2(2x-1)>\log_2(3x-4)$.

3. Rezolvați în $R\times R$ sistemul de ecuații $\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2\end{cases}$.

4. Fie polinomul $P(X)=X^3+aX^2+3X+b$. Știind că $X=2$ este rădăcină a polinomului și că $P(3)=12$, descompuneți $P(X)$ în factori pe mulțimea R.

5. Determinați valorile reale ale lui x pentru care numerele complexe $z_1=\lg(2x^2+x+1)+i\cdot 4^x$ și $z_2=\lg(x^2+1)+i\cdot(2^{x+1}-3)$ sunt reciproc conjugate.

GEOMETRIE

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=9cm$, $AC=13cm$, în care M este mijlocul laturii $[AB]$, N este mijlocul laturii $[BC]$ și $NP\parallel AB$, $P\in(AC)$. Să se afle perimetrul patrulaterului $AMNP$

7. Baza unui paralelipiped drept este un romb care are aria $1cm^2$. Ariile secțiunilor diagonale ale paralelipipedului sunt egale cu $3cm^2$ și respectiv $6cm^2$. Să se afle volumul paralelipipedului.

8. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile $3cm$ și $4cm$. În interiorul triunghiului este luat un punct care se află la distanțe egale de câte $1cm$ de fiecare catetă. Să se afle distanța de la punctul dat la ipotenuza triunghiului.

ANALIZĂ MATEMATICĂ

9. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi, astfel încât $4b_2=b_4$. Determinați valoarea raportului $E=\frac{b_3+b_4}{b_2}$.

10. Se consideră funcția $f:D\to R$, $f(x)=\frac{ax}{x^2+b}$.

a) Să se afle parametrii reali a și b pentru care punctul $A\left(2;\frac{1}{4}\right)$ este punct de extrem pentru funcția f.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, care trece prin originea sistemului de coordonate (cu a și b determinați anterior).

c) Să se afle aria figurii plane determinate de graficul funcției f, de axa absciselor și de dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$.

ELEMENTE DE COMBINATORICĂ. BINOMUL LUI NEWTON. ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

11. Se consideră ecuația de gradul întâi în necunoscuta x, $mx-1=m+x$. Să se afle probabilitatea ca ecuația să aibă o soluție întreagă atunci când m ia o valoare întreagă din intervalul $[-4;5]$.

12. Aflați termenul care-l conține pe x^6 din dezvoltarea $\left(x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, știind că coeficientul binomial a termenului al treilea este cu 35 mai mare decât coeficientul binomial al termenului al doilea.

SOLUȚII

TESTUL 11

1. $E=4$. **2.** $E=\frac{1}{4}$. **3.** $S=\left\{\frac{8}{7}\right\}$. **4.** $z=7,5-4i$. **5.** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}\cup(2;+\infty)$. **6.** $P=25cm$. **7.** $A=75cm^2$. **8.** $V=\frac{26\sqrt{3}}{3}\pi\,cm^3$. **9.** $a_{10}=19$. **10.** *a)* $y=-8x+14$; *b)* $x=1$ este punct de maxim local, $f_{\max}=f(1)=0$; $x=4$ este punct de minim local și $f_{\min}=f(4)=6$; *c)* $I=9+\frac{9}{4}\ln 5$. **11.** $P=\frac{1}{7}$. **12.** Termenii raționali ai dezvoltării sunt: T_1, T_7, T_{13}, T_{19}, T_{25} și T_{31}.

TESTUL 12

1. $E=43\frac{1}{9}$. **2.** $d=2\in N$. **3.** $E=\frac{17}{31}$. **4.** $S=[1;4]$. **5.** $R(X)=3X-2$. **6.** 24°; 60°; 132°; 144°. **7.** $A_{tot}=64\left(\sqrt{2}+1\right)\pi\,cm^2$. **8.** $d=\sqrt{505}\,cm$. **9.** Șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este mărginit și $a_n\in\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$. **10.** $D(f)=R\setminus\{2\}$. *a)* Dreapta de ecuație $y=2$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$; dreapta de ecuație $x=2$ este asimptotă verticală; *b)* Funcția f este descrescătoare pe domeniul ei maxim de definiție, adică pe intervalele $(-\infty;2)$ și $(2;+\infty)$ *c)* $A=(4+3\ln 3)(u.\ p)$. **11.** $P=\frac{1}{5}$. **12.** $x\in\left\{1;\frac{1}{e^2}\right\}$.

TESTUL 13

1. $E=-\frac{5}{2}$. **2.** $a=-5$. **3.** $|z|=1$. **4.** $x_1=\pi k$, $k\in Z$; $x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **5.** $S=\{2\}\cup(4;+\infty)$. **6.** $P=120cm$. **7.** $A=2048cm^2$. **8.** $A_{lat}=144\sqrt{3}\,cm^2$. **9.** $a_{10}=35$. **10.** *a)* $y=x-1$; *b)* $x=\frac{1}{e}$ este punct de minim local; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+2-2\ln 2$. **11.** $P=\frac{7}{44}$. **12.** $S=\frac{847}{27}$.

TESTUL 14

1. $E=4$. **2.** $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=0$. **3.** $E=16$. **4.** $r=-95$. **5.** $S=\left[\frac{1}{2}\log_2 3-1;+\infty\right)$. **6.** $A=48cm^2$. **7.** $A_{tot}=144\left(\sqrt{3}+1\right)cm^2$. **8.** $CD=\frac{3\sqrt{6}}{5}cm$. **9.** $b_5=162$. **10.** $D(f)=R\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. *a)* Dreapta de ecuație $y=\frac{1}{2}$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ și la $+\infty$; dreapta de ecuație $x=-\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ și $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ și nu are puncte de extrem local; *c)* $A=\left(1+\frac{3}{4}\ln\frac{3}{7}\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{19}{33}$. **12.** $T_3=240$.

TESTUL 15

1. $E=-1$. **2.** $w=3+2i$. **3.** $S=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. **4.** $\cos x=-\frac{1}{2}$. **5.** $S=\{3;81\}$. **6.** $V=432\pi\,cm^3$. **7.** $d=\sqrt{73}\,cm$, $A=\frac{33\sqrt{19}}{4}cm^2$. **8.** $V=96\pi\,cm^3$. **9.** $a_2+a_4=18$. **10.** $D(f)=R\setminus\{-1\}$. *a)* $m=1$; *b)* $A(3;2)$; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+\frac{5}{2}-\ln 2$. **11.** $P=\frac{1}{21}$. **12.** $T_3=66a^8$.

TESTUL 16

1. $E=3$. **2.** $x\in\{0;10\}$. **3.** $z=\frac{17}{13}-\frac{7}{13}i$. **4.** $D=\left[-\frac{1}{2};2\right)$. **5.** $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **6.** $MC=15cm$. **7.** *a)* $A_{MNC}=60cm^2$; *b)* $d=3\sqrt{10}\,cm$. **8.** $V=\frac{448\sqrt{3}}{3}\pi\,cm^3$. **9.** $a_1=1,5$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* Dreapta de ecuație $y=x-1$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$, dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală; *b)* $x=0$ este punct de maxim local, $f_{\max}=f(0)=-2$; $x=2$ este punct de minim local și $f_{\min}=f(2)=2$; *c)* $I=\frac{15}{2}+\ln 4$. **11.** $P=\frac{14}{33}$. **12.** $T_{13}=C_{24}^{12}x^3y^3$.

TESTUL 17

1. $E=5$. **2.** $|z|=5\sqrt{2}$. **3.** $S=(-1;1)$. **4.** $\sin 2\alpha=\frac{336}{625}$. **5.** $S=\left(-\sqrt{7};-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};\sqrt{7}\right)$. **6.** $A_{ABC}=108cm^2$. **7.** $A_{tot}=576\left(\sqrt{3}+1\right)cm^2$. **8.** *a)* $A=36\sqrt{3}\,cm^2$; *b)* $d=\frac{12\sqrt{7}}{7}cm$. **9.** $b_1=\frac{1}{81}$. **10.** $D(f)=R\setminus\{-1\}$. *a)* $a=2$; *b)* $y=2x$; *c)* $A=\ln 3(u.p)$. **11.** $P=\frac{1}{15}$. **12.** $T_7=C_{12}^{6}\cdot\frac{1}{x}$.

TESTUL 18

1. $E=\sqrt{2}$. **2.** $E=0$. **3.** $S=[1;2]$. **4.** $S=\left\{\frac{3-\sqrt{19}i}{2};\frac{3+\sqrt{19}i}{2};-1;4\right\}$. **5.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[4\sqrt{2};+\infty\right)$. **6.** $MN=7\,cm$. **7.** $A_{ABC}=72\sqrt{3}\,cm^2$. **8.** $A_{tot}=96\pi\,cm$, $V=96\pi\,cm^3$. **9.** Șirul $(a_n)_{n\geq1}$ este monoton descrescător. **10.** $D(f)=R\setminus\{2\}$. *a)* $m=9$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;1)$ și $(3;+\infty)$, și este descrescătoare pe intervalele $(1;2)$ și $(2;3)$; $x=3$ este punct de minim local, $f_{\min}=f(3)=0$; $x=1$ este punct de maxim local, $f_{\max}=f(1)=-2$ *c)* $A=1+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$. **11.** $P=\frac{70}{207}$. **12.** $T_3=60$.

TESTUL 19

1. $a+b=1$. **2.** $\bar{z}=3-8i$. **3.** $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **4.** $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2}\end{pmatrix}$. **5.** $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$. **6.** $l_m=8cm$. **7.** $A_{lat}=180\pi\, cm^2$, $V=672\pi\, cm^3$. **8.** Problema are două soluții: 1) Dacă $AB<AC$, atunci $A_{ABC}=162\sqrt{3}\,cm^2$. 2) Dacă $AB>AC$, atunci $A_{ABC}=486\sqrt{3}\,cm^2$. **9.** $r=3$. **10.** $D(f)=R\setminus\{2\}$. *a)* $a=-1$; *b)* $y=-5x+3$; *c)* $F(x)=x^2+3x+7\ln|x-2|-18$. **11.** $P=\frac{1}{15}$. **12.** $T_3=21x^7$.

TESTUL 20

1. $E=1$. **2.** $x=2$. **3.** $x=4$, $y=2$. **4.** $E=-5$. **5.** $S=\{9;81\}$. **6.** $m(\angle ACB)=60°$. **7.** $P=36\,cm$. **8.** $A_{lat}=104cm^2$, $V=64cm^3$. **9.** $q=2$. **10.** *a)* Dreapta de ecuație $y=-x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f spre $-\infty$, dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f spre $+\infty$; *b)* Funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty;0)$ și este crescătoare pe intervalul $(0;+\infty)$. Punctul $x=0$ este punct de minim local și $f_{\min}=f(0)=1$; *c)* $G(x)=\sqrt{x^2+1}+2-\sqrt{5}$. **11.** $P=\frac{1}{7}$. **12.** $T_5=1120\sqrt[3]{a^2}$.

TESTUL 21

1. $E=1$. **2.** $x=-3$. **3.** $z=-\frac{15}{26}+\frac{23}{26}i$. **4.** $X\in\left\{-2;-\frac{1}{2};3\right\}$. **5.** $x_1=\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$; $x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $n\in Z$. **6.** $CD=6cm$. **7.** $A_{tot}=\left(600+592\sqrt{3}\right)cm^2$, $V=2400\sqrt{3}\,cm^3$. **8.** $P=33cm$. **9.** $S=129$. **10.** *a)* Dreapta de ecuație $y=-2$ este asimptotă orizontală la $-\infty$, dreapta de ecuație $y=2$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ la graficul funcției f; *b)* Funcția f este strict crescătoare pe mulțimea R; *c)* $I=4+\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)$. **11.** $P=\frac{3}{10}$. **12.** $T_6=21$.

TESTUL 22

1. $E=-\frac{1}{4}$. **2.** $S=(2;+\infty)$. **3.** $z=\frac{7}{13}+\frac{9}{13}i$. **4.** $E\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $a\in R\setminus\{-1;1\}$. **6.** $A_{AMD}=9cm^2$. **7.** $l_b=12cm$, $A_{lat}=240cm^2$. **8.** $A=\frac{13}{3}cm^2$. **9.** $a_{12}=115$. **10.** *a)* Dreapta de ecuație $y=-2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$, dreapta de ecuație $y=2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f; *b)* $x=0$ este punct de inflecsiune; *c)* $V=(8-2\pi)\pi(u.c)$. **11.** 5 bile roșii. **12.** $C_{12}^{6}=924$.

TESTUL 23

1. $E=864$. **2.** Matricea X este inversabilă. **3.** $z=\frac{2}{5}\in R$. **4.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$. **5.** $S=(2;3]$. **6.** $AM=8cm$. **7.** $A=48cm^2$, $h=9{,}6cm$. **8.** $A_{lat}=720cm^2$, $V=624\sqrt{7}\,cm^3$. **9.** $b_3=18$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* $a=1$, $b=0$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)$ și $\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$, este descrescătoare pe intervalele $\left(1-\sqrt{2};1\right)$ și $\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. $x=1-\sqrt{2}$ este punct de maxim local, $x=1+\sqrt{2}$ este punct de minim local; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|-2-2\ln 5$. **11.** $P=\frac{50}{133}$. **12.** $T_3=55a^2$.

TESTUL 24

1. $E=0$. **2.** $\bar{z}=2-2i$. **3.** $S=\{-1;6\}$. **4.** $E=0{,}84$. **5.** $x\in R\setminus\left[\left\{\frac{1}{27};27\right\}\cup\left(0;\log_3\frac{1}{3^7}\right]\right]$. **6.** $A=100cm^2$. **7.** *a)* $A_s=72\sqrt{2}\,cm^2$; *b)* $V=864cm^3$. **8.** $P=68cm$, $A=192cm^2$. **9.** Șirul este mărginit inferior și superior și $a_n\in\left(0;\frac{2}{3}\right]$. **10.** $D(f)=R\setminus\{0\}$. *a)* Dreapta de ecuație $y=\frac{1}{8}x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ și spre $+\infty$; dreapta $x=0$ (axa ordonatelor) este asimptotă verticală; *b)* $\max f(x)=f(1)=2\frac{1}{8}$, $\min f(x)=f(4)=1$; *c)* $A=\left(\frac{35}{16}+2\ln 6\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{2}{243}$. **12.** $T_2=14a^{\frac{5}{2}}$.

TESTUL 25

1. $E=2$. **2.** $x=3$. **3.** $S=\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$. **4.** $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. **5.** $x\in\left\{\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right\}$. **6.** $P_{ABC}=32cm$. **7.** Problema are două soluții: 1) $A_{lat}=144\sqrt{3}\,\pi\, cm^2$, $V=1296\pi\, cm^3$; 2) $A_{lat}=48\sqrt{3}\,\pi\, cm^2$, $V=144\sqrt{3}\,\pi\, cm^3$. **8.** $BD=6\sqrt{5}\,cm$. **9.** $a_1=7$, $r=-2$. **10.** *a)* $a=-3$, $b=\frac{1}{2}$, și obținem funcția $f:R\setminus\{4\}\to R$, $f(x)=\frac{2x^2-6x}{x-4}$; *b)* Dreapta de ecuație $y=2x+2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$, dreapta $x=4$ este asimptotă verticală; *c)* $F(x)=x^2+2x+8\ln|x-4|-7-8\ln 7$. **11.** $P=\frac{7}{24}$. **12.** $T_5=210$.

TESTUL 26

1. $E=\frac{5}{3}$. **2.** $x=5$. **3.** $x=-3$, $y=-6$. **4.** $S=[2; 9]$. **5.** $x=2\pi k$, $k\in Z$. **6.** $L_{cerc}=20\pi\, cm$. **7.** $A_s=144\, cm^2$. **8.** Baza triunghiului are lungimea $2(3+2\sqrt{3})cm$. **9.** $b_1=6\sqrt{2}$, $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.** $D(f)=R\setminus\{2\}$. *a)* $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; 0)$ și $(4; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(0; 2)$ și $(2; 4)$. $x=0$ este punct de maxim local, $x=4$ este punct de minim local; *c)* $A=\left(\frac{19}{8}+4\ln 2\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{150}{1001}$. **12.** $C_9^6=84$.

TESTUL 27

1. $E=-3$. **2.** $P(2)=5$. **3.** $z=1-i$. **4.** $E(\alpha)=5$. **5.** $S=(-1; 1)$. **6.** $BD=3cm$. **7.** $4cm$ și $12cm$. **8.** $h=3cm$. **9.** $\lim_{n\to+\infty} a_n=2$. **10.** *a)* $L=0$; *b)* $x=0$ este punct de minim local; *c)* $I=0$. **11.** $P=\frac{1}{7}$. **12.** $T_4=165x^{14}$.

TESTUL 28

1. $E=\frac{2}{3}$. **2.** $x=2$. **3.** $|z|=1$. **4.** $S=\{(3; 6); (6; 3)\}$. **5.** $x\in\left\{-\pi; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}$. **6.** $P_{AOD}=23cm$. **7.** $A=105cm^2$. **8.** $h=2\sqrt{3}\,cm$. **9.** $r=2$. **10.** *a)* $y=-\frac{3}{25}x-\frac{16}{25}$; *b)* Funcția f este descrescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(1; +\infty)$, și este crescătoare pe $(-1; 1)$; *c)* $I=\frac{1}{2}\ln 5$. **11.** $P=\frac{195}{506}$. **12.** $T_8=C_{20}^7 a^3$.

TESTUL 29

1. $E=3$. **2.** $A=\begin{pmatrix}-6 & 2 & -3\\ -5 & -3 & 1\end{pmatrix}$. **3.** $x=17$. **4.** $S=\{0; i; -i\}$. **5.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. **6.** $AC=16\frac{2}{3}cm$. **7.** $P_{ABC}=6(3+\sqrt{3})cm$. **8.** $V=48cm^3$. **9.** $b_7=-162$. **10.** *a)* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$; *b)* $f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$, pentru orice $x\in R$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe R; *c)* $I=\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **11.** $P=\frac{7}{41}$. **12.** $T_4=-\frac{816x^{\frac{17}{4}}}{y^{12}}$.

TESTUL 30

1. $E=1$. **2.** $\bar{z}=-1-5i$. **3.** $S=\{1; 2\}$. **4.** $S=\{-2\}\cup[1; 3]$. **5.** $m\in\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup(1; +\infty)$. **6.** $BD=2cm$. **7.** Lungimea laturii bazei piramidei este $a=1{,}8cm$, lungimea înălțimii piramidei este $h=4cm$. **8.** $P_{BDC}=8(5+\sqrt{10})\,cm$. **9.** $a_{10}=21$. **10.** *a)* $x=-3$ este punct de maxim local, $x=1$ este punct de minim local. *b)* Ecuația asimptotei oblice: $y=x-1$. *c)* $\int_0^1 f(x)dx=4\ln 2-\frac{1}{2}$. **11.** $P=\frac{C_5^2\cdot C_{25}^8}{C_{30}^{10}}$. **12.** $T_6=3003$.

TESTUL 31

1. $E=-\frac{3}{4}$. **2.** $|z|=1$. **3.** $S=(-2; +\infty)$. **4.** $P(X)=(X-3)(2X^2+3)$. **5.** $x\in\left\{0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{8}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$. **6.** $A_{ABCD}=90cm^2$. **7.** $5cm, 5cm$ și $6cm, 6cm$. **8.** $l=5cm$. **9.** $a=14$, $b=98$. **10.** *a)* $F(x)=x+\frac{3}{2}\cdot\ln|2x-2|-\frac{3}{2}$; *b)* $(1; +\infty)$; *c)* $\lim_{x\to+\infty}(f(x))^{x+1}=e^{\frac{3}{2}}$. **11.** $P=\frac{5}{36}$. **12.** $T_7=5005$.

TESTUL 32

1. $E=-\frac{1}{8}$. **2.** $S=\{-3\}$. **3.** $m=3$. **4.** $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. **5.** $S=(-\infty; 0]\cup[1; \log_6 5)$. **6.** $P_{ABC}=168cm$. **7.** $AC=12\sqrt{3}\,cm$, $d=6cm$. **8.** $V=60cm^3$. **9.** $b_1=3$, $q=2$. **10.** $D(f)=R\setminus\{0\}$. *a)* $L=\frac{1}{e}$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(1; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1; 0)$ și $(0; 1)$. $x=-1$ este punct de maxim local, $x=1$ este punct de minim local; *c)* $A=(4+\ln 2)(u.p)$. **11.** $P=\frac{40}{429}$. **12.** $T_5=210x^7$.

TESTUL 33

1. $E=4$. **2.** $S=\{1\}$. **3.** $E=-\frac{71}{20}$. **4.** $S=\{1-2i; 1+i\}$. **5.** $S=\left(0; \frac{1}{8}\right)\cup(4; +\infty)$. **6.** $P_{ABCD}=94cm$. **7.** $P_{BDC}=4(5+\sqrt{10})cm$. **8.** $A_s=100\pi\, cm^2$. **9.** $x=3$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* $a=b=1$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(3; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1; 1)$ și $(1; 3)$. Punctul $A(-1; -1)$ este punct de maxim local, punctul $B(3; 7)$ este punct de minim local; c) $A=4\ln 2(u.p)$. **11.** $P=\frac{4}{105}$. **12.** $T_7=84$.

TESTUL 34

1. $E=1$. **2.** $S=(0;9)$. **3.** $|z_1|+|z_2|=4$. **4.** $P(X)=(X-3)(X^2+2)$. **5.** $x_1=\pi k$, $k\in Z$; $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **6.** $A_{ABC}=16cm^2$. **7.** $A=18\sqrt{3}\,cm^2$. **8.** Problema are două soluții: latura bazei are $16cm$, apotema are $6cm$ sau latura bazei are $12cm$, apotema are $8cm$. **9.** Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. **10.** $D(f)=R\setminus\{2\}$. *a)* $A(0;-1)$ și $B(4;3)$. Ecuațiile tangentelor sunt respectiv: $y=-x-1$ și $y=-x+7$; *b)* Funcția $f(x)$ este descrescătoare pe intervalele $(-\infty;2)$ și $(2;+\infty)$; *c)* $F(x)=x+4\ln|x-2|+4-4\ln 2$. **11.** $P=\frac{25}{63}$. **12.** $T_4=\frac{20\sqrt{x}}{x^2}$.

TESTUL 35

1. $E=2$. **2.** $|z|=\sqrt{17}$. **3.** $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$. **4.** $S=(25;+\infty)$. **5.** $m\in C\setminus\left\{1;\frac{-1-i\sqrt{7}}{2};\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right\}$. **6.** $BC=10cm$. **7.** $h=8cm$. **8.** $12cm$, $15cm$, $18cm$. **9.** $a_{15}=59$. **10.** *a)* $a=b=1$, deci avem $F(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$; *b)* $\alpha=\frac{\pi}{4}$; *c)* $G(x)=x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-arctgx$. **11.** $P=\frac{2}{3}$. **12.** $T_9=495a^4b^4$.

TESTUL 36

1. $E=5$. **2.** $S=\left\{\frac{4}{3}\right\}$. **3.** $z=-i$. **4.** $S=\{(1;9);(9;1)\}$. **5.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$. **6.** $BC=60cm$. **7.** $200cm^2$ și $300cm^2$. **8.** $R=6,25cm$. **9.** $x=7$. **10.** $D(f)=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. *a)* Dreapta de ecuație $x=-\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală la dreapta în $x=-\frac{1}{2}$, dreapta $x=\frac{1}{2}$ este asimptotă verticală la stânga în $x=\frac{1}{2}$; *b)* Funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ și este crescătoare pe intervalul $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, iar $x=0$ este punct de maxim local, $f_{\max}=f(0)=1$; *c)* $I=\frac{\pi}{2}$. **11.** $P=\frac{5}{12}$. **12.** $x\in\{10^{-4};10\}$.

TESTUL 37

1. $E=\frac{7}{3}$. **2.** $S=\{3\}$. **3.** $x=2$, $y=1$. **4.** $E=1\in N$. **5.** $S=(1;2)$. **6.** $P_{ABC}=30cm$. **7.** $P_{ABC}=14cm$. **8.** $A_{tot}=50cm^2$. **9.** $s_{10}=160$. **10.** $D(f)=(0;+\infty)$. *a)* $\alpha=45°$; *b)* Funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left(0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ și este crescătoare pe intervalul $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ este punct de minim local; *c)* $F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}$. **11.** $P=\frac{72}{145}$. **12.** $T_7=\frac{231}{16}a^7$.

TESTUL 38

1. $E=43$. **2.** $x=1$, $y=-3$. **3.** $E\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{4}$. **4.** $z_1=1$, $z_2=1+\frac{4}{3}i$. **5.** $S=(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})$. **6.** $AC=6cm$. **7.** $A_s=160cm^2$. **8.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{14}}{12}$. **9.** $a_7=\frac{8}{15}$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* $a=1$, $b=-1$; *b)* Dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$; Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală; *c)* $A=(10+\ln 3)(u.p)$. **11.** $P=\frac{7}{36}$. **12.** $T_3=91a^7$.

TESTUL 39

1. $E=3$. **2.** $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **3.** $z=2-3i$. **4.** $S=(1;2)\cup(3;4)$. **5.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **6.** $BD=12cm$. **7.** $a=\sqrt{2}\,cm$. **8.** $MN=\frac{8\sqrt{30}}{15}cm$. **9.** $b_1=2$. **10.** $D(f)=R\setminus\{0\}$. *a)* $m=4$; *b)* Dreapta $y=x-3$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$, dreapta $x=0$ este asimptotă verticală; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}-3x-\frac{4}{x}+6$. **11.** $P=\frac{3}{10}$. **12.** $T_9=C_{17}^8$.

TESTUL 40

1. $E=4$. **2.** $|z|=13$. **3.** $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{39}}{8}$. **4.** $X\in\{-2;-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$. **5.** $S=\{100\}$. **6.** $AD=16cm$. **7.** $MP=8cm$. **8.** $V=7236\pi cm^3$. **9.** -3; 1; 5; 9; 13. **10.** *a)* $y=(e-2)x$; *b)* Funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty;\ln 2)$ și este crescătoare pe intervalul $(\ln 2;+\infty)$; Punctul $x=\ln 2$ este punct de minim local. $f_{\min}=f(\ln 2)=2-2\ln 2$ sau $f_{\min}=2(1-\ln 2)$; *c)* $F(x)=e^x-x^2+4$. **11.** 15 cărți în limba română. **12.** $T_3=136x^6$.

TESTUL 41

1. $E=\frac{1}{2}$. **2.** $f(\log_5 3)=\frac{3}{8}$. **3.** $S=\{1\}$. **4.** $z_1=2+3i$, $z_2=-2-3i$. **5.** $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. **6.** $P_{CDM}=24cm$. **7.** $m_l=9cm$. **8.** $A=72\sqrt{3}\,cm^2$. **9.** $S=63$. **10.** $D(f)=R\setminus\left\{-\frac{m}{2}\right\}$. *a)* $m=-4$. Pentru $m=-4$, $x=1$ este punct de maxim local; *b)* Pentru $m=-4$ avem funcția $f:R\setminus\{2\}\to R$, $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{2x-4}$. Dreapta de ecuație $y=\frac{1}{2}x-2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$. Dreapta de ecuație $x=2$ este asimptotă verticală; *c)* $A=\left(\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{1}{4}$. **12.** $T_4=-40xy$.

TESTUL 42

1. $E=0$. **2.** $|z|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **3.** $D=\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. **4.** $E(\alpha)=\cos 2\alpha$. $E\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** $S=\{2\}$. **6.** $m(\angle ACB)=40^\circ$. **7.** Se va mări de două ori. **8.** $3\sqrt{2}\,cm$ și $6\sqrt{2}\,cm$. **9.** Șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, și superior, deci este mărginit și $a_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, pentru orice $n \in N^*$. **10.** *a)* $E(x)=-2\cos(2x)$; *b)* $x \in \left\{\pi; \frac{5\pi}{4}; 2\pi\right\}$; *c)* $F:(0; 2\pi) \to R$, $F(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$; *d)* $b=-\frac{\pi}{2}$. **11.** $P=\frac{7}{69}$. **12.** $n=5$.

TESTUL 43

1. $E=1$. **2.** $f(3)=-54$. **3.** $x=\frac{15}{11}$, $y=\frac{14}{11}$. **4.** $S=(-\infty; 2]$. **5.** $S=\left(2\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **6.** $AC=\sqrt{10}\,cm$. **7.** $d=3cm$. **8.** $R=\frac{10}{3}cm$. **9.** $a_1=2$, $r=5$. **10.** *a)* $a=b=1$; *b)* $f_{\min}=f(-1)=0$, $f_{\max}=f(0)=1$; *c)* $F(x)=(x^2+1)e^x+2-2e$. **11.** $P=\frac{1}{5}$. **12.** $T_6=9072\sqrt{6}$.

TESTUL 44

1. $E=-10$. **2.** $D=[-3; 1]$. **3.** $\bar{z}=1-3i$. **4.** $x=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi k, k\in Z$. **5.** $a=b=1$. **6.** $m(\angle AOB)=72^\circ$. **7.** $h=3cm$. **8.** $A_{tr}=\frac{15\sqrt{3}}{2}cm$. **9.** $\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2$ sau $\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -1; 2$. **10.** *a)* Dreapta $y=-x+3$ este asimptotă oblică spre $-\infty$, dreapta $y=x-3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$; *b)* $x=1$ este punct de minim local, $f_{\min}=f(1)=-\sqrt{2}$; *c)* $V=\pi\cdot(6-3\ln 10+8arctg3)(u.c)$. **11.** $P=\frac{5}{648}$. **12.** $T_3=\frac{28x^2}{a^4}$.

TESTUL 45

1. $E=6$. **2.** $S=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. **3.** $S=(-\infty; -1]\cup[2; +\infty)$. **4.** $z=-2-3i$. **5.** $d=1\in N$. **6.** $AC=12cm$. **7.** $CM=15cm$. **8.** $V=48cm^3$. **9.** $a_{10}=115$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* $a=b=1$; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(3; +\infty)$, este descrescătoare pe intervalele $(-1; 1)$ și $(1; 3)$. Punctul $A(-1; -1)$ este punct de maxim local, punctul $B(3; 7)$ este punct de minim local; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-1|+\frac{5}{2}-4\ln 5$. **11.** $P=\frac{3}{7}$. **12.** $T_8=-\frac{3432\sqrt[3]{x}}{x^5}$.

TESTUL 46

1. $E=-12$. **2.** $S=\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. **3.** $S=\{-3; 5\}$. **4.** $S=\{2; 16\}$. **5.** $x_1=-arctg\frac{2}{3}+\pi k$, $k\in Z$; $x_2=arctg\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$. **6.** $m(\angle AOC)=120^\circ$. **7.** $L=15\pi\,cm$. **8.** $r=2cm$, $R=5{,}5cm$, $G=12{,}5cm$. **9.** $m(\angle B)=60^\circ$. **10.** $D(f)=R\setminus\{1\}$. *a)* $a=1$, $b=-1$; *b)* Dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$. Dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală; *c)* $A=(10+\ln 3)(u.p)$. **11.** $P=\frac{1}{3}$. **12.** $T_4=\frac{21}{2}x^6y^6$.

TESTUL 47

1. $E=4$. **2** $a=5$. **3.** $S=(3; 19]$. **4.** $E=3\in N$. **5.** $S=\left(\log_5(\sqrt{2}+1); \log_5 3\right)$. **6.** $AB=24cm$. **7.** $V=360cm^3$. **8.** $A_d=25\pi cm^2$. **9.** $b_7=16$. **10.** *a)* $a=3$; *b)* $D(f)=R\setminus\{-1\}$. Funcția f este descrescătoare pe intervalele $(-\infty; -1)$ și $(-1; +\infty)$; *c)* $I=\frac{9}{2}$. **11.** $P=\frac{2}{35}$. **12.** $T_4=84x$.

TESTUL 48

1. $E=4$. **2.** $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z=5$. **3.** $m=\sqrt{2}-2$. **4.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. **5.** $S=\left\{\left(2; \frac{1}{6}\right)\right\}$. **6.** $BC=10cm$. **7.** $h=4cm$. **8.** $h=14{,}4cm$. **9.** $x=2$. **10.** $D=R\setminus\{1\}$. *a)* $a=1$, $b=2$; *b)* Obținem funcția $f:R\setminus\{1\}\to R$, $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$. Dreapta $y=x+2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ și la $+\infty$, dreapta $x=1$ este asimptotă verticală; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+4\ln|x-1|+2$. **11.** $P=\frac{1}{4}$. **12.** $T_6=252x^5$.

TESTUL 49

1. $E=4$. **2.** $S=\{-4; 10\}$. **3.** $f(\log_3 2)=\frac{2}{3}$. **4.** $S=\{1; i; -i\}$. **5.** $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **6.** $A_{ABC}=32\sqrt{3}\,cm^2$. **7.** $A=3\sqrt{3}\,cm^2$. **8.** $V=120\sqrt{3}\,cm^3$. **9.** $x=75$. **10.** *a)* $y=3x+1$; *b)* Funcția f este descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$ și este crescătoare pe intervalul $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. $x=-\frac{3}{2}$ este punct de minim local; *c)* $A=\frac{5e^4-1}{4}(u.p)$. **11.** 35 de bile albastre. **12.** $T_4=\frac{21}{2}x^6y^3$.

TESTUL 50

1. $E=1$. **2.** $m=5$. **3.** $a\in\{-4;\ 4\}$. **4.** $S=\{-1\}$. **5.** $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **6.** $A_{ABC}=48\,cm^2$. **7.** $BD=\sqrt{66}\,cm$, $AC=3\sqrt{2}\,cm$, $A_{tr}=12\sqrt{2}\,cm^2$. **8.** *a)* $A_{lat}=18\pi\,cm^2$, $V=9\sqrt{3}\,\pi\,cm^3$; *b)* $V_{tr}=63\sqrt{3}\,\pi\,cm^3$. **9.** $E=-6$. **10.** *a)* $a=-8$, $b=7$; *b)* Cu a şi b determinaţi la punctul *a)* avem funcţia $f:R\setminus\{-8;\ 7\}\to R$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2-8x+7}$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=2$ este $y=\frac{7}{25}x-\frac{29}{25}$. **11.** $P=\frac{11}{18}$. **12.** $T_8=-264a^3b^7$.

TESTUL 51

1. $E=\frac{1}{9}$. **2.** $S=\{-1;\ 0;\ 1\}$. **3.** $z=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$. **4.** $\log_{30}8=\frac{3-3a}{b+1}$. **5.** $m\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)\cup(1;\ +\infty)$. **6.** $d=8\sqrt{3}\,cm$. **7.** $A_{lat}=540\,cm^2$. **8.** $l_m=9{,}8\,cm$. **9.** $a_1=5$. **10.** $D(f)=R\setminus\{0\}$. *a)* Dreapta $y=x$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$, dreapta de ecuaţie $x=0$ este asimptotă verticală; *b)* Funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\ -1)$ şi $(1;\ +\infty)$, şi este descrescătoare pe intervalele $(-1;\ 0)$ şi $(0;\ 1)$. Punctul $A(-1;\ -2)$ este punct de maxim local, punctul $B(1;\ 2)$ este punct de minim local; *c)* $I=4+\ln 3$. **11.** $P=\frac{7}{15}$. **12.** $T_7=C_{12}^{6}\sqrt{a}=924\sqrt{a}$.

TESTUL 52

1. $E=2$. **2.** $D=[0;\ +\infty)$. **3.** Matricea $B\cdot A$ este inversabilă. **4.** $S=\{1-2i;\ 1\}$. **5.** $tg\alpha=-\sqrt{3}$. **6.** $BD=14\,cm$. **7.** $AE=5{,}5\,cm$. **8.** $V=\frac{320\sqrt{14}}{3}\,cm^3$. **9.** $a_1=5$. **10.** *a)* $y=-2e$; *b)* Funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\ -3)$ şi $(1;\ +\infty)$, şi este descrescătoare pe intervalul $(-3;\ 1)$. Punctul $A\left(-3;\ \frac{6}{e^3}\right)$ este punct de maxim local, punctul $B(1;\ -2e)$ este punct de minim local; *c)* $A=\left(14e^5-2e^3\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{108}{143}$. **12.** $T_5=240$.

TESTUL 53

1. $E=3$. **2.** $z_1^2+z_2^2=6$. **3.** $S=\left(-\frac{1}{4};\ 0\right)$. **4.** $E(\alpha)=\sin\alpha$, $E\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $S=\{-2;\ -1\}$. **6.** $A_{ABC}=20\,cm^2$. **7.** $d=10\,cm$. **8.** $A_{tr}=120\,cm^2$. **9.** $b_9=352$. **10.** $D(f)=R\setminus\{0\}$. *a)* Dreapta de ecuaţie $y=1$ este asimptotă orizontală la $-\infty$ şi la $+\infty$, dreapta $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f; *b)* $a=-3$, $b=6$; *c)* $F(x)=x+\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{17}{3}-\ln 3$. **11.** $P=\frac{3}{17}$. **12.** $x=2$.

TESTUL 54

1. $E=1$. **2.** $E=5$. **3.** $z+\frac{1}{z}=-1$. **4.** $\det A=1+\sin^2\alpha\neq 0$, deci matricea A este inversabilă oricare ar fi $\alpha\in R$. **5.** $S=(-\infty;\ 0)\cup\left(\frac{6}{5};\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$. **6.** $OD=3\,cm$. **7.** $BD=16\,cm$, $DC=9\,cm$. **8.** $A_{lat}=84\sqrt{2}\,cm^2$. **9.** Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. **10.** $D(f)=R\setminus\{2\}$. *a)* $A\left(0;\ -\frac{7}{2}\right)$, $B\left(4;\ \frac{3}{2}\right)$; *b)* Funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty;\ 1)$ şi $(3;\ +\infty)$ şi este descrescătoare pe intervalele $(1;\ 2)$ şi $(2;\ 3)$. $x=1$ este punct de maxim local, $x=3$ este punct de minim local. $E=(-\infty;\ -3]\cup[1;\ +\infty)$; *c)* $F(x)=\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x-2|+\frac{13}{2}$. **11.** $P=\frac{1}{9}$. **12.** $T_{15}=36\cdot C_{24}^{14}$.

TESTUL 55

1. $E=4$. **2.** $S=\{-1;\ 2\}$. **3.** $z=1-4i$. **4.** $S=(-3;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$. **5.** $S=\varnothing$. **6.** $BC=5\,cm$, $AD=15\,cm$. **7.** $A_{tot}=906\,cm^2$. **8.** $A=312\,cm^2$. **9.** $6\,cm$; $9\,cm$; $12\,cm$. **10.** *a)* Funcţia f este monoton descrescătoare pe $\left(0;\ \frac{1}{e}\right]$; *b)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x}{x^2+x-2}>f\left(\frac{1}{2}\right)$; *c)* $A=\frac{9}{4}-2\ln 2\,(u.p)$. **11.** $P=\frac{5}{66}$. **12.** $T_4=-5x^4\sqrt{2x}$.

TESTUL 56

1. $E=4$. **2.** $S=\{-1\}$. **3.** $a=-6$, $b=25$. **4.** $x\in\{-4;\ 1;\ 2\}$. **5.** $S=(1;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup\{4\}$. **6.** $AE=3\,cm$. **7.** $DT=2\sqrt{10}\,cm$. **8.** $A_{lat}=10\sqrt{19}\,cm^2$. **9.** $x=2$. **10.** $D(f)=R\setminus\{-1;\ 1\}$. *a)* $a=1$; *b)* Pentru $a=1$ avem funcţia $f:R\setminus\{-1;\ 1\}\to R$, $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$. Dreapta de ecuaţie $y=x$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$. Dreptele de ecuaţii $x=-1$ şi $x=1$ sunt asimptote verticale; *c)* $A=\left(6+\frac{1}{2}\ln 5\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{1}{60}$. **12.** $n=6$.

TESTUL 57

1. $E=2$. **2.** $x=21$. **3.** $r=53$. **4.** $a=\frac{1}{2}$. **5.** $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. **6.** $A_{tot}=90\pi\,cm^2$. **7.** $A_{tot}=906\,cm^2$. **8.** $d=\sqrt{15+6\sqrt{3}}\,cm$. **9.** $a_1=29$, $n=7$. **10.** *a)* $a=2$, $b=1$; *b)* Pentru $a=2$ şi $b=1$ avem funcţia $f:R\to R$, $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-x+1}$. Ecuaţia tangentei este $y=2x-2$; *c)* $A=\left(\ln 3-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{10}{11}$. **12.** $T_7=84a^4$.

TESTUL 58

1. $E=2$. **2.** $S=\{8\}$. **3.** $F=x+2i$. **4.** $S=\{(3;6);(6;3)\}$. **5.** $x_1=\pi k$, $k\in Z$; $x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; $x_3=-\frac{\pi}{3}+2\pi m$, $m\in Z$. **6.** $l_m=8cm$. **7.** $A=288cm^2$. **8.** *a)* $arctg\frac{4}{5}$; *b)* $A_{lat}=80cm^2$. **9.** $m_a=16$. **10.** $D(f)=(0;+\infty)$. *a)* Dreapta $y=0$ (axa absciselor) este asimptotă orizontală spre $+\infty$. Dreapta $x=0$ (axa ordonatelor) este asimptotă verticală la dreapta; *b)* Funcția f este crescătoare pe intervalul $(0;1)$ și este descrescătoare pe intervalul $(1;+\infty)$. $x=1$ este punct de maxim local; *c)* $A=2(u.p)$. **11.** $P=\frac{23}{90}$. **12.** $T_7=28xy^2$.

TESTUL 59

1. $E=3$. **2.** $S=\left\{\frac{5}{6}\right\}$. **3.** $m=4$. **4.** $E=\frac{1}{9}$. **5.** $x\in\{-5;0;5\}$. **6.** $A_{ABC}=108cm^2$. **7.** $V=2700\pi cm^3$. **8.** $A=270cm^2$. **9.** $a+b+c=30$. **10.** $D(f)=R\setminus\{-1\}$. *a)* $a=2$, $b=5$; *b)* Punctul $A(-3;-4)$ este punct de maxim local, iar punctul $B(1;4)$ este punct de minim local; *c)* $A=\left(8+4\ln\frac{5}{3}\right)(u.p)$. **11.** $P=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}\cdot\frac{23}{28}=\frac{115}{203}$. **12.** $T_6=\frac{56}{x+1}$.

TESTUL 60

1. $E=1$. **2.** $S=\left(\frac{4}{3};3\right)$. **3.** $S=\{(5;2)\}$. **4.** $P(X)=(X-2)(X^2+3)$. **5.** $x=0$. **6.** $P=22cm$. **7.** $V=3cm^3$. **8.** $d=1cm$. **9.** $E=6$. **10.** *a)* $a=1$, $b=4$; *b)* $y=\frac{1}{4}x$; *c)* $A=\frac{1}{2}\ln 2(u.p)$. **11.** $P=\frac{2}{5}$. **12.** $T_5=210x^6$.

9 785362 417086