ГЕОМЕТРИЯ

10-11 КЛАСС

ПРАКТИКУМ ПО ПЛАНИМЕТРИИ И СТЕРЕОМЕТРИИ

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

Ю.А. Глазков, Е.А. Зудина

Геометрия

10–11 класс

Практикум по планиметрии и стереометрии

Готовимся к ЕГЭ

Москва
«Интеллект-Центр»
2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В школьном курсе математики на изучение геометрии отводится до 40% учебного времени. Поэтому проверке уровня усвоения геометрического материала учащимися, оканчивающими 9 и 11 классы, уделяется серьёзное внимание. Каждая третья задача контрольных измерительных материалов (КИМ) государственной итоговой аттестации (ГИА) и единого государственного экзамена (ЕГЭ) – геометрическая. В экзаменационные материалы включены задачи базового, повышенного и высокого уровня трудности. Решения задач базового уровня предъявлять не требуется, нужно только записать ответ. Решения задач более высокого уровня необходимо записать.

Геометрические задачи в экзаменационных материалах ЕГЭ относятся к двум разделам: планиметрии и стереометрии, а для ГИА используются только планиметрические задачи. Большинство планиметрических задач, предъявляемых на выпускных экзаменах, можно отнести к одной из следующих тем:

1) треугольники;
2) четырехугольники;
3) окружности;
4) окружности, вписанные в треугольники и многоугольники;
5) окружности, описанные около треугольников и многоугольников;
6) векторы.

В стереометрических задачах рассматриваются:

1) призмы;
2) пирамиды;
3) цилиндры;
4) конусы.

Во всех задачах на вычисления требуется найти значение одной из геометрических величин:

1) расстояния (длины отрезка);
2) градусной меры угла (тригонометрической функции угла);
3) площади планиметрической фигуры или поверхности тела;
4) объема тела.

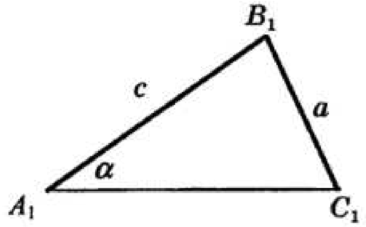
Поскольку в данном пособии рассматриваются и планиметрические, и стереометрические задачи, оно может быть полезно учащимся как 11, так и 9 классов.

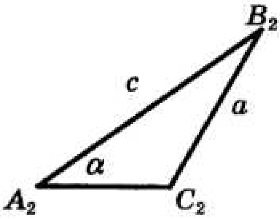
ГЛАВА 1. ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задач необходимо, прежде всего, знать и понимать определения и теоремы школьного курса планиметрии. Неточное знание геометрических утверждений, например, пропуск или замена даже одного слова, может полностью исказить их смысл, сделать неверной формулировку. А это, в свою очередь, приведёт к ошибкам в решении и, соответственно, к неверному ответу.

Например, утверждение «Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°» становится неверным, если пропустить слово «острых».

Утверждение «Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны» (признак равенства треугольников) становится неверным утверждением, если пропустить слова **«между ними»**. Тогда равные углы могут лежать **против** пары равных сторон. На рисунке видно, что в этом случае утверждение неверно.





Действительно, могут быть два неравных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, имеющих равные две стороны и угол.

Верное утверждение «Вертикальные углы равны» становится неверным, если слово «вертикальные» заменить словом «смежные». Дело в том, что в утверждении «Вертикальные углы равны», как и в подавляющем большинстве других, подразумеваются слова **«любые два»**, т.е. оно верно для любой пары вертикальных углов. А в паре смежных углов один угол может быть острым и тогда второй – обязательно тупой, т.е. **не любые** два смежных угла обязательно равны.

Итак, утверждение такого типа считается верным, если оно выполняется для любых объектов, о которых в нём говорится. Если хотите доказать, что утверждение неверно, достаточно привести пример хотя бы одного объекта, для которого выполняется условие утверждения, но не выполняется заключение (вывод).

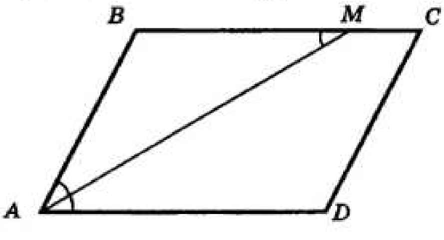
Утверждение «Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником» становится неверным, если слово «параллелограмм» заменить словом «четырёхугольник». Например, прямоугольная трапеция – четырёхугольник с прямым углом, но не прямоугольник.

Неосознанная подмена одного понятия другим – одна из наиболее распространённых причин ошибок в решении задач.

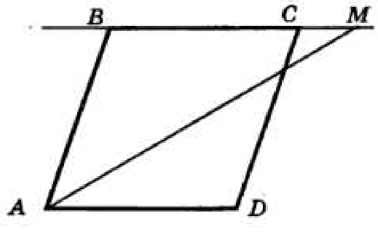
Пример 1.
Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую BC в точке M. Найдите периметр параллелограмма, если $MB = 5$, $MC = 2$.

Решение.
В условии задачи нет указаний на взаимное расположение точек B, C и M. Поэтому следует рассмотреть все возможные случаи. Их два:

1) точка M – между точками B и C;



2) точка C – между точками B и M.



В первом случае сторона $BC = 5 + 2 = 7$, во втором случае $BC = 3$.

Т.к. AM – биссектриса угла A, и $BC \parallel AD$, то $\angle BAM = \angle BMA$, следовательно, треугольник ABM равнобедренный. Поэтому $BA = BM$.

Поскольку $ABCD$ – параллелограмм, то $AB = CD$, $AD = BC$.

Поэтому в первом случае периметр параллелограмма равен 24. Во втором случае периметр равен 16.

Ответ: 24; 16.

Типичная ошибка при решении этой задачи — подмена понятия «прямая BC» понятием «сторона BC» или «отрезок BC». В результате такой подмены остаётся только один (первый) вариант решения и, соответственно, только один ответ. Поэтому необходимо внимательно читать текст задачи, проверять, правильно ли поняты данные.

Отметим, что на рисунках изображена биссектриса острого угла параллелограмма. Но угол A может быть также тупым или прямым (прямоугольник – частный случай параллелограмма). Поэтому стоит убедиться, что и при этих условиях получатся те же ответы. Сделайте это самостоятельно.

При решении геометрических задач важно помнить все определения и теоремы, иначе можно получить неверный ответ.

Пример 2.

Две стороны равнобедренного треугольника равны 6 и 13. Найдите его периметр.

Решение.

Т.к. в условии задачи не сказано, какая из сторон является основанием треугольника, а какая – боковой стороной, нужно рассмотреть два случая:

1) основание равно 13, соответственно, боковая сторона равна 6;

2) основание равно 6, а боковая сторона равна 13.

В первом случае вторая боковая сторона треугольника также равна 6, поэтому сумма боковых сторон равна 12. Но $12<13$, т.е. получилось, что сумма двух сторон треугольника меньше его третьей стороны, а это противоречит **неравенству треугольника.** Значит, треугольника с такими сторонами не существует.

Во втором случае сумма боковых сторон треугольника больше его основания, следовательно, такой треугольник существует, и можно вычислить его периметр: $6 + 13 + 13 = 32$.

Ответ: 32.

Если же забыть о неравенстве треугольника, то получим два значения периметра, одно из которых неверное.

В формулировках определений и теорем важную роль играют союзы.

Например, сравнивая углы, образованные при пересечении двух прямых (допустим, a и b) третьей прямой, можно выяснить, параллельны ли эти прямые a и b:

Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой

а) равны накрест лежащие углы ($\angle 1=\angle 2$)

или

б) равны соответственные углы ($\angle 1=\angle 3$),

или

в) сумма односторонних углов равна $180°$ ($\angle 1+\angle 4=180°$),

то прямые a и b параллельны ($a \parallel b$).

Т.е. если выполняется хотя бы одно (любое) из условий а) – в), можно утверждать, что $a \parallel b$.

И ситуация совершенно иная, если рассматриваются свойства параллельных прямых.

Если известно, что прямые a и b параллельны, то

а) равны накрест лежащие углы ($\angle 1=\angle 2$)

и

б) равны соответственные углы ($\angle 1=\angle 3$),

и

в) сумма односторонних углов равна $180°$ ($\angle 1+\angle 4=180°$).

В этом случае, если $a \parallel b$, то верны все три утверждения а) – в).

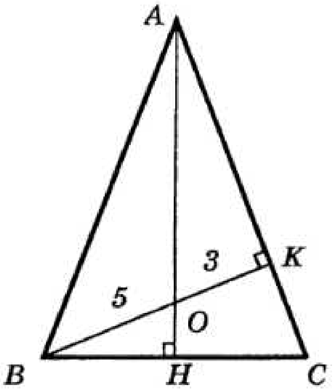
Ещё очень важно понимать, что если какое-то утверждение верно, то обратное может быть и неверным.

Например, практически все учащиеся знают теорему: «Если два угла – вертикальные, то они равны».

Обратное утверждение: «Если два угла равны, то они – вертикальные», – неверное. Достаточно привести опровергающий пример (контрпример): «Углы при основании равнобедренного треугольника равны». Эти углы не являются вертикальными.

Трудность геометрии состоит в том, что зачастую для решения даже не очень сложных задач требуется применить большое количество определений и теорем.

Пример 3. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O так, что $BO = 5$, $OK = 3$. Найдите AH.



Решение.

Высота AH равнобедренного треугольника ABC является и его биссектрисой. Значит, и отрезок AO – биссектриса треугольника ABK, а потому выполняется равенство:

$$BO : OK = AB : AK$$

(свойство биссектрисы треугольника).

Отсюда

$$AK : AB = 3 : 5.$$

Пусть $AK = 3x$, тогда $AB = 5x$, и в прямоугольном треугольнике ABK

$$(5x)^2 - (3x)^2 = (5+3)^2.$$

Следовательно, $16x^2 = 64$, т.е. $x = 2$.

Итак, $AB = 10$, $AK = 6$.

Поскольку $AC = AB$, получаем:

$$KC = 10 - 6 = 4.$$

И в прямоугольном треугольнике BCK

$$BC^2 = 8^2 + 4^2.$$

Отсюда получаем: $BC = 4\sqrt{5}$.

Используя дважды формулу площади для треугольника ABC, получаем:

$$BC \cdot AH = AC \cdot BK,$$

т.е.

$$4\sqrt{5} \cdot AH = 10 \cdot 8.$$

Следовательно,

$$AH = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

В представленном решении использовались следующие геометрические факты:

1. Определение равнобедренного треугольника.
2. Определение высоты треугольника.
3. Свойство высоты равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию.
4. Определение биссектрисы треугольника.
5. Свойство биссектрисы треугольника: отрезки, на которые биссектриса треугольника разделяет его сторону, пропорциональны прилежащим к ним сторонам.
6. Определение прямоугольного треугольника.
7. Теорема Пифагора.
8. Теорема о площади треугольника.

Кроме того, потребовалось умение составлять пропорцию и, используя основное свойство пропорции, вычислять ее неизвестный член.

Предлагаем проверить знание некоторых определений и теорем по планиметрии.

Проверочная работа

Выясните, верны ли следующие утверждения.

1) Если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные.
2) Сумма вертикальных углов равна 180°.
3) Сумма смежных углов равна 180°.
4) Если два угла с общей вершиной равны, то они вертикальные.
5) Если углы вертикальные, то они равны.
6) Если две прямые a и b перпендикулярны третьей прямой c, то a и b перпендикулярны.
7) Если две прямые a и b параллельны третьей прямой c, то a и b параллельны.
8) Если две прямые a и b перпендикулярны третьей прямой c, то a и b параллельны.
9) Если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
10) Если катеты одного прямоугольного треугольника равны катетам другого треугольника, то такие треугольники равны.
11) Если гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе второго треугольника, то такие треугольники равны.
12) Каждая сторона треугольника меньше разности двух других сторон.
13) Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.
14) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.
15) Сумма острых углов треугольника равна 90°.
16) Сумма углов треугольника равна 180°.
17) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 180°.
18) Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
19) Высота равнобедренного треугольника является его медианой.
20) Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является высотой этого треугольника.
21) Сумма противолежащих углов параллелограмма равна 180°.
22) Сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна 180°.
23) Сумма углов трапеции, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
24) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.
25) Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, является параллелограммом.

26) Четырёхугольник, две стороны которого параллельны, является параллелограммом или трапецией.

27) Четырёхугольник, в котором две стороны параллельны и две стороны равны, является параллелограммом.

28) Противоположные стороны трапеции попарно параллельны.

29) Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.

30) Диагонали равнобедренной трапеции пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

31) Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

32) Диагонали равнобедренной трапеции равны.

33) Параллелограмм, диагонали которого равны, является ромбом.

34) Четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

35) Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

36) Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.

37) Диагонали прямоугольника равны.

38) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

39) Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

40) Отношение площадей подобных треугольников равно отношению их периметров.

41) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон.

42) Площадь треугольника равна половине произведения длин стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

43) Площадь прямоугольного треугольника равна произведению длин его катетов.

44) Площадь параллелограмма равна произведению длин двух его смежных сторон.

45) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

46) Центральный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

47) Сумма противолежащих углов четырёхугольника, вписанного в окружность, равна 360°.

48) Суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

49) Площадь круга радиуса R равна $2\pi R^2$.

50) Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

Номера верных утверждений: 3; 5; 7; 8; 10; 13; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 29; 31; 32; 35; 36; 37; 38; 41; 42; 45; 47; 48; 50.

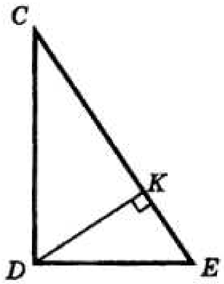
§ 1. Треугольники

В задачах, относящихся к теме «Треугольники», требуется вычислить величины углов или отрезков, площади треугольников. Для их решения требуется использовать определения и свойства углов различных видов (острых, тупых, прямых, вертикальных смежных и т.д.), признаки равенства треугольников, свойства треугольников различных видов (равнобедренного, прямоугольного и др.), их медиан, высот и биссектрис, находить равные и подобные треугольники, уметь вычислять площадь треугольника разными способами. Поэтому полезно иметь под рукой учебник или справочник.

Наиболее просто задачи на вычисление сторон, углов и площадей решаются в **прямоугольных треугольниках**. Для «решения» прямоугольных треугольников необходимо знать, что

1) Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).
2) Синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе, косинус – отношению прилежащего катета к гипотенузе, тангенс – отношению противолежащего углу катета к прилежащему.
3) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов или половине произведения гипотенузы и проведенной к ней высоты, или половине произведения гипотенузы, катета и синуса угла, заключенного между ними.

Перечисленным утверждениям соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE $CE = d$, $EM = c$, $CD = e$, $\angle D = 90°$, $DK \perp CE$ и $DK = h$. Тогда

1) $d^2 = e^2 + c^2$

2) $\sin C = \dfrac{c}{d}$, $\cos C = \dfrac{e}{d}$, $\operatorname{tg} C = \dfrac{c}{e}$ $\left(\operatorname{tg} C = \dfrac{\sin C}{\cos C}\right)$

3) $S = 0{,}5ce$, $S = 0{,}5dh$, $S = 0{,}5dc \cdot \sin E$

Полезно также помнить, что синус одного острого угла прямоугольного треугольника равен косинусу другого его острого угла, например, $\sin C = \cos E$, $\cos C = \sin E$. Полезно также помнить основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. По этой формуле, зная синус острого угла прямоугольного треугольника, можно найти его косинус, и наоборот.

Если условия задачи позволяют установить, что данный треугольник прямоугольный, то вычисления неизвестных элементов становятся проще.

Признаком прямоугольного треугольника служит, например, теорема, обратная теореме Пифагора: «Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник прямоугольный».

Еще одним признаком является равенство суммы двух углов треугольника 90°.

Пример 4. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\sin A = 0{,}6$, $AC = 8$. Найдите AB.

Решение.

Стороны AB и AC связаны с углом A соотношением:

$$\frac{AC}{AB} = \cos A. \qquad (*)$$

Значит, чтобы найти AB, нужно вычислить $\cos A$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим: $0{,}6^2 + \cos^2 A = 1$. Откуда $\cos A = \pm\sqrt{1 - 0{,}6^2}$. Косинус острого угла положительный, следовательно,

$$\cos A = 0{,}8.$$

Из формулы (*) получаем: $\dfrac{8}{AB} = 0{,}8$. Откуда $AB = \dfrac{8}{0{,}8} = 10$.

Ответ: 10.

Пример 5. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Решение.

Пусть дан треугольник ABC с прямым углом C. Тогда

$$S = 0,5AC \cdot CB = 0,5AB \cdot h,$$

где h – высота треугольника, проведенная к гипотенузе. Отсюда получаем:

$$15 \cdot 20 = AB \cdot h.$$

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{3^2 5^2 + 4^2 5^2} = 5\sqrt{3^2 + 4^2} = 25.$$

Итак, $15 \cdot 20 = 25 \cdot h$, следовательно, $h = \dfrac{15 \cdot 20}{25} = 12$.

Ответ: 12.

Замечание. Обратите внимание: найти неизвестную сторону или высоту треугольника можно, вычислив его площадь по двум разным формулам!

Пример 6. В треугольнике KMT $KM = 15$, $MT = 12$, $TK = 9$. Найдите высоту треугольника, проведенную к его большей стороне.

Решение.

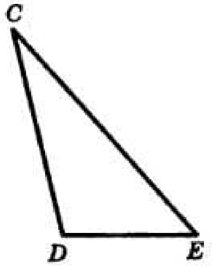
Поскольку $12^2 + 9^2 = 15^2$, треугольник KMT является прямоугольным, а его гипотенуза – наибольшая сторона KM – равна 15. Используя две формулы площади прямоугольного треугольника, получаем: $0,5 \cdot 15 \cdot h = 0,5 \cdot 12 \cdot 9$. Отсюда $h = \dfrac{12 \cdot 9}{15} = 7,2$.

Ответ: 7,2.

Наиболее важными для решения произвольных (не прямоугольных) треугольников являются три теоремы:

1) Теорема косинусов.
2) Теорема синусов.
3) Теорема Герона.

Перечисленным утверждениям соответствуют следующие формулы.



Пусть в треугольнике CDE $CE = d$, $DE = c$, $CD = e$. Тогда

1) $d^2 = c^2 + e^2 - 2ce\cos D$.

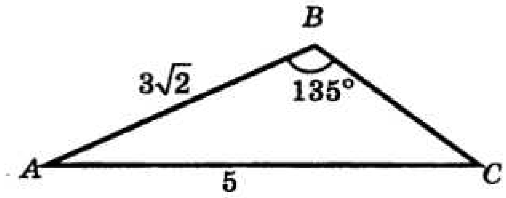
2) $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin D}{d} = \dfrac{\sin E}{e}$.

3) $S = \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)}$, где $p = \dfrac{c+d+e}{2}$.

Пример 7. В треугольнике ABC $\angle B = 135°$, $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 5$. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть $BC = x$. Тогда по теореме косинусов получаем:

$$AC^2 = AB^2 + x^2 - 2AB \cdot x \cdot \cos B.$$



Подставив данные, получим:

$$5^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + x^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 135°,$$

т.е. $25 = 18 + x^2 + 6x$ или $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Корни уравнения – числа -7 и 1. Следовательно, длина стороны BC равна 1.

Применив формулу $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$, найдем площадь треугольника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Пример 8. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{6}$, $BC=2$, $\angle C=60^\circ$. Найдите градусную меру угла B.

Решение.

Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий третьей стороне.

По теореме синусов можно найти угол A, противолежащий второй из данных сторон, а затем, вычитая из 180° сумму углов A и C, получим искомый угол B.

Итак, $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sin A}$, откуда $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, значит,

$$\angle A=45^\circ \text{ или } \angle A=180^\circ-45^\circ=135^\circ.$$

Поскольку в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, а $\sqrt{6}>\sqrt{4}=2$, т.е. $AB>BC$, то $\angle C>\angle A$. Следовательно, угол A не может быть тупым, и потому он равен 45°.

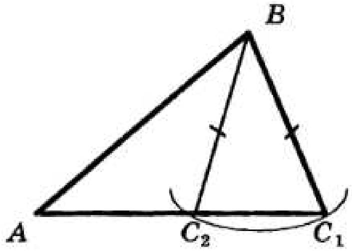
Тогда $\angle B=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$.

Ответ: 75°.

Пример 9. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{6}$, $BC=2$, $\angle A=45^\circ$. Найдите угол C.

Решение.

Известны две стороны треугольника и угол, противолежащий одной из них. Требуется найти угол, противолежащий второй из данных сторон.



По теореме синусов получаем: $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin C}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$.

Отсюда $\sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\angle C=60^\circ$ или $\angle C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Из рисунка видно, что возможны оба варианта.

Ответ: 60° или 120°.

Пример 10. В треугольнике CDE $DE=11$, $EC=13$, $\sin E=\dfrac{12}{13}$. Найдите CD.

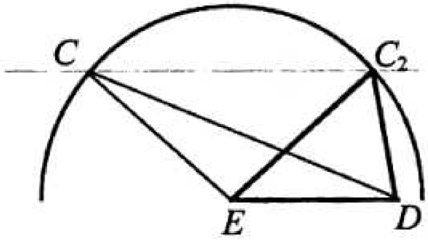
Решение.

Известны две стороны треугольника и тригонометрическая функция угла между ними. Требуется найти третью сторону.

Почти типичная задача на применение теоремы косинусов, только надо вычислить сначала косинус угла E. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем: $\left(\dfrac{12}{13}\right)^2+\cos^2 E=1$, откуда $\cos^2 E=\left(\dfrac{5}{13}\right)^2$. Для получения значения косинуса важно знать, каков угол E – острый или тупой, т.к. косинус тупого угла отрицательный. Поскольку синус и острого, и тупого угла положительный, определить по нему вид угла невозможно.

Попытаемся построить данный треугольник.

Построим отрезок ED длиной 11 ед. и полуокружность с центром E радиусом 13 ед.



Очевидно, существуют два треугольника, у которых синусы угла E равны: один – тупоугольный, а второй – остроугольный.

Поэтому получаем два значения $\cos E=\pm\dfrac{5}{13}$.

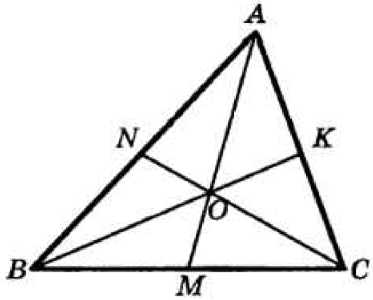
Применяя теорему косинусов, получаем:

$$CD^2=13^2+11^2-2\cdot 13\cdot 11\cdot\frac{5}{13} \text{ или } CD^2=13^2+11^2+2\cdot 13\cdot 11\cdot\frac{5}{13}.$$

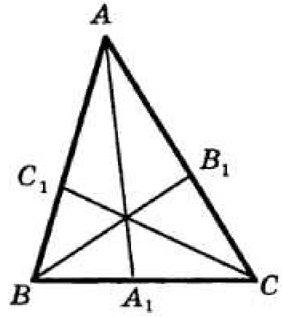
Следовательно, $CD=6\sqrt{5}$ или $CD=20$.

Ответ: $6\sqrt{5}$ или 20.

В задачах о треугольниках часто рассматриваются высоты, медианы и биссектрисы. В равностороннем треугольнике все три отрезка, проведённые из одной вершины, совпадают. В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают.



Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. Например, если отрезки AM, BK и CN – медианы треугольника ABC, то $AO : OM = BO : OK = CO : ON = 2 : 1$.



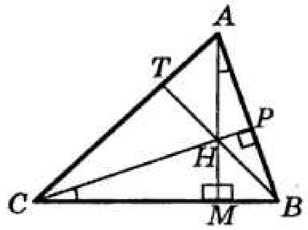
Все три биссектрисы треугольника также пересекаются в одной точке, и каждая биссектриса делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Например, если отрезок AA_1 – биссектриса треугольника ABC, то $A_1B : A_1C = AB : AC$.

Важно помнить, что медианы и биссектрисы всегда пересекаются во внутренней точке треугольника. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника, пересекаются во внутренней точке, а тупоугольного – во внешней.

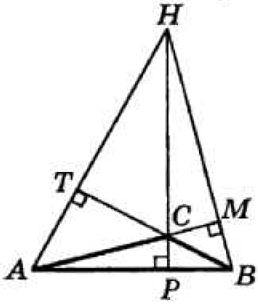
Пример 11. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, $CH=AB$. Найдите угол C.

Решение. Возможны две ситуации:

1) треугольник ABC остроугольный;



2) треугольник ABC тупоугольный.



Рассмотрим первую ситуацию.

Прямоугольные треугольники BAM и BCP имеют общий угол B, следовательно, $\angle BAM = \angle BCP$. Значит, $\triangle ABM = \triangle CHM$ (по гипотенузе и острому углу). Отсюда получаем $CM=AM$, а в равнобедренном прямоугольном треугольнике CAM, острый угол равен 45°, т.е. $\angle C=45^\circ$.

Рассмотрим вторую ситуацию.

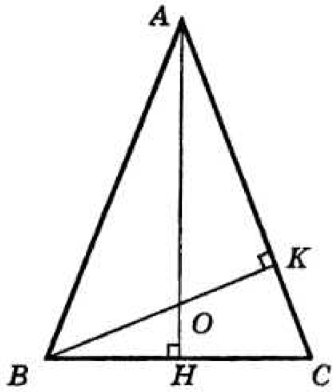
Прямоугольные треугольники BAM и BHP имеют общий угол B, следовательно, $\angle BAM = \angle BHP$. Значит, $\triangle BAM = \triangle CHM$ (по гипотенузе и острому углу). Отсюда получаем $CM=BM$, а в равнобедренном прямоугольном треугольнике CBM острый угол BCM равен 45°.

Следовательно, в треугольнике ABC $\angle C=135^\circ$.

Ответ: 45° или 135°.

Пример 12. Площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равна 160, боковая сторона равна 20. Высоты BK и AH пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO.

Решение.



$S_{ABC} = 0,5BK \cdot AC$, значит, $BK = \dfrac{2 \cdot 160}{20} = 16$.

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Высота AH равнобедренного треугольника ABC является его биссектрисой, следовательно, AO – биссектриса треугольника ABK. Поэтому

$\dfrac{KO}{OB} = \dfrac{AK}{AB}$, а значит, $\dfrac{KO}{OB} + 1 = \dfrac{AK}{AB} + 1$ и $\dfrac{BK}{OB} = \dfrac{AK + AB}{AB}$.

Отсюда получаем $\dfrac{16}{OB} = \dfrac{32}{20}$, т.е. $OB = 10$.

Т.к. AK – высота треугольника ABO,

$$S_{ABO} = 0,5BO \cdot AK = 0,5 \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

Ответ: 60.

Замечание. В решении использован простой, но эффективный прием: построение производной пропорции: прибавляя к обеим частям (вычитая из обеих частей) число 1, можно получить новую необходимую пропорцию.

Например, по свойству биссектрисы AT треугольника ABC имеем:

$\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB}{AC}$. Нам известны стороны AB и AC и нужно найти отношение $\dfrac{TC}{BC}$.

Выполним преобразования: $\dfrac{TB}{TC} + 1 = \dfrac{AB}{AC} + 1$, $\dfrac{TB + TC}{TC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$, $\dfrac{BC}{TC} = \dfrac{AB + AC}{AC}$,

$\dfrac{TC}{BC} = \dfrac{AC}{AB + AC}$. Искомое отношение получено.

Для вычисления площади треугольника можно использовать несколько различных формул.

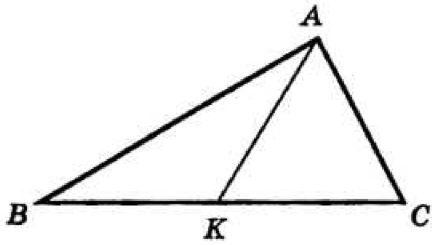
Обозначим длины сторон треугольника ABC, противолежащих углам A, B и C, буквами a, b, c соответственно, проведенные к этим сторонам высоты – буквами h_a, h_b, h_c соответственно, полупериметр треугольника – буквой p, а площадь треугольника – буквой S. Тогда основная формула площади треугольника выглядит следующим образом:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c.$$

Из этой формулы следует:

«Если точка K лежит на стороне BC треугольника ABC, то

$$S_{ABK} : S_{ACK} = BK : KC».$$



В частности, если AK – медиана, то

$$S_{ABK} : S_{ACK} = 1,$$

значит,

$$S_{ABK} = S_{ACK} = \frac{1}{2} S_{ABC}.$$

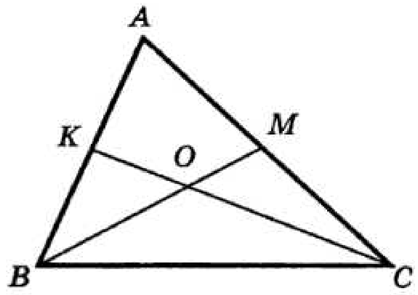
Если AK – биссектриса треугольника ABC, то

$$BK : KC = AB : AC,$$

значит,

$$S_{ABK} : S_{ACK} = AB : AC.$$

Пример 13. В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 21$, $AC = 20$. Найдите площадь треугольника, образованного стороной AC, медианой BM и биссектрисой CK данного треугольника.



Решение. Пусть медиана BM и биссектриса CK треугольника ABC пересекаются в точке O. Тогда CO – биссектриса треугольника BCM, и по свойству биссектрис треугольника

$$BO : OM = BC : CM = 21 : 10.$$

По формуле Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 6 \cdot 7} = 126$ (27 – полупериметр треугольника).

BM – медиана треугольника ABC, следовательно, $S_{BCM} = 0,5S_{ABC} = 63$.

Так как $\dfrac{BO}{OM} = \dfrac{21}{10}$, то $\dfrac{S_{COB}}{S_{COM}} = \dfrac{21}{10}$.

Отсюда получаем: $\dfrac{S_{COB}}{S_{COM}} + 1 = \dfrac{21}{10} + 1$,

следовательно, $\dfrac{S_{BCM}}{S_{COM}} = \dfrac{31}{10}$, и $S_{COM} = \dfrac{10}{31} S_{BCM}$.

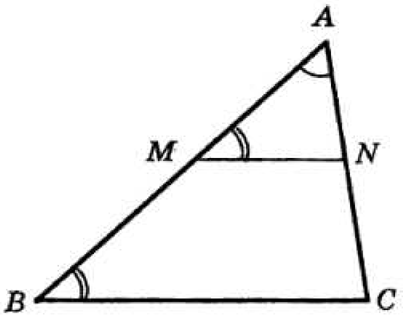
Итак, $S_{COM} = \dfrac{630}{31} = 20\dfrac{10}{31}$.

Ответ: $20\dfrac{10}{31}$.

Задания для самостоятельного решения

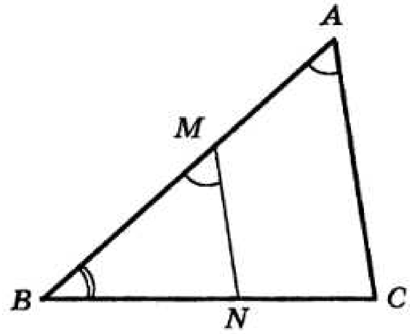
1. В треугольнике KMH угол M прямой, синус угла H равен 0,25. Найдите косинус угла K.
2. В треугольнике BCD $\angle D = 90°$, $BC = 26$, $\cos C = \dfrac{12}{13}$. Найдите CD.
3. В треугольнике OPT $\angle O = 90°$, $PT = 15$, $\cos P = 0,8$. Найдите OT.
4. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $AB = 14\sqrt{3}$. Найдите высоту, проведенную из вершины наибольшего угла треугольника.
5. В треугольнике CDE $CD = 1$, $DE = 2\sqrt{6}$, $EC = 5$. Найдите высоту треугольника, проведенную к его большей стороне.
6. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AH = BC = 8\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника ABO.
7. Высоты AH и BK равнобедренного треугольника ABC с основанием BC пересекаются в точке O, $AK = 12$, $KC = 8$. Найдите AO.
8. Биссектриса AM и медиана BK прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) пересекаются в точке O, $AB = 8$, $BC = 6$. Найдите отношение $BO : OK$.
9. В остроугольном треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите периметр треугольника.
10. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, отрезок AT – биссектриса треугольника, $\angle BAT : \angle ATB = 1 : 5$, $AB = 12\sqrt{2}$. Найдите AC.
11. В треугольнике ABC $AB = 17$, $BC = 15$, $AC = 8$, отрезок AO – биссектриса треугольника. Найдите площадь треугольника ABO.
12. В треугольнике CDE $\angle D = 60°$, $CD=6$, $CE = 2\sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CDE.

Решение большого количества задач основано на подобии треугольников. Ситуации, в которых встречаются подобные треугольники, весьма разнообразны. Например, имеется отрезок, соединяющий внутренние точки двух сторон треугольника так, что отсекается треугольник, два угла которого равны двум углам исходного треугольника (рис. 1–4). По первому признаку подобия эти треугольники подобны.



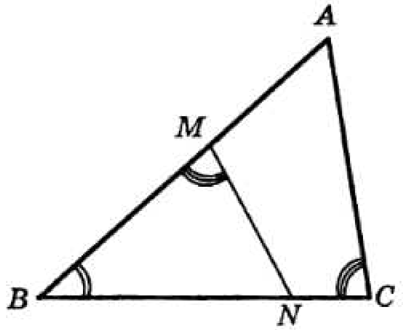
$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

Рис.1



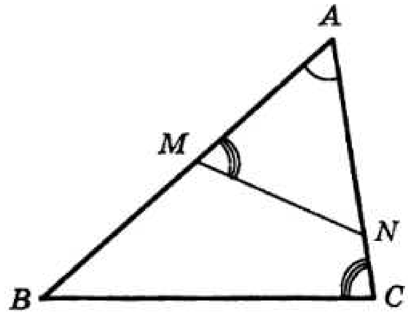
$\triangle MBN \sim \triangle ABC$

Рис.2



$\triangle NBM \sim \triangle ABC$

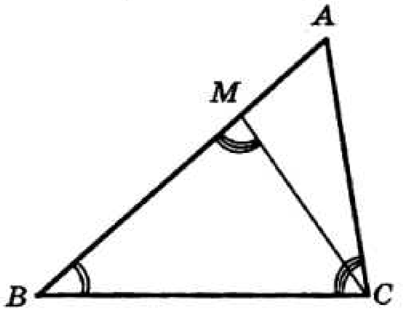
Рис.3



$\triangle ANM \sim \triangle ABC$

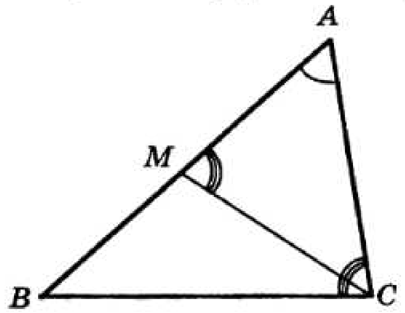
Рис.4

Один из концов такого отрезка может совпадать с вершиной треугольника (рис. 5–6).



$\triangle CBM \sim \triangle ABC$

Рис.5

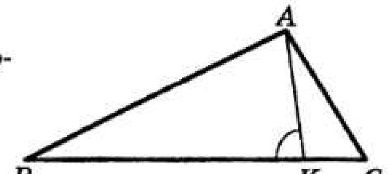


$\triangle ACM \sim \triangle ABC$

Рис.6

Пример 14. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. Известно, что $\angle B + \angle C = \angle AKB$, $AK = 5$, $BK = 16$, $KC = 2$, Найдите AB.

Решение.



Угол AKB является внешним углом треугольника AKC, поэтому

$$\angle AKB = \angle KAC + \angle C.$$

Но по условию задачи $\angle B + \angle C = \angle AKB$,

значит, $\angle KAC = \angle B$.

В треугольниках ABC и KAC угол C общий, $\angle KAC = \angle B$, следовательно, они подобны. Отсюда получаем:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{KC}.$$

Из пропорции $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{KC}$ получаем $\frac{16+2}{AC}=\frac{AC}{2}$.

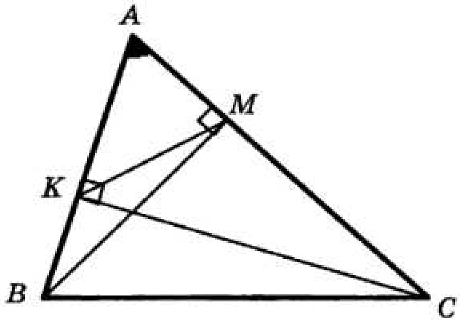
Значит, $AC^2=36$, $AC=6$.

Из пропорции $\frac{AB}{AK}=\frac{BC}{AC}$ получаем $\frac{AB}{5}=\frac{18}{6}$.

Следовательно, $AB=15$.

Ответ: 15.

Пример 15. В остроугольном треугольнике $\angle A=60^\circ$, $BC=10$, отрезки BM и CK – высоты. Найдите KM.



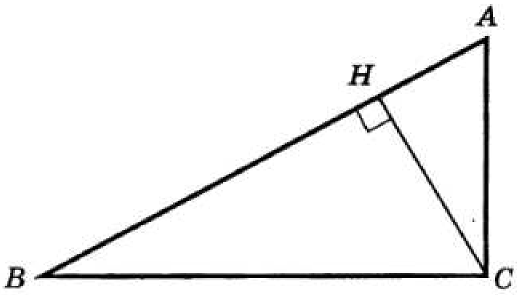
Решение. Прямоугольные треугольники ABM и ACK подобны (по двум углам), следовательно, $\frac{AM}{AB}=\frac{AK}{AC}$.

В треугольниках ABC и AMK угол A общий, $\frac{AM}{AB}=\frac{AK}{AC}$. следовательно, $\triangle ABC\sim\triangle AMK$ (второй признак подобия), поэтому $\frac{KM}{BC}=\frac{AM}{AB}=\cos A$.

Итак, $\frac{KM}{10}=\frac{1}{2}$, следовательно, $KM=5$.

Ответ: 5.

Если треугольник прямоугольный, а отрезок, проведенный из вершины прямого угла, является его высотой, то получается три подобных треугольника: $\triangle ACH\sim\triangle CBH\sim\triangle ABC$.

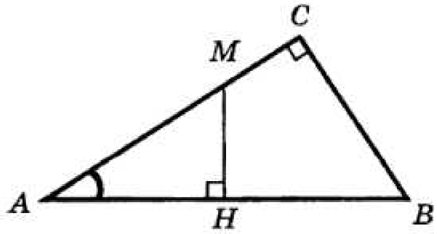


Отсюда получаем:

1. $AH:CH=CH:BH$, значит, $CH^2=AH\cdot BH$.
2. $AH:AC=AC:AB$, значит, $AC^2=AH\cdot AB$.
3. $BH:BC=BC:AB$, значит, $BC^2=BH\cdot AB$.
4. Разделив почленно равенство $AC^2=AH\cdot AB$ на равенство $BC^2=BH\cdot AB$, получаем: $AC^2:BC^2=AH:BH$.

Впрочем, достаточно помнить лишь первую формулу. Например, зная длины отрезков AH и BH, легко вычислить CH^2, а затем по теореме Пифагора найти AC^2.

Пример 16. Из точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Найдите площадь треугольника AMH, если $AB=10$, $AM=5$, $MC=3$.



Решение.

В прямоугольном треугольнике ABC

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-(5+3)^2}=6.$$

$$S_{ABC}=0{,}5\cdot AC\cdot BC=0{,}5\cdot 8\cdot 6=24.$$

$\triangle AMH\sim\triangle ABC$, следовательно,

$$\frac{S_{AMH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Отсюда получаем:

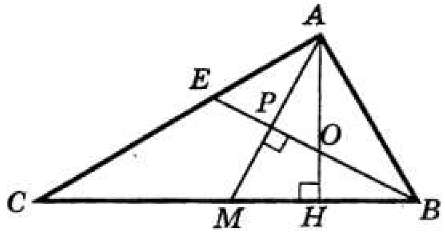
$$S_{AMH}=\frac{1}{4}\cdot 24=6.$$

Ответ: 6.

В приведенном решении было использовано свойство площадей подобных фигур: отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия (для многоугольников и треугольников – квадрату отношения сходственных сторон).

Рассмотрим еще одну задачу на применение этого свойства площадей.

Пример 17. В треугольнике ABC $AB=5$, $BC=10$, $AC=3\sqrt{5}$. Найдите площадь треугольника, образованного высотой AH, медианой AM и биссектрисой BE данного треугольника.



Решение. Пусть биссектриса BE треугольника ABC пересекает высоту AH в точке O, а медиану AM – в точке P. Выразим катет AH прямоугольных треугольников ABH и ACH через их гипотенузы и катеты:

$$AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2.$$

Пусть $BH = x$, тогда получим:

$$5^2 - x^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 - (10-x)^2.$$

Корень полученного уравнения равен 4, т.е. $BH = 4$. Значит,

$$AH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

В прямоугольном треугольнике AMH

$$HM = BM - BH = 5 - 4 = 1.$$

Тогда

$$AM = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$
$$S_{AHM} = 0,5 \cdot 3 \cdot 1 = 1,5.$$

Так как AM – медиана,

$$BM = 10 : 2 = 5 = AB.$$

Поэтому в треугольнике ABM биссектриса BP является также высотой и медианой. Следовательно, в треугольнике APO $\angle APO = 90^\circ$, $AP = 0,5AM = 0,5\sqrt{10}$.

Прямоугольные треугольники AHM и APO подобны, следовательно,

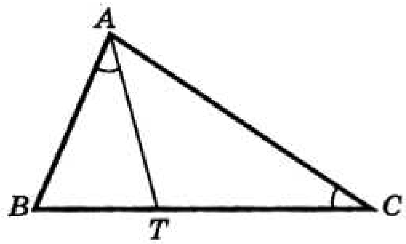
$$S_{APO} : S_{AHM} = (AP : AH)^2 = \left(0,5\sqrt{10} : 3\right)^2 = 5 : 18.$$

Итак, $S_{APO} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{12}$.

Ответ: $\frac{5}{12}$.

Пример 18. Сторона AC треугольника ABC равна $3\sqrt{13}$, На стороне BC отмечена точка T так, что $\angle TAB = \angle C$. Найдите площадь треугольника ABC, если $CT = 9$, $TB = 4$.

Решение. В треугольниках ABC и TAB угол B общий, $\angle TAB = \angle C$, следовательно, они подобны.



Отсюда получаем: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{TB}$.

Из этой пропорции следует: $\frac{9+4}{AB} = \frac{AB}{4}$.

Значит, $AB^2 = 13 \cdot 4$, $AB = 2\sqrt{13}$.

Так как

$$AC^2 + AB^2 = \left(3\sqrt{13}\right)^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 = 13 \cdot 13 = BC^2,$$

то треугольник ABC является прямоугольным с катетами AB и AC.

Следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = 39$.

Ответ: 39.

13. Отрезки AH и CM – высоты остроугольного треугольника ABC, $AC=27$, $BM=8$, $AM=BH=4$. Найдите периметр четырехугольника $AMHC$.
14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CH. Найдите MH, если $AC=16$, $\angle B = 60^\circ$.
15. Через середину O гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и пересекающая катет AC в точке M. Найдите площадь треугольника AMO, если $AM = 25$ и $MC = 7$.
16. В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=5$, $CA=7$. Точка K лежит на луче BC, причем $\angle BAK = \angle ACB$. Найдите периметр треугольника ACK.
17. Меньший катет прямоугольного треугольника ABC равен 9, высота BK делит гипотенузу AC в отношении 3:4. Найдите площадь треугольника ABC.
18. Отрезок CH – высота прямоугольного треугольника ABC. Площади треугольников ACH и BCH равны 4 и 6 соответственно. Найдите длину гипотенузы AB.
19. В треугольнике ABC проведена биссектриса AO. Прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой AC, пересекает сторону AB в точке M. Площадь треугольника ABC равна 6, $AB=4$, $AC=6$. Найдите площадь треугольника AOM.
20. В треугольнике ABC $AB=27$, $BC=36$. Три угла и две стороны треугольника ABC равны трем углам и двум сторонам треугольника MPT, но треугольники не равны. Найдите AC.
21. Отрезки AP, CH и BT – высоты треугольника ABC. Прямые AP, CH и BT пересекаются в точке O, $PH \parallel AC$, $AC=4$, $\sin\angle ABC = \dfrac{24}{25}$. Найдите площадь треугольника ABC.
22. Высота треугольника равна 2 и делит угол треугольника в отношении 1:2, а противолежащую ему сторону на части, меньшая из которых равна 1. Найдите площадь треугольника.
23. В треугольнике ABC $BC=5$, $AC=3$, медианы AM и CP взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM.
24. В треугольнике ABC медиана AM и биссектриса BT взаимно перпендикулярны. Найдите меньшую сторону треугольника, если $AM=BT=4$.
25. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AT и медиана AM. Найдите площадь треугольника AMT, если $\angle T=30^\circ$, $AC=2$.
26. Окружность диаметром $\sqrt{10}$ проходит через вершины A и B прямоугольника $ABCD$, а касательная к окружности, проведенная из точки С, равна 3. Найдите BC, если $AB=1$.

§ 2. Четырехугольники

Тема «четырехугольники» в контрольных измерительных материалах представлена задачами о параллелограмме (и его частных видах: ромбе, прямоугольнике и квадрате), а также задачами о трапеции. Свойства четырёхугольника зависят от его вида.

Произвольный выпуклый четырёхугольник обладает небольшим количеством свойств:

1) Его диагонали пересекаются, причём, внутри четырёхугольника.
2) Сумма углов четырёхугольника равна 360°.
3) Площадь произвольного четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = 0,5\, d_1 d_2 \sin\alpha ,$$

где d_1 и d_2 – длины диагоналей, α – угол между прямыми, содержащими диагонали четырехугольника. (Имеется ввиду один из четырех углов, образованных пересекающимися прямыми, величина которого не больше величин остальных трёх углов).

В частности, если диагонали взаимно перпендикулярны, то формула принимает вид

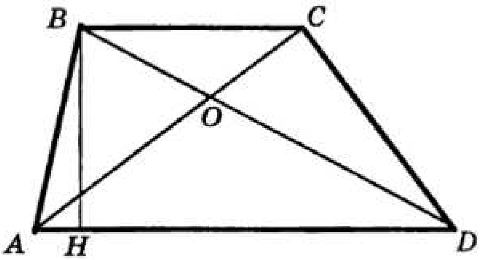
$$S = 0,5\, d_1 d_2 .$$

Если две стороны четырёхугольника сделать параллельными, получим трапецию (параллельные стороны называются основаниями, а две другие – боковыми сторонами). Наряду с перечисленными свойствами четырёхугольника трапеция обладает дополнительными свойствами:

4) Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°.
5) Биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, взаимно перпендикулярны.
6) Отрезок, соединяющий середины боковых сторон (средняя линия трапеции) параллелен основаниям, а его длина равна полусумме длин оснований.
7) Если боковые стороны равны (такая трапеция называется равнобокой или равнобедренной), то углы, прилежащие к одному основанию, равны, равны и диагонали трапеции.
8) Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту, т.е. полусуммы оснований на высоту.

Есть ещё два важных свойства трапеции.
Проведём в трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD.
Тогда:

9) Площади треугольников BAD и CAD равны (у них общее основание и равные высоты). Равны также и площади треугольников BAC и BDC.



Вычитая из площадей треугольников BAD и CAD площадь их общей части – треугольника AOD, получаем:

10) $S_{BAO} = S_{CDO}$.

Если противоположные стороны четырёхугольника попарно параллельны, то он называется параллелограммом. Параллелограмм обладает всеми свойствами трапеции. Но имеет и свои специфические свойства:

11) Диагонали точкой пересечения делятся пополам.
12) Противоположные стороны попарно равны.
13) Противолежащие углы попарно равны.
14) Сумма углов, прилежащих к одной стороне равна 180°.
15) Диагонали делят параллелограмм на четыре равных по площади треугольника.

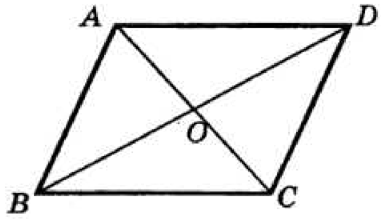
Если учесть, что средняя линия параллелограмма равна стороне, которой параллельна, то площадь параллелограмма равна произведению стороны и проведённой к ней высоты:

16) $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

17) Кроме того, площадь можно вычислить, умножив произведение двух сторон на синус угла между ними:

$$S = ab\sin\varphi.$$

К перечисленным утверждениям следует добавить еще одно полезное свойство параллелограмма:



18) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Т.е. в параллелограмме $ABCD$

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2).$$

Эту формулу легко получить, применив теорему косинусов к треугольникам ABC и BCD, а затем сложив почленно полученные равенства.

Если один из углов параллелограмма прямой, то и остальные углы тоже прямые. Такой параллелограмм называется прямоугольником. Значит, прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Но у него есть и собственное свойство:

19) Диагонали прямоугольника равны.

Упрощается и вычисление площади:

20) Площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон.

Если две смежные стороны параллелограмма равны, то равны все его стороны. Такой параллелограмм называется ромбом. Значит, ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, но у него есть и свои специфические свойства:

21) Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

22) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

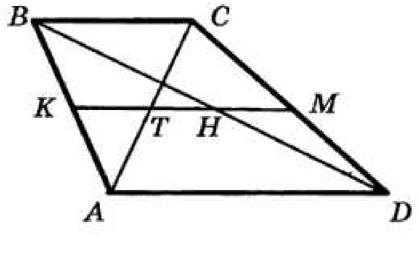
Поскольку ромб является четырёхугольником, диагонали которого взаимно перпендикулярны:

23) Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, т.е. для ромба $ABCD$ получаем формулу: $S = AC \cdot BD$.

Прямоугольник, являющийся ромбом (ромб, являющийся прямоугольником) называется квадратом. Следовательно, квадрат обладает всеми перечисленными выше свойствами. А площадь квадрата равна квадрату стороны: $S = a^2$.

Рассмотрим примеры решений задач.

Пример 19. Основания трапеции равны 8 и 10. Найдите расстояние между серединами её диагоналей.



Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD, а её средняя линия KM пересекает диагонали AC и BD в точках T и H. Поскольку $KM \parallel AD$, то по теореме Фалеса, прямая KM пересекает диагонали AC и BD в их серединах. Значит, отрезки KT и MH – средние линии треугольников ABC и DBC.

Поэтому $KT = MH = \frac{1}{2}BC = 4$.

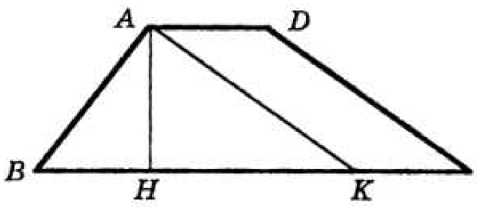
Следовательно, $TH = KM - 2KT = \frac{8+10}{2} - 2 \cdot 4 = \frac{10-8}{2} = 1$.

Ответ: 1.

Замечание: фактически мы получили формулу расстояния между серединами диагоналей трапеции с основаниями a и b: $TH = \frac{|a-b|}{2}$.

В решении геометрических задач важную роль играют удачные дополнительные построения. Например, в трапеции нередко полезно бывает провести прямую, параллельную диагонали или боковой стороне.

Пример 20. В трапеции $ABCD$ $AB = 6$, $AD = 5$, $CD = 8$, $\angle B + \angle C = 90°$. Найдите площадь трапеции.



Решение. Через точку A проведем прямую, параллельную прямой CD, и обозначим точку ее пересечения с прямой BC буквой K. Стороны четырехугольника $AKCD$ попарно параллельны, следовательно, он – параллелограмм. Поэтому $AK = CD = 8$ и $KC = AD = 5$. Итак, треугольник ABK прямоугольный с катетами, равными 6 и 8.

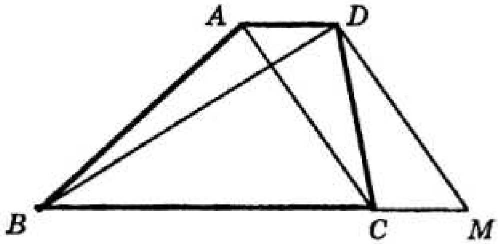
Поэтому $BK = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Найдем высоту AH треугольника: $AH \cdot BK = AB \cdot AK$, значит, $AH = \dfrac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

Поскольку $BC = BK + KC = 10 + 5 = 15$,
то площадь трапеции равна $0,5 \cdot (15 + 5) \cdot 4,8 = 48$.

Ответ: 48.

Пример 21. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 8 и 15. Найдите среднюю линию трапеции.



Решение. Через вершину D трапеции $ABCD$ проведем прямую, параллельную прямой AC, и обозначим точку ее пересечения с прямой BC буквой M. Стороны четырехугольника $ACMD$ попарно параллельны, следовательно, это – параллелограмм. Поэтому $CM = AD$ и $AC = MD = 8$.

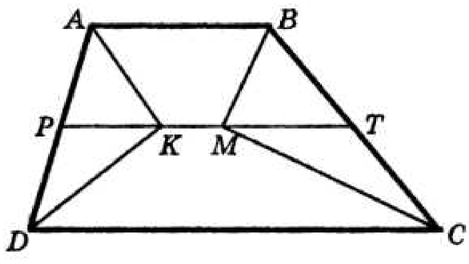
Следовательно, $BM = BC + CM = BC + AD$, а треугольник BDM прямоугольный с катетами, равными 15 и 8. Значит, $BM = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$.

Средняя линия трапеции равна $0,5(BC + AD) = 0,5(BC + CM) = 0,5BM$.

Следовательно, $0,5 \cdot 17 = 8,5$.

Ответ: 8,5.

Пример 22. Основания AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 10, $AD = 3$, $BC = 7$. Биссектрисы углов A и D пересекаются в точке K, биссектрисы углов B и C – в точке M. Найдите KM.



Решение. Луч AK – биссектриса угла A, следовательно, точка K равноудалена от его сторон AB и AD. Аналогично точка K равноудалена от сторон DA и DC. Значит, точка K равноудалена от оснований трапеции AB и CD. Аналогично доказывается, что и точка M равноудалена от оснований трапеции. Отсюда следует, что прямая KM параллельна прямым, содержащим основания трапеции, и равноудалена от них.

Пусть прямая KM пересекает боковые стороны AD и BC в точках P и T соответственно, тогда PT – средняя линия трапеции, и поэтому

$$PT = 0,5(AB + CD) = 7,5.$$

Т.к. AK и DK – биссектрисы углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, $AK \perp CK$. Тогда KP – медиана прямоугольного треугольника AKD, проведенная к его гипотенузе, поэтому $KP = 0,5AD = 1,5$. Аналогично $MT = 0,5BC = 3,5$.

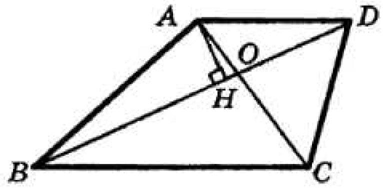
Следовательно,

$$KM = PT - (KP + MT) = 7,5 - (1,5 + 3,5) = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

Как отмечалось выше, в параллелограмме равны площади всех четырех треугольников, на которые он делится диагоналями.

В трапеции соотношение между площадями таких треугольников сложнее. Треугольники AOD и COB подобны, поэтому



$$S_{AOD} : S_{COB} = AD^2 : BC^2 = AO^2 : CO^2 = DO^2 : BO^2 .$$

Треугольники BOA и DOA имеют общую высоту AH, поэтому

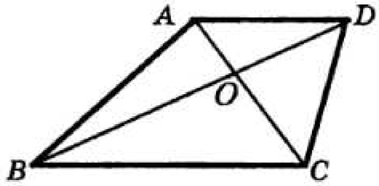
$$S_{BOA} : S_{DOA} = BO : DO .$$

Аналогично доказывается, что

$$S_{AOB} : S_{COB} = AO : CO ,$$
$$S_{AOD} : S_{COD} = AO : CO ,$$
$$S_{BOC} : S_{DOC} = BO : DO .$$

Пример 23. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, основание AD трапеции равно 2, $BC = 3$, площадь треугольника AOB равна 6. Найдите площадь трапеции.

Решение. Так как



$$S_{AOB} : S_{AOD} = OB : OD = BC : AD ,$$

получаем:

$$6 : S_{AOD} = 3 : 2 , \ S_{AOD} = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4 .$$

Аналогично,

$$S_{AOB} : S_{COB} = AO : CO = AD : BC .$$

Значит,

$$6 : S_{COB} = 2 : 3 , \ S_{COB} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 .$$
$$S_{COD} = S_{AOB} = 6 .$$

Итак,

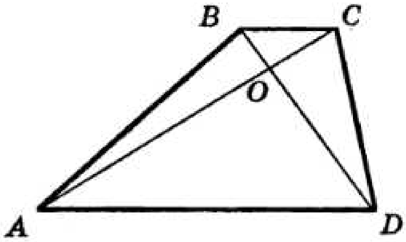
$$S_{ABCD} = 6 + 4 + 6 + 9 = 25 .$$

Ответ: 25.

Пример 24. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны соответственно 16 и 36. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть $S_{BOC} = 16$, а $S_{AOD} = 36$.

Треугольники BOC и AOD подобны (по двум углам).



Тогда

$$\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{\sqrt{S_{BOC}}}{\sqrt{S_{AOD}}} = \frac{2}{3} .$$

Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту.

Тогда

$$\frac{S_{AOB}}{S_{OBC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}$$

и

$$S_{AOB} = \frac{3}{2} \cdot S_{OBC} = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24 .$$

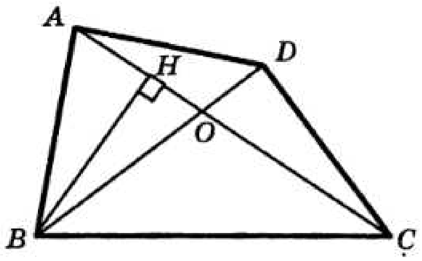
Треугольники ABC и DBC равновелики, так как у них равные высоты и общее основание BC, следовательно, равновелики и треугольники AOB и DOC. Площадь трапеции равна $16 + 36 + 2 \cdot 24 = 100$.

Ответ: 100.

Пример 25. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, площади треугольников AOB и AOD равны, соответственно, 12 и 8, $AO : OC = 4 : 5$. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту BH, следовательно,

$$S_{AOB} : S_{BOC} = AO : OC.$$



Отсюда получаем:

$$12 : S_{BOC} = 4 : 5,$$

$$S_{BOC} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15.$$

Аналогично

$$S_{AOD} : S_{COD} = AO : OC,$$

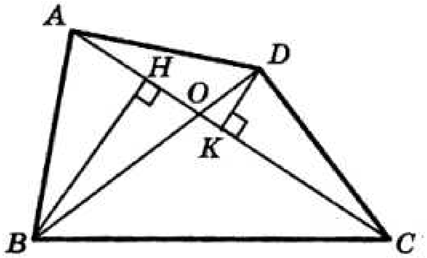
$$S_{COD} = \frac{8 \cdot 5}{4} = 10.$$

Итак,

$$S_{ABCD} = 8 + 12 + 15 + 10 = 45.$$

Ответ: 45.

Интересно, что если в произвольном выпуклом четырехугольнике провести диагонали, то произведения площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам, будут равны, т.е. для любого четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство:



$$S_{ABO} \cdot S_{CDO} = S_{ADO} \cdot S_{BCO},$$

где O – точка пересечения диагоналей.

Докажите это самостоятельно, используя приведенный здесь чертёж.

Пример 26. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOB, BOC и COD равны соответственно 4, 6 и 9. Найдите площадь четырехугольника.

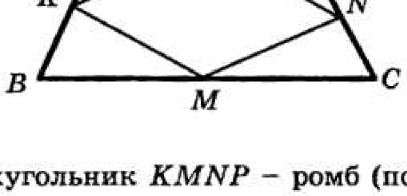
Решение. Поскольку $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$, получаем

$$S_{AOD} = \frac{S_{AOB} \cdot S_{COD}}{S_{BOC}} = \frac{4 \cdot 9}{6} = 6.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = 4 + 6 + 9 + 6 = 25$.

Ответ: 25.

Еще один интересный геометрический факт получается, если последовательно соединить отрезками середины сторон произвольного четырехугольника.



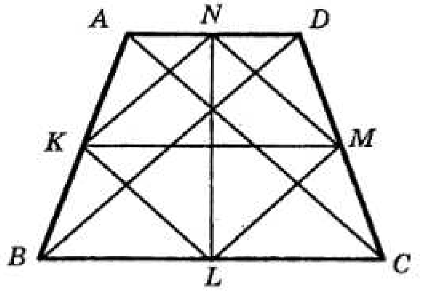
Построенный таким образом четырехугольник $KMNP$ является параллелограммом, т. к. его противоположные стороны попарно параллельны диагоналям AC и BD (почему?).

Если $AC = BD$ (например, четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник или равнобедренная трапеция), то четырехугольник $KMNP$ – ромб (почему?).

Если $AC \perp BD$ (например, четырехугольник $ABCD$ – ромб), то четырехугольник $KMNP$ – прямоугольник (почему?).

Пример 27. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 8. Найдите площадь трапеции.

Замечание. Наиболее простое решение основано на свойствах четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данной трапеции (как было показано выше, этот четырехугольник – параллелограмм).



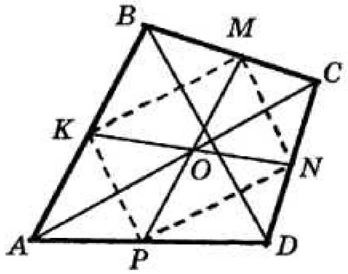
Решение. Трапеция $ABCD$ равнобедренная, следовательно, $AC = BD$. Так как стороны параллелограмма $KLMN$ параллельны диагоналям трапеции и равны их половинам, параллелограмм является прямоугольником и ромбом, следовательно, это – квадрат.

Диагональ KM квадрата является средней линией данной трапеции, следовательно, параллельна ее основаниям. Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны, следовательно, диагональ LN равна 8 и перпендикулярна основаниям трапеции, т. е. является ее высотой. Итак,

$$S_{ABCD} = 8 \cdot 8 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 28. Диагонали выпуклого четырехугольника равны 8 и 6. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны друг другу. Найдите площадь четырехугольника.

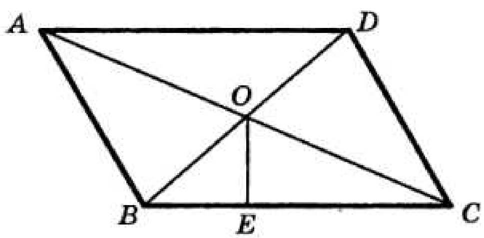


Решение. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ равны 8 и 6 соответственно, точки K, M, N, P – середины его сторон. Тогда четырехугольник $KMNP$ – параллелограмм с равными диагоналями, то есть – прямоугольник. Стороны прямоугольника равны половинам диагоналей AC и BD (почему?), значит, его площадь равна 12. Стороны прямоугольника являются средними линиями треугольников ABC, BCD, ACD, ABD, следовательно, $S_{KBM} + S_{PDN} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ACD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Аналогично можно доказать, что $S_{AKP} + S_{MCN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$. Значит, $S_{KMNP} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Отсюда получаем: $S_{ABCD} = 24$.

Ответ: 24.

Пример 29. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, $BD = 26$, $AC = 40$, $BC = 21$. Отрезок OE – перпендикуляр к стороне BC. Найдите разность площадей четырехугольников $DCEO$ и $ABEO$.



Решение. В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит, $CO = 20$ и $BO = 13$. Пусть $BE = x$, тогда $EC = 21 - x$. В прямоугольных треугольниках OBE и OCE найдем OE^2. Получим уравнение

$$13^2 - x^2 = 20^2 - (21 - x)^2,$$

откуда $x = 5$.

Итак, $BE = 5$, $CE = 16$. Тогда в треугольнике OBE

$$OE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Значит,

$$S_{OBE} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30, \quad S_{OCE} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96.$$

$\triangle AOB = \triangle COD$, следовательно, $S_{AOB} = S_{COD}$. Поэтому

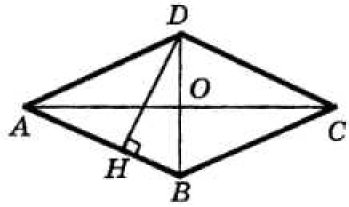
$$S_{DCEO} - S_{ABEO} = (S_{COD} + S_{OCE}) - (S_{AOB} + S_{OBE}) = S_{OCE} - S_{OBE} = 96 - 30 = 66.$$

Ответ: 66.

Замечание. Отрезок OE можно было найти как высоту треугольника BOC, вычислив сначала по формуле Герона площадь этого треугольника.

Пример 30. Найдите площадь ромба, высота которого равна 4,8, а отношение диагоналей равно 3:4.

Решение. Пусть $AC = 8x$ и $BD = 6x$. Тогда $AO = 4x$, $BO = 3x$. В треугольнике ABO



$$AB = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x.$$

$$S_{ABCD} = 0,5AC \cdot BD = AB \cdot DH.$$

Следовательно,

$$0,5 \cdot 8x \cdot 6x = 5x \cdot 4,8.$$

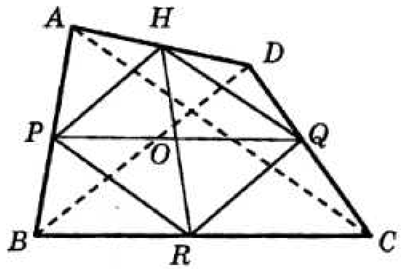
Отсюда получаем, что $x = 1$, и, значит,

$$S_{ABCD} = 5 \cdot 4,8 = 24.$$

Ответ: 24.

Пример 31. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются под углом $60°$, а их длины относятся как $1 : 3$. Найдите меньшую диагональ четырехугольника $ABCD$, если его большая диагональ равна $\sqrt{39}$.

Решение. Пусть P, H, Q и R – середины сторон AB, AD, DC и BC соответственно. $PH \parallel BD$, так как PH средняя линия треугольника BAD. Аналогично докажем, что $HQ \parallel AC$, $RQ \parallel BD$ и $PR \parallel AC$, то есть $PHQR$ – параллелограмм. Пусть AC большая диагональ, равная $\sqrt{39}$, тогда $HQ = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$ и $\angle HOQ = 120°$. Если OH примем за x, то OQ будет равен $3x$. В треугольнике HOQ по теореме косинусов $HQ^2 = OH^2 + OQ^2 - 2 \cdot OH \cdot OQ \cdot \cos 120°$ или $x^2 + 9x^2 + 3x^2 = \dfrac{39}{4}$, откуда $x^2 = \dfrac{3}{4}$.



Применим теорему косинусов к треугольнику PHO: $PH^2 = x^2 + 9x^2 - 3x^2 = 7x^2 = \dfrac{21}{4}$, $BD = 2PH = \sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

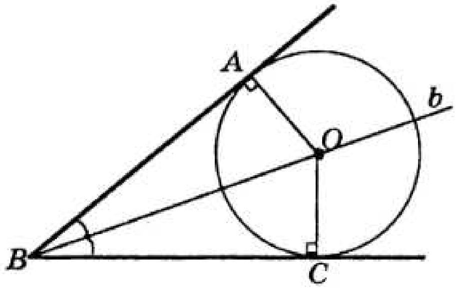
Задания для самостоятельного решения

27. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 4 : 3$. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 132.
28. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне AD. Площадь параллелограмма равна $36\sqrt{3}$, $\angle C = 120°$. Найдите большую сторону параллелограмма.
29. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 4$, $AD = 8$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке K, углов C и D – в точке M. Найдите KM.
30. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекают сторону BC в точках K и M соответственно, причем $BK = KM = MC$, $AK = 8$, $DM = 6$. Найдите периметр параллелограмма.
31. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают стороны BC и AD в точках K и P соответственно, причем $BC : KC = 5 : 2$. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 75. Найдите площадь четырехугольника $AKCP$.
32. Площадь ромба равна 600, а отношение длин диагоналей равно 4 : 3. Найдите высоту ромба.
33. Найдите высоту ромба, если его меньшая диагональ равна 6, а сторона равна 5.
34. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K и M так, что $AK = KM = MB$. Прямые CM и DK пересекаются в точке O. Площадь параллелограмма равна 40. Найдите площадь треугольника COD.

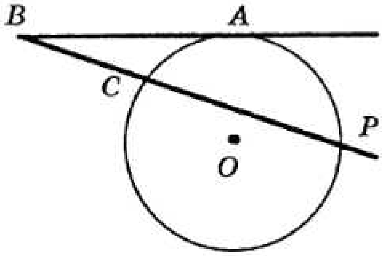
35. Точка M – середина боковой стороны BC трапеции $ABCD$. Площадь треугольника AMD равна 8. Найдите площадь трапеции.
36. Сторона параллелограмма равна 21, а диагонали равны 34 и 20. Найдите площадь параллелограмма.
37. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, основания BC и AD равны 3 и 4, а площадь равна 98. Найдите площадь треугольника AOB.
38. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны 3 и 6, диагонали пересекаются в точке O, сумма площадей треугольников AOB и COD равна 40. Найдите высоту трапеции.
39. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 135. Диагонали пересекаются в точке O, $AO = 6$, $OC = 4$ и $BO : OD = 2 : 7$. Найдите площадь треугольника AOB.
40. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна 52. Диагонали пересекаются в точке O, $AO : OC = 4 : 9$, $BO : OD = 3 : 5$. Найдите площадь треугольника AOD.
41. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площади треугольников ABC, BCD и AOD равны соответственно 34, 80 и 168.
42. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а отрезок, соединяющий середину меньшего основания и середину боковой стороны, равен 7. Найдите площадь трапеции.
43. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, одно из оснований равно 17, а площадь равна 81. Найдите второе основание трапеции.
44. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны и точкой пересечения делятся в отношении 3:4. Площадь четырехугольника с вершинами в серединах сторон трапеции равна 196. Найдите боковую сторону трапеции.
45. Боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а содержащие их прямые взаимно перпендикулярны, площадь трапеции равна 144. Найдите среднюю линию трапеции.
46. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) основания равны 13 и 26, одна из боковых сторон равна 5, а $\angle C - \angle A = 90^\circ$. Найдите площадь трапеции.
47. Найдите высоту трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны 15 и 20.
48. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 13. Одна из диагоналей равна 10. Найдите другую диагональ.
49. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит основание на отрезки длиной 20 и 5. Найдите площадь трапеции.
50. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O и равны 8 и 5. Найдите среднюю линию трапеции, если $\angle BOC = 60^\circ$.
51. В равнобокой трапеции $ABCD$ точка O – середина меньшего основания BC, AO – биссектриса угла A. Найдите BC, если $OA = 20$, а высота трапеции равна 12.
52. Основания трапеции равны 4 и 6, а ее площадь равна 100. Найдите наибольшую из площадей треугольников, на которые делят трапецию ее диагонали.
53. В трапеции с основаниями 8 и 2 проведены диагонали. Найдите площадь треугольника, сторонами которого являются отрезки диагоналей и большее основание трапеции, если высота трапеции равна 7.
54. Диагонали трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) пересекаются в точке O так, что $MO : OP = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника NPQ, если площадь трапеции равна 8.
55. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Известно, что $AD = 33$, $DC = 11$. Площадь трапеции $AEFD$ относится к площади трапеции $EFCB$ как 27 : 5. Найдите длину отрезка EF.
56. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно и делит высоту трапеции на отрезки, равные 4 и 6. Известно, что $AD= 24$, $BC= 8$. Найдите длину отрезка EF.
57. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Известно, что $AD = 66$, $BC = 22$. Площадь трапеции $EFCB$ относится к площади трапеции $AEFD$ как 5 : 27. Найдите длину отрезка EF.
58. Площадь правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 16. Найдите площадь треугольника ACE.
59. Высота NA ромба $MNPQ$, проведенная к стороне MQ, пересекает диагональ MP в точке E. Известно, что $NA = 24$, $MA : AQ = 3 : 2$. Найдите ME.

§ 3. Окружность. Окружности, вписанные в треугольник и четырехугольник

Во многих задачах встречается окружность, касающаяся сторон угла. Напомним, что в этом случае



1) центр окружности лежит на биссектрисе угла $(O \in b)$.
2) отрезки, соединяющие точки касания с центром окружности, являются ее радиусами и перпендикулярны к сторонам угла ($OA = OC = r$, $OA \perp BA$, $OC \perp BC$).
3) равны расстояния от вершины угла до точек касания ($BA = BC$).
4) $\angle ABC + \angle AOC = 180°$.

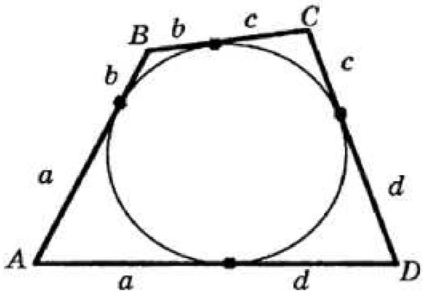


Имеется взаимосвязь между отрезками касательной (BA) и секущей (BP):

$$BA^2 = BP \cdot BC.$$

Даже этот краткий перечень свойств позволяет решать большое количество разнообразных задач.

Во многих задачах рассматриваются окружности, вписанные в многоугольники. Их решение основано на следующих геометрических фактах.



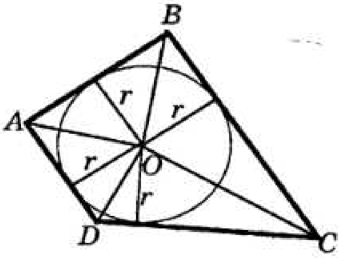
Если окружность вписана в четырехугольник, то четырехугольник называется описанным около окружности. Он обладает следующим важным свойством: суммы длин противолежащих сторон равны.

$$AB + CD = (a + b) + (c + d) = (a + d) + (b + c) = AD + BC.$$

Отсюда, например, следует, что

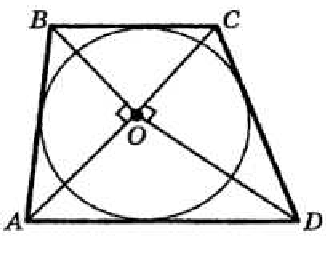
1) параллелограмм, описанный около окружности, является ромбом (почему?);
2) средняя линия трапеции, описанной около окружности, равна полусумме боковых сторон.

Более того,



3) в любом четырёхугольнике, описанном около окружности, суммы противоположных сторон равны,
4) его площадь равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности (см. рисунок).

Поскольку центр вписанной окружности лежит на биссектрисах углов четырехугольника, то



5) центр окружности, вписанной в ромб, является точкой пересечения его диагоналей;
6) в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle AOB = \angle COD = 90°$ (почему?).

Следует помнить, что центр окружности, вписанной в трапецию, не совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции.

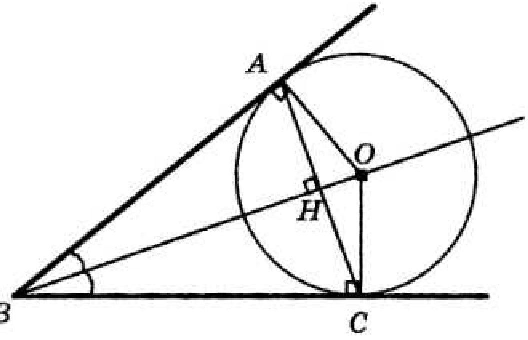
И еще одно важное свойство ромба и трапеции, описанных около окружности:

7) диаметр окружности является высотой ромба (трапеции).

Если окружность вписана в треугольник или четырехугольник, то она касается сторон всех его углов, поэтому на основе перечисленных выше свойств окружности, вписанной в угол, получаем:

8) центр окружности является точкой пересечения биссектрис углов треугольника (четырехугольника);
9) радиусы, проведенные в точки касания, перпендикулярны к сторонам (четырехугольника);
10) равны расстояния от вершины угла до точек касания с его сторонами.

Пример 32. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Радиус окружности равен 7, $BO = 25$. Найдите AC.



Решение. Т.к. $OA \perp BA$, то в треугольнике ABO

$$AB = \sqrt{BO^2 - OA^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда $BC = BA = 24$.

В треугольнике ABC отрезок BH – биссектриса и $BA = BC$, следовательно, $BH \perp AC$ и $AH = CH$.

Найдем высоту AH прямоугольного треугольника ABO:

$$AH \cdot BO = BA \cdot OA,$$

значит,

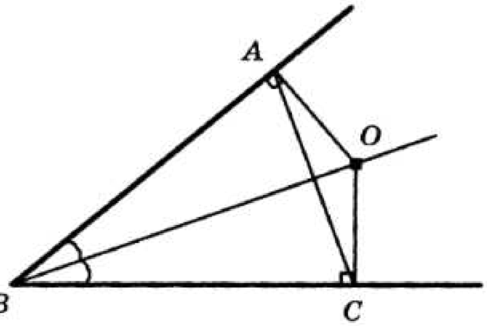
$$AH = \frac{7 \cdot 24}{25} = 6,72.$$

Тогда $AC = 2AH = 13,44$.

Ответ: 13,44.

Пример 33. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Радиус окружности равен 6, $BO = 2\,AO$. Найдите площадь треугольника AOC.

Решение. Прежде всего, отметим, что на чертеже к данной задаче совсем необязательно изображать окружность, поскольку важно представлять лишь взаимное расположение отрезков и точек.



В прямоугольном треугольнике ABO $BO = 2AO$, следовательно, $\angle ABO = 30°$.

Отсюда получаем:

$$\angle ABC = 2\angle ABO = 60°$$

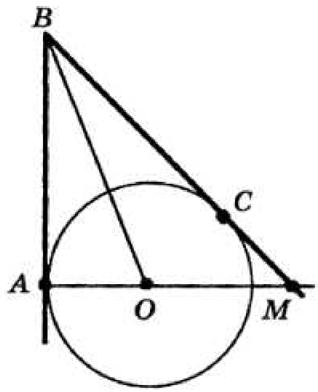
и

$$\angle AOC = 180° - 60° = 120°$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot CO \cdot \sin AOC = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

Ответ: $9\sqrt{3}$.

Пример 34. Окружность с центром O касается сторон угла B в точках A и C. Лучи AO и BC пересекаются в точке M, $OM = 9$, $BM = 18$. Найдите площадь треугольника BOM.



Решение. Отрезок BO – биссектриса треугольника ABM, следовательно,

$$BA : AO = BM : MO = 18 : 9 = 2 : 1.$$

Пусть $AO = x$, тогда $AB = 2x$, и в прямоугольном треугольнике ABM

$$18^2 = (x+9)^2 + (2x)^2.$$

Далее получаем:

$$5x^2 + 18x - 243 = 0.$$

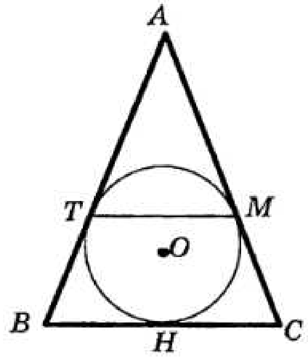
Положительный корень уравнения равен 5,4.

Следовательно, $AO = 5,4$, $BA = 10,8$.

$$S_{BOM} = \frac{1}{2} BA \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 10,8 \cdot 9 = 48,6.$$

Ответ: 48,6.

Пример 35. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AB и AC в точках T и M соответственно. Найдите TM, если $AB = 25$, $BC = 14$.



Решение. Данная окружность касается сторон угла A в точках T и M, следовательно, $AT = AM$.

Тогда

$$BT = AB - AT = AC - AM = MC.$$

Пусть окружность касается стороны BC в точке H. Тогда $BT = BH$ и $CM = CH$. Следовательно,

$$BH = BT = CM = CH = 14 : 2 = 7$$

и

$$AT = AM = 25 - 7 = 18.$$

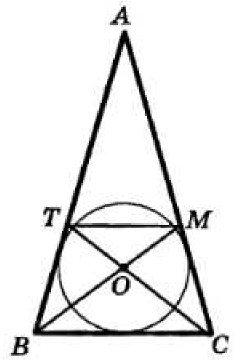
Т.к. равнобедренные треугольники ATM и ABC подобны (почему?), имеем: $\dfrac{TM}{BC} = \dfrac{AT}{AB}$.

Следовательно,

$$TM = \frac{AT \cdot BC}{AB} = \frac{18 \cdot 14}{25} = 10,08.$$

Ответ: 10,08.

Пример 36. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках M и T соответственно. Найдите MT, если $AB = AC = 10$, $BC = 6$.



Решение. Луч BM – биссектриса угла B, значит,

$$AM : CM = AB : CB = 5 : 3.$$

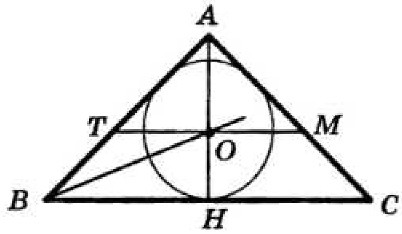
Пусть $AM = 5x$, тогда $CM = 3x$. Следовательно,

$$BH = \frac{AH \cdot OT}{AT}.$$

Треугольники ATM и ABC подобны (почему?), следовательно, $\dfrac{TM}{BC} = \dfrac{AM}{AC}$, т.е. $TM = \dfrac{6 \cdot 25}{10 \cdot 4} = 3,75$.

Ответ: 3,75.

Пример 37. В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Прямая, проходящая через точку O параллельно прямой BC, пересекает стороны AC и AB в точках M и T соответственно. Найдите MT, если $AB = AC = 10$, $BC = 16$.



Решение. Пусть луч AO пересекает сторону BC в точке H, тогда отрезок AH – биссектриса треугольника ABC.

По условию $AB = AC$, следовательно, $BH = HC = 8$ и $\angle ACO = 45°$.

В прямоугольном треугольнике ABH

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 6.$$

Луч BO – биссектриса угла B, а значит, и биссектриса треугольника ABH, поэтому

$$AO : OH = AB : BH = 5 : 4.$$

Пусть $AO = 5x$, тогда $OH = 4x$. Следовательно, $AO = \dfrac{6 \cdot 5x}{5x + 4x} = \dfrac{10}{3}$.

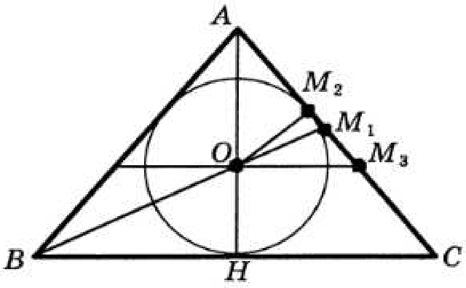
Треугольники ATO и ABH подобны (почему?), следовательно, $\dfrac{TO}{BH} = \dfrac{AO}{AH} = \dfrac{10}{3 \cdot 6} = \dfrac{5}{9}$.

Отсюда получаем: $TO = \dfrac{8 \cdot 5}{9} = \dfrac{40}{9}$, значит, $TM = \dfrac{80}{9} = 8\dfrac{8}{9}$.

Ответ: $8\dfrac{8}{9}$.

Эту задачу, как и многие геометрические задачи, можно решить несколькими способами. Например, для вычисления отрезка AO можно использовать формулы $S = pr$ и $S = ah$, где S – площадь треугольника ABC, p – его полупериметр, r – радиус вписанной окружности, h – высота треугольника, a – сторона, к которой проведена высота h.

Замечание. Возвращаясь к чертежам примеров 35, 36 и 37, отметим, что на каждом из них точка M располагается иначе, чем в других задачах. Особенно важно помнить, что в общем случае точка M_1 пересечения стороны с биссектрисой треугольника и точка M_2 касания стороны с вписанной окружностью не совпадают. Их совпадение возможно только на основании равнобедренного треугольника (точка H).



Еще одно интересное соотношение для радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, легко получить, применяя подобие.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Центр окружности лежит на биссектрисе AH, являющейся также высотой и медианой треугольника. Прямоугольные треугольники AOT и ABH подобны (почему?), следовательно,

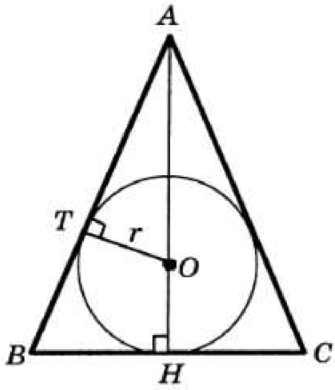
$$TO : BH = AT : AH .$$

Из пропорции получаем

$$r = \frac{BH \cdot AT}{AH}.$$

Аналогично получается формула

$$r = \frac{BH \cdot AO}{AB}.$$



Пример 38. Окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковой стороны AB в точке T, $OT = 10$, $AT : BT = 8 : 5$. Найдите основание BC треугольника.

Решение. Построим высоту AH данного треугольника. Поскольку она является и биссектрисой, $O \in AH$, и точка H является точкой касания окружности и основания BC.

Пусть $AT = 8x$, тогда $BT = 5x$ и $BH = BT = 5x$.

В прямоугольном треугольнике ABH

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(13x)^2 - (5x)^2} = 12x .$$

Из подобия треугольников ABH и AOT получаем:

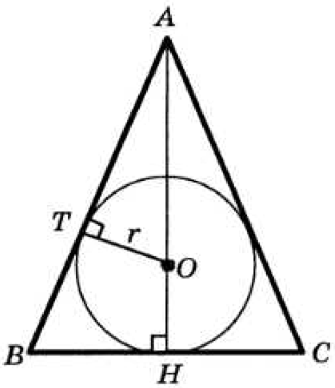
$$BH = \frac{AH \cdot OT}{AT},$$

т.е.

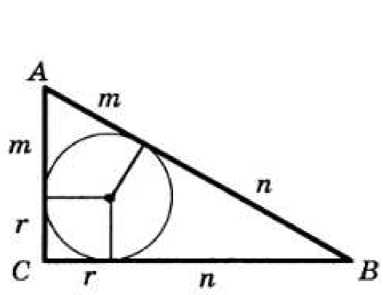
$$BH = \frac{12x \cdot 10}{8x} = 15 .$$

Следовательно, $BC = 2\,BH = 30$.

Ответ: 30.

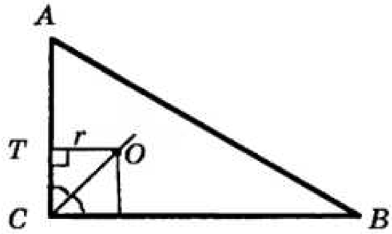


Длина гипотенузы (c) и полупериметр (p) прямоугольного треугольника связаны с радиусом (r) вписанной в него окружности следующей простой формулой: $r + c = p$



Пример 39. Расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра вписанной в треугольник окружности равно $2\sqrt{2}$, а площадь треугольника равна 30. Найдите длину гипотенузы.

Решение. Поскольку центр вписанной в данный треугольник окружности лежит на биссектрисе прямого угла, $\angle ACO = 45°$.



Следовательно,

$$TO = r = CO : \sqrt{2} = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2.$$

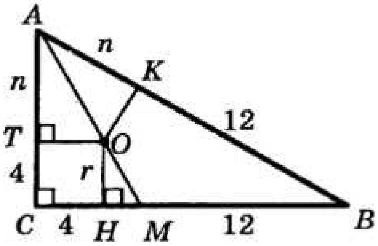
Тогда

$$p = \frac{S}{r} = \frac{30}{2} = 15,$$

$$c = p - r = 15 - 2 = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 40. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), касается катета BC в точке H. Биссектриса угла A пересекает катет BC в точке M. Найдите HM, если $CH = 4$, $BH = 12$.



Решение. Пусть точка O – центр окружности, вписанной в данный треугольник ABC.

Тогда

$$O \in AM, \ OH \perp BC.$$

Пусть окружность касается гипотенузы в точке K,

Тогда

$$AT = AK = n, \ BK = BH = 12, \ CT = CH = 4.$$

По теореме Пифагора получаем:

$$(n+12)^2 - (n+4)^2 = 16^2.$$

Отсюда $n = 8$.

Прямоугольные треугольники OMH и AOT подобны (почему?), следовательно,

$$HM : OT = OH : AT.$$

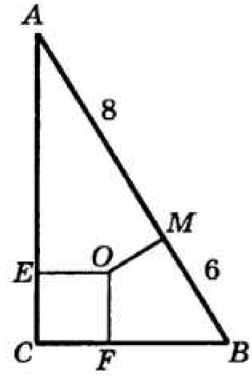
Отсюда получаем:

$$HM = \frac{OT \cdot OH}{AT} = \frac{4 \cdot 4}{8} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 41. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки 6 и 8. Найдите площадь треугольника

Решение. Пусть E, F, M – точки касания вписанной окружности сторон треугольника. Отрезки AE и AM равны, как касательные, проведенные из одной точки к окружности. Аналогично докажем, что $BM = BF$.



Площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2}(AE + r)(BF + r) = \frac{1}{2}(AM + r)(BM + r) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(AM \cdot BM + (AM + BM) r + r^2\right),$$

Откуда

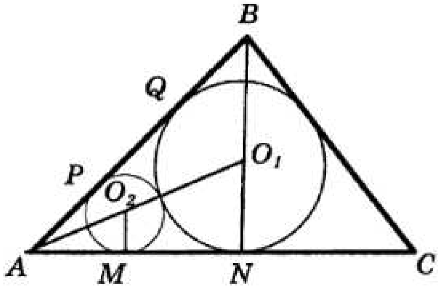
$$2S = AM \cdot BM + r(AM + BM + r) =$$
$$= AM \cdot BM + r \cdot p = AM \cdot BM + S,$$

то есть

$$S = AM \cdot BM = 48.$$

Ответ: 48.

Пример 42. Стороны треугольника равны 20, 20 и 24. В треугольник вписана окружность. Вторая окружность касается первой, одной из меньших сторон и большей стороны треугольника. Найдите радиус второй окружности.



Решение. Пусть P и Q точки касания окружностей со стороной AB, а M и N – со стороной AC, а O_1, O_2 – центры этих окружностей. Зная стороны треугольника, найдем радиус вписанной в треугольник окружности.

Высота треугольника равна

$$BN = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16,$$

$$\text{тогда } r = \frac{S}{p} = \frac{0,5 \cdot 16 \cdot 24}{32} = 6.$$

Пусть $O_2M = x$. Из подобия треугольников AO_2M и AO_1N получим $\dfrac{x}{6} = \dfrac{AO_2}{AO_2 + x + 6}$.

Найдем AO_2.

Центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе, AO_2 – биссектриса угла A, $\cos A = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{3}{5}$, тогда $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $AO_2 = \dfrac{x}{\sin\dfrac{A}{2}} = x\sqrt{5}$.

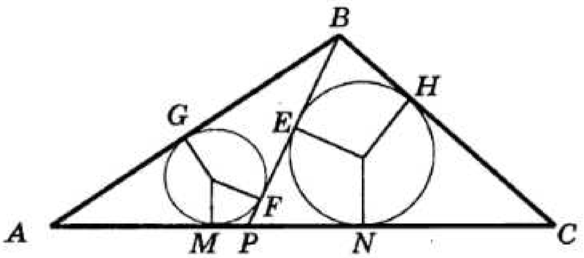
Теперь можно найти искомый радиус: $O_2M = 3\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

Ответ: $3\left(3 - \sqrt{5}\right)$.

Пример 43. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка P. В треугольники ABP и PBC вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с отрезком BP, если точка P делит основание AC на отрезки $AP = 2$ и $PC = 8$.

Решение. Пусть G, M и F – точки касания окружности со сторонами AB, AP и BP треугольника PAB соответственно, а E, H и N – точки касания сторон BP, BC и PC треугольника PBC. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны. Применим эту теорему к касательным, проведенным из вершин треугольника. Учитывая, что $AB = BC$, получаем:

$EF = BF - BE = BG - BH =$
$= (BA - GA) - (BC - HC) = HC - GA =$
$= NC - AM = (CP - PN) - (AP - MP) =$
$= 6 - (PN - MP) = 6 - EF$,
то есть $EF = 6 - EF$,
откуда $EF = 3$.
Ответ: 3.



Пример 44. Площадь круга, вписанного в трапецию, равна 9π, а сумма боковых сторон трапеции равна 20. Найдите площадь трапеции.

Решение. По условию задачи

$$S_{кр} = \pi r^2 = 9\pi.$$

Следовательно, $r = 3$. Тогда диаметр круга, а значит, и высота трапеции, равны 6.

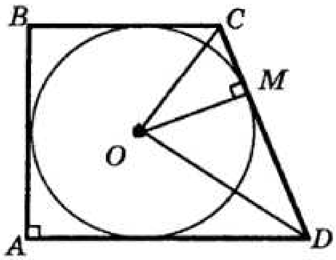
Средняя линия трапеции, описанной около круга, равна полусумме ее боковых сторон, т.е. равна 10.

Итак,

$$S_{тр} = 6 \cdot 10 = 60.$$

Ответ: 60.

Пример 45. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра окружности до концов боковой стороны трапеции равны 6 и 8. Найдите площадь трапеции.



Решение. В треугольнике COD $\angle COD = 90^\circ$ (свойство 6), поэтому

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Пусть точка M – точка касания окружности и стороны CD. Тогда $OM = r$ и $OM \perp CD$. В прямоугольном треугольнике COD

$$OM \cdot CD = OC \cdot OD.$$

Значит,

$$OM = \frac{OC \cdot OD}{CD} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8.$$

Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне, т.е. диаметру вписанной окружности.

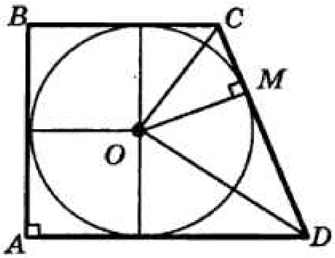
Следовательно,

$$AB = h_{тр} = 2r = 9,6.$$

Тогда

$$S_{тр} = 9,6 \cdot \frac{9,6 + 10}{2} = 94,08.$$

Ответ: 94,08.



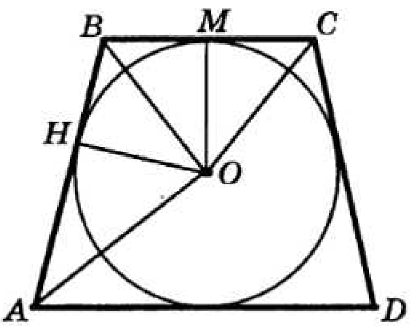
Замечание. У рассмотренной задачи есть еще одно наглядное решение.

Данную трапецию можно разбить на два квадрата со стороной, равной радиусу вписанной окружности, и две пары равных треугольников.

Следовательно,

$$S_{тр} = 2 \cdot 4,8^2 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} =$$
$$= 2 \cdot 23,04 + 48 = 94,08.$$

Пример 46. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция, меньшее основание которой равно 8. Найдите площадь трапеции.



Решение. Соединим центр вписанной окружности с вершинами A, B и C трапеции и проведем радиусы OM и OH в точки касания окружности с меньшим основанием и боковой стороной. Треугольники OBH, OBM и OCM равны (почему?), следовательно, $BH = BM = CM = 4$.

В прямоугольном треугольнике OBH

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = 5.$$

Треугольники AOB и OHB подобны (почему?), следовательно,

$$AB : OB = OB : BH,$$

поэтому

$$AB = 5^2 : 4 = 6,25.$$

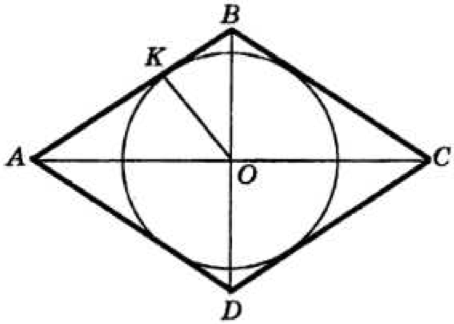
По условию $AB = CD$, следовательно, средняя линия данной трапеции равна стороне AB, т.е. равна 6,25. Поэтому

$$S_{тр} = 6 \cdot 6,25 = 37,5.$$

Ответ: 37,5.

Пример 47. В ромб вписана окружность. Точка касания окружности и стороны ромба делит сторону в отношении 1 : 5. Площадь ромба равна $60\sqrt{5}$. Найдите радиус окружности.

Решение. Проведем радиус в точку касания K. Пусть $BK = x$, тогда по условию $AK = 5x$. Следовательно, в прямоугольном треугольнике AOB



$$OK^2 = AK \cdot BK = 5x^2,$$

т.е. $OK = x\sqrt{5}$.

$$S_{ромба} = 4 \cdot \frac{AB \cdot OK}{2} = 2(x + 5x)x\sqrt{5} = 60\sqrt{5}.$$

Отсюда получаем: $x = \sqrt{5}$.

Следовательно, $r = OK = 5$.

Ответ: 5.

Задания для самостоятельного решения

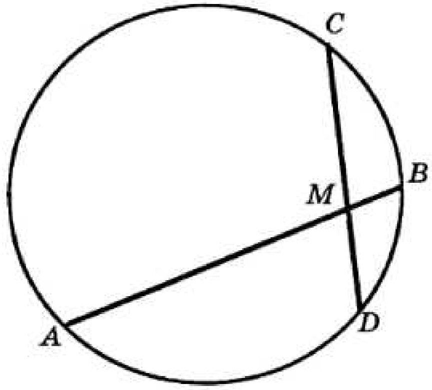
60. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите расстояние от центра вписанной окружности до вершины меньшего угла.
61. В равнобедренную трапецию с боковой стороной 13 и высотой 12 вписана окружность. Найдите диагональ трапеции.
62. Через точку окружности радиуса 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной 16 и 12. Найдите расстояние между серединами хорд.
63. Основание равнобедренного треугольника вдвое меньше его боковой стороны, а высота, проведенная к основанию, равна 10. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
64. В ромб вписана окружность Точка касания делит сторону в отношении 1 : 3, площадь ромба равна $24\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности.
65. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания окружности с боковой стороной делит эту сторону на отрезки длиной 1 и 4. Найдите периметр трапеции.
66. В четырехугольник вписана окружность радиуса 1,6, а две его противолежащие стороны равны 3 и 5. Найдите площадь четырехугольника.
67. Отношение оснований равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равно 3. Найдите градусную меру меньшего угла трапеции.
68. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, $\angle B = 60°$, $AO = 4$, $CO = 6$. Найдите радиус окружности.
69. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и CA в точках T, M и K соответственно, при этом $AK = KC$, $\angle KMT = 75°$. Найдите периметр треугольника ABC, если произведение длин его сторон равно $9 + 6\sqrt{3}$.
70. Окружность с центром O касается диагонали AC и сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$. Расстояния от точки O до прямых AD и AC равны 8 и 6 соответственно, $OA = 10$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.
71. Две окружности радиусов 2 и 3 касаются внешним образом в точке A. Их общая касательная, проходящая через точку A, пересекает две другие общие касательные в точках B и C. Найдите BC.
72. На стороне BC треугольника ABC взята точка E так, что $\angle CAE = 2\angle BAE$. Окружности радиусов 8 и 4, вписанные в треугольники ACE и ABE соответственно, касаются прямой BC в точках, расстояние между которыми равно $\sqrt{129}$. Найдите AE.
73. Хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M так, что $OM = 8$, $AM = 12$, $MB = 3$, DM на 16 больше, чем MC. Найдите радиус окружности.
74. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и катета делит этот катет на отрезки 3 и 4, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.
75. Около окружности описана равнобедренная трапеция с углом 30°. Средняя линия трапеции равна 4. Найдите радиус окружности.
76. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин острых углов равны 3 и $\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности.

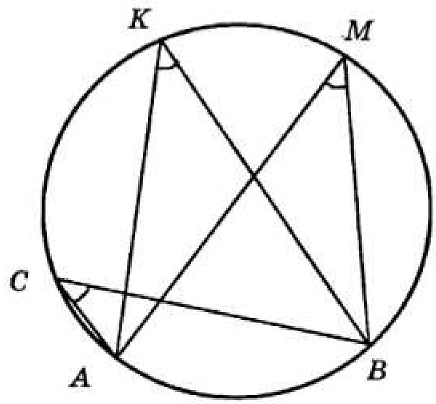
§ 4. Окружности, описанные около треугольника и четырехугольника

При решении задач об окружностях, описанных около треугольника или четырехугольника, используются следующие факты:

1. Центр описанной окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (четырехугольника). Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри него, прямоугольного – на гипотенузе (ее середина), тупоугольного – вне треугольника.

2. Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.





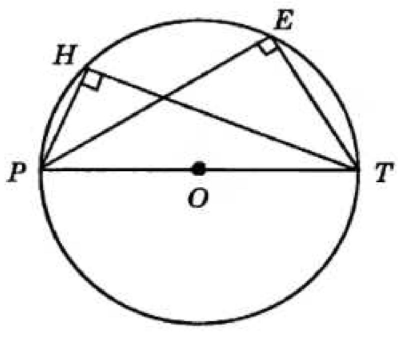
3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности равны:

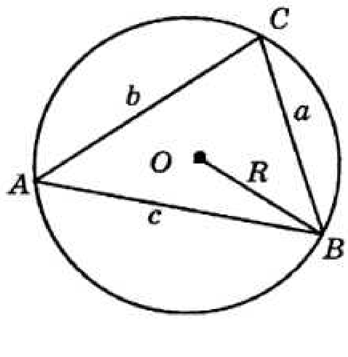
$$\angle ACB = \angle AKB = \angle AMB.$$

Их градусная мера равна половине градусной меры дуги, на которую они опираются.

4. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым:

$$\angle PHT = \angle PET = 90^\circ.$$





5. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Из свойства 5 легко получается следующее свойство:

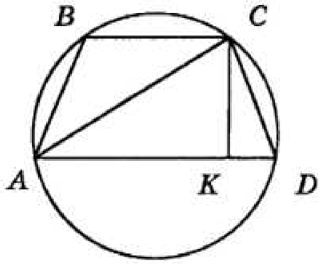
6. Три стороны и площадь треугольника ABC связаны с радиусом описанной около него окружности формулой

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Действительно, из формулы $\frac{a}{\sin A} = 2R$ получаем: $\frac{a}{2R} = \sin A$. Умножив обе части последнего равенства на $\frac{1}{2}bc$, получаем: $\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}bc\sin A = S_{ABC}$.

7. Параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником, вписанная трапеция является равнобедренной.

Пример 48. В окружность радиуса 15 вписана трапеция. Диагональ трапеции равна 20, а высота равна 6. Найдите длину боковой стороны трапеции.



Решение. Так как трапеция вписана в окружность, она равнобедренная.

Из треугольника ACK $\sin\angle CAK = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$. Применим теорему синусов к треугольнику ACD:

$$CD = 2R\cdot\sin\angle CAD = 2\cdot 15\cdot\frac{3}{10} = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 49. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке M, $AM = 4$, $CM = 9$, $BM = DM$, $\angle AMB = 30^\circ$. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. Так как $BM\cdot MD = AM\cdot MC$, $BM = DM = \sqrt{AM\cdot CM} = \sqrt{4\cdot 9} = 6$.

Тогда $BD = 12$, $AC = 13$. По формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ получаем:

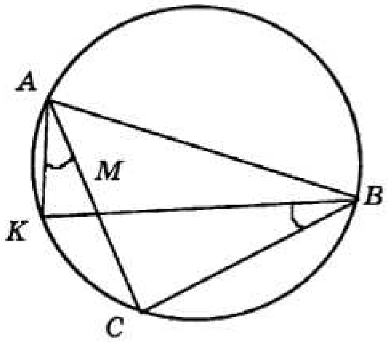
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}13\cdot 12\sin 30^\circ = 39.$$

Ответ: 39.

Пример 50. Треугольник ABC вписан в окружность. Прямая, содержащая медиану BM, пересекает окружность в точке K, $KM = 4$, $BM = 9$, $BC = 7{,}2$. Найдите AK.

Решение. Так как BM – медиана треугольника ABC, используя свойство хорд окружности, получаем:

$$AM = \sqrt{KM\cdot MB} = \sqrt{4\cdot 9} = 6.$$



Вписанные углы KAC и KBC опираются на одну и ту же дугу, следовательно, равны. Аналогично $\angle AKB = \angle BCA$. Следовательно, треугольники AKM и BCM подобны (почему?).

Из подобия треугольников следует, что

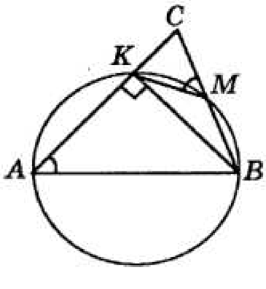
$$AK : BC = KM : MC.$$

Отсюда получаем: $AK = \frac{7{,}2\cdot 4}{6} = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

Пример 51. В треугольнике ABC $\angle C = 60^\circ$, $AB = 8$. На основании AB как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках K и M соответственно. Найдите KM.

Решение. Вписанные углы KAB и BMK опираются на дуги окружности, сумма мер которых равна 360°, следовательно, $\angle KAB + \angle BMK = 180^\circ$.



Поскольку и $\angle CMK + \angle BMK = 180^\circ$,

получаем: $\angle CMK = \angle CAB$.

Следовательно, $\triangle MKC \sim \triangle ABC$ (по двум углам).

Из подобия треугольников получаем: $\frac{KM}{AB} = \frac{CK}{BC}$,

следовательно, $KM = \frac{CK}{BC}\cdot AB$.

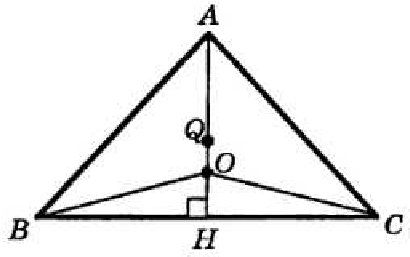
Вписанный угол AKB опирается на диаметр, следовательно, $\angle AKB = 90^\circ$. Тогда и $\angle BKC = 90^\circ$.

В прямоугольном треугольнике BCK $\angle C = 60^\circ$, поэтому $\frac{CK}{BC} = \cos C = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $KM = \frac{1}{2}AB = 4$.

Ответ: 4.

Пример 52. Основание равнобедренного остроугольного треугольника равно 48, а радиус описанной около него окружности равен 25. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника.



Решение. Пусть треугольник ABC – данный остроугольный равнобедренный с основанием DC. Центр описанной окружности (точка O) лежит на серединном перпендикуляре к основанию BC, содержащем высоту треугольника. По условию треугольник остроугольный, значит, точка O лежит внутри треугольника, т.е. на высоте AH. При этом $OA = OB = OC = 25$ – радиусы описанной окружности. В прямоугольном треугольнике OBH

$$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7.$$

Следовательно, $AH = 25 + 7 = 32$.

Радиус вписанной окружности найдем, используя полупериметр и площадь треугольника ABC:

$$AB = \sqrt{24^2 + 32^2} = 8\sqrt{3^2 + 4^2} = 40;\ p = 24 + 40 = 64;$$

$$S = 0{,}5BC \cdot AH = 24 \cdot 32;\ r = \frac{S}{p} = \frac{24 \cdot 32}{64} = 12.$$

Центр вписанной окружности (точка Q) также лежит на высоте AH, значит, $QH = 12$, поэтому точка Q лежит на отрезке AO. Следовательно,

$$OQ = QH - OH = 12 - 7 = 5.$$

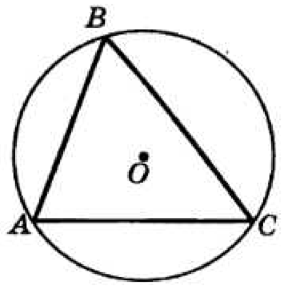
Ответ: 5.

Пример 53. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 6. Найдите AC, если AB=2, BC= 3.

Решение. Пусть точка O – центр окружности. Тогда $OA + OC = 12 > AB + BC$. Значит, точка O не лежит на стороне AC, иначе будет нарушено неравенство треугольника.

Итак, следует рассмотреть два случая.

1. Точка O лежит внутри треугольника ABC.



По теореме синусов $\frac{c}{\sin C} = 2R$, откуда $\sin C = \frac{4}{2 \cdot 12} = \frac{1}{6}$.

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

(угол C острый, поэтому косинус положительный).

По теорем косинусов получаем:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$,

то есть $4^2 = 6^2 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{35}}{6}$.

Решая квадратное уравнение $x^2 - 2\sqrt{35}\,x + 20 = 0$, получаем

$x = \sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

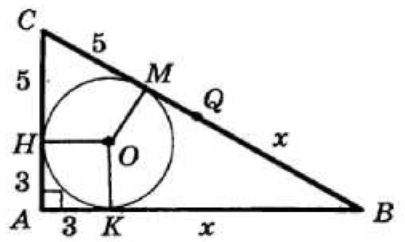
Поскольку оба корня положительны, $AC = \sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

2. Точка O лежит вне треугольника ABC.

В этом случае угол B тупой, но угол C по-прежнему острый. Следовательно, получим те же значения длины AC.

Ответ: $\sqrt{35} \pm \sqrt{15}$.

Пример 54. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и катета делит этот катет на отрезки длины 3 и 5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.



Решение. Пусть окружность касается сторон треугольника в точках H, K, M. Радиус окружности, вписанной в данный треугольник, равен 3 (почему?).

Тогда $\angle B = 60°$, $BC = 3AB$, $AC = 8$, $AB = x + 3$, $BC = x + 5$.

По теореме Пифагора получаем:

$$8^2 + (x+3)^2 = (x+5)^2.$$

Значит, $x = 12$. Итак, $BC = 5 + 12 = 17$.

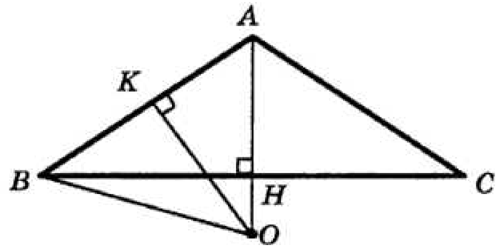
Центр Q описанной около прямоугольного треугольника окружности является серединой гипотенузы, следовательно, $R = 0,5BC = 8,5$.

Ответ: 8,5.

Пример 55. Около тупоугольного равнобедренного треугольника описана окружность радиусом 25. Расстояние от ее центра до основания треугольника равно 7. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.

Решение. Искомое расстояние – длина перпендикуляра OK, проведенного из точки O к стороне AB. Пусть AH – высота треугольника ABC. Тогда прямоугольные треугольники AOK и ABH подобны (почему?), следовательно,

$$\frac{KO}{BH} = \frac{AO}{AB}.$$



Найдем отрезки BH и AB.

Центр O окружности, описанной около тупоугольного равнобедренного треугольника ABC, лежит вне его на прямой AH, содержащей высоту треугольника. Поэтому

$$AH = AO - OH = 25 - 7 = 18.$$

В прямоугольном треугольнике OBH

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24.$$

Тогда в треугольнике ABH

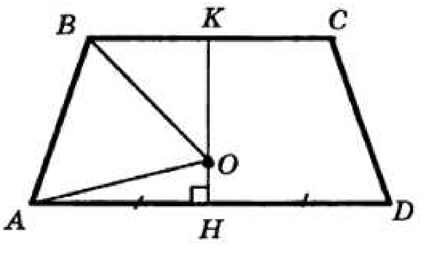
$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = 6\sqrt{3^2 + 4^2} = 30.$$

Итак, $KO = \dfrac{AO \cdot BH}{AB} = \dfrac{25 \cdot 24}{30} = 20$.

Ответ: 20.

Замечание. Поскольку $AK = BK$ (почему?), отрезок OK можно было найти по теореме Пифагора как катет треугольника AOK.

Пример 56. Около трапеции описана окружность, центр которой лежит внутри трапеции. Высота трапеции равна 27, а основания равны 48 и 30. Найдите радиус окружности.



Решение. Трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной. Центр окружности – точка O – лежит внутри трапеции на серединном перпендикуляре к ее основаниям.

Пусть $OH = x$, тогда $OK = 27 - x$. Из прямоугольных треугольников AOH и BOK получаем:

$$AH^2 + OH^2 = BK^2 + OK^2,$$

т.е.

$$24^2 + x^2 = 15^2 + (27 - x)^2.$$

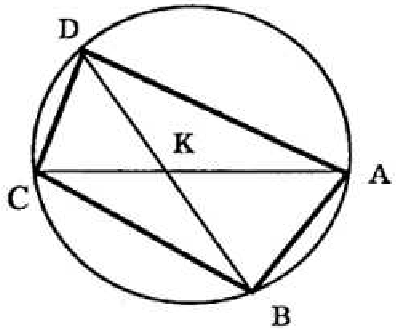
Отсюда $x = 7$.

Следовательно, $R = AO = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$.

Ответ: 25.

Пример 57. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность. Вершины четырехугольника делят длину окружности в отношении $AB:BC:CD:DA = 1:5:2:10$. Найдите площадь четырехугольника, если $AC = 5$, $BD = 10$.

Решение. Докажем, что отношение длин дуг равно отношению их градусных мер. Пусть l_1 и l_2 – длины дуг, α_1 и α_2 – их градусные меры.



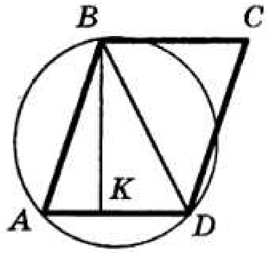
Тогда $l_1 = \frac{\pi R \cdot \alpha_1}{180°}$, $l_2 = \frac{\pi R \cdot \alpha_2}{180°}$ и $l_1 : l_2 = \alpha_1 : \alpha_2$, значит, окружность разбивается в отношении 1 : 5 : 2 : 10. Теперь можем найти градусные меры дуг AB и CD. Они равны соответственно $\frac{360°}{18} \cdot 1 = 20°$ и $\frac{360°}{18} \cdot 2 = 40°$. Угол между диагоналями CKD является внешним углом треугольника ADK, значит,

$$\angle CKD = \angle BDA + \angle CAD = \frac{1}{2} \cdot 20° + \frac{1}{2} \cdot 40° = 30°.$$

Площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle CKD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

Пример 58. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 15°$, $BD = 8$. Окружность, описанная около треугольника ABD, касается прямой BC. Найдите площадь параллелограмма.



Решение. Пусть BK – высота треугольника ABD. Так как $KB \perp BC$, а BC – касательная, центр окружности лежит на прямой BK, то есть диаметр окружности перпендикулярен хорде AD и делит ее пополам. Треугольник ABD равнобедренный и $\angle BAD = \angle BDA = 15°$. По теореме синусов $\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AD}{\sin\angle ABD}$, то есть $\frac{4}{\sin 15°} = \frac{AD}{\sin 150°}$, откуда $AD = \frac{2}{\sin 15°}$.

Тогда $BK = BD \cdot \sin\angle BDA = 8 \cdot \sin 15°$.

Площадь параллелограмма равна $AD \cdot BK = \frac{2}{\sin 15°} \cdot 8 \cdot \sin 15° = 16$.

Ответ: 16.

Задания для самостоятельного решения

77. Угол B треугольника ABC равен 30°. Около треугольника описана окружность радиусом 12. Хорда BK проходит через середину M стороны AC, $MK = 2$. Найдите BM.
78. Радиусы окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, и окружности, описанной около него, равны 2 и 5. Найдите периметр треугольника.
79. Диаметр AM окружности, описанной около треугольника ABC, делит угол A пополам. Известно, что $\sin C = 0{,}25$. Найдите $BM : AC$.
80. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 15, а основания равны 7 и 25. Найдите диаметр описанной около трапеции окружности.
81. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC = 4$ и $AK = 6$.
82. Равнобедренный треугольник вписан в окружность. Радиус окружности равен 9, а основание треугольника равно $8\sqrt{5}$. Найдите расстояние от центра окружности до боковой стороны треугольника.
83. Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ касаются окружности, описанной около треугольника ACD. Найдите площадь этого треугольника, если $AD = 3$, $\angle B = 120°$.

84. Хорда AM, окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, пересекает его основание BC в точке E, $AE = ME = 3$. Найдите AB.

85. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 90°$, $AB = 5$, $BC = 6$. Радиус вписанной в него окружности равен 2. Найдите площадь четырехугольника.

86. Лучи AC и BC пересекают полуокружность с диаметром AB в точках M и P соответственно, $\angle ABC = 60°$, $CM = CP = 1$. Найдите AB.

87. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ проходит через вершину C и середину стороны BC треугольника ABC и касается стороны AB в её середине. Найдите угол C, если $AC = 2$.

88. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AMD и CMD, равно 16, радиус окружности, описанной около треугольника AMB, равен 5, $BD=12$. Найдите площадь параллелограмма.

89. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. Высоты AH и BK треугольника пересекаются в точке M, $\angle AMB = 105°$. Найдите угол ABO.

90. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на ее большем основании. Боковая сторона трапеции равна 15, радиус окружности равен 12,5. Найдите площадь трапеции.

91. Хорда AM окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, пересекает его основание BC в точке E, $AE = ME = 3$. Найдите AB.

92. Отрезки AM и BE – высоты треугольника ABC, точка O – центр вписанной в него окружности, $AB = 12$, $ME = 6$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AOB.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

В большинстве стереометрических задач требуется найти значение одной из геометрических величин:

1) расстояния (длины отрезка);
2) градусной меры угла (тригонометрической функции угла);
3) площади планиметрической фигуры или поверхности тела;
4) объема тела.

§ 1. Углы и расстояния

В стереометрических задачах на вычисление расстояния или длины отрезка предлагается найти:

- расстояние между двумя точками;
- расстояние от точки до прямой;
- расстояние между параллельными прямыми;
- расстояние между скрещивающимися прямыми;
- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью;
- расстояние между параллельными плоскостями;
- высоту тела, радиус шара или основания цилиндра и конуса;
- длину стороны (периметр) многоугольника – сечения тела;
- длину ребра многогранника;
- длину диагонали призмы и т.д.

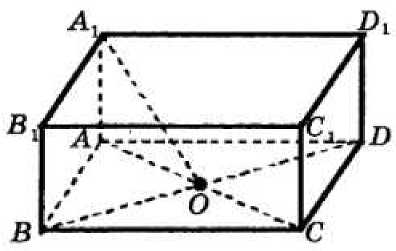
Как правило, решение каждой из перечисленных проблем сводится к вычислению стороны треугольника или его высоты, иногда – длины стороны или высоты параллелограмма, трапеции. Правила поиска расстояния между двумя точками, от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми изучались в планиметрии.

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к данной прямой.

Расстояние между параллельными прямыми равно расстоянию от произвольной точки одной из этих прямых до второй прямой.

Пример 1. Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4 и 4. Найдите расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.

Решение. Данная четырехугольная призма правильная, следовательно, ее основание – правильный четырехугольник, т.е. квадрат. Поэтому все стороны основания равны 4, а боковое ребро призмы равно 1.



Центр основания – точка пересечения диагоналей квадрата, следовательно, искомое расстояние равно длине стороны A_1O треугольника AA_1O. Поскольку призма правильная, боковое ребро перпендикулярно плоскости основания, следовательно, $AA_1 \perp AO$.

В прямоугольном треугольнике AA_1O

$$AA_1 = 1,\ AO = \frac{1}{2}AC,\ AO = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

($AC = 2\sqrt{2}$, так как AC – гипотенуза треугольника ABC с катетами $AB = BC = 4$). Значит,

$$A_1O = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+8} = 3.$$

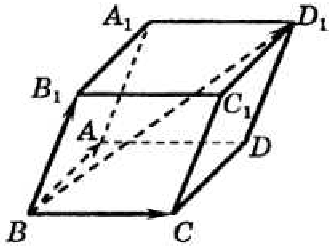
Ответ: 3.

Рассмотрим задачу, которую удобно решать векторным методом.
Полезно помнить следующие формулы.

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между векторами.

Пример 2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани – ромбы со стороной 3. Все углы граней при вершине B равны $60°$. Найдите длину диагонали BD_1.

Решение. По правилу параллелепипеда



$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$.

$\overrightarrow{BD_1}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right)^2 =$

$= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BB_1}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB_1} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BB_1} =$

$= \left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cos\alpha + 2\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BB_1}\right| \cos\alpha +$

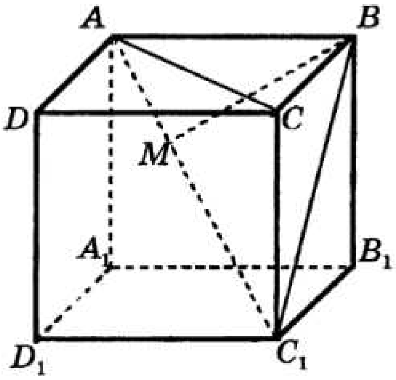
$+2\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BB_1}\right| \cos\alpha$, где α - угол между векторами при вершине B.

$\overrightarrow{BD_1}^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2(3 \cdot 3\cos 60° + 3 \cdot 3\cos 60° + 3 \cdot 3\cos 60°) = 54.$

$\overrightarrow{BD_1}^2 = \left|\overrightarrow{BD_1}\right|^2 = 54,\ BD_1 = \left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Пример 3. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB = 10$, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.



Решение. В плоскости ABC_1 проведем из точки B перпендикуляр BM к прямой AC_1. Искомое расстояние равно высоте BM треугольника ABC_1.

Данная призма прямая, значит, $CC_1 \perp ABC$, поэтому $CC_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp AC$.

Следовательно,

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{10^2 + \left(3\sqrt{21}\right)^2} = 17.$$

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{7}\right)^2 + \left(3\sqrt{21}\right)^2} = \sqrt{441} = 21$$

По формуле Герона

$$S_{ABC_1} = \sqrt{p \cdot (p - AB)(p - BC_1) \cdot (p - AC_1)},$$

$$S_{ABC_1} = \sqrt{24 \cdot (24 - 10)(24 - 17)(24 - 21)} = 84.$$

В то же время,

$$S_{ADC_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot BM.$$

Итак,

$$\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot BM = 84,$$

следовательно,

$$BM = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$

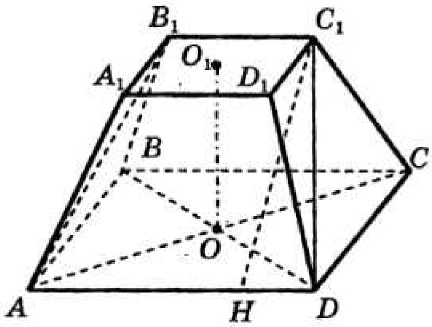
Ответ: 8.

Пример 4. Основание $ABCD$ четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – квадрат со стороной, равной $\sqrt{11}$. Все остальные ребра равны $0,5\sqrt{11}$. Найдите расстояние между прямыми AD и B_1C_1

Решение. Пусть OO_1 – высота данной пирамиды, где точка O – точка пересечения диагоналей, т.е

$$AO = BO = CO = DO.$$

Прямые B_1C_1 и AD параллельны прямой BC, следовательно, параллельны между собой. Если из точки C_1 провести перпендикуляр к прямой AD, то его длина будет искомым расстоянием.



Т.к. $B_1C_1 \parallel AD$ и $B_1C_1 \neq AD$, $\left(B_1C_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD\right)$, то четырехугольник AB_1C_1D – равнобедренная трапеция ($\triangle AA_1B_1 = \triangle DD_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $AB_1 = DC_1$), а искомое расстояние – её высота.

Пусть C_1H – высота трапеции AB_1C_1D. Тогда

$$DH = \frac{AD - B_1C_1}{2} = 0,25\sqrt{11}.$$

Соединим точку C_1 с серединой M стороны CD трапеции CDD_1C_1. В четырехугольнике MDD_1C_1 стороны MD и D_1C_1 равны $0,5\sqrt{11}$ и параллельны, следовательно, четырехугольник MDD_1C_1 – параллелограмм. Тогда $DD_1 = MC_1 = 0,5\sqrt{11}$. Значит, четырехугольник MDD_1C_1 – ромб. Аналогично доказывается, что $D_1M = 0,5\sqrt{11}$. Следовательно, треугольник DD_1M равносторонний, а его высота равна половине отрезка DC_1. Поэтому

$$DC_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,5\sqrt{11} = \frac{\sqrt{33}}{2}.$$

Итак, по теореме Пифагора в треугольнике CH_1D

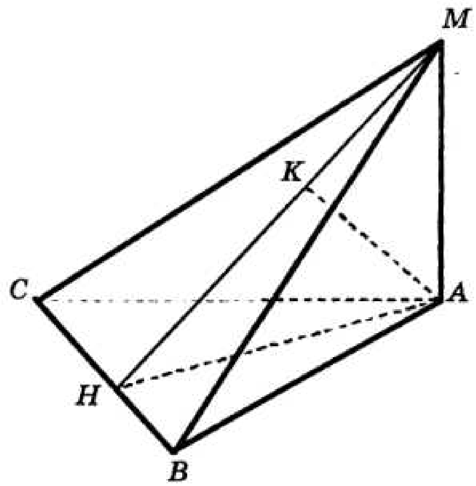
$$C_1H = \sqrt{DC_1^{\,2} - DH^2} = \sqrt{\frac{33}{4} - \frac{11}{16}} = \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{11}{4} = 2,75.$$

Ответ: 2,75.

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

Пример 5. Боковое ребро MA пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости основания и равно 13, $\angle BAC = 90°$, $AB = 39$ и $AC = 52$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости BCM.

Решение. Если через точку A провести плоскость, перпендикулярную плоскости BCM, то перпендикуляр, проведенный через точку A к линии пересечения этих плоскостей, будет перпендикуляром и к плоскости BCM.



Пусть $AH \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $MH \perp BC$. Следовательно, $BC \perp AMH$ и $MBC \perp AMH$. Проведем в плоскости AMH перпендикуляр AK к прямой MH. Тогда $AK \perp BCM$. Длина отрезка AK равна расстоянию от точки A до плоскости BCM.

В треугольнике ABC

$$BC = \sqrt{39^2 + 52^2} = 65.$$

Следовательно, $2S_{ABC} = 39 \cdot 52 = 65 \cdot AH$,

тогда

$$AH = \frac{39 \cdot 52}{65} = \frac{156}{5}.$$

В треугольнике AMH

$$MH = \sqrt{13^2 + \left(\frac{156}{5}\right)^2} = \frac{169}{5}.$$

Следовательно,

$$2S_{AMH} = 13 \cdot \frac{156}{5} = \frac{169}{5} \cdot AK,$$

тогда

$$AK = \frac{13 \cdot 156}{169} = 12.$$

Ответ: 12.

Замечание.

Теорема (о трех перпендикулярах). Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

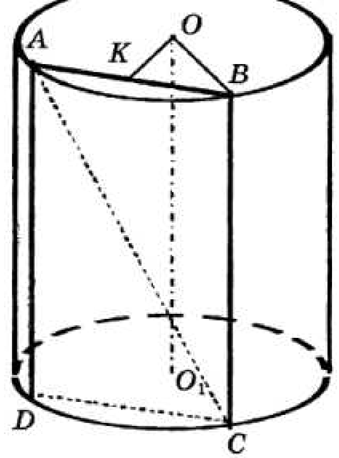
Обратная теорема. Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Иногда эти две теоремы объединяют в одну.

Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к плоскости.

Пример 6. Через точку A, лежащую на окружности основания цилиндра, проведены образующая AD и наклонная, пересекающая окружность второго основания в точке C. Радиус цилиндра равен 5, высота равна 8, $AC = 10$. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости, проходящей через наклонную AC и образующую AD.

Решение. Образующая цилиндра параллельна его оси, следовательно, ось и секущая плоскость параллельны.



Пусть отрезок BC – образующая цилиндра, $OK \perp AB$ (точка O – центр основания, содержащего хорду AB). Тогда $AK = BK$. Поскольку $BC \perp AOB$, то и $OK \perp ABC$. Значит, длина отрезка OK равна искомому расстоянию.

В треугольнике ABC

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

В треугольнике BOK

$$OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Ответ: 4.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости к другой плоскости.

Напомним ряд теорем, знание которых необходимо при решении далее предложенных задач.

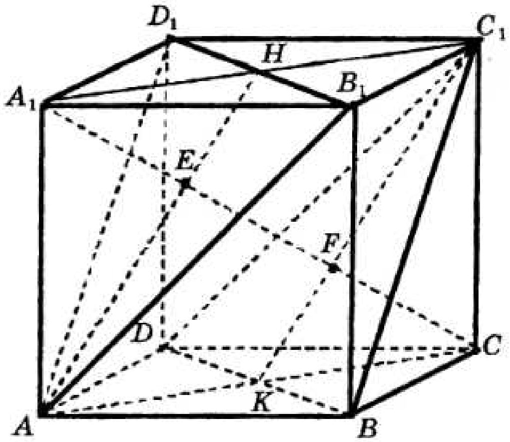
Теорема (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Теорема (признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей). Если одна их двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

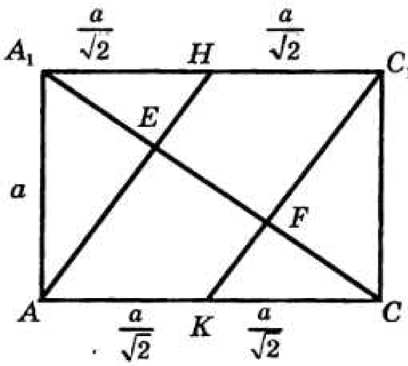
Пример 7. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1.



Решение. Плоскости AB_1D_1 и BDC_1 параллельны (так как $AB_1 \parallel DC_1$ и $AD_1 \parallel BC_1$). Прямая A_1C – общий перпендикуляр к этим плоскостям, поскольку перпендикулярна к прямым B_1D_1 и BD (*почему?*), а также к прямым AH и C_1K (рассмотрите сечение AA_1C_1C).

Используя рисунок сечения, легко доказать, что

$$A_1E = EF = FC = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



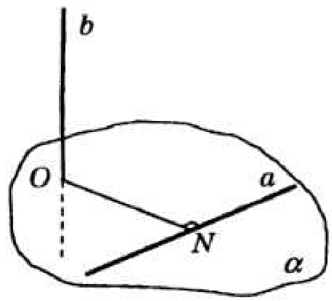
Так как $a = \sqrt{3}$, получаем искомое расстояние: $EF=1$.

Ответ: 1.

Расстояние между скрещивающимися прямыми в одних учебниках определяется как длина их общего перпендикуляра, в других – как расстояние между одной из них и плоскостью, проведенной через вторую прямую параллельно первой.

При решении задач на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми полезно различать два случая:

1) скрещивающиеся прямые перпендикулярны;
2) скрещивающиеся прямые не перпендикулярны.

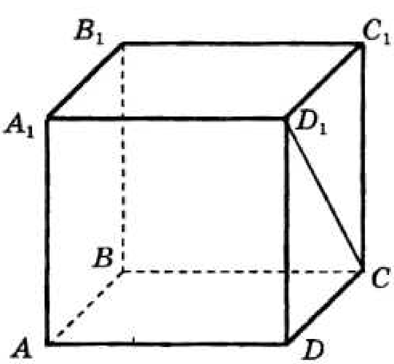


Если скрещивающиеся прямые перпендикулярны ($a \perp b$), то проще всего через одну из них (например, прямую a) провести плоскость (α), перпендикулярную другой прямой b. Легко доказать, что такая плоскость единственна. Если из точки пересечения прямой b и плоскости α (точки O) провести в плоскости α перпендикуляр ON к прямой a, то он и будет общим перпендикуляром скрещивающихся прямых (подумайте, почему?), а его длина равна расстоянию между этими прямыми. Возможно, такая плоскость уже имеется в описанной условиями задачи конфигурации. Тогда ее нужно найти.

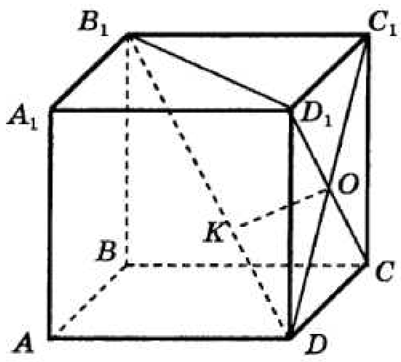
Пример 8. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Найдите расстояние между прямыми AB и CD_1.

Решение. Так как $AB \parallel CD$, то прямая AB параллельна плоскости CDD_1 (признак параллельности прямой и плоскости). $AD \perp DD_1$ и $AD \perp DC$, следовательно, прямая AD перпендикулярна плоскости CDD_1, поэтому расстояние между прямыми AB и CD_1 равно 6.

Ответ: 6.



Пример 9. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{6}$. Найдите расстояние между прямыми B_1D и CD_1.



Решение. Так как $CD_1 \perp DC_1$, а отрезок DC_1 – проекция B_1D на плоскость CC_1D_1, то $CD_1 \perp B_1D$ (согласно теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, $CD_1 \perp DB_1C_1$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости). И, значит, $CD_1 \perp DB_1$ (определение перпендикулярности прямой и плоскости).

Пусть прямые CD_1 и DC_1 пересекаются в точке O. Проведем из точки O перпендикуляр OK к прямой B_1D, тогда OK – искомое расстояние между скрещивающимися прямыми B_1D и CD_1. Найдем его.

Прямоугольные треугольники OKD и B_1C_1D подобны, следовательно,

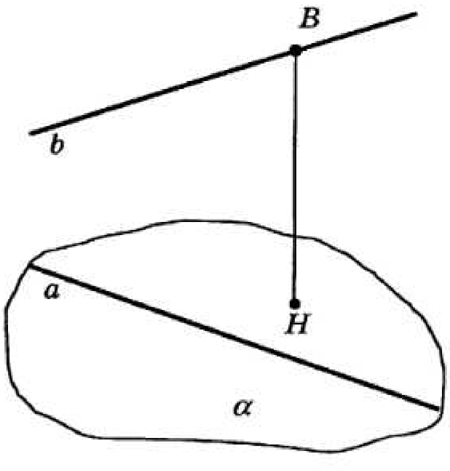
$$OK : B_1C_1 = OD : B_1D.$$

Отсюда

$$OK = \frac{OD \cdot B_1C_1}{B_1D}, \quad OK = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}\sqrt{6}}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

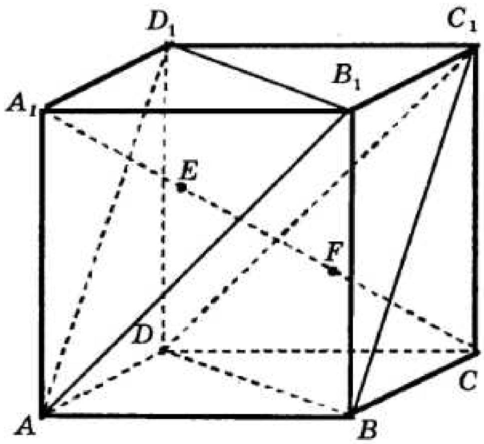
Замечание. Обратите внимание на то, как используются определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости для доказательства перпендикулярности двух прямых. С помощью признака доказывается, что одна из рассматриваемых прямых перпендикулярна плоскости, содержащей другую прямую, а затем с помощью определения доказывается, что первая прямая перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости, в том числе и второй из данных прямых.



Если скрещивающиеся прямые (a и b) не перпендикулярны, то можно попробовать через одну из них (a) провести плоскость (α), параллельную второй прямой (легко доказать, что такая плоскость единственная). Затем найти расстояние между прямой (b) и плоскостью (α).

Пример 10. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно $\sqrt{3}$.

Решение. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Найдем, например, расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1. Эти прямые лежат в параллельных плоскостях AB_1D_1 и BDC_1. Следовательно, искомое расстояние равно расстоянию между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 (пример 7), т.е. равно $\frac{1}{3}A_1C$.

Так как $A_1C = AB\sqrt{3}$, то искомое расстояние равно 1.

Ответ: 1.

В стереометрических задачах на вычисление величины угла предлагается найти:

1) угол между пересекающимися прямыми;
2) угол между скрещивающимися прямыми;
3) угол между прямой и плоскостью;
4) двугранный угол;
5) угол между двумя плоскостями.

Угол между пересекающимися прямыми – планиметрическое понятие. Как известно, две пересекающиеся прямые образуют четыре угла (фигуры, состоящие из двух лучей с общим началом).

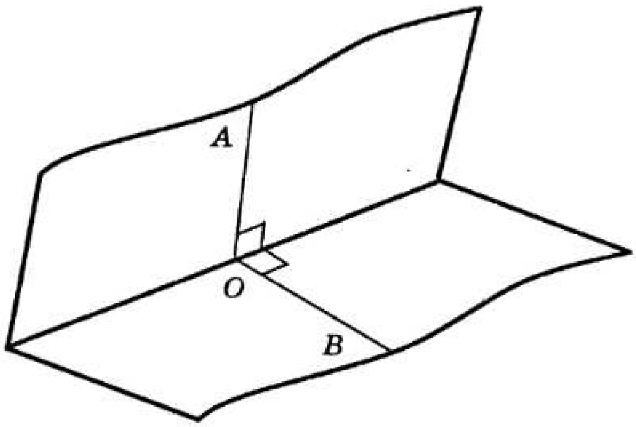
Углом между пересекающимися прямыми называется один из четырех образованных ними углов, который **не больше** остальных углов.

Угол между скрещивающимися прямыми находят так: через произвольную точку пространства проводят две прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым. Угол между скрещивающимися прямыми равен углу между построенными прямыми.

В задачах нередко бывает удобно брать точку на одной из скрещивающихся прямых или найти уже имеющиеся в конфигурации пересекающиеся прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым.

Угол между прямой и плоскостью равен углу между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Величина двугранного угла равна величине его линейного угла. Для построения линейного угла нужно из какой-нибудь точки ребра двугранного угла в его гранях провести два луча, перпендикулярных ребру.



Угол между двумя пересекающимися плоскостями равен величине одного из четырех образованных ими двугранных углов. Причем величина этого двугранного угла **не больше** величины остальных двугранных углов.

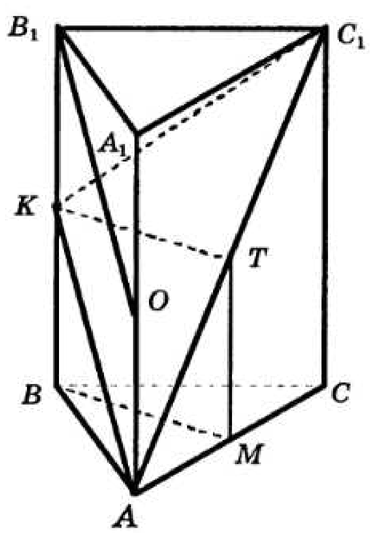
Обратите внимание на то, что величина угла, образованного двумя лучами с общим началом может быть больше 0°, но меньше или равна 180°. Величина двугранного угла больше 0°, но меньше или равна 180°. Величина угла между двумя прямыми или двумя плоскостями больше 0°, но меньше или равна 90°. Угол между прямой (наклонной) и плоскостью больше 0°, но меньше 90°. И дополнительно вводится определение, что угол между плоскостью и перпендикулярной к ней прямой считается равным 90°.

Следует отметить также, что в задачах на вычисление углов нередко предлагается вычислить не угол, а его функцию (синус, косинус или тангенс).

Пример 11. Точка O – середина бокового ребра AA_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, $AA_1 = 20\sqrt{5}$, $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Найдите синус угла между прямыми AC_1 и B_1O.

Решение.

Способ 1. Пусть точка K – середина ребра BB_1. Тогда $AK \| B_1O$ и угол KAC_1 равен углу между прямыми AC_1 и B_1O.



$BB_1 \perp AB$ (призма прямая), следовательно,

$$AK = \sqrt{20^2 + 10^2 \cdot 5} = 30.$$

Пусть $KT \perp AC_1$.

Т.к. $\Delta ABK = \Delta C_1B_1K$ (по двум катетам), то $AK = KC_1$. Поэтому $AT = TC_1$.

Пусть точка M – середина ребра AC. Тогда $TM \| CC_1$ и $TM = 0,5CC_1$ (средняя линия треугольника ACC_1), следовательно, $TM \| CC_1 \| KB$ и $TM = KB$. Значит, четырехугольник $KBMT$ – параллелограмм, поэтому $KT = BM$.

$AB = BC$, $AM = MC$, следовательно, $BM \perp AC$. Значит,

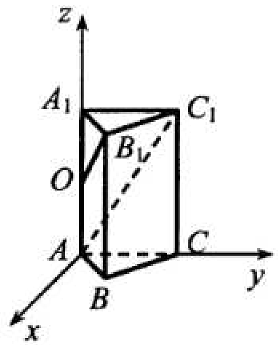
$$KT = BM = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Итак,

$$\sin \angle KAC_1 = \frac{KT}{AK} = \frac{12}{30} = 0,4.$$

Способ 2. (Используем векторно-координатный метод)

Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке.



В этой системе координат:

$$A(0;0;0),\ C_1\left(0;32;20\sqrt{5}\right),\ O\left(0;0;10\sqrt{5}\right),\ B_1\left(12;16;20\sqrt{5}\right).$$

(Для определения координат точки B_1 найдите в равнобедренном треугольнике ABC высоту, проведенную к основанию AC.)

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{0;32;20\sqrt{5}\right\},\ \overrightarrow{OB_1}\left\{12;16;10\sqrt{5}\right\}.$$

Векторы $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ являются направляющими векторами прямых AC_1 и OB_1. Обозначим буквой α угол между этими прямыми и найдем косинус угла по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_1 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

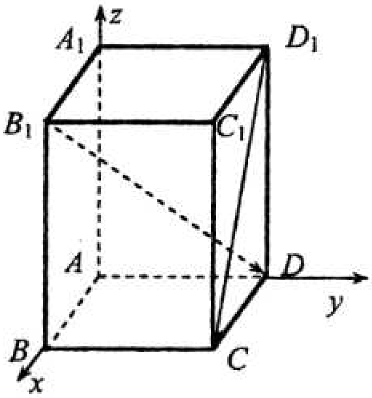
$$\cos\alpha = \frac{\left|0 \cdot 12 + 32 \cdot 16 + 20\sqrt{5} \cdot 10\sqrt{5}\right|}{\sqrt{0^2 + 32^2 + \left(20\sqrt{5}\right)^2} \cdot \sqrt{12^2 + 16^2 + \left(10\sqrt{5}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha},\quad \sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Ответ: 0,4.

Векторно-координатный метод удобно использовать и для решения следующей задачи.

Пример 12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $AD = 12$, $AA_1 = 3$. Найдите синус угла между прямыми B_1D и D_1C.



Решение. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке. В этой системе координат:

$$B_1(4;0;3),\ C(4;12;0),\ D(0;12;0),\ D_1(0;12;3).$$

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{B_1D}\{-4;12;-3\},\ \overrightarrow{D_1C}\{4;0;-3\}.$$

Векторы $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{D_1C}$ являются направляющими векторами прямых B_1D и D_1C. Обозначим буквой α угол между этими прямыми и найдем косинус угла по формуле:

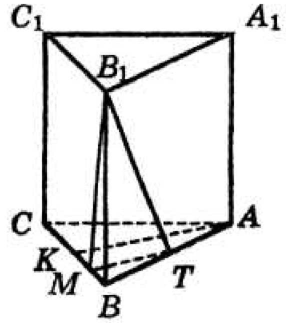
$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_1 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{|-4\cdot 4 + 12\cdot 0 + (-3)\cdot(-3)|}{\sqrt{(-4)^2 + 12^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{65},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha},\quad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{7}{65}\right)^2} = \frac{12\sqrt{29}}{65}.$$

Ответ: $\dfrac{12\sqrt{29}}{65}$.

Пример 13. Основание правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC, в котором $AB = 4$, боковое ребро призмы равно $2\sqrt{2}$. Точка T – середина стороны AB. Найдите синус угла между прямой B_1T и плоскостью BCC_1.



Решение. Пусть $TM \perp BC$. Так как боковые грани правильной призмы перпендикулярны ее основанию, то $MT \perp BB_1C$. Следовательно, угол MB_1T – искомый угол между прямой B_1T и плоскостью боковой грани BCC_1B_1.

Призма правильная, следовательно, $BB_1 \perp ABC$, значит, треугольник BB_1T прямоугольный, поэтому

$$B_1T = \sqrt{BT^2 + BB_1{}^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}.$$

Поскольку треугольник ABC равносторонний, то его медиана AK является высотой, а потому

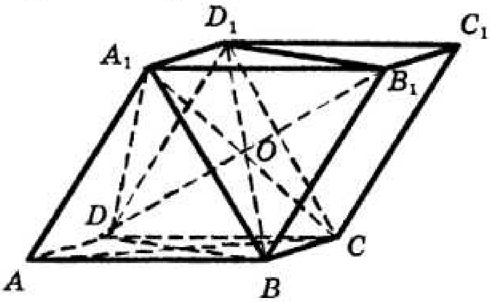
$$AK = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Отрезки AK и TM перпендикулярны BC, следовательно, треугольники BMT и BKA подобны. $AT = BT$, значит, $KM = MB$. Тогда $MT = \sqrt{3}$.

$$\sin\angle TB_1M = \frac{MT}{B_1T} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 0,5.$$

Ответ: 0,5

Пример 14. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\angle BAD = \angle BAA_1 = \angle DAA_1 = 60^\circ$, $AB = AD = AA_1$. Найдите градусную меру угла между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1.



Решение. Все грани параллелепипеда – ромбы с углом 60°, следовательно, меньшая диагональ каждого ромба равна его стороне. Значит, четырехугольник DBB_1D_1 – ромб.

Пусть диагонали ромба DBB_1D_1 пересекаются в точке O. Треугольник DA_1B_1 равнобедренный с основанием DB_1, следовательно, его медиана A_1O является и высотой, то есть $A_1O \perp DB_1$.

Аналогично, $A_1O \perp D_1B$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1O \perp D_1BB_1$. Поэтому угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 равен углу A_1BD_1.

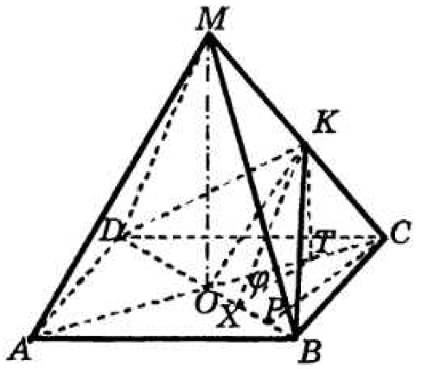
Так как $A_1D = A_1B = A_1D_1 = A_1B_1$, то их проекции на плоскость BDB_1 равны: $OD = OB = OD_1 = OB_1$. Следовательно, диагонали ромба D_1DBB_1 равны, то есть – это квадрат.

Итак, $BA_1 = BD$, $A_1D_1 = DD_1$ и D_1B – общая сторона треугольников BA_1D_1 и BDD_1. Следовательно, $\Delta BA_1D_1 = \Delta BDD_1$. Отсюда $\angle A_1BD_1 = \angle DBD_1 = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

Замечание. Угол A_1BD_1 можно найти и другим способом. Пусть ребро параллелепипеда равно a. Тогда $BD = a$. Так как четырехугольник BDD_1B_1 – квадрат, то $BD_1 = a\sqrt{2}$, $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. В прямоугольном треугольнике A_1OB гипотенуза A_1B равна a, катет $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\angle A_1BD_1 = 45^\circ$.

Пример 15. Все боковые ребра пирамиды $MABCD$ равны, основание – прямоугольник $ABCD$, диагональ которого равна 2, а угол между диагоналями равен 30°. Высота пирамиды равна 2,5. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью, параллельной прямой AM и содержащей точки B и D.



Решение. Пусть MO — высота пирамиды. Боковые ребра пирамиды равны, значит, равны их проекции: $OA = OB = OC = OD$. Следовательно, точка O – центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, т.е. точка пересечения его диагоналей. Проведем в плоскости AMC прямую KO, параллельную прямой AM. Двугранный угол $KBDC$ меньше прямого, значит, его величина равна искомой величине угла между плоскостями BCD и BKD. Построим линейный угол двугранного угла $KBDC$.

Пусть $KT \perp AC$ $(T \in AC)$, тогда $KT \parallel MO$, значит, $KT \perp ABC$. Будем считать, что в прямоугольнике $ABCD$ $\angle BOC < \angle COD$. Тогда основание перпендикуляра, проведенного из точки T к прямой BC (точка X) будет лежать между точками B и O. По теореме о трех перпендикулярах $XK \perp BD$, а потому угол KXT – искомый линейный угол двугранного угла $KBDC$.

Т.к. $KT \parallel OM$ и $MK = KC$, то $KT = 0{,}5MO = 1{,}25$.

Пусть $CP \perp BD$. В прямоугольном треугольнике OCP $\angle COP = 30^\circ$, поэтому $CP = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$, $XT = 0{,}5CP = 0{,}25$.

Тангенс искомого линейного угла φ получаем из прямоугольного треугольника XKT:

$$\operatorname{tg} \varphi = KT : XT = 1{,}25 : 0{,}25 = 5.$$

Ответ: 5.

Задания для самостоятельного решения

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, точка P – середина ребра DC. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и D_1P.
2. В тетраэдре $FABC$ $AB = AC$, $FB = FC$. Найдите градусную меру угла между прямыми BC и AF.
3. Ребро правильного тетраэдра равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, содержащими высоту и ребро тетраэдра.
4. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а сторона основания равна $4\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AA_1.

   Указание. Проведите через точку A плоскость, перпендикулярную плоскости α, проходящей через середины ребер AB, AC и AA_1. Проведите из точки A перпендикуляр к линии пересечения построенной плоскости и плоскости α. Искомое расстояние – длина этого перпендикуляра.
5. Угол между плоскостями правильных треугольников ABC и ABD равен $60°$, $AB = 4$. Найдите расстояние от точки D до плоскости ABC.
6. Основание пирамиды $MABCD$ – квадрат $ABCD$ со стороной, равной 6. Грани DMC и BMC перпендикулярны плоскости основания. Точка K делит ребро AM в отношении 1:2, считая от вершины A. Найдите расстояние от точки K до плоскости DMC.
7. Стороны AB и A_1B_1 оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$, боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{6}$. Найдите расстояние между ребром BC и плоскостью ADB_1.
8. В правильном тетраэдре $MABC$ с ребром $\frac{\sqrt{6}}{2}$ проведено сечение через середину ребра AB параллельно плоскости AMC. Найдите расстояние между плоскостью сечения и плоскостью грани AMC.
9. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если его диагональ $BD_1 = 8$ и составляет с плоскостью грани DAA_1 угол в $45°$, а с ребром DD_1 – угол в $60°$.
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения: одно через вершину A_1 и середины боковых ребер BB_1 и CC_1, а другое – через вершину B параллельно первому сечению. Сторона основания призмы равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, боковое ребро равно 6. Найдите расстояние между сечениями.

    Указание. Постройте сечение, проходящее через ребро AA_1 и точки F и F_1 – середины ребер BC и B_1C соответственно. Используя рисунок сечения (прямоугольник A_1AFF_1), найдите расстояние между параллельными прямыми FD и A_1E, где точки D и E – середины отрезков AA_1 и FF_1 соответственно.
11. Основание призмы – равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, а боковое ребро BB_1 образует равные острые углы с ребрами AB и BC. Найдите градусную меру угла между прямыми BB_1 и AC.

    Указание. Докажите, что проекция прямой BB_1 на плоскость ABC перпендикулярна к прямой AC. Для этого проведите в гранях AA_1B_1B и BB_1C_1C из точки B_1 перпендикуляры к ребрам AB и BC.
12. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $2\sqrt{3}$, сторона основания равна 2. Найдите угол между прямыми BB_1 и DC_1.

13. Отношение стороны основания правильной четырехугольной пирамиды к ее высоте равно $\sqrt{2}$. Найдите градусную меру угла наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

Указание. Рассмотрите прямоугольный треугольник, катет которого – высота пирамиды, а гипотенуза – боковое ребро пирамиды. Вычислите в этом треугольнике тангенс угла, указанного в условии.

14. Высота правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, сторона основания равна $\sqrt{6}$. Точки M и N – середины ребер SC и CD соответственно. Найдите градусную меру угла между прямой MN и плоскостью основания пирамиды.

15. Основание параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 45°$, $\angle BAD = 60°$. Найдите угол между плоскостями граней AA_1D_1D и AA_1B_1B.

§ 2. Сечения многогранников плоскостью

Приведем сведения, полезные для построения сечений призм и пирамид.

1. Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то прямые пересечения параллельны.

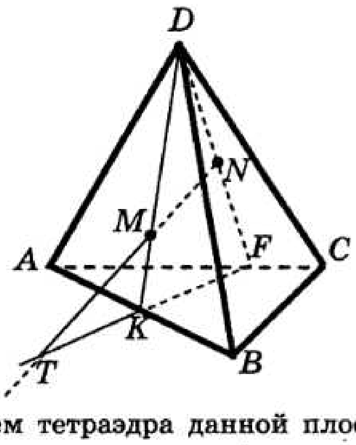
2. Если две плоскости перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, будет перпендикулярна другой плоскости.

3. Если требуется построить плоскость, перпендикулярную второй плоскости, то ее надо провести через прямую, перпендикулярную второй плоскости.

4. Если требуется провести плоскость, параллельную второй плоскости, то ее надо провести через две пересекающиеся прямые, параллельные второй плоскости.

При решении стереометрических задач, в которых проводится плоскость сечения многогранника, необходимо не только уметь строить сечение многогранника плоскостью, но и определять вид полученного сечения. Обычно в таких задачах требуется вычислить площадь сечения или отношение, в котором секущая плоскость делит объем многогранника (примеры на вычисление отношения объемов рассматриваются в параграфе 4. «Объемы тел»). Построение сечений многогранников сводится к построению общих прямых секущей плоскости и плоскостей граней. Для построения линии пересечения двух плоскостей надо найти две общие точки этих плоскостей. Построение таких точек осуществляется чаще всего методом «следов», т.е. поиском точек пересечения прямой и плоскости.

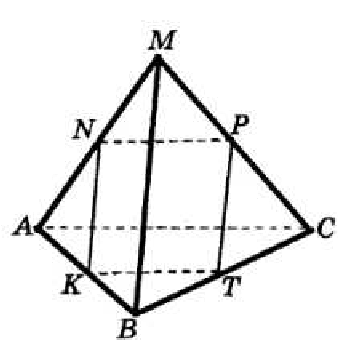
Пример 16. Точки M и N расположены на гранях ADB и ADC тетраэдра $DABC$. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC (т.е. след прямой MN на плоскости ABC).



Решение. Поскольку точки D и M лежат в плоскости ADB, то прямая лежит в плоскости ADB и пересекает ребро AB в точке K (след прямой DM на плоскости ABC). Аналогично прямая DN пересекает ребро AC в точке F (след прямой DN на плоскости ABC). Точки F и K лежат в плоскости DMN, а потому и прямая FK лежит в плоскости DMN. Прямая MN пересекает прямую FK в некоторой точке T. Прямая FK лежит в плоскости ABC, поэтому точка T лежит в плоскости ABC, и, значит, точка T - искомая точка пересечения прямой MN и плоскости ABC.

Замечание. Если бы требовалось построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки D, M и N, то сторонами сечения были бы отрезки DK, DF и KF, по которым плоскость DMN пересекает грани тетраэдра. Значит, сечением тетраэдра данной плоскостью служит треугольник DKF.

Пример 17. Ребро правильного тетраэдра равно 4. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, проходящей через середину ребра и параллельной двум скрещивающимся ребрам.



Решение. Пусть дан правильный тетраэдр $MABC$ и требуется провести плоскость через точку K параллельно прямым AC и BM.

1. Проведем через точку K прямые, параллельные прямым AC и BM. Обозначим точки их пересечения с ребрами буквами N и T соответственно. Плоскость KNT параллельна каждой из прямых AC и BM по признаку параллельности прямой и плоскости. Так как точка K – середина ребра AB, $KN \parallel BM$ и $KT \parallel AC$, то точки N и T – середины ребер AM и BC (по теореме Фалеса).

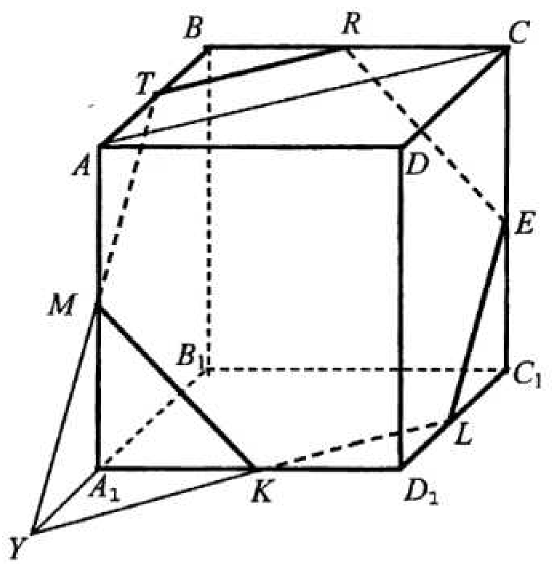
2. Проведем через точки N и T прямые, параллельные прямым AC и BM, которые пересекут ребро CM в его середине – точке P (см. п.1). Четырехугольник $KNPT$ – искомое сечение.

3. Стороны четырехугольника $KNPT$ являются средними линиями правильных треугольников со сторонами, равными 4. Следовательно, каждая сторона четырехугольника $KNPT$ равна 2, т.е. это ромб. Противолежащие ребра правильного тетраэдра взаимно перпендикулярны (см. пример 9), значит, $KN \perp KT$, т.е. четырехугольник $KNPT$ – квадрат. Значит, его площадь равна $2^2=4$.

Ответ: 4.

Пример 18. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, равно $\sqrt{2}$. Секущая плоскость проходит через середины ребер AB, AA_1 и A_1D_1. Найдите периметр сечения.

Решение. Середины ребер AB и AA_1 – точки T и M – лежат в плоскости ABB_1 и секущей плоскости, следовательно, отрезок TM – сторона искомого сечения. Аналогично доказывается, что и отрезок MK – сторона сечения (точка K – середина ребра A_1D_1). Прямые MT и B_1A_1 пересекаются в точке Y. Точки Y и K лежат в плоскости $A_1B_1C_1$, и в секущей плоскости, следовательно, прямая KY – их общая прямая. Она пересекает ребро C_1D_1 в точке L. Следовательно, отрезок KL – сторона сечения.



Противоположные грани куба попарно параллельны. Поэтому линии пересечения их плоскостью параллельны.

Проведем через точки L и T отрезки LE и TR, параллельные отрезкам MT и KL, а затем соединим отрезком точки E и R. Построенный шестиугольник – искомое сечение.

Отрезок TR – средняя линия треугольника ABC, следовательно, $TR||AC$ и $TR = 0,5AC = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 1$.

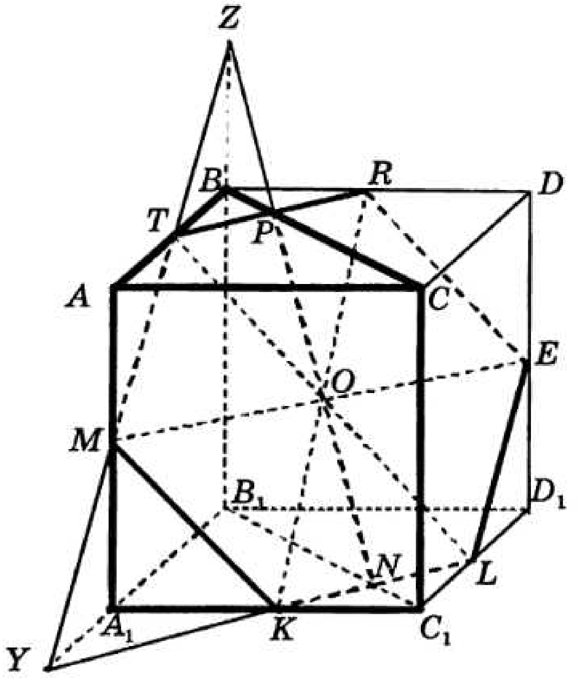
Аналогично, вычисляются и остальные стороны шестиугольника. Все они равны 1. Следовательно, периметр сечения равен 6.

Ответ:6.

Пример 19. В призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны AB и AC основания перпендикулярны боковому ребру AA_1 и взаимно перпендикулярны, $AB = AC = AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения проходящего через середины ребер AB, A_1C_1 и AA_1.

Решение. Пусть точки K, M, T – середины ребер A_1C_1, AA_1, AB соответственно.

Достроим данную призму до параллелепипеда. Пусть $BD || B_1D_1 || AC$, $CD || C_1D_1 || AB$ и $DD_1 || CC_1$. Все грани параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$ – квадраты, следовательно, он является кубом. Пусть ребро этого куба равно a. Можно доказать (см. пример 17), что сечением построенного куба является правильный шестиугольник ($KMTREL$) со сто-



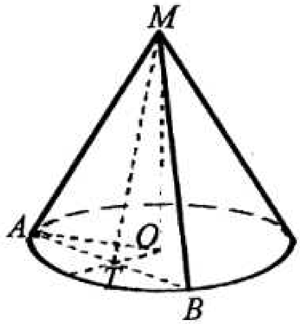
роной, равной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Сечение данной призмы составляет половину этого шестиугольника (пятиугольник $KMTPN$), значит, его площадь равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=6\sqrt{3}.$$

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Замечание. В решении использован полезный прием достраивания данной фигуры до другой фигуры, позволяющий свести задачу к решённой ранее.

Пример 20. Высота конуса равна 12, а радиус основания равен 10. Через вершину конуса и середину радиуса основания проведена хорда AB окружности, перпендикулярная этому радиусу. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через хорду AB и вершину конуса.



Решение. Искомое сечение является равнобедренным треугольником, две стороны которого – образующие MA и MB конуса, третья – хорда AB основания.

Точка T – середина радиуса, следовательно, OT=5. Из прямоугольного треугольника MOT получаем: $MT=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

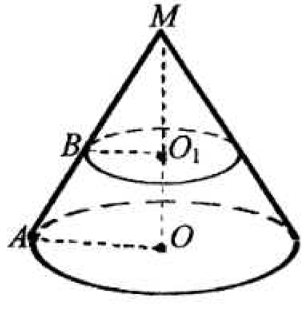
Из прямоугольного треугольника AOT получаем:

$AT=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$.

Так как $AB\perp OT$, то по теореме о трех перпендикулярах $MT\perp AB$. Высота MT равнобедренного треугольника AMB является его медианой. Итак, $S_{AMB}=5\sqrt{3}\cdot 13=65\sqrt{3}$.

Ответ: $65\sqrt{3}$.

Пример 21. Образующая конуса равна 8, угол между образующей и высотой конуса равен $30°$. Найдите площадь сечения конуса, параллельного плоскости основания и проходящего через середину высоты.



Решение. Сечением конуса плоскостью, параллельной плоскости основания, является круг. Отношение площадей сечений, параллельных основанию конуса, равно отношению квадратов расстояний от вершины.

Зная образующую AM и угол AMO между образующей и высотой конуса, найдем радиус основания. Он равен 4. Следовательно, площадь основания равна 16π.

Поскольку $O_1M^2:OM^2=1:2^2=1:4$, то площадь сечения равна 4π.

Ответ: 4π.

Задания для самостоятельного решения

16. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3, а сторона основания равна 8. Найдите периметр сечения, проходящего через вершину A и середины ребер A_1B_1 и A_1C_1.
17. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равна $2\sqrt{3}$, ребро основания равно $2\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения, проходящего через середину ребра SC и диагональ BD основания.
18. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 5. Через вершину A параллельно прямой BC проведена плоскость так, что угол между прямой AB и этой плоскостью равен $30°$. Найдите площадь сечения.
19. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ через вершину A параллельно диагонали BD основания пирамиды проведена плоскость так, что угол между пря-

мой AB и этой плоскостью равен $30°$. Высота MH пирамиды равна $10\sqrt{2}$, $AB=5$. Найдите площадь сечения.

20. Точка E – середина ребра B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, каждое ребро которой равно 2. Через середину отрезка CE перпендикулярно прямой BC проведена плоскость. Найдите площадь сечения призмы.
21. Через сторону AB основания правильной треугольной пирамиды $MABC$ проведено сечение наименьшей площади, пересекающее ребро MC в точке T. Отношение площади сечения к площади основания пирамиды равно $2 : 3$. Найдите отношение $MT : TC$.
22. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π. Через образующую цилиндра проведены два сечения, одно из которых проходит через центр основания. Угол между плоскостями сечений равен $60°$. Найдите меньшую из площадей данных сечений.
23. Высота правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{6}$, сторона основания равна 2. Найдите площадь сечения, проходящего через вершины B, C, и A_1.
24. Каждое ребро правильной пирамиды $MABCD$ равно 2. Плоскость, параллельная прямым AC и MB, пересекает стороны AB и BC основания в точках E и T. Найдите периметр сечения пирамиды, если $TE = \sqrt{2}$.
25. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $15\sqrt{3}$, а сторона основания равна 15. На сторонах A_1D_1 и C_1D_1 основания отмечены точки E и M так, что $A_1E : ED_1 = 1 : 4$, $C_1M : M\ D_1 = 2 : 1$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью BEM.
26. Через точку окружности основания цилиндра проведены два сечения, одно – через ось цилиндра, а второе параллельно ей. Угол между плоскостями сечений равен $60°$. Площадь осевого сечения равна 80. Найдите площадь второго сечения.

§ 3. Площади поверхностей тел

Напомним некоторые полезные геометрические факты.

1. **Призма** называется *прямой*, если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, в противном случае призма называется наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если основания призмы – правильные многоугольники.

Площадь *боковой поверхности* **призмы** равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро (прямой призмы – произведению периметра основания на высоту).

Площадью полной поверхности **призмы** называется сумма площадей всех ее граней (боковых и оснований) $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

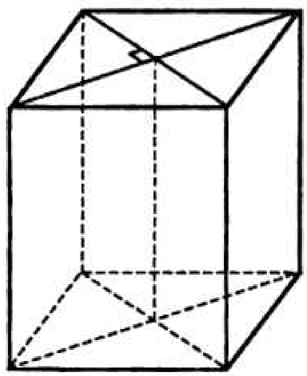
2. **Пирамида** называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания (центр вписанной в основание или описанной около него окружности), является высотой пирамиды. Все боковые ребра правильной пирамиды равны. Боковые грани правильной пирамиды являются равными равнобедренными треугольниками. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из вершины пирамиды, называется *апофемой*.

Площадь *боковой поверхности* **пирамиды** равна сумме площадей боковых граней.

Если вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности (боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания), то площадь боковой поверхности равна произведению полупериметра основания на высоту боковой грани, проведенной из вершины пирамиды.

3. Площадь боковой поверхности **усеченной пирамиды**, у которой боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, равна произведению полусуммы периметров оснований на высоту боковой грани.

Пример 22. Основание прямой призмы – ромб, а площади ее диагональных сечений равны 3 и 4. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Решение. Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту. Боковые ребра прямой призмы перпендикулярны плоскости основания, следовательно, ее осевые сечения – прямоугольники. Если высота призмы равна h, то диагонали основания равны $\frac{3}{h}$ и $\frac{4}{h}$. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, сторона основания равна

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2h}\right)^2 + \left(\frac{4}{2h}\right)^2} = \frac{5}{2h}.$$

Итак, площадь боковой поверхности равна

$$4 \cdot \frac{5}{2h} \cdot h = 10.$$

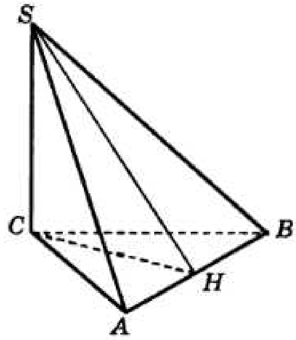
Ответ:10.

Пример 23. Основание пирамиды – равносторонний треугольник со стороной 10, высота пирамиды равна 5. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

Пусть грани SAC и SBC перпендикулярны плоскости основания, тогда ребро SC перпендикулярно плоскости основания, следовательно, грани SAC и SBC – прямоугольные треугольники. Пусть отрезок CH – высота основания, тогда отрезок SH – высота грани SAB.

$$SH = \sqrt{SC^2 + \left(\frac{AB\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$



Площадь боковой поверхности равна

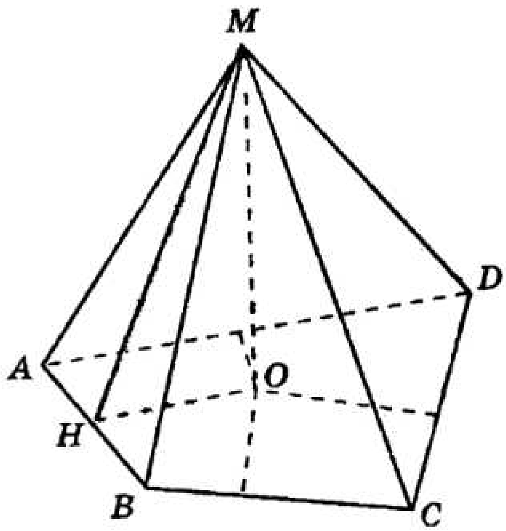
$$\frac{1}{2}AC \cdot SC + \frac{1}{2}BC \cdot SC + \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{(SC)^2 + \left(\frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Подставляя числовые данные, получим 100.

Ответ: 100.

Пример 24. Все двугранные углы при основании четырехугольной пирамиды равны между собой. Высота пирамиды равна 12 , а периметр и площадь основания равны 48 и 120. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. По условию все двугранные углы при основании пирамиды равны, следовательно, ее высота MO проходит через центр окружности, вписанной в основание, а все высоты боковых граней, проведенные к сторонам основания, равны между собой (почему?). Следовательно, если h – высота боковой грани, проведенная из вершины M, то площадь боковой поверхности:



$$S_{бок} = \frac{1}{2}AB \cdot h + \frac{1}{2}BC \cdot h + \frac{1}{2}CD \cdot h + \frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot h.$$

Пусть $MH \perp AB$, тогда $OH \perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах), значит, OH – радиус окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Площадь четырехугольника $ABCD$ вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot r$, где r– радиус вписанной в четырехугольник окружности.

Откуда $r = \frac{2S}{P_{осн}}$, $r = \frac{2 \cdot 120}{48} = 5$.

Из прямоугольного треугольника MOH находим MH:

$MH = h = \sqrt{OH^2 + MO^2}$, $MH = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Следовательно, $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 13 = 312$.

Ответ: 312.

Полезно также помнить следующие формулы.

4. *Площадь боковой поверхности* **цилиндра:**

$$S_{бок} = 2\pi RH,$$

где R – радиус основания, H – высота цилиндра.

Площадь *полной поверхности* **цилиндра:** $S_{цил} = 2\pi R(R + H)$.

5. *Площадь боковой поверхности* **конуса:**

$$S_{бок} = \pi RL,$$

где R – радиус основания, L – образующая конуса.

Площадь *полной поверхности* **конуса:** $S_{кон} = \pi R(L + R)$.

6. *Площадь боковой поверхности* **усеченного конуса:**

$$S_{бок} = \pi L(R_1 + R_2),$$

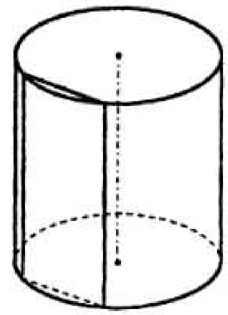
где L – образующая конуса, R_1 и R_2 – радиусы оснований.

7. Площадь **сферы:**

$$S = 4\pi R^2,$$

где R – радиус сферы.

Пример 25. Хорда основания цилиндра стягивает дугу в 60°. Секущая плоскость содержит эту хорду и параллельна высоте цилиндра. Площадь сечения равна 20. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра.

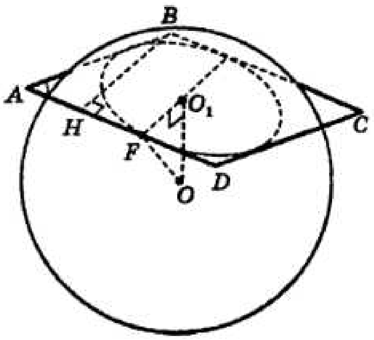


Решение. Так как хорда стягивает дугу в 60°, то ее длина равна радиусу. Следовательно, площадь сечения равна $RH = 20$. Тогда площадь боковой поверхности равна

$$2\pi RH = 2\pi \cdot 20 = 40\pi.$$

Ответ: 40π.

Пример 26. Все стороны ромба касаются сферы. Сторона ромба равна 4, а угол равен 60°. Расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно $3\sqrt{5}$. Найдите площадь сферы.



Решение. Пусть стороны ромба $ABCD$ касаются сферы с центром O и радиусом R, отрезок OO_1 – перпендикуляр, проведенный из точки O к плоскости ромба. Тогда точки касания сторон ромба и сферы лежат на окружности, вписанной в этот ромб и O_1 – центр окружности. Проведем высоту BH ромба. Радиус r вписанной окружности равен $\frac{1}{2}BH$. Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = AB \cdot \sin A$, $BH = 4 \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, следовательно, $r = \sqrt{3}$. Пусть F- точка касания стороны AD ромба и сферы. Из прямоугольного треугольника O_1OF, в котором $O_1O = 3\sqrt{5}$, $O_1F = \sqrt{3}$, находим радиус сферы: $R = OF = \sqrt{OO_1^2 + FO_1^2}$, $R = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 4\sqrt{3}$. Находим площадь сферы: $S = 4\pi R^2$, $S = 4\pi \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 192\pi$.

Ответ: 192π.

Задания для самостоятельного решения

27. Основание прямого параллелепипеда – квадрат, площадь которого равна 16, высота параллелепипеда в 2 раза больше стороны основания. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.
28. Разверткой боковой поверхности правильной четырехугольной призмы является квадрат со стороной, равной 8. Найдите площадь полной поверхности призмы.
29. Сечение, проходящее через центр основания и боковое ребро правильной шестиугольной призмы, является квадратом со стороной, равной 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
30. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб со стороной 2 и углом A, равным 60°. Плоскость BDC_1 наклонена к основанию под углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
31. Площадь сечения, проходящего через ребро основания и точку пересечения диагоналей куба равна $4\sqrt{2}$. Найдите площадь полной поверхности куба.
32. Площади двух граней наклонной треугольной призмы равны 8 и 6, угол между ними равен 90°, боковое ребро равно 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
33. Ребро куба равно $2\sqrt[4]{3}$. Центры его граней служат вершинами правильного октаэдра. Найдите площадь поверхности октаэдра.
34. Основание пирамиды – прямоугольник $ABCD$, $AB = 18$, $BC = 10$, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

35. Основание пирамиды – параллелограмм со сторонами 6 и 8, высота пирамиды равна 12, а все боковые ребра равны между собой. Найдите площадь основания пирамиды и длину бокового ребра.
36. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 5, а сторона основания – 6. Найдите площади ее боковой и полной поверхностей.
37. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Каждый из двугранных углов при сторонах основания пирамиды равен 60°. Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды.
38. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания 6 и боковым ребром 5 проведено сечение через середину высоты параллельно основанию. Вычислите площадь боковой поверхности получившейся усеченной пирамиды.
39. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, сторона основания равна 12. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
40. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 2 и 4, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
41. Угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра равен 60°, диагональ равна $2m$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
42. Осевое сечение конуса – треугольник со стороной 4 и углом 60°. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
43. Хорда основания конуса стягивает дугу в 120°. Сечение, проходящее через эту хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью основания угол, равный 45°. Высота конуса равна $\sqrt[4]{5}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
44. Образующая усеченного конуса равна 2. Диагональ осевого сечения перпендикулярна боковой стороне сечения и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

§ 4. Объемы тел

Приведем формулы для вычисления объемов некоторых геометрических тел.

1. Объем **призмы** равен произведению площади основания на высоту:
$$V = SH,$$
где S – площадь основания, а H – высота призмы.

2. Объем призмы можно найти, **умножив площадь перпендикулярного сечения на длину бокового ребра.**

3. Объем **пирамиды:**
$$V = \frac{1}{3}SH,$$
где S – площадь основания, а H – высота пирамиды.

4. Объем **усеченной пирамиды:**
$$V = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right),$$
где H – высота пирамиды, S_1 и S_2 площади оснований.

5. Если пирамида и призма имеют **общее основание и высоту,** то объем пирамиды равен **трети объема призмы.**

6. Объем **цилиндра:**
$$V = \pi R^2 H,$$
где R – радиус основания, H – высота цилиндра.

7. Объем **конуса:**
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$
где R – радиус основания, H – высота конуса.

8. Объем **усеченного конуса:**
$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right),$$
где R_1 и R_2 – радиусы оснований, H – высота усеченного конуса.

9. Объем **шара** радиуса R равен
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

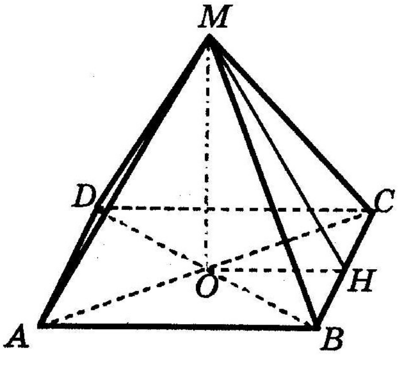
Пример 27. Высота правильной четырехугольной призмы равна 2, а площадь боковой грани равна 16. Найдите объем призмы.

Решение. Так как высота боковой грани 2, а площадь равна 16, то сторона основания призмы равна 8. Следовательно, объем призмы равен 128.

Ответ: 128.

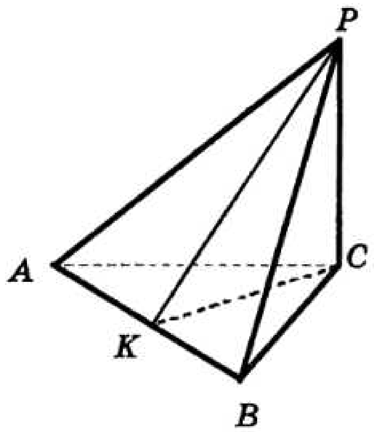
Пример 28. Основание пирамиды $MABCD$ – прямоугольник $ABCD$. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13, $AB = 8$, высота MH грани MBC равна 5. Найдите объем пирамиды.

Решение. Так как все ребра пирамиды равны, то вершина M проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды, то есть в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ (точку O). Соединим точку H с точкой O. По теореме о трех перпендикулярах $OH \perp BC$. Из треугольника MBH получаем, что $\frac{1}{2}BC = 12$, значит, $BC = 24$. Из треугольника MOH найдем высоту пирамиды: $MO = 3$. Следовательно, объем пирамиды равен
$$\frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 8 \cdot 3 = 192.$$



Ответ: 192.

Пример 29. Основанием пирамиды $PABC$ является треугольник ABC, площадь которого равна 6, $\angle C = 90°$, $AB = \sqrt{3}$. Ребро PC перпендикулярно плоскости ABC, а плоскость PAB образует с ней угол 30°. Найдите объем пирамиды.



Решение. Проведем высоту CK основания пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp AB$, следовательно, $\angle PKC = 30°$.

Так как $AB \cdot CK = 2S_{ABC} = 12$,

то $CK = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

Из треугольника PCK найдем высоту PC пирамиды:

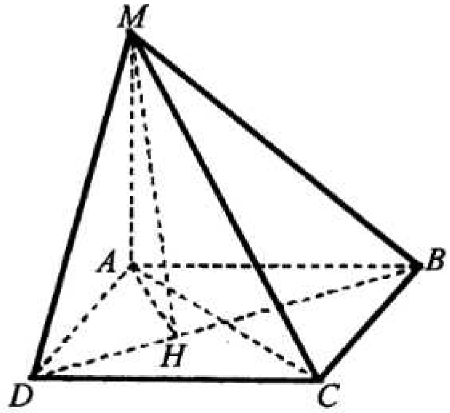
$$PC = 4\sqrt{3}\,\mathrm{tg}30° = 4.$$

Объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 4 = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 30. Основание пирамиды $ABCD$ – прямоугольник $ABCD$ со сторонами 3 и 4. Ребро MA перпендикулярно плоскости ABD, а угол между плоскостями MBD и ABD равен 45°. Найдите объем пирамиды.



Решение. Проведем в плоскости основания перпендикуляр AH к прямой BD. Тогда AH – проекция наклонной HM на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $MH \perp DB$ и угол AHM – линейный угол двугранного угла $ABDM$. По условию $\angle AHM = 45°$, значит, $AH = AM$. Из прямоугольного треугольника ABD найдем высоту AH проведенную к гипотенузе:

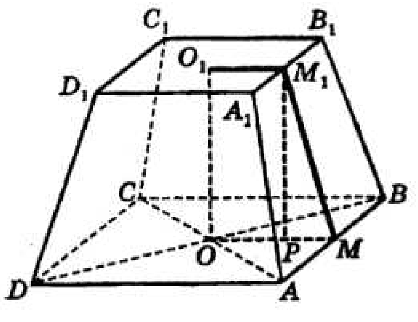
$$AH = \frac{2S_{ABD}}{BD} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{12}{5}.$$

Значит, высота AM пирамиды равна $\dfrac{12}{5}$, и объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = 9{,}6.$$

Ответ: 9,6.

Пример 31. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 3 и 6, апофема пирамиды равна $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Найдите объем усеченной пирамиды.



Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данная правильная четырехугольная пирамида, тогда ее основаниями являются квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, отрезок OO_1, соединяющий центры оснований, – высота пирамиды, а отрезок MM_1, соединяющий середины сторон оснований AB и A_1B_1, – апофема пирамиды.

Объем пирамиды вычисляется по формуле: $V = \dfrac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$, где $S_1 = AB^2$, $S_1 = 6^2 = 36$, а $S_2 = A_1B_1{}^2$, $S_2 = 3^2 = 9$.

Для нахождения высоты пирамиды рассмотрим четырехугольник OO_1M_1M, который является прямоугольной трапецией.

Пусть $M_1P \parallel OO_1$, тогда $MP = MO - OP = MO - M_1O_1$, $MP = \frac{1}{2}\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 3 = 1,5$.

Из прямоугольного треугольника MPM_1 находим:

$$M_1P = \sqrt{M_1M^2 - MP^2}, \quad M_1P = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, высота пирамиды равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Итак, $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\left(36 + 9 + \sqrt{36\cdot 9}\right) = \frac{63\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{63\sqrt{2}}{2}$.

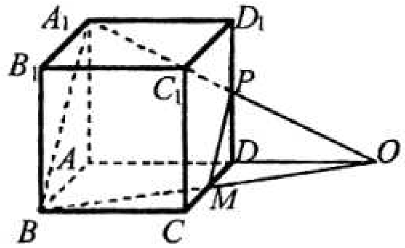
Пример 32. Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 2π. Найдите объем цилиндра.

Решение. Стороны развертки равны высоте и длине окружности основания. Радиус основания равен $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Найдем объем цилиндра:

$$\pi R^2 H = \pi\cdot 1\cdot 2\pi = 2\pi^2.$$

Ответ: $2\pi^2$.

Пример 33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Секущая плоскость проходит через вершину B и середины ребер CD и DD_1. В каком отношении секущая плоскость делит объем куба?



Решение. Пусть ребро куба равно a, точки M и P – середины ребер CD и DD_1 соответственно. Прямые BM и AD, лежащие в плоскости ABC, пересекаются в точке O. Треугольники BCM и ODM равны (почему?). Следовательно $AO = 2a$.

Прямая OP, лежащая в плоскости грани AA_1D_1D, пересекает ребро AA_1 в точке A_1 (почему?).

Вычислим объем V_1 многогранника $MPDBA_1A$ (часть куба под секущей плоскостью), как разность объемов двух пирамид.

$$V_1 = V_{OABA_1} - V_{ODMP} = \frac{1}{3}S_{ABA_1}\cdot AO - \frac{1}{3}S_{DMP}\cdot DO,$$

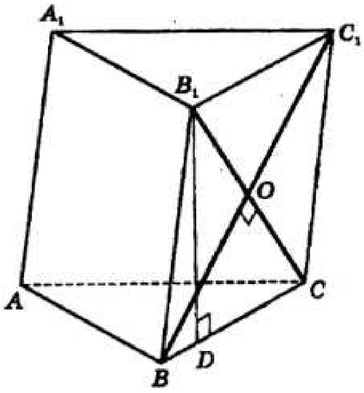
$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot 2a - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a\right) = \frac{7a^3}{24}.$$

Объем куба равен a^3, объем многогранника $MPDBA_1A$ равен $\frac{7a^3}{24}$. Значит, секущая плоскость делит объем куба в отношении $7:17$.

Ответ: $7:17$.

Пример 34. Найдите объем наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что ее основания – правильные треугольники, боковая грань BB_1C_1C является ромбом и образует с плоскостью ABC угол в 90°, причем $B_1C = 12$, $BC_1 = 16$.

Решение. Четырехугольник BB_1C_1C – ромб с диагоналями $B_1C = 12$, $BC_1 = 16$. По свойству диагоналей ромба $CO = \frac{1}{2}B_1C$, $BO = \frac{1}{2}BC_1$, $\angle BOC = 90°$.



Из прямоугольного треугольника BOC найдем BC:

$$BC = \sqrt{BO^2 + OC^2}, \quad BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

По условию плоскости BB_1C_1 и ABC перпендикулярны, поэтому высота B_1D ромба BB_1C_1C является и высотой призмы. Найдем B_1D.

$$S_{BB_1C_1C} = \frac{1}{2}BC_1 \cdot B_1C = BC \cdot B_1D.$$

Откуда $B_1D = \dfrac{BC_1 \cdot B_1C}{2BC}$, $B_1D = \dfrac{16 \cdot 12}{2 \cdot 10} = 9,6$.

Найдем объем призмы.

$$V = S_{ABC} \cdot B_1D = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin B \cdot B_1D.$$

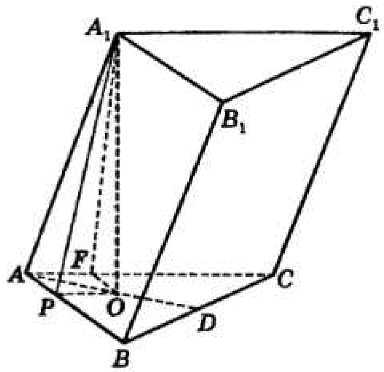
$$V = \frac{1}{2}10 \cdot 10 \cdot \sin 60° \cdot 9,6 = 240\sqrt{3}.$$

Ответ: $240\sqrt{3}$.

Пример 35. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник со стороной $AB = 6$, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$, $AA_1 = 8$. Найдите объем призмы.

Решение. По условию треугольник ABC – правильный:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60° = 9\sqrt{3}.$$



Проведем высоту призмы A_1O. Из точки O проведем перпендикуляры OP и OF к сторонам основания AB и AC соответственно. По теореме о трех перпендикулярах $A_1P \perp AB$ и $A_1F \perp AC$.

Прямоугольные треугольники APA_1 и AFA_1 равны (почему?), следовательно, $OP = OF$, следовательно, луч AO – биссектриса угла CAB, значит, $\angle OAP = 30°$.

Из прямоугольного треугольника A_1AP получаем:

$AP = \frac{1}{2}AA_1$ (почему?), значит $AP = 4$.

Из прямоугольного треугольника APO найдем AO: $AO = \dfrac{AP}{\cos A}$, $AO = \dfrac{4}{\cos 30°} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

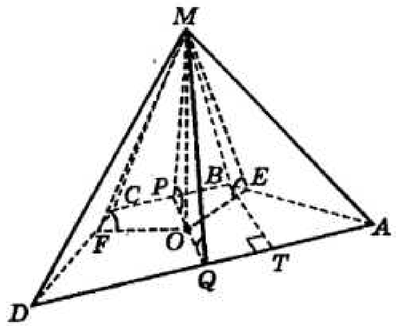
Из прямоугольного треугольника A_1AO найдем A_1O:

$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2}, \quad A_1O = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Найдем объем призмы: $V = S_{ABC} \cdot A_1O$, $V = 9\sqrt{3} \cdot \dfrac{8\sqrt{6}}{3} = 72\sqrt{2}$.

Ответ: $72\sqrt{2}$.

Пример 36. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом в 30°. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 60°, высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.



Решение. Пусть $MABCD$ – данная пирамида, MO – ее высота, ME, MP, MF, MQ – высоты боковых граней.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OE \perp AB$, $OP \perp BC$, $OF \perp CD$, $OQ \perp AD$.

Следовательно, $\angle MEO = \angle MPO = \angle MFO = \angle MQO = 60^\circ$ (как линейные углы двугранных углов между боковыми гранями и основанием). Следовательно, треугольники MOE, MOP, MOF, MOQ равны (подумайте, почему?), поэтому $OE = OP = OF = OQ$. Отсюда следует, что окружность с центром O радиуса OP является окружностью, вписанной в трапецию $ABCD$.

Из прямоугольного треугольника MOP находим:

$$OP = \frac{MO}{\mathrm{tg}P}, \quad OP = \frac{3\sqrt{3}}{\mathrm{tg}60^\circ} = 3.$$

Рассмотрим трапецию $ABCD$.

Пусть BT – высота трапеции, тогда $BT = PQ = 2OP$, $BT = 6$.

Из прямоугольного треугольника ABT, в котором $\angle A = 30^\circ$, находим: $AB = 2BT$, AB = 12.

Так как в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то $BC + AD = 2AB$, $BC + AD = 24$.

Площадь трапеции: $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BT$, $S_{ABCD} = \dfrac{24}{2} \cdot 6 = 72$.

Найдем объем призмы: $V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MO$, $V = \dfrac{1}{3} \cdot 72 \cdot 3\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$.

Ответ: $72\sqrt{3}$.

Задания для самостоятельного решения

45. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 2, объем призмы равен 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
46. Высота правильной четырехугольной призмы равна 5, диагональ призмы равна 13. Найдите объем призмы.
47. Основание призмы – квадрат со стороной 2. Вершина одного из оснований удалена от каждой вершины второго основания на расстояние равное $\sqrt{6}$. Найдите объем призмы.
48. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону AB нижнего основания и середину ребра CC_1 проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объем призмы, если ее боковое ребро равно 6.
49. Диагонали B_1F и B_1E правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равны соответственно $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$. Найдите объем призмы.
50. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8, а диагональ большей по площади боковой грани равна $10\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.
51. Основание прямой призмы – треугольник, две стороны которого равны 10. Одна из боковых граней призмы – квадрат, площадь которого равна 144. Найдите объем призмы.

52. Основание прямой призмы – ромб с диагоналями, равными 6 и 8, а боковая грань – квадрат. Найдите объем призмы.
53. Высота правильной четырехугольной призмы равна 2, диагональ призмы равна 6. Найдите объем призмы.
54. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 11 и 21, а боковая сторона равна 13. Площадь диагонального сечения призмы равна 180. Найдите объем призмы.

Примечание. Сечение называется диагональным, если оно содержит какую-нибудь диагональ призмы и ее боковое ребро.
55. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Объем призмы равен 6. Найдите объем пирамиды $MA_1B_1D_1$.
56. Вычислите высоту треугольной пирамиды с равными боковыми ребрами, если ее объем равен $\frac{27\sqrt{3}}{2}$, а все плоские углы при вершине прямые.
57. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $3\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем усеченной пирамиды.
58. Вершины A, B, C и B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединены отрезками. Объем полученного тетраэдра $ABCB_1$ равен 10. Найдите объем куба.
59. Объем куба равен 27. Найдите объем пирамиды, вершины которой совпадают с концами двух скрещивающихся диагоналей параллельных граней куба.
60. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с углом C, равным 90°. Все боковые ребра пирамиды равны. Грань SAC образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найдите объем пирамиды, если $SA = 3\sqrt{3}$.
61. Основание пирамиды $KABCD$ – квадрат, диагональ которого равна 4. Ребро KB перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если $KB = 6$.
62. Основание пирамиды $MABCD$ – прямоугольник $ABCD$. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13, высота MH грани MBC равна 5, $AB = 8$. Найдите объем пирамиды.
63. Основание пирамиды $MABCD$ – ромб $ABCD$, проекция вершины M – точка пересечения диагоналей этого ромба; $AM = AB = 5$, $AC = 6$. Найдите объем пирамиды.
64. Ребро KA пирамиды $KABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите объем пирамиды, если $KA = 12$, $KB = 13$, $KC = 4\sqrt{10}$, $\angle ACB = 90^\circ$.
65. Основание пирамиды $MABC$ – правильный треугольник ABC, ребро MA перпендикулярно плоскости ABC. Высота пирамиды равна $\sqrt{3}$, а высота MH грани MBC равна $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.
66. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$, апофема равна 4. Найдите объем пирамиды.
67. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 3, а плоский угол при вершине равен 60°. Найдите объем пирамиды.
68. Основание пирамиды $MABCD$ – прямоугольник $ABCD$ со сторонами 3 и 4. Ребро MA перпендикулярно плоскости ABC, а плоскость MBD образует с ней угол, равный 45°. Найдите объем пирамиды.
69. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{3}$. Грань SAD наклонена к плоскости основания под углом 60°, а грань SBC перпендикулярна к плоскости основания. Найдите объем пирамиды.
70. Основание пирамиды – прямоугольник, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$, а все боковые ребра пирамиды равны друг другу. Секущая плоскость α проходит через вершину пирамиды и середины двух смежных сторон основания. Косинус угла между плоскостями основания и сечения равен 0,6. Найдите объем треугольной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью α.
71. Радиус основания конуса равен 6, а площадь осевого сечения равна 18. Найдите объем конуса.

72. В конусе проведено сечение параллельно основанию. Радиус основания равен 4, а площадь сечения равна 4π . Найдите объем образовавшегося усеченного конуса, если объем конуса равен 80.
73. В шаре проведено два взаимно перпендикулярных сечения, площадь каждого из которых равна 144π. Расстояние от центра шара до общей хорды этих сечений равно $9\sqrt{2}$. Найдите объем шара.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1. ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. 0,25.
2. 24.
3. 9.
4. $3{,}5\sqrt{3}$.
5. $0{,}8\sqrt{6}$.
6. 60.
7. $6\sqrt{5}$.
8. 1,6.
9. 20.
10. 12.
11. 40,8.
12. $3\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$.
13. 42.
14. 8.
15. 150.
16. 15,6.
17. $27\sqrt{3}$.
18. $10:\sqrt[4]{6}$.
19. 1,44.
20. 48; 20,25; $18\sqrt{3}$.
21. $\frac{16}{3}$; 3
22. $\frac{11}{3}$
23. $\sqrt{11}$
24. $\sqrt{13}$
25. $\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$
26. 24
27. 68.
28. 1,5.
29. 525.
30. 3,24.
31. 100.
32. 33.
33. 50.
34. 50.
35. 350.
36. 120.
37. 800.
38. 980.
39. 148.
40. 12.
41. 150.
42. 875.
43. 7400.
44. 10980.
45. 104.
46. 3.
47. 2073,6.
48. 800.
49. 358.
50. 9.
51. $33\frac{3}{3}$.
52. 36.
53. 22,4.
54. 2,56.
55. 16,5.
56. 24; 56.
57. 33.
58. 8.
59. $9\sqrt{5}$.
60. $2\sqrt{10}$.
61. $\sqrt{313}$.
62. 10.
63. 2.
64. 3.
65. 18.
66. 12,8.
67. 60°.
68. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.
69. $14+8\sqrt{3}$.
70. 672.
71. $2\sqrt{6}$.
72. $15{,}5+0{,}5\sqrt{129}$.
73. 10.
74. 84.
75. 1.
76. $\frac{3}{\sqrt{17}}$.
77. $3\sqrt{2}$.
78. 18.
79. 24.
80. 24,5.
81. 12,5.
82. 2.
83. 6; $3\sqrt{5}$.
84. $3\sqrt{2}$.
85. $\frac{300}{17}$.
86. 2.
87. 30°; 150°.
88. $\frac{192}{17}$; $\frac{1728}{25}$.
89. 15.
90. 192.
91. $6\sqrt{2}$.
92. 6.

1. 1.
2. 90°.
3. 0,5.
4. 2,4.
5. 3.
6. 4.
7. $1{,}2\sqrt{10}$.
8. 0,5.
9. $4\sqrt{2}$; 4; 4.
10. 2,4.
11. 2,4.
12. 30.
13. 45.
14. 30.
15. 90.
16. 14.
17. 4.
18. $3\sqrt{2}$; $15\sqrt{2}$.
19. $\sqrt{3}$.
20. 3.
21. 0,2.
22. 7,5.
23. 3.
24. $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
25. 390.
26. 40.
27. 128.
28. 72.
29. 12.
30. 24.
31. 24.
32. 24.
33. 12.
34. 24.
35. 24.
36. 72; $54\sqrt{3}$.
37. 12.
38. 36.
39. 72.
40. 6.
41. $4\pi\sqrt{3}$.
42. 8π.
43. 10π.
44. 6π.
45. 40.
46. 360.
47. 8.
48. 6π
49. 4,5.
50. 240.
51. 576.
52. 120.
53. 32.
54. 1728.
55. 1.
56. 30.
57. 126.
58. 60.
59. 9.
60. 18.
61. 16.
62. 192.
63. 32.
64. 24.
65. 3.
66. 24.
67. 18.
68. 9,6.
69. 24.
70. 120.
71. 36π.
72. 70.
73. 4500π.