# Уравнения 3, 4 степени, решаемые в радикалах Г.Кардано, Л.Феррари

Юссеф Натан 11-А

Кардано внёс значительный вклад в развитие алгебры: его имя носит формула Кардано для нахождения корней кубического неполного уравнения вида $x3 + ax + b = 0$. Он же первым в Европе стал использовать отрицательные корни уравнений. В действительности Кардано не открывал этот алгоритм и даже не пытался приписать его себе. В своём трактате «Высокое искусство» («Ars magna») он признаётся, что узнал формулу от Никколо Тартальи, пообещав сохранить его в тайне, однако обещание не сдержал и спустя 6 лет (1545) опубликовал упомянутый трактат. Из него учёный мир и узнал о замечательном открытии. Кардано также включил в свою книгу ещё одно открытие, сделанное его учеником Лодовико (Луиджи) Феррари: общее решение уравнения четвёртой степени.

Прикладное значение формул Кардано было не слишком велико, так как к этому моменту математики уже разработали численные методы для вычисления корней уравнений любой степени с хорошей точностью. Однако открытие нового метода, неизвестного ни грекам, ни арабам, воодушевило математиков Европы на новые открытия.

С 15 лет Луиджи Феррари был учеником у миланского математика Джероламо Кардано и быстро обнаружил выдающиеся способности. К этому времени Кардано уже был известен алгоритм решения кубических уравнений; Феррари сумел найти аналогичный способ для решения уравнений четвёртой степени. Оба алгоритма Кардано опубликовал в своей книге «Высокое искусство». В 1540 г. восемнадцатилетний Феррари стал профессором Миланского университета, но в 1556 году вернулся в родную Болонью, где тоже стал профессором математики.

# Решение уравнений в радикалах

Можно ли выразить корни полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ с комплексными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в виде «хороших» функций от этих коэффициентов? Вспомним, что для корней квадратного уравнения существует общая формула вычисления корней:

$$x^2 + ax + b = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\,.$$

Эта формула включает в себя элементарные алгебраические операции $+, -, \times, \div$ и операцию извлечения квадратного корня. По аналогии можно сформулировать и общую задачу.

**Задача.** Найти выражения корней полинома степени $n > 2$ в виде функций его коэффициентов; при этом функции должны представлять конечную комбинацию элементарных алгебраических операций и операций извлечения корней произвольных (целых) степеней.

Поставленная задача называется задачей о **разрешимости** уравнения **в радикалах**[1)].

Оказывается, что любое уравнение третьей или четвертой степени разрешимо в радикалах. Перед тем, как изложить способы их решения, сделаем два упрощения. Первое из них заключается в том, что уравнение $f(x) = 0$ делится на старший коэффициент полинома $f(x)$.

Полином называется **нормализованным**, если его старший коэффициент равен $1$. Операция деления полинома на его старший коэффициент называется **нормализацией** полинома.

Очевидно, что нормализованный полином имеет те же корни (и в тех же кратностях ), что и исходный. Для простоты обозначений, будем считать, что полином уже нормализован:

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n\,.$$

## Уравнение третьей степени: формула Кардано

Рассмотрим уравнение третьей степени: $x^3 + px + q = 0$

Сделаем в этом уравнении замену переменной: $x = u + v$, введя две неизвестные $u$ и $v$; получим:

$$u^3 + v^3 + 3\,uv(u+v) + p(u+v) + q = 0\,.$$

Сгруппируем: $u^3 + v^3 + (3\,uv + p)(u+v) + q = 0\,.$

Подчиним теперь неизвестные $u$ и $v$ условию $3\,uv + p = 0 \iff uv = -\dfrac{p}{3}\,.$

Тогда предыдущее уравнение приведется к виду $u^3 + v^3 = -q\,.$

Итак, для определения неизвестных величин $u$ и $v$ мы получили систему уравнений

$$u^3 + v^3 = -q,\; uv = -\frac{p}{3}.$$

Возведя последнее уравнение в куб, получим $u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27}\,.$

Два полученных равенства, связывающие $u^3$ и $v^3$, позволяет утверждать, что эти величины являются решениями квадратного уравнения:

$$t^2 + q\,t - \frac{p^3}{27} = 0\,.$$

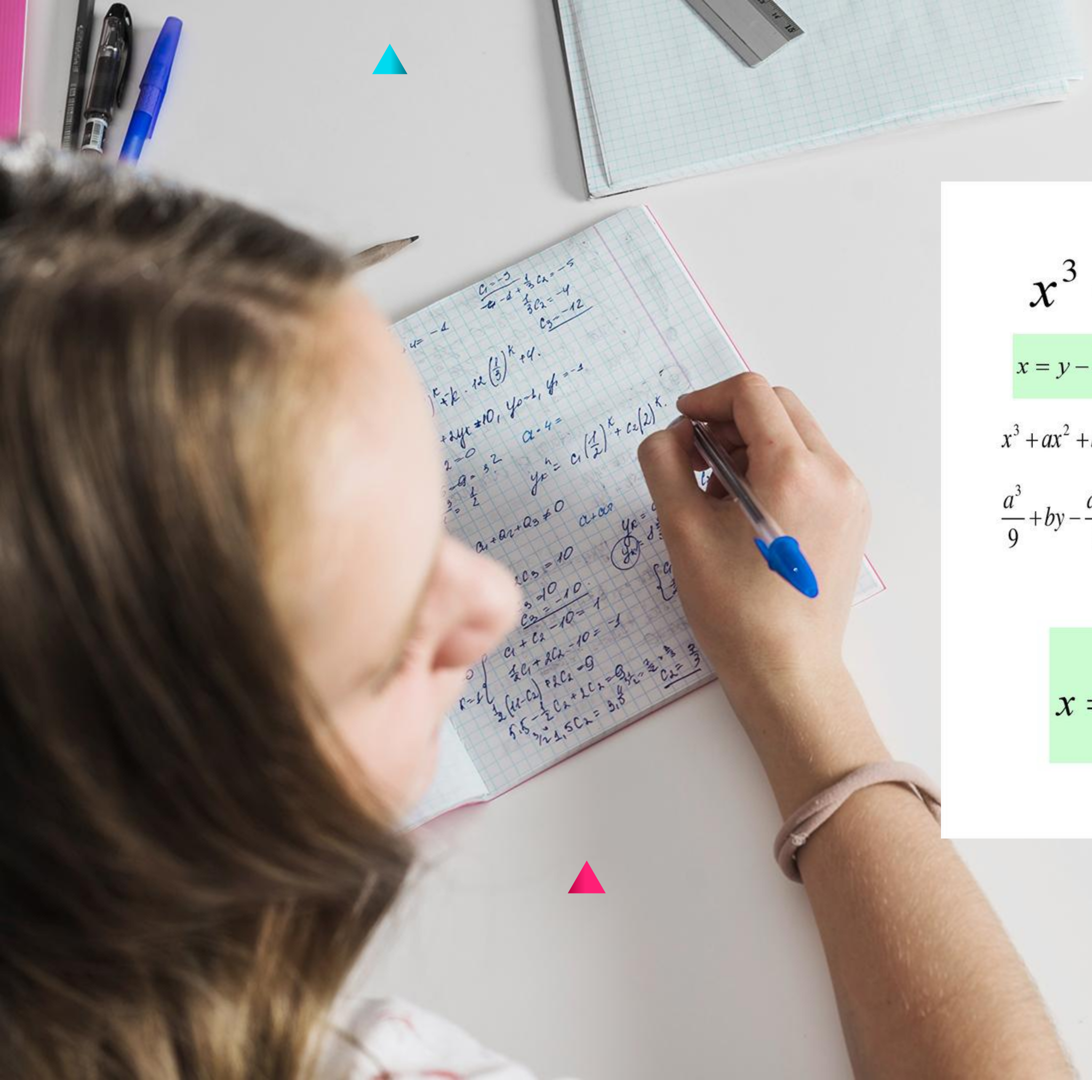
Выражение $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$ называется **дискриминантом** кубического уравнения.

Решив квадратное уравнение, получим: $u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta},\; v^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\,.$

В итоге имеем формулу для решений уравнения:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\;;$$

она называется **формулой Кардано**.



$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

$$\boxed{x = y - \frac{a}{3}}$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}a^2 y +$$

$$\frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + (c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}) = 0$$

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

# Решение уравнения 4-й степени

В общем виде уравнение выглядит следующим образом:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. В результате получается четыре комплексных или вещественных корня. Формулы, использующиеся для решения описаны сразу под калькулятором.

Первым шагом разделим все коэффициенты уравнения на **a** и получим эквивалентное уравнение следующего вида:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Далее решаем кубическое уравнение вида:

$$u^3 - a_2u^2 + (a_1a_3 - 4a_0)u - (a_1^2 + a_0a_3^2 - 4a_0a_2) = 0$$

Это уравнение можно решить, например, способом описанным тут: Кубическое уравнение.

Один вещественный корень этого уравнения $\mathbf{u_1}$ мы будем использовать далее для вычисления корней квадратных уравнений. Если вещественных корней уравнения несколько, то нужно выбрать среди них один $\mathbf{u_1}$ таким образом, чтобы p и q в следующих выражениях были тоже вещественными:

$$p_{1,2} = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\frac{a_3^2}{4} + u_1 - a_2}$$

$$q_{1,2} = \frac{u_1}{2} \pm \sqrt{\frac{u_1^2}{4} - a_0}$$

Вычислив $p_1$, $p_2$,$q_1$,$q_2$, подставляем их в квадратные уравнения в правой части следующего выражения:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)$$ [1]

Четыре корня двух квадратных уравнений в правой части будут соответствовать корням исходного уравнения. Знаки в выражениях для $p_i$ и $q_i$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия:

| | |
|---|---|
| 1 | $p_1 + p_2 = a_3$ |
| 2 | $p_1p_2 + q_1 + q_2 = a_2$ |
| 3 | $p_1q_2 + p_2q_1 = a_1$ |
| 4 | $q_1q_2 = a_0$ |

Фактически можно проверить только третье условие и если оно не выполняется — поменять $q_1$ и $q_2$ местами.


# Thanks for attention!

# УДАЧИ Я В ГУМ!

**CREDITS:** This pr sentation template was
created by **Slides** and includes icons b
**Flaticon**, and infog cs & ages by **Fre**