TEODOR-CRISTIAN BOŞNEAG
VIORICA LAZĂR
CERASELA TESLEANU
NECULAI I.NEDIŢĂ
ALEXANDRA DUMITRESCU
ION MITRACHE
CARMEN VĂIDEANU
ANDREI VERNESCU

MATEMATICĂ

EXERCIŢII ŞI PROBLEME PENTRU LICEU

Coordonatori:
Prof.dr. Neculai I.Nediţă
Prof.dr. Andrei Vernescu

Bucureşti

Lucrarea este avizată de Comisia Naţională de Matematică din Ministerul Educaţiei şi Cercetării cu nr. 32059/ iulie 2002

ISBN: 973 – 96101 – 5 – 3 **ISBN: 973-95644-1-3**

CLASA A IX-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. NUMERE REALE

1. Să se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită, numerele:
a) 10; b) $\frac{11}{4}$; c) $-\frac{19}{3}$; d) $\frac{12}{7}$; e) $-\frac{41}{11}$; f) $-\frac{335}{6}$; g) $\frac{405}{17}$; h) $-\frac{32}{5}$; i) 0; j) $\frac{21}{2}$.

2. Pentru fracţiile zecimale următoare, determinaţi numărul raţional pe care-l reprezintă, apoi verificaţi folosind algoritmul de împărţire:
a) 0,1; b) 25,4; c) −0,4; d) 0,(6); e) 8,(12); f) $-3,2(6)$;
g) 4,3(203); h) −0,021(6); i) −6,254; j) −4,03(08).

3. Se consideră mulţimea;
$$A=\left\{2,(3); -\sqrt{2}; \sqrt[3]{5}; \sqrt{\frac{2}{5}}; -\frac{2}{5}; 1,0(24); \sqrt{0,49}; \sqrt[3]{-0,001}; \pi; 4\frac{1}{2}; 0; 5; 0,10010001000010\ldots; 0,12233344445\ldots\right\}.$$
Să se determine mulţimile:
a) $B=\{x\in A \mid x\in\mathbb{Q}\}$; b) $C=\{x\in A\mid x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$; c) $D=\{x\in A\mid x\in\mathbb{Z}\}$.

4. Să se demonstreze că următoarele numere nu sunt raţionale:
a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{7}$; c) $1+\sqrt{2}$; d) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; e) $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

5. Să se determine $a, b\in\mathbb{N}$, astfel încât următoarele numere să fie raţionale:
a) $a+b\sqrt{2}$; b) $a\sqrt{3}+\sqrt{b}$; c) $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$.

6. Să se determine numerele naturale a, b astfel încât numărul $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ să fie raţional.

7. Să se stabilească condiţiile pentru care numerele $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sunt iraţionale, unde $a, b\in\mathbb{N}$. Dar dacă a, b sunt numere raţionale pozitive?

8. Determinaţi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos, cu eroare de 10^{-1}, 10^{-2} şi 10^{-3} pentru numerele:
a) $\sqrt{5}$ şi $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{8}$ şi $-\sqrt{11}$; c) $-\sqrt{29}$ şi $-\sqrt{41}$; d) $-\sqrt{33}$ şi $\sqrt{45}$;
e) $\frac{12}{7}$ şi $\frac{2}{11}$; f) $\frac{17}{5}$ şi $\frac{5}{17}$; g) $\sqrt{4,5}$ şi $\sqrt{3,24}$; h) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ şi $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

9. Se consideră numerele x şi y de la exerciţiul nr. 8.
a) Să se determine patru sume inferioare şi patru sume superioare pentru numerele x şi y.
b) Să se determine patru produse $(x\cdot y)$ superioare şi patru produse inferioare.

10. Determinaţi un număr raţional şi un număr iraţional cuprins în intervalele următoare:
a) (0,5; 0,51); b) $(\sqrt{0,2}; \sqrt{0,3})$; c) $(\sqrt{3}; 2)$; d) $\left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)$; e) (0,24; 0,2(4)); f) (−2,3; −2,29).

11. a) Să se arate că există cel puţin un număr raţional şi cel puţin un număr iraţional cuprins în orice interval de forma (a, b) cu $a<b$, $a, b\in\mathbb{R}$.
b) Arătaţi că între două numere raţionale (iraţionale) există o infinitate de numere raţionale (iraţionale).

12. a) Să se demonstreze că în reprezentarea zecimală a oricărui număr iraţional există cel puţin o cifră nenulă care se repetă de o infinitate de ori.

b) Daţi exemple de numere iraţionale pentru care numai două cifre, respectiv numai trei cifre să se repete de o infinitate de ori.

13. Să se arate:

a) dacă $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

b) dacă $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

14. Fie $a_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{b_1} \notin \mathbb{Q}$, $b_1 > 0$. Atunci:

a) $a_1 + \sqrt{b_1} = a_2 + \sqrt{b_2} \Leftrightarrow a_1 = a_2$ şi $b_1 = b_2$; b) $a_1 + \sqrt{b_1} \neq a_1 - \sqrt{b_1}$;

c) $a_1 + \sqrt{b_1} = \dfrac{1}{a_1 - \sqrt{b_1}} \Leftrightarrow a_1^2 = 1 + b_1$.

15. Să se demonstreze că dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ şi $a + b\sqrt{5} = 0$, atunci $a = b = 0$.

16. Determinaţi $x, y \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea: $(3x - y)\sqrt{5} + x - 14 = y\sqrt{5} - 6x$.

17. Determinaţi $x, y \in \mathbb{Z}$, ştiind că $z = 2 - \sqrt{5}$ verifică relaţia: $xz^2 + yz = 1$.

18. Să se arate că $\{\sqrt{2}; \sqrt[3]{3}\} \not\subset \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

19. Să se determine numerele întregi n, astfel încât:

a) $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{n^2+n+1} \in \mathbb{Q}$.

20. Să se reprezinte pe axa reală, folosind rigla şi compasul, punctele care au abscisele: $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{7}$; $\pm\sqrt{8}$; $\pm\sqrt{17}$; $\pm\sqrt{18}$; $\pm\sqrt{20}$.

21. Să se reprezinte pe axa reală, mulţimile:,

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 2\}$; b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| = 0\}$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}$; e) $\{x \in \mathbb{R} \mid |1-x| > 3\}$; f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq |x| < 3\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0\}$; h) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -x\}$; i) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = x\}$.

22. Să se determine mulţimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq |x+3| \leq 2\}$; b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{2}\right\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| + |3-x| > 4\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| + |x| = 0\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 + x| \leq x\}$; f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 4| + |x^2 - 3x + 2| = 0\}$.

23. Calculaţi partea întreagă ($[\cdot]$) şi partea fracţionară ($\{\cdot\}$) a numerelor:

a) 10 şi -10; b) 2,35 şi $-2{,}35$; c) 41,(62) şi $-42{,}(6)$; d) $\frac{2}{5}$ şi $-\frac{5}{2}$; e) 4,4 şi $-4{,}4$;

f) 2,1(3) şi $-2{,}1(3)$; g) $\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{2}$; h) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; i) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; j) $\pi + \sqrt{5}$.

24. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci:

a) $[x] + [y] \leq [x+y] < [x] + [y] + 1$; b) $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$;

c) $[x] = [y]$, atunci $|x - y| < 1$.

25. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, să se arate că:

a) $[x] = x$ şi /sau $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

b) $[x+y] = x + [y]$ şi /sau $\{x+y\} = \{y\} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$;

c) $x, y \in [n, n+1) \Leftrightarrow [x] = [y]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

26. Să se arate că $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (identitatea lui Hermite).

27. Fie mulţimile $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \dfrac{x^{10}+3}{2x^2} \in \mathbb{Z}\right\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \dfrac{x^{10}+2}{3x^2} \in \mathbb{Z}\right\}$. Să se arate că $A = B$.

28. Determinaţi mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \dfrac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

29. Să se arate că $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \dfrac{a^2-a+1}{a^2+1},\ a \in \mathbb{R}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

30. Fie $A = \left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Arătaţi că $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

31. Fie $A = \left\{\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$. Arătaţi că $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

32. Arătaţi că oricare ar fi mulţimile A, B, C au loc egalităţile:

a) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}A + \operatorname{card}B - \operatorname{card}(A \cap B)$, unde $\operatorname{card}A$ este cardinalul mulţimii A, egal cu numărul de elemente ale mulţimii A;

b) $\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = \operatorname{card}A + \operatorname{card}B + \operatorname{card}C - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C)$;

c) Generalizare: $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}A_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \operatorname{card}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \operatorname{card}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$. (Aceste relaţii sunt cunoscute sub numele de principiul includerii şi excluderii.)

33. Să se arate că:

a) $2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{22\ldots2}_{n \text{ de } 2} = \dfrac{2}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right),\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{55\ldots5}_{n \text{ de } 5} = \dfrac{5}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right),\ n \in \mathbb{N}^*$.

34. Se consideră şirul $7, 77, 777, \ldots, \overbrace{77\ldots7}^{n \text{ de} 7}, \ldots$

a) Să se determine termenul de pe locul 2002.

b) Să se determine termenul de pe locul n, $n \in \mathbb{N}^*$.

35. Să se arate că sunt adevărate afirmaţiile:

a) $\dfrac{n^5-n}{30} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$; b) $\dfrac{5^{n+3}+11^{3n+1}}{17} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$;

c) $\dfrac{1}{121}(12^n + 110n - 1) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

36. Care este numărul minim de înmulţiri pentru a calcula 2^8? Generalizare.

37. Să se arate că nu există numere întregi a, b, c, astfel încât: $a^2 + b^2 = 8c + 6$

38. Să se demonstreze că nu există nici o pereche de numere naturale m şi n astfel ca expresiile $m^2 + 4n$ şi $n^2 + 4m$ să fie simultan pătrate perfecte.

39. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$, numerele $n + 1$ şi $8n + 1$ nu pot fi simultan cuburi perfecte.

40. Dacă a, b, c sunt numere raţionale strict pozitive cu $a + c \neq b$, $a + b \neq c$ şi $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sunt proporţionale cu numere raţionale.

41. Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se determina $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A = a^{3n} + 3a^2 + 3a + 1$ să fie cub perfect.

42. Se dă relaţia: $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se exprime m în funcţie de n.

43. Să se arate că dacă a şi b sunt numere raţionale, iar $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ este număr raţionale nenul, atunci numerele $\sqrt[3]{a}$ şi $\sqrt[3]{b}$ sunt raţionale.

44. Să se arate că dacă a şi b sunt numere reale pozitive, atunci:

$$0 \le a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \le (\sqrt{2} - 1)\sqrt{a^2 + b^2}.$$

45. Să se arate că dacă a, b, c, d, e sunt numere reale pozitive, astfel încât $a^2 = d^2 - b^2 = e^2 - c^2$, atunci $b + c = \sqrt{d^2 + e^2 + 2(bc - a^2)}$.

46. Să se arate că dacă $a \ge 0$, atunci $\sqrt[4]{a+1} + \sqrt[4]{a+2} > \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a+3}$.

47. Determinaţi numărul natural n ştiind că numărul $9^{32} - 65 \cdot 9^{30} + 3^n$ este pătrat perfect.

48. Să se arate că expresia $E = 5^{5n+10} + 2 \cdot 7^{5n+5} + 5^{3n+5} \cdot 7^{4n+5} + 2 \cdot 5^{2n+5} \cdot 7^n$ se divide prin 1947, oricare ar fi valoarea naturală nenulă a lui n.

49. Fie suma $S = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2}$. Să se arate că $|S - 0{,}105| < 0{,}007$.

50. Să se arate că pentru orice x, y reale avem: $8(x^4 + y^4) \ge (x+y)^4$.

51. (Formulele radicalilor compuşi.) Dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a^2 - b \ge 0$, atunci:

a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$;

b) $\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$;

52. Să se verifice egalităţile:

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}.$$

53. Să se arate, fără a extrage rădăcina, că:

$$\frac{\sqrt[4]{11{,}3 + 7{,}2\sqrt{2}} + \sqrt[4]{11{,}3 - 7{,}2\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{11{,}3 + 7{,}2\sqrt{2}} - \sqrt[4]{11{,}3 - 7{,}2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}.$$

54. Să se arate că: $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{9 - 6\sqrt{2}}$.

55. Să se arate că, dacă $ac = bd$, atunci:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \pm \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a \pm d)^2 + (b \pm c)^2}.$$

56. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \ge |b - c|$.

57. Să se arate că: $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 \left(\frac{a+1}{a+2}\right) = \frac{a^3 + 2a + 1}{a^3}$.

58. Să se arate că, dacă $a \geq 0$, atunci:

$$\sqrt[3]{3a+1+(a+3)\sqrt{a}}+\sqrt[3]{3a+1-(a+3)\sqrt{a}}=2.$$

59. Să se arate că:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$; b) $E=\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\in\mathbb{Z}$.

60. Calculaţi:

a) $3\cdot 3^3\cdot 3^{31}-(3^5)^{11}+2^{102}\cdot 8^{-34}-1^{2002}\cdot 2^0$;

b) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}}$; c) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^3\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{-1}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$.

61. Determinaţi valoarea: $E(a)=\left\{a-\left[1-\left(\frac{2-a}{2+a}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-2}$, pentru $a=-\frac{1}{2}$.

62. Scrieţi în ordine crescătoare:

a) 2^{102} şi 3^{68}; b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-11}$ şi $\left(\frac{8}{27}\right)^{9}$; c) $64^{-105}\cdot 27^{200}$ şi $\left(\frac{1}{4}\right)^{315}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-600}$

63. Să se calculeze: a) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

b) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$; c) $\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}-\sqrt[3]{11\sqrt{2}-9\sqrt{3}}$.

64. Să se raţionalizeze:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\dfrac{11}{2\sqrt{3}+1}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

e) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$; g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$;

i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$; j) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{2}}$; k) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}+1}$.

65. Să se raţionalizeze:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}}$.

66. Să se raţionalizeze:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$, $n>2$, n natural, impar, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq\pm b$.

67. Să se ordoneze crescător numerele:

a) $\sqrt{6}$; $\sqrt[4]{12}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[6]{20}$; b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $\sqrt{5-\sqrt{3}}$; $4-\sqrt{5}$; c) $3-\sqrt{2}$; $11-6\sqrt{2}$; $2-\sqrt{3}$.

68. Să se afle două numere nenule astfel încât suma, produsul lor şi diferenţa dintre pătratele lor să fie egale. Câte soluţii are problema?

69. Să se aducă la forma cea mai simplă, expresiile:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; b) $\dfrac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}}\cdot\dfrac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}$.

70. Dacă $E = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$, atunci;
a) $E < 0$; b) E impar; c) $E = 4$; d) $E = 2$; e) $E \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; f) $E = 7$.
71. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încât să aibă sens expresia:

$$E = \sqrt[n+1]{\sqrt[4-n]{n^2-n+1}}.$$

72. Să se determine numărul real m, astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ să aibă loc inegalităţile:
a) $x^2 - xy + 2y^2 + x - 2y + m > 0$; b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + m > 0$.
73. Să se decidă dacă numărul:

$$N = \sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}} + \sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}}$$

este număr întreg.
74. Să se compare numerele reale x şi y în cazurile:
a) $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$ şi $y = \sqrt[5]{96}$; b) $x = \sqrt[3]{7} + \sqrt[6]{7}$ şi $y = \sqrt[4]{7} + \sqrt[5]{7}$.

75. Stabiliţi dacă numărul $E = \sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{368}{27}}} + \sqrt[3]{-3+\sqrt{\frac{368}{27}}}$ este un număr întreg.

76. Să se arate că: $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}} = 4$.
77. Să se calculeze sumele:
a) $S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2001}}$;

b) $S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{2001\sqrt{2002}+2002\sqrt{2001}}$.
78. Să se scrie sub o formă mai simplă produsul:

$$P = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})\cdot\ldots\cdot(\sqrt[2^n]{a}+\sqrt[2^n]{b}),\ \ a, b > 0,\ a \neq b.$$

79. Să se demonstreze că, dacă $0 < a < b < c$, atunci:

$$\frac{a+b+c}{3} < \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{6}} < c.$$

80. Să se arate că, dacă $a, b \neq 0$. $a \in [-1, 1]$, $|a| > |b|$, atunci:

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}-1} - \frac{1}{\sqrt{1+a^2}+1} = \frac{2}{a^2}.$$

81. Să se demonstreze că, dacă $b \geq a$ şi $c \geq d$, avem:

$$\left(\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(c-d)^2}\right)^2 = (a-b-c+d)^2.$$

82. Să se afle numerele $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{3n-5} + \sqrt{n+2} \leq 7$.

83. Să se arate că pentru orice numere naturale nenule distincte m şi n avem inegalitatea:

$$\sqrt[nm]{\frac{n+m}{2}} \geq \sqrt[m+n]{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[m]{m}}.$$

84. Arătaţi că:
a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$; b) $a^2+b^2+c^2 \geq -ab-ac-bc, \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.
85. Demonstraţi că pentru orice numere reale a, b, c, avem:

a) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c)$.
b) Dacă $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$, atunci $(a+b+c)^{2n+1} = a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
86. Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiei: $E = x_1a_1 + x_2a_2$, dacă $x_1^2+x_2^2 \leq 2$; $a_1^2+a_2^2 \leq 4$.
87. Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, arătaţi că $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \geq 3$.
88. Demonstraţi că, pentru numerele reale strict pozitive a, b, c, au loc inegalităţile:
a) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$; b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

c) $\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

89. Demonstraţi că $(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a) \leq abc$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi.
90. Demonstraţi că, dacă $a,b,c \in \mathbb{R}$,

$$a+b+c = 1 \Rightarrow \sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq 5.$$

91. Demonstraţi că:
a) $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2), \forall a,b,x,y \in \mathbb{R}$;
b) $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2), \forall a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$
c) Generalizarea inegalităţilor de la a) şi b):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_ia_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right), \quad \forall a_i, x_i \in \mathbb{R},\ i=\overline{1,n}.$$

(Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz.)
92. Inegalitatea mediilor:
a) Dacă $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (media armonică a numerelor a şi b); $m_g = \sqrt{ab}$ (media geometrică a numerelor a şi b); $m_a = \frac{a+b}{2}$ (media aritmetică a numerelor a şi b); $m_p = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (media pătratică a numerelor a şi b), a, b, numere reale strict pozitive, atunci:

$$m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p.$$

b) Dacă a_i, $i = \overline{1,n}$, sunt n numere reale strict pozitive, atunci au loc inegalităţile:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n)} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

Pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ au loc egalităţile.

93. Inegalitatea lui Bernoulli: dacă $a > 0$ şi $n > 1$, $n \in \mathbb{Q}$, atunci $(1+a)^n > 1+na$.

94. Inegalitatea lui Young: pentru $a > b$ şi $n, m \in \mathbb{Q}$, $m, n > 0$ şi $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$, atunci:

$$\frac{a^n}{n} + \frac{b^m}{m} \geq ab.$$

95. Inegalitatea lui Cebâşev:

1) Dacă $a_1 \leq a_2$ şi $x_1 \leq x_2$ sau $a_1 \geq a_2$ şi $x_1 \geq x_2$, atunci:

$$(a_1 + a_2)(x_1 + x_2) \leq 2(a_1x_1 + a_2x_2).$$

2) Dacă $a_1 \leq a_2$ şi $x_1 \geq x_2$ sau $a_1 \geq a_2$ şi $x_1 \leq x_2$, atunci:

$$(a_1 + a_2)(x_1 + x_2) \geq 2(a_1x_1 + a_2x_2).$$

96. Inegalitatea lui Minkovski:

a) Dacă $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

b) Generalizare. Dacă $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, atunci:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_1)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

97. Fie $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$, astfel încât $a_1^2 > a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2$. Să se demonstreze: $(a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - b_n^2) \leq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$. (Inegalitatea lui Aczel.)

Capitolul II. ECUAŢII

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii:

a) $(5x - 2)(-3x + 4) = (15x - 1)(2 - x) - 1$; b) $1 - \frac{2 - 3x}{2} = x - \frac{x + 2}{3}$;
c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = \frac{x - 2}{x^2 - x}$; d) $\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$; e) $\frac{x}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2}x + x + 1$;
f) $(x - 2)(x + 2) = x^2 - x - 2$; g) $(x - \sqrt{3})^2 = 1 - \sqrt{2}$; h) $(x - 2)(x + 3) = (x - 3)^2$;
i) $x\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{x}{2} + (x - 1)^2 + 2x$.

2. Rezolvaţi următoarele ecuaţii:

a) $\frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{x^2 - 1}$; b) $\frac{x + 2}{2x} = 2 - \frac{2x}{x + 2}$; c) $3 - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{3}$;

d) $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}=\frac{1}{2}$; e) $\frac{x^2-3x+2}{x-1}=1$; f) $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}=\frac{6}{9-x^2}$.

3. Să se rezolve şi să se discute ecuaţiile după valorile parametrilor reali m, n:
a) $1-m^2x=x-m$; b) $m^2x-3=9x+m$; c) $x-m=3x-4$; d) $\frac{x}{m}+1=m+x$;

e) $\frac{x+2}{m-1}=\frac{4}{x}+\frac{x-1}{m-1}$; f) $\frac{m}{1-2x}=\frac{2}{x+3}$; g) $m(x-n)=n(x+m)$;

h) $\frac{x-1}{n}=\frac{x+n}{m}$; i) $\frac{n}{x-m}=\frac{m}{x-n}$; j) $\frac{x}{n}+\frac{m}{x}=\frac{x+m}{n}$.

4. Să se determine valorile parametrului m, astfel încât soluţiile ecuaţiilor următoare să îndeplinească condiţiile specificate:

a) $mx+m=3x$, $x\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$; b) $mx-m=x+2$, $m\in\mathbb{R}$, $x\in[0,\infty)$;

c) $(m-1)x=2$, $x\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$; d) $\frac{x}{\sqrt{m^2-m+1}}=1$, $x,m\in\mathbb{N}$;

e) $x(mx-2)=m+m(1-x)^2$, $m,x\in\mathbb{Z}$; f) $\frac{x}{m}=-2-\frac{m}{x}$, $m\in(0,\infty)$, $x\in(-\infty,0)$.

5. Pentru ce valori reale ale parametrului m, următoarele ecuaţii sunt echivalente?

a) $2x-1=5$ şi $2(1-x)=3m-2$; b) $x^2-2=6+(2-x)^2$ şi $2\left(x-\frac{1}{2}\right)=m(1+x)$;

c) $m(x+3)=mx+m$ şi $\frac{1}{x}=\frac{4}{x}$; d) $2(3-x)=2x-4(x-1)+2$ şi $m^2x+1=x-m$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii:

a) $y^2-3y-4=0$; b) $z^2=-1$; c) $\frac{2}{t}+\frac{t}{2}=2$; d) $\sqrt{2}u^2-4u=8$;

e) $0{,}1x^2-0{,}4x=0{,}5$; f) $(x-1)(2-x)=0$; g) $\sqrt{3}v^2-2v+0{,}5=0$; h) $y^2-y+2=0$;

i) $4x^2-25=0$; j) $4x^2+25=0$; k) $4x^2+25x=0$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii. Discuţie după parametrul real m.

a) $mx^2-2x-1=0$; b) $x^2-mx+m-1=0$; c) $(m-1)x^2+x-2=0$;

d) $(m-2)x^2-2(m-1)x+m-3=0$; e) $x^2-mx+m^2+1=0$; f) $x^2-(m+1)x+m=0$.

8. Să se determine rădăcinile reale x_1, x_2 ale ecuaţiilor următoare şi parametrul real m, ştiind că pentru fiecare ecuaţie există relaţia specificată:

a) $x^2-3x-m=0$, $x_1x_2=-\frac{10}{3}\cdot(x_1+x_2)$; b) $-x^2+mx-1=0$, $x_1^2+x_2^2=23$;

c) $mx^2-2mx+1-m=0$, $x_1^2-x_2^2=20$; d) $x^2+(m-1)x+m-8=0$, $x_1^3+x_2^3=25$.

9. Fără a rezolva ecuaţia $x^2-\sqrt{2}x-0{,}5=0$, să se calculeze următoarele expresii:
a) $E_1=x_1+x_2+x_1x_2$; b) $E_2=x_1^2+x_2^2$; c) $E_3=x_1^3+x_2^3$;

d) $E_4=|x_1-x_2|$; e) $E_5=x_1^2-x_2^2$; f) $E_6=x_1^4+x_2^4$;

g) $E_7=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; h) $E_8=x_1^{-2}+x_2^{-2}$; i) $E_9=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$;

j) $E_{10} = \dfrac{x_1^3 - \sqrt{2}x_1^2 + 0{,}5x_1 - 1}{-x_2^2 + \sqrt{2}x_2 - 2x_2 + 3{,}5} + \dfrac{x_2^3 - \sqrt{2}x_2^2 + 0{,}5x_2 - 1}{-x_1^2 + \sqrt{2}x_1 - 2x_1 + 3{,}5}$.

10. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $|2 - x| = 5$; b) $|x| - |1 - x| = 2$; c) $x^2 + 2|x| = -1$; d) $|x| - x^2 = 0$;

e) $|x^2 - 9| + |x^2 - 2x - 3| = 0$; f) $|x| + |x - 2| = -1$; g) $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 0$;

h) $|x - 2| + |3 - x| = 4$; i) $|3 - |1 - x|| = 2$; j) $|x^2 - x - 2| = 4$;

k) $x^2 = |2x + 3|$; l) $|2 + |x| - |x - 1|| = 4$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\dfrac{x^2}{|x - 2|} - |x| = \dfrac{2|x|}{x - 2}$; b) $(x^2 - 3x)^2 - |x^2 - 3x| - 6 = 0$.

12. Să se formeze ecuaţii de gradul al doilea, ştiind că au următoarele soluţii:

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 5$; b) $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = 3$; c) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

d) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$; e) $x_1 = x_2 = 0$; f) $x_1 = -0{,}(3)$, $x_2 = -0{,}(6)$;

g) $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$; h) $x_1 = \dfrac{2}{5}$, $x_2 = \dfrac{5}{2}$; i) $x_1 = x_2 = 10$;

j) $x_1 = -2 + \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{2} + 2$.

13. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Q}$, pentru care ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ admite soluţia $x_1 = 5 + \sqrt{3}$.

14. Fie ecuaţia $x^2 + bx + c = 0$, $b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Să se formeze ecuaţia de gradul al doilea ale cărei soluţii sunt y_1, y_2 date de relaţiile:

a) $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$; b) $y_1 = x_1^2 + 1$, $y_2 = x_2^2 + 1$; c) $y_1 = \dfrac{x_2}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{x_1}{x_2}$;

d) $y_1 = x_1 + \dfrac{1}{x_2}$, $y_2 = x_2 + \dfrac{1}{x_1}$; e) $y_1 = \dfrac{1}{x_1} - 1$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2} - 1$.

15. Să se rezolve ecuaţiile, ştiind că admit o rădăcină independentă de parametrul real m:

a) $mx^2 + 2(m + 1)x - 3m - 2 = 0$; b) $(m - 1)x^2 + x - 4m + 2 = 0$.

16. Să se rezolve ecuaţiile: $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ şi $x^2 + x + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$, în cazurile:

a) ecuaţiile admit doar o rădăcină comună;

b) ecuaţiile au două rădăcini comune.

17. Să se determine parametrul real m, astfel încât ecuaţia $x^2 - mx + m + 3 = 0$ să îndeplinească condiţia:

a) să aibă rădăcini egale;

b) să aibă rădăcini reale distincte;

c) să nu aibă rădăcini reale;

d) să admită adăcini reale negative;

e) să admită rădăcini reale de semne contrare;

f) să admită rădăcini reale pozitive;

g) să admită cel puţin o rădăcină nulă.

18. Să se arate că dacă ecuaţia $x^2 + ax + b = 0$ are două rădăcini de modul 1, atunci şi ecuaţia $x^2 + |a|x + |b| = 0$ are aceeaşi proprietate.

19. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$, astfel încât următoarele perechi de ecuaţii să admită o rădăcină comună:

a) $x^2 + mx + 2 = 0$ şi $x^2 - 5x + 4 = 0$;

b) $x^2 - (m+1)x + m = 0$ şi $3x^2 - mx - 2 = 0$;

c) $(m+1)x^2 - mx - 1 = 0$ şi $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$.

20. Să se determine parametrul real m, astfel încât între rădăcinile ecuaţiei: $(m-1)x^2 + mx + 3 = 0$ să existe relaţia:

a) $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$; b) $x_1 = 3x_2$; c) $3x_1 = \dfrac{-5}{x_2}$.

21. Să se determine parametrii reali, m şi n astfel încât ecuaţiile

$$(5m - 52)x^2 + (4 - m)x + 4 = 0 \text{ şi } (2n-1)x^2 - 5nx + 20 = 0$$

să aibă aceleaşi rădăcini.

22. Să se discute în funcţie de parametrul real m, natura şi semnul rădăcinilor ecuaţiilor:

a) $mx^2 + (m-1)x + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$; b) $x^2 - 2(m+1)x + m = 0$.

23. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left[\dfrac{x+1}{3}\right] = \dfrac{x-1}{2}$; b) $\left[\dfrac{x-2}{3}\right] = \left[\dfrac{x-3}{2}\right]$; c) $\left[\dfrac{x-2}{2}\right] + \left[\dfrac{2x-1}{4}\right] = \dfrac{3}{2}x - 2$,

unde $[\cdot]$ este partea întreagă.

24. Să se determine soluţiile ecuaţiilor:

a) $[4x] = 1$; b) $[x-1] + \left[\dfrac{3x+1}{2}\right] = \dfrac{x}{2} - 1$; c) $\left[\dfrac{3x+1}{2}\right] = x + 1$.

25. Să se rezolve:

a) $\left[\dfrac{2x-1}{3}\right] + \left[\dfrac{4x-2}{6}\right] = \dfrac{5x-4}{3}$; b) $\left[\dfrac{x+3}{4}\right] + \left[\dfrac{3x+9}{12}\right] = \dfrac{2x-4}{3}$.

26. Demonstraţi că pentru orice număr real x, are loc relaţia:

$$\left[\frac{x+3}{6}\right] - \left[\frac{x+4}{6}\right] + \left[\frac{x+5}{6}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right] - \left[\frac{x+1}{3}\right].$$

27. Să se rezolve ecuaţia: $[x[x]] = 1$.

28. Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{\{x\}}{[x]} = x$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a lui x şi $x = [x] + \{x\}$.

29. Să se rezolve ecuaţia: $\left[\dfrac{mx^2 - 1}{2}\right] = \dfrac{2x+1}{5}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}^*$.

30. Determinaţi numerele real x, y, dacă $[x] \cdot [y] = 2$.

31. Pentru ce numere reale x şi y sunt îndeplinite simultan condiţiile:

$$2[x] + 3[y] = 5 \text{ şi } [x] + 2[y] = 4?$$

32. Pentru ce numere întregi nenule are loc egalitatea:

$$\left[\frac{x+y-4}{3}\right] = \frac{x^2 - y^2}{xy}?$$

33. Să se rezolve ecuaţia: $n = 3\left[\sqrt{n}\right] + 1,\ n \in \mathbb{N}$.

34. Să se demonstreze că pentru orice număr real x şi orice număr natural nenul n are loc egalitatea:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]. \qquad \text{(Egalitatea lui Hermite.)}$$

35. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x-2} = 3$; b) $\sqrt{x+1} = x - 1$; c) $\sqrt{x^2 - x + 1} = x + 3$;

d) $\sqrt{8-x} + \sqrt{x-3} = 3$; e) $\sqrt{1-2x^2} = x - 1$; f) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$;

g) $\sqrt{x^2+1} = -4$; h) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-2} = 2$; i) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + 2 = 0$.

36. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{\sqrt{2x^2 + x + 3} + \sqrt{2x^2 + x + 6}} = 3$; b) $\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 + 2x + 9} = -2$;

c) $\sqrt{x^2 - x + 9} + 2x - 2x^2 = 3$; d) $\sqrt{2x^2 + 8x + 6} + \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 2$;

e) $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$.

37. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = x^2 + 4$; b) $\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 10x + 25} = 0$;

c) $\sqrt{x + 4 + 2\sqrt{x+3}} - \sqrt{x + 4 - 2\sqrt{x+3}} = 2$;

d) $\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$;

e) $\sqrt{x^2 + \sqrt{6x^2 - 9}} + \sqrt{x^2 - \sqrt{6x^2 - 9}} = \sqrt{6}$.

38. Să se rezolve următoarele ecuaţii:

a) $\sqrt{3-x} = \sqrt[3]{x-4}$; b) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+3} = 2$; c) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$.

39. Să se rezolve următoarele ecuaţiile:

a) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = 2$; b) $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{2x+7}$; c) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{3-x} = 1$.

40. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale:

a) $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(4-x)^2} = \sqrt[3]{(x-2)(4-x)} + 1$;

b) $\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+7)^2} + \sqrt[3]{(x-2)(x+7)} = 3$; c) $\dfrac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-7}}{\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-7}} = 3$.

41. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $\sqrt{2-x^2} + \sqrt[3]{9-x^3} = 0$; b) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+2} = -1$;

c) $\sqrt[3]{\sqrt{x}+3} - \sqrt[3]{13-\sqrt{x}} = 4$; d) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$;

e) $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{7+x} = 2$; f) $\sqrt[4]{78+x} + \sqrt[4]{19-x} = 5$.

42. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x+25} + \sqrt[6]{2-x} = 3$; b) $\sqrt{x-2} - \sqrt[3]{x-10} + \sqrt[4]{4-x^2} = 2$.

43. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x+4\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}}=2a+3,\quad a>0.$$

44. Să se arate că dacă $x\in[-1;1]$, atunci:

$$1\pm\sqrt{1-x^2}+\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{5\pm3x+4\sqrt{1-x^2}}.$$

45. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[5]{x^{-2}}+\left(x^{-0,8}-1\right)^2-\sqrt[5]{x^{-8}}=0.$$

46. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-2\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{1-x}.$$

47. Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea:

$$\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}}=\sqrt[5x]{2x}?$$

48. Să se determine valorile reale ale lui a pentru care avem:

$$\sqrt{1+\sqrt{a(2-a)}}+\sqrt{1-\sqrt{a(2-a)}}=\sqrt{2(2-a)}.$$

49. Să se arate că ecuaţiile:

$$a\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-a^2}=b\quad\text{şi}\quad b\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-b^2}=a$$

admit rădăcina comună $x=a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$.

50. Să se rezolve:
a) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$; b) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\leq\dfrac{3}{2}$.

51. Să se rezolve şi să se discute în funcţie de parametrul real a, ecuaţiile:
a) $\sqrt{x^2-x}=a-x$; b) $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=a$.

52. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $x+\sqrt{x^2-x}\geq3$; b) $\sqrt{x^2-5x+6}\geq\sqrt{3-x}$; c) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1}<4$.

53. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$; b) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

54. Să se determine valoriele reale ale lui x şi y ştiind că are loc egalitatea:

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}.$$

55. Să se rezolve:

$$\sqrt{\frac{x+5a}{12a}+\sqrt{\frac{x-4a}{4a}}}+\sqrt{\frac{x+5a}{12a}-\sqrt{\frac{x-4a}{4a}}}=\sqrt{3},\quad a\in\mathbb{R}^*.$$

56. Să se arate că pentru $x \geq 0{,}5$ avem:

$\sqrt{x+\sqrt{x-0,25}}-\sqrt{x-\sqrt{x-0,25}}=1$, iar pentru $0{,}5 \geq x \geq 0{,}25$ avem:

$\sqrt{x+\sqrt{x-0,25}}+\sqrt{x-\sqrt{x-0,25}}=1$.

57. Să se arate că, dacă $1 \leq x \leq 2$, avem $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

58. Să se afle valorile reale ale parametrului real m, astfel ca ecuaţia:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt[5]{y+8}=8$ să fie verificată pentru $x=2m^2+2m-1$ şi $y=(2m+9)^5-8$.

59. Să se arate că dacă $a \geq 1$, atunci:

$$\sqrt[3]{3a-2+(a+2)\sqrt{a-1}}+\sqrt[3]{3a-2-(a+2)\sqrt{a-1}}=2.$$

60. Dacă $y-mx=\sqrt{m^2a^2+b^2}$ şi $my+x=\sqrt{a^2+b^2m^2}$, atunci are loc egalitatea $x^2+y^2=a^2+b^2$.

61. Să se afle $m,n \in \mathbb{R}$, astfel ca ecuaţia: $\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{2y-5}-\sqrt[7]{z-9}+1=0$ să fie verificată pentru $x=m^2-4$, $y=4n^3+6n^2+3n+3$ şi $z=9-(m+2n)^7$.

62. Ecuaţia: $\sqrt{a+bx}+\sqrt{b+cx}+\sqrt{c+ax}=\sqrt{b-ax}+\sqrt{c-bx}+\sqrt{a-cx}$, $a,b,c>0$, are soluţia $x=0$. Arătaţi că aceasta este unică.

63. Să se verifice identitatea: $\sqrt{5+4\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}}=2n+3$.

64. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $(x^2-3x)(x^2-3x+4)+4=0$; b) $x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}=4$.

65. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţiile:

a) $x^2-2x-\dfrac{6}{x^2-2x+2}=-1$; b) $\dfrac{x^2-4x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2-4x}=\dfrac{5}{2}$.

66. Să se rezolve ecuaţia: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

67. Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{18}{x^2}=\dfrac{13}{5}\left(\dfrac{3}{x}+\dfrac{x}{2}\right)$.

68. Fie ecuaţia: $x^2-4mx+3m^2+3m=2x$, unde $m \in \mathbb{Z}$ este un parametru. Să se determine m astfel încât ecuaţia să admită cel puţin o rădăcină întreagă.

69. Fie ecuaţia: $2x^2+(m+2)x+5m-2=0$. Să se arate că între rădăcinile ecuaţiei date există o relaţie independentă de m şi utilizând această relaţie să se determine valorile reale ale lui m, astfel încât ambele rădăcini să fie întregi.

70. Dacă $a,b \in \mathbb{R}$, $0<b \leq a$, atunci ecuaţia $x^2+ax-b=0$ nu are ambele rădăcini întregi.

71. Fie ecuaţia $ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei şi $m=a+b+c$, $n=abc$. Să se determine m şi n astfel încât a, Δ, x_1x_2, x_1+x_2 să fie numere întregi, consecutive, în această ordine. (Δ este discriminantul ecuaţiei.)

72. Fie ecuaţia $(m+1)x^2-(2m+1)x-2m=0$, $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Să se determine valorile întregi ale parametrului m astfel încât ecuaţia să aibe rădăcini întregi.

b) Să se determine pentru ce $m \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ ecuaţia are rădăcini întregi.

73. Fie ecuaţia $\sqrt{2|x|-2x}=5m-x$, $m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibe trei rădăcini reale distincte.

74. Se consideră ecuaţia: $2x^2+3(k-l)x+k^2-kl+3=0$, $k,l\in\mathbb{R}$, $l\neq 0$.

Dacă $x_1=2x_2$, considerăm $k=k(l)$ şi pentru $l=4$ fie $M=\min(x_1;x_2)$. Stabiliţi dacă:

1. a) $k=\frac{1}{l}(l^2-3)$; b) $k=\frac{1}{2}(4-l^2)$; c) $k=3-l^2$; d) $k=\frac{3-l^2}{l}$; e) $k=l^2+l+3$.

2. a) $M=\frac{1}{2}$; b) $M=0$; c) $M=1$; d) $M=-\frac{1}{2}$; e) $M=-1$.

75. Se consideră ecuaţia: $x(3x-1)(3x-3)(3x-4)=m$, $m\in\mathbb{R}$.

Fie A media aritmetică a rădăcinilor ecuaţiei pentru $m=0$ şi $M=\{m\in\mathbb{R}\mid$ ecuaţia are toate rădăcinile egale$\}$. Atunci:

1. a) $A=4$; b) $A=\frac{2}{3}$; c) $A=\frac{8}{9}$; d) $A=\frac{4}{3}$; e) $A=0$.

2. a) $M=\left[-\frac{3}{4};\frac{4}{3}\right]$; b) $M=\left(-\frac{3}{4};1\right]$; c) $M=\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$;
d) $M=\left[\frac{4}{3},\infty\right)$; e) $M=\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right)$.

76. Se consideră ecuaţia: $x^2-|x|=mx(x+1)$, $m\in\mathbb{R}$.

$M_1=\{m\in\mathbb{R}\mid$ ecuaţia are exact trei rădăcinile reale şi distincte$\}$,

$M_2=\{m\in\mathbb{R}\mid$ ecuaţia are oinfinitate de soluţii$\}$. Stabiliţi dacă:

1. a) $M_1=(-\infty,-1]$; b) $M_1=(-1,1)$; c) $M_1=(2,\infty)$; d) $M_1=\emptyset$; e) $M_1=\mathbb{R}$;

2. a) $M_2=(-\infty,-1)$; b) $M_2=(1,\infty)$; c) $M_2\subset(2,\infty)$; d) $M_2=\emptyset$; e) $M_2=\{1\}$.

77. Se consideră ecuaţia: $9a^2x^2-b(12a-b)x+b^2(4-c)=0$ cu $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $2b\neq 3ac$ şi $\Delta>0$ (Δ este disciminantul ecuaţiei). Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei. Pentru $a=\frac{1}{3}$ şi $b=1$, fie $C=\{c\in\mathbb{R}\mid x_1^3+x_2^3=18\}$. Atunci:

1) a) $x_1<c$, $x_2>c$; b) $x_1<c$, $x_2<c$; c) $x_1>c$, $x_2>c$;
d) $x_1\leq c$, $x_2\geq c$; e) $x_1<c$, $x_2\geq c$.

2) a) $C=\{2\}$; b) $C=\{-1\}$; c) $C=\{-3\}$; d) $C=\{-2\}$; e) $C=\{3\}$.

Capitolul III. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Să se decidă care din următoarele enunţuri sunt propoziţii şi care este valoarea lor de adevăr:

a) „Memoraţi poezia¡‘; b) „Unde locuiţi?“; c) „$1<3$“;
d) „Toate notele sunt bune.“; e) „$|x-1|=2$“.

2. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $p_1:\ \sqrt[3]{-8}=-2$; b) $p_2:\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{2}$; c) $p_3:\ 0\geq 0$; d) $p_4:\ A\cup B=B\cup A$;

e) $p_5:\ \sqrt[3]{-\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{3}$; f) $p_6:\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2001\cdot 2002}=\frac{2001}{2002}$;

g) $p_7:\ \{0\}=\emptyset$; h) $p_8:\ \sqrt{-1}\in\mathbb{R}$.

3. Fie propoziţiile:

p_1: „Orice număr prim este impar."

p_2: „Produsul oricăror două numere naturale consecutive este un număr par."

Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

p_1; p_2; $p_1 \wedge p_2$; $p_1 \vee p_2$; $\neg p_1$; $\neg p_2$; $p_1 \to p_2$; $p_2 \to p_1$;

$p_1 \Leftrightarrow p_2$; $\neg p_1 \to p_2$; $p_2 \to \neg p_1$; $\neg p_1 \wedge p_2$; $p_1 \vee \neg p_2$.

4. Folosind tabelele de adevăr, să se verifice:

a) $p\wedge q \equiv q\wedge p$; b) $p\vee q \equiv q \vee p$; c) $(p\wedge q)\wedge r = p\wedge(q\wedge r)$; d) $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$;

e) $\neg p\vee q \equiv \neg p \to q$; f) $p\vee q \equiv (p\to q)$; g) $p\vee p\equiv p$; h) $p\wedge p\equiv p$;

i) $p\wedge q = \neg(\neg p\vee\neg q)$; j) $p\vee q \equiv \neg(\neg p\wedge \neg q)$; k) $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$;

l) $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

5. Să se arate că următoarele formule sunt tautologii:

a) $\neg(p\vee q)\to(\neg p\wedge\neg q)$; b) $\neg(p\wedge q)\to(\neg p\vee \neg q$;

c) $p\wedge(p\to q)\to q$; d) $(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$.

6. Fie predicatul $p(x)$: „$\left[x+\frac{1}{2}\right]=x$". Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $p(0)$; b) $p\left(3\frac{1}{2}\right)$; c) $p(-1)$; d) $p(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$; e) $p\left(-2\frac{1}{2}\right)$; f) $p\left(-\frac{1}{3}\right)$.

7. Fie predicatul $p(x,y)$: $x+2y=2002$, $x,y\in\mathbb{N}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(\forall x)(\forall y): x+2y=2002$; b) $(\forall x)(\exists y): x+2y=2002$;

c) $(\exists x)(\forall y): x+2y=2002$; d) $(\exists x)(\exists y): x+2y=2002$.

8. Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x+2y=2002\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $\mathrm{card}A=1002$; b) $\mathrm{card}A=0$; c) $\mathrm{card}A<2002$; d) $\mathrm{card}A<n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

9. Fie mulţimea $B=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid 4x+3y=1992\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(\exists x)(\exists y)$ a.î. $4x+3y=1992$; b) $(\forall x)(\forall y): 4x+3y=1992$;

c) $\mathrm{card}A=167$; d) $\mathrm{card}A=1992$.

10. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) p_1 : $\forall x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{x-\sqrt{y}}$ are sens, există numerele a şi b, reale, pozitive, astfel încât $\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$;

b) p_2 : $\forall x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{x+\sqrt{y}}$ are sens, există numerele a şi b, reale, pozitive, astfel încât $\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

c) p_3 : $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$ are loc egalitatea: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$;

d) p_4: $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\in\mathbb{N}$.

11. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, $d\neq 0$ şi propoziţiile:

$$p_1: d\mid a;\ p_2: d\mid b;\ p_3: d\mid ab;\ p_4: d\mid a+b.$$

Demonstraţi că:

a) p_1 este suficientă dar nu şi necesară pentru p_3;

b) $p_1\wedge p_2$ este suficientă dar nu şi necesară pentru p_4;

c) $p_3\wedge p_4$ este necesară dar nu şi suficientă $p_1\wedge p_2$;

d) $\neg p_1 \wedge p_3$ nu este necesară şi nici suficientă pentru p_2.

12. Să se formuleze reciproca, contrara şi contrara reciprocei pentru următoarele teoreme. Să se specifice care dintre ele este o teoremă.

a) Dacă un număr natural scris în baza 10 este divizibil cu 9, atunci suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

b) Dacă un număr natural se divide cu 2^n, $n \in \mathbb{N}$, atunci numărul format din ultimele n cifre ale numărului dat, luate în aceeaşi ordine ca şi în numărul dat, se divide cu 2^n.

c) Dacă a, b sunt numere reale, astfel încât $a^2 = b^2$, atunci $a = -b$ sau $a = b$.

d) În orice triunghi cu a, b, c lungimile laturilor, există relaţiile:

$$|b-c| < a < b+c; \quad |a-c| < b < a+c; \quad |b-a| < c < a+b.$$

e) Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci el este inscriptibil.

13. Demonstraţi, folosind metoda reducerii la absurd, că $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

14. Demonstraţi, folosind metoda reducerii la absurd, că există un singur număr natural n, astfel încât: $3^n + 4^n = 5^n$.

15. Demonstraţi, folosind metoda reducerii la absurd, că, dacă o dreaptă d este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan α, atunci $d \| \alpha$ sau $d \subset \alpha$.

16. Demonstraţi, folosind metoda reducerii la absurd, că fracţia $\frac{4n+7}{3n+5}$, $n \in \mathbb{N}$, este ireductibilă.

PRINCIPIUL INDUCŢIEI MATEMATICE

17. Folosind metoda inducţiei matematice să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, sunt adevărate propoziţiile:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

d) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$;

e) $2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n(2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$;

f) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

18. Să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $(1+a)(1+a^2)(1+a^4) \cdot \ldots \cdot (1+a^{2^n}) = \frac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1}$, $\forall a \neq 1$

b) $1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n = \frac{(-1)^n x^{n+1} + 1}{x+1}$, $x \neq -1$;

c) $1(x+1) + 2(x+2) + \ldots + n(x+n) = \frac{n(n+1)(2n+1+3x)}{6}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Să se calculeze următoarele sume şi apoi să se demonstreze formula găsită prin metoda inducţiei matematice:

a) $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \ldots + (2n+1)(2n+4)$, $n \in \mathbb{N}$;

b) $1+3+7+15+\ldots+(2^n-1)$, $n\in\mathbb{N}$;

c) $1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+\ldots+(2n-1)(2n+1)(2n+3)$, $n\in\mathbb{N}^*$;

d) $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

20. Să se calculeze următoarele sume şi să se verifice rezultatul găsit.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k-1)(x+k)}$, $x\in\mathbb{N}^*$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$; d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!k$; e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!(k^2+k+1)$; f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!}$;

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$; h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$.

21. Să se calculeze şi să se demonstreze formula găsită prin metoda inducţiei matematice:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2(n-k+1)$; b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right]$; c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$; e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2+k-2}$; f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!}$.

22. Să se calculeze suma:

$$1+2(1+2)+3(1+2+3)+\ldots+n(1+2+\ldots+n).$$

23. Să se demonstreze identităţile:

a) $\dfrac{1}{1!(2n-1)!}+\dfrac{1}{3!(2n-3)!}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)!1!}=\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

b) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

c) $x+\dfrac{1}{x}+x^3+\dfrac{1}{x^3}+\ldots+x^{n-4}+\dfrac{1}{x^{n-4}}+x^{n-2}+\dfrac{1}{x^{n-2}}+x^n+\dfrac{1}{x^n}\geq n+1$, $n\in\mathbb{N}$, n impar;

d) $\dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{x^4}{1-x^8}+\ldots+\dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, $x\neq\pm1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

24. Să se demonstreze, folosind metoda inducţiei matematice:

a) $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}<\dfrac{3}{4}$, $\forall n\geq2$, $n\in\mathbb{N}$;

b) $1<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{3n+1}<2$, $\forall n\geq2$, $n\in\mathbb{N}$;

c) $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n\geq2$;

d) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

25. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural n are loc:

$$1+\frac{k}{n} \le \left(1+\frac{k}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2},\ \forall k \le n,\ k \in \mathbb{N}.$$

26. Să se arate că: $2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

27. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $2^{n-1} \ge n, \forall n \in \mathbb{N}$; b) $2^n \ge 2n+1, \forall n \ge 3, n \in \mathbb{N}$;

c) $2^{n+1} \ge 2n+3, \forall n \ge 2, n \in \mathbb{N}$; d) $2n^3 \ge 3n^2+3n+1, \forall n \ge 3, n \in \mathbb{N}$.

28. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural $n \ge 4$ are loc inegalitatea: $3^n > n^3$. Deduceţi că $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}, n \ge 4$.

29. Demonstraţi, folosind metoda inducţiei matematice, următoarele inegalităţi:

a) $3^n > 2^n + n^2, n \ge 2, n \in \mathbb{N}$; b) $3^{n-1} > n^2, n \ge 3, n \in \mathbb{N}$;

c) $2^n < n!, n \ge 4, n \in \mathbb{N}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

30. Demonstraţi că pentru orice număr natural nenul are loc inegalitatea:

$$n!2^n \le \prod_{k=1}^{n}(1+k^2).$$

31. Să se arate că, pentru orice număr natural $n \ge 2$ are loc inegalitatea:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

32. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt adevărate, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

a) $2^{6n+3}+3^{4n+2} \vdots 17$; b) $5^{2n}-1 \vdots 24$; c) $5^{4n+2}+1 \vdots 26$; d) $31 \cdot 7^{2n}+12 \cdot 6^n \vdots 43$;

e) $11^{2n}-9^{2n} \vdots 40$; f) $7 \cdot 2^{2n+1} \cdot 5^{2n}-5 \vdots 9$; g) $7^{2n+1}+12^{2n+1} \vdots 19$.

33. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n sunt adevărate afirmaţiile:

a) $10^n+18n-1 \vdots 9$; b) $12^{n+1}+33n-12 \vdots 11$; c) $9^{n+2}+24n-1 \vdots 16$.

34. Să se arate că: $5^{5n}+5^{2n-1}+5^{5n+1} \vdots 31, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

35. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale pozitive a_i, $i=\overline{1,n}$ are loc inegalitatea: $\sum\limits_{1 \le i<j}^{n} \sqrt{a_i \cdot a_j} \le \frac{n-1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

36. Dacă $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, demonstraţi că: $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+a_i) \ge 2^n$.

37. Dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = 1$, demonstraţi că: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right) \ge 1,\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ \imath=\overline{1,n}$.

38. Se dă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0=2$, $x_1=3$, $x_{n+1}=3x_n-2x_{n-1}$, $n \ge 1$. Să se demonstreze că: $x_n = 2^n+1, \forall n \ge 0$.

39. Se dă şirul $(f_n)_n$ definit prin $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 1$.
Să se arate că:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{(şirul lui Fibonacci).}$$

40. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n - x_n^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in (0,1)$. Să se arate că $0 < x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

41. a) Să se determine numărul diagonalelor unui poligon convex care are n laturi. Să se demonstreze formula găsită prin inducţie matematică.

b) Aceeaşi cerinţă pentru o prismă având ca bază un poligon convex cu n laturi.

42. Fie ecuaţia: $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ şi x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei.

a) Să se arate că $S_n = x_1^n + x_2^n$ este un număr întreg pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

b) Determinaţi p, q, astfel încât S_n să fie divizibilă prin 2^n, apoi în general, prin a^n, $a \in \mathbb{N}^*$.

43. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n \in (0,2)$ şi $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are toţi termenii în intervalul $(0,2)$.

44. Să se demonstreze identitatea:

$$a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2^2} + \ldots + \frac{a^2}{2^n} = \frac{a^2(2^{n+1}-1)}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{şi} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

45. Fie $a_n = \dfrac{3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1}{1^3 \cdot 2^3} + \dfrac{3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1}{2^3\cdot 3^3} + \ldots + \dfrac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că: $a_n = \dfrac{(n+1)^3 - 1}{(n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

46. Să se demonstreze identităţile:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin(x + k\alpha) = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(x + \frac{n-1}{2}\alpha\right)$, $\alpha \neq 2k\pi$;

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\cos 2^k\alpha\right) = \sin\frac{2^{n+1}\alpha}{2^n}$, $\alpha \neq k\pi$;

47. Se consideră o funcţie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Să se arate că $f(0) = 0$.

b) Să se arate că $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

c) Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_i \in \mathbb{Q}, \quad i = \overline{1,n}.$$

48. Fie şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n = 2n - 1$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$, definit prin $b_n = 2^{a_n}$. Să se demonstreze, utilizând metoda inducţiei matematice, că $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

49. Să se demonstreze că n cercuri situate într-un plan, împart planul în cel mult $(n^2 - n + 2)$ părţi. Dar dacă cercurile sunt două câte două secante?

50. Să se demonstreze că oricare ar fi n plane, care trec prin acelaşi punct, astfel încât oricare trei dintre ele nu au o dreaptă comună, împart spaţiul în $(n^2 - n + 2)$ părţi.

Capitolul IV. FUNCŢII

1. Să se determine domeniul de definiţie (D) al următoarelor funcţii $f : D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2-1}$; c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$;

e) $f(x) = \sqrt{x+2}$; f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^2+x+2}}$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcţiile $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ şi $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+(m+1)x+m+6}$ au acelaşi domeniu maxim de definiţie.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 4 - mx + m$ să fie egale.

4. Să se determine mulţimea D pentru care funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = 2x + 1$ sunt egale.

5. Să se determine mulţimea valorilor ($\mathrm{Im}f$) pentru următoarele funcţii:

a) $f : \{-1; 0; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+3}$;

b) $f : \left\{-2; -\dfrac{1}{3}; 0; \dfrac{1}{2}; 1{,}2\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(2x-1; -3x+2)$;

c) $f : \left\{-\sqrt{3}; -1; -\dfrac{1}{2}; 0; 1; \sqrt{3}; 2; 10\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min(x^2-1; \sqrt{x^2+1})$;

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sgn}(x+1)$;

e) $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left[x - \dfrac{1}{2}\right]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a;

f) $f : \left\{-\dfrac{5}{4}; -\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{10}; 1; \dfrac{5}{3}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x+1\}$, unde $\{a\}$ este parte fracţionară a numărului real a;

g) $f : \{-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; -1; 0; 1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2}$;

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1$.

6. Să se determine funcţia afină $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă graficul ei intersectează axele de coordonate ale reperului cartezian (xOy) în punctele $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$.

7. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(0) = -3$ şi $f(0{,}5) = 1$; b) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$ şi $f(\sqrt{3}) = \sqrt{2}$;

c) $f(-100) = 10$ şi $f(100) = 10$;

d) $f(2) = 1$ şi unghiul format de axa Ox şi graficul funcţiei are măsura de 45^0.

e) Intersecţiile graficului funcţiei cu axele de coordonate Ox şi Oy sunt puncte de coordonate numere întregi şi aria triunghiului determinat de graficul funcţiei şi axele de coordonate este egală cu 3 U.P. Câte soluţii are problema?

8. Să se studieze monotonia următoarelor funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Discuţie după parametrul real m.

a) $f(x) = mx + 2$; b) $f(x) = 2x - m$; c) $f(x) = -x + m^2 + 1$;

d) $f(x) = (1-m)x + m$; e) $f(x) = (m^2+1)x - 3$.

9. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2x - 1$; b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} -3x+2, & x \le -2 \\ 2x-1, & x > -2 \end{cases}$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \begin{cases} -3, & x \le 3 \\ |1-x|, & x > 3 \end{cases}$;

d) $f_4 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \begin{cases} 4x-5, & x < -4 \\ 2, & x \in [-4,-3) \\ -x+2, & x \in [-3,0) \\ 5, & x = 0 \end{cases}$;

e) $f_5 : [-1,2) \to \mathbb{R}$, $f_5 = \begin{cases} -5x+2, & -1 \le x < 0 \\ 0{,}5x, & 0 \le x < 2 \end{cases}$;

f) $f_6 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f_6 = |-3x+6|$; g) $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_7(x) = \operatorname{sgn} x$.

10. Să se reprezinte grafic funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = [x]$; b) $f(x) = \{x\}$; c) $f(x) = \left[\dfrac{x-1}{2}\right]$.

11. Să se determine mulţimea $\mathrm{Im} f_i$, $i = \overline{1,7}$, unde f_i sunt funcţiile de la exerciţiul 9.

12. Să se determine $f_1 + f_2$; $f_2 + f_3$; $f_2 - f_3$; $f_2 \cdot f_3$; $\dfrac{f_2}{f_3}$ şi $\dfrac{f_3}{f_2}$, unde f_1, f_2, f_3 sunt funcţiile respective de la exerciţiul 9.

13. Se consideră funcţiile date la exerciţiul 9. Să se determine:

a) $f_1 \circ f_2$; $f_2 \circ f_1$; b) $f_1 \circ f_3$; c) $f_1 \circ f_7$; d) $f_2 \circ f_3$; $f_3 \circ f_2$;

e) $f_3 \circ f_7$; $f_7 \circ f_3$; f) $f_2 \circ f_7$; $f_7 \circ f_2$; g) $f_3 \circ f_3$ şi $f_1 \circ f_1$.

14. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze:

$$f \circ f;\quad f \circ f \circ f;\quad \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

15. Să se arate că următoarele funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt bijective şi să se calculeze f^{-1}, $f \circ f$, $f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$, $f^{-1} \circ f^{-1}$:

a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = -3x + 4$; c) $f(x) = -2x$.

16. Să se studieze bijectivitatea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, în următoarele cazuri:

a) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < -1 \\ 2x-4, & x \ge -1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < 2 \\ -x-1, & x \ge 2 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}$.

Pentru cazurile în care funcţia f este inversabilă să se calculeze inversa sa.

17. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{2}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este inversabilă şi să se calculeze f^{-1}.

18. a) Să se arate că nu există funcţii afine $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, astfel încât:

$$(f \circ f)(x) = x + 1,\ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

b) Să se arate că există o infinitate de funcţii $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, astfel încât:

$$(g \circ g)(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

~~19.~~ Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ mx - 4, & x \geq 2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$. Se cere să se determine parametrul real m, astfel încât:

a) funcţia f să fie strict monotonă; b) funcţia f să fie injectivă; c) funcţia f să fie surjectivă; d) funcţia f să fie bijectivă. În acest caz să se determine f^{-1}.

20. Pentru parametri reali m, n se consieră funcţia $f_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{m,n}(x) = \begin{cases} x - m, & x \leq 0 \\ nx + m, & x > 0 \end{cases}$. Să se determine valorile lui m, n pentru care funcţia $f_{m.n}$ este:

a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.

~~21.~~ Să se studieze periodicitatea funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}; \ g(x) = \begin{cases} -1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 1, \quad \text{dacă } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}; \ h(x) = (-1)^x.$$

22. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie monotonă. Să se demonstreze că dacă f este periodică, atunci f este constantă.

23. Să se determine toate funcţiile bijective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \dfrac{n}{f(n)}$ este crescător.

24. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie care îndeplineşte condiţiile:

1) $(f \circ f)(x) = 4x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$; 2) $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + \alpha$.

a) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ şi funcţia de gradul întâi, care verifică condiţiile 1) şi 2).

b) Să se arate că singura funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică 1) şi 2) este funcţia definită la punctul a).

25. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx - 2$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrul real m în fiecare din următoarele situaţii:

a) f este strict crescătoare; b) $f \circ f = f$; c) f este periodică.

26. Fie $a > 0$ un număr real. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \dfrac{x}{a}$ este bjectivă.

27. Se consideră funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$. Să se determine o funcţie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, astfel încât $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$. Arătaţi că pentru orice asemenea funcţie g are loc afirmaţia $f \circ g \neq 1_{\mathbb{N}}$.

28. Să se determine toate funcţiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$(x-y)f(x) + h(x) - xy + y^2 \leq h(y) \leq (x-y)g(x) + h(x) - xy + y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

29. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Stabiliţi valoarea de adevăr a afirmaţiilor de mai jos, justificând răspunsul.

a) Maximul funcţiei este $\dfrac{-\Delta}{4a}$, dacă $a < 0$.

b) Semnul funcţiei f este contrar lui a, dacă $\Delta = 0$.

c) Semnul funcţiei f este semnul lui a dacă $\Delta < 0$.

d) Semnul funcţiei f este pozitiv, dacă $a > 0$ şi $\Delta < 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

e) $f(x) > 0$, dacă $x \in (x_1, x_2)$, $\Delta > 0$, $a < 0$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x) = 0$.

f) $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dacă $\Delta \leq 0$ şi $a < 0$.

g) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, dacă $\Delta < 0$ şi $a > 0$.

h) $\mathrm{Im} f = \left(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$, dacă $a < 0$. i) $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, dacă $a > 0$.

j) Graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte, distincte, dacă $\Delta > 0$. În caz afirmativ, determinaţi coordonatele punctelor.

k) Graficul funcţiei nu intersectează axa Ox, dacă $\Delta < 0$.

l) Dacă $\Delta = 0$, graficul funcţiei f este tangent axei Ox în punctul $V\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$.

30. Să se studieze monotonia şi să se determine minimul sau maximul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare:

a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$; c) $f(x) = -2x^2 + 4$;

d) $f(x) = x^2 - 9$; e) $f(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{1}{4}$; f) $f(x) = (x-3)^2$;

g) $f(x) = -2x^2$; h) $f(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}5x$.

31. Să se reprezinte grafic funcţiile de la exerciţiul 30, întocmindu-se tabelul de variaţia al funcţiei.

32. Să se studieze semnul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare:

a) $f(x) = -x^2 + x + 2$; b) $f(x) = x^2 - 10x + 25$; c) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$;

d) $f(x) = \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x$; e) $f(x) = -3x^2 + 9$; f) $f(x) = x^2 + 4$.

33. Să se determine mulţimea $\mathrm{Im} f$, pentru funcţiile f de la exerciţiul 32.

34. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, ştiind că:

a) graficul funcţiei f trece prin punctele $A(1; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(0; -4)$;

b) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ obţinut pentru $x = 0$ şi graficul funcţiei trece prin punctul $A(2; 10)$.

35. Determinaţi toate funcţiile de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică:

a) $f(-1) = f(2)$ şi $f(1) = 4$; b) $f(0) = 3$ şi $f(2 - x) = f(2 + x), \forall x \in \mathbb{R}$.

36. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, ştiind că are valoarea maximă egală cu $\frac{25}{4}$ şi punctul $A(-2; 0)$ aparţine graficului funcţiei.

37. Să se expliciteze funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi să se reprezinte grafic în cazurile:

a) $f(x) = |x^2 - 4|$; b) $f(x) = |-x^2 - 2| - 1$; c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 4x$;

d) $f(x) = |x^2 - x - 6|$; e) $f(x) = |x^2 - 1| + |-x^2 + 3x|$; f) $f(x) = |x - x^2| + |x| - 4$.

38. Să se reprezinte grafic funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare:

a) $f(x) = \max(x^2 - 2x; -2x + 9)$; b) $f(x) = \min(x^2 + 1; 2x^2 - 3x + 3)$;

c) $f(x) = \min(x; x^2; x^2 - 2)$; d) $f(x) = \max(-2x + 1; x^2; -2x^2 + x)$.

39. Să se determine valoarea parametrului m, astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - mx + 2}{m^2x^2 + 1}$ să aibă mulţimea valorilor cuprinsă în intervalul $(-1; 1)$.

40. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $3x^2 - x \geq -x^2 + 3$; b) $-2x^2 \leq x - \frac{1}{2}$; c) $x^2 - x + 5 \leq 0$; d) $-2x^2 + x - 9 < 0$;

e) $\frac{x-1}{x+3} \leq \frac{3x-1}{x+2}$; f) $\frac{x+2}{x^2+1} > 2$; g) $\frac{x^2 - |5x-6|}{x^2 - 11x + 30} \leq 0$;

h) $\frac{x^2 - x - 6}{|5 - 4x - x^2|} \geq 0$; i) $\left|\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 3x + 2}\right| \geq 1$; j) $-2 \leq \frac{4x^2 - |x|}{x^2 - 1} < 1$.

41. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - 8x + 12 > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+8}{x+7} > 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 - 6x + 8} \leq 2 \\ x^2 - 9 \geq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{x^2 - x - 30}{|x| + 7} < 0 \\ \frac{|x+1|}{x^2 - 9} \geq 0 \\ |x - 3| < 1 \end{cases}$.

42. Să se arate că funcţiile următoare sunt bijective şi să se calculeze inversele lor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$.

43. Să se determine parametrul real m, astfel încât între rădăcinile ecuaţiilor următoare să existe relaţia scrisă în dreptul fiecăruia:

a) $mx^2 - (m-2)x + 2 = 0$, $x_1 = 2x_2$;

b) $(m-1)x^2 + 2mx - 2 = 0$, $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$;

c) $(m+2)x^2 - 3x + m - 2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$;

d) $x^2 - mx + 3m - 2 = 0$, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$;

e) $mx^2 - 2x + m + 1 = 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = x_1x_2$;

f) $mx^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 = -2$;

g) $x^2 - (m+2)x + m = 0$, $|x_1 - x_2| = \frac{5}{2}$;

h) $x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$, $x_1^2 - x_2^2 = -4$;

i) $x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0$, $3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0$;

j) $(m-3)x^2 - 2(m-6)x + m = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 5(x_1 + x_2) - 1 = 0$.

44. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuaţiei date să verifice relaţia scrisă în dreptul fiecăruia, în fiecare caz în parte.

a) $x^2 - 2(m+1)x + 2(m-1) = 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$;

b) $(m-1)x^2 - m^2x + m + 1 = 0$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 1$;

c) $x^2 - mx + 2 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 > m^2$. Pentru ce $m \in \mathbb{R}$ ecuaţia are cel puţin o rădăcină în intervalul $(-1, 1)$?

d) $8mx^2 - 2(m+1)^2x + m^2 + 1 = 0$, $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \leq 4$;

e) $x^2 - (4m+3)x + 3m^2 + 5m + 3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \geq 0$.

45. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuaţiei să verifice relaţia dată în fiecare caz în parte.

a) $x^2 - 4|m|x + m^2 + 2 = 0$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 1$;

b) $x^2 - 4x + m^2 = 0$, $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = 3$.

46. Fie ecuaţia $x^2+mx+2 = 0$, cu x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei. Notăm cu $S_n = x_1^n+x_2^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există relaţia:

$$S_{n+2} + (m+1)S_{n+1} + (m+3)(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) + m + 4 = 0.$$

47. Fie ecuaţiile: $x^2 - (m+3)x + 12m = 0$; $y^2 - (m+1)y + m^2 + 11 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, respectiv y_1, y_2. Să se determine valorile lui m pentru care este verificată inegalitatea: $\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{y_1 + y_2} \leq 2(x_1 + x_2)$.

48. Fie funcţia $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - 2(m+1)x + m + 3$, $m \in \mathbb{R}$. Să se determine parametrul real m în fiecare din următoarele cazuri:

a) graficul funcţiei se află deasupra axei Ox;

b) vârful parabolelor asociate funcţiilor f_m este situat sub axa Ox;

c) graficul funcţiei este tangent axei Ox;

d) vârful parabolelor asociate funcţiilor f_m se află pe axa Oy.

49. Determinaţi $m \in \mathbb{R}^*$, astfel încât pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - -2x - m + 2$ să fie îndeplinite condiţiile din fiecare caz în parte:

a) vârful parabolelor asociate funcţiei f să aparţină dreptei (d) de ecuaţie $x+y-2 = 0$ şi să fie un punct de minim;

b) suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei $f_m(x) = 0$ să fie minimă.

50. Să se determine parametrul real m astfel ca parabolele asociate funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m-1)x + m$, $g(x) = mx^2 + x - 1)$, $m \neq 0$, să fie tangente.

51. Să se afle numărul prim p ştiind că rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + p = 0$ sunt întregi.

52. Determinaţi parametrul real m astfel încât:

a) $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $(2m+1)x^2 - (m+3)x + m + 2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $(m+3)x^2 - (m-1)x + m + 2 < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

53. a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{mx^2 - (m+1)x + m + 3}{x^2 - mx + 1}$$

să aibă sens şi să fie negativă.

b) Pentru ce valori $m \in \mathbb{R}$, mulţimea $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 0]$?

54. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4$. Să se determine o funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} mx+n, & x < -1 \\ p, & x = -1 \\ ax^2+bx+c, & x > -1 \end{cases}$, al cărei grafic să fie tangent la graficul funcţiei f în punctul $A(-1;3)$.

55. Fie familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m+1)x^2 - mx + 1$, $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) Să se arate că parabolele asociate acestor funcţii trec prin două puncte fixe.

b) Să se determine locul geometric descris de vârful parabolelor asociate funcţiilor f_m.

56. Fie familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_m(x) = (m+1)x^2 - 2mx + m - 1.$$

a) Să se determine punctele fixe ale graficului funcţiilor f_m.

b) Să se determine locul geometric descris de vârful parabolelor asociate funcţiilor f_m.

c) Să se determine o submulţime a locului geometric găsit la punctul b), care conţine vârfurile parabolelor cu ramurile în sus.

d) Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{Z}$ pentru care ecuaţia $f_m(x) = 0$ are ambele rădăcini întregi.

57. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x - 4 = 0$. Se notează $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze S_n pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 4$.

b) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, are loc relaţia:

$$S_{n+2} - S_{n+1} - 4S_n = 0.$$

c) Să se calculeze valoarea expresiei $E(x_1, x_2)$, unde:

$$E(x_1,x_2) = \frac{x_1^3 - x_1^2 - 5x_1 + 2}{x_2^2 + x_2 - 3} + \frac{x_2^3 - x_2^2 - 5x_2 + 2}{x_1^2 + x_1 - 3}.$$

58. Fie ecuaţia $x^2 + mx + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2. Notând cu $S_n = x_1^n + x_2^n$, se cere să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} S_k = 1 - \frac{m+1}{m+2} S_{n+1} - \frac{1}{m+2} S_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

59. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a-2)x^2 - 2x + a - 2$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se discute rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$, în raport cu parametrul a.

b) Să se determine a, astfel încât graficul funcţiei să aibă minimul său pe dreapta $y = 3x$.

c) Cu a determinat mai sus să se taie curba (P) cu o dreaptă (d) paralelă la dreapta $y = 3x$ şi întâlnind axa Oy într-un punct M de ordonată m. Să se discute în raport cu parametrul m numărul punctelor de intersecţie dintre (P) şi (d).

60 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax - a_1)^2 + (ax - a_2)^2 + \ldots + (ax - a_{10}^2$, cu $a \neq 0$ şi a_i reale, $i = \overline{1,10}$.

a) Să se arate că valoarea minimă a lui f nu depinde de a.

b) Să se arate că dacă $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{10}^2 = 1$, atunci: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \leq \sqrt{10}$.

61 Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3 + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha)x^2 - 2(\cos a + \sin a)x + 1$, $a \in \mathbb{R}$. Se cere:

a) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel ca $f(x)$ să admită un minim egal cu $\frac{1}{5}$.

62 Ecuaţia $x^2 + px + 1 = 0$, $p \in \mathbb{R}$, are soluţiile $x_1 = \operatorname{tg}\alpha$, $x_2 = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in \in \mathbb{R}\setminus\left\{k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se scrie ecuaţia de gradul al doilea în y care are rădăcinile $y_1 = \sin 2a$, $y_2 = \cos 4a$.

b) Să se arate că înte x_1, x_2, y_1, y_2, există relaţia:

$$(1 + x_1)^2 + (1 + x_2)^2 = 8\frac{1 + y_1}{1 + y_2}.$$

63. Se consideră ecuaţia $mx^2 + mx - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}^*$. Se cere:

a) Să se arate că ecuaţia nu poate avea ambele rădăcini pozitive.

b) Să se determine m astfel încât ecuaţia să aibă ambele rădăcini mai mari ca -1.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât să existe relaţiile: $-3 < x_1 < -2$ şi $2 < x_2 < 3$.

64. Să se determine parametrul real m astfel încât:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 + (m+1)x + m + 2 = 0\} \cap [-1; 1] = \emptyset.$$

65. Să se determine parametrul real m astfel încât mulţimea:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx - 4 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2m = 0\}$$

să aibă două elemente.

66. Câte elemente are mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + m^2 = 0\}, \quad m \in \mathbb{R}?$$

67. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care expresia

$$E(x, y) = x^2 + 6y^2 - 2xy + 6x - 16y + 18$$

are valoarea minimă.

68. Să se demonstreze că: $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{x^2+2}{x^2+x+4}\right) \leq \min\limits_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{2x^2-x+2}{x^2-x+1}\right)$.

69. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2$ următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 9x^2 + y^2 + 3xy = 13 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 4x + y = 9 \\ x^2 - 4xy + 3y = -1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 - y^2 - 6y = -6 \end{cases}$.

70. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât sistemul

$$\begin{cases} (x+y)^2 = (x+1)(y-1) \\ x - y = m \end{cases}$$

să admită soluţii în $\mathbb{R}^2$.

71. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2$, sistemele simetrice :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 7 \\ 3x + 3y - 2x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$.

72. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2$, următoarele sisteme:

a) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2} \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{y^3} = 35 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} = 5 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} xy^2 + x^2y = 6 \\ x^2y^5 + x^5y^2 = 0 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5 \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155 \end{cases}$.

73. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2$, sistemele omogene:

a) $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 22 \\ 2x^2 + 3xy - y^2 = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy = 0 \\ 4x^2 - 5xy - y^2 = 1 \end{cases}$.

74. Să se rezolve în $\mathbb{R}^2$, următorul sistem:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}.$$

75. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_3} = \ldots = \dfrac{x_{n-1}}{x_n}, \\ x_1 = 8x_4, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 15 \end{cases}.$$

76. Să se rezolve următorul sistem în $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 2x_2 = x_1 + \dfrac{2}{x_1}, \\ 2x_3 = x_2 + \dfrac{2}{x_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_n = x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}} \\ 2x_1 = x_n + \dfrac{2}{x_n} \end{cases}.$$

77. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1, \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = -3 \\ x + z = -2, \\ xy + xz + yz = 2 \end{cases}$.

78. Să se determine numerele reale x, y, z care satisfac egalităţile:

$$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 = y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)^2 = z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{xyz}.$$

79. Fie $[AD]$ mediana unui triunghi oarecare ABC. Să se determine $M \in (AD)$ astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

80. Se dă un cerc de rază $R = 10$ m. Pe un diametru $[AB]$ al cercului se alege un punct M şi se construiesc cercurile de diametre $[AM]$ şi $[BM]$. Să se determine poziţia punctului M, astfel încât aria cuprinsă în cele două cercuri să fie maximă.

81. Să se determine pe un segment $[AB]$ de 20 cm un punct M astfel ca suma ariilor cercurilor cu diametrele $[BM]$ şi $[AM]$ să fie minimă.

82. Să se împrejmuiască un loc în formă de dreptunghi cu un gard a cărui lungime este de 120 m. Cât trebuie să fie laturile dreptunghiului pentru ca aria să fie maximă?

83. Din bucăţi de material triunghiulare, o croitoreasă vrea să execute feţe de masă dreptunghiulare. Cum trebuie croite feţele de masă astfel încât să se piardă cât mai puţin material?

84. Două maşini pot transporta o cantitate de materiale timp de 5 zile. Prima maşină merge 200km pe zi şi consumă 12 l de combustibil la suta de kilometri. A doua maşină merge 300 km pe zi şi consumă 18 l de combustibil la suta de kilometri. Câte zile trebuie să transporte materiale fiecare maşină astfel încât cantitatea de benzină consumată să fie minimă şi care este aceasta?

85. Fie triunghiul ABC în care se ştie $AB = 5$ cm, iar $BC + AC = 7$ cm. Să se afle înălţimea triunghiului, astfel ca aria să fie maximă.

86. Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \min_{t \le x}(t^2 + t - 2).$$

87. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} -x^2 + m + 1, & \text{dacă } x < 0 \\ x + 1, & \text{dacă } x \ge 0 \end{cases}$, unde m este parametru real. Să se determine valorile lui m pentru care funcţia este injectivă, surjectivă, respectiv inversabilă. În cazul în care este inversabilă, determinaţi inversa funcţiei.

88. Fie numerele a, b, c, a_1, b_1, c_1, astfel încât $a \neq 0$, $a_1 \neq 0$ şi $ac + a_1c_1 \ge 0$. Arătaţi că, dacă $\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c = 0\} \neq \emptyset$ şi $\{x \in \mathbb{R} \mid a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0\} \neq \emptyset$, atunci: $\{x \in \mathbb{R} \mid aa_1x^2 + bb_1x + cc_1 = 0\} \neq \emptyset$.

89. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) dacă rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ sunt reale, atunci $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, dacă şi numai dacă $1 + b + c > 0$, $1 - b + c > 0$ şi $|c| < 1$;

b) dacă rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ nu sunt reale, atunci $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, dacă şi numai dacă $|c| < 1$.

90. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este convexă $\Leftrightarrow a > 0$ şi este concvavă $\Leftrightarrow a < 0$.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ este concavă (convexă) dacă $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ şi $t_1, t_2 \geq 0$, cu $t_1 + t_2 = 1$, are loc

$$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) \quad (\text{respectiv} \quad \geq).$$

91. Fie I un interval şi o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$. Atunci funcţia f este convexă dacă şi numai dacă $\forall n \geq 2$, $x_i \in I$, $i = \overline{1,n}$, $t_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, cu $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$, are loc:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n).$$

92. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + c$. Să se demonstreze că, dacă $b + c \neq -1$, atunci are loc relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{-1}{b+c+1}\left[S_{n+2} + (b+1)S_{n+1} + b + 2c\right],$$

unde $S_n = x_1^n + x_2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$.

93. Fie funcţia $f_A : \mathbb{R} \to \{0; 1\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, definită prin $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ (numită funcţia caracteristică a mulţimii A).

Să se demonstreze proprietăţile:

a) $f_{\mathbb{R}}(x) = 1$ şi $f_{\emptyset}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

c) $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

d) $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

e) $f_{CA}(x) = 1 - f_A(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

f) $f_{A-B}(x) = f_A(x)\left[1 - f_B(x)\right]$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

g) $f_{A\Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

94. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Să se demonstreze că orice funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, are cel puţin un punct fix (adică există $x_0 \in \mathbb{R}$, astfel încât $g(x_0) = x_0$).

95. Să se arate că dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ia cinci valori întregi primepentru cinci valori întregi ale lui x, atunci f nu se poate descompune în factori cu coeficienţi întregi.

96. Fie $A_1 = \{a \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ şi
$A_2 = \{a \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + a > 0,\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
Stabiliţi dacă:

1) a) $A_1 = (-\infty; 2]$; b) $A_1 = (2; 3)$; c) $A_1 = (4; \infty)$; d) $A_1 = [-4; 3]$; e) $A_1 = (1; 8)$.

2) a) $A_2 = \emptyset$; b) $A_2 = (-\infty; 5)$; c) $A_2 = (-3; 6)$; d) $A_2 = (6; \infty)$; e) $A_2 = \mathbb{R}$.

97. Se consideră sistemul cu necunoscutele x, y şi parametrul real m:

$$\begin{cases} m(2x - y) + 2(x - y) = 3 \\ (m+1)x + 3(m+2)y = 33 \end{cases}.$$

1) Sistemul este compatibil şi determinat pentru:

a) $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$; b) $m \in \mathbb{R}\setminus\{0;-2\}$; c) $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1;-2\}$;

d) $m \in \mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$; e) $m \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

2) Soluţiile x şi y sunt întregi pentru:

a) $m \in \{-3;2;4\}$; b) $m \in \{-3;1\}$; c) $m \in \{-1;2;3\}$;

d) $m \in \{-3;4;7\}$; e) $m \in \{-1;1;7\}$.

3) x şi y fiind soluţiile sistemului, raportul $\dfrac{3x}{2y}$ este întreg pentru:

a) $m \in \{-2;0\}$; b) $m \in \{0;-1\}$; c) $m \in \{0\}$;

d) $m \in \{-1;0;3\}$; e) $m \in \{-2;3\}$.

98. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \max(x^2 + ax + b, x^2 + bx + a)$, cu $a > b$. Să se determine parametri reali a şi b ştiind că $f(-1) = 4$, $f(2) = 9$.

99. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile: $\alpha f(2-x) + \beta f(x+1) = m|x-2| + 3x$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $f(0) = -2$, $f(3) = 3$, $m \in \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$, f este bijectivă. Atunci:

1) a) $\alpha = \dfrac{9m+3}{3}$, $\beta = \dfrac{6m+12}{5}$; b) $\alpha = \dfrac{9m+3}{10}$, $\beta = \dfrac{6m+12}{10}$;

c) $\alpha = \dfrac{m+1}{10}$, $\beta = \dfrac{m+2}{10}$; d) $\alpha = \dfrac{m}{2}$; $\beta = \dfrac{m-1}{2}$;

e) nici una dintre variantele a), b), c), d) nu este adevărată.

2) a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $m = 0$; d) $m = -1$; e) $m = -2$.

100. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to [0,1]$ ce verifică relaţiile:

$f^2(x) + f^2(x+2) + f^2(x+3) + f^2(x+5) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
$g^2(x) + g^2(x+2) + g^2(x+6) + g^2(x+10) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
Să se arate că funcţiile f, g sunt periodice şi să se determine perioadele lor.

101. Fie familiile de funcţii $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 1.$$

a) Să se afle locul geometric al vârfurilor parabolelor asociate funcţiilor $f_m(x)$.

b) Să se stabilească porţiunea din locul geometric determinat care, cuprinde vârfurile parabolelor cu ramurile în sus.

102. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |2-x| + 3$, $g(x) = |x-2| - 3$. Să se determine $f \circ g$ şi $g \circ f$.

103. Să se determine $\operatorname{Im} f$ pentru următoarele funcţii:

a) $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1}$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$.

GEOMETRIE ŞI TRIGONOMETRIE

Capitolul I. PARALELISM ŞI CALCUL VECTORIAL

1. Fie punctele A, B pe o axă d, astfel încât $|\overline{AB}| = 10$.
a) Determinaţi punctul $M \in d$ cu proprietatea: $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 0$.
b) Determinaţi punctul $N \in d$ cu proprietatea: $2\overline{NA} - 3\overline{MB} = 0$.
c) Determinaţi punctul $P \in d$ cu proprietatea: $4PA^2 - 9PB^2 = 0$.

2. Fie trapezul $ABCD$ cu $(AB)||(CD)$, M mijlocul lui (AD) şi N mijlocul lui (BC).
a) Arătaţi că dreapta MN este paralelă cu dreptele AB şi CD.
b) Arătaţi că punctele M, N şi mijloacele segmentelor $[BD]$ şi $[AC]$ sunt coliniare.

3. (Teorema lui Menelaus) Fie un triunghi ABC şi trei puncte A_1, B_1, C_1, respectiv pe dreptele BC, CA, AB. Fie $x_B = \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$, $x_C = \dfrac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$, $x_A = \dfrac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$, abscisele punctelor B, C, A respectiv în raport cu reperele (A_1C), (B_1A), (C_1B) ale dreptelor BC, CA, AB. Arătaţi că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare, dacă şi numai dacă $x_B \cdot x_C \cdot x_A = 1$. Ce devine acest enunţ dacă pe dreptele BC, CA, AB. se aleg respectiv reperele (A_1B), (B_1C), (C_1A)?

4. (Teorema lui Ceva) Cu aceleaşi ipoteze şi notaţii ca la teorema lui Menelaus, arătaţi că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt paralele sau concurente, dacă şi numai dacă $x_B \cdot x_C \cdot x_A = -1$.

5. Arătaţi că înălţimile unui triunghi sunt concurente.

6. Fie G punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ABC. Să se arate că:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

7. Fie triunghiul ABC şi AM o mediană a triunghiului, M mijlocul segmentului (BC). Să se arate că:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

8. Fie A, B, C, D patru puncte distincte dintr-un plan. Arătaţi că:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0},\ \ \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$

9. În trapezul $ABCD$ cu $(BC)||(AD)$, fie M mijlocul lui $[DC]$ şi N mijlocul lui $[AB]$. Arătaţi că $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. Deduceţi că dreapta MN este paralelă cu (BC) şi $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

10. Fie triunghiul ABC, definit prin vectorii $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$ şi medianele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$. Să se arate că:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}.$$

11. a) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ pot forma un triunghi dacă

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}.$$

b) Arătaţi că vectorii $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ pot forma un triunghi (unde $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ sunt bisectoarele triunghiului ABC) dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

12. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare şi E, F mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Să se demonstreze că

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

13. Se dă triunghiul ABC, G centrul de greutate al triunghiului şi m un punct în plan. Să se arate că:

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).$$

14. Fie A_1, B_1, C_1 respectiv mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC. Să se demonstreze că pentru orice punct M din plan:

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

15. Fie patulaterul convex $ABCD$, iar O_1, O_2 respctiv mijloacele diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$. Să se arate că, dacă $4\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$, atunci $ABCD$ este paralelogram.

16. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri din acelaşi plan, de centre de greutate G, respectiv G'. Arătaţi că:

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Cele două triunghiuri au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}.$$

17. Fie A, B două puncte distincte din planul $\mathcal{P}$.

a) Dacă M este un punct arbitrar din $\mathcal{P}$, atunci există un unic punct $M' \in \mathcal{P}$, astfel încât $\overrightarrow{M'A} + 2\overrightarrow{M'B} + 3\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{0}$ şi avem $\overrightarrow{M'A} = \left(-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{AB} + \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AM}$.

b) Arătaţi că există un unic punct $G \in \mathcal{P}$, astfel încât $G' = G$ şi acesta verifică $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

c) Arătaţi că $\overrightarrow{GM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$, oricare ar fi $M \in \mathcal{P}$.

18. Fie triunghiul ABC. Arătaţi că oricare ar fi M un punct în planul triunghiului, vectorul $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ are o valoare constantă.

19. Fie triunghiul ABC.

a) Construiţi punctele M, N, P, astfel încât :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

b) Exprimaţi vectorii $\overrightarrow{NM}$ şi $\overrightarrow{PM}$ în funcţie de $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

c) Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare şi că N este mijlocul segmentului $[MP]$.

d) Construiţi punctele Q şi R, astfel încât $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ şi arătaţi că $(MN)||(QR)$.

20. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $A_1B_1C_1D_1$ şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor (AA_1) (BB_1), (CC_1), respectiv (DD_1). Demonstraţi că $MNPQ$ este paralelogram.

21. Fie A, B, C trei puncte coliniare, k un număr real astfel încât $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ şi M un punct oarecare. Demonstraţi că:

$$\overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MA}.$$

22. Fie $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un reper cartezian în planul $\mathcal{P}$. Figuraţi punctele A, B, C, D, E, F, astfel încât: $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\overrightarrow{OC} = -\vec{i} - 2\vec{j}$; $\overrightarrow{OD} = -2\vec{j}$; $\overrightarrow{OE} = 3\vec{i} - \vec{j}$; $\overrightarrow{OF} = 4\vec{i}$.

23. Fie reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ în planul $\mathcal{P}$ şi vectorul $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Construiţi punctele A şi B în planul $\mathcal{P}$, astfel încât $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - \vec{j}$ şi punctele A_1, B_1, astfel încât $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \vec{v}$.

24. Fie paralelogramul $ABCD$. Determinaţi coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ în baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ şi în baza $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

25. Fie reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ într-un plan $\mathcal{P}$ şi punctele $A(2;-1)$, $B(1;6)$, $C(6;2)$. Determinaţi mijlocul lui $[AC]$ şi apoi coordonatele punctului D cu proprietatea că $ABCD$ este paralelogram.

26. În planul $\mathcal{P}$ înzestrat cu reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se dau punctele $A(1;1)$, $B(2;-3)$, $C(3;-2)$. Calculaţi coordonatele mijloacelor M, N, P, Q respectiv ale segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ şi arătaţi că $MNPQ$ este paralelogram.

27. Fie C_1 un punct pe latura $[AB]$ a triunghiului ABC, B_1 un punct pe latura $[AC]$ şi A_1 un punct pe dreapta BC, $A_1 \notin [BC]$. Fie x_A, x_B, x_C abscisele puctelor A, B, C, respectiv în raport cu reperele $(C_1, \vec{u})$, $(A_1, \vec{v})$, $(B_1, \vec{w})$ ale dreptelor AB, BC, CA, unde $\vec{u} = \overrightarrow{C_1B}$; $\vec{v} = \overrightarrow{A_1C}$; $\vec{w} = \overrightarrow{B_1A}$;

a) Arătaţi că $(1-x_A)\vec{u} + (1-x_B)\vec{v} + (1-x_C)\vec{w} = \vec{0}$.

b) Vectorii $\overrightarrow{A_1B_1}$ şi $\overrightarrow{A_1C_1}$ sunt coliniari, dacă şi numai dacă $x_Ax_Bx_C = 1$ (teorema lui Menelaus).

28. Se consideră un punct C_1 pe latura AB a triunghiului ABC. Prin punctul A se duce paralela la CC_1 care intersectează BC în A_1, iar prin punctul B se duce paralela la CC_1 care intersectează AC în B_1.

Să se arate că $\dfrac{1}{AA_1} + \dfrac{1}{BB_1} = \dfrac{1}{CC_1}$.

29. Se consideră treapezul $ABCD$. Paralela la bazele BC şi AD ale trapezului, ce trece prin punctul de intersecţie al diagonalelor, intersectează laturile neparalele în E şi F. Să se arate că $EF = \dfrac{2}{\dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AD}}$.

30. Să se calculeze modulul vectorilor $\vec{u} = -3\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$. Să se verifice că cei doi vectori sunt paraleli.

31. Se dau vectorii: $\vec{v_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v_2} = -3\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{v_3} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se calculeze: $\vec{s} = \vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}$.

32. a) Se dau punctele $A(2;-1)$; $B(-2;3)$, $C(-3;-2)$. Să se determine vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Să se afle coordonatele punctului D pentru care $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BD}$..

33. Să se verifice dacă punctele $A(2;-6)$; $B(4;-2)$, $C(5;0)$ sunt coliniare.

34. Se dau punctele $A(-2;1)$; $B(a;2)$, $C(1;1)$. Pentru ce valori ale lui a triunghiul este isoscel?

35. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(x;3)$, $B(2;6)$, $C(5;4)$ să fie vârfurile unui triunghi dreptunghic. Să se calculeze aria acestui triunghi.

36. Fie dreptele $d_1 : 4x - 3y = 10$, $d_2 : x + y + 1 = 0$, $d_3 : x - 6y + 8 = 0$.

a) Determinaţi cei doi vectori directori ai dreptei d_1 care au lungimea 10.

b) Determinaţi trei vectori directori $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ ai dreptelor d_1, d_2, d_3, astfel încât $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$.

c) Fie punctele $\{A\} = d_1 \cap d_2$, $\{B\} = d_1 \cap d_3$, $\{C\} = d_2 \cap d_3$ şi $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ trei vectori directori ai dreptelor d_1, d_2, d_3, astfel încât $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} = \vec{0}$. Fie punctele M, N, astfel încât $\overrightarrow{OM} = \vec{v_1}$ şi $\overrightarrow{MN} = \vec{v_2}$. Demonstraţi că, dacă $|\vec{v_1}| \neq 5$, atunci dreptele AM, BO, CN sunt concurente. Ce se întâmplă dacă $|\vec{v_1}| = 5$?

37. Fie $a > 0$, dreptele $d_1 : \ y = ax$, $d_2 : \ y = -ax$ şi punctele $A \in d_1$, $B \in d_2$, având abscisele $p, q > 0$.

a) Precizaţi câte un vector director al dreptelor d_1, d_2 şi dovediţi că Ox este bisectoarea unghiului AOB.

b) Fie C intersecţia dreptei AB cu axa Ox. Demonstraţi că $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{CA}{CB}$ (teorema bisectoarei).

38. Demonstraţi că dacă ABC este un triunghi oarecare şi $M \in (BC)$, atunci:

$AB^2 \cdot CM + AC^2 \cdot BM = AM^2 \cdot BC + BM \cdot CM \cdot BC$ (teorema lui Stewart).

39. Fie punctul $A(10;7)$ şi dreapta $(d) : \ x - y + 2 = 0$. Determinaţi punctul $M \in d$ pentru care suma $OM + MA$ este minimă.

40. În raport cu reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se consideră punctele $A(-3;-2)$, $B(3;-3)$, $C(-3;2)$.

a) Să se determine perimetrul triunghiului ABC.

b) Aflaţi ecuaţia carteziană a dreptei AB.

c) Scrieţi ecuaţiile medianelor triunghiului ABC.

d) Scrieţi ecuaţiile dreptelor suport înălţimilor triunghiului ABC.

e) Scrieţi ecuaţiile mediatoarelor triunghiului ABC.

41. Fie triunghiul ABC cu $A(3,2)$, $B(5;4)$. Dacă punctul $G(3;4)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC să se determine coordonatele vârfului C. Să se determine coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

42. Se consideră două vârfuri consecutive $A(-3;5)$, $B(1;7)$ ale paralelogramului $ABCD$ şi punctul de intersecţie al diagonalelor $Q(1,1)$. Să se determine celelalte două vârfuri. Să se determine ecuaţiile dreptelor suport laturilor paralelogramului şi vectorii lor directori în raport cu reperul cartezian $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

43. Fie dreapta variabilă $d_\lambda : \ x - y + 1 + \lambda(2x - y) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Să se determine paralmetrul real λ pentru care dreapta d_λ:

a) trece prin punctul $A(-1;1)$; b) conţine originea reperului;

c) este paralelă cu dreapta $y = x$; d) este paralelă cu axa Ox;

e) este paralelă cu axa Oy; f) coincide cu dreapta de ecuaţie $3x - 2y + 1 = 0$.

44. Punctul $A(2;-5)$ este vârful unui pătrat care are o latură situată pe dreapta $(d):\ x-2y-7=0$. Să se determine:

a) aria pătratului; b) coordonatele vârfurilor pătratului.

45. În sistemul cartezian de coordonate (xOy) se consideră punctele $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ şi $C(2;0)$.

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

b) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

c) Să se determine distanţa de la punctul C la dreapta AB.

46. În triunghiul ABC se consideră punctele $C_1 \in (AB)$, $T \in (AB)$, $B_1 \in (AC)$, $S \in (AC)$ şi $\{M\} = BB_1 \cap CC_1$. Notăm $\dfrac{C_1A}{C_1B} = p$, $\dfrac{B_1A}{B_1C} = q$, $\dfrac{TA}{TB} = \alpha$, $\dfrac{SA}{SC} = \beta$. Să se arate că $M \in TS \Leftrightarrow \dfrac{p}{\alpha} + \dfrac{q}{\beta} = 1$.

47. Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului înscris şi M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$;

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$.

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ şi $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ şi $\vec{u}$ sunt coliniari şi că: $3|\vec{v}| = (a+b+c)|\vec{u}|$.

48. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ şi se notează $\dfrac{MA}{AB} = \alpha$, $\dfrac{NB}{BC} = \beta$, $\dfrac{PC}{CA} = \gamma$.

a) Să se demonstreze că centrul de greutate al triunghiului MNP aparţine medianei din A a triunghiului ABC, dacă şi numai dacă $2\beta = \alpha + \gamma$.

b) Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi MNP coincid dacă şi numai dacă $\alpha = \beta = \gamma$.

49. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1 şi $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = 7$, $\dfrac{CN}{NB} = 2$. Notăm cu P intersecţia dreptelor CM şi DN.

a) Să se arate că $13\overrightarrow{AP} = 12\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AD}$. b) Să se calculeze AP.

50. Se consideră rombul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ şi $P \in (CD)$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparţine dreptei AC dacă şi numai dacă $AM + DP = BN$.

Capitolul II. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

Translaţie

1. Prin fiecare punct M al unui cerc O se duce câte un segment MN de lungime constantă, într-o direcţie dată şi în acelaşi sens.

Să se găsească locul geometric al punctului N.

2. Aceeaşi problemă ca mai sus în care se înlocuieşte cercul cu o curbă oarecare.

3. Să se construiască un paralelogram cunoscând o latură şi diagonalele.

4. Să se aşeze un segment de mărime, direcţie şi sens date cu extremităţile A, B pe un cerc şi o dreaptă date.

5. Să se construiască un patrulater cunoscând două laturi opuse şi unghiurile.

6. Să se construiască un trapez, cunoscând cele patru laturi.

7. Să se ducă o secantă paralelă cu o dreaptă dată, pe care două cercuri date să determine coarde egale.

8. Să se ducă o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată, sprijinindu-se pe două cercuri date, aşa încât lungimea segmentului determinat de cele două cercuri să fie o lungime dată l. Discuţie.

9. Să se demonstreze că dacă prin vârfurile A, B, C ale unui triunghi se duc segmente paralele $AA' = BB' = CC'$ în acelaşi sens şi dacă H şi H' sunt punctele de întâlnire ale înălţimilor triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, atunci HH' este egal şi paralel cu AA'.

Rotaţie

10. Două segmente egale AB şi $A'B'$ sunt paralele însă sensul de la A la B este contrar sensului de la A' la B'. Să se găsească centrul de rotaţie care aduce pe A în A' şi pe B în B'.

11. Să se găsească locul geometric al vârfului C al unui triunghi isoscel ABC ($AB = AC$), cunoscând faptul că vârful A este fix, iar B descrie un cerc.

12. Să se construiască un triunghi ehilateral care are vârfurile pe trei drepte paralele.

13. Se dă un punct fix A şi o dreapă xy. Se uneşte A cu un punct B al dreptei xy şi se construieşte triunghiul echilateral ABC. Să se afle locul geometric al lui C când B se mişcă pe xy. Să se studieze şi cazul când dreapta xy se înlocuieşte cu un cerc.

14. Se roteşte un pătrat $ABCD$ în jurul vârfului A şi fie $AB'C'D'$ noua poziţie, iar α unghiul de rotaţie. Se cere:

a) locul geometric al intersecţiei dreptelor BB' şi DD' când α variază;

b) Să se arate că dreptele BB', CC' şi DD' sunt concurente.

15. Într-un cerc dat să se înscrie un triunghi ABC cunoscând mijloacele α, β, γ ale arcelor BC, CA, AB.

16. Se dau două cercuri şi două puncte A şi B pe unul din cercuri. Să se găsească pe cercul ce trece prin A şi B un punct P astfel ca, M şi N fiind intersecţiile lui PA şi PB cu celălalt cerc, MN să aibă o lungime dată.

17. Să se construiască un triunghi echilateral cu vârfurile sale pe tei cercuri concentrice date.

18. Pe laturile unui paralelogram $ABCD$ se construiesc pătratele $BCIL$, $CDGH$, $ADFE$ şi $ABMN$, având ca centre respectiv punctele O_1, O_2, O_3, O_4. Să se arate că fugura $O_1O_2O_3O_4$ este un pătrat.

19. Să se demonstreze că dacă în planul unui triunghi echilateral ABC se ia un punct I oarecare, cu cele trei segmente $[IA]$, $[IB]$, $[IC]$ se poate totdeauna forma un triunghi (D.Pompei).

20. Pe laturile Ox şi Oy ale unui unghi se iau segmentele OA şi OB. Să se determine două drepte perpendiculare (D_1) şi (D_2), trecând prin O, astfel ca proiecţiile lui OA pe

(D_1) şi a lui OB pe (D_2) să fie egale.

21. Se dă un cerc cu centrul O şi un punct A fix pe cerc. M fiind un punct variabil pe cerc se duce perpendiculara din O pe AM şi se ia pe această perpendiculară segmentuul $ON = AM$. Se cere locul geometric al punctului N.

Simetrie

22. Se dau trei puncte necoliniare A, B, C şi fie M, N, P simetricele lor faţă de un punct O. Câte paralelograme se pot forma cu punctele A, B, C, M, N, P?

23. Prin punctul de intersecţie al diagonalelor unui paralelogram se duc două drepte oarecare care se intersectează cu laturile AB şi CD în M, N, respectiv P, Q. Să se arate că $MNPQ$ este paralelogram.

24. Să se găsească un segment de dreaptă cu extremităţile pe două cercuri date şi cu mijlocul într-un punct dat

25. Să se construiască un triunghi ABC în care se dau fixe vârful A şi punctul de intersecţie al medianelor, vârful B să fie pe un cerc dat de centru O, iar C pe o dreaptă (D) dată.

26. Se dă un punct fix P, două drepte paralele (D_1) şi (D_2) şi o dreaptă oarecare (D). Să se ducă prin P o dreaptă care intersectează pe (D_1), (D_2) şi (D) în A, B şi C, astfel ca $AB = PC$.

27. Fie A unul din punctele de intersecţie a două cercuri $\mathcal{C}(O, R)$ şi $\mathcal{C}'(O', R')$. Să se ducă prin A o dreaptă care să intersecteze cele două cercuri în B şi respectiv B', astfel încât $AB = AB'$.

28. Să se arate că simetricele ortocentrului unui triunghi faţă de laturile triunghiului se găsesc pe cercul circumscris triunghiului.

29. Se dau trei drepte (D_1), (D_2) şi (D_3). Să se găsească pe (D_1) un punct aşa încât simetricul său faţă de (D_2) să aparţină dreptei (D_3).

30. Se dau trei drepte Ox, Oy şi (D). Să se găsească pe Ox un punct A şi pe Oy un punct B, astfel ca dreapta (D) să fie mediatoarea segmentului AB.

31. Pe o dreaptă dată (D), să se găsească un punct P astfel ca distanţa PA la o altă dreaptă dată (D') să fie egală cu distanţa lui P la un punct fix O al dreptei (D).

32. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, în care AB este latura perpendiculară pe baze. Paralela dusă la bază prin intersecţia I a diagonalelor trapezului întâlneşte latura AB în punctul E. Să se demonstreze că EI este bisectoarea unghiului CED.

33. Se dă o dreaptă PQ şi două puncte A şi B de aceeaşi parte a acestei drepte. Să se găsească pe PQ un punct I astfel ca $BIQ = 2AIP$.

34. Fie A_1, B_1, C_1 simetricele unui punct P din planul unui triunghi ABC în raport cu mijloacele laturilor BC, CA, AB. Se ştie că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente într-un punct I.

a) Să se afle locul geometric descris de punctul I când P descrie cercul circumscris triunghiului ABC.

b) Cum trebuie să varieze P pentru ca I să descrie cercul înscris triunghiului ABC?

Omotetie

35. Fie două cercuri $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ de centre distincte şi de raze R, R', cu $R \neq R'$. Determinaţi omotetiile care transformă pe $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}'$.

36. Fie trei segmente MN, PQ şi RS paralele şi de lungimi diferite. Fie X, Y, Z respectiv intersecţiile perechilor de drepte (PM) şi (QN), (MR) şi (NS), (PR) şi (QS). Arătaţi că punctele X, Y, Z sunt coliniare.

37. Să se construiască un pătrat înscris într-un triunghi ABC, având două vârfuri pe (BC) iar celelalte două vârfuri pe celelalte două laturi ale triunghiului.

38. Într-un triunghi ABC să se înscrie un triunghi DEF, ale cărei laturi să fie paralele cu trei drepte date d_1, d_2, d_3.

39. Vârfurile B şi C ale triunghiului ABC sunt fixe, iar A este mobil. Aă se afle locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC când:

i) punctul A descrie o dreaptă d.

ii) punctul A descrie un cerc $\mathcal{C}(O, R)$.

40. Fie cercul $\mathcal{C}(O, R)$ şi A un punct fix exterior cercului. M fiind un punct mobil pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, să se afle locul geometric al intersecţiei dreptei AM cu bisectoarea unghiului AOM.

41. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Să se demonstreze că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA şi DAB se află pe un cerc.

42. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, G centrul de greutate şi H ortocentrul triunghiului. Punctele H, G şi O se găsesc pe aceeaşi dreaptă (*dreapta lui Euler*) şi $HG = 2GO$.

43. *Teorema lui Menelaus.* Fie un triunghi ABC şi punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci există relaţia:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

44. Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor ca unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului se găsesc pe acelaşi cerc (*cercul lui Euler*).

Transformări geometrice

45. Să se demonstreze că două figuri simetrice în raport cu un punct se pot suprapune printr-o rotaţie.

46. Să se demonstreze că două figuri simetrice ale unei figuri date, în raport cu două centre de simetrie se pot suprapune printr-o translaţie.

47. Să se demonstreze că două simetrii succesive în raport cu două drepte paralele, se pot înlocui printr-o translaţie.

48. Să se demonstreze că două simetrii succesive în raport cu două drepte concurente, se pot înlocui printr-o rotaţie.

49. Două triunghiuri egale, dar orientate în sens contrar, pot fi aduse să coincidă printr-o translaţie, urmată de o simetrie? În câte moduri?

50. Fie un segment de dreaptă invariabil, $A'B'$ o nouă poziţie a acestui segment. Să se arate că printr-o translaţie de-a lungul direcţiei AB şi prin două rotaţii efectuate, respectiv în jurul punctelor A şi B, se poate duce segmentul AB în poziţia $A'B'$.

Capitolul III. FUNCŢII TRIGONOMETRICE

1. Simplificaţi expresia:

$$E(a,b) = \cos^2 a + \cos^2(a+b) - 2\cos a \cos b \cos(a+b).$$

2. Să se demonstreze că pentru valorile admisibile ale lui a avem:

$$\frac{\cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a} = \mathrm{tg} a.$$

3. Să se demonstreze că pentru valorile admisibile ale lui a avem:

$$\frac{\sin^2 a - 4\sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 a - 4\cos^2 \frac{a}{2}} = \mathrm{tg}^2 \frac{a}{2}.$$

4. Se dau expresiile:

$$E = e\cos^2 a + f \sin a \cos a + g \sin^2 a$$
$$F = g \sin 2a + f \cos 2a - e \sin 2a$$
$$G = e \sin^2 a - f \sin a \cos a + g \cos^2 a.$$

Calculaţi: $F^2 - 4EG$.

5. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $(\sin^6 x + \cos^6 x - 1)^6 + 27 \sin^6 x \cos^6 x = 0$;

b) $2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 = \sin^8 x + \cos^8 x + 1$.

6. Fie:

$$a = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos z;$$
$$a' = \cos x \sin y - \sin x \cos y \cos z;$$
$$a'' = \sin x \sin z.$$

Calculaţi: $a^2 + a'^2 + a''^2$.

7. Arătaţi că:

$$\left(1 - \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x).$$

8. Arătaţi că valoarea expresiei:

$$E = 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

nu depinde de x. Calculaţi valoarea acestei expresii.

9. Să se verifice pentru valorile admisibile ale lui a identitatea:

$$\mathrm{tg}\frac{a}{2} - \cos a - \sin a = -2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \mathrm{ctg} a \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

10. Arătaţi că valoarea expresiei:

$$\sin^2 a + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + a\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - a\right)$$

nu depinde de x. Determinaţi această valoare.

11. Să se arate că avem:

$$\cos 2x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \cos 2x \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x};$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{3\pi}{4}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12. Să se demonstreze că:

$$\sin^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{3}{64}\sin 2x + \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{64}\sin 6x - \frac{1}{128}\sin 8x.$$

13. Reduceţi expresia de mai jos:

$$E = \cos^3\frac{x}{3} + \cos^3\frac{x + 2\pi}{3} + \cos^3\frac{x + 4\pi}{3}.$$

14. Simplificaţi expresia de mai jos:

$$\left(\sqrt[3]{2\sin^3 x + 3\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2\cos 3x + 3\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)}\right)^2.$$

15. Să se arate că expresia:

$$E(x) = \left(1 + \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{4} + x}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{4} - x}{2}\right); \quad x \in \left[0; \frac{3\pi}{4}\right),$$

nu depinde de x. Calculaţi valoarea ei.

16. Să se arate că expresia:

$$E(x) = \sin^2 x + 2\cos a \cos x \cos(a + x) - \cos^2(a + x)$$

este independentă de x. Calculaţi această expresie.

17. Să se arate că expresia:

$$E(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - cos x)}{\sin x \cos x}; \quad x \neq \frac{k\pi}{2},$$

nu depinde de x. Calculaţi valoarea aceastei expresii.

18. Să se arate că expresia:

$$E(x) = \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^4\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

este constantă. Calculaţi valoarea ei.

19. Să se arate că expresia:

$$E(x)=\sin^3 x+\sin^3\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)+\sin^3\left(x+\frac{4\pi}{5}\right)+\sin^3\left(x+\frac{6\pi}{5}\right)+\sin^3\left(x+\frac{8\pi}{5}\right)$$

este constantă. Calculaţi valoarea ei.

20. Să se determine constantele a, b, c, astfel încât:

$$E(x)=\sin^8 x+\cos^8 x+a\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)+b\left(\sin^{12} x+\cos^{12} x\right)+c\left(\sin^{14} x+\cos^{14} x\right)$$

să nu depindă de x.

21. Să se simplifice expresiile:

a) $S_1=\sin\frac{\pi}{14}+\cos\frac{2\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}$; b) $S_2=\mathrm{tg}20^0+\mathrm{tg}40^0+\mathrm{tg}80^0-\mathrm{tg}200^0$;

c) $S_3=\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14}-\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}$.

22. Reduceţi expresiile:

a) $P_1=16\sin\frac{\pi}{24}\cdot\sin\frac{5\pi}{24}\cdot\sin\frac{7\pi}{24}\cdot\frac{11\pi}{24}$; b) $P_2=\sin\frac{\pi}{14}\cdot\cos\frac{2\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}$.

23. Aduceţi la forma cea mai simplă:

a) $T_1=\mathrm{tg}10^0+\mathrm{ctg}20^0-\mathrm{ctg}40^0$; b) $T_2=\frac{1}{\sin 10^0}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$;

c) $T_3=\prod_{i=1}^{80}\mathrm{tg}i^0$; d) $T_4=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{4}+\mathrm{arctg}\frac{2}{9}$.

24. Calculaţi valoarea expresiei:

$$f(x)=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^4 x+\cos^4 x},$$

pentru $\mathrm{tg}x=2$.

25. Pentu valorile admisibile ale argumentului, să se restrângă expresiile:

a) $E_1=\sec^2 x-\mathrm{tg}^2x-\sin^2 x$.

b) $E_2(x)=\dfrac{1-\sin x\cdot\cos x}{\cos x\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)}\cdot\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$;

c) $E_3=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

26. Se dă $\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x=m$. Să se calculeze în funcţie de m expresiile:

a) $E_1=\mathrm{tg}^2x+\mathrm{ctg}^2x$; b) $E_2=\mathrm{tg}^3x+\mathrm{ctg}^3x$;

c) $E_3=\mathrm{tg}^2x+\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}+\mathrm{ctg}^2x$.

27. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x)=\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}-\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\frac{1+\cos x}{1+\cos x}}\right).$$

28. Ştiind că: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$; $\sec\beta = \sqrt{\frac{a+b}{a}}$, să se găsească relaţia între α şi β.

29. Să se calculeze:

a) $A_1 = \operatorname{ctg}\left(\arctan 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; b) $A_2 = \operatorname{tg}\left(\arctan 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

30. Demonstraţi egalitatea:

$$\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}, \quad \text{unde } x < 0,\ a < 0, \quad \text{sau} \quad x > 0,\ a > 0.$$

31. Se dau numerele $x_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{7}$; $x_2 = 4\sin^2\frac{2\pi}{7}$; $x_3 = 4\sin^2\frac{3\pi}{7}$.
Calculaţi valorile expresiilor:

$$X_1 = x_1 + x_2 + x_3;\quad X_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1;\quad X_3 = x_1x_2x_3.$$

32. Simplificaţi expresiile:
a) $T_1 = \operatorname{tg}^2 20^0 + \operatorname{tg}^2 40^0 + \operatorname{tg}^2 80^0$;

b) $T_2 = \operatorname{tg}^2 20^0 \cdot \operatorname{tg}^2 40^0 + \operatorname{tg}^2 40^0 \cdot \operatorname{tg}^2 80^0 + \operatorname{tg}^2 80^0 \cdot \operatorname{tg}^2 20^0$;

c) $T_3 = \operatorname{tg}^2 20^0 \cdot \operatorname{tg}^2 40^0 \cdot \operatorname{tg}^2 80^0$.

33. Calculaţi expresiile:
a) $T_1 = \operatorname{tg}^4 36^0 + \operatorname{tg}^4 72^0$; b) $T_2 = \operatorname{tg}^4 20^0 + \operatorname{tg}^4 40^0 + \operatorname{tg}^4 80^0$.

34. Să se calculeze:
a) $S_1 = \sin^4\frac{\pi}{32} + \sin^4\frac{3\pi}{32} + \ldots + \sin^4\frac{15\pi}{32}$;

b) $S_2 = \sin^6\frac{\pi}{12} + \sin^6\frac{5\pi}{12} + \sin^6\frac{7\pi}{12} + \sin^6\frac{11\pi}{12}$.

35. Calculaţi produsele:
a) $P_1 = \operatorname{tg}20^0 \cdot \operatorname{tg}40^0 \cdot \operatorname{tg}60^0 \cdot \operatorname{tg}80^0$.
b) $P_2 = \operatorname{ctg}5^0 \cdot \operatorname{tg}25^0 \cdot \operatorname{tg}35^0 \cdot \operatorname{ctg}55^0$; c) $P_3 = \operatorname{tg}10^0 \cdot \operatorname{tg}50^0 \cdot \operatorname{tg}70^0$.

36. Demonstraţi că:

$$\prod_{k=1}^{89} \sin k^0 = \cos 45^0 \prod_{k=1}^{44} (\cos^2 k^0 - \cos^2 45^0).$$

37. Pentru $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, calculaţi sumele S_k şi suma S:

$$S_k = \operatorname{tg}^k 10^0 + \operatorname{tg}^k 50^0 + \operatorname{tg}^k 70^0;$$
$$S = \sum_{k=1}^{6} S_k.$$

38. Să se pună sub formă de produs expresia:

$$E(x) = 2 - \left(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x\right).$$

39. Arătaţi că valoarea expresiilor următoare nu depinde de nici unul din parametrii a, b, c şi calculaţi aceste expresii:

a) $E_1 = \dfrac{\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)}{4 \cdot \sin \dfrac{a+b}{2} \cdot \sin \dfrac{b+c}{2} \cdot \sin \dfrac{c+a}{2}}$;

b) $E_2 = \dfrac{\sin a + \sin b + \sin c}{4 \cdot \sin \dfrac{a}{2} \cdot \sin \dfrac{b}{2} \cdot \sin \dfrac{c}{2}}$; $a + b + c = \pi$.

40. Transformaţi expresia în produs:

$$E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - 1.$$

41. Calculaţi expresiile:

a) $E_1(x) = \sin\left(x + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(x + \dfrac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(x + \dfrac{2n\pi}{n}\right)$;

b) $E_2 = \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(x + \dfrac{2n\pi}{n}\right)$.

42. Calculaţi următoarea sumă:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k \cdot \pi}{n}.$$

43. Calculaţi sumele:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2(k \cdot a); \quad \sum_{k=1}^{n} \sin^2(k \cdot a).$$

44. a) Calculaţi produsul:

$$p = \cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \ldots \cdot \cos 2^n a.$$

unde $a \neq \dfrac{k\pi}{2^j}$, pentru $j = 1, 2, \ldots, n$ şi k întreg.

b) Care este valoarea produsului p pentru $a = \dfrac{\pi}{2^{n+1}+1}$?

c) Consideraţi cazurile particulare $n = 1, 2$ la punctul b).

45. Calculaţi suma:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k \cdot x}{\cos^k x}.$$

46. Să se calculeze: $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ şi $\cos \dfrac{4\pi}{5}$.

47. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x$. Să se determine $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ şi $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

48. Să se demonstreze că $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, avem:

$$\sqrt{1 - \cos(x_3 - x_2)} + \sqrt{1 - \cos(x_2 - x_1)} \geq \sqrt{1 - \cos(x_3 - x_1)}.$$

49. Dacă $\sum_{k=1}^{n} \sin^2 a_k = \frac{n}{2}$, să se determine minimul sumei $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{tg}^2 a_k$.

50. Fie a, b, A, B numere reale date. Se consideră funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$. Să se demonstreze că dacă pentru orice număr real x avem $f(x) \geq 0$, atunci $a^2 + b^2 \leq 2$ şi $A^2 + B^2 \leq 1$.

Capitolul IV. RELAŢII METRICE

1. Laturile unui triunghi ABC sunt $a = 2p + 1$, $b = p^2 - 1$, $c = p^2 + p + 1$. Pentru ce valori ale lui p există triunghiul? Să se demonstreze că în acest caz triunghiul are un unghi de 120^0.

2. Demonstraţi că suma pătratelor lungimilor laturilor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor.

3. Să se arate că într-un triunghi ABC, lungimea medianei m_a dusă din vârful A este dată de relaţia:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2. \qquad \text{(Teorema medianei)}$$

4. Dacă A, B, C sunt trei puncte coliniare cu B între A şi C şi O un punct exterior dreptei AC, atunci are loc relaţia:

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC. \qquad \text{(Relaţia lui Stewart)}$$

5. Să se arate că într-un patrulater inscriptibil, suma produselor lungimilor laturilor opuse este egală cu produsul lungimilor diagonalelor (Teorema lui Ptolomeu).

6. Arătaţi că pătratul construit pe tangenta comună a cercurilor descrise pe catetele unui triunghi dreptunghic - ca diametre, are aceeaşi arie cu triunghiul dat.

7. Arătaţi că în orice patrulater, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor, plus de patru ori lungimea segmentului care uneşte mijloacele diagonalelor. (Teorema lui Euler)

8. Fie ABC un triunghi ale cărui unghiuri se presupun cunoscute. Să se determine unghiul format de mediana şi înălţimea ce pleacă din vârful A al triunghiului.

9. Se consideră un romb ABC de latură l şi diagonalele d_1 şi d_2. Notând cu d distanţa dintre două laturi paralele, să se arate că $d > d_1 + d_2 - 2l$.

10. Se consideră triunghiul ABC şi M un punct mobil pe cercul circumscris acestuia. Să se arate că $MA^2 + MB^2 + MC^2 =$ constant.

11. Se dă un triunghi dreptunghic în A cu laturile $b < c < a$. Fie D simetricul lui A faţă de BC şi E proiecţia lui D pe AB. Să se arate că $DE = \frac{2bc^2}{a^2}$, $BE = \frac{c(c^2 - b^2)}{a^2}$ şi să se deducă de aici că:

$$\sin 2B = 2\sin B\cos B \quad \text{şi} \quad \cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B.$$

12. În triunghiul ABC, fie B' şi C' proiecţiile lui B pe AC şi C pe AB. Să se arate că $B'C' = a \cdot |\cos A|$.

13. În planul triunghiului echilateral ABC se consideră un punct M. Să se arate că se poate forma un triunghi (eventual degenerat) cu segmentele MA, MB, MC. (Pompei)

14. Să se rezolve triunghiul ABC în fiecare din cazurile:

a) $a = 4$, $b = 6$, $m(\widehat{C}) = 60^0$; b) $a = 8$, $m(\widehat{A}) = 120^0$, $m(\widehat{B}) = 15^0$;

c) $a = 10$, $b = 8$, $c = 9$; d) $b = 12$, $m(\widehat{C}) = 135^0$, $m(\widehat{A}) = 15^0$.

15. Să se rezolve un triunghi ABC ştiind că raza cercului circumscris este $R = 8$, $m(\widehat{A}) = 120^0$ şi $m(\widehat{B}) = 45^0$.

16. Să se afle elementele unui triunghi ABC, cunoscând înălţimile corespunzătoare laturilor b şi c, $h_b = 60$ şi $h_c = 36$ şi $\frac{a}{R} = \cos A$.

17. Laturile unui triunghi satisfac relaţiile: $a = \frac{7}{3}c$, $3b = 8c$.

Calculaţi: $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ şi $m(\widehat{A})$.

18. În triunghiul oarecare ABC cunoaştem: $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$, $BD = 7$ şi $CE = 2\sqrt{19}$, unde BD şi CE sunt mediane. Determinaţi lungimile laturilor triunghiului.

19. Într-un triunghi ABC se dă: $m(\widehat{A}) = 60^0$ şi $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ şi unghiurile B şi C.

20. Să se arate că dacă în triunghiul ABC are loc relaţia $h_a\sqrt{3} = b + c - \frac{a}{2}$, atunci triunghiul este echilateral.

21. Să se arate că dacă în triunghiul ABC avem $b^2\operatorname{ctg}B + c^2\operatorname{ctg}C = 4S$, atunci triunghiul este dreptunghic.

22. Să se arate că în triunghiul oarecare ABC avem relaţia:

$$p = (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C).$$

23. Să se arate că triunghiul ABC în care avem relaţia $c^2 = 4S\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ este isoscel.

24. Să se arate că în orice triunghi ABC avem relaţiile:

a) $S = r_a(p - a)$, unde r_a este raza cercului exînscris triunghiului (cerc tangent laturei de lungime a şi prelungirilor laturilor de lungimi b şi c).

b) $p^2 = \frac{r_a \cdot r_b \cdot r_c}{r}$.

25. Să se arate că în orice triunghi ABC avem relaţiile:

a) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$; b) $S = 4\frac{R}{r}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$; c) $S = \frac{ar_br_c}{r_b + r_c}$.

26. Să se arate că triunghiul ABC în care există una din erelaţiile:

$$\text{a) } \frac{1}{\cos A} - \cos A = \frac{a^2}{bc}; \quad \text{b) } \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \cos A + \cos B$$

este dreptunghic.

27. Să se arate că în orice triunghi are loc relaţia $S = p'R$, unde p' este semiperimetrul triunghiului ortic.

28. Să se arate că dacă în triunghiul ABC există relaţia $b + c = a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

29. Să se arate că în orice triunghi avem relaţia:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}.$$

30. Să se arate că dacă în triunghiul ABC există relaţia

$$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{1}{8},$$

atunci triunghiul este echilateral.

31. Să se arate că în orice triunghi dreptunghic cu $m(\widehat{A})=90^0$, există relaţiile:

a) $\dfrac{c-b}{c+b}=\text{tg}\dfrac{C-B}{2}$; b) $\dfrac{b}{a+c}=\text{tg}\dfrac{B}{2}$; c) $\dfrac{1+\cos C}{\sin C}=\dfrac{a+b}{c}$.

32. Fie triunghiul ABC oarecare. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $2a^2=b^2+c^2$; b) $2\cos 2A=\cos 2B+\cos 2C$.

33. Să se determine măsura unghiurilor unui triunghi ABC, ştiind că are loc relaţia:

$$8\sin A\sin B\cos C+1{=}0.$$

34. Să se demonstreze că triunghiul ABC în care are loc relaţia:

$$1+\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\frac{2}{1-\text{ctg}C}$$

este dreptunghic.

35. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic dacă şi numai dacă are loc una din relaţiile:

a) $\sin B\text{tg}B=\dfrac{b^2}{ac}$; b) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$.

36. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC are loc relaţia $\sin\dfrac{A}{2}\le\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

37. O diagonală a unui trapez isoscel, înscris într-un cerc de rază R, formează cu laturile neparalele unghiurile α şi 3α $(0<\alpha<\frac{\pi}{4})$. Să se arate că perimetrul acestui trapez este dat de relaţia:

$$p=2R(\sin\alpha+\sin 3\alpha+2\cos 2\alpha).$$

38. Fie triunghiul isoscel ABC cu $b=c$ şi h_a înălţimea dusă din A. Să se demonstreze că există relaţia:

$$p=\frac{1}{h_a}\left(S+\sqrt{h_a^4+S^2}\right),$$

unde p este semiperimetrul triunghiului şi S aria sa.

39. Dacă în triunghiul ABC medianele BM şi CN sunt perpendiculare între ele, atunci are oc relaţia:

$$S=a^2\text{tg}A.$$

40. Dacă lungimile laturilor unui triunghi verifică relaţia: $a^2-b^2-c^2=bc$, să se demonstreze că: $\text{ctg}B\text{ctg}C\ge 3$. În ce caz are loc egalitatea?

41. Să se demonstreze că trisectoarele (dreptele care împart un unghi în trei părţi egale) care au cea mai mică înclinare faţă de o aceeaşi latură şi care pornesc de la extremităţile aceleiaşi laturi se întâlnesc două câte două în trei puncte, care formează un triunghi echilateral (Teorema Morley).

42. Unghiurile pe care le face diagonala unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile care pornesc din acelaşi vârf sunt respectiv α, β, γ. Să se arate că:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

43. O piramidă regulată are ca bază un poligon cu n laturi. Unghiul dintre două muchii laterale consecutive este α. Să se afle măsura unghiului diedru dintre o faţă laterală şi planul bazei piramidei.

44. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a şi M, N mijloacele a două laturi consecutive. ale bazei inferioare. Să se determine secţiunea cubului cu planul care trece prin M, N şi vârful opus al bazei superioare. Să se afle aria seţiunii.

45. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei a şi muchia laterală b. Să se afle distanţa dintre două muchii opuse.

46. Fie prisma regulată $[ABCA'B'C']$ şi punctul mobil M pe baza $A'B'C'$. Planele (MBC), (MAC) şi (MAB) formează cu planul (ABC) unghiurile α, β, γ. Să se arate că suma $\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta + \text{ctg}\gamma =$ constant.

47. O piramidă regulată $VABCD$ are ca bază un pătrat cu latura a, iar muchiile laterale sunt egale cu diagonala pătratului de bază. Să se determine aria secţiunii făcute în piramidă de un plan care trece prin mijlocul muchiei $[AV]$ şi este perpendicular pe muchia $[CV]$.

48. Pe palnul pătratului $ABCD$ cu latura a se duce în A perpendiculara $AO = a\sqrt{2}$. Proiecţiile vârfului A pe planele OBC şi OCD le notăm respectiv cu M şi N. Să se determine tangenta unghiului diedru format de planele (AMN) şi $(ABCD)$.

49. Într-o seferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat şi unghiul de la vârful unei feţe laterale egal cu α. Să se afle volumul piramidei.

50. Fie semidreptele Ox, Oy, Oz, astfel încât $m(\widehat{yOz}) = \alpha$, $m(\widehat{zOx}) = \beta$, $m(\widehat{xOy}) = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Fie a, b, c, măsurile unghiurilor diedre formate de planele (xOy) cu (xOz), (yOx) cu (yOz) şi (zOx) cu (zOy). Să se demonstreze că:

a) $\cos c = \dfrac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$; b) $\dfrac{\sin a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin b}{\sin\beta} = \dfrac{\sin c}{\sin\gamma}$.

51. Se consideră un triunghi echilateral $A_1A_2A_3$ înscris într-un cerc şi un punct M pe cerc. Să se demonstreze că: $\sum_{k=1}^{3} MA_k =$ constant.

52. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă şi numai dacă:

$$\sqrt{p(b-a)} + \sqrt{(p-a)(p-c)} = \sqrt{2bc}.$$

53. Fie triunghiul ABC şi $D \in BC$, astfel încât $CD = kBC$. Să se arate că:

$$AD < kAB + (1-k)AC.$$

CLASA A X-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. FUNCŢII

I.1. Funcţia exponenţială

1. Să se calculeze $f \circ g$ şi $g \circ f$ unde:
a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{2x}$, $g(x) = 10^{-1}x + 1$;
b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^{2x} + 5^x + 1$, $g(x) = x^5$;
c) $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{2x} + 3^x$, $g(x) = \min(x, x^3)$;
2. Să se stabilească imaginile funcţiilor următoare:
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{2x} + 3^x + 2$;
b) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{2x} + 3^x$;
c) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (0{,}2)^{|x|}$;
d) $f : (-\infty, -2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2$;
e) $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\sqrt{16-2x^2}}$;
f) $f : [-2, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{2^x}$.
3. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $64^{x^2-5x} = (0{,}25)^{18}$; b) $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$; c) $4 \cdot (0{,}5)^{x(x+3)} = (0{,}25)^{2x}$;
d) $\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\right)^x - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^x = 140\sqrt{2}$.
4. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $|x-1|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}} = 1$; b) $\sqrt[3]{x+2} = (x+2)^{5x+2}$; c) $(\sqrt{x})^{2x+1} = x^{\sqrt{x}+1}$.
5. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x$; b) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$;
c) $3^{\sqrt{x-2}} + x^2 + 5 = 2x$; d) $5^{2x} - 7 \cdot 15^x + 10 \cdot 3^{2x} = 0$;
e) $3^{2x^2+2x} - 7 \cdot 6^{x^2+x} + 5 \cdot 2^{2x^2+2x+1} = 0$.
6. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $3^{\sqrt{-x^2+x+2}} - 4^{\sqrt{x^2-2x-3}} = 1$; b) $2^{\sqrt{1-x^2}} + 3^{\sqrt{x^2-x-2}} = 2$;
c) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$, cu $x \in [0, 2\pi]$; d) $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.
7. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $4^{x-1} - 2^x \geq 3$; b) $4^x + 3^x < 5^x$;
c) $3^{|x+1|} > 81$; d) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^x \geq (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{\frac{x}{x+2}}$.
8. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $|x|^{x^2-4} \leq 1$; b) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 1 < 0$;
c) $(x^2-x+1)^{x^2-1} > 1$; d) $(x^2+x+1)^{x^2+x} > 1$.
9. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:
a) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 324 \\ 2^{y+1} \cdot 3^{x+2} = 2592 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^{x+y} + \left(\frac{5}{2}\right)^{x+y} = \frac{29}{10} \\ x + y - 3xy = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y} = \dfrac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{2x-y} \\ x^2 y = 2 \end{cases}$.

10. Să se rezolve ecuaţia: $9^x + 36^x + 2 \cdot 32^x = 4 \cdot 24^x$.

11. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $7^x + 49^x \leq 54 \cdot x + 2$; b) $\log_2(2x+1) + \log_5(4x+1) \geq 2x$.

12. Să se arate că nu există nici-o funcţie injectivă $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, astfel încât: $f(3^x) + f(5^x) = 4, \forall x \in (0, \infty)$.

13. Să se studieze injectivitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 8$.

14. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x \cdot b^{1-x} + a^{1-x} \cdot b^x$, $a, b \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$.

a) Să se arate că f este descrescătoare pe $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ şi crescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

b) Să se arate că : $2\sqrt{ab} \leq a\left(\dfrac{b}{a}\right)^x + b\left(\dfrac{a}{b}\right)^x \leq a + b, \forall x \in [0,1]$.

15. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{a^{(x-1)(x-2)}} + \frac{1}{a^{(x-1)(x-3)}} = \frac{2a^2}{a^{(x-2)(x-3)}}, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

16. Să se rezolve ecuaţia: $1 + 3^x = 8^x \sin 75^0$.

17. Să se rezolve ecuaţia: $2^{\sin^4 x} + 2^{\sin^2 x} = 2^{1+|\sin^3 x|}$.

18. Să se rezolve ecuaţia: $10^{100-49x} = 40x + 20$.

19. Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 3^x - 2^y = 79 \\ \log_2 x + \log_3 y = 3 \end{cases}$.

20. Să se rezolve ecuaţia: $3\cos x = 3^x + 3^{-x} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

21. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, inecuaţia:

$$(m-2)4^x + 2(2m-3)2^x + m > 2,$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

22. Fie $F = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | f(f(x)) - 2f(x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{N}, f(0) = 10\}$.
Să se determine mulţimea $A = \{f(1989) | f \in F\}$.

23. Să se rezolve ecuaţia:

$$8^x + 27^x + \frac{1}{216^x} + 3^{x+1} \cdot 2^x + 3^{1-x} + \frac{3}{2^x} = 3 + 3 \cdot 4^x + 3^{2x+1} + \frac{3^{1-2x}}{4^x}.$$

24. Să se rezolve ecuaţia: $(1 + 2^x)^n + (1 + 2^{-x})^n = 8, n \in \mathbb{N}$.

25. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 5^x \cdot y \\ 2^y + 3^y = 5^y \cdot z \\ 2^z + 3^z = 5^z \cdot x \end{cases}.$$

26. Să se studieze injectivitatea funţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3^{2x+1} + 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 2\sqrt{2}.$$

27. Să se rezolve inecuaţia: $(\sqrt{2}-1)^x + (3-2\sqrt{2})^x > 6$.

28. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$(2x+5y+1)(2^{|x|}+x^2+y+x) = 105.$$

29. Să se determine că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem ingalitatea:

$$2^x + 3^x + 4^x - 5^x \geq 9^x + 10^x - 15^x.$$

30. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}^2$ sistemul:

$$\begin{cases} 5^x + 5^y = 30 \\ 3^x - y^3 = 8 \end{cases}.$$

31. Să se rezolve în mulţimea $\mathbb{R}^2$ sistemul:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 648 \\ x + y = 7 \end{cases}.$$

32. Să se arate că oricare ar fi m un număr real, are loc inegalitatea:

$$e^{2x} + (2m+1)e^x + m^2 + m + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

33. Să se determine parametrul real $m \in \mathbb{R}$, astel încât să fie adevărată relaţia:

$$m4^x + (m-3)\cdot 2^x + (m-3) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

34. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$5^{2x} - 2m\cdot 5^x + m + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

35. Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$, astel încât inecuaţia:

$$(m-1)3^{2x} + (m+1)3^x + m + 1 > 0$$

să nu aibă nici o soluţie.

36. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $3^{|2x^2-\pi x|} = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$; b) $e^{|x^2-\pi x|} = \sin\dfrac{x}{2}$; c) $2^{|x^2-3x+2|} = \cos(x-1)$.;

37. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $6^x + 8^x = 10^x$; b) $4^x + 9^x = 25^x$.

38. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $x^2\cdot 3^{\sqrt{2x}} + 4\cdot 3^{x^2-x} = x^2\cdot 3^{x^2-x} + 4\cdot 3^{\sqrt{2x}}$;
b) $2^{x^2-1}\cdot 3^{2x^2-\sqrt{2}} + 648 = 81\cdot 2^{x^2-1} + 8\cdot 3^{2x^2-\sqrt{2}}$.

39. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:
a) $\begin{cases} 2^x \leq 64 \\ (x-2)^{x^2-5x+6} \geq 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x^2+2x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{8-2x} \\ (3-x)^x < 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} (x^2-8x+16)^{2x-3} > 1 \\ 2^{x-3} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

40. Să se determine $p \in \mathbb{R}$, pentru care ecuaţia: $a^{\sqrt{x-3}} + \sqrt{6+x-x^2} - p = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, admite soluţii reale.

41. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $4^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot 2^{x-2+\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{3}{2}$; b) $4^x + (x-1) \cdot 2^x = 6 - 2x$.

42. Să se rezolve ecuaţia: $(3+a)^{\sqrt{x+4}} + (3-a)^{\sqrt{x^2-6x+8}} = 2$, cu $|a| \leq 1$.

43. Să se determine $a \in \mathbb{R}_+^*$., astfel încât;

$$a^{2x^2+4x} + 3a^{x^2+x} < 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

44. Să se rezolve inecuaţia:

$$a^{2x^2+6x+1} - 2a^{x^2+3x+1} - a^{x^2+3x} + a + 1 < 0, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

45. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}.$$

46. Să se rezolve ecuaţia: $2e^{3x} - 3e^{2x} - 17e^x + 30 = 0$.

47. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $4^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$; b) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

48. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x + 1 = 6\left(\sqrt{2}+1\right)^x$; b) $\left(7+2\sqrt{5}\right)^x = 4\left(2+\sqrt{5}\right)^x - 1$

I.2. Funcţia logaritmică

1. Să se calculeze
a) $A = 2\log_3 2 - 3\log_3 5 + \log_3 \dfrac{125}{4}$; b) $B = \log_2 0{,}25 - 3\log_{0,5} 16$;

c) $E = 5\log_a b + 2\left[\log_a(b-c) - \log_a c - \log_a b + \log_a(b+c)\right]$;

d) $E = \dfrac{\log_3 24}{\log_{96} 3} - \dfrac{\log_3 192}{\log_{12} 3} + \dfrac{\log_2 12}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 4}{\log_{108} 2}$.

2. Să se stabilească domeniul maxim de definiţie şi semnul funcţiilor:

a) $f(x) = \log_{x-1}(3-x)$; b) $f(x) = \log_{x+2}(x^2 - 3x - 18)$;

c) $f(x) = \log_{x-1}(-x^2 + 5x - 4)$; d) $f(x) = \log_{5-10x}(3x - 6)$.

3. Să se demonstreze că dacă $x, y, z > 0$, astfel încât $z \neq 1$, atunci:

$$\log_z \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq \log_z xy, \text{ dacă şi numai dacă } z > 1.$$

4. Să se demonstreze inegalitatea: $\log_{x+1}(x+2) < \log_x(x+1)$, $\forall x > 1$.

5. Să se demonstreze că este adevărată inegalitatea:

$$\log_x^2 y + \log_y^2 x \geq \log_x y + \log_y x, \quad \forall x, y \in (0,1) \text{ sau } x, y \in (1, \infty).$$

6. Fie $x, y, z > 0$. Demonstraţi că:

a) $\left(\frac{x}{yz}\right)^{\ln\frac{y}{z}} \cdot \left(\frac{zx}{y}\right)^{\ln\frac{z}{x}} \cdot \left(\frac{xy}{z}\right)^{\ln\frac{x}{y}} = 1$;

b) $\log_a x \log_b x + \log_b x \log_c x + \log_a x \log_c x = \frac{\log_a x \log_b x \log_c x}{\log_{abc} x}$, $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$.

7. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_3(x^2 - 3x + 5) = 1$; b) $\log_3\left(\log_2(x^2 - 1)\right) = 1$; c) $\log_{2x+1}(x^2 + x + 1) = 1$;

d) $\log_x(2x^{x-2} - 1) = 2x - 4$; e) $\lg\left(10^{2x-1} + 7 \cdot 10^{x-1}\right) = \lg(10^{x+1} - 2) = 1$;

f) $\log_3\left(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}\right) = x + \log_3(2^x + 2^{x+1})$;

g) $\log_{2x^2-3x+1} 64 = 512$. h) $\log_7(4 \cdot 2^x - 2^{x-1}) = 1 + \log_7 4$.

8. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_{|x-1|}(|x| + 3) = 2$; b) $\lg(\lg(\lg x)) = 0$; c) $\frac{1}{6 - \lg x} + \frac{2}{2 + \lg x} = 1$;

d) $\lg^2 x - \lg x^3 + 2 = 0$; e) $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) + \log_2^2 x = 1$; f) $\log_3^2 x + \log_{3x}\frac{3}{x} = 1$;

g) $3\log_2 x - 2\log_x 2 + 5 = 0$; h) $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2\frac{x^2}{8} = 8$.

9. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_a\{1 + \log_b[1 + \log_c(1 + \log_d x)]\} = 0$;

b) $\log_{a^2+b^2}(x^2 - 2ab) + \log_{\sqrt{a^2+b^2}}(x^2 - 2ab) = 3$.

10. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{\log_a \sqrt[a^2]{ax} + \log_x ax} = a - \sqrt{\log_a \sqrt[a^2]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[a^2]{\frac{a}{x}}}.$$

11. Să se rezolve ecuaţia: $\log_{\cos x}\sin x + 4\log_{\sin x}\cos x = 4$.

12. Să se determine parametrul real m, astfel încât ecuaţia:

$$\lg(x + m - 4) + \lg(3 - m) - \lg\left[-x^2 + 2(m+1)x - m^2 - 2m\right] = 0,$$

să aibă cel puţin o soluţie.

13. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\log_4\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > \frac{1}{2}$; b) $\log_{|x|}(x^2 - 9) < 1$;

c) $\log_{x^2+1} x^2 + 8\log_{x^2}(x^2 + 1) - 6 < 0$; d) $\log_a\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}\right) > 2$, $a \in (0, 1)$.

14. Să se determineparametrul real a, astfel încât: $\log_{\frac{a+1}{a-1}}\left(x^3 + 4\right) > 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

15. Să se rezolve inecuaţiile şi să se discute după valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$:

a) $\frac{\log_a(21 - x^3)}{\log_a(3 - x)} \geq 2$; b) $2\log_a x \geq \log_{\frac{1}{a}}(x + 2a)$; c) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + a) \geq -1$;

d) $\log_x(x - 2a) \leq 2$. e) $\log_a(x - 2) + \log_a(x - 3) \geq 2$.

16. Să se rezolve sistemele de ecuaţii logaritmice:

a) $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \dfrac{3}{2} \\ \log_{b^2} x + \log_b y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 5a \\ \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2\log_a 9 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} xy = a^2 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \dfrac{5}{2}\lg^2 a^2 \end{cases}$, $a \neq 0$; d) $\begin{cases} \log_3(\lg x + \lg y) = 1 + \log_9(\lg y) \\ \log_9(\lg x - \lg y) = \log_3(\lg y)) \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n \end{cases}$; f) $\begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1 \\ \log_{xy}(x+y) = 0 \end{cases}$; g) $\begin{cases} y - x = 5 \\ \log_2 x \cdot \log_3 y = 4 \end{cases}$;

h) $\begin{cases} x + y = 8 \\ \log_2 x \cdot \log_2 y = 4 \end{cases}$; i) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{81}\right)^x + \left(\dfrac{1}{9}\right)^y = \dfrac{2}{3} \\ \log_{\frac{1}{81}} x - \log_{\frac{1}{9}} y = 0 \end{cases}$; j) $\begin{cases} \log_{25} x + 5^{\log_5 y} = 5 \\ x^y = 125^4 \end{cases}$.

17. a) Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} \left[\dfrac{2+\log_2 x}{2}\right] = \dfrac{1+\log_2 y}{2} \\ \left[\dfrac{3+\log_2 y}{3}\right] = \dfrac{1+\log_2 x}{2} \end{cases}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă numărului real „a“.

b) Să se arate că sistemul admite o soluţie de forma (x,x), $x > 0$.

c) Să se arate că soluţiile din mulţimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ale sistemului se pot pune sub forma unui şir $((x_n, y_n)))_{n\geq 1}$ cu $x_n < x_{n+1}$, $y_n < y_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi să se calculeze suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \log_2 \frac{y_k}{x_k}.$$

18. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, să se arate că:

a) $\log_{a_1}(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n) + \log_{a_2}(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n) + \ldots + \log_{a_n}(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n) \geq n^2$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log_{a_k} \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \geq n.$

19. Demonstraţi că dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ are loc egalitatea: $\log_b a \cdot \log_c b \cdot log_a c = 1$ şi $\dfrac{\log_b a^2}{a+b} + \dfrac{\log_c b^2}{b+c} + \dfrac{\log_a c^2}{c+a} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$

20. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\log_2 n!} + \sqrt{\log_2 (n-1)!} + \ldots + \sqrt{\log_2 2!} \geq \sqrt{\log_2 \left(n(n-1)^{2^2}(n-2)^{3^2}\cdot\ldots\cdot 2^{(n-1)^2}\cdot 1^{n^2}\right)}.$$

Indicaţie. Se va folosi următoarea problemă ajutătoare:

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Să se arate că:

$$\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + \sqrt{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \ldots + \sqrt{a_{n-1} + a_n} + \sqrt{a_n} \geq \sqrt{a_1 + 4a_2 + \ldots + n^2 a_n}$$

(demonstraţie prin inducţie matematică după n).

21. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\log_x \sqrt[3]{x} + 3\log_x\left(x\sqrt[3]{4}\right) + 6\log_x^2 \sqrt[3]{4} = 5;$

b) $\log_x^2 6 + \log_{\frac{1}{6}}^2 \dfrac{1}{x} + \log_{\frac{1}{\sqrt{x}}} \dfrac{1}{6} + \log_{\sqrt{6}} x + \dfrac{3}{4} = 0.$

22. Să se demonstreze că $\forall a, b, c \in (1, +\infty)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{\ln a}{\ln a^{13}bc} + \frac{\ln b}{\ln ab^{13}c} + \frac{\ln c}{\ln abc^{13}} \leq \frac{1}{5},$$

egalitatea având loc dacă şi numai dacă $a = b = c$.

23. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\log_{2x+1}(2x+2) < \log_{2x+2}(2x+1)$; b) $\dfrac{2\log_a^2 x - 3\log_a x + 1}{x^2 - 9} < 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

24. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, +\infty)$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{\ln a_1}{\ln a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} + \frac{\ln a_2}{\ln a_1 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} + \ldots + \frac{\ln a_n}{\ln a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

25. Să se exprime $\log_6 16$ în funcţie de $a = \log_{12} 27$.

26. Să se arate că:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} + \frac{1}{\log_4 \pi} < 3 < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_4 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}.$$

27. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < e^{-\frac{\ln(2n+1)}{2}}.$$

unde: $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ şi $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$.

Indicaţie: Se demonstrează mai întâi inegalitatea cunoscută:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

28. Să se arate că: $\{\sqrt{\log_2 3}\}\{\sqrt{\log_3 5}\}\{\sqrt{\log_5 8}\} < \frac{3}{64}$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a numărului real a.

Indicaţie: Se arată mai întâi că $[x] \cdot \{x\} \leq \dfrac{x^2}{4}$. cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$.

29. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$\lg(n+1) > \frac{3}{10^n} + \lg n.$$

30. Fie a şi b rădăcinile ecuaţiilor $2\sin x = \log_{\frac{5}{8}} x$ şi respectiv $2\cos x = \log_{\frac{5}{8}} x$. Să se arate că $a > b$.

31. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$\log_3(2x+1) + \log_5(4x+1) + \log_7(6x+1) = 3x.$$

32. Să se arate că:

$$\log_x \frac{y^2+z^2}{y+z} + \log_y \frac{z^2+x^2}{z+x} + \log_z \frac{x^2+y^2}{x+y} \geq 3, \quad \forall x, y, z \in (1, +\infty).$$

33. Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, cu $p \geq 3$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_p > 1$. Să se arate că:

$$\log_{x_1} \frac{x_2^n + x_3^n}{x_2 + x_3} + \log_{x_2} \frac{x_3^n + x_4^n}{x_3 + x_4} + \ldots + \log_{x_{p-1}} \frac{x_p^n + x_1^n}{x_p + x_1} + \log_{x_p} \frac{x_1^n + x_2^n}{x_1 + x_2} \geq p(n-1).$$

34. Să se simplifice expresia:

$$E = (\log_a(abc))^{-1} + (\log_b(abc))^{-1} + (\log_c(abc))^{-1},$$

unde $a, b, c > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$.

35. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, au loc inegalitatea:

$$\lg(n!) > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - 1\right).$$

36. Să se arate că pentru orice $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea:

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

37. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $\ln^3 x - 2\ln^2 x - 5\ln x + 6 = 0$, $x < 0$; b) $6\ln^3 x - 5\ln^2 x - 2\ln x + 1 = 0$, $x < 0$.

38. Să se rezolve ecuaţia: $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - 2{,}25 = \log_x^2 \sqrt{5}$.

39. Să se rezolve ecuaţia: $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$.

40. Se consideră inegalitatea:

$$\log_b(x^2 - x - 2) > \log_b(-x^2 + 2x + 3), \quad b > 0, \quad b \neq 1.$$

a) Să se determine valorile lui x pentru care are sens inegalitatea.
b) Ştiind că inecuaţia admite soluţia $x = \frac{9}{4}$, să se determine b.
c) Pentru $b \in (0,1)$ să se rezolve inecuaţia.

41. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2(9^x + 7) = 2 + \log_2(3^x + 1)$.

42. Să se rezolve inecuaţiile:
a) $\log_{x+\frac{1}{x}}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\right) \geq 1$. b) $\log_2(2x+1) + \log_5(4x+1) \geq 2x$.

43. Să se rezolve ecuaţia: $\log_2(25^x + 7) = 2 + \log_2(5^x + 1)$.

44. Să se rezolve inecuaţia: $\sqrt{\log_3(9x-3)} \leq \log_3\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

45. Se consideră expresia:

$$E(x) = \log_2 2x^2 + \log_2 x\,(1 + \log_2 x) + \frac{1}{2}\log_4^2 x^4 + \log_2^3 x.$$

a) Să se stabilească domeniul de existenţă al expresiei şi să se arate că

$$E(x) = (1 + \log_2 x)^3.$$

b) Să se rezolve ecuaţia $E(x) = -8$.

46. Să se logaritmeze expresiile:
a) $E = \sqrt[5]{\frac{a}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$; b) $E = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2\sqrt{abc}}{\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[4]{ab}}}$;

c) $E=\dfrac{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{b}}}}{b\sqrt{b\sqrt{a}}}$; d) $E=\dfrac{10^3\sqrt[5]{2002}}{11^5\sqrt[5]{2001}}$.

47. Să se determine soluţiile ecuaţiilor:

a) $\log_{x^2+1}4=x^2+1$; b) $x+3^x+\log_3 x=31$;

c) $3\cdot 2^{\log_3(x-1)}-2\cdot 3^{\log_5(x^2+1)}+3=0$.

48. Să se arate că dacă $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, $a^2+b^2=7ab$, atunci:

$$\lg\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

49. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi oricare ar fi numerele reale strict pozitive $a_1,a_2,\dots,a_n>0$, are loc inegalitatea:

$$\lg\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\frac{\lg a_1+\lg a_2+\ldots+\lg a_n}{n}.$$

50. Să se demonstreze că:

a) $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$, $\forall\, a,x,y>0$ şi $a\neq 1$.

b) $\left(\dfrac{xy}{z}\right)^{\ln\frac{x}{y}}\cdot\left(\dfrac{yz}{x}\right)^{\ln\frac{y}{z}}\cdot\left(\dfrac{zx}{y}\right)^{\ln\frac{z}{x}}=1$, $\forall\, x,y,z>0$, $x,y,z\neq 1$.

I.3. Funcţii trigonometrice

1. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\arcsin\dfrac{1}{2}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{2}$; b) $\arccos\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{1}{7}=\arccos\left(-\dfrac{11}{14}\right)$;

c) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{\pi}{4}$.

2. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{2}$; b) $\mathrm{arctg}1+\mathrm{arctg}2+\mathrm{arctg}3=\pi$;

c) $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{5}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{7}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{8}=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Să se determine domeniul maxim de definiţie al fiecăreia din funcţiile de mai jos:

a) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{x+1}$; b) $g(x)=\arcsin\sqrt{1-4x}$;

c) $h(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; d) $t(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

4. Să se arate că pentru $\forall\, x>1$: $\mathrm{arctg}x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$.

5. Să se arate că:

a) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\mathrm{arctg}x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$;

b) $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}=\pm\dfrac{\pi}{2}$, dacă $x>0$, respectiv $x<0$;

c) $\mathrm{arctg}x+\mathrm{arctg}y+\mathrm{arctg}z=\mathrm{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$.

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a < 0$, $b > 0$. Să se arate că expresia următoare nu depinde de x:

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+b\operatorname{tg}^2 x}{b-a}} - \arccos\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right).$$

7. Să se arate că:
a) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$; b) $\cos(3\arccos x) = 4x^3 - 3x$;
c) $\cos(4\arccos x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

8. Fie $a = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ şi $b = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Să se arate că: $\sin 4b = \cos 2a$.

9. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

10. Să se arate că:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\cos a}{1 - x\sin a} - \operatorname{arctg}\frac{x - \sin a}{\cos a} = a.$$

I.4. Ecuaţii trigonometrice

1. Găsiţi mulţimea soluţiilor ecuaţiilor:
a) $\sin x = \cos x$; b) $\sin 3x = \sin 5x$; c) $\sin 2x = -\sin 3x$;
d) $\cos\frac{x}{2} = \sin\left(\sin\frac{x}{3}\right)$; e) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3}\right)$;
f) $\sin(x^2 + 2) = \sin(mx)$, $m \in \mathbb{R}$.

2. Găsiţi mulţimea soluţiilor ecuaţiilor:
a) $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x)$; b) $\sin(\pi\operatorname{arctg}x) = \cos(\pi\operatorname{arctg}x)$.

3. Găsiţi mulţimea soluţiilor ecuaţiilor:
a) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 1$; b) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$;
c) $\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x} = 1 + \sin 2x$, $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{4}$.
d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

4. Să se rezolve şi să se discute, după valorile parametrului real m ecuaţia: $\sin x + \cos x + \sin 2x = m$.

5. Fie ecuaţia: $m\cos 6x + (4 - m)\sin 3x + 2 - m = 0$. Aflaţi valorile lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care ecuaţia are soluţii.

6. Să se rezolve şi să se discute, după valorile parmetrului real m ecuaţia: $\sin x + \sin 3x = m\sin 2x$.

7. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $(\cos x)^{\cos 3x + 2\cos x} = 1$; b) $(\sin x)^{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 1$.

8. Să se rezolve şi să se discute ecuaţiile:
a) $\sqrt{3}\sin 3^x + \cos 3^x = m$, $m \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{2}\sin 2^x + \sqrt{2}\cos 2^x = m$, $m \in \mathbb{R}$.

9. Să se rezolve şi să se discute ecuaţiile:
a) $\arcsin mx = \arccos nx$; b) $\arcsin mx = 2\operatorname{arctg} nx$;

c) $\log_2(\mathrm{arctg}x) + \log_2(\mathrm{arctg}x) = m$.

10. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sin^8 x - \cos^8 x - 2\sin^2 x + 1 = 0$; b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

c) $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$; d) $\sin 2x + \mathrm{tg}x = 2$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $5\sin x\mathrm{tg}x - \sin x - 5\mathrm{tg}x + 1 = 0$; b) $a\sin x + b\cos x = c$;

c) $3 - 7\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 0$; d) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

12. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{ctg}^3 x} + \dfrac{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x}{\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x} = 2$; b) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1$.

13. Să se rezolve inecuaţia: $\cos x - \sin x > 1$.

14. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $2\cos x > \sin^2 x$; b) $2\sin x < \sqrt{3}\cos^2 x$.

15. Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 4\sin x \sin y = 1 \\ 4\cos x\cos y = 3. \end{cases}$

16. Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} \arcsin x = -\arccos y \\ \cos[3\pi(x+y)] = 1. \end{cases}$

17. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin y + \sin 2y + \ldots + \sin ny \\ \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \cos y + \cos 2y + \ldots + \cos ny. \end{cases}$$

18. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x\cos b + y\sin b = \sin(a+b) \\ x\sin b + y\cos b = \cos(a-b) \end{cases}$; b) $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = -2\sqrt{3} \\ \mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}y = 2\sqrt{3} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3}\cos y = 1 + \sqrt{3} \\ 4\cos x\cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

19. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x - y = a \\ \dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}y} = \dfrac{b}{c}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \dfrac{\mathrm{tg}x}{a} = \dfrac{\mathrm{tg}y}{b} = \dfrac{\mathrm{tg}z}{c}. \end{cases}$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

20. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\mathrm{tg}x < \sqrt{3}$; b) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}-1)\sin x - \sqrt{3} < 0$;

d) $\cos x > \mathrm{tg}x$; e) $\sin x > \sin 3x$.

21. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x > 2$; b) $\sin(3\cos x) > 0$; c) $\sin x + \cos x > 1$.

22. Să se rezolve inecuaţia: $\arcsin(x^2 - 1) > \frac{\pi}{6}$.

23. Să se rezolve inecuaţia: $\arcsin(2x-1) < \arcsin(1-x)$.

24. Să se rezolve inecuaţia: $a^{2\sin x} > a^{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

25. Să se rezolve inecuaţia: $\log_a(\sin x + \sqrt{3}\cos x) < 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

26. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 2\cos x \cos y \\ \sin(y-z) = 2\sin y \cos z \\ \sin(x+z) = 4\cos x \cos z. \end{cases}$$

27. Pentru $a, r \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze suma:

$$S = \cos a + \cos(a+r) + \cos(a+2r) + \ldots + \cos(a+(n-1)r).$$

28. Pentru $a, r \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze suma:

$$S = \sin a + \sin(a+r) + \sin(a+2r) + \ldots + \sin(a+(n-1)r).$$

29. Pentru $a, r \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze sumele:
a) $S_1 = \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n+1)a$;
b) $S_2 = \sin a \sin 2a + \sin 2a \sin 3a + \ldots + \sin na \sin(n+1)a$.

30. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice valoare a numărului real n, să se arate că:
a) $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} \sin^4 x - \ldots$
b) $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$

Capitolul II.
PROGRESII ARITMETICE ŞI PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se determine primul termen şi raţia unei progresii aritmetice, ştiind că:
a) $S_{100} = 350$ şi $S_{200} = 800$;
b) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 24 \\ a_1a_2a_3a_4 = -2079 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 56 \\ a_1a_2a_3 = -48. \end{cases}$

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_{16} = 233$. Să se calculeze S_{31}.

3. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc: $S_n = a$ şi $S_m = b$ ($n, m \in \mathbb{N}^*$, $n < m$), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$. Să se calculeze primul termen şi raţia progresiei.

4. Dacă $\sin(-a+b+c)$, $\sin(a-b+c)$, $\sin(a+b-c)$ sunt în progresie aritmetică, să se arate că şi $\mathrm{tg}a$, $\mathrm{tg}b$, $\mathrm{tg}c$ sunt în progresie aritmetică. Reciproca este adevărată?

5. Dacă notăm cu S_1, S_2 şi respectiv S_3 suma primilor n_1, n_2 şi respectiv n_3 termeni ai unei progresii aritmetice, să se arate că are loc relaţia:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

6. Să se arate că numerele $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.

7. Să se arate că numerele $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, nu pot face parte din aceeaşi progresie aritmetică.

8. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ numere reale în progresie aritmetică.
Se notează cu $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$. Să se arate că: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}$.

9. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, ştiind că al şaselea termen al dezvoltării binomului $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^n$ este egal cu 21, iar coeficienţii binomiali ai termenilor doi, trei şi patru sunt în progresie aritmetică.

10. Trei numere reale strict pozitive sunt în progresie aritmetică şi au suma egală cu 45. Dacă din primul număr scădem 7, din al doilea număr scădem 5, iar la al treilea număr adunăm 6 se obţin trei numere în progresie geometrică. Să se afle numerele.

11. Să se arate că dacă x, y, z sunt unghiurile unui triunghi, atunci $\mathrm{ctg}x$, $\mathrm{ctg}y$, $\mathrm{ctg}z$ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $\sin^2 x$, $\sin^2 y$, $\sin^2 z$ sunt în progresie aritmetică.

12. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică finită cu $a_1 > 0$ şi raţia $r > 0$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Caz particular: pentru $a = r = 1$ se obţine inegalitatea:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

13. Să se arate că suma cuburilor a n numere întregi în progresie aritmetică este divizibilă cu suma acestor numere.

14. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice, să se calculeze suma:

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 a_3^2} + \ldots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} \quad (a_k \neq 0,\ \forall k = \overline{1, n+1}).$$

15. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 \neq 0$ şi $r \neq 0$. Să se calculeze următoarele sume în funcţie de a_1, r şi n:

$$S_1 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4 a_5} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}};$$
$$S_2 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4}}.$$

16. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $r > 0$ şi $a_1 > 0$. Să se calculeze următoarele sume în funcţie de a_1, r şi n:

$$S_1 = \mathrm{arctg}\frac{r}{1 + a_1 a_2} + \mathrm{arctg}\frac{r}{1 + a_2 a_3} + \ldots + \mathrm{arctg}\frac{r}{1 + a_n a_{n+1}};$$
$$S_2 = \frac{1}{\cos a_1 \cdot \cos a_2} + \frac{1}{\cos a_2 \cdot \cos a_3} + \ldots + \frac{1}{\cos a_n \cdot \cos a_{n+1}},$$

(unde pentru suma S_2 am presupus $a_n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$).

17. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $r, a_1 \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze suma: $S = C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + \ldots + C_{a_n}^2$ în funcţie de a_1, r şi n.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât numerele:

$$a_1 \sqrt[n]{\frac{a_1^{n-1}}{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}};\quad a_2 \sqrt[n]{\frac{a_2^{n-1}}{a_1 a_3 \cdot a_4 \ldots \cdot a_n}}, \ldots, a_n \sqrt[n]{\frac{a_n^{n-1}}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}}$$

6. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a < 0$, $b > 0$. Să se arate că expresia următoare nu depinde de x:

$$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a + b\operatorname{tg}^2 x}{b-a}} - \arccos\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right).$$

7. Să se arate că:
a) $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$; b) $\cos(3\arccos x) = 4x^3 - 3x$;
c) $\cos(4\arccos x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

8. Fie $a = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ şi $b = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Să se arate că: $\sin 4b = \cos 2a$.

9. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

10. Să se arate că:

$$\operatorname{arctg}\frac{x\cos a}{1 - x\sin a} - \operatorname{arctg}\frac{x - \sin a}{\cos a} = a.$$

I.4. Ecuaţii trigonometrice

1. Găsiţi mulţimea soluţiilor ecuaţiilor:
a) $\sin x = \cos x$; b) $\sin 3x = \sin 5x$; c) $\sin 2x = -\sin 3x$;
d) $\cos\frac{x}{2} = \sin\left(\sin\frac{x}{3}\right)$; e) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3}\right)$;
f) $\sin(x^2 + 2) = \sin(mx)$, $m \in \mathbb{R}$.

2. Găsiţi mulţimea soluţiilor ecuaţiilor:
a) $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x)$; b) $\sin(\pi\operatorname{arctg}x) = \cos(\pi\operatorname{arctg}x)$.

3. Găsiţi mulţimea soluţiilor ecuaţiilor:
a) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 1$; b) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$;
c) $\frac{1 + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}x} = 1 + \sin 2x$, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$.
d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

4. Să se rezolve şi să se discute, după valorile parametrului real m ecuaţia: $\sin x + \cos x + \sin 2x = m$.

5. Fie ecuaţia: $m\cos 6x + (4 - m)\sin 3x + 2 - m = 0$. Aflaţi valorile lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care ecuaţia are soluţii.

6. Să se rezolve şi să se discute, după valorile parmetrului real m ecuaţia: $\sin x + \sin 3x = m\sin 2x$.

7. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $(\cos x)^{\cos 3x + 2\cos x} = 1$; b) $(\sin x)^{\sin x + \sqrt{3}\cos x} = 1$.

8. Să se rezolve şi să se discute ecuaţiile:
a) $\sqrt{3}\sin 3^x + \cos 3^x = m$, $m \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{2}\sin 2^x + \sqrt{2}\cos 2^x = m$, $m \in \mathbb{R}$.

9. Să se rezolve şi să se discute ecuaţiile:
a) $\arcsin mx = \arccos nx$; b) $\arcsin mx = 2\operatorname{arctg}nx$;

c) $\log_2(\mathrm{arctg}x) + \log_2(\mathrm{arctg}x) = m$.

10. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sin^8 x - \cos^8 x - 2\sin^2 x + 1 = 0$; b) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

c) $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$; d) $\sin 2x + \mathrm{tg}x = 2$.

11. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $5\sin x \mathrm{tg}x - \sin x - 5\mathrm{tg}x + 1 = 0$; b) $a\sin x + b\cos x = c$;

c) $3 - 7\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 0$; d) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

12. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{ctg}^3 x} + \frac{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x}{\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x} = 2$; b) $\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 1$.

13. Să se rezolve inecuaţia: $\cos x - \sin x > 1$.

14. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $2\cos x > \sin^2 x$; b) $2\sin x < \sqrt{3}\cos^2 x$.

15. Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} 4\sin x \sin y = 1 \\ 4\cos x \cos y = 3. \end{cases}$

16. Să se rezolve sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} \arcsin x = -\arccos y \\ \cos[3\pi(x+y)] = 1. \end{cases}$

17. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin y + \sin 2y + \ldots + \sin ny \\ \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \cos y + \cos 2y + \ldots + \cos ny. \end{cases}$$

18. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x\cos b + y\sin b = \sin(a+b) \\ x\sin b + y\cos b = \cos(a-b) \end{cases}$; b) $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = -2\sqrt{3} \\ \mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}y = 2\sqrt{3} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2\cos x + \sqrt{3}\cos y = 1 + \sqrt{3} \\ 4\cos x \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

19. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x - y = a \\ \frac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}y} = \frac{b}{c}. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = \pi \\ \frac{\mathrm{tg}x}{a} = \frac{\mathrm{tg}y}{b} = \frac{\mathrm{tg}z}{c}. \end{cases}$ unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

20. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\mathrm{tg}x < \sqrt{3}$; b) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3}-1)\sin x - \sqrt{3} < 0$;

d) $\cos x > \mathrm{tg}x$; e) $\sin x > \sin 3x$.

21. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x > 2$; b) $\sin(3\cos x) > 0$; c) $\sin x + \cos x > 1$.

22. Să se rezolve inecuaţia: $\arcsin(x^2 - 1) > \frac{\pi}{6}$.

23. Să se rezolve inecuaţia: $\arcsin(2x - 1) < \arcsin(1 - x)$.

24. Să se rezolve inecuaţia: $a^{2\sin x} > a^{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$.

25. Să se rezolve inecuaţia: $\log_a(\sin x + \sqrt{3}\cos x) < 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

26. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:
$$\begin{cases} \sin(x-y) = 2\cos x \cos y \\ \sin(y-z) = 2\sin y \cos z \\ \sin(x+z) = 4\cos x \cos z. \end{cases}$$
27. Pentru $a, r \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze suma:
$$S = \cos a + \cos(a+r) + \cos(a+2r) + \ldots + \cos(a+(n-1)r).$$
28. Pentru $a, r \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze suma:
$$S = \sin a + \sin(a+r) + \sin(a+2r) + \ldots + \sin(a+(n-1)r).$$
29. Pentru $a, r \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze sumele:
a) $S_1 = \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n+1)a$;
b) $S_2 = \sin a \sin 2a + \sin 2a \sin 3a + \ldots + \sin na \sin(n+1)a$.
30. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice valoare a numărului real n, să se arate că:
a) $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} \sin^4 x - \ldots$
b) $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$

Capitolul II.
PROGRESII ARITMETICE ŞI PROGRESII GEOMETRICE

1. Să se determine primul termen şi raţia unei progresii aritmetice, ştiind că:
a) $S_{100} = 350$ şi $S_{200} = 800$;
b) $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 24 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 = -2079 \end{cases}$; c) $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 56 \\ a_1 a_2 a_3 = -48. \end{cases}$
2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_{16} = 233$. Să se calculeze S_{31}.
3. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc: $S_n = a$ şi $S_m = b$ $(n, m \in \mathbb{N}^*$, $n < m)$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$. Să se calculeze primul termen şi raţia progresiei.
4. Dacă $\sin(-a+b+c)$, $\sin(a-b+c)$, $\sin(a+b-c)$ sunt în progresie aritmetică, să se arate că şi $\mathrm{tg}a$, $\mathrm{tg}b$, $\mathrm{tg}c$ sunt în progresie aritmetică. Reciproca este adevărată?
5. Dacă notăm cu S_1, S_2 şi respectiv S_3 suma primilor n_1, n_2 şi respectiv n_3 termeni ai unei progresii aritmetice, să se arate că are loc relaţia:
$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$
6. Să se arate că numerele $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nu pot fi termenii unei progresii aritmetice.
7. Să se arate că numerele $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, nu pot face parte din aceeaşi progresie aritmetică.
8. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ numere reale în progresie aritmetică.
Se notează cu $S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$. Să se arate că: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1} = \frac{2^n S_{n+1}}{n+1}$.

9. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, ştiind că al şaselea termen al dezvoltării binomului $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^n$ este egal cu 21, iar coeficienţii binomiali ai termenilor doi, trei şi patru sunt în progresie aritmetică.

10. Trei numere reale strict pozitive sunt în progresie aritmetică şi au suma egală cu 45. Dacă din primul număr scădem 7, din al doilea număr scădem 5, iar la al treilea număr adunăm 6 se obţin trei numere în progresie geometrică. Să se afle numerele.

11. Să se arate că dacă x, y, z sunt unghiurile unui triunghi, atunci $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{ctg} y$, $\operatorname{ctg} z$ sunt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă $\sin^2 x$, $\sin^2 y$, $\sin^2 z$ sunt în progresie aritmetică.

12. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o progresie aritmetică finită cu $a_1 > 0$ şi raţia $r > 0$. Să se arate că are loc inegalitatea:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Caz particular: pentru $a = r = 1$ se obţine inegalitatea:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

13. Să se arate că suma cuburilor a n numere întregi în progresie aritmetică este divizibilă cu suma acestor numere.

14. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ sunt termenii unei progresii aritmetice, să se calculeze suma:

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_2 + a_3}{a_2^2 a_3^2} + \ldots + \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} \quad (a_k \neq 0,\ \forall k = \overline{1, n+1}).$$

15. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 \neq 0$ şi $r \neq 0$. Să se calculeze următoarele sume în funcţie de a_1, r şi n:

$$S_1 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4 a_5} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}};$$

$$S_2 = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4}}.$$

16. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $r > 0$ şi $a_1 > 0$. Să se calculeze următoarele sume în funcţie de a_1, r şi n:

$$S_1 = \operatorname{arctg} \frac{r}{1 + a_1 a_2} + \operatorname{arctg} \frac{r}{1 + a_2 a_3} + \ldots + \operatorname{arctg} \frac{r}{1 + a_n a_{n+1}};$$

$$S_2 = \frac{1}{\cos a_1 \cdot \cos a_2} + \frac{1}{\cos a_2 \cdot \cos a_3} + \ldots + \frac{1}{\cos a_n \cdot \cos a_{n+1}},$$

(unde pentru suma S_2 am presupus $a_n \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$).

17. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $r, a_1 \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze suma: $S = C_{a_1}^2 + C_{a_2}^2 + \ldots + C_{a_n}^2$ în funcţie de a_1, r şi n.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încât numerele:

$$a_1 \sqrt[n]{\frac{a_1^{n-1}}{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}};\quad a_2 \sqrt[n]{\frac{a_2^{n-1}}{a_1 a_3 \cdot a_4 \ldots \cdot a_n}}, \ldots, a_n \sqrt[n]{\frac{a_n^{n-1}}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}}$$

sunt în progresie aritmetică. Să se arate că şi numerele $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ sunt, de asemenea, în progresie aritmetică.

19. Să se determine numărul real x astfel încât numerele 3^x, 5^x, 4^x, să fie, în această ordine, în progresie aritmetică.

20. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formează o progresie aritmetică cu termeni strict pozitivi, să se arate că:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_k}\right)^4} \leq \frac{n-1}{16 a_1 a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

21. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termenii strict pozitivi. Să se arate că are loc egalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{a_k} + \sqrt[3]{a_{k+1}} + \sqrt[3]{a_{k+2}}\right)^9} \leq \frac{n}{2 \cdot 3^9}\left(\frac{1}{a_2 a_{n+1} a_{n+2}} + \frac{1}{a_1 a_2 a_{n+1}}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3.$$

22. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ şi $r > 0$ şi notăm cu $N = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}$. Să se arate că: $N < \sqrt{\frac{a_1}{a_1 + 2(n+1)r}}$.

23. Dacă $a_1; a_2; \ldots; a_n$ reprezintă termenii strict pozitivi ai unei progresii aritmetice cu raţia $r > 0$, să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\frac{2}{a_0 + a_n} \cdot \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{n}{r}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}\right).$$

24. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu toţi termenii strict pozitivi ($r > 0$ şi $a_1 > 0$). Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{2}{r}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}\right) < \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}} < \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\sqrt{a_1 a_{n+1}}}\right)\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}\right).$$

25. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ şi $r > 0$. Să se demonstreze, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, inegalitatea:

$$\frac{3}{r}\left(\sqrt[3]{a_{n+1}} - \sqrt[3]{a_1}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{a_1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a_2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{a_n^2}} < \left(\frac{3}{r} + \frac{\sqrt[3]{a_{n+1}} + \sqrt[3]{a_1}}{\sqrt[3]{a_1^2 a_{n+1}^2}}\right)\left(\sqrt[3]{a_{n+1}} - \sqrt[3]{a_1}\right).$$

26. Să se formeze o progresie aritmetică cu n termeni pozitivi ştiind că produsul dintre primul termen şi raţie este a, iar suma progresiei este minimă.

27. Într-un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = a$, $a_2 = b$ ($a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$) se ştie că orice termen, începând cu al treilea, este media aritmetică a ultimilor doi termeni precedenţi lui.

a) Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_n = a_{n+1} - a_n$ este o progresie geometrică şi să i se calculeze raţia.

b) Să se găsească expresia termenului general a_n în funcţie de n, a, b.

28. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni strict pozitivi formează o progresie aritmetică, dacă şi numai dacă:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3.$$

29. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule este o progresie aritmetică, dacă şi numai dacă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, are loc relaţia:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

30. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule. Să se arate că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul natural $n \geq 3$ are loc relaţia:

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

31. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termenii nenuli şi notăm cu

$$P_n=\left(1-\frac{r^2}{a_2^2}\right)\left(1-\frac{r^2}{a_3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{r^2}{a_{n+1}^2}\right).$$

Să se arate că şirul $(y_n)_{n\geq 2}$, definit prin $y_n=\dfrac{nP_n}{1-P_n}$ este, de asemenea, o progresie aritmetică şi să se afle raţia acesteia.

32. Se consideră progresiile aritmetice $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$ şi $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ Demonstraţi că termenii lor comuni formează o nouă progresie aritmetică şi determinaţi termenul ei general.

33. Fie polinomul $f=\dfrac{X^{n-1}}{a_1a_2}+\dfrac{X^{n-2}}{a_2a_3}+\ldots+\dfrac{X}{a_{n-1}a_n}-\dfrac{n-1}{a_1a_n}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt termenii unei progresii aritmetice cu $a_1 > 0$ şi $r > 0$. Să se arate că $\alpha = 1$ este rădăcină a polinomului f şi să se determine ordinul ei de multiplicitate.

34. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$ să fie numere reale în progresie aritmetică.

35. Să se arate că un şir neconstant de numere naturale nenule $(x_n)_{n\geq 0}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă există $a > 0$, astfel încât:

$$x_{n+1}=x_n+\left[\frac{x_n}{n+a}\right],\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

36. Să se determine progresiile aritmetice de numere naturale, pentru care suma primilor n termeni este pătrat perfect.

37. Să se determine numerele: $C_n^{k+1}, A_n^k, C_{n+1}^{k+1}, C_{n+2}^{k+1}$, astfel încât primele trei să fie în progresie aritmetică şi ultimele trei în progresie armonică. (Spunem că trei numere reale nenule a, b, c sunt în progresie armonică, dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia: $b=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$.)

38. Se dau cinci numere reale distincte, nenule în progresie geometrică, astfel încât al treilea dintre ele este media aritmetică a celorlalte patru. Să se afle numerele.

39. Cinci numere reale nenule sunt în progresie geometrică. Al doilea număr este egal cu cea mai mare rădăcină a ecuaţiei $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x=34$, iar al cincilea număr este egal cu soluţia ecuaţiei: $3^{\log_5 x}+x^{\log_5 4}=x$.

Să se afle cele cinci numere.

40. Se dau şase numere reale nenule în progresie geometrică, astfel încât primul termen este egal cu cea mai mare soluţie a ecuaţiei $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+1=6\left(\sqrt{2}+1\right)^x$, iar al patrulea termen este cea mai mare soluţie a ecuaţiei $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{\lg x+7}=10^{\lg x+1}$.

Aflaţi termenii şi raţia progresiei.

41. Să se afle primul termen şi raţia unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că:

a) $\begin{cases} b_1+b_4=140 \\ b_2+b_3=60 \end{cases}$; b) $\dfrac{S_{20}}{S_{60}}=\dfrac{1}{3}$.

42. Pot fi numerele; 9, 10, 11 termenii (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii geometrice?

43. Pot fi numerele; $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ termenii (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii geometrice?

44. Să se demonstreze că pentru orice număr prim p, numărul:

$$N=\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123456789$$

se divide prin p

45. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ o progresie geometrică cu raţia $q\neq 0$ şi $a_0\neq 0$. Să se arate că şirul $(A_n)_{n\geq 0}$, definit prin $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a_k$ este, de asemenea, o progresie geometrică a cărei raţie se cere a se determina.

46. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $q>0$ şi $b_1\neq 0$. Notăm cu S_1, S_2, S_3 suma primilor n_1, n_2, şi respectiv n_3 termeni ai progresiei. Să se arate că dacă S_1, S_2, S_3 sunt în progresie aritmetică (în această ordine) atunci şi b_{n_1+1}, b_{n_2+1}, b_{n_3+1} sunt, în această ordine, tot în progresie aritmetică.

47. Să se afle patru numere reale în progresie geometrică ştiind că produsul lor este egal cu 81, iar suma dintre primul şi ultimul este egală cu 27.

48. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu raţia $q>0$, $q\neq 1$.

a) Să se calculeze $P_n=b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n$ în funcţie de b_1, b_n şi n.

b) Dacă $P_{20}=P_{60}$, să se calculeze P_{80}.

49. Fie numerele $a,b,c\in\mathbb{R}^*$. Să se arate că a, b, c sunt în progresie geometrică dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\left(a^n+b^n+c^n\right)\left(a^n-b^n+c^n\right)=a^{2n}+b^{2n}+c^{2n},\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n \text{ impar}.$$

50. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu raţia $q>0$, $b_1>0$, $q\neq 1$. Notăm cu $P_n=b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n$ şi considerăm $n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $n_1<n_2<n_3$. Să se arate că are loc relaţia:

$$P_{n_1}^{2n_1^{-1}}\cdot q^{-n_1}=P_{n_2}^{2n_2^{-1}}\cdot q^{-n_2}=P_{n_3}^{2n_3^{-1}}\cdot q^{-n_3}.$$

51. Într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, $b_1>0$, $q>0$, $q\neq 1$ se cunosc: $P_p=a$ ($a\in\mathbb{R}$, $a>0$) şi $P_m=b$ ($b\in\mathbb{R}$, $b>0$), unde $p<m$ şi $P_n\overset{\text{def}}{=\!=}b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Să se determine b_1 şi q.

52. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu a_1 şi r daţi. Să se calculeze suma:

$$S = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_n}.$$

53. Se dă ecuaţia: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}^*$ sunt numere reale în progresie geometrică, cu raţia diferită de $+1$ sau -1. Să se arate că dacă toate rădăcinile ecuaţiei sunt reale, atunci ele nu pot fi în progresie aritmetică.

54. Fie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ numere reale nenule în progresie aritmetică, cu a_1, r daţi şi $b_1,b_2,\ldots,b_n$, numere reale nenule în progresie geometrică cu b_1, q daţi. Să se calculeze sumele:

$S_1 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}$;
$S_2 = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$;
$S_3 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \ldots + (a_n+b_n)^2$;
$S_4 = (a_1+b_1)^3 + (a_2+b_2)^3 + \ldots + (a_n+b_n)^3$,

în funcţie de n, a_1, b_1, r, q.

55. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termenii strict pozitivi ($b_1>0$, $q>0$). Să se calculeze suma:

$$S = \sqrt[k]{b_1} + \sqrt[k]{b_2} + \ldots + \sqrt[k]{b_n}, \text{ unde } k\in\mathbb{N},\ k\geq 2.$$

56. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni nenuli ($b_1, q\in\mathbb{R}^*$). Să se calculeze sumele:

$S_1 = \frac{1}{b_1b_2} + \frac{1}{b_2b_3} + \ldots + \frac{1}{b_{n-1}b_n}$;
$S_2 = b_1b_2 + b_2b_3 + \ldots + b_{n-1}b_n$;
$S_3 = b_1b_2b_3b_4 + b_2b_3b_4b_5 + \ldots + b_{n-3}b_{n-2}b_{n-1}b_n$.

57. Să se calculeze suma:

$$S = a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \ldots + \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{n \text{ ori}}, \quad \text{unde } a\in\{1;2;\ldots;9\}.$$

58. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu raţia $q>0$, $q\neq 1$. Se notează cu: $S_1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$; $S_2 = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_b}$; $P_n = b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n$.

Să se arate că: $P_n^2 = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^n$.

59. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $q>0$, $q\neq 1$ şi $b_1\neq 0$. Să se calculeze, în funcţie de b_1, q şi n, suma:

$$S = \frac{1}{\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}} + \frac{1}{\frac{1}{b_2^2}+\frac{1}{b_3^2}} + \ldots + \frac{1}{\frac{1}{b_{n-1}^2}+\frac{1}{b_n^2}}.$$

60. Să se demonstreze că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive este o progresie geometrică dacă şi numai dacă:

$$b_1b_2\cdot\ldots\cdot b_n = \sqrt{(b_1b_n)^n},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$$

61. Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul natural $n \geq 2$, are loc relaţia:

$$b_0C_n^0 + b_1C_n^1 + \ldots + b_nC_n^n = \frac{(b_1+b_0)^n}{b_0^{n-1}}, \quad b_0 \neq 0.$$

62. Să se arate că şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică dacă şi numai dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, are loc relaţia:

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{b_1 b_n}.$$

63. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{30} = 0$; b) $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{30} = 0$.

64. Să se determine $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $x \neq 1$, astfel încât numerele: $2^{\log_x 3} - 4$, $2^{\log_x 3}$, $2^{1+\log_x 3}$, să fie în progresie geometrică.

65. Se consideră o progresie aritmetică şi una geometrică, ambele cu termeni pozitivi. Dacă trei termeni oarecare ai progresiei aritmetice sunt egali cu termenii de acelaşi rang din progresia geometrică, atunci cele două progresii coincid.

66. Să se calculeze suma:

$$S = 1 + \frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^4} + \frac{7}{5^6} + \ldots + \frac{2n+1}{5^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

67. Se construieşte şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel: a_1, a_2, a_3 sunt în progresie geometrică, a_2, a_3, a_4 sunt în progresie aritmetică, a_3, a_4, a_5 sunt în progresie geometrică şi aşa mai departe. Să se exprime termenul general a_n în funcţie de $a_1 = a$, $a_2 = b$ şi n, unde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

68. Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu $b_1 > 0$ şi $q > 0$, $q \neq 1$. Să se arate că:

$$b_1 b_n \leq \left(\frac{b_{n+1} - b_1}{n(q-1)}\right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2.$$

69. Se notează cu $a_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ radicali}}$, numărul radicalilor suprapuşi fiind egal cu n.

Să se arate că $\dfrac{3 - a_n}{3 - a_{n-1}} > \dfrac{1}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

70. Fiecare din numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal cu $+1$ sau -1. Se ştie că: $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Să se arate că n este divizibil cu 4.

71. Fie $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ şi $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se găsească toate valorile lui n pentru care a_n este divizibil cu 11.

72. Se consideră şirul de termen general $a_n = 2n^2 - 3n + 4$, $n \geq 1$. Să se arate că:

1) dacă un număr din şir se divide cu 4, atunci numărul următor, mărit cu 1 se divide cu 4;

2) din oricare trei termeni consecutivi ai şirului, doi se divid cu 3.

3) Este şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică?

73. Într-un şir finit de numere reale, suma oricăror 7 termeni consecutivi este negativă, iar suma oricăror 11 termeni consecutivi este pozitivă. Să se determine numărul maxim de termeni ai unui astfel de şir.

74. Se ştie că suma totală a m numere naturale pare nenule, diferite două câte două şi a n numere naturale impare, diferite două câte două, nu depăşeşte 1993. Ce valoare maximă poate avea $3m + 4n$?

75. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră numărul $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Să se arate că:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2} + \frac{1}{9a_3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2a_n^2} \leq \frac{3n-2}{2n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

76. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea:

$$1 \cdot \sqrt{2!} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{n!} \leq \frac{(n+1)!}{2^n}.$$

77. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin: $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+k}^{n-k}$, $n \geq 1$. Să se arate că:

a) $2a_n \leq a_{n+1} \leq 3a_n$, $\forall n \geq 1$;

b) nu există tei termeni distincţi ai şirului în progresie aritmetică.

78. Primul termen al unui şir de numere este 2, al doilea este 3, şi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, dacă $n \geq 3$. Să se determine termenul general al şirului şi să se calculeze suma primilor n termeni.

79. Fie $a, b > 0$ şi $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right)$, $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{b}{a_1}\right), \ldots, a_k = \frac{1}{2}\left(a_{k-1} + \frac{b}{a_{k-1}}\right)$, $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = \left(\frac{a_1 - \sqrt{b}}{a_1 + \sqrt{b}}\right)^{2^{n-1}}$.

80. Notăm cu x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se determine numerele a, b, c, x_1, x_2, ştiind că numerele a, x_1, b, x_2, c formează, în această ordine, o progresie aritmetică.

81. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ o progresie aritmetică cu raţia $r > 0$ şi $a_0 > 0$. Să se calculeze produsul:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2a_k^2 + \mathrm{i}r^2}{\sqrt{(a_{k-1}^2 + a_k^2)(a_{k+1}^2 + a_k^2)}}, \quad \text{unde } \mathrm{i}^2 = -1.$$

82. a) Să se demonstreze că pentru orice număr natural n are loc inegalitatea:

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2.$$

b) Fie $a_n \in (0, \infty)$, $\forall n \geq 1$, cu proprietatea că

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 \ldots + a_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se determine a_{2003}.

Capitolul III. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

III.1. Permutări, Aranjamente, Combinări

1. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}=72$; b) $12\dfrac{(n-5)!}{(n-3)!}=1$; c) $\dfrac{(n-6)!}{(n-4)!}=\dfrac{1}{12}$;
d) $(n-3)!+n=n^2$; e) $\dfrac{A_n^3}{(n-2)!}=\dfrac{20}{(n-3)!}$; f) $A_{n+2}^{m+2}\cdot(n-m)!=110n!$;
g) $(n+2)!=132(n-m)!A_n^m$; h) $n!=(n+1)^2-1$.
2. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $7A_n^3=15C_n^{n-5}$; b) $4C_{n-1}^{n-3}-6C_n^{n-3}+7=C_{n-2}^{n-3}$;
c) $C_{n+5}^{n+1}=25A_{n+3}^2$; d) $A_n^0+A_n^1+2A_{n+1}^2+3A_{n+2}^3=A_{5-n}^{5-n}$.
3. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $A_p^q=p+q$; b) $A_n^4=5n+4$.
4. Să se rezolve următoarele inecuaţii:
a) $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}\geq 110$; b) $C_{10}^{x-1}>2C_{10}^x$; c) $A_n^5\leq 42A_n^3$; d) $C_{2x}^{10}\geq 2C_{2x}^8$.
5. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:
a) $\begin{cases} 4C_{5x}^{y-2}=7C_{5x}^{y-3} \\ A_{5x}^{y-2}=7\cdot A_{5x}^{y-3} \end{cases}$; b) $3C_{x+1}^{y+1}=8C_{x+1}^y=36C_{x+1}^{y-1}$;
c) $\begin{cases} A_{2x}^{y-2}=8A_{2x}^{y-3} \\ C_{2x}^{y-2}=\dfrac{8}{3}C_{2x}^{y-3} \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+2y=9 \\ C_{2x}^{x-y}+C_{2x}^y=C_{2x}^x-87 \end{cases}$.
6. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $\left[\dfrac{C_{2x+1}^{2x-1}}{6}\right]=0$; b) $\left[\dfrac{C_{x+3}^{x-1}}{12}\right]=2$.
7. Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, are loc inegalitatea:

$$(n!)^2>n^n.$$

8. Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea: $(3n)!>n^{3n}$.
9. Să se demonstreze că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}<3.$$

10. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, are loc inegalitatea:

$$n^{2n}>(2n)!.$$

11. Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 6$, au loc inegalităţile:

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n>n!>\left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

12. Să se arate că pentru orice număr natural $n\geq 2$, are loc inegalitatea:

$$\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

13. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left[\dfrac{C_{x+2}^{x}}{3}\right]=C_7^2(x+1)$; b) $\left[\dfrac{C_{x+3}^{x+1}}{4}\right]=\dfrac{x+3}{2}$.

14. Să se aducă la o formă mai simplă expresia:

$$\left(\frac{C_m^p}{C_m^{p-1}}-\frac{C_{m+k}^{p+k}}{C_{m+k}^{p+k-1}}\right):\left(\frac{C_n^p}{C_n^{p-1}}-\frac{C_{n+k}^{p+k}}{C_{n+k}^{p+k-1}}\right).$$

15. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia: $(x+y+z)!=720C_{x+y+1}^{x+1}$.

16. Să se determine perechile (m,n) de numere naturale, care verifică egalitatea:

$$\frac{(n+2)!}{A_n^m(n-m)!}=132.$$

17. Să se determine $x,y\in\mathbb{Z}$, astfel încât:

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=xC_{2n-1}^{n}+yC_{2n+1}^{n},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

18. Să se prelucreze expresia, aducând-o la forma cea mai simplă:

$$E=\frac{A_n^k}{n^2-n+1}\cdot\frac{A_{n+k}^k+A_{n+k}^{k+2}}{(n+k)!C_n^k}.$$

19. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E=\dfrac{C_n^k}{C_{n+1}^k}-\dfrac{C_{n+1}^k}{C_{n+2}^k}$; b) $F=\dfrac{(n+1)C_n^k}{(k+1)\left(C_n^k+C_n^{k+1}\right)}$.

20. Să se determine $n\in\mathbb{N}$, pentru care are sens numărul $C_{3n-2}^{n^2-10n+21}$.

III.2. Binomul lui Newton

1. Să se afle la ce putere apare numărul natural 2 în descompunerea fiecărui număr natural de mai jos:

a) 10!; b) 50!; c) 100!.

Puteţi generaliza?

2. Să se arate că numărul $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ este întreg şi pozitiv pentru $\forall n\in\mathbb{N}$.

3. Să se determine numărul de termeni raţionali ai dezvoltărilor:

a) $\left(\sqrt{2}+3\right)^{50}$; b) $\left(\sqrt[4]{2}+3\right)^{50}$; c) $\left(\sqrt{3}+\sqrt[6]{5}\right)^{60}$; d) $\left(\sqrt[5]{2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4}\right)^{100}$.

4. Să se determine suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltărilor umătoare:

a) $(2x-y)^{20}$; b) $(8a-6ab)^{10}$; c) $\left(\sqrt{y}+2\sqrt{x}\right)^{10}$; d) $\left(9x^2-7y^3\right)^8$.

5. Să se găsească cel mai mare termen din dezvoltarea următoare:

a) $\left(\dfrac{7}{8}+\dfrac{1}{8}\right)^{100}$; b) $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\right)^{100}$.

6. Să se afle coeficienţii lui x^6 în dezvoltările:

a) $(1+3x)^7$; b) $\left(\sqrt{2}x+2\right)^{10}$ c) $[(2i+1)x+i]^{15}$.

7. Să se afle coeficienţii lui x^5 în dezvoltările:

$$(1+x+x^2)^6;\ (2+x-x^2)^6;\ (1+2x-x^3)^6.$$

8. Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ coeficienţii dezvoltării $(1+x+x^2)^n$. Să se arate că:

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2=\frac{1}{2}a_n\left[1-(-1)^n a_n\right].$$

Indicaţie. Se foloseşte identitatea: $(1+x+x^2)(1-x+x^2)=(1+x^2+x^4)$

9. Fie $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ coeficienţii dezvoltării $(1+x+x^2)^n$. Să se arate că:

$$a_0+a_3+a_6+\ldots=a_1+a_4+a_7+\ldots=a_2+a_5+a_8+\ldots=3^{n-1}.$$

10. Să se determine $a\in\mathbb{R}$, astfel încât coeficientul termenului ce îl conţine pe x^4 din dezvoltarea $(1+ax+x^2)^{10}$ să fie egal cu 45.

11. Ştiind că suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării: $(a+x)^p+(a+x)^{p+2}$ este 1280, să se determine coeficientul lui x^8 şi coeficientul lui x^5.

12. Să se determine $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât dezvoltarea $\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\right)^n$ să aibă exact 10 termeni raţionali.

13. Să se demonstreze că:

a) $C_n^0C_n^p+C_n^1C_n^{p+1}+\ldots+C_n^{n-p}C_n^n=\dfrac{(2n)!}{(n-p)!(n+p)!},\ 0\le p\le\dfrac{n}{2}$.

b) $C_n^{2k}C_n^0-C_n^{2k-1}C_n^1+\ldots+(-1)^{k-1}C_n^{k+1}C_n^{k-1}+(-1)^k\dfrac{1}{2}\left(C_n^k\right)^2=(-1)^k\dfrac{C_n^k}{2}$, $1\le k\le\left[\dfrac{n}{2}\right]$.

14. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ şi $n\in\mathbb{N}^*$ ştiind că, în dezvoltarea:

$$\left(\sqrt{2^{\lg(11-3^x)}}+\sqrt{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^n,$$

coeficienţii termenilor de rang 2, 3, şi 4 sunt: primul, al treilea şi al cincilea termen ai unei progresii aritmetice şi termenul de rang 6 este egal cu 84.

15. Fie dezvoltarea: $\left(\sqrt{x\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^{2002}$.

Să se determine rangul termenului care nu îl conţine pe x.

16. Fie dezvoltarea: $\left(\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, unde $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Ştiind că raportul coeficienţilor binomiali ai termenilor de rang 7 şi rang 5 este egal cu $\dfrac{28}{15}$, să se studieze dacă există un termen liber al dezvoltării.

17. Să se determine coeficientul termenului care îl conţine pe x^8 în dezvoltarea $(x+1)^8(x-1)^4$.

18. Să se determine coeficientul termenului care îl conţine pe x^{10} în dezvoltarea $(x-2)^5(x+2)^{10}$.

19. Fie dezvoltarea $(1+x)^{43}$. Să se arate că sunt egali coeficientul termenului de rang $2k+1$ şi cel al termenului de rang $k+2$. Să se determine apoi k.

20. Fie dezvoltarea $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$. Găsiţi termenul liber al dezvoltării.

21. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x\in\mathbb{R}$. Se cere să se verifice dacă există valori ale lui x astfel încât diferenţa dintre termenii al şaselea şi al patrulea ai dezvoltării să fie 56, ştiind că numerele C_n^0, $\frac{C_n^1}{2}$, $\frac{C_n^2}{4}$, sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

22. Fie dezvoltarea $\left(9x-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{x}}\right)^n$, $x\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$. Să se determine n, astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 105, apoi să se verifice dacă există un termen al dezvoltării care să îl conţină pe x^5.

23. Diferenţa dintre coeficientul binomial al celui de-al treilea termen şi coeficientul binomial al celui de-al doilea termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}+x^{\lg x}\right)^n$, este 27. Pentru ce valori ale lui x, al doilea termen este egal cu 900?

24. Ştiind că suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{\sqrt{y^4}}}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$, este egală cu 512, să se stabilească dacă există un termen în care x şi y au puteri egale.

25. Dacă $n\geq 2$, să se arate că numărul $C^2_{C^2_n}$ este divizibil cu 3.

26. Să se arate că C_p^k este divizibil cu p, pentru orice p număr prim şi $0<k<p$.

27. Să se arate că C_{m+n}^n este divizibil cu $m+n$, dacă m şi n sunt numere naturale prime între ele.

28. Să se arate că:

$$1-2C_{6n}^2+2^2C_{6n}^4-2^3C_{6n}^6+\ldots=5^{2n}-2\cdot 5^{2n-2}C_{2n}^2+2^2\cdot 5^{2n-4}C_{2n}^4-\ldots$$

pornind de la $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^{6n}=\left[\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3\right]^{2n}$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

29. Să se demonstreze că, pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

$$1-3C_{3n}^2+3^2C_{3n}^4-3^3C_{3n}^6+\ldots=(-1)^n\cdot 2^{3n} \quad \text{şi} \quad C_{3n}^1-3C_{3n}^3+3^2C_{3n}^5-\ldots=0.$$

30. Să se demonstreze că $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 0$, este adevărată egalitatea:

$$1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=2^{n-1}(n+2).$$

31. Să se arate că nu există patru coeficienţi binomiali consecutivi: C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2}, C_n^{k+3}, care să fie în progresie aritmetică.

32. Calculaţi sumele:

a) $S_1=1!3+2!7+\ldots+n!(n^2+n+1)$;

b) $S_2=1!2+2!5+\ldots+n!(n^2+1)$;

c) $S_3=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$;

d) $S_4=\frac{5}{3!}+\frac{11}{4!}+\ldots+\frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$;

e) $S_5 = \frac{1}{3!} + \frac{5}{4!} + \ldots + \frac{n^2+n-1}{(n+2)!}$.

33. Să se demonstreze că:

$$C_n^0 + C_n^1 - 3\left(C_n^2 + C_n^3\right) + 3^2\left(C_n^4 + C_n^5\right) - 3^3\left(C_n^6 + C_n^7\right) + \ldots =$$

$$= (-1)^n 2^n \left(\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2n\pi}{3}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

34. Să se arate că: $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^{k-1} = n2^{n-1}$.

35. Să se arate că:

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n < \sqrt{\frac{4^{n+1}-1}{3}\cdot\frac{n+1}{1}\cdot\frac{n+2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n+n}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

36. Să se arate că: $C_n^{[\frac{n}{2}]} < 2^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 11$.

37. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = C_n^0 - 2C_n^2 + 2^2C_n^4 - 2^3C_n^6 + \ldots; \quad S_2 = C_n^1 - 2C_n^3 + 2^2C_n^5 - 2^3C_n^7 + \ldots.$$

38. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$9^n + 1 + 4\sum_{k=0}^{2n-1} 5^k = C_{2n}^0 \cdot 2^{4n+1} + C_{2n}^1 \cdot 2^{4n-1} + \ldots + C_{2n}^{2n} \cdot 2.$$

39. Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$3\left(C_n^0 \cdot 7^{n-1} + C_n^1 \cdot 7^{n-2} \cdot 2 + \ldots + C_n^{n-2} \cdot 7 \cdot 2^{n-2} + C_n^{n-1} \cdot 2^{n-1}\right) + 2^n =$$

$$= 2^n + 3^{2n-1} + 2 \cdot 3^{2n-3} + \ldots + 3^3 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-1}.$$

40. a) Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$: $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

b) Să se rezolve ecuaţia: $\operatorname{tg}^2 x(1 - \sin^{2n} x) + \operatorname{ctg}^2 x(1 - \cos^{2n} x) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

41. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, există egalitatea:

$$C_n^0 \cdot x_0 + C_n^1 \cdot x_1 + \ldots + C_n^n \cdot x_n = x_{2n},$$

unde $(x_n)_{n\geq 0}$ este şirul lui Fibonacci.

42. Să se arate că numerele: $A = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \cdot C_{2n}^{2k}$ şi $B = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^k \cdot C_{2n}^{2k+1}$ sunt prime între ele, $\forall n \in \mathbb{N}$.

43. Să se arate că: $130!$ este divizibil cu $20! \cdot 31! \cdot 39! \cdot 40!$.

44. Să se arate că: $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < C_{2n}^n < \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}, \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$..

45. Să se verifice care din următoarele afirmaţii este sau nu adevărată:

a) C_{600}^{300} este divizibil cu 11; b) C_{2000}^{1500} este divizibil cu 7; c) C_{300}^{150} este divizibil cu 7.

46. Să se demonstreze că numărul: $N = C_{2n+1}^1 \cdot C_{2n+1}^2 \cdot \ldots \cdot C_{2n+1}^{2n}$ este pătrat perfect.

47. Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc egalitatea:

$$\frac{(n-1)!(n+1)^2(n+2)}{\sqrt[n+1]{(n+2)![1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot n!]^2}} < 2^{n+1}.$$

48. Să se verifice egalitatea: $\sum\limits_{p=2}^{k}(-1)^p\cdot(k-p)!(p-2)! = \dfrac{k![1+(-1)^k]}{k^2}$.

49. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)!}{(2k-1)!!}\cdot 2^{k-1};\quad S_2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!}{k!}\cdot\frac{1}{2^k}.$$

50. Fie şirul dat prin relaţia de recurenţă: $a_n = \dfrac{a_{n-1}(p-n+2)}{k+p+1-n}$, unde $a_1 = (k+p-1)!$. Să se calculeze suma primilor $p+1$ termeni ai şirului.

51. Se consideră dezvoltarea: $\left(\sqrt[3]{x^7} + x^{\log_2 \sqrt[9]{x}}\right)^n$, $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că este soluţia ecuaţiei $y^{\log_6 y} + \log_6^2 y = 38$.

b) Pentru n determinat la punctul a) să se determine x ştiind că al treilea termen al dezvoltării este egal cu $703\cdot 2^{-5292}$.

52. Să se calculeze suma: $S = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\cdot k!}{n^k}\cdot C_n^k$, $n \in \mathbb{N}^*$.

53. Fie $M = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{2k}$, $N = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$ şi $m = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot C_{2n}^{2k}$, $n \geq 1$.

1) Să se calculeze M, N şi m.

2) Să se afle $f(n)$, unde $f(n) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{n}(k-n)^2\cdot C_{2n}^{2k}$.

3) Să se arate că f are un minim care se realizează pentru $n = m$.

54. Fie numerele:

$x_n = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$; $y_n = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots$; $z_n = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots$

Să se arate că:

a) $x_n y_n + x_n z_n + y_n z_n = \dfrac{1}{3}(4^n - 1)$; b) $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = \dfrac{1}{3}(4^n + 2)$.

55. Să se demonstreze egalitatea: $\dfrac{C_k^1 + C_{2k}^2 + \ldots + C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 + C_{2k-1}^2 + \ldots + C_{nk-1}^n} = \dfrac{k}{k-1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ şi $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$.

56. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm sumele: $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; $T_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$; $U_n = \dfrac{1}{2}T_1 + \dfrac{1}{3}T_2 + \ldots + \dfrac{1}{n+1}T_n$. Arătaţi că există numerele întregi a, b, c, d, astfel încât: $T_{1988} = a\cdot S_{1989} - b$, $U_{1988} = c\cdot S_{1989} - d$.

57. Să se arate că $C_{2n}^n \geq \dfrac{2^{2n}}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

58. Să se arate că $\forall m, n \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:

$$m! + \frac{(m+1)!}{1!} + \ldots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}.$$

59. Să se arate că $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$: $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

60. Să se determine coeficientul lui X^2 din polinomul:

$$f = (1+X)^3 + (1+X)^4 + \ldots + (1+X)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3.$$

61. Fie funcţie $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = 2\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_{2n+1}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}$.

Să se calculeze: $\sqrt[n^2]{\frac{f(1)f(2)\cdot \ldots \cdot f(n)}{(2n+1)!!}}$.

62. Să se calculeze suma:

$$S_n = \frac{\sin\alpha}{2\cdot 3}\cdot C_n^1 + \frac{\sin 2\alpha}{3\cdot 4}\cdot C_n^2 + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{(n+1)(n+2)}\cdot C_n^n.$$

63. Să se calculeze suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p+3}\left(\frac{1}{(p-1)!} + \frac{2}{p!} - \frac{3}{(p+1)!}\right), \quad \text{unde } p \in \mathbb{N}^*.$$

64. Se consideră ecuaţia: $(1-x)^{11} + (1+x)^{11} = 2^{11}$.

a) Câte rădăcini reale are ecuaţia? Determinaţi aceste rădăcini.

b) Determinaţi două rădăcini din $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ale ecuaţiei.

65. a) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ este impar.

b) Găsiţi cea mai mare valoare a lui $k \in \mathbb{N}$, astfel încât 2^k divide $\left[(1+\sqrt{3})^n\right]$.

66. Pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, să se arate că:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin^2\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\left(1+\cos^n\frac{\pi}{n}\right); \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^2\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\left(1-\cos^n\frac{\pi}{n}\right).$$

67. a) Să se demonstreze că:

$$C_n^0 - C_{n-1}^1\cdot\frac{1}{4} + C_{n-2}^2\cdot\frac{1}{4^2} - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i\frac{1}{4^i} + \ldots = \frac{n+1}{2^n};$$

(suma se ia după toţi întregii i, $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$).

b) Să se demonstreze că dacă p, q sunt 2 numere diferite şi $p+q=1$, atunci:

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 p\cdot q + C_{n-2}^2 p^2q^2 - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \ldots = \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

68. Să se demonstreze identitatea:

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \ldots + (-1)^n\frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}.$$

69. Să se demonstreze că dacă $m, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m < n$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot k^m \cdot C_n^k = 0.$$

Capitolul IV. NUMERE COMPLEXE

1. Să se determine mulţimile:

$$A = \left\{(x,y)\middle| |z-3\mathrm{i}| = 6;\ z = x+\mathrm{i}y;\ x,y \in \mathbb{R}\right\};$$

$$B = \left\{(x,y)\middle| \frac{1+z}{\overline{z}} \in \mathbb{R};\ z = x+\mathrm{i}y;\ x,y \in \mathbb{R}\right\};$$

$$C = \left\{(x,y)\middle| \operatorname{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0;\ z = x+\mathrm{i}y;\ x,y \in \mathbb{R}\right\};$$

$$D = \left\{(x,y)\middle| \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0;\ z = x+\mathrm{i}y;\ x,y \in \mathbb{R}\right\};$$

$$E = \left\{(x,y)\middle| \frac{z^2-z-2}{z-1} \in \mathbb{R};\ z = x+\mathrm{i}y;\ x,y \in \mathbb{R},\ z \neq 1\right\}.$$

2. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $2z - \frac{1}{2\mathrm{i}}z = 3\mathrm{i} - 1$; b) $(1+3\mathrm{i})z + \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = z - 6 + 4\mathrm{i}$;
c) $(5+3\mathrm{i})z + \frac{2}{1-\mathrm{i}} = \overline{z} + 21 + 5\mathrm{i}$; d) $\mathrm{i}z^2 - 2(1+\mathrm{i})z + 3(2+\mathrm{i}) = 0$;
e) $z^2 - 3z + 3 + \mathrm{i} = 0$; f) $\mathrm{i}z^2 - \mathrm{i}z + (1+\mathrm{i}) = 0$;
g) $2z^2 - z + 8 + 2\mathrm{i} = 0$; h) $(z-1)^n + (z+1)^n = 0$;
i) $(z - \alpha\mathrm{i})^n - (z + \alpha\mathrm{i})^n = 0$; j) $(z - \alpha\mathrm{i})^n + \mathrm{i}(z + \alpha\mathrm{i})^n = 0$, unde $n \in \mathbb{N}$.

3. Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = \frac{1+\alpha\mathrm{i}}{1-\alpha\mathrm{i}}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că:

$$z^n + \overline{z}^n = 2\cos(2n\operatorname{arctg}\alpha).$$

4. Se dă $k \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} = k$, distanţa dintre punctele de afixe $z_1 = \frac{1+\alpha\mathrm{i}}{1-\alpha\mathrm{i}}$ şi $z_2 = \frac{1+\beta\mathrm{i}}{1-\beta\mathrm{i}}$ este constantă.

5. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Să se determine a şi b ştiind că prin transformarea f perechea (z_1, z_2) trece în perechea (z_3, z_4), unde $z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$; $z_3 = -1 + 2\mathrm{i}$; $z_4 = -3 + 6\mathrm{i}$.

6. Să se rezolve ecuaţia: $\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^1 + 1 = 0.$

7. Să se rezolve sistemele de ecuaţii în mulţimea numerelor complexe:
a) $\begin{cases} \mathrm{i}x + 2y = 1 + \mathrm{i} \\ 3x + \mathrm{i}y = 2 - \mathrm{i} \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\mathrm{i}x - 2y = -9 + 5\mathrm{i} \\ x + 3\mathrm{i}y = 4 + 10\mathrm{i} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (2+i)x+(3-i)y=7+i \\ (3+2i)x-(3-2i)y=-2i \end{cases}$; d) $\begin{cases} (1-i)x-2(1-i)y=3(1+i) \\ x+2iy=i-2 \end{cases}$.

8. Să se calculeze suma:

$$S = 1+2i+3i^2+4i^3+\ldots+ni^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

9. Fie $f : \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{3z+2}{2z-1}$.

a) Calculaţi: $\mathrm{Re}(f(i))$; $\mathrm{Re}(f(i)+f(2i)+f(3i))$;

b) Determinaţi partea reală şi partea imaginară a lui $f(z)$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

10. Fie $\alpha = 2\sqrt{3}i$ şi $z = \dfrac{i(\alpha+2)}{\alpha-2}$.

a) Să se scrie sub formă algebrică şi apoi sub formă trigonometrică numărul complex z.

b) Să se calculeze z^{2002}.

11. Fie $\alpha = 1+i$ şi $\omega = \alpha^5+4+3i$.

a) Să se scrie sub formă trigonomterică numărul complex $z = \dfrac{i\alpha}{(\omega-1)^3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2i}$.

b) Să se calculeze rădăcinile de ordin n ale lui α, ω şi z, pentru $n \in \{4; 6; 9; 12\}$.

12. Folosind forma algebrică a numărului $z = (1-i)^5 \cdot \dfrac{1}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}$, să se calculeze $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

13. Se consideră punctele A şi B de afixe $a = 1+i$ şi $b = 1+\sqrt{3}+2i$. Să se determine afixele punctelor M, astfel încât $m(\angle BAM) = \dfrac{\pi}{4}$ şi $AB = AM$.

14. Ştiind că $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos a$, $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

15. Să se arate că numerele complexe z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1.$$

16. Fie a, b, c afixele vârfurilor triunghiului ABC. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă ecuaţia $az^2+bz+c=0$ admite ca rădăcini unul din numerele complexe $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$; $z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

17. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte două câte două cu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ şi $z_1+z_2+z_3 = 0$. Să se arate că cele trei numere complexe sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

18. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ şi $z_1^3+z_2^3+z_3^3 = 3z_1z_2z_3$. Să se arate că cele trei numere complexe sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

19. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe nenule, de acelaşi modul, care satisfac relaţia: $z_3 \cdot z_4 \cdot \ldots \cdot z_n + z_1 \cdot z_4 \cdot z_5 \cdot \ldots \cdot z_n + \ldots + z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_{n-2} = 0$. Să se demonstreze că: $z_1z_2+z_2z_3+\ldots+z_{n-1}z_n = 0$.

20. Să se reprezinte în plan imaginile geometrice ale numerelor complexe z, care îndeplinesc condiţia: $\left|\dfrac{z^2+i}{z^2-3i}\right| = 1$.

21. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^2+x+1=0$; b) $z^2-(2+3\mathrm{i})z-(5-\mathrm{i})=0$;

c) $x^4+x^2+1=0$; d) $x^6+x^3+1=0$.

22. Dacă $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ şi $z_1+z_2+z_3=0$, atunci:

$$|z-z_1|+|z-z_2|+|z-z_3|\geq 3,\quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

23. Să se demonstreze că dacă $z\in\mathbb{C}$, astfel încât $|z|=1$, atunci:

$$|1+z|+|1+z^{2002}|+|1+z^{2003}|\geq 2.$$

24. Să se demonstreze identitatea paralelogramului:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right),\quad \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}.$$

25. Să se arate că dacă $z_1, z_2\in\mathbb{C}$, astfel încât $|z_1|=|z_2|=r$, atunci:

$$\left(\frac{z_1+z_2}{r^2+z_1z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_2}{r^2-z_1z_2}\right)^2\geq\frac{1}{r^2}.$$

26. Fie $a\in\mathbb{C}$. Să se arate că:

a) Dacă $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{\overline{a}}+\dfrac{\overline{a}}{a}$, atunci $z^n+\dfrac{1}{z^n}=\dfrac{a^n}{\overline{a}^n}+\dfrac{\overline{a}^n}{a^n}$.

b) Dacă $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{\overline{a}}-\dfrac{\overline{a}}{a}$, atunci $z^n+\dfrac{(-1)^n}{z^n}=\dfrac{a^n}{\overline{a}^n}+(-1)^n\dfrac{\overline{a}^n}{a^n}$.

27. Dacă $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ şi $z_1+z_2+z_3=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=0$, atunci să se arate că: $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

28. Fie $z\in\mathbb{C}$, astfel încât $|z|=1$. Să se arate că:

$$2002|1+z|+|1+z^2|+\ldots+|1+z^{2\cdot 2002}|+|1+z^{2\cdot 2002+1}|\geq 2\cdot 2002.$$

29. Fie $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}$ numere complexe distincte, având acelaşi modul r. Să se arate că:

$$\frac{1}{|z_1-z_2||z_1-z_3|}+\frac{1}{|z_2-z_1||z_2-z_3|}+\frac{1}{|z_3-z_1||z_3-z_2|}\geq\frac{1}{r^2}.$$

30. Fie numerele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_{2p}$ de acelaşi modul ρ, având argumentele în progresie aritmetică.

Să se arate că expresia $E=\dfrac{(z_1+z_2+\ldots+z_{2p})^p}{\rho^{2p}+z_1z_2\cdot\ldots\cdot z_{2p}}$ este reală.

31. Fie $z_1, z_2, z_3\in\mathbb{C}^*$ distincte două câte două astfel încât $|z_2|=|z_3|=a$ şi $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_2}{z_3}\right)=\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_3}\right)$. Să se arate că $z_1+z_2+z_3=0$, dacă şi numai dacă $|z_1|=a$.

32. Fie numărul complex $z=x+\mathrm{i}y$. Notăm cu $P(z)$ imaginea geometrică a lui z. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\in\mathbb{C}^*$, astfel încât:

i) $P(z_1)$, $P(z_2)$, $P(z_3)$, $P(z_4)$, $P(z_5)$, sunt vârfurile unui pentagon convex Q care conţine în interiorul său originea O a sistemului de coordonate din plan;

ii) $P(\alpha z_1)$, $P(\alpha z_2)$, $P(\alpha z_3)$, $P(\alpha z_4)$, $P(\alpha z_5)$, se află în interiorul lui Q.

Dacă $\alpha = p + iq$ să se arate că $p^2 + q^2 \leq 1$ şi că $p + q\text{tg}\frac{\pi}{5} \leq 1$.

33. Fie $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, trei puncte ale cercului $C(O, R)$, $R > 0$. Să se arate că punctul de afix $\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}$ se găseşte pe acelaşi cerc.

34. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Să se arate că:

$$|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \geq |z_1 - z_2||z_2 - z_3||z_3 - z_1|$$

şi să se precizeze când are loc egalitatea.

35. Fie $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Să se arate că: $\sqrt{2}|1 - z| + \frac{1}{4} \cdot |1 - z^4| \geq |1 - z^2|$.

În ce caz avem egalitate?

36. Se dau numerele complexe distincte a, b, c, astfel încât $|a| = |b| = |c|$ şi $|b + c - a| = |a|$. Să se arate că $b + c = 0$.

37. Fie z_1, z_2, z_3 afixele vârfurilor unui triunghi. Să se arate că triunghiul este echilateral, dacă şi numai dacă afixul centrului său de greutate verifică ecuaţia:

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0.$$

38. Fie $z_1 = \dfrac{z^2}{z+1}$ şi $z_2 = \dfrac{1}{z(z+1)}$. Să se determine $z \in \mathbb{C}$ pentru care z_1 şi z_2 sunt simultan numere reale.

39. Să se rezolve ecuaţia $z^3 + 5iz^2 - (5 + i)z + 3 + 3i = 0$ ştiind că admite o soluţie de forma $z = bi$, unde $b \in \mathbb{R}^*$.

40. Să se determine rădăcinile de ordinul 8 ale numerelor complexe următoare:
$z_1 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)\right]$; $z_2 = (1 + i)^5$; $z_3 = \dfrac{2i - 1}{i + 2}$.

41. Să se determine rădăcinile de ordinul 5 ale numărului complex: $z = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 3i)$.

42. Să se rezolve ecuaţiile în $\mathbb{C}$:
a) $(\sqrt{3} + i)z^5 - (1 + i\sqrt{3}) = 0$; b) $z^7 - 729 = 0$; c) $(1 + i)z^9 = i$;
d) $(z - i)^3 + (z + i)^3 = 0$; e) $(z - 1)^3 + i(z + 1)^3 = 0$.

43. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$; b) $\left(\dfrac{3z+1}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{3z+1}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{3z+1}{z-i}\right) + 1 = 0$.

44. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ sistemul:

$$\begin{cases} x(x - y)(x - z) = 3 \\ y(y - x)(y - z) = 3 \\ z(z - x)(z - y) = 3. \end{cases}$$

45. Să se precizeze dacă există un număr complex z care să îndeplinească simultan condiţiile: $|z - 1 - 2i| = 3$ şi $\text{Re}z \geq 5$.

46. Se consideră în $\mathbb{C}$ următoarele ecuaţii;
a) $z^3 - 3iz^2 - 3z + 8 + i = 0$; b) $z^3 + 8 = 0$.

Să se arate că z_0 este soluţie a ecuaţiei a), dacă şi numai dacă $z_0 - \mathrm{i}$ este soluţie a ecuaţiei b). Să se rezolve apoi ecuaţiile.

47. Să se arate că $\forall z, w \in \mathbb{C}$ este adevărată egalitatea: $|z|^2 + |w|^2 - z \cdot \overline{w} - \overline{z}w = |z-w|^2$;

48. a) Dacă $z, w \in \mathbb{C}$, atunci să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $|z+w| = |z| + |w|$

b) Dacă $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{C}$, să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $|z|^2 = x^2 + y^2$.

49. Se consideră funcţia: $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $f(z) = \dfrac{2\mathrm{i}}{z-1}$.

a) Să se studieze bijectivitatea funcţiei f.

b) Să se rezolve ecuaţia $(f \circ f)(\mathrm{i}z) = z$.

50. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ şi $g : \mathbb{C}\backslash\{-1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$, $g(z) = \dfrac{2\mathrm{i}z}{1+z}$.

a) Să se studieze dacă există f^{-1} şi g^{-1}.

b) Să se rezolve ecuaţiile $f(z) = z$ şi $g(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}z$.

51. Fie $A(1+\mathrm{i})$, $B(5+\mathrm{i})$, $C(1+3\mathrm{i})$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

52. Să se arate că dacă $z_1 = 1 + 10\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + 4\mathrm{i}$, $z_3 = 2 + 13\mathrm{i}$ atunci imaginile lor geometrice sunt coliniare.

53. Verificaţi dacă imaginile geometrice ale numerelor complexe $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_3 = -8 - 3\mathrm{i}$, $z_4 = -4 - \mathrm{i}$ se află pe aceeaşi dreaptă. Puteţi determina ecuaţia acestei drepte?

54. Se consideră în planul complex punctele A, B, C de afixe: $1+\mathrm{i}$, $6+\mathrm{i}$, $3+5\mathrm{i}$. Să se determine afixul punctului D, astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

55. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

$z_1 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$; $z_2 = 2 + \sqrt{3} - \mathrm{i}$; $z_3 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$; $z_4 = -1 - \mathrm{i}$; $z_5 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$;

$z_6 = 1 - \mathrm{i}$; $z_7 = \mathrm{i}$; $z_8 = 5\mathrm{i}$; $z_9 = 3$; $z_{10} = -\dfrac{1}{2}$.

Să se scrie apoi, sub formă trigonometrică conjugatele lor.

56. Să se scrie sub formă algebrică numerele complexe, scrise sub formă trigonometrică:

$z_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$; $z_2 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi$; $z_3 = \cos\dfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{2}$; $z_4 = \cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$;

$z_5 = \cos\dfrac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{3\pi}{4}$; $z_6 = \cos\dfrac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{8}$; $z_7 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{3}$; $z_8 = \cos\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$;

$z_9 = \cos\dfrac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{12}$; $z_{10} = \cos\dfrac{7\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{3}$; $z_{11} = \cos\dfrac{5\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{8}$.

57. Fie numerele complexe:

$z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $z_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + ir\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $z_4 = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Să se calculeze:

a) $S_1 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4$;

b) $S_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$;

c) $S_3 = z_1z_2z_3 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 + z_1z_2z_4$.

Să se formeze ecuaţia de grad minim care admite ca rădăcini numerele complexe z_1, z_2, z_3, z_4.

58. Să se determine modulul şi argumentul redus pentru numerele complexe:

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30};\quad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^{60};\quad \frac{(1-i)^3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^5}{(\sqrt{3}+i)^4};$$

$$\frac{(-1+i)^6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2}{\cos 120^0+i\sin 120^0};\quad \frac{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}.$$

59. Să se arate că:

a) $\dfrac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{\sin\alpha-i\cos\alpha}=\sin 2\alpha+i\cos 2\alpha$;

b) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{n\alpha}{2}+i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6}-i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$.

60. Să se calculeze:

a) rădăcinile de ordinul 6 ale următoarelor numere complexe:

$$-1+i;\quad 1+i\sqrt{3};\quad \frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}};\quad -i;$$

b) rădăcinile de ordinul 3 ale numărului complex: $2i+2$;

c) rădăcinile de ordinul 8 ale numerelor complexe: $1+i$; $\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i}$;

d) rădăcinile de ordinul 12 ale numărului complex: $-\sqrt{3}+i$.

61. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $z^3-6z-9=0$; b) $z^3+(4-5i)z^2-(3+34i)z-2+39i=0$;

c) $z^2+(1-7i)z-6+14i=0$; d) $z^2+(4-6i)z-5-20i=0$.

62. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $(1-iz)^6+(1+iz)^6=\left(\sqrt{1+z^2}\right)^6$; b) $(z+i)^n-(\cos\alpha+i\sin\alpha)(z-i)^n=0$;

c) $(2z)^n-(z+i)^n=0$, pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

63. Să se demonstreze că: $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

64. Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $z^2+z+1=0$. Să se calculeze: $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega^k$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

65. Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $z^2+z+1=0$. Să se arate că:

$$(1+\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9.$$

66. Fie ω o rădăcină a ecuaţiei $z^2+z+1=0$. Să se calculeze: $P=\prod\limits_{k=1}^{2002}(1+\omega^k)$.

67. Să se rezolve ecuaţia $(2z)^n-(z-1)^n=0$, unde $n\in\mathbb{N}$.

68. Să se rezolve ecuaţia $z^2=-iz^{-2}$.

69. Să se determine numărul complex z, astfel încât să fie îndeplinite condiţiile: $\operatorname{Re} z_1=0$ şi $\operatorname{Re} z_2=0$, unde $z_1=\dfrac{z-i}{\bar{z}+1}$, $z_2=\dfrac{1}{z-1}$.

70. Să se afle mulţimea punctelor din plan ale căror afixe au proprietatea:

$$|z+1| = |z - \mathrm{i}|.$$

71. Să se calculeze lungimea laturii şi a diagonalei pentagonului regulat înscris într-un cerc de rază dată.

72. Fie A şi B două puncte distincte, de afixe z_A, respectiv z_B. Să se arate că dacă P şi P' sunt simetrice faţă de mijlocul segmentului $[AB]$, atunci

$$z_{P'} = z_A + z_B - z_P$$

(unde z_P şi $z_{P'}$ sunt afixele punctelor P, respectiv P').

73. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$ şi respectiv $[BD]$. Să se arate că:

a) $MNPQ$ este un paralelogram;

b) mijloacele segmentelor $[MC]$, $[MD]$, $[NA]$, $[NB]$ sunt vârfurile unui paralelogram;

c) mijloacele segmentelor $[AQ]$, $[BP]$, $[CQ]$, $[DP]$ sunt vârfurile unui paralelogram.

74. Fie A şi B două puncte de afixe z_A, respectiv z_B. Să se determine condiţia necesară şi suficientă pentru afixul unui punct C, astfel încât $AC \perp BC$.

75. Fie A, B şi C trei puncte de afixe $z_A = 4 + 4\mathrm{i}$, $z_B = \mathrm{i}$ şi respectiv $z_C = \frac{3}{4}$. Să se arate că $AB \perp BC$.

76. Fie A, B, C, trei puncte de afixe z_A, z_B, z_C. Arătaţi că A, B, C sunt coliniare, dacă şi numai dacă $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$.

77. Fie A, B şi C trei puncte de afixe $z_A = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_B = -1 - 4\mathrm{i}$ şi respectiv $z_C = 2 + 5\mathrm{i}$. Să se arate că punctele A, B şi C sunt coliniare.

78. Să se determine toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că punctele de afixe 1, $z + 1$ şi $z^2 + 2$ sunt coliniare.

79. Fie punctele A şi B de afixe $z_A = 2\mathrm{i}$ şi $z_B = -2 - \mathrm{i}$. Să se determine afixul punctului M, z_M, astfel încât punctele A, B şi M să fie coliniare.

80. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe distincte, astfel încât

$$z_3 - z_2 + \varepsilon(z_1 - z_3) + \varepsilon^2(z_2 - z_1) = 0,$$

unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

Să se arate că numerele complexe $z_1 + z_2 - z_3$, $z_1 + z_3 - z_2$, $z_2 + z_3 - z_1$ sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

81. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$0 \le (z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) \le 9.$$

Generalizare.

82. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = r$. Să se demonstreze că

$$0 \le (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}\right) < n^2.$$

83. Să se arate că imaginile rădăcinilor ecuaţiei $z^4 - 2mz^2 + 2m^2 + n^2 = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$, reprezintă vârfurile unui dreptunghi.

84. Să se rezolve în $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 6 \\ 2x^2 + 3y^2 = 2i. \end{cases}$$

85. Fie $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, $n \geq 3$, o mulţime de numere complexe distincte, cu proprietatea că pentru orice $z \in A$, produsul tuturor elementelor mulţimii $A \setminus \{z\}$ este egal cu z^{n-1}. Să se demonstreze că imaginile geometrice ale elementelor mulţimii A sunt vârfurile unui poligon regulat.

86. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi O intersecţia diagonalelor sale. Ştiind că $A(1+i)$, $B(-2+i)$, $C(-2-2i)$ şi $O(0)$ să se determine afixul punctului D.

87. Fie punctele $A(1+2i)$ şi $B(5+i)$. Să se determine afixele următoarelor puncte:

a) M, mijlocul segmentului AB;

b) E, cu proprietatea că $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{1}{3}$;

c) N, astfel încât ΔMEN să fie isoscel.

88. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| + |z_3| = \ldots = |z_n| = r > 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) şi $z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0$. Să se arate că: $\left| \dfrac{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j}{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k} \right| = r.$

Capitolul V. POLINOAME

1. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încât polinomul:

$$f + (X^2+1)^{9n} + X(X+1)^{6n+5} - X^{3n+4}$$

să fie divizibil cu polinomul $g = X^2 + X + 1$.

2. Fie f un polinom cu coeficienţi întregi şi care admite o rădăcină întreagă. Să se arate că pentru orice număr natural n:

$$f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(n) \text{ este divizibil cu } (n+1)!.$$

3. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, trei rădăcini ale sale. Dacă a_1, a_2, a_3 sunt de forma $a_1 = 3k_1$, $a_2 = 3k_2 + 1$, $a_3 = 3k_3 + 2$, $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, să se arate că $f(n)$ este divizibil cu 3, pentru $\forall n \in \mathbb{Z}$.

4. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât polinomul $f = X^m + X^n + 1$ să fie divizibil cu polinomul $g = X^4 + X^2 + 1$.

5. Să se găsească restul împărţirii polinomului $f \in \mathbb{Q}[X]$ prin:

a) $(X-3)(X+2)$, ştiind că prin împărţire la $X-3$ dă restul 3 şi prin împărţire la $X+2$ dă restul 5;

b) $(X+1)(X+3)$, ştiind că prin împărţire la $X+1$ dă restul 7 şi prin împărţire la $X+3$ dă restul 2;

c) $X^2 - 7X + 10$, ştiind că prin împărţire la $X-2$ dă restul 3 şi prin împărţire la $X-5$ dă restul 10.

6. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât polinomul $f = aX^{n+1} + bX^n + 1$ să se dividă cu polinomul $(X-1)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Să se arate că polinomul $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ este divizibil cu polinomul $g = (X-1)^2$ şi să se detemine câtul împărţirii lui f la g.

8. Să se determine toate polinoamele cu coeficienţi complecşi, care verifică relaţia:

$$P(X^2) = P(X+1)P(X-1).$$

9. Să se determine polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, astfel încât

$$P(0) = 0 \quad \text{şi} \quad P(X^2 + X + 1) = P(X)^2 + P(X) + 1.$$

10. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, care verifică relaţia:

$$(X+3)f(X+2) + (X-1)f(2X+1) = 4X + 4.$$

Să se calculeze restul împărţirii lui f la $X^2 + 2X - 15$.

11. Să se arate că polinomul f este divizibil cu polinomul $(X-1)^2$, unde f este:

a) $f = X^{n+1} - X^{n+2} - 3X + 3$; b) $f = 3X^n - nX(X^3 - X^2 + 2X - 2) - 3.$;

c) $f = (2n-4)X^{n+2} - 2nX^n + 4x + 4$.

12. Să se arate că polinomul $f = X^{n+1} - X^n - nX^3 + 2nX^2 - X(n+1) + 1$ este divizibil cu polinomul $g = (X-1)^3$.

13. Să se determine cel mai mare divizor comun pentru polinoamele:

a) $f = X^5 + 3X^4 + X^3 - X^2 - 3X - 1$, $g = X^4 + X^2 + 1$;

b) $f = X^7 + X^5 + X^4 - X^3 - X - 1$, $g = X^4 - X^3 + X^2 - 1$;

c) $f = aX^4 + (a^2 + b)X^3 + (a + ab)X^2 + (2a^2 + b)X + ab$, $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

14. Fie polinomul $f = X^2 + (m-1)X + 1$, $m \in \mathbb{R}$, astfel încât f să aibă toate rădăcinile reale. Să se arate că dacă polinomul $g(x) = X^2 + mX + 1$ are toate rădăcinile reale, atunci şi polinomul $g(g(x)) - g(x)$ are toate rădăcinile reale.

15. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1^0 polinomul $X^n - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ se divide cu un polinom de forma $X^2 + aX + b \in \mathbb{Z}[X]$;

2^0 n este divizibil cu 2 sau n este divizibil cu 3.

16. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac relaţia:

$$f^3(x) + x^4 f(x) = x^3 + x^5, \text{ pentru oricare } x \in \mathbb{R}.$$

17. Să se arate că nu există funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât:

$$f^2(x^2) + f(2^x) + 1 = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

18. Să se determine numerele naturale distincte m, n, p, q, pentru care polinomul $f = X^m + X^n + X^p + X^q$ este divizibil cu polinomul $g = X^3 + X^2 + X + 1$.

19. Să se determine funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ care verifică simultan condiţiile:

a) $f(x) = f(x+1) - \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$, $\forall x \in \mathbb{N}$; b) $f(2001) = \dfrac{2001}{2002}$.

20. Fie polinomul $f = X^n + X^{n-1} + 1$, $n \geq 3$ şi $a \in \mathbb{R}^*$ fixat. Dacă restul împărţirii polinomului f prin $(X-a)^2$ este $3X + 2$, să se arate că:

$$a^{n-1} = (3a+1) \cdot n - 3a.$$

21. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor:

$f = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1$; $g = X^{m-1} + X^{m-2} + \ldots + X + 1$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

22. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$, polinomul $f = X^{2n} + 1 + (X+1)^{2n}$ se divide cu polinomul $g = X^2 + X + 1$.

23. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$,
$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$; $g = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$, având rădăcinile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectiv $y_1, y_2, \ldots, y_n$, astfel încât:
$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1} \leq \ldots \leq y_1.$$
Să se arate că: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \dfrac{a_{n-1}b_{n-1}}{n}$.

24. Se consideră polinoamele $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$,
$f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$;
$g = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_1X + b_0$,
$h = X^n + a_{n-1}b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1b_1X + a_0b_0$.
Să se arate că, dacă: $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$ şi $S'_1 \leq S'_2 \leq \ldots \leq S'_n$, atunci: $(f(1) - 1)(g(1) - 1) \leq n(h(1) - 1)$, unde $S_1, S_2, \ldots, S_n$ şi $S'_1, S_2, \ldots, S'_n$ sunt polinoame simetrice ataşate polinoamelor f, respectiv g.

25. Să se demonstreze că dacă ecuaţia $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, unde $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are toate rădăcinile reale şi strict pozitive, atunci:
$$\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \geq 2^n\sqrt{|a_0a_n|}.$$

26. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$, cu rădăcinile toate reale şi strict pozitive. Să se arate că are loc relaţia:
$$f(-1)\left[\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + (-1)^n\frac{1}{a_n}\right] \geq 2^{2n}.$$

27. Fie ecuaţia $z^3 - 3iz - 4z + 2i = 0$.
a) Să se formeze ecuaţia cu rădăcinile: $y_1 = z_1^3$, $y_2 = z_2^3$, $y_3 = z_3^3$.
b) Să se determine z_1, z_2, z_3.

28. Să se rezolve ecuaţia $x^3 + ax^2 + x + 1 = 0$, atunci când:
$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -1 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 4a - 1 \end{cases}$$

29. Fie polinomul $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ cu $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi în progresie geometrică cu raţia pozitivă. Să se determine rădăcinile polinomului P.

30. Dacă rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + (-1)^n$ au acelaşi modul, atunci să se arate că $f(-1) \in \mathbb{R}$.

31. Să se cerceteze dacă rădăcinile ecuaţiei $X^3 - 13X^2 + 54X - 71 = 0$, pot fi lungimile laturilor unui triunghi şi în caz afirmativ să se calculeze aria triunghiului.

32. Să se rezolve ecuaţiile reciproce:
a) $x^4 - 19x^3 + 86x^2 - 19x + 1 = 0$; b) $3x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$;
c) $x^7 + 2x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 0$; d) $z^4 + 2iz^3 + z^2 + 2iz + 1 = 0$.

33. Să se rezolve ecuaţiile, ştiind că sunt îndeplinite condiţiile precizate în dreptul fiecăreia:

a) $x^4-(a+b)x^3-a(a-b)x^2+a^2(a+b)x-a^3b=0$, astfel încât $x_1=x_2$;

b) $x^4+2x^3+3x^2+\lambda x+\mu=0$, ştiind că $x_1=1+\mathrm{i}$ şi $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$;

c) $x^4-2x^2+ax+3=0$, ştiind că $x_1x_2=1$;

d) $x^4+px^3+3x^2+5x-4=0$, astfel încât $x_1x_2=4$.

34. Fie polinomul $f\in\mathbb{C}[X]$, $f=X^3+aX^2+bX-1$. Să se arate că:

a) dacă $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$, atunci $|a|=|b|$;

b) dacă, în plus, $f(1)\in\mathbb{R}$, atunci $a,b\in\mathbb{R}$.

35. Fără a rezolva ecuaţia: $2X^4-5aX^3+4(7+a)X^2-15aX+6a=0$, să se arate că există următoarele relaţii între rădăcini:

$$1)\ x_1x_2=x_3x_4;\quad 2)\ \frac{x_1+x_3}{2}=x_4+\frac{1}{x_2}.$$

Să se rezolve apoi ecuaţia.

36. Să se rezolve în numere reale strict pozitive sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=xyz\\ x^3+y^3+z^3=9(xyz)^{\frac{1}{3}}\end{cases}.$$

37. Fie a cea mai mare rădăcină pozitivă a ecuaţiei $x^3-3x^2+1=0$. Să se demonstreze că:

a) $a\in(2,3)$; b) numerele $\left[a^{1788}\right]$ şi $\left[a^{1988}\right]$ se divid cu 17.

38. Fie polinomul $f=X^2+bX+c$, $f\in\mathbb{R}[X]$. Să se arate că:

a) Dacă rădăcinile x_1, x_2 ale polinomului f sunt reale, atunci, $|x_1|<1$ şi $|x_2|<1$ dacă şi numai dacă au loc condiţiile: $1+b+c>0$; $1-b+c>0$ şi $|c|<1$.

b) Dacă rădăcinile x_1,x_2 ale polinomului f nu sunt reale, atunci, $|x_1|<1$ şi $|x_2|<1$, dacă şi numai dacă are loc condiţia $|c|<1$.

39. Să se rezolve sistemele simetrice:

$$\text{a)}\ \begin{cases}x+y+z=a\\ x^2+y^2+z^2=3a^2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}\end{cases},\ a\in\mathbb{R}^*.\quad \text{b)}\ \begin{cases}x+y+z=4\\ x^2+y^2+z^2=14\\ x^3+y^3+z^3=34\end{cases}.$$

40. Se consideră polinoamele cu coeficienţi complecşi:

$$f=X^n+a_1X^{n-1}+\ldots+a_n \text{ şi } g=X^n+b_1X^{n-1}+\ldots+b_n$$

cu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ rădăcinile lui f şi $x_1^2,x_2^2,\ldots,x_n^2$ rădăcinile lui g. Să se demonstreze că dacă $\mathrm{Im}(a_1+a_3+a_5+\ldots)=0$ şi $\mathrm{Im}(a_2+a_4+a_6+\ldots)=0$, atunci şi $\mathrm{Im}(b_1+b_2+\ldots+b_n)=0$.

41. Să se determine condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească numerele $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât ecuaţia $9x^3+9ax^2+9bx+a^3=0$ să devină ecuaţie binomă printr-o transformare de forma $x=y+c$. În acest caz, să se rezolve ecuaţia.

42. Să se rezolve ecuaţiile: $x^4-2x^3-x+2=0$, $x^4-4x^3+6x^2-5x+2=0$, ştiind că au rădăcini comune.

43. Să se rezolve în $\mathbb{R}^3$ sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{5(x^2+1)}{x}=\dfrac{6(y^2+1)}{y}=\dfrac{7(z^2+1)}{z}\\ xy+y+zx=1\end{cases}$$

44. Fie polinomul $f = X^4 - 7X^3 + 14X^2 + aX + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b şi rădăcinile polinomului, ştiind că una dintre ele este $3 - i$.

45. Ştiind că $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = n^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$, $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1\}$, $n \in \mathbb{R}$, să se determine n, astfel încât $xyz = 0$.

46. Fie polinomul $f = X^{2n} + aX^n + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $n > 1$). Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât f să fie divizibil cu polinomul $(X-1)^2$ şi să se arate că f nu poate avea rădăcini triple nenule.

47. Să se calculeze produsul:

$$P = \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

48. Să se calculeze produsul:

$$P_n = \sin\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

49. Să se calculeze produsul:

$$P = \sin\frac{\pi}{2n+1} \cdot \sin\frac{2\pi}{2n+1} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{n\pi}{2n+1}.$$

50. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ sunt rădăcinile ecuaţiei: $x^{2n} + x^{2n-1} + \ldots + x + 1 = 0$, să se calculeze suma: $S = \dfrac{1}{1-x_1} + \dfrac{1}{1-x_2} + \ldots + \dfrac{1}{1-x_n}$.

51. Să se arate că dacă rădăcinile polinomului $f = X^2 + X + 1$ sunt ε şi ε^2, atunci rădăcinile polinomului $g = X^2 - X + 1$ sunt $-\varepsilon$ şi $-\varepsilon^2$.

52. Să se discute în funcţie de parametrul real m rădăcinile ecuaţiei:

$$x^4 - (m-1)x^3 + mx^3 - (m-1)x + 1 = 0.$$

53. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi să se rezolve ecuaţiile $x^4 + ax^2 + bx^+2 = 0$ şi $x^3 - 3x + 2c = 0$, ştiind că au o rădăcină dublă comună.

54. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ şi $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, astfel încât $|f(0)| = |f(1)|$ şi fiecare rădăcină α a lui f este un număr real , $0 < \alpha < 1$. Să se demonstreze că produsul rădăcinilor lui f nu depăşeşte $\dfrac{1}{2^n}$.

55. Să se rezolve ecuaţia: $2x^4 - 16x^3 + 23x^2 - 2x - 1 = 0$.

56. Se consideră polinoamele; $f = X^9 + X^8 + \ldots + X + 1$ şi $g = X^2 + X + 1$, având rădăcinile x_k, $k = \overline{1,9}$, $x_k \in \mathbb{C}$, respectiv $y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

Să se calculeze valoarea expresiei:

$$A = (x_1 - y_1)(x_2 - y_1) \cdot \ldots \cdot (x_9 - y_1)(x_1 - y_2) \cdot \ldots (x_9 - y_2).$$

57. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{x(y+z)}{x+y+z} = a \\ \dfrac{y(z+x)}{x+y+z} = b \\ \dfrac{z(x+y)}{x+y+z} = c. \end{cases}$$

58. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ şi $s_k = x^k + y^k + z^k$, $k \in \mathbb{N}$, să se determine $m, n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că: $s_1 = 0$ şi $\dfrac{s_{m+n}}{m+n} = \dfrac{s_m}{m} = \dfrac{s_n}{n}$.

59. Să se arate că polinomul: $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$ nu poate avea toate rădăcinile reale $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

60. Să se rezolve ecuaţia cu coeficienţi reali:

$$x^n - 2nx^{n-1} + 2n(n-1)x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n = 0$$

ştiind că are toate rădăcinile reale şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$..

61. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$ şi $\widetilde{f}$ funcţia polinomială ataşată lui f, astfel încât $|\widetilde{f}(\mathrm{i})| = 1$ ($\mathrm{i}^2 = -1$). Să se arate că nu există nici un număr întreg nenul $m \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $f(m) = 0$.

62. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3 \end{cases}$.

63. Într-un paralelipiped dreptunghic se ştie că volumul este egal cu 24 cm^3, aria totală este egală cu 52 cm^2 şi lungimea diagonalei este egală cu $\sqrt{29}$ cm. Să se determine dimensiunile paralelipipedului.

64. Fie $f = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}[X]$, $a \neq 0$. Să se arate că atunci când coeficienţii polinomului sunt în progresie aritmetică, iar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, are loc relaţia $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_1} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_3} = -\dfrac{\pi}{4}$.

65. Fie polinomul $f = aX^2 + bX + c$ cu $a > 0$. Să se arate că f are rădăcinile reale x_1, x_2 cu $|x_1| < 1$ şi $|x_2| < 1$, dacă şi numai dacă $a + b + c \geq 0$, $a - b + c \geq 0$ şi $a - c \geq 0$.

66. Fie funcţia polinomială:

$$f_n(x) = 2^{-n}\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right].$$

Să se demonstreze că:

a) f_n verifică egalitatea $f_n(x) - xf_{n-1}(x) + 4^{-1}f_{n-2}(x) = 0$;

b) f_n este un polinom de gradul n.

67. Să se arate că ecuaţia $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8}$.

68. Fie x_k, $k = \overline{1,4}$, rădăcinile ecuaţiei $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$, $p \in \mathbb{R}$.

Fie $A = \{p \in \mathbb{R} \mid x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3\}$.

a) Să se determine mulţimea A.

b) Pentru $p = 1$ să se calculeze valoarea expresiei $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} |x_k|^3$.

69. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât toate rădăcinile ecuaţiei $x^4 + ax^3 + 4x^2 + ax + 1 = 0$ să aibă modulul egal cu 1.

70. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^{n+1} - X^{n-2} - 3X + 3$.

a) Să se determine ordinul de multiplicitate k al rădăcinii $\alpha = 1$.

b) Să se determine câtul împărţirii lui f prin $(X - \alpha)^k$, unde k este numărul determinat la punctul a).

71. Se consideră polinomul: $f = X^3 - 3X^2 + aX - 5$, $a \in \mathbb{R}$.
Să se determine a, astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -21$.

72. Se consideră polinomul $f = X^3 + pX^2 - 2X + p + 1$.
a) Să se calculeze în funcţie de p, $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f.
b) Să se determine p, astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \leq (x_1x_2x_3)^3$.

73. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia:

$$z^3 - (2\sqrt{3} + 3\mathrm{i})z^2 + (1 + 4\sqrt{3}\mathrm{i})z - 3\mathrm{i} - 6\sqrt{3} = 0.$$

ştiind că admite soluţii de forma $b\mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$.

74. Fie polinoamele $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$,

$$f = (X - b)(X - c),\ g = (X - c)(X - a),\ h = (X - a)(X - b),$$

unde a, b, c sunt constante reale distincte între ele. Să se demonstreze că pentru $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, polinomul $x_1f + x_2g + x_3h$ este polinomul nul dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

75. Se consideră $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + X^2 + aX + b$. Să se determine a şi b reale, ştiind că restul împărţirii polinomului $f(X - 3)$ la $X - 1$ este egal cu -4 şi că rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ satisfac relaţia $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9$.

76. Se consideră polinomul $f = X^4 + 2X^3 + mX^2 + pX + q$, $m, p, q \in \mathbb{R}$.
a) Să se calculeze în funcţie de coeficienţi suma pătratelor rădăcinilor polinomului f.
b) Pentru $m = 3$, să se arate că $\forall p, q \in \mathbb{R}$, f are cel mult două rădăcini reale.
c) Dacă $m, p, q \in \mathbb{Q}$, să se determine polinomul f, ştiind că restul împărţirii lui f prin polinomul $X - 1$ este 3 şi f are rădăcina $-1 + \sqrt{2}$.

77. Să se rezolve ecuaţiile următoare, ştiind că admit o rădăcină independentă de m:
a) $x^3 + 2x^2(m - 1) + x(3 - 4m) - 6 = 0$;
b) $3x^3 + x^2(10m - 3) + x(8m^2 - 10m) - 8m^2 = 0$;
c) $4m^2x^3 + 4m(3m + 1)x^2 + 12mx + 3 = 0$.

78. Să se rezolve ecuaţia $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x - 2 = 0$, ştiind că admite rădăcina $1 + \mathrm{i}$.

79. Să se rezolve ecuaţia $x^6 - 2x^5 - x^4 + 28x^3 - 214x^2 + 64x - 416 = 0$, ştiind că admite rădăcinile $1 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ şi $\sqrt{2}\mathrm{i}$.

80. Să se determine parametrii reali p, q şi apoi să se rezolve ecuaţia

$$2x^3 - 5x^2 + px + q = 0,$$

ştiind că admite rădăcina $\alpha = 2 + 3\sqrt{2}\mathrm{i}$.

81. Să se determine parametri complecşi a, b şi apoi să se rezolve ecuaţia: $x^4 + 2(1 - \mathrm{i})x^3 - (5 + 4\mathrm{i})x^2 + px + q = 0$, ştiind că admite rădăcinile $\alpha = 2\mathrm{i}$ şi $\beta = 1$.

82. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $x^9 - 9x^6 + 8 = 0$; b) $x^9 - (1 + \mathrm{i})x^6 + \mathrm{i} = 0$.

83. Să se discute, în funcţie de parametrul real m, natura rădăcinilor ecuaţiilor:
a) $(m - 1)x^4 - mx^2 + m = 0$; b) $x^4 - (2m^2 - 1)x^2 + 4m^2 - 6 = 0$.

84. Să se rezolve şi să se discute ecuaţia: $(x^2 + 1)(x - 1)^2 = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$.

85. Descompuneţi în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ şi apoi în $\mathbb{C}[X]$ polinoamele:
a) $X^4 + 1$; $X^6 + 1$; $X^4 + 2X^2 + 1$;
b) $X^4 + 2X^2 + 4$; c) $X^4 - 4X^3 + 17X^2 - 26X + 22$.

86. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$ şi apoi în $\mathbb{R}[X]$ polinoamele:
a) X^4+1; b) $16X^3+24X^2-2X-3$; c) $X^6+X^5-2X^4+X^2+X-2$.

87. Să se descompună în factori ireductibili în $\mathbb{Z}[X]$ polinoamele:
a) $X^5-5X^4+7X^3-2X^2+4X-8$; b) $16X^3+24X^2-2X-3$;
c) $X^6+X^5-2X^4+X^2+X-2$.

88. Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţiile:
a) $x^5-14x^4+58x^3-56x^2-59x+70=0$; b) $x^6+x^5-x^3+x^2-2=0$;
c) $4x^4-16x^3+15x^2+4x-4=0$.

89. Să se determine numerele reale a, b, astfel încât cuaţia:
$$x^4-2x^3+ax^2+bx+2=0$$
să admită rădăcina $\alpha=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

90. Să se determine rădăcinile independente de a, precum şi mulţimea valorilor lui a, pentru care ecuaţia:
$$ax^4+(a^2-3a)x^3-(3a^2-2a-2)x^2+2(a^2-3)x+4=0$$
are rădăcini egale ($a\in\mathbb{R}^*$).

91. Să se arate că polinomul:
$$f=X^{na_1}+X^{na_2+1}+X^{na_3+2}+\ldots+X^{na_{n-1}+(n-1)},$$
unde $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{N}^*$ este divizibil prin polinomul: $g=X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+1$, $n\in\mathbb{N}^*$, fixat.

92. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
a) X^5+X^2-X+1 şi $3X^4-5X^3+8X+1$;
b) X^3-2X^2+X-2 şi $X^5+X^4+3X^3+2X-1$;
c) $X^5-3X^4+3X^3-4X^2+12X-12$ şi $X^4-2X^3+X^2+3$.

93. Să se arate că polinoamele f şi g sunt prime între ele:
a) $f=X^3-X^2+X-1$ şi $g=X^4+4X^3+6X^2+3X$;
b) $f=X^6+2X^5-3X^4+X^2+2X-3$ şi $g=X^2+X+1$.

94. Să se rezolve ecuaţia: $z^3-(3+2\mathrm{i})z^2+(5+7\mathrm{i})z-6(1+\mathrm{i})=0$, ştiind că admite o rădăcină reală.

95. Fie polinomul $f=X^4+aX^3+bX+c$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$, astfel ca $f(0)=f(1)$ şi în plus, să admită rădăcina $\alpha=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

96. Fie f un polinom întreg cu coeficienţi întregi. Dacă $\alpha=\dfrac{p}{q}$ este o fracţie raţională ireductibilă, rădăcină a lui f, atunci $p-q$ divide pe $f(1)$.

97. Fie ecuaţia:
$$x^4+(2a+1)x^3+2(a+1)^2x^2+bx+c=0,\ a,b,c\in\mathbb{R},\text{ cu } a\geq 0.$$
Să se arate că această ecuaţie admite cel mult două rădăcini reale.

98. Fie ecuaţia:
$$x^4-\alpha x^3-\alpha x^2+1=0,\text{ cu } \alpha\in\mathbb{R} \text{ şi } |\alpha|\leq 1.$$
Să se arate că toate rădăcinile sunt de modul 1.

STATISTICĂ ŞI PROBABILITĂŢI

1. La sfârşitul semestrului I al anului şcolar, cei 30 de elevi din clasa a X - a au obţinut la matematică următoarele medii:

7	6	8	5	9	6	7	7	10	5
8	8	5	7	8	5	4	9	7	6
6	7	9	5	6	9	10	4	5	6

a) Să se întocmească un tabel în care să se calculeze: frecvenţa absolută, frecvenţa relativă şi frecvenţa cumulată crescătoare a mediilor.

b) Să se calculeze; media, mediana, dispersia şi abaterea medie pătratică.

2. Temperaturile medii înregistrate după-amiaza în Bucureşti, pe timpul a două săptămâni de vară au fost următoarele: 37^0; 40^0; 38^0; 39^0; 41^0; 40^0; 36^0; 39^0; 38^0; 42^0; 43^0; 39^0; 37^0.

a) Să se întocmească un tabel în care să se studieze: frecvenţa absolută, frecvenţa relativă şi frecvenţa cumulată crescătoare a tuturor valorilor de temperatură;

b) Să se calculeze: media, mediana, dispersia şi abaterea medie pătratică a seriei statistice din enunţ.

3. O echipă de baseball a obţinut în timpul unui sezon următoarele puncte: 312; 288; 209; 227; 248; 294; 283; 307; 342; 293; 263; 244; 237; 265; 302; 286; 253; 213; 274; 276.

Utilizând intervalele: 201 – 230; 231 – 260; 261 – 290; 291 – 320;321 – 350 să se analizeze frecvenţa absolută, frecvenţa relativă şi frecvenţa cumulată crescătoare a punctajelor obţinute de echipa respectivă în meciurile din sezon.

4. Salariile anuale ale salariaţilor unei societăţi comerciale sunt: 36 milioane lei, 42 milioane lei, 63 milioane lei, 39 milioane lei, 45 milioane lei, 58 milioane lei, 53 milioane lei, 38 milioane lei, 39 milioane lei, 47 milioane lei, 93 milioane lei, 88 milioane lei, 78 milioane lei, 55 milioane lei, 49 milioane lei, 84 milioane lei, 77 milioane lei, 72 milioane lei, 68 milioane lei, 66 milioane lei.

Utilizând intevalele: 30 milioane lei – 39 milioane lei; 40 milioane lei – 49 milioane lei; 50 milioane lei – 59 milioane lei; 60 milioane lei – 69 milioane lei; 70 milioane lei – 79 milioane lei; 80 milioane lei – 89 milioane lei; 90 milioane lei – 99 milioane lei să se analizeze frecvenţa absolută, frecvenţa relativă şi frecvenţa cumulată crescătoare a salariilor din societatea comercială respectivă.

5. Se aruncă simultan n zaruri, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Să se calculeze $|\Omega|$. b) Să se calculeze $|P(\Omega)|$.

c) Să se calculeze probabilitatea ca, în urma unei aruncări, faţa cu numărul 1 să apară pe toate zarurile;

d) Să se calculeze probabilitatea ca, în urma unei aruncări, să apară numai feţele 4 şi 6;

e) Să se calculeze probabilitatea ca, în urma unei aruncări, să apară numai feţele 1 şi 6.

6. Într-o cutie se găsesc 10 lozuri: 7 necâştigătoare şi 3 câştigătoare. Să se afle probabilitatea ca, extrăgând la întâmplare un loz din cutie, acesta să fie câştigător.

7. Pentru jocul cu ruleta, aceasta este împărţită în 38 de părţi egale, numerotate de la 1 la 36, la care se adaugă simbolurile 0 şi 00. Jumătate din numerele de la 1 la 36 sunt colorate în roşu, iar cealaltă jumătate sunt colorate în negru, iar simbolurile 0 şi 00 sunt vopsite în verde. Dacă un jucător joacă, atunci el pariază pe culoare sau pe un număr. Apoi ruleta se învârte cu o bilă în interiorul ei. Când ruleta se opreşte, bila va intra în una din secţiuni, şi câştigă jucătorul care a mizat corect.

Să se determine probabilităţile următoarelor evenimente:

a) Bila se aşază pe un număr de culoare roşie;

b) Bila se aşază pe un număr negru;

c) Bila se aşază pe un număr verde;

d) Bila se aşază pe numărul 1;

e) Bila se aşază pe unul din numerele: 1; 2; 3;...; 10;

f) Bila se aşază pe un număr impar roşu.

8. Probabilitatea ca mâine să plouă în Bucureşti este de 0,3, iar probabilitatea ca mâine să plouă în Buzău este de 0,4. Probabilitatea ca mâine să plouă în ambele oraşe este de 0,2. Care este probabilitatea ca mâine să plouă în cel puţin unul din cele două oraşe?

9. Într-o populaţie, 30% din indivizi au febră, 25% au dureri de gât şi 10% au şi febră şi dureri de gât. O persoană este aleasă la întâmplare din populaţia respectivă.

a) Să se determine probabilitatea ca persoana aleasă să aibă febră.

b) Să se determine probabilitatea ca persoana aleasă să aibă dureri de gât.

c) Să se determine probabilitatea ca persoana aleasă să nu aibă nici febră, nici dureri de gât.

d) Să se determine probabilitatea ca persoana aleasă să aibă febră, dar să nu aibă dureri de gât.

10. Într-un cartier, 45% din familii au exact o maşină şi 30% din familii au exact 2 maşini. O familie este aleasă la întâmplare. Notăm cu A evenimentul ca familia aleasă să posede exact o maşină şi cu B evenimentul ca familia aleasă să posede exact două maşini.

a) Descrieţi evenimentul $A \cup B$ şi calculaţi $P(A \cup B)$.

b) Descrieţi evenimentul $\overline{A}$ şi calculaţi $P(\overline{A})$.

c) Descrieţi evenimentul $A \cap B$ şi calculaţi $P(A \cap B)$.

11. Fie A şi B două evenimente astfel încât $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}1$, $P(A \cap B) = 0{,}15$. Să se calculeze:

a) $P(A \cup B)$; b) $P(\overline{A})$; c) $P(\overline{B})$; d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$; e) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$; f) $P(\overline{A} \cup B)$.

12. Un computer alege la întâmplare un număr între 5 şi 9 inclusiv, şi o persoană extrage un bilet la întâmplare dintr-o cutie care conţine 4 bilete numerotate cu: 0, 1, 8 şi 9. Notăm cu A evenimentul ca suma numerelor extrase să fie mai mare sau egală cu 9, cu B evenimentul ca suma numerelor extrase să fie mai mare sau egală cu 8 şi cu C evenimentul ca numărul extras de computer să fie impar.

Să se descrie fiecare din evenimentele de mai jos şi să se calculeze probabilitatea fiecăruia: a) $A \cup B$; b) $A \cup C$; c) $A \cap B$; d) $A \cup B \cup C$; e) $\overline{B}$; f) $\overline{B} \cap \overline{C}$; g) $\overline{A}$; h) $\overline{A} \cap \overline{C}$.

13. Dacă A, B, C sunt trei evenimente incompatibile două câte două astfel încât $A \cup B \cup C = \Omega$, să se arate că pentru orice eveniment $D \in \mathcal{P}(\Omega)$, are loc egalitatea: $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$.

14. Un restaurant oferă 12 feluri de mâncare din fructe de mare, 20 de feluri de mâncare din pui şi 15 feluri de mâncare din carne de vită. Un nutriţionist recomandă 3 dintre mâncărurile din fructe de mare, 5 dintre cele de pui şi 2 dintre cele din carne de vită. Presupunând că intraţi în acest restaurant şi alegeţi un fel de mâncare, dacă notăm cu F, P, V şi R evenimentele ca felul ales de mâncare să fie de fructe de mare, pui, vită şi respectiv recomandat, aflaţi:

a) $P(R)$; b) $P(\overline{F})$; c) $P(\overline{F}\cap\overline{R})$; d) $P(\overline{P}\cap\overline{R})$; e) $P(\overline{V})$; f) $P(V\cap\overline{R})$.

15. O cutie conţine 10 bile albe şi 6 bile roşii. Se extrag la întâmplare 5 bile. Să se calculeze;

a) probabilitatea ca toate cele 5 bile extrase să fie albe;

b) probabilitatea ca toate cele 5 bile extrase să fie roşii;

c) probabilitatea ca 2 bile să fie albe şi 3 să fie roşii;

d) probabilitatea ca 2 sau 3 din cele 5 bile extrase să fie roşii.

16. Tu şi doi dintre prietenii tăi participaţi la un concurs de geografie alături de alte 30 de persoane. Cinci persoane vor fi alese la întâmplare pentru a merge într-o excursie în Retezat.

a) Care este probabilitatea ca tu să fii ales?

b) Care este probabilitatea ca tu să fii ales, dar prietenii tăi nu?

c) Care este probabilitatea ca tu şi prietenii tăi să fiţi aleşi?

d) Care este probabilitatea ca nici tu, nici prietenii tăi să nu fiţi aleşi?

e) Care este probabilitatea ca tu să nu fii ales, dar prietenii tăi să meargă în excursie?

f) Care este probabilitatea ca tu şi unul dintre prietenii tăi să mergeţi în excursie?

17. Presupunem că 13 cărţi sunt trase la întâmplare dintr-un pachet de 52 de cărţi. Găsiţi probabilitatea ca:

a) toate cele 13 cărţi să fie roşii;

b) 5 cărţi să fie de culoare roşie şi restul de culoare neagră;

c) cel puţin 11 cărţi să fie roşii.

18. Care este probabilitateaca, alegând la întâmplare o persoană ziua sa de naştere să fie:

a) în luna aprilie;

b) iarna;

c) între 7 august şi 7 octombrie inclusiv. (Presupunem că anul are 365 de zile).

19. La o cursă de cai, a paria pe un cal cu „show" înseamnă că vei câştiga dacă el va termina cursa primul, al doilea sau al treilea. A paria pe un cal cu „place" înseamnă că vei câştiga dacă el va termina cursa primul sau al doilea, iar a paria cu „win" înseamnă că vei câştiga numai dacă el va termina cursa primul. Într-o cursă, o persoană poate paria cu „show" pe 2 cai, cu „place" pe alţi trei cai şi pe un alt cal cu „win". Presupunem că într-o cursă aleargă 10 cai.

a) Calculaţi probabilitatea ca ambii cai pariaţi cu „show" să fie câştigători.

b) Calculaţi probabilitatea ca exact unul dintre caii pariaţi cu „place" să fie câştigător.

c) Calculaţi probabilitatea ca cel pariat cu „win" să fie câştigător.

20. Un jucător a cumpărat 5 bilete la loterie, fiind puse în joc 10 premii. Ştiind că s-au mai vândut încă 300 de bilete, să se calculeze:

a) probabilitatea ca jucătorul să câştige un premiu;

b) probabilitatea ca jucătorul să nu câştige nici un premiu;

c) probabilitatea ca jucătorul să câştige 2 premii;

d) probabilitatea ca jucătorul să câştige 5 premii.

21. Se dă următorul tabel:

	Fericit	Nefericit	Total
Băieţi	20	10	30
Fete	15	12	27
Total	35	22	

O persoană din acest grup este aleasă la întâmplare.

a) Care este probabilitatea ca, alegând un băiat acesta să fie fericit?

b) Care este probabilitatea de a alege o fată fericită?

22. Două cărţi sunt extrase la întâmplare dintr-un pachet de 52 de cărţi. Care este probabilitatea ca prima carte să fie un 10 şi a doua carte să fie o damă dacă:

a) prima carte nu se reaşază în pachet după extragere;

b) prima carte se reaşază în pachet după extragere.

23. Dacă A şi B sunt două evenimente astfel încât, pe rând sunt satisfăcute condiţiile:

a) $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}25$; $P_A(B) = 0{,}4$;

b) $P(A) = \frac{8}{13}$; $P(B) = \frac{4}{13}$ $P_A(B) = \frac{3}{13}$. Să se calculeze $P_B(A)$.

24. Următoarele date din tabel exprimă prognoza meteo făcută de un centru meteorologic pentru o perioadă de 700 de zile:

	Zile ploiase prognozate	Zile prognozate fără ploaie	Total
A plouat	180	120	300
Nu a plouat	190	210	400
Total	370	330	700

O zi din această perioadă este aleasă la întâmplare.

a) Care este probabilitatea să fi plouat în ziua aleasă?

b) Care este probabilitatea să nu fi plouat în ziua aleasă?

25. Într-o cutie se află 9 bile: 5 albe şi 4 roşii. O bilă este scoasă la întâmplare din cutie, după care se mai efectuează încă o extragere, fără ca bila extrasă iniţial să fie repusă în urnă. Care este probabilitatea ca:

a) la prima extragere să obţinem o bilă albă?

b) la a doua extragere să obţinem o bilă neagră?

c) la ambele extrageri să se obţină bile negre?

26. O cutie A conţine 4 bile albe şi 5 bile roşii. O altă cutie B conţine 3 bile albe şi 2 bile roşii. O bilă este scoasă la întâmplare din cutia B şi este introdusă în cutia A. Apoi o bilă este scoasă la întâmplare din cutia A.

a) Care este probabilitatea ca bila scoasă din cutia A să fie albă?

b) Care este probabilitatea ca bila extrasă din cutia B să fie albă, ştiind că bila extrasă din cutia A este albă?

27. Trimiţând o scrisoare unui prieten, sunt 10% şanse ca aceasta să se piardă în drum spre oficiul poştal. Chiar dacă scrisoarea a ajuns la oficiul poştal sunt 20% şanse ca aici să fie distrusă de aparatul de marcat. De asemenea, chiar dacă scrisoarea a scăpat, sunt 10% şanse ca poştaşul să o ducă la o adresă greşită. Dacă o persoană nu şi-a primit scrisoarea, care este probabilitatea ca aparatul de marcat să o fi distrus?

28. Să se arate că dacă A, B, C sunt evenimente astfel încât A şi B sunt incompatibile, atunci $P_C(A \cup B) = P_C(A) + B_C(B)$.

29. Să se arate că oricare ar fi evenimentele A şi B, are loc

$$P_B(A) = 1 - P_B(\overline{A}).$$

30. Patru urne identice conţin fiecare câte 3 bile. În prima urnă toate cele 3 bile sunt negre, în urna a doua 2 bile sunt negre şi 1 albă, în urna a treia sunt 1 bilă neagră şi 2 bile albe şi în a patra urnă toate cele 3 bile sunt albe. O urnă este aleasă la întâmplare şi o bilă este aleasă din această urnă, bilă care se întâmplă să fie albă.

a) Care este probabilitatea ca toate cele 3 bile din urna aleasă să fie albe?

b) O a doua bilă este extrasă din această urnă şi este de asemenea albă (prima bilă nu s-a repus în urnă). Care este acum probabilitatea ca toate cele 3 bile din urna aleasă să fie albe?

31. Un articol al unei reviste economice prezice că sunt 40% şanse ca în această vară să avem o piaţă în urcare, 25% şanse ca piaţa să fie constantă şi 35% şanse ca piaţa să fie în scădere. Se estimează că unele strategii de piaţă ar avea succes astfel: 70% în timpul unei pieţe în urcare, 20% în timpul unei pieţe relativ constantă şi numai 10% în cazul unei pieţe în scădere. Dacă strategia aplicată s-a întâmplat să aibă succes, care este probabilitatea ca piaţa să fi fost în scădere?

32. Un scafandru are 2 sisteme de oxigen independente astfel încât dacă unul dintre ele nu funcţionează, el va avea în continuare oxigen. Dacă probabilitatea ca primul sistem să funcţioneze este 0,9 şi probabilitatea ce cel de al doilea să funcţioneze 0,8, să se afle:

a) Care este probabilitatea ca nici unul din cele două sisteme să nu funcţioneze?

b) Care este probabilitatea ca cel puţin unul din sisteme să funcţioneze?

33. Dacă A şi B sunt două evenimente independente, să se arate că şi $\overline{A}$ şi $\overline{B}$ sunt de asemenea independente.

34. O urnă conţine 10 bile: 4 albe şi 6 roşii. Două bile sunt extrase la întâmplare din urnă. Care este probabilitatea ca ambele bile extrase să fie albe, dacă:

a) prima bilă extrasă este repusă în urnă după extragere;

b) prima bilă extrasă nu se mai repune în urnă.

35. 65% din cetăţenii unei ţări votează pentru Partidul X. Trei alegători sunt aleşi la întâmplare.

a) Să se determine probabilitatea ca toţi cei 3 alegători să fi votat pentru Partidul X.

b) Să se determine probabilitatea ca exact unul din cei trei alegători să fi votat pentru Partidul X şi doi nu.

36. O operaţie chirurgicală reuşeşte în 80% din cazuri. Dacă 5 pacienţi suportă această operaţie, să se determine probabilitatea ca exact 4 operaţii să aibă succes.

37. Se aruncă o monedă de 15 ori.

a) Care este probabilitatea ca stema să apară de 10 ori?

b) Care este probabilitatea ca stema să apară de cel puţin 4 ori?

38. O urnă conţine 2 bile roşii şi 5 bile albe. Se extrag 2 bile la întâmplare, cu repunerea în urnă a bilei extrase.

a) Să se calculeze probabilitatea ca ambele bile extrase să fie roşii;

b) Să se calculeze probabilitatea ca cel puţin una dintre bile să fie albă;

c) Să se calculeze probabilitatea ca exact o bilă să fie roşie.

39. O urnă conţine 5 bile galbene, 16 bile albastre şi 10 bile albe. Se extrag 3 bile la întâmplare, fiecare bilă extrasă fiind repusă în urnă.

a) Să se calculeze probabilitatea ca toate bilele extrase să fie albe;

b) Să se calculeze probabilitatea ca exact una dintre bile să fie albă;

c) Să se calculeze probabilitatea ca o bilă extrasă să fie albă şi 2 galbene;

d) Să se calculeze probabilitatea de a extrage o bilă albă, o bilă galbenă şi o bilă albastră.

40. Într-o instituţie s-a descoperit că linia telefonică este ocupată 75% din timp. Care este probabilitatea ca, dând 10 telefoane, să primeşti răspuns la 8 dintre ele?

41. Presupunem că probabilitatea de a se naşte un băiat este egală cu probabilitatea de a se naşte o fată. Care este probabilitatea ca o familie cu 4 copii să aibă:

a) 4 băieţi;

b) cel puţin 2 băieţi;

c) primul copil un băiat şi următorii 2 copii fete.

42. Se extrage o carte la întâmplare dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc. Fie A evenimentul „cartea extrasă este o inimă roşie" şi B evenimentul „cartea extrasă este un as". Să se cerceteze dacă evenimentele A şi B sunt independente.

43. Se extrag 6 cărţi la întâmplare dintr-un pachet standard de 52 de cărţi.

a) Care este probabilitatea ca toate cele 6 cărţi să fie de aceeaşi culoare?

b) Care este probabilitatea ca exact două dintre cărţi să fie aşi negri şi exact două dintre cărţi să fie de culoare roşie?

44. Fie X şi Y două variabile aleatoare având repartiţiile

$$X:\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}; \quad Y:\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartiţiile următoarelor variabile aleatoare: $X+5$; $Y+3$; $3X$; $4Y$; X^3; Y^2; $X+Y$; $X\cdot Y$; $\frac{X}{Y}$.

45. Fie X şi Y două variabile aleatoare independente,

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad Y:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

a) Să se calculeze: $M(X)$; $M(Y)$;

b) Să se calculeze repartiţia variabilei aleatoare $Z = 2X + Y$ precum şi $M(Z)$.

46. O urnă conţine 50 de bile dintre care 18 sunt albe şi restul roşii. Se extrag succesiv 6 bile punându-se de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă înainte de următoarea extragere. Numărul de bile albe obţinut la sfârşitul celor 6 extrageri este o variabilă aleatoare de X. Să se determine:

a) repartiţia variabilei X;

b) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X;

c) valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică a lui X.

47. O cuşcă conţine 9 fluturi: 3 masculi (2 albi şi unul galben) şi 6 femele (4 albe şi 2 galbene). Prindem simultan şi la întâmplare 2 fluturi. Fie X variabila aleatoare: numărul de fluturi masculi prinşi, iar Y variabila aleatoare: numărul de fluturi galbeni prinşi. Să se scrie repartiţiile celor două variabile aleatoare şi să se precizeze dacă X şi Y sunt sau nu independente.

48. O urnă conţine 50 de bile, din care 36 sunt albe şi restul roşii. Se extrag succesiv 5 bile punându-se de fiecare dată bila extrasă în urnă după ce i s-a reţinut culoarea. Numărul de bile albe obţinut la sfârşitul celor 5 extrageri este o variabilă aleatoare de X.

a) Să se determine funcţia de repartiţie a lui X.

b) Să se determine valoarea medie a lui X, variaţia şi abaterea medie pătratică a lui X.

ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN PLAN ŞI SPAŢIU

1. Fie $\triangle ABC$ oarecare şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, CA şi respectiv AB. Fie O_1, O_2, O_3 şi I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor circumscrise şi centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C respectiv. Să se arate că triunghiurile $O_1O_2O_3$ şi $I_1I_2I_3$ sunt congruente.

2. Triunghiul $A'B'C'$ se obţine din $\triangle ABC$ printr-o translaţie. Fie O' şi O centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A'B'C'$ şi ABC şi I' şi I centrele cercurilor înscrise în triughiurile $A'B'C'$ şi ABC. Să se arate că $OO' = II'$ şi că medianele, înălţimile, mediatoarele şi bisectoarele corespunzătoare triunghiurilor $A'B'C'$ şi ABC sunt paralele sau coincid.

3. Pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului oarecare ABC se consideră punctele A_1, B_1 şi respectiv C_1, astfel încât $\overrightarrow{BA_1} = k\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = k\overrightarrow{B_1A}$, $\overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{C_1B}$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Să se arate că: $t_{\overrightarrow{AA}} \circ t_{\overrightarrow{BB_1}} \circ t_{\overrightarrow{CC_1}} = 1_\pi$

4. Să se arate că produsul (compunerea) simetriilor centrale s_{O_1} şi s_{O_2} este translaţia de vector $2\overrightarrow{O_1O_2}$, adică: $s_{O_1} \circ s_{O_2} = t_{2\overrightarrow{O_1O_2}}$.

5. Să se arate că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este un paralelogram dacă şi numai dacă are loc relaţia $s_{O_4} \circ s_{O_3} \circ s_{O_2} \circ s_{O_1} = 1_\pi$.

6. Fie $O_1O_2O_3 \dots O_{2n}$ un poligon oarecare. Să se arate că

$$s_{O_{2n}} \circ s_{O_{2n-1}} \circ \dots \circ s_{O_2} \circ s_{O_1} = 1_\pi,$$

dacă şi numai dacă are loc relaţia: $\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_3O_4} + \dots + \overrightarrow{O_{2n-1}O_{2n}} = \overrightarrow{0}$.

7. O dreaptă intersectează laturile AB, AD şi diagonala AC ale paralelogramului

$ABCD$ în punctele E, F şi respectiv G, astfel încât $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{AF}{AD} = \frac{1}{4}$. Să se arate că $\frac{AG}{AC} = \frac{1}{7}$.

8. Să se arate că un patrulater admite un centru de simetrie dacă şi numai dacă este paralelogram.

9. Există figuri plane care să admită exact două centre de simetrie?

10. Prin punctul A de intersecţe a cercurilor $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ să se construiască o dreaptă care să determine în cele două cercuri coarde egale.

11. Fie $\triangle ABC$ oarecare şi $O \in \text{Int}\triangle ABC$. Fie A', B', C' simetricele punctelor A, B, respectiv C faţă de punctul O. Să se determine poziţia punctului O în interiorul triunghiului ABC astfel încât aria triunghiului $A'B'C'$ să fie maximă.

12. Fie $\triangle ABC$ oarecare şi notăm cu H ortocentrul său. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor ABH, ACH, BCH, ABC sunt congruente, iar triunghiul ale cărui vârfuri sunt centrele cercurilor circumscrise triughiurilor ABH, ACH şi BCH este congruent cu ABC.

13. Fie d o dreaptă şi A şi B două puncte situate de o parte şi de alta a ei. Determinaţi poziţia punctului M pe dreapta d astfel încât diferenţa $MA - MB$ să fie maximă.

14. Fie d o dreaptă şi A şi B două puncte situate de o parte şi de alta a ei. Determinaţi poziţia punctului M pe dreapta d astfel încât diferenţa $MA - MB$ să fie minimă.

15. Fie $ABCD$ un pătrat şi A', B', C', D' mijloacele laturilor BC, CD, DA, şi respectiv AB. Să se arate că patrulaterul obţinut prin intersecţia dreptelor AA', BB', CC', DD' este un pătrat al cărui centru de simetrie coincide cu centrul de simetrie al pătratului $ABCD$.

16. Se consideră trei cercuri concentrice $\mathcal{C}_1(O, r_1)$, $\mathcal{C}_2(O, r_2)$ şi $\mathcal{C}_3(O, r_3)$, astfel încât $r_1 < r_2 < r_3$. Să se construiască un triughi echilateral ABC având vârfurile situate pe cele trei cercuri ($A \in \mathcal{C}_1$, $B \in \mathcal{C}_2$, $C \in \mathcal{C}_3$).

17. Fie triunghiul ABC echilateral şi P un punct interior, astfel încât $m(\widehat{APB}) = 150^0$. Să se arate că segmentele AP, BP, CP sunt laturile unui triunghi dreptunghic.

18. (Teorema lui Pompeiu). Fie P un punct în planul triunghiului echilateral ABC. Să se arate că lungimile AP, BP şi CP pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

19. Fie $\triangle ABC$ echilateral. Efectuăm trei rotaţii ale planului în acelaşi sens în jurul vârfurilor A, B, C cu unghiuri de măsură 60^0. Ce punct al planului ajunge în poziţia iniţială după cele trei rotaţii?

20. (Teorema lui Sylvester). Fie O punctul de intersecţie a liniilor mijlocii şi Q punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului convex $A_1A_2A_3A_4$. Dacă $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}$, atunci G este centrul de greutate al patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$.

21. Pe latura AB a triunghiului ABC se consideră punctele M şi N astfel încât $AM \equiv MN \equiv NB$. Se notează cu A_1, B_1 mijloacele laturilor BC şi respectiv AC şi cu $\{P\} = BB_1 \cap CN$, $\{Q\} = AA_1 \cap CM$. Să se arate că $AB = 4PQ$ şi că punctele P şi Q sunt mijloacele segmentelor BB_1 şi respectiv AA_1.

22. Să se arate că dacă lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi ABC verifică inegalitatea: $a^4 \geq b^4 + c^4 - b^2c^2$, atunci $m(\widehat{A}) \geq 60^0$.

23. Fie $A_0A_1A_1 \dots A_n$ un poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc cu raza 1. Să se demonstreze că $A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot \ldots \cdot A_0A_{n-1} = n$.

24. În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in (AC)$, $N \in (BC)$. Dreptele AN şi BM se intersectează în O. Să se determine ariile triunghiurilor OMN şi CMN în funcţie de ariile s_1, s_2, s_3 ale triunghiurilor OMA, OAB şi respectiv ONB.

25. Să se arate că într-un triunghi lungimea celei mai mici bisectoare interioare nu depăşeste triplul razei cercului înscris în triunghi.

26. În $\triangle ABC$ lungimile a, b, c ale laturilor sunt numere în progresie geometrică strict crescătoare. Să se arate că:

a) $\sin B + \sin C < (2 + \sqrt{5}) \sin A$; b) $\dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} > \dfrac{1}{\sin A}$.

27. Lungimile a, b, c şi a_1, b_1, c_1 ale laturilor triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ formează câte o progresie aritmetică, iar $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A_1})$. Să se demonstreze că în acest caz cele două triunghiuri sunt asemenea.

28. Fie $\triangle ABC$ oarecare. Se consideră triunghiul său median notat cu $A_1B_1C_1$; se notează cu $A_2B_2C_2$ triunghiul median al triunghiului $A_1B_1C_1$, procedeul continuându-se la nesfârşit. Dacă se notează cu $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ ariile triunghiurilor astfel obţinute, să se calculeze suma $S = s_0 + s_1 + \ldots + s_n + \ldots$.

29. Fie patrulaterul convex $ABCD$. Se consideră $A_1B_1C_1D_1$, patrulaterul obţinut prin unirea mijloacelor laturilor patrulaterului $ABCD$; $A_2B_2C_2D_2$, patrulaterul obţinut prin unirea mijloacelor laturilor patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$, procedeul continuându-se la nesfârşit. Dacă notăm cu $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ ariile patrulaterelor astfel obţinute, să se calculeze suma $S = s_0 + s_1 + \ldots + s_n + \ldots$.

30. Determinaţi mulţimea punctelor unei suprafeţe pătrate cu proprietatea că pătratele distanţelor lor la vârfurile pătratului sunt:

a) în progresie aritmetică; b) în progresie geometrică.

31. Fie triunghiul ABC, care nu este dreptunghic. Să se demonstreze că are loc inegalitatea:

$$\frac{\log_{\sin B} \sin A}{\sin B + \sin A} + \frac{\log_{\sin C} \sin B}{\sin C + \sin B} + \frac{\log_{\sin A} \sin C}{\sin A + \sin C} \geq \frac{9r}{p}.$$

32. Dacă O este un punct în interiorul triunghiului ABC, să se arate că:

$$OA + OB + OC \geq 2(OA_1 + OB_1 + OC_1),$$

unde A_1, B_1, C_1 sunt proiecţiile punctului O pe laturile AB, BC şi respectiv CA ale triunghiului ABC.

33. În interiorul patrulaterului convex $ABCD$ se găseşte un punct P, astfel încât: $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PDA}$. Să se arate că cel puţin una din diagonale împarte patrulaterul în două triunghiuri de aceeaşi arie.

34. Fie α, β două plane perpendiculare. Dacă $A, B \in \alpha \cap \beta$ şi $C \in \alpha$, astfel încât $\triangle ABC$ să fie dreptunghic în A, să se demonstreze că $\triangle CAD$, $\triangle ADB$, $\triangle BDC$ sunt triunghiuri dreptunghice, unde $D \in \beta$ şi D se află pe cercul de diametru AB.

35. Fie $OXYZ$ un triedru, astfel încât $Ox \perp Oy \perp Oz \perp Ox$ şi fie $A \in (Ox$, $B \in (Oy$, $C \in (Oz$, puncte variabile, astfel încât $\dfrac{OA}{a} = \dfrac{OB}{b} = \dfrac{OC}{c}$, a, b, c date.

Să se arate că:

a) ortocentrul şi centrul de greutate ale triunghiului ABC,

b) centrul de greutate al tetraedrului $ABCD$ şi centrul sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$,

descriu drepte care trec prin O.

36. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, de muchie m. Un plan dus prin înălţimea din A a tetraedrului taie BC şi BD în M, respectiv în N. Să se arate că:

$$\frac{1}{|BM|} + \frac{1}{|BN|} = \frac{3}{m}.$$

37. Să se arate că dacă d_1 şi d_2 sunt două drepte concurente în T, oricare ar fi punctul M exterior planului (α) ce le include, proiecţiile punctului M pe d_1 şi d_2, pe planul (α) şi punctul T sunt conciclice.

38. Să se arate că dacă două tetraedre au feţele respectiv asemenea, atunci ele au unghiurile diedre egale.

39. Fie tetraedrul $ABCD$ şi a, b, c, d, lungimile înălţimilor duse din vârfurile A, B, C, D. Fie O un punct oarecare în interiorul tetraedrului şi notăm cu α, β, γ, δ, distanţele punctului O la planele (BCD), (CDA), (DBA), (ABC). Să se arate că:

a) $\dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{\beta}{b} + \dfrac{\gamma}{c} + \dfrac{\delta}{d} = 1$; b) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2} + \dfrac{1}{\delta^2}\right) \geq 256$.

40. Fie AO înălţimea unui tetraedru $ABCD$, în care muchiile AB, AC, AD sunt perpendiculare două câte două. Să se arate că:

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}.$$

41. Dacă toate cele şase unghiuri diedre ale unui tetraedru sunt ascuţite , să se determine valoarea maximă a sumei

$$S = \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3 + \cos x_4 + \cos x_5 + \cos x_6,$$

unde x_i, $i = \overline{1,6}$ sunt măsurile celor şase unghiuri diedre.

42. a) Să se demonstreze că nu se pot numerota muchiile unui cub cu numerele $1, 2, 3, \ldots, 11, 12$, astfel încât sumele numerelor corespunzătoare celor trei muchii care ajung în acelaşi vârf să fie egale.

b) Se poate elimina unul din numerele $1, 2, 3, \ldots, 12, 13$, astfel încât , dacă cu celelalte numere rămase numerotăm muchiile cubului să fie îndeplinită condiţia de la punctul a)?

43. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$, atunci şi $AD \perp BC$.

44. Un tetraedru cu oricare două perechi de muchii opuse perpendiculare se numeşte tetraedru ortogonal.

a) Să se arate că în orice tetraedru ortogonal înălţimile sunt concurente.

b) Să se arate că perpendicularele comune ale muchiilor opuse într-un tetraedru ortogonal se întâlnesc în punctul comun înălţimilor tetraedrului.

c) Să se arate că într-un tetraedru ortogonal suma pătratelor lungimilor muchiilor opuse este constantă.

45. Să se arate că în orice tetraedru ortogonal cele şase mijloace ale muchiilor sunt situate pe aceeaşi sferă.

46. Să se arate că într-un tetraedru ortogonal, centrul de greutate al tetraedrului se proiectează în centrele cercurilor lui Euler ale feţelor.

47. (Sfera lui Vogt) Să se arate că cercurile lui Euler ale feţelor unui tetredru ortogonal sunt situate pe aceeaşi sferă.

48. Se dă tetredrul $OABC$, în care $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA}) = 90^0$.

a) Să se demonstreze că vârful O al tetredrului, centrul de greutate T al triunghiului ABC şi centrul S al sferei circumscrise tetraedrului sunt trei puncte coliniare.

b) Să se demonstreze că mărimile $\text{ctg}\alpha$, $\text{ctg}\beta$, $\text{ctg}\gamma$ sunt proporţionale respectiv cu a^2, b^2, c^2, unde am notat: $\alpha = m(\widehat{CAB})$, $\beta = m(\widehat{ABC})$, $\gamma = m(\widehat{ACB})$ şi $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

49. (Sfera lui Euler.) Să se demonstreze că într-un tetraedru $ABCD$, centrele de greutate ale feţelor, punctele care împart segmentele care unesc anticentrul cu vârfurile în raportul $\frac{1}{2}$ şi proiecţiile acestor puncte pe faţa opusă sunt doisprezece puncte cosferice. (Anticentrul unui tetraedru este simetricul centrului sferei circumscrise faţă de centrul de greutate al tetraedrului.)

50. (Teorema lui Crelle). Fiind dat un tetraedru $ABCD$, să se demonstreze că există o sferă tangentă celor şase muchii ale tetraedrului, dacă şi numai dacă are loc relaţia: $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

(Tetraedrele cu proprietatea că există o sferă hexatangentă muchiilor se numesc tetraedre Crelle.)

51. Să se arate că dacă un tetraedru regulat este secţionat cu un plan paralel cu două muchii opuse, atunci:

a) secţiunea este un dreptunghi;

b) perimetrul secţiunii nu depinde de poziţia planului de secţiune luat în condiţiile menţionate.

52. Se dă prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul ABC, echilateral, cu latura de lungime egală cu 4 cm şi muchia $AA' = 3$ cm. Se notează cu S mijlocul laturii AC. Să se calculeze lungimea distanţei dintre dreptele $C'M$ şi AB.

53. Latura bazei unei prisme patrulatere regulate drepte este $2a$, iar înălţimea sa este $a(1 + \sqrt{3})$. Se consideră sfera care trece prin vârfurile uneia din bazele prismei şi este tangentă la cealalată bază a prismei. Să se găsească aria porţiunii de prismă aflată în interiorul sferei.

54. Patru sfere de rază egală cu 1 sunt tangente două câte două. Să se determine lungimea laturii unui tetraedru regulat circumscris celor patru sfere.

55. Să se demonstreze că volumul V şi aria laterală S a unui con circular drept verifică inegalitatea:

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

În ce caz inegalitatea se transformă în egalitate?

56. Dacă într-un tetraedru $ABCD$ are loc relaţia $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$ să se arate că dreptele care unesc fiecare vârf cu centrul cercului înscris în triunghiul de pe faţa opusă sunt concurente.

57. Un plan π trece prin vârful O al unui tetraedru regulat $OPQR$. Notăm cu p, q, r distanţele de la punctele P, Q, R la planul π. Să se arate că:

$$p^2 + q^2 + r^2 + (q-r)^2 + (r-p)^2 + (p-q)^2 = 2a^2.$$

58. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm, $AD = 2\sqrt{13}$ cm, $BC = 3$ cm şi $BD = 6$ cm.

a) Să se arate că triunghirile ABC şi ABD sunt dreptunghice.

b) Calculaţi raportul volumelor tetraedrelor $ABCM$ şi $ABDM$, unde $M \in CD$ este punctul de intersecţie al planului bisector al unghiului diedru de muchie AB cu CD.

c) Determinaţi raportul $\dfrac{MC}{MD}$.

59. Se consideră piramida triunghiulară $SABC$, astfel încât $SA = SB = SC = a$, $m(\widehat{ASB}) = 60^0$, $m(\widehat{ASC}) = 90^0$, $m(\widehat{BSC}) = 120^0$.

Să se calculeze:

a) perimetrul triunghiului ABC; b) aria laterală a piramidei; c) volumul piramidei.

60. Se dă o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza dreptunghiul $ABCD$, având lungimea $AD = a$ cm şi lăţimea $AB = b$ cm $(a, b > 0,\ a > b)$. Se notează cu O intersecţia diagonalelor dreptunghiului şi cu Q mijlocul înălţimii VO. Să se determine aria secţiunii determinată în piramidă de planul (DQC), dacă $VO = c$ cm.

61. Se consideră piramida patrulateră $SABCD$ cu baza dreptunghiul $ABCD$ ($AB = a$ cm, $BC = b$ cm, $SA = h$ cm) şi muchia SA perpendiculară pe planul bazei. Se notează cu E şi F mijloacele segmentelor SC şi SD. Să se studieze natura patrulaterului $ABEF$ şi să se calculeze aria sa.

62. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea laturii a cm şi fie M mijlocul muchiei AA'.

a) Să se studieze natura triunghiului MBD' şi să se calculeze distanţa de la M la diagonala BD'.

b) Să se cerceteze dacă în prisma $ABDA'B'D'$ se poate înscrie o sferă.

63. O piramidă patrulateră $VABCD$ (cu baza pătratul $ABCD$ şi vârful V), regulată, are lungimea laturii bazei a cm şi lungimile muchiilor laterale $a\sqrt{2}$ cm. Prin mijlocul unei muchii din V se duce un plan parpendicular pe muchia opusă (muchie ce trece tot prin V), care determină o secţiune în piramidă. Să se calculeze perimetrul şi aria patrulaterului de secţiune, precum şi raportul volumelor celor două corpuri în care este împărţită piramida.

64. Fie $OABC$ un tetraedru tridreptunghic cu $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA}) = 90^0$. Să se calculeze raportul:

$$\frac{\sigma^2[BOC] + \sigma^2[AOC] + \sigma^2[AOB]}{\sigma^2[ABC]}.$$

Poate fi triunghiul ABC obtuzunghic?

65. Fie $ABCD$ un tetraedru în care $AC \perp BC$, $AD \perp BD$. Notăm cu O acel punct al muchiei AB, pentru care suma $CO + OD$ este minimă. Planul perpendicular în O pe muchia AB intersectează dreptele BC, AC, BD şi AD în punctele M, N, P şi respectiv Q. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este trapez isoscel.

66. Două pătrate $ABCD$ şi $ABEF$ au o latură comună $AB = a$ cm, iar planele pătratelor sunt perpendiculare. Fie $M \in (AC)$ şi $N \in (BF)$, astfel încât $CM = NF = x$ cm.

a) Să se arate că $MN || (CDF)$.

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}_+$, astfel încât MN are lungimea minimă.

c) Determinaţi locul geometric al mijlocului segmentului MN când x variază.

67. O piramidă patrulateră regulată $SABCD$ are muchiile laterale de lungime a cm, iar muchia bazei de lungime b cm. Dacă se notează unghiul format de două feţe laterale alăturate cu α şi unghiul format de o faţă laterală cu planul bazei cu β, să se arate că:

a) $4\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos 2\beta + 3$;

b) unghiul diedru a două feţe laterale alăturate nu poate fi de 60^0.

68. Piramida $SABCD$ are baza un trapez $ABCD$, având baza mare CD şi $SA = SB = SC = SD = a$ cm, $CD = 2b$ cm, $BC = AD = b$ cm şi $m(\widehat{CAD}) = 90^0$. Să se afle aria totală şi volumul piramidei.

69. Se notează cu S_1, V_1 şi S_2, V_2 ariile şi volumele sferei circumscrise, respectiv înscrise în conul circular drept de arie S şi volum V. Să se arate că:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}V_1 > 8V > 3\sqrt{3}V_2$; b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}S_1 > 4S > 3\sqrt{3}S_2$.

70. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Să se arate că mijloacele celor şase muchii ale cubului care nu trec prin nici unul din vârfurile A şi C' se află în acelaşi plan şi sunt vârfurile unui hexagon regulat

71. Fie triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm şi $AD \perp BC$, $D \in BC$. Cercul cu centrul în A şi rază AD intersectează laturile AB şi AC în E şi respectiv în F. Rotim figura în jurul dreptei AD. Să se calculeze aria calotei generate de arcul $E\overset{\frown}{D}F$, aria laterală şi volumul trunchiului de con generat de trapezul $BCFE$.

72. Fie pătratul $ABCD$ cu latura a cm. Pe perpendicularele în A şi C pe planul (ABC), de aceeaşi parte a planului, se consideră punctele E şi F, astfel încât $AE = a\sqrt{2}$ cm, $CF = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ cm. Să se calculeze BE, EF, $m(\widehat{BEF})$ şi volumul pirmidei $FBDE$.

73. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat. Unghiurile feţelor laterale având vârful în vârful piramidei au măsura p.

a) Să se calculeze volumul piramidei în funcţie de R şi p.

b) Să se determine p în cazul în care înălţimea piramidei este egală cu raza sferei.

74. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped cu toate muchiile egale cu a cm, iar cele trei muchii ce pleacă din vârful A formează, două câte două unghiuri de 60^0. Să se calculeze volumul paralelipipedului.

75. Fie tetraedrul $ABCD$ şi notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4, centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD, ABC. Să se arate că sferele $S_1\left(G_1, \frac{AM}{3}\right)$, $S_2\left(G_2, \frac{BM}{3}\right)$, $S_3\left(G_3, \frac{CM}{3}\right)$, $S_4\left(G_4, \frac{DM}{3}\right)$, au un punct comun, oricare ar fi punctul M din spaţiu.

76. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de lungime a cm, M şi P mijloacele muchiilor BC şi AA' şi O' centrul bazei $A'B'C'D'$. Să se determine secţiunea realizată în cub de planul (MPO') şi perimetrul ei.

77. Vârful unui brad a fost rupt de o furtună. Ştiind că partea ruptă are lungimea de 2m şi că, înainte de furtună, bradul era văzut dintr-un punct A situat în acelaşi plan orizontal cu baza bradului, sub un unghi de $37^0 30'$ şi că după furtună bradul era văzut din acelaşi punct A sub un unghi de $22^0 30'$, să se afle înălţimea actuală a bradului.

78. Notăm cu d_i, $i = 1,2,3,4$ distanţele de la un punct P interior unui tetraedru regulat de muchie $\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm la feţele acestuia. Să se arate că:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{d_4} \geq 16.$$

79. Fie $ABCD$ un tetraedru şi notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4, centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD şi respectiv ABC. Fie M un punct oarecare în spaţiu. Să se arate că paralelele duse prin G_1, G_2, G_3, G_4, respectiv la dreptele MA, MB, MC, MD, sunt concurente.

80. Fie un punct P situat în interiorul tetraedrului $ABCD$ şi A_1, B_1, C_1, D_1 respectiv proiecţiile ortogonale ale lui P pe planele (BCD), (CDA), (DAB) şi (ABC). Să se demonstreze că:

$$\frac{\sigma[BCD]}{PA_1} + \frac{\sigma[CDA]}{PB_1} + \frac{\sigma[DAB]}{PC_1} + \frac{\sigma[ABC]}{PD_1} \geq \frac{S}{r},$$

unde S este aria totală a tetraedrului, iar r este lungimea razei sferei înscrise în tetraedru. În ce caz are loc egalitatea?

81. Baza piramidei $OABCD$ este trapezul $ABCD$ cu baza mică $AB = 3$ cm şi baza mare $CD = 5$ cm.

Ştiind că planele feţelor laterale (OAD) şi (OBC) se taie după o dreaptă perpendiculară pe bază, că aria feţei laterale OAB este de 9 cm^2 şi că aria feţei laterale OCD este de 20 cm^2, să se determine volumul piramidei.

82. Un cub este intersectat cu un plan care conţine o diagonală a cubului. Să se determine poziţia acestui plan, astfel încât aria secţiunii să fie minimă.

83. Să se arate că pentru orice con circular drept raportul dintre aria sa totală şi aria sferei înscrise este mai mare sau egal cu 2.

84. Fie tetraedrul $ABCD$ în care se cunosc: $m(\widehat{BAC}) = \alpha$, $m(\widehat{CAD}) = \beta$ şi $m(\widehat{DAB}) = \gamma$. Să se calculeze măsura unghiului diedru format de feţele (ABC) şi (ABD) în funcţie de α, β, γ.

85. Notăm cu x, y, z aria totală a unui con circular drept, volumul şi aria sferei înscrise în con. Să se demonstreze că $x^2z = 36\pi y^2$.

86. Se consideră o piramidă triunghiulară regulată $ABCD$, cu baza triunghiul echilateral BCD. Pe muchia AB se consideră punctul M, astfel încât $AB = 4AM$ şi se notează cu N mijlocul muchiei CD a piramidei. Să se arate că MN trece prin mijlocul înălţimii AO a piramidei.

87. Două plane perpendiculare intersectează o sferă după cercurile de raze a şi b. Distanţa de la centrul sferei la dreapta de intersecţe a celor două plane este egală cu c. Să se calculeze raza sferei în funcţie de a, b şi c.

88. Fie un cub $ABCDA'B'C'D'$, astfel încât $AB = 1$ cm şi $M \in (A'B)$, $N \in (CD)$, $P \in (A'D')$, $Q \in (BC)$. Notând $A'M = x$, $A'P = y$, $CQ = z$, $CN = u$, să se arate că:

a) dacă dreptele MN şi PQ sunt perpendiculare, atunci $x + y + z + u = 3$;

b) dacă dreptele MN şi PQ sunt paralele, atunci $xz = yu$.

89. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu $AB = a$ cm. Să se calculeze distanţa de la dreapta $A'D$ la dreapta BD'.

90. Într-un vas de formă sferică, de rază $R = 4$ dm, se introduce un corp de formă de asemenea sferică, de rază $r = 2,5$ dm şi apoi în spaţiul dintre ele se toarnă lichid până se ridică la înălţimea $h = \dfrac{\sqrt{22}}{3}$ dm. Să se afle înălţimea lichidului din vas după scoaterea corpului.

91. Se dă piramida hexagonală regulată de latură a cm, având unghiul format de o faţă laterală cu planul bazei de 45^0. Prin una din laturile bazei se secţionează piramida cu un plan ce formează cu planul bazei un unghi de 30^0. Calculaţi volumul piramidei ce are ca bază planul de secţiune şi ca vârf, vârful piramidei date.

92. Un trunchi de piramidă regulată are bazele pătrate de laturi cu lungimile a şi $2a$, iar înălţimea h.

a) Să se calculeze aria totală şi volumul trunchiului.

b) Ce relaţie îndeplinesc a şi h, astfel încât să existe o sferă tangentă bazelor şi muchiilor laterale?

93. Se consideră piramida $VABCD$, unde $ABCD$ este dreptunghi, $\{O\} = AC \cap BD$, $VO \perp (ABC)$.

a) Să se determine aria laterală, aria totală şi volumul piramidei ştiind că $AB = a$ cm, $BC = b$ cm, $VO = h$ cm.

b) Un plan oarecare intersectează muchiile laterale ale piramidei în $A' \in (VA)$, $B' \in (VB)$, $C' \in (VC)$, $D' \in (VD)$. Să se arate că:

$$\frac{1}{VA'} + \frac{1}{VC'} = \frac{1}{VB'} + \frac{1}{VD'}.$$

94. Printr-un punct oarecare al unei muchii dintr-un tetraedru oarecare se duc două plane de secţiune paralele cu feţele tetraedrului care nu conţin muchia respectivă. Notăm cu V_1 şi V_2 volumele tetraedrelor mici formate şi cu V volumul tetraedrului iniţial. Să se arate că: $\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} = \sqrt[3]{V}$.

95. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub de latură a, M mijlocul lui $(A'B')$, N mijlocul lui (CC') şi $\{Q\} = B'C' \cap (AMN)$. Să se determine în funcţie de a:

a) lungimile segmentelor (AM), (AN), (BM), $(C'Q)$;

b) aria secţiunii determinate de planul ΔAMN în cubul $ABCDA'B'C'D'$.

96. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$. Planul determinat de A şi de centrele pătratelor $A'B'C'D'$ şi $B'C'CB$ intersectează dreapta $B'C'$ în E. Să se calculeze valoarea raportului $\frac{B'E}{EC'}$.

97. Fie un pătrat de latură 1, în care sunt $2n^2+2n+1$ puncte. Să se arate că există cel puţin 2 puncte la distanţă mai mică decât $\frac{1}{n}$.

98. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat. Notăm cu H proiecţia lui A pe planul (BCD) şi cu H' proiecţia lui H pe palnul (ACD). Să se arate că $HH' = \frac{AH}{3}$.

99. În interiorul unui pătrat de latură 1 se află o linie poligonală care nu se autointersectează şi care are o lungime mai mare ca 1000. Să se arate că se poate duce o paralelă la una din laturile pătratului, care taie linia poligonală în cel puţin 501 puncte, oricare ar fi linia poligonală trasată cum s-a arătat mai sus.

100. Fie $ABCD$ un tetraedru oarecare şi punctele coplanare $L \in (AB)$, $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $P \in (AD)$. Să se arate că: $\frac{AL}{AB} \cdot \frac{BM}{BC} \cdot \frac{CN}{CD} \cdot \frac{PD}{AD} \leq \frac{1}{16}$.

101. Se consideră un plan α şi un punct $O \notin \alpha$. Fie A proiecţia lui O pe planul α, iar $B, C \in \alpha$ oarecare. Dacă $D \in OA$, iar E, F sunt proiecţiile lui D pe OB, respectiv pe OC, să se arate că:

a) $BCFE$ este un patrulater inscriptibil;

b) dacă $\frac{OB}{BC} = \frac{OA}{AB}$ şi $OB = OC$, atunci triunghiul DEF este echilateral.

102. Paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile AB, AD şi AA' au respectiv lungimile a, b şi c. Unghiurile $A'AB$ şi $A'AD$ sunt congruente şi au măsura x (în radiani). Să se arate că $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ şi că volumul paralelipipedului este $V = abc\sqrt{-\cos 2x}$.

103. Să se arate că că paralelipipedul dreptunghic de volum constant şi arie totală minimă este cub.

104. Lungimea laturii unui tetraedru regulat este egală cu 1 cm. Dacă $P \in (AB)$ şi $Q \in (CD)$, atunci să se calculeze minimumul distanţei PQ.

105. Se consideră n puncte în spaţiu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 4)$. Să se demonstreze că aceste puncte sunt coplanare, dacă şi numai dacă există cel puţin un punct M, astfel încât sferele de diametre $A_1M, A_2M, \ldots, A_nM$ să aibă un punct comun diferit de M.

106. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $ABCD$, $AB \perp BD$ şi $AC \perp CD$, atunci piciorul înălţimii tetraedrului dusă din vârful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

107. Fie tetraedrul $VABC$ şi $M \in (ABC)$, astfel încât $VA^2 - AM^2 = VB^2 - BM^2 = VC^2 - CM^2$. Să se arate că $VM \perp (ABC)$.

108. Fie o piramidă cu vârful S şi având ca bază poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$. Să se arate că sferele de diametre $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ au un punct comun diferit de S.

109. Printr-un punct A din spaţiu se duc 3 drepte perpendiculare două câte două.

Pe fiecare din aceste 3 drepte se aleg punctele B, C, D astfel încât $AB = AC = AD = a$, $(a > 0)$. Se consideră conul circumscris tetraedrului $ABCD$, cu vârful în A. Se cere:

1. volumul conului;
2. aria sferei înscrise în con;
3. aria calotei mari determinate de cercul de tangenţă al sferei cu conul;
4. cercul de tangenţă al sferei cu conul intersectează dreptele AB, AC, AD respectiv în punctele B', C', D'. Să se arate că sfera înscrisă în con, sfera circumscrisă tetraedrului $AB'C'D'$ şi sfera circumscrisă tetraedrului $BB'C'D'$ au centrele coliniare.

110. Dacă notăm cu α, β, γ unghiurile pe care diagonala unui paralelipiped dreptunghic le formează cu cele trei feţe care pornesc din acelaşi vârf cu diagonala, să se arate că are loc inegalitatea:

$$\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma + \frac{1}{\sin^4\alpha} + \frac{1}{\sin^4\beta} + \frac{1}{\sin^4\gamma} \geq \frac{82}{3}.$$

111. Se consideră o sferă înscrisă într-un con circular drept. Să se arate că raportul volumelor celor două corpuri este egal cu raportul ariilor lor totale.

112. Se consideră piramida $SABC$ unde ABC este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza BC de lungime a şi unghi ascuţit $\widehat{B}$ de măsură α. Muchiile laterale SA, SB, SC formează cu planul (ABC) unghiuri congruente de măsură β. Să se găsească volumul piramidei şi măsurile unghiurilor $\widehat{ASB}$, $\widehat{BSC}$, $\widehat{CSA}$.

113. Se dă un con circular drept cu generatoarea de lungime a. Să se calculeze volumul conului, ştiind că există trei generatoare perpendiculare două câte două.

114. Fie $ABCD$ un tetraedru dee volum V şi o dreaptă d care trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă $AB \cap d = \{P\}$, $AC \cap d = \{Q\}$, să se arate că

$$\frac{b}{vol[DAPC]} + \frac{c}{vol[DAQB]} = \frac{a+b+c}{V},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor triughiului ABC.

115. Să se determine forma şi perimetrul secţiunii unui cub $ABCDA'B'C'D'$ de latură a, prin planul determinat de punctele $E \in (BD)$, astfel încât $BE = \frac{1}{4}BD$, $F \in (A'D')$, astfel încât $FA' = FD'$ şi $\{G\} = BC' \cap CB'$.

116. Două sfere egale şi de rază r sunt tangente exterior în punctul A. Să se calculeze volumul cilindrului circular drept circumscris celor două sfere.

117. Două sfere de raze r şi respectiv R $(0 < r < R)$ sunt tangente exterior în punctul A. Să se calculeze aria totală şi volumul trunchiului de con circular drept care se poate circumscrie celor două sfere.

118. Un con circular drept are raza egală cu a $(a > 0)$ şi înălţimea egală cu b $(b > 0)$, cu $a < b$. O sferă cu centrul în centrul bazei conului şi cu raza egală cu a împarte conul în două corpuri, ale căror volume se notează cu V_1 şi respectiv V_2. Să se calculeze valoarea raportului $\frac{V_1}{V_2}$.

119. Trei sfere de raze r_1, r_2, r_3 $(0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3)$ sunt tangente exterioare două câte două. Să se determine raza unei sfere care se poate circumscrie celor trei sfere.

CLASA A XI-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. DREPTE ŞI PLANE

1. Să se determine ecuaţia carteziană implicită a dreptei d ştiind că:
i) punctul $A(-1,1)$ aparţine dreptei d şi vectorul său de direcţie este $\vec{u}(3,5)$;
ii) $O \in d$ şi vectorul normal este $\vec{u}(3,5)$;
iii) este paralelă cu prima bisectoare, originea se află la distanţa de $10\sqrt{2}$ unităţi faţă de dreaptă, iar aceasta taie axa Ox în partea cu $x<0$.

2. Fie dreptele d şi d_1, care verifică următoarele condiţii:
$m(\widehat{d,d_1})=\frac{\pi}{6}$; $d \cap d_1=\{A(2,-2)\}$; vectorul de direcţie al dreptei d este $\vec{u}=(\sqrt{3},1)$.
Să se determine:
i) ecuaţiile celor două drepte. Câte soluţii are problema?
ii) distanţele de la O la dreptele de la punctul i).

3. Fie $A(4,1)$, $B(-2,4)$, $C(-4,-2)$. Să se determine:
i) măsura unghiurilor triunghiului ABC;
ii) perimetrul şi aria triunghiului ABC;
iii) ecuaţia şi lungimea medianei din A, a triunghiului ABC.

4. În triunghiul ABC, M este mijlocul lui $[BC]$, BP este înălţime, $M(0,2)$, $P(1,-2)$, $BC=4\sqrt{5}$. Să se determine:
i) coordonatele centrului de greutate G;
ii) ecuaţia şi lungimea înălţimii din A;
iii) aria, coordonatele vârfurilor triunghiului ABC, perimetrul trapezului $ABCD$ ($AC \| BD$, $AC=2BD$);
iv) măsura unghiurilor paralelogramului $ABEC$ şi coordonatele punctului E;
v) coordonatele centrelor cercurilor înscris şi circumscris triunghiului ABC şi razele acestor cercuri.

5. Se dau dreptele d_1 de direcţie $\vec{u}$ trecând prin punctul A şi d_2 perpendiculară pe $\vec{n}$ conţinând punctul B; $\vec{u}=(3,1)$; $\vec{n}=(-2,1)$; $A(1,1)$, $B(-1,1)$. Să se determine ecuaţia locului geometric al punctelor egal depărtate de dreptele d_1 şi d_2 şi să se reprezinte grafic acest loc geometric.

6. Fie $A(1,1)$, $B(4,5)$, $C(a,b)$. Să se determine mulţimea $\mathcal{L}_q \stackrel{\text{def}}{=} \{C(a,b) \mid \mathcal{A}_{\triangle ABC}=6\}$

7. Să se scrie ecuaţia planului Δ, dacă:
i) $A(1,2,-1) \in \Delta$, $Ox \subset \Delta$;
ii) $AB \subset \Delta$; $A(1,2,-1)$, $B(a,1,-2)$; $Ox \perp \Delta$.
Pentru ce valori ale lui a planul este unic determinat?
iii) $C(3,-3,-1) \in d$ de vector normal $\vec{n}(1,1,1)$;
iv) $\Delta \| (ABC)$; $A(1,2,-1)$; $B(1,1,-2)$; $C(2,2,-2)$ ştiind că $d(0,\Delta)=2$.

8. Se dau planele $\Delta: 3x+4y+5z-9=0$ şi $\Delta_1: 2x+y-5z+7=0$. Să se determine ecuaţiile parametrice ale dreptelor:
i) $d_1=\Delta \cap \Delta_1$; ii) $d_2 \| \Delta$, $d_2 \subset \Delta_1$, $E(2,2,1) \in d_2$;

iii) $BC \subset \Delta$; $AC \| \Delta_1$, $BC \perp \Delta \cap \Delta_1$, $AC \perp \Delta \cap \Delta_1$.

9. Să se determine:

$\{M \in \text{Spaţiu}/\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 | A(2,0,2); B(0,4,0); \overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{BP}\}$.

10. Să se determine mulţimea punctelor M din spaţiu, ştiind că $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, $A(3,3,3)$; $B(-3,3,-3)$

11. Se dau punctele $A(3,5)$, $M(-1,3)$, $N(4,1)$. Se cere:

a) ecuaţia dreptei dusă prin A, paralelă la MN;

b) ecuaţia perpendicularei din A pe MN;

c) ecuaţiile dreptelor duse prin A şi înclinate la 45^0 pe MN.

12. Se dă un punct fix $A(a,b)$, un punct variabil $M(\alpha, \alpha - a)$ şi dreapta $y = mx + n$. Să se determine coordonatele punctului M, astfel ca AM să fie paralelă cu dreapta dată. Aplicaţie numerică: $A(1,3)$ şi dreapta $5x - 3y + 10 = 0$

13. Se dau grupele de câte trei puncte:

$A\left(-\frac{4}{5}, 2\right)$, $B\left(\frac{2}{5}, 4\right)$; $C(1,5)$;

$A'\left(-\frac{7}{5}, 1\right)$, $B'\left(-1, \frac{5}{3}\right)$, $C'(2,-5)$.

Să se spună dacă fiecare grupă are puncte coliniare şi în caz afirmativ să se scrie ecuaţia dreptei pe care se găsesc.

14. Să se determine punctul $M(\lambda, \lambda)$, astfel ca el să fie în linie dreaptă cu punctele $A(1,-2)$ şi $B(2,4)$.

15. Se dă punctul $A(-3,5)$. Să se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului $\overline{OA}$.

Capitolul II. ALGEBRA MATRICELOR

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $A+B$; $A-B$; $2A$; $3B$; $2A+3B$.

2. Să se determine matricele A, B, C, X şi Y, ştiind că:

a) $A + \begin{pmatrix} 6a & -2a & 4 \\ 6b & c-2 & 3d \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b & -a-4+c & d \\ 9 & 3a & -3 \end{pmatrix} = 0$;

b) $B = \sum\limits_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} k & k^2 \\ k^3 & (2k+1)^2 \end{pmatrix}$; c) $C = \sum\limits_{k=0}^{4n-1} \begin{pmatrix} 1 & i^k \\ i^{3k} & i^{2k} \end{pmatrix}$;

d) $\begin{cases} 3X - 5Y = \begin{pmatrix} 11 & -23 \\ 19 & 15 \end{pmatrix} \\ 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 20 \end{pmatrix} \end{cases}$.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. Să se calculeze produsul AB. Are sens produsul BA?

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Au sens ambele produse AB şi BA? În caz afirmativ să se calculeze aceste produse. Are sens diferenţa $AB - BA$?

5. Se dau matricele: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

a) $A+B$; AB şi BA; b) A2 şi B^2; $A^2 - B^2$; c) $AB - BA$.

6. Două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sau $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comută dacă are loc egalitatea $AB = BA$. Să se arată că următoarele matrice comută:

a) O_n şi A (unde O_n este matricea nulă de ordinul n, având toate elemetele egale cu O) : $O_n \cdot A = A \cdot O_n = O_n$

b) I_n şi A (unde I_n este matricea unitate de ordinul n, adică având toate elementele de pe diagonala principală egale cu 1, iar celelalte egale cu 0): $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$.

c) Două puteri oarecare ale aceleiaşi matrice A: $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p = A^{p+q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$.

d) Două puteri oarecare a două matrice care comută: $A^h B^k = B^k A^h$ $(h, k \in \mathbb{N})$.

e) Două matrice scalare:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix},$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} ab & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ab & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & ab & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & ab \end{pmatrix};$$

f) Două matrice pseudoscalare:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix};$$

g) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Să se arate că dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sau $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $AB = BA$, atunci au loc egalităţile:

a) $A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2}B + A^{m-3}B^2 + \dots + AB^{m-2} + B^{m-1})$;

b) $(A+B)^m = A^m + \binom{m}{1} A^{m-1}B + \binom{m}{2} A^{m-2}B^2 + \dots + \binom{m}{m} B^m$.

8. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că $AB - BA \neq I_2$.

9. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sau $A \in \mathcal{C}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

se defineşte urma matricei prin egalitatea: $Tr(A) \overset{\text{def}}{=} a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$[1] (suma elementelor de pe diagonala principală).

a) Să se calculeze $Tr(O_n)$; $Tr(I_n)$;

b) Să se demonstreze egalitatea: $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$;

c) Să se demonstreze egalitatea: $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.

d) Să se demonstreze egalitatea: $Tr(AB) = Tr(BA)$.

10. Să se demonstreze că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci egalitatea $AB - BA = I_n$ este imposibilă.

11. a) Se notează $[A, B] = AB - BA$ (matricea $[A, B]$ astfel definită fiind numită parametrul Poisson[2] al lui A şi B). Cum se transcrie rezultatul din problema 10?

b) Să se stabilească identitatea lui Iacobi:[3]:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] = [[C, A], B] = 0.$$

12. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $AX = XA$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (adică A comută orice matrice pătratcă de ordinul II). Să se arate că există $\lambda \in \mathbb{C}$, astfel încât $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (sau echivalent $A = \lambda I_2$; se spune că A este un multiplu scalar al matricei-unitate).[4]

13. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât $AX = XA$.

14. Să se calculeze produsul AB pentru următoarele perechi de matrice A şi B, arătând că se obţine matricea nulă:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$; $B = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \neq 0$;

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \\ -10 & -5 & 5 \end{pmatrix} \neq 0$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \neq 0$.

(Două matrice pătrate de acelaşi ordin n, A, B, nenule, al căror produs este matricea nulă, se numesc divizori ai lui 0.)

15. a) Să se calculeze A^2, dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

---

[1] Notaţia provine de la cuvântul *trace*, care în limbile franceză şi enegleză înseamnă urmă.

[2] Dénis Poisson (1881-1840), matematician francez.

[3] Karl Jacobi (1804-1851), matematician german.

[4] Proprietatea este valabilă şi în cazul nmatricelor pătrate de ordinul n

b) Să se calculeze A^3, dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Este A divizor al lui zero? Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$, două matrice cu elemente numere reale sau complexe. Să se verifice prin calcul identitatea:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(Determinantul produsului este egal cu produsul determinanţilor.)[1)]

17. Să se stabilească egalitatea $\det(A^m) = (\det(A))^m$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18. Se consideră ecuaţia $x^3 + 3px + 2q = 0$, unde $p, q \in \mathbb{R}$ şi fie x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile ecuaţiei.

a) Se notează:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se arate că $\Delta^2 = -108(p^3 + q^2)$.

b) Să se deducă de aici o condiţie necesară ca ecuaţia să admită numai rădăcni reale.

c) Este această condiţie suficientă?

19. Fie pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, matricea $M(\alpha) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este definită prin egalitatea:

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Să se stabilească identitatea: $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha + \beta)$;

b) Să se determine $(M(\alpha))^n$.

20. a) Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$. Să se calculeze A^2, iar apoi să se deducă formulele: $A^n = \begin{cases} I_2, & \text{dacă } n = 2k \\ A, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$ [2)]

Să se explice rezultatul obţinut, ţinând seama că $A = M(\pi)$ (cu notaţiile din problema 19.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^2, A^3, A^4, iar apoi să se deducă formulele:

$$A^n = \begin{cases} I, & \text{dacă } n = 4k \\ A, & \text{dacă } n = 4k+1 \\ -I_2, & \text{dacă } n = 4k+2 \\ -A, & \text{dacă } n = 4k+3 \end{cases}$$

Să se explice rezultatul obţinut, ţinând seama că $A = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Să se arate că: $A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ şi

---

1) Proprietatea este, de asemenea, valabilă şi în cazul matricelor pătrate de ordinul n.

2) Prin convenţie $A^0 = I_2$ pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, iar apoi că: $A^n = \begin{cases} I_2, & \text{dacă } n = 3k \\ A, & \text{dacă } n = 3k+1 \\ A^2, & \text{dacă } n = 3k+2 \end{cases}$

Observând că $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, să se explice rezultatul obţinut.

21. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ şi $0 < a^2 + b^2 < 1$.

a) Să se arate că matricea A^n este de forma $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{pmatrix}$, unde $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere reale.

b) Să se demonstreze că şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente şi au limita zero

22. Se consisderă şirul lui Fibonacci[1] $(F_n)_{n\geq 1}$, definit de egalităţile $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ şi $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, pentru orice $n \geq 1$ şi fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^2, A^3, A^4, iar apoi să se arate pri inducţie că, pentru orice $n \geq 1$, avem: $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$

23. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Observând că $A = S + N$, unde am notat

$$S = \lambda I_3 = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

să se arate că $SN = NS$ şi că $N^3 = 0$.

b) Să se calculeze A^n.

24. Urmând metoda din problema 23 să se calculeze A^n dacă:

a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a & a & 0 \\ 3a & 2a & a \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$.

25. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice cu elemente reale sau complexe.

a) Să se calculeze matricea notată $P(A)$, definită de egalitatea:

$$P(A) = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2,$$

arătând că $P(A) = O_2$. (Teorema Hamilton[2]-Cayley[3] -Frobenius[4]; pe scurt HCF.)

b) Să se rescrie identitatea $P(A) = 0$ utilizând $Tr(A)$ şi $\det(A)$.

26. Să se scrie teorema HCF pentru următoarele matrice:

A) $a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

---

[1] Leonardo Fibonacci (1175 - 1240), matematician italian

[2] William Rowan Hamilton (1805 - 1877), matematician englez

[3] Arthur Cayley (1821 - 1895), matematician englez

[4] Georg Frobenius (1849 - 1917), matematician german

27. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Să se obţină, prin calcul direct, A^2.

b) Să se scrie teorema HCF pentru matricea A, iar apoi din relaţia $A^2 = 5A + 2I_2$, să se regăsească rezultatul de la punctul a).

28. Să se scrie teorema HCF pentru fiecare din matricele următoare, iar apoi să se deducă matricea A^2, obţinând rezultatul menţionat pentru fiecare caz în parte:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ...... $A^2 = A$; b) $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ...... $A^2 = 2A$;

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ...... $A^2 = 5A$; d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ...... $A^2 = I_2$;

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ ...... $A^2 = O_2$.

29. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. În baza teoremei *HCF*, să se formuleze o regulă pentru ridicarea la puterea n a matricei A, în cazurile:

(i) $ad - bc = 0$ (se va nota $a + d = \rho$); (ii) $a + d = 0$ (se va nota $ad - bc = -\delta$).

30. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde $ad - bc = 0$, iar $B = I_2 + A$.

a) Să se arate că $A^k = \rho^{k-1}A$, unde $\rho = a + \delta$, $k \geq 1$.

b) Utilizând rezultatul precedent, să se determine B^n.

31.* Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) aplicând teorema *HCF*, să se exprime A^2 în funcţie de A şi I_2, obţinându-se o relaţie de forma $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

b) Punând $A^n = a_n A + b_n I_2$, să se determine relaţiile de recurenţă verificate de cele două şiruri şi să li se calculeze termenii generali.

c) Din rezultatul de la punctul b) să se deducă egalitatea:

$$A^n = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & (2-n)2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

32. a) Se defineşte, pentru matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuaţia caracteristică prin ecuaţia $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - xI_2) = 0$. Să se expliciteze această ecuaţie.

b) Punând pentru orice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\widetilde{\varphi}(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)I_2$, se observă că A satisface ecuaţia $\widetilde{\varphi}(A) = 0$, obţinută în mod formal din ecuaţia de la punctul a) prin înlocuirea lui x cu A şi înmulţirea termenului liber cu I_2. Să se descrie pe o cale asemănătoare ecuaţia caracteristică pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

33. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Să se obţină, pe baza teoremei HCF, egalitatea $A^3 = 3A^2 - 2A$, iar apoi, după calculul direct de la A^2, să se determine A^3.

b) Să se verifice rezultatul obţinut pentru A^3, pe cale directă.

34. Se consideră o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se defineşte aplicaţia

$\Psi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, prin egalitatea: $\Psi_A\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ pentru orice vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

a) Să se arate că, pentru orice $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, avem:

$$\Psi_A\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \Psi_A\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) + \Psi_A\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)\right), \quad \Psi_A\left(\lambda\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \lambda\Psi_A\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right).$$

(Se spune că aplicaţia Ψ_A este liniară; ea se numeşte aplicaţia liniară asociată matricei A).

b) Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Ψ_A injectivă; (ii) $ad - bc \neq 0$; (iii) Ψ_A surjectivă.

35. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze produsul AB;

b) Să se demonstreze egalitatea $\Psi_B \circ \Psi_A = \Psi_{AB}$.

36.* Se dau matricele nenule $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Să se calculeze produsul AB;

b) Să se calculeze $\Psi_A\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$, $\Psi_B\left(\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\right)$, pentru $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ şi $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, iar apoi să se calculeze $(\Psi_B \circ \Psi_A)\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$.

c) Să se reprezinte aplicaţia Ψ_A pe o diagramă de la planul xOy la planul uOv, aplicaţia Ψ_B pe o diagramă de la planul uOv la un plan XOY, iar apoi aplicaţia $\Psi_B \circ \Psi_A$. Să se explice pe această cale egalitatea $AB = 0$, deşi $A \neq 0$ şi $B \neq 0$.

37.* Aceeaşi problemă pentru $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Capitolul III. DETERMINANŢI

1. Să se calculeze determinanţii:

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+\sqrt{b} & c+\sqrt{d} \\ -(c-\sqrt{d}) & a-\sqrt{b} \end{vmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ b,d > 0)$;

c) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ $(a,b \in \mathbb{R})$; d) $\Delta_4 = \begin{vmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{vmatrix}$ $(z,w \in \mathbb{C})$;

Să se exprime Δ_4 în funcţie de $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, dacă $z = a + bi$, $w = c + di$ $(i = \sqrt{-1})$.

2. Să se calculeze determinanţii:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$;

d) $\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} & \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{vmatrix}$, unde $t = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ $(\alpha \in \mathbb{R}$, cu $\cos\dfrac{\alpha}{2} \neq 0)$.

3. Se consideră sistemul de două ecuaţii cu două necunoscute: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, (unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$) şi unde avem $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. În acest caz, utilizând oricare din metodele de rezolvare, se obţine că sistemul admite soluţii unice unice, date de formulele:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Cum se exprimă aceste soluţii, cu ajutorul determinanţilor de ordinul II?.

4. Se consideră ecuaţiile cu coeficienţi reali sau complecşi $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ şi $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$, unde $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ şi $b_1 \neq b_2$. În acest caz, condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţiile să admită cel puţin o rădăcină comună este:

$$(a_1c_2 - a_2c_1)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1)^2 = 0.$$

Să se exprime condiţia cu ajutorul determinanţilor.

5. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) Să se verifice identitatea: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

b) Să se exprime identitatea precedentă cu ajutorul determinanţilor de ordinul II.[1)]

6. Utilizând regula lui Sarrus, să se calculeze următorii determinanţi, obţinând valoarea indicată în dreptul fiecăruia:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$ (a, b, c fiind numere complexe);

b) $\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{vmatrix}$ (unde ε este o rădăcină cubică complexă a unităţii, adică satiface ecuaţia $\varepsilon^3 = 1$ şi deci şi ecuaţia $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

7. Utilizând proprietăţile de calcul ale determinanţilor, să se arate că, dacă $a + b + c = 0$, atunci determinantul de la punctul a) al problemei precedente este nul.

b) Se înscrie în această situaţie determinantul de la punctul b)?

c) Din considerentele precedente să se deducă identitatea condiţionată:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc,$$

pentru $a + b + c = 0$.

8. Utilizând regula lui Sarrus, să se calculeze următorii determinanţi, obţinând valoarea indicată în dreptul fiecăruia:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & -c \\ -a & b & c \\ a & -b & c \end{vmatrix} = 4abc$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$; d) $\Delta = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+2)$.

9. Să se arate că următorii determinanţi sunt nuli (unde a, b, c, x, y, z sunt numere reale sau complexe):

a) $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & x-y & ab-ac \\ b-c & y-z & bc-ba \\ c-a & z-x & ca-ab \end{vmatrix}$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} 2ab & a^2+b^2 & a+b \\ a^2+b^2 & 2ab & a+b \\ a+b & a+b & 2 \end{vmatrix}$.

1) Identitatea joacă un anumit rol în teoria elementară a divizibilităţii, deoarece arată că, dacă, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, atunci orice produs al unor sume de pătrate este, de asemenea, o sumă de pătrate.

10. Utilizând proprietățile de calcul ale determinanților, să se calculeze:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$.

11. Să se calculeze determinantul Vandermonde[1] de ordinul III:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

unde a, b, c sunt numere reale sau complexe, arătând că $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$.[2].

12. Să se calculeze, pe baza proprietăților, următorii determinanți (a, b, c fiind numere reale sau complexe):

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$; c) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$;

d) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ $(a, b, c \neq 0)$; e) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$;

f) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$; g) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos 3\alpha & \cos 3\beta & \cos 3\gamma \end{vmatrix}$;

h) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \\ \cos 3\alpha & \cos 3\beta & \cos 3\gamma \end{vmatrix}$; i) $\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma \end{vmatrix}$.

13. Să se calculeze, pe baza proprietăților, următorii determinanți, obținând valorile indicate în dreptul fiecăruia:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)$;

b) $\Delta = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \sin(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\gamma) \\ \sin(\alpha+\beta) & \sin 2\beta & \sin(\beta+\gamma \\ \sin(\alpha+\gamma) & \sin(\beta+\gamma) & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0$;

---

[1] Alexandre Téophile Vandermonde (1735-1796), matmatician și fizician francez, de origine olandeză.

[2] Acest determinant se mai notează $V_3(a, b, c)$

14. Să se arate că în orice triunghi ABC avem, cu notaţiile uzuale:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a}{1} & \frac{b}{1} & \frac{c}{1} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{\cos A}{a^2} & \frac{\cos B}{b^2} & \frac{\cos C}{c^2} \end{vmatrix} = 0$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & h_bh_c \\ 1 & b & h_ch_a \\ 1 & c & h_ah_b \end{vmatrix} = 0$;

c) $\Delta = \begin{vmatrix} bc & r_a & r_br_c \\ ca & r_b & r_cr_a \\ ab & r_c & r_ar_b \end{vmatrix} = 0$; d) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a_1^2b^2c^2 \\ 1 & b^2 & a^2b_1^2c^2 \\ 1 & c^2 & a^2b^2c_1^2 \end{vmatrix} = 0$;

unde a_1, b_1, c_1 sunt laturile triunghiului ortic al dreptunghiului ABC.

15. Să se calculeze determinanţii $\Delta = |a_{ij}|_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$, dacă elementele a_{ij} sunt date de formulele:

a) $a_{ij} = i - j$; b) $a_{ij} = |i-j|$; c) $a_{ij} = \left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array}\right)$;[1]; d) $a_{ij} = i + j$.

16. Un determinant de ordinul 3 cu elemente numere reale, are elementele de pe diagonala principală egale cu 1, iar suma elementelor de pe fiecare linie şi respectiv de pe fiecare coloană egală cu 2. Să se arate că:

a) dacă se notează elementul de pe linia întâi şi coloana a doua cu x, atunci:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ 1-x & 1 & x \\ x & 1-x & 1 \end{vmatrix};$$

b) $\Delta > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

17.* Să se arate că dezvoltarea determinantului:

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} 1 & X^p & X^q \\ \cos n\theta & \cos(n+p)\theta & \cos(n+q)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n+p)\theta & \sin(n+q)\theta \end{vmatrix},$$

unde $n, p, q \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ (iar X este nedeterminată), conduce la un polinom divizibil prin $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

18. Să se calculeze, pe baza proprietăţilor, următorii determinanţi $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$:

a) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$; c) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$;

d) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$; e) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$; f) $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ a^5 & a^6 & a^7 & a^8 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \end{vmatrix}$.

19. Să se calculeze determinanţii $\Delta = |a_{ij}|_{\substack{1\le i\le 4\\ 1\le j\le 4}}$, dacă elementele a_{ij} sunt date de formulele:

a) $a_{ij} = j - i$, $(1 \le i, j \le 4)$; b) $a_{ij} = |i^2 - j^2|$, $(1 \le i, j \le 4)$;

c) $a_{ij} = \max(i, j+1)$, $(1 \le i, j \le 4)$; d) $a_{ij} = \min(i+2, j+1)$, $(1 \le i, j \le 4)$.

---

[1] Notaţia $\left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array}\right)$, cu $j \in \mathbb{N}$ desemnează simbolii binomiali, care, dacă $i \in \mathbb{N}$ şi $i \ge j$ reprezintă numărul combinărilor de i obiecte luate câte j, $\left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array}\right) = \frac{i(i-1)(i-2)\cdot\ldots\cdot(i-j+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot j}$, iar dacă $i \le j$ sunt nuli.

20. Să se demonstreze egalitatea:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2.$$

21. Să se rezolve ecuaţiile (în necunoscuta x):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $4\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3-x & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1-x & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0.$

22. Se consideră, legat de determinantul $\Delta = |a_{ij}|$, $1 \leq i, j \leq 4$, formula:

$$\Delta = \sum_{\sigma \in S_4} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)} a_{4,\sigma(4)}.$$

Cu ce semn apar în formulă termenii: a) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$; b) $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$?

23. Cu notaţiile de la problema 22, să se arate că dacă $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pentru $i, j = 1, 2, 3, 4$, atunci Δ este un număr real.

Capitolul IV.
RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

1. Să se arate că:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -7 & 7 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & -7 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2.$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 1.$

2. Să se determine rangul următoarelor matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & -4 & 18 & -9 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

3.* Să se găsească rangul tuturor matricelor de la problemele 1 şi 2, prin metoda diagnalizării.

4. Să se determine rangul următoarelor matrice, efectuându-se şi o discuţie în raport cu parametrii reali care apar:

a) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & q \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & q \\ -1 & 3 & 0 & \\ 2 & m & 3 & \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & q \\ 0 & -1 & 3 & \\ 5 & 2 & a^2 & \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & -a & 3 & 9 \\ -2 & 1 & -3a & 4 \\ 2 & 0 & a & a \end{pmatrix}$; g) $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$; h) $A = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \\ b & 0 & b & \\ 0 & 0 & b & \end{pmatrix}$;

5. Să se găsească rezultatele din problema 4, pe baza metodei digonalizării.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $\Delta = \det(A) = ad - bc \neq 0$.

a) Să se arate că $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Să se formuleze în cuvinte o regulă pentru obţinerea, plecând de la matricea A, a matricei adjuncte $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

c) Să se verifice egalităţile $A^{-1}A = I_2$ şi $AA^{-1} = I_2$.

7. Se dă matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\in}(\mathbb{R})$

a) Să se calculeze $\det(A)$, obţinându-se $\det(A) = 2$.

b) Să se determine matricea inversă A^{-1}.

c) Să se verifice egalităţile $A^{-1}A = I_3$ şi $AA^{-1} = I_3$.

8. Aceeaşi problemă pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. a) Să se arate că matricea I_n este inversabilă şi că $(I_n)^{-1} = I_n$.

b) Să se arate că, dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci matricea A^{-1} este, de asemenea, inversabilă şi $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

c) Să se arate că, dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt inversabile, atunci, matricea AB este, de asemenea, inversabilă şi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

10. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă. Să se arate că următoarele perchi comută:

a) A şi A^{-1}; b) A^p şi A^q $(p, q \in \mathbb{Z})$.[1)]

11. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice inversabile, care comută (adică $AB = BA$), Să se arate că şi următoarele perechi de matrice comută:

a) A^{-1} şi B; b) A şi B^{-1}; c) A^{-1} şi B^{-1}.

12. Fie $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $UV = I_n$. Să se demonstreze că are loc egalitatea $VU = I_n$.

13.* Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrice fixate, cu proprietatea că $AB = A + B$. Să se arate că, în acest caz, A şi B comută.

---

1) Dacă A este inversabilă, iar $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, $p = -r$ $(r \in \mathbb{N}, r \geq 0)$ atunci $A^p = (A^{-1})^r = (A^r)^{-1}$.

14. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât există $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $A^k = O_n$. Să se arate că matricea $I_n - A$ este inversabilă şi că $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

15. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0$, pentru care există $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $B \neq 0$, astfel încât $AB = 0$. Să se arate că A nu este inversabilă.

16. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversabilă. Să se arate că nu există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \neq 0$, astfel încât $AB = 0$.

17. a) O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea că există un număr $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $A^k = 0$. Să se arate că $\det(A) = 0$. Să se determine cel mai mic număr k de mai sus în cazul matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi $\det(A) = 0$, rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $A^k = 0$? Să se studieze cazul matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$, astfel încât matricele următoare să fie inversabile şi să se calculeze inversa:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a-1 \\ 3a & a & -1 \\ 2a+2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; ii) $A = \begin{pmatrix} \ln 3 & a & \ln 4 \\ a & \ln 3 & \ln 4 \\ \ln 4 & a & \ln 3 \end{pmatrix}$;

iii) $A = \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a-2)^2 & (a-3)^2 & (a-4)^2 \end{pmatrix}$; iv) $A = \begin{pmatrix} 1+\sin 2x & -1 & 1 \\ \sin^2 x & \cos^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \end{pmatrix}$.

19. Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, inversabilă. Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Se mai notează $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

a) Să se scrie într-o singură ecuaţie sistemul, folosind A, $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{c}$.

b) Să se arate că $\overrightarrow{u} = A^{-1}\overrightarrow{c}$ şi să se regăsească formulele uzuale de rezolvare.

20. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A inversabilă.

a) Să se rezolve ecuaţia matricială $AX = B$ $(X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

b) Să se rezolve ecuaţia matricială $YA = B$ $(Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$;

c) Să se rezolve ecuaţia matricială $AZA^{-1} = B$ $(Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

21. Să se rezolve ecuaţiile matriciale $(X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $Y \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

22. a) Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A şi B inversabile. Să se rezolve ecuaţia $A \cdot X \cdot B = C$ $(X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$.

b) Să se rezolve ecuaţia matricială:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})).$$

Capitolul V. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

Folosind teorema lui Cramer, să se rezolve sistemele:

1. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=29 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$. 6. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+6x_3+10x_4=0 \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4=0 \end{cases}$.

Utilizând metoda eliminării lui Gauss, arătaţi că următoarele sisteme sunt compatibile şi determinaţi soluţiile lor.

7. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3 \\ 3x_1+x_2-5x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_3=3 \end{cases}$; 10. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=-1 \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=-6 \\ -x_1+3x_2+2x_3-3x_4=8 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12 \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13 \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14 \end{cases}$. 12. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5= \\ x_1+x_2+3x_3+x_4+x_5=3 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4+x_5=-2 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+5x_5=5 \end{cases}$.

Să se rezolve matricial sistemele:

13. $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x-y+4z=8 \\ 3x+2y-5z=8 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$; 15. $\begin{cases} 2x+2y-z=3 \\ -2x+y+z=3 \\ -4x+3y+z=5 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} 2x+4y-z=1 \\ 2x-z=1 \\ -x+8y+3z=2 \end{cases}$; 17. $\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x+2y+3z=15 \\ -x+4y+z=-1 \end{cases}$; 18. $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$;

Să se analizeze dacă următoarele sisteme sunt compatibil determinate:

19. $\begin{cases} x+2y+3z+4t=4 \\ 2x+3y+4z+t=3 \\ 3x+4y+z+2t=2 \\ 4x+y+2z+3t=1 \end{cases}$; 20. $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+2y+3z+4t=2 \\ x+3y+6z+10t=3 \\ x+4y+10z+20t=4 \end{cases}$; 21. $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+3y+4z=5 \\ 3x+5y+6z=8 \end{cases}$;

22. $\begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ 2x+3y+4z+5t=1 \\ 3x+4y+5z+6t=1 \\ 4x+5y+6z+7t=1 \end{cases}$; 23. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n=1 \\ -x_1+3x_3+4x_4+\ldots+nx_n=2 \\ x_1-x_2+4x_3+\ldots+nx_n=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1-2x_2-3x_3-4x_4+\ldots+(n-1)x_{n-1}=n \end{cases}$.

24. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\ldots+2x_n=n \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4\ldots+2x_n=n-1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+2x_4+\ldots+2x_n=n-2 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+4x_4+\ldots+2x_n=n-3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+\ldots+nx_n=1 \end{cases}$

Folosind teorema: *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul S să fie compatibil, este ca rangul matricei sistemului să fie egal cu rangul matricei extinse a lui S* (Kronecker-Capelli), să se studieze compatibilitatea sistemelor:

25. $\begin{cases} x+2y-3z=5 \\ 2x-5y+4z=4 \\ 4x-y-2z=11 \end{cases}$; 26. $\begin{cases} x+y-4z+u=1 \\ x+y-3z+7u=2 \\ 3x+3y-14z-9u=1 \end{cases}$;

27. $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 3x-2y+2z-3t=2 \\ 5x+y-z+2t=-1 \\ 2x-y+z-3t=4 \end{cases}$; 28. $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x-y+z+3t=2 \\ x+2y+3z-t=1 \end{cases}$;

29. $\begin{cases} x+y+z+t+u=4 \\ 3x+2y+z+t-3u=-2 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ 5x+4y+3z+3t-u=12 \end{cases}$; 30. $\begin{cases} 3x+y-2z+t-u=1 \\ 2x-y+7z-3t+5u=2 \\ x+3y-2z+5t-7u=3 \\ 3x-2y+7z-5t+8u=3 \end{cases}$.

Folosind teorema: *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul S de ecuaţii liniare cu m ecuaţii şi n necunoscute, având rangul r, r < n, să fie compatibil, este ca toţi determinanţii caracteristici ai sistemului să fie nuli* (Rouché), să se studieze compatibilitatea sistemelor:

31. $\begin{cases} x+y-4z+u=1 \\ x+y-3z+7u=2 \\ 3x+3y-14z-9u=1 \end{cases}$; 32. $\begin{cases} 4x-2y+2z+4t=2 \\ 2x+2y+4z+2t=4 \\ 3x-2y+2z+3t=1 \end{cases}$;

33. $\begin{cases} 2x+4y-3z=11 \\ 7x-3y+5z=6 \\ 3x+y-8z=15 \\ 6x-5y+11z=-4 \end{cases}$; 34. $\begin{cases} x-2y+3z-4t=4 \\ x+3y-4t=1 \\ y-z+t=-3 \\ -7y+3z+t=-3 \end{cases}$;

35. $\begin{cases} 2x+y-z-t+u=1 \\ x-y+z+t-2u=0 \\ 3x+3y-3z-3t+4u=2 \\ 4x+5y-5z-5t+7u=3 \end{cases}$. 36. $\begin{cases} 2x-2y+z-t+u=1 \\ x+2y-z+t-2u=1 \\ 4x-10y+5z-5t+7u=1 \\ 2x-14y+7z-7t+11u=-1 \end{cases}$.

Folosind condiţia necesară şi suficientă ca un sistem omogen de ecuaţii liniare să admită şi soluţii distincte de soluţia banală care este ca rangul matricei sistemului să fie strict mai mic decât numărul de necunoscute, să se studieze următoarele sisteme şi să se rezolve:

37. $\begin{cases} 2x-7y+8z-3t=0 \\ 3x+3y-11z+6t=0 \\ 6x+12y-14z+3t=0 \\ 4x-yy+6z-5t=0 \end{cases}$; 38. $\begin{cases} 2x+3y-z+5t=0 \\ 3x-y+2z-7t=0 \\ 4x+y-3z+6t=0 \\ x-2y+4z-7t=0 \end{cases}$;

39. $\begin{cases} 3x+4y-5z+7t=0 \\ 2x-3y+3z-2t=0 \\ 4x+11y-13z+16t=0 \\ 7x-2y+z+3t=0 \end{cases}$; 40. $\begin{cases} x-2y+z-t+u=0 \\ 2x+y-z+2t-3u=0 \\ 3x-2y-z+t-u=0 \\ 2x-5y+z-2t+2u=0 \end{cases}$;

41. $\begin{cases} 2x+3y-z+5t=0 \\ 3x-y+2z-7t=0 \\ 4x+y-3z+6t=4 \\ x-2y+4z-7t=0 \end{cases}$. 42. $\begin{cases} x+y-3t-u=0 \\ x-y+2z-t=0 \\ 4x-2y+6z+3t-4u=4 \\ 2x+4y-2z+4t-7u=0 \end{cases}$.

Să se rezolve şi să se discute sistemele după valorile parametrilor reali ce intervin:

43. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+m=8 \end{cases}$; 44. $\begin{cases} (m+3)x+y+2z=m \\ mx+(m-1)y+z=2m \\ 3(m+1)x+my+(m+3)z=3 \end{cases}$;

45. $\begin{cases} x+(m+1)y+z=2+m-m^2 \\ mx+y-z=4 \\ x-2y-mz=-2+3m-m^2 \end{cases}$; 46. $\begin{cases} (2m+1)x-y-(m+1)z=2m \\ 3mx-(2m-1)y-(3m-1)z=m+1 \\ (m+2)x-y2mz=2 \end{cases}$;

47. $\begin{cases} mx+2y+2z=1 \\ mx+3y+2z=1 \\ mx+2y+5z=2n-1 \end{cases}$; 48. $\begin{cases} -mx+y+z=3 \\ x+ny-z=2 \\ mx+y+z=4 \end{cases}$.

Exerciţii tip grilă cu sisteme de ecuaţii liniare.

49. Fie sistemul, compatibil dublu nedeterminat:

$$\begin{cases} 2x-3y+4z-5u=-1 \\ x+9y+az+u=3 \\ 5x-6y+10z+b\cdot u=c \end{cases}, \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Arătaţi că $a+b+c$ are valoarea: a) -2; b) -12; c) 0; d) 1; e) 2.

50. Sistemul: $\begin{cases} x-2y+z-t=0 \\ 2x-y+3z+(m-3)t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+(m-1)y+2z+mt=0 \end{cases}$, $m\in\mathbb{R}$ admite şi soluţii diferite de soluţia nulă dacă m este:

a) -2; b) 2; c) -1; d) 0; e) 1.

51. Pentru care valori ale parametrilor reali m şi n sistemul:

$\begin{cases} mx+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2m-1)x+2y+z=n \end{cases}$, $m,n\in\mathbb{R}$ este compatibil nedeterminat?

a) $m=3,\ n\neq 3$; b) $m=3,\ n=3$; c) $m\neq 3,\ n\neq 3$;

d) $m\neq 3,\ n=3$; e) $m=3,\ n\neq 0$.

52. Fie sistemul: $\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ x - 2y + z = n \\ mx + y + z = 6 \end{cases}$, $m, n \in \mathbb{R}$.

Determinaţi valorile lui m şi n pentru care sistemul este incompatibil.

Variante de răspuns: a) $m = -11$, $n \neq \dfrac{21}{2}$; b) $m = -11$; $n = -\frac{21}{2}$; d) $m, n =\in \emptyset$; d) $m \neq -11$, $n \in \mathbb{R}$; e) $m, n \in \mathbb{R}$.

53. Fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ x - my + z = m^2 - 1 \\ -mx + y + mz = 2 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$, având soluţia: $x = x(m)$, $y = y(m)$, $z = z(m)$, în cazul $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Să se determine rădăcinile ecuaţiei $f(m) = 0$, unde $f(m) = x \cdot y^2 \cdot z$.

Variante de răspuns: a) $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = -1$, b) $m_1 = -1$, $m_2 = -2$, $m_3 = 1 + \mathrm{i}$, $m_4 = 1 - \mathrm{i}$; c) $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = 2$; d) $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = -2$, $m_4 = -3$, e) orice $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = 1$ este soluţie a ecuaţiei $f(m) = 0$.

54. Fie sistemul: $\begin{cases} x + 2y + (m - 3)z = 5 \\ 2x + y + z = m \\ -x + (m - 5)y + 2z = 1 \\ x + y + z + t = 4 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

Să se discute natura sistemului după $m \in \mathbb{R}$ şi să se precizeze varianta corectă:

a) $m \in \{-2, 2\}$ sistem compatibil; b) $m \in \{-2, 2\}$ sistem incompatibil; c) $m \in \{2, 6\}$ sistem de tip Cramer; d) $m = 6$ sistem compatibil simplu nedeterminat $m = 2$ sistem incompatibil; e) $m = 6$ sistem compatibil dublu nedeterminat şi $m = 2$ sistem incompatibil.

55. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$, $c \neq 1$ şi x_0, y_0, z_0 soluţia sistemului:

$$\begin{cases} ax + (a + 1)y + (a + 2)z = a + 3 \\ bx + (b + 1)y + (b + 2)z = b + 3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}.$$

Notăm $\lambda = x_0 + y_0 + z_0$. Determinaţi λ pentru care sistemul este compatibil.

a) $\lambda < 0$; b) $\lambda \in [0, 1)$; c) $\lambda = 0$; d) $\lambda = 3$; e) $\lambda > 4$.

56. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq 1$, $b \neq 0$ şi x_0, y_0, z_0 soluţia sistemului $\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$

Determinaţi b pentru care $y_0 + 2 = x_0 + z_0$.

a) $b \in \{1, 2\}$; b) $b = 3$; c) $b \in \{-2, -1\}$; d) $b \in \emptyset$; e) $b = 5$;

57. Fie sistemul: $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x + (\lambda^2 - \lambda - 1)y + (\lambda + 1)z = 2 \\ 2x + (\lambda^2 - \lambda - 2)y + 2(\lambda + 1)z = 3 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Notând x_0, y_0, z_0 soluţiile sistemului pentru $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $t = x_0 - y_0 + z_0 + 1$, atunci:

a) $t = \lambda + 1$; b) $t = \lambda - 1$; c) $t = 0$; d) $t = 2$; e) $t = \dfrac{1}{\lambda(\lambda - 1)}$.

58. Alegeţi valorile $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul $\begin{cases} ax + ay + 2z = 1 \\ ax + (2a - 1)y + 3z = 1 \\ ax + ay + (a + 3)z = 2a - 1 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat.

a) $a = 0$; b) $a = \frac{1}{2}$; b) $a = -3$; d) $a = -1$; e) $a = 1$.

59. Fie sistemul $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = e^t \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = e^{2t} \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$. Alegeţi valorile lui m şi t pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $m = 1$, $t = \ln\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; *b)*$m = \frac{3}{2}$; $t = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; c) $m = \frac{2}{3}$, $t = \ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; d) $m = \frac{3}{2}$, $t = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; e) nici una dintre variantele *a*, *b*, *c*, *d*.

60. Fie sistemul $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{1,n}$ şi $a_{ij} = \min(i,j)$, $i,j = \overline{1,n}$. Pentru $n = 15$ şi presupunând că în acest caz $x_1 = x_2 = \ldots = x_{15} = 1$ b_{10} este egal cu:

a) 1; b) $n-1$; c) 2n+1; *d*)4; e) nici o variantă din cele anterioare.

61. Fie sistemul $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = n^{i-1}$, $i = \overline{1,n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_{ij} = j^{i-1}$, $i,j = \overline{1,n}$. Suma componenetelor soluţiei sistemului este:

a) 1; b) $n-1$; c) $2n+1$; d) 4; e) nici o variantă din cele anterioare.

Capitolul VI. CONICE

1. Fie cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$. Să se determine:

i) coordonatele centrului şi raza;

ii) $y_A > 0$, ştiind că $A(7, y_A) \in C$ şi ecuaţia tangentei în A la cerc.

iii) Fie AB diametru, A punctul de la iii). Să se determine coordonatele punctului B şi ecuaţiile coardelor BC şi BD ştiind că C, D aparţin cercului şi $BC \equiv BD (= 8)$.

2. Fie $A(4,0)$, $B(0,3)$. Să se scrie ecuaţiile :

i) cercului circumscris triunghiului AOB;

ii) cercului înscris în triunghiul AOB;

iii) tangentelor înpunctele A, B şi) la cercul circumscris triunghiului ABC.

3. Aceleaşi cerinţe ca la problema 2 pentru $A(1,1)$, $B(-2,4)$.

4. Fie $A(1,1)$ şi $B(-2,5)$. Să se determine ecuaţiile următoarelor locuri geometrice şi să se reprezinte grafic aceste locuri geometrice:

i) $\mathcal{L}_g = \{C(x,y) \mid \mathcal{A}_{(\triangle ABC)} = 10\}$;

ii) $\mathcal{L}_g = \{D(x,y) \mid \mathrm{m}(\widehat{ADB}) = \alpha\}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, respectiv $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

5. Să se determine ecuaţia locului geometric al centrelor cercurilor tangente dreptelor suport ale laturilor triunghiului ABC, $A(0, a\sqrt{3})$; $B(-a, 0)$; $C(3a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$.

6, Să se determine ecuaţiile următoarelor locuri geometrice şi să se reprezinte grafic aceste:

i) $\mathcal{L}_g = \{M(x,y) \mid H$ ortocentrul $\triangle ABC$, $A, B-$ fixe pe un cerc dat şi C variabil pe acest cerc$\}$;

ii) $\mathcal{L}_g = \{G(x,y) \mid G$ centrul de greutate al $\triangle ABC$, punctele

7. În sistemul ortogonal (xOy) se dau punctele $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C(3,1)$. Se cere:

a) Să se scrie ecuaţiile laturilor triunghiului ABC.

b) Determinaţi unghiurile acestui triunghi.

c) Ecuaţia cercului circumscris triunghiului.

d) Ecuaţia tangentei la cercul găsit, în punctul C.

8. Fie $A(4,0)$ şi $B(0,3)$. Se cere:

a) ecuaţia dreptei AB şi a bisectoarelor unghiurilor OAB şi OBA;

b) ecuaţia cercului înscris în triunghiul CAB şi ecuaţia cercului ce trece prin mijloacele laturilor triughiului OAB;

c) să se arate că aceste două cercuri sunt tangente şi să se determine coordonatele punctului T de tangenţă.

9. Fie $A(0,0)$, $B(2,2)$; $C(-2,2)$ şi un punct M mobil, astfel încât suma pătratelor distanţelor de la acest punct la cele trei laturi ale triunghiului ABC este egală cu 16. Să se determine locul geometric al lui M.

10. Tangenta într-un punct M al unei hiperbole echilatere cu centrul în originea axelor de coordonate, taie axele Ox şi Oy în punctele A şi B. Să se arate că cercul de diametru AB este tangent dreptei OM.

11. Fie $A(a,0)$ un punct fix şi $B(0,\lambda)$ mobil. Se cere:

a) ecuaţia cercului de diametru AB;

b) în O şi B se duc tangentele la acest cerc ce se intersectează în P. Aflaţi aria triunghiului POB;

c) locul geometric al punctului P.

12. Fie dreapta (D) şi un punct fix A pe această dreaptă. Pe dreapta (D_1) fixă, perpendiculară pe D se ia un punct variabil B.

a) Să se afle locul geometric al intersecţiei perpendicularei pe mijlocul segmentului AB cu paralela dusă prin B la dreapta (D).

b) Arătaţi că acest loc geometric este o curbă tangentă la mediatoarea segmentului AB. Ce reprezintă acest loc geometric?

13. În sistemul ortogonal xOy, dreapta (D) este fixă, de ecuaţie $x = a$ şi fie punctul P fix; $P(b,c)$.

a) Să se scrie ecuaţia cercului ce trece prin P şi al cărui diametru este distanţa de la punctul P la dreapta (D).

b) Prin P se duce o dreaptă variabilă care taie dreapta (D) în punctul R. Prin R se duce paralela la axa Ox ce intersectează perpendiculara dusă în P la dreapta RP în punctul P'. Să se găsească locul geometric al punctului P' când dreapta PR este variabilă.

14. În sistemul ortogonal xOy fie $A(1,0)$ şi dreapta (D) de ecuaţie $x+1=0$.

a) Să se scrie ecuaţia familiei de cercuri care trec prin punctul A şi au centrul pe dreapta (D).

b) Fie P şi Q punctele de intersecţie ale cercurilor cu dreapta (D), iar M şi N punctele de intersecţie ale tangentei dusă în A la cerc cu tangentele duse în P şi Q. Determinaţi locul geometric al punctelor M şi N.

15. Să se scrie ecuaţiile laturilor unui triunghi cunoscând coordonatele unuia dintre vârfurile sale $A(0,2)$ şi ecuaţiile a două mediane: $5x+4y+1=0$ şi $2x+y-2=0$.

16. Raportat la un sistem ortogonale fie dreptele $y-2x-2a=0$ şi $y-4x+2a=0$.

a) Scrieţi ecuaţia dreptei (D) ce trece prin origine şi prin intersecţia lor.

b) Scrieţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului format de axa Oy, dreapta (D) şi $y-2x-2a=0$.

c) Considerând parametrul a variabil, să se găsească locul descris de centrul cercului.

17. Se dau cercurile $x^2+y^2-4x=0$ şi $x^2+y^2+2x=0$ de centre C_1 şi C_2. O secantă dusă prin origine taie cercurile respectiv în M_1 şi M_2.

a) Scrieţi ecuaţiile dreptelor M_1C_2 şi M_2C_1.

b) Aflaţi locul geometric al intersecţiei acestor drepte când secanta se roteşte în jurul originii.

18. Prin punctul A situat pe axa parabolei $y^2=2px$ se duce o paralelă la tangenta într-un punct M variabil de pe parabolă.

a) Să se afle locul geometric al intersecţiei acestei paralele cu raza vectoare FM.

b) Ce devine acest loc când A coincide cu vârful parabolei?

19. Fie M un punct variabil al unei elipse cu focarele $F(c,0)$ şi $F'(-c,0)$. Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie al dreptei FM cu perpendiculara din centrul elipsei pe tangenta în M la elipsă.

20. Să se afle locul geometric al punctelor din care elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ este văzută sub un unghi drept (cercul lui Monge).

21. Să se arate că locul geometric al punctelor ale căror distanţe la două puncte fixe se află într-un raport dat, diferit de 1, este un cerc (cercul lui Apolonius) şi că cele două puncte date A şi B şi punctele de intersecţie ale dreptei AB cu cercul obţinut formează o diviziune armonică.

22. Fie punctele $A(\lambda^2,0)$ şi $B(0,\lambda)$.

a) Să se scrie ecuaţia cercului ce trece prin A, B şi originea sistemului de axe.

b) Să se scrie ecuaţia tangentei la cerc în B şi să se arate că $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$ ea trece printr-un punct fix.

c) Aflaţi locul geometric al centrului cercului pentru $\lambda\in\mathbb{R}^*$

23. Fie pe axa Ox punctele fixe A, B, C. Prin C se duce o dreaptă variabilă, care întâlneşte prima bisectoare a axelor în M şi axa Oy în N. Să se afle locul geometric al intersecţiei dreptelor AM, NB. Să se determine abscisa punctului C, cu A, B fixe, astfel ca locuul geometric să fie o bisectoare a axelor.

24. Determinaţi ecuaţiile laturilor unui triunghi la care dreptele de ecuaţii $2x-3y+1=0$ şi $x+y=0$ sunt înălţimi, iar $A(1,2)$ est unul din vârfuri.

25. Prin punctul fix P din plan trec două drepte perpendiculare între ele. Una taie axa Ox în M, cealaltă taie Oy în N. Să se afle locul geometric al proiecţiei punctului P pe MN.

26. Pe axele de coordonate Ox şi Oy se iau respectiv punctele mobile M şi N, astfel ca $OM+ON=k$ (constant). Să se determine locul geometric al punctului P ce împarte segmentul MN într-un raport dat r.

27. Fie triunghiul ABC care are un vârf în $A(1,3)$, centrul de greutate $G(1,-1)$ şi ortocentrul $H\left(-\dfrac{4}{9},-\dfrac{4}{3}\right)$. Să se afle:

a) ecuaţia dreptei BC;

b) aria triunghiului ABC.

28. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(0,1)$, astfel încât segmentul din această dreaptă cuprins între dreptele de ecuaţii: $x - 3y + 10 = 0$ şi $2x + y - 8 = 0$ să fie împărţit de punctul A în două segmente egale.

29. Fie $A(\lambda - 1, 0)$, $B(\lambda + 2, 0)$, $C(0, \lambda - 2)$ şi $D(0, \lambda + 1)$. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor AD şi BC, λ fiind un parametru variabil.

30. Fie $A(2,0)$ şi $B(1,3)$ două din vârfurile unui triunghi echilateral. Arătaţi că cel de al treilea vârf se află pe dreapta $x - y = \pm\sqrt{3}$ şi arătaţi că un punct variabil din interiorul triunghiului are suma distanţelor de la el la laturi constantă.

31. Să se afle locul geometric al centrelor dreptunghiurilor înscrise într-un triunghi dat şi care au una din laturi pe una din laturile triunghiului.

32. Raportată la un sistem xOy rectangular, considerăm dreapta (d) şi un punct M mobil pe această dreaptă. Fie P şi Q proiecţiile lui M respectiv pe Ox şi Oy. Se cer:

a) locul geometric al intersecţiei paralelei dusă prin P la (d) cu perpendiculara dusă prin Q la (d);

b) locul geometric al intersecţiei paralelei dusă prin Q la (d) cu perpendiculara dusă prin Pla (d).

33. Să se găsească locul geometric al punctelor de unde se pot duce tangente perpendiculare la:

a) hiperbolă; b) parabolă.

34. Se dau dreptele $D_1 :\ 2x + y - 2 = 0$, $D_2 :\ 5x + 3 - 3 = 0$, $D_3 :\ y - p = 0$ şi punctul $A(6,4)$. Să se determine:

a) ecuaţia dreptei D ce trece prin punctul A şi prin intersecţia dreptelor D_1 şi D_2;

b) ecuaţia cercului circumscris triunghiului format de dreptele D_1, D_2 şi axa Oy;

c) locul geometric al centrului cercului de la punctul b), când p variază.

35. Fie Γ o hiperbolă raportată la axele sale cu distanţa focală $FF' = 12$. Hiperbola este tangentă dreptei $D :\ 3x - 2y - 8 = 0$. Se cere:

a) ecuaţia hiperbolei; b) coordonatele punctului de tangenţă.

36. Laturile unui triunghi sunt date de ecuaţiile $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$ şi $x + 3y - 7 = 0$. Fără a calcula coordonatele vârfurilor triunghiului să se scrie ecuaţiile dreptelor ce trec prin vârfurile acestui triunghi şi sunt paralele cu laturile opuse.

ELEMENTE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. MULŢIMEA NUMERELOR REALE ŞI FUNCŢII NUMERICE

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x^2 = 1$; b) $x^3 = 1$; c) $x^4 = 1$; d) $x + \sqrt{25 - x^2} = 7$; e) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$;

f) $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$; g) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; h) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$;

i) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$; j) $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$; k) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

2. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ şi $a + b = 0$, atunci $a = b = 0$.

3. Fie $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, iar $U = (a - r, a + r)$. Să se stabilească ce legătură există între propoziţiile:

i) $x \in \mathbb{R}$ şi $|x - a| < r$; ii) $x \in \mathbb{R}$ şi $x \in U$.

4. Să se stabilească prin metoda inducţiei matematice inegalitatea lui I.Bernoulli:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na,$$

unde $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$, iar $n \in \mathbb{N}^*$.

Cum se transcrie inegalitatea, dacă se notează $1 + a = x$ $(x > 0)$?

5. Se consideră n numere reale, strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi se notează, pentru fiecare $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, media aritmetică a primelor k numere, $m_k = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$.

a) Aplicând inegalitatea lui Bernoulli, $(1 + a)^k \geq 1 + ka$, pentru $a = \dfrac{m_k}{m_{k-1}} - 1$ să se deducă inegalitatea $m_k \geq a_k^k \cdot m_{k-1}^{k-1}$.

b) Utilizând inegalitatea precedentă, pentru $k = 1, 2, 3 \ldots, n$, să se obţină inegalitatea mediilor:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

6. Să se demonstreze inegalităţile de numere reale:

a) $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$;

b) $(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$.

7. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de egalitatea $f(x) = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \ldots + (a_n x + b_n)^2$. Observând că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se deducă inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovski:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots + b_n^2).$$

8. Să se arate că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

şi să se deducă apoi o condiţie necesară pentru ca ecuaţia $a \sin x + b \cos x = c$ să aibă soluţii.

9. Utilizând inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovski scrisă sub foema:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

să se deducă inegalitatea lui Minkovski:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

10. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se demonstreze egalităţile de mulţimi:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right) = (a,b);\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right] = [a,b].$$

11.* Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $na > b$.

ii) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $k \le x < k+1$.

12. Să se determine $\max A$, $\min A$, $\inf A$, $\sup A$, pentru următoarele mulţimi:

a) $A = [a,b]$; b) $A = [a,b)$; c) $A = (a,b]$; d) $A = (a,b)$; e) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$;

f) $A = [a,\infty)$; g) $A = (-\infty, b]$; h) $A = \mathbb{R}$.

13. Să se schiţeze graficele funcţiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$.

14. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $[x] = 2$; b) $\{x\} = 0{,}4$, $x > 0$; c) $\{x\} = 0{,}4$, $x \in \mathbb{R}$; d) $\{x\} = 0{,}5$; e) $[x] = \{x\}$;

f) $[x] = x$; g) $\{x\} = 0$; h) $\{x\} = 1$; i) $[x] = \sqrt{2}$.

15. Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$ se notează $x_+ = \dfrac{x+|x|}{2}$; $x_- = \dfrac{-x+|x|}{2}$. Să se arate că:

$$x_+ = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \ge 0 \end{cases};\quad x_- = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x \ge 0, \end{cases};$$

precum şi $x = x_+ - x_-$, $|x| = x_+ + x_-$. Să se schiţeze graficele funcţiilor $x \mapsto x_+$ şi $x \mapsto x_-$.

16. Să se demonstreze egalităţile: $|x| = \max(x, -x)$, $-|x| = \min(x, -x)$, iar apoi:

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|); \qquad \min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

17. Să se demonstreze că $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, $-x + \sqrt{1+x^2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

18. Să se stabilească monotonia următoarelor funcţii:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$; b) $f : (3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 10$;

c) $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; d) $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

19. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Să se arate că funcţia este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ şi tot strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$. Este funcţia f strict crescătoare pe $\mathbb{R}^*$?

20. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de egalitatea $f(x) = |x+1| + |x-1|$.

a) Să se expliciteze funcţia, astfel încât scrierea sa să nu mai conţină module.

b) Să se reprezinte grafic funcţia f şi să se discute ecuaţia $f(x) = m$, în raport cu parametrul real m.

21. Aceeaşi problemă pentru funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x+1| - |x-1|$.

22. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită de egalitatea $f(x) = |x-a| + |x-b|$ nu este injectivă.

23. Fie o mulţime nevidă $A \subseteq \mathbb{R}$ şi două funcţii $g, h : A \to \mathbb{R}$. Pentru fiecare din funcţiile următoare să se precizeze condiţiile pe baza cărora se stebileşte domeniul maxim de definiţie.

a) $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$; b) $f(x)=\sqrt[k]{g(x)}$, $(k\in\mathbb{N}^*)$

c) $f(x)=\log_a g(x)$ $(0<a\neq 1)$; d) $f(x)=\arcsin g(x)$.

24. Să se studieze paritatea, respectiv imparitatea următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$;

c) $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$; d) $f:(-\infty-1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$; f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$.

25. Ştiind că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este impară, să se determine $f(0)$.

26. Să se determine o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ştiind că este simultan pară şi impară.

27. Fie o funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se definesc funcţiile $p_f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $i_f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin egalităţile: $p_f(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$, $i_f(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)-f(-x))$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

a) Funcţia p_f este pară, iar funcţia i_f este impară.

b) $f(x)=p_f(x)+i_f(x)$ şi $f(-x)=p_f(x)-i_f(x)$.

c) f este pară $\Leftrightarrow f(x)=p_f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow i_f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

f este impară $\Leftrightarrow f(x)=i_f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow p_f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

28. Cu definiţia şi notaţiile din problema 27, să se calculeze p_f şi i_f în cazurile:

a) $f()=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$; b) $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$; c) $f(x)=2^x$.

29. Să se afle perioada principală a următoarelor funcţii şi să se schiţeze graficele lor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$;

c) $f:\{x\in\mathbb{R}\mid\cos x\neq 0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{tg}x$; d) $f:\{x\in\mathbb{R}\mid\sin x\neq 0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{ctg}x$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|\sin x|$;

30. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, periodică, de perioadă principală $T\geq 0$, iar $\omega>0$ un număr fixat. Să se arate că perioada principală a funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)\stackrel{\text{def}}{=}f(\omega x)$ este $\dfrac{T}{\omega}$.

b) Să se determine perioadele principale ale funcţiilor $x\mapsto\sin 2x$, $x\mapsto\sin\dfrac{x}{2}$, iar apoi să se schiţeze pe acelaşi sistem de coordonate carteziene xOy graficul funcţiei $x\mapsto\sin x$ şi ale funcţiilor precedente.

31. a) Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, două funcţii periodice de perioade principale $T_1>0$, respectiv $T_2>0$, pentru care raportul acestora este un număr raţional $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Să se determine perioada principală a funcţiei $h=f+g$.

b) Să se determine perioada principală a funcţiei $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sin 3x+\sin 7x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

32. Să se determine perioada principală a următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(n)=(-1)^n$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}$; c) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(n)=\arg\left(\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$; d) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(n)=\arg(\mathrm{i}^n)$.

33. Să se determine perioada funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{2x\}$ şi să i se schiţeze graficul. Aceeaşi problemă pentru $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left\{\frac{x}{2}\right\}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \{3x\}$.

34. Să se arate că funcţia lui Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{pentru} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ admite ca perioadă orice număr raţional $T > 0$, dar nu admite perioadă principală.

35. Cum se obţine din graficul cunoscut al unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, graficul funcţiilor $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = f(x) + h$, $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = \alpha f(x)$, $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = f(x + h)$, $(\alpha, h \in \mathbb{R})$?

36. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât există o constantă $a \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $f(a - h) = f(a + h)$, pentru orice $h \in \mathbb{R}$. La ce revine, din punct de vedere geometric proprietatea?

37.* a) Graficul unei funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite două axe de simetrie de ecuaţii $x = a$, $x = b$, $a < b$. Să se demonstreze că că f este periodică.

b) Poate graficul unei funcţii să admită două axe de simetrie paralele cu axa Ox?

38. Fie o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ impară, cu proprietatea că există $a > 0$, astfel încât $f(a - x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că f este periodică.

39. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$ o funcţie cu proprietatea că există $a > 0$, astfel încât $f(a + x) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi că f este periodică.

40. Este funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$ periodică? Să se arate că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + \sin x$ nu este periodică; analog pentru $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x + \cos x$.

41. Să se schiţeze graficele funcţiilor:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min(1, x)$; b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \min t^2$, $t \leq x$.

Capitolul II. Şiruri de numere reale[1)]

1. Să se arate că următoarele şiruri sunt mărginite:

a) $a_n = \dfrac{3n + 2}{4n + 6}$; b) $b_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$; c) $a_n = \dfrac{2n}{n^2 + 1}$.

2. Să se arate că următoarele şiruri sunt mărginite:

a) $x_n = \dfrac{2n + 3}{3n + 8}$; b) $x_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$; c) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$, $(n \geq 2)$;

d) $b_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$; e) $c_n = \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3}$;

f) $d_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{1^2 + 2^2} + \cdots + \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$; g) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$;

3. a) Utilizând inegalitatea lui Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx$ $(x \in \mathbb{R}, x > -1, n \in \mathbb{R}^*)$, să se arate că şirul de termen general $a_n = \sqrt[n]{n}$ este mărginit.

b) Utilizând inegalitatea lui Bernoulli: să se arate că:

$$(1 + t)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{t}{n}, \ (t \in \mathbb{R},\ t > -1;\ n \in \mathbb{N}^*).$$

c) Cu ajutorul inegalităţii de mai sus, să se arate că şirul de termen general $b_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$, $(a > 1)$ este mărginit.

---

1) A se vedea A.Vernescu, „Analiză matematică“, vol. I, Editura Pantheon, Bucureşti, 2001.

4. Să se arate că, pentru $n \geq 10$ avem $1 \leq \lg n < n$ şi să se deducă apoi mărginirea şirului $a_n = \sqrt[n]{\lg n}$.

5. a) Să se demonstreze prin inducţie matematică după k inegalitatea:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2},\ \forall k,\ n \in \mathbb{N}^*,\ k \leq n.$$

b) Se consideră şirul $(e_n)_n$ de termen general $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Să se demonstreze că şirul este mărginit, stabilind inegalitatea:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

6. a) Să se stabilească inegalitatea $\left(\frac{n+1}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (cu partea a doua valabilă pentru $n \geq 2$).

b) Să se stabilească prin metoda inducţiei matematice inegalitatea

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$$

(cu partea a doua valabilă pentru $n \geq 6$).

c) Utilizând inegalitatea de la punctul b), să se arate că următoarele şiruri sunt mărginite:

(i) $a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$; (ii) $a_n = \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}$; (iii) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; (iv) $a_n = \sqrt[n^2]{n!}$.

7. a) Să se arate că şirul $(E_n)_n$ de termen general $E_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ este mărginit.

b) Notând, ca şi mai înainte, $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, să se arate că $e_n \leq E_n$ şi să se deducă şi pe această cale mărginirea şirului $(e_n)_n$.

8. a) Fie $S_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$. Fără a utiliza metoda inducţiei matematice, să se stabilească inegalităţile:

(i) $2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{k}} < 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$; (ii) $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < S_n < 2\sqrt{n}$.

b) Să se arate că şirul $(a_n)_n$, de termen general $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$ este mărginit.

9. a) Notând $\Omega_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \Omega_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(Se recomandă şi căutarea unei demonstraţii directe, în afară de inducţia matematică.)

b) Să se deducă mărginirea şirului $(a_n)_n$ de termen general $a_n = \dfrac{C_{2n}^n}{4^n}\sqrt{n}$.

10. Să se arate că următoarele şiruri sunt mărginite:

a) $a_n = (-1)^n$; b) $a_n = A\cos\dfrac{n\pi}{4}+B\sin\dfrac{n\pi}{4}$; c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

11. Să se arate că următoarele şiruri sunt mărginite:

a) $a_n = 2\cos\dfrac{n\pi}{6}+3\sin\dfrac{n\pi}{6}$; b) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$; c) $a_n = \dfrac{n\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}$.

12. Să se arate că următoarele şiruri sunt nemărginite:

a) $a_n = n^2 + 3n + 2$; b) $a_n = \frac{n^3}{n^2+1}$; c) $a_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2}$; d) $a_n = n!$;

e) $a_n = \alpha^n$, $(\alpha > 1)$; f) $a_n = n^\beta$, $(\beta > 0)$; g) $a_n = \frac{\alpha^n}{n}$, $(\alpha > 1)$; h) $a_n = \frac{\alpha^n}{n^\beta}$, $(\alpha > 1; \beta > 1)$; i) $a_n = C_{2n}^n$; j) $a_n = \log_2 3 + \log_3 4 + \ldots + \log_n(n+1)$, $(n \geq 2)$.

13. Utilizând inegalitatea din problema 9, să se arate că şirul de termen general $a_n = \frac{1}{\Omega_n} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ este nemărginit.

14. Utilizând inegalitatea din problema 6, punctul b), să se arate că următoarele şiruri sunt nemărginite:

a) $u_n = \frac{3^n (n+1)!}{n^n}$; b) $v_n = \frac{n^{n+1}}{2^n \cdot n!}$; c) $w_n = \sqrt[n]{n!}$.

15. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$ avem: $\frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p} > \frac{1}{2}$.

b) Să se demonstreze inegalitatea $H_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$, $(2 \leq k \in \mathbb{N})$.

c) Să se arate că şirul $(H_n)_n$ este nemărginit.

16. a) Să se arate că şirul $a_n = (-1)^n \cdot n$ este nemărginit.

b) Să se arate că şirul $a_n = q^n$ $(q < -1)$ este nemărginit.

c) Să se arate că, dacă $(a_n)_n$ este un şir nemărginit, atunci şirul $b_n = (-1)^n \cdot a_n$ este, de asemenea, nemărginit.

d) Să se arate, printr-un contraexemplu, că, dacă şirul $(a_n)_n$ este nemărginit, nu rezultă neapărat că şirul $\left(a_n^{a_n}\right)_n$ este, de asemenea, nemărginit.

17. Să se arate că următoarele şiruri sunt monotone:

a) $a_n = \frac{2n+3}{5n+11}$; b) $a_n = \frac{4n+7}{5n+9}$; c) $a_n = \frac{5n+3}{2n+7}$;

d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; e) $a_n = \log_n(n+1)$, $n \geq 2$.

18. Fie un şir $(x_n)_n$ de termen general $x_n = \frac{an+b}{cn+d}$, (numit **şir omografic**) cu $c > 0$, şirul fiind considerat definit pentru $n > -\frac{d}{c}$ şi fie:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Să se arate că:

$$\delta \begin{cases} > 0 & \Longrightarrow \text{ şirul } (x_n)_n \text{ este strict crescător;} \\ = 0 & \Longrightarrow \text{ şirul } (x_n)_n \text{ este şir constant;} \\ < 0 & \Longrightarrow \text{ şirul } (x_n)_n \text{ este strict descrescător.} \end{cases}$$

19. a) Să se arate că şirul $(a_n)_n$ de termen general

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

este strict crescător;

b) Aceeaşi problemă pentru şirul $(b_n)_n$ de termen general

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Observaţie. Se poate arăta că şirurile din problema 19 satisfac identitatea $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (identitatea lui Catalan).

20. Să se stabilească monotonia şirurilor:

a) $\Omega_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$;

b) $W_n = \dfrac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)} = \dfrac{1}{\Omega_n^2}\cdot \dfrac{1}{2n+1}$.

21. Fie $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$, cu $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. În baza inegalităţilor din problema 8, să se stabilească monotonia şirului $(a_n)_n$.

22. a) Utilizând inegalitatea mediilor aplicată numerelor:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1,$$

să se arate că şirul $(e_n)_n$, $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, este strict crescător:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

b) Utilizând inegalitatea mediilor aplicată numerelor:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \; a_{n+2} = 1,$$

să se arate că şirul $(f_n)_n$, $f_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, este strict descrescător:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

23. a) Utilizând inegalitatea mediilor aplicată numerelor:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1 - \frac{1}{n}, \; a_{n+1} = 1,$$

să se arate că şirul $(g_n)_n$, $g_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 2$, este strict crescător.

b) Să se arate că $\dfrac{1}{g_n} = f_{n-1}$ şi să se regăsească şi pe această cale faptul că şirul $(f_n)_n$ este strict descrescător.

24. a) Să se arate că $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} = \left[1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \dfrac{n+2}{n+1}$. Aplicând apoi inegalitatea lui Bernoulli, să se arate că: $\dfrac{e_{n+1}}{e_n} > \dfrac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$ şi să se deducă, din nou, monotonia şirului $(e_n)_n$;

b) Să se arate că $\dfrac{f_n}{f_{n+1}} = \left[1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right]^{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{n+2}$. Aplicând apoi inegalitatea lui Bernoulli, să se arate că: $\dfrac{f_n}{f_{n+1}} > \dfrac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$ şi să se deducă, din nou, monotonia şirului $(f_n)_n$.

25. Să se arate că şirurile $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ şi $b_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$ sunt strict monotone.

26. Să se arate că următoarele şiruri sunt nemonotone:

a) $a_n = (-1)^n$; b) $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$; $b_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$; c) $a_n = \operatorname{tg}(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$.

Observaţie: Au loc relaţiile: $\cos n\pi = (-1)^n$ şi $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$.

27. Să se studieze monotonia şi mărginirea şirurilor:

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}$; b) $a_n = \sqrt[p]{n+k} - \sqrt[p]{n+q}$, $p \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $k, p \in \mathbb{R}_+$;

c) $a_n = \dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$; d) $a_n = \alpha^{\frac{1}{n+1}}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$; e) $a_n = \log_\alpha \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$, $0 < \alpha \neq 1$;

28. Utilizând teorema de convergenţă cu ε, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{5n+7} = \dfrac{2}{5}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{an+b}{cn+d} = \dfrac{a}{c}$ $(c\neq0)$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ $(\alpha>0)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$, $(q > 1)$.

g) Orice şir constant este convergent şi limita este constanta însăşi.

29. Utilizând teorema de convergenţă cu ε să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+2^n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+5n+3} = \dfrac{1}{2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3n+1}{2n^3+5n+3} = \dfrac{1}{2}$.

30. Folosind teorema de convergenţă cu ε a şirurilor convergente, să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

$p_1 : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{1-n} = 1$; $p_2 : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+4n}{5n-1} = 1$;

$p_3 : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n+1}{3-2e^n} = -\dfrac{1}{2}$; $p_4 : \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n - 1}{3 - e\ln n} = \dfrac{1}{e}$.

31. Să se demonstreze că şirul $a_n = \operatorname{tg} n$ este divergent.

32. În ce caz şirul $x_n = a^n$ $(a \in \mathbb{R}$, dat) este divergent?

33. Utilizând criteriul majorării, să se demonstreze că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n+6} = \dfrac{2}{3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+7}{11n+3} = \dfrac{5}{11}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = 1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{2}{3}$.

34. Utilizând consecinţa 1 a criteriului majorării, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \sin n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^3} = 0$;

35. Utilizând consecinţa 2 a criteriului majorării, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^n} = 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0\,(0 < \alpha < 1)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ $(\alpha > 1)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\alpha^n} = 0$ $(\alpha > 1)$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{\alpha^n} = 0$ $(\alpha > 1)$.

36. a) Utilizând inegalitatea: $0 < \Omega_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\left(\Omega_n = \dfrac{1\cdot3\cdot\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\ldots\cdot2n}\right)$, să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n$.

b) Să determine limita şirului $(x_n)_n$ de termen general: $x_n = \dfrac{n!!}{(n+1)!!}$

37. Utilizând inegalitatea $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ (cu partea dreaptă valabilă pentru $n \geq 6$), să se arate, pe baza consecinţei 2, a criteriului majorării, că:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^{n+1}} = 0$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{3^n \cdot n!} = 0$; (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

38. Fie $a_n = \sqrt[n]{n}$; întrucât $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{R}$, notăm $a_n = 1 + \alpha_n$, unde $\alpha_n \geq 0$.

a) Să se arate că $\alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$;

b) Punând inegalitatea precedentă sub forma: $0 \leq a_n - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, să se determine, pe baza criteriului majorării, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

39. Utilizând consecinţa 2 a criteriului majorării, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}\right) = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\cdot\ldots\cdot(1+n^2)} = 0$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1!+2!+3!+\ldots+n!}{(n+1)!\sqrt{n}} = 0$.

40. Utilizând criteriul majorării la $+\infty$, să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ $(a > 1)$: c) $\lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^n = \infty$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$ $(a > 1)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^2} = \infty$ $(a > 1)$; g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty$ $(a > 1,\ b > 0)$;

41. Utilizând inegalitatea $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ $(n \geq 6)$, să se arate că:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{2^n \cdot n!} = \infty$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^{n-1}} = \infty$; (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

42. **(Limita sumei armonice H_n)** Fie $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

a) Aplicând inegalitatea mediilor unor numere convenabil alese, să se demonstreze inegalitatea:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < H_n < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\right) + 1;$$

b) Să se deducă relaţia: $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$.

~~43~~. **(Limita sumei armonice H_n, altă metodă.)**

Fie, din nou, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

a) Să se arate că: $H_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ (pentru $k \geq 2$) şi că $H_n > \frac{1}{2}(1 + \log_2 n)$.

b) Să se deducă relaţia: $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = \infty$.

44. Utilizând şirurile - tip convergente la zero, să se determine limita următoarelor şiruri:

a) $a_n = \frac{1}{n} + (0,2)^n$; b) $a_n = 2 + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$; c) $a_n = \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$;

d) $a_n = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2\right]$; e) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) + 3\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$; f) $a_n = \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n}\right)$;

g) $a_n = \left(3+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(5-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$; h) $a_n = \dfrac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$; i) $a_n = \dfrac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

45. Pentru şirurile $(a_n)_n$ următoare, să se arate că raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este dat de relaţiile menţionate pentru fiecare şir $(a_n)_n$ în parte, iar apoi, să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

a) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$; .... $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$;

b) $a_n = \dfrac{2^n \cdot n^n}{(n+1)(n+2)\dots 2n} = \dfrac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ ... $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \dfrac{n+1}{2n+1}$;

c) $a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{(n+1)(n+2)\dots 2n} = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$; .... $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n+1}$.

46. Se consideră şirul $(a_n)_n$ dat de $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)$.

a) Să se arate că:

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n} \text{ şi că } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{2n+1}{n+1} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{4}{\mathrm{e}}.$$

b) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

47. Se consideră şirurile :

a) $a_n = \Omega_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$;

b) $a_n = \mathrm{W}_n \overset{\text{def}}{:=} \dfrac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)} = \dfrac{1}{\Omega_n^2}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$;

c) $a_n = \mathrm{P}_k(n) > 0$, funcţie polinomială de gradul k în variabila n.

Este util criteriul raportului în căutarea limitelor acestor şiruri?

48. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n} = \infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha^n \cdot n!}{n^n} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0<\alpha<\mathrm{e} \\ \infty & \text{dacă } \alpha>\mathrm{e} \end{cases}$.

(Dacă $0 < \alpha \leq 1$, limita se obţine imediat cu criteriul majorării. Cum?)

49. Fie $(a_n)_n$ şirul de termen general $a_n = \dfrac{\mathrm{e}^n \cdot n!}{n^n}$, $\forall n \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ şi să se deducă apoi monotonia şirului $(a_n)_n$.

b) Să se arate că, dacă un şir de numere strict pozitive $(x_n)_n$ este strict crescător, atunci $x_n > \dfrac{x_n^2}{x_{2n}}$.

c) Aplicând inegalitatea precedentă şirului $(a_n)_n$, să se arate că:

$a_n > \dfrac{1}{\Omega_n} > \sqrt{2n+1} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \infty$ (unde $\Omega_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$)

şi să se deducă apoi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

50. Să se demonstreze că, dacă $a_n = 2 + \cos\pi\sqrt{n}$, atunci şirul este mărginit, divergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

51. Utilizând teorema de convergenţă a şirurilor monotone, să se arate că următoarele şiruri sunt convergente şi să li se determine limita:

a) $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $x_1 = \sqrt{2}$; b) $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_1 = a \in [1,2]$

Indicaţie. Se arată mai întâi că şirurile sunt monotone şi mărginite (deci convergente), iar apoi se trece la limită în relaţia de recurenţă.

52. Fie $S_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, iar $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

a) Utilizând inegalităţile din problema 8: să se arate că şirul $(a_n)_n$ este monoton descrescător şi mărginit (deci convergent) şi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [-2,-1]$.

b) Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat şi $b_n(\alpha) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \alpha\sqrt{n}$.

Să se arate că:

(i) $\alpha < 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n(\alpha) = \infty$; (ii) $\alpha > 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n(\alpha) = -\infty$.

53. Pentru ce valoare a lui $\alpha \in \mathbb{R}$ şirul de termen general:

$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} - \alpha\sqrt{n}$ este convergent?

54. Pentru şirurile următoare, să se arate că au loc relaţiile scrise în dreptul fiecăruia, iar apoi, utilizând propoziţia „Limita se distribuie bazei şi exponentului“, să li se determine limita:

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{n}}$;

b) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$; $(n \geq 2)$ .... $a_n = \left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}$;

c) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^n$;

d) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}$;

e) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{2n+1}{n}}$;

f) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3\sqrt{n}+2}$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}}}$;

g) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n+3}$; $(n \geq 2)$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n+3}{n-1}}$;

h) $a_n = \left(1+\dfrac{n}{n^2-1}\right)^{n+2}$; $(n \geq 2)$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{n}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{n}}\right]^{\frac{n(n+2)}{n^2-1}}$

55. Să se arate că următoarele relaţii sunt eronate şi să se explice în ce constă greşeala:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{n+2}} = e$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n^2}} = e$.

56. Aceeaşi problemă ca la 54 pentru şirurile următoare, (unde $n \geq 2$). (Identităţile de pe coloana din dreapta se obţin adunând şi scăzând la bază 1 şi efectuând câteva calcule elementare)

a) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n-1}}$;

b) $a_n = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n-1}\right)^n$ .... $\begin{cases} a_n = \left[(1+\alpha(n))^{\frac{1}{\alpha(n)}}\right]^{n\alpha(n)} \\ \text{unde } \alpha(n) = \dfrac{2n}{n^2-n+1} \end{cases}$;

c) $a_n = \left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{n^3}$ .... $a_n = \left[\left(1+\dfrac{2}{n^3-1}\right)^{\frac{n^3-1}{2}}\right]^{\frac{2n^3}{n^3-1}}$.

57. Utilizând inegalitatea $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, să se obţină inegalităţile:

a) $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$ (inegalitatea lui Neper)

b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

58. (**Limita sumei armonice H_n.**) Se notează, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = 1+\dfrac{1}{2}+$ $+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$. Utilizând partea a doua a inegalităţii b) din problema precedentă să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} H_n$.

59. Se consideră şirul $(c_n)_n$ de termen general:

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n; \ (c_n = H_n - \ln n)$$

Utilizând inegalităţile din problema 57, să se demonstreze că şirul $(c_n)_n$ este monoton descrescător şi mărginit: $0 < c_n \leq 1 \ \forall\, n \in \mathbb{R}$, (deci convergent).

Observaţie. Limita şirului $(c_n)_n$ se numeşte *constanta lui Euler* şi se notează C (uneori şi γ):

$$\mathrm{C} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n) \approx 0,57721\ldots.$$

Acest număr intervine într-o serie de calcule din Analiza matematică. Nu se cunoaşte în prezent, dacă numărul C este raţional sau iraţional.

60. **(Expresia asimptotică a sumei H_n.)** Să se stabilească identitatea:

$$H_n = \ln n + \mathrm{C} + \varepsilon_n; \quad \left(H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

unde $(\varepsilon_n)_n$ este un şir cu limita zero. (Expresia din membrul drept al identităţii se numeşte *expresia asimptotică* a sumei H_n).

61. Utilizând expresia asimptotică a sumei H_n să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{H_n}{\ln n}$.

62. Să se arate că nu există nici o funcţie raţională f cu coeficienţi reali, astfel încât:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = f(n), \ \forall\, n \in \mathbb{R}.$$

63. Fie $A_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n}$.

a) Să se demonstreze **identitatea lui Catalan**:

$A_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$ fără a utiliza inducţia matematică.

b) Să se deducă $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

64. a) Să se determine limita şirului $(S_n)_n$ de termen general :

(i) $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

(ii) $S_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$.

b) Să se determine limita şirului $(x_n)_n$ de termen general:

$$x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

65. Să se determine $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^2+k}{n^3+k}$.

66. Fie $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$.

a) Utilizând inegalitatea $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \ (-1 < x \neq 0)$ succesiv pentru $x = \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2}{n^2}, \ldots, \dfrac{n}{n^2}$, să stabilească inegalitatea $\dfrac{1}{2} < \ln a_n < \dfrac{n+1}{2n}$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^{1/2}$

67. a) Să se stabilească inegalitatea $1 < \sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n} \ (n \geq 3)$;

b) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$.

68. Fie $\Omega_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots 2n}$. Utilizând inegalitatea $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \Omega_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ să se determine: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Omega_n}$.

69. a) Să se stabilească inegalitatea: $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot (n+1)$, cu partea dreaptă valabilă pentru $n \geq 5$;

b) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ şi că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = 1$.

70. (**Şirul lui Traian Lalescu.**) Fie $(L_n)_n$ şirul de termen general:

$$L_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}.$$

a) Luând în inegalitatea $x > \ln(1+x)$ $(-1 < x \neq 0)$ succesiv $x = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1$, apoi $x = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} - 1$, să se stabilească inegalitatea:

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \cdot \ln\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} < L_n < \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \ln\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\ \forall\, n \geq 2.$$

b) Să se deducă egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

71. Utilizând inegalitatea $\frac{\mathrm{e}}{2n+2} < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{\mathrm{e}}{2n+1}$, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{\mathrm{e}}{2}$.

72. (**Şirul lui M. Ghermănescu.**) Fie $(G_n)_n$ şirul de termen general:

$$G_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} - \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\ (n > 1) \text{ şi } e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

a) Să se stabilească identitatea:

$$G_n = n(e_n - \mathrm{e}) + n(\mathrm{e} - e_{n-1}) + e_n;\ \left[e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right];$$

b) Utilizând rezultatul din problema 71, să se arate că: $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = \mathrm{e}$.

73. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\mathrm{e}}\right]^n$.

74. Utilizând inegalitatea $\frac{1}{2n+1} < c_n - \mathrm{C} < \frac{1}{2n}$, unde $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, iar C este constanta lui Euler, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n(c_n - \mathrm{C}) = \frac{1}{2}$.

75. Se consideră şirul $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$. Utilizând inegalitatea $\frac{1}{4n+2} < \ln 2 - S_n < \frac{1}{4n+1}$, să se arate că are loc egalitatea $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln 2 - S_n) = \frac{1}{4}$.

76. Utilizând inegalitatea lui Wallis $\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} < \Omega_n < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n\sqrt{n}$.

77. Fie $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ şi $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$, iar $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Să se stabilească inegalitatea: $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<a_n-a<\frac{1}{2\sqrt{n}}$, iar apoi să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(a_n-a)=\frac{1}{2}$.

78. Fie $(x_n)_n$ şirul definit astfel: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_n}=\mathrm{e}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $x_n=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$;

b) Folosind inegalitatea $\frac{2}{2n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{2n+1}{2n(n+1)}$, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$.

79. Aplicând regulile de calcul cu şiruri cu limite infinite, să se determine limita următoarelor şiruri:

a) $a_n=2^{n+3}$; b) $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n^2+n+1}$; c) $a_n=\left(\frac{2n+3}{3n+5}\right)^{n^2+n+1}$; d) $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}}$;

e) $a_n=\left(\frac{3n+5}{4n+7}\right)^{\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}}$; f) $a_n=\mathrm{e}^{\frac{n^2+2n+3}{n+1}}$; g) $a_n=3^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$; h) $a_n=2^{\frac{n}{n^2+3}}$.

80. Să se determine limitele şirurilor

a) $a_n=n^2-3n$; b) $a_n=n^3-3n$; c) $a_n=-n^2+n$; d) $a_n=\sqrt[n]{7^n+6^n+5^n}$;

e) $a_n=\frac{3\cdot5^n+2\cdot3^n+7\cdot2^n}{7\cdot5^n+3\cdot4^n+2^n}$; f) $a_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}$ $(\alpha,\beta>1)$;

g) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+3n+2}$; h) $a_n=\frac{3n^2+2n+5}{5n^2+7n+2}$; i) $a_n=\frac{n^3+2}{n^2+n+4}$;

j) $a_n=\sqrt{n^5+1}-\sqrt{n}$; k) $a_n=\sqrt{n^3+1}-\sqrt[3]{n}$;

l) $a_n=\sqrt[3]{2n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}$; m) $\sqrt[5]{3n^3+2n}-\sqrt[5]{n^3+n}$.

81. Să se calculeze termenul general a_n, iar apoi să se determine limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n(n+1)}$; b) $a_n=\frac{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$;

c) $a_n=\frac{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)}{n^4}$;

d) $a_n=3\cdot\left[1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2\right]-(4n^3-n-1)$;

e) $a_n=\sqrt{n^2+1}[1-2+3-4+\cdots+(2n-1)-2n]$;

f) $a_n=\left[1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3\right]-n^2(2n^2-1)$;

g) $a_n=\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^2(n+1)}-\frac{n^2-n+1}{4n}$;

h) $a_n=\frac{1}{11}-\frac{1}{19}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{19^2}+\cdots+\frac{1}{11^n}-\frac{1}{19^n}$;

i) $a_n=1!1+2!2+\cdots+n!n-(n+1)!$;

j) $a_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$; $|a|<1$;

k) $a_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

l) $a_n=\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+3)}$;

m) $a_n=\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$;

n) $a_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

82. Să se determine limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}$; b)$a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$;

c) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-2n+2}$.

83. Fie $x_n = \sqrt{9n^4 - 24n^3 + 6n^2 + 5} - (\alpha n^p + \beta n + \gamma)$.

i) Să se arate prin dare de factor comun forţat că:

$$p < 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \text{ iar } p > 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \cdot \text{sign}\alpha;$$

ii) În cazul $p = 2$, să se arate, tot prin dare de factor comun forţat, că

$$\alpha < 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \text{ iar } \alpha > 3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty;$$

iii) Să se determine parametrii p, α, β, γ, astfel ca: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{7}{3}$.

84. Fie şirul $(x_n)_n$ de termen general $x_n = n(\sqrt[n]{a} - 1)$ unde $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ este un număr fixat.

i) Să se arate că $\dfrac{x_n}{n} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$ şi că: $a = \left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)^n$.

ii) Din relaţia $a = \left[\left(1 + \dfrac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}$ să se deducă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln a$.

85. Să se determine limitele şirurilor de termen general:

a) $a_n = \{\sqrt{n^2+n}\}$; b) $a_n = \{\sqrt{n^2+kn}\}$ $(k \in \mathbb{R})$;

86. Utilizând lema lui Stolz, să se determine următoarele limite:

a) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)}{n^2(n+1)^2}$;

b) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$;

c) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^s + 2^s + 3^s + \cdots + n^s}{n^{s+1}}$ ($s \in \mathbb{R}$, apoi $s \in (0,\infty)$);

d) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n}$;

e) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots + n(n+2)}{1\cdot 4 + 2\cdot 5 + \cdots + n(n+3)}$;.

87. Utilizând consecinţa 3 a lemei lui Stolz, să se determine limitele:

a) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$; b) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$; c) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$;

d) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\Omega_n}$; $\left(\Omega_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)$;

e) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$; f) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$.

Să se compare apoi cu celelalte metode utilizate la găsirea acestor limite.

88. Scriind întâi şirurile următoare ca radicali de ordinul n şi apoi aplicând consecinţa 3 a lemei lui Stolz (teorema Cauchy-D'Alembert), să se determine limitele:

a) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; b) $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$; c) $l = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sqrt[n]{\dfrac{n}{(2n)!}}$.

89. Să se determine un şir $(a_n)_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, astfel încât să fie îndeplinită respectiv câte una din condiţiile:

a) $n(a_{n+1} - a_n) \to 1$, b)$n(a_{n+1} - a_n) \to 0$, c)$a_{n^2} - a_n \to 0$.

90. Fie şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia de recurenţă: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + 3\ \forall n \in \mathbb{R}$, $x_1 = 11$.

i) Se notează $x_n = y_n + h$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (unde h este o constantă). Să se determine h astfel încât relaţia de recurenţă satisfăcută de şirul $(y_n)_n$ să fie omogenă (fără termen liber);

ii) Să se determine termenul general al şirului $(y_n)_n$;

iii) Să se determine termenul general al şirului $(x_n)_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

91. Fie, din nou, şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia $x_{n+1} = = \alpha x_n + \beta$, unde α şi β sunt două numere reale fixate, iar x_1 este dat şi fie simultan $\alpha \neq 1$ şi $\beta \neq 0$.

i) Se notează $x_n = y_n + h\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ (unde h este o constantă). Să se determine h astfel încât relaţia de recurenţă satisfăcută de şirul $(y_n)_n$ să fie omogenă;

ii) Să se determine termenul general al şirului $(y_n)_n$;

iii) Să se determine termenul general al şirului $(x_n)_n$ arătând că:

$$x_n = \left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha - 1}\right)\alpha^{n-1} - \frac{\beta}{\alpha - 1};$$

iv) Să se arate că, dacă $|\alpha| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

92. Aplicând metoda pusă în evidenţă în problemele 90 şi 91, să se determine termenul general şi limita pentru şirurile definite prin relaţiile de recurenţă următoare:

a) $x_{n+1} = \dfrac{1}{4}x_n + 3$; $x_1 = 4$; b) $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + 1$; $x_1 = 5$;

c) $x_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + 5$; $x_1 = 2$; d) $x_{n+1} = \dfrac{3}{5}x_n + 4$; $x_1 = 3$.

93. Să se determine termenul general şi limita şirurilor $(x_n)_n$ definite de următoarele relaţii:

a) $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$; $x_1 = 5$; $x_2 = 13$;

b) $6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n$; $x_1 = \dfrac{5}{6}$; $x_2 = \dfrac{13}{36}$;

c) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$; $x_1 = 4$; $x_2 = 14$.

94. (**Şirul lui Fibonacci.**) Fie şirul $(F_n)_n$ definit de relaţia

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ şi } F_1 = F_2 = 1.$$

i) Să se scrie primii 10 termeni ai şirului.

ii) Introducând $F_n = r^n$, să se găsească ecuaţia caracteristică: $r^2 - r - 1 = 0$.

iii) Să se arate că $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ (formula Fibonacci-Binet) şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$.

95. Să se determine termenul general şi limita şirurilor $(x_n)_n$ definite de următoarele relaţii:

a) $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$; $x_1 = 32$; $x_2 = 100$;

b) $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$; $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{13}{4}$;

c) $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$; $x_1 = 6$; $x_2 = 27$.

96. Să se determine termenul general al şirurilor $(x_n)_n$ definite de următoarele relaţii:

a) $x_{n+2} = \frac{1}{4}x_{n+1} - \frac{1}{16}x_n$; $x_1 = \frac{1}{8}(1+\sqrt{3})$; $x_2 = \frac{1}{32}(-1+\sqrt{3})$;

b) $x_{n+2} = 2x_{n+1}\cos a - x_n$; (unde $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este fixat); $x_1 = \cos a + \sin a$, $x_2 = \cos 2a + \sin 2a$.

97. Să se arate că şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia $x_{n+2} = \sqrt{2}x_{n+1} - x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (cu x_1, x_2 daţi) este mărginit.

98. Să se găsească termenul general şi limita şirului $(x_n)_n$ definit de relaţia:

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}} - 1} - \frac{1}{\sqrt[n]{x_n} - 1} = 1;\quad x_1 = 2.$$

99. Fie şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_1 = \sqrt{a}$ (unde $a > 0$ este un număr fixat).

a) Să se arate prin inducţie că şirul este strict crescător.

b) Scriind $x_n < x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$, să se deducă relaţia $x_n < \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

c) Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, să se obţină că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

100. Fie şirul $(x_n)_n$ definit de relaţia $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_1 = 10$. Se consideră funcţia $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ (definită pentru $x \neq 0$).

a) Să se arate că f are punctele fixe $x' = -\sqrt{2}$ şi $x'' = \sqrt{2}$.

În continuare se va nota (pentru simplificarea scrierii) tot cu f restricţia $f : [\sqrt{2}, \infty)$ [1] $\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. Să se arate că f este strict crescătoare şi deci, cum: $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, avem $f(x) \geq \sqrt{2}$, $\forall x \in [\sqrt{2}, \infty)$. Deci f ia valori în intervalul $[\sqrt{2}, \infty)$.

b) Potrivit celor stabilite la punctul precedent, rezultă că, prin intermediul funcţiei f, relaţia de recurenţă se poate scrie $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$. Să se arate, cu ajutorul funcţiei f, că şirul $(x_n)_n$ este strict descrescător şi mărginit inferior.

c) Notând $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

101. a) Se consideră funcţia $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ şi funcţia $g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, $g = f \circ f$. Să se arate că f este strict descrescătoare, g strict crescătoare şi să se rezolve ecuaţia $g(x) = x$, precum şi inecuaţiile $g(x) > x$, $g(x) < x$.

---

[1] Alegerea *acestei* mulţimi ca domeniu de definiţie al funcţiei este dictată de faptul că dintre cele patru intervale determinate de punctele fixe (în domeniul maxim) $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2}]$ şi $[\sqrt{2}, \infty)$ avem $x_1 = 10 \in [\sqrt{2}, \infty)$.

b) Fie $x_0 > 1$, fixat şi $(x_n)_n$ şirul definit de relaţia $x_{n+1} = f(x_n)$. Să se arate că $x_2 < x_0$, iar apoi să se deducă relaţia:

$$x_1 < x_3 < x_5 < \ldots < x_{2n+1} < \ldots < 1 < \ldots < x_{2n} < \ldots < x_4 < x_2 < x_0.$$

c) Să se arate că subşirurile $(x_{2n})_n$ şi $(x_{2n+1})_n$ sunt convergente şi că, pentru fiecare dintre ele, limita este soluţia ecuaţiei $x = g(x)$. Să se deducă apoi convergenţa şi limita şirului $(x_n)_n$ obţinând că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

102. Fie $a < b$ două numere reale. Se consideră şirul $(x_n)_n$ pentru care:

(i) $a < x_n < b$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (ii) $(b - x_n)(x_{n+1} - a) \geq \dfrac{(b-a)^2}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că şirul este convergent şi să i se determine limita.

103. Se dau numerele a_0, b_0, $c_0 \in \mathbb{R}$,fixate şi se definesc şirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ şi $(c_n)_n$ prin relaţiile de recurenţă: $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n)$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(c_n + a_n)$, $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$. Să se arate că şirurile $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ şi $(c_n)_n$ au aceeaşi limită, anume $\dfrac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0)$.

104. Fie $x_1 \in (0,\, 1)$ şi $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar apoi că $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$.

105. Fie un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel încât $x_{n+1} = \sqrt{x_n + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, unde $x_0 > 0$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar apoi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n$.

Capitolul III. LIMITE DE FUNCŢII

1. Să se determine,pentru mulţimile următoare, mulţimile minoranţilor şi majoranţilor, $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\sup A$ (dacă există):

a) $A = (-\infty, 0] \cup \{2; 3\} \cup \{5; 2003\}$; b) $A = (-2003, 10^{2003})$;

c) $A = (10^{-2003}, 10^{2003}] \cup (10^{2004}, \infty)$; d) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

2. Fie $D' = \{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} / \alpha \text{ punct de acumulare pentru } D\}$;

$D_i = \{\beta \in \mathbb{R}/\beta, \text{ punct izolat pentru } D\}$.

Să se determine D' şi D_i, pentru:

a) $D = \mathbb{Q}$; b) $D = (-2, 3] \cup \{4, 5) \cup (6, \infty)$; c) $D = \mathbb{Z}$; d) $D = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n^k} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

3. Să se demonstreze că următoarele funcţii nu au limită la ∞:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$; b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;

c) $f\colon \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg} x$.

4. Să se demonstreze că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică, neconstantă, atunci nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

5. Să se arate că nu există $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$; analog $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

6. (**Funcţia lui Dirichlet.**) Fie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{pentru } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{pentru } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

Să se arate că funcţia nu are limită în nici un punct $x_0 \in \mathbb{R}$.

7. Fie funcţia $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{pentru } x\in\mathbb{Q} \\ 3x & \text{pentru } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Să se arate că f are limită în punctele $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$, dar nu are limită în nici un punct diferit de 1 şi de 2.

8. Să se studieze limitele laterale ale funcţiilor următoare în punctele specificate.[1)]
Să se stabilească apoi dacă funcţiile au sau nu limită în punctele respective.

a) $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x_0 = 1$;

b) $f : \mathbb{R}\setminus\{1,-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

c) $f : \mathbb{R}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

d) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$;

e) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, $x_0 = 0$;

f) $f : \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x^2-1|}}$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

g) $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0 = 1$;

h) $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{(x-1)^2}}}$, $x_0 = 1$;

i) $f : (0, \infty)\setminus\{\mathrm{e}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x - 1}$, $x_0 = \mathrm{e}$;

j) $f : \mathbb{R}\setminus\{0, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

k) $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

9. Să se determine punctele în care următoarele funcţii nu au limită:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x<0 \\ x^2+1 & \text{pentru } x\geq 0\end{cases}$;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} & \text{pentru } x<1 \\ 3x & \text{pentru } x\geq 1.\end{cases}$

10. Să se determine punctele în care următoarele funcţii nu au limită:

a) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$; b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sign} x$;

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = [x]$; d) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \{x\}$.

Să se compare apoi a) cu b). Să se schiţeze graficele funcţiilor.

11. Să se determine parametrul real k astfel încât următoarele funcţii să aibă limită în punctele indicate.

[1)] Se recomandă a se stabili şi faptul că toate aceste puncte sunt puncte de acumulare pentru domeniul de definiţie respectiv.

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+kx & \text{dacă} \quad x\le 1\\ x-2 & \text{dacă} \quad x>1\end{cases}\ \ldots x_0=1;$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^x+1 & \text{dacă} \quad x<0\\ 2x+k & \text{dacă} \quad x\ge 0\end{cases}\ \ldots x_0=0;$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x^2-1|}} & \text{dacă} \quad |x|>1\\ k & \text{dacă} \quad |x|\le 0\end{cases}\ \ldots x_1=1,\ x_2=-1.$

Să se schiţeze apoi graficele funcţiilor de la a) şi b).

12. Aplicând teoremele asupra operaţiilor cu limite de funcţii, să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+7)$; b) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2e^x-x^3)$; c) $\lim\limits_{x\to\pi} A\cos\frac{x^2}{2\pi}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} e^x(x^2-2x+1)$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x+1}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-x+1}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^4+7x^2-9)$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}(0,71)^{2x-100}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2)^{x+1}$; j) $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)$; k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln\sin x$; l) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\ln x$.

13. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+7}{3x^2+x+5}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+3x+7}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5x^2+2x+3}{3x+5}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2-x)(x^2+5)}{7x^3-3}$; f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(3x^2+1)(1-2x)}{x^2-x+1}$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-5}{2x^3-17x^2+1}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+4}{1-3x}$.

14. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4-2x^2}{3x^6+x^3+2x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-9x+5}{(x-1)^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}$ $(m,n\in\mathbb{R})$;

g) $l=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}$ $(n\in\mathbb{R})$.

Indicaţie: Se vor efectua întâi simplificări.

15. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{x}{1+x}\right)$;

16. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^3+1}-\sqrt[3]{(x-1)^3-1}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}-x\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+5}-\sqrt{2x^2+3x+7}\right)$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right)$; j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-ax\right)$, $(a>0)$ – discuţie după a în variantele $0<a<1$, $a=1$, $a>1$;

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-2\sqrt{x^2+1}\right)$;

m) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

n) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

17. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{ax})}{\ln(1+e^{bx})}$ $(a,\, b>0)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ctg}2x}{\text{ctg}x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

18. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{2x}-e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^x-\dfrac{1}{a^x}\right)$ $(a>0)$, discuţie după a;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$; e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\text{tg}^2 x\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{x}{2}}\right)$; g) $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

19. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}-1}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x+\sqrt{ax}-2a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ $(a>0)$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a-x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$; h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}$;

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$; j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}$.

20. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$;

e) $l_1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$; f) $l_2=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

g) $l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$; h) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^x}{x-a}$ $(a>0)$;

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$; j) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

k) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\log_a(1+(x-a))}{x-a}$ $(0<a\neq 1)$; l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\ln(1+x))}{x}$;

21. La exerciţiile c), d), e), şi i), a, b reprezintă numere reale.

Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{5}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{3}{5}\right)}{5x-3}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; $(b\neq 0)$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}ax}{\text{tg}bx}$; $(b\neq 0)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 ax}{bx^2}$; $(b\neq 0)$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos 4x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{x^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$ $(a\neq\pm b)$; j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{3x\sin 5x}$; m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{\sin x}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos ax}-\sqrt[3]{\cos bx}}{x^2}$;

r) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$; s) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}^3 x-1}{2\sin^2 x-1}$; t) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+1}-\mathrm{tg}\sqrt{x+1}}{\mathrm{tg}(x^2-1)}$.

22. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$; c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; d) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$;

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{(\sqrt{\pi}-\sqrt{2x})^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$; g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{tg}^3 x-3\mathrm{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^3-x^5}{3x-x^2}$; i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$; j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

k) $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{\sin(x^p)}$ ($n, p\in\mathbb{R}$ discuţie după n şi p); l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$; o) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{tg}^2 x}$; r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$; s) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}(\sin x)}$;

t) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x^2+x-2)}{\sin(x^2+3x+2)}$; u) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\mathrm{tg}(3x-2)}{3x^2+x-2}$; v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

23. Fie $p,q\in\mathbb{R}^*$, $p\neq q$. Să se determine: $l=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$.

24. (i) Fie $k\in\mathbb{R}^*$ ($k\geq 2$). Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[k^3]{\cos kx}}{x^2}=\dfrac{1}{2k}$;

(ii) Fie $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x\cdot\sqrt[2^3]{\cos 2x}\cdot\sqrt[3^3]{\cos 3x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n^3]{\cos nx})}{x^2}$.

Să se stabilească relaţia de recurenţă $L_k=L_{k-1}+\dfrac{1}{k}$, iar apoi să se determine L_n.

(iii) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$.

25. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,b>0)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,b,c>0)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(n\in\mathbb{R}^*; a_1,a_2,\ldots,a_n>0)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{ex}{x+1}\right)^{2x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; g) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$;

h) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\varphi(x)}$ unde $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2-3ex+2e^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to a}\left(\log_b\left(\log_a x^b\right)\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(a,b\in(0,1)\cup(1,\infty);a\neq b)$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(x+1)-\ln x)^x$; k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0)$;

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\log_2(x+3)^{5x}-\log_2 x^{5x}\right)$; m) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

26. Să se determine:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

27. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>0}}x^x$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^{\sin x}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^{\operatorname{tg}x}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(\sin x)^x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}(x-a)^{\sin x-\sin a}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(\arcsin x)^{\operatorname{tg}x}$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}}\left(1-\sqrt{x}\right)^{x-1}$.

28. Să se determine:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}(\operatorname{cosec}(x-a))^{a-x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

29. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$; $\alpha\in\{-\infty,-1,0,1,\infty\}$;

b) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{|x^2-4|}{\sqrt{|x^3+8|}-2x}$; $\alpha\in\{-\infty,-2,2,\infty\}$;

c) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x^3+\sqrt{x^6+x^4}}{\sqrt[3]{x^9+1}-\sqrt[3]{x^9+x^6+1}}$; $\alpha\in\{-\infty,\infty\}$;

d) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+4x^2+3}}{\sqrt{x^2-4}}$; $\alpha\in\{-2,2\}$.

Capitolul IV. FUNCŢII CONTINUE

1. Fie $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ şi $x_0=2$. Să se arate că f este continuă în x_0.

a) folosind definiţia cu limita funcţiei;

b) folosind propoziţia de caracterizare cu δ şi ε;

c) folosind propoziţia de caracterizare cu vecinătăţi;

d) folosind propoziţia de caracterizare cu şiruri.

2. Aceeaşi problemă pentru funcţia $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ şi $x_0=1$.

3. Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

a) $f(x)=\begin{cases}x & \text{pentru } x<1\\ x^2 & \text{pentru } x\geq 1;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{pentru } x<0\\ e^x & \text{pentru } x\geq 0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{pentru} \quad x<2 \\ 5x+7 & \text{pentru} \quad x\geq 2\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{pentru} \quad x<0 \\ x^2 & \text{pentru} \quad x\geq 0.\end{cases}$

4. Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât următoarele funcţii să fie continue:

a) $f(x)=\begin{cases} mx^2+1 & \text{pentru} \quad x<1 \\ x+2 & \text{pentru} \quad x\geq 1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} x+7 & \text{pentru} \quad x<7 \\ mx & \text{pentru} \quad x\geq 7\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{pentru} \quad x\leq 0 \\ x+m & \text{pentru} \quad x>0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases} x+m & \text{pentru} \quad x<0 \\ \ln(1+x) & \text{pentru} \quad x\geq 0.\end{cases}$

5. Să se determine constanta m astfel încât funcţiile de mai jos să fie continue:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pentru} \quad x\neq 0 \\ m & \text{pentru} \quad x=0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & \text{pentru} \quad x\neq 0 \\ m & \text{pentru} \quad x=0;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} m & \text{pentru} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{pentru} \quad x>0;\end{cases}$

6. Să se determine constantele reale m şi n astfel ca funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} mx+n & \text{pentru} \quad x<1 \\ e^x & \text{pentru} \quad x\geq 1\end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$ şi, în plus, să existe $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.[1)]

7. Să se studieze în funcţie de $a,b\in\mathbb{R}$, continuitatea funcţiilor următoare, definite pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x}{x^2}\cdot \operatorname{arcctg}^2\dfrac{1}{x}, & \text{pentru} \quad x<0 \\ a, & \text{pentru} \quad x=0 \\ e^{\frac{1-\sqrt{1+x}}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{2^x}, & \text{pentru} \quad x>0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & \text{pentru} \quad x<1 \\ \log_2(x+3)+a, & \text{pentru} \quad x\geq 1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \log_a\left(x^2+2ax+3a^2\right); & \text{pentru} \quad x\leq a \\ -\dfrac{e^x-e^{-a}}{x+a}+e^{-a}; & \text{pentru} \quad x>a\end{cases}$, $a>0$; $a\neq 1$;

d) $f(x)=\begin{cases} 2^{ax}+x-3ax^2; & \text{pentru} \quad x\leq 1 \\ (x^2+x-1)\cdot 2^{ax}; & \text{pentru} \quad x>1\end{cases}$;

8. Să se determine domeniul maxim de definiţie şi să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

a) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x+1)^{2n}-(x-1)^{2n}}{(x+1)^{2n}+(x-1)^{2n}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{(x+1)n}-3^{-(x+1)n}}{3^{(x+1)n}+3^{-(x+1)n}}$;

c) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-1|3^{n(x-1)}-|x+1|}{|x-1|\cdot 3^{n(x-1)}+x+1}$; d) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-2^{2n}}{x^{2n+1}+2^{2n}}$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi fie $x_0\in\mathbb{R}$. Rezultă atunci că există o vecinătate V a lui x_0 pe care f să fie strict monotonă?

[1)] Această condiţie revine la aceea că f să aibă derivată în punctul $x_0=1$

10. Fie $f, g: E \to \mathbb{R}$. Este posibil ca f şi g să fie discontinue, dar $f+g$ şi fg să fie continue?

11. a) Există funcţii $f: E \to \mathbb{R}$ discontinue, dar cu $|f|$ continuă?

b) Există funcţii $f: E \to (0,\infty)$ discontinue, dar cu f^f continuă?

c) Există $f: E \to E$ discontinue, dar cu $f \circ f$ continuă?

12. Se consideră $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(x, x^2)$, $g(x) = \min(1, x, x^2)$, $h(x) = \min\limits_{t \le x} t^2$. Să se schiţeze graficul acestor funcţii. Sunt continue?

13. a) Se consideră $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi se definesc $f_+: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $f_-: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [1]

$$f_+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \qquad f_-(x) = \frac{-f(x) + |f(x)|}{2}.$$

Să se arate că, dacă f este continuă, atunci f_+ şi f_- sunt, de asemenea, continue.

b) Aceeaşi problemă pentru funcţiile $\varphi, \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [2]

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

14. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $f_{/\mathbb{Q}} = 0$ [3] (funcţie identic nulă pe $\mathbb{Q}$). Să se arate că $f = 0$ [4] (funcţie identic nulă pe $\mathbb{R}$).

15. Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu $f_{/\mathbb{Q}} = g_{/\mathbb{Q}}$. Să se arate că $f = g$.

16. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfăcând ecuaţia I a lui Cauchy:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că $f(0) = 0$, $f(-y) = -f(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(x-y) = f(x) - f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ şi să se demonstreze apoi succesiv că:

(i) $f(nx) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(mx) = mf(x)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$;

(iii) $f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$;

(iv) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ (f este $\mathbb{Q}$ - omogenă).

b) Să se arate că, dacă f este continuă, atunci

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),\ (\forall)\,\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\ (f \text{ este } \mathbb{R} \text{ - omogenă}).$$

c) Să se deducă faptul că există o constantă $a \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(x) = ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

17. Să se determine soluţiile constante ale ecuaţiei întâi a lui Cauchy. Reprezintă un caz particular al soluţiei generale sau sunt soluţii singulare? [5]

18. Să se arate că, dacă o funcţie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce satisface ecuaţia întâi a lui Cauchy este continuă într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci ea este continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

(Consecinţă: O soluţie discontinuă a ecuaţiei este discontinuă pe toată axa reală $\mathbb{R}$.)

---

[1] Funcţiile f_+ şi f_- se numesc partea pozitivă, respectiv partea negativă a funcţiei f.

[2] Funcţiile φ şi ψ pot fi numite partea pară şi respectiv partea impară a funcţiei f (deoarece $f = \psi + \varphi$, φ este pară, ψ este impară).

[3] Adică $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

[4] Adică $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

[5] O soluţie se numeşte *particulară* dacă poate fi obţinută dând o anumită valoare constantei din soluţia generală, respectiv *singulară* în caz contrar.

19. Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfăcând ecuaţia a doua a lui Cauchy:

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că $g(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ şi că, dacă există un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $g(x_0) = 0$, atunci g este identic nulă.

b) Să se arate, pentru g neidentic nulă, că $g(0) = 1$, $g(-y) = \dfrac{1}{g(y)}$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$ şi că $g(x-y) = \dfrac{g(x)}{g(y)}$, $\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$.

c) Să se arate că, dacă g este continuă într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci este continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

d) Se notează, pentru g neidentic nulă şi continuă $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$. Să se deducă ecuaţia pe care o satisface f, iar apoi să se determine funcţia g.

20. Să se arate că funcţia $f\colon [-1,1] \to R$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ este mărginită şi să se determine $u, v \in [-1,1]$ astfel încât $\inf\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(u)$, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = f(v)$.

21. Aceeaşi problemă pentru funcţia $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, respectiv $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

22. Se consideră o funcţie continuă $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există două polinoame P_n şi Q_n, de gradul n, cu coeficienţi reali astfel încât

$$P_n(x) \leq f(x) \leq Q_n(x)\ \forall\, x \in [a,b].$$

23. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie polinomială de grad impar (cu coeficienţi reali). Să se demonstreze că există $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 0$.

24. Să se arate că următoarele funcţii $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt surjective:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; b) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}x$; c) $f(x) = a^x + x$, $(a > 1)$.

25. Să se demonstreze că următoarele funcţii $f\colon \mathbb{R} \to J$ constituie bijecţii:

a) $f(x) = \mathrm{arctg}x$; $J = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; b) $f(x) = \mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; $J = (-1,1)$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$; $J = (-1,1)$.

26. Fie $f\colon \mathbb{R} \to (a,b)$ bijectivă. Să se demonstreze că f nu poate fi funcţie raţională.

27. a) Fie $f\colon [a,b] \to [a,b]$, continuă. Să se arate că există un punct $x_0 \in [a,b]$, astfel încât $f(x_0) = x_0$

b) Fie $f\colon [-a,a] \to [-a,a]$ o funcţie continuă. Să se arate că există două puncte $u, v \in [-a,a]$, astfel încât $f(u) = u$ şi $f(v) = -v$.

c) Să se trateze problema analogă în cazul unei funcţii continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

28. **(Teorema de punct fix sau principiul contracţiilor, al lui St.Banach.)** Fie $f\colon [a,b] \to [a,b]$ o funcţie cu proprietatea că există $\alpha \in (0,1)$ astfel încât $|f(x') - f(x'')| \leq \alpha |x' - x''|$, $(\forall)\, x', x'' \in [a,b]$. Să se demonstreze că există un punct unic $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

29. **(Teorema de punct fix a lui Knaster.)** Fie $f\colon [a,b] \to [a,b]$ o funcţie crescătoare. Să se demonstreze că există un punct $x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Capitolul V. FUNCŢII DERIVABILE

1. Utilizând definiţia derivatei într-un punct să se studieze derivabilitatea următoarelor funcţii în punctele indicate. Pentru punctele de nederivabilitate să se precizeze tipul acestor puncte (funcţia are derivată în α, α este punct unghiular sau de întoarcere).

a) $f(x) = \begin{cases} |x+2|^3; & x \leq 2 \\ x^2+4x; & x > -2 \end{cases}$, $x_0 = -2$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\arcsin x|}{2\pi}; & x \in [-1,1] \\ \dfrac{1}{x^2-1}; & x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$.

c) $f(x) = \sqrt[5]{(x+3)^3}$; $\alpha = -3$; d) $f(x) = \arccos \dfrac{2-x^2}{2+x^2}$; $x_0 = -3$.

2. Utilizând formulele de derivare şi proprietăţile funcţiilor derivabile să se determine expresia lui f' şi domeniul maxim de definiţie al funcţiei f', pentru funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x^3-3x)^6$; b) $f(x) = \left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)^4$; c) $f(x) = \sqrt{\left|\dfrac{x+1}{x^2+1}\right|}$;

d) $f(x) = \sqrt[5]{(x^5-5x^2+5)^3}$; e) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4}$; f) $f(x) = \sin^4(x^5+10x)^3$;

g) $f(x) = \cos^2(x^6+3x)^2$; h) $f(x) = \ln^2(1+3x^2)$; i) $f(x) = \ln(3+\operatorname{tg}^3 x)^2$;

j) $f(x) = 3^{5\log_3(3^x)} - \log_3^2 3^{5x}$; k) $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x^2+1))$.

3. Să se scrie ecuaţiile tangentelor în punctul $A(\alpha, f(\alpha))$ şi a semitangentelor la stânga şi la dreapta în punctul $B(\beta, f(\beta))$ la graficele următoarelor funcţii:

a) $f(x) = |x^3-8|$; $\alpha = 1$; $\beta = 2$; b) $f(x) = 3\sqrt{|x^2-9|}$; $\alpha = 2$; $\beta = -3$;

c) $f(x) = \begin{cases} \ln(3+x); & x > -2 & \alpha = 0 \\ x^2-4; & x \leq -2 & \beta = -2 \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+3}; & x \leq -3 & \alpha = -4 \\ 3^x - \dfrac{1}{27}; & x > -3 & \beta = -3 \end{cases}$;

e) $f(x) = \max(x, x^2, 2-x^2)$; $\alpha = -3$; $\beta = -1$.

4. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde D este o mulţime simetrică, iar f este derivabilă pe pe D. Să se studieze paritatea funcţiei f', dacă:

a) f este funcţie pară; b) f este funcţie impară.

5. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, derivabilă pe D, periodică.

a) Să se demonstreze că f' este funcţie periodică.

b) Dacă T este perioadă principală a funcţiei f, este T perioadă principală şi pentru f'?;

6. Să se deducă, pe baza utilizării derivatei logaritmice, derivatele următoarelor funcţii definite pe semiaxa pozitivă:

a) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; b) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$; c) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfăcând ecuaţia funcţională întâi a lui Cauchy: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că, dacă f este derivabilă în origine şi $f'(0) = A$, atunci f este derivabilă în orice punct $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f'(x_0) = A$.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, satisfăcând ecuaţia funcţională a doua a lui Cauchy: $f(x+y) = f(x)f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că, dacă f este derivabilă în origine şi $f'(0) = A$, atunci f este derivabilă în orice punct $x_0\in\mathbb{R}$ şi $f'(x_0) = Af(x_0)$.

9. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, satisfăcând ecuaţia funcţională: $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că, dacă f este derivabilă în origine şi $f'(0) = A$, atunci f este derivabilă în orice punct $x_0\in\mathbb{R}$ şi $f'(x_0) = A(1-f^2(x_0))$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie polinomială de gradul n, iar $a\in\mathbb{R}$. Să se demonstreze, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, egalitatea:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(formula lui Taylor pentru funcţii polinomiale).

11. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie polinomială cu rădăcinile reale distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{f'(x_n)} = 0.$$

12. Fie o funcţie polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care există $A, a\in\mathbb{R}$, $A\neq 0$, $n\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x) = A(x-a)^n$. Să se demonstreze că polinomul de provenienţă al derivatei f' divide polinomul de provenienţă al funcţiei f (divizibilitatea are loc în inelul $\mathbb{R}[X]$).

13. Fie $f: I\to\mathbb{R}$, unde I este un interval, f continuă şi derivabilă pe I şi $f(I)$ mărginită. Să se studieze:

a) continuitatea funcţiei f'; b) mărginirea funcţiei f'.

14. Să se demonstreze că funcţiile următoare sunt inversabile şi să se calculeze $(f^{-1})'(\beta)$ şi $(f^{-1})''(\beta)$:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x) = x^3+2x^2+4x+5$; $\beta = 2$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x) = 3^x + x - 2$; $\beta \doteq \log_3 2$;

c) $f:(-2,-1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; $f(x) = \arcsin(2x+3)$; $\beta = -\frac{\pi}{6}$.

d) $f:(-2,\infty)\to\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$; $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2+4x+3)$; $\beta = \frac{\pi}{4}$.

15. Să se calculeze derivatele de ordinul n pentru următoarele funcţii:

a) $f(x) = x^p$ $(p\in\mathbb{R})$; b) $f(x) = x^p$ $(p\in\mathbb{R})$; c) $f(x) = \sqrt{x}$; d) $f(x) = e^x$;

e) $f(x) = a^x$ $(0<a\neq 1)$; f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; g) $f(x) = \ln x$; h) $f(x) = \log_a x$.

16. Să se calculeze derivata de ordinul n pentru funcţiile:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x+a}$; b) $f(x) = \ln(x^2-a^2)$ $(x>a>0)$.

17. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie polinomială de grad n. Un număr $a\in\mathbb{R}$ se numeşte *rădăcina multiplă de ordin k* (unde $k\in\mathbb{R}$, $k\leq n$) dacă $(X-a)^k$ divide f, dar $(X-a)^{k+1}$ nu divide f (adică există g astfel încât $f = (X-a)^k g$ şi $g(a)\neq 0$). Să se arate că: a este rădăcină multiplă de ordin k pentru polinomul f dacă şi numai dacă

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ şi } f^{(k)}(a)\neq 0.$$

18. Să se arate cu ajutorul derivatelor că următoarele funcţii polinomiale au rădăcinile multiple indicate în dreptul fiecăreia.

a) $f(x) = x^3-3x+2$; $x_1 = x_2 = 1$; b) $f(x) = 4x^3-3x-1$; $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$;

c) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$; $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = nx^{n+2} - (n+2)x^n + 2$; $x_1 = x_2 = 1$.

19. a) Să se arate că ecuaţia $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0$ nu poate avea rădăcini multiple.

b) Să se arate că ecuaţia $f(x) = nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x = 0$ nu poate avea rădăcini multiple diferite de 1.

20. Să se arate că următoarele funcţii verifică (pe toată axa reală) identităţile scrise în dreptul fiecăreia:

a) $f(x) = e^{2x}$; $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$;

b) $f(x) = e^{3x}$; $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$;

c) $f(x) = e^{2x}$; $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$;

d) $f(x) = xe^{2x}$; $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$;

e) $f(x) = e^{2x}\cos 3x$; $f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) = 0$.

21. Să se arate că următorele funcţii verifică (pe domeniile de definiţie respective) relaţiile scrise în dreptul fiecăreia:

a) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$;

b) $f(x) = x^2 + x(1 - \ln x)$, $x^2 f'''(x) - 1 = 0$;

c) $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{\alpha}$, $\left(x^2-1\right)f''(x) + xf'(x) - \alpha^2 f(x) = 0$;

d) $f(x) = \left(\alpha x + \sqrt{1+\alpha^2x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\left(1+\alpha^2x^2\right)f''(x) + \alpha^2 x f'(x) - f(x) = 0$ $(\alpha \neq 0)$;

e) $f(x) = \frac{\sin(\alpha \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^2-1)f''(x) + 3xf'(x) - (\alpha^2-1)f(x) = 0$.

Capitolul VI. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

1. Să se determine punctele de extrem ale următoarelor funcţii:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$; b) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$; c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; d) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$;

e) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$; f) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(r > 0)$; g) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}x$;

h) $f(x) = e^x - (x+1)$; i) $f(x) = xe^x$; j) $f(x) = x^2e^x$; k) $f(x) = x^x$; l) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

2. Să se regăsească, pe baza teoremei lui *Fermat*, regula cunoscută a punctului de extrem pentru funcţia de gradul al doilea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

3. Să se determine punctele de extrem ale funcţiilor:

a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Poate fi aplicată teorema lui *Fermat* ?

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2|x-1|$. Fără a aplica teorema lui Fermat, să se determine punctele de extrem ale funcţiei f.

5. Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiilor din problema 1.

6. Să se regăsească, pe baza semnului derivatei, regula privitoare la intervalele de monotonie ale funcţiei de gradul al doilea, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

7. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui *Rolle* pentru funcţiile de mai jos. În caz afirmativ, să se determine punctul c:

a) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-a)(x-b)$; b) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

c) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$; d) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+|x|)$;

e) $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{dacă } x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\\ \sin x & \text{dacă } x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$;

f) $f:\left[\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x\in\left[\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]\setminus\{0\}\\ 0 & \text{dacă } x=0;\end{cases}$

g) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=x(x-a)(x-b);\ (0<a<b)$;

h) $f:[2,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{\frac{1}{x}}$; i) $f:[2,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

8. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui *Lagrange* pentru următoarele funcţii; în caz afirmativ să se determine punctul c.

a) $f:[0,10]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$; b) $f:[0,10]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$; c) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$;

d) $f:[-4,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1 & \text{pentru } x\in[-4,0]\\ \sqrt{x+1} & \text{pentru } x\in(0,3].\end{cases}$

9. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui *Cauchy* pentru funcţiile de mai jos; în caz afirmativ, să se determine punctul c.

a) $f,g:[1,5]\to\mathbb{R};\ f(x)=x^2,\ g(x)=x^3$;

b) $f,g:\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R};\ f(x)=\sin x,\ g(x)=\cos x$.

10. Să se separe, cu ajutorul şirului lui *Rolle* rădăcinile ecuaţiilor:

a) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+10=0$;

b) $f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x+20=0$; c) $f(x)=x^5-5x^3-50x+10=0$;.

11. Să se discute, cu ajutorul şirului lui *Rolle*, următoarele ecuaţii, în raport cu parametrul variabil m:

a) $x^3-3x+m=0$; b) $x^3-x+m=0$; c) $e^x-x-m=0$.

12. Ce se poate spune despre punctul c din teorema lui *Lagrange* aplicată funcţiei $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=mx+n\ (m\neq 0)$?

13. Să se determine punctul c din teorema lui *Lagrange* pentru funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+nx+p\ (m\neq 0)$. Să se deducă apoi un mod de construcţie a tangentei la o parabolă într-un punct dat.

14. Să se determine punctul c_n din teorema lui *Lagrange* aplicată funcţiei $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ şi să se detemine $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

15. a) Să se dea un exemplu de funcţie: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pentru care punctul c din teorema lui *Lagrange* nu este unic.

b) Să se precizeze o condiţie suficientă pentru ca punctul c din teorema lui *Lagrange* să fie unic.

16. Aplicând teorema lui *Lagrange* unor funcţii convenabil alese, definite pe intervalul $[a,b]$ şi utilizând monotonia derivatei, să se stabilească inegalităţile:

a) $\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}(0<a<b)$ (inegalitatea lui *Neper*).

b) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \text{tg}b - \text{tg}a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$ $\left(0 \le a < b < \dfrac{\pi}{2}\right)$;

c) $\dfrac{b-a}{\sin^2 a} < \text{ctg}a - \text{ctg}b < \dfrac{b-a}{\sin^2 b}$ $\left(0 < a < b \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

d) $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) < \dfrac{1}{n\ln n}$; $1 < n \in \mathbb{R}$.

17. Să se demonstreze identităţile:

a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1,1]$; b) $\text{arctg}x + \text{arcctg}x = \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

18. Să se arate că următoarele funcţii sunt constante. Să se precizeze constantele respective.

a) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} + \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $\forall x \in (-1,1)$;

b) $f(x) = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin\sqrt{\dfrac{1-2x^2}{1-x^2}}$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

c) $f(x) = \arcsin(\text{tg}x) - \text{arctg}\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$, $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

19. Să se stabilească prin derivare identităţile:

a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$; b) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$.

20. Să se arate prin derivare că următoarele funcţii diferă printr-o constantă pe anumite intervale. Se vor preciza intervalele şi constantele respective.

a) $f(x) = -\text{arctg}\dfrac{1}{x}$; $g(x) = \text{arctg}x$;

b) $f(x) = \text{arctg}\dfrac{x+2}{1-2x}$; $g(x) = \text{arctg}x$;

c) $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$; $g(x) = 2\arcsin x$;

d) $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$; $g(x) = 3\arcsin x$.

21. Utilizând consecinţa a 3-a a teoremei lui *Lagrange*, să se demonstreze inegalităţile:

a) $e^x \ge x+1$ $(x > -1)$; b) $e^t \ge et$ $(t > 0)$; c) $e^s \ge s^e$ $(s > 0)$;

d) $u^u \ge \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ $(u > 0)$;[1] e) $v^{\frac{1}{v}} \le e^{\frac{1}{e}}$ $(v > 0)$.

22. Fie $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$. Să se demonstreze utilizând funcţia $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, inegalităţile:

$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, dacă $\alpha \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$; $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, dacă $\alpha \in (0,1)$.

23. Să se arate că, pentru orice $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ are loc inegalitatea $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}$.

24. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ $(-1 < x \ne 0)$; b) $\text{arctg}x < x$ $(x > 0)$;

c) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2(1+x)}$ $(x > 0)$.

25. a) Se consideră funcţia $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - (1+x)$. Să se arate că $f(0) = f'(0) = 0$, iar $f''(x) > 0$, pentru orice $x > 0$ şi să se deducă apoi inegalitatea $e^x > 1 + x$, pentru orice $x > 0$.

---

[1] Consecinţă: inegalitatea lui Euler $e^\pi > \pi^e$.

b) Luând $g(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$, $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, să se arate că $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n)}(0) = 0$ iar $g^{(n+1)}(x) > 0$, pentru orice $x > 0$. Să se deducă inegalitatea: $e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, pentru orice $x > 0$.

26. Utilizând inegalitatea $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, pentru $x > 0$, să se determine semnul derivatelor funcţiilor e, $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$, $e(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Să se deducă apoi inegalitatea

$$e(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = f(x), \quad (x > 0).$$

27. (Aplicaţie a inegalităţii din problema precedentă: separarea rădăcinilor ecuaţiei $x^y = y^x$, $0 < x < y$.)

a) Se consideră ecuaţia $x^y = y^x$ (cu $0 < x < y$). Să se arate că există $t > 1$ astfel încât: $x = t^{\frac{1}{t-1}}$; $y = t^{\frac{t}{t-1}}$. Notând apoi $t = 1 + \frac{1}{s}$ (cu $s > 0$), să se obţină parametrizarea:

$$x = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = e(s); \quad y = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{s+1} = f(s).$$

cu funcţiile e şi f din problema precedentă.

b) Să se deducă apoi că orice soluţii (x, y) cu $(0 < x < y)$ ale ecuaţiei $x^y = y^x$ sunt *separate* de numărul e: $x < e < y$. În baza acestei inegalităţi, să se obţină că singura soluţie în numere naturale este $x = 2$, $y = 4$.

28. Să se demonstreze inegalitatea: $\frac{2}{2x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ $(x > 0)$.

29. Să se arate că punctul c din teorema lui *Lagrange* aplicată funcţiei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 < a < b)$ satisface inegalitatea:

$$\sqrt{ab} < c < \frac{a+b}{2}.$$

30. Aceeaşi problemă pentru funcţia $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ $(0 < a < b)$.

31. Utilizînd consecinţa 4 a teoremei lui *Lagrange*, să se studieze derivabilitatea următoarelor funcţii în punctele indicate.

a) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; $x_0 = -1$; $x_1 = 1$;

b) $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$; $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

c) $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x_0 = 0$;

32. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$ $(n, m \in \mathbb{R})$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x - e^{\text{arctg} x}}{x(1-\cos x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \ln\cos x}{x^2}$; e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)^2}{(1-\cos x)^3}$.

33. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{(e^x-1)\ln(1+x)}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\left(1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}\right)}{x^3}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\cos x-\sin x+1}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^4}$.

34. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$; c) $\lim\limits_{x\to0} x\mathrm{ctg}x$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}x$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)\ln\dfrac{1}{x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to1}(x^x-1)\mathrm{ctg}(x-1)$.

35. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sin x\cdot\ln\mathrm{tg}x$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(x-1)$; c) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\ln x}\cdot(\ln(\ln x))$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}(1-\sin x)e^{\mathrm{tg}x}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right)$.

36. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-x)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$; c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2x\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi x-2x\mathrm{arctg}x)$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}(\mathrm{tg}x-\mathrm{tg}\,3x)$;

g) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(\ln\cos\dfrac{\pi x}{2}+\ln(x-1)\right)$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x-\ln x)$.

37. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\mathrm{ctg}x+\ln x)$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\x<\frac{\pi}{2}}}\left(\mathrm{tg}\,x-\dfrac{1}{2x-\pi}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi x}{2}-x\mathrm{arctg}\,x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x\mathrm{th}\,x)$.

38. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x\to0}(\ln(e-x))^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$; e) $\lim\limits_{x\to1}(\ln ex)^{\frac{1}{x-1}}$; f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

39. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^x$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\sin x)^{\sin x}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\mathrm{tg}\,)^{\sin x}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\ln x)^{x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}(\ln(1+x))^x$; f) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\sqrt{1+x}-1)^x$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

40. Să se determine limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\text{ctg}x)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{\ln x}$

41. Să se determine intervalele de convexitate şi concavitate, iar atunci când este cazul, punctele de inflexiune ale următorelor funcţii:

a) $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a > 0)$; b) $f(x) = ax^2+bx+c$ $(a < 0)$; c) $f(x) = x^3-3x+2$;
d) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; e) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; f) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$; g) $f(x) = e^x - (x+1)$;
h) $f(x) = x - 2\text{arctg}x$; i) $f(x) = xe^x$; j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; k) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$;
l) $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; m) $f(x) = x^x$; n) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^e}$; o) $f(x) = e^{-x^2}$.

42. Să se determine asimptotele (verticale, orizontale şi oblice) pentru graficele următoarelor funcţii:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$; c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;
d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-13x^2+36}$; e) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x+6}$; f) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$;
g) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; h) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-1}$; i) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;
j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; k) $f(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$; l) $f(x) = e^x - (x+1)$;
m) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; n) $f(x) = xe^x$; o) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; p) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

43. Să se arate că, dacă o funcţie $f\colon (A,\infty) \to \mathbb{R}$ este de forma $f(x) = ax+b+\varepsilon(x)$, unde $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$, atunci dreapta de ecuaţie $y = ax+b$ este asimptotă oblică a graficului funcţiei f, pentru $x\to\infty$. (Enunţ analog pentru $x\to-\infty$.)

44. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = x^3-3x+2$; b) $f(x) = x^3-3x-2$;
c) $f(x) = 4x^3-3x+1$; d) $f(x) = 4x^3-3x-1$;
e) $f(x) = x^4-13x^2+36$; f) $f(x) = x^2(x-1)$.

45. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; c) $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

46. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$; b) $f(x) = x|x|$; c) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$; d) $f(x) = |x^3-x|$.

47. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = \sqrt{2px}$; $(p > 0)$;
c) $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ $(r > 0)$; d) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$ $(a > 0)$;

48. Să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a > 0)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt[3]{3}}$; d) $f(x) = x+\sqrt{x^2+1}$.

49. Să se studieze şi să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

a) $f(x) = xe^x$; b) $f(x) = x^2e^x$; c) $f(x) = x^3e^x$; d) $f(x) = xe^{-x}$;

e) $f(x) = e^x - (x+1)$; f) $f(x) = e^x - ex$; g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^e}$; h) $f(x) = xe^x - e^x + 1$;
i) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$; j) $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$; k) $f(x) = x\ln x$; l) $f(x) = x - \ln(1+x)$;
m) $f(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$; n) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

50. Să se studieze şi să se reprezinte grafic următorele funcţii:
a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$; c) $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-3}}$;
d) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; e) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x^2-1|}}$; f) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x^2-a^2|}}$; $(a > 0)$.

51. Să se studieze şi să se reprezinte grafic următoarele funcţii:
a) $f(x) = x^x$; b) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;
c) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$; d) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

52. Să se studieze şi să se reprezinte grafic următoarele funcţii:
a) $f(x) = \sin x + \cos x$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ $(= \sec x)$;
c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ $(= \mathrm{cosec}\, x)$; d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$;
e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; f) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$;
g) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \sin x}$; h) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$.

53. Să se reprezinte grafic funcţiile:
a) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg}\, x$; b) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$;
c) $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; d) $f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$;
e) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{8x\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$; f) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x} - \arccos \dfrac{1}{x}$;
g) $f(x) = \dfrac{1}{\pi^2}((\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2)$.

54. Să se studieze şi să se reprezinte grafic următoarele funcţii, efectuând şi o discuţie în raport cu parametrul real m:
a) $f(x) = x^3 - 3x + m$; b) $f(x) = \dfrac{x+m}{x}$;

55. a) Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + mx + m}$. Să se determine parametrul real m astfel încât graficul funcţiei să admită o singură asimptotă verticală; să se reprezinte grafic funcţia astfel obţinută.

b) Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + m}{x - 1}$. Să se determine parametrul real m astfel încât graficul funcţiei sa fie tangent la axa Ox; să se reprezinte grafic funcţia astfel obţinută.

56. Se consideră funcţia $f(x) = \dfrac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 1}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

a) Să se arate că există două puncte ale graficului funcţiei f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox şi că produsul absciselor acestor puncte este egal cu -1.

b) Să se determine a şi b astfel încât $f(1) = 2$ şi $f'(2) = 0$.

c) Să se reprezinte grafic funcţia astfel determinată.

CLASA A XII-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. LEGI DE COMPOZIŢIE. PROPRIETĂŢI

1. Se defineşte pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe legea „$*$" prin:

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + \mathrm{i}(z_1 + z_1) - 1 - \mathrm{i}.$$

Se cere: a) elementul neutru;

b) elementele nesimetrizabile;

c) să se rezolve ecuaţia $z * (1 - \mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i}$.

2. Fie $M = (-2, 2)$ şi legea „$*$" definită pe M, $x * y = \dfrac{x+y}{1 + \frac{1}{4}xy}$, $\forall x, y \in M$.

a) Să se arate că legea „$*$" este peste tot definită.

b) Să se arate că legea „$*$" este asociativă şi comutativă.

c) Să se determine elementul neutru e.

d) Să se determine mulţimea elementelor simetrizabile.

3. a) Fie G o mulţime nevidă şi „$*$" o lege de compoziţie pe G. În ce condiţii o submulţime H a lui G este stabilă în raport cu legea „$*$"?

b) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea „$*$" prin $x * y = xy - 2x - 2y + m$. Să se determine valorile parametrului real m pentru care $H = [2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

c) Arătaţi că există element neutru în H şi determinaţi elementele simetrizabile ale lui H în raport cu legea „$*$".

4. Fie $a > 0$, $a \neq 1$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea „$*$" dată de $x * y = \log_a(a^x + a^y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că legea nu admite element neutru şi să se rezolve ecuaţia:

$$\log_a |x + a| * \log_a |x + 2a| = \log_a |x - 3a|.$$

5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(xy) \mapsto x * y$, $x * y = x + y + xy$. Verificaţi că legea „$*$" este comutativă, asociativă şi admite element neutru.

6. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$x * y = xy + ax + by, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se determine a şi b astfel ca legea să fie asociativă şi comutativă.

7. Pe $\mathbb{R}_+^*$ se defineşte operaţia

$$x * y = \log_a x + \log_a y,$$

unde a este un parametru real supraunitar. Să se determine valorile lui a pentru care mulţimea $[a, \infty)$ este parte stabilă în raport cu operaţia „$*$".

8. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \to x * y, \ x * y = xy - x - y + 2.$$

Cercetaţi existenţa elementului neutru.

9. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbb{Z}$ definim legea de compoziţie „$*$" astfel:

$$x * y = axy + b(x + y) + c, \ \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Să se găsească relaţia pe care o satisfac parametrii a, b, c astfel încât legea să fie asociativă.

b) Dacă $b^2 - b - ac = 0$, determinaţi condiţia ca legea să admită element neutru.

10. Fie $M(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Să se arate că operaţia algebrică $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$ este o lege de compoziţie pe M. Determinaţi elementul neutru.

11. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie „$*$" astfel:

$$x * y = x + y - xy \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că această lege de compoziţie este asociativă, comutativă şi are element neutru. Să se determine elementele simetrizabile.

12. Pe mulţimea $M = (0, +\infty)$ se consideră legea de compoziţie internă „$*$" definită prin:

$$x * y = e^{a \ln x - b \ln y}, \ \forall x, y > 0, \ a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

Stabiliţi în ce condiţii legea considerată este asociativă şi comutativă.

13. Fie $M = (-1, 1)$ şi legea $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, $x * y = \dfrac{x - y}{1 - xy}$.

a) Arătaţi că legea „$*$" este o lege de compoziţie internă.

b) Studiaţi asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru pentru legea „$*$".

c) Demonstraţi că: $1 - xy - xz + yz \neq 0$ şi $\left|\dfrac{x - y - z + xyz}{1 - xy - xz + yz}\right| < 1, \forall x, y, z \in M$.

14. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$"

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \to x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy + 2ax + by.$$

Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziţie „$*$" să fie comutativă şi asociativă.

15. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$" prin: $x * y = xy - 4x - 4y + k$.

a) Să se determine $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $G = [4, +\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

b) Pentru $k = 20$ să se arate că legea indusă pe G este asociativă, comutativă şi admite element neutru.

c) Să se determine mulţimea elementelor simetrizabile ale lui G.

16. Fie k un număr natural şi $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}; a^2 - kb^2 = 1\}$. Să se determine toate numerele naturale k astfle încât H să fie parte stabilă faţă de înmulţire.

17. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy + 3ax + by.$$

Determinaţi a şi b astfel încât legea de compoziţie „$*$" să fie comutativă şi asociativă.

18. În mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ se defineşte legea:

$$*: \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ (z_1,z_2)\to z_1 * z_2 \stackrel{\text{def}}{=} z_1+z_2-z_1z_2.$$

Studiaţi asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru. Determinaţi $z=(1-\mathrm{i})*(1+\mathrm{i})$.

19. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $M=\left\{\begin{pmatrix}1 & \lambda & a\lambda^2+2\lambda\\ 0 & 1 & 4\lambda\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$. Să se determine a astfel încât M să fie parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricilor.

20. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad (x,y)\to x*y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(1+x+y-xy).$$

Să se arate că legea este asociativă şi are element neutru. Care sunt elementele simetrizabile?

21. Pe mulţimea $M=[2,+\infty)$ definim legea de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+\lambda$. Determinaţi parametrul λ astfel încât M să fie parte stabilă faţă de legea „$*$".

22. Fie legea de compoziţie

$$*: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\ (x,y)\to x*y \stackrel{\text{def}}{=} x+y-2xy.$$

Determinaţi mulţimea elementelor simetrizabile.

23. Pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie internă $x*y=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y)$. Determinaţi mulţimea soluţiilor ecuaţiei $(x*x)*x=0$.

24. Se defineşte pe $\mathbb{C}$ legea de compoziţie „$*$" prin relaţia $z_1*z_2=(1-\mathrm{i})z_1z_2$, $\forall z_1z_2\in\mathbb{C}$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. Să se găsească elementul neutru e.

25. Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale se dau legile de compoziţie:

$$x\perp y=\frac{1}{4}xy-2x-2y+24 \text{ şi } x\top y=x+y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{Q}.$$

Să se determine $e_\perp$ şi $e_\top$ elementele neutre în raport cu legile „$\perp$" şi respectiv „$\top$" şi să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$1)\ \begin{cases}\dfrac{1}{x-1}\perp\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{2}{3}e_\perp\\ \dfrac{1}{x-1}\top\dfrac{1}{y+1}=e_\top\end{cases};\quad 2)\ \begin{cases}\dfrac{1}{x-1}\perp\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{29}{12}e_\perp\\ \dfrac{1}{x-1}\top\dfrac{1}{y+1}=e_\top\end{cases}.$$

26. Fie $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$. Se defineşte pe $\mathbb{Z}$ legea de compoziţie

$$x*y=axy+b(x+y)+c,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}.$$

Să se determine relaţia dintre a, b şi c astfel încât legea de compoziţie definită să fie asociativă.

27. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea „$*$": $x*y=2xy-2x-2y+3$.

a) Să se arate că legea „$*$" este asociativă.

b) Să se calculeze $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x \text{ de } n \text{ ori}}$.

28. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie internă „$*$" definită astfel:

$$x*y=axy+b(x+y)+c,\ a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Ştiind că elementul neutru este $e=-4$ să se determine a, b, c.

29. Pe mulţimea $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ se consideră legea „$*$" definită prin:

$$x*y=2xy-2x-2y+c,\ \forall x,y\in\mathbb{R}_1,\ c\in\mathbb{R}.$$

Pentru ce valori ale lui c legea „$*$" este asociativă?

30. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie definită prin

$$x * y = 2xy + 2(x + y) + c, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinaţi $c \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$“ să fie asociativă.

b) Pentru c astfel determinat arătaţi că $(\mathbb{R}, *)$ admite element neutru.

c) Demonstraţi că mulţimea $(-1, +\infty)$ este parte stabilă în raport cu legea „$*$“.

31. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie internă $x * y = xy + x + my$. Să se determine m real astfel încât legea să fie asociativă.

32. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = a(x + y) - xy$.

a) Să se determine valorile parametrului real a, astfel încât legea de compoziţie internă pe $\mathbb{R}$ să fie asociativă.

b) Pentru legea de compoziţie $x*y = x+y-xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$, să se determine elementul neutru şi elementele simterizabile.

33. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie „$*$“:

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \ (x, y) \mapsto x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy - 4x - 4y + 20.$$

a) Să se arate că legea „$*$“ este asociativă, comutativă şi are element neutru.

b) Să se determine elementele simetrizabile din $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$“.

34. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$“ astfel:

$$x * y = xy - 3(x + y) + 12, \ \ \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine elementul neutru, elementele care nu sunt simetrizabile şi să se rezolve ecuaţia: $x * x * x * x = 19$.

35. Pe mulţimea $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ se defineşte legea de compoziţie:

$$x * y = \frac{4xy + 3}{4(x + y + 1)}.$$

Determinaţi elementul neutru şi elementele simetrizabile.

36. Fie $G = (2, +\infty)$ şi „$*$“ legea de compoziţie definită pe $\mathbb{R}$ astfel:

$$x * y = xy - 2(x + y) + 6.$$

Determinaţi elementul neutru, arătaţi că legea „$*$“ este asociativă şi calculaţi

$$\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } n \text{ ori}}.$$

37. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie „$*$“ şi „$\circ$“ astfel:

$$x * y = 3x + 3y + 5xy + 2; \ \ x \circ y = 2x + 2y + 2xy + 1.$$

Rezolvaţi sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} &(x + y) * 4 = 60 \\ &(x - y) \circ *3 = 39 \end{aligned}$$

38. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie „$*$“:

$$x * y = (1-a)x + ay - a, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Determinaţi a astfel încât legea să fie comutativă.

39. Fie H mulţimea numerelor reale de forma $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ ce satisfac condiţia $a^2 - 2b^2 = 1$. Arătaţi că H este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu înmulţirea şi că toate numerele din H sunt simetrizabile în raport cu operaţia indusă.

40. Fie $M = (1, +\infty)$. Să se arate că $x * y = 7xy - 7x - 7y + 8$ defineşte o lege de compoziţie internă pe M.

41. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$“ astfel: $x * y = xy + 2ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$. Determinaţi toate valorile lui a şi b astfel încât legea să fie comutativă şi asociativă.

42. Fie $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ şi „$*$“ o lege de compoziţie pe M, asociativă şi cu element neutru. Fie $x, y, z \in M$ elemente necomutative şi simetrizabile în raport cu „$*$“. Atunci elementul $(x * y) * z$ este simetrizabil în raport cu legea dată. Să se determine simetricul său.

43. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie:

$$a * b = a + ab + b, \quad a \circ b = a - ab + b,$$

a) Să se arate că aceste legi de compoziţie sunt comutative şi asociative.

b) Să se arate că aceste legi admit acelaşi element neutru e.

c) Să se rezolve inecuaţia:

$$\left(x * \frac{1}{x}\right)\left(x \circ \frac{1}{x}\right) > (e * 1) \circ (e \circ 1), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

44. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = (1-a)x + ay - a$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „$*$“ să fie comutativă.

45. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarea lege de compoziţie pe $\mathbb{R}$ să fie comutativă şi asociativă:

$$x * y = 2xy + ax + by.$$

46. Pe mulţimea numerelor reale se definesc operaţiile: $*, \circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date prin

$$x * y = x + y + 2xy + 3, \quad x \circ y = 2(x+y) + 3xy + 1, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} (xy) * 2 = 35 \\ (x+y) \circ 2 = 45 \end{cases}$$

47. Pe intervalul $(1, +\infty)$ se consideră operaţia: $x * y = 1 + (x-1)^{\lg(y-1)}$. Să se arate că:

a) legea „$*$“ este o lege de compoziţie pe $(1, +\infty)$;

b) legea „$*$“ este asociativă;

c) legea „$*$“ este comutativă.

48. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie „$*$“, $x * y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$. Să se determine elementele simetrizabile.

49. Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ se consideră funcţia

$$f_t : E \to E,\ f_t(x,y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t\right).$$

Pe mulţimea $\mathcal{F} = \{f_t / t \in R\}$, se consideră operaţia de compunere a funcţiilor „$\circ$“. drept lege de compoziţie. Determinaţi simetricul elementului f_t în raport cu legea „$\circ$“ şi rezolvaţi ecuaţia: $f_t \circ f_1 = f_3$.

50. Pe mulţimea numerelor reale definim: $x * y = axy + bx + by + c$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine numerele reale a, b, c, ştiind că elementul neutru este $e = -4$ şi orice element $x \neq -5$ este inversabil.

51. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se definesc legile de compoziţie „$*$“ şi „$\circ$“astfel: $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + 1$, $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + \mathrm{i}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ unde $\mathrm{i}^2 = -1$. Dacă e_1 şi e_2 sunt elementele neutre calculaţi: $e_1^n + e_2^{2n}$ şi determinaţi mulţimea

$$A = \{x^2 + y^2 \mid z = x + y\mathrm{i},\ x, y \in \mathbb{R},\ z^2 e_1 - 2e_2 \overline{z}^2 = 1\}.$$

52. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$“ astfel:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z},\ x * y = 2xy - 3x - 3y + 6.$$

Determinaţi:

a) Mulţimea elementelor simetrizabile în raport cu „$*$“.

b) Mulţimea $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x * y = 3,\ (2x) * (y - 1) = 4\}$.

53. Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea de compoziţie $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Determinaţi numărul $n = \underbrace{4 * 4 * \ldots * 4}_{\text{4 de 2001 ori}}$.

Capitolul II. MONOIZI. GRUPURI

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie prin

$$x * y = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ este o parte stabilă faţă de legea „$*$“, iar $\mathbb{R}_1$ cu operaţia indusă este grup comutativ.

2. Fie mulţimea:

$$M_2 = \left\{ M(x,y) \mid M(x,y) = \begin{pmatrix} x + y & 4y \\ -y & x - y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că $(M_2, +)$ este grup abelian.

3. Se defineşte pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale legea de compoziţie

$$x * y = xy - ax + by.$$

Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $(\mathbb{R}, *)$ să devină monoid. Pentru fiecare din monoizii astfel obţinuţi să se determine elementele inversabile.

4. a) Să se arate că pe intervalul $(-1,1)$ legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, determină o structură de grup comutativ.

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive şi grupul de la punctul a) există un izomorfism $f : (0,\infty) \to (-1,1)$ de forma $f(x) = \dfrac{mx-1}{x+1}$, unde $m \in \mathbb{R}$, trebuie determinat corespunzător.

5. Fie $\mathcal{M} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tA \cdot A = E\}$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A, iar $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că:

a) Pentru orice $A \in \mathcal{M}$, $\det A = \pm 1$.

b) Operaţia de înmulţire a matricelor determină pe $\mathcal{M}$ o structură de grup.

6. Fie G mulţimea matricelor din $M_3(\mathbb{R})$ de forma $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ şi având proprietatea: $\det M_{ab} = 1$. Să se arate că G este grup în raport cu înmulţirea matricilor.

7. Fie matricea $X \in M_4(\mathbb{N})$, $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se arate că matricile $X, X^2, X^3, \ldots$ formează grup multiplicativ abelian. Câte elemente are acest grup?

8. Pe mulţimea $G = (0,\infty)\backslash\{1\}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$. Demonstraţi că $(G, *)$ este grup abelian.

9. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y - 1$.

a) Arătaţi că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup comutativ.

b) Să se calculeze $(x * 1) + (y * 2)$; $x, y \in \mathbb{Z}$.

10. Fie $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ şi $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$.

a) Determinaţi valorile lui r pentru care A_r este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulţirea numerelor complexe şi în acest caz arătaţi că A_r este grup în raport cu înmulţirea.

b) Fie M o submulţime a lui $\mathbb{C}$, stabilă la adunarea numerelor complexe care include pe A_1. Demonstraţi că $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset M$.

11. Fie H mulţimea matricelor de forma:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -a & 1 & -\frac{1}{2}a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1) Să se arate că $(H, \cdot)$ este grup abelian.

b) Să se arate $(H, \cdot)$ este izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$.

12. Se consideră:

$$H = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}; x^2 - 2y^2 = 1\};$$
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}; a^2 - 2b^2 = 1 \right\}.$$

Să se arate că $(H, \cdot)$ şi $(M, \cdot)$ sunt grupuri comutative izomorfe.

13. a) Să se arate că mulţimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

cu legea de înmulţire a matricelor este un grup $(G, \cdot)$.

b) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$ al numerelor întregi cu operaţia de adunare.

14. Fie $G = (-1, 1)$ şi legea de compoziţie $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ şi funcţia $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ şi $(\mathbb{R}, +)$.

15. Fie $G = (5, +\infty)$ şi legea de compoziţie; $x * y = xy - 5x - 5y + 30$. Arătaţi că $(G, *)$ este grup abelian.

16. Fie mulţimea $M = [-1, +\infty)$ şi fie $* : M \times M \to M$ operaţia dată de:

$$x * y = x + y + xy.$$

Formează cuplul $(M, *)$ o structură algebrică de grup?

17. Se defineşte pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale legea de compoziţie:

$$x * y = xy - ax + by.$$

Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $(\mathbb{R}, *)$ să devină un monoid. Pentru fiecare din monoizii astfel obţinuţi să se determine elementele simetrizabile.

18. Fie $G = (-1, +\infty)$ şi legea de compoziţie pe G: $x * y = x + y + xy$. Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

19. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziţie „$*$",

$$x * y = x + y - xy, \; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că mulţimea $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie „$*$", iar $\mathbb{R}_1$ împreună cu operaţia indusă este un grup comutativ.

20. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie „$*$"

$$x * y = x + y - 2, \;\; \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ formează un grup comutativ.

21. Fie $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule, ε o rădăcină complexă a polinomului $X^2 + X + 1$ şi $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$. Arătaţi că:

a) H este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

b) Orice subgrup cu trei elemente al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ coincide cu H.

22. Pe mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$"

$$x * y = x + y - \frac{1}{2} xy, \; \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

Să se arate că $\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă faţă de legea de compoziţie „$*$", iar $(\mathbb{Q}_2, *)$ este grup comutativ.

23. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$.

1) Dovediţi că M este grup abelian faţă de operaţia de înmulţire a matricelor.

2) Dovediţi că grupul abelian $(M, \cdot)$ este izomorf cu grupul multiplicativ al mulţimii numerelor reale $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

24. Fie $\mathbb{Z}$ mulţimea numerelor întregi şi

$$\mathcal{F}(\mathbb{Z}) = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Notăm prin „$\circ$" operaţia de compunere a funcţiilor. Se cere:
1) arătaţi că $(\mathcal{F}(\mathbb{Z}), \circ))$ este monoid necomutativ;
2) determinaţi toate elementele neinversabile din monoid;
3) dacă $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ determinaţi elementul $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

25. Arătaţi că:
a) $G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricelor şi $(G, \cdot)$ este grup comutativ.
b) $H = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.
c) Grupurile $(H, \cdot)$ şi $(G, \cdot)$ sunt izomorfe.

26. Să se arate că legea $x * y = xy - 2(x + y) + 6$ determină pe mulţimea $(2, +\infty)$ o structură de grup comutativ şi să se rezolve în acest grup ecuaţia $x * x = 3$.

27. Să se arate că mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ este grup împreună cu înmulţirea matricelor. Câte elemente are acest grup?

28. Se consideră $G = (0, 1)$ şi legea de compoziţie $x * y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$, $\forall x, y \in G$. Să se arate că:
1) $(G, *)$ este grup comutativ.
2) Funcţia $f : (0, 1) \to (0, \infty)$ dată de $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$, este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

29. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$" dată de $x * y = x + y + 2$ pentru $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ.

30. Să se arate că mulţimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R};\ a, b \neq 0 \right\}.$$

are structură de grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

31. Să se arate că $M_2\mathbb{Z} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, x, y, z, t \in \mathbb{Z} \right\}$ este un grup în raport cu adunarea matricelor. Fie $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 4c & 5d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că H este un subgrup al grupului $(M_2(\mathbb{Z}), +)$.

32. Fie G un grup multiplicaticču unitatea e. Pentru un element a din G definim aplicaţia $f_a : G \to G$ prin $f_a(x) = axa^{-1}$.
1) Să se arate că f_a este izomorfism de grupuri pentru orice $a \in G_a$.
2) Fie $\mathcal{F} = \{f_a : a \in G\}$. Atunci F este grup împreună cu operaţia de compunere a aplicaţiilor.

33. Fie $(G,*)$ un grup comutativ şi $a \in G$. Se dă legea „$\perp$" definită astfel:
$$\perp : G \times G \to G— (x,y) \to x \perp y,\ x \perp y = x * y * a.$$
Să se demonstreze că $(G,\perp)$ este grup.

34. Fie $G = (0,\infty)\backslash\{1\}$. Arătaţi că legea $(x,y) \to x * y = x^{\ln y}$ este o lege de compoziţie pe G şi că $(G,*)$ este grup abelian.

35. Fie $G = (2,+\infty)$ şi legea de compoziţie $x * y = xy - 2(x+y) + 6$.

1) Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian.

2) Rezolvaţi ecuaţia $4 * x = 8$.

36. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea „$*$" dată prin $x * y = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1} + y^{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

1) Arătaţi că $(\mathbb{R},*)$ este un grup comutativ izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$.

2) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * y * (-2) = 1 \\ x^3 - y^3 = -7 \end{cases}$.

37. Pe mulţimea $G(-2,2) \subset \mathbb{R}$ se defineşte legea „$*$" prin $x * y = \dfrac{4(x+y)}{4+xy}$. Să se arate că:

1) $(G,*)$ este un grup comutativ.

2) Aplicaţia $f : \mathbb{R} \to G$ definită prin $f(x) = \dfrac{2(e^{4x}-1)}{e^{4x}+1}$ stabileşte un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,*)$.

3) Verificaţi că $f^{-1} : G \to G$ stabileşte un izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R},+)$.

38. Fie $G = (-k,k) \subset \mathbb{R}$, $k > 0$ şi legea de compoziţie $* : G \times G \to G$, $(x,y) \to x*y$, $x * y \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{k^2(x+y)}{k^2+xy}$. Arătaţi că:

1) $(G,*)$ este un grup comutativ.

2) $f : G \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \dfrac{1}{2k}\ln\dfrac{k+x}{k-x}$ este un izomorfism între grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{R},+)$ şi verificaţi că $f^{-1} : \mathbb{R} \to G$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(G,*)$.

39. Fie $G = (3,+\infty)$ şi legea „$*$" pe G: $x * y = xy - 3x - 3y + 12$, $\forall x,y \in G$.

1) Arătaţi că $(G,*)$ este grup comutativ.

2) Determinaţi $a,b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ să fie un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ la grupul $(G,*)$.

3) Arătaţi că $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } n \text{ ori}} = (x-3)^n + 3$, $\forall x \in G$.

40. Pe mulţimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziţie internă definită prin: $x * y = ax + by + c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi $ab \neq 0$. Determinaţi valorile lui a, b, c pentru care $(\mathbb{R},*)$ este grup cu elementul neutru 1991.

41. 1) Dacă $a,b \in \mathbb{Z}$, atunci numărul 3 divide numărul $a^2 + b^2$ dacă şi numai dacă 3 divide a şi 3 divide b.

2) Să se arate că mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z}_3,\ a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0 \right\}$ este un grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

3) Câte elemente are grupul G?

42. Fie $(G,\cdot)$ un grup. Să se arate că mulţimea $H = \{a \in G \mid a \cdot x = x \cdot a,\ \forall x \in G\}$ este un subgrup al lui G.

43. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & at^2 + 2t \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1) Să se determine a astfel încât G să fie parte stabilă a lui $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor.

2) Pentru $a = 2$ să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

3) Să se arate că grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(G, \cdot)$ sunt izomorfe.

44. Fie $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$. Să se arate că faţă de operaţia de înmulţire a matricelor M formează un grup abelian.

45. În mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Arătaţi că $(\mathbb{C} \setminus \{1\}, *)$ este grup abelian.

46. Fie M mulţimea matricelor de forma

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Să se arate că M este grup comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

47. Fie $(G, *)$ un grup şi $a, b \in G$ astfel încât $a*b \neq b*a$. Demonstraţi că următoarele cinci elemente sunt distincte a, b, $a * b$, $b * a$, e (unde e este elementul neutru al grupului). Deduceţi că orice grup cu cel mult patru elemente este comutativ.

48. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie reală cu proprietatea că există cel puţin un număr $T \in \mathbb{R}^*$, astfel încât

$$f(x + T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

a) Arătaţi că mulţimea H a numerelor reale T cu proprietatea (1) este subgrup al grupului $(R, +)$.

b) Determinaţi acest subgrup când:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

49. Fie H un subgrup cu n elemente al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ şi

$$U_n = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$$

grupul rădăcinilor de ordin n ale unităţii, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se arate că $H = U_n$.

b) Să se arate că $(1 - \varepsilon_1) \ldots (1 - \varepsilon_{n-1}) = n$.

50. Fie legea $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(xy) \to x * y \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{x^n + y^n}$, $n \in \mathbb{N}$, n - număr impar. Să se arate:

a) $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian.

b) Corespondenţa $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, *)$ dată prin $f(x) = \sqrt[n]{x}$, este izomorfism de grupuri.

51. Determinaţi automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

52. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Demonstraţi că $(M, \cdot)$ este grup abelian.

53. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(xy) \to x*y$, $x*y \stackrel{\text{def}}{=} x+y-5$. Arătaţi că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian. Rezolvaţi ecuaţiile: a) $x * 2 = 7$; b) $1 * x + 2 = 5$.

54. Fie $(G, *)$ un grup şi a un element fixat din G. Pe G definim legea $\nabla : G \times G \to G$,

$$(x, y) \to x \nabla y \stackrel{\text{def}}{=} x * a * y.$$

Arătaţi că (G, ∇) este grup.

55. Pe mulţimea $G = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ definim legea $* : G \times G \to G$,

$$(x, y) \to x * y \stackrel{\text{def}}{=} 2xy - 2x - 2y + 3.$$

Arătaţi că $(G, *)$ este grup abelian.

56. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $(\mathbb{R} \backslash \{2\}, *)$ să fie grup abelian în raport cu legea $x * y = xy - 2x - 2y + \lambda$, $\forall x, y \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$.

57. Pe mulţimea $G_a = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x * y = xy - a(x + y) + a^2 + a.$$

a) Să se arate că $(G_a, *)$ este grup abelian.

b) Să se demonstreze izomorfismele $(G_a, *) \simeq (\mathbb{R}, +)$ şi $(G_a, *) \simeq (G_b, *)$.

58. În mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie „$*$" definită prin $x*y = ax + by - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziţie să determine pe $\mathbb{R}$ o structură de grup abelian.

59. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziţie internă definită prin $x * y = ax + by + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$. Determinaţi valorile lui a, b, c pentru care $(\mathbb{R}, *)$ este grup comutativ cu elementul neutru $e = 1997$.

60. Fie G mulţimea matricelor de forma

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - a^2} \end{pmatrix}; \quad \text{cu } a \in (-1, 1).$$

Demonstraţi că:

a) În raport cu operaţia de înmulţire G are o structură de grup abelian.

b) Dacă $a \in (-1, 1)$ atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic element $a_n \in (-1, 1)$ cu proprietatea $M(a_n) = M^n(a)$.

c) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \dfrac{a}{|a|}$, $\forall a \in (-1, 1) \backslash \{0\}$.

61. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că M este monoid comutativ în raport cu înmulţirea matricelor.

b) Să se determine elementele inversabile ale monoidului M.

62. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$" prin

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + \mathrm{i}(z_1 + z_2) - 1 - \mathrm{i}.$$

a) Determinaţi $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z * (1 - \mathrm{i}) = 3 + \mathrm{i}$;

b) Arătaţi că $(\mathbb{C}, *)$ este monoid.

c) Este $(\mathbb{C}, *)$ grup? Justificaţi.

63. Fie $G = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & 2b \\ \frac{7}{2}b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 7b^2 = 1 \right\}$. Să se demonstreze că înmulţirea matricelor este o lege de compoziţie pe G şi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

64. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte operaţia $x * y = x + y + 2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x * (2y) = 9 \\ y * 4 = 9 \end{cases}$.

Să se arate că:

b) $(\mathbb{R}, *)$ este grup;

c) funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

65. Fie mulţimea $G = (1, +\infty)$. Pe G se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - x - y + 2$, oricare ar fi $x, y \in G$. Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

66. a) Fie $\mathbb{Z}_{12}$ mulţimea claselor de resturi modulo 12 şi $G \subset \mathbb{Z}_{12}$, $G = \{\widehat{1}, \widehat{5}, \widehat{7}, \widehat{11}\}$. Să se arate că $(G, \otimes)$ unde „$\otimes$" este înmulţirea claselor de resturi, formează o structură de grup comutativ.

b) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_{12}$ sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \widehat{5}x + \widehat{7}y = \widehat{0} \\ \widehat{7}x + \widehat{4}y = \widehat{0} \end{cases}$.

67. Fie $G = (1, +\infty)$.

a) Să se arate că $\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} \in G$, $\forall x, y \in G$.

b) Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian, unde $x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, $x, y \in G$.

c) Să se determine parametrii reali a şi b astfel încât $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = \sqrt{ax + b}$ să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ şi $(G, *)$.

68. Fie mulţimea matricelor de forma:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 3b^2 = 1 \right\} \text{ şi } G = \left\{ x + y\sqrt{3} \middle| x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - 3y^2 = 1 \right\}.$$

Demonstraţi că $(M, \cdot)$ şi $(G, \cdot)$ sunt grupuri şi că funcţia $f : G \to M$,

$$f(x + y\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$$

este izomorfism de grupuri.

69. În mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie „$*$" definită prin $x * y = ax + by - 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ şi în care a şi b sunt parametrii reali.

a) Să se determine a şi b astfel încât legea de compoziţie „$*$" să definească pe $\mathbb{R}$ o structură de grup abelian, notat $(\mathbb{R}, *)$.

b) Pentru $a = b = 1$ să se determine condiţiile pe care trebuie să le verifice parametrii reali m şi n astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ să fie un izomorfism al grupului $(\mathbb{R}, *)$ cu grupul aditiv al numerelor reale.

70. Fie $G = (2, +\infty)$ care are o structură de grup faţă de operaţia „$*$" definită prin $x * y = xy - 2(x + y) + 6$, $\forall x, y \in G$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ să realizeze un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

71. Pe mulţimea P a punctelor parabolei de ecuaţie $y^2 = 2px$ se defineşte legea de compoziţie $* : (M_1, M_2) \in P \times P \to M_1 * M_2 \in P$, unde $M_1 * M_2$ este punctul în care paralela prin originea reperului cartezian la dreapta M_1M_2 intersectează parabola.

a) Să se determine coordonatele punctului $M_1 * M_2$.

b) Să se arate că $(P, *)$ este grup comutativ izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$.

72. Pe mulţimea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$"

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{dacă} \quad a > 0 \\ \dfrac{a}{b} & \text{dacă} \quad a < 0 \end{cases}.$$

Arătaţi că $(\mathbb{R}^*, *)$ este grup.

73. Pe $\mathbb{Z}$ se defineşte legea de compoziţie $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y + 2$. Arătaţi că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

74. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde a şi b sunt parametri reali. Determinaţi valorile lui a şi b astfel încât legea „$*$" să definească pe $\mathbb{R}$ o structură de grup.

75. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se defineşte legea de compoziţie „$*$" astfel $x * y = x + y + a$.

1) Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ formează grup abelian.

2) Să se arate că grupul obţinut este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.

76. Pe $\mathbb{C}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$" prin $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1 z_2$. Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât $(\mathbb{C}\setminus\{a\}, *)$ să fie grup abelian.

77. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$": $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

1) Rezolvaţi ecuaţia $x * 2 = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Arătaţi că $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

3) Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, *)$.

78. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2(x + y - 1) - xy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Notând $G = \mathbb{R}\setminus\{2\}$, să se arate că $(G, *)$ este un grup comutativ.

79. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x * y = x + y - axy$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Determinaţi a astfel încât $(\mathbb{Z}, *)$ să fie grup abelian.

80. Să se arate că $\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$ este grup abelian faţă de legea de compoziţie

$$x * y = xy + 3x + 3y + 6.$$

81. Pe mulţimea punctelor elipsei $E : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ definim legea

$$* : (M_1, M_2) \in E \times E \to M_1 * M_2 \in E,$$

unde $M_1 * M_2$ este punctul în care paralela dusă prin punctul $A(a, 0)$ la dreapta $M_1 M_2$ intersectează elipsa. Să se demonstreze că $(E, *)$ este grup comutativ.

82. Fie $H_1 = \left\{ A \in M_2(\mathbb{Z}) \middle| A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\}$ unde $M_2(\mathbb{Z})$ este mulţime matricelor pătrate de ordinul doi, cu elemente întregi. Să se arate că H_1 este subgrup al grupului $(M_2(\mathbb{Z}), +)$.

83. Fie $G = (1, 2)$. Pe G se defineşte legea de compoziţie

$$G \times G \to G,\ (x, y) \to x * y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}.$$

Arătaţi că $(G, *)$ este grup. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = \dfrac{x + m}{x + 1}$ să fie izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

84. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \widehat{2}x + \widehat{3}y = \widehat{1} \\ x + y = \widehat{2} \end{cases}$ în mulţimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_4 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$.

85. Fie $(\mathbb{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $fx) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$. Demonstraţi că f este un morfism de grupuri.

86. Pe mulţimea numerelor reale se definesc operaţiile $x * y = x + y - 2$ şi $x \circ y = x + y - 5$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = ax + 1$. Să se determine constanta reală a astfel încât aplicaţia f să fie un izomorfism între grupurile $(\mathbb{R}, *)$ şi $(\mathbb{R}, \circ)$

87. Fie $m \in \mathbb{R}$. Se consideră legea de compoziţie „$*$“ pe $\mathbb{R}$ definită prin $x*y = mx+y$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine m astfel încât „$*$“ să fie asociativă.

b) Să se determine m astfel încât „$*$“ să admită element neutru.

c) Să se determine m astfel încât $(\mathbb{R}, *)$ să fie grup abelian.

88. Fie M o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$, mulţimea submulţimilor sale. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(M)$ notăm $C_X = \{y \in M \mid y \notin X\}$. Pe $\mathcal{P}(M)$ se defineşte operaţia $X + Y = (X \cap C_Y) \cup (C_X \cap Y)$. Să se arate că:

a) $X + X = \emptyset$ pentru orice $X \in \mathcal{P}(M)$.

b) $(\mathcal{P}(M), +)$ este un grup comutativ.

89. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$“ prin $x * y = xy - ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine mulţimea $A = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbb{R}, *) \text{ este monoid}\}$.

90. Fie $a \in \mathbb{Z}$. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie dată de $x * y = x + y - axy$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, *)$ să fie grup.

91. Fie $G = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\}$. Între elementele lui G se defineşte legea: $(a_1, a_2, a_3, a_4) * (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1, b_1, a_2 b_1 + b_2 a_3 b_1 + b_3 a_4 b_1 + b_2)$. Arătaţi că $(G, *)$ este grup necomutativ.

92. Fie mulţimea matricelor $M = \left\{ \begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -9y & x - 4y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \right\}$. Arătaţi că în raport cu înmulţirea matricelor, $(M, \cdot)$ este grup.

93. Fie mulţimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - 5y^2 = 1 \right\}$.

Să se arate că $(G, \cdot)$ formează grup.

94. Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale definim legea de compoziţie „$*$“ prin $x * y = x + y - \frac{1}{2}xy$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

1) Să se arate că mulţimea $A = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă faţă de legea „$*$“.

2) $(A, *)$ este grup comutativ.

95. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$“ prin $x * y = ax + by + c$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine'

$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathbb{R}, *) \text{ este grupul cu elementul neutru} 3\}$.

Să se rezolve ecuaţia $\underbrace{x * x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } 15 \text{ ori}} = -102$, pentru $(a, b, c) \in A$.

96. Pe mulţimea $E = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie „$\circ$" astfel: $x \circ y = a(x^2 + y^2) + 2xy + 2(m^2 - 3)x + 2y + m - 1$, $\forall x, y \in E$, unde $a, m \in \mathbb{R}$. Să se determine a şi m astfel încât $(E, \circ)$ să fie grup. Dacă notăm x' simetricul lui x în grupul $(E, \circ)$ calculaţi $\sum\limits_{x \in A} x'$, unde $A = \{-3, 2\}$.

97. Fie $G = (2, +\infty)$ şi $x * y = xy - 2(x + y) + 6$. Determinaţi $f : \mathbb{R}_+^* \to G$, $f(x) = ax + b$ astfel încât să fie un izomorfism de la $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la $(G, *)$.

98. Fie M mulţimea matricelor de forma $M(x) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

i) Să se arate că M formează grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

ii) Arătaţi că acest grup este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

99. Pe mulţimea $G = (-1, +\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy + x + y$, $\forall x, y \in G$.

1. Arătaţi că $(G, *)$ este grup comutativ.

2. Determinaţi grupul $(M, \circ)$ astfel încât funcţia $f : G \to M$ dată de relaţia $f(x) = x + 1$, $\forall x \in G$ să fie un izomorfism al celor două grupuri.

100. Se dă matricea: $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

i) Să se calculeze A^2, A^3, A^{302}.

ii) Să se arate că mulţimea $G = \{I_2, A, A^2\}$ formează grup comutativ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

101. Pe mulţimea $G = (1, \infty)\setminus\{2\}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$" astfel: $x * y = (x - 1)^{\ln(y-1)} + 1$. Fie θ elementul neutru şi x' simetricul lui $x = e + 1$ în grupul $(G, *)$. Determinaţi $\alpha = x' + \theta$ şi β care este produsul rădăcinilor ecuaţiei $x * x * x * x = e + 1$.

102. Fie mulţimea de funcţii $M = \{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid a \in (0, \infty)$ cu

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \le 0 \\ ax, & \text{dacă} \quad x > 0 \end{cases} \}.$$

Se notează cu „$\circ$" operaţia de compunere a funcţiilor reale. De monstraţi că $(M, \circ)$ este grup.

103. Fie G mulţimea matricilor de forma $M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2(1-a) & 2a-1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$).

a) Să se arate că G este un grup comutativ în raport cu înmulţirea matricilor şi că acest grup este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

b) Să se exprime $M(a)$ sub forma $M(a) = A + aB$, unde A şi B sunt matrice care nu depind de parametrul a.

104. Fie $G = (4, +\infty)$ care are o structură de grup faţă de operaţia „$*$" definită prin $x * y = xy - 4(x + y) + 20$, $\forall x, y \in G$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R}^* \to G$, $f(x) = ax + b$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ să realizeze un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

105. Fie ecuaţia în x, $x^3 - (a+1)^2x^2 + (a^3 + a^2 + 2a - 1)x - (a^3 - 1) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Să se afle valoarea parametrului a pentru care mulţimea $M(a)$ a soluţiilor ecuaţiei corespunzătoare este grup în raport cu înmulţirea numerelor reale.

Capitolul III. INELE. CORPURI

1. Determinaţi elementele inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{12}$ şi inversul fiecăruia.

2. Se consideră mulţimile:
$K = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| A \in M_2(\mathbb{Q}) \right\}$ şi $L = \left\{ c + d\sqrt{5} \middle| c, d \in \mathbb{Q} \right\}$.

a) Să se arate că L este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea.

b) Să se arate că mulţimile L şi K formează corpuri în raport cu operaţiile induse.

c) Să se stabilească un izomorfism de corpuri de la L la K.

3. În corpul claselor de resturi modulo 11, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \widehat{2}x + \widehat{10}y + z = \widehat{4}; \\ x + \widehat{3}z = \widehat{2} \\ \widehat{10}x + \widehat{2}y + \widehat{2}z = \widehat{1}. \end{cases}$$

4. Fie A un inel astfel încât $x^6 = x$, pentru orice $x \in A$. Să se arate $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$.

5. Să se rezolve în inelul claselor de resturi modulo 6 sistemul:

$$\begin{aligned} \widehat{5}x + \widehat{2}y &= \widehat{3} \\ \widehat{4}x + \widehat{3}y &= \widehat{1} \end{aligned}.$$

6. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întrgi se definesc legile de compoziţie

$$x * y = x + y + 3,\ x \circ y = xy + 3x + 3y + 6.$$

a) Arătaţi că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero.

b) Determinaţi elementele inversabile ale acestui inel.

c) Este $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ un corp?

7. Fie $A = \{0, 1, m, n\}$ astfel încât $(A, +, \cdot)$ este inel cu patru elemente şi aplicaţia $f : A \to A$, $f(x) = 1 + x$. Să se arate că:

1. Aplicaţia f este injectivă.
2. $\sum\limits_{x \in A} f(x) = 1 + m + n$ şi $1 + 1 + 1 + 1 = 0$.
3. Dacă $(A, +, \cdot)$ este corp, atunci $1 + 1 = 0$.
4. Inelul claselor de resturi modulo 4, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ nu este corp.

8. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziţie:

$$\begin{aligned} x \perp y &= ax + by - 2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ x \top y &= xy - 2x - 2y + c, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determinaţi a, b, c astfel încât $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ să fie corp.

9. Fie $\mathbb{Z}_{12}$ inelul claselor de resturi modulo 12 şi G mulţimea elementelor inversabile ale acestui inel.

a) Determinaţi elementele lui G şi arătaţi că G este o parte stabilă în raport cu înmulţirea în $\mathbb{Z}_{12}$.

b) Alcătuind tabla operaţiei pentru $(G,\cdot)$ arătaţi că acesta este un grup izomorf cu grupul lui Klein.

10. 1) Să se arate că mulţimea A a matricelor de forma: $\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$; $a,b\in\mathbb{Z}$ este parte stabilă a mulţimii matricelor pătratice de ordinul doi cu elemente întrgi în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire a matricelor.

2) Să se arate că A este inel comutativ faţă de adunare şi înmulţirea matricelor.

11. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix};\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$. Să se arate că M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi formează un corp izomorf cu corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

12. Fie $\mathbb{Z}_9$ inelul claselor de resturi modulo 9.

1) Să se scrie tabla înmulţirii pentru inelul $\mathbb{Z}_9$ şi din aceasta să se deducă elementele inversabile ale inelului.

2) Să se rezolve în $\mathbb{Z}_9$ ecuaţia $\widehat{7}x+\widehat{3}=\widehat{2}$.

13. Să se rezolve sistemul de ecuaţii liniare în inelul $\mathbb{Z}_{12}$:

$$\begin{cases} \widehat{3}x+\widehat{2}y=\widehat{4} \\ \widehat{2}x+\widehat{3}y=\widehat{1} \end{cases}.$$

14. Să se rezolve în $\mathcal{R}_8$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \widehat{2}\otimes x\oplus\widehat{5}\otimes y=\widehat{1} \\ \widehat{3}\otimes x\oplus\widehat{4}\otimes y=\widehat{7} \end{cases}.$$

15. Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \widehat{2}x+\widehat{5}y=\widehat{2} \\ \widehat{3}x+\widehat{2}y=\widehat{5} \end{cases}.$$

16. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie „$*$" definită astfel $x*y=ax+by+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

1) Determinaţi a, b, c astfel ca $(\mathbb{R},*)$ să fie grup.

2) Notând cu „$\cdot$" înmulţirea uzuală pe $\mathbb{R}$ să se determine parametrul c astfel încât $(\mathbb{R},*,\cdot)$ să fie inel.

17. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Pe $\mathbb{R}$ definim legile de compoziţie „$\perp$" şi „$\top$" prin:

$$\begin{aligned} &x\perp y=ax+by-2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R} \\ &x\top y=xy-2x-2y+c,\quad \forall x,y\in\mathbb{R} \end{aligned}.$$

Determinaţi valorile a, b, c astfel încât $(\mathbb{R},\perp,\top)$ să fie corp.

18. Fie $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$. Să se arate că:

1) $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea şi înmulţirea.

2) $(\mathbb{Z}[\mathrm{i}],+,\cdot)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero.

3) Să se determine mulţimea G a elementelor inversabile în $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ şi să se arate că G este parte stabilă în raport cu înmulţirea, iar $(G,\cdot)$ este grup.

19. Pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definesc legile de compoziţie:

$$x * y = x + y - 2,$$
$$x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$$

a) Demonstraţi că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel comutativ.

b) Determinaţi valorile lui a şi b astfel încât funcţia $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism între inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ şi inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$.

20. a) Fie $\mathbb{Q}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Arătaţi că $(\mathbb{Q}[\sqrt{10}], +, \cdot)$ este corp comutativ.

b) Fie $M = \left\{\begin{pmatrix} a+2b & 3b \\ 2b & a-2b \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Arătaţi că $(M, +, \cdot)$ este corp comutativ.

c) Demonstraţi că cele două corpuri sunt izomorfe.

21. Fie K mulţimea tuturor matricelor $A \in M_2(\mathbb{R})$ de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că mulţimea K este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor şi că operaţiile induse conferă lui K o structură de corp.

b) Dacă tripletul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ reprezintă corpul numerelor complexe, stabiliţi izomorfismul:

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \simeq (K, +, \cdot).$$

22. Fie $M = \left\{A(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ z & z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{C}\right\}$.

a) Arătaţi că $(M, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

b) Să se arate că aplicaţia $f : \mathbb{C} \to M$, $f(z) = \frac{1}{2}A(z)$ este un izomorfism de corpuri.

c) Să se determine $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $f^n(z + \mathrm{i}) = f^n(z - \mathrm{i})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

23. Fie $K = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Să se arate că mulţimea K este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea şi că formează un corp în raport cu operaţiile induse.

24. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi definim legile de compoziţie „$\perp$“ şi „$\top$“ prin:

$$x \perp y = x + y + 2,\quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$
$$x \top y = xy + 3x + 3y + 6,\quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Arătaţi că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este inel comutativ fără divizori ai lui zero. Determinaţi elementele inversabile ale acestui inel.

25. Fie $A = \{0, 1, a, b\}$ un inel cu 4 elemente. Arătaţi că:

a) Funcţia $f : A \to A$, $f(x) = 1 + x$, $\forall x \in A$ este bijectivă.

b) Dacă A este corp, atunci $1 + 1 = 0$.

26. Fie mulţimea $A = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ înzestrată cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a matricelor. Arătaţi că $(A, +, \cdot)$ este inel.

27. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}_6$ ecuaţia $\widehat{4}x + \widehat{5} = \widehat{3}$.

28. Se consideră sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + y + \widehat{2}z = a \\ \widehat{3}x + \widehat{5}y + z = a + \widehat{3} \\ \widehat{4}x + \widehat{6}y + \widehat{3}z = a^2 \end{cases}$$

cu coeficienţii în $\mathbb{Z}_7$. Determinaţi valorile lui $a \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât sistemul să fie compatibil.

29. Pe $\mathbb{Z}$ definim legile de compoziţie:

$$x \circ y = x + y - 4 \text{ şi}$$
$$x * y = xy - 4x - 4y + 20, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Se cere:

a) Arătaţi că $(\mathbb{Z}, \circ, *)$ este inel.

b) Determinaţi elementele inversabile din $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$" şi mulţimea divizorilor lui zero din inelul $(\mathbb{Z}, \circ, *)$.

30. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x + \widehat{2}y + z = \widehat{6} \\ \widehat{2}x + \widehat{3}y + z = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + y + az = b \end{cases}$$

cu coeficienţii în $\mathbb{Z}_7$.

Determinaţi mulţimea parametrilor a şi $b \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât rangul matricei coeficienţilor să fie 2 şi sistemul să fie compatibil.

31. Pe $\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 2$, $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$. Să se găsească un izomorfism de la corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la corpul $(\mathbb{R}, *, \circ)$.

32. Să se rezolve în $\mathcal{R}_6$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \widehat{2} \otimes x \oplus \widehat{3} \otimes y = \widehat{1} \\ \widehat{3} \otimes x \oplus \widehat{5} \otimes y = \widehat{1} \end{cases}$$

33. Notăm $A_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinaţi condiţia suficientă ca inelele $(A_{n_1}, +, \cdot)$, $(A_{n_2}, +, \cdot)$ să fie izomorfe.

34. Rezolvaţi în $\mathcal{R}_{12}$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \widehat{5} \otimes x \oplus \widehat{2} = \widehat{4} \\ \widehat{3} \otimes y \oplus \widehat{4} = \widehat{4} \end{cases}$$

35. Stabiliţi câţi divizori ai lui zero conţine inelul $(\mathbb{Z}_{35}, +, \cdot)$ şi câte elemente sunt inversabile în acest inel.

36. a) Să se arate că pe mulţime $\mathbb{Z}$ legile de compoziţie:

$$x * y = x + y - 2,\ x \circ y = -2x - 2y + 6, \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

determină o structură de inel comutativ.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie izomorfism de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$.

37. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu element unitate, $1 \neq 0$ cu proprietatea $x^2 = 1$, $\forall x \in A\backslash\{0\}$. Să se arate că $(A,+,\cdot)$ este corp izomorf cu $\mathbb{Z}_2$ sau $\mathbb{Z}_3$.

38. Să se rezolve în inelul $\mathbb{Z}_{12}$ ecuaţia $\widehat{3}x+\widehat{1}=\widehat{4}$.

39. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se definesc legile de compoziţie:

$$x \top y = x+y+2,$$
$$x*y=\frac{1}{4}xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+3,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $(\mathbb{R},\top,*)$ este corp.

b) Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Să se determine a şi b astfel încât să fie izomorfism între corpul numerelor reale şi corpul $(\mathbb{R},\top,*)$.

40. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel comutativ cu elementul unitate notat 1. Pe A definim o nouă lege de compoziţie: $x*y=x+y-xy$, pentru orice $x,y\in A$.

1) Arătaţi că legea „$*$" este asociativă şi are element neutru.

2) Demonstraţi că $x\in A$ este simetrizabil în raport cu legea „$*$" dacă şi numai dacă $1-x$ este inversabil în A.

3) Alcătuiţi tabla legii „$*$" în cazul când $A=\mathbb{Z}_4$ şi determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea „$*$" în acest caz.

41. Determinaţi mulţimea elementelor simetrizabile din inelul $\mathbb{Z}_8$.

42. Fie $K=(0,+\infty)$. Pe K se definesc legile de compoziţie:

$$x\perp y = xy,\quad \forall x,y\in K$$
$$x\top y = x^{\ln y},\quad \forall x,y\in K.$$

Arătaţi că tripletul $(K,\perp,\top)$ este corp comutativ şi corpul numerelor reale $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este izomorf cu corpul $(K,\perp,\top)$.

43. Pe $K=(0,+\infty)$ se definesc legile de compoziţie:

$$K\times K\to K,\quad (x,y)\to x*y\overset{\text{def}}{=}xy$$
$$K\times K\to K,\quad (x,y)\to x\circ y\overset{\text{def}}{=}x^{\ln\sqrt[3]{y}}.$$

Arătaţi că tripletul $(K,*,\circ)$ este corp comutativ. Determinaţi m şi n reali astfel încât între corpul numerelor reale $(\mathbb{R},+,\cdot)$ şi cel de mai sus $(K,*,\circ)$ să existe un izomorfism $f:\mathbb{R}\to K$ de forma $f(x)=e^{mx}+n$.

44. Să se rezolve sistemul de ecuaţii în $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x+y+z=\widehat{1}\\ \widehat{2}x+\widehat{3}y+z=\widehat{1}\\ \widehat{4}x+\widehat{4}y+\widehat{3}z=\widehat{1}.\end{cases}$$

45. Se consideră inelul $(\mathbb{Z},\perp,\top)$, unde:

$$x\perp y=x+y+2,$$
$$x\top y=xy+2x+2y+2,\quad \forall x,y\in\mathbb{Z}.$$

Să se determine mulţimea elementelor simetrizabile ale inelului şi D mulţimea divizorilor lui zero.

46. Se consideră sistemul de ecuaţii cu coeficienţii în $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{cases} ax+\widehat{3}y+\widehat{3}z=\widehat{2} \\ \widehat{6}x+\widehat{4}y+\widehat{2}z=\widehat{6} \\ \widehat{3}x+\widehat{2}y+\widehat{4}z=\widehat{3}. \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât sistemul să fie compatibil şi să se rezolve pentru $a=\widehat{2}$.

47. Să se rezolve în $\mathbb{Z}_7$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \widehat{2}x+y+\widehat{2}z=\widehat{0} \\ x+\widehat{2}y+\widehat{3}z=\widehat{0} \\ \widehat{3}x+y+z=\widehat{1}. \end{cases}$$

48. Pe mulţimea $A=\mathbb{Q}\times\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie „$\circ$" şi „$*$" astfel:

$$(a,x)\circ(b,y)=(a+b,x+y) \text{ şi}$$
$$(a,x)*(b,y)=(ab,ay+bx+xy),\ \forall\,(a,x),(b,y)\in A.$$

Determinaţi mulţimea elementelor simetrizabile ale inelului $(A,\circ,*)$ şi calculaţi inversul elementului $\left(\frac{1}{3},5\right)\in A$.

49. Fie $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$. Să se arate că:

1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ este subgrup în $(\mathbb{R},+)$.

2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\setminus\{0\}$ este subgrup în $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

3) Dacă $\mathbb{Q}\subseteq A\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ şi A este stabilă în raport cu „$+$" şi „$\cdot$", iar $(A,+,\cdot)$ este inel, atunci $A=\mathbb{Q}$ sau $A=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

50. Pe mulţimea $A=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se definesc legile de compoziţie „$\circ$" şi „$*$" astfel:

$$(x,y)\circ(z,t)=(x+z,y+t),$$
$$(x,y)*(z,t)=(xz,xt+yz),\ \forall\,(x,y),(z,t)\in A.$$

Determinaţi mulţimea elementelor neinversabile ale inelului $(A,\circ,*)$ şi rezolvaţi ecuaţia.

$$(x,1)*(2,x)*(x,3)=(x,1)*(x,2)*(x,3).$$

51. În inelul $(\mathbb{Z}_8,+,\cdot)$ să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} \widehat{2}x+y+\widehat{4}z&=\widehat{2} \\ \widehat{3}x+\widehat{2}y+z&=\widehat{4} \\ \widehat{6}x+\widehat{4}y+\widehat{5}z&=\widehat{1} \end{aligned}$$

52. Să se discute după valorile parametrilor $a\in\mathbb{Z}_8$, $b\in\mathbb{Z}_8$ şi să se rezolve în $\mathbb{Z}_8$ ecuaţia $ax+b=\widehat{0}$. Fiecare caz identificat va fi ilustrat printr-o ecuaţie $(a=?,b=?)$ şi prin soluţiile respective.

53. Fie a, b, c numere reale. Definim pe $\mathbb{R}$ legile de compoziţie:

$$x\perp y=ax+by-2$$
$$x\top y=xy-2x-2y+c,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

1) Determinaţi a, b şi c astfel încât $(\mathbb{R},\perp,\top)$ să fie corp.

2) Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$ să stabilească un izomorfism de la corpul $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ la corpul $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

54. Fie $a \in \mathbb{Z}$. Pe $\mathbb{Z}$ se consideră legile de compoziţie $\oplus$ şi $\otimes$ definite prin:

$$x \oplus y = x + y - a$$
$$x \otimes y = xy - a(x + y) + a^2 + a.$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ este un domeniu de integritate.

55. Fie $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$. Arătaţi că A este o parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{Z})$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricilor şi că formează inel comutativ şi fără divizori ai lui zero în raport cu operaţiile induse.

56. Fie $(G, +)$ un grup abelian. Arătaţi că legile $f + g$ şi $f \circ g$ definite prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, respectiv $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ determină pe mulţimea morfismelor grupului G o structură de inel.

Capitolul IV. SPAŢII VECTORIALE

Lege de compoziţie externă

Definiţie. Fie Ω şi M două mulţimi nevide. O aplicaţie

$$\Psi : \Omega \times M \to M, \quad (\omega, x) \to \Psi(\omega, x) \in M$$

se numeşte *lege de compoziţie externă* pe M cu *operatori în* Ω.

Pentru compusul $\Psi(\omega, x)$ al elementului $x \in M$ cu operatorul $\omega \in \mathbb{R}$ se foloseşte de regulă notaţia multiplicativă $\Psi(\omega, x) = (\omega x)$. Mulţimea Ω poartă numele de *domeniul operatorilor* legii de compoziţie externe Ψ. O lege de compoziţie internă pe M poate fi privită ca o lege de compoziţie externă cu domeniul operatorilor $\Omega = M$.

Spaţiu vectorial

Definiţie. Fie corpul $(K, +, \cdot)$. Se numeşte *spaţiu vectorial* (peste corpul K) un grup abelian $(V, +)$ pe care este dată o lege de compoziţie externă cu operatori în K,

$$K \times V \to V, \ (\alpha, u) \to \alpha \cdot u,$$

care satisface axiomele:

S$_1$) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,

S$_2$) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,

S$_3$) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$,

S$_4$) $1 \cdot u = u$,

oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$, $u, v \in V$.

Când $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, se spune că V este spaţiu vectorial real, respectiv complex. Spaţiile vectoriale se numesc încă *spaţii liniare*.

Exerciţii

1. *Spaţiul vectorial* $\mathbb{R}^n$. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ şi $\mathbb{R}^n$ mulţimea tuturor elementelor ordonate de n numere reale, $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1, n}$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, definim

$$x = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_i = b_i, \ 1 \le i \le n,$$

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n,$$

$$\alpha x = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Demonstraţi că:

a) legea de compoziţie internă $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \to x + y$ este asociativă şi comutativă;

b) $(\mathbb{R}^n, +)$ este grup abelian;

c) legea de compoziţie externă $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(\alpha, x) \to \alpha x$ determină o structură de spaţiu vectorial.

(Elementele lui $\mathbb{R}^n$ se numesc *vectori* (linie) *$n-$ dimensionali*, iar $\mathbb{R}^n$ se numeşte *spaţiul aritmetic real* de dimensiune n, sau *spaţiu vectorilor linie n dimensionali.*)

2. Definiţi şi studiaţi spaţiul aritmetic $\mathbb{C}^n$, unde $\mathbb{C}$ este corpul numerelor complexe.

3. Definiţi şi studiaţi spaţiul vectorial K^n, unde K este un corp oarecare.

4. Demonstraţi că mulţimea $M(\mathbb{R})$ a matricelor pătratice de ordin 2 cu coeficienţi reali formează spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor cu scalari.

5. Demonstraţi că mulţimea $\mathbb{R}[X]$ a polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi reali formează spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea şi înmulţirea polinoamelor cu scalari.

6. Demonstraţi că mulţimea V a vectorilor de poziţie ai punctelor dintr-un plan cu originea într-un punct O al planului formează spaţiu vectorial peste coprpul $\mathbb{R}$ în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari.

7. *Spaţiul vectorial* 0. Fie K un corp. Pe grupul abelian zero, $0 = \{0\}$ se introduce legea de compoziţie externă $K \times 0 \to 0$, $(\alpha, 0) \to \alpha \cdot 0{=}0$. Demonstraţi că se conferă astfel grupului abelian o structură de spaţiu vectorial peste K numit *spaţiul vectorial zero.*

Bază.

Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial peste copul K. Un sistem $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de vectori $e_i \in V$, $1 \le i \le n$, se numeşte *bază a lui V* dacă:

1) $\forall x \in V\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$, astfel încât $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$;

2) dacă $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

8. Fie V spaţiul vectorilor de poziţie dintr-un plan euclidian şi v_1, v_2 doi vectori de poziţie, diferiţi de zero şi necoliniri. Demonstraţi că sistemul de vectori B format cu v_1 şi v_2), $B = (v_1, v_2)$ are proprietăţile:

1) $\forall x \in V$, $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$;

2) dacă $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

9. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii v_1, v_2, v_3, unde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ şi $v_3 = (0, 0, 1)$. Demonstraţi că sistemul format cu vectorii v_1, v_2, v_3, $B = (v_1, v_2, v_3)$, are proprietăţile:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$;

2) dacă $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Dependenţă şi independenţă liniară

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K.

1) Dacă $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$, atunci un vector de forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$, $\lambda_i \in K$ se numeşte combinaţie liniară (cu coeficienţii în K) de vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ unde scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ se numesc coeficienţii combinaţiei liniare.

2) Se spune că un vector $x \in V$ este *combinaţie liniară* (cu coeficienţii în K) de vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ dacă există $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ astfel încât

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i.$$

Se spune că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ formează un *sistem de generatori* pentru spaţiul vectorial V dacă orice vector $x \in V$ se poate reprezenta ca o combinaţie liniară de $v_1, v_2, \ldots, v_m$: $\forall x \in V$, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ astfel încât $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$.

3) Se spune că sisetmul de vectori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ este *liniar independent* (peste K) dacă $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

În caz contrar se spune că vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sunt *liniar dependenţi* (peste K).

O egalitate de forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$, $\alpha_i \in K$ se numeşte relaţie de *dependenţă liniară* a vectorilor $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Relaţia de dependenţă liniară se numeşte *nebanală* dacă cel puţin unul dintre scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ este diferit de zero.

Deducem că un sistem de vectori B este baza lui V dacă şi numai dacă B este sistem de generatori liniari independenţi.

10. Fie $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ o bază a spaţiului vectorial V peste corpul K. Dacă $x \in V$, atunci există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ astfel încât

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Demonstraţi că scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt unic determinaţi de vectorul x şi baza B (scalarii unic determinaţi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ se numesc *coordonatele* vectorului x în baza B).

11. Coordonate în baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Pentru $n = 3$, fie $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ şi $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (e_1, e_2, e_3)$. Arătaţi că:

a) $B = (e_1, e_2, e_3)$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^3$;

b) sistemul de vectori B este liniar independent (este deci bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$, numită *bază canonică* a lui $\mathbb{R}^3$).

Generalizare. (Pentru spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, K^n, K – corp oarecare.)

12. Fie spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ şi vectorii $v_1 = (a,1,1)$, $v_2 = (1,a,1)$, $v_3 = (1,1,a)$; unde a este parametrul real.

1) Arătaţi că sistemul de vectori v_1, v_2, v_3 este liniar dependent, dacă şi numai dacă $a = 1$ sau $a = -2$.

2) Dacă $a \neq 1$ şi $a \neq -2$, atunci $B = (v_1, v_2, v_3)$ este bază a lui V.

3) Dacă $a = -1$, determinaţi coordonatele vectorului $v = (3,2,5)$ în baza B.

13. Verificaţi proprietăţile S_1, S_2 şi S_4 pentru înmulţirea matricelor cu scalari.

14. Verificaţi proprietăţile S_1, S_2 şi S_4 pentru înmulţirea polinoamelor cu scalari.

15. Fie M o mulţime nevidă şi $\mathcal{F}(M)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f : M \to M$. Pe M definim legea de compoziţie externă cu operatori în $\mathcal{F}(M)$,

$$\mathcal{F}(M) \times M \to M,\ (f,x) \to f * x \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \in \mathbb{M}.$$

Arătaţi că:

1) $f * (g * x) = (f * g) * x$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$, $x \in M$.

2) $1_M * x = x$, $\forall x \in M$.

16. Fie $V = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Arătaţi că V este spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ în rport cu legile de compoziţie $x \perp y \overset{\text{def}}{=} xy$, $\alpha \top x \overset{\text{def}}{=} x^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in V$.

17. Fie V mulţimea tuturor şirurilor f de numere reale, $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, $(a_i \in \mathbb{R})$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f, g \in V$, $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$ atunci punem:

$f + g \overset{\text{def}}{=} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots.$

$\alpha f \overset{\text{def}}{=} (\alpha a_0, \alpha a_1, \ldots, \alpha a_n, \ldots)$.

Arătaţi că V este spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$ în raport cu legile de compoziţie $V \times V \to V$, $(f, g) \to f + g$, $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\alpha, f) \to \alpha f$.

18. Fie $K = \mathbb{Z}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$. Enumeraţi toţi vectorii spaţiului vectorial K^3. Care este numărul vectorilor spaţiului vectorial K^n?

19. Arătaţi că pentru oricare două numere naturale p, n cu p prim există un spaţiu vectorial V cu p^n vectori.

20. Fie $V \neq 0$ un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Arătaţi că E are o infinitate de vectori.

21. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{Z}_p$, p număr prim. Arătaţi că

$$0 = x + x + \ldots + x(p \text{ ori}), \forall x \in V.$$

22. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K. Demonstraţi prin inducţie că

$\alpha(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \alpha v_1 + \alpha v_2 + \ldots + \alpha v_n$ şi

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v + \ldots + \alpha_m v$, oricare ar fi $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$, $v, v_1, \ldots, v_n \in V$.

23. Fie vectorii $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,1)$ din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$.

1) Arătaţi că sistemul de vectori $\mathbb{R} = (v_1, v_2, v_3)$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

2) Reprezentaţi vectorul $v = (2, -3, 5)$ ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\mathbb{R}$.

24. În spaţiul vectorial $V = M_2(\mathbb{R})$ se cosideră matricele:

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Arătaţi că $B = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ este o bază a lui V.

2) Reprezentaţi matricea A ca o combinaţie liniară de vectorii bazei B).

25. Fie $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[X]$, $f_1 = (X - b)(X - c)$, $f_2 = (X - c)(X - a)$, $f_3 = (X - a)(X - b)$.

1) Arătaţi că polinoamele f_1, f_2, f_3 sunt liniar independente peste $\mathbb{R}$, dacă şi numai dacă $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$.

2) Arătaţi că pentru orice polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ cu $\operatorname{grad} f \leq 2$ există $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ unic determinaţi, astfel încât $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$;

3) Determinaţi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ când $f = 1 + 2X - X^2$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

26. Arătaţi că fiecare din sistemele de polinoame din $\mathbb{R}[X]$:

$B = (1, X, X^2, X^3)$;

$B' = (1 + X^2, X + X^2, X^2, X^3 + X^2)$;

$B'' = (1, X - 1, (X - 1)^2/2!, (X - 1)^3/3!)$, sunt liniar independente peste $\mathbb{R}$ şi reprezentaţi polinómul $f = X^3 - X^2 - X + 1$ ca o combinaţie liniară cu coeficienţi din $\mathbb{R}$ de polinoamele din $\mathbb{B}$ (respectiv B', B'').

27. Fie V un spaţiu vectorial peste corpul K şi v_1, v_2, v_3 un sistem de vectori liniari independenţi. Arătaţi că vectorii $v_1 + v_2$, $v_2 + v_3$, $v_3 + v_1$ sunt, de asemenea, liniar independenţi.

28. Fie v_1, v_2, v_3, un sistem de vectori dintr-un spaţiu vectorial V peste corpul K. Arătaţi că aplicaţia:

$f : K^3 \to V$, $f(x) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, $\forall x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}$

este injectivă (surjectivă, bijectivă), dacă şi numai dacă v_1, v_2, v_3 este sistem liniar independent (respectiv sistem de generatori ai lui V, bază a lui V). Generalizare.

29. Fie $(K; +, \cdot)$ un corp comutativ. Se consideră pe K operaţia de adunare, dată de structura de corp şi operaţia $(\alpha, x) \in K \times K \to \alpha x \in K$, dată de operaţia de înmulţire din K, $\forall \alpha \in K$ = corpul „scalarilor", $\forall x \in V \overset{\text{def}}{=} K$. Să se arate că în acest fel s-a definit, pe K, o structură de spaţiu vectorial.

30. Fie $\mathbb{R}^2 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se definesc pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, y_2) \in K$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$,

$x + y \overset{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$; $\alpha x \overset{\text{def}}{=} (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

Să se arate că, astfel, s-a obţinut o structură de spaţiu vectorial pe $\mathbb{R}^2$. Să se interpreteze geometric.

31. Fie $\mathbb{R}^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}}$. Se definesc pentru orice $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$; $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Să se arate că s-a obţinut o structură de spaţiu vectorial pe $\mathbb{R}^n$.

32. Fie $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, şi $y \neq 0$ unde , pe $\mathbb{R}^2$, considerăm structura de spaţiu vectorial pusă în evidenţă la problema 2. Să se arate că următoarele condiţii sunt echivalente:

a) Există $\lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x = \lambda y$.

b) Există $\mu \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $y = \mu x$.

c) Există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha x + \beta y = 0$.

33. Fie I un intertval nedegenerat al axei reale.

a) Să se arate că mulţimea $\mathcal{F}(I) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ a funcţiilor reale definite pe I admite o structură de spaţiu vectorial faţă de operaţia uzuală de adunare a funcţilor (definită pentru orice $f, g \in \mathcal{F}(I)$ prin egalitatea $(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$, $\forall x \in I$) şi operaţia de înmulţire a unei funcţii cu un scalar ($(\alpha f)(x) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(x)$, $\forall x \in I$).

b) Aceeaşi problemă pentru mulţimea de funcţii $\mathcal{P}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ admite primitive}\}$.

c) Aceeaşi problemă pentru mulţimea de funcţii

$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$ şi $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

34. Fie V şi V' două spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ K, iar $f : V \to V'$ o funcţie satisfăcând condiţiile:

$f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in V$;

$f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in V.$

Să se arate că mulţimea $f^{-1}(\{O_{V'}\}) = \{x \in V \mid f(x) = O_{V'}\}$ constituie un spaţiu vectorial W, $W \subset V$.

35. Să se arate că în condiţiile problemei 6, $W = \{O_V\}$ dacă şi numai dacă f este injectivă.

36. Fie vectorii $x = e_1 = (1,0)$, $y = e_2 = (0,1)$ din $\mathbb{R}^2$. Să se arate că:

a) dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$, atunci $\alpha = \beta = 0$;

b) pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^2$, există două numere unice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, astfel încât $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.

37. Să se formuleze şi să se rezolve problema analogă în $\mathbb{R}^3$ pentru vectorii $x = e_1 = (1,0,0)$, $y = e_2 = (0,1,0)$, $z = e_3 = (0,0,1)$.

38. Aceeaşi problemă pentru vectorii din $\mathbb{R}^3$ $x = (1,1,1)$, $y = (1,2,3)$, $z = (1,2,4)$.

39. a) Să se arate că mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ admite o structură de spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raţionale.

b) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$, astfel încât $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2^2} = 0$. Să se arate că rezultă $a = b = c = 0$.

40. Se consideră trei numere reale distincte două câte două α, β, γ şi funcţiile $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ definite de egalităţile $f_(x) = e^{\alpha x}$, $f_2(x) = e^{\beta x}$, $f_3(x) = e^{\gamma x}$. Să se arate că dacă are loc egalitatea $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (unde $a, b, c \in \mathbb{R}$), atunci $a = b = c = 0$.

41. Se consideră spaţiul vectorial $\mathbb{R}^2$, matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi funcţia (aplicaţia) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, care acţionează după regula $f\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\forall x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ (am scris vectorul x drept „vector - coloană).

a) Să se arate că:

$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^2;$

$f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}.$

b) Să se arate că f este injectivă.

42. Să se formulze şi să se rezolve problema asemănătoare pentru aplicaţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot X$, $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

43. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$, iar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, aplicaţia definită de egalitatea $f(x) = A \cdot X$, pentru orice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Să se arate că f este injectivă şi dacă şi numai dacă $\det(A) = 0 \Leftrightarrow f$ este surjectivă.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. PRIMITIVE[1)]

1. Aplicând formula de calcul $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$, să se deducă egalităţile:

a) $\int \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + C$; $x \in J \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$; $x \in (0, \infty)$;

c) $\int \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + C$; $x \in [0, \infty)$;

În toate problemele care urmează, J desemnează un interval nedegenerat al axei reale.

2. Aplicând egalităţile din problema 1, să se calculeze:

a) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$; c) $\int \frac{1}{x^8}\mathrm{d}x$; d) $\int \sqrt[3]{x}\mathrm{d}x$; e) $\int \sqrt[4]{x}\mathrm{d}x$; f) $\int \sqrt[7]{x}\mathrm{d}x$.

3. Scriind că $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ şi observând că $\ln\left(\frac{1}{e}\right)^x = -\cancel{1}x$ să se deducă egalitatea:

$$\int e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x} + C;$$

b) Se notează $\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Să se deducă egalităţile: $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}x + C$; $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}x + C$.

4. Să se calculeze:

a) $\int (x^2 + 6x + 7)\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;[2)] b) $\int \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\right)\mathrm{d}x$, $x \in (0, \infty)$;

c) $\int (1 + x + x^2 + x^3)\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $x \in J \subset (-\infty, \infty)$;

e) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$, $x \in (-1, 1)$;

f) $\int \left(3\sin x + 4\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

g) $\int \frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; h) $\int 2^x 3^x 5^x \mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Să se decidă dacă sunt corecte egalităţile următoare, în caz afirmativ dând şi justificare:

a) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}x + \mathrm{C} = -\mathrm{arctg}x + K$, $x \in \mathbb{R}$);

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + \mathrm{C} = -\arcsin x + K$, $x \in (0, 1)$;

---

1) A se vedea A.Vernescu, *Analiză matematică*, vol.III (vezi Bibliografie selectivă)

2) În enunţul unei probleme de acest fel, cel mai riguros este ca să se precizeze *dinainte* intervalul de existenţă al lui x. Dacă acest lucru nu se face, el revine în sarcina rezolvitorului.

6) Să se determine:

a) $\int \frac{dx}{4+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $\int \frac{dx}{5+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $\int \frac{dx}{1+5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\int \frac{dx}{9+4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; $\int \frac{dx}{7+3x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$, $x \in (-2,2)$; $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$, $x \in (-\sqrt{7},\sqrt{7})$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}$, $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$, $x \in \left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}$, $x \in \left(\sqrt{\frac{7}{5}},\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$;

7) Să se determine (J este un interval):

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$, $x \in J \subset (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$;

$\int \frac{dx}{x^2-5}$, $x \in J \subset (-\infty,-\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5},\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5},\infty)$;

a′) $\int \frac{dx}{4-x^2}$, $x \in (-2,2)$ $\int \frac{dx}{5-x^2}$, $x \in (-\sqrt{5},\sqrt{5})$

b) $\int \frac{dx}{4x^2-1}$, $x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right)$;

$\int \frac{dx}{5x^2-1}$, $x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty\right)$;

b′) $\int \frac{dx}{1-4x^2}$, $x \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; $\int \frac{dx}{1-5x^2}$, $x \in J \subset \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

c) $\int \frac{dx}{4x^2-9}$, $x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2},\infty\right)$;

$\int \frac{dx}{5x^2-7}$, $x \in J \subset \left(-\infty,-\sqrt{\frac{7}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{5}},\infty\right)$;

c′) $\int \frac{dx}{9-4x^2}$, $x \left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$; $\int \frac{dx}{7-5x^2}$, $x \in J \subset \left(-\sqrt{\frac{7}{5}},\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$, $x \in J \subset (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$, $x \in J \subset (-\infty,-\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5},\infty)$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$, $x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right)$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$, $x \in J \subset \left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\infty\right)$;

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$, $x \in \mathbb{R}$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$, $x\mathbb{R}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Capitolul II. METODE DE CALCUL AL PRIMITIVELOR

Integrarea prin părţi

1. Să se calculeze următoarele primitive, efectuând alegerea scrisă în dreptul fiecăreia:

a) $I = \int x e^x dx,\ x \in \mathbb{R};\ f(x) = x;\ g'(x) = e^x;$

b) $I = \int x 2^x dx,\ x \in \mathbb{R};\ f(x) = x;\ g'(x) = 2^x;$

c) $I = \int x \ln x dx,\ x > 0;\ f(x) = \ln x;\ g'(x) = x;$

d) $I = \int x^n \ln x dx,\ x > 0;\ f(x) = \ln x;\ g'(x) = x^n;$

e) $I = \int x \cos x dx,\ x \in \mathbb{R};\ f(x) = x;\ g'(x) = \cos x;$

f) $I = \int x \sin x dx,\ x \in \mathbb{R};\ f(x) = x;\ g'(x) = \sin x;$

g) $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx,\ f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2},\ g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

h) $I = \int x \mathrm{ch} x dx,\ x \in \mathbb{R};\ f(x) = x;\ g'(x) = \mathrm{ch} x;$

2. Să se calculeze:

a) $I = \int \ln x dx;$

b) $I = \int \mathrm{arctg} x dx$ (se va ţine seama că $\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$, după cum se verifică imediat prin derivare);

c) $I = \int \arcsin x dx$ (se va ţine seama că $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$);

d) $I = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ (se va ţine seama că $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\sqrt{1+x^2} + C$).

Uneori, metoda de integrare prin părţi trebuie aplicată în mod repetat. Se va avea în vedere ca, pe parcursul procesului de integrare, gradul lui x să scadă treptat până la zero.

3. Să se calculeze:

a) $\int x^2 e^x dx,\ x \in \mathbb{R}$; b) $\int x^3 e^x dx,\ x \in \mathbb{R}$; c) $\int x^2 3^x dx,\ x \in \mathbb{R}$; d) $\int x^3 2^x dx,\ x \in \mathbb{R}$;

e) $\int x^2 \sin x dx,\ x \in \mathbb{R}$; f) $\int x^2 e^x \cos x,\ x \in \mathbb{R}$; g) $\int x(\ln x)^2 dx,\ x \in (x \in (0, \in \infty)$.

Uneori, pentru determinarea unor primitive, este necesar să se asocieze încă una („conjugată") şi să se determine ambele într-un sistem de ecuaţii.

4. Să se calculeze:

a) $I = \int e^x \sin x dx$ şi $J = \int e^x \cos x dx;\ x \in \mathbb{R};$

b) $F = \int e^{ax} \sin bx dx$ şi $G = \int e^{ax} \cos bx dx;\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \in \mathbb{R};$

c) $I = \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$ şi $J = \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$; $x > 0$.

5. Amplificând sub integrală cu radicalul respectiv şi folosind metoda integrării prin părţi, să se obţină următoarele rezultate ($a > 0$):

a) $I = \int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right) + \mathrm{C}$; $x \in \mathbb{R}$;

b) $J = \int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-{}^2}\right|\right) + \mathrm{C}$; $|x| > a$;

c) $K = \int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C}$; $x \in (-a, a)$.

6. Să se calculeze:

a) $I = \int (x^3-3x+2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; b) $I = \int x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $I = \int x\arcsin x\mathrm{d}x$, $x \in (-1,1)$; d) $I = \int x^2\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $I = \int \frac{x\arcsin x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$.

7. Aplicând metoda de integrare prin părţi şi ţinând seama de rezultatele de la exerciţiul 4 a), să se determine:

a) $F = \int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $G = \int x\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $H = \int (x\cos x + \sin x)\ln x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I = \int (\cos x - x\sin x)\ln x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Să se demonstreze formula generalizată de integrare prin părţi:

$$\int f(x)g^{(n)}(x)\mathrm{d}x = f(x)g^{(n-1)}(x) + (-1)^1f'(x)g^{(n-2)}(x) + (-1)^2f''(x)g^{(n-3)}(x) +$$
$$+\ldots+(-1)^kf^{(k)}(x)g^{(n-k-1)}(x)+\ldots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)g(x)+(-1)^n\int f^{(n)}(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

9. Pentru fiecare din integralele nedefinite de mai jos, să se stabilească relaţia de recurenţă scrisă în dreptul său:

a) $I_n = \int x^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = x^n\mathrm{e}^x - nI_{n-1}$;

b) $I_n = \int x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = -x^n\mathrm{e}^x + nI_{n-1}$;

c) $I_n = \int (\ln x)^n\mathrm{d}x$, $x \in (0,\infty)$; $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$;

d) $I_n = \int \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $I_n = \frac{1}{n}\left[x^{n-1}\sqrt{x^2+a^2} - n - 1a^2I_{n-2}\right]$.

e) $I_n = \int \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $x \in (-a,a)$, $a > 0$; $I_n = \frac{1}{n}\left[x^{n-1}\sqrt{a^2-a^2} + n - 1a^2I_{n-2}\right]$.

f) $I_n = \int \sin^n x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = \frac{1}{n}\sin^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$;

g) $I_n = \int \cos^n x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$;

h) $I_n = \int x^n\sin x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$;

i) $I_n = \int x^n\cos x\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = x^n\sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)I_{n-2}$;

j) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $I_n = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$;

k) $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $I_n = \frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$;

l) $I_n = \int \mathrm{tg}^n x dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; $I_n = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$;

m) $I_n = \int e^x \sin^n x dx$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = \frac{1}{n^2+1}e^x \sin^{n-1} x(\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}$;

n) $I_n = \int e^x \cos^n x dx$, $x \in \mathbb{R}$; $I_n = \frac{1}{n^2+1}e^x \cos^{n-1} x(\cos x + n\sin x) + \frac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}$;

o) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $I_n = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_n\right]$;

p) $I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$; $I_n = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_n\right]$;

10. a) Să se arate în baza unei substituţii liniare $t = \varphi(x) = ax$, cu $a \neq 0$ (respectiv $t = \varphi(x) = ax + b$), că, dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F, atunci:

(i) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$; (ii) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

b) Să se determine:

(i) $I = \int e^{5x}dx$; (ii) $I = \int \cos 5x dx$; (iii) $I = \int \sin ax dx$ $(a \neq 0)$;

(iv) $I = \int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; (v) $I = \int \frac{dx}{3x-7}$; (vi) $I = \int \frac{dx}{1-x}$; (vii) $I = \int \frac{dx}{5-2x}$;

(viii) $I = \int \frac{dx}{\cos^2 7x}$; (ix) $I = \int \cos \pi x dx$; (x) $I = \int e^{5x+7}dx$;

c) Utilizând rezultatele de la a) şi acceptând formulele:

(i) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg} x + C$, $x \in \mathbb{R}$; (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $x \in (-1, 1)$;

(iii) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$, $x \in J \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$, $x \in \mathbb{R}$;

(v) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$, $x \in J \subset (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,

să se deducă formulele (cu $a > 0$):

(i′) $\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$, $x \in \mathbb{R}$; (ii′) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $x \in (-a, a)$;

(iii′) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $x \in J \subset (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$;

(iv′) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$; (v′) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$.

11. Să se determine primitivele:

a) $I = \int \frac{\ln x}{x}dx$; $x > 0$; b) $I = \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $x \in (-1, 1)$; c) $I = \int \frac{(\mathrm{arctg} x)^2}{1+x^2}dx$;

d) $I = \int \frac{(\arcsin x)^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $x \in (-1, 1)$; e) $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)\mathrm{arctg} x}$; $x \in (-1, 1)$;

f) $I = \int \frac{\mathrm{tg} x}{\cos^2 x}dx$; $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; g) $I = \int \frac{dx}{x\ln x}$; $x \in (1, \infty)$; h) $I = \int e^{\sin x}\cos x dx$;

i) $I = \int \frac{\ln x}{x} dx;\ x > 0$; j) $I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx;\ x \in \mathbb{R}$; k) $I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx;\ x < 0$;

l) $I = \int \frac{4\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx;\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; m) $I = \int \sin^x \cos x dx;\ x \in \mathbb{R}$;

n) $I = \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;\ x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$; o) $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} dx;\ x \in \mathbb{R}$;

p) $I = \int e^x(e^x + 5) dx;\ x \in \mathbb{R}$; q) $I = \int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2} dx;\ x \in \mathbb{R}$.

12. Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii:

a) $I = \int \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}};\ x \in (-1, 1)$; b) $I = \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^4 - 1}};\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

13. Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii, utilizând substituţiile indicate în dreptul fiecăreia:

a) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},\ t = \frac{1}{x}$; b) $I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2},\ t = \frac{1}{x},\ y = t^2,\ z = y + 1$;

14. Începând printr-o integrare prin părţi şi continuând cu o schimbare de variabilă, să se determine:

a) $I = \int x^2 \arcsin x dx$; b) $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$;

c) $I = \int x^2 \operatorname{arctg} x dx$; d) $I = \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$.

15. Începând printr-o schimbare de variabilă şi continuând cu o integrare prin părţi, să se determine:

a) $I = \int \cos x \cdot \ln(\sin x) dx$; b) $I = \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; c) $I = \int \frac{x}{1 + \cos x} dx$;

d) $I = \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx$; e) $I = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$; f) $I = \int \sqrt{x} \operatorname{arctg}\sqrt{x} dx$;

g) $I = \int \sin\sqrt{x} dx$; h) $I = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$; i) $I = \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

j) $I = \int e^{\sqrt{x}} dx$; k) $I = \int x \cos\sqrt{x} dx,\ x > 0$; l) $I = \int x \sin\sqrt{x} dx,\ x > 0$.

16. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} \sin 3x$.

a) Să se arate că există două numere reale A, B, astfel ca:

$I = \int e^{2x} \sin 3x dx = e^{2x}(A \sin 3x + B \cos 3x) + C$.

b) Să se determine A, B şi să se găsească integrala.

17. Aceeaşi problemă pentru $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

18. Să se trateze problema generală pentru $\int e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x) dx,\ \alpha, \beta \neq 0$.

19. a) Să se arate că dacă P este o funcţie polinomială, atunci există o funcţie polinomială Q, astfel încât: $\int \frac{P(x)}{\sqrt{x^2+1}} dx = Q(x)\sqrt{x^2+1} + \alpha \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

b) Aplicaţie: Să se calculeze: $\int \frac{2x^2 + x + 7}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

20. Să se precizeze (cu coeficienţii nedeterminaţi) fracţiile simple în care se descompun funcţiile raţionale următoare: (*Exemplu:* $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} \Rightarrow f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$.)

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$; b) $f(x)=\dfrac{3x^2-2x+2}{x^3-1}$; c) $f(x)=\dfrac{3}{x^3-1}$; d) $f(x)=\dfrac{3}{x^3+1}$.

21. Acelaşi enunţ pentru următoarele funcţii:

a) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)^3}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)^3}$.

22. Să se calculeze:

a) $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)(x-7)}\mathrm{d}x$; b) $f(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$; c) $f(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x^3+x}\mathrm{d}x$;

d) $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x$; e) $f(x)=\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$;

f) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$; g) $f(x)=\displaystyle\int\frac{2x+5\mathrm{d}x}{x^2+4x+5}$; h) $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$.

23. Să se calculeze:

a) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$; b) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\cos x}$; c) $f(x)=\dfrac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$;

d) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\cos(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, $x>0$. e) $f(x)=\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

f) $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}\mathrm{d}x$; g) $f(x)=\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{-x^2-4x+5}}\mathrm{d}x$.

24. Să se calculeze:

a) $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x$; b) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$;

c) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$; d) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

Capitolul III. INTEGRALE DEFINITE

1. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_3^9\frac{1}{x}\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x$; e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$;

f) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; h) $\displaystyle\int_0^1\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$;

2. Să se verifice egalităţile:

a) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 5}e^x\mathrm{d}x=\int_{e^3}^{e^5}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}x\mathrm{d}x=\int_0^n\frac{1}{2n^2}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$;

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$; d) $\displaystyle\int_0^a(x+a-2\sqrt{ax})\mathrm{d}x=\frac{a^2}{6}$, $a>0$.

3. Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int_0^t ax\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_0^t(ax+v_0)\mathrm{d}x$; c) $\displaystyle\int_{V_0}^V\frac{k}{v}\mathrm{d}v$, ($a, v_0^k, V_0, V$ constante).

4. Să se calculeze:

a) $\int\limits_{-1}^{1} |x|\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{0}^{4} [x]\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_{0}^{2} \{x\}\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{-1}^{1} \min(1, x, x^2)\mathrm{d}x$.

Schiţaţi graficele corespunzătoare.

5. Să se stabilească identităţile:

a) $\mathrm{e}^2 \leq \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^3$; b) $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \leq \int\limits_{0}^{1} x^x \mathrm{d}x \leq 1$;

c) $2\sqrt{\mathrm{e}} \leq \int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} \mathrm{e}^{1-x^2}\mathrm{d}x \leq 1 + \mathrm{e}$.

6. Integrând identitatea $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$ pe intervalul $[0,1]$, stabiliţi inegalitatea: $\binom{n}{0} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \ldots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1} = \frac{2^{n+1-1}}{n+1}$.

7. Stabiliţi egalităţile:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{1} x^n \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{1} \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$.

8. Fie $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}$, continue. Integrând inegalitatea $(\lambda f(x) - g(x))^2 \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, deduceţi inegalitatea:

$$\left(\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \int\limits_{a}^{b} f^2(x)\mathrm{d}x \int\limits_{a}^{b} g^2(x)\mathrm{d}x.$$

9. Fie $a_n = \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \operatorname{arctg}(nx)\mathrm{d}x$, $b_n = \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arcsin(nx)\mathrm{d}x$. Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

10. Arătaţi că există $x > 0$, astfel încât $\int\limits_{0}^{x} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

11. a) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilă. Să se arate că şirul $(s_n)_n$ de termen general: $s_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$ are limită, iar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

b) Aplicând rezultatul de la punctul a) să se calculeze limitele şirurilor $(s_n)_{n\geq 1}$, de termen general:

(α) $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$; ($\beta$) $s_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{2n^2}$;

(γ) $s_n = n\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$; ($\delta$) $s_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}$.

12. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, egalitatea $\int\limits_a^b (x-c)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c (x-b)\mathrm{d}x$ implică $b = c$ sau $a = \frac{b+c}{2}$.

13. Să se arate că $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

14. a) Să se calculeze $I = \int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x)\mathrm{d}x$.

b) Fie $f : [-a, a] \to [-a, a]$, continuă, impară, cu proprietatea că $f(a-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-a, a]$. Să se calculeze: $J = \int\limits_0^a f(f(x))\mathrm{d}x$.

15. a) Fie, pentru $a > 0$, funcţia $\Gamma_a : (1, \infty) \to (0, \infty)$, definită de egalitatea $\Gamma_a(x) = \int\limits_0^a t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$. Să se arate că $\Gamma_a(x+1) = -a^x\mathrm{e}^{-a} + x\Gamma_a(x)$.

b) Notând $\Gamma(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \Gamma_a(x)$, să se deducă relaţia: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

c) Să se calculeze $\Gamma(1)$ şi să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $\Gamma(n+1) = n!$.

16. Să se exprime $I = \int\limits_a^b (x-a)^p(b-x)^q\mathrm{d}x$ în funcţie de $J = \int\limits_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t$ $(a < b)$.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există $k \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{x}{2}]f(x) + k], \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se demonstreze că $f(0) = k$.

b) Să se arate că singurele funcţii continue care satisfac relaţia din enunţ sunr cele de tipul $f(x) = cx + k$.

18. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, crescătoare. Să se demonstreze că funcţia $\phi f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită de egalitatea $\phi(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t$ este, de asemenea, crescătoare.

19. Fie $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, iar P şi Q două polinoame cu coeficienţi reali, pozitivi, cu $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$, astfel încât $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{P(n)+x}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{g(x)}{Q(n)+x}\mathrm{d}x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că funcţia f este identic nulă.

20. Folosind formula schimbării de variabilă, să se calculeze:

a) $\int\limits_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

d) $\int_{e^{e^2}}^{e^{e^3}} \frac{1}{x\ln x}dx$; e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos x dx$; f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

21. Utilizând schimbările de variabilă indicate, să se calculeze:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$, $t=e^x$; b) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}$, $t=\sqrt[6]{x}$; c) $\int_{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx$, $t^2=x^3$;

d)$=\int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}dx$, $a<b$, $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$.

22. Să se calculeze, pentru $p,q\in\mathbb{N}$, $p\neq q$:

a) $\int_0^{2\pi} \cos px\cos qx dx$; b) $\int_0^{2\pi} \sin px\cos qx dx$; c) $\int_0^{2\pi} \sin px\sin qx dx$;

d) $\int_0^{2\pi} \cos^2 px dx$; e) $\int_0^{2\pi} \sin^2 px dx$.

23. Să se stabilească egalităţile:

a) $\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_1^a \frac{dt}{1+t^2}$, $a>1$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$, dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

este continuă. Să se deducă apoi formula: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^n x dx=\int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t^2}$ d) $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx=\int_0^1 x^q(1-x)^p dx$, $p,q\in(0,\infty)$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}=\int_0^1 \frac{dt}{at^2+bt^2+c}$, unde $at^2+bt+c\neq 0$, $\forall t\in[0,1]$.

24. a) Fie $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ şi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$. Să se arate că $A=B$, iar apoi să se calculeze A şi B.

b) Problemă analogă pentru $A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$ şi $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx$.

25. a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 \ln(x^2+x+1)dx=\int_{-1}^1 \ln(x^2-x+1)dx$.

b) Deduceţi egalitatea: $\int_{-1}^1 \ln(x^4+x^2+1)dx=2\int_{-1}^1 \ln(x^2+x+1)dx$.

26. a) Fie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, continuă, $a > 0$. Să se stabilească formula:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\mathrm{d}x.$$

b) Deduceţi că: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & \text{dacă } f \text{ este funcţie pară} \\ 0, & \text{dacă } f \text{ este funcţie impară} \end{cases}$

c) Să se calculeze: $I = \displaystyle\int_{-\sqrt{2\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \frac{|x|e^{x^2}\sin \pi x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$; $\quad J = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left|\frac{1-|x|}{1+|x|}\right| \mathrm{d}x.$

27. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, continuă, satisfăcând egalitatea: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -x^2 f(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$. Să se arate că, pentru orice $a > 1$, are loc egalitatea $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

28. a) Fie $a > 0$, iar $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, continuă, pară, iar $k \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^{kx}+1}\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$

b) Să se calculeze integralele: $A = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{e^{|x|}}{e^{ax}+1}\mathrm{d}x$, $a > 0$; $\quad B = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{e^{\pi x}+1}\mathrm{d}x.$

29. a) Să se arate că $1 + \mathrm{tg}x = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left[\dfrac{\pi}{4} + x\right]}{\cos x}$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ şi să se dezvolte apoi expresia: $\ln(1 + \mathrm{tg}x)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Utilizând dezvoltarea obţinută, să se calculeze integrala: $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \mathrm{tg}x)\mathrm{d}x.$

30. Fie $f : [0, a] \to [0, b]$, $a, b > 0$, derivabilă, strict crescătoare, să se arate că:

(α) f este surjectivă $f(\alpha)$ $f(0) = 0$ şi $f(a) = b$; $\quad(\beta)$ f este inversabilă şi $\displaystyle\int_{0}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{b} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = ab$. Să se interpreteze geometric funcţia obţinută.

b) Să se stabilească egalităţile:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \arcsin(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{arctg}(\sin y)\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{8}; \quad \int_{0}^{1} (e^{x^2}-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{e-1} \sqrt{\ln(1+y)}\mathrm{d}y = e-1;$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x^2)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \sqrt{\arcsin y}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

31. a) Fie $a > 0$ şi $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, continuă, satisfăcând egalitatea $f(x) + f(-x) = k$, $\forall x \in [-a, a]$, unde k este o constantă. Să se arate că $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = ka$.

b) Să se calculeze: $\int\limits_{-a}^{a} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

32. O funcţie continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ are proprietatea că $f(x) + f(1-x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Să se calculeze: $I = \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}\mathrm{d}x$.

33. Să se arate că:

a) $\int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t$;

c) $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{a}^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int\limits_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$;

34. a) Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, continuă. Să se arate că: $\int\limits_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

b) Să se calculeze: $I = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\mathrm{d}x$; $\quad J = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \sin^2 x}\mathrm{d}x$;

35. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, continuă şi pară. Să se stabilească egalităţile:

a) $\int\limits_{0}^{\pi} xf(\cos x)\mathrm{d}x = \pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$: $\quad$ b) $\int\limits_{0}^{2\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$

36. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, continuă. Să se stabilească egalitatea:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} xf(\cos x)\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_{0}^{\pi} f(\cos x)\mathrm{d}x.$$

37. Să se calculeze ariile definite de funcţiile:

a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; b) $f : [0, \ln 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$;

c) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

38. Să se calculeze ariile determinate de graficele funcţiilor:

a) $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$; b) $f, g : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$; $g(x) = x^2+1$;

c) $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$; $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$;

39. a) Să se calculeze aria mulţimii cuprinse între parabola de ecuaţie $y^2 = 4x$ şi dreapta de ecuaţie $y = 2x$.

b) Să se determine ariile pătratelor în care cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 16$ este despărţit de parabola de ecuaţie $y^2 = 6x$.

c) Să se calculeze aria cuprinsă între parabolele de ecuaţii $y^2 = x$, $x^2 = 8y$.

40. Să se calculeze volumul corpurilor de rotaţie determinate de funcţiile:
a) $f(x) = 2x - x^2$, $x \in [0,2]$; b) $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0,2]$;
c) $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$; d) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in [0,1]$.
41. Să se calculeze lungimea graficului următoarelor funcţii:
a) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \ln\sqrt{x}$, $x \in [1,e]$; b) $f(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, $x \in [2^{-\frac{3}{2}}a, a]$;
c) $f(x) = \ln x$, $x \in [\sqrt{8}, \sqrt{15}]$; d) $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$;
42. Să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie determinate de funcţiile:
a) $f(x) = \frac{x^3}{3}$, $x \in [0,1]$; b) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x \in [0,1]$;
c) $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; d) $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$.
43. Să se calculeze centrul de greutate al următoarelor plăci plane omogene:
a) $\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1\}$;
b) $\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sin x,\ 0 \le x \le \pi\}$; c) $\{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 2\}$;
44. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:
a) $y' = y$, $y(0) = 1$; b) $y' = y$, $y(0) = a$, $a > 0$. c) $(x^2 - 1)y' = xy$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.
45. Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:
a) $y' = y^2$; b) $y' = \cos^2 y$; c) $y' = x^7y^5$; d) $y' = e^x$.
46. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $xy' + (2x^2 - 1)y = 2x^2 - 1$, $y(1) = 1 - \frac{1}{e}$;
b) $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$; c) $xy' + 2y = 3x$.
47. Să se rezolve ecuaţiile:
a) $y'' - 5y' + 6y = 0$; b) $y'' - 7y' + 12y = 0$; c) $y'' - 8y' + 16y = 0$;
d) $y'' - 9y = 0$; e) $y'' + 9y = 0$; a) $y'' + \omega y = 0$;

INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

CLASA A IX-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. NUMERE REALE

1. a) 10,00...; b) 2,750...; c) $-6{,}333...$; d) 1,7142857142857...; e) $-3{,}7272...$; f) $-55{,}8333...$; g) 23,82352941...; h) $-6{,}400...$; i) 0,00...; j) 10,500.... **2.** a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{127}{5}$; c) $-\frac{2}{5}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{268}{33}$; f) $-\frac{49}{15}$; g) $\frac{1372}{333}$; h) $-\frac{13}{600}$; i) $-\frac{3127}{500}$; j) $-\frac{7981}{1980}$. **3.** $B = \left\{2{,}(3); -\frac{2}{5}; 1{,}0(24); \sqrt{0{,}49}; \sqrt[3]{-0{,}001}; 4\frac{1}{2};; 0{,}5; 0;\right\}$ b) $C == \left\{-\sqrt{2}; \sqrt[3]{5}; \sqrt{\frac{2}{5}}; \pi; 0{,}10010001000010\ldots; 0{,}122333444455555\ldots\right\}$. c) $D = \{0; 5\}$.

4. e) Presupunem că $\sqrt{3} + \sqrt{7} = a$, $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{a^2 - 10}{2} = \sqrt{21}$, $\frac{a^2-10}{2} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt{21} \notin \mathbb{Q}$ (contradicţie) $\Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{7} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. **5.** a) $(a;0)$, $a \in \mathbb{N}$; b) $(0;k^2)$, $k \in \mathbb{N}$; c) $(k^2;l^3)$, $k,l \in \mathbb{N}$. **6.** $(a,b) \in \{(3;2)\}$. **7.** $(a,b) \notin \{(n^2,m^2);|\ m,n \in \mathbb{Z},\ a \neq b\}$. **8.** a) $\sqrt{5} \simeq 2{,}236\ldots \Rightarrow A.l.$: 2,2; 2,23; 2,236; $A.a.$: 2,3; 2,24; 2,237; $\sqrt{7} \simeq 2{,}645 \Rightarrow A.l.$: 2,6; 2,64; 2,645; $A.a.$: 2,7; 2,65; 2,646; b) $\sqrt{8} \simeq 2{,}828 \Rightarrow A.l.$: 2,8; 2,82; 2,828; $A.a.$: 2,9; 2,83; 2,829; $-\sqrt{11} \simeq -3{,}316 \Rightarrow A.l$: $-3{,}4$; $-3{,}32$; $-3{,}317$; $A.a$: $-3{,}3$; $-3{,}31$; $-3{,}316$; h) $\sqrt{3} - \sqrt{2} \Rightarrow A.l.$: 0,2; 0,31; 0,317 şi $A.a.$: 0,4; 0,33; 0,319; $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A.l$: 1,9; 1,98; 1,984; $A.a$: 2,0; 1,99; 1,985. **9.** a) 4;4,8; 4,87; 4,881; $A.a$: 4; 5; 4,89; 4,883. b) h) (0; 0,3; 0,61; 0,628);(0; 0,8;0,65;0,6333). **10.** a) 0,501; $\sqrt{0{,}251}$; b) 0,5; $\sqrt{0{,}21}$; c) 1,8; $\sqrt{3{,}6}$; d) 1; $\sqrt{2}$; e) 0,241; $\sqrt{0{,}058}$; f) $-2{,}291$; $-\sqrt{5{,}25}$. **11.** a) Fie $(a;b)$ cu $a < b$, $a,b \in \mathbb{R}$ şi $n = \left[\frac{1}{b-a} + 1\right] = \left[\frac{1}{b-a}\right] + 1 > \frac{1}{b-a}$, $n \in \mathbb{R}^* \Rightarrow n(b-a) > 1 \Rightarrow nb > [nb] > na$. Fie $k = [nb] \Rightarrow nb > k > na$. Dacă $k > 0 \Rightarrow a < \frac{k}{n} < b$. Analog, $k < 0$. Pentru $k = 0 \Rightarrow 0 \in (a;b)$. Fie $n \in (a;b) \cap \mathbb{Q}$ şi $p \in (a;n) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow (n;p) \subset (a;b)$ cu $n,p \in \mathbb{Q}$, $\forall r,t \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{t} \notin \mathbb{Q}$. Fie $\frac{\alpha}{\beta} \in (0;t-r) \Rightarrow 0 < \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\beta} < t - r$ şi $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2\beta} \notin \mathbb{Q}$. Deoarece $t \in \mathbb{Q}$, $t + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\beta} \in (r,t)\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow r + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\beta} \in (a;b)\backslash\mathbb{Q}$ **12.** a) Fie $a = \overline{1,9} \Rightarrow 0{,}a0a00a000a\ldots$; $1 \leq a < b \leq 9 \Rightarrow 0{,}ab0ab00ab000\ldots$. **16.** $x,y \in \{(2;3)\}$. **17.** $(1;-4)$. **18.** $\sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$, $a,b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2 - a^2 - 5b^2}{2ab} = \sqrt{5}$, $a,b \neq 0$, contradicţie. Pentru $a,b = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \neq 0$. Analog pentru $\sqrt[3]{3}$. **19.** a) 0; b) $\{0;-1\}$. **20.** De exemplu, pentru $\sqrt{20}$; $20 = 4^2 + 2^2$. Se reprezintă un triunghi dreptunghi cu catetele de lungime: 4 şi 2; rezultă că lungimea ipotenuzei este egală cu $\sqrt{20}$. **21.** a) $\{-2;+2\}$; b) $\{3\}$; c) $[-1;1]$; d) $(-\infty,-2] \cup [2;+\infty)$; e) $(-\infty;-2) \cup (4;\infty)$; f) $(-3;-2] \cup [2;3)$; g) $\{0\}$; h) $(-\infty;0)$; i) $[0;\infty)$. **22.** a) $A = [-5;-4] \cup [-2;-1]$; b) $B = (-\infty,0] \cup [1;\infty)$; c) $C = \mathbb{R}$; d) $D = \emptyset$; e) $E = \{0\}$; f) $F = \{2\}$. **23.** a) 10 şi 0; -10 şi 0; b) 2 şi 0, 35; -3 şi 0,65; c) 41 şi 0,(62); -43 şi $\frac{1}{3}$; d) 0 şi $\frac{2}{5}$; -3 şi $\frac{1}{2}$; e) 4 şi 0,4; -5 şi 0,6; f) 2 şi 0,1(3); -3 şi 0,7(8); g) 1 şi $\sqrt{2} - 1$; -2 şi $2 - \sqrt{2}$; h) 3 şi $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3$; i) -2 şi $\sqrt{2} - \sqrt{3} + 2$; j) 5 şi $\pi + \sqrt{5} - 5$. **24.** a) $x = [x] + \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow [x+y] = [[x]+[y]+\{x\}+\{y\}] = [x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]$. Dar $\{x\} \in [0;1) \Rightarrow [\{x\}+\{y\}] \in \{0;1\} \Rightarrow [x] + [y] \leq [x+y] < [x] + [y] + 1$; b) „$\Rightarrow$" $x - y = [x] - [y] + \{x\} - \{y\} = [x] - [y] \in \mathbb{Z}$. Analog „$\Leftarrow$". c) $[x] = [y] \Rightarrow [x],[y] \in [n;n+1), n \in \mathbb{Z} \Rightarrow |x-y| = |\{x\} - \{y\}| < 1$. **25.** a) $x = [x] + \{x\}$, $[x] \in \mathbb{Z}$ şi $\{x\} \in [0;1)$. Din $x = [x] \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$; **26.**

$x = [x] + \{x\}$. Se discută egalitatea în două cazuri: 1) $\{x\} \in \left[0; +\frac{1}{2}\right)$ şi $\{x\} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$. **27.** $A = \{-1; 1\} = B$. **28.** $4x^2 - 2x - 11 + \frac{27}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-14; -5; -2; -1; 0; 1; 4; 13\}$. **30.** Presupunem $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2n + 1 = n(n+1) \cdot k$ (un număr par este egal cu un număr impar, contradicţie. $\Rightarrow A \cap \mathbb{N} = \emptyset$. **31.** Analog 30. **32.** a) În suma ($\text{card}A + \text{card}B$) elementele cae aparţin mulţimii $A \cap B$ au fost numărate de două ori, deci numărul $\text{card}(A \cap B)$ trebuie scăzut o dată. Analog b). **33.** a) $2\left(\frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9}\right) =$ $== \frac{2}{9}\left[\frac{10^{n+1}-1}{10-1} - n - 1\right] = \frac{2}{81}\left(10^{n+1} - 9n - 10\right)$. **34.** a) $\frac{7}{9}\left(10^{20002} - 1\right)$; b) $\frac{7}{9}\left(10^n - 1\right)$. **35.** b) $[17 \cdot 8 \cdot 5^n + 11(11^{3n} - 5^n)] \vdots 17$. Se demonstrează că $11^{3n} - 5^n \vdots 17$; c) $(12^n - 1) \vdots 11$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $12^n - 1 = 11(12^{n-1} + 12^{n-2} + \ldots + 12 + 1) \Rightarrow 12^n - 1 + 110n = 11[12^{n-1} + 12^{n-2} + \ldots + 12 + 1 + 10n] =$ $11[(12^{n-1} - 1) + (12^{n-2} - 1) + \ldots + (12 - 1) + 11n] = 121m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. **36.** 3. Pentru a calcula a^n, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ numărul minim de înmulţiri este cel mai mic număr întreg k astfel încât $2^k \geq n$. **37.** $8c+6$ este număr par $\Rightarrow a^2 + b^2$ este număr par $\Rightarrow a, b$ sunt simultan pare sau impare. **38.** Presupunem prin absurd că există n şi m, $n \geq m$ cu condiţia din enunţ $n^2 + 4m > n^2$ şi $n^2 + 4m$ pătrat perfect $\Rightarrow n^2 + 4m \geq (n+1)^2$. Dar $n^2 + 4m \leq n^2 + 4n < (n+2)^2 \Rightarrow n^2 + 4m = (n+1)^2 \Leftrightarrow 4m = 2n + 1$ contradicţie. **39.** Fie $a^3 = n + 1 \Rightarrow 8n + 1 = 8a^3 - 7$; $(2a-1)^3 < 8a^3 - 7 < (2a)^3 \Rightarrow 8a^3 - 7$ nu este cub perfect; pentru $a = 0 \Rightarrow 8n + 1 = -7$, iar pentru $a = 1 \Rightarrow n = 0$, dar $n \in \mathbb{Z}^*$. **40.** $\sqrt{b} - \sqrt{c} = \frac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{b-c}{\sqrt{a}}$, $\sqrt{b} = \frac{(a+b-c)}{2\sqrt{a}}$, $\sqrt{c} = \frac{a-b+c}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{2a} = \frac{\sqrt{b}}{a+b-c} = \frac{\sqrt{c}}{a-b+c}$. **41.** Dacă $a = 1 \Rightarrow A = 8 \Rightarrow n \in \mathbb{N}^*$; dacă $a > 1$ şi $n = 1 \Rightarrow A = (a+1)^3$. Dacă $a > 1$ şi $n \geq 1 \Rightarrow (a^n)^3 < a^{3n} + 3a^{2n} + 3a^n + 1 = (a^n + 1)^3 \Rightarrow A$ nu este cub perfect. **42.** $m = \frac{1}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n\right]^2 + 1$. **43.** Fie $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = S \Rightarrow S^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}S$; $p = \sqrt[3]{ab} = \frac{(S^3 - a - b)}{3S} \in \mathbb{Q}$; $a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^2 - \sqrt[3]{ab}\right] \Rightarrow d = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} =$ $\frac{a-b}{s^2 - p} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = \frac{S+d}{2} \in \mathbb{Q}$ şi $\sqrt[3]{b} = \frac{S-d}{2} \in \mathbb{Q}$. **44.** Prima inegalitate este echivalentă cu $a^2 + b^2 + 2ab \geq a^2 + b^2 \Rightarrow a + b - \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$. Cea de a doua se mai scrie $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (\sqrt{2} - 1)\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$. **45.** Se adună relaţiile: $b^2 = d^2 - a^2$, $c^2 = e^2 - a^2$, $2bc = 2bc \Rightarrow (b+c)^2 = d^2 + e^2 - 2a^2 + 2bc$ **46.** Se demonstrează că $\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2} > \sqrt{a} + \sqrt{a+3}$ şi $\sqrt[4]{(a+1)(a+2)} > \sqrt[4]{a(a+3)}$, $\forall a \geq 0$. **47.** $n = 62$. **48.** $E = \left(5^{2n+6} + 7^{4n+5}\right)\left(2 \cdot 7^n + 5^{3n+5}\right) = 33\left(4 \cdot 25^{n+1} + m\right) \cdot 59 \cdot \left(38 \cdot 7^n + m\right)$, iar $1947 = 33 \cdot 59$. **49.** Se foloseşte faptul că: $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n(n+1)}$ şi $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$ $S \in (991/1001; 991/9000)$. Inegalitatea din enunţ este echivalentă cu $0{,}098 < S < 0{,}112$, iar $0{,}098 < \frac{991}{10010}$ şi $\frac{991}{9000} < 0{,}112$. **50.** Notăm $x + y = 2S \Rightarrow x = S - u$, $y = S + u$. Se arată că $8([(S-u)^4 + (S+u)^4] \geq 16S^4$. **52.** Se vor transforma radicalii dubli şi se va ţine seama de egalitatea $2(4 + \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}) = \left(\sqrt{5 \pm \sqrt{5}} + \sqrt{3 \pm \sqrt{5}}\right)^2$ Toate fracţiile devin $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **53.** Fie $a = \sqrt[4]{11{,}3 + 7{,}2\sqrt{2}}$ şi $b = \sqrt[4]{11{,}3 - 7{,}2\sqrt{2}}$; $\frac{a+b}{a-b} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{(2\sqrt{2}+1)^2}{7}$, iar $\frac{a}{b} = \sqrt[4]{\frac{81 + 72\sqrt{2} + (4\sqrt{2})^2}{81 - 72\sqrt{2} + (4\sqrt{2})^2}} = \frac{(2\sqrt{2}+1)^2}{7}$. **54.** Se foloseşte formula radicalilor compuşi. **58.** Fie $A = \sqrt[3]{3a + 1 + a\sqrt{a} + 3\sqrt{a}} = \sqrt{a} + 1$ şi $B = 1 - \sqrt{a} \Rightarrow A + B = 2$. **60.** a) 0; b) $\frac{5}{18}$; c) 96. **61.**

$\frac{1}{9}$. **62.** a) $8^{34} < 9^{34}$; b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-11} < \left(\frac{8}{27}\right)^{9}$; c) Sunt egale cu $2^{-630} \cdot 3^{600}$. **63.** a) $\sqrt{5}$; b) 4; c) $2\sqrt{3}$. **64.** a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{3}-1$; c) $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$; d) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$; e) $\sqrt{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; f) $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$; g) $\frac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})+\sqrt[3]{25}}{3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})}$; h) $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{2}$; i) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[6]{2}-1)} = \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[6]{2^4}+\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{2^2}+\sqrt[6]{2}+1)}{2}$; j) $\frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[6]{16^5}-\sqrt[6]{16^4\cdot 27}+\ldots+\sqrt[6]{27^5})\cdot\sqrt{3}}{6}$; k) $\sqrt[4]{2}-1$. **65.** a) $\frac{\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^2}+1}{4}$; b) Se utilizează identitatea: $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

66. a) $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}-\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a+b}$; b) $\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{a-b}$. **67.** a) $\sqrt[6]{20}$; $\sqrt[4]{12}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt{6}$; b) $4-\sqrt{5}$; $\sqrt{5-\sqrt{3}}$; $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; c) $2-\sqrt{3}$; $3-\sqrt{2}$; $11-6\sqrt{2}$. **68.** $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$; 2 soluţii. **69.** a) 2; b) $(3\cdot 2^{20})^{\sqrt{3}}$. **70.** c). **71.** $\{1;2\}$. **72.** a) $m \in \left(\frac{4}{7};\infty\right)$; b) $m \in (8;\infty)$. **73.** $6 \in \mathbb{N}$. **74.** a) $x < y$; b) $x > y$. **75.** $E^3+5E-6=0$; $E \in \mathbb{R} \Rightarrow E = 1$. **77.** a) $S_1 = \sqrt{2002}-1$ b) $S_2 = 1-\frac{1}{\sqrt{2002}}$. **78.** $P = \frac{a-b}{\sqrt[2^n]{a}-\sqrt[2^n]{b}}$.

79. Notăm radicalul cu E şi înlocuim a şi b cu c care este mai mare; avem $E < \sqrt{\frac{6c^2}{6}} = c$. Radicalul se mai scrie: $E = \sqrt{\frac{(3\sum a^2+3\sum ab)}{18}} = \sqrt{\frac{2(a+b+c)^2+\sum a^2-\sum ab)}{18}}$, dar $\sum a^2-\sum ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2] > 0 \Rightarrow E = \frac{a+b+c}{3}$. **80.** Se raţionalizează numitorii. **82.** $n \in [2;7]\cap\mathbb{N}$. **83.** Dacă $m \geq n \Rightarrow m+m \geq 2n$, iar dacă $n \geq m \Rightarrow m+n \geq 2m \Rightarrow (n+m)^2 \geq 4mn \Rightarrow (m+n)^m \geq 2^m n^m$ şi $(m+n)^n \geq 2^n m^n \Rightarrow (m+n)^{m+n} \geq 2^{m+n}\cdot n^m m^n$. Se extrage radical de ordinul $(m+n)mn$. **84.** a) $\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right] \geq 0$; **86.** $E^2 \leq (x_1^2+x_2^2)(a_1^2+a_2^2) = 8 \Leftrightarrow \min E = -2\sqrt{2}$; $\max E = 2\sqrt{2}$. **87.** $m_a \geq m_g$. **88.** a) $\sum\frac{1}{a+b} \leq \sum\frac{1}{2\sqrt{ab}} \leq \sum\frac{1}{4}\frac{a+b}{ab} \leq \sum\frac{1}{2a}$. b) După desfacerea parantezelor se foloseşte $m_a \geq m_g$. c) $\sum\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \sum\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. **89.** a) $\left.\begin{array}{l} a^2 \geq a^2-(b-c)^2, \\ b^2 \geq b^2-(a-c)^2, \\ c^2 \geq c^2-(b-a)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2b^2c^2 \geq (a-b+c)^2(a+b-c)^2(b-a+c)^2$. **90.** $m_a \leq m_p$; .

Capitolul II. ECUAŢII

1. a) -1; b) $-\frac{4}{5}$; c) $\emptyset$; d) 2; e) $\emptyset$; f) 2; g) $\emptyset$; h) $\frac{15}{7}$; i) $\mathbb{R}$. **2.** a) 6; b) 2; c) $\left\{\frac{1}{3};3\right\}$; d) $\{-5;0\}$; e) 3; f) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$. **3.** a) $S = \left\{\frac{m+1}{m^2+1}\middle| m \in \mathbb{R}\right\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{m-3}\middle| m \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}\right\}$; $S = \mathbb{R}$ pentru $m = -3$ şi $S = \emptyset$ pentru $m = 3$; c) $S = \left\{\frac{4-m}{2}\middle| m \in \mathbb{R}\right\}$; d) $S = \{-m \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}\}$ şi $S = \mathbb{R}$, dacă $m = 1$; e) $S = \left\{\frac{4(m-1)}{3}\middle| m \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\right\}$; f) $\left\{\frac{2-3m}{4+m}\middle| m \in \mathbb{R}\setminus\{-4;0\}\right\}$ şi $S = \emptyset$ dacă $m \in \{-4;0\}$; g)

$S=\left\{\frac{2mn}{m-n}\middle| m\neq n,\ m,n\in\mathbb{R}\right\}$ şi $S=\mathbb{R}$, dacă $m=n=0$, $S=\emptyset$, dacă $m=n\neq 0$;

h) $S=\left\{\frac{m+n^2}{m-n}\middle| m\neq n,\ m,n\in\mathbb{R}\right\}$, $S=\mathbb{R}$, dacă $m=n=0$, $S=\emptyset$, dacă $m=n\neq 0$; i) $S=\{n+m \mid n\neq m,\ n,m\in\mathbb{R}\}$, $S=\mathbb{R}$, dacă $m=n$; j) $S=\{n \mid m\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{R}^*\}$, $S=\mathbb{R}$, dacă $m=0$, $n\in\mathbb{R}^*$. **4.** a) $S=\{-4;-2;0;2\}$, dacă $m\in\{0;2;4;6\}$; b) $m\in(-\infty,-2]\cup(1,\infty)$; c) $m\in\{0;2;3\}$; d) $m\in\{0;1\}$; e) $m\in\{0;2\}$; f) $m\in(0,\infty)$. **5.** a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; d) -1. **6.** a) $\{-1;4\}$; b) $\emptyset$; c) $\{2\}$; d) $\{0;2\sqrt{2}\}$; e) $\{-1;5\}$; f) $\{1;2\}$; g) $\left\{\frac{\sqrt{3}+3}{6};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$; h) $\emptyset$; i) $\left\{\pm\frac{5}{2}\right\}$; j) $\emptyset$; k) $\left\{-\frac{25}{4};0\right\}$. **7.** a) $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{m+1}}{m}\middle| m\in[-1,\infty)\setminus\{0\}\right\}$, $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, dacă $m=0$ şi $S=\emptyset$, dacă $m\in(-\infty,-1)$; b) $S=\{1;m-1 \mid m\in\mathbb{R}\}$; c) $S=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{8m-7}}{m-1}\middle| m\in\left[\frac{7}{8},\infty\right)\setminus\{1\}\right\}$, $S=\{2\}$, dacă $m=1$, $S=\emptyset$, dacă $m\in\left(-\infty,\frac{7}{8}\right)$; d) $S=\left\{\frac{m-1\pm\sqrt{3m-5}}{m-2}\middle| m\in\left[\frac{5}{3},\infty\right)\setminus\{2\}\right\}$, $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, dacă $m=2$ şi $S=\emptyset$, dacă $m\in\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)$; e) $S=\emptyset$, $m\in\mathbb{R}$; f) $S=\{1;m \mid m\in\mathbb{R}\}$. **8.** a) $m=10$, $S=\{-2;3\}$ b) $S=\left\{\frac{5\pm\sqrt{21}}{2},\text{ dacă } m=5\right\}$ şi $S=\left\{\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2},\text{ dacă } m=-5\right\}$; c) $S=\{-4;6\}$, dacă $m=-\frac{1}{23}$; d) $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{33}}{2}\right\}$, dacă $m=0$. **9.** a) $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$; b) 3; c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; d) 2; e) $\pm2\sqrt{2}$; f) $\frac{17}{2}$; g) $-2\sqrt{2}$; h) 12; i) -6; j) $\frac{24+37\sqrt{2}}{23}$. **10.** a) $\{-3;7\}$; b) $\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$; c) $\{-1;1\}$; d) $\{-1;0;1\}$; e) $\{3\}$; f) $\emptyset$; g) $\emptyset$; h) $\left\{\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right\}$; i) $\{-4;0;2;6\}$; j) $\{-2;3\}$; k) $\{-1;3\}$. l) $\emptyset$. **11.** a) $(-\infty,0]\cup(2,\infty)$; b) $\left\{\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$. **12.** a) $x^2-3x-10$; b) $3x^2-10x+3$; c) $x^2-1=0$; d) $x^2-3=0$; e) $x^2=0$; f) $9x^2+9x+2=0$; g) $x^2-x-1=0$; h) $10x^2-29x+10=0$; i) $x^2-20x+100=0$; j) $x^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}-4=0$;. **13.** $a\in\mathbb{Q}^*$, $b=-10a$, $c=22a$. **14.** a) $cy^2+by+1=0$; b) $y^2-(b^2-2c+2)y+b^2+(c-1)^2=0$; c) $cy^2-(b^2-2c)y+c=0$; d) $cy^2+b(c+1)y-bc+2c+1=0$; e) $cy^2+(b+2)y+b+c+1=0$. **15.** a) $\left\{1;-\frac{3m+2}{m}\right\}$; b) $\left\{-2;\frac{2m-1}{m-1}\right\}$. **16.** a) $m=0$, $S_1=\{0;1\}$; $S_2=\{-1;0\}$; b) $m=-2$, $S=\{-2;1\}$. **17.** a) $\{-2;6\}$; b) $(-\infty;-2)\cup(6;\infty)$; c) $(-2;6)$; d) $(6;\infty)$; e) $(-\infty;-3)$ f) $(-3;-2)$; g) $\{-3\}$. **18.** $|x_1+x_2|=|a|$, $|x_1x_2|=|b|$, $|b|=1$. **19.** a) $\left\{-\frac{7}{2};-3\right\}$; b) $\{-1;1\}$; c) $\{1\}$. **20.** a) $\{4\}$; b) $\{8\pm4\sqrt{3}\}$; c) $\left\{-\frac{4}{5}\right\}$. **21.** $m=11$, $n=7$. **22.** a) $m\in(-\infty;0)$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<0$, $x_2>0$; $m\in(0;\infty)\setminus\{1\}$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<0$, $x_2<0$; $m=1\Rightarrow x_1=x_2=-1$; b) $m\in(-\infty;0)$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1<0$, $x_2>0$; $m=0$, $x_1=0$, $x_2>0$; $m\in(0;\infty)$, $x_1,x_2>0$. **23.** a) $\{1;3;5\}$; b) $[1;2)\cup[3;7)\cup[8;9)$; c) $\left\{-\frac{2}{3};0;\frac{2}{3}\right\}$. **24.** a) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$; b) $\{0\}$; c) $\{1;2\}$. **25.** a) $\left\{-\frac{14}{5};-\frac{8}{5};-\frac{2}{5};\frac{4}{5};2\right\}$; b) $\{8;11;14;17\}$. **26.** Se consideră cazurile: $x\in[6k;6k+1)$, $x\in[6k+1;6k+2)$ etc, $k\in\mathbb{Z}$. Relaţia se verifică în fiecare caz. **27.** $x\in[1;2)$. **28.** $\left\{\frac{-1}{2}\right\}$. **29.** $S=\left\{7;\frac{19}{2};12;\frac{29}{2}\right\}$, dacă $m=1$ şi $S=\emptyset$, dacă $m\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$. **30.** $x\in[1;2)$ şi $y\in[2;3)$ sau $x\in[2;3)$ şi $y\in[1;2)$; $x\in[-1;0)$ şi $y\in[-2;-1)$ sau invers. **31.** $x\in[-2;-1)$

şi $y \in [3;4)$. **32.** $S : \frac{x}{y} = t \Rightarrow \left[\frac{x+y-4}{3}\right] = t - \frac{1}{t} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = y \Rightarrow S = \{(2;2);(3;3)\}$. **33.** $S = \{7;10\}$. **35.** a) $\{11\}$; b) $\{3\}$; c) $\left\{-\frac{8}{7}\right\}$; d) $\{4;7\}$; e) $\emptyset$; f) $\{4\}$; g) $\emptyset$; h) $\emptyset$; i) $\emptyset$. **36.** a) $\emptyset$; b) $\left\{-\frac{2}{3};0\right\}$; c) $\{0;1\}$; d) $\{-1;1\}$; e) $\{4\}$. **37.** a) $\emptyset$; b) $\left\{\frac{29}{10}\right\}$; c) $[-3;-2]$; d) $\left[\frac{1}{2};1\right]$; e) $\left[-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{3}\right]$. **38.** a) $\emptyset$; b) $\emptyset$; c) $\mathbb{R}$. **39.** a) $\{0\}$; b) $\left\{-5;-\frac{7}{2};-2\right\}$; c) $\{2;3\}$. **40.** a) $\{3\}$; b) $\{-6;1\}$; c) $\{6\}$. **41.** a) $\emptyset$; b) $\{-2;-1;7\}$; c) $\{25\}$; d) $\{1;2;10\}$; e) $\{-7;2;9\}$; f) $\{-62;3\}$. **42.** a) $\{2\}$; b) $\{2\}$. **43.** $\{5\}$. **45.** $\{-1;1\}$. **46.** $\left\{\frac{225}{289}\right\}$. **47.** $\{2\}$. **48.** $a \in [0;1]$. **50.** a) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$; b) $\left(1;\frac{5}{3}\right]$. **51.** a) $S = \emptyset$, dacă $a \in (-\infty;0) \cup \left[\frac{1}{2};1\right)$ şi $S = \left\{\frac{a^2}{2a-1} \middle| a \in \left[0;\frac{1}{2}\right) \cup [1,\infty)\right\}$. **52.** a) $\left[\frac{9}{5};\infty\right)$; b) $(-\infty;1] \cup \{3\}$; c) $\left[\frac{3}{2};26\right) \setminus \{2\}$. **53.** Să se rezolve inecuaţiile: a) $[-2;2] \setminus \{0\}$; b) $(-2,-1) \cup \left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$. **54.** $x = 11$, $y = 5$. **55.** $x \in [4a;13a]$, dacă $a > 0$ şi $x \in [13a;4a]$, dacă $a < 0$. **58.** $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$. **61.** $m \in (-\infty,0]$ şi $n \in \mathbb{R}$. **64.** a) $\{1;2\}$; b) $\left\{-1;\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **65.** a) $\{1\pm\sqrt{2}\}$; b) $\left\{3\pm\sqrt{7};\frac{9\pm\sqrt{73}}{6}\right\}$. **66.** $\{-5;0\}$ **67.** $\{2;3\}$. **68.** $m = 0 \Rightarrow S = \{0;2\}$ şi $m = -1 \Rightarrow S = \{-2;0\}$. **69.** $x_1x_2 + 5(x_1+x_2) = -6$; $m \in \{-18;54\}$. **71.** $m = 0$, $n = 2$. **72.** a) $m \in \{-2;0\}$; b) $m \in \left\{-\frac{10}{11};-\frac{12}{13}\right\}$. **73.** $m \in \left(0;\frac{1}{5}\right)$. **74.** 1) a; 2) d. **75.** 1) b; 2) a. **76.** 1) b; 2) e. **77.** 1) b; 2) e.

Capitolul III. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. a) Nu; b) Nu; c) Da (1); d) Da (0); e) Nu. **2.** a) 1; b) 0; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) 0; h) 0. **3.** p_1 (0); p_2 (1); **6.** a) 1; b) 0; c) 1; d) 1; e) 0; f) 0. **7.** a) 0; b) 0; c) 0; d) 1. **8.** a) 1; b) 0; c) 0; d) 0. **9.** a) 1; b) 0; c) 1; d) 0. **10.** a) 0; b) 0; c) 1; d) 1. **16.** Presupunem că există $d \neq \pm1$, $d \in \mathbb{Z}^*$, astfel încât $d|4n+7$ şi $d \mid 3n+5 \Rightarrow d \mid 3(4n+7)$ şi $d \mid 4(3n+5) \Rightarrow d \mid [(12n+21)-(12n+20)] \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = \pm1$, contradicţie.

Principiul inducţiei matematice

19. a) $\frac{n(4n^2+21n+29}{3}$; b) $2^{n+1}-(n+2)$; c) $n(2n^3+8n^2+7n-2)$; d) $\frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$. **20.** a) $\frac{n+1}{n+2}$; b) $\frac{n}{x(x+n)}$; c) $\frac{n(2n+5)}{4(2n+1)}$. d) $(n+1)!-1$; e) $(n+1)!(n+1)-1$; f) $1-\frac{1}{(n+2)!}$; g) $\sqrt{n+1}-1$; h) $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. **21.** a) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$; b) $\frac{n+2}{3n}$; c) $\frac{n+1}{2n}$; d) $\frac{n(4n^2+15n+13)}{4(n+1)(n+2)}$; e) $\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$; f) $1-\frac{2^n}{(n+1)!}$. **22.** $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$. **41.** a) $\frac{n(n-3)}{2}$; b) $n(n-3)$. **42.** b) $p = 2k$, $q = 4k$, $k \in \mathbb{Z}^*$; $p = ak$, $q = a^2k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{N}^*$. **49.** Se demonstrează prin inducţie matematică după după n. Pentru $n = 1$, afirmaţia este adevărată. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Pentru $n = k+1$ alegem unul din cercuri; atunci el se intersectează cu fiecare din cele k cercuri în cel mult 2 puncte; cele k cercuri împart planul în (k^2-k+2) părţi (conform ipotezei de inducţie). Se obţin în total cel mult $[(k^2-k+2)+2k = (k+1)^2-(k+1)+2]$ părţi. **50.** Analog cu 49.

Capitolul IV. FUNCŢII

1. a) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; b) $\mathbb{R}\setminus\left\{0;\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}$; e) $[-2;\infty)$; f) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; g) $\mathbb{R}$; h) $\mathbb{R}$; **2.** $m=-4$. **3.** $m=2$. **4.** $D=\left\{-\frac{4}{3};0\right\}$. **5.** a) $\{\sqrt{3};2\}$; b) $\left\{\frac{1}{2};1;2;3;8\right\}$; c) $\left\{-1-\frac{3}{4};0;2;\sqrt{5};\sqrt{101}\right\}$; d) $\{-1;+1;0\}$; e) $\{-2;-1;0\}$; f) $\{-\sqrt[3]{2};-1;0;1\}$; h) $\{1\}$. **6.** $f(x)=2x+2$. **7.** a) $f(x)=8x-3$; b) $f(x)=-x+\sqrt{3}+\sqrt{2}$; c) $f(x)=10$; d) $f(x)=x-1$; f) 8 soluţii: $f(x)=-6x+6$; $f(x)=-\frac{1}{6}x+1$; $f(x)=-\frac{3}{2}x+3$; $f(x)=-\frac{2}{3}x+2$; $f(x)=-\frac{3}{2}x-3$; $f(x)=-\frac{2}{3}x-2$; $f(x)=-6x-6$; $f(x)=-\frac{1}{6}x-1$. **8.** a) f strict crescătoare pentru $m\in(0,\infty)$; b) f strict crescătoare pentru $m\in\mathbb{R}$; c) f strict descrescătoare pentru $m\in\mathbb{R}$; d) f strict crescătoare pentru $m\in(-\infty,1)$; e) f strict crescătoare $\forall m\in\mathbb{R}$. **11.** a) $\mathbb{R}$; b) $(-5,\infty)$; c) $\{-3\}\cup(2,\infty)$; d) $(-\infty,-21)\cup[2,5]$; e) $[0;1)\cup(2;7]$; f) $\{3k\mid k\in\mathbb{N}\}$; g) $\{-1;0;1\}$. **12.** $f_1(x)+f_2(x)=\begin{cases}-x+1, & x\le -2\\ 4x-21, & x>-2\end{cases}$; $f_2(x)+f_3(x)=\begin{cases}3x-1, & x\le-2\\ 2x-4, & x\in(-2,3]\\ 3x-2, & x>3.\end{cases}$ **13.** $(f_1\circ f_2)(x)=\begin{cases}-6x+3, & x\le-2\\ 4x-3, & x>-2\end{cases}$; $(f_2\circ f_1)(x)=\begin{cases}-6x+5, & x\le-\frac{1}{2}\\ 4x-3, & x>-\frac{1}{2}\end{cases}$. **14.** $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{\text{de } n \text{ ori}}=a^nx+(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)b=\begin{cases}a^nx+\frac{a^n-1}{a-1}\cdot b, & a\ne1\\ x+nb, & a=1.\end{cases}$ **15.** a) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; b) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$; c) $f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x$. **16.** a), c), f nu este bijectivă; b) f bijectivă, $f^{-1}=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, & x>-3\\ -x-1, & x\le-3\end{cases}$; **17.** $f^{-1}(x)=\begin{cases}-x+3, & x\in\mathbb{Q}\\ \frac{2}{x}, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. **18.** a) Fie $f(x)=ax+b\overset{a,b\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow}(f\circ f)(x)=a^2x+ab+b=$ $\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b(a+)=1\end{cases}=\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\nexists f$; b) $g(x)=-x+b$, $b\in\mathbb{Z}$. **19.** a) $m>0$; b) $m\ge4$; c) $m\le4$; d) $m=4$, $f^{-1}(x)=\begin{cases}x-2, & x<4\\ \frac{1}{4}x+1, & x\ge4\end{cases}$. **20.** a) $n>0$, $m\le0$; b) $m\ge0$, $n>0$; c) $n>0$;$m=0$. **21.** Funcţia f se numeşte funcţia lui Dirichlet, este periodică şi are ca perioadă orice număr raţional. Pentru $x\in\mathbb{Q}$, $f(x+T)=f(x)=1\Rightarrow x+T\in\mathbb{Q}\Rightarrow T\in\mathbb{Q}$. Pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $f(x+T)=f(x)=0\Rightarrow x+T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $T\in\mathbb{Q}$ sau $T\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $\forall T\in\mathbb{Q}$ avem $f(x+T)=f(x)$. (Nu are perioadă principală). **22.** Fie f crescătoare şi periodică de perioadă $T>0\Rightarrow f(x+T)=f(x)$ (1). Fie $x\in[0,T]\Leftrightarrow 0\le x\le T\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(T)$ (2). În (1) pundem $x=0\Rightarrow f(0)=f(T)$ şi cu relaţia (2) $\Rightarrow f(x)=f(0)$, unde $f(0)$ este o constantă. **23.** Cum f este surjectivă $\Rightarrow\exists m\in\mathbb{N}^*$ cu $f(m)=1$. Cum $a_n=\frac{n}{f_n}$ este crescător $\Rightarrow\frac{m}{f(m)}\le\frac{m+1}{f(m+1)}\Rightarrow f(m+1)\le1+\frac{1}{m}\le2$ şi cum $f(m+1)\in\mathbb{N}^*\Rightarrow f(m+1)\in\{1;2\}$. Dar $f(m)=1\Rightarrow f(m+1)=2$ (f injectivă) $\Rightarrow m=1$ şi deci $f(1)=1$, $f(2)=2$. Prin inducţie matematică se arată că $f(n)=n$. deci există o singură funcţie cu aceste proprietăţi, funcţia identică $f=1_{\mathbb{N}}$. **24.** a) $\alpha=7$, $f(x)=2x+1$. **25.** a) $m>0$; b) $m=0$. **27.** Funcţia $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

satisface condiţia $g(3n+1)=n$. Ecuaţia $3n+1=x\in\mathbb{Z}$ ne conduce la funcţia $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g(n)=\begin{cases}\left[\dfrac{n-1}{3}\right], & n\geq 1\\ 0, & n=0\end{cases}$, $[a]$ este partea întreagă a numărului a. Deci $(g\circ f)=g(3n+1)=\left[\dfrac{3n+1-1}{3}\right]=n$, g satisface proprietatea cerută. Demonstrăm că pentru orice funcţie $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ cu proprietatea $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$ satisface proprietatea $f\circ g\neq 1_{\mathbb{N}}$. Folosim metoda reducerii la absurd, dacă $f\circ g=1_{\mathbb{N}}$ şi $g\circ f=1_{\mathbb{N}}$, atunci funcţia f este inversabilă, deci bijectivă, contradicţie, deoarece f nu este surjectivă. **28.** $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)=-x+a$, $f(0)=a\in\mathbb{R}$, $h(x)=x^2-ax+b$, $b=h(0)\in\mathbb{R}$. **29.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) A; g) A; h) A; i) A; j) A, $B_1\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};0\right)$ şi $B_2\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};0\right)$; k) A; l) A. **30.** a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	1 (m)	$\nearrow$

; $\min f(x)=1=f(0)$; b)

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ (M)	$\searrow$

; $\max f(x)=\dfrac{1}{4}=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$; c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4 (M)	$\searrow$

; $\max f(x)==4=f(0)$; d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-9 (m)	$\nearrow$

; $\min f(x)=-9=f(0)$; e)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ (M)	$\searrow$

; $\max f(x)=\dfrac{1}{4}=f(-1)$; f)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0 (m)	$\nearrow$

; $\min f(x)=0=f(3)$; g)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0 (M)	$\nearrow$

; $\max f(x)=0=f(0)$; h)

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$ (m)	$\nearrow$

; $\min f(x)=-\dfrac{9}{8}==f\left(\dfrac{5}{2}\right)$. **32.** a)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

; b)

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$+$	$+$

; c)

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$

; d)

x	$-\infty$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

; e)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

; f)

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$

.

33. a) $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$; b) $[0,+\infty)$; c) $\left(-\infty,-\dfrac{11}{4}\right]$; d) $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{6},+\infty\right]$; e) $(-\infty,9]$; f) $[4,\infty)$. **34.** $f(x)=7x^2-x-4$. **35.** a) $f(x)=ax^2-ax+4$, $a\in\mathbb{R}^*$; b) $f(x)=ax^2-4ax+3$, $a\in\mathbb{R}^*$. **36.** $f(x)=-x^2+x+6$ sau $f(x)=-x^2-9x-4$. **37.** a) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)\\ -x^2+4, & x\in(-2;2)\end{cases}$; b) $f(x)=x^2+2x-1$; c) $f(x)=\begin{cases}x^2-6x, & x\in(-\infty,0]\cup[2,\infty)\\ -x^2-2x, & x\in(0;2)\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}x^2-x-6, & x\in(-\infty,-2]\cup[3,\infty)\\ -x^2+x+6, & x\in(-2;3)\end{cases}$; e) $f(x)=\begin{cases}2x^2-3x-1, & x\in(-\infty,-1]\cup(3,\infty)\\ 3x+1, & x\in(-1,0)\\ -2x^2+3x+1, & x\in[0,1)\\ 3x-1, & x\in[1,3]\end{cases}$; f) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-4, & x\in(-\infty,0)\\ -x^2+2x-4, & x\in[0,1]\\ x^2-4, & x\in(1;\infty)\end{cases}$. **38.** a) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)\\ -2x+9, & x\in(-3;3)\end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in (-\infty,1] \cup [2,\infty) \\ 2x^2-3x+3, & x \in (1;2) \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,-1) \cup (2,\infty) \\ x^2-2, & x \in [-1;2] \end{cases}$;
d) $f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \\ x^2, & x \in (-\infty,-1-\sqrt{2}) \cup \cup(-1+\sqrt{2},\infty) \end{cases}$. **39.** $n \in \emptyset$. **40.** a) $\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right] \cup$ $[1,\infty)$; b) $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \infty\right)$; c) $\emptyset$; d) $\mathbb{R}$; e) $(-\infty,-3) \cup \left(-2, \frac{-7-\sqrt{57}}{8}\right] \cup$ $\left[\frac{-7+\sqrt{57}}{8}, +\infty\right)$; f) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; g) $[-6;1] \cup [2;3] \cup$ $\cup(5;6)$; h) $(-\infty,-2] \cup [3,\infty)\setminus\{+5\}$; i) $(-\infty,2)\setminus\{1\}$; j) $x \in \left(-1,\frac{2}{3}\right]$. **41.** a) $[1;2)$; b) $(-\infty;-7) \cup$ $[3,\infty)$; c) $(-\infty;-3) \cup [3,4)$; d) $(3;4]$. **42.** a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} = \begin{cases} x-2, & x<2 \\ \sqrt{x-2}, & x \geq 2 \end{cases}$; b) $f_x^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1} = \begin{cases} 2-\sqrt{x-2}, & x>2 \\ 2+\sqrt{2-x}, & x \leq 2 \end{cases}$. **43.** a) $m \in \{-1;5\}$; b) $m=2$; c) $m \in \left\{-\frac{7}{3};1\right\}$; d) $m \in \left\{0;\frac{3}{2}\right\}$; e) $m=1$; f) $m \in \left\{\frac{-9\pm\sqrt{57}}{3}\right\}$; g) $m \in \left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$; h) $m=2$; i) $m \in \{\pm 7;2\}$; j) $m \in \{3\pm\sqrt{14}\}$. **44.** a) $m \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$; b) $m \in (-\infty,-1) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\setminus\{1\}$; c) $m \in (-2,0) \cup (3,\infty)$ şi $m \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$; d) $m \in \mathbb{R}^*$; e) $m \in \mathbb{R}$. **45.** a) $m \in \left\{\pm\frac{7}{6}\right\}$; b) $m \in \left\{\frac{\pm 6 \pm \sqrt{11}}{2}\right\}$. **46.** $S_{n+2} + mS_{n+1} + 2S_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\ldots$, $S_2 + mS_1 + 4 = 0$. Se însumează aceste relaţii. **47.** $m \in [5,\infty)$. **48.** a) $m \in (-2,1)$; b) $m \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$; c) $m \in \{-2;1\}$; d) $m=-1$. **49.** a) $m \in \{+\sqrt{2}\}$; b) $m=2$; **50.** $m=\frac{4}{5}$. **51.** $p=2$. **52.** a) $m \in (-\infty,-2]$; b) $m \in \left(\frac{-7\pm 2\sqrt{14}}{7}, +\infty\right)$; c) $m \in \left(-\infty, \frac{-11-2\sqrt{13}}{3}\right)$. **53.** a) $m \in \left(\frac{-5+2\sqrt{7}}{3}, 0\right)$; b) $m \in \left(\frac{-5+2\sqrt{7}}{3}, 0\right)$. **55.** a) $A_1(0;1)$, $A_2(1;2)$; b) $y = \frac{x^2+2x-1}{2x-1}$. **56.** a) $A(1,0)$; b) $y-x+1=0$; c) $\{(x,y) \in d \mid d: y-x+1=0, x \in (-\infty,1)\}$; d) $m \in \{-3;-2;0;1\}$. **57.** a) 2; 1; 9; 13; 49; b) $x_1^{n+2} - x_1^{n+1} - 4x_1^n = 0$ şi $x_2^{n+2} - x_2^{n+1} - 4x_2^n = 0$. Se adună cele două relaţii; c) $\frac{11}{13}$. **58.** $S_{k+2} + mS_{k+1} + S_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Se însumează cele $n+1$ relaţii, $k=\overline{0,n}$. **59.** b) $a=4$, $f(x) = 2x^2-2x+2$ (P); c) $d: y=3x+m$; $m > -\frac{9}{8}$, două puncte de intersecţie; $m=-\frac{9}{8}$, dreapta (d) este tangentă la curba (P); $m < -\frac{9}{8}$, $d \cap P = \emptyset$. **60.** a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(ax-a_i)^2 =$ $na^2x^2 - 2a\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} a_i^2$; deoarece $a^2 > 0$, atunci trinomul f are un minim dat de $\frac{-\Delta}{4na} =$ $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{n}$ (nu depinde de a; b) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)=0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_{10}$, $X = \frac{a_i}{a} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq n \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ şi cum $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1 \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sqrt{n}$. **61.** a) Se demonstrează că $3+2\cos a - 2\sin a > 0$ şi $\Delta \leq 0$; b) $\min f = \frac{2(\cos a+1)(\sin a-1)}{3+2\cos a - 2\sin a} = \frac{1}{5}$.

62. a) $p^3y^2 - p(p+2)(p-4)y - 2(p^2-8) = 0$; b) $p(p-2)$ este valoarea comună celor doi membri ai egalității. **63.** a) $m \in \emptyset$; b) $m < 0$; c) $m \in \emptyset$. **64.** $\left(-\infty, \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup (-1, \infty)$. **65.** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{2\}$. **66.** 2. **67.** $x = -2$, $y = 1$. **68.** $\frac{12+2\sqrt{6}}{15} < \frac{5}{3}$. **69.** a) $\left\{(1;1); \left(\frac{1}{3};3\right)\right\}$; b) $\left\{(1;1); \left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)\right\}$; c) $\left\{(2;1); \left(\frac{14}{17};\frac{97}{17}\right)\right\}$; d) $\{(1;1);(7;-11)\}$. **70.** $m = -2$. **71.** a) $\{(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}); (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})\}$; b) $\{(1;8);(8;1);(2;5);(5;2)\}$; c) $\{(1;2);(2;1);(-1;-2);(-2;-1)\}$. **72.** a) $\{(1;81);(81;1)\}$; b) $\left\{\left(-9;-\frac{9}{4}\right);(4;1)\right\}$; c) $\{(16;243);(81;32)\}$; d) $\{(1;2);(2;1)\}$; e) $\{(-3;-2);(-2;-3);(2;3);(3;2)\}$. **73.** a) $\left\{(1;3);(-1;-3);\left(\frac{13}{2\sqrt{2}};\frac{-39}{34\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{13}{2\sqrt{2}};\frac{39}{34\sqrt{2}}\right)\right\}$; b) $\left\{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right);\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$. **74.** $\{(1;2);(2;1)\}$. **75.** $x_1 = \frac{15\cdot 2^{n-1}}{2^n-1}$; $x_2 = \frac{15\cdot 2^{n-2}}{2^n-1}$;...; $x_n = \frac{15}{2^n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **76.** $\left\{\left(\underbrace{\sqrt{2},\sqrt{2},\ldots,\sqrt{2}}_{\text{de } n \text{ ori}}\right);\left(\underbrace{-\sqrt{2},-\sqrt{2},\ldots,-\sqrt{2}}_{\text{de } n \text{ ori}}\right)\right\}$. **77.** a) $\{(3;3;3)\}$; b) $\{(2;-5;-4);(-2;-1;0)\}$. **78.** $x = y = z = \pm\frac{1}{2}$. **79.** $MD = \frac{1}{3}AD$. **80.** M coincide cu centrul cercului. **81.** $x = 10$ cm. **82.** $l = 30$ m și $L = 30$ m. **83.** Tăierea se face la jumătatea înălțimii. **84.** Minimul de benzină este 720 l. Prima mașină merge 12,5 zile, iar a doua 8,3 zile. **85.** $h = \sqrt{6}$. **86.** f injectivă pentru $m \in \mathbb{R}$, f inversabilă pentru $m \geq 0$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[m - \sqrt{m^2+4(1-x)}\right], & \text{dacă } x \leq 0 \\ x-1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. **88.** Dacă $\Delta_1 \geq 0$ și $\Delta_2 \geq 0$, atunci $b^2 - 4ac \geq 0$ și $b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$. Se obține $b_1^2b_2^2 - 4aca_1c_1 \geq 4(a_1b_1^2c_1 + a_1b_1^2c - 5aa_1cc_1) \geq 0$. **89.** a) $\Delta \geq 0$ și $f(-1)\cdot f(1) > 0$; b) $\Delta < 0$ și $|x_1|\cdot|x_2| = |c|$. **91.** Se folosește metoda inducției matematice. **92.** $S_{k+2} + bS_{k+1} + cS_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. În această relație se dau lui k valorile naturale de la 0 la n și se însumează cele $(n+1)$ relații. **94.** $g(f(x)) = f(g(x)) \Rightarrow g(x^2-3x+4) = g^2(x) - 3g(x) + 4$. Pentru $x = 2 \Rightarrow (g(2)-2)^2 = 0 \Rightarrow g(2) = 2$. **96.** 1) c; 2) d. **97.** 1) c; 2) c; 3) e. **98.** $a = \frac{8}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. **99.** 1) a; $f(x) = \frac{m(|x|+|x-3|)+3}{6(m+1)} + \frac{5m(|x|-|x-3|)+15-30x}{6(m-3)}$, f bijectivă $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow$ 2) c. **100.** $x \to x+2a \Rightarrow f^2(x) + f^2(x+3a) + f^2(x+4a) + f^2(x+7a)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $x \to x+3a \Rightarrow f^2(x) + f^2(x+2a) + f^2(x+6a) + f^2(x+8a)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^2(x) = f^2(x+12a)$, $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(x+12a) \Rightarrow f$ este periodică cu perioada $12a \Rightarrow T = 12$, iar perioada funcției g este 24.

GEOMETRIE

Capitolul I. PARALELISM ȘI CALCUL VECTORIAL

1. a) $2\overline{MA} + 3\overline{MB} = 2\overline{MA} + 3(\overline{MA} + \overline{AB}) = 5\overline{MA} + 3\overline{AB} = 5\overline{MA} + 30 \Rightarrow \overline{MA} = -6$. b) $0 = 2\overline{NA} - 3\overline{NB} = 2\overline{NA} - 3(\overline{NA} + \overline{AB}) = -\overline{NA} - 30 \Rightarrow \overline{NA} = -30$. c) $PA^2 = \overline{PA}^2 = \overline{AP}^2$. Așadar egalitatea $4PA^2 - 9PB^2 = 0$ are loc $\Leftrightarrow$ cel puțin una din egalitățile: (1) $4\overline{PA}^2 - 9\overline{PB}^2 = 0$ sau (2) $4\overline{PA}^2 - 9\overline{BP}^2 = 0$ sau (3) $4\overline{AP}^2 - 9\overline{PB}^2 = 0$ sau (4) $4\overline{AP}^2 - 9\overline{BP}^2 = 0$. Din (1) $\Rightarrow (2\overline{PA} - 3\overline{PB})(2\overline{PA} + 3\overline{PB}) = 0 \Rightarrow 2\overline{PA} - 3\overline{PB} = 0$ sau $2\overline{PA} + 3\overline{PB} = 0 \Rightarrow \overline{PA} = -30$, respectiv $\overline{PA} = -6$. Așadar $P = N$ sau $P = M$, M, N punctele determinate de a) și b). Analog, pentru relațiile (2) – (4). **2.** a) Fie x_M abscisa lui M în raport cu reperul (A, D) al dreptei AD și x_N abscisa lui N în raport cu reperul (B, C) al dreptei BC.

Deci $x_M = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BN}}{\overline{BC}} = x_N$. Conform reciprocei teoremei lui Thales $\Rightarrow (MN)||(AB)$ şi cum $(AB)||(CD) \Rightarrow (MN)||(CD)$. b) Fie P mijlocul lui $[AC]$ şi Q mijlocul lui $[BD]$. Cum $\frac{\overline{AM}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \Rightarrow$ conform teoremei lu Thales $(MP)||(DC)$ şi cum $(DC)||(AB) \Rightarrow (MP)||(AB)$. Analog $(MQ)||(AB)$. Cum prin M se poate duce o singură paralelă la (AB) (postulatul lui Euclid) $\Rightarrow (MP) = (MQ) \Rightarrow M$, P, Q, N coliniare. **3.** Presupunem că A_1, B_1, C_1 sunt coliniare şi fie C' intersecţia cu dreapta AB a paralelei prin C la (A_1C_1). Conform teoremei lui Thales avem: $x_B = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1C'}}$ şi $x_C = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{C_1C'}}{\overline{C_1A}} \Rightarrow x_A \cdot x_B \cdot x_C = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{C_1B}}{\overline{C_1C'}} \cdot \frac{\overline{C_1C'}}{\overline{C_1A}} = 1$. Reciproc, presupunem $x_A \cdot x_B \cdot x_C = 1$. Dacă C_1' este intersecţia (A_1B_1) cu (AB), atunci conform primei părţi a demonstraţiei $x'_A \cdot x_B \cdot x_C = 1$, unde $x'_A = \frac{\overline{C_1'A}}{\overline{C_1'B}}$. Din $x_A \cdot x_B \cdot x_C = 1$ şi $x'_A \cdot x_B \cdot x_C = 1 \Rightarrow x_A = x'_A$, adică $\frac{\overline{C_1'A}}{\overline{C_1'B}} = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_2B}} \Rightarrow C_1' = C_1 \Rightarrow A_1$, B_1, C_1 sunt coliniare. Notând x_A^0, x_B^0, x_C^0 abscisele punctelor A, B, C, respectiv în raport cu reperele (B_1, C), (C_1, A), (A_1, B), ale dreptelor CA, AB, BC, adică $x_A^0 = \frac{\overline{B_1, A}}{\overline{B_1C}}$, $x_B^0 = \frac{\overline{C_1, B}}{\overline{C_1A}}$, $x_C^0 = \frac{\overline{A_1, C}}{\overline{A_1B}} \Rightarrow x_A^0 x_B^0 x_C^0 = 1 \Leftrightarrow$ punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare. **Observaţie.** Cum $x_A \cdot x_B \cdot x_C = 1 \Rightarrow$ abscisele x_A, x_B, x_C sunt două numere negative şi unul pozitiv sau toate pozitive. Aşadar, dintre punctele coliniare A_1, B_1, C_1 două sunt pe laturile triunghiului ABC şi unul pe prelungirea celei de a treia laturi sau toate sunt pe prelungirile laturilor triunghiului ABC. **4.** Presupunem că A_1, B_1, C_1 se află pe laturile triunghiului ABC. Atunci $x_A, x_B, x_C \in \mathbb{R}$. Presupunem, de asemenea, că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente într-un punct I. Aplicăm teoerema lui Menelaus în $\triangle ABA_1$, cu punctele coliniare C, I, C_1, avem: $\frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{IA_1}{IA} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$. Aplicăm teoerema lui Menelaus în $\triangle AA_1C$, cu punctele coliniare B, I, B_1, avem: $\frac{BC}{BA_1} \cdot \frac{IA_1}{IA} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} = 1$. Împărţind cele două relaţii se obţine: $\frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1$. Cum $\overline{CB} = -\overline{BC}$, $\overline{BA_1} = -\overline{A_1B}$ şi $\overline{CA_1} = -\overline{A_1C}$, avem $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -!$, deci $x_B \cdot x_C \cdot x_A = -1$. Dacă A_1 se află pe latura (BC), iar B_1, C_1 pe prelungirile laturilor şi dreptele BA_1, CC_1, AA_1 sunt concurente, respectiv paralele . În primul caz se demonstrează în mod analog că $x_B \cdot x_C \cdot x_A = -1$, iar pentru celălalt caz $((AA_1)||(BB_1)||(CC_1))$. Se aplică teorema lui Thales: $\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{BA_1}$ şi $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{CA_1}{CB}$ şi deci $x_B \cdot x_C \cdot x_A = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{BC}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{CB} = -1$. Reciproc, presupunem că $x_B \cdot x_C \cdot x_A = -1$ şi că $x_A < 0$, $x_B < 0$, $x_C < 0$. Atunci A_1, B_1, C_1 se află pe laturile triunghiului ABC. Fie I intersecţia lui BB_1 cu CC_1 şi $\{A_1'\} = AI \cap (BC) \Rightarrow x_A \cdot x'_B \cdot x_C = -1$, unde $x'_B = \frac{A_1'B}{A_1'C} \Rightarrow A_1' = A_1$. Deci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concuremte în I. Analog se demonstrează celelalte cazuri. **5.** Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor triunghiului ABC; notăm h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor. $\triangle AA_1B \sim \triangle CC_1B \Rightarrow \frac{A_1B}{C_1B} = \frac{h_a}{h_c}$. Analog $\frac{B_1C}{A_1C} = \frac{h_b}{h_a}$, $\frac{C_1A}{B_1A} = \frac{h_c}{h_b} \Rightarrow x_B \cdot x_C \cdot x_A = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{A_1C} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -\frac{h_a}{h_c} \cdot \frac{h_b}{h_a} \cdot \frac{h_c}{h_b} = -1$. Deci, conform teoremei lui Ceva înălţimile sunt concurente, unde x_A, x_B, x_C sunt abscisele punctelor A, B, C în raport cu reperele (A_1, C), (B_1, A), (C_1, B) ale dreptelor BC, AC, AB. **6.** Paralela prin B la GC şi paralela prin C la GB se intersectează în punctul D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA}$. **7.** Fie punctul D intersecţia dreptei AM cu paralela la dreapta AC dusă prin B. În triunghiul ABD avem: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

8. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$. **9.** Cum M şi N sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB]$, $[DC]$, avem: $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Aşadar $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$. Cum $(BC)\|(AD)$, vectorii $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari, nenuli, de acelaşi sens, prin urmare $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, astfel încât $\overrightarrow{AD} = \alpha\cdot\overrightarrow{BC}$. Deci $AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \|\alpha\cdot\overrightarrow{BC}\| = \alpha\cdot BC \Rightarrow MN = \frac{1+\alpha}{2}\overrightarrow{BC}$. Deci $MN = \|\overrightarrow{MN}\| = \left\|\frac{1+\alpha}{2}\cdot\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1+\alpha}{2}\cdot BC = \frac{1}{2}(BC+\alpha BC) = \frac{1}{2}(BC+AD)$. **10.** Se poate folosi regula triunghiului pentru adunarea vectorilor în triunghiurile ABA_1, BCB_1, CAC_1. $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **11.** b) Au loc relaţiile: $\overrightarrow{AA'} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$. Se însumează $\Rightarrow \sum\overrightarrow{AA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{b+c}+\frac{c}{a+c}-1\right)\overrightarrow{BC}+\left(\frac{b-c}{b+c}+\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a+c}\right)\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{c}{b+c}+\frac{c}{a+c}-1 = 0$ şi $\frac{b-c}{b+c}+\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a+c} = 0$ (deoarece $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari) $\Leftrightarrow a=b=c$. **12.** $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\ldots$ **13.** $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CG}$, $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG} = \vec{0}$. **14.** $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1}$ şi analoagele. Se însumează. **15.** Se arată că $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})$ şi rezultă $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **16.** Fie $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ şi analoagele $\Rightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}) = \vec{0}$. Analog se arată că $\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'} = \vec{0}$. Avem $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}$ şi analog. **17.** a) $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AM}$. Se înlocuiesc $\Rightarrow \overrightarrow{M'A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. b) Dacă $G\in\mathcal{P}$, avem $G' = G \Rightarrow \overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Reciproc, dacă $G\in\mathcal{P}$ satisface relaţia $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, atunci $\overrightarrow{GA}+2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Cum $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow G = G'$. c) $\forall M\in\mathcal{P}$: $\overrightarrow{GM'} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{GA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$. Observăm că $\forall M\in\mathcal{P}$, punctele M, M' şi G' sunt coliniare. **18.** $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA}-5(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}) = -5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC} =$ constant, pentru orice punct M aparţinând planului triunghiului ABC. **19.**b) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$; c) $\overrightarrow{PM} = 2\cdot\overrightarrow{NM} \Rightarrow P, N, M$ coliniare, $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NM}$, deci N este mijlocul segmentului $[MP]$. d) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow (QR)\|(MN)$. **20.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ şi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1N} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}$, analog $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{P_1C_1}$ **21.** Fie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$. **22.** $A(3;5)$; $B(-2;3)$; $C(-1;-2)$; $D(0;-2)$; $E(3;-1)$; $F(4;0)$ **23.** $A(-1;2)$; $B(3;-1)$; $A_1(1;5)$; $B_1(5;2)$. **24.** $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ sunt nenuli şi necoliniari $\Rightarrow$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ formează o bază pentru vectorii planului paralelogramului $ABCD$, $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}+\vec{0},\ldots$ **25.** M este mijlocul lui $[AC]$; $M\left(4;\frac{1}{2}\right)$, M este mijlocul lui $[BD]$, $D(7;-5)$. **26.** $M\left(\frac{3}{2};-1\right)$, $N\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$, $P\left(4;\frac{1}{2}\right)$, $Q(3;2)$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = \vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}$. **27.** a) $\overrightarrow{C_1A} = x_A\vec{u}$, $\overrightarrow{A_1B} = x_B\vec{v}$, $\overrightarrow{B_1C} = x_C\vec{w}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{C_1B} = (1-x_A)\vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = (1-x_B)\vec{v}$, $\overrightarrow{CA} = (1-x_C)\vec{w}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{CB_1} = \vec{v}-x_C\vec{w}$ şi $\vec{u} = \frac{1-x_B}{x_A-1})\vec{v}+\frac{1-x_C}{x_A-1}\vec{w}$; $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC_1} = x_B\vec{v}-\vec{u} = \left(\frac{1-x_Ax_B}{1-x_A}\right)\vec{v}+\frac{1-x_C}{1-x_A}\vec{w}$. Vectorii $\vec{v}$, $\vec{w}$ sunt nenuli şi necoliniari $\Rightarrow \{\vec{v};\vec{w}\}$ este o bază pentru vectorii din planul triunghiului ABC, prin urmare $\overrightarrow{A_1B_1}$ şi $\overrightarrow{A_1C_1}$ sunt vectori coliniari $\Leftrightarrow 1\cdot\frac{1-x_C}{1-x_A}=\frac{1-x_Ax_B}{1-x_A}(-x_C)\Rightarrow x_Ax_Bx_C=1$. **28.** $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{BA_1}{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{AA_1}{CC_1}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1}=-\overrightarrow{AB}+\frac{BB_1}{CC_1}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{BB_1}{CC_1}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{BB_1-CC_1}{CC_1}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{BB_1}{CC_1}\cdot\overrightarrow{BC}$. Deoarece $\overrightarrow{AA_1}\|\overrightarrow{BB_1}$ şi $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{BC}\Rightarrow\frac{BB_1-CC_1}{CC_1}=\frac{BB_1}{AA_1}$. **29.** $AC\cap BD=\{O\}$. O este mijlocul segmentului $[EF]$ şi $\overrightarrow{EO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=\frac{BO}{BD}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{BC}{AD+BC}\cdot\overrightarrow{AD}$. **30.** $|\vec{u}|=\sqrt{10}$; $|\vec{v}|=2\sqrt{10}$. **31.** $\vec{s}=\vec{0}$. **32.** a) $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}+4\vec{j}$; $\overrightarrow{AC}=-5\vec{i}-\vec{j}$; $\overrightarrow{BC}=-\vec{i}-5\vec{j}$; b) $D\left(-\frac{9}{2};\frac{5}{2}\right)$. **33.** $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+4\vec{j}=2(\vec{i}+2\vec{j})=2\cdot\overrightarrow{BC}$. **34.** $a\in\{-1\pm2\sqrt{2};-2\pm2\sqrt{2}\}$. **35.** $x\in\left\{0;\frac{13}{3}\right\}$. **36.** a) $\vec{v}=\pm(6\vec{i}+8\vec{j})$; b) $3\vec{i}+4\vec{j}$; $3\vec{i}-3\vec{j}$; $-6\vec{i}-\vec{j}$; c) În cazul $|\vec{v}|\neq5$ avem $M(3a;4a)$, $N(6a;a)$, unde $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ şi avem un punct comun. Dacă $a=-1$, dreptele sunt paralele. **37.** a) $\vec{i}+a\vec{j}$; $\vec{i}-a\vec{j}$; b) $A(p;ap)$, $B(q,aq)$, $\frac{CA}{CB}=\frac{p}{q}$. **38.** Folosim coordonate. **39.** Simetricul lui O faţă de dreapta (d) este punctul $B(-2;2)$. Minimul se obţine pentru $\{M\}=d\cap AB$. **40.** a) $4+\sqrt{37}+\sqrt{61}$; b) $x+6y+15=0$; c) $MB:\ x+2y+3=0,\ldots$; d) $CD\perp AB$, $CD:\ 6x-y+20=0$. e) Mijlocul segmentului $[AC]$, $M(-3;0)$, $h\perp AC$, $M\in h$; $h:\ y=0;\ldots$ **41.** $C(1;6)$; $\left(\frac{5}{2};\frac{9}{2}\right)$. **42.** $C(5;-3)$; $D(1;-5)$; $AB:\ x-2y+13=0$; $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+2\vec{j},\ldots$ **43.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\lambda\in\emptyset$; c) 0; d) $-\frac{1}{2}$; e) -1; f) 1. **44.** a) 5; b) Două soluţii: 1) $B(1;-3)$, $C(3;-2)$, $D(4;-4)$; 2) $B(1;-3)$, $C(-1;-4)$, $D(0;-6)$. **45.** a) $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$; b) 2. c) $\sqrt{2}$.

Capitolul II. TRANSFORMĂRI GEOMETRICE

Tranlaţie **1.** Cerc (translatatul cercului dat). **2.** Generalizarea problemei precedente. Curba obţinută este transformata curbei iniţiale printr-o translaţie egală şi paralelă cu MN. **3.** Se translatează BD cu DC; se construieşte ΔACM. **4.** A, este intersecţia cercului cu transformata dreptei prin translaţia BA. **5.** Se translatează DC cu AD în AE; $\widehat{EAB}$ este cunoscut. **7.** C_1 şi C_2 fiind cercurile date şi C_2' translatatul cercului C_2 până când centrul său $O_2\in(O_1M$ $(O_1M\perp(d))$, $C_1\cap C_2=\{A,B\}$ dă soluţia problemei. **9.** Triunghiul $A'B'C'$ se obţine din ABC printr-o translaţie. ***Rotaţie*** **10.** Cele două segmente formează un paralelogram; diagonalele AA', BB' se întâlnesc în O. Acesta este centrul în jurul căruia o rotaţie de 180^0 aduce pe A în A' şi pe B în B'. **13.** Locul geometric al lui C este transformata lui xy printr-o rotaţie de 60^0 în jurul lui A, adică o dreaptă. Acelaşi raţionament când dreapta xy se înlocuieşte cu un cerc. ***Simetrie*** **22.** Trei paralelograme. **23.** Punctul de intersecţie al diagonalelor este centru de simetrie **24.** Simetricul unui cerc faţă de un punct dat se intersectează cu celălalt cerc într-una din extremităţile segmentului. **26.** Fie O intersecţia lui (D) cu (D_1), C' un punct pe (D)şi P' simetricul lui P faţă de C'. Locul lui P', când C' descrie dreapta D este o paralelă (Δ) la (D). Dreptele (D), (Δ) şi (D_1), $((D_2)$ formează un paralelogram cu un vârf în O. Diagonala care trece prin vârful O al acestui paralelogram dă direcţia secantei căutate. **28.** D fiind simetricul punctului H faţă de BC, $m(\widehat{BDC})=m(\widehat{BHC})=180^0-m(\widehat{A})$ (laturile perpendiculare). **29.** (D_4) fiind simetrica dreptei (D_1) faţă de (D_2), se ia simetricul faţă de (D_2) al punctului de intersecţie dintre (D_4) şi (D_3). **30.** Simetrica lui Oy faţă de (D) întâlneşte Ox în A. Punctul B se află ducând perpendiculara din A pe (D). **31.** P este la intersecţia dreptei (D) cu bisectoarea unghiului format de (D') cu perpendiculara în O pe dreapta (D). ***Omotetie*** **37.** Se construieşte pătratul $MNPQ$ având vârfurile $M, N \in (BC)$, $Q \in (BA)$, iar pătratul dorit este omoteticul său $M'N'P'Q'$ faţă de B astfel încât $P' \in (AC)$. **38.** Se construieşte triunghiul $D'E'F'$, având laturile paralele cu trei drepte date şi având două vârfuri pe două laturi ale triunghiului ABC. Se unesc punctele A şi D' şi fie $\{D\} = BC \cap AD'$. În omotetia de centru A şi raport $\frac{AD}{AD'}$, triunghiul $D'E'F'$ se transformă în triunghiul DEF, care este triunghiul ce trebuie construit. **39.** i) o dreaptă d' paralelă cu d; ii) un cerc $C(O', R')$, omoteticul cercului $C(O, R)$ în omotetia $T\left(A', \frac{1}{3}\right)$, A' fiind mijlocul lui BC. **40.** Un cerc $C(O_1, R')$, unde $O_1 \in (OA)$, $AO_1 = k_1 \cdot AO$ şi $R' = k_1R$, unde $\frac{AM_1}{AM} = \frac{d}{d+R} = k_1$. $\boxed{\textit{Transformări geometrice}}$ **45.** Centrul de simetrie este centrul de rotaţie ($\alpha = 180^0$). **46.** Translaţie de vector $2OO'$. **48.** Centrul de rotaţie este punctul de intersecţie al axelor, iar unghiul este 2α (α este unghiul celor două axe). **49.** Translaţia AA', urmată de simetrie faţă de bisectoarea lui A. O infinitate de moduri.

Capitolul III. FUNCŢII TRIGONOMETRICE

1. $\sin^2 b$. **4.** $f^2 - 4eg$. **6.** 1. **9.** -1. **10.** $\frac{3}{2}$. **13.** $\frac{3}{4}\cos x$. **14.** 4. **15.** 2. **16.** $\cos^2 a$. **17.** 1. **18.** $\frac{9}{8}$ **19.** 0. **20.** $a = -\frac{12}{5}$, $b = 2$, $c = -\frac{4}{7}$. **21.** a) $\frac{1}{2}$; b) $8\sin 40^0$; c) $-\frac{1}{2}$. **22.** a) 1; b) $\frac{1}{8}$. **23.** a) $\sqrt{3}$; b) 4; c) 1; d) $\frac{\pi}{4}$. **24.** $\frac{13}{14}$. **25.** a) $\cos^2 x$; b) $\sin x$; c) $\frac{1}{|\sin x|}$. **26.** a) $m^2 - 2$; b) $m(m^2 - 3)$; c) $m^2 + m - 2$. **27.** $\frac{4 \cdot \sin x \cos x}{|\sin x \cos x|}$. **28.** $\alpha \pm \beta = k \cdot \pi$. **29.** a) 0; b) nu are sens. **31.** a) 7; b) 14; c) 7. **32.** a) 33; b) 27; c) 3. **33.** a) 90; b) 1035. **34.** a) 3; b) $\frac{13}{8}$ **35.** a) 3; b) 1; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **37.** $S_1 = \sqrt{3}$; $S_2 = 9$; $S_3 = 11\sqrt{3}$; $S_4 = 59$; $S_5 = 89\sqrt{3}$; $S_6 = 433$; $S = 101\sqrt{3} + 501$. **38.** $2\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$. **39.** a) 1; b) 1. **40.** $4\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{b+c-a}{2}\cos\frac{a+c-b}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}$. **41.** a) 0; b) 0. **42.** $\text{tg}\frac{\pi}{2n}$. **43.** $S = \frac{n}{2} + \frac{\sin 2na \cdot \cos(2n+1)a}{2\sin a}$; $S' = \frac{n}{2} - \frac{\sin 2na \cdot \cos(2n+1)a}{2\sin a}$; **44.** a) $\frac{\sin(2^{n+1}a)}{2^{n+1}\sin a}$; b) $\frac{\pi}{2^{n+1}+1}$; c) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$. **45.** $\frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$. **46.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. **47.** $\frac{7-\sqrt{26}}{2}$; $\frac{7+\sqrt{26}}{2}$.

Capitolul IV. RELAŢII METRICE

1. $p \in (1, \infty)$. Se aplică teorema sinusului. Rezultă $\cos C = -\frac{1}{2}$. **2.** $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$; $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot BD\cos A$; $\cos A = -\cos B, \ldots$ **3.** Se aplică teorema cosinusului. **4.** $OA^2 = AB^2 + OB^2 - 2AB \cdot OB\cos(ABO)$, $OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC\cos(OBC)$. se calculează suma: $OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB$ şi se ţine cont de $\cos(OBC) = -\cos(ABO)$. **5.** Fie $M \in AC$, astfel încât $\widehat{CMB} = \widehat{BAD}$; $\triangle BMC \sim \triangle BAD$ şi $\triangle BCD \sim \triangle AMB$, rezultă $DC \cdot AB = AM \cdot BD$ şi $BC \cdot AD = CM \cdot BD$; se adună cele două relaţii. **6.** Dacă T_1, T_2 sunt punctele de tangenţă, $T_1T_2 = \frac{\sqrt{2bc}}{2}$, b, c lungimile catetelor triunghiului dreptunghic. **7.** M, N mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD. Se aplică teorema medianei, medianei MN în $\triangle ANC$, medianei ANîn $\triangle ABD$, medianei CN în $\triangle DBC$ şi se înlocuiesc în prima ecuaţie celelalte două. **8.** Fie mediana AM şi înălţimea AD corspunzătoare vârfului A. $\text{tg}\widehat{DAM} = \frac{1}{2}\left(\text{ctg}\widehat{C} - \text{ctg}\widehat{B}\right)$. **9.** Se demonstrează că $\frac{d}{2} + l > \frac{d_1 + d_2}{2}$. Fie $OM \perp AB$, atunci $OM + AB > OA + OB \Leftrightarrow OM^2 + 2OM \cdot AB + AB^2 > OA^2 + 2OA \cdot OB \Rightarrow OM^2 > 0$, adevărat. **10.** Fie D mijlocul

lui $[BC]$ şi M un punct mobil pe cerc. Se aplică relaţia lui Steward punctelor A, O, D şi M; O este centrul de greutate al triunghiului ABC, $OA = \frac{2}{3}AD$, $OD = \frac{1}{3}AD$, MD este mediană în triunghiul $MBC \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3R^2 + l^2$, l lungimea laturii triunghiului $\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2l^2 =$ constant. **11.** Fie M proiecţia lui A pe BC; $AM = \frac{bc}{a}$, apoi $AD \cdot BM = AB \cdot DE$ **12.** În triunghiul ABB': $AB' = c\cos A$, $\Delta AB'C'$ (T. sim): $\frac{B'C'}{\sin A} = \frac{AB'}{\sin C'}$, $m(\widehat{AC'B'}) = m(\widehat{C}) \Rightarrow B'C' = a\cos A$, dacă $m(\widehat{A}) \leq 90^0$. Dacă $m(\widehat{A} \geq 90^0 \Rightarrow B'C' = -a \cdot \cos A$. **13.** Se demonstrează că $MA \leq MB + MC$. **14.** a) $C = 2\sqrt{7}$, $B = \arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$, $m(\widehat{A}) = \arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$; b) $c = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $b = \frac{4\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{3}$, $m(\widehat{C}) = 45^0$; c) $\cos A = \frac{5}{16}$, $\cos B = \frac{17}{18}$, $\cos C = \frac{83}{160}$. **15.** $a = 8\sqrt{3}$, $b = 8\sqrt{2}$, $c = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $m(\widehat{C}) = 15^0$. **16.** $b = 36\sqrt{5}$, $c = 60\sqrt{5}, \ldots$ **17.** $\cos A = +\frac{1}{2}$, $m(\widehat{A}) = 60^0$. **18.** $a = 2\sqrt{21}$, $b = 10$, $c = 8$. **19.** $\mathrm{tg}\frac{B-C}{2} = 1$, $m(\widehat{B}) = 105^0$, $m(\widehat{C}) = 15^0$. **21.** $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, $2S = bc\sin A \ldots$ **24.** a) Centrul cercului exînscris de rază r_a este intersecţia bisectoarei unghiului BAC din triunghiul ABC şi bisectoarelor exterioare unghiurilor B şi C ale triunghiului; b) $r_a = \frac{S}{p-a}, \ldots$ **27.** $p' = \frac{1}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$ **33.** $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{\pi}{6}$ şi $\widehat{C} = \frac{2\pi}{3}$. **40.** Se demonstrează că $m(\widehat{A}) = 120^0$. Se obţine $\mathrm{ctg}B\mathrm{ctg}C = \frac{2\cos(B-C)+1}{2\cos(B-C)-1}$.
41. Notăm $m\frac{(\widehat{A})}{3} = \alpha$, $m\frac{(\widehat{B})}{3} = \beta$, $m\frac{(\widehat{C})}{3} = \gamma$. Demonstrăm că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral, unde A', B', C' sunt intersecţiile trisectoarelor două câte două. În triunghiul $AB'C$, din teorema sinusurilor, avem $\frac{B'A}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $b = 2R\sin B \Rightarrow B'A = \frac{2R\sin 3\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $\sin 3\beta = 4\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$ şi $\gamma + \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow B'A = 8R\sin\gamma\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$. Analog $C'A = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)$. Se aplică teorema cosinusului în triunghiul $AB'C' \Rightarrow B'C' = 8R\sin\frac{A}{3}\sin\frac{B}{3}\sin\frac{C}{3}$. Cum $B'C'$ este simetrică în raport cu unghiurile A, B, C, rezultă că $A'C' = A'B' = B'C'$. **44.** $\frac{7\sqrt{17}a^2}{24}$. **45.** $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{2b}$. **46.** $\sum \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\sum NA''}{h}$, $MN \perp (ABC)$, $NA'' \perp BC$, $NB'' \perp AC$, $NC'' \perp AB$, $\sum \mathrm{ctg}\alpha = \frac{2S}{lh}$, $S = \text{aria}(\Delta ABC)$. **47.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **48.** 1. **49.** $\frac{32}{3}R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^4\alpha$ **50.** a) Fie $C \in (Oz$ cu $OC = 1$, $A \in (Ox$ şi $B \in (Oy$, $AC \perp OC$, $BC \perp OC \Rightarrow BC = \mathrm{tg}\alpha$, $OB = \frac{1}{\cos\alpha}$, $AC = \mathrm{tg}\beta$, $OA = \frac{1}{\cos\beta}$. Se aplică teorema cosinusului în triunghiurile OAB şi ABC. b) $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} \Rightarrow \frac{\sin C}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{1 - \sum\cos^2\alpha + 2\Pi\cos\alpha}}{\Pi\sin\alpha}$.

CLASA A X-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. FUNCŢII

$\boxed{\text{I.1}}$ **1.** a) $(f \circ g)(x) = 5^{5^{-1}x+2}$, $f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g\circ f)(x) = 5^{2x}\cdot 10^{-1}+1$; b) $(f\circ g)(x) = 5^{2x^5}+5^{x^5}+1$, $(g\circ f)(x) = \left(5^{2x}+5^x+1\right)^5$, $f\circ g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g\circ f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. **2.** a) $\text{Im} f = (2;\infty)$; b) $\text{Im} f = [12;\infty)$; f) $\text{Im} f = [\sqrt[4]{2};4)$. **3.** a) $x = 2$, $x = 3$; b) $x = 1$, $x = 2$; c) $x = 2$, $x = -1$; d) $x = 12$, $x = 6$; $x = -6$. **4.** a) $x = 5$, $x = 3$; b) $x = -1$, $x = -\frac{1}{3}$; c) $x = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **5.** a) $x = 2$; b) $x = 0$; $x = -1$, c) $x = 2$; d) $x = \frac{1}{\log_2 5 - 1}$; $x = \frac{1}{1-\log_2 5}$; e) $x = \frac{1}{\log_2 3 - 1}$. **6.** a) $S = \emptyset$; b) $x = -1$; d) $x = 3$; $x = -3$. **7.** a) $x \in [1+\log_2 3;\infty)$; b) $x \in [2;\infty)$; c) $x \in (-\infty;-1)\cup(3;\infty)$; d) $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;0)$. **8.** a) $x \in (-\infty;-2]\cup[2;\infty)$; b) $x \in (\log_2(3-\sqrt{5})-1;\log_2(3-\sqrt{5})+1)$; c) $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$; d) $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;0\}$. **9.** a) $x = 2$ şi $y = 4$; b) $S = \left\{(2;-1);(-1;2);\left(\frac{-3+\sqrt{105}}{6};\frac{-3-\sqrt{105}}{6}\right);\left(\frac{-3-\sqrt{105}}{6};\frac{-3-\sqrt{105}}{6}\right);\left(\frac{-3+\sqrt{105}}{6};\frac{-3+\sqrt{105}}{6}\right);\left(\frac{-3-\sqrt{105}}{6};\frac{-3+\sqrt{105}}{6}\right)\right\}$; c) $S = \{(12;10);(-10;-12)\}$; d) $x = 1$ şi $y = 2$. **10.** Se consideră ecuaţia ca o ecuaţie de gradul II în necunoscuta 3^x şi se obţine că $S = \emptyset$. **12.** Dacă prin reducere la absurd ar exista o funcţie injectivă cu proprietatea că $f(3^x)+f(5^x) = 4$, $\forall x \in (0,\infty)$, dându-i lui x , pe rând, valorile 1, respectiv $\log_3 5$, se obţine că $f(3) = f\left(5^{\log_3 5}\right)$ şi cum f este funcţie injectivă, rezultă că $3 = 5^{\log_3 5}$ sau $\log_3 3 = (\log_3 5)^2$ sau $\log_3 5 = 1$ sau $3 = 5$, absurd. Deci nu există funcţii care să verifice ipotezele problemei. **16.** $x = \frac{1}{2}$ soluţie unică. **20.** $x = 2$ şi $y = 1$ soluţie unică. **21.** $x = 0$ soluţie unică. **26.** Sistemul devine: $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$; $\left(\frac{2}{5}\right)^y+\left(\frac{3}{5}\right)^y = z$; $\left(\frac{2}{5}\right)^z+\left(\frac{3}{5}\right)^z = x$. Dacă $x > y$, atunci $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{2}{5}\right)^y+\left(\frac{3}{5}\right)^y$, deci $y < z$. Rezultă că $\left(\frac{2}{5}\right)^y+\left(\frac{3}{5}\right)^y > \left(\frac{2}{5}\right)^z+\left(\frac{3}{5}\right)^z$ sau $z > x$. Deci $\left(\frac{2}{5}\right)^z+\left(\frac{3}{5}\right)^z < \left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ sau $x < y$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Înseamnă că $x = y$. Analog, se arată că $y = z$. Deci $x = y = z$ şi sistemul se reduce la rezolvarea ecuaţiei $\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x = x$, cu soluţia unică $x = 1$. Deci $x = y = z = 1$. **28.** Se notează $(\sqrt{2}-1)^x$ cu t, $t > 0$ şi inecuaţia devine: $t^2+t-6 > 0$. **31.** $x = 2$ şi $y = 1$ soluţie unică. **34.** $m \in (-\infty;-1)$. **37.** a) $x = 0$; b) $x = \pi$; c) $x = 1$. **38.** a) $x = 2$ soluţie unică; b) $x = 2$ soluţie unică. **39.** a) $x = 2$, $x = 0$; b) $x = 2$; $x = -2$; $x = \sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$; $x = -\sqrt{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$. **40.** a) $x \in (2;6]$; b) $x \in (-4;0)$; c) $x \in (5;\infty)$. **41.** $p = 0$; $x = 3$. **43.** $x = 4$ soluţie unică. **44.** $a \in (0;1)$. **45.** $1 < a^{x^2+3x} < 1+\frac{1}{a}$. Se discută în raport cu a. **46.** $S = \left\{\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\right\}$. **47.** $x = \ln 2$; $x = \ln\frac{5}{2}$. **49.** a) $x = 2$; $x = -2$; b) $x = 1$; $x = -1$. $\boxed{\text{I.2.}}$ **7.** a) $x = 1$; $x = 2$; b) $x = 3$; $x = -3$; c) $x = 2$; d) $x = 2$; e) $x = 0$; $x = \lg 2$; f) $x = 0$; g) $x = 3$; h) $x = \frac{9+\sqrt{57}}{12}$. **8.** a) $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$; $x = 1$; b) $x = 10^{10}$; c) $x = 10^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$; $x = 10^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}$; d) $x = 10$; $x = 100$; e) $x = 1$; $x = 2$; $x = \frac{1}{4}$; f) $x = 1$; $x = 3$; $x = \frac{1}{9}$; g) $x = \frac{1}{4}$; $x = \sqrt[3]{2}$; h) $x = 2$; $x = \frac{1}{2^7}$. **9.** a) $x = 1$; b) $x = \pm(a+b)$. **10.** Pentru $a \in (1;\sqrt{2})$,

$x = a^{\frac{4}{a}}$. Pentru $a \in (\sqrt{2}, \infty)$, $x = a^{\frac{a}{4}}$. Pentru $a = \sqrt{2}$, $x = a$. Pentru $a \in (0;1)$, $x = a^{\frac{a}{4}}$; $x = a^{\frac{4}{a}}$. **11.** $x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.** $m \in (1;3)$. **13.** a) $x \in (-3;-1) \cup (-1;1)$. **16.** a) $x = \frac{a^2}{b}$, $y = \frac{b^2}{a}$; b) $S = \left\{ \left(\frac{9a}{2}; \frac{a}{2}\right); \left(\frac{9a}{2}; \frac{9a}{2}\right); \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right); \left(\frac{a}{2}; \frac{9a}{2}\right) \right\}$; c) $x = a^3$; $y = a^{-1}$; d) $x = 100$; $y = 10$; e) $x = a^{4m-6n}$; $y = a^{6m-12n}$; f) $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; g) $x = 4$; $y = 9$; h) $x = y = 4$; i) $x = \frac{1}{4}$; $y = \frac{1}{2}$; j) $S = \{(625;3); (625;2); (15625;3); (15625;2)\}$. **21.** a) $x = 4$; $x = 4^{-\frac{2}{5}}$; b) Se notează $\log_x 6$ cu t şi se exprimă toţi logaritmii în funcţie de t. **36.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ putem presupune (inegalitatea fiind simetrică în a, b, c), fără a restrânge generalitatea problemei că $0 < a \leq b \leq c$, de unde rezultă relaţiile: $(a-b)(\ln a - \ln b) \geq 0$; $(b-c)(\ln b - \ln c) \geq 0$; $(c-a)(\ln c - \ln a) \geq 0$. Adunând cele trei relaţii membru cu membru găsim: $2(\ln a^a + \ln b^b + \ln c^c) \geq \ln a^{b+c} + \ln b^{a+c} + \ln c^{a+b}$ sau $a^{2a} \cdot b^{2b} \cdot c^{2c} \geq a^{b+c} \cdot b^{a+c} \cdot c^{a+b}$ şi prin înmulţirea ultimei inegalităţi cu $a^a \cdot b^b \cdot c^c$, rezultă ceea ce trebuia demonstrat. **37.** a) $x = \mathrm{e}$; $x = \mathrm{e}^3$; $x = \mathrm{e}^{-2}$; b) $x = \mathrm{e}$; $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$; $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$. **38.** $x = 5$; $x = \sqrt[5]{5}$. **39.** $x = 23$; $x = -\frac{9}{5}$. **47.** a) $x = 1$; b) $x = 3$; c) $x = 2$.

Capitolul II – PROGRESII ARITMETICE ŞI GEOMETRICE

1. a) $a_1 = 3{,}005$, $r = 0{,}01$; b) $a = -9$ şi $r = 5$ sau $a_1 = 21$şi $r = -5$ sau $a_1 = 6 - 3\sqrt{15}$ şi $r = \sqrt{15}$ sau $a_1 = 6 + 3\sqrt{15}$ şi $r = -\sqrt{15}$; c) $a_1 = -6$ şi $r = 2$ sau $a_1 = -2$ şi $r = -2$. **2.** $S_{31} = 7223$. **3.** $a_1 = \frac{n-1}{n-m} \cdot \frac{b}{m} - \frac{m-1}{n-m} \cdot \frac{a}{n}$ şi $r = \frac{2}{n-m}\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{m}\right)$. **6.** Prin reducere la absurd. **7.** Dacă prin reducere la absurd ar exista o progresie $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $a_k = \sqrt{5}$, $a_p = \sqrt{6}$ şi $a_l = \sqrt{7}$ ($k, p, l \in \mathbb{N}^*$ distincte) $\Rightarrow a_1 + (k-1)r = \sqrt{5}$; $a_1 + (p-1)r = \sqrt{6}$, $a_1 + (l-1)r = \sqrt{7}$, deci $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{p-k}{l-p} \in \mathbb{Q}^*$. Deci există $q \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = q$ sau $\sqrt{35} = \frac{-q^2 + 12q + 1}{2q} \in \mathbb{Q}$, contradicţie cu faptul că $\sqrt{35} \notin \mathbb{Q}$, deci presupunerea făcută este falsă. **9.** $n = 7$ şi $x = 0$ sau $x = 2$. **10.** 11, 15, 19. **12.** Se aplică inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică pentru numerele reale strict pozitive: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Se obţine: $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}$ sau $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \frac{a_1 + a_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. De aici rezultă imediat inegalitatea din enunţ. **14.** $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k + a_{k+1}}{a_k^2 \cdot a_{k+1}^2} = \frac{1}{r} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} + a_k)}{a_k^2 \cdot a_{k+1}^2} =$

$$= \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k+1}^2}{a_k^2 \cdot a_{k+1}^2} - \frac{a_k^2}{a_k^2 \cdot a_{k+1}^2} \right) = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k^2} - \frac{1}{a_{k+1}^2} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{(a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} + a_1)}{a_1^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{r} \frac{n \cdot r(2a_1 + nr)}{a_1^2 (a_1 + nr)^2} = \frac{n(2a_1 + nr)}{a_1^2 (a_1 + nr)_n^2}.$$

16. $S_1 =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3r} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+3} - a_k}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3r} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} \right)$$

etc. Pentru S_2 se procedează analog. **17.** $S = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{a_k}^2 =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(a_k - 1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

etc. **18.** $a_1 \sqrt[n]{\frac{a_1^{n-1}}{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}} = a_1 \sqrt[n]{\frac{a_1^n}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}} = \frac{a_1^2}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}$. Dacă notăm $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = P$, $P \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow$ numerele considerate devin: $\frac{a_1^2}{P}; \frac{a_2^2}{P}; \ldots; \frac{a_n^2}{P}$, care sunt în progresie aritmetică, deci şi numerele $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2$ sunt în progresie aritmetică. **19.** $x = 0$. **22.** Fie $N' = \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_4}{a_5} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+3}}$. Se observă că $N \cdot N' = \frac{a_1}{a_{2n+3}} = \frac{a_1}{a_1 + 2(n+1)r}$. Pe de altă parte, $\frac{a_1}{a_2} < \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_3}{a_4} < \frac{a_4}{a_5}, \ldots, \frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}} < \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+3}}$, deci $N < N'$. De aici rezultă imediat că $N^2 < N \cdot N'$ sau $N < \sqrt{\frac{a_1}{a_1 + 2(n+1)r}}$. **24.** Progresia ete strict crescătoare şi se observă că $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2\sqrt{a_{k+1}}} < \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} < \frac{1}{2\sqrt{a_k}}$ sau prin amplificarea cu conjugata a termenului din mijloc, se obţine: $\frac{1}{2\sqrt{a_{k+1}}} < \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{r} < \frac{1}{2\sqrt{a_k}}$ sau $\frac{r}{2\sqrt{a_{k+1}}} < \sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k} < \frac{r}{2\sqrt{a_k}}$, se dau lui k toate valorile de la 1 la n şi se adună relaţiile membru cu mebru etc. **25.** Vezi problema 24. **27.** a) $b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1}$, deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie $q = -\frac{1}{2}$; b) $b_n = b_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sau $a_{n+1} - a_n = b_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se scru primele n relaţii de acest tip şi se adună membru cu membru. **28.** „$\Rightarrow$" Dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică atunci $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{r}$, $\forall k \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$, deci $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{r} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}) = \frac{1}{r}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{(n-1)r}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat. „$\Leftarrow$" prin inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. **29.** Vezi problema 28. **31.** $y_{n+1} - y_n = \frac{a_1}{r}$, $\forall n \geq 2$, deci $(y_n)_{n\geq 2}$ este o progresie aritmetică de raţie $\frac{a_1}{r}$. **32.** Termenii comuni sunt de forma: $c_n = 15n + 7$, $n \in \mathbb{N}$ şi formează o progresie aritmetică de raţie 15. **33.** $f(1) = 0$; α este rădăcină simplă pentru f. **38.** Notând cu q raţia progresiei se obţin soluţiile: $q = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ şi $q = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. **40.** $a_1 = 2$; $q = \sqrt[3]{5}$. **41.** a) $b_1 = 5$, $q = 3$ sau $b_1 = 135$ şi $q = \frac{1}{3}$. **42.** Nu. **43.** Nu. **45.** $A_n = a_0(1+q)^n$, $\forall n \geq 0$ şi $(A_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică de raţie $1+q$. **48.** a) $P_n = \sqrt{(b_1 b_n)^n}$; $P_{80} = 1$. **50.** $P_{n_1}^{2n_1^{-1}} \cdot q^{-n_1} = (b_1 \cdot b_{n_1})^{\frac{n_1}{2} \cdot \frac{2}{n_1}} \cdot q^{-n_1} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n_1 - 1} \cdot q^{-n_1} = b_1^2 \cdot q^{-1}$. Analog se arată că: $P_{n_2}^{2n_2^{-1}} \cdot q^{-n_2} = P_{n_3}^{2n_3^{-1}} \cdot q^{-n_3} = b_1^2 \cdot q^{-1}$. **52.** $S = 2^{a_1} + 2^{a_1+r} + 2^{a_1+2r} + \ldots + 2^{a_1+(n-1)r} = 2^{a_1}[1 + 2^r + (2^r)^2 + (2^r)^3 + \ldots + (2^r)^{n-1}] = 2^{a_1} \cdot \frac{(2^r)^n - 1}{2^r - 1} = 2^{a_1} \cdot \frac{2^{nr} - 1}{2^r - 1}$ pentru $r \neq 0$. Dacă $r = 0$, atunci $S = n \cdot 2^{a_1}$. **54.** $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1 + (k-1)r}{b_1 \cdot q^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1}{b_1 q^{k-1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)r}{b_1 \cdot q^{k-1}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{q}\right)^{k-1} + \frac{r}{b_1} \sum_{k=2}^{n} (k-1) \left(\frac{1}{q}\right)^{k-1}$ etc. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} [a_1 + (k-1)r] b_1 \cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_1 b_1 q^{k-1} + \sum_{k=2}^{n} (k-1) r \cdot b_1 q^{k-1} = a_1 b_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + r b_1 \sum_{k=2}^{n} (k-1) q^{k-1}$; $S_3 = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = 2S_2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. **55.** $S = b_1^{\frac{1}{k}} + b_1^{\frac{1}{k}} \cdot q^{\frac{1}{k}} + b_1^{\frac{1}{k}} \cdot q^{\frac{2}{k}} + \ldots + b_1^{\frac{1}{k}} \cdot q^{\frac{n-1}{k}} = \sqrt[k]{b_1}\left[1 + \left(q^{\frac{1}{k}}\right)^1 + \left(q^{\frac{1}{k}}\right)^2 + \ldots + \left(q^{\frac{1}{k}}\right)^{n-1}\right] =$

$= \sqrt[k]{b_1} \cdot \dfrac{1-\left(q^{\frac{1}{k}}\right)^n}{1-q^{\frac{1}{k}}} = \dfrac{\sqrt[k]{b_1}\cdot(1-\sqrt[k]{q^n})}{1-\sqrt[k]{q}}$, pentru $q \neq 1$. Dacă $q = 1$, $S = n\sqrt[k]{b_1}$. **57.** $\underbrace{\overline{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}_{k\text{ ori}} =$ $a\cdot 10^{k-1} + a\cdot 10^{k-2} + \ldots + a\cdot 10 + a = a\cdot\dfrac{10^k-1}{9} = \dfrac{a}{9}\cdot 10^k - \dfrac{a}{9}$, deci $S = \left(\dfrac{a}{9}\cdot 10^1 - \dfrac{a}{9}\right) +$ $\left(\dfrac{a}{9}\cdot 10^2 - \dfrac{a}{9}\right) + \ldots + \left(\dfrac{a}{9}\cdot 10^n - \dfrac{a}{9}\right)$ sau $S = 10\cdot\dfrac{a}{9}(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}) - \dfrac{na}{9} = \dfrac{10\cdot a}{9}\cdot\dfrac{10^n-1}{9} -$ $\dfrac{n\cdot a}{9}$, deci $S = \dfrac{10a(10^n-1)-9n\cdot a}{81}$; $S = \dfrac{10^{n+1}\cdot a-(9n+10)a}{81}$. **60.** „$\Rightarrow$“ Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică se arată relaţia cerută. Vezi problema 48. „$\Leftarrow$“ Prin inducţie matematică după numărul natural $n \geq 2$. **63.** a) $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{16} + i\sin\dfrac{k\pi}{16}$, $k \in \{1; 2; \ldots; 14; 15; 17; 18; \ldots; 31\}$. **64.** $x = \sqrt[3]{3}$. **66.** $S = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{2k+1}{5^{2k}} = 2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{25^k} + \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{25}\right)^k$ etc. **70.** Suma $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$ are exact n termeni şi pentru că suma este nulă, trebuie ca numărul termenilor egali cu $+1$ să fie egal cu numărul termenilor egali cu -1, deci n este număr par. Rămâne să demonstrăm că numărul de -1 este par. Dar: $x_1x_2\cdot x_2x_3\cdot x_3x_4\cdot\ldots\cdot x_nx_1 = x_1^2x_2^2\ldots x_n^2 = 1$, deci $n \vdots 4$. **73.** Numărul maxim de termeni este 16. Exemplu de astfel de şir: 5; 5; −13; 5; 5; 5; −13; 5; 5; −13; 5; 5; 5; −13; 5; 5. **74.** $\max(3m+4n) = 3\cdot 27 + 4\cdot 35 = 221$. **76.** Se aplică inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică. **78.** $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$, $\forall n \geq 3$. Notând $b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$ se obţine $b_1 = 1$ şi $b_{n-1} = 2b_{n-2}$, $\forall n \geq 3$, deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este o progresie geometrică de raţie $q = 2$, ceea ce înseamnă că $b_n = b_1\cdot q^{n-1}$ sau $b_n = 2^{n-1}$. Se obţine: $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ etc. **79.** $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{b}{a_{n-1}}\right)$, $\forall n \geq 2$, deci $2a_na_{n-1} = a_{n-1}^2 + b$. De aici se obţine: $2a_{n-1}(a_n + \sqrt{b}) = (a_{n-1} + \sqrt{b})^2$ şi $2a_{n-1}(a_n - \sqrt{b}) = (a_{n-1} - \sqrt{b})^2$ sau prin împărţirea ultimelor două relaţii, membru cu nenbru, $\dfrac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = \left(\dfrac{a_{n-1} - \sqrt{b}}{a_{n-1} + \sqrt{b}}\right)^2$ etc.

Capitolul III. ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

$\boxed{\text{III.1}}$ **1.** a) $n = 6$; b) $n = 7$; c) $n = 8$; d) $n = 8$; e) $n = 5$; f) $n = 9$; g) $n = 10$; h) $n = 4$. **2.** a) $n = 11$; b) $n = 4$; c) $n = 20$; d) $n = 1$. **3.** a) $p = q = 3$ sau $p = 1$ şi $q = 0$; b) $n = 4$. **4.** a) $n \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1; 2; 3; 4\}$; b) $n \in \{8; 9; 10\}$; c) $n \in \mathbb{N}\setminus\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; d) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 11$. **5.** a) $x = 2$, $y = 6$; b) $x = 9$, $y = 2$; c) $x = y = 5$; d) $x = 5$, $y = 2$. **6.** a) $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$; b) $x = 4$. **13.** a) $x = 124$; b) $x = 3$. **14.** $\dfrac{m-p+1}{n-p+1}$. **15.** $S = \{(5; 1); (0; 6); (2; 5); (4; 3); (5; 0)\}$. **17.** $x = 4$, $y = -2$. **18.** $E = \dfrac{k!}{n!}$. **19.** a) $E = \dfrac{-k}{(n+1)(n+2)}$; b) $E = 1$. **20.** $n \in \{2; 3; 7; 8; 9; 10; 11\}$. $\boxed{\text{3.2.}}$ **1.** a) $\sum\limits_{n\geq 1}\left[\dfrac{10}{2^n}\right] = \left[\dfrac{10}{2}\right] + \left[\dfrac{10}{2^2}\right] + \left[\dfrac{10}{2^3}\right] = 8$; b) $\sum\limits_{n\geq 1}\left[\dfrac{50}{2^n}\right] = \left[\dfrac{50}{2}\right] + \left[\dfrac{50}{4}\right] + \left[\dfrac{50}{8}\right] + \left[\dfrac{50}{16}\right] + \left[\dfrac{50}{32}\right] = 47$. **2.** Se aplică binomul lui Newton. **5.** a) T_{11}; b) T_{34}. **6.** a) $7\cdot 3^6$; b) $2^7\cdot C_{10}^4$. **11.** Se găseşte $p = 8$, după care se determină coeficienţii ceruţi. **12.** $n = 38$. **14.** $n = 7$; $x = 2$. **15.** $k = 1386$. **16.** $n = 12$; nu există termen liber al dezvoltării. **19.** $k = 14$. **20.** $\dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$. **21.** $n = 8$. **22.** $n = 15$. **24.** $n = 9$. **32.** a) $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n}k!(k^2+k+1) = \sum\limits_{k=1}^{n}[k!(k+1)^2 - k!k] = \sum\limits_{k=1}^{n}[(k+1)!\cdot(k+1) - k!k] = (n+1)!(n+1) - 1$. b)

$S_2 = \sum_{k=1}^{n} k!(k^2+1) = \sum_{k=1}^{n} k!(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)!\cdot(k+1)-2k!k] = (n+1)!(n+1)-1-\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+$ $1)!(n+1)-1-\sum_{k=1}^{n}((k+1)!-k!) = (n+1)!(n+1)-1-(n+1)!+1 = (n+1)!\cdot n$. c) $S_3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} =$ $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$. **38.** $5^{2n} + 3^{2n} = 9^n + 4\cdot\frac{5^{2n}-1}{5-1} + 1 = 9^n + 1 + \sum_{k=0}^{2n-1} 5^k$. Pe de altă parte, $5^{2n} + 3^{2n} = (4+1)^{2n} + (4-1)^{2n} = 2\left(C_{2n}^{0}\cdot 4^{2n} + C_{2n}^{2}\cdot 4^{2n-2} + \ldots + C_{2n}^{2n-2}\cdot 4^2 + C_{2n}^{2n}\right)$, de unde rezultă tocmai ceea ce trebuia demonstrat. **39.** Se pleacă de la numărul natural $N = 3^{2n+1}+2^{n+2}$. Pe de o parte, $N = (7+2)^n\cdot 3 + 2^n\cdot 4 = 3\left(C_n^0\cdot 7^n\cdot 2^0 + C_n^1\cdot 7^{n-1}\cdot 2^1 + \ldots + C_n^{n-1}\cdot 7\cdot 2^{n-1} + \right.$ $\left.+C_n^n\cdot 2^n\right)+2^n\cdot 4 = 3\cdot 7\left(C_n^0\cdot 7^{n-1} + C_n^1\cdot 7^{n-2}\cdot 2 + \ldots + C_n^{n-1}\cdot 2^{n-1}\right)+7\cdot 2^n$. Pe de altă parte $N =$ $3^{2n}\cdot 3+2^n(7-3) = 2^n\cdot 7+3^{2n}\cdot 3-2^n\cdot 3 = 2^n\cdot 7+3(9^n-2^n) = 2^n\cdot 7+3\cdot 7(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+\ldots+2^{n-1}) =$ $7[2^n+3^{2n-1}+2\cdot 3^{2n-3}+\ldots+2^{n-2}\cdot 3^3+2^{n-1}\cdot 3]$. De aici rezultă ceea ce trebuia demonstrat. **43.** $C_{130}^{110}\cdot C_{110}^{70}\cdot C_{70}^{31} = \frac{130!}{110!\cdot 20!}\cdot\frac{110!}{70!\cdot 40!}\cdot\frac{70!}{31!\cdot 39!} = \frac{130!}{20!\cdot 31!\cdot 39!\cdot 40!} \in \mathbb{N}$. De aici rezultă concluzia problemei. **49.** $S_1 = \frac{n!}{(2n-1)!!}\cdot 2^n - 2$; $S_2 = \frac{(2n+1)!!}{n!}\cdot\frac{1}{2^n} - 1$. **51.** a) $n = 38$; b) $x = 2^{-126}$. **52.** $S = n$. **53.** 1). $M = 2^{2n-2}$, $N = 2^{2n-1}$, $m = \frac{n}{2}$; 2) Se ajunge la $f(n) = n^2 - 2mn + C$, unde $C = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot C_{2n}^{2k}$. Rămâne de calculat C. 3) Dată fiind forma lui f, f are un minim care se realizează numai pentru $n = m$. **61.** $f(n) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_{2n+1}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)\frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(2n-2k!)} =$ $(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2k)!}(2n-2k)! = (2n+1)\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k} = (2n+1)(C_{2n}^0+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n}) = (2n+1)\cdot 2^{2n-1}$, deci $\sqrt[n^2]{\frac{f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)}{(2n+1)!!}} = \sqrt[n^2]{\frac{3\cdot 2^1\cdot 5\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot 2^{2n-1}}{(2n+1)!!}} = \sqrt[n^2]{2^{1+3+5+\ldots+(2n-1)}} =$ $\sqrt[n^2]{2^{n^2}} = 2$ **64.** a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (două rădăcini reale); b) $x_3 = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $x_4 = -\mathrm{i}\sqrt{3} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ rădăcini ale ecuației date. **65.** b) Dacă n este par, atunci $k = 0$. dacă n este impar, atunci $k = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. **70.** Coeficientul lui X^2 este egal cu $C_3^2 + C_4^2 + \ldots + C_n^2$, care se calculează pentru $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Capitolul IV. NUMERE COMPLEXE

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2 + (y-3)^2 = 36\}$. $B = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \left\{\left(\frac{-1}{2};y\right) \mid y \in \mathbb{R}\right\}$. $C = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$; $D = \{(x,y \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$. $E = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\}$. **2.** 1) $z = -\frac{2}{9} + \frac{14}{9}\mathrm{i}$; 2) $z = 1 + 2\mathrm{i}$; 3) $z = 3 - \mathrm{i}$; 4) $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$; $z_2 = \mathrm{i}$; 5) $z_1 = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 2 - \mathrm{i}$; 6) $z_1 = -\mathrm{i}$; $z_2 = 1 + \mathrm{i}$; 7) $z_1 = 2\mathrm{i}$; $z_2 = \frac{1}{2} - 2\mathrm{i}$. **4.** $|z_1 - z_2| = \frac{2k}{\sqrt{k^2+1}}$. **5.** $a = \frac{16}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$; $b = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$. **6.** $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$. **7.** b) $x = 1 + \mathrm{i}$ și $y = 3 - \mathrm{i}$; c) $x = 1 - \mathrm{i}$; $y = 1 + \mathrm{i}$; d) $x = \mathrm{i}$; $y = -\mathrm{i}$. **8.** $S = -2k(1+\mathrm{i})$, dacă $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$, $S = 2k + 1 - 2\mathrm{i}k$, dacă $n = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $S = 2k + 1 + 2(k+1)\mathrm{i}$, dacă $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, $S = 2(k+1)(\mathrm{i}-1)$, dacă $n = 4k+3$, $k \in \mathbb{N}$. **9.** a) $\mathrm{Re}(f(\mathrm{i})) = \frac{4}{5}$; b) $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{6x^2+x-2+6y^2}{(2x-1)^2+4y^2}$; $\mathrm{Im}(f(z)) = \frac{-7y}{(2x-1)^2+4y^2}$. **14.** Din $z + \frac{1}{z} = 2\cos a$, $a \in \mathbb{R}$, rezuultă că $z = \cos a + \mathrm{i}\sin a$ sau $z = \cos a - \mathrm{i}\sin a$, deci $z^n = \cos na + \mathrm{i}\sin na$ sau $z^n = \cos na - \mathrm{i}\sin na$. Rezultă $z^n + \frac{1}{z^n} =$

$2\cos na$, $n \in \mathbb{N}$. **19.** Notând cu $p = z_1 z_2 \ldots z_n$, p este un număr complex nenul, iar relaţia dată se mai poate scrie: $p\left(\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \frac{1}{z_3 z_4} + \ldots + \frac{1}{z_{n-1} z_n}\right) = 0$ şi cum $p \neq 0$, rezultă că $\frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \ldots + \frac{1}{z_{n-1} z_n} = 0$. Dar $|z_k| = r$ $(r > 0)$, $\forall k = \overline{1,n}$. Deci relaţia de mai sus devine: $\frac{r^2}{z_1 z_2} + \frac{r^2}{z_2 z_3} + \ldots + \frac{r^2}{z_{n-1} z_n} = 0$ sau $\overline{z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n} = 0$, ceea ce înseamnă că $z_1 z_2 + z_2 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n = 0$. **22.** Din $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, rezultă $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$ şi deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$. Atunci $|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3| = \left|\frac{1}{z_1}\right| \cdot |z - z_1| + \left|\frac{1}{z_2}\right| \cdot |z - z_2| + \left|\frac{1}{z_3}\right| \cdot |z - z_3| = \left|\frac{z}{z_1} - 1\right| + \left|\frac{z}{z_2} - 1\right| + \left|\frac{z}{z_3} - 1\right| \geq \left|z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) - 3\right| = 3$. **23.** $|1+z| + |1+z^{2002}| + |1+z^{2003}| = |1+z| + |-z-z^{2003}| + |1+z^{2003}| \geq |1+z-z-z^{2003}+1+z^{2003}| = 2$. **28.** Vezi problema 23. **30.** Se arată că $E = \overline{E}$. **33.** Din enunţ rezultă că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$. Se arată că şi $\left|\frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r$, de unde rezultă concluzia problemei. **39.** $z = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **40.** $z_1 = -3\mathrm{i}$, $z_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **44.** a) $z_1 = -1$, $z_2 = \mathrm{i}$, $z_3 = -\mathrm{i}$.; b) Se obţin ecuaţiile: $\frac{3z+1}{z-\mathrm{i}} = -1$, $\frac{3z+1}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, $\frac{3z+1}{z-\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$. **45.** $S = \{(1,\varepsilon,\varepsilon^2); (1,\varepsilon^2,\varepsilon); (\varepsilon,1,\varepsilon^2), (\varepsilon,\varepsilon^2,1); (\varepsilon^2,1,\varepsilon); (\varepsilon^2,\varepsilon,1)\}$. **46.** Nu există un număr complex cu proprietăţile din enunţ. **49.** a) $\exists t \in \mathbb{R}$, astfel încât $z = tw$. **50.** b) Ecuaţia devine $z^2 - z - 2\mathrm{i} = 0$. **52.** $S = 4$. **54.** Ecuaţia dreptei este: $2y = x + 2$. **55.** $D(8+5\mathrm{i})$. **58.** $S_1 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\left(1 + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$; $S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}+2}{2}$; $S_3 = \frac{1}{2}\left[-1 - \sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{2-\sqrt{2}})\right]$. **62.** a) $z_1 = 3$, $z_2 = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $z_1 = 1$ şi ecuaţia $z^2 + 5(1-\mathrm{i})z + 2 - 39\mathrm{i} = 0$; c) $z_1 = 2$, $z_2 = -3 + 7\mathrm{i}$; d) $z_1 = 5\mathrm{i}$, $z_2 = -4 + \mathrm{i}$. **64.** Indicaţie: Se porneşte de la rădăcina de ordinul 7 a unităţii. **67.** $P = 2^{667}(1 + \omega)$. **69.** $z_k = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0,1,2,3$. **70.** $z = 1 + 2\mathrm{i}$ sau $z = 1 - \mathrm{i}$. **71.** $z = x - \mathrm{i}x$, adică mulţimea punctelor din plan ale căror coordonate verifică ecuaţia $y = -x$, deci punctele celei de a doua bisectoare. **75.** $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. **79.** $z = a \pm \sqrt{1-a^2}\mathrm{i}$, $a \in [-1;1]$. **80.** $z_M = a + \mathrm{i}b$, $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $2b = 3a + 4$. **88.** $D(-2,1)$ sau $D\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. **89.** a) $M\left(3 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$; b) $E\left(2 + \frac{7}{8}\mathrm{i}\right)$.

Capitolul V. POLINOAME

6. $a = n$, $b = -n - 1$. **8.** $P(X) = 0$. **9.** $P(X) = X$. **10.** $r = 2$. **14.** Indicaţie: se foloseşte faptul că $[f(f(X)) - f(X)] \vdots [f(x) - x]$. **19.** Relaţia a) se mai poate scrie $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, $\forall x \in \mathbb{N}$. Dând lui x toate valorile de la 0 la 2000 în relaţia găsită şi adunând membru cu mebru relaţiile, găsim: $f(2001) = f(0) + \frac{2001}{2002}$ şi folosind condiţia b) se obţine că: $f(0) = 0$ şi $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{N}$. **20.** $f = (X-a)^2 \cdot g + 3X + 2$ şi $f(a) = 3a + 2$, deci $a^n + a^{n-1} + 1 = 3a + 2$ sau $a^n + a^{n-1} = 3a + 1$. De aici rezultă că $f = (X-a)^2 \cdot g + \frac{a^n + a^{n-1} - 1}{a} \cdot X + 2$ sau $af = a(X-a)^2 \cdot g + (a^n + a^{n-1} - 1) \cdot X + 2a$ sau $aX^n + aX^{n-1} + a - a^n X - a^{n-1} X + X - 2a = a(X-a)^2 \cdot g$ sau $aX(X^{n-1} - a^{n-1}) + aX(X^{n-2} - a^{n-2}) + (X - a) = a(X-a)^2 \cdot g$. Deci

$aX(X^{n-2}+X^{n-3}a+\ldots+a^{n-2})+aX(X^{n-3}+X^{n-4}a+\ldots+a^{n-3})+1=a(X-a)g$. Pentru $X=a$ se obţine $(n-1)a^n+(n-2)a^{n-1}+1=0$ şi rezultă imediat că $a^{n-1}=n(3a+1)-3a$. **27.** a) Se folosesc relaţiile lui Viète. **29.** $P=a(X^4+qX^3+q^2X^2+q^3X+q^4)$, $q>0$. Se rezolvă ecuaţia reciprocă de gradul 4: $X^4+qX^3+q^2X^2+q^3X+q^4=0$. **30.** $f(-1)\in\mathbb{R}$, dacă şi numai dacă $f(-1)=\overline{f(-1)}$. Notând cu $x_1,x_2,\ldots x_{n-1},x_n\in\mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f, cu $|x_1|=|x_2|=\ldots=|x_{n-1}|=|x_n|\overset{\text{not}}{=}r$ $(r>0)$ şi aplicând relaţiile lui Viète obţinem: $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n=(-1)^n\cdot(-1)^n$ sau $r^n=1$ sau $r=1$, deci $|x_k|=1$, $\forall k=\overline{1,n}$. Dar $f=(X-x_1)(X-x_2)\cdot\ldots\cdot(X-x_n)$, ceea ce înseamnă că $f(-1)=(-1)^n(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)$ şi $\overline{f(-1)}=(-1)^n(1+\overline{x_1})(1+\overline{x_2})\cdot\ldots\cdot(1+\overline{x_n})$. De aici se obţine $\overline{f(-1)}=(-1)^n\dfrac{(1+x_1)(1+x_2)+\ldots+(1+x_n)}{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$, deci $\overline{f(-1)}=f(-1)$ şi $f(-1)\in\mathbb{R}$. **31.** Ecuaţia se mai poate scrie $(X-3)(X-4)(X-6)+1=0$, iar rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei se demonstrează că $x_1\in(2,3)$, $x_2\in(4,5)$, $x_3\in(5,6)$, deci $x_1<x_2<x_3$. Cum $x_1+x_2\in(6,8)$, rezultă $x_3<x_1+x_2$. Cum $x_2+x_3\in(9,11)$, rezultă $x_1<x_2+x_3$ şi cum $x_1+x_3\in(7,9)$, rezultă $x_2<x_1+x_3$. Deci x_1, x_2, x_3 pot fi lungimile laturilor unui triunghi. Pentru calculul ariei triunghiului se aplică formula lui Heron. **39.** Se aplică relaţiile lui Viète şi se construieşte ecuaţia de gradul 3 cu rădăcinile x, y, z. **40.** Din ipoteză se ştie că $\operatorname{Im}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=0$ şi $\operatorname{Im}(a_1-a_2+\ldots+(-1)^na_n)=0$, deci $\operatorname{Im}(f(1))=\operatorname{Im}(f(-1))=0$ şi deci $f(1)=\overline{f(1)}$ şi $f(-1)=\overline{f(-1)}$. Cum $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$, rezultă că $f(1)=(1-x_1)(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n)=(1-\overline{x_1})(1-\overline{x_2})\cdot\ldots\cdot(1-\overline{x_n})$ şi $f(-1)=(-1)^n(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)=(-1)^n(1+\overline{x_1})(1+\overline{x_2})\cdot\ldots\cdot(1+\overline{x_1})$. Înmulţim cele două egalităţi şi obţinem $(1-x_1^2)(1-x_2^2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n^2)=(1-\overline{x_1}^2)(1-\overline{x_2}^2)\cdot\ldots\cdot(1-\overline{x_n}^2)$. Deci $g(1)=\overline{g(1)}$ şi $\operatorname{Im}(b_1+b_2+\ldots+b_n)=0$, tocmai ceea ce trebuia demonstrat. **44.** Dacă $x_1=3-\mathrm{i}$, cum $f\in\mathbb{R}[X]$, rezultă că $x_2=3+\mathrm{i}$ şi deci f este divizibil cu polinomul $(X-x_1)(X-x_2)$ sau $f\,\vdots\,(X^2-6X+10)$. Se găseşte câtul împărţirii lui f prin polinomul $X^2-6X+10$, iar x_3 şi x_4 sunt rădăcinile câtului. **47.** Indicaţie. Se pleacă de la rezolvarea ecuaţiei binome $X^n-1=0$. **48.** Se pleacă de la rezolvarea ecuaţiei binome $X^{2n}-1=0$. **49.** Se pleacă de la rezolvarea ecuaţiei binome $X^{2n+1}-1=0$. **57.** $f=(X-x_1)(X-x_2)\cdot\ldots\cdot(X-x_9)$ şi atunci $f(y_1)\cdot f(y_2)=(y_1-x_1)(y_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(y_1-x_9)(y_2-x_1)(y_2-x_2)\cdot\ldots\cdot(y_2-x_9)$. **65.** $b=a+r$, $c=a+2r$, $d=a+3r$, $r\in\mathbb{R}$. Folosind relaţiile lui Viète se obţine $x_1+x_2+x_3=-1-\dfrac{r}{a}$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1+\dfrac{2r}{a}$, $x_1x_2x_3=-1-\dfrac{3r}{a}$. Notând $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_1}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_2}=\beta$, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x_3}=\gamma$ se obţine $\dfrac{1}{x_1}=\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{1}{x_2}=\operatorname{tg}\beta$, $\dfrac{1}{x_3}=\operatorname{tg}\gamma$. Trebuie demonstrat că $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{\pi}{4}$. Pentru aceasta se arată că $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=-1$. **78.** a) $x=2$, b) $x=1$; c) $x=3$. **79.** $x=1$, $x=-\dfrac{1}{3}$. **80.** $x=\pm4$. **81.** $x=-\dfrac{3}{2}$. **83.** $p=2(1+5\mathrm{i})$, $q=-4\mathrm{i}$. **86.** Este o ecuaţie reciprocă. **87.** c) $(X^2-2X+2)(X^2-2X+11)$. **88.** b) $(2X+3)(1-8X^2)$; c) $(X^4+1)(X^2+X-2)$ şi se continuă. **91.** Cum $a,b\in\mathbb{R}$, odată cu rădăcina $\alpha=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ ecuaţia admite şi rădăcina $\overline{\alpha}=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. **94.** Se aplică algoritmul lui Euclid. **95.** Se aplică algoritmul lui Euclid.

STATISTICĂ ŞI PROBABILITĂŢI

1. a)

Nota (x_i)	Frecvenţa absolută (n_i)	Frecvenţa relativă ($f(x_i)$)	Frecvenţa cumulată crescătoare
4	2	0,06	0,06
5	6	0,19	0,25
6	6	0,19	0,44
7	6	0,19	0,63
8	4	0,12	0,75
9	4	0,12	0,87
10	2	0,06	0,93

2. a)

Temp. (x_i)	Frecvenţa absolută (n_i)	Frecvenţa relativă ($f(x_i)$)	Frecvenţa cumulată crescătoare
36^0	1	0,07	0,07
37^0	2	0,14	0,21
38^0	3	0,21	0,42
39^0	3	0,21	0,63
40^0	2	0,14	0,77
41^0	1	0,07	0,84
42^0	1	0,07	0,91
43^0	1	0,07	0,98

1. b) media: $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i} = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i) \cdot x_i = 6{,}8$; mediana: 7;

dispersia: $v = \dfrac{n_1(x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + n_k(x_k - \overline{x})^2}{n} = 2{,}82$; abaterea medie pătratică: $\sigma = \sqrt{v} = 1{,}67$. **2.** b) media: $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{8} f(n_i) x_i = 39{,}07^0$; mediana: 39^0; dispersia: $v = 3{,}63$; abaterea medie pătratică: $\sigma = 1{,}9$.

3.a)

Puncte (x_i)	Frecvenţa absolută (n_i)	Frecvenţa relativă ($f(x_i)$)	Frecvenţa cumulată crescătoare
201-230	3	0,15	0,15
231-260	4	0,20	0,35
261-290	7	0,35	0,70
291-320	5	0,25	0,95
321-350	1	0,05	1,00

5. a) $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$, unde $\Omega_1 = \Omega_2 = \ldots = \Omega_n = \{1,2,3,4,5,6\}$; b) $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^{6^n}$; c) $P((\underbrace{1,1,\ldots,1}_{\text{de 9 ori}})) = \dfrac{1}{2^{6^n}}$; d) $\dfrac{2^n}{2^{6^n}}$. **6.** $\dfrac{3}{10}$. **7.** a) $\dfrac{9}{19}$; b) $\dfrac{9}{19}$; c) $\dfrac{1}{19}$; d) $\dfrac{1}{38}$; e) $\dfrac{5}{19}$; f) $\dfrac{9}{38}$. **8.** $\dfrac{1}{2}$. **9.** a) $\dfrac{3}{10}$; b) $\dfrac{1}{4}$; c) $\dfrac{11}{20}$; d) $\dfrac{1}{5}$.

10. a) $P(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$; $P(\overline{A}) = \dfrac{11}{20}$; c) $P(A \cap B) = 0$. **11.** a) $P(A \cup B) = 0{,}65$; b) $P(\overline{A}) = 0{,}8$; c) $P(\overline{B}) = 0{,}4$; d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}35$; e) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0{,}85$; f) $P(\overline{A} \cup B) = 0{,}95$. **12.** $P(A) = \dfrac{1}{10}$; $P(B) = \dfrac{1}{5}$; $P(C) = \dfrac{3}{5}$; a) $P(A \cup B) = \dfrac{1}{5}$; b) $P(A \cup C) = \dfrac{13}{20}$; c) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$; d) $P(A \cup B \cup C) = \dfrac{7}{10}$; e) $P(\overline{B}) = \dfrac{4}{5}$; f) $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = \dfrac{3}{10}$; g) $P(\overline{A}) = \dfrac{9}{10}$; h) $P(\overline{A} \cap \overline{C}) = \dfrac{7}{20}$. **14.** a) $P(R) = \dfrac{10}{47}$; b) $P(\overline{F}) = \dfrac{35}{47}$; c) $P(\overline{F} \cap \overline{R}) = \dfrac{28}{47}$; d) $P(\overline{P} \cap \overline{R}) = \dfrac{22}{47}$; e) $P(\overline{V}) = \dfrac{32}{47}$; f) $P(V \cap \overline{R}) = \dfrac{13}{47}$. **15.** a) $\dfrac{3}{52}$; b) $\dfrac{1}{728}$; c) $\dfrac{75}{364}$; d) $\dfrac{225}{364}$; **16.** a) $\dfrac{5}{33}$; b) $\dfrac{315}{2728}$; c) $\dfrac{5}{2728}$; d) $\dfrac{1638}{2728} = 0{,}6$; e) $\dfrac{140}{8184} = 0{,}01$; f) $\dfrac{35}{1023} = 0{,}03$. **17.** a) $\dfrac{C_{26}^{0} \cdot C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}$; b) $\dfrac{C_{26}^{5} \cdot C_{26}^{8}}{C_{52}^{13}}$; c) $\dfrac{C_{26}^{11} \cdot C_{26}^{2}}{C_{26}^{13}} + \dfrac{C_{26}^{12} \cdot C_{26}^{1}}{C_{26}^{13}} + \dfrac{C_{26}^{13} \cdot C_{26}^{0}}{C_{26}^{13}}$.
18. a) 0,08 ; b) 0,25; c) 0,16. **19.** a) $\dfrac{1}{45} = 0{,}02$; b) $\dfrac{1}{15} = 0{,}06$; c) $\dfrac{1}{10} = 0{,}1$. **20.** a) $\dfrac{C_{5}^{1} \cdot C_{300}^{9}}{C_{305}^{10}}$; b) $\dfrac{C_{5}^{0} \cdot C_{300}^{10}}{C_{305}^{10}}$; c) $\dfrac{C_{5}^{2} \cdot C_{300}^{8}}{C_{305}^{10}}$; d) $\dfrac{C_{5}^{5} \cdot C_{300}^{5}}{C_{305}^{10}}$. **21.** a) 0,66; b) 0,55. **22.** a) 0,0060; b)

0,0059. **23.** a) 0,48; b) 0,46. **25.** a) 0,55; b) 0,44; c) 0,16. **26.** a) 0,46. **27.** 0,511. **28.** $P_C(A \cup B) = \frac{P(A \cup B)}{P(C)} = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P_C(A) + P_C(B)$. **29.** Indicaţie: $\Omega = A \cup \overline{A}$. **30.** a) 0,5; b) 0,75. **31.** 0,096. **32.** a) 0,02; b) 0,98. **33.** A, B independente $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$, deci $\overline{A}$ şi $\overline{B}$ sunt de asemenea independente. **34.** a) 0,16; b) 0,133. **35.** Pentru că populaţia unei ţări este foarte mare vom presupune că extragerea se face cu repunere. Fie S evenimentul ca un alegător ales să fi votat pentru partidul X şi N evenimentul ca alegătorul să fi votat pentru partidul X. Evident, $P(S) = 0{,}65$; $P(N) = 0{,}35$. a) $P(S \cap S \cap S) = P(S) \cdot P(S) \cdot P(S) = (0{,}65)^3 = 0{,}274$; b) $P(S \cap N \cap N) = P(N \cap S \cap N) = P(N \cap N \cap S) = P(N) \cdot P(N) \cdot P(S) = (,35)(0{,}65)^2 = 0{,}147$, deci probabilitatea ca exact unul din cei trei alegători să fi votat pentru partidul X este $P(N \cap N \cap S) + P(N \cap S \cap N) + P(S \cap N \cap N) = 3 \cdot 0{,}147 = 0{,}441$. **36.** $C_5^4 \cdot [0{,}8]^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$. **37.** a) $C_{15}^{10} \cdot (0{,}5)^{10} \cdot (0{,}5)^5$; b) P(stema să apară de cel puţin 4 ori) $=$ 1 $-$ P(stema să apară de cel mult trei ori) $=$ 1 $-$ P(stema să nu apară deloc) $-$ P(stema să apară o dată) $-$ P(stema să apară de două ori) $-$ P(stema să apară de
trei ori) $= 1 - C_{15}^{10} \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^{10} - C_{15}^1 \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^9 - C_{15}^2 \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^8 - C_{15}^3 \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^7$. **38.** a) 0,0816; b) 0,918; c) 0,408. **40.** 0,00039. **42.** $P(A) = \frac{13}{52}$; $P(B) = \frac{4}{52}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ şi $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, deci A şi B nu sunt independente. **43.** a) $\frac{C_{26}^6}{2 \cdot C_{52}^6}$. **44.** $X + 5 : \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; $Y + 3 : \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $3X : \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; $4Y : \begin{pmatrix} -8 & 8 & 12 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$; $X + Y : \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 & 6 & 7 \\ 0{,}18 & 0{,}03 & 0{,}09 & 0{,}42 & 0{,}07 & 0{,}21 \end{pmatrix}$; $XY : \begin{pmatrix} -6 & 6 & 9 & -8 & 8 & 12 \\ 0{,}18 & 0{,}03 & 0{,}09 & 0{,}42 & 0{,}07 & 0{,}21 \end{pmatrix}$; $\frac{X}{Y} : \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -2 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0{,}18 & 0{,}03 & 0{,}09 & 0{,}42 & 0{,}07 & 0{,}21 \end{pmatrix}$; $X^3 : \begin{pmatrix} 27 & 64 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; $Y^2 : \begin{pmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. **45.** a) $M(X) = 2$; $M(Y) = 2$; $Z = 2X + Y : \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$; $M(Z) = 6$.

CLASA A XI-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. DREPTE ŞI PLANE

1. a) $5x - 3y - 2 = 0$; b) $m = \frac{5}{3}$; $m' = -\frac{3}{5}$ (panta perpendicularei pe vectorul u); $3x + 5y = 0$; c) $x - y + 20 = 0$. **2.** i) Panta dreptei d este $m = 1/\sqrt{3}$, deci ecuaţia sa este $y + 2 = (x - 2)/\sqrt{3}$. Pentru determinarea pantei m_1 a dreptei d_1 se pune condiţia $\left|\frac{m_1 - m}{1 + mm_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Se obţin două valori pentru m_1, deci problema admite două soluţii pentru d_1; ii) Se aplică formula distanţei de la un punct la o dreaptă. **3.** i) Se calculează întâi pantele şi se aplică apoi formula unghiului a două drepte; ii) Se aplică formulele; iii) idem. **6.** Se obţin două drepte paralele cu AB. **11.** $m_{MN} = -2/5$; a) $2x + 5y - 31 = 0$; b) $5x - 2y - 5 = 0$; c) $3x - 7y + 26 = 0$; $7x + 3y - 36 = 0$. **12.** Cazul general: $M\left(a + \frac{b}{1 - m}; \frac{b}{1 - m}\right)$; aplicaţia numerică: $M\left(-\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}\right)$. **13.** Pentru a obţine ecuaţia dreptei sunt suficiente doar două puncte; $5x - 3y + 10 = 0$. **14.** $M\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$. **15.** $3x - 5y + 17 = 0$. **16.** $x_1x + y_1y = (x_1^2 + y_1^2)|2$. **17.** $12x + 10y - 29 = 0$. **18.** $AB = AC = a\sqrt{10}$. **19.** $C(1,2)$. **20.** $M_1(-1;3)$ şi $M_2(-11/2; -3/2)$. **21.** Se scrie o dreaptă ce trece prin intersecţia a două laturi şi este perpendiculară pe a treia; se obţin ecuaţiile: $4x - 2y + 3 = 0$; $x + 3y + 2 = 0$; $7x + 7y + 9 = 0$. **22.** $\lambda = 80/11$. **23.** Punctul fix este $P\left(\frac{a-b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$. **24.** a) Ecuaţia dreptei PQ este: $\lambda(a+b)x + (ab - \lambda^2)y - \lambda ab = 0$, unde λ este ordonata punctului M. Punctul fix este $\Omega\left(\frac{ab}{a+b}; 0\right)$; b) $\frac{\Omega A}{\Omega B} = \frac{a^2}{b^2}$. **25.** $d = 18/\sqrt{13}$. **26.** $d = 7/10$. **27.** a) $D(2,1)$; b) $E(3,4)$; $F(0,1)$; c) $M\left(2, \frac{13}{3}\right)$, $N\left(0, \frac{5}{3}\right)$. **28.** $M_1(0;15)$; $M_2\left(0, -\frac{3}{7}\right)$. **29.** $S = 27/2$ (unităţi pătrate). **30.** Se scrie că aria este constantă. O paralelă la bază. **31.** $x - 7y + 10 = 0$.

Capitolul II. ALGEBRA MATRICELOR

1. $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; $A-B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 12 \\ -6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 14 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$; $3B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -15 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix}$; $2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 \\ 8 & -12 & 10 \end{pmatrix}$. **3.** $AB = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; BA nu are sens. **4.** Ambele produse au sens; $AB = \begin{pmatrix} 13 & 44 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 13 \\ -7 & 11 & 30 \\ 16 & -36 & 4 \end{pmatrix}$; $AB - BA$ nu are sens. **6.** d) Se consideră încât $k = 1$ şi se demonstrează, prin inducţie după h, egalitatea $A^hB = BA^h$; apoi, considerând h fixat, se demonstrează, prin inducţie după k, egalitatea: $A^hB^k = B^kA^h$; g) $AB = BA = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad+bc) & ac - bd \end{pmatrix}$; h) $AB = BA = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$. **7.** Se va aplica egalitatea din problema 6, d). **8.** Se calculează AB, BA, iar apoi $AB - BA$. Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei $AB - BA$ este 0, în timp ce suma elementelor de pe diagonala principală matricei I_2 este 2. **9.** a) $Tr(0_n) = 0$; $Tr(I_n) = 0$; d) Fie $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ şi fie $C = AB = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $D = BA = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Elementele matricii C sunt date de formulele (1) $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, iar cele ale matricii D sunt (2) $d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{lj}$. Luând în (1) $i = j$, se obţine (1') $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$; analog (2') $d_{ii} = \sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{li}$. Aşadar $Tr(AB) = Tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$, adică (3) $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$. Analog (4) $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{li}$. Schimbând în (4) ordinea factorilor b_{il} şi a_{li}, iar apoi ordinea sumelor şi făcând apoi schimbarea $i \leftrightarrows j$, rezultă egalitatea cerută. **10.** Dacă $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] şi $U = V$, atunci $Tr(U) = Tr(V)$. Presupunând $AB - BA = I_n$, ar rezulta $Tr(AB - BA) = Tr(I_n)$. Dar (problema 9 c) şi d)) $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$, în timp ce $Tr(I_n) = n$. Contradicţie. **11.** a) $[A, B] \neq I_n$; b) Avem $[[A,B],C] = [A,B]C - C[A,B] = (AB - BA)C - C(AB - BA) = ABC - BAC - CAB + CBA$. Scriind analog şi $[[B,C],A]$, respectiv $[[C,A],B]$ şi adunând toate cele trei egalităţi se obţine identitatea cerută. **12.** Soluţia 1: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$. Se pune condiţia din enunţ şi din egalitatea componentelor rezultă: $\begin{cases} (1) & bu = cy \\ (2) & ay + bv = bx + dy \\ (3) & cx + du = au + cv \\ (4) & cy = bu \end{cases}$ (unde ultima ecuaţie o reproduce pe prima).

Întrucât X este arbitrară, x, y, x, u sunt arbitrare: egalitatea (1) este adevărată pentru orice $u, y \in \mathbb{C}$. Luând $u = 1$ şi $y = 0$, rezultă $b = 0$; luând apoi invers $u = 0$ şi $y = 1$ rezultă $c = 0$. Introducând acestea în (2) [sau (3)], rezultă $ay = dy$ pentru orice $y \in \mathbb{C}$; luând $y \neq 0$ (de exemplu $y = 1$), rezultă $a = d$; se notează $a = d = \lambda$, deci $A = \lambda I_2$. Soluţia 2: Se ia întâi $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi din $AX = XA$ rezultă $b = 0$; apoi $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi rezultă $c = 0$ etc. **13.** Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$; din condiţia $AX = XA$ rezultă $u = -2y$, $v = x + 3y$, aşadar $X + \begin{pmatrix} x & y \\ -2y & x+3y \end{pmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{Q}$. **14.** a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$; b) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$; c) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$. **15.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$; b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$. **16.** Se verifică prin calcul. **17.** Se ia în 16 $B = A$, deci $\det(A^2) = (\det(A))^2$, iar apoi se lucrează prin inducţie după n. **18.** a) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$ matricea al cărei determinant este Δ, ${}^tA$ transpusa sa. Avem: $\Delta = (\det(A))^2 = \det(A) \cdot \det({}^tA) = \det(A \cdot {}^t A)$. Dar $A \cdot {}^t A$ este o matrice simetrică, anume $A \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{pmatrix}$ unde am notat $\sigma_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ (pentru $k = 1, 2, 3, 4$). Aceste sume se exprimă pe baza relaţiilor lui Viete $\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 = 3p \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -2q \end{cases}$, obţinându-se $\sigma_1 = S_1 = 0$, $\sigma_2 = 6p$; $\sigma_3 = -6q$[1], de unde apoi $\Delta^2 = -108(p^3 + q^2)$. b) Dacă rădăcinile sunt reale, atunci $\Delta \in \mathbb{R}$, deci $\Delta^2 \geq$; condiţia este $p^3 + q^2 \geq 0$. c) Condiţia este şi suficientă. Se raţionează prin absurd: dacă ecuaţia nu admite doar rădăcini reale, atunci cele trei rădăcini ar fi de forma $x_1 = \alpha + \beta i$, $x_2 = \alpha - \beta i$, $x_3 = \gamma$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ şi $\beta \neq 0$, iar din prima relaţie a lui Viete, $\gamma = -2\alpha$. Calculând p şi q în funcţie de α şi β şi introducând în Δ^2 s-ar obţine $\Delta^2 < 0$. Contradicţie! **19.** a) Se efectuează calculele; b) Se ia întâi $\beta = \alpha$ în a), iar apoi se lucrează prin inducţie. **21.** a) Întrucât $0 < a^2 + b^2 < 1$, există şi sunt unice $r, \theta \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ astfel încât $a = r\cos\theta$ şi $b = r\sin\theta$. Deci $A = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Aşadar (problema 19) $A^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ deci $a_n = r^n \cos n\theta$, $b_n = r^n \sin n\theta$; b) $|a_n| \leq r^n \xrightarrow[(n \to \infty)]{}$, deci, în baza criteriului majorării, $a_n \xrightarrow[(n \to \infty)]{}$; analog pentru b_n. **22.** $F_2 = 2$; $F_3 = 3$; $F_4 = 3$; $F_4 = 5$; $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4 & F_5 \end{pmatrix}$. Apoi se lucrează prin inducţie. **23.** b) Întrucât S şi N comută, se poate aplica formula binomului lui Newton: $A^n = (S + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^{n-k}N^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} S^{n-k}N^k = \binom{n}{0} S^n N^0 +$

[1] Pentru calculul lui σ_3 se poate proceda şi scriind pentru fiecare din rădăcini că verifică ecuaţia şi adunând relaţiile obţinute.

$\binom{n}{1} S^{n-1}N + \binom{n}{2} S^{n-2}N^2$. Rezultat $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. **24.** Idem. **25.** a) Se efectuează calculele; b) $A^2 - Tr(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = 0$. **26.** a) $A^2 - 5A - 2I_2 = 0$; b) $A^2 - 3A - 13I_2 = 0$; c) $A^2 - 9A + 12I_2 = 0$. **29.** a) $A^2 - \rho A = 0$, deci $A^2 = \rho A$. Se obţine $A^n = \rho^{n-1}A$; b) $A^2 - \delta I_2 = 0$, deci $A^2 = \delta I_2$. Se obţine $A^{2k} = \delta^k I_2$ şi $A^{2k+1} = \delta^k A$ sau încă $A^n = \begin{cases} \delta^{\frac{n}{2}} I_2, & \text{dacă } n = 2k \\ \delta^{\frac{n-1}{2}} A, & \text{dacă } n = 2k+1 \end{cases}$. **30.** b) Întrucât I_2 şi A comută, se poate utiliza formula binomului lui Newton: $B^n = (I_2 + A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_2^{n-k} A^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \rho^{k-1} A = I_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \rho^{k-1}\right) A = I_2 + \frac{(1-\rho)^k - 1}{\rho} A$ etc. **31.** a) $A^2 - 4A + 4I_2 = 0$, deci $A^2 = 4A - 4I_2$; b) $A = 1 \cdot A + 0 \cdot I_2 \Rightarrow a_1 = 1, b_1 = 0$; $A^2 = 4A - 4I_2 \Rightarrow a_2 = 4, b_2 = -4$. Din egalitatea $A^{n+1} = A \cdot A^n$ se obţine $A^{n+1} = (a_n A + b_n I_2)A = a_n A^2 + b_n A = a_n(4a - 4I_2) + b_n A = (4a_n + b_n)A - a_n I_2$. Dar $A^{n+1} = a_{n+1}A + bn + 1I_2$. Prin urmare, obţinem: $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}$. Din a doua relaţie rezultă $b_n = -4an - 1$ $(n \geq)$ şi înlocuind în prima relaţie, obţinem $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$ sau $a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$. Se caută pentru a_n soluţii de forma $a_n = r^n$; deci $a_{n+1} = r^{n+1}$, $a_{n-1} = r^{n-1}$; introducând în ecuaţie rezultă $r^2 - 4r + 4 = 0$, deci $r_1 = r_2 = 2$. Aşadar $a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$; α şi b se determină din condiţiile iniţiale, obţinând $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$. Deci $a_n = \frac{1}{2} n 2^n$, apoi $b_n = (1-n)2^n$. **32.** a) $x^2 - 9a + d)x + ad - bc) = 0$. identificând.b) id. reducând Y^2 etc. **35.** Se efectuează calculele. **36.** a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Capitolul III. DETERMINANŢI

1. a) -2; b) $a^2 - b - (c^2 - d)$; c) $a^2 + b^2$. **2.** a) 1; b) $\sin(\alpha - \beta)$; c) $\cos(\alpha + \beta)$; d) $\alpha \frac{1-t}{1+t^2}$, deci $\cos\alpha$. **7.** a) Se adună linia a doua şi linia a treia la linia întâi; b) Da; c) Se combină 6 a) cu 7 a). **9.** Se adună linia întâila linia a doua; liniile a doua şi a treia devin proproţionale. **10.** a) -4; b) ab; c) $\rho \sin\theta$. **11.** Se scade coloana întâi din celelalte două, se reduce la un determinant de ordinul 2, se dau factor comun pe coloane $b - a$ şi $c - a$ etc.

Capitolul IV. RANGUL UNEI MATRICE. MATRICE INVERSABILE

2. a) $r = 2$; b) $r = 4$; c) $r = 3$; d) $r = 2$ (matrice al cărui determinant este $V_3(1,2,3)$). **4.** a) $r = 2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; b) $r = 2$, $\forall p, q \in \mathbb{R}$; c) Dacă $\alpha \neq -6$, rangul este 2, iar dacă $\alpha = 6$, rangul este 1. d) Dacă $m \neq 3$, rangul este 3, iar dacă $m = 3$, rangul este 2. **6.** Regula este: „a şi d îşi schimbă doar locul (între ele), iar b şi c îşi schimbă doar semnul!¡'.

Capitolul V. SISTEME DE ECUAŢII LINEARE

1. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. **2.** $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$. **3.** $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. **4.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$. **5.** $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$. **6.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **7.** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. **8.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. **9.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **10.** $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$. **11.** $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$. **12.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_5 = 1$. **13.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix}$; $AX=B$, $X=A^{-1}\cdot B$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{20} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4}\\ \frac{11}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2}\\ \frac{7}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $x=3$, $y=2$, $z=1$. **14.** $x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{3}$. **15.** $x=1$, $y=2$, $z=3$. **16.** $x=1$, $y=0$, $z=1$. **17.** $x=2$, $y=-1$, $z=5$. **18.** $x=1$, $y=2$, $z=-1$, $t=-2$. **19.** Sistemul este compatibil determinat; $\det A=160\neq 0$. **20.** Sistemul este compatibil determinat; $\det A=1\neq 0$. **21.** Sistemul nu este compatibil determinat; $\det A=0$. **22.** Sistemul nu este compatibil determinat; $\det A=0$. **23.** Sistemul este compatibil determinat; $\det A=n!\neq 0$. **24.** Sistemul este compatibil determinat; $\det A=-2(n-2)!\neq 0$. **25.** $\operatorname{rang}A=2$; $\operatorname{rang}\overline{A}=3\Rightarrow$ sistem incompatibil. **26.** $\operatorname{rang}A=2$; $\operatorname{rang}\overline{A}=2\Rightarrow$ sistem compatibil. **27.** Sistem incompatibil. **28.** Sistem compatibil. **29.** $\operatorname{rang}A=\overline{A}=2\Rightarrow$ sistem compatibil. **30.** Sistem incompatibil. **31.** $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 7\\ 3 & 3 & -14 & -9\end{pmatrix}$, $\operatorname{rang}A=2$, $\Delta_p=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; $\Delta_{cor,3}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 3 & 14 & 1\end{pmatrix}=0\Rightarrow$ sistem compatibil dublu nedeterminat; $(\alpha,5-\alpha-25\beta;1-6\beta;\beta)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **32.** $\operatorname{rang}A=2$, $\Delta_{cor,3}=0\Rightarrow$ sistem compatibil dublu nedeterminat; $(1-\alpha-\beta;\beta-\alpha;\alpha;\beta)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **33.** $\operatorname{rang}A=3$, $\Delta_{cor,3}\neq 0\Rightarrow$ sistem incompatibil. **34.** $\operatorname{rang}A=3$, $\Delta_{cor,4}=0\Rightarrow$ sistem compatibil simplu nedeterminat; $(-8;3+\alpha;6+2\alpha;\alpha;)$; $\alpha\in\mathbb{R}$. **35.** Sistem compatibil triplu nedeterminat; $\left(\frac{1+\gamma}{3},\frac{1+3\alpha+3\beta-5\gamma}{3},\alpha;\beta;\gamma;\right)$; $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. **36.** Sistem compatibil triplu nedeterminat; $\left(\frac{2+\gamma}{3},\frac{1+3\alpha-3\beta+5\gamma}{6},\alpha;\beta;\gamma;\right)$; $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. **37.** $\operatorname{rang}A=3$; soluţii: $(0,0,0,0)$ şi $(\alpha,2\alpha,3\alpha,4\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. **38.** soluţie: $(0,0,0,0)$. **39.** $\operatorname{rang}A=2$; soluţii: $(0,0,0,0)$ şi $\left(\frac{3\alpha-13\beta}{17},\frac{19\alpha-20\beta}{17},\alpha;\beta\right)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **40.** $\operatorname{rang}A=3$; soluţii: $(0,0,0,0,0)$ şi $\left(-\frac{4\alpha+7\beta}{8},\frac{-4\alpha+5\beta}{8},\frac{4\alpha-5\beta}{8},\alpha;\beta\right)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. **41.** soluţie: $(0,0,0,0)$. **42.** soluţii: $(0,0,0,0,0)$ şi $\left(\frac{7}{6}\beta-\alpha;\frac{5}{6}\beta+\alpha;\alpha;\frac{\beta}{3};\beta\right)$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

43. $m\neq 5\Rightarrow$ sistem compatibil determinat $(0,2,0)$; $m=5\Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat $(\alpha,2-4\alpha,3\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. **44.** $\Delta=m^2(m-1)$; $m\neq 0$ şi $m\neq 1$ – sistem compatibil determinat; $m=0$ – sistem incompatibil; $m=1$ – sistem incompatibil. **45.** $m\in\mathbb{R}\backslash\{-2;1;2\}$ – sistem compatibil determinat; $m=-2$ – sistem compatibil nedeterminat cu soluţia $(4,8+\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; $m=-1$ – sistem incompatibil; $m=2$ – sistem compatibil nedeterminat, cu soluţia $\left(\frac{-3\alpha}{5},\frac{11\alpha}{5},\alpha\right)$; $\alpha\in\mathbb{R}$. **46.** $m\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ – sistem compatibil determinat; $m=-1$ – sistem incompatibil; $m=1$ – sistem compatibil determinat cu soluţia $(\alpha,3\alpha-2\beta-2,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.; **47.** $m\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ – sistem compatibil determinat; $m=0$ şi $n=\frac{7}{4}$ – sistem compatibil nedeterminat cu soluţia $\left(\alpha,0,\frac{1}{2}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; $m=0$ şi $n=\frac{7}{4}$ – sistem incompatibil. **48.** $\Delta=-2m(n+1)$; dacă $m\neq 0$ şi $n=-1$ – sistem compatibil determinat $\left(\frac{1}{2m},\frac{11m-1}{2m(n+1)};\frac{7mn-4m+1}{2m(n+1)}\right)$; dacă $m=0$, $n\in\mathbb{R}$, sistem incompatibil; dacă $m\neq 0$, $n=-1$, $m=\frac{1}{11}$, sistem compatibil nedeterminat cu soluţia $\left(\frac{11}{2},\frac{7-\alpha}{2},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; dacă $m\neq 0$, $n=-1$, $m\neq\frac{11}{2}$ – sistem incompatibil. **49.** Se obţine $a=2$, $b=-12$, $c=-2\Rightarrow a+b+c=-12\Rightarrow$ varianta corectă: b). **50.** $\det A=m$; petru

$m = 0$, $\operatorname{rang}A = 3 \Rightarrow$ siste compatibil simplu nedeterminat; varianta corectă: d). **51.** varianta corectă b). **52.** sistem incompatibil dacă $\operatorname{rang}A \neq \operatorname{rang}\overline{A}$. Dar $2 \leq \operatorname{rang}A \leq \operatorname{rang}\overline{A} \leq 3 \Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -11$ şi $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & n \\ -m & 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow n \neq -\frac{21}{2}$; răspuns corect: varanta a). **53.** $\Delta(m) = -2m(m+1)$; pentru $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\} \Rightarrow$, sistem de tip Cramer, cu soluţia $x = m-1$, $y = 2-m$; $z = m \Rightarrow f(m) = (m-1)(2-m)^2 \cdot m \Rightarrow$ varianta corectă: c). **54.** $\Delta = 2(m-2)(m-6)$, varianta corectă: d). **55.** Răspuns corect c). **56.** Răspuns corect d). **57.** $\Delta = \lambda^2(\lambda - 1) \Rightarrow x_0 = \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda(\lambda-1)}$; $y_0 = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}$; $z_0 = 0 \Rightarrow t = 2$. Răspuns corect d).
58. Răspuns corect $a = 1$, deci varianta e) **59.** Variante corecte c) şi d) **60.** $\Delta_2 = 1, \Delta_3 = 1, \Delta_4 = 1, \ldots, \Delta_n = 1$, deci sistem Cramer. Ecuaţia a10-a este: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 10x_{10} + 10x_{11} + 10x_{12} + 10x_{13} + 10x_{14} + 10x_{15} = b_{10}$. Pentru $x_i = 1$, $i = \overline{1, 15} \Rightarrow b_{10} = 105$. Răspuns corect b). **61.** Sistem Cramer cu $\Delta = \prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (i-j) \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$ şi $x_n = 1$. Deci soluţia $(0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \Rightarrow$suma $= 1$. Varianta corectă a).

Capitolul VI. CONICE

1. i) $x_C = 3$; $y_C = -1$; $(x-3)^2 + (y+1)^2 - r^2 = 0$, deci $r^2 = 25$, de unde $r = 5$; i) $(7-3)^2 + (y_A+1)^2 - 25 = 0$, deci $(y_A+1)^2 = 9$; de aici $y_a + 1 = \pm 3$; $y_A = -1 \pm 3$ etc. (două soluţii).

Ecuaţiile tangentelor se scriu prin dedublare. **7.** a) $(AB)\colon 2x + y - 2 = 0$; $(AC)\colon x - 2y - 1 = 0$; $(BC)\colon x + 3y - 6 = 0$; b) $\mathrm{m}(\widehat{A}) = \frac{\pi}{2}$; $\mathrm{m}(\widehat{B}) = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{m}(\widehat{C}) = \frac{\pi}{4}$; c) mijlocul ipotenuzei $\omega\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)$ şi $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$; $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$; d) dedublând, rezultă ec. tangentei în C: $3x - y - 8 = 0$. **8.** a) (AB): $3x + 4y - 12 = 0$; (bisectoarea $\widehat{OAB}$) : $x + 3y - 4 = 0$; (bisectoarea $\widehat{OBA}$) : $2x + y - 3 = 0$; b) $I(1,1)$ şi $r = 1 \Rightarrow (C_1)$: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; (C_2) : $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0$; c) distanţa centrelor cercurilor (C_1) şi (C_2) este egală cu diferenţa razelor lor; $T(1,2)$. **9.** Fie $M(\alpha, \beta)$; (AB) sau: $x - y = 0$; (AC) sau: $x + y = 0$; $(BC) \equiv x - 2 = 0$; $d_1 = \left|\frac{\alpha - \beta}{\pm\sqrt{2}}\right|$; $d_2 = \left|\frac{\alpha + \beta}{\pm\sqrt{2}}\right|$; $d_3 = |\beta - 2|$; $\alpha^2 + 2\beta^2 - 4\beta - 12 = 0$; $\alpha^2 + 2(\beta - 1)^2 - 14 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{14} + \frac{(\beta-1)^2}{7} - 1 = 0$ - elipsă. **10.** ecuaţia hiperbolei: $x^2 - y^2 = a^2$; fie $M(\alpha, \beta)$; $\alpha^2 - \beta^2 = a^2$; ec. tangentei: $\alpha x - \beta y = a^2$; $A\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right)$ şi $B = \left(0, -\frac{a^2}{\beta}\right)$. Cercul de diametri AB: $x^2 + y^2 - \frac{a^2}{\alpha}x + \frac{a^2}{\beta}y = 0$, ecuaţia dreptei OM: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ şi este tangentă la cerc în O. **11.** a) $x^2 + y^2 - ax - \lambda y = 0$; b) ecuaţia tangentei în O: $ax + \lambda y = 0$; ecuaţia tangentei în B: $\lambda y = ax + \lambda^2$; $P\left(-\frac{\lambda^2}{2a}, \frac{\lambda}{2}\right)$; $S_{[POB]} = \frac{\lambda^3}{4a}$; c) eliminăm λ din $x = -\frac{\lambda^2}{2a}$ şi $y = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow y^2 = -\frac{a}{2}x$; locul geometric este o parabolă ce are focarul $F\left(-\frac{a}{b}, 0\right)$. **12.** a) Fie (D) axa Ox şi (D_1) axa Oy; $A(a, 0)$, $B(0, \beta)$; ecuaţia paralelei prin B la (D) este $y = \beta$, iar ecuaţia mediatoarei segmentului AB este $(\Delta) \equiv y - \frac{\beta}{2} = \frac{a}{\beta}\left(x - \frac{a}{2}\right)$. Eliminând β între (D) şi (Δ), obţinem ecuaţia locului: $y = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$; b) Fie M intersecţia mediatoarei segmentului AB cu paralela dusă prin B la dreapta (D); triunghiul MAB este isoscel, $MA \equiv MB \Rightarrow$ locul geometric găsit este o parabolă cu focarul în A şi directoare dreapta (D_1). Intersectând dreapta (D) cu parabola, ordonatele intersecţiei au ecuaţia: $y^2 - 2\beta y + \beta^2 = 0$, de unde $y_1 = y_2$, locul geometric este o parabolă tangentă la mediatoarea segmentului AB. **13.** a) ecuaţia cercului este $x^2+y^2-(a+b)x+2cy+ab+c^2=0$ cu raza $R=\frac{1}{2}|a-b|$; b) ecuaţia perpendicularei în P pe dreapta (RP) este $y-c=\frac{b-a}{\lambda-c}(x-b)$, ecuaţa parlelei la Ox în punctul R este $y=\lambda$. Eliminând λ, rezultă locul geometric: $(y-c)^2=(b-a)(x-b)$ ce reprezintă o parabolă cu vârful în $P(b,c)$, având axa paralelă cu Ox. **14.** a) Centrul cercului $C\in(D)$ şi $C(-1,\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, variabil, are ecuaţia: $(x+1)^2+(y-\lambda)^2=\lambda^2+4$ sau $x^2+y^2+2x-2\lambda y-3=0$; b) $P(-1,y_1)$, $Q(-1,y_2)$, unde y_1 şi y_2 sunt rădăcinile ecuaţiei $y^2-2\lambda y-4=0$. Punctele M şi N se află la intersecţia tangentei în A la cerc ce are ecuaţia $2x-\lambda y-2=0$, cu tangentele la cerc în P şi Q, de ecuaţii $y=y_1$, respectiv $y=y_2$. Locul lui M sau N se obţine eleiminând λ şi y_i, $y=y_i$, $i=\overline{1,2}$ şi $2x-\lambda y-2=0$ din $y^2-2\lambda y_i-4=0$ şi se obţine ecuaţia locului geometric $y^2=4x$ care este o parabolă. **15.** $x+y-2=0$; $4x+3y-2=0$; $3x+4y-8=0$. **16.** a) (D) sau: $3x-y=0$; b) (C) sau: $x^2+y^2+2ax-2ay=0$; c) $x+y=0$. **17.** Fie α panta secantei. a) $(M_1C_1)\equiv 4\alpha x-(\alpha^2+5)y+4\alpha=0$; $(M_2C_2)\equiv \alpha x-(\alpha^2+2)y-2\alpha=0$ b) locul geometric: $x^2+y^2+8x+12=0$. **18.** a) Fie $A(a,0)$; ecuaţia locului: $x^2+y^2-px+a(a+p)=0$; b) $a=0\Leftrightarrow x^2+y^2-ox=0$. **19.** Fie $M(\alpha,\beta)$. Se liminiă α şi β din ecuaţiile $\alpha^2\beta x-b^2\alpha y=0$, $\beta x-(\alpha-c)y-c\beta=0$ şi $b\beta^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2=0$. Se obţine ecuaţia locului geometric: $x^2+y^2-2cx-b^2=0$. **20.** Din $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$, obţinem ecuaţia în m: $(x^2-a^2)m^2-2xym+y^2-b^2=0$, cu condiţia: $m_1\cdot m_2=-1$ şi găsim $\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}=-1\Rightarrow x^2+y^2-(a^2+b^2)=0$, ce se numesşte cercul ortooptic al elipsei sau cercul lui Monge. **21.** $A(a,0)$, $B(b,0)$, $\frac{MA}{MB}=-k\Rightarrow(1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2-2x(a-k^2b)+a^2-k^2b^2=0$ (C) cercul lui Apolonius. $(C)\cap(AB)\Rightarrow D\left(\frac{a+kb}{1+k};0\right)$, $E\left(\frac{a-kb}{1-k};0\right)\Rightarrow\frac{DA}{DB}=-\frac{EA}{EB}\Rightarrow A$, D, B, E formează o diviziune armonică. **22.** a) $x^2+y^2-\lambda^2x-\lambda y=0$; b) $\lambda x-y-\lambda=0$; $F(1,0)$; c) $2y^2-x=0$. **23.** $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$; drepta variabilă: $y=m(x-c)$ şi prima bisectoare: $y=x$. Deci $M\left(\frac{mc}{m-1},\frac{mc}{m-1}\right)$ şi $N(0,-mc)$. $AM\equiv y=\frac{mc(x-a)}{m(c-a)(+a}$; $NB\equiv y=\frac{mc}{b}(x-b)\Rightarrow m=\frac{by}{c(x-b)}$. Înlocuind în prima ecuaţie, obţinem: $y^2=\frac{c(b-a)}{b(c-a)}xy$. Dacă M este coliniar cu A, B, C, locul geometric este $y=0$ (Ox). Dacă $M\neq 0$, $y=\frac{c(b-a)}{b(c-a)}x$. deci locul geometric este o dreaptă ce trece prin origine. Pentru ca el să devină a doua bisectoare a axelor, trebuie ca $-1=\frac{c(b-a)}{b(c-a)}$, de unde: $c=\frac{ab}{2b-a}$. Abscisa lui C este $\frac{ab}{2b-a}$. **24.** Cum A nu aparţine celor două înălţimi, ele vor fi duse pe AB şi AC. Fie $AB\equiv y=mx+n$ şi $AC\equiv y=m_1x+n_1$ ce se intersectează în A şi B. Rezultă $m+n=m_1+n_1=2$ Ecuaţia AB se scrie $y=mx+(2-m)$ şi este perpendiculară pe $x+y=0\Rightarrow y=x+1$; $AC=y=m_x-(2-m_1)$ şi este perpendiculară pe $2x-3y+1=0\Rightarrow AC\equiv 3x+2y-7=0$. Intersectând, găsim $C(7,7)$ şi $B(-2,-1)\Rightarrow BC\equiv 2x+3y+7=0$. **25.** Fie $P(a,b)$; $(PM)\equiv y-b=-\frac{1}{\lambda}(x-a)$; $(PN)\equiv y-b=\lambda(x-a)$. Rezultă $M(a+\lambda b,0)$, $N(0,b-\lambda a)$. Dreapta MN are ecuaţia $\frac{x}{a+\lambda b}+\frac{y}{b-\lambda a}-1=0$, iar perpendiculara din P pe MN are ecuaţia $y-b=\frac{a+\lambda b}{b-\lambda a}(x-a)$. Eliminând λ între cele două ecuaţii obţinem: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$. **26.** $M(m,0)$, $N(0,n)$. $P\left(x=\frac{m}{1-r},y=\frac{-rn}{1-r}\right)$ şi $m+n=k$. Eliminând m şi n obţinem: $(1-r)x-\frac{1-r}{r}y=k$, ce reprezintă o dreaptă. **27.** a) $m_{AH}=3\Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{3}$; $\frac{GA}{GM}=-2$, (M piciorul medianei AG) $\Leftrightarrow M(1,-3)$. De aici:

$BC \equiv x + 3y + 8 = 0$; b) $x_G = \frac{x_a + x_b + x_c}{3}$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 1 + x_B + x_C = 3$, $y_B + y_C = -6$ şi $\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = -\frac{1}{3}$; $\frac{9y_B + 12}{9x_B + 4} = -\frac{x_c - 1}{3 - y_C}$, de unde rezultă $x_B = -2$, $y_B = -2$ şi $x_C = 4$, $y_C = -4$ sau $x_B = 4$, $y_B = -4$ a $x_C = -2$, $y_B = -2$. Deci $B(-2,-2)$, $C(4,-4)$ sau $B(4,-4)$, $C(-2,2)$. De aici rezultă $S_{[abc]} = 14$. **28.** Ecuaţia căutată are forma: $y - 1 = mx$. Obţinem: $x_1 = \frac{7}{3m-1}$ şi $x_2 = \frac{7}{2+m}$. Cum A este mijlocl segmentului $\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$, de unde $m = -\frac{1}{4}$.. Deci ecuaţia căutată este $y - 1 = -\frac{1}{4}x$. **29.** $(AD) \equiv y - (\lambda + 1) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}x$; $(BC) \equiv y - (\lambda - 2) = -\frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}x$. Eliminând λ între aceste două ecuaţii, obţinem locul geometric: $x - y - 1 = 0$.; **30.** Fie $C(\alpha, \beta)$; $AB = AC = BC \Rightarrow (\alpha - 2)^2 + \beta^2 = 10 = (\alpha - 1)^2 + (\beta - 3)^2 \Rightarrow$ sistemul: $\alpha - 3\beta + 3 = 0$ şi $\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 6 = 0$, cu soluţia $\alpha + \frac{3(1 \pm \sqrt{3})}{2}$; $\beta = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$, ce verifică ecuaţia $x - y = \pm\sqrt{3}$. Fie M în interiorul triunghiului; $d_{(M,AB)} + d_{(M,BC)} + d_{(M,AC)} = h$ - înălţimea triunghiului. **31.** Fie $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,d)$ vârfurile triunghiului. Fie $M(\alpha, \beta)$ un vârf al dreptunghiului înscris, situat pe BC; avem că $M \in BC$: $\frac{\alpha - b}{c - b} = \frac{\beta}{d}$. Fie I centrul dreptunghiului: $I\left(x = \frac{d(a + \alpha) + \beta(c - a)}{2d}, y = \frac{\beta}{2}\right)$. Eliminând α şi β, rezultă $2dy + 2(a + b - 2c)y - d(a + b) = 0$. Deci locul geometric este o dreaptă. **32.** a) (d) : $y = mx + n$ şi $M(\alpha, \beta = m\alpha + n)$; $P(\alpha, 0)$; $Q(0, \beta)$; ecuaţiile dreptelor: $y = m(x - \alpha)$; $y - \beta = -\frac{1}{m}x$, de unde $\alpha = \frac{mx - y}{m}$, $\beta = \frac{x + my}{m}$ şi eliminând α şi $\beta \Rightarrow (1 - m^2)x + 2my - mn = 0$; b) ecuaţiile dreptelor $y - \beta = mx$; $y = -\frac{1}{m}(x - \alpha)$ şi $\beta = m\alpha + n$. Eliminând α şi $\beta \Leftrightarrow 2mx + (m^2 - 1)y + n = 0$. **33.** a) Ecuaţiile tangentelor la hiperbolă paralele cu o direcţie dată: $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2} \Rightarrow (a^2 - x^2)m^2 + 2xym - (b^2 + y^2) = 0$, cu m_1 şi m_2, astfel încât $m_1m_2 = -1$, $\frac{b^2 + y^2}{x^2 - a^2} = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 - a^2 + b^2 = 0$, deci locul geometric est un cerc cu centrul în origine, de rază $r^2 = a^2 - b^2$. b) Ecuaţiile tangentelor la parabolă paralele cu o direcţie dată: $y = mx + \frac{p}{2m} \Rightarrow 2xm^2 - 2ym + p = 0$; $m_1m_2 = -1 \Rightarrow \frac{p}{2x} = -1 \Rightarrow x = -\frac{p}{2}$ (directoarea parabolei). **34.** a) D : $8x - 3y - 36 = 0$; b) $x^2 + y^2 + \frac{p-2}{2}x - (p+2)y + 2p = 0$; c) $2x + y - 2 = 0$. **35.** a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} - 1 = 0$; b) $M(6,5)$. **36.** Scriem ecuaţiile fasciculelor corespunzătoare vârfurilor şi impunem condiţia de paralelism şi obţinem: $x + 3y - 9 = 0$; $68x - 17y + 57 = 0$ şi $65x - 26y + 72 = 0$.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. MULŢIMEA NUMERELOR REALE ŞI FUNCŢII NUMERICE

1. a) $x_{1,2} = \pm 1$; b) $x_1 = 1$; $x_{2,3} = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$; c) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = \pm i$; d) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$; e) $x = 4$; f) $x \in \emptyset$; g) $x_{1,2} = \pm 3$; $x_{3,4} = \pm 3$; h) $3^x = y$; $y > 0$; $y_1 = 3$; $y_2 = 1$; $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; i) Se împarte ecuaţia cu 4^x; se notează $(3/2)^x = y$; $y > 0$; $y_1 = 3/2$; $y_2 = 2/3$; $x_{1,2} = \pm 1$; j) Se va observa că $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$; $(2 + \sqrt{3})^x = y$, $y > 0$, $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{1,2} = \pm 1$; k) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. **2.** Dacă, prin absurd $a > 0$, atunci rezultă $a + b > 0$; analog dacă $b > 0$. **3.** Se va utiliza proprietatea $|t| < \alpha (\alpha > 0) \Leftrightarrow -\alpha < t < \alpha$. **6.** a) Se obţine echivalenţa cu $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$; b) Se obţine echivalenţa cu $(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 \geq 0$. **7.** Se va pune condiţia $\Delta \leq 0$. **8.** Se aplică 6 a) pentru $a_1 = a$, $a_2 = b$, $b_1 = \sin x$, $b_2 = \cos x$. **9.** Se va demonstra inegalitatea echivalentă obţinută prin ridicare la pătrat a ambilor membri. **10.** Se lucrează prin dublă incluziune. **11.** (i) $\Rightarrow$ (ii). Cazul I: $x > 0$. Atunci, în baza lui (i) pentru $a = 1$ şi $b = x$, există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p \cdot 1 > x$, adică $p > x$ (observăm că $p \in \mathbb{N}^*$). Aşadar mulţimea inclusă în $\mathbb{N}^*$, $A_x \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{N}^* \mid p > x\}$ este nevidă. Fie $q = \min A_x$; deci $q \in A_x$, deci $q > x$ sau (1) $x < q$. Mai rezultă $q - 1 \notin A_x$ căci, în caz contrar, s-ar contrazice faptul că avem $q = \min A_x$. Aşadar $q - 1 \leq x$ (2). Să notăm $q - 1 = n$; din (1) şi (2) rezultă $n \leq x, n - 1$, c.c.t.d. Cazul II: $x = 0$; luăm $n = 0$. Cazul III: $x < 0$ Atunci $-x > 0$ şi deci, în baza celor stabilite la cazul I, există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m \leq -x < m + 1$; rezultă $-(m + 1 < x \leq -m$. Notăm $-(m + 1) = n$, deci $n \in \mathbb{Z}$ şi rezultă $n < x < n + 1$; (ii) $\Rightarrow$ (i). Dacă $b < a$, luăm $n = 1$, deci $n \cdot a = 1 \cdot a = a > b$; dacă $b = a$, luăm $n = 2$, deci $na = 2a > a = b$. fie acum $b > a$; rezultă $b > 0$. Considerăm numărul strict pozitiv b/a; pentru acesta, în baza (ii) există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p \leq b/a < p + 1$. Notăm $p + 1 = n$. **12.** a) $\inf A = a$, $\sup A = b$; b), c), d) idem; e) $\inf A = 0$; pentru stabilire se arată că: (i) $0 < x, \forall x \in A$; (ii) $\forall m \in \mathbb{R}$ majorant pentru A, rezultă $m \leq 0$ (se lucrează prin absurd şi se aplică axioma lui Arhimede); $\sup A = \max A = 1 \in A$; f) $\inf A = a$; $\sup A = \infty$; g) $\inf A = -\infty$, $\sup A = b$; h) $\inf A = -\infty$, $\sup A = \infty$. **14.** a) $x \in [2, 3)$; b) $x = n + 0{,}4$, $n \in \mathbb{N}$; c) $x = n + ,4$, $n \in \mathbb{Z}$ sau $x \in \{\ldots, -2{,}6; -1{,}6; -0{,}6; 0{,}4; 1{,}4; 2{,}4; \ldots\}$; d) $x = n + 0{,}5$, $n \in \mathbb{Z}$; e) $x = 0$; f) $x \in [0, 1)$; g) $x \in \mathbb{Z}$; h) $x \in \emptyset$; i) $x = n + \sqrt{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. **16.** Se lucrează pe cazuri $x < y$, $x = y$, $x > y$. **17.** Avem $-x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1 + x^2}$, de unde prima inegalitate şi analog $x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1 + x^2}$ etc. **18.** a) Dacă $a > 0$, atunci f este strict crescătoare, iar dacă $a < 0$, atunci f este strict descrescătoare; b) f strict crescătoare; c) f strict descrescătoare; d) f strict crescătoare. **19.** f nu este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}^*_-$. **20.** a) $f(x) = -2x$ pentru $x < -1$, $f(x) = 2$ pentru $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 2x$ pentru $x \in (1, \infty)$; b) Discuţie: $m < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$; dacă $m = 2 \Rightarrow x \in [-1, 1]$; dacă $m > 2 \Rightarrow$ ecuaţia admite soluţiile unice $x_1 < 1$, $x_2 > 1$. **21.** Se procedează asemănător. **22.** Dacă $a \neq b$, se va observa că $f(a) = f(b) = |a - b|$; dacă $a = b \in \mathbb{R}^*$, atunci $f(x) = 2|x - a|$ şi se va observa că $f(0) = f(2a) = 2|a|$; dacă $a = b = 0$, deci $f(x) = 2|x|$, se va observa că $f(-1) = f(1) = 2$. **23.** a) $h(x) \neq 0$; b) $g(x) \geq 0$; c) $g(x) > 0$; d) $-1 \leq g(x) \leq 1$. **24.** a) f impară; b) f impară; c) f impară; d) f impară; e) f pară; f) f nu este nici pară, nici impară. **25.** $f(0) = 0$. **26.** f identic nulă. **28.** a) $p_f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ şi $i_f(x) = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; b) $p_f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cos kx$; $i_f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \sin kx$; c) $p_f(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2 = \cosh$; $i_f(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2 = \sinh x$. **29.** a) $T = 2\pi$; b) $T = 2\pi$; c) $T = \pi$; d) $T = \pi$; e) $T = \pi$. **30.** b) π; 4π. **31.** a) Dacă $\dfrac{T_1}{p} = \dfrac{T_2}{q} \overset{\text{def}}{=} \tau$, perioadă căutată este $pq\tau$; b) $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{2\pi}{7}} = \dfrac{7}{3}$, deci $\dfrac{T_1}{7} = \dfrac{T_2}{3} = \tau \Rightarrow$ perioada căutată este 21τ; dar $\tau = \dfrac{2\pi/3}{7} = \dfrac{2\pi}{21}$ etc. **32.** a) $T = 2$; b) $T = 1$; c) $T = 3$; d) $T = 4$. **33.** $\dfrac{1}{2}$; 2. **37.** a) Avem relaţiile (1) $f(a - h) = f(a + h)$ şi (2) $f(b - k) = f(b + k) \forall h.k \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru orice $h \in \mathbb{R}$ avem $f(a - h) \overset{(1)}{=} f(a + h) = f(b - (b - a - h)) \overset{(2)}{=} f(b + (b - a - h)) = f(2b - a - h) = f(a + 2(b - a) - h) = f(a - h + 2(b - a))$. Aşadar $f(a - h) = f(a - h + 2(b - a))$. Punând $a - h = x$, rezultă că f este periodică de perioadă $T = 2(b - a)$; b) Nu (S-ar contrazice definiţia funcţiei, care cere la un x dat, să corespundă un singur y). **38.** Fie $x \in \mathbb{R}$, oarecare; deducem succesiv: $f(a + x) = f(a - (-x)) = 1/f(-x) = -1/f(x)$, adică $f(a + x) = -1/f(x)$; apoi $f(2a + x) = f(a + (a + x)) = f[a - (-(a + x))] = 1/f(-(a + x)) = -1/f(a + x) = f(a + x)$. Deci f este periodică, de perioadă $T = 2a$. **39.** Se arată întâi că în afară de $f(x) \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ avem şi $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Apoi, urmând o cale asemănătoare cu cea din problema precedentă, se arată că f este periodică de perioadă $T = 4a$. **40.** $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, deci funcţia f este periodică de perioadă π. Pentru funcţia g se lucrează prin reducere la absurd; fie g periodică, adică există

$T > 0$ astfel încât $g(x+T) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Deci: $x + T + \sin(x+T) = x + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Dând valorile $x = 0$, respectiv $x = \pi$ se obţin egalităţile: $T + \sin T = 0$ şi $T - \sin T = 0$, care adunate, dau $T = 0$, contradicţie.

Capitolul II. ŞIRURI DE NUMERE REALE

1. a) $0 < a_n = \frac{3n+2}{4n+6} \le \frac{3n+2}{4n+6} = \frac{5n}{4n+6} < \frac{5n}{4n} = \frac{5}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $0 < a_n < \frac{5}{4} \forall n \in \mathbb{N}$, aşadar şirul este mărginit între 0 şi $\frac{5}{4}$; b) $0 < a_n < 1$; c) $0 < a_n < 1$. **2.** a) $0 < x_n < 1$; b) $0 < x_n < 1$; c) $0 < a_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$; d) $0 < b_n < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + a_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$ (cu a_n de la c)); e) $0 < c_n \le b_n < 2$; f) $0 < d_n \le b_n < 2$; g) $0 < a_n \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$. **3.** $1 \le a_n < \sqrt[3]{r} < 2$ etc. **4.** b) Se ia $k = n$. **5.** c) (i) $0 < a_n < 1$; (ii) $0 < a_n < 1$; (iii) $0 < a_n < 1$; (iv) Se extrage radicalul de ordinul n^2 din cei trei membri ai dublei inegalităţi de la punctul b). **7.** a) Pentru $k \ge 2$ avem $k! \ge (k-1)k$; se inversează şi se majorează toată suma E_n; b) Se dezvoltă binomul şi se va folosi inegalitatea $C_n^k \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$. **8.** a) (i) Calcul direct; (ii) Se ia din (i) $k = 1, 2, 3, \ldots, n$; b) Se foloseşte a). **9.** b) Se obţine $a_n = \Omega\sqrt{n}$ şi se aplică a). **10.** a) $|a_n| = 1$; b) $|a_n| \le |A| + |B|$; c) $|a_n| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ etc. **11.** a) $|a_n| \le 5$; b) $|a_n| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc.; c) $|a_n| \le 1$. **13.** Fie $A > 0$, oarecare. Se arată că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{2n+1} > A$; de aici rezultă că şi $a_n = \frac{1}{\Omega_n}$, care este mai mare decât $\sqrt{2n+1}$ va fi mai mare decât A. **17.** Se calculează diferenţa $a_n - a_{n+1}$ şi i se stabileşte semnul. a) $(a_n)_n$ este strict crescător; b) idem; c) idem; d) $(a_n)_n$ strict descrescător; e) idem. **18.** Se calculează $a_n - a_{n+1}$ etc. **19.** a) Se obţine că $a_n - a_{n+1} < 0$; b) Analog. **20.** Se lucrează cu raportul $\frac{a_n+1}{a_n}$. a) Şirul este strict descrescător; b) Şirul este strict crescător. **21.** Şirul este strict descrescător. **25.** Se utilizează raportul a doi termeni consecutivi. **27.** a) Şirul este strict crescător şi mărginit; d) idem; f) Se calculează întâi suma. **36.** a) 0; b) 0. **38.** b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. **39.** a) $0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}} \le \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} \to 0$ etc. b) şi celelalte analog. **42.** a) Numerele vor fi, o dată $\alpha_1 = 1+1 = 2$, $\alpha_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\alpha_3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \ldots, \alpha_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, iar apoi $\beta_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\beta_3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \ldots, \beta_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. **44.** a) 0; b) 2; c) 0; d) 6; e) 7; f) 6; g) 30; h) $\frac{2}{5}$; i) $3/e$. **45.** a) ∞; b) ∞; c) 0. **46.** b) ∞. **50.** $|a_n| \le 3$, deci şirul este mărginit; apoi, luând $n = k^2$, rezultă $a_k^2 = 2 + \cos k\pi = 2 + (-1)^k$, deci este divergent, conţinând un şir divergent. Pentru ultima cerinţă, se pune aceasta întâi succesiv sub forma $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 0$ sau $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}(a_{n+1} - a_n) = 0$; $\left(\frac{1}{a_n}\right)_n$ este mărginit; se descompune diferenţa de cosinusuri în produs etc. **51.** a) 2; b) 1. **53.** Se exprimă x_n în funcţie de a_n din problema 52; $\alpha = 2\sqrt{2} - 2$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. **54.** a) e; b) e^{-1}; c) ∞; d) 1; e) e^2; f) e^3. **55.** Expresia care se adaugă lui 1, la bază nu tinde la 0. **56.** a) e^2; b) e^2; c) e^2. **57.** a) Se logaritmează relaţia din enunţ etc; b) Se ia $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ în a) şi se adună. **58.** ∞. **60.** Se notează $\varepsilon = H_n - \ln n - C$. **61.** 1. **62.** Se presupune, prin absurd, că ar exista o astfel de funcţie raţională $f(f : E \to \mathbb{R}$, unde $\mathbb{N}^* \subseteq E \subseteq \mathbb{R})$, $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, unde $U(x) = a_p x^p + \ldots + a_0$, $V(x) = b_q x^q + \ldots + b_0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a_p \ne 0, b_q \ne 0$, $V(x) \ne 0, \forall x \in E$. Am avea deci $H_n = \frac{U(n)}{V(n)}$ (1). Trecând la limită pentru $n \to \infty$, cum $(H_n \to \infty)$ ar rezulta $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U(n)}{V(n)} = \infty$. Deci $p > q$, adică $p - q > 0$ sau $p - q \geq 1$. Din (1) mai rezultă (2) $\frac{H_n}{n^{p-q}} = \frac{U(n)}{n^{p-q}V(n)}$. Trecând din nou la limită ar rezulta $0 = \frac{a_p}{b_q}$, contradicţie. **63.** b) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \ln 2$. **64.** Se majorează şi se minorează. a) (i) 1; (ii) 1; b) 1; c) $\frac{1}{2}$. **65.** $\frac{1}{3}$. **67.** b) 1. **68.** 1. **73.** $\sqrt{e}$; $\sqrt{e}$. **76.** $1/\sqrt{\pi}$. **77.** Inegalitatea se stabileşte arătând că şirurile $x_n = a_n - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$, $y_n = a_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ sunt strict monotone. **79.** a) ∞; b) 0; c) 0; d) $(3O4)^3$ etc. **80.** a) ∞; b) ∞; c) $-\infty$; d) 7; e) 3/7 etc. **81.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 1; e) $-\infty$; f) 0; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{1}{10} - \frac{1}{18}$ deci $\frac{2}{45}$; i) 1; j) $a/(1-a)^2$; k) $\frac{1}{2}$; l) $\frac{5}{6}$; m) ∞; n) $\frac{1}{4}$. **82.** a) 0; b) 1; c) 1; d) 2. **83.** iii) $\alpha = 3$, $\beta = -4$, $\gamma = -4$. **85.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3+(-1)^k}{4}$. **86.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{0+1}$; d) 1; e) 1; f) $\frac{3}{4}$. **87.** a) 1; b) 1; c) ∞; d) 1; e) 4. **88.** a) 1; b) $\frac{4}{e}$; c) $\frac{e^2}{4}$. **89.** a) $a_n = \ln n$; convine şi $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$; b) $a_n = \ln(\ln n)$; convine şi $a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n\ln n}$ $(n \geq 2)$; c) $a_n = \ln(\ln(\ln n))$. **90.** i) $h = 6$; ii) $y_n = 5 \cdot (1/2)^{n-1}$; iii) $x_n = 5 \cdot (1/2)^{n-1} + 6$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 6$. **91.** i) $h = -\frac{\beta}{\alpha - 1}$; ii) $y_n = \left(x_1 + \frac{\beta}{\alpha-1}\right)\alpha^{n-1}$. **92.** a) $x_n = 4$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$; b) $x_n = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$; c) $x_n = -13\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 15$; d) $x_n = -7\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 10$. **93.** a) $x_n = 2^n + 3^n$; b) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$; c) $x_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$. **95.** a) $x_n = 7 \cdot 2^n + 9n \cdot 2^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. **96.** a) $x_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}\right) \to 0$; b) $x_n = \cos n\alpha + \sin n\alpha$; şirul nu este neapărat convergent (fiind doar pentru unele valori ale lui a, ca de exemplu $a = 2\pi$), însă este mărginit. **97.** Se obţine $x_n = A\cos\frac{n\pi}{4} + B\sin\frac{n\pi}{4}$, deci $|x_n| \leq |A| + |B|$. **98.** Se notează $1/(\sqrt[n]{x_n} - 1) = y_n$; $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$. **100.** c) $\sqrt{2}$. **102.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{a+b}{2}$. **104.** Pentru a doua limită se aplică lema lui Stolz. **105.** $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 1$.

Capitolul III. LIMITE DE FUNCŢII

7. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 6$. **8.** a) $\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x) = +\infty$; f nu are limită în punctul $x_0 = 1$; b) Se studiază întâi semnul funcţiei, iar apoi se stabileşte pentru limitele laterale în punctele ± 1 (toate infinite) semnul etc. **9.** a) $x_0 = 0$; b) $x_0 = 1$. **10.** a) 0; b) 0; c) $x \in \mathbb{Z}$; d) $x \in \mathbb{Z}$. **11.** a) $k = -2$; b) $k = 0$. **12.** a) 1; b) $18e^3 - 27$; c) 0; d) 1; e) $-\frac{1}{3}$; f) $\sqrt{3}$; g) 0; h) 0; i) 2; j) $\pi/2$; k) $-\ln 2$; l) 0. **13.** a) 2/3; b) 0; c) ∞; d) ∞; e) -1/7; f) ∞; g) 0; h) $-\infty$. **14.** a) -1; b) 0; c) 1; d) -8; e) $-\infty$; f) m/n; g) $n(n-1)/2$. **15.** a) -1; b) 1; c) 1/4; d) ∞. **16.** a) 0; b) 1; c) 1; d) -1; e) 2; f) 2/3; g) 0; h) $-3/\sqrt{2}$; i) $(a+b+c)/3$; j) 1/2. **17.** a) a/b; b) 1; c) -1; d) -1; e) 1/2; f) 1. **18.** a) ∞; b) ∞; c) ∞; d) ∞; e) 1/2; f) 1/4; g) ∞. **19.** a) 1/2; b) 1; c) -1/2; d) $1/3\sqrt[3]{4}$; e) $3\sqrt{a}$; f) $3\sqrt[3]{a^2}/2$; g) 1; h) 4/3; i) 1/2; j) 5/6. **20.** a) 3/2; b) $1/a$; c) $a - b$; d) e^a; e) $a^a \ln a$; f) a^a; g) $l = l_1 - l_2$ cu l_1 şi l_2 de la punctele e) şi f), deci $l = a^a(\ln a - 1)$; h) a^a; i) $a^a \ln a$; j) $a^a(1 + \ln a)$; k) $1/\ln a$; l) 1. **21.** a) 5/3; b) 1/5; c) a/b; d) a/b; e) a^2/b; f) 1/2; g) -1/4; h) 12; i) $(b^2 - a^2)/2$; j) 2; k) 1/2; l) 1/10; m) 1/4; n) 1; o) 6; p) -1/3; q) $(b^2 - a^2)/6$; r) $1/\sqrt{2}$; s) 3; t) $1/4\sqrt{2}\cos\sqrt[3]{2}$. **22.** a) $\sqrt{2}/2$; b) $1/\sqrt{3}$; c) 3; d) -1/2; e) 2π; f) 0; g) -24; h) 1/3; i) $2/\pi$; j) 1/8; k) Dacă $n = p$, atunci $l = 1$; dacă $n > p$, atunci $l = 0$; dacă $n < p$, $n - p = 2k$, atunci $l = \infty$; dar dacă $n - p = 2k + 1$, atunci l nu există (limitele laterale infinite, de semne contrare); l) $1/4$; m) 3; n) 1; o) 3π; p) $6\sqrt{2}$; q) $1/2$; r) $3/2$; s) 3; u) $3/5$; v) $3/2$. **23.** $(p-q)/2$. **24.** (ii) $L_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$; (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \infty$. **25.** a) $\sqrt{ab}$; b) $\sqrt[3]{abc}$; c) $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$; d) e^2; e) e^{-2}; f) $\sqrt{e}$; g) $e^{-1/a}$; h) e^{-1/e^2}; i) $e^{1/a \ln b}$; j) 1; k) $1/ab$; l) $15/\ln 2$; m) e^2. **26.** a) e^2; b) $1/e$; c) 1; d) e^3; e) e. **27.** a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) 1. **28.** a) 1; b) 1; c) 1; e) 1; f) 1.

Capitolul IV. FUNCŢII CONTINUE

1. a) Avem $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$, deci $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Aşadar, f este continuă în punctul $x_0 = 2$; b) Fie $\varepsilon > 0$; alegem $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{39}$. Pentru orice $x \in [0,5]$, cu $|x-2| < \delta$; rezultă $|f(x) - 8| = |x^3 - 8| = |x-2| \cdot |x^2 + 2x + 4| < \varepsilon$, deci f este continuă în punctul $x_0 = 2$; c) Fie V o vecinătate oarecare a punctului $f(2) = 8$; rezultă că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $8 \in (a,b) \subset V$. Fie $\varepsilon = \min(8-a, b-8)$. Conform celor stabilite la punctul b), există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in [0,5]$ cu (1) $|x-2| < \delta$ să avem (2) $|f(x) - 8| < \varepsilon$. Fie $U = (2-\delta, 2+\delta)$. Pentru orice $x \in U \cap [0,5]$ rezultă (1), deci (2), de unde $-\varepsilon < f(x) - 8 < \varepsilon$, deci $8 - \varepsilon < f(x) < 8 + \varepsilon$, adică $f(x) \in (8-\varepsilon, 8+\varepsilon) \subseteq V$; d) Fie $(x_n)_n \subset [0,5]$ un şir oarecare astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$; rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = 8$. **2.** Analog. **3.** a), b), d) f continuă; c) f discontinuă în 2. **4.** a) $m = 2$; b) $m = 2$; c) $m = 1$; d) $m = 0$. **5.** a) $m = 1$; b) $m = 1$; c) $m = 1$; d) $m = r$. **6.** $m = e$; $n = 0$. **9.** Nu (ex: $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ pentru $x \neq 0$, $f(0) = 0$). **10.** Da. **11.** a) Da; b) Da; c) Da. **12.** Funcţiile sunt continue. **14.** Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, oarecare, iar $(x_n)_n \subset$ II, $x_n \to x_o$; rezultă $f(x_n) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, $f(x_0) = 0$. **15.** $h = f - g$ etc. **17.** $C = 0$; caz particular. **20.** $-1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$; $u = -1$, $v = 1$. **21.** Analog. **22.** Fie $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, $x \in [a,b]$). Se ia $P_n(x) = m - (x-a)^n$, $Q_n(x) = M + (x-a)^n$. **23.** Se va ţine seama că f are limite infinite de semne contrare la $\pm\infty$ şi că este continuă. **24.** a) Fiind continuă, f transformă un interval într-un interval $I = f(\mathbb{R})$. Întrucât $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că $I = (-\infty, \infty)$, deci f este surjectivă; b), c) analog. **27.** a) $g(x) = x - f(x)$ etc.; b) $g(x) = x - f(x)$; $h(x) = x + f(x)$; c) Punctul x_0 nu există întotdeauna ($f(x) = x + 1$ etc.).

Capitolul V. FUNCŢII DERIVABILE

6. a) $f'(x) = f(x)[\ln(1+1/x) - 1/(x+1)]$; b) $f'(x) = [\ln(1+1/x) - 1/x]$; c) $f'(x) = f(x)[x - (1+x)\ln(1+x)]/x^2(1+x)$. **7.** $f(0) = 0$; din enunţ $\exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$; o notăm cu A; $\forall x_o \in \mathbb{R}$ de ţine seamă de $\dfrac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] = \dfrac{1}{h} f(h)$ etc. **8.** Analog. **9.** Analog. **10.** Se pune $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n$; se introduce $x = a$, iar apoi se derivează succesiv luând apoi $x = a$ etc. **15.** a) $f^n_{1/2-n}(x) = A_p x^{p-n}$; b) $f^{(n)}(x) = n!(p\ \ n)x^{p-n}$; c) $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\dfrac{2n+1}{2}\right)x^{1/2-n}$; d) $f^{(n)}(x) = e^x$; e) $f^{(n)}(x) = a^x(\ln a)^n$; f) $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!/x^{n+1}$; g) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$; h) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n \ln a$. **16.** a) $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1/(x-a)^{n+1} + 1/(x+a)^{n+1})$; b) analog. **23.** a) Relaţiile $f(\alpha) = 0$ şi $f'(\alpha) = 0$ duc la o contradicţie; b) Analog.

Capitolul VI. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR

1. a) ± 1; b) 0, $\pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}$; c) ± 1; d) 0; e) ± 1; f) 0; g) ± 1; h) 0; i) -1; j) 0; -2; k) $1/e$; l) e. **3.** a)

0; b) ± 1; Nu. **7.** a) $(a+b)/2$; b) $c = \pi/2$; c) teorema inaplicabilă; d) idem; e) idem; f) idem; g) $x = \left(a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)/3$. **8.** a) 5; b) $10/\sqrt{3}$; c) $\ln(e-1)$; d) $13/36$. **9.** a) $31/9$; c) $\pi/4$. **10.** a) $x_1 \in (0,2)$, $x_2 \in (2,\infty)$ şi două rădaăcini complexe conjugate; b) $x_1 \in (-\infty,-2)$, $x_2 \in (2, 1/2)$; $x_3 \in (1/2,3)$; $x_4 \in (3.\infty)$; c) $x_1 \in (-\sqrt{5},\sqrt{5})$. **12.** Nedeterminat. **13.** $c = (a+b)/2$. **14.** $c_n = 1/\sqrt[n]{n}\xrightarrow[(n\to\infty)]{}1$. **15.** a) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$; b) f' injectivă (deci, cum f' are proprietatea lui Darboux, f' strict monotonă). **22.** Se va utiliza funcţia $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 = x)^\alpha - 1 - \alpha x$. **23.** Se va ţine seama că $x < \mathrm{tg} x, \forall x \in (0, \pi/2)$. **24.** Se demonstrează, separat, fiecare parte a inegalităţilor. **26.** $e'(x) > 0$, $f'(x) < 0$; $e(x) < \lim\limits_{t\to\infty} e(t) = e = \lim\limits_{t\to\infty} f(t) < f(x)$. **28.** Se demonstrează separat cele două părţi. **29.** Se lucrează separat; punând $\dfrac{b}{a} = t > 1$, iar apoi $t = 1 + \dfrac{1}{s}$, se ajunge la inegalitatea din problema 28. **31.** Funcţiile sunt nederivabile în punctele date, dar admit derivate laterale. **32.** a) n/m; b) α/β; c) 1/6; d) 1; e) -1/8; f) 2/9. **33.** a) 3/4; b) -1/12; c) 1/2; d) 1/6; e) 1/4; f) ∞. **34.** a) 0; b) 0; c) 1; d) -1; e) 0; f) 1. **35.** a) 0; b) 0; c) 0; d) ∞; e) 1; f) $-e/2$. **36.** a) ∞; b) ∞; c) 2/3; d) 2; e) 1/2; f) ∞; g) $\ln(\pi/2)$. **37.** a) 0; b) 3; c) 1; d) 0. **38.** a) $e^{-1/2}$; b) 0; c) $e^{-2/\pi}$; d) $e^{-1/e}$; e) e; f) $\sqrt{e}$. **39.** a) 0; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) 1; g) 1. **40.** a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e) 1; f) e; g) 1; h) 1. **41.** a) $\mathbb{R}$, convexă; b) $\mathbb{R}$, concavă; c) f concavă pe $(-\infty,0)$; convexă pe $(0,\infty)$; e) $(-\infty,-1/\sqrt{3})$; $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$; $(1/\sqrt{3},\infty)$; f) $(-\infty,-1)$; (-1,0); (0,1); $(1,\infty)$; g) f convexă pe $\mathbb{R}$; h) $(-\infty,0)$; $(0,\infty)$; i) $(-\infty,-2)$; $(-2,\infty)$; j) $(0,e^{3/2})$; $(e^{3/2},\infty)$; l) $(-\infty,0)$; $(0,\infty)$; m) convexă pe $(0,\infty)$. **42.** a) $x = 0$; $y = 0$; b) $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$; c) $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$; d) $x = \pm 2$; $x = \pm 3$; $y = 0$; e) $x = -6/5$; $y = 2/5$; f) $y = 0$; g) $y = -1$; h) $x = 1$; $y = x + 4$; i) $x = \pm 1$; $y = x$; j) $x = 0$; $y = 0$; k) $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$ (la $+\infty$); l) $y = -x-1$; m) $x = 0$; $y = 1$; n) $y = 0$; o) $x = 0$; $y = 0$; p) $x = -1$; $y = 1$.

CLASA A XII-A

ALGEBRĂ

Capitolul I. LEGI DE COMPOZIŢIE. PROPRIETĂŢI

1.a) $e_* = 1 - i$; b) $z'_* = \dfrac{2-iz}{z+i}$; $z \neq -i$ c) $z = 1 - i$. **2.** 1) $|x| < 2$, $|y| < 2$, $|xy| < 4$, $-2 < \dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{4}} < 2$; 2) $x * (y * z) = \dfrac{xyz + (x+y+z)}{(xy+yz+zx+4)} = x * (y * z)$; 3) $e_* = 0$; 4) $x'_* = -x$. **3.** 1) $x * y \in H$, $\forall x, y \in H$; 2) $x * y \in H$, $\forall x, y \in H$, $m \geq 6$; 3) $e = 3$, $m = 6$; 4) $x' = \dfrac{2x-3}{x-2}$, $x > 2$, $x' = 2$, $x = 2$. **4.** $\log_a(a^x + a^e) = x$; $a^x + a^e = a^x$, $a^e = 0$, $e \in \emptyset$, $x_1 = 0$, $x_2 = -6a$. **5.** $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$, $xy \in \mathbb{R}$, $x * y \in \mathbb{R}$, $x * y = y * x$, $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $e = 0$. **6.** G_1. $b = a$, $a^2 = a$, $b^2 = b$; G_4. $a = b$, $a = b = 0$, $x * y = xy$, $a = b = 1$, $x * y = xy + x + y$. **7.** $x \geq a$, $y \geq a$, $xy \geq a^2$, $x * y \geq a$, $\log_a xy \geq a$, $xy \geq a^a$; $a^2 \geq a^a$, $a \leq 2$. **8.** $e = 2$. **9.** 1) G_1. $b^2 - ac - b = 0$; 2) $e = -\dfrac{c}{b} \in \mathbb{Z}$, $b|c$. **10.** $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|xy| < 1$, $e = 0$, $x' = -x$. **11.** G_1, G_4. $e = 0$, $x' = \dfrac{x}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. **12.** $a = 1$, $b = -1$. **13.** 1) $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|xy| < 1$, $|x * y| < 1$, $\left|\dfrac{x-y}{1-xy}\right| < 1$, $\dfrac{(x-y)^2}{(1-xy)^2} < 1$, $(1-x^2)(1-y^2) > 0$; 2) $x = \dfrac{1}{2}$, $y = z = 0$, $(x * y) * z \neq x * (y * z)$, $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}$, $x * y \neq y * x$, $x * e = x$, $\dfrac{x-e}{1-ex} = x$, $e(1-x^2) = 0$, $e = 0$, $0 * x = -x \neq x$; $x \neq 0$ contradicţie; 3) $t = x * y \in (-1,1)$, $1 - tz \neq 0$, $t * z \in (-1,1)$, $|t * z| < 1$, $|t * z| = \left|\dfrac{x-y-z+xyz}{1-xy-xz+yz}\right| < 1$. **14.**

$b = 2a$, $a_1 = b_1 = 0$, $x*y = xy$, G_1,G_4. $a = 1$, $b = 2$, $x*y = xy+2x+2y$; G_1,G_4. **15.** a) $x*y \in G$; $x*y \geq 4$, $(x-4)(y-4)+k-20 \geq 0$, $a \in [20,+\infty)\cap\mathbb{N} = \{20,21,\dots\}$; b) $x*y = (x-4)(y-4)+4$; G_1,G_4. $e = 5$; c) $x' = 4 - \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{4x-17}{x-4}$, $x \in (4,\infty)$. **16.** $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$; $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$, $a_1, a, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1^2 - kb_1^2 = 1$, $a_2^2 - kb_2^2 = 1$, $xy = (a_1a_2+2b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)\sqrt{2}$, $a_1a_2+2b_1b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$, $(a_1a_2+2b_1b_2)^2 - k(a_1b_2+a_2b_1)^2 = 1$; $(2-k)[2a_1a_2b_1b_2 + 2b_1^2b_2^2 + kb_1^2b_2^2] = 0$, $k_1 = 2 \in \mathbb{N}$, $k_2 = -2\dfrac{a_1a_2 - b_1b_2}{b_1b_2} \notin \mathbb{Z}$. **17.** $a_1 = b_1 = 0$; $a_2 = \dfrac{1}{3}$; $b_2 = 1$. **18.** $z = 2i$, G_1, G_4. **19.** $a = 2$ **20.** G_1, G_4; $e = -1$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **21.** $\lambda \geq 6$. **22.** $x \in \mathbb{Q}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **23.** $x = -\ln 3$. **24.** $e = \dfrac{1}{2}(1+i)$. **25.** $e_\perp = 12$; $e_\top = -2$ 1) $\left(\dfrac{11}{12} - \dfrac{7}{8}\right)$; $\left(-\dfrac{7}{8}, \dfrac{9}{8}\right)$. 2) $\left(\dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{6}\right)$. **26.** $b^2 = b+ac$. **27.** a) $(x*y)*z = x*(y*z)$; b) $2^{n-1}(x-1)^n+1$. **28.** $a = 4m+1$, $b = m$, $c = 16m+4$, $m \in \mathbb{R}$. **29.** $c = 3$. **30.** a) $c = 1$; b) $e = -\dfrac{1}{2}$; c) $x*y = 2(x+1)(y+1) - 1$, $x > -1$, $y > -1$, $x*y > -1$. **31.** $m = 1$. **32.** a) $a = 1$; b) $e = 0$, $x' = \dfrac{x}{x-1}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **33.** a) G_1, G_2, $e = 5$; b) $x' = 4 + \dfrac{1}{x-4} \in \mathbb{Z}$; $x \in \{3,5\}$. **34.** $e = 4$, $x \in \{1,5\}$, $x' = 3 + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{3x-8}{x-3} \in \mathbb{Z}$, $x \in \{2,4\}$; $x \in \mathbb{Z}\setminus\{2,4\}$, $x' \notin \mathbb{Z}$. **35.** $e \in \emptyset$. **36.** $e = 3$; G_1, G_4; $(x-2)^n + 2$, **37.** $(3,-1)$. **38.** $a = \dfrac{1}{2}$. **39.** $x = a_1 + b_1\sqrt{2}$, $a_1, b_1 \in \mathbb{Q}$, $y = a_2 + b_2\sqrt{2}$; $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$; $xy = a_1a_2 + 2b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$; $a_1a_2 + 2b_1b_2 \in \mathbb{Q}$; $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$; $e = 1 = 1 + 0\sqrt{2}$, $x = a + b\sqrt{2} \in H$, $x' = a - b\sqrt{2} \in H$, $x \neq 0$. **40.** $x, y \in M$, $x*y = 7(x-1)(y-1)+1 \in M$. **41.** $b = 2a$, $a = b = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$; $b = 1$. **42.** $z*(y'*z')$. **43.** a) G_4, G_1; b) $e = 0$; c) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 > 2$, $x \in \mathbb{Z}^*$. **44.** $a = \dfrac{1}{2}$. **45.** G_4; $a = b$; G_1, $(a^2 - a)(x - z) = 0$, $a = b = 0$ şi $a = b = 1$. **46.** $\{(2,3),(3,2)\}$. **47.** a) $x > 1$, $y > 1$, $x*y = 1 + (x-1)^{\lg(y-1)} > 1$; b) G_1; c) $\lg(x*y-1) = \lg(y*x-1)$. **48.** $x \in \{-3,-1,0,2,3,5\}$. **49.** $f_t^{-1} = f_{-t}$; f_{-4}. **50.** $a = 1$, $b = 5$, $c = 20$. **51.** $e_1 = -1$, $e_2 = -i$, $x^2 + y^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **52.** 1) $x' = \dfrac{3x-4}{2x-3} \in \mathbb{Z}$, $x \in \{1,2\}$; 2) $(2,3)$. **53.** $(x-3)^n + 3$, $e = 4$, $n = 4$.

Capitolul II. MONOIZI. GRUPURI

1. $x*y = 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)(y-1) \in \mathbb{R}_1$, $e = -1$, $x' = 1 + \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{x+3}{x-1}$. **2.** $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & 4y_1 \\ -y_1 & x_1-y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 & 4y_2 \\ -y_2 & x_2-y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)+(y_1+y_2) & 4(y_1+y_2) \\ -(y_1+y_2) & (x_1+x_2)-(y_1+y_2) \end{pmatrix}$, $e = O_2$, $A \in M_2$, $A' = -A$. **3.** G_1, G_4, $a+b = 0$, $a(a+1) = 0$, $b(1-b) = 0$; $a = b = 0$; $x*y = xy$, $e = 1$, $x' \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^*$; $a = -1$, $b = 1$; $x*y = xy+x+y$, $e = 0$, $x' \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **4.** a) $x, y \in (-1,1)$; $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|xy| < 1$, $|x*y| < 1$; G_1: $(x*y)*x = x*(y*z)$, $\forall x,y,z \in (-1,1)$; G_2: $e = 0$; G_3: $x' = x$; G_4: $x*y = y*x$, $\forall x,y \in (-1,1)$; b) $m = 1$; $f(x)$ este bijectivă, $f:(0,\infty) \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $(\mathbb{R}_+^*,\cdot) \simeq (G,*)$; $f(xy) = f(x)*f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$. **5.** a) ${}^tA \cdot A = I_2$, $\det({}^tA \cdot A) = \det I_2 = 1$; $\det{}^tA.\det A = 1$, $\det{}^tA = \det A$, $(\det A)^2 = 1$, $\det A = \pm 1$; b) G_1, G_2, $e = I_2$, G_3. $A^{-1} \in M$, $A^{-1} = {}^tA$. **6.** $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 \end{pmatrix}$; $\det M_1 = \det M_2 = 1$, $M_1 \cdot M_2 \in M$, $\det(M_1M_2) = 1$; $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$; $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$;

$M^* = \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix}$, $x = a^2-b^2$, $y = b^2-ab$, $M^{-1} \in M_{a,b}$, $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$, $(M_{ab}, \cdot)$ grup abelian. **7.** $M = \{I_3, X, X^2, X^3\}$, G_1, G_2, G_3: 4. **8.** $x \in G$, $x*y \in G$. Presupunem $x*y = 1$, rezultă $x = 1$ sau $y = 1$, contradicţie. G_1, G_2: $e_8 = e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; G_1, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G$, G_4. **9.** a) G_1, G_2, $e = 1$; G_3, $x' = 2-x$; G_4; b) $x+y+1$. **10.** $z_1, z_2 \in Ar_3$, $z_1z_2 \in Ar$, $|z_1z_2| = r$, $|z_1|\cdot|z_2| = r$, $r^2 = r$, $r_1 = 0$, $A_0 = \{0\}$, $(A_0, \cdot)$ grup, $e = 0$, $r = 1$, $A_1 = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$; $e = 1$, G_1, $z' = \dfrac{1}{z}$, $(A_1, \cdot)$ este grup; b) $A_1 \subset M$; $1, -1, i, -i \in M$. M este stabilă faţă de adunare, $1+1 \in M$, $2 \in M$. Prin inducţie matematică $n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Analog $-n, ni, -ni \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Din $1, -1 \in M$, rezultă $1 + (-1) = 0 \in M$, deci $a \in M$, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $bi \in M$ şi deci $a + bi \in M$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. **11.** 1) $A(x), A(y) \in H$; $A(x)\cdot A(y) = A(x+y) \in H$; $I_3 = A(0)$, $A^{-1}(x) = A(-x)$, $A(x)\cdot A(y) = A(y)\cdot A(x)$; 2) $f : \mathbb{R} \to H$, $f(x) = A(x)$, f este bijectivă, $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, +) \simeq H$. **12.** $z_1, z_2 \in H$, $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{2}$, $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{2}$, $z_1z_2 = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2} = x + y\sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2 - 2y^2 = (x_1x_2 + 2y_1y_2)^2 - 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - 2y_1^2)(x_2^2 - 2y_2^2) = 1$; G_1, G_4, $e = 1 = 1 + 0\sqrt{2} \in H$. $z' = x' + y'\sqrt{2}$, $x' = \dfrac{x}{x^2-2y^2}$, $y' = -\dfrac{y}{x^2-2y^2}$, $z' = x - y\sqrt{2}$, $(H, \cdot)$ grup abelian. $A_1, A_2 \in M$, $A_1A_2 \in M$. $(a_1a_2 + 2b_1b_2)^2 - 2(a_1b_2 + 2a_2b_1)^2 = (a_1^2 - 2b_1^2)(a_2^2 - 2b_2^2) = 1$; G_1, $e = I_2$; G_3, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in M$, $A_1A_2 = A_2A_1$, $(M, \cdot)$ este grup abelian. $f : H \to M$, $f(x + y\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$, $f(x)$ este bijectivă şi $f(z_1, z_2) = f(z_1)f(z_2)$, $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{2}$; $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{2}$. **13.** a) G_1, G_2, $e = I_2$; G_3, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(G, \cdot)$ este grup; b) $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(k)$ este bijectivă. $f(k_1 + k_2) = f(k_1)\cdot f(k_2)$, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, +) \simeq (G, \cdot)$. **14.** $x, y \in G$, $x * y \in G$, G_1, G_2, $e = 0$; G_3, $x' = -x$; G_4, $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ este funcţie bijectivă; $f(x * y) = f(x) + f(y) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+y+xy+1}{1-x-y+xy}$/ **15.** $x * y = (x-5)(y-5) + 5 \in G$; G_1, G_2, $e = 6$; G_3, $x' = \dfrac{5x-24}{x-5} \in G$; G_4. **16.** $x, y \in M$, $x * y \in M$, $e = -1$, dar $x = -1$ nu este simetrizabilă, deci $(M, *)$ nu este grup. **17.** $a = b = 0$, $e = 1$, $x' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$, $(\mathbb{R}^*, *)$ grup; $a = -1$, $b = 1$, $x' = \dfrac{-1}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, *)$ este grup. **18.** $e_* = 0$, $x' = -\dfrac{1}{x+1}$. **19.** $e_* = 0$, $x' = \dfrac{1}{x-1} \in \mathbb{R}_1$. **20.** $e = 2$, $x' = 4 - x$. **21.** 1) $H \in \mathbb{C}^*$; $\forall x, y \in H$, $xy \in H$; 2) $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$, $\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \hline 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon^2 \end{array}$; $1^{-1} = 1$, $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2$, $(\varepsilon^2)^{-1} = \varepsilon$; b) Fie $H_1 \subset \mathbb{C}^*$, H_1 subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, 1)$, $1 \in H_1$. $H_1 = \{1, a, b\}$, $a^2 = a\cdot a \in H_1$. 1) $a^2 = 1$, $a = \pm 1$, $a \neq 1$, $a = -1$. $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $b^{-1} = b$, $b^2 = 1$, $b = \pm 1$, $b = -1 = a$, contradicţie. 2) $a^2 = a$, $a = 0 \notin \mathbb{C}^*$, $a = 1$, contradicţie, deci $a^2 = b$, $H_1 = \{1, a, a^2\}$, $a^3 \in H_1$, $a^3 \neq a$, $a^3 \neq a^2$, $a^3 = 1$, $a^2 + a + 1 = 0$. **22.** $x * y \in \mathbb{Q}_2$, G_1, G_2, $e_x = 0$, $x' = \dfrac{2x}{x-2} \in \mathbb{Q}_2$. G_4. **23.** $A, B \in M$, $AB \in M$, $e = I_2$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{x} - 1 \\ 2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) & 2\cdot\dfrac{1}{x} - 1 \end{pmatrix}$; 2) $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^*$, $f(A) = x$; $A = \begin{pmatrix} (1-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}$, f este bijectivă, $f(AB) = f(A)\cdot f(B)$, $\forall A, B \in M$. **24.** $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, $f(z) = az + b$, $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$,

G_1, G_2, $e_o = 1_{\mathbb{Z}}$, $f_1(z) = 2z$ şi $f_2(z) = 2z+1$, $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$. 2) $f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, $f(z) = az+b$, $az+b = y$, $z = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$, $\frac{1}{a}, \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$; $a = \pm 1$. Admit inverse funcţiile $f(z) = z+b$, $f(z) = -z+b$, $b \in \mathbb{Z}$; 3) $(f \circ f \circ \ldots \circ f)(z) = a^n z + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$. Demonstraţie prin inducţie matematică. **25.** $A_1, A_2 \in G$, $A_1 A_2 \in G$, $e = I_2$, $A(\alpha) \in G$, $A^{-1}(\alpha) = A(-\alpha)$, $I \in H$, $H \neq \mathbb{Q}$; $z_1, z_2 \in H$, $|z_1| = |z_2| = 1$, $|z_1 z_2| = 1$, $z_1 z_2 \in H$, $z \in H$, $z^{-1} \in H$; $f : G \to H$, $f(A) = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ este bijectivă, $f(AB) = f(A) \cdot f(B)$. **26.** $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, $e = 3$, $x' = \frac{2x-3}{x-2}$; $x_1 = 1 \notin G$, $x_2 = 3$. **27.** $\mathbb{Z}_3 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$, $E = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{a} & ac-b \\ \widehat{0} & \widehat{1} & -\widehat{c} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$; 27 de elemente; $f : \{a,b,c\} \to \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$. **28.** $x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, $e = \frac{1}{2}$, $x' = 1-x$; 2) $f : (0,1) \to (0,\infty)$, $f(x)$ este bijectivă, $f(x*y) = f(x) \cdot f(y)$. **29.** $e_* = -2$, $x' = -4-x$. **30.** $e = I_2$, $A^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}$. **31.** $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{Z})$, $A_1 + A_2 \in M_2(\mathbb{Z})$; $e_+ = O_2$, $A' = -A$, $\forall A, B \in H$, $A + B \in H$, $-A \in H$. **32.** f_a este morfism de grupuri, f_a este injectivă, f_a este surjectivă; 2) G_1, G_2 G_3. **33.** G_1, G_2 $e_\perp = e_*$; $x'_\perp = a^{-1} * a^{-1} * x^{-1}$. **34.** $x * y \in G$. $e_* = e$, $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$. **35.** $x * y = (x-2)(y-2) * 2$, $e = 3$, $x' = \frac{2x-3}{x-2} \in G$; b) $x = 5 \in G$. **36.** $e_* = 0$, $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x)$ este bijectivă. $f(x*y) = f(x) + f(y)$; 2) (1,2), unicitatea. **37.** $x * y \in G$; $x \in G$; $y \in G$, $e_* = 0$, $x' = -x$, $f(x)$ este bijectivă, $f(x+y) = f(x) * f(y)$. **38.** $x * y \in G$; $e_* = 0$, $f^{-1} = \frac{k(e^{2kx}-1)}{e^{2kx}+1}$; $x * y = f^{-1}(f(x) + f(y))$; $f^{-1}(0) = 0$, $x' = f^{-1}(-f(x)) = -f^{-1}(f(x)) = -x$. **39.** 1) $e = 4$, $x'_* = 3 + \frac{1}{x-3}$; 2) $a = 1$, $b = 3$; 3) inducţie matematică. **40.** $a = 1$, $b = 1$, $c = -1991$. **41.** i) $a = 3k \pm 1$; $b = 3k$, $a^2 + b^2 = M_3 + 1$, $a = 3k$, $b = 3k+1$, $a^2+b^2 = M_3+1$, $a = 3k\pm1$, $b = 3k\pm1$, $a^2+b^2 = M_3+2$, $a = 3k$, $b = 3k$, $a^2+b^2 = M_3$, $3|a$, $3|b$; 2) $\det A \neq 0$, $AB \in G$, $I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$; iii) $a, b \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$; $3 \cdot 3 = 9$, $(a,b) \neq (\widehat{0}, \widehat{0})$, G are 8 elemente. **42.** $a, b \in H$, $ab \in H$, $a \in H$, $a^{-1} \in H$. **43.** i) $a = 2$; iii) $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = A$, $A \in G$. **44.** $AB \in M$, I_2; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **45.** $e_8 = 0$, $z^{-1} = \frac{z}{z-1}$. **46.** $e = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **47.** $e \notin \{a, b.a * b, b * a\}$. **48.** a) $T_1, T_2 \in H$, $T_1 + T_2 \in H$, $T \in H$, $-T \in H$; b) $r \in \mathbb{Q}$, $f(x+r) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$; $r \notin \mathbb{Q}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x+r) \neq f(x)$. **49.** a) $x \in H$, $x^n = 1$, $H = U_n$; b) $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $x_i = 1 - \varepsilon_i$, $\frac{1}{x}[(1-x)^n - 1] = 0$; $-C_n^1 + C_n^2 x + \ldots + (-1)^n C_n^n x^{n-1} = 0$; conform relaţiilor lui Viéte, $x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} = C_n^1 / C_n^n = n$. **50.** a) $e_* = 0$; b) $f(x)$ este bijectivă $f(x+y) = f(x) * f(y)$. **51.** $f(0) = 0$, $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{N}^*$. Fie $f(1) = k$, f este bijectivă, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{(n)} = f(1 + 1 + \ldots + 1) = f(1) + f(1) + \ldots + f(1) = nf(1) = k \cdot n$; $f(-n) = kx$, $k = f(1) \in \mathbb{Z}^*$. reciproc $f(x) = kx$, automorfism $(\mathbb{Z}, +)$; $k = \pm 1$. **52.** I_2. **53.** $e = 1$. **54.** $e_\nabla = a'$, $a' * a = a * a' = e_*$. **55.** $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$; $e = \frac{3}{2}$, $x' = \frac{4x-3}{4(x-1)}$. **56.** $x * y = (x-2)(y-2) + \lambda - 4$; $\lambda = 6$; $x' = 2 + \frac{1}{x-2}$. **57.** $x * y = (x-a)(y-a) + a$, $e_* = a+1$, $x'_* = \frac{ax - a^2 + 1}{x-a}$; $f_a : G_a \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \ln(x-a)$; f_a este bijectivă; $f_a(x*y) = f_a(x) + f_a(y)$. Pentru izomorfismul $(G_a, *) \simeq (G_b, *)$, $f : G_a \to G_b$, $f(x) = x + b - a$. **58.** $G_4 \cdot a = b$, $G_2 \cdot e = \frac{(1-a)x+1}{b}, \forall x \in \mathbb{R}$, $a = b = 1$, $e = 1$. **59.** $a = b = 1$, $e = -1997$.

60. a) $M(a)M(b) = M\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$, $I_3 = M(0)$; $M^{-1}(a) = M(-a)$; b) $M^2(a) = M\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)$, $M(a_n) = M^n(a)$; $a_n = \frac{(1+a)^n-(1-a)^n}{(1+a)^n+(1-a)^n}$; c) pentru $a > 0$, $0 < \frac{1-a}{1+a} < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. pentru $a < 0$, $0 < \frac{1+a}{1-a} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{|a|}$; $a \in (-1,0)\cup(0,1)$. **61.** a) $A_1, A_2 \in M$, $A_1A_2 \in M$, $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; b) $A \in M$, $\exists A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a} & 0 & \frac{1}{4a} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{4a} & 0 & \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$, dacă $a, b \in \mathbb{R}^*$. **62.** a) $z = 3 + \mathrm{i}$; b) $e = 1 - \mathrm{i}$; c) $z' = \frac{2-\mathrm{i}z}{\mathrm{i}+z}$, numai dacă $z \neq= \mathrm{i}$, deci $(\mathbb{C}, *)$ nu este grup. **63.** $M_1, M_2 \in G$, $M_1M_2 \in G$, $I_2 \in G$; $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ -\frac{7}{2}b & a \end{pmatrix}$. **64.** a) (1,3); b) $e = -2$, $x' = -4 - x$; c) f este bijectivă; $f(x * y = f(x) + f(y)$. **65.** $x * y = (x-1)(y-1) + 1$; $e = 2$, $x' = \frac{x}{x-1}$.

66.

$\otimes$	$\hat{1}$	$\hat{3}$	$\hat{7}$	$\widehat{11}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\widehat{11}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\widehat{11}$	$\hat{7}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\widehat{11}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\widehat{11}$	$\widehat{11}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$

; $e = \hat{1}$; b) $(\hat{0}, \hat{0})$. **67.** a) $\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} = \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}$; b) $e_* = \sqrt{2}$; c) $\mathrm{Im} f \in (1, \infty)$; $a = b = 1$, f bijectivă; $f(x,y) = f(x) * f(y)$. **68.** $e_1 = I_2$, $e_2 = 1$; c) f bijectivă; $f(z_1z_2) = f(z_1)f(z_2)$. **69.** a) $a = b = 0$; $a = b = 1$; b) $m \neq 0$, $n = -m$. **70.** $a = 1$, $b = 2$. **71.** $M_0 \in P$, $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = \frac{y_0}{2p}$. Notăm $M(t)$ pentru $M\left(\frac{t^2}{2p}, t\right) \in P$; $M(t_1)$, $M(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, $m_{M(t_1),M(t_2)} = \frac{2p}{t_1+t_2}$; $y = \frac{2p}{t_1+t_2}x$; $O(0,0)$, $M(t_1+t_2)$ reprezintă punctele de intersecţie ale dreptei paralele cu $M(t_1)$, $M(t_2)$, cu paralela $M(t_1) * M(t_2) = M(t_1+t_2)$; $f : P \to \mathbb{R}$, $f(M(t)) = t$; $f(M_1 + M_2) = f(M_1) + f(M_2)$, $M(0) = O(0,0)$ şi opusul lui $M(t)$ este $M(-t)$. **72.** $e = 1$; $x * \frac{1}{x} = 1$; $a > 0$; $a * a = 1$, $a < 0$; $x'_* = \frac{1}{x}$, $x > 0$; $x'_* = x$, $x < 0$. **73.** $e = -2$. **74.** $a = b = 1$. **75.** $e = -a$, $x' = -2a - x$. **76.** $a \in \mathbb{C}$, G_4, G_1, $e = 0$, $a \neq 0$, $a = 1$. **77.** 1) $\{0, -2\}$; 2) $e = 0$, $x' = -x$; 3) f este bijectivă $f(x+y) = f(x) * f(y)$. **78.** $e = 1$, $x' = \frac{3-2x}{2-x}$. **79.** $e = 0$, $a = 0$. **80.** $x * y = (x+3)(y+3) - 3$; $e = -2$. **81.** $M_1(a\cos\varphi_1, b\sin\varphi_1)$; $M_2(a\cos\varphi_2, b\sin\varphi_2)$; $M_1 * M_2 = M(a\cos(\varphi_1+\varphi_2), b\sin(\varphi_1+\varphi_2))$, $m_{M_1M_2} = -\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$; $e = A(\cos 0, b\sin 0) = A(a, 0)$, simetricul lui $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ este $M(a\cos(-\varphi), b\sin(-\varphi))$. **82.** $A_1, A_2 \in H_1$, $A_1 + A_2 \in H_1$, $A \in H_1$, $-A \in H_1$. **83.** $x, y \in G$, $x * y = \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)} + 1$, $m = 2$. **84.** $(\hat{1}, \hat{1})$. **85.** $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. **86.** $a = 2$. **87.** a) $m \in \{0, 1\}$; b) $m = 1$, $e = 0$; c) $m = 1$, $e = 0$, $x' = -x$. **88.** a) $X + X = (X \cap C_X) \cup (C_X \cap X) = \emptyset$, $X \cap C_X = \emptyset$; b) $X \subset M$, $Y \subset M$, $C_X \subset M$, $C_Y \subset M$, $X \cap C_Y \subset M$, $C_X \cap Y \subset M$, $X + Y \subset M$; $e = \emptyset$, $X' = X$, $X + X = \emptyset$. **89.** $a = b = 0$ $x * y = xy$, $e_* = 1$, $a = -1$, $b = 1$, $x * y = xy + x + y$, $e_* = 0$; $A = \{(0,0), (-1,1)\}$. **90.** $e = 0$ $a = 0$. **91.** $e = (1, 0, 0, 0)$; $x = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $x' = \left(\frac{1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_1}, -\frac{a_3}{a_1}, -\frac{a_4}{a_1}\right)$; $x * y \neq y * x$. **92.** $X \in M$, $X = x \cdot I_2 + yA$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$; $A^2 = -2I_2$; $I_2 \in M$, $\det X = x^2 + 2y^2 \neq 0$, există $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I_2$. **93.** $e = I_2$, $\det A \neq 0$. **94.** $e_* = 0$. **95.** $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$;

$A = \{(1,1,-3)\}$; $x = -4$. **96.** $a = 0$, $e = -\frac{1}{2}$, $m = 2$, $x' = -\frac{4x+3}{4(x+1)}$; $x = -3$, $x' = -\frac{9}{8}$, $x = 2$, $x' = -\frac{11}{12}$; $-\frac{49}{24}$. **97.** $a = 1$, $b = 2$. **98.** i) $I_2 = M(1)$, $M^{-1}(x) = M\left(\frac{1}{x}\right)$; ii) $f : \mathbb{R}^* \to M$, $f(x) = M(x)$. **99.** i) $e = 0$; $x' = -\frac{x}{x+1}$; ii) $f : G \to M$, $f(x) = x+1$, $M = f(G) = (0,\infty)$, $f(x+y) = f(x)\circ f(y), \forall x,y \in G$; $(x+1)\circ(y+1) = (x+1)(y+1), \forall x,y > -1$; $x\circ y = xy, \forall x,y > 0$, $(M,\circ) = (\mathbb{R}_+^*,\cdot)$. **100.** $A^3 = I_2$; $A^{302} = A^2$; ii) I_2; $A^{-1} = A^2$; $(A^2)^{-1} = A$. **101.** $\theta = e+1$, $x = e+1$, $x' = e+1$, $\alpha = 2(e+1)$, $x_1 = e-1$, $x_2 = \frac{1}{e} - 1$, $\beta = -\frac{(e-1)^2}{e}$. **102.** $f_a \circ f_b = f_{ab}$; $a = 1$, $b = 0$, $e_* = f_1$, $a > 0$, $f_a \circ f_{a'} = f_1$, $aa' = 1$, $a' = \frac{1}{a}$; $f_a^{-1} = f\left(\frac{1}{a}\right)$. **103.** $e = M(1)$, $M^{-1}(a) = M\left(\frac{1}{a}\right)$; $a \in \mathbb{R}^*$; $f : \mathbb{R}^* \to G$; $f(x) = M(x)$; $M(a) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **104.** $a = 1$, $b = 1$, $e = 5$. **105.** $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{(a+1)(a+2)}{2}$, $x_3 = \frac{(a-1)(a+2)}{2}$, $M(a) = \{x_1,x_2,x_3\}$ este grup multiplicativ, $M(a) = \{1\}$, $a = 0$.

Capitolul III. INELE. CORPURI

1. $\{\widehat{1},\widehat{5},\widehat{7},\widehat{11}\}$; $\{\widehat{1},\widehat{5},\widehat{7},\widehat{11}\}$. **2.** a) $A_1A_2 \in K$; $z_1z_2 \in L$; b) se verifică axiomele corpului; c) $f : L \to K$, $f(z) = A$; $z = a + b\sqrt{5}$, $A = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix}$. **3.** $\{\widehat{6},\widehat{3},\widehat{6}\}$. **4.** $x \in A$, $x^6 \in A$; $-x \in A$, $(-x)^6 = -x$, $(-x)^6 = x^6 = x$, $x = -x$, $x + x = 0$, $1 + x \in A$, $(1+x)^6 = 1 + x$; $x^4 = -x^2 = x^2$; $x = x^6 = x^4 \cdot x^2 = x^2 \cdot x^2 = x^4 = x^2, \forall x \in A$. **5.** $\{\widehat{1},\widehat{5}\}$. **6.** a) $e_* = -3$, $x'_* = -3 - x$, $e_\circ = -2$, $x'_\circ = \frac{-3x-8}{x+3}$, $x \in \{-4,-2\}$, $x'_\circ = \{-4,-2\}$; c) nu. **7.** 1) f bijectivă, $f : A \to A$, A mulţime finită; 2) f bijectivă; 3) $(1+1)(1+1) = 1+1+1+1 = 0$, corp, $1+1 = 0$; 4) $\widehat{2} \in \mathbb{Z}_4$, dar nu există $\widehat{2}^{-1}$. **8.** $a = 1$, $b = 1$, $c = 6$. **9.** $G = \{\widehat{1},\widehat{5},\widehat{7},\widehat{11}\}$; $f : G \to K$, $f(\widehat{1}) = 1_E$; $E = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. **10.** $e_+ = O_2$, $e_\cdot = I_2$. **11.** $e_+ = O_2$, $e_\cdot = I_2$, $f : M \to \mathbb{C}$, $f(A) = z$, $z = a + bi$. **12.** $\{\widehat{1},\widehat{2},\widehat{4},\widehat{5},\widehat{7},\widehat{8}\}$; $x = \widehat{5}$. **13.** $(\widehat{2},\widehat{11})$. **14.** $(\widehat{1},\widehat{3})$. **15.** $(\widehat{3},\widehat{4})$. **16.** 1. G_1 $(a,b,c) \in \{(0,0,c),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,c)\}$, $c \in \mathbb{R}$; $a = 1$, $b = 1$, $c \in \mathbb{R}$, G_2, G_3; $x * y = x + y + c$; 2. $c = 0$. **17.** $a = 1$; $b = 1$; $c = 6$. **18.** $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$, $z_1 + z_2$, $z_1z_2 \in \mathbb{Z}[i]$; 2) $z_1z_2 = 0$; $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$; 3) $\{1,-1,i,-i\}$. **19.** a) $e_* = 2$, $x'_* = 4 - x$; $e_\circ = e$; $x'_\circ = \frac{2x-3}{x-2}$; b) $f(x) = x+2$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$. **20.** $f : M \to \mathbb{Q}[\sqrt{10}]$, $f(A) = a + b\sqrt{10}$, $A \in M$. **21.** $M(0,0)$, $M(-a,-b)$; $M(1,0)$; $M\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$; b) $f : \mathbb{C} \to K$, $f(z) = A$. **22.** $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $E^2 = E$; $A(z) = 2zE$; $A(z_1)\cdot A(z_2) = A(z_1 + z_2)$; b) $A(z) = 2zE = f(2z)$, $f(t) = A(z)$, soluţie unică $t = 2z$, f este izomorfism. **23.** $e_+ = 0_2$, $e_\cdot = I_2$. **24.** $e_\perp = -3$, $e_\top = -2$, $x\top y = -3$, $x = -3$ sau $y = -3$, există $x'_\top$ dacă $x \in \{-4,-2\}$. **25.** f injectivă şi surjectivă b) Presupunem $1 + 1 \neq 0$, $1 + 1 + 1 + 1 = 0$, $1 + 1 = 0$. **26.** $e_+ = O_3$, $e_\cdot = I_3$, necomutativ. **27.** $\{\widehat{1},\widehat{4}\}$. **28.** $\{\widehat{3},\widehat{6}\}$. **29.** $e_* = 5$, $e_\circ = 4$; $x'_* = \frac{4x-15}{x-4} \in \mathbb{Z}$, $x \in \{3,5\}$; b) nu. **30.** $\Delta = \widehat{5} - a$, $\Delta = 0$, $a = \widehat{5}$, $b = \widehat{4}$. **31.** $e_* = 2$, $x_\circ = 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $a = 1$, $b = 2$. **32.** $(\widehat{2},\widehat{5})$. **33.** $f : A_{n_1} \to A_{n_2}$, $f(A_n) = A_n$. **34.** $\{(\widehat{10},\widehat{0}),(\widehat{10},\widehat{4}),(\widehat{10},\widehat{8})\}$. **35.** $(k,35) = 1$; 24; 10 divizori ai lui zero. **36.** $f(x) = x - 2$. **37.** $x^2 = 1$, $x^{-1} = x$, $(x+1)(x-1) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1 = 0$; $x + 1 = 0$ sau $x - 1 = 0$, $x \in \{-1,1\}$; $A = \{0,1,-1\}$ a) $A = \{0,1\}$, $0 \to 0$, $1 \to 1$, $A \simeq \mathbb{Z}_2$; $A = \{0,1,-1\}$, $A \simeq \mathbb{Z}_3$. **38.** $\{\widehat{1},\widehat{5},\widehat{9}\}$. **39.** $a = 4$, $b = 2$. **40.** 1) $e_* = 0$; 2) $x \in A$, $x'_* * x = x * x'_* = 0$; $x'_* = -x(1-x)^{-1}$; 3) Admit simetrice elementele 0 şi 3. **41.** $\{\widehat{3},\widehat{5}\}$. **42.** $f : \mathbb{R} \to K$, $f(x) = e^x$. **43.** $m \neq 0$, $m = 3$,

$n = 0$. **44.** $\Delta = \widehat{4}$, $x + y + z = \widehat{1}$. **45.** $e_{\top} = -1$, $\{-3, -1\}$; $e_{\perp} = -2$; 0. **46.** $\Delta = \widehat{3}a - 2$, $\Delta = 0$, $\widehat{a} = \widehat{3}$, $\Delta_{car} \neq 0$, $a \in \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{5}, \widehat{6},\}$, $\Delta \neq \widehat{0}$, $a = \widehat{2}$, Cramer; $x = \widehat{1}$, $y = \widehat{0}$, $z = \widehat{0}$. **47.** $\Delta = \widehat{3}$, $(\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{5})$. **48.** $e_* = (e_1, e_2) = (1, 0)$; $(a, x)'_* = \left(\frac{1}{a}, -\frac{bx}{x+a}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 5\right)'_8 = \left(3, -\frac{45}{16}\right)$. **49.** 1) $z_1 + z_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $z = a + b\sqrt{2}$; $a, b \in \mathbb{Q}$; $z^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\backslash\{0\}$; 3) $A \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $x \in A$, există $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$, $x = a_x + b_x\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dacă $x \in A$, $b_x = 0 \Rightarrow A = Q$. Dacă există $x \in A$ cu $b_x \neq 0$, $\sqrt{2} = \frac{x - a_x}{b_x} \in A$, rezultă $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq A$, $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. **50.** $e_* = (e_1, e_2) = (1, 0)$; $(x, y)' = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x^2}\right)$. Elemente nesimetrizabile $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$, $M = \{0\} \times \mathbb{R}$; $x \in \{0, 2\}$. **51.** $\Delta = \widehat{3}$, $\{\widehat{3}, \widehat{0}, \widehat{3}\}$. **52.** $\widehat{a} = \widehat{0}$, caz evident. $b = \widehat{5}$, $ax = \widehat{3}$; $(a, x) \in \{(\widehat{1}, \widehat{3}), (\widehat{3}, \widehat{1}), (\widehat{5}, \widehat{7}), (\widehat{7}, \widehat{5})\}$. **53.** $a = 1$, $b = 1$, $c = 6$; $f(x) = x + 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$. **54.** $e_{\oplus} = a$, $x'_{\oplus} = 2a - x$; $e_{\otimes} = a + 1$, D; Fie $x \neq a$, $y \neq a$, $x \otimes y = a$, $(x - a)(y - a) = 0 \to x = a$ sau $y = a$, absurd. **55.** $e_+ = O_2$; $A' = -A$; $e_\cdot = I_2$. Dacă $A_1 \cdot A_2 = O_2$ rezultă $A_1 = O_2$, $A_2 = 0_2$. **56.** $\mathrm{End}(G)$; $e_+ = 0$; $O_G : G \to G$, $O_G(x) = 0, \forall x \in G$; $1_G : G \to G$, $1_G(x) = x, \forall x \in G$.

Capitolul IV. SPAŢII VECTORIALE

1. b) $0 = (0, 0, \ldots, 0)$; $-x = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$; c) Se verifică axiomele S_1, S_2, S_3,S_4. **4.** $(M_2(\mathbb{R}), +)$ este grup abelian; S_1, S_2, S_3,S_4. **7.** $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$; $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$; $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$: $(-\alpha)x + \alpha(-x) = -\alpha x$, $(-\alpha)(-x) = \alpha x$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$, $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$, $\alpha(x - y) = \alpha x - \beta y$. **8.** a) Există $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. astfel încât $OQ_1 = \lambda_1 v_1$, $OQ_2 = \lambda_2 v_2$, $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 + x_2$; b) Dacă există $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \neq 0$ (sau $\alpha_2 \neq 0$), $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2$, deci v_1 şi v_2 coliniari. Contradicţie. **9.** 1) $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2 - a_1$, $\lambda_3 = a_3 - a_2$; 2) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$; $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. **10.** $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Presupunem $x = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \ldots + \lambda'_n e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i e_i \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)e_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n)e_n = x - x = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda'_i$, $1 \leq i \leq n$. **11.** a) $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (a_1, a_2, a_3)$; $x = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. b) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$; $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$; $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. **12.** 1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow (a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_3) = (0, 0, 0)$, $\Delta = (a + 2)(a - 1)^2 \neq 0$, $a \in \{-2, 1\}$; 2) $a \neq -2$, $a \neq 1$; 3) $v = (3, -2, 5) = \frac{3}{2}v_1 + 4v_2 + \frac{1}{2}v_3$. **15.** $f * (g * x) = f * (g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (f \circ g) * x$; $1_M * x = 1_M(x) = x$. **18.** K^n are 2^n vectori. **19.** k^n, unde $K = \mathbb{Z}_p$. **20.** Fie $x \in V$, $v \neq 0$. Atunci aplicaţia $\mathbb{R} \to V$, $\alpha \to \alpha v$ este injectivă. **21.** $x + x + \ldots + x = \widehat{1}x + \widehat{1}x + \ldots + \widehat{1}x = (\widehat{1} + \widehat{1} + \ldots + \widehat{1})x = \widehat{px} = \widehat{0x} = 0$. **23.** $v = (-3)v_1 + 0v_2 + 5v_3$. **24.** $A = -5E_1 - E_2 + 6E_3 - 2E_4$. **25.** $f = 3f_1 - 9f_2 + 5f_3$. **26.** $f = 1 + (-1)X + (-1)X^2 + X^3 = 1 \cdot (1 + X^2) + (-1)(X + X^2) + (-2)X^2 + 1 \cdot (X^2 + X^3) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{X - 1}{1!} + 4 \cdot \frac{(X - 1)^2}{2!} + 6 \cdot \frac{(x - 1)^3}{3!}$. **29.** Se vor verifica axiomele. **30.** Se verifică axiomele. Interpretarea geometrică: elementele spaţiului vectorial respectiv sunt vectorii de poziţie din plan. **32.** Se vor verifica axiomele. a) $\Rightarrow$b). Din $x = \lambda y$ rezultă $y = \frac{1}{\lambda}x$; se ia $\mu = \frac{1}{\lambda}$ (b)$\Rightarrow$a) analog); b)$\Rightarrow$c) Se obţine $\mu x - y = 0$ şi se ia $\alpha = \mu$, $\beta = -1$; c) $\Rightarrow$ a) Se scoate $x = -\frac{\beta}{\alpha}y$ şi se ia $\lambda = -\frac{\beta}{\alpha}$. **33.** Se verifică axiomele. **34.** Se arată întâi că $f^{-1}(\{o_{v'}\})$ este închisă faţă de adunare şi înmulţirea cu scalari, apoi se verifică axiomele. **35.** (i) Fie $w = \{O_v\}$ şi fie $x_1, x_2 \in w_{ch}$, $f(x_1) = f(x_2)$; rezultă $f(x_1 - x_2) = O_{v'}$ deci $x_1 - x_2 \in w = \{O_v\}$ deci $x_1 - x_2 = O_v$; (ii) Fie f injectivă, iar $x \in w$; rezultă $f(x) = O_{v'}$, deci $x \in w = \{O_{v'}\}$. **36.** Se efectuează calculele. **37.**

Idem. **39.** a) se verifică axiomele; b) se arată întâi $c=0$. Fie, prin absurd, $c \neq 0$, notăm $x = \sqrt[3]{2}$, deci (1) $x^3 = 2$. Dine ecuaţia $a + bx + cx^2 = 0$ rezultă (2) $x^2 = -\frac{a+bx}{c}$. Înmulţim ecuaţia dată cu x şi înlocuim apoi pe x^2 conform (2) şi pe x^3 cu 2; obţinem $ax - b\frac{a+bx}{c} + 2c = 0$ sau încă $(ac-b^2)x - (ab-2c^2) = 0$. Caz I: Dacă $ac - b^2 \neq 0$, atunci $x = \frac{ab-2c^2}{ac-b^2}$ şi (cum $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) contradicţie. Caz II: Dacă $ac - b^2 = 0$, atunci rezultă şi $ab - 2c^2 = 0$, dar avem (3) $ac = b^2$, (4) $ab = 2c^2$. Înmulţim (3) cu b şi (4) cu c, deci $abc = b^3$, $abc = 2c^3$; rezultă $2c^3 = b^3$, deci $2 = \frac{b^3}{c^3}$; deci $\sqrt[3]{2} = \frac{b}{c}$, contradicţie. Deci $c = 0$. Ecuaţia devine $a + bx = 0$, deci $b = 0$ şi apoi $a = 0$. **40.** Se utilizează valorile $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. **41.** Se efectuează calculele. **42.** Idem. **43.** Idem.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul I. PRIMITIVE

2. a) $-\frac{1}{x} + C$; b) $-\frac{1}{2x^2} + C$; c) $-\frac{1}{7x^7} + C$; d) $\frac{3x^{4/3}}{4} + C$; e) $\frac{4x^{5/4}}{5} + C$; f) $\frac{7x^{8/7}}{8} + C$. **5.** Da. **6.** a) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2} + C$; $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$; b) $2\mathrm{arctg}(2x) + C$; $\sqrt{5}\mathrm{arctg}(\sqrt{5}x) + C$; c) $\frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{2x}{3} + C$; $\frac{1}{\sqrt{21}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C$; d) $\arcsin\frac{x}{2} + C$; $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C$; e) $\frac{1}{2}\arcsin(2x) + C$; $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin(x\sqrt{5}) + C$; f) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C$; $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{7}} + C$. **7.**a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$; $\frac{1}{\sqrt{25}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C$; a') $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$ sau $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + C$; $-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C$ sau $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right| + C$; b) Se dă 4 factor comun forţat la numitor etc; b) idem; b') idem; c) idem; c') idem; d) $\ln(x + \sqrt{x^2-4}| + C$; $\ln|x + \sqrt{x^2-5}| + C$; e) Se dă 4 factor comun forţat sub radical etc.; f) $\ln(x + \sqrt{x' + 4}) + C$; $\ln(x + \sqrt{x' + 5}) + C$; g) Se dă factor comun forţat etc.

Capitolul II. METODE DE CALCUL AL PRIMITIVELOR

1. a) $xe^x - e^x + C$; e) $x\sin x + \cos x + C$; f) $-x\cos x + \sin x + C$; h) $x\sinh x - \cosh x + C$; i) $x\cosh x - \sinh X + C$; j) Se alege $f(x) = \arcsin x$; $g'(x) = x/(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$. **2.** a) $x\ln x - x + C$; b) $x\mathrm{arctg}x - 1/2\ln(1+x^2) + C$; c) $x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. **3.** a) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$; b) $x^3 - 3x^2 + 6x + 6)e^x + C$; e) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; f) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$. **7.** a) La integrala F se pune $f(x) = xe^x$, $g'(x) = \sin x$, apoi se realizează integrala cu G; b) asemănător. **12.** a) $\arcsin(x^2) + C$; b) $\ln(x^2 + \sqrt{x^4+1}) + C$. **14.** a) Se integrează prin părţi, iar apoi se efectuează substituţia $1 - x^2 = t$; b) Se integrează prin părţi, iar apoi se efectuează substituţia $\frac{1}{x} = t$; c) Se integrează prin părţi, iar apoi se efectuează substituţia $1 + x^2 = t$; d) Se adună şi se scade 1 de la numărător etc. **15.** a) Se introduce $t = \sin x$, iar apoi se integrează prin părţi; b) $t = \mathrm{tg}x$, apoi se integrează prin părţi; c) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, apoi se integrează prin părţi; d) $x = \mathrm{tg}t$, apoi se integrează prin părţi; e) $t = \sqrt{x}$, apoi se integrează prin părţi; f) $x = t^2$; g) $x = t^2$, apoi se integrează prin părţi; h) $\ln x = t$, apoi se integrea6 prin părţi; i) $t = \arcsin x$, apoi se integrează prin părţi; j) $t = \sqrt{x}$, apoi se integrează prin părţi; k) $t = \sqrt{x}$, apoi se integrează prin părţi; l) idem. **17.** Idem. **18.** Idem. **23.** a) $t = e^x$; rezultat $\ln(1 + e^x) + C$; b) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; rezultat $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}1\sqrt{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2} + C$; c) $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ etc.; d) $t = \ln x$; rezultat $\sin(\ln x) + C$; e)

$\sqrt{x^2+1}+C$; f) $2\ln(x+\sqrt{x^2-x+1})-\frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})-\frac{3}{2}\frac{1}{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}+C$; g) $-\sqrt{-x^2+4x+5}-6\arcsin\sqrt{\frac{5-x}{6}}+C$. **24.** a) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\left(5\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right)+C$; b) $x+2/(\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1)+C$; c) $\ln(1+\sin x)+C$; d) $-\frac{1}{4}\cos x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{4}\ln(\sin x+\cos x)+C$; e) $\ln(\mathrm{tg}^2x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{2}}+C$; f) $\frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$.

Capitolul III. INTEGRALE DEFINITE

1. a) $\frac{x}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$; b) $\sqrt{x}\Big|_1^1=1$; c) $\ln 9-\ln 3$, deci $\ln 3$; d) $-\cos x\Big|_0^\pi=2$; e) 1; f) $\mathrm{tg}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$, deci $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$, adică $\frac{2}{\sqrt{3}}$; g) $\arcsin x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$; h) $\frac{5}{3}$. **3.** a) $\frac{at^2}{2}$; b) $\frac{at^2}{2}+v_0t$; c) $k\ln\frac{V}{V_0}$. **4.** Se explicitează funcţiile pe intervalele corespunzătoare şi se aplică aditivitatea integralei ca funcţie de interval. a) $\int_{-1}^0(-x)dx+\int_0^1 xdx$, deci 1; b) $\int_0^1 0\cdot dx+\int_1^2 1\cdot dx+\int_2^3 2\cdot dx+\int_3^4 3dx=0+1+2+3=6$; c) 1; d) $f(x)=x$ pentru $x\in[-1,0)$, $f(x)=x^2$, pentru $x\in[0,1)$, $f(x)=1$ pentru $x\in[1,2]$. Integrala este $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1=\frac{5}{6}$. **6.** Se integrează termen cu termen identitatea. **8.** Se pune condiţia ca discriminantul să fie ≤ 0. **9.** Se integrează inegalităţile $\mathrm{arctg}\frac{n}{n+1}\le\mathrm{arctg}(nx)\le\frac{\pi}{4}$ şi respectiv $\arcsin\frac{n}{n+1}\le arcsin(nx)\le\frac{\pi}{2}$, obţinându-se $\frac{1}{n(n+1)}\mathrm{arctg}\frac{n}{n+1}\le a_n\le\frac{\pi}{4n(n+1)}$, respectiv $\frac{1}{n(n+1)}\arcsin\frac{n}{n+1}\le b_n\le\frac{\pi}{2n(n+1)}$, după care se obţine delimitare pentru $\frac{a_n}{b_n}$ şi se aplică teorema cleştelui. **10.** $\int_0^x\frac{t^2dt}{1+t^2}=x-\mathrm{arctg}x$. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\mathrm{arctg}x$. Se ţine seama că $f(0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ şi se aplică proprietatea lui Darboux. **11.** a) Termenul general s_n este suma Riemann a funcţiei f, relativă la diviziunea echidistanţa $\Delta=(0=x_0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n}{n}=1)$ şi la punctele intermediare $\xi=x_i=\frac{i}{n}$; b) (α) $s_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x}$; răspuns: $\ln 2$. (β) $b_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\ldots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; răspuns: $\frac{\pi}{2}$. (γ) Analog, $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$, răspuns: $\frac{1}{2}$. (δ) $a_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$, $b_n=\ln a_n$ etc.; răspuns: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{e}{e}$. **12.** Se efectuează calculele. **13.** Se efectuează o integrare prin părţi, luând $u=\cos^n x$, $v=\cos nxdx$ şi se adună două integrale, restrângând un cosinus. **14.** a) Se face schimbarea de variabilă $x=2\pi-t$; b) Analog (este generalizarea punctului a)). **15.** a) Se integrează prin părţi, luând $f(t)=t^{x-1}$, $g'(t)=\mathrm{e}^{-t}$ (x este considerat ca fiind un parametru); b), c) Se efectuează calculele indicate. **16.** Se face schimbarea de variabilă $x=(b-a)t+a$, care aplică bijectiv şi continuu intervalul $[a,b]$ în intervalul $[0,1]$. **22.** Se utilizează formulele de transformare în sume ale produselor (liniarizare) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ etc. a) 0; b) 0; c) 0; d) π; e) π. **24.** a) Într-una din integrale se pune $t=\frac{\pi}{2}-x$; se obţine $A=B$; se adună A cu B, de unde $A=B=\frac{\pi}{4}$; b) Analog. **25.** a) $t=-x$, iar apoi la noua integrală se trece t în x; b) Se utilizează direct a). **27.** a) Se face integrala dată, schimbarea de variabilă $x=\frac{1}{t}$ şi se găseşte $I=1$; b) Se obţine $f\left(\frac{1}{x}\right)=-x^2f(x)$, deci, în baza punctului a), integrala este 0; c) analog. **29.** a) Se scrie 1 ca $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ şi se descompune suma de tangente în produs; se distribuie logaritmul; b) Se aplică dezvoltarea obţinută a logaritmului şi se distribuie integrala, iar la integrală se face schimbarea de variabilă $\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{2}-t$; răspuns: $\frac{\pi}{8}\ln 2$. **31.** a) Se desface integrala pe intervalele $[-a,0]$ şi $0,a]$, iar apoi în prima integrală se pune $t=-x$; b) Funcţia $x\to f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ satisface condiţia de la a), cu $k=2$. **32.** Se face schimbarea $x=1-t$, se rescrie noua integrală cu x şi se adună cu cea din enunţ; rezultat $\frac{1}{2}$. **33.** a) Se face schimbarea $x=t-T$; b) Se face schimbarea $x=t+a$; c) Se face schimbarea $t=x+b-a$; d) Se descompune integrala în $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+(k+1)T} f(x)$, apoi, la fiecare integrală, se aplică rezultatul de la punctul b). **34.** a) Se aplică aditivitatea ca funcţie de interval, pentru intervalele $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$; apoi în a doua integrală se face schimbarea de variabilă $x=\pi-t$; b) $I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$; se aplică apoi un procedeu cunoscut, rezultat: $\frac{\pi^2}{4}$; $J=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x dx}{1+\sin^2 x}$; se pune apoi $y=\cos t$; $J=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. **35.** a) exact ca la problema 34 a), dar se va utiliza şi paritatea funcţiei f; b) Se aplică aditivitatea integralei, ca funcţie de interval pe $[0,\pi]$ şi $[\pi,2\pi]$, iar poi, în a doua integrală, se pune $x=2\pi-t$. **36.** Analog. **39.** Se vor reprezenta întâi curbele corespunzătoare şi se vor determina punctele de intersecţie, Apoi se exprimă ecuaţiile în forma explicită, alegând corespunzător f şi g şi se aplică formula ariei $(\Gamma_{fg})=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx$. **40.** Se aplică formula $V(f)=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **41.** Se aplică formula $l(f)=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$. **42.** Se aplică formula $\mathcal{A}(f)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x$. **43.** Se aplică formulele pentru centrul de greutate. **47.** a) $y(x)=Ae^{2x}+Be^{3x}$; b) $y(x)=Ae^{3x}+Be^{4x}$ etc.

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

[1] D.Andrica şi colectiv: *Matematica, manual pentru clasa a IX-a*, M1, Ed. GIL, Zalău, 1999.

[2] D.Andrica, D.Isac, N.Bişboacă, C. Pătrăşcoiu: *Matematica, manual pentru clasa a XI-a*, M1, Ed. GIL, Zalău, 2000.

[3] D.Andrica, D.Duca, I.Purdea, O.Agratini, S.Ursu, Gh.Lobonţ: *Matematica: manual pentru clasa a X-a*, M1, Ed. GIL, Zalău, 2001.

[4] D.Andrica, D.Duca, V.Pop şi colectiv: *Admiterea în învăţământul superior*, Ed. Gil, Zalău, 2000, 2001, 2002.

[5] M.Becheanu, B.Enescu: *Matematica, manual pentru clasa a IX-a*, M1, M2, Ed. Teora, Bucureşti 1999.

[6] M.Becheanu, I.Tomescu, B.Enescu, A.Vernescu: *Matematica, manual pentru clasa a X-a*, M1, M2, Ed. Teora, 2000.

[7] M.Bălună, M.Becheanu, B.Enescu, R.Gologan, A.Vernescu: *Matematica, manual pentru clasa a XI-a*, M2, Ed. Curtea Veche, Bucureşti, 2001.

[8] N.Boboc, I.Colojoară: *Matematica, Elemente de Analiză matematică, manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (diferite ediţii 1980-2001).

[9] I.Chiţescu, C.Chiteş (coordonatori), B.Enescu, D.Petriceanu, V.Cautiş, N.Ghiciu, R.Ilie, D.Teodorescu: *Matematica pentru examenul de bacalaureat*, Grupul Editorial Art, 2002.

[10] I.Colojoară, R.Miculescu, C.Mortici: *Analiză matematică, Teorie, Metode, Aplicaţii*, Grupul Editorial Art, Bucureşti, 2002.

[11] L.Constantinescu, C.Petrişor: *Geometrie şi trigonometrie, manual pentru clasa a IX-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[12] V.Cristescu: *Culegere de probleme de trigonometrie*, Biblioteca Gazetei Matematice, Bucureşti, 1938.

[13] N.Dinculeanu, E.Radu: *Elemente de Analiză matematică, manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, diferite ediţii (1959-1979).

[14] D.Duca, E.Duca: *Analiză matematică*, Culegere de probleme, Ed. GIL Educaţional, 1999.

[15] M.Ganga: *Probleme de algebră şi analiză matematică*, Ed. Mathpress, Ploieşti, 2000.

[16] M.Ganga: *Matematica, manual pentru clasa a IX-a*, Ed. Mathpress, Ploieşti, 2001.

[17] Gh.Gussi, O.Stănăşilă, T.Stoica: *Elemente de Analiză matematică, manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, diferite ediţii (1980-2000).

[18] S.Ianuş, N.Soare, L.Niculescu, S.Dragomir, M.Ţena: *Probleme de geometrie şi trigonometrie pentru clasele a IX-a şi a X-a*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[19] I.D.Ion, N.Angelescu, M.Constantinescu, A.P.Ghioca, N.I.Nediţă: *Matematica, manual pentru clasa a IX-a*, M1, M2, Ed. Teora, Bucureşti, 1999.

[20] I.D.Ion, N.Angelescu, V.Craiu, A.P.Ghioca, N.I.Nediţă: *Matematica, manual pentru clasa a X-a*, M1, M2, Ed. Teora, Bucureşti, 2000.

[21] I.D.Ion, N.Angelescu, E.Câmpu, A.P.Ghioca, N.I.Nediţă: *Matematica, manual pentru clasa a XI-a*, M1, Ed. Nedion, 2001.

[22] I.D.Ion, N.Angelescu, M.Constantinescu, A.P.Ghioca, N.I.Nediţă: *Matematica, Culegere de exerciţii şi probleme pentru clasa a IX-a*, Editura Teora, 2000.

[23] I.D.Ion, N.Angelescu, M.Constantinescu, A.P.Ghioca, N.I.Nediţă: *Matematica, Culegere de probleme pentru clasa a X-a*, Ed. Teora.

[24] I.D.Ion, N.I.Nediţă, A.P.Ghioca: *Algebra, manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, diferite ediţii (1980-2001).

[25] L.Lupaş, A.Lupaş: *Probleme de algebră*, Ed. Gil, 2001.

[26] C.Mortici: *Matematică, Teste pentru bacalaureat şi admiterea în facultate*, Ed. Teora, Bucureşti, 1999.

[27] C.Năstăsescu, C.Niţă, Gh.Andrei, M.Răduţiu, F.Vornicescu, N.Vornicescu: *Matematică, manual pentru clasa a IX-a*, M1, M2, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1999.

[28] C.Niţă, C.Năstăsescu: Algebră, *Culegere de probleme pentru liceu*, Ed. Rotech Pro, Bucureşti, 1999.

[29] L.Panaitopol, B.Enescu: *Matematica, manual pentru clasa a IX-a*, Ed. GIL, Zalău, 1999.

[30] L.Panaitopol, B.Enescu, M.Bălună: *Matematica, manual pentru clasa a X-a*, Ed. GIL, Zalău, 2000.

[31] M.E.Panaitopol şi G.Radu: Matematica,*Culegere de probleme pentru clasa a XI-a*, Ed. GIL, Zalău, 1998 (ediţia I).

[32] M.Stoka: *Culegere de probleme de trigonometrie*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[33] I.Stossel: *Algebră, Culegere de probleme*, Ed. Cuvântul Românesc, 1995.

[34] I.Stamate, I.Stoian: *Culegere de exerciţii şi probleme de algebră pentru licee*, Ed. Didactică şi Pedagogică R.A., Bucureşti, 1995.

[35] M.Ţena, M.Nicolae: *Matematică, manual pentru clasa a IX-a*, Ed.Corint, 1999.

[36] Gh.Ţiţeica: *Culegere de probleme de geometrie*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1981.

[37] A.Vernescu: *Analiza matematică*, vol.1, Ed. Pantheon, Bucureşti, 2000.

[38] A.Vernescu: *Analiza matematică*, vol.2, Ed. Pantheon, Bucureşti, 2001.

[39] A.Vernescu: *Analiza matematică, vol.3* (în curs de apariţie).

CUPRINS

CLASA A IX-A

CLASA A X-A

CLASA A XI-A

CLASA A XII-A

Tiparul executat la
S.C. LUMINA TIPO s.r.l.
str. Luigi Galvani nr. 20 bis, sect. 2, Bucureşti
Tel./Fax 211.32.60; Tel. 212.29.27