

Grigore Gheba

Exerciții și probleme de matematică

clasele V–VIII



Editura didactică și pedagogică — București, 1975

Redactor: Valentin Radu
Tehnoredactor: Constanța Velcovici

P R E F A Ț A

În noua ediție a lucrării de față, exercițiile și problemele au fost resistematisate înctt. întregul material a fost repartizat pe clasele V—VIII în funcție de cerințele programei școlare.

Pentru a veni în sprijinul măririi eficienței studiului matematicii în școală, am folosit elemente de teoria mulțimilor pe care le-am utilizat în formularea enunțului unor exerciții și probleme, la redactarea soluțiilor sau a răspunsurilor.

Acele probleme care presupun un grad mai mare de dificultate în rezolvarea lor, au fost prevăzute cu asterisc (). Ele se adresează elevilor care vor să depășească nivelul obișnuit în studiul matematicii sau cercurilor de matematică din școli.*

Consider că elevii vor găsi în lucrare suficiente exerciții și probleme, de grade diferite de dificultate, care să le permită să facă suficiente aplicații pentru aprofundarea cunoștințelor de matematică.

Forma în care este realizată lucrarea o consider perfectibilă. De aceea, orice propunere sau sugestie de îmbunătățire a lucrării, din partea cititorilor, este binevenită.

AUTORUL

I. Mulțimi

1. Simboluri

Dăm mai jos câteva din simbolurile matematice pe care le vom utiliza în rezolvarea unor exerciții și probleme.

Elementele unei mulțimi se scriu între acolade $\{ \}$.

Exemple: a) $\{1, 2, 7, 10\}$; $\{a, b, c\}$;
b) $\{\text{albinele dintr-un roi}\}$;
c) $\{\text{oile dintr-o turmă}\}$;
d) $\{\text{porumbeii dintr-un stol}\}$;
e) $\{\text{copiii dintr-o familie}\}$;
f) $\{\text{elevii dintr-o clasă}\}$;
g) $\{\text{numerele naturale}\}$.

Se observă din exemplele de mai sus că mulțimile pot fi notate (prezentate, descrise) în două moduri:

- a) prin enumerarea elementelor (exemplele a);
- b) printr-o proprietate comună a elementelor (exemplele b), c)...g)).

$\in$ = aparține; $\notin$ = nu aparține

Exemple: considerăm mulțimile $A = \{a; b; c\}$; $B = \{1; 2; 3\}$.

Se scrie $a \in A$; $b \in A$; $2 \notin A$; $3 \in B$; $c \notin B$, după cum elementele se află sau nu în mulțimile respective.

La notarea unei mulțimi printr-o proprietate comună folosim scrierea

$$A = \{x \in N \mid x < 4\}$$

care se citește astfel: A este mulțimea elementelor x care aparțin numerelor naturale mai mici decât numărul natural 4.

$\Rightarrow$ semnul de implicație

Ex: Dacă $x = y \Rightarrow y = x$ și se citește: dacă x este egal cu y rezultă că y este egal cu x .

$\subset$; $\supset$ pentru incluziune

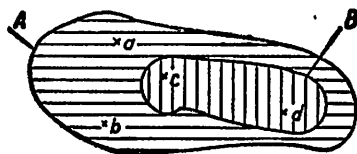


Fig. I.1

Dacă $A = \{a; b; c; d\}$ și $B = \{c; d\}$ scriem: $B \subset A$ sau $A \supset B$; se citește B este inclus în A sau A include pe B sau B este o *submulțime* a mulțimii A (fig. I.1). $A \not\subset B$ (A nu este inclus în B).

$\cap$ semnul pentru intersecția de mulțimi

Ex: $A = \{a; b; c; 2; 3\}$, $B = \{a; b; 5; 8\}$, $A \cap B = \{a; b\}$
 se citește A intersectat cu B ne dă mulțimea elementelor comune celor două mulțimi, în cazul nostru $\{a; b\}$.

$\emptyset$ semnul pentru mulțime vidă (nu conține nici un element)

Ex: mulțimile $A = \{2; 7; 8; 9\}$ și $B = \{4; 5; 60\}$
 nu au nici un element comun; se poate scrie

$$A \cap B = \emptyset.$$

$\cup$ pentru reuniune de mulțimi

Ex: $A = \{1; 2; 3; a; b\}$; $B = \{2; 3; c; d\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; a; b; c; d\}$ (elementele celor două mulțimi reunite).

$\sim$ semnul de echivalență

între elementele a două mulțimi: dacă fiecărui element dintr-o mulțime A îi corespunde un element și numai unul dintr-o mulțime B și reciproc se spune că între elementele celor două mulțimi există o corespondență biunivocă și atunci cele două mulțimi sînt echivalente și se notează $A \sim B$.

Ex: $A = \{a; b; c\}$, $B = \{1; 2; 3\}$. (figura 1.2)

Observare. Două mulțimi A și B cu un număr finit de elemente trebuie să aibă același număr de elemente ca ele să fie echivalente.

Ex. La începutul anului școlar elevii din clasa întâi sînt conduși într-o clasă în care se află un număr de măsuțe egal cu numărul elevilor. Fiecare elev se așază la o măsuță; nu mai rămîne nici un elev fără măsuță și nici vreo măsuță liberă.

a) Mai întîi remarcăm două mulțimi

$A = \{\text{mulțimea elevilor de clasa întâi intrați în clasă}\}$

$B = \{\text{mulțimea măsuțelor}\}$

b) Între elementele acestor mulțimi (elevi și măsuțe) se stabilește o legătură și anume fiecărui elev îi corespunde o măsuță și fiecărei măsuțe îi corespunde un elev. Mulțimile în acest caz sînt echivalente și se notează $A \sim B$.

Fiind date mulțimile A și B , mulțimea elementelor care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B se numește diferența dintre mulțimea A și B și se notează:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

Exemple:

a) $A = \{2; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$;

$A - B = \{2; 3\} = A$ căci $A \cap B = \emptyset$.

b) $C = \{4; 2; 6; 8\}$; $D = \{6; 4; 8; 10; 12\}$.

$C - D = \{2\}$ iar $D - C = \{10; 12\}$.

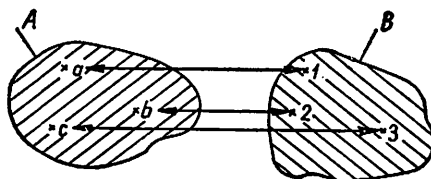


Fig. 1.2

Observare. $C - D \neq D - C \Rightarrow$ diferența a două mulțimi nu este comutativă. $C - D$ și $D - C$ nu au elemente comune $\Rightarrow (C - D) \cap (D - C) = \emptyset$ sau cele două mulțimi sînt *disjuncte*.

Dacă $B \subset A$, atunci diferența $A - B$ se mai numește complementara mulțimii B față de A și se notează cu semnul

$$C_A B.$$

Citeva exemple vor pune în evidență notația de mai sus.

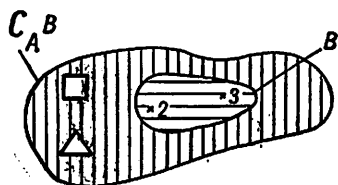


Fig. I.3

a) $A = \{\triangle; \square; 3; 2\}; B = \{3; 2\}.$

Se observă că

$$A - B = \{\triangle; \square\} = C_A B \quad (\text{fig. I.3})$$

b) Fie mulțimile:

$$A = \{2; 5; 4\}; B = \{2; 5; 4; 6\}.$$

$$\text{Avem } A - B = \emptyset; B - A = \{6\} \text{ sau}$$

$$C_B A = \{6\};$$

c) $A = \{a; b; c; d\}; B = \{a; d\}$

$$A - B = \{b; c\} \text{ sau } C_A B = \{b; c\}.$$

$$B - A = \emptyset \quad (\text{fig. I.4})$$

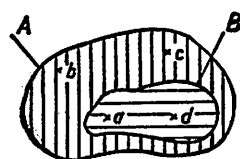


Fig. I.4

Card A sau $\overline{A}$ (Cardinalul mulțimii A).

Cardinalul unei mulțimi finite arată câte elemente are acea mulțime.

Ex. $A = \{a; b; c; d; m\}$; cardinalul mulțimii A este 5.

Card $\emptyset = 0$ (zero); Card $\{0\} = 1$; Card $\{0; 1\} = 2$.

Cardinalul unei mulțimi este un număr natural.

2. Propoziții

O propoziție poate fi *adevărată* sau *falsă*.

Ex: numărul 4 este mai mic decît numărul 5; ($4 < 5$) este o propoziție adevărată.

Numărul 8 este mai mare decît numărul 12; ($8 > 12$) este o propoziție falsă.

Spunem că valoarea de adevăr a unei propoziții este *adevărul* dacă propoziția este adevărată și că valoarea de adevăr a unei propoziții este *falsul*, dacă ea este falsă.

Prin negația unei propoziții se schimbă valoarea ei de adevăr: propoziția adevărată devine falsă, iar propoziția falsă devine adevărată.

În matematică propozițiile se studiază numai din punctul de vedere al valorii de adevăr.

Propozițiile le vom nota cu literele: $p; q; r; s; p_1; p_2$ etc.

Ex. Fie mulțimea $A = \{m; n; c; d\}$ și propozițiile

$$p : m \in A; p_1 : n \in A; p_2 : d \notin A.$$

Propozițiile p și p_1 sînt adevărate, valoarea lor de adevăr este adevărul, propoziția p_2 are ca valoare de adevăr falsul.

Exerciții

1) Se dă egalitatea $\{a; 3; 4\} = \{5; 3; 4\}$

a) Să se găsească numărul a în așa fel ca propoziția să fie adevărată;

b) Să se determine valorile lui a ca propoziția să fie falsă.

R. a) $a = 5$,

b) orice număr diferit de 5.

2) Fie mulțimea $A = \{7; 8; 5; 9; 12; 17\}$ și propoziția

$$p: x \in A, 3/x$$

propoziția p poate fi adevărată sau falsă. Valoarea ei de adevăr depinde de elementul x ce aparține lui A .

Dacă x este unul din numerele 9 sau 12 atunci propoziția este adevărată, în caz contrar ea este falsă. Trebuie să precizăm ce număr este $x \in A$ în condițiile puse de problemă (ca să fie divizibil prin 3).

3. Funcții

În lumea înconjurătoare sînt diferite feluri de mărimi. Unele mărimi au legături între ele, sînt dependente; de exemplu retribuirea unui muncitor depinde de numărul de zile lucrate, de calitatea muncii depuse precum și de alți factori; aria unei arene circulare depinde de mărimea razei cercului. Studiindu-se aceste legături, s-au stabilit unele *legi* care au condus uneori la *formule*; de ex.: aria cercului se află prin înmulțirea numărului π cu pătratul razei.

Să considerăm mulțimea $M = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ în care fiecare element reprezintă, în cm, mărimea laturii unui pătrat. Să aflăm ariile acestor pătrate; ele vor forma mulțimea

$$P = \{9; 16; 25; 36; 49\} \text{ (în cm}^2\text{)}.$$

Avem o *corespondență* între mulțimile M și P , stabilită prin formula $\text{Aria} = L^2$. Se spune că, din punct de vedere matematic, am alcătuit o *funcție*: M este mulțimea de definiție (numită domeniu de existență), P este mulțimea de valori (sau codomeniul) iar corespondența între cele două mulțimi se face prin formula

$$\text{Aria} = L^2.$$

Un alt exemplu de funcție: să considerăm numerele întregi cuprinse între 8 și 13; acestea sînt 9; 10; 11; 12. Să se afle mulțimea formată din întregul acestor numere. În cazul acesta domeniul de existență este mulțimea $A = \{9; 10; 11; 12\}$, codomeniul este mulțimea $B = \{27; 30; 33; 36\}$; iar corespondența între cele două mulțimi s-a făcut printr-o operație de înmulțire.

La alcătuirea unei funcții sînt necesare *două mulțimi și o lege de corespondență care să stabilească trecerea de la domeniul de existență la domeniul de valori*.

Funcțiile se notează cu literele f, g, h și altele sau cu simboluri matematice: $\log, \sin, \arccos, \dots$

În general, fie două mulțimi X, Y ; dacă facem ca oricărui element x din X să-i corespundă un element y din Y , și numai unul, spunem că am definit o funcție pe X cu valori în Y . Se mai spune: aplicație a lui X în Y . Dînd lui x diferite valori numerice, după voie, fără să ne preocupăm de ce valori ia y , putem spune că x variază independent de y sau că x este *variabila independentă* iar y este *variabila dependentă*.

Expresia matematică a funcției este $y = f(x)$ care arată corespondența între cele două mulțimi; mai putem exprima o funcție astfel: $f: X \rightarrow Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$, adică o funcție f definită pe X cu valori în Y .

* * *

Noțiunea de funcție este una din cele mai importante noțiuni din matematică și în epoca contemporană a calculatoarelor electronice cele mai multe aplicații ale tehnicii moderne folosesc această noțiune. Într-adevăr, orice studiu cantitativ al unor fenomene din natură sau din producție urmărește să stabilească corespondența între elementele a două mulțimi.

În cele ce urmează vom mai da câteva exemple de funcții și vom face unele observații.

— Lungimea unui cerc depinde de raza cercului și se știe că se calculează prin formula $L = 2\pi R$.

Dacă luăm pentru R valorile 2; 3; 4; (în metri) vom afla lungimile de 4π ; 6π ; 8π (în metri). În cazul de față

$$X = \{2; 3; 4\}; \quad Y = \{4\pi; 6\pi; 8\pi\}$$

și legea de corespondență $L = 2\pi R$. Deoarece la valori din ce în ce mai mari date lui R lungimea cercului crește, se spune că funcția este *crescătoare*. Variația unei funcții se poate înscrie într-un tablou, numit *tabloul de variație al funcției*; pentru exemplul precedent avem tabloul:

$$\begin{array}{c|ccc} R & 2 & 3 & 4 \\ \hline L & 4\pi & 6\pi & 8\pi \end{array}$$

— Să considerăm funcția $f(x) = x^2$, în care $x \in R$ și să atribuim lui x valorile crescătoare $2; 2\frac{1}{4}; 2\frac{1}{2}; 2\frac{3}{4}; 3; 3\frac{1}{4}$. Întocmind tabloul de variație avem:

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 2 & 2\frac{1}{4} & 2\frac{1}{2} & 2\frac{3}{4} & 3 & 3\frac{1}{4} \\ \hline f(x) & 4 & \frac{81}{16} & \frac{25}{4} & \frac{121}{16} & 9 & \frac{169}{16} \end{array}$$

Și în acest caz, pentru intervalul studiat, funcția este *crescătoare* (fig. I. 5a).

Putem considera fiecare pereche de valori ca fiind coordonatele unui punct din plan. Figurăm punctele și unindu-le printr-o linie continuă, se obține *graficul funcției*.

Studiul unei funcții prin tablou și apoi ilustrată prin grafic ajută la interpretarea unor fenomene din fizică, astronomie, cum se va constata mai târziu.

— Un alt exemplu:

Se știe că în cazul mișcării uniforme legea spațiilor se exprimă prin formula $S = vt$; de aici se poate deduce

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{sau} \quad t = \frac{s}{v}.$$

Să studiem cum variază timpul într-o asemenea mișcare, dacă viteza variază, spațiul rămânând constant (același).

De exemplu: distanța București — Ploiești (60 km) este parcursă de un autobuz, care are o viteză orară de 60 km în timp de o oră, un camion care

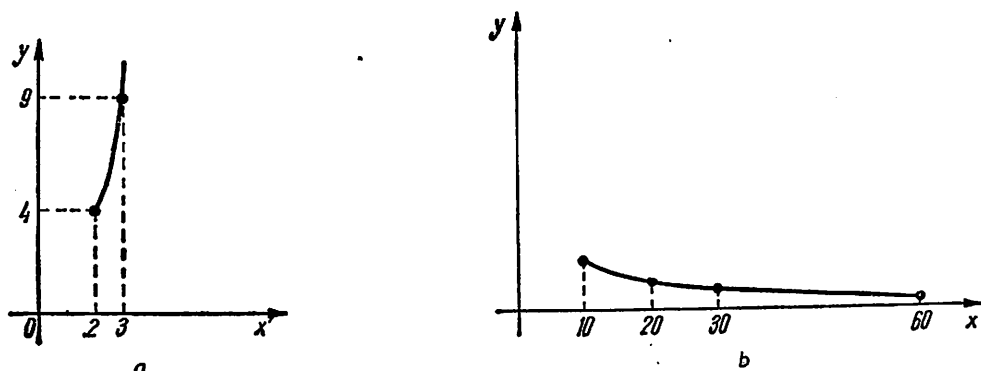


Fig. 1.5

are $v = 30$ km/h parcurge aceeași distanță în două ore, un altul care are $v = 20$ km/h parcurge același drum în 3 ore, un biciclist cu $v = 10$ km/h ar face aceeași distanță în 6 ore...

Putem alcătui următorul tablou în care

$$X = \{60; 30; 20; 10\} \text{ în km}$$

$$Y = \{1; 2; 3; 6\} \text{ în ore}$$

$\frac{v}{t}$	10	20	30	60
	6	3	2	1

Funcția este *descrescătoare*. Graficul, în care pe o axă notez unitatea — km și pe cealaltă unitatea — oră reprezintă o *linie curbă descendentă* (fig. 1.5 b)

* * *

În cele spuse privitoare la funcții am folosit numai exemple de *funcții numerice*, adică funcții în care X și Y sînt mulțimi de numere reale și legea de corespondență se poate exprima printr-o formulă. În clasele superioare se vor studia și alt fel de funcții.

II. Exerciții și probleme

1. Exerciții și probleme cu numere naturale

1. Scrieți 3 mulțimi.
2. Scrieți două exemple de mulțimi prin enumerarea elementelor fiecărei mulțimi.
3. Notați următoarele mulțimi:
 - a) Mulțimea literelor din care este compus cuvântul „mama”.
 - b) Mulțimea numerelor naturale mai mici ca 7.
 - c) Mulțimea numerelor naturale mai mari ca 8 și mai mici ca 14.
 - d) Mulțimea literelor cuvintelor: „tata”, „capcană”.

Menționați care din aceste mulțimi este descrisă prin enumerare și care din ele printr-o proprietate comună. Scrieți în două moduri mulțimile de mai sus.

4. Fie mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid 4 < x < 9\}$$

$$B = \{x \in N \mid 20 < x < 24\}$$

- a) Să se determine aceste mulțimi.
- b) Să se scrie cîte două elemente care aparțin mulțimilor date și cîte două care nu aparțin.

$$R. a) A = \{5; 6; 7; 8\},$$

$$B = \{21; 22; 23\};$$

$$b) \{5; 6\} \subset A; \{21; 22\} \subset B$$

5. Scrieți mulțimile literelor din care sînt alcătuite cuvintele: „car”, „rac”, „păr”, „pas”.

- a) Care din aceste mulțimi sînt egale și care nu; justificați răspunsul.

$$R. A = \{c; a; r\}; B = \{r; a; c\}; C = \{p; \ddot{a}; r\}; D = \{p; a; s\};$$

$$A = B \text{ (au aceleași elemente)} C \neq D \text{ (n-au aceleași elemente)}.$$

6. Fie mulțimile:

$$A = \{4; 5; x\}; B = \{4; 5; 8\}.$$

Să se determine x din mulțimea A astfel ca $A = B$.

$$\text{Fie } M = \{7; x; 8; b\}; N = \{b; 8; 7; 9\}.$$

Să se determine x în cazul cînd $M = N$.

$$R. x = 8; x = 9.$$

7. Care din următoarele mulțimi sînt egale și care nu?

$$A = \{1; 2; 3; a\}; B = \{2; 3; m; n\}; C = \{3; a; 1; 2\}.$$

$$R. A \neq B; A = C; B \neq C$$

8. Se dau mulțimile A, B, C , reprezentate ca în figura II. 1 a, b, c.

Să se scrie aceste mulțimi. Care din ele sînt egale și care nu sînt?

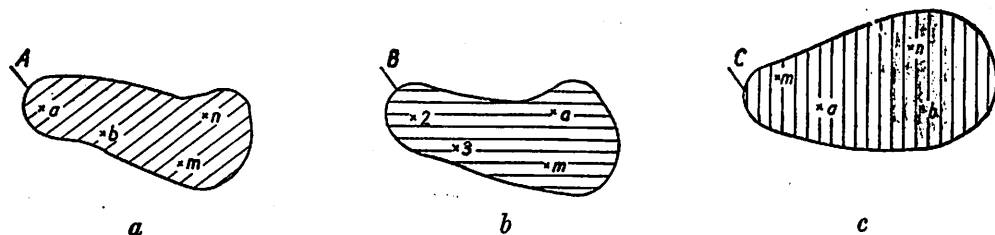


Fig. II.1

9. a) Să se pună în evidență prin grafic mulțimile ale căror elemente sînt literele cuvintelor „rame” și „mare”.
b) Să se compare aceste mulțimi.

R. b) Mulțimile sînt egale.

10. Să se pună în evidență graficul mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \text{ literă a cuvintului „literă”}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ literă a cuvintului „barieră”}\}.$$

Scrieți mulțimea M a elementelor comune ale celor două mulțimi.

$$R. M = \{\ddot{a}; e; i; r\}$$

11. Se dau mulțimile A și B reprezentate în figura II.2.

a) Să se scrie aceste mulțimi.

b) Să se scrie mulțimea C a elementelor comune.

$$R. a) A = \{2; 3; 4; 5\}$$

$$B = \{2; 4; a; b\}$$

$$b) C = A \cap B = \{2\}$$

12. Fie mulțimea $A = \{x \in N \mid x < 4 \text{ și } x \text{ să fie divizibil la } 5\}$.

$$R. A = \emptyset$$

13. Se dau mulțimile A și B ca în figura II.3.

Să se pună în evidență relațiile: $\emptyset$; $\subset$; $\supset$ a mulțimilor A și B .

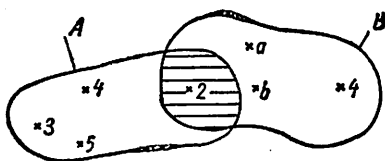


Fig. II.2

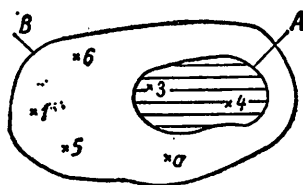


Fig. II.3

14. Se dau mulțimile:

$$A = \{2; 3; 5; a\}; B = \{5; a; 2\}.$$

Să se scrie că: B este o submulțime a mulțimii A ; B este inclus în A ; A include pe B .

15. Fie mulțimea $A = \{x \in N \mid 6 < x < 12\}$.

a) Să se formeze mulțimea submulțimilor mulțimii A .

16. Se dă mulțimea: $A = \{0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$

Să se scrie mulțimea $B = \{x \in A \mid x \text{ divizibil cu } 3\}$.

$$R. B = \{0; 3; 6; 12\}.$$

17. Să se determine mulțimea E știind că: $\{2, 3\} \subset E$, $\{4, 5\} \subset E$ și
 $E \subset \{2; 3; 4; 5\}$

R: $E = \{2; 3; 4; 5\}$

18. Avem mulțimea $A = \{2; 1; 4; 3\}$.

Să se determine x în fiecare din următoarele condiții:

a) $\{x; 2; 3; 4\} \subset A$

b) $\{2; x; 4\} \subset A$

c) $\{x; 2\} \subset A$

$$\text{R. } \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \text{ sau } x = 3 \\ x = 1 \text{ sau } x = 3 \text{ sau } x = 4 \end{cases}$$

19. Să se interpreteze relația:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

20. Fie mulțimile:

$$A = \{1; 3; 4; a; b\}; B = \{1; 3; a; c; m\}.$$

a) Să se determine $A \cup B$.

b) Să se facă graficul mulțimilor $A \cup B$.

R. a) $A \cup B = \{1; 3; 4; a; b; c; m\}.$

21. Se dă graficul mulțimii $M \cup N$ ca în figura II.4.

a) Să se scrie $M \cup N$.

22. Fie mulțimile: $A = \{a; b; m\}; B = \{a; m; c\}$.

Să se arate că $A \cup B = B \cup A$ (reuniunea este comutativă).

23. Fiind date mulțimile:

$$A = \{1; 2; 3\}; B = \{4; 5; 6\}; C = \{4; 8\}.$$

Să se arate că: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (reuniunea este asociativă).

24. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid x < 5\} \text{ și } B = \{x \in N \mid 2 < x < 8\}.$$

a) Să se determine elementele celor două mulțimi

b) Să se determine $A \cup B$.

$$\text{R. } \begin{cases} \text{a) } A = \{0; 1; 2; 3; 4\} \\ B = \{3; 4; 5; 6; 7\} \\ \text{b) } A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \end{cases}$$

25. Să se interpreteze relația:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

26. Se dau mulțimile:

$$A = \{a; b; 2; 3\}; B = \{2; 3; m; n\}.$$

Să se afle: $A \cap B$.

R. $A \cap B = \{2; 3\}.$

27. În figura II.5 este reprezentată intersecția mulțimilor A și B .

Să se scrie $A \cap B$.

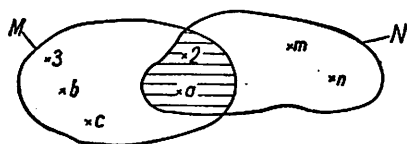


Fig. II.4

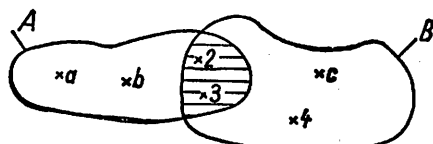


Fig. II.5

28. Dați exemplu de două mulțimi A și B pentru care:

$(A \cap B = \emptyset)$ (A și B disjuncte).

29. Dacă $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 11\}$.

a) Să se determine $A \cap B$.

b) Să se arate că $A \cap B = B \cap A$.

30. Fie mulțimile M și N reprezentate în figura II.6.

Să se determine $M \cap N$.

R. $M \cap N = \emptyset$.

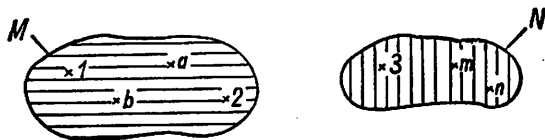


Fig. II.6

31. Se dau mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < x < 10\}$.

a) Să se scrie mulțimile enumerind elementele.

b) Să se determine $A \cap B$. Cum se numesc mulțimile în acest caz?

c) Este adevărat că $A \cap B = A \cup B$?

R. a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{8; 9\}$; b) $A \cap B = \emptyset$ (mulțimi disjuncte); c) Nu.

32. Fie mulțimile reprezentate ca în figura nr. II.7.

a) Scrieți o proprietate pe care o îndeplinește mulțimea B .

b) Scrieți o proprietate pe care o îndeplinesc elementele mulțimii $C_B A$.

c) Determinați $A \cap B$.

R. a) $B \subset A$; b) $C_B A = B - A = \emptyset$;

c) $A \cap B = B = \{3; 4; m\}$.

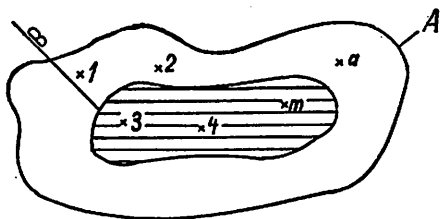


Fig. II.7

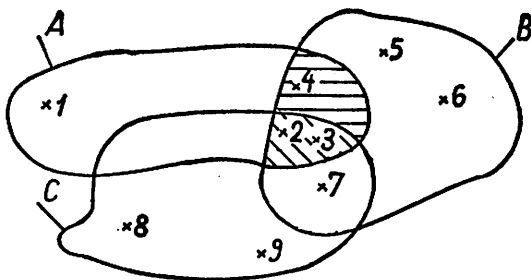


Fig. II.8

33. Fie mulțimile A , B și C reprezentate în figura II.8.

Să se scrie direct de pe figură mulțimile: $A \cap B$;

$B \cap C$; $(A \cap B) \cup C$; $(A \cup B) - (B \cap C)$; $(A \cap B) - (C \cap A)$; $A \cap (B - A)$;

R. $A \cap B = \{2; 3; 4\}$; $B \cap C = \{2; 3; 7\}$;

$(A \cap B) \cup C = \{2; 3; 4\} \cup \{2; 3; 7; 8; 9\} = \{2; 3; 4; 7; 8; 9\}$;

$(A \cap B) - (B \cap C) = \{2; 3; 4\} - \{2; 3; 7\} = \{4\}$;

$(A \cup B) - (C \cap A) = \{1; 4; 5; 6; 7\}$;

$A \cap (B - A) = \{\emptyset\}$.

34. Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3; a; b\}$; $B = \{1; 2; 3; m; c\}$.

a) Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.

b) Să se reprezinte grafic $A \cup B$ și $A \cap B$.

c) Mulțimile A și B sînt egale? Dați exemple de mulțimi egale..

R. a) $\{1; 2; 3; a; b; c; m\}$; $\{1; 2; 3\}$;

c) $A \neq B$ (nu au aceleași elemente).

35. Se consideră a, b, c, x, y, z cifre și operațiile:

$$\begin{array}{r} a\ 5\ 4\ 3\ + \\ 3\ b\ 5\ 6 \\ 1\ 1\ c\ 1 \\ \hline 7\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x\ 3\ 4\ 5\ + \\ 1\ y\ 6\ 2 \\ 5\ 7\ z\ 1 \\ \hline 9\ 5\ 3\ 8 \end{array}$$

Cifrele a, b, c , determinate le considerăm elementele mulțimii A , iar cifrele x, y, z ca elemente ale mulțimii B .

a) Să se scrie aceste mulțimi.

b) Să se determine mulțimile $A \cup B$ și $A \cap B$. Să se pună în evidență relațiile de incluziune între aceste mulțimi.

R. a) $A = \{2; 4; 1\}$; $B = \{2; 4; 3\}$.

b) $\{1; 2; 3; 4\}$; $\{2; 4\}$; $A \subset B$.

36. Se consideră operațiile:

$$\begin{array}{r} 5\ x\ 2\ z\ - \\ 1\ 2\ y\ 3 \\ \hline 4\ 4\ 6\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a\ 2\ 4\ b\ - \\ 1\ c\ 2\ 5 \\ \hline 1\ 8\ 1\ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8\ m\ 2\ - \\ 3\ 6\ n \\ \hline 4\ 8\ 8 \end{array}$$

x, y, z, a, b, c, m, n reprezintă cifre și sînt considerate elementele mulțimilor D, M și P . Ele au fost șterse și menționate cu literele respective după ce s-au efectuat scăderile respective.

a) Să se determine: $(D \cup M) \cap P$ și $(M \cup P) \cap D$.

b) $D \cup M \cup P$ și $(D \cap M) \cup P$.

R. $D = \{7; 6; 5\}$; $M = \{3; 1; 4\}$; $P = \{5; 4\}$;

a) $(D \cup M) \cap P = \{4; 5\}$; $(M \cup P) \cap D = \{5\}$;

b) $D \cup M \cup P = \{1; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $(D \cap M) \cup P = \{P\}$.

37. a) Să se afle prin altă operație în afară de împărțire care din împărțirile următoare se fac exact. Justificați răspunsul:

$$1\ 440 : 36; 2\ 836 : 315; 15\ 120 : 168; 792 : 144.$$

b) Factorii primi ai fiecărui împărțitor din împărțirile menționate mai sus sînt considerați elemente ale mulțimilor A, B, C, D .

Să se determine: $A \cup B \cup C \cup D$; $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; $(A \cup B \cap C) \cap D$.

R. b) $\{2; 3; 5; 7\}$; $\{2; 3; 7\}$; $\{2; 3\}$.

38. a) Fără a efectua împărțirea să se spună ce rest va rămîne la împărțirea numărului 27 346 la 5, la 9, la 10, la 25.

b) Aceeași întrebare pentru numărul 591 427.

c) Resturile împărțirilor și împărțitorii menționați la a) sînt considerate elementele mulțimilor A și B , iar la punctul b) C și D .

Să se determine următoarele mulțimi:

$(A \cup B) \cap (C \cup D)$; $(A \cup D \cap C) \cup B$; $(A \cup B \cup C \cup D) \cap (A \cup D)$.

R. c) $A = \{1; 4; 6; 21\}$; $B = \{5; 9; 10; 25\}$; $C = \{2; 1; 7\}$; $D = B$.

39. Fie mulțimea $A = \{v; e; v_1; c; u\}$ în care elementele reprezintă vrstele maxime pe care le poate avea o veveriță (v) ce trăiește cu 3 ani mai puțin decât iepurele (e), o vulpe (v_1) care trăiește de două ori mai mult decât iepurele, un cerb (c) care trăiește cu 10 ani mai mult decât vulpea și ursul (u) care trăiește cît cerbul și vulpea împreună; toate pot trăi un număr x de ani, mai mare decît 110 și mai mic decît 120.

Să se determine elementele mulțimii A .

$$R. A = \{7; 10; 20; 30; 50\}$$

40. Notăm cu A numărul creioanelor dintr-o cutie.

Se știe că $200 < A < 300$. Cîte creioane sînt în cutie știind că A conține un număr întreg de zeci și un număr întreg de duzini?

$$R. A = 240.$$

41. Cel mai mic multiplu comun a două numere este 720, cel mai mare divizor comun al lor este 60. Care este cel de-al doilea număr dacă primul este 240?

$$R. 180.$$

42. Se dau mulțimile ca în schema din figura II.9.

Să se pună în evidență relațiile de: $\cup$; $\cap$ și $\subset$ ale mulțimilor A, B, C, D .

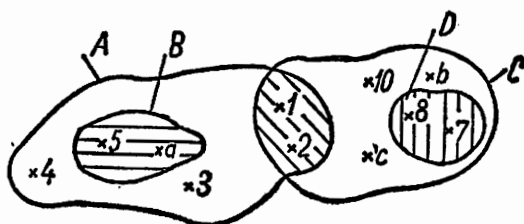


Fig. II.9

43. Din două roți dințate angrenate, una are 28 de dinți, iar cealaltă 16 dinți. Înainte de a începe să se miște, se înseamnă cu creta doi dinți ai acestor roți care se ating.

După cîte învîrtituri ale ambelor roți se va repeta poziția de la început a acestor semne?

$$R. 4 \text{ și } 7 \text{ învîrtituri.}$$

44. S-a planificat în trei zile un antrenament pe un hipodrom unde se aflau 12 cai. Au fost chemați pentru antrenament 32 de călăreți care s-au prezentat astfel: în prima zi au venit cu patru călăreți mai puțin decît au venit a doua zi; în a treia zi au venit cu trei călăreți mai puțin decît trei sferturi din călăreții veniți în prima și a doua zi.

Cîți călăreți s-au prezentat în fiecare zi?

$$R. 8; 12; 12.$$

45. La un I.M.A. erau pregătite pentru arat 50 de tractoare pentru a ara un lot planificat în 4 zile cu un număr de 180 de tractoriști repartizați pe 4 schimburi. În prima zi s-au prezentat cu 5 tractoriști mai puțin decît s-au prezentat a doua zi (la al doilea schimb). În schimbul patru (a patra zi) s-au prezentat cu cinci tractoriști mai puțin decît în schimbul trei; iar în schimbul trei s-au prezentat cu 10 tractoriști mai mult ca în prima zi.

Cîți tractoriști s-au prezentat în fiecare zi?

$$R. 40; 45; 50.$$

46. Un teren de formă dreptunghiulară cu perimetrul de 100 m are lungimea de 4 ori mai mare decît lățimea.

Terenul este împrejmuțit cu un gard fixat pe pari, puși la un metru unul de altul. Pe acest teren s-a cultivat ceapă, cartofi, și roșii astfel: suprafața cultivată cu cartofi este de două ori și jumătate mai mare decât suprafața cultivată cu ceapă, iar suprafața cultivată cu roșii, este cu 20 m^2 mai mică decât jumătate din suprafața cultivată cu ceapă și cartofi împreună. Dintr-un stol de ciori, un sfert din ele s-au așezat pe pari ce înconjurau terenul (pe fiecare par cite o cioară).

Se cere: a) Cite ciori a avut stolul? b) Ce suprafețe s-au cultivat cu: ceapă, cartofi și roșii?

R. a) 400 ciori; c) 80 m^2 ; 200 m^2 ; 120 m^2 .

47. Un stadion are scaune pentru spectatori la peluze, la tribuna întâi și la tribuna doi. La începerea filmului toate scaunele erau ocupate astfel: în peluze erau de două ori mai mulți spectatori și încă 40 decât la tribuna întâi. La tribuna a doua cu 70 de spectatori mai puțini decât jumătate din numărul de spectatori din peluze și tribuna întâi. Se știe că la acest spectacol s-au încasat 1 760 de lei din vânzarea билетelor, toate vindute cu 4 lei biletul.

Să se determine numărul spectatorilor din fiecare din cele trei sectoare.

R. La peluze 240; tribuna I 100; tribuna a II-a 100.

48. La un concurs de ciclism s-au prezentat la stadion o mulțime de cicliști în trei etape. Prima oară au sosit cu 5 cicliști mai mulți decât a treia parte din numărul de cicliști ce au venit a doua oară. A treia oară au sosit cu 15 cicliști mai puțini decât cei prezenți prima oară. La ora programată toți cicliștii au pornit în cursă fiecare cu bicicleta lui. La locul startului s-au înapoiat numai 30 de cicliști căci 15 au abandonat cursa pe traseu. Notăm mulțimea totală a cicliștilor cu C , a cicliștilor sosiți la stadion întâia oară cu C_1 , a doua oară cu C_2 și a treia oară cu C_3 .

De asemenea B ; B_1 ; B_2 ; B_3 mulțimile bicicletelor respective.

a) Determinați mulțimile C ; C_1 ; C_2 ; C_3 .

b) Stabiliți relațiile de corespondență biunivocă între aceste mulțimi.

49. Se dă mulțimea:

$$A = \{x \in N \mid 60 < x < 84\}.$$

Să se determine submulțimea $B = \{x \mid x \text{ să fie divizibil prin } 7\}$.

R. $B = \{63; 70; 77\}$.

50. Să se determine mulțimea $A = \{x \in N \mid 10 < x < 20\}$ ale cărei elemente adunate la 8 356 să dea un număr divizibil cu 2 și 5. Justificați răspunsul.

R. $A = \{14\}$.

51. Să se determine mulțimea $B = \{x \in N \mid 20 < x < 30\}$ ale cărei elemente scăzute din numărul 85 912 să dea un număr divizibil cu 2 și 5. Justificați răspunsul.

R. $B = \{22\}$.

52. Se dă mulțimea $A = \{x \in N \mid 340 < x < 380\}$. a) Ce număr din A este divizibil cu 2, 5 și 6. b) Acest număr reprezintă în metri perimetrul unui teren sportiv, pe care un biciclist l-a parcurs de mai multe ori consecutiv, până a parcurs 10 km.

La terminarea cursei s-a oprit biciclistul la punctul de plecare sau nu?

R. 360; Nu.

53. Dintr-o fișie de postav lungă de 6,42 m și lată de 5 cm, se taie pătrate cu latura de 5 cm, pentru matricolele a 129 de elevi.

A primit fiecare elev cite o matricolă sau nu?

R. Nu.

54. După o întrecere pe un timp limitat între trei echipe de câte 10 țesătoare fiecare, situația era următoarea: Prima echipă a lucrat de 4 ori mai mult decât a doua și a produs cu 30 metri de țesătură mai mult decât aceasta. A treia echipă a lucrat de 5 ori mai puțin decât a lucrat prima și a doua echipă împreună. Câți metri a lucrat fiecare echipă?

R. I = 40; II = 10; III = 10.

55. Un vânător a afirmat că mulțimea picioarelor de iepuri vinați de el într-un sezon este numărul ale cărui cifre sînt elementele unei mulțimi A obținute prin reuniunea mulțimilor: $B = \{1; 2; 3\}$ și $C = \{1; 2; 5; 3\}$. Care este ordinea elementelor mulțimii $B \cup C$ (elementele în ordinea scrisă fiind considerat un număr $\in N$) în situația că vânătorul a mințit și în situația că ar fi spus adevărul.

56. Se dau mulțimile: $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{3; 4; 5; 6\}$.

a) Să se determine $A \cup B$.

b) Să se reprezinte schema prin desen a celor două mulțimi.

c) Să se determine $A \cap B$.

R. a) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; c) $\{3; 4\}$

57. Dintr-o bucată de stofă s-au vîndut 40 de metri, iar din altă bucată de altă calitate s-au vîndut 50 m și s-a încasat în total suma de 21 000 lei. Cît costă un metru din fiecare bucată de stofă, dacă pentru 1 m din prima bucată s-a plătit de 4 ori mai puțin decît pe 1 m din a doua bucată.

R. 87,50 lei; 350 lei.

58. Fie mulțimile A și B reprezentate ca în figura II.10

a) Să se scrie elementele care aparțin mulțimii A și mulțimii B .

b) Să se scrie, enumerînd elementele sale, mulțimea $A \cup B$.

59. S-au cumpărat 4 metri de stofă de calitatea a II-a și 3 m de stofă de calitatea I cu suma de 1 700 lei. Altă dată s-au cumpărat 2 m de stofă de calitatea a II-a și 5 m de stofă de calitatea I plătindu-se suma de 1 900 lei (cu aceleași prețuri unitare). Cît costă metrul de stofă de calitatea I și a II-a?

R. 300; 200 lei.

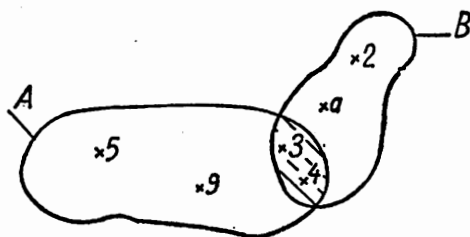


Fig. II.10

60. Se dau mulțimile:

$A = \{\square; \circ; \triangle; 10\}$, $B = \{x \in N \mid 9 < x < 16\}$, $C = \{x \in N \mid x < 20;$
 $x \text{ se împarte exact la } 5\}$

a) Scrieți cite două elemente care aparțin fiecăreia din mulțimile date și cite unul care nu aparține.

b) Să se determine: $B \cup C$; $A \cup C$; $(A \cup B) \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$;

c) Să se reprezinte prin desen $B \cup C$ și $B \cap C$.

61. S-au amestecat 9 kg de bomboane de 18 lei/kg cu 3 kg de bomboane de 27 lei/kg. Cît costă 1 kg de amestec?

R. 20,25 lei.

62. Să se afle aria terenului dreptunghic al cărui perimetru este 140 hm știind că lungimea este cu 100 dam mai mare decît lățimea.

R. 1 200 ha.

63. 180 kg de pere și 66 kg de struguri costă în total 936 lei. Un kg de struguri costă de două ori mai mult ca un kg de pere.
Cît costă 1 kg de pere și cît costă 1 kg de struguri?

R. 3; 6 lei.

64. Se dă mulțimea $M = \{x \mid x \text{ este literă a cuvîntului mama}\}$.

- Să se scrie și să se reprezinte prin desen elementele mulțimii.
- Se dau mulțimile: $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$. Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.
- Să se dea un exemplu de mulțime cu un singur element.

65. Două trenuri trec unul pe lângă altul în sens invers, primul trece cu o viteză de 40 km pe oră. Un călător din primul tren a observat că al doilea tren a trecut pe lângă el în 3 secunde. Să se determine viteza trenului al doilea, știind că lungimea lui este de 75 m.

R. 50 km/oră.

66. Se dau mulțimile A, B, C ca în graficele de mai jos (fig. II.11).
Să se determine: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$.

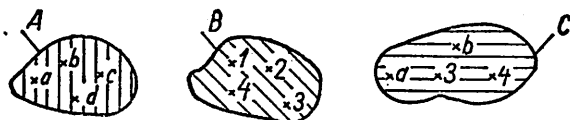


Fig. II.11

67. Un elicopter a efectuat un zbor de la un punct la altul cu viteza medie de 180 km/oră; dacă și-ar fi mărit viteza cu 20 km la oră atunci ar fi efectuat același drum cu 30 minute mai repede.
Să se afle distanța între aceste puncte.

R. 900 km.

68. Să se scrie mulțimile enumerînd elementele:

$$A = \{x \in N \mid 50 < x < 65\},$$

$$B = \{x \in N \mid x < 12 \text{ și se împarte exact la } 2\}.$$

69. Pe trei rafturi sînt 320 de cărți astfel: pe primul raft sînt cu 40 de cărți mai puține decît pe raftul doi, iar pe raftul trei sînt de două ori mai multe cărți decît pe raftul II.
Cite cărți sînt pe fiecare raft?

R. 50; 90; 180 cărți.

70. Se dau mulțimile:

$$A = \{2,03 \text{ dm}; 0,256 \text{ dam}; 524 \text{ cm}\}, B = \{524 \text{ cm}; 0,21 \text{ hm}; 2,03 \text{ dm}\}.$$

Să se calculeze suma, exprimată în metri a elementelor din $A \cup B$ și $A \cap B$.

71. Suma a patru numere este de 520. Al doilea număr este de două ori mai mare față de primul plus 40. Al treilea număr este jumătate din al doilea număr, iar al patrulea număr este jumătate din al treilea.
Să se exprime sub formă de mulțime cele patru numere.

R. {100; 240; 120; 60}.

72. În trei saci sînt 525 nuci. În primul sac sînt de două ori și jumătate mai puține nuci ca în al doilea sac, iar în sacul al treilea sînt jumătate din nucile din primul sac împreună cu al doilea.
Cîte nuci sînt în fiecare sac?

R. {100; 250; 175}.

73. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \mid x \text{ literă a cuvîntului „anina”}\}.$$

$$A_1 = \{x \mid x \text{ literă a cuvîntului „aninare”}\}$$

$$A_2 = \{x \mid x \text{ literă a cuvîntului „registru”}\}$$

Să se scrie mulțimile A ; A_1 ; A_2 :

R. $A = \{a; n; i\}$; $A_1 = \{a; n; i; r; e\}$; $A_2 = \{r; e; g; i; s; t; u\}$.

74. La trei magazine s-au adus 520 q de făină. Dacă din primul magazin s-ar fi vîndut 165 q, din al doilea 125 q, iar din al treilea tot 125 q, atunci magazinelor le-ar fi rămas aceeași cantitate de făină. Ce cantitate de făină s-a adus în fiecare magazin?

R. 200; 160; 160 q.

75. Se dau mulțimile: $A = \{a; 2; 3; 4\}$ $B = \{b; 5\}$.
Să se arate că $A \cup B = B \cup A$ (comutativitate).

76. În două lăzi sînt 148 kg de mere. Dacă din prima ladă trecem 4 kg de mere în lada a doua, atunci în ambele lăzi va fi aceeași cantitate de mere.
Cîte kg de mere se află în fiecare ladă?

R. 78; 70 kg.

77. Fie mulțimile reprezentate mai jos în figura II.12.

Să se arate că $(A \cup C) \cup B = (A \cup B) \cup C$.

78. Trei persoane aveau împreună 450 lei. A doua persoană avea de trei ori mai mult ca prima și încă 20 de lei. A treia avea jumătate din suma celei de a doua fără 20 de lei.

Ciți lei avea fiecare persoană?

R. 80; 260; 110.

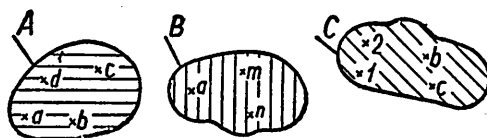


Fig. II.12

79. Să se găsească mulțimile X cu proprietatea că $\{3; 4\} \cup X = \{3; 4; 5\}$.

R. $X = \{5\}$; sau $\{3; 5\}$ sau $\{4; 5\}$ sau $\{3; 4; 5\}$.

80. Perimetrul unui dreptunghi este de 100 de metri. Să se afle dimensiunile acestui dreptunghi știind că lățimea este un sfert din lungimea sa.

R. 40 m; 10 m.

81. Se dă mulțimea $A = \{1354_8; 344_5\}$; $B = \{1754_8; 325_6\}$

Să se scrie în baza 10, $A \cup B$.

R. $A \cup B = \{358; 99; 1004; 125\}$.

82. Aria unui teren în formă de pătrat este de 900 m^2 . Câți pași făcuți cu piciorul sînt necesari pentru a înconjura acest teren știind că pentru 15 m sînt necesari 20 de pași?

R. 160 pași.

83. Se dau mulțimile: $A = \{1\,821_{10}; 687_{10}\}$
 $B = \{786_{10}; 1\,859_{10}\}$

Să se scrie $A \cup B$ astfel: $1\,821_{10}$ să se treacă în baza șapte, 687_{10} să se treacă în baza 8; 786_{10} să se treacă în baza 5 și $1\,859_{10}$ să se treacă în baza 6.

R. $5\,211_7; 1\,257_8; 11\,121_5; 12\,335_6$.

84. S-au vîndut 40 kg de mere cu 4 lei/kg și 3 lei/kg și s-a încasat 150 lei. Cîte kg de mere de 4 lei și cîte de 3 lei s-au vîndut?

R. 30; 10 kg.

85. Mama este de trei ori mai în vîrstă decît fiica, iar tatăl are atîția ani cît mama și fiica împreună.

Cîți ani are fiecare dintre ei, știind că suma anilor celor trei este egală cu cel mai mic număr de trei cifre plus 4?

R. 13 ani; 39 ani; 52 ani.

86. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid x \text{ se împarte exact la } 6 \text{ și } x < 40\}$$

$$B = \{x \in N \mid x \text{ se împarte exact la } 8 \text{ și } 10 < x < 60\}$$

$$C = \{x \in N \mid x \text{ se împarte exact la } 10 \text{ și } 11 < x < 15\}$$

Să se calculeze: $A \cup B$; $(A \cup B) \cup C$; $B \cup C$; $A \cup (B \cup C)$.

87. În trei ateliere ale unei fabrici lucrează 624 de muncitori. În primul atelier sînt de 5 ori mai mulți muncitori decît în al doilea iar în al treilea sînt tot atîția muncitori cît în primul și al doilea împreună.

Cîți muncitori sînt în fiecare atelier?

R. 260; 52; 312.

88. Se dau mulțimile:

$$A = \{a; b; c\}, B = \{a; 3; d\}. \text{ Să se determine } A \cap B; \text{ să se facă schema.}$$

89. Două depozite au împreună $3\,560 \text{ m}^3$ de lemne. Cînd s-au transportat 60 m^3 de lemne de la primul depozit la celălalt, au rămas în primul depozit cu 920 m^3 de lemne mai mult decît în al doilea.

Ce cantitate de lemne a fost la început în fiecare depozit?

R. $2\,300 \text{ m}^3$; $1\,260 \text{ m}^3$.

90. Se dau mulțimile $A = \{x \in N \mid x < 6\}$; $B = \{x \in N \mid 7 < x < 11\}$.
 Se cere $A \cap B$.

R. $\emptyset$.

91. O barcă merge în sensul curentului unui rîu cu o viteză de 12 km pe oră, iar împotriva curentului apei cu o viteză de 8 km pe oră. Să se afle viteza apei rîului.

R. 2 km pe oră.

92. Să se determine x astfel ca:

$$\{3; 2\} = \{1; 2; 3\} \cap \{3; x\}.$$

R. $x = 2$.

93. Media aritmetică a două numere este 46. Un număr este de trei ori mai mare decît celălalt. Să se afle cele două numere.

R. 23; 69.

94. Să se determine mulțimea $A = \{x \in N \mid x < 9\}$ în așa fel încât
 $\{x; 1; 2; 3\} \cap \{4; 2; 3\} = \{2; 3\}$.
R. $\{5; 6; 7; 8\}$.
95. Suma a două numere este 410; cîțul împărțirii numărului mai mare la cel mai mic este 7, iar restul 10.
 Să se exprime, sub formă de mulțime, aceste numere.
R. $\{50; 360\}$.
96. Să se determine mulțimea M , știind că $\begin{cases} M \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\} \\ M \cap \{1; 2; 3\} = \{1; 2\} \end{cases}$.
R. $M = \{1; 2; 4\}$.
97. Cîțul rezultat din împărțirea a două numere este 3 iar restul 10. Dacă se adună deîmpărțitul, împărțitorul, cîțul și restul, se obține 143.
 Să se afle deîmpărțitul și împărțitorul.
R. 100; 30.
98. Să se găsească mulțimea X știind că
 $X \subset \{1; 2; 3\}$ și $\{1; 2; 3\} \cap X = \{1; 2\}$.
R. $X = \{1; 2\}$.
99. Să se afle două numere a căror diferență este 9 256 iar cîțul împărțirii dintre ele este 27.
R. 356; 9 612.
100. Se dau mulțimile:
 $A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cap C = \{4; 5\}$. Să se calculeze mulțimea $A \cap (B \cup C)$.
R. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2; 3\} \cup \{4; 5\} = \{2; 3; 4; 5\}$.
101. Un număr este cu 12 mai mare decît un altul. Dacă se împarte numărul mai mare la cel mai mic, atunci cîțul este unu și rămîne un rest.
 Care este acel rest?
R. 12.
102. Suma a trei numere naturale este un alt număr pe care îl notăm cu litera b .
 Notăm primul număr cu litera a .
 Numărul al doilea este de trei ori mai mare decît primul, iar numărul al treilea este media aritmetică între primul și al doilea număr.
 Să se compare a cu b .
R. $a = \frac{b}{6}$.
103. Se dă mulțimea $A \cup (B \cap C) = \{2; 3; 4\}$ să se calculeze mulțimea $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
R. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2; 3; 4\}$.
104. Într-un depozit se află de 3 ori mai multă făină decît în al doilea. Să notăm cu a cantitatea de făină din primul depozit. Notăm cu b cantitatea de făină scoasă din primul depozit și cu c cantitatea de făină scoasă din al doilea depozit. Știind că în felul acesta am obținut în ambele depozite aceeași cantitate de făină, să se exprime cantitatea de făină din primul depozit prin b și c .
R. $a = \frac{3(b - c)}{2}$.

105. Fie mulțimile $A \cup B = \{a; m; n\}$; $A \cup C = \{m; b; c\}$.

Să se determine mulțimea $A \cup (B \cap C)$.

$$R. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a; m; n\} \cap \{m; b; c\} = \{m\}.$$

106. Notăm cu „ m ” suma a două numere. Cîtlul împărțirii numărului mai mare la cel mai mic este 6 iar restul îl notăm cu „ r ”. Să se exprime prin numerele „ m ” și „ r ” numărul cel mai mic.

$$R. \frac{m-r}{7}$$

107. Se dau mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 5\}$.

Să se determine: $A - B$ și $B - A$.

$$R. A - B = \{1; 4\} \quad B - A = \{5\}.$$

108. Cîtlul rezultat din împărțirea a două numere este 3, iar restul r . Notăm cu D deîmpărțitul cu I împărțitorul. Dacă se adună $D + I +$ cîtlul $+ r$ ne dă un număr reprezentat prin a .

Să se exprime numărul care reprezintă împărțitorul.

$$R. I = \frac{a - (2r + 3)}{4}.$$

109. Un kg de ceai și „ b ” pachete de biscuiți costă „ a ” lei. Un kg de ceai costă de 14 ori mai mult decît un pachet de biscuiți.

Să se exprime costul unui pachet de biscuiți și a unui pachet de ceai prin a și b .

Indicație. În loc de 1 kg de ceai putem cumpăra 14 pachete de biscuiți. $(b + 14)$ pachete de biscuiți costă „ a ” lei.

$a : (b + 14)$ costul unui pachet de biscuiți.

$$R. \frac{a}{b + 14} \cdot 14 \text{ costul unui kg de ceai.}$$

110. Fie mulțimile

$$A = \{a; 3; 2; b\}.$$

$$B = \{3; 2; 4; b\}.$$

Să se scrie $C = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

Să se scrie $A - B$ și $B - A$

$$R. C = \{a\};$$

$$A - B = \{a\} \quad B - A = \{4\}.$$

111. S-au cumpărat 3 stilouri și 5 pixuri cu 142 lei. Pentru 3 stilouri s-a plătit cu 2 lei mai mult decît pe 2 pixuri.

Să se afle prețul unui stilou și a unui pix.

Indicație. În loc de 3 stilouri putem cumpăra 2 pixuri și mai rămîn 2 lei. $(142 - 2)$ reprezintă costul a 7 pixuri.

$$R. 14 \text{ lei și } 20 \text{ de lei.}$$

112. Se dau mulțimile $A = \{2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Să se afle:

$$a) \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$$

$$b) \{x \mid x \notin A \text{ și } x \in B\}$$

$$R. a) \emptyset.$$

$$b) \{1\};$$

2. Operații cu fracții ordinare și zecimale

Rezolvarea unui exercițiu de aritmetică se poate face în ansamblu sau pe părți.

Forma de rezolvare în ansamblu este mai elegantă: ea însă cere din partea rezolvătorului o bună tehnică de calcul, multă atenție și o privire de ansamblu perfect formată asupra întregului exercițiu în timpul rezolvării lui.

Să se calculeze expresia:

$$1. E = 1 \frac{9}{20} - \frac{\left(0,645 : 0,3 - 1 \frac{107}{180}\right) \cdot \left(4 : 6,25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \cdot 1 \frac{24}{25}\right)}{1 - 2 \frac{4}{5} : 7}$$

Rezolvare.

$$\begin{aligned} 1 \frac{9}{20} - \frac{\left(2 \frac{3}{20} - 1 \frac{107}{180}\right) \left(\frac{4}{1} \cdot \frac{4}{25} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot 1 \frac{24}{25}\right)}{1 - \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{7}} &= \\ = 1 \frac{9}{20} - \frac{\left(1 \frac{207}{180} - 1 \frac{107}{180}\right) \cdot \left(\frac{16}{25} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{25}\right)}{1 - \frac{11}{35}} &= \\ E = 1 \frac{9}{20} - \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{18}{25}}{\frac{24}{35}} = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

2. Să se efectueze operațiile:

$$\left[\left(3 \frac{2}{3} + 1 \frac{7}{10}\right) : 8 \frac{1}{20} - \left(2 \frac{7}{23} - 1 \frac{45}{46}\right) \cdot \frac{23}{45}\right] + \frac{1}{2} + 1$$

R. 2.

$$3. \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] \cdot \frac{9}{2 \cdot 437} : \frac{1}{24^3}$$

R. 1.

$$4. \left[\left(1 \frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(1 \frac{1}{5} - \frac{7}{10}\right)^2\right] \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^3}{5 \cdot 2^3 \cdot 3^3}$$

R. 15.

$$5. \left(2 \frac{1}{2}\right)^3 - \left(1 \frac{1}{4}\right)^3 + \left(2 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{4}\right)^3 - 0,625$$

R. 15.

$$6. 3 \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} - \left[7 \frac{16}{142} - \left(12 \frac{80}{213} - 5 \frac{135}{426}\right)\right]\right\} \cdot 12 \frac{9}{17}$$

R. 7.

$$7. \left\{\left[\left(2 \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{7}\right] : \left[\left(40 - 38 \frac{4}{5}\right) : \frac{1}{5}\right]\right\} \cdot \left[\left(2 \frac{1}{2} : 1 \frac{1}{4}\right) : \left(1 \frac{1}{2} : 6 \frac{1}{4}\right)\right] - \frac{7}{18}$$

R. 1.

$$8. 70 \frac{3}{4} : \left\{ 30 \frac{1}{2} - \left[\frac{\left(8 \frac{5}{8} - 6 \frac{1}{4} \right) : 1 \frac{1}{5}}{2 \frac{2}{5} : \frac{4}{5} - 2 \frac{2}{3}} + \frac{67 \frac{1}{2} : 2 \frac{1}{7}}{4 \frac{1}{2} : 2 \frac{2}{3}} \right] \right\}$$

R. 12.

$$9. \frac{1}{\left(1 : \frac{2}{3} - 1 : 2 \frac{3}{5} \right) : 2 \frac{3}{13}} + \frac{(0,2)^3 - \frac{1}{125} + (0,1)^2}{(0,3)^3 + 0,973} : 10^2$$

R. 3.

$$10. \frac{\left(2 \frac{1}{2} - 1 \right) : 6 + \left(3 \frac{3}{4} - 1 \right) : 11 + \left(2 \frac{7}{9} - 1 \right) : 7 \frac{1}{9}}{\frac{1}{2 \frac{2}{3}} + \frac{1}{1 \frac{1}{7}} - \frac{1}{\frac{8}{9}}}$$

R. 6.

$$11. \frac{2 \frac{3}{5} - 1 \frac{3}{10}}{2 \frac{1}{2} - 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4}} + \frac{1}{3 \frac{3}{7} + \frac{1}{7}} + \frac{2 \frac{8}{9} \cdot 1 \frac{5}{13}}{3 \frac{51}{85} + 2 \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11} + \frac{24}{85}} - 2$$

R. 0.

$$12. \frac{49}{50} + \left[\left(3 \frac{2}{5} - \frac{10 - \frac{1}{4}}{3} \right) \cdot 1 \frac{3}{5} - \frac{1 \frac{1}{7} + \frac{1}{2}}{11 \frac{65}{77} + \frac{2}{33}} \right] 1 \frac{2}{3} : 15 \frac{1}{2}$$

R. 1.

$$13. \frac{\left(37 \frac{2}{5} - 18 \frac{6}{7} \right) \cdot 11 \frac{2}{3}}{13 \frac{4}{9} - 11 \frac{11}{18}} - \frac{\left(2 \frac{3}{20} - \frac{11}{30} \right) \cdot \frac{6}{7}}{\left(1 \frac{3}{100} - \frac{17}{20} \right) : 6 \frac{3}{10}} : 21 \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2 \cdot 5^4 \cdot 15}{5^0 \cdot 3^3}$$

R. 3/5.

$$14. \frac{1}{15} + \frac{\left(8 - 3 \frac{1}{4} \right) : 6 \frac{1}{3} + 9 \frac{1}{4}}{\left(12 \frac{2}{9} + \frac{5}{6} + 7 \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{27}{185}} + \frac{\left(20 - 31 \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7} \right) : 2 \frac{1}{5}}{\left(6 + 1 : \frac{3}{10} \right) \cdot \frac{15}{28}}$$

R. 4.

$$15. \frac{\frac{4}{5}}{\frac{30 \cdot 4 \frac{1}{4} - 11 \frac{1}{5} : 9 \frac{1}{3}}{14 : 2 \frac{2}{9} + 8 \frac{2}{5} \cdot 14 \frac{2}{7}}} : \frac{1 : 6 + 12 : 5}{2 \frac{1}{2} \cdot 15 - 4 \frac{13}{15} \cdot 7 \frac{3}{5}}$$

R. 1.

$$16. 1 \frac{1}{8} : \left(\frac{2 \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{5} \cdot 3 \frac{1}{3} + \frac{13}{36}} - \frac{1}{2 \frac{1}{2}} \right) : \frac{1}{1 \frac{1}{2}}$$

R. $\frac{5}{4}$.

$$17. \frac{\frac{5}{21} \cdot \frac{3}{5} + \frac{15}{28} : \frac{5}{84}}{10 + 5 : \frac{1}{2}} + \frac{2 : \frac{1}{2} + 3 : \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} : 2 + \frac{1}{3} : 3} : 36 - 1 \frac{16}{35}$$

R. 0.

$$18. \frac{\left(\frac{31}{63} + 5 \frac{1}{84} \right) - \left(3 \frac{5}{21} + 2 \frac{31}{252} \right) \cdot 24 : 1 \frac{1}{2} \cdot 4 \frac{3}{8}}{\left(1 \frac{15}{26} + \frac{1}{39} - \frac{7}{156} \right) \cdot 1 \frac{4}{9}} - \frac{4}{9}$$

R. 4.

$$19. 3,3(3) + \frac{(2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^4) : (3^3 \cdot 5^3 \cdot 2^5) - \frac{3}{4} + 2, (3) + \frac{22}{33}}{(489 \cdot 7 + 311 \cdot 7 - 777 \cdot 7 - 23 \cdot 7) + 2}$$

R. $6 \frac{1}{3}$.

Să se efectueze operațiile:

$$20. \left[\frac{13 : 3 \frac{3}{4} - \left(10 \frac{1}{2} : 1 \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{14} - \frac{29}{30}}{0,001 : \frac{1}{20} + 0,08} + 2,625 + \frac{3}{8} \right] : \frac{2^3 : 2^4}{0,5}$$

R. 13.

$$21. 2 \frac{3}{4} : \frac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{15} + \frac{2}{9} \right) \cdot 10 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{11} \left(2 \frac{2}{3} - 1 \frac{3}{4} \right) 7}{1 : \left[2 \left(0,002 : \frac{1}{50} \right) + \frac{1}{10} \right]} + \frac{9}{4}$$

R. 5.

$$22. \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{15}{16} \cdot \frac{14}{39} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{13}{21}} : \left(2 \frac{1}{8} \cdot 2 \frac{2}{7} \cdot 2 \frac{15}{17} \cdot 4 \frac{2}{3} : 196 \right) + 2,1(3) - \frac{2}{15}$$

R. 7.

$$23. 1 \frac{3}{5} : \frac{\left(1 : \frac{1}{40} \right) : (1 : 0,05) : (1 : 0,04) + 0,02}{(0,01 + 0,09 + 0,01) : \frac{1}{50}} \cdot \frac{5}{8}$$

R. 1.

$$24. \frac{\left[5 \frac{1}{84} + \frac{31}{63} - \left(2 \frac{31}{252} + 3 \frac{5}{21}\right)\right] \left[24 : \left(1 \frac{1}{2} : 4 \frac{3}{8}\right)\right]}{\left(1 \frac{15}{26} + \frac{1}{39} - \frac{7}{156}\right) : \left(20 \frac{1}{4} : 26\right)}$$

R. 5.

$$25. \frac{\left(\frac{2}{15} + 1 \frac{7}{12}\right) \cdot \frac{30}{103} - \left(2 : 2 \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{9}{32}}{0,014 + 0,086} : 2,5$$

1.

$$26. \frac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{45} + \frac{2}{9}\right) \cdot 10 \frac{1}{3} - \frac{12}{11} \cdot \left(2 \frac{2}{3} - 1 \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{28} - 1}$$

R. 14.

$$27. \frac{(1,09 - 0,29) \cdot 1 \frac{1}{4}}{\left(18,9 - 16 \frac{13}{20}\right) \frac{8}{9}} + \frac{(11,81 + 8,19) \cdot 0,02}{9 : 11,25}$$

R. 1.

$$28. \frac{\left(4,07 : \frac{1}{20} - 23,01 \cdot 0,06\right) : 4 + 0,0703 \cdot \frac{1}{2}}{\left(7,3745 : 3,01 - 1 \frac{1}{4}\right) \cdot 1,02 + 0,78}$$

R. 10

$$29. \frac{\left(4 \frac{11}{30} + \frac{17}{60} + \frac{7}{80} + 3 \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{50}{223} : \left(4 \frac{3}{5} - 2 \frac{7}{8}\right) \cdot \frac{23}{25}}{(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3) (5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^2) : (2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^6) + \frac{2}{5}}$$

R. 1.

$$30. \frac{0, (04) : 0, (40)}{7 + 3 \cdot \left(2 \frac{5}{9} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3}{13}} - \frac{120 - 20 : 4 + 5 - 114 - 6}{2 \cdot 364^2 \cdot 3 \cdot 042 : \left(\frac{29}{34}\right)^3}$$

R. $\frac{1}{90}$.

$$31. \frac{\left(\frac{2}{9} + \frac{14}{45} + \frac{7}{15}\right) \cdot 10 \frac{1}{3} - 1 \frac{1}{11} \cdot \left(2 \frac{2}{3} - 1 \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{28} - 1} + 2,62(3) - 1 \frac{187}{300}$$

R. 15.

$$32. \frac{\left(8,25 - \frac{3}{8}\right) : 3,5 + 3,125 - 3 \cdot 0,1(6)}{(5 - 4,4) : 0,1 - 4 - 1,375 : \frac{2,5}{3 \cdot \frac{1}{8}} + \frac{23}{32}}$$

R. $4 \frac{7}{8}$.

Să se verifice egalitățile:

$$33. \left(4\frac{1}{10} - 3\frac{4}{15}\right) : 1\frac{1}{5} = \frac{4\frac{1}{10}}{1\frac{1}{5}} - \frac{3\frac{4}{15}}{1\frac{1}{5}}$$

$$34. \frac{\left(2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{3}\right)^3}{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}} = \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} + \left(1\frac{1}{3}\right)^2$$

$$35. \left(3\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left[\left(3\frac{1}{2}\right)^2 - 3\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \cdot \left(3\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

Să se găsească x din egalitățile următoare:

$$36. 12\frac{1}{3} : \left\{ \left[2\frac{3}{4} : \left(3\frac{1}{3} - 1\frac{7}{8} \cdot x \right) \right] \cdot \frac{8}{11} + 1\frac{2}{3} \right\} = 5$$

$$\text{R. } x = \frac{4}{9}.$$

$$37. \left[10\frac{17}{40} - \left(12\frac{1}{2} - x \right) + 6\frac{47}{60} \right] : 22\frac{11}{36} - \frac{15}{22}$$

$$\text{R. } x = 10\frac{1}{2}.$$

$$38. \left\{ \left[4\frac{3}{5} - \frac{6\frac{1}{14}}{13\frac{1}{3} : \left(5\frac{1}{3} - x \right) - 3\frac{4}{7}} \right] \cdot \frac{9}{14} + 1\frac{1}{3} \right\} : 4\frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\text{R. } x = 3\frac{1}{5}.$$

$$39. 1, 1(3) x - \frac{(2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^8) : (3^4 \cdot 2^4 \cdot 5^9)}{\frac{3}{10}} = x + 1$$

$$\text{R. } x = 15.$$

$$40. \left[\frac{x+1}{0,75} + \frac{8(x+2)}{3} \right] \cdot \frac{3}{4} = x + 7$$

$$\text{R. } x = 1.$$

$$41. \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^3}}{2\sqrt{6}} : x = \frac{3}{5}$$

$$\text{R. } x = 5.$$

$$42. \frac{\frac{8}{4}}{x} + \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{3}} = \frac{25}{4}$$

$$\text{R. } x = 3.$$

$$43. \frac{\frac{x}{2} - 5}{\frac{x+8}{2}} + \frac{x-8}{2} = 2,1$$

R. $x = 12$.

$$44. \frac{5 : \left(3 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}} - \frac{1}{3}$$

R. $x = 2$.

$$45. 3 \cdot \frac{2}{5} - \left(\frac{1 \frac{1}{3}}{3 \frac{1}{3} - x} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9} \right) = \frac{2}{5}$$

R. $x = \frac{1}{3}$.

$$46. \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 1 \right) + 2 \right] - 1 \right\} + 1 = 1$$

R. $x = 2$.

3. Exerciții și probleme recapitulative

1. Un lot al unei cooperative agricole de producție a fost semănat astfel: pe $\frac{1}{3}$ din lot plus 10 ha s-au semănat cartofi: pe $\frac{4}{5}$ din rest, floarea-soarelui și pe $\frac{1}{8}$, cât a mai rămas din lot, varză.

- a) Să se afle aria fiecăreia din cele trei parcele.
b) Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.d.c. al celor trei numere ce reprezintă aria celor trei parcele.
c) Să se scrie mulțimea M în mai multe moduri.

Indicație. Primele două părți împreună fac $\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15}\right)$ din lot + 2 ha = $\frac{13}{15}$ din lot + 2.

Toată aceasta reprezintă: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ din lot.

Deci, cele 2 ha vor valora: $\frac{7}{8} - \frac{13}{15}$ din lot, adică $\frac{1}{120}$ din lot.

În consecință, lotul are 240 ha.

R. a) 90 ha; 120 ha; 30 ha; b) $M = \{3; 2; 5\}$; c) $M = \{2; 3; 5\}$;
 $M = \{5; 2; 3\}$; $M = \{2; 5; 3\}$.

2. Dintr-o cantitate de cărbune s-au consumat în prima lună $\frac{5}{16}$ și încă 3 t, în a doua lună $\frac{7}{24}$ și încă 2 t, iar în a treia s-a consumat restul, care cîntărea cu $2\frac{2}{3}$ t mai mult decît 0,3 din întreaga cantitate.
Care a fost întreaga cantitate?

Indicație. $3 + 2 + 2 \frac{2}{3} = \frac{23}{3} \text{ t}; \frac{5}{16} + \frac{7}{16} + \frac{3}{10} = \frac{217}{240}$ din cantitatea inițială

$$\frac{240}{240} - \frac{217}{240} = \frac{23}{240} \text{ repr. } \frac{23}{3} \text{ t.}$$

R. 80 t.

3. O persoană cheltuiește odată cu 4 lei mai puțin decît $\frac{3}{5}$ din ceea ce are, altă dată $\frac{1}{4}$ din rest plus 3 lei, iar apoi $\frac{2}{5}$ din noul rest plus 1,20 lei. I-au mai rămas 24 de lei.

a) Ce sumă a avut și cit a cheltuit de fiecare dată?

b) Sumele cheltuite în cele trei rînduri fiind considerate elementele mulțimii S să se scrie această mulțime.

Indicație. Aplicăm metoda mersului invers: Ultimul rest este de 24 de lei. La 24 lei adăugăm 1,20 lei, obținem 25,20 lei, ceea ce reprezintă $\frac{3}{5}$ din ce a rămas a treia oară; deci restul al treilea este:

$$24 + 1,20 = 25,20.$$

R. a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Suma inițială 140 lei;} \\ \text{Sume cheltuite: 80 lei, 18 lei, 18 lei;} \end{array} \right.$ **b)** $S = \{80; 18\}$.

4. Pentru instalarea luminii electrice în două camere s-a cumpărat sîrmă.

Pentru prima cameră s-a întrebuintat cu $2\frac{1}{2}$ m mai puțin decît jumătate din toată sîrma, iar pentru camera a doua, 0,9 din cantitatea folosită pentru prima cameră.

Cîți metri de sîrmă s-au cumpărat dacă au mai rămas $6\frac{1}{4}$ m?

Indicație. Dacă s-ar fi folosit și pentru camera a doua aceeași cantitate de sîrmă, ca pentru prima, ar fi rămas:

$$2\left(2\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ m de sîrmă.}$$

Pentru a doua cameră s-a folosit însă cu $6,25 - 5 = 1,25$ m de sîrmă mai puțin. 1,25 m reprezintă $\frac{10}{10} - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ din sîrma consumată la prima cameră. La prima cameră s-a consumat:

$$1,25 : \frac{1}{10} = 12,5 \text{ m.}$$

R. 30 m.

5. O mamă cu 2 copii au împreună 60 de ani.

a) Să se afle vîrsta fiecăruia dintre copii, știind că cel mai mare are de 3 ori vîrsta celui mai mic, și că mama are dublul sumei vîrstelor copiilor.

b) Considerăm elemente ale mulțimii M , numerele care reprezintă vîrstele copilului mic, copilului mare și mamei. Să se determine această mulțime.

Indicație. Știind că mama are vîrsta de două ori mai mare decît suma vîrstelor copiilor, înseamnă că din cei 60 de ani, mama are $\frac{2}{3}$; copiii împreună, $\frac{1}{3}$; deci mama are

40 de ani și copiii împreună 20 de ani. Din acești 20 de ani, copilul mai mare, va avea $\frac{3}{4}$ iar cel mai mic $\frac{1}{4}$.

R. $\begin{cases} \text{a) } 15 \text{ ani; } 5 \text{ ani} \\ \text{b) } M = \{5; 15; 40\}. \end{cases}$

6. Ce oră este dacă mai rămân din zi $\frac{5}{3}$ din ceea ce a trecut? (Ziua se consideră de 24 de ore și începe la 12 noaptea.)

Indicație. Considerînd ceea ce a trecut din zi ca un întreg, deci $\frac{3}{3}$, și ceea ce mai este (din datele problemei) $\frac{5}{3}$, avem ziua întreagă formată din $\frac{8}{3}$ din ceea ce a trecut.

Deci $\frac{8}{3}$ reprezintă 24 de ore.

R. ora 9.

7. Trei brigăzi au de arat împreună 396 ha de pămînt. Prima brigadă are de arat $\frac{1}{2}$ din cît are a treia, iar a doua are de arat $\frac{1}{3}$ din cît are a treia brigadă.

Cîte hectare de pămînt are de arat fiecare brigadă?

Indicație. Întrebuițăm metoda falsei ipoteze.

Admitem că cea de a treia brigadă are de arat 54 ha; atunci prima va avea 27 ha, iar a doua, 18 ha. În total $27 + 18 + 54 = 99$.

Raportul $\frac{396}{99} = 4$ ne arată că am presupus pentru a treia brigadă că are de arat o întindere de 4 ori mai mică decît în realitate. Întinderile reale vor fi (27×4) ha, (18×4) ha, (54×4) ha.

R. a) 108 ha; 72 ha; 216 ha.

8. Ioan zice lui George: dă-mi o pară și voi avea îndoit cît vei avea tu. George răspunde: dă-mi tu o pară și voi avea și eu cît tine. Cîte pere avea fiecare?

Indicație. Dacă $I.$ dă o pară lui $G.$, ei vor avea un număr egal de pere, deci $I.$ are cu două pere mai mult decît $G.$

Dacă $G.$ dă o pară lui $I.$, diferența dintre numărul perelor pe care le au ei devine 4; $G.$ rămîne cu 4 pere.

În concluzie $G.$ avea $4 + 1 = 5$ pere, iar $I.$ avea $5 + 2 = 7$ pere.

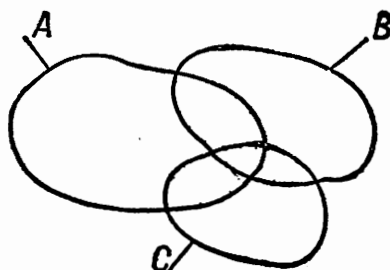


Fig. II.13

9. Fie mulțimile A , B și C din figura de mai jos, ale căror elemente nu le-am mai pus în evidență.

Să se pună în evidență cu diferite culori următoarele mulțimi $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$; $A \cap (B \cap C)$; $A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cup C$; $A \cap (B \cup C)$.

10. O dactilografă a efectuat $\frac{4}{5}$ din lucrarea ce avea de făcut în $\frac{2}{3}$ ore. După cât timp își va termina lucrarea dacă va lucra tot timpul în același ritm.

R. 10 minute.

11. Dacă la numărul muncitorilor dintr-o uzină se adaugă încă pe atât și încă $\frac{2}{9}$ din acest număr, apoi se repartizează $\frac{2}{5}$ din ei la altă uzină, mai rămân în uzină 1 200 de oameni.

Câți oameni au fost la început în uzină?

R. 900 de oameni.

12. Se dau mulțimile

$$A = \{a; b; 3; 9\}, \quad B = \{a; b; 5\}, \quad C = \{7; 8; a; 5\}$$

Să se calculeze:

- a) $A \cup B$; b) $(A \cup B) \cap C$; c) $(A \cap C)$; d) $B \cap C$; e) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;
f) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

13. Dintr-un butoi s-a scos la început $\frac{2}{5}$ apoi $\frac{1}{3}$ din cantitatea de apă ce a fost în el, rămânând în butoi 8 găleți.

Câtă apă a fost în butoi?

R. 30 de găleți.

14. Notăm lungimea unui dreptunghi cu AB . După ce s-a parcurs $\frac{3}{10}$ din AB a mai rămas 8 dm pînă la $\frac{AB}{2}$. Lățimea dreptunghiului BC este 0,75 din AB .

a) Să se afle câți metri pătrați reprezintă $\frac{3}{8}$ din aria dreptunghiului $ABCD$?

R. 4,5 m².

15. Să se determine x astfel ca $\{3; 2\} = \{1; 2; 3\} \cap \{2; x\}$.

R. $x = 3$.

16. Un biciclist a parcurs distanța AB cu viteza medie de $14\frac{1}{3}$ km pe oră astfel: Numărul de km parcurși în prima zi notat cu x este divizibil cu 2 și 3 și este $102 < x < 114$.

A doua zi a parcurs $\frac{11}{12}$ din AB și a treia zi de $1\frac{1}{6}$ ori mai mult decît în a doua zi.

În cîte ore a parcurs biciclistul distanța AB .

R. $22\frac{1}{2}$ ore.

17. Fie dreptunghiul $ABCD$. $\frac{1}{5}$ din AB (lungimea dreptunghiului) este cît $\frac{1}{3} AD$ (din lățimea lui) și $AB - AD = 30$ m.

Pe $\frac{3}{5}$ din aria dreptunghiului s-a amenajat un teren de sport.

Cît la sută reprezintă terenul de sport din aria întregului teren?

R. 60%.

18. Să se determine mulțimea E știind că îndeplinește simultan condițiile.

$$E \cup \{1; 2; 5\} = \{1; 2; 5; 4\}$$

$$E \cap \{1; 2; 5\} = \{1; 2\}.$$

$$\text{R. } E = \{1; 2; 4\}.$$

19. Doi bicicliști au plecat în același timp, din același punct spre o localitate ce se afla la o distanță de 60 km. Un biciclist merge cu viteza de 14 km pe oră, iar celălalt cu viteza de $12\frac{1}{2}$ km pe oră. Cu a cîta parte din drum va rămîne în urmă cel de-al doilea biciclist față de primul, după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecare?

$$\text{R. } \frac{1}{16}.$$

20. Două robinete unul cu apă caldă și unul cu apă rece curgînd împreună pot umple o baie în 8 minute.

Numai robinetul cu apă caldă poate umple baia în 18 minute.

În cîte minute poate fi umplută baia pînă la același nivel de robinetul cu apă rece.

$$\text{R. } 14\frac{2}{5} \text{ minute.}$$

21. Suma a două numere este 1. Să se găsească aceste numere știind că $\frac{1}{2}$ din primul reprezintă $\frac{1}{3}$ din al doilea.

$$\text{R. } \frac{2}{5}; \frac{3}{5}.$$

22. Să se găsească mulțimea X știind că:

$$X \subset \{1; 2; 3\} \text{ și } \{1; 2; 3\} \cap X = \{1; 2\}.$$

$$\text{R. } X = \{1; 2\}.$$

23. Într-un coș sînt cu 35 de mere mai mult decît în al doilea coș și $\frac{1}{3}$ din merele din primul coș reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul de mere din coșul al doilea.

Cîte mere sînt în fiecare coș?

$$\text{R. } 63 \text{ și } 28 \text{ mere.}$$

24. Diferența între lungimea AB și lățimea AD a unui dreptunghi este de 40 de metri. Dacă din AB se scade $\frac{4}{5}$ din ea iar din AD $\frac{2}{3}$ din ea, obținem lungimi egale.

a) Să se afle AB și AD .

b) Cîți ari reprezintă $\frac{3}{5}$ din aria dreptunghiului?

$$\text{R. a) } 100; 60; \text{ b) } 36 \text{ ari.}$$

25. Se dau mulțimile: $\begin{cases} A = \{4; 5; 6; 7\} \\ B = \{3; 4; 5; 6; 7\} \end{cases}$

Să se scrie mulțimile:

$$\text{a) } \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

$$\text{b) } \{x \mid x \notin A \text{ și } x \in B\}.$$

$$\text{R. } A - B = \emptyset; B - A = \{3\}.$$

26. Un trapez $ABCD$ cu baza mare AB , baza mică CD și înălțimea DE . Se știe că $AB = 3CD$ și $2DE = DC$; $BC + AD = \frac{AB + DC}{2}$. Perimetrul trapezului este 60 cm.
Să se afle aria trapezului.

R. 100 cm².

27. Într-un paralelogram $ABCD$ cu baza $AB = 20$ cm, înălțimea x a paralelogramului este numărul

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 15 < x < 42 \text{ și } x \text{ să fie divizibil prin } 2 \text{ și } 7\}.$$

Să se arate că reprezintă 0,1(6) din aria paralelogramului.

R. $93 \frac{1}{3}$ cm².

28. Un trapez isoscel $ABCD$ (AB baza mare și DC baza mică) are perimetrul de 90 cm. Știind că $AB = 4 DC$ și $AD = \frac{AB}{2}$, să se afle aria trapezului cunoscând că înălțimea este de 13,4 cm.

R. 335 cm².

29. Se dau mulțimile

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \quad B = \{3; 4\}.$$

Să se calculeze $C_A B$ (fig. II.14)

$$R. C_A B = A - B = \{1; 2\}.$$

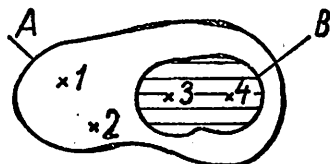


Fig. II.14

30. Dacă se mărește lungimea unui dreptunghi cu 0,5 cm, atunci aria lui crește cu $2 \frac{1}{2}$ cm², dacă se mărește lățimea cu 0,25 cm, aria lui se va mări cu 1,25 cm².

Să se arate că acest dreptunghi este un pătrat.

31. Se dau mulțimile

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10\}.$$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$$

Să se scrie mulțimile: a) $C_E A$ b) $C_E B$ c) $C_A B$

R. a) $\{6; 7; 8; 9\}$

b) $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

c) $\{4; 5\}.$

32. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu lungimea AB și lățimea BC . Se cunoaște că $\frac{3}{8}$ din $AB = \frac{3}{4}$ din BC și $AB - BC = 40$ cm.

Să se calculeze cât la sută reprezintă AB din BC .

R. 200%.

33. Un copil are pasul de 70 cm, un altul are pasul de 50 cm. Ei pornesc în același timp, din același loc.

Care este cea mai mică distanță după care urmele pașilor se găsesc una în dreptul celeilalte.

R. 3,5 m.

34. Se dau mulțimile:

$$A = \{2; 3; a; 5\}$$

$$B = \{a; 5\}.$$

Să se calculeze: $A - B$ și $B - A$.

R. $\{2; 3\}; \emptyset$.

35. Un muncitor execută o lucrare în 5 ore, alt muncitor și-o îndeplinește în 8 ore.

a) Peste câte ore de la data înregistrării muncii lor ei vor îndeplini un număr întreg de norme?

b) Câte norme întregi va îndeplini fiecare?

R. a) 40 ore; b) 8; 5.

36. Se dau mulțimile:

$$A = \{2; 3; 4; 5\}.$$

$$B = \{2; 3; 4\}.$$

Să se determine $C_A B$.

R. $\{5\}$.

37. Să se găsească un număr prim de trei cifre, știind că produsul cifrelor lui este 252. Justificați răspunsul.

Indicație. Prin descompunerea lui 252 în factori primi rezultă că numărul căutat poate avea cifrele 4; 7; 9 sau 6; 6; 7. Din numerele ce se pot forma numai două sînt convenabile.

R. 479 și 947.

38. Într-un magazin au fost aduse niște obiecte în 10 lăzi astfel: în a doua ladă cu un obiect mai multe decît în prima, în a treia un obiect mai mult decît în a doua ș.a.m.d.

O persoană cumpără lada cu cel mai mare număr fără soț (impar) de obiecte. Din lăzile rămase altă persoană cumpără toate lăzile care conțin un număr par (cu soț) de obiecte.

În magazin au rămas 24 obiecte. Cîte obiecte erau în total în magazin și cîte în fiecare ladă?

R. Prima ladă conține 2 obiecte, în total 65 obiecte.

39. Dintre numerele de forma $71x84y$ divizibile cu 18, care este cel mai mare și care este cel mai mic?

Indicație. Ca un număr să se dividă cu 18, trebuie să fie divizibil cu 2 și cu 9.

R. 718 848; 711 846.

40. Să se găsească două numere naturale astfel ca de șase ori primul înmulțit cu de 4 ori al doilea să se obțină 1 680 și de trei ori primul să fie mai mare cu 1 ca al doilea.

Indicație. Produsul numerelor căutate este citul dintre 1 680 și 6×4 . Se caută două numere în aceste condiții; din soluțiile posibile, convine perechea 5; 14.

R. 5; 14.

41. Într-un săculeț sînt 10 bile albe, 12 bile negre și 16 bile roșii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să-l scoatem fără a ne uita în săculeț pentru a fi siguri că am scos trei bile de aceeași culoare? De ce?

R. 7 bile.

42. Să se efectueze:

$$2^2 \times 2^2 + [(600:300)^2] \times [120:(30,2:15,1):2 - (10,01 - 9,01)] + 2^7:2^6.$$

R. 134.

43. Să se determine un număr de cinci cifre știind că produsul dintre numărul format din primele două cifre și numărul format din ultimele cifre este 1 111.
R. 11 101.
44. Elevii unei clase au participat la muncă patriotică în două zile astfel: în prima zi 15 elevi, în a doua zi de două ori mai mulți ca în prima zi. Să se afle numărul elevilor din clasă, dacă 12 din ei au venit în fiecare zi iar 3 elevi în nici o zi.
R. 36 elevi.
45. Cîți lei a cheltuit Nelu pe ciocolată, știind că el ar fi putut cumpăra cu o tabletă de ciocolată mai puțin, dacă fiecare tabletă ar fi costat cu 2 lei mai mult, și cu două tablete de ciocolată mai mult, dacă fiecare tabletă ar fi costat cu 1 leu mai puțin.
R. 4 lei.
46. La o împărțire de două numere naturale se știe că deîmpărțitul este 5 883 iar restul 1.
a) Să se afle împărțitorul și cîtul, știind că sînt diferite de 1 și că împărțitorul este mai mare decît cîtul.
b) Cîte soluții are problema?
R. $2\ 941 \times 2$; 346×17 ; 173×34 .
47. Suma a trei numere naturale diferite este 54.
Știind că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două și că fiecare număr este divizibil cu 6 să se afle cele trei numere.
Să se găsească toate soluțiile.
R. $\left\{ \begin{array}{l} 18; 12; 24 \\ 18; 6; 30 \end{array} \right.$
48. Să se determine M , A și B știind că:
 $A \cup B = \{1; 2; 3\}$, $C_M A = \{3; 4; 5\}$ și
 $C_M B = \{1; 4; 5\}$.
R. $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
49. Un teren în formă de trapez, cu baza mare de 2,2 km, baza mică 180 dam și înălțimea egală cu media aritmetică a celor două baze, se repartizează la trei echipe pentru a fi cultivat cu grîu. Lotul repartizat echipei a doua este de 2 ori mai mare decît cel repartizat primei echipe și cu 25 ha mai mic decît cel al echipei a treia.
a) Să se afle suprafața repartizată fiecărei echipe.
b) Ce cantitate de grîu s-a obținut în total dacă în medie de la primul lot s-a obținut 1 900 kg/ha, de pe cel de-al doilea, 2,25 t la ha, iar de pe cel de-al treilea 24 q/ha?
c) Cîte remorci în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 2,5 m; 2 m; 1 m; au fost necesare pentru transportul întregii cantități de grîu știind că un hl de grîu cîntărește în medie, 90 kg.
R. a) 75 ha; 150 ha; 175 ha.
b) 900 t.
c) 20 remorci.

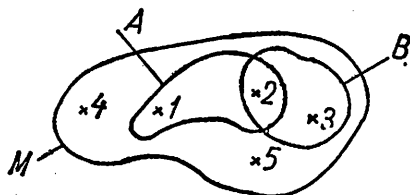


Fig. II.15

50. Să se găsească două numere naturale știind că produsul lor este 500, iar cel mai mare divizor comun este 5.

Cite perechi de numere îndeplinesc condițiile de mai sus.

R. (100; 5); (25; 20).

51. Efectuind împreună o lucrare trei muncitori primesc pentru munca prestată suma de lei 1 575. Primul, care a lucrat mai multe ore decât ceilalți a primit de două ori mai mult decât al doilea și al treilea la un loc, iar al treilea cu 75 de lei mai mult decât al doilea.

Câți lei a primit fiecare muncitor?

R. 1 050 lei; 225 lei; 300 lei.

52. La sfârșitul unei luni, 4 muncitori dintr-o uzină au primit pentru depășirea normei suma de 1 484 lei. Fiecare muncitor a primit o sumă de bani direct proporțională cu numărul de piese realizate peste normă.

Să se afle ce sumă a primit fiecare muncitor știind că: primul a realizat, peste normă, jumătate din numărul pieselor făcute de cel de-al doilea; al doilea a realizat $\frac{3}{4}$ din numărul de piese realizat de-al treilea iar al patrulea a realizat 42 de piese peste normă și că în total au lucrat în plus 112 piese.

R. 210; 420; 560; 294.

53. Să se arate că c.m.m.m.c. între numărul 72 și c.m.m.d.c. al numerelor 224 și 360, este egal cu c.m.m.d.c. între c.m.m.m.c. al lui 72 și 224 și c.m.m.m.c. al lui 72 și 360.

54. Două trenuri cu viteze medii diferite au pornit în același timp din stația A spre stația B care se află la depărtarea de 341,25 km de A. După $3\frac{1}{2}$ ore distanța dintre cele două trenuri era de 35 km iar după $5\frac{1}{4}$ ore de la plecare primul tren ajunge în stația B.

Să se afle viteza medie a fiecărui tren.

R. 65 km/h; 55 km/h.

55. Să se afle în care sistem de numerație avem:

$$\overline{65} \times \overline{31} = \overline{3\,005}.$$

Să se treacă apoi în baza 10 și să se verifice.

R. Baza este 7.

56. Fie mulțimile $A = \{4; 3; 2; 9\}$, $B = \{4; 8; 9; 11\}$, $C = \{1; 7; 3\}$. Să se arate că $(A - B) - C \neq A - (B - C)$ adică diferența nu este asociativă.

Indicație.

$$(A - B) - C = \{3; 2\} - \{1; 7; 3\} = \{2\} \text{ și } A - (B - C) = \{4; 3; 2; 9\} - \{4; 8; 9; 11\} = \{3; 2\}.$$

57. Andrei este cel mai mic din cinci frați și Barbu cel mai mare. Emil este mai mic decât Călin, Dumitru este mai mare decât Călin. Fiecare dintre frați este cu același număr de ani mai mic decât următorul. (Se consideră ani împliniți exprimați prin numere întregi.)

1) Să se scrie în ordinea crescătoare a virstei cei cinci frați.

2) Dacă mijlociul are șapte ani care este suma virstelor.

3) Care este maximul virstei pe care ar putea-o avea cel mare?

R. 2) 35 ani; 3) 13 ani.

58. Două numere naturale se numesc consecutive dacă diferă cu 1.
 1) Dovediți că suma a trei numere consecutive este divizibilă cu 3.
 2) În ce caz suma a trei numere consecutive este divizibilă cu 6?
 R. 2) Primul număr să fie impar.
59. Pe un șantier, în patru clădiri, sînt cazați 436 de muncitori. În prima clădire sînt cu 10 muncitori mai mulți decît în clădirea a patra unde sînt cu 8 muncitori mai mulți decît în clădirea a treia, iar în clădirea a doua cu 10 muncitori mai mulți ca în a treia. Să se afle cîți muncitori sînt în fiecare clădire.
 R. 118; 110; 100; 108.
60. Un număr de două cifre este $\frac{2}{9}$ din răsturnatul său. Care este numărul?
 R. 18.
61. Se dau mulțimile:
 $A = \{9; 12; 15; 18\}$
 $B = \{x \in N \mid 8 < x < 20 \text{ și } 3 \mid x\}.$
 Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor

$$p : A \cap B = A \cup B \text{ și } r : A = B, a : A - B = \emptyset.$$
62. Trei muncitori pot termina o lucrare în 4 zile. Primul, lucrînd singur, o poate termina în 10 zile, iar al doilea în 12 zile.
 În cite zile o poate termina al treilea. (Se cere soluția aritmetică.)
 R. 15 zile.
63. Un muncitor ar termina o lucrare în $\frac{2}{3}$ zile, lucrînd singur; altul în $\frac{4}{5}$ zile.
 În cît timp s-ar termina această lucrare dacă ar lucra împreună?
 R. $\frac{4}{11}$ zile.
64. Să se împartă 7 chifle la 12 elevi în așa fel ca nici o chiflă să nu fie împărțită în 12 părți.
65. Ion are 40 lei. Radu are cît Ion și jumătate din ceea ce are Petre, iar Petre are cît Radu și Ion împreună.
 Ce sumă au toți trei? (Soluție aritmetică.)
 R. 320 lei.
66. Fie mulțimea $A = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.
 Se știe că: a) $A_1 = \{x \in A \mid x - 1 \in A\}$; b) $A_2 = \{x \in A \mid x + 1 \in A\}$;
 c) $A_3 = \{x \in A \mid x - 1 \in A \text{ și } x + 1 \in A\}$. Să se determine mulțimile A_1, A_2, A_3 .
 R. a) $\{5; 6; 7; 8\}$; b) $\{4; 5; 6; 7\}$; c) $\{5; 6; 7\}$.
67. Fie mulțimile $A = \{a; b\}$, $B = \{a; b; c; d\}$, $C = \{a; c\}$.
 a) Să se compare mulțimile $A \cap C$ și B .
 b) $A \cup C$ și B
 R. a) $A \cap C \subset B$; b) $A \cup C \subset B$.

ARITMETICĂ

I. Exerciții și probleme

1. Exerciții cu fracții ordinare și zecimale

Să se efectueze:

$$1. \frac{\left(\frac{33\frac{1}{3}}{2^2 \cdot 5^2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{4^2}{3} : \frac{1}{\sqrt{3}}} + 0,1 : \frac{1}{200}}{12 - 2\left(\frac{3}{4} + 0,25\right) \cdot 3 - 2} + \frac{\sqrt{8} + \sqrt{20}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}.$$

R. 8.

$$2. \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{3\frac{1}{8} : \left[\left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}\right) \cdot \frac{4}{7} \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}\right) \cdot 1\frac{10}{17}\right]}{2\frac{1}{5} + \frac{1}{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3,8025} + 0,1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

R. 1.

$$3. \frac{7}{12} + \frac{\left[15 : 3\frac{3}{5} + \left(10\frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{14}\right] \cdot \left(1\frac{23}{52} - 1\frac{1}{4}\right)}{\left(2\frac{1}{4} + 0,25 \cdot 8\frac{3}{7}\right) - \frac{5}{14}} + \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$$

R. 6.

$$4. \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} - \frac{0,71 - \frac{1}{4} \cdot \left(15 - 9\frac{1}{3}\right) : 2\frac{5}{9}}{0,71 + \frac{1}{4} \cdot \left(19\frac{2}{3} - 11\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{71}} : \frac{\sqrt{289}}{16} - \sqrt{0,1(6)} : \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{8}$$

R. $\frac{5}{3}$.

$$5. \frac{3\frac{13}{15} : \frac{42}{45} + \left(6\frac{53}{56} - 2,375\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{122}}\right)^2 : \frac{2}{23}}{1\frac{19}{3 + \frac{4}{5}} - \frac{1 + \frac{1}{2}}{8 - \frac{7}{5 - 1,5}}}$$

R. 1.

$$6. \sqrt{\frac{271}{476} + \frac{2\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}} : \frac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}} + \left(\frac{1}{2,5-1} - \frac{1}{3\frac{1}{2}-1}\right) : \frac{4}{5} + \frac{2}{3}}$$

R. 2.

$$7. \frac{\left(2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(1\frac{1}{4}\right)^2 - \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{33,(3)}{100} - 13\frac{2}{3}}{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2) : (2^2 \cdot 5 \cdot 3^3) + 0,375 + \frac{5}{8} - 4} \cdot \sqrt{3} : \sqrt{27}$$

R. 1.

$$8. \frac{(0,2)^3 : (0,3)^3 + \frac{1}{8} \cdot (1,2)^2 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 30,(5) + 3,(4) - 27}{(0,1)^2 : (0,01)^2 : 10 - (0,9)^3 : (0,9)^2 : \frac{9}{10} + 1} \cdot \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$$

R. 7.

$$9. \frac{\left(0,5 : 1,25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) : \frac{8}{11} - \left(6 - 4\frac{1}{2}\right) : 0,003 : 50}{\left(1,5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3} - \left(3\frac{1}{20} - 2,65\right) \cdot 4 : \frac{1}{5}} - 13 + \frac{7}{12}$$

R. 1.

$$10. \left(10 - 3 \cdot 0,3 \cdot 10 + \frac{1}{19} + 2\frac{5}{76} - \frac{3}{532}\right) - 2\frac{15}{133} + \\ + \frac{\left(\sqrt{903,6036} : 1,2 - 2\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{25}{1371} + \frac{5}{6}}{0,003 : 0,15 + 0,08}$$

R. 6.

$$11. 2 + 19 \left[\frac{2,652 : 1,3 - 1\frac{17}{30} + \frac{3}{50}}{\left(24 : 6,4 - 12 : 3\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) \cdot 0,5 - \sqrt{1,5625}} \right] - 3 + 2 \cdot 2.$$

R. 19.

$$12. 1,456 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5} + \frac{(1 - 0,1) : 1\frac{11}{16}}{\left(\sqrt{1,7956} + 1\frac{1}{10} : \frac{11}{15}\right) : 5\frac{13}{40}}$$

R. 10.

$$13. \frac{\left[7,25 + 11\frac{3}{4} - \left(3,092 + 9\frac{51}{125}\right)\right] : 6\frac{1}{4}}{2\frac{6}{11} \cdot 0,275 + 0,315\frac{3}{25} - 1,7} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,0256}}$$

R. 4.

$$14. 213 - 32 \cdot \left[\frac{\left(15 - 9 \frac{1}{3}\right) : 3 \frac{7}{9}}{\left(19 \frac{2}{3} - 11 \frac{7}{9}\right) \frac{9}{71}} \cdot \left(\sqrt{0,6241} : \frac{1}{4} : 0,79 + \frac{1}{4}\right) \right]$$

R. 9.

$$15. 9 + 4 \left[\frac{(1 - 0,1) \cdot 1 \frac{2}{3}}{0,625 + \frac{3}{8} + 0,0625 : \frac{1}{16}} + \sqrt{4,1616} : \frac{3}{25} \right] - \sqrt{14 \frac{1}{16}} + \frac{3}{4}$$

R. 77.

$$16. 10 - 4 \left[\frac{0,0625 + \frac{15}{16} + \sqrt{4,1616} - \frac{1}{25}}{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^4) : (5^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2) \cdot 0,1 + \frac{33, (3)}{6^2 \times 2^2}} \right]$$

R. 1.

$$17. \frac{\left[\left(\frac{17}{5} + 5 \frac{4}{15}\right) \cdot 0,25 \cdot \frac{7}{13} - \left(\frac{15}{2} - 0,5\right) : 7\right] \cdot 6}{\left(\sqrt{25,1001} - 4 \frac{7}{50}\right) : 0,03} + \left(\sqrt{\frac{28}{29}}\right)^2$$

R. 1.

$$18. \frac{2 \frac{3}{20} - 1 \frac{1}{2} \left(4 \frac{1}{6} + \frac{0,003}{0,25} : \frac{0,004}{0,2} - \frac{1}{2} \cdot 9 \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \sqrt{1,5625}}{\left(2,625 + \frac{3}{8} + 0,0625 + \frac{15}{16}\right) - \left(0,03125 + \frac{31}{32} + 1,25 + \frac{3}{4}\right)} + \frac{4}{5}.$$

R. 3.

$$19. \frac{\left(\frac{27}{5} - 5 \frac{4}{15}\right) \cdot 0,25 : \frac{1}{19} + \left(\frac{15}{2} - 0,5\right) : 7}{\left(\sqrt{26,4196} - 4 \frac{7}{50}\right) : 0,125 - 6 \frac{2}{3}}$$

R. 1.

$$20. \frac{\left(\frac{7}{15} + \frac{14}{45} + \frac{2}{9}\right) \cdot 10 \frac{1}{3} - 1 \frac{1}{11} \cdot \left(2 \frac{2}{3} - 1 \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{28} - 1} \cdot 2 + \sqrt{\frac{24^2}{144}}$$

R. 30.

$$21. \frac{\left(6 \frac{5}{9} - 3 \frac{1}{4}\right) 2 \frac{2}{17} + 40,5 \cdot \frac{2}{9} : 9}{4 : 6,25 - 1 : 5 + \frac{1}{7} \sqrt{3,8416} + 0,28} : \sqrt{192} \cdot \sqrt{3}.$$

R. 1.

$$22. \frac{8 - 4,7 : \left(5 - 0,8 : 2 \frac{4}{6}\right) + \frac{4}{5} \cdot 1,25}{\left(5 \frac{3}{9} - 3 \frac{3}{4}\right) : 1 \frac{7}{12} + 2} \cdot \frac{3}{8}$$

R. 1.

$$23. 50,05 - \left(1,5 + 3 \frac{2}{3}\right) \cdot 7 \frac{1}{2} : \sqrt{9,9 \cdot 225} \cdot \frac{63}{31} - \left(1 - 2 \frac{1}{5} : 7\right) \cdot 1 \frac{11}{24} - \frac{1}{20}$$

R. 24.

$$24. \frac{\left(4 \frac{3}{10} : 3 \frac{7}{12} - 0,2\right) \cdot 55}{2 \frac{7}{12} - 0,25 \cdot 9 \frac{1}{3} \cdot 3 \frac{13,75}{6} \cdot \frac{3}{127}} + \frac{\sqrt{9,2416}}{2} + 14 \frac{12}{25}$$

R. 40.

$$25. \frac{\left(5 \frac{4}{45} - 4 \frac{1}{15}\right) \cdot 30}{1 \frac{1}{3}} + \frac{4 \frac{1}{4} : 0,85 + 1 : \sqrt{0,25}}{(5,56 - \sqrt{16,4836}) : 3}$$

R. 9.

$$26. \frac{\frac{10}{2} + 13 \frac{1}{2} - 4 \frac{2}{3} \cdot 3 \frac{3}{4} + 4,8 : \frac{6}{25}}{6 \frac{3}{7} - 1 : 0,7} \cdot \left(\frac{7}{8,9 - 2,6} : \frac{2}{3}\right) : \sqrt{196} \cdot (\sqrt{2})^2$$

R. 1.

$$27. \frac{\left(1 \frac{16}{75} + 2,46\right) : (55,1 : 5)}{1 \frac{2}{3} : 1 \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{2}{15} + 0,15\right)} + \frac{9,72 - 6 \frac{13}{25}}{\sqrt{1 \, 640,25} \cdot \frac{2}{9} : 9}$$

R. 4 $\frac{8}{15}$

$$28. \frac{\left(15 - 9 \frac{1}{3}\right) : 2 \frac{5}{9}}{\left(19 \frac{2}{3} - 11 \frac{7}{9}\right) \frac{9}{71}} \cdot \left(\sqrt{0,5 \, 041} - \frac{1}{4}\right) : \left(0,71 + \frac{1}{4}\right)$$

R. 1 $\frac{1}{16}$

$$29. 2 + 0,125 \cdot \frac{5 \frac{8}{3} \left(4,2 - 3 \frac{7}{11} + \frac{9}{55}\right) \cdot \frac{3}{23}}{4,8 : 5 \frac{7}{10} \cdot 1 \frac{3}{16} - \left(3 \frac{1}{7} - 2,8\right) \cdot 1 \frac{1}{6}} - \sqrt{3 \frac{37}{121}}$$

R. $\frac{1}{3}$

$$30. \frac{\left(5,225 - \frac{5}{9} - 3 \frac{5}{6}\right) \frac{36}{43} + 1,3}{\left(2 \frac{23}{50} + 1 \frac{16}{75}\right) : (55,1 : 5) - 0,09 + \frac{227}{300}}$$

R. 2.

$$31. \frac{5}{16} : 0,125 + 1,456 : \frac{91}{250} + 4 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2,652 : 1,3 - 1 \frac{17}{30} + \frac{3}{50}}{\left(\sqrt{1,7956} + 1 \frac{1}{10} : \frac{11}{15} \right) : 5 \frac{13}{40}}$$

R. 9.

32. Se dau mulțimile:

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{275}{11}}; \sqrt{\frac{153}{17}}; 2 \right\}, \quad B = \left\{ \sqrt{\frac{325}{13}}; \sqrt{\frac{99}{11}} \right\}.$$

a) Să se determine $A \cap B$ și $A \cup B$.

b) Să se determine $A - B$ și $B - A$.

c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$p : B \subset A; \quad r : A \sim B$$

R. a) $A \cap B = \{5; 3\}$; b) $A \cup B = \{2; 3; 5\}$. c) p: adevărată
r: falsă, ($A \not\sim B$).

33. Să se calculeze expresia:

$$E = \left(\frac{2 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{5}}{1 \frac{1}{7} - \frac{3}{5}} + \frac{1}{2} \right) : \frac{\left[1 \frac{1}{2} + 1, (7) \right] \cdot \left[2, (3) - \frac{1}{2} \right]}{2, (3) + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1, (7) - 1}{1, (7) + 1} + \frac{18}{25}}}{3 - (10^2 - 9^2) \cdot 0, (142857)}$$

R. 21.

34. Se dau expresiile:

$$A = \frac{1 + 1 \frac{1}{2} \cdot \left(0,5 + 2 \frac{1}{3} \right) + 0,6 : \frac{1}{5}}{2 \sqrt{0,0121}}$$

$$B = \sqrt{\frac{0,01 + 0,001 + 0,0001 + 1 : 1\,000}{\left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) : \left(1 - \frac{1}{4} \right)}}$$

$$C = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2}$$

Să se calculeze valoarea lui x din expresia $\frac{B}{C} = \frac{A}{x}$

$$R. x = \frac{15}{0,011}.$$

35. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției.

$$p : M \cap N = M \rightarrow N = C_M N$$

unde $M = \{2, 3\}$ și $N = \{4, 5\}$

R. falsă.

36. Se dau mulțimile $M = \{x \in N \mid 2 < x < 12 \text{ și } 3 \mid x\}$
 $N = \{x \in N \mid 8 < x < 14 \text{ și } 9 \mid x\}$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : M \cap N =$ soluția
 ecuației: $\frac{\sqrt{8 \cdot 27}}{\sqrt{6}} x - \frac{4x}{9} - 5x = 5$.

R. $M \cap N = \{9\}$; $x = 9$.

37. Se dă egalitatea $\sqrt{\frac{48}{3}} - \frac{x}{4} + \frac{\frac{3x}{4}}{3} = 4$ definită pe mulțimea

$$A = \{x \in N \mid 2 < x < 8 \text{ și } 2 \mid x\}.$$

Să se determine soluția ecuației.

R. identitate.

38. Să se determine x din egalitatea $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{125}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{3x}{15} = \frac{x}{5}$

R. $x = \frac{40}{3}$.

39. Se dau mulțimile $A = \{3; 5; 8; 2\}$, $D = \{3; 5; 2; 7\}$
 Să se arate că $A - B$ este soluția ecuației:

$$\frac{(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^5) : (3^2 \cdot 5^4 \cdot 2^4)}{\frac{5}{2}} + \frac{x}{8} = \frac{x}{2} - 2$$

R. $A - B = \{8\}$; $x = 8$.

40. Se dă egalitatea $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}} - \frac{\frac{x}{2}}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{9} = 6$.

Să se arate că soluția ecuației aparține mulțimii $A = \{9; 10; 12\}$.

R. 9.

41. Să se determine x din egalitățile:

$$\frac{\sqrt{27}}{9} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4x}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{x}{3} + 1$$

R. $x = 3$.

$$\left(\frac{4,1(3)x}{31} + \frac{13x}{15} - \frac{x}{5} \right) : \frac{1}{15} = 12$$

R. $x = -6$.

2. Exerciții și probleme diverse

1. Se dau mulțimile $A = \{\sqrt{144}; \sqrt{121}; \sqrt{169}\}$.
 $B = \{\sqrt{169}; \sqrt{225}; \sqrt{256}\}$.

- a) Să se determine $A \cup B$ și $A \cap B$, elementele mulțimilor fiind numerele rezultate din extragerea rădăcinii pătrate.
 b) Să se pună în evidență relațiile menționate printr-un desen.
 c) Sint egale aceste mulțimi?

R. a) $A \cup B = \{11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ $A \cap B = \{13\}$; c) $A \neq B$.

2. Suma a două numere este a , raportul lor este $\frac{b}{c}$. În funcție de mărimile date să se arate care sint cele două numere.

$$\text{R. } \frac{ab}{b+c}; \frac{ac}{b+c}.$$

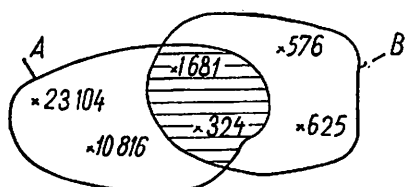


Fig. II.16.

3. Fie mulțimile A și B ca în desenul de mai jos: (fig. II.16).

Să se determine $C \cup D$, elementele mulțimilor C și D fiind numerele naturale obținute prin extragerea rădăcinii pătrate a numerelor din A și B

$$\text{R. } C \cup D = \{18; 24; 25; 41; 104; 152\}.$$

4. Suma a două numere este $\sqrt{2601}$ raportul lor este $\sqrt{\frac{25}{144}}$

- a) Să se determine cele două numere.

R. 15; 36.

5. Se dă mulțimea $M = \{\sqrt{107,1225}; \sqrt{309,76}; \sqrt{2,2201}\}$.

În ce caz mulțimea $A = \{a; 1; 49\}$ este o submulțime a mulțimii M .

R. dacă $a = 10,35$ sau $17,6$.

6. Diferența a două numere este $\sqrt{12,3201}$ raportul lor este $\frac{2,5}{6,4}$ să se calculeze aceste numere.

R. 5,76; 2,25.

7. Diferența a două numere este „ b ”, iar raportul lor este $\frac{c}{d}$ unde $d > c$. Să se exprime aceste numere.

$$\text{R. } \frac{bc}{d-c}; \frac{db}{d-c}.$$

8. Fie mulțimile: $A = \{\sqrt{2^2 \times 3^3 \times 5^3}; \sqrt{3^4 \times 4^2 \times 2^5}; \sqrt{4^2 \times 5^3 \times 7^2}\}$.

$$B = \left\{ \sqrt{\frac{2^3}{5^2} \cdot \frac{3^2}{5^2} \cdot \frac{5^3}{3^2}}; \sqrt{4^2 \times 5^6 \times 7^4}; \sqrt{4 \times 27 \times 125} \right\}.$$

- a) Să se scrie elementele mulțimilor A și B după extragerea rădăcinilor pătrate.

- b) Să se determine Card $A + \text{Card } B$;
c) $A \cup B$; $A \cap B$

R. a) $A = \{30 \sqrt{15}; 144 \sqrt{2}; 140 \sqrt{5}\};$

$$B = \left\{ 2 \sqrt{\frac{2}{5}}; 30 \sqrt{15}; 24500 \right\}$$

b) 6; c) $A \cap B = 30 \sqrt{15}$.

9. Suma a două numere este 432 iar citul lor este 8.

a) Care sînt cele două numere?

b) În această problemă să considerăm suma S și citul rezultat „ n ”.
Să se scrie cele două numere prin S și n .

R. a) 384; 48; b) $\frac{S}{n+1}; \frac{nS}{n+1}$.

10. Fie mulțimea $A = \left\{ \sqrt{1,0816}; \frac{\sqrt{5,76}}{1,2}; (\sqrt{4^2})^2; x \right\}$

a) Să se găsească cardinalul lui A .

b) Să se alcătuiască o proporție din elementele mulțimii A și să se determine x .

11. Suma a două numere este 65. Dacă împărțim aceste numere (cel mai mare la cel mai mic) obținem cit 5 și rest 5.

a) Să se determine aceste numere.

b) Să se exprime numerele considerînd suma S , citul C și restul r .

c) Să se determine x din proporția $\frac{\sqrt{6,25}}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{\sqrt{2,25}}$

R. a) 55; 10; b) $\frac{SC+r}{C+1}; \frac{S-R}{C+1}, x=5$.

12. Suma a două numere este 495. Unul din numere se termină cu zero. Dacă acestuia i se taie zeroul se obține cel de-al doilea număr. Care sînt cele două numere?

R. 450; 45.

13. Fie mulțimile $E = \{x \in N \mid x < 11\}$; $A = \{0; 1; 2\}$; $B = \{3; 4; 5\}$; $C = \{6; 7; 8\}$.

a) Să se găsească Card $(A - C_E B)$.

b) Să se determine Card $((A - B) \cup (B - C) \cup (C - A))$ și Card $(A \cup B) \cup C$.

R. a) 1; b) 9.

14. Diferența între vîrsta tatălui și a fiului este de 50. Raportul vîrstelor lor este de $\frac{3}{8}$. a) Cîți ani are tatăl și cîți ani are fiul. b) Considerăm dife-

rența vîrstelor „ a ” ani și raportul vîrstelor lor $\frac{b}{c}$; $b < c$.

Să se exprime vîrstele tatălui și fiului.

R. a) 80; 30 ani; b) $\frac{a \cdot b}{c - b}; \frac{a \cdot c}{c - b}$.

15. Să se calculeze media proporțională a numerelor $\sqrt{5^2 \times 10^2}$ și $\sqrt{2^2}$.
R. 10.
16. Se dau mulțimile $A = \{n \in N \mid x < 10\}$; $B = \{n \in N \mid 11 < x < 20\}$.
Să se găsească $\text{Card } A + \text{Card } B$.
R. $9 + 8 = 17$.
17. Lungimea drumului de la București la Bacău este de 302 km. Pe o hartă această distanță are lungimea de 15,1 cm. Care este scara acestei hărți?
R. $\frac{1}{2\,000\,000}$.
18. Distanța de la București la Drăgășani este de 240 km. Cît va măsura această distanță pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$?
R. 12 cm.
19. Pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$ drumul de la Iași la București este de 20,4 cm. Care este în realitate această distanță?
R. 408 km.
20. În cît timp se poate parcurge cu bicicleta o distanță care pe hartă este de 32 cm, dacă scara hărții este de $\frac{1}{50\,000}$ iar viteza biciclistului este de 8 km pe oră?
R. 2 ore.
21. Se dau mulțimile:
 $M = \{x \in N \mid 400 < x < 411\}$.
 $P = \{x \in N \mid 409 < x < 413\}$.
a) Să se scrie mulțimile enumerînd elementele.
b) Să se găsească $\text{card } M + \text{card } P$.
R. b) 13.
22. Un excursionist care are viteza de 4 km pe oră, trebuie să parcurgă o distanță care pe harta lui cu scara $\frac{1}{100\,000}$ măsoară 2,4 cm. La ce oră va trebui să pornească la drum, ca să fie la destinație la ora 16?
R. ora 15 și 24 minute.
23. Să se calculeze:
a) $\text{Card } \{0\} + \text{Card } \{0\}$;
b) $\{\text{Card } \{0\} \cup \text{Card } \{0\}\}$.
R. a) 2. b) 1.
24. La construirea unui zid s-au întrebuițat 18 400 cărămizi. Cîte cărămizi trebuie pentru construirea unui alt zid, dacă raportul dintre lungimea zidului al doilea și lungimea primului zid este de $\frac{7}{12}$, raportul grosimilor este de $\frac{3}{2}$, iar raportul înălțimilor de $\frac{5}{14}$.
R. 5 750 cărămizi.

25. Se știe că: $\text{Card } A = 20$; $\text{Card } B = 40$; $\text{Card } (A \cup B) = 50$.

Sint disjuncte mulțimile A și B ?

R. Nu, căci $\text{Card } A + \text{Card } B \neq \text{Card } (A \cup B)$.

$\text{Card } A = 20$; $\text{Card } B = 63$ și $\text{Card } (A \cup B) = 83$.

Ce se poate spune despre mulțimile A și B ?

R. Sint disjuncte.

26. 5 pompe în 3 ore extrag 1 800 căldări de apă; 4 pompe în 4 ore cite căldări de apă extrag?

R. 1 920.

27. 5 muncitori lucrează 100 de piese în 10 ore. Trei muncitori — ca să lucreze cu 20% piese mai mult decât cei 5 muncitori —, cite ore le sint necesare?

R. 20 ore.

28. Pentru încălzirea a patru sobe în $8 \frac{1}{2}$ luni s-au întrebuințat 10,88 tone de cărbune. Cite sobe se pot încălzi cu 9,6 tone de cărbune timp de $2 \frac{1}{2}$ luni, norma fiind aceeași?

R. 12 sobe.

29. Una din roțile dințate ale unei mașini face 240 învîrtituri în 3 minute și are 60 de dinți. Cite învîrtituri pe minut va face altă roată care are 48 de dinți și este prinsă de prima roată?

R. 100 învîrtituri.

30. Mulțimea A are ca elemente numerele rezultate din scrierea numărului 28, folosind adunarea și numai cifra 2 de 5 ori. Mulțimea B are ca elemente numerele rezultate din scrierea lui 120 folosind tot adunarea și cifra 8 de 6 ori. Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.

R. $A = \{2; 22\}$; $B = \{8; 88\}$; $A \cup B = \{22; 2; 88; 8\}$; $A \cap B = \emptyset$.

31. Două dactilografe au primit pentru lucrarea efectuată o sumă oarecare de bani pe care trebuie s-o împartă între ele în raportul 4: 1; astfel prima dactilografă efectuînd o parte mai mare a obținut cu 105 lei mai mult decât a doua. Ce sumă au încasat ele pentru toată lucrarea?

R. $140 + 35 = 175$ lei.

32. O sumă de bani a fost împărțită la trei persoane. Să se afle ce sumă a luat fiecare, știind că sumele primite sint proporționale cu 5, 8, 3 și că prima a primit cu 200 de lei mai mult decât a treia.

R. 500 lei; 800 lei; 300 lei.

33. Fie mulțimea $A = \{n \in N \mid n < 4\}$.

Să se scrie mulțimea:

$B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ și } b \in A; a + b \in C\}$ unde mulțimea $C = \{x \in N \mid x < 3\}$.

R. $A = \{0; 1; 2; 3\}$; $B = \{(0; 1); (0; 2); (1; 0); (2; 0)\}$; $C = \{0; 1; 2\}$.

34. Laturile unui triunghi ABC sint de 3 cm, 4 cm, 5 cm, ele sint proporționale cu ale altui triunghi $A'B'C'$ ce are perimetrul de 24 cm.

Să se calculeze aria $\triangle A'B'C'$.

R. 24 cm^2

35. Să se scrie egalitățile următoare sub formă de proporții:

$$a^2 = bc; \quad (x + y)(x - y) = m^2; \quad (a - b)m = (a + b)n; \quad (m \cdot n) \cdot k = (m + n)^2.$$

Prin mutarea termenilor, să se formeze din proporțiile date proporții noi.

36. Să se extragă pe cale grafică rădăcina pătrată din numărul 35 și apoi să se verifice prin calcul rezultatul obținut.

Indicație. Se ține seama că $35 = 5 \cdot 7$. Se va lua o unitate de măsură după voie, de exemplu centimetrul, se va construi media proporțională între 5 cm și 7 cm, apoi se va măsura segmentul obținut.

37. Sumele încasate de trei muncitori drept premii pentru depășirea normei pe o lună sînt proporționale cu $0,75$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{15}$.

Cît a încasat fiecare dacă primul a încasat cu 25 lei mai mult decît al doilea!

R. {225; 200; 320}.

38. Se dau mulțimile $A = \{0; 3\}$; $B = \{4; 5; 6\}$.

a) Să se scrie mulțimea $P = A \cup B$

b) Cît este cardinal de P ?

R. Card $P = 5$.

39. Într-un triunghi ABC unghiul A este egal cu suma unghiurilor B și C . Să se afle fiecare unghi al triunghiului știind că raportul dintre unghiurile $\hat{B}$ și $\hat{C}$ este $\frac{2}{2,5}$ și cît la sută reprezintă unghiul cel mai mare față de cel mai mic?

R. 90° ; 40° ; 50° ; 225% .

Raportul a două numere este $\frac{a}{b}$, iar diferența lor este c .

Să se afle numerele dacă $a > b$; $c > 0$.

R. $\frac{ac}{a - b}$; $\frac{bc}{a - b}$.

41. Se dau mulțimile:

$$M = \{5; 6; 7; 10\}; \quad S = \{5; 8; 7\}.$$

Să se determine $A = M \cap S$.

R. $\{5; 7\}$;

42. Să se verifice printr-un grafic că dacă aria unui dreptunghi este constantă și mărim baza „ a ” de o sută de ori, înălțimea „ h ” a dreptunghiului se micșorează de același număr de ori.

43. Trei muncitori prelucurează 1 134 piese în 6 zile lucrînd fiecare respectiv 6, 7, 8 ore zilnic. Se cere:

a) Cîți muncitori vor prelucra 1 620 piese în patru zile lucrînd fiecare cîte 6 ore zilnic dacă viteza de prelucrare se mărește de 1,5 ori față de primul caz și dacă între muncitori nu sînt deosebiri de îndemînare.

R. 5 muncitori.

44. Să se împartă numărul 1 080 în două părți astfel încît 5% din prima parte să fie egal cu 4% din a doua parte.
R. 480; 600.
45. Suma a două numere este $285\frac{3}{4}$; primul număr reprezintă 14,3% din cel de-al doilea. Să se găsească aceste numere.
R. 35,75; 250.
46. În trei clase dintr-o școală elementară sînt 192 elevi. Numărul elevilor din cl. a II-a reprezintă $16\frac{2}{3}\%$ din numărul total al elevilor, numărul elevilor din cl. a III-a reprezintă 125% din numărul elevilor din cl. a II-a. Cîți elevi sînt în cl. a II-a și a III-a luate împreună.
R. 72 elevi.
47. Fonta conține 3,5% carbon, 1,5% siliciu, 1% mangan, $\frac{2}{5}\%$ fosfor, și 0,01% sulf. Să se determine cantitatea în kg a acestor elemente dintr-o tonă de fontă.
R. 35 kg; 15 kg; 10 kg; 4 kg; 0,1 kg.
48. Într-un manej sînt 12 cai. Într-o zi au venit la antrenament 12 călăreți amatori.
a) Să se stabilească corespondența ce se poate exprima între cele două mulțimi (cai și călăreți).
b) Să se reprezinte această corespondență printr-un desen.
49. Există $x \in N$ pentru ca $x + 1 \leq 3$? Care sînt aceste numere?
R. $x = \{0; 1; 2\}$.
50. Ciupercile proaspete conțin 90% apă iar cele uscate 12% apă. Ce cantitate de ciuperci uscate se pot obține din 10 kg de ciuperci proaspete?
R. $\approx 1,14$ kg.
51. La scrierea numărului 4 056 s-a omis cifra 0. Să se afle:
a) eroarea absolută, b) eroarea relativă (cu aproximație de 0,1%),
c) cîte procente reprezintă numărul dat, față de numărul scris greșit (cel nou), d) cu cîte procente este mai mic numărul cel nou, decît numărul dat?
R. a) 3600; b) 88,8%; c) 889,5%; d) 88,8%.
52. Să se arate că dacă avem mulțimile:
 $M = \{1; 5; 9; 13\}$; $P = \{x \in N \mid x = 4n - 3, n \in N, n \leq 5\}$.
atunci $\text{Card } M < \text{Card } P$.
R. $P = \{1; 5; 9; 13; 17\}$.
 $\text{Card } M = 4$; $\text{Card } P = 5$; $4 < 5 \Rightarrow \text{Card } M < \text{Card } P$.
53. Un atelier poate să execute o comandă în 4 zile; un alt atelier, în 3 zile. Executînd împreună lucrarea, amîndouă atelierele au efectuat-o în $1\frac{1}{2}$ zile, fiecare atelier executînd $\frac{1}{2}$ din lucrare.
În care dintre ateliere s-a mărit productivitatea muncii, și de cîte ori.

Soluția I-a.

Primul atelier putea efectua într-o zi $\frac{1}{4}$ din lucrare, al doilea $\frac{1}{3}$.

Lucrând $1\frac{1}{2}$ zile, primul atelier ar fi făcut $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ din lucrare.

Problema spune că a efectuat $\frac{1}{2}$ din lucrare, deci mai mult decât $\frac{3}{8}$; rezultă că primul atelier și-a mărit productivitatea muncii de $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ori. Al doilea atelier, lucrând $1\frac{1}{2}$ zile, face $1\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ din lucrare fără a-și mări productivitatea muncii.

Soluția II-a.

Primul atelier executând $\frac{1}{2}$ din lucrare în $1\frac{1}{2}$ zile, înseamnă că ar fi putut termina toată lucrarea în trei zile, în loc de 4 zile, deci că face $\frac{1}{3}$ din lucrare pe zi, în loc de $\frac{1}{4}$.

Deci, productivitatea s-a mărit de $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ori.

Al doilea atelier, efectuând $\frac{1}{2}$ din lucrare în $1\frac{1}{2}$ zile, urmează că toată lucrarea a fost terminată în 3 zile $\Rightarrow$ nu și-a mărit productivitatea.

54. Pentru o instalație s-a întrebuințat un sul de sîrmă în felul următor: în prima zi s-a întrebuințat $\frac{1}{3}$ din sîrmă și încă 90 m;

în a doua zi s-a întrebuințat $\frac{1}{3}$ din rest și încă 60 m;

în a treia zi s-a întrebuințat $\frac{1}{3}$ din noul rest plus 20 m;

în a patra zi s-au întrebuințat 40 de m rămași.

a) Cîți metri de sîrmă avea sulul?

b) Fie M și N mulțimile a căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă, lungimea totală a sîrmei respective și lungimea unei treimi din ea. Să se determine $M \cup N$ și $M \cap N$.

c) Să se prezinte graficul $M \cap N$.

Indicație. Utilizăm metoda mersului invers, adică pornim cu raționamentul de la finele problemei;

R. 472,5 m.

55. Un grup de băieți s-au dus la riu să se scalde. 8 dintre ei au trecut înot pe celălalt mal al râului, apoi au mai trecut jumătate din cei rămași și atunci pe malul celălalt au fost de două ori mai mulți decît cei rămași. Cîți băieți s-au dus să se scalde?

Indicație. Considerăm situația după ce au trecut pe cel de-al doilea mal 8 băieți și încă un grup ce reprezintă $\frac{1}{2}$ din cei rămași pe mal.

Cele două grupe de mai sus-reprezintă un număr de 2 ori mai mare decît acela al băieților rămași pe primul mal. Așadar avem pe ambele maluri trei grupe egale de cîte 8 băieți fiecare, de unde rezultă că în total sînt 24 băieți.

R. 24 băieți.

56. Într-o sală de festivități a unei școli se pun bănci. Dacă în fiecare bancă s-ar așeza câte 5 elevi, ar mai trebui 8 bănci, dar dacă în fiecare bancă s-ar așeza câte 6 elevi, ar rămâne goale două bănci.
a) Câte bănci erau în sală?

Indicații. Rămân $8 \cdot 5 = 40$ de elevi fără bănci; cei 40 de elevi completează $40 : 1 = 40$ de bănci.

Dar mai rămân încă 2 bănci libere adică cei $2 \cdot 5 = 10$ elevi, din aceste bănci, vor trebui să se așeze câte unul în băncile care au numai câte 5 elevi. Astfel vor completa încă 10 bănci, pe lângă cele 40; mai sînt 2 bănci libere.

R. 52 bănci.

57. Cu aceeași sumă de bani doi elevi au cumpărat albume. Primul a cumpărat cu 5,60 lei bucata și i-au rămas 4 lei, cel de-al doilea a cumpărat cu 4,80 lei bucata și i-au rămas 2,40 lei. Știind că primul elev a cumpărat cu 2 albume mai puțin decît al doilea, să se afle ce sumă a avut fiecare și câte albume s-au cumpărat.

Indicație. Dacă și cel de-al doilea elev ar fi cumpărat același număr de albume (cu 2 mai puțin), i-ar fi rămas:

$$2 \times 4,80 + 2,40 = 12 \text{ lei,}$$

adică i-ar fi rămas în plus față de primul elev: $12 - 4 = 8$ lei.

Această diferență provine din faptul că l-a costat un album $5,60 - 4,80 = 0,80$ lei mai puțin.

R. 60 lei; 10 albume; 12 albume.

58. O brigadă a unei cooperative agricole de producție trebuie să altoiască, în conformitate cu planul stabilit, câte 50 de butuci de vie zilnic. Brigada a altoit în fiecare zi câte 56 de butuci și a terminat lucrarea cu 3 zile înainte de termen depășind planul cu 120 de butuci altoiți.
Să se afle cîți butuci de vie trebuia să altoiască după plan?

Indicație. Lucrînd câte 56 butuci pe zi, în 3 zile se realizează 168 butuci. S-ar fi depășit deci planul în total cu $120 + 168 = 288$ de butuci. Această depășire provine din depășirea zilnică de 6 butuci de vie.

R. = 2 400.

59. O cooperativă de producție trebuia să semene conform planului câte 40 ha pe zi. Depășind norma, se lucrează în 3 zile 156 ha. Lucrînd în același ritm, termină semănatul cu 2 zile înainte de termen și realizează cu 4 ha mai mult decît era prevăzut în plan.
a) Cîte hectare a semănat?
b) Fie H mulțimea a cărei elemente sînt cifrele scrise în ordinea crescătoare a numărului ce reprezintă totalul de hectare semănat și D mulțimea a cărei elemente sînt cifrele scrise în ordine descrescătoare a aceluiași număr. Să se determine $H \cup D$; $H \cap D$.

Indicație. Dacă s-ar fi lucrat întreg numărul de zile prevăzute în plan, planul ar fi fost depășit cu încă 104 ha, deci în total s-ar fi obținut 108 ha depășire. Depășirea zilnică fiind de 12 ha, depășirea totală s-ar fi obținut în 9 zile.

R. a) 364 ha.

b) $H = \{3; 4; 6\}$; $D = \{6; 4; 3\}$;
 $H \cup D = H \cap D = \{3; 4; 6\}$

60. C.m.m.d.c. a două numere este 2. C.m.m.m.c. a acestor numere este 60.

Să se găsească aceste numere, știind că raportul lor este $\frac{5}{6}$.

R. 10; 12

61. Un pionier are o sumă de bani. Dacă dă fratelui lui un leu îi mai rămâne pe jumătate cât are acum fratele lui, dacă însă fratele lui îi dă un leu, atunci ei vor avea sume egale.

Câți lei are fiecare (soluție aritmetică).

R. 5 lei și 7 lei.

GEOMETRIE

II. Probleme de geometrie

1. Unghiuri

1. Să se facă următoarele calcule cu grade, minute și secunde.

a) $35^{\circ}43'28'' + 46^{\circ}32'43'' - 15^{\circ}27'8''$.

b) $24^{\circ}85'72'' + 86^{\circ}320'245'' + 1^{\circ}320''$,

c) $85^{\circ}12'46'' - 24^{\circ}37'32''$,

d) $120^{\circ} - 85^{\circ}26'38''$, e) $84^{\circ}98'305'' - 24^{\circ}350'430''$,

f) $(28^{\circ}18'27'') \cdot 4$, g) $(57^{\circ}23'15'') : 5$,

h) $(16^{\circ}342'84'' + 8^{\circ}316'94'') \cdot 4 : 3$.

2. Să se afle în grade, minute și secunde complementele unghiurilor de 45° ; 32° ; 18° ; $84^{\circ}72''$; $31^{\circ}94'102''$.

3. Raportul a două unghiuri complementare este $\frac{2}{7}$. Să se determine aceste unghiuri.

R. 20° ; 70° .

4. Să se construiască două unghiuri adiacente, a căror sumă să fie egală cu 126° și unul din unghiuri să fie $\frac{1}{2}$ din celălalt.

R. $= 84^{\circ}$; 42° .

5. Două drepte D și Δ sînt concurente în punctul A .
Să se scrie această relație

R. $\Delta \cap D = \{A\}$.

6. Să se calculeze unghiul care reprezintă $\frac{3}{5}$ din unghiul de la centrul unui cerc care cuprinde între laturile lui un arc egal cu a 8^a parte din cerc. (Unghiul de la centrul unui cerc se măsoară prin arcul cuprins între laturile sale.)

R. 27° .

7. Două unghiuri adiacente au unul $27^{\circ}38'23''$ și celălalt 152° .

Să se spună dacă laturile necomune sînt în prelungire.

8. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt în prelungire.

9. Două unghiuri sînt suplementare, unul dintre ele este $\frac{2}{7}$ din suplementul său. Unghiul cel mai mare se împarte în alte trei unghiuri A, B, C astfel

$\hat{B} > \hat{A}$ cu 40° , $\hat{C} = \frac{\hat{A}}{3}$ plus 30° . Să se calculeze unghiurile A, B, C (soluție aritmetică).

$$\text{R. } \hat{A} = 30^{\circ}; \hat{B} = 70^{\circ}; \hat{C} = 40^{\circ}.$$

10. Să se arate că unghiul format de bisectoarea AO a unui unghi BAC cu o dreaptă oarecare AD dusă prin vîrf unghiului în afară de unghi este egală cu semisuma unghiurilor, ce această dreaptă face cu fiecare dreaptă din laturile unghiului.

11. Un unghi este de 7 ori mai mare decît suplementul său. Să se afle aceste unghiuri.

$$\text{R. } 22^{\circ}30'; 157^{\circ}30'.$$

12. Un unghi este $\frac{2}{7}$ din complementul său. Să se calculeze mărimea unghiului format de jumătatea unghiului celui mai mare și unghiul cel mai mic.

$$\text{R. } 55^{\circ}.$$

13. Mediana dusă din unul din unghiurile egale ale unui triunghi isoscel împarte perimetrul lui în două părți: de 15 cm și 6 cm. Să se calculeze baza triunghiului isoscel.

$$\text{R. } 1 \text{ cm.}$$

14. Un unghi este $\frac{7}{8}$ din suplementul său. Să se arate că $\frac{2}{3}$ din unghiul cel mai mare este cu un grad mai mare decît $\frac{3}{4}$ din unghiul cel mai mic.

15. Să se demonstreze că dacă suma a 3 unghiuri este egală cu 90° atunci suma complementelor lor este egală cu 180° .

Indicație. $90^{\circ} - a + 90^{\circ} - b + 90^{\circ} - c = 270^{\circ} - 90^{\circ} = 180^{\circ}$.

Să se facă această demonstrație prin constuirea unghiurilor respective fără calcul.

Să se generalizeze considerînd în loc de trei unghiuri, n unghiuri.

16. Să se demonstreze că două unghiuri care au același vîrf și laturile două cîte două perpendiculare sînt: sau egale sau suplementare.

Indicație. Dacă unghiurile sînt amîndouă ascuțite sau amîndouă obtuze ele sînt egale; cînd unul este obtuz și celălalt ascuțit ele sînt suplementare.

17. Să se demonstreze că unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente este egal cu semisuma celor două unghiuri.

18. În jurul unui punct sînt patru unghiuri consecutive AOB, BOC, COD, DOA , astfel că al doilea este dublu primului și încă 20° , al treilea este cu

10° mai puțin decât întregul primului, iar al patrulea este de patru ori mai mare decât primul și încă 30°.
Câte grade are fiecare unghi?

R. 32°; 84°; 86°; 158°.

19. Se dă unghiul AOB ; să se construiască unghiul COD care să fie suplementul primului unghi și să aibă aceeași bisectoare cu el.

Indicație. Se duc semidrepte perpendiculare în O pe OA și OB .

20. Fie OC bisectoarea unghiului AOB , iar OM o dreaptă oarecare. Să se arate că $\widehat{COM}$ este semidiferența sau semisuma unghiurilor $\widehat{AOM}$ și $\widehat{BOM}$ după cum OM este interioară sau exterioară unghiului AOB .

Indicație. $\widehat{AOM} = a$; $\widehat{MOB} = b$; $\widehat{COM} = c$, avem $a - c = b + c$.

21. Se dă unghiul AOB , se duc prin O semidreptele OA' și OB' astfel ca OB să fie bisectoarea unghiului AOA' iar OA să fie bisectoarea unghiului BOB' . Cum trebuie să fie unghiul AOB pentru ca semidreptele OA' ; OB' să fie sau în prelungire sau perpendiculare.

Indicație. $A'OB' = 3\widehat{AOB} \Rightarrow AOB$ este de 60° sau 30°.

2. Triunghiuri

22. Să se demonstreze că dacă ducem o perpendiculară pe bisectoarea unui unghi, ea formează cu laturile unghiului un triunghi isoscel.

Indicație. (Se vor observa două triunghiuri egale).

23. Să se demonstreze că medianele duse din extremitățile bazei unui triunghi isoscel sînt egale. Aceeași proprietate să se demonstreze și pentru bisectoarele și înălțimile duse din aceleași extremități.

24. Pe laturile triunghiului echilateral ABC , se iau, în același sens, lungimile egale AM , BN , CP ; să se arate că triunghiul MNP este și el echilateral.

25. Pe o latură a unui unghi $\widehat{xOy}$ se iau două lungimi oarecare OA și OB , $A \in OX$ și $B \in OY$, iar pe cealaltă latură se iau lungimile $OC = OA$ și $OD = OB$; $AD \cap BC = \{M\}$.

Să se demonstreze că OM este bisectoarea unghiului $\widehat{xOy}$.

26. Să se demonstreze că în două triunghiuri egale, segmentele determinate de înălțimile sau bisectoarele corespunzătoare unghiurilor egale pe laturile opuse sînt egale.

27. Să se demonstreze că distanțele a două din vîrfurile unui triunghi la mediana ce corespunde vîrfului al treilea sînt egale.

28. Să se arate că dacă într-un triunghi dreptunghic o catetă este egală cu jumătate din ipotenuză, atunci unghiul opus acelei catete este de 30°.

29. Se prelungesc în același sens laturile BC , CA , AB ale unui triunghi echilateral ABC cu lungimile $CA' = AB' = BC'$. Să se demonstreze că $\triangle A'B'C'$ este și el echilateral.

30. Fie unghiul $\widehat{xOy}$ și OP bisectoarea unghiului. Punctul $M \in OP$. Se duc perpendicularele MA și MB pe Ox și Oy ; $MB \cap Oy = \{B'\}$; $MA \cap Oy = \{A'\}$.
 a) Să se arate că $MA'B'$ este un triunghi isoscel.
 b) $OM \cap A'B' = \{N\}$. Să se arate că ON este bisectoarea unghiului $\widehat{A'MB'}$.
31. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) se duc înălțimile BB' și CC' . Să se arate că $\triangle AB'C'$ este isoscel. Să se arate că și în cazul cînd BB' și CC' sînt biseatoare, $\triangle AB'C'$ este isoscel.
32. Să se demonstreze că dacă două triunghiuri sînt simetrice față de o axă atunci și medianele și înălțimile celor două triunghiuri sînt simetrice față de acea axă.
33. Se dă $\triangle$ isoscel ABC , ($AB = AC$); AD înălțime; $N \in AD$. Fie N' și N'' simetricele lui N față de AB și AC . Să se arate că $\triangle AN'N''$ este isoscel. Ce fel de patrulater este $AN'NN''$?
34. Se dă $\triangle ABC$ dreptunghic în A . Fie $M \in BC$; M' și M'' simetricele lui M față de catetele AB și AC .
 Să se arate că $\triangle MM'M''$ este dreptunghic și că M' , A , M'' sînt puncte coliniare.
35. Să se demonstreze că o mediană a unui triunghi este mai mică decît suma laturilor care pornesc din același vîrf.
- Indicație.* Fie mediana AD în $\triangle ABC$; se construiește simetricul punctului A față de punctul D .
36. Să se demonstreze că suma medianelor unui triunghi este mai mică decît perimetrul triunghiului.
- Indicație.* Se folosește indicația din problema precedentă pentru fiecare mediană.
37. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct oarecare D . Să se demonstreze că AD este mai mică decît semiperimetrul triunghiului ABC dar mai mare decît diferența dintre semiperimetrul acestui triunghi, și latura BC .
- Indicație.* $AD < AB + AC$ și $AD > AC - AB$.
38. Fie un patrulater $ABCD$ în care știm că AD este latura cea mai mare iar BC latura cea mai mică. Să se arate că $\hat{B} > \hat{D}$.
39. Se dă $\triangle ABC$ în care $AC > AB$. Să se demonstreze că cel mai mare dintre unghiurile făcute de mediana AD cu latura BC este acela care se opune la latura cea mai mare dintre laturile AC și AB .
- Indicație.* Se consideră triunghiurile ABD și ADC sau se folosește înălțimea dusă din A .

3. Linii importante în triunghiuri

40. Fie triunghiul echilateral ABC și AD înălțimea ($D \in BC$). Mediana dusă din D intersectează pe AC în M .
 Se cere:

$$1) DM = DC = \frac{AC}{2};$$

2) ADM este isoscel.

Indicație. Fie D' simetricul punctului D în raport cu punctul M . Patrulaterul format $ADCN$ este dreptunghi.

Observații: Într-un triunghi dreptunghic cateta opusă unghiului de 30° și mediana dusă din unghiul drept pe ipotenuză sint egale și egale fiecare cu jumătate din ipotenuză.

41. Bisectoarele unghiurilor consecutive $\hat{A}$ și $\hat{B}$ ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează în N ($N \in CD$). Fie NM mediana în triunghiul ANB .

1) Să se arate că $AMND$ este paralelogram.

2) Triunghiul AMN isoscel.

42. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) în care AD este înălțimea ($D \in BC$). Fie M și N mijloacele catetelor AB și AC și $MN \cap AD = \{O\}$. Se cere:

1) $\triangle AMD$ isoscel,

2) $AO \perp MN$.

43. Să se arate că într-un triunghi oarecare ABC mediana AD este egal depărtată de B și C .

Indicație. Din B și C se duc perpendiculare pe AD se vor observa triunghiurile formate.

44. O mediană într-un triunghi este mai mică decât semisuma laturilor adiacente.

Indicație. Se prelungește mediana cu o lungime egală cu ea și se va observa triunghiul în care o latură este indoitul medianei.

45. În două triunghiuri egale medianele, bisectoarele și înălțimile corespunzătoare la două laturi omoloage sint egale.

46. Între două sate A și B trece o șosea S . Unde trebuie construită pe șosea o stație de autobuz ca să fie la egală depărtare de ambele sate.

R. La intersecția mediatoarei segmentului AB cu șoseaua.

47. Două șosele Ox și Oy sint așezate astfel $xO \cap yO = \{O\}$. Pe șoseaua xO se află o combină de treierat A , iar pe șoseaua yO o combină B .

Unde trebuie așezat un stîlp cu lumină ca să fie egal depărtat de cele două combine și egal depărtat de cele două șosele.

Indicație. Se vor folosi proprietățile bisectoarei și a mediatoarei.

48. Unde trebuie să se construiască o fîntînă F între două șosele paralele Δ și Δ' pentru ca să fie egal depărtate de două sate A și B în cazul cînd $A \in \Delta$ și $B \in \Delta'$ sau $(A \text{ și } B) \in \Delta$ sau $(A \text{ și } B) \in \Delta'$.

49. Să se determine un punct egal depărtat de trei puncte date ce nu sint situate pe aceeași linie dreaptă.

50. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) și $\hat{B} = 60^\circ$. Se cere:

1) Unde trebuie să luăm un punct N pe ipotenuza BC astfel ca triunghiul ABN să fie echilateral.

2) Unde trebuie să luăm un punct M pe cateta AC ca triunghiul ANM să fie isoscel.

3) AD fiind înălțimea ($D \in BC$) să se arate că $\widehat{DAN} = \frac{\widehat{A}}{3}$.

Indicație. AN mediană, BM bisectoare și NM mediatoarea segmentului BC . Se studiază triunghiurile ABM ; BMN și AMN .

51. Fie dreapta AB și două puncte C și D de aceeași parte a ei.
Să se afle punctul P pe dreapta AB așa fel încît $CP + PD$ să fie minimă.

Fie C' simetricul punctului C față de AB

$AB \cap CC' = \{I\}$ IP este mediatoarea segmentului CC' .

52. În $\triangle MNP$, înălțimea $MA = \frac{NP}{2}$. Să se arate că unghiul M este ascuțit.
În ce caz acest unghi poate fi drept?

Indicație. Se construiește bisectoarea MO ; $O \in NP$. $MO > MA$.

53. Fie O mijlocul segmentului BC . Se duce semidreapta Ox și se ia pe această semidreaptă un punct A .

Să se arate că dacă $OA = \frac{BC}{2}$ atunci BAC este drept.

54. Să se arate că pe un cerc punctul cel mai apropiat și punctul cel mai depărtat de un punct dat A sînt extremitățile diametrului ce trece prin A . (A situat în interiorul sau în exteriorul cercului.)

55. La un cerc dat să se ducă o tangentă perpendiculară pe o dreaptă dată.

56. La un cerc dat să se ducă o tangentă care să facă cu o dreaptă dată un unghi dat α .

57. Fiind date trei puncte A, B, O să se afle o dreaptă ce trece prin O și este egal depărtată de punctele A și B .

58. Se dă triunghiul ABC în care $B - C = 90^\circ$. Fie AD bisectoarea unghiului A ($D \in BC$). Să se arate că $\widehat{ADC} - \widehat{ADB} = 90^\circ$.

59. Într-un triunghi ABC unghiul exterior $\widehat{B}$ este cu 140° mai mare decît unghiul $\widehat{C}$ și cu $\frac{2}{9}$ dr. mai mare decît unghiul $\widehat{A}$.

Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

60. Fie triunghiul ABC și $\widehat{D}$ un punct în interiorul triunghiului astfel că $\widehat{ABD} = \frac{\widehat{A}}{2}$ și $\widehat{ACD} = \frac{\widehat{A}}{3}$.

Să se arate că $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{BDC}} = \frac{6}{11}$.

61. Fie triunghiul ABC și AM bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$ ($M \in BC$). Prin punctul $\hat{B}$ se duce o paralelă la AM care intersectează pe AC în D . Se cere:

$$1) \widehat{ADB} = \frac{\widehat{BAC}}{2};$$

2) $\triangle ADB$ isoscel.

62. Fie N un punct în interiorul triunghiului ABC . Să se arate că $\widehat{BNC} > \widehat{BAC}$.

63. Pe laturile AB și CA ale triunghiului echilateral ABC se iau punctele C' și B' astfel ca $\widehat{AC'} = \widehat{CB'}$; $CC' \cap BB' = \{M\}$.

Să se arate că $\widehat{BMC} = 120^\circ$.

Indicație. Triunghiul $BB'C = \triangle AC'C$; $\widehat{BMC} = \widehat{BB'C} + \widehat{B'CC'} = \widehat{AC'C} + \widehat{ACC'} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

64. Fie punctul D pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC .

Să se arate că diferența unghiurilor formate de AD cu BC este egală cu diferența unghiurilor formate de AD cu laturile egale.

65. Fie A' ; B' ; C' picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor A , B , C ale triunghiului ABC . Să se arate că $\widehat{AA'C} + \widehat{BB'A} + \widehat{CC'B} = 270^\circ$.

Indicație. $\widehat{AA'C} = \frac{\hat{A}}{2} + \hat{B}$; $\widehat{AB'B} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}$; $\widehat{CC'B} = \frac{\hat{C}}{2} + \hat{A}$.

4. Egalitatea triunghiurilor

66. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele care au bazele egale și înălțimile ce cad pe ele egale sînt egale.
67. Să se arate că două triunghiuri isoscele sînt egale dacă au unghiurile de la vîrf egale și înălțimile care cad pe baze egale.
68. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele sînt egale dacă au bazele egale și înălțimile corespunzătoare egale.
69. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = BC$) se prelungesc BA și CA cu segmente egale $AA' = AB'$; $BB' \cap CA' = \{N\}$. Să se arate că triunghiul NBC este isoscel.
70. Unghiul exterior unui triunghi este mai mare decît fiecare unghi interior al triunghiului nealăturat lui.

Indicație. Fie triunghiul ABC și $\hat{C}$ unghiul exterior. Se duce mediana din $\hat{B}$ pe latura AC și se prelungeste cu un segment egal cu ea.

71. Fie M și N mijloacele laturilor AB și AC ale unui triunghi ABC .

Să se arate că $MN = \frac{BC}{2}$.

Indicație. Simetricul punctului M în raport cu N este un alt punct M' . Se cercetează triunghiurile AMN și NCM' și patrulaterul $MM'CB$.

72. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) se prelungește baza de o parte și alta cu segmentele $BM = CN$. Fie AI mediana ($I \in BC$).

Să se arate că $\widehat{MAI} = \widehat{NAI}$.

73. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) se duc înălțimile CN și BM ($N \in AB$; $M \in AC$). Fie B' și C' simetricile lui B și C în raport cu M și N . Se cere:

1) $BC' = CB'$;

2) $AB'C'$ isoscel;

3) Să se determine $\widehat{B'AC'}$ știind că $\widehat{BAC} = 42^\circ 33' 12''$.

R. 3) $127^\circ 39' 36''$

74. Pe baza BC a triunghiului isoscel ABC se construiește pătratul $BCC'B'$, $AB' \cap BC = \{M\}$ și $AC' \cap BC = \{N\}$.

Să se arate că $B'N = C'M$.

75. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) fie ND mediatoarea laturii AB ($D \in AC$) și BD bisectoarea unghiului B .

Să se arate că unghiul $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{4} = 36^\circ$.

76. În triunghiul echilateral ABC simetricul punctului B față de AC este B' . Pe AB' se construiește pătratul $AB'C'A'$.

Să se arate că triunghiul $AB'A'$ este isoscel.

77. Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau segmente egale în același sens. Să se arate că patrulaterul obținut $A'B'C'D'$ este tot un pătrat.

78. În interiorul unui hexagon regulat $ABCDEF$ (cu toate laturile și unghiurile egale) se unesc vîrfurile din două în două.

1) Să se arate că triunghiul AEC este echilateral.

2) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABF .

3) Să se determine un punct în interiorul triunghiului BFD care împarte hexagonul în șase triunghiuri egale.

4) Să se arate că aria triunghiului $BFD = \text{aria } \frac{ABCDEF}{2}$.

79. Fie AD bisectoarea unghiului $\hat{A}$ ($D \in BC$) iar simetricile punctului D față de AC și AB , sînt respectiv M și N .

Să se arate că $DM = DN$.

80. Se dă triunghiul ABC în care $\hat{B} = 60^\circ$ iar unghiul $\hat{C} = 30^\circ$. Bisectoarea interioară a unghiului $\hat{B}$ intersectează pe AC în D . Din punctul D se duce perpendiculara DM pe BC ($M \in BC$). Prolungirea lui MD intersectează pe AB în N .

Să se arate că triunghiul BNC este echilateral.

81. De o parte și de alta a unui segment AB se construiesc unghiuri egale BAC și ABD ; $AC = BD$; $CD \cap AB = \{M\}$.

Să se arate că $AM = MB$.

Indicație. Se observă mai întâi triunghiurile ABD și BAC apoi triunghiurile ACD și CBD și apoi $\triangle AMC = \triangle BMD$.

82. Fie triunghiul echilateral ABC . Se duce din A o perpendiculară pe AB care intersectează pe BC în D . Din B se duce o dreaptă care intersectează pe AC în F și pe AD în M astfel ca unghiul $\widehat{MBD} = \frac{1}{3}$ din unghiul $\widehat{ABM}$.

Fie CN bisectoarea unghiului exterior C ($N \in AD$).

Se cere:

$$AM = CD; \text{ și } AN = ND.$$

5. Suma unghiurilor unui poligon convex

83. Numărul laturilor unui poligon convex neregulat este „ n ” divizibil cu 2 și 9. Să se calculeze suma unghiurilor interioare ale acestui poligon știind că $8 < n < 36$.

R. 2 880°.

84. Suma unghiurilor interioare ale unui poligon convex este egală cu 6 unghiuri drepte.

Să se determine numărul laturilor acestui poligon.

R. 5.

85. Fie poligonul convex neregulat $ABCDE$. Unghiul $\hat{D} < \hat{B}$ cu 20°, $\hat{C} > \hat{B}$ cu 40°; $\hat{A} = \hat{B}$ și $E > B$ cu 20°.

Să se determine unghiurile interioare ale acestui poligon.

$$\text{R. } \hat{A} = 100^\circ = \hat{B} = 100^\circ;$$

$$\hat{C} = 140^\circ; \hat{D} = 80^\circ; \hat{E} = 120^\circ.$$

86. Unghiurile interioare ale unui poligon convex sînt proporționale cu numerele 5; 8; 14; 12; 17; 16.

Să se determine unghiul sub care se intersectează bisectoarele interioare ale unghiurilor celor mai mici ale poligonului dat.

R. 115°.

87. Să se calculeze un unghi al unui poligon regulat (cu laturile egale) cu 7 laturi, cu 8 laturi și cu 15 laturi.

R. 128°34'17",2; 135°; 156°.

88. Să se arate că într-un patrulater convex suma a două unghiuri exterioare este egală cu suma celor două unghiuri interioare nealăturate.

Indicație. Considerăm unghiurile exterioare din $\hat{A}$ și $\hat{B}$ și avem $180 - \hat{A} + 180 - \hat{B} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = \hat{C} + \hat{D}$.

89. Se da patrulaterul convex $ABCD$, bisectoarele unghiurilor alăturate $\hat{A}$ și $\hat{B}$ se intersectează în M , iar bisectoarele unghiurilor alăturate $\hat{C}$ și $\hat{D}$ se intersectează în N .

Să se arate că $\widehat{AMB} + \widehat{CND} = 180^\circ$.

Indicație. $\widehat{AMB} = 180^\circ - \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2};$

$$\widehat{CND} = 180^\circ - \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}.$$

90. Suma unghiurilor interioare ale unui poligon convex este de 540° . Aceste unghiuri sînt invers proporționale cu $\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{12}; \frac{1}{14}$.

Să se determine aceste unghiuri.

R. $80^\circ; 90^\circ; 110^\circ; 120^\circ; 140^\circ$.

91. Să se arate că suma unghiurilor exterioare oricărui poligon convex este egală cu 4 unghiuri drepte.

Indicație. $180^\circ n - 180^\circ (n - 2) = 360^\circ$.

92. Să se calculeze suma unghiurilor unui poligon convex care îndeplinește condiția că există un punct în interiorul lui din care să se vadă laturile sale sub același unghi.

Să se construiască un astfel de poligon.

Indicație. Se ține seama de poziția diagonalelor unui patrulater, care să îndeplinească condiția cerută.

93. Fiind dat un triunghi ABC , bisectoarele interioare duse din B și C se intersectează în punctul O și formează unghiul $\widehat{BOC} = 120^\circ$.

Să se determine unghiul $\widehat{A}$ al triunghiului ABC .

R. 60° .

94. Se dă un triunghi isoscel ABC , ($AB = AC$). Se prelungește BA dincolo de A cu lungimea $AD = BA$. Să se arate că $\triangle DBC$ este dreptunghic.

Indicație. $\triangle DAC$ isoscel; se studiază unghiurile.

6. Drepte paralele

95. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt perpendiculare sau paralele.

96. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, sînt perpendiculare sau paralele.

97. Fiind date două paralele tăiate de o secantă, să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor corespondente sînt paralele.

98. Să se arate că dacă două unghiuri au două laturi paralele și celelalte două perpendiculare, suma sau diferența lor este egală cu un unghi drept sau cu trei unghiuri drepte.

99. Într-un triunghi ABC se duc bisectoarele BB' ($B' \in AC$) și CC' ($C' \in AB$), $BB' \cap CC' = \{I\}$. Se duce prin I o paralelă MN la BC . ($M \in AB, N \in AC$) Să se arate că avem relația $MN = MB + NC$.

Indicație. $\triangle MBI$ și $\triangle NCI$ sînt isoscele.

100. Prin vârful A a unui triunghi ABC se duce o paralelă la BC . Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ taie paralela dusă prin A în N ; $BN = 20$ cm, $AB = 6$ cm. Să se calculeze perimetrul $\triangle ABN$.

R. 32 cm.

101. Prin vîrfurile unui triunghi se duc paralele la laturile opuse și se prelungesc pînă ce se întîlnesc două cîte două. Să se arate că triunghiul format este de patru ori mai mare decît cel dat.

102. Într-un triunghi ABC , unghiul $\hat{A}$ este de două ori mai mare decît unghiul $\hat{B}$. Bisectoarea unghiului $\hat{A}$ intersectează pe BC în D , iar bisectoarea unghiului $\hat{ADC}$ intersectează pe AC în E .

a) Să se arate că $DE \parallel AB$.

b) Ce fel de triunghiuri sînt ABD , ADE ?

7. Patrulatere

103. Într-un paralelogram $ABCD$, dreapta MN unește mijloacele laturilor opuse AB și CD . Fie O centrul paralelogramului. Să se arate că $MN \parallel$ cu AD și cu BC și că punctele N, O, M sînt coliniare.

104. Prin centrul unui paralelogram $ABCD$ se duc două drepte după voie, prima intersectează laturile opuse AB și CD în M și N , iar a doua intersectează celelalte două laturi opuse în P și Q .

Să se demonstreze că patrulaterul $MQNP$ este un paralelogram.

Cum trebuie duse aceste drepte ca patrulaterul să devină romb?

105. Să se demonstreze că un patrulater în care două laturi opuse sînt paralele, iar o diagonală este tăiată în părți egale de cealaltă diagonală este paralelogram.

106. Bisectoarele interioare ale unui paralelogram se întîlnesc între ele formînd un dreptunghi.

107. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui paralelogram se iau în același sens respectiv punctele E, F, G, H astfel ca $AE = CG$ și $BF = DH$.

Să se demonstreze că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram cu același centru ca și paralelogramul dat.

108. Prin vîrfurile opuse A și C ale paralelogramului $ABCD$ se duc două drepte paralele, după voie, care intersectează diagonala BD în punctele A' și C' . Să se demonstreze că $A'B = C'D$.

Indicație. Se vor considera triunghiul $AA'B$ și triunghiul $CC'D$.

109. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram. În ce caz acest paralelogram devine: romb, dreptunghi sau pătrat?

Indicație. Se va observa că laturile noului patrulater sînt paralele cu diagonalele patrulaterului dat.

110. Punctele de intersecție a celor patru bisectoare interioare ale unui dreptunghi, sînt vîrfurile unui pătrat.

Indicație. Se va observa că aceste bisectoare formează cu laturile dreptunghiului patru triunghiuri dreptunghice isoscele, egale două câte două.

111. Ducînd două paralele la egală distanță de diagonala unui dreptunghi, în interiorul dreptunghiului și unind extremitățile se formează un paralelogram.

112. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile unui dreptunghi pe diagonalele sale sînt vîrfurile altui dreptunghi, avînd laturile respectiv paralele cu ale dreptunghiului dat.

113. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din centrul unui romb pe laturile sale sînt vîrfurile unui dreptunghi.

114. Se unesc extremitățile unei laturi a unui dreptunghi cu un punct arbitrar de pe latura opusă. Să se arate că triunghiul format astfel are aria jumătate cit a dreptunghiului.

115. Se unește un punct M interior unui paralelogram cu vîrfurile acestuia. Fie AB și CD două laturi opuse. Să se arate că suma ariilor triunghiurilor MAB și MCD este constantă, oricum s-ar mișca punctul M .

116. Pe laturile unui paralelogram ca baze se construiesc în afară triunghiuri echilaterale. Să se arate că vîrfurile acestor triunghiuri diferite de vîrfurile paralelogramului sînt vîrfurile altui paralelogram.

117. Se prelungesc laturile AB și AD ale unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $BM = AD$ și $DN = AB$. Să se arate că $\triangle DCN$ și BMC sînt isoscele și că punctele M, N, C sînt coliniare.

118. Se dau trei puncte necoliniare A, B, C . Fie punctele M, N, P simetricele lor față de un punct O . Cîte paralelograme se pot forma cu punctele A, B, C, M, N, P ?

R. 3 paralelograme.

119. Se prelungesc medianele BM și CN ale unui triunghi ABC cu lungimile $MP = MB$ și $NQ = NC$. Să se arate că punctele A, P, Q sînt coliniare.

Indicație. Se arată că AP și AQ sînt paralele cu BC .

120. Se prelungesc diagonalele unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $AM = CN$ și $BK = DT$ (în sensuri opuse). Să se arate că $MKNT$ este paralelogram.

Indicație. În patrulaterul format, diagonalele se înjumătățesc.

121. Fie triunghiul ABC isoscel ($AB = AC$) și $D \in AC$. Se prelungește latura AB cu o lungime $BE = CD$. $DE \cap BC = \{F\}$. Să se arate că F este mijlocul lui DE .

Indicație. Din D se duce o paralelă la AB care taie pe BC în H . Se studiază $\triangle DHC$ și patrulaterul în care DE este diagonală.

122. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' , iar prin piciorul A' se duc $A'M$ și $A'N$ paralele la laturile AB și AC ale triunghiului; $M \in AB$ și $N \in AC$. Să se arate că $AMA'N$ este romb.

Indicație. Se observă că triunghiul AMA' este isoscel.

123. Dreptele paralele (d_1) și (d_2) sînt tăiate de secanta AB . Bisectoarele unghiurilor A și B interne de aceeași parte a secantei, întîlnesc cele două paralele în punctele C și D . Să se arate că $ABCD$ este romb.

124. Se dă trapezul $ABCD$ în care baza mare AB este dublul bazei mici CD .

a) Să se împartă trapezul în trei triunghiuri egale.

b) Ce fel de triunghiuri sînt?

Indicație. Se consideră M mijlocul lui AB ($M \in AB$).

125. Se dau două unghiuri adiacente suplementare $\widehat{AOB}$ și $\widehat{AOC}$.
Dintr-un punct A' de pe latura comună OA se duc perpendicularele $A'D$ și $A'E$ pe bisectoarele celor două unghiuri.
Să se arate că $ODA'E$ este un dreptunghi și $DE \parallel BC$.

126. Se dă un dreptunghi $ABCD$ ($AB > BC$) în care diagonalele fac un unghi de 60° . Fie P piciorul perpendicularei duse din vîrfurile D pe diagonala AC .

a) Să se arate că $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{4}$.

b) Să se arate că $APBE$ (E fiind piciorul perpendicularei duse din C pe BD) este un trapez isoscel.

127. Unind consecutiv mijloacele laturilor unui romb se obține un patrulater al cărui perimetru este de 198 cm. Latura cea mai mare a acestui patrulater este de două ori mai mare, decît latura cea mai mică.
Să se calculeze laturile patrulaterului format.

R. 33; 66 cm.

128. Pe laturile consecutive AB și BC ale unui pătrat se construiesc două triunghiuri echilaterale ABE și BCF , primul cu vîrfurile în interior și al doilea cu vîrfurile în exteriorul pătratului.
Să se arate că punctele D, E, F sînt coliniare.

Indicație. Se vor studia triunghiurile BEF , ECD și AED și se va găsi că unghiurile cu vîrfurile în E au 45° și 60° , 75° .

129. Fie un pătrat $ABCD$. Să se găsească pe laturile acestui pătrat patru puncte care să determine un alt pătrat egal cu jumătate din primul.

130. Într-un trapez isoscel $ABCD$, (BC baza mare și AD baza mică) latura ne paralelă AB este egală cu baza mică și cu jumătate din baza mare.

Se cer: 1) unghiurile trapezului;

2) ce fel de triunghi este ABC .

Indicație. Se duce din D o paralelă la AB ce taie pe BC în M , $M \in BC$. Se cercetează $ABMD$ care este un romb.

8. Probleme recapitulative

131. Se dă triunghiul ABC cu înălțimea AD , $D \in BC$.

Să se arate că dacă $AD = \frac{BC}{2}$ atunci unghiul $\hat{A}$ este ascuțit sau drept.

132. Fie dreapta (Δ) și două puncte A și B de aceeași parte a dreptei (Δ). Să se găsească un punct $M \in (\Delta)$ astfel ca $AM + MB$ să fie cea mai mică.

Indicație. Se consideră simetricul punctului A față de (Δ).

133. Fie a, b, c , laturile unui triunghi și h_1, h_2 și h_3 înălțimile lui.
Să se arate că există relația $a + b + c > h_1 + h_2 + h_3$.
134. O fiind un punct în interiorul unui triunghi ABC , să se arate că $OB + OC < AB + AC$.
Indicație. $OB \cap AC = \{B'\}$ și $OC \cap AB = \{C'\}$.
135. Suma medianelor unui triunghi este mai mică decît suma laturilor triunghiului.
Indicație. Fie AM mediană. Prolungim AM cu $MA' = MA$.
136. Să se demonstreze că distanțele a două din vîrfurile unui triunghi la mediana ce corespunde vîrfului al treilea sînt egale.
137. Fiind dat un triunghi echilateral și un punct în interiorul triunghiului să se arate că suma distanțelor acestui punct la laturi este constantă.
138. Fie paralelogramul $ABCD$ în care diagonala $BD = AD$.
Fie M mijlocul laturii DC . Să se arate că $BM \perp DC$.
139. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) pe latura AC se ia un punct D și se prelungește latura AB cu o lungime $BE = DC$. ($ED \cap BC = F$); se duce $DH \parallel AB$ ($H \in BC$).
Se cere: a) $\frac{DH}{BE} = 1$, b) $EF = FD$.
Indicație. Se studiază triunghiurile BEF și FDH .
140. Se dau două unghiuri adiacente suplementare xOy și yOC . Dintr-un punct A de pe latura comună yO se duc perpendicularele AD și AE pe bisectoarele acestor unghiuri.
Să se arate că $DE \parallel xC$.
Indicație. Se studiază patrulaterul $ADOE$.
141. Unghiul format prin intersecția diagonalelor AC și BD ale unui dreptunghi $ABCD$ este de 60° . Perpendicularele duse din D și B intersectează diagonala AC în M și N , $AC \cap BD = \{O\}$.
Se cere:
1) $\frac{OM}{AC} = \frac{1}{4}$; 2) $MBND$ paralelogram.
142. Se prelungesc laturile unui pătrat în același sens cu segmente egale și se unesc punctele obținute; apoi se construiesc pe laturile patrulaterului triunghiuri echilaterale. Să se arate că unind vîrfurile triunghiurilor echilaterale se obține un nou pătrat.
143. Fie xOy un unghi drept. Să presupunem că Ox este bisectoarea unui unghi AOB , iar Oy este bisectoarea altui unghi COD . Să se arate că unghiurile AOC și BOD sînt suplementare. Ce se întîmplă dacă OA și OC se confundă?
R. $AOC + BOD = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$; dacă OA și OC se confundă, atunci OB și OD sînt în prelungire.

144. Dacă se duce bisectoarea unui unghi înscris într-un cerc și prin punctul ei de intersecție cu cercul se duce o coardă paralelă cu una din laturile unghiului, să se arate că această coardă este egală cu cealaltă latură a unghiului.
145. Dacă se unesc picioarele înălțimilor unui triunghi, se obține un al doilea triunghi, ale cărui bisectoare sînt înălțimile celui dintîi.
146. Trei orașe pe care le însemnăm cu A, B, C formează pe hartă un triunghi dreptunghic isoscel, cu vîrfurile unghiului drept în B . Ele sînt legate cu o singură cale ferată, lungă de 400 km, care merge de la A la B în linie dreaptă, și de la B la C iarăși în linie dreaptă. Dacă s-ar face o cale ferată directă, adică în linie dreaptă de la A la C , cu cît s-ar scurta drumul, cu trenul, între aceste două orașe?

R. Cu aproape 118 km.

147. În triunghiul ABC , latura $AC = 12,5$ cm, iar înălțimea $AD = 10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încît să avem $BM : MA = \frac{1}{4}$.

Prin M se duc paralela la AC și perpendiculara pe BC , care determină pe BC , respectiv, punctele N și P . Fie P' simetricul lui P față de N . Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q .

- a) Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram.
- b) Să se calculeze lungimile laturilor și diagonalelor paralelogramului $MPQP'$.
- c) Prolungirea dreptei MN întilnește tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC , în punctul T . Să se arate că triunghiurile ATM și ABC sînt asemenea.

R. $MP = QP' = 2$; $PQ = P'M = \sqrt{13}$; $PP' = 3$; $MQ = 5$.

148. Din centrul O al unui cerc se duc razele OA și OB . În punctele A și B se duc tangentele la cerc care se intersectează în punctul Q . Prolungirile razelor întilnesc aceste tangente în P și S . Să se arate că:

- a) Triunghiul QSP este isoscel.
- b) Diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

149. Se dă un patrulater $ABCD$ în care $\hat{A} = \hat{C}$. Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ intersectează pe DC și AD în punctele E și F . Să se demonstreze că triunghiul DEF este isoscel.

Indicație. Se va folosi suma unghiurilor dintr-un triunghi.

150. Laturile CB și DA ale patrulaterului $ABCD$ se intersectează în M , iar laturile BA și CD în N . Să se demonstreze că:

$$\widehat{BMA} - \widehat{AND} = \widehat{ABC} - \widehat{ADC}.$$

Indicație. $M = 180^\circ - (A + B)$; analog pentru N .

151. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC .
Să se arate că AD formează cu baza două unghiuri a căror diferență este egală cu diferența unghiurilor formate de AD cu laturile egale ale triunghiului.

Indicație. Se va folosi măsura unghiului exterior unui triunghi.

152. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E , astfel ca $AD = CE$. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptelor BE și CD . Să se arate că $\widehat{BMC} = 120^\circ$.

153. Fie H punctul de intersecție al înălțimilor duse pe laturile AC și AB ale triunghiului ABC și M și N intersecțiile bisectoarei unghiului A cu aceste înălțimi. Să se arate că triunghiul HMN este isoscel.

Indicație. $\widehat{HMN} = \widehat{MNH} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$.

154. Într-un triunghi ABC , bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în D ; dreapta dusă prin D , paralelă cu CA intersectează pe AB în E ; dreapta dusă din E , paralelă cu BC intersectează pe AC în F . Să se demonstreze că $EA = FC$.

155. Segmentul de dreaptă care unește un punct oarecare al bazei mari a unui trapez cu un punct oarecare al bazei mici este împărțit de linia mijlocie a trapezului în două părți egale.

156. Într-un triunghi se duce o dreaptă paralelă la bază, prin punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor alăturate bazei. Să se demonstreze că segmentul de dreaptă, cuprins între două laturi ale triunghiului este egal cu suma părților acestor laturi alăturate bazei.

157. Prin virfurile unui triunghi se duc drepte paralele la laturile opuse. Să se demonstreze că triunghiul format de aceste drepte este alcătuit din patru triunghiuri egale cu cel dat și că fiecare dintre laturile lui este de două ori mai mare decât latura corespunzătoare a triunghiului dat.

158. Într-un triunghi isoscel, suma distanțelor unui punct al bazei la cele două laturi egale rămâne constantă când punctul se mișcă pe bază, și anume este egală cu înălțimea coborită pe una din laturile egale.

Cum se schimbă această teoremă dacă se ia punctul pe prelungirea bazei?

159. Într-un triunghi echilateral, suma distanțelor unui punct luat în interiorul acestui triunghi la laturile lui este o mărime constantă (egală cu înălțimea triunghiului).

160. Se dă trapezul $ABCD$ cu diagonala AC perpendiculară pe bazele trapezului $AB = 2a$ și $BD = a$. Unghiul $ADC = 45^\circ$. Din punctul M aflat pe mijlocul lui AB se ridică perpendiculara MN ($N \in BC$).

Se cere:

- 1) AD este diagonala unui pătrat cu latura a .
- 2) $AMCD$ este paralelogram.
- 3) Aria patrulaterului $AMNC$ este $1/2$ din aria trapezului.

161. În triunghiul ABC bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în E . Fie $ED \parallel BC$ și $EF \parallel AB$ ($D \in AB$; $F \in BC$).
Se știe că $2DE = BC = m$.

Se cere:

- 1) Să se arate că triunghiul DBE este isoscel.
- 2) EF este mediană în triunghiul BEC .
- 3) Să se afle raportul ariilor patrulaterului $DBEF$ și a triunghiului ABC .

$$\text{R. 3) } \frac{1}{2}.$$

162. Dintr-un punct D al ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) se duc perpendiculare DE și DF pe catetele triunghiului dreptunghic. Pentru ce poziție a punctului D distanța EF este minimă.

Indicație. Se studiază diagonalele dreptunghiului $AEDF$ în care AD este diagonala dreptunghiului.

163. Se dă triunghiul ABC și un punct M în interiorul lui. Fie $A'B'C'$ simetricele lui M față de BC , AC , AB . Să se arate că triunghiurile $C'AB'$, $B'CA'$ și $A'BC'$ sînt isoscele.

Indicație. Se observă triunghiurile egale formate.

164. Fie paralelogramul $ABCD$ în care diagonala $BD = AD$. Fie M mijlocul laturii DC . Să se arate că $BM \perp DC$.

165. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) pe latura AC se ia un punct D și se prelungeste latura AB cu o lungime $BE = DC$. $ED \cap BC = \{F\}$. Se duce $DH \parallel AB$ ($H \in BC$).

Se cere:

- a) $\frac{DH}{BE} = 1$.
- b) $FD = EF$.

Indicație. Se studiază triunghiul BEF și DEA .

166. Se dau două unghiuri adiacente suplementare xOy și yOc . Dintr-un punct A de pe latura comună yO se duc perpendicularele AD și AE pe bisectoarele acestor unghiuri. Să se arate că $DE \parallel xC$.

Indicație. Se observă patrulaterul $ADOE$.

167. Unghiul format prin intersecția diagonalelor AC și BD a unui dreptunghi $ABCD$ este de 60° . Perpendicularele duse din D și din B intersectează diagonala AC în M și N . $AC \cap BD = \{O\}$.

Se cere:

- 1) $\frac{OM}{AC} = \frac{1}{4}$.
- 2) $MBND$ paralelogram.

168. Se prelungesc laturile unui pătrat în același sens cu segmentele egale și se unesc punctele obținute; apoi se construiesc pe laturile patrulaterului formînd triunghiuri echilaterale. Să se arate că unind virfurile triunghiurilor echilaterale se obține un nou pătrat.

169. Fie trapezul $ABCD$. Din D se duce o perpendiculară pe diagonala AC care intersectează pe AB în F , iar din B o paralelă la DF care intersectează pe AC în punctul E . Să se arate că $\widehat{ACD} + \widehat{FDC} = \widehat{CBE} + \widehat{ECB}$.

Indicație. Se observă unghiurile complementare.

170. Se dă triunghiul ABC . Perpendicularele duse în virfurile B și C pe laturile AB respectiv AC se intersectează în D . Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ și $\widehat{BDC}$ sînt paralele.

Indicație. a) $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$; b) Se observă unghiurile complementare.

171. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic ($A = 90^\circ$) și O mijlocul laturii BC . Perpendiculara din A pe AO intersectează pe BC în D . Se prelungește $\overrightarrow{BD}$ cu segmentul $DE = AD$.

Să se arate: a) $\widehat{DAB} = \widehat{OAC}$,

b) $\widehat{ADE} + \widehat{ACO} = 45^\circ$.

172. Lichidul turnat într-un vas cîntărește 153 kg. Vasul plin cîntărește de 5 ori greutatea vasului gol. Știind că vasul are capacitatea de 1,7 hl să se afle greutatea vasului plin și greutatea specifică a lichidului.

Indicație. Greutatea vasului plin este:

$$\left(153 + \frac{153}{4}\right) \text{ kg.}$$

R. 191,25 kg; $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$.

173. O sumă de bani este împărțită la 7 elevi astfel:

Primul primește jumătate din sumă și încă 50 de bani, al doilea primește jumătate din suma rămasă și încă 50 de bani, al treilea primește jumătate din noul rest și încă 50 de bani și așa mai departe pînă ce ultimul primește jumătate din ultimul rest și încă 50 de bani.

Întreaga sumă fiind astfel distribuită să se afle cît a primit fiecare din cei 7 elevi.

Indicație. Se folosește metoda mersului invers.

Ultimul rest este 1 leu.

R. Suma totală 127 lei

64, 32, 16, 8, 4, 2, 1.

174. Drumul parcurs în lunecarea unui corp pe un plan înclinat este proporțional cu pătratul timpului necesar lunecării. Un corp alunecă în cinci secunde 50 metri. Să se afle ce drum a parcurs acel corp dacă a alunecat timp de 8 secunde.

Indicație. Se va scrie legea din enunț: $\frac{s_1}{t_1^2} = \frac{s_2}{t_2^2}$.

R. 128 m.

175. Într-un triunghi dreptunghic ABC ipotenuza BC este dublu catetei AB . Se duce bisectoarea BD și bisectoarea DE a triunghiului BDC .

a) Să se arate că triunghiurile ABD , DRE și ECD sînt egale între ele.

b) Să se arate că triunghiul ABE este echilateral.

c) Să se arate că se poate împărți triunghiul dat ABC în 9 triunghiuri egale între ele.

Indicație. Ne ajutăm de proprietatea punctelor situate pe bisectoarea unui unghi și de teorema: dacă într-un triunghi dreptunghic o catetă este jumătate dintr-o ipotenuză, atunci unghiul opus acelei catete este de 30° .

176. Două corpuri se mișcă uniform pe cerc. Ele pleacă în același timp dintr-un punct A de pe cerc în sensuri contrare. După ce s-au întâlnit într-un punct B , primului corp i-au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în A , iar cel de-al doilea continuând mersul său i-a mai trebuit 9 secunde ca să ajungă și el în A . De câte ori ar parcurge cercul într-un minut fiecare din cele două corpuri?

Indicații. Dacă ținem seamă că timpul este același (t) pentru ambele corpuri (care se mișcă cu viteză diferită v_1 și v_2) până la întâlnirea în B , iar distanța parcursă de primul până la întâlnire este aceeași cu distanța parcursă de-al doilea până la înapoierea în A , se obțin relațiile.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{9}{t}; \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{4} \text{ apoi } t = 6 \text{ secunde.}$$

R. 6 ori; 4 ori.

177. În triunghiul ABC se duc bisectoarele BB' și CC' ($B' \in AC$, $C' \in AB$) și $BB' \cap CC' = \{I\}$.

Se duce prin I o paralelă MN la BC ; ($M \in AB$ și $N \in AC$).

Să se arate că $MN = BM + NC$.

178. În $\triangle ABC$ se duce înălțimea AH și bisectoarea AD .

Să se calculeze unghiul DAH .

$$R. \widehat{DAH} = \frac{\angle (B - C)}{2}.$$

179. Într-un patrulater convex bisectoarele a două unghiuri consecutive formează un unghi egal cu semisuma celorlalte unghiuri.

180. Se dă triunghiul isoscel ABC , $AC = BC$, fie $DE \parallel AB$ și $BD \cap AE = \{F\}$.

a) Să se arate că triunghiul DEF este isoscel.

b) Să se arate că bisectoarea unghiului BFA este și bisectoarea unghiului EFD .

181. Fie patrulaterul $ABCD$ în care $AB = AD$ și $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

Să se arate că AC este perpendiculară pe mijlocul lui BD .

182. Pe o coardă AB a unui cerc se iau două puncte D și E la o distanță egală de mijlocul C al acestei coarde și prin aceste puncte se ridică pe AB perpendicularele DF și EG , în același sens, până la intersecția lor cu cercul. Să se demonstreze că aceste perpendiculare sînt egale.

183. Într-un cerc se duc două coarde CC' și DD' paralele cu diametrul AB . Să se demonstreze că MM' care unește mijloacele coardelor CD și $C'D'$ este paralelă cu AB .

184. Într-un cerc cu centrul O se duce coarda AB și se prelungește cu distanța BC , egală cu raza. Prin punctul C și centrul O se duce secanta CD (D este

al doilea punct de intersecție cu cercul). Să se demonstreze că $\widehat{AOD}$ este egal cu $3\widehat{ACD}$.

185. Într-un dreptunghi $ABCD$, bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ intersectează diagonala BD în E și BC în F . Paralela dusă în E la AB intersectează pe AC în G . Să se arate că GF și BD sînt perpendiculare.
186. Dacă prin unul din punctele de intersecție a două cercuri secante ducem mai multe secante fără a le prelungi în afara cercurilor, cea mai mare este aceea care e paralelă cu linia centrelor.
187. În cercul O se ia coarda AB și un punct M pe cerc. Extremitatea diametrului perpendicular pe AB de aceeași parte cu M față de coardă, o notăm cu C . Pe coarda AM luăm $AM' = BM$. Să se arate că triunghiul CMM' este isoscel.

Indicație. $\triangle AM'C = \triangle BCM$.

ALGEBRĂ

I. Exerciții și probleme

1. Operații cu numere pozitive și negative

Să se efectueze operațiile:

$$1. \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{-5}\right)\left(\frac{-3}{2}\right) + \left(\frac{-2}{-5}\right)\left(\frac{4}{-3}\right) - (-2 + 5).$$

Rezolvare. Avem succesiv:

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{10} - \frac{8}{15} - 3 = \frac{45 - 36 - 64 - 360}{120} = -\frac{415}{120} = -\frac{83}{24}.$$

$$2. \frac{-3 + (-5)^2}{2 - 9} + \frac{(+6) - (+4)}{(+3)(+2) - (-2)^2} + \frac{(+3)^2 - (-2)^3}{21 - (+2)^2}. \quad \text{R. } -1\frac{1}{7}.$$

$$3. \left(-3 - 5 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-1 - 2)^2 \left(-1 + 5 + \frac{1}{2}\right) + (-1 + 2)^3. \quad \text{R. } 113\frac{3}{4}.$$

$$4. (-1 + 2 - 3)^2 + (-2 + 1 - 3)^2 (-3 + 2 - 1) + (1 - 2)^2. \quad \text{R. } -27.$$

$$5. \frac{(-1)(-2)}{3} + \frac{(-2)^3}{-1} + \frac{(-1)^3}{-2} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{1}{3}. \quad \text{R. } 8.$$

$$6. \frac{(-3)(-1)^2(-2)^3 - (-5)^3(-2)^3 + (+4)^2}{[(+7) - (-2) - (+1)](-5)^2}. \quad \text{R. } -4\frac{4}{5}.$$

$$7. (-1)^2(1 + 2 - 3) - (2 + 3)(3 - 1 - 5) + (-2 + 1)^2(9 - 2 + 1). \quad \text{R. } 23.$$

$$8. [15^2 - (-8)^2]^2 - [15^2 + (-8)^2]^2 + 4 \cdot 15^2 (-8)^2. \quad \text{R. } 0.$$

$$9. [(4 - 3)(2 + 1) - (4 - 2)(3 - 1)](4 - 1). \quad \text{R. } -3.$$

$$10. \frac{-3^3 - (-5)^3}{3^2 + 5^2 - 5 \cdot 3} + \frac{15 - 10}{6 - (-1)^3} + \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{-6 - 2 + (-1)} - 5\frac{3}{19} - \frac{5}{7}. \quad \text{R. } -\frac{8}{3}.$$

$$11. \frac{-2\frac{29}{30}}{\left(6 - 2\frac{1}{3} - \frac{2}{\frac{4}{3}}\right) : (-0,125)} - \frac{339}{250} \quad \text{R. } -1.$$

$$12. \frac{(-5)^3 - 3^3}{(-5)^2 - 5 \cdot 3 + 3^2} + \frac{-10 + 15}{6 - (-1)} + \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{-5 - 6 + (-1)}. \quad \text{R. } -9\frac{2}{7}.$$

13. $\left(\frac{81-9}{71+1}\right)\left(\left(\frac{-9}{9-1}-\frac{1}{-9+1}\right)\right).$ R. - 1.
14. $\frac{12+4\sqrt{5}}{48+16\sqrt{5}}+\left(\frac{-3}{4}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)+\frac{5}{6}.$ R. 1 $\frac{1}{4}.$
15. $\frac{(-2)}{-3}+\frac{(-2)(+3)}{-1}+\frac{(-3)}{-2}+1+\frac{1}{-2}+\frac{1}{-3}.$ R. 8 $\frac{1}{3}.$
16. $\left[\left(-1\frac{5}{6}\right)+(2,5)+5\right]-8+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left[\left(-3\frac{1}{2}\right)+9\right].$ R. 2 $\frac{5}{12}.$
17. $\frac{(3)+(-7)+(-5)+(10)+(-4)+(4)}{(-5)+(-7)-(+4)+(+10)+(-2)}.$ R. - $\frac{1}{8}.$
18. $\frac{7+(-2)-(-3)-4+(+5)-(-1)}{(-3)(-2)(-1)}.$ R. - 1 $\frac{2}{3}.$
19. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right):\left[\left(\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)(-3)\right].$ R. - $\frac{3}{8}.$
20. $\frac{(-5):(5)+(3):\left(+\frac{3}{5}\right)}{\frac{3}{5}:\left(\frac{-2}{5}\right)}.$ R. - 2 $\frac{2}{3}.$
21. $\frac{16+8\sqrt{5}-4-4\sqrt{5}}{56+24\sqrt{5}-24-8\sqrt{5}+16}.$ R. $\frac{1}{4}.$
22. $\frac{-\sqrt{27}+2\sqrt{75}-9\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}.$ R. 1.
23. $\frac{\left[(-5)-(-0,25)+\left(-2\frac{1}{4}\right)\sqrt{7}\right]}{(-6\sqrt{7})+(+\sqrt{343})}.$ R. - 7.
24. $\frac{\left[\left(\frac{-2}{5}\right)+(1,5)-\left(-\frac{9}{10}\right)+(-1)\right]^2}{\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{4}:\sqrt{\frac{5}{3}}}$ R. 1.
25. $\frac{\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2-\left(-\frac{4}{9}\right)+(-2)^2\right]^3}{\left(-\frac{5}{6}\right)^3-(-1)^3-1}.$ R. - 216.

2. Exerciții de calcul algebric

1. $-7ab+(+6ab)+(-2ab).$ R. - $3ab.$
2. $-7a^2b+(+8a^2b).$ R. $a^2b.$
3. $\frac{13}{2}a^2+\left(-\frac{9}{5}a^2\right).$ R. $4\frac{7}{10}a^2.$

4. $2ab^3 + (-7ab^3) + (+3ab^3) + (-ab^3)$. R. $-3ab^3$.
5. $2ab^4 + (-3ab^4) + (-5a^2b^3) + (-3ab^4) + (+3a^2b^3)$. R. $-4ab^4 - 2a^2b^3$.
6. $\left(-\frac{3}{4}ab\right) + \left(+\frac{2}{3}a^2b\right) + (+ab) + \left(-\frac{5}{6}a^2b\right) + \left(-\frac{1}{2}ab\right)$.
R. $-\frac{1}{4}ab - \frac{1}{6}a^2b$.
7. $7ax^2 - 3by + 5a - 2ax^2 - 7a$. R. $5ax^2 - 3by - 2a$.
8. $a^3 + 2ab^2 - a^2b + ab^2 - 2a^2b - b^3$. R. $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$.
9. $x^3 - ax^2 + a^2x + ax^2 - a^2x + a^3$. R. $x^3 + a^3$.
10. $\frac{3}{5}a + 2ay - \frac{7}{2}ay + 4a$. R. $\frac{23}{5}a - \frac{3}{2}ay$.
11. $\frac{3}{2}a^2b + 4b^2x - 5a^2b - \frac{5}{2}b^2x$. R. $\frac{3}{2}b^2x - \frac{7}{2}a^2b$.
12. $2,3 m^2n - 5an + 4m^2n - 1,7 an$. R. $6,3m^2n - 6,7an$.
13. $0,7 ax - 0,04 ax - 0,2ax - 0,16 ax$. R. $0,3ax$.
14. $\frac{0,5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + x^2 + \frac{0,3}{4}x + 5$. R. $\frac{2,5}{2}x^2 - \frac{5,7}{4}x + 5$.
15. $\frac{2}{0,5}bxy - \frac{0,3}{2}x^2y - 0,7x^2y - \frac{7}{2}bxy$. R. $0,5bxy - 0,85x^2y$.
16. $\frac{1}{0,2}x + 0,3x - \frac{0,5}{2}x - 0,13x - 0,02x$. R. $4,9x$.
17. $0,3y - \frac{0,7}{2}y + \frac{3}{0,2}x - \frac{5}{4}x + y$. R. $\frac{1,9}{2}y + \frac{11}{0,8}x$.
18. $\frac{5}{3}ax + \frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}ax - \frac{3}{2}ax$. R. 0 .
19. $\frac{2}{5}by - \frac{5}{2}by + by + 1,1by$. R. 0 .
20. $7a^2b - 11\frac{2}{3}a^2b + 3\frac{1}{2}a^2b - 2\frac{5}{6}a^2b$. R. $-4a^2b$.
21. $0,27ab^2 + 0,23ab^2 - \frac{2}{5}ab^2 + \frac{1}{2}ab^2$. R. $0,6ab^2$.
22. $-1,25a^3 + \frac{3}{4}a^3 + 2,5a^3 - \frac{2}{3}a^3$. R. $1\frac{1}{3}a^3$.
23. $3(a+b)^2 + 7(a+b)^2 + (a+b)^2$. R. $11(a+b)^2$.
24. $4(a-b)^2 + 2(a-b)^2 + (a-b)^2$. R. $7(a-b)^2$.
25. $5(a-b)^3 + 7(a-b)^3 + (a-b)^3$. R. $13(a-b)^3$.
26. $2(a+b)^3 + 7(a+b)^3 + (a+b)^3$. R. $10(a+b)^3$.
27. $15a^3b^2 - (+8a^3b^2)$. R. $7a^3b^2$.

28. $0,75a - (-1,25a)$. R. $2a$.
29. $-4a^2 - (-2,5a^2)$. R. $-1,5a^2$.
30. $-0,2x^a - (+0,05x^a)$. R. $-0,25x^a$.
31. $6,3a^3b^2c - \left(+\frac{11}{2}a^3b^2c\right)$. R. $0,8a^3b^2c$.
32. $-21x^2 - (-7x^2 + 2) - 8 + 10 + 14x^2$. R. 0 .
33. $(a + 2b - 6a) - (3b - 6a + 6b)$. R. $a - 7b$.
34. $a - [b - (c - d)]$. R. $a - b + c - d$.
35. $(x + y - z) - (x - y + z) + (-x + y + z) + (x + y - z)$. R. $2(2y - z)$.
36. $(4x^3 - 2x^2 + x + 1) - (3x^3 - x^2 - x - 7) - (x^3 - 4x^2 + 2x + 8)$. R. $3x^2$.
37. $5a + \{3b + [6c - 2a - (a - c)]\} - [9a - (7b + c)]$. R. $-7a + 10b + 8c$.
38. $x + (y - x) - (y - z)$. R. z .
39. $(a + b - c) - (-b + 3c)$. R. $a + 2b - 4c$.
40. $44x + 48y - (6z + 3y - 7x) + 4z - [48y - 8x + 2z - (4x + y)]$. R. $63x - 2y - 4z$.
41. $(5a^2 - 3ax + x^2) - 4a^2 + 5ax + (3a^2 - 7ax + 5x^2) - 7x^2$. R. $4a^2 - 5ax - x^2$.
42. $(6x^2 - 3x + 8) - (4x^2 - 3x + 1) - (2x^2 + 7)$. R. 0 .
43. $(a - b) - (b + c - d) + (b + c - d) + (2b - a)$. R. b .
44. $\left(\frac{4}{5}ab + \frac{1}{7}bc - \frac{2}{3}ac\right) - \left(-\frac{4}{5}ab + \frac{3}{14}bc - \frac{1}{5}ac\right)$. R. $ab - \frac{1}{14}bc - \frac{7}{15}ac$.
45. $\left(\frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{2}{3}x^2\right) - \left(-\frac{3}{4}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 - \frac{5}{8}x^2\right)$. R. $\frac{5}{4}a^2x - \frac{1}{12}ax^2 + \frac{31}{24}x^2$.
46. Un elev depune la C.E.C. o sumă C în cele trei luni consecutive de la începutul anului. În luna I scoate a lei, în a II-a b lei și în a III-a c lei. Ce sumă i-a mai rămas după trei luni? R. $C - a - b - c$.
47. Să se exprime că într-un triunghi o latură este mai mare ca diferența celorlalte două. R. $a > b - c$ sau $b > c - a$ sau $c > a - b$.
48. Suma unghiurilor unui triunghi fiind de 180° , să se exprime valoarea unghiului C , cunoscând pe celelalte două A și B . R. $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - A - B$.

49. Însemnând cu $2p$ perimetrul unui triunghi ale cărui laturi sînt a, b, c , să se exprime valoarea laturii b în funcție de perimetru și celelalte două laturi.

$$R. 2p - (a + c) = 2p - a - c.$$

50. Un elev are o sumă de bani C din care cheltuiește într-o zi a lei, în altă zi 28 lei și în alta o sumă cit diferența dintre cele două zile. Să se exprime suma rămasă.

$$R. C - a - 28 - (a - 28) = C - 2a.$$

3. Înmulțirea expresiilor algebrice

51. $(m - n + p) \left(-\frac{5}{6}\right).$

52. $(-5b^2 + 2bc^2 - 4cd) \cdot \frac{1}{2} b^2 c^3.$

53. $(-2a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4)(-4ab).$

54. $13a^3x^3(-4a^2x + 5a^3x^3 - 3ax^2).$

55. $1\frac{1}{2} mn^3 \left(\frac{5}{3} m^2 - \frac{2}{3} m^2 n + \frac{3}{4} mn^2\right).$

56. $(6a + 2b - 8c) 7a.$

57. $(-5a^2 + 3ab - 8b^2)(-9ab).$

58. $(4a^3 - 5ax - 1) \cdot 7ax^2.$

59. $(ax - 5b - 2ab)3a^2b.$

60. $(2a^3b^2 - 4ab^2c + 3x - 2a) \cdot abx$

61. $(4m - 2x - 3ab + 9mn)2a^2m^3b.$

62. $2ab^2xy^3(2ax^2y - 3bxy^2 + axyz - 5ab^2).$

63. $(a - b + cn - an^2bc)3a^2b^3cn^2.$

64. $(x^2 - 3x - 7)(x - 2).$

$$R. x^3 - 5x^2 - x + 14.$$

65. $(a^2 - 3x - 7)(a^2 - 1).$

$$R. a^4 - 3a^2x - 8a^2 + 3x + 7.$$

66. $(a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4)(a + 2b).$

$$R. a^5 + 32b^5.$$

67. $(a^m - b^p - 2c^n)(2a^m - 3b).$

$$R. 2a^{2m} + 2a^mb^p - 4a^mc^n - 3a^mb - 3b^{p+1} + 6bc^n.$$

68. $\left(2\frac{1}{2}x + 1\right)\left(x + 1\frac{1}{3}\right).$

$$R. \frac{5x^2}{2} + \frac{13x}{3} + \frac{4}{3}.$$

69. $(x^2 + y^2 - xy)(y^2 + x^2 + xy)$

$$R. x^4 + x^2y^2 + y^4.$$

70. $(a + b - c)(a - b + c).$

$$R. a^2 - b^2 - c^2 + 2bc.$$

71. $(a + 4b - c)(a - 4b + c).$

$$R. a^2 - 16b^2 + 8bc - c^2.$$

72. $(a^4 + a^3b + a^2b^2)(a - b).$

$$R. a^2(a^3 - b^3).$$

73. $(a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3)(a - x).$

$$R. (a - x)^4.$$

74. $(5a^2 + ab - 3b^2)(3a^2 - 2ab + b^2)$. R. $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$.
75. $(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)(a + b)$. R. $a^6 - b^6$.
76. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$. R. $x^6 - a^6$.
77. $(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3)(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)$. R. $a^6 - b^6$.
78. $(y^4 - 2y^3 + y^2 - 4y - 11)(y^2 - 2y + 3)$. R. $y^6 - 4y^5 + 8y^4 - 12y^3 + 10y^2 - 33y - 33$.
79. $(3x^3 - 8x^2 + 4x - 4)(2x^2 - 4x - 1)$. R. $6x^5 - 28x^4 + 37x^3 - 16x^2 + 12x + 4$.
80. $(4x^2 - 12xy + 9y^2)(2x + 3y)(4x^2 + 12xy + 9y^2)(2x - 3y)$. R. $64x^6 - 432x^4y^2 + 972x^2y^4 - 729y^6$.
81. $[2x - y - (x + 2y)][3x - 2y - (2x - 3y)]$. R. $x^2 - 2xy - 3y^2$.
82. $3(x - y)^2(x + y) - 3(x + y)^2(x - y)$. R. $6y(y^2 - x^2)$.
83. $(2a - b)[(4a + b)a + b(a + b)]x^2$. R. $x^2(8a^3 - b^3)$.
84. $(a - b)^3 + (a + b)^3 + 3(a + b)(a - b)^2 + 3(a - b)(a + b)^2$. R. $8a^3$.

4. Împărțirea unui polinom cu un monom

Să se efectueze următoarele împărțiri:

86. $(8ab^4 - 6a^2b^3 + 4a^3b^2) : 2ab$. R. $4b^3 - 3ab^2 + 2a^2b$.
86. $(6a^2x^3y^2 - 12a^4x^2y^3 - 9a^3x^3y^3) : (-3a^2x^2y^2)$. R. $-2x + 4a^2y + 3axy$.
87. $(3a^4x^2 - 5a^3x^3 + 6a^2x^4) : 2a^4x^4$. R. $\frac{3}{2x^2} - \frac{5}{2ax} + \frac{3}{a^2}$.
88. $-(6b^5 + 4b^3 - 5ab^2) : 4b^3$. R. $-\left(\frac{3}{2}b^2 + 1 - \frac{5}{4}\frac{a}{b}\right)$.
89. $(-5x^3y^2 - 6x^2y^2 - x^4y^4) : (-x^2y^3)$. R. $\frac{5}{y} + \frac{6}{xy} + xy$.
90. $(4a^3b^3 - 6a^3b^2 + 2a^2b) : 2a^2b$. R. $2ab^2 - 3ab + 1$.
91. $(4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7) : (4ax)$. R. $a^4x^4(a - 3x)^2$.
92. $(25a^2 - 10a + 1) : (5a - 1)$. R. $5a - 1$.
93. $(8a^4b^2 - 6a^3b^3 + 4a^2b^4 - 2a^2b^2) : (-2a^2b^2)$. R. $-4a^2 + 3ab - 2b^2 + 1$.
94. $-(15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 5a^2x^4) : (-5a^2x^2)$. R. $3a^2 - 4ax + x^2$.
95. $(4m^3 + 6m^2 - m) : \left(-\frac{1}{2}m\right)$. R. $-8m^2 - 12m + 2$.
96. $\left(-4m^5n^2 - \frac{4}{9}m^4n^5 + \frac{2}{3}m^3n^6\right) : \frac{2}{3}m^3n^2$. R. $-6m^2 - \frac{2}{3}mn^3 + n^4$.
97. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3 + \frac{6}{5}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3$. R. $\frac{5}{4}a^5 + 2a^2x - \frac{3}{2}x^2$.
98. $(p^4 + 4p^3 - 6p^2 - 8p) : (-0,2p)$. R. $-5p^3 - 20p^2 + 30p + 40$.

5. Descompunerea în factori

Transformarea unei expresii algebrice prin descompunerea în factori este foarte utilă în vederea simplificării fracțiilor algebrice, cît și pentru studiul și rezolvarea ecuațiilor de grad superior.

A descompune în factori o expresie algebrică înseamnă a o înlocui printr-un produs de factori ireductibili atunci cînd aceasta este posibil.

Să se descompună în factori expresiile:

99. $5a^2b + 15a - 5$.	R. $5(a^2b + 3a - 1)$.
100. $8a^3 - 12a^2b^2 + 4a^2c$.	R. $4a^2(2a - 3b^2 + c)$.
101. $a^3b + a^2b^3 + a^2b$.	R. $a^2b(a + b^2 + 1)$.
102. $-10a^3 - 6ab + 2a$.	R. $-2a(5a^2 + 3b - 1)$.
103. $2m^3 - 4m^5 + 6m^2n + 2m^2$.	R. $2m^2(m - 2m^3 + 3n + 1)$.
104. $54a^8b^5 - 42a^5c^3 - 24a^4b^7$.	R. $6a^4(9a^4b^5 - 7ac^3 - 4b^7)$.
105. $a^2(a + x) + x^2(a + x)$.	R. $(a + x)(a^2 + x^2)$.
106. $2p(p - q) + 3q(p - q)$.	R. $(p - q)(2p + 3q)$.
107. $a(x + 1) - 2x(x + 1)$.	R. $(x + 1)(a - 2x)$.
108. $2(p - 1)^2 - 4q(p - 1)$.	R. $2(p - 1)(p - 2q - 1)$.
109. $mn(m^2 + n^2) - n^2(m^2 + n^2)$.	R. $n(m^2 + n^2)(m - n)$.
110. $4m^2(n^2 - 2) + 2mn(n^2 - 2)$.	R. $2m(n^2 - 2)(2m + n)$.
111. $9(b^3 + b^2 - b) + b^3 + b^2 - b$.	R. $10b(b^2 + b - 1)$.
112. $2(p - q)^2 - 5q(q - p)$.	R. $(p - q)(2p + 3q)$.
113. $a(b - 1) + c(1 - b) - b + 1$.	R. $(a - c - 1)(b - 1)$.
114. $a(2 - x^2) + b(x^2 - 2) - 2 + x^2$.	R. $(a - b - 1)(2 - x^2)$.
115. $(4a - 5b)(3m - 2p) + (4b - a)(3m - 2p)$.	R. $(3m - 2p)(3a - b)$.
116. $(4a + 5b)(3p - 2m) - (4b + a)(3p - 2m)$.	R. $(3p - 2m)(3a + b)$.
117. $(5a - 2b)(2m + 3p) - (2a - 7b)(2m + 3p)$.	R. $(2m + 3p)(3a + 5b)$.
118. $(2a - 5b)(2p + 3m) + (3a - 7b)(2p + 3m)$.	R. $(2p + 3m)(5a - 12b)$.
119. $(7a - 3x)(5c - 2d) - (6a - 2x)(5c - 2d)$.	R. $(5c - 2d)(a - x)$.
120. $ac + ad + bc + bd$.	R. $(a + b)(c + d)$.
121. $ac - ad + bc - bd$.	R. $(a + b)(c - d)$.
122. $x^3 + x^2z + 2xz^2 - 2z^3$.	R. $(x^2 + 2z^2)(x + z)$.
123. $x^3 - x^2z + 2xz^2 - 2z^3$.	R. $(x - z)(x^2 + 2z^2)$.
124. $x^3 + x^2z - 2xz^2 - 2z^3$.	R. $(x^2 - 2z^2)(x + z)$.
125. $a^3 + 2a^2 + 2a + 4$.	R. $(a + 2)(a^2 + 2)$.
126. $a^3 - 2a^2 + 2a - 4$.	R. $(a^2 + 2)(a - 2)$.

127. $12x^2y - 20y^4 + 3x^2 - 5y^3 - 3x^2y^2 + 5y^5$. R. $(4y - y^2 + 1)(3x^2 - 5y^3)$.
128. $(m^2 + 4m)^2 - 4$. R. $(m^2 + 4m + 2)(m^2 + 4m - 2)$.
129. $9 - (m^2 + 6m)^2$. R. $(3 + 6m + m^2)(3 - 6m - m^2)$.
130. $(2a - 3b)^2 - 4b^2$. R. $(2a - 5b)(2a - b)$.
131. $9a^2 - (2a + 3b)^2$. R. $(a - 3b)(5a + 3b)$.
132. $16c^2 - (3c + 5d)^2$. R. $(c - 5d)(7c + 5d)$.
133. $(5c - 3d)^2 - 25d^2$. R. $(5c - 8d)(5c + 2d)$.
134. $9(5m - 4p)^2 - 64m^2$. R. $(23m - 12p)(7m - 12p)$.
135. $100m^2 - 9(3m - 2p)^2$. R. $(m + 6p)(19m - 6p)$.
136. $16(n + q)^2 - (39 - n)^2$. R. $(5n + 4q - 39)(3n + 4q + 39)$.
137. $(n + 3q)^2 - 4(q - n)^2$. R. $(5q - n)(q + 3n)$.
138. $m^8 - 6m^4y^3 + 9y^6$. R. $(m^4 - 3y^3)^2$.
139. $4p^{12} - 20p^6z^5 - 25z^{10}$. R. $(2p^6 - 5z^5)^2$.
140. $a^2 + 6a + 9$. R. $(a + 3)^2$.
141. $-30ab^2 + 25b^4 + 9a^2$. R. $(5b^2 - 3a)^2$.
142. $-6a^2b^3 + 1 + 9a^4b^6$. R. $(3a^2b^3 - 1)^2$.
143. $3x + 18x^3y^3 + 27x^5y^6$. R. $3x(1 + 3x^2y^3)^2$.
144. $9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1$. R. $(3x^2 - 2x + 1)^2$.
145. $x^4 + 6x^3 + 19x^2 + 30x + 25$. R. $(x^2 + 3x + 5)^2$.
146. $4x^6 - 20x^5 + 25x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 9$. R. $(2x^3 - 5x^2 - 3)^2$.
147. $16 - 4x^2 - 4a^2 + a^2x^2$. R. $(2 - a)(2 + a)(2 - x)(2 + x)$.
148. $3x^2 - 12 + x^2 - 4$. R. $4(x - 2)(x + 2)$.
149. $x^4 - 9x^2 - x^2 + 9$. R. $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.
150. $25a^2 - a^4 - 25b^2 + a^2b^2$. R. $(a - b)(a + b)(5 - a)(5 + a)$.
151. $9a^4 + 45a^2 - 4a^2 - 20$. R. $(3a - 2)(3a + 2)(a^2 + 5)$.
152. $36x - 4xy^2 + 9 - y^2$. R. $(4x + 1)(3 - y)(3 + y)$.
153. $a^2b^2 - 36a^2 + b^4 - 36b^2 - b^2 + 36$. R. $(a^2 + b^2 - 1)(b - 6)(b + 6)$.
154. $a^3b^2 - 100a - a^2b^3 + 100b + a^2b^2c - 100c$. R. $(a - b + c)(ab - 10)(ab + 10)$.
155. $4a - 16ac^2 - a^2 + 4a^2c^2 - 4 + 16c^2$. R. $-(a - 2)^2(1 - 2c)(1 + 2c)$.
156. $3a^6x^{10} + 30a^4x^5y^2 + 75a^2y^4$. R. $3a^2(a^2x^5 + 5y^2)^2$.
157. $36a^{n+2} + 16a^{n-2}b^2 + 48a^nb$. R. $4a^{n-2}(3a^2 + 2b)^2$.
158. $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$. R. $(x + y + z)(x + y - z)$.
159. $9 - y^2 - 6yz - 9z^2$. R. $(3 + y + 3z)(3 - y - 3z)$.

160. $25z^2 - 4x^2 + 12xy - 9y^2$. R. $(5z + 2x - 3y)(5z - 2x + 2y)$.
161. $4y^2 - 20yz + 25z^2 - 36$. R. $(2y - 5z + 6)(2y - 5z - 6)$.
162. $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$. R. $(a + b)^2(a - b)$.
163. $4a^2m^2 - 64a^2n^2 - m^2 + 16n^2$. R. $(2a - 1)(2a + 1)(m - 4n)(m + 4n)$.
164. $3x^5 - 192x - 4x^4 + 256$. R. $(3x - 4)(x^2 - 8)(x^2 + 8)$.
165. $28x^3 - 8x^2y - 7x + 2y$. R. $(2x + 1)(2x - 1)(7x - 2y)$.
166. $2ac + a^2 + c^2 - b^2$. R. $(a + c - b)(a + c + b)$.
167. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. R. $(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.
168. $6a^3b + a^2 - 6ab^3 - b^2$. R. $(a + b)(a - b)(6ab + 1)$.
169. $8a^3 - 12a^2b - 8a^2 + 12ab + 2a - 3b$. R. $(2a - 1)^2(2a - 3b)$.
170. $4a^2 - 24a^3 + 48a^4 - 32a^5 - (1 - 2a)^3$. R. $(2a + 1)(2a - 1)(1 - 2a)^3$.
171. $a^2 - (a + b)^2 - 2a^2 - ab$. R. $-(a + b)(2a + b)$.
172. $4x^2 - (a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2 + b^4$. R. $(2x - a^2)(2x + a^2)$.
173. $x^4 + y^4 - (x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 - (x - y)^2$. R. $2xy(xy + 1)$.
174. $4x^4 - y^2 - 4x^2 + 1$. R. $(2x^2 - 1 - y)(2x^2 - 1 + y)$.
175. $4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 - y^2(x - 1)^3$. R. $(2 - y)(2 + y)(x - 1)^3$.
176. $a^4 - b^2(2a - b)^2$. R. $(a - b)^2(a^2 + 2ab - b^2)$.
177. $a^4 - 16c^2(c - a)^2$. R. $(a - 2c)^2(a^2 + 4ac - 4c^2)$.
178. $(a - 2b)^2 + 2b(a - 2b) + b^2$. R. $(a - b)^3$.
179. $(2a - b)^2 - 2b(b - 2a) + b^2$. R. $4a^2$.
180. $(m^2 + 1)^2 - 4m^2$. R. $(m + 1)^2(m - 1)^2$.
181. $36m^2 - (m^2 + 9)^2$. R. $-(m + 3)^2(m - 3)^2$.
182. $(p + q)^3 - 3(p + q)^2(p - q) + 3(p + q)(p - q)^2 - (p - q)^3$. R. $8q^3$.
183. $ac^2 - ab^2 + b^2c - c^3$. R. $(c + b)(c - b)(a - c)$.
184. $(a - b)(a^2 - c^2) - (a - c)(a^2 - b^2)$. R. $(a - b)(a - c)(c - b)$.
185. $a^2b^4c^2 - a^2b^2c^4 + a^4b^2c^2 - a^4c^4$. R. $a^2c^2(b + c)(b - c)(a^2 + b^2)$.
186. $a^2 - ab - b - 1$. R. $(a + 1)(a - b - 1)$.
187. $4(n - 2)^2 + 9 + 12(n - 2)$. R. $(2n - 1)^2$.

6. Simplificarea fracțiilor algebrice

Să se simplifice

188. $\frac{2x^4 - 8x^3y + 8x^2y^2}{x^4 - 2x^3y}$.

R. $\frac{2(x - 2y)}{x}$.

189. $\frac{20a^5x^2 + 16a^3bx^2}{75a^4b + 120a^2b^2 + 48b^3}$.

R. $\frac{4a^3x^2}{3b(5a^2 + 4b)}$.

190. $\frac{25ab^2 + 15b^3 - 30bc}{20a^3b + 12a^2b - 24a^2c}$. R. $\frac{5b}{4a^2}$.
191. $\frac{65x^3y - 60x^2y^2}{39x^2y^3 - 36xy^4}$. R. $\frac{5x}{3y^2}$.
192. $\frac{12x^5 - 27x^3y^2}{8x^3y - 12x^2y^2}$. R. $\frac{3x(2x + 3y)}{4y}$.
193. $\frac{72a^2b^2c + 16ab^3c - 24ab^2c}{27a^3c^2 + 6a^4bc^2 - 9a^4c^2}$. R. $\frac{8b^2}{3a^3c}$.
194. $\frac{3x^4c + 5x^3yc - y^2x^3c^2}{2xy^2c^2 - 3x^2y^2c - 5xy^3c}$. R. $\frac{-x^2}{y^2}$.
195. $\frac{12x^3 - 8xy - 4x(3x - 2y)}{9x^2 - 4y^2 - 12xy}$. R. 0.
196. $\frac{y + 5}{7y + xy + 35 + 5x}$. R. $\frac{1}{x + 7}$.
197. $\frac{44x^3 - 7ax + 2xy - ay}{4x^3 - 4ax^2 + a^2x}$. R. $\frac{7x + y}{x(2x - c)}$.
198. $\frac{ax - 6 + 3x - 2a}{ax + 6 - 3x - 2a}$. R. $\frac{a + 3}{a - 3}$.
199. $\frac{4\frac{1}{8}a^4b^2 - 0,125a^4b^2 - b^2}{a^2b - b}$. R. $b(a^2 + 1)$.
200. $\frac{3ac^2 + 3bc^2 - 3ab^2 - 3b^3}{6ac^2 + 6bc^2 - 6ab^2 - 6b^3}$. R. $\frac{1}{2}$.
201. $\frac{\left(\frac{2xy}{3} - 2y^2\right)\left(2xy + \frac{2x^2}{3}\right)}{4xy}$. R. $\frac{x^2}{9} - y^2$.
202. $\frac{4\left(\frac{3x^2}{4} + 1\frac{1}{2}xy + 0,75y^2\right)}{3x + 3y}$. R. $x + y$.
203. $\frac{18x^4 - 8x^3 : 4x^2 - 1}{(2x - 1)(4x^2 + 1)}$. R. $2x + 1$.
204. $\frac{\left[(4x^4 - 7x : 4x^2)\left(4x^3 + \frac{1}{2x}\right)\right]^2 - \frac{1}{16x^4}}{32x^{10} - 1}$. R. $-8x^2$.
205. $\frac{4a^4 - 2a^4 : a^2 - 2a^2 + 1 - b^2}{2a^2 - b - 1}$. R. $2a^2 + b - 1$.
206. $\frac{(x^2y + xy^2)^2 - (x + y)^2}{x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + (x + y)^2}$. R. $xy - 1$.
207. $\frac{x^2 - y^2}{xz - yz - xy + y^2}$. R. $\frac{x + y}{z - y}$.

208. $\frac{(x^3 - x^2 - 9x + 9)(x^2 - 3x + xy - 3y)}{(x^2 - 4x + 3)(x + y)}$. R. $x^2 - 9$.
209. $\frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{(x + y + z)a + (x + y + z)z}$. R. $\frac{x + y - z}{a + z}$.
210. $\frac{243a^3b^3 - 1125b^3a^3}{9a^3b^3(9a^2 + 15ab + 25b^2)}$. R. $3a - 5b$.
211. $\frac{[(0,04x^2 - 0,25y^2) : (0,2x + 0,5y)]^2}{\frac{2x - 5y}{10}}$. R. $\frac{x}{5} - \frac{y}{2}$.
212. $\frac{\sqrt{0,3y^2 + 5y^2} \times \frac{\sqrt{3}}{y} - 9y^2 + (2 + 3y)3y}{2 + 3y}$. R. 2.
213. $\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz + 2xy - 2yz}{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz}$. R. $\frac{x + y - z}{y - z + x}$.
214. $\frac{(x + b)^2 - (a + c)^2}{(a + x)^2 - (b + c)^2}$. R. $\frac{x - a + b - c}{x + a - b - c}$.
215. $\frac{(ax - x)(x - a)}{a^3x - ax^3 - a^2x + x^3}$. R. $\frac{-1}{a + x}$.
216. $\frac{a^2x^2 - x^2b^2 + 2a^2x - 2b^2x + a^2 - b^2}{(a - b)(x + 1)}$. R. $(x + 1)(a + b)$.
217. $\frac{-a^2 - ab - ac - bc}{ab + b^2 + a(a + b)}$. R. $\frac{-(a + c)}{a + b}$.
218. $\frac{\left[\left(\frac{3}{5}a - 0,625b\right)\left(\frac{5}{8}b + 0,6a\right)\right]^2 + \frac{9a^2b^2}{32} - \frac{626b^4}{64^2}}{\left(\frac{3a}{5} - \frac{b}{8}\right)\left(\frac{9a^2}{25} + \frac{b^2}{64}\right)}$. R. $\frac{24a + 5b}{40}$.
219. $\frac{\left(20\frac{1}{25}x^2 - \sqrt{401,6016}\right)\frac{y^2}{501}}{\frac{xy^2 - y^3}{5}}$. R. $\frac{x + 1}{5}$.
220. $\frac{\frac{4a^3b^4}{19} : \frac{2}{133ab^2} - 10a^4b^6 - 1}{2a^2b^3 + 1}$. R. $2a^2b^3 - 1$.
221. $\frac{[(2ab - c)(2ab + c)]^2 + 8a^2b^2c^2 - 2c^4}{2ab - c}$. R. $(2ab + c)(4a^2b^2 + c^2)$.
222. $\frac{(6x^2y^2 - 15x^2 : 5x)(2xy^2 + 1)}{12x^3y^4 - 3x}$. R. 1.
223. $\frac{3a^2x^2 + 3b^2 - 6abx + 9a^2x - 9ab}{(a^3x^3 - ab^2x)(ax - b + 3a)}$. R. $\frac{3}{ax(ax + b)}$.
224. $\frac{2a^3 + 3a^2b - 2a - 3b}{2a^2 - 2a + 3b(a - 1)}$. R. $a + 1$.

225. $\frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}\right) \cdot a^6 b^2 - a^6 - a^5 b}{a^4 b}.$ R. $a + b.$
226. $\frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{ab} + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}(a + b + x) + \frac{x^2 + 1}{ab}}{abx - ab}.$ R. $\frac{x - 1}{a^2 b^2}.$
227. $\frac{4a^2 y^4 - 4ay^3 + y^2 + (2ay - 1)^2}{(y^4 - 1)(2ay - 1)^2}.$ R. $\frac{1}{y^2 - 1}.$
228. $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^5 - 2x^3 + x}.$ R. $\frac{1}{x(x + 1)}.$
229. $\frac{x^2 + 4 - 4x}{x^3 + 2 - 2x^2 - x}.$ R. $\frac{x - 2}{x^2 - 1}.$
230. $\frac{ax + 1 - a - x}{ax - 1 - a + x}.$ R. $\frac{a - 1}{a + 1}.$
231. $\frac{xy^3 + 2x^2 y^2 + x^3 y + xy^2(x + y)^2}{xy^2 - x - y(1 - y^3)}.$ R. $\frac{xy(x + y)}{y - 1}.$
232. $\frac{a^2 - b^2 + ac - bc}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}.$ R. $\frac{a - b}{a + b - c}.$
233. $\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{a^2 + 2ab - c^2 + b^2}.$ R. $-\frac{a - b - c}{a + b + c}.$
234. $\frac{0,125x^2 a^2 - a^2 - \frac{x^2 b^2}{8} + b^2}{(a + b)(0,125x^2 - 1)}.$ R. $a - b.$
235. $\frac{ax^2 - a\sqrt{0,0256} + \frac{4b}{25} - x^2 b}{(0,4 + x)(a - b)}.$ R. $x - \frac{2}{5}.$
236. $\frac{ax^2 + 0,1(6)x^2 - a - \frac{1}{6}}{(x - 1)\left(a + \frac{1}{6}\right)}.$ R. $x + 1.$
237. $\frac{2(x^2 + y^2) - 4xy + 6(x - y)^2}{2(x^2 - y^2)(x - y)}.$ R. $\frac{4}{x + y}.$
238. $\frac{4x^3 + 12x + 9 - 2b^2 x - 3b^2}{2x + 3 - b^2}.$ R. $2x + 3.$
239. $\frac{a^3 - a^2 b - 4a + 4b}{(a^2 - b^2)(a - 2)}.$ R. $\frac{a + 2}{a + b}.$
240. $\frac{4x^2 - 1}{y(2x + 1) - 4x - 2}.$ R. $\frac{2x - 1}{y - 2}.$

241. $\frac{x^3 + bx^2 + ax + ab}{x^2 - ax + bx - ab}$. R. $\frac{x^2 + a}{x - a}$.
242. $\frac{a^4 : 25 - 0,04b^4 - (a^2b^2 - b^4) : 25}{(a^3 - a^2b) : 5}$. R. $\frac{a + b}{5}$.
243. $\frac{\frac{17}{12}x^3 - 1,41(6) - x^2 + 1}{\frac{x - 1}{12}}$. R. $5(x + 1)$.
244. $\frac{ac + ad + bc + bd - a(c + d)}{ac^2 - ad^2 + bc^2 - bd^2}$. R. $\frac{b}{(a + b)(c - d)}$.
245. $\frac{a^2x - a^2 - b^2x + b^2}{ax - a + bx - b}$. R. $a - b$.
246. $\frac{a^3 - 2a^2 + 9a - 18 + 6a(a - 2)}{a^2 - 2a + 3a - 6}$. R. $a + 3$.
247. $\frac{7 + x^3 - 7x^2 - x}{(x - 1)(x - 7)}$. R. $x + 1$.
248. $\frac{(1 - ab)^2 - (a - b)^2}{a^3b^2 - a^5b^2}$. R. $\frac{1 - b^2}{a^3b^2}$.
249. $\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}$. R. $\frac{1}{3a^2 - b^2}$.
250. $\frac{a^5 - ba^4 - ab^4 + b^5}{a^4 - ba^3 - a^2b^2 + ab^3}$. R. $\frac{a^2 + b^2}{a}$.
251. $\frac{x^3 + x^2y - x - y}{(x^2 + 2xy + y^2)(x - 1)}$. R. $\frac{x + 1}{x + y}$.
252. $\frac{a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + 2ab)(a - b)}$. R. $a + b$.
253. $\frac{xy(a^2 - b^2) + abx^2 - aby^2}{abx^2 + aby^2 + xy(a^2 + b^2)}$. R. $\frac{ax - by}{ax + by}$.
254. $\frac{2x^4 + 4x^3y + 2x^2y^2 + 4x^2yz + 2xz^2 + 4x^3z}{x^3 - xy^2 - xz^2 - 2xyz}$. R. $\frac{2x(x + y + z)}{x - y - z}$.
255. $\frac{2(x^2 + y^2) + 4xy - 2z^2}{4z(z + 2x) + 4x^2 - 4y^2}$. R. $\frac{x + y - z}{2(x - y + z)}$.
256. $\frac{2ax^3 + a^2x^2 + x^4 - b^4}{x^2(2b^2 - a^2) + x^4 + b^4}$. R. $\frac{x^2 + ax - b^2}{x^2 + b^2 - ax}$.
257. $\frac{2b^2 + a^2 - 3ab + ac - 2bc}{2bc + a^2 - b^2 - c^2}$. R. $\frac{a - 2b}{a + b - c}$.
258. $\frac{x^2(x^2 + a^2)^2}{\frac{x^{10} - a^{10}}{x^2 - a^2} - \frac{x^{12} + a^{12}}{x^4 + a^4}}$. R. $\frac{1}{a^2}$.

7. Operații cu fracții algebrice

Să se efectueze:

$$259. \frac{[(2a-3)(2a+3)]^2 + 72a^2 - 82}{8} : \frac{4a^2 + 1}{4} : \frac{2a-1}{2} - 2a \quad \text{R. 1.}$$

$$260. \left(\frac{2a-1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a^2+8}{12} \right) : \frac{a+1}{6} + \frac{a^2+a}{2} \quad \text{R. } \frac{(a+1)^2}{2}.$$

$$261. \left(\frac{4a^3 - 8a^2}{8a^2} - \frac{a^2 - 4}{4a} \right) : \frac{a-2}{2} + 0,5 \quad \text{R. } \frac{a-1}{2}.$$

$$262. \left(\frac{4a^2 - 16}{6} : \frac{a+2}{3} - \frac{a-4}{4} \right) \cdot \frac{4}{7a-12} \quad \text{R. 1.}$$

$$263. \left\{ \frac{[(2a-3)(2a+3)]^2 + 72a^2 - 85}{8} : \frac{2a^2 + 1}{4} - 3a^2 + 1 \right\} \cdot \frac{1}{(a+1)^2} \quad \text{R. } \frac{a-1}{a+1}.$$

$$264. \left[\frac{(19^2 : 21^3) \cdot (21^2 : 19^3) \cdot 399}{4} - a^2 \right] : \left(\frac{1}{2} + a \right) + a \quad \text{R. } \frac{1}{2}.$$

$$265. \left[\frac{(3^2 \cdot 5^6 \cdot a^2) : (5^4 \cdot b^2 \cdot 3^4)}{5^2} - \frac{3^{27}}{b^2} \right] : \left(\frac{a}{3b} - \frac{3}{b} \right) - \frac{3}{b} \quad \text{R. } \frac{a}{3b}.$$

$$266. \left(0,1(6)x^2 - \frac{a^2}{6} \right) : \frac{x-a}{3} + \frac{a-x}{2} \quad \text{R. } a.$$

$$267. \frac{25x^2 - 7x : 28x^3}{5x - \frac{1}{2x}} - \frac{10x^2 - 1}{2x} - \frac{1}{x} \quad \text{R. 0.}$$

$$268. \left\{ \frac{\left[4x^2 - 1,1(3) + \frac{2}{15} \right] : (2x+1)}{2x} + \frac{1}{2x} - x^2 \right\} : (1-x) - x \quad \text{R. 1.}$$

$$269. \frac{6x^2 - 4x^2 : 6x^3 + \frac{2}{3x} + 3x^2 - 1}{6x - 2} - \frac{2x-2}{4} \quad \text{R. } x+1.$$

$$270. \left[\left(\frac{72x^3 - 2x}{48x^2 + 8x} \right)^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8} \right] : \frac{(6x-1)}{4} - \frac{3x}{2} \quad \text{R. } \frac{1}{4}.$$

$$271. \left(\frac{4x^2 - 8xy}{x} + \frac{2x^4 - 8x^3y + 8x^2y^2}{x^4 - 2x^3y} \right) : \frac{x-2y}{x} - 4x. \quad \text{R. 2.}$$

$$272. \left(\frac{65x^3y - 60x^2y^2}{39x^2y^3 - 36xy^3} \cdot \frac{5x}{3y^2} - 1 \right) : \frac{5x-3y^2}{3y^2} - \frac{5x}{3y^2} \quad \text{R. 1.}$$

$$273. \left[\frac{x^2 + xy}{2x} + \frac{4(3x^2 + 3xy + 0,75y^2)}{2x + y} \right] \cdot \frac{2}{13x + 7y} \quad \text{R. 1.}$$

$$274. \left(\sqrt{\frac{27 \cdot 8a^3}{3^4 \cdot 2^2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2a} \cdot \frac{3}{2}} - x^2 \right) : \left(\frac{a-x}{2} \right) - 2x - a \quad \text{R. } a.$$

$$275. \left[\frac{ax^2 + x^2 - 4a - 4}{4a + 4} \cdot \frac{16}{x+2} - x^2(x-2) \right] : (x^2 - 4) + x \quad \text{R. 2.}$$

276. $\left[\left(\frac{\sqrt{343}}{11} \cdot \frac{\sqrt{847}}{7}\right)^2 - \frac{x^2}{25}\right] : \left(7 + \frac{x}{5}\right) + \frac{x}{5}$ R. 7.
277. $\left(\frac{a^2x - a^2y - b^2x + b^2y}{4(ax - ay + bx - by)} \cdot \frac{a-b}{4} - 1\right) : \frac{a-b}{4} + 1 - \frac{a-b}{4}$ R. - 1.
278. $\left[\left(\frac{a^2x^2 - 4a^2 + x^2 - 4}{a^2x^2 + x^2} \cdot \frac{x}{x+2}\right)^2 - 1\right] : \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{4}{x}$ R. 0.
279. $\left[\frac{a^4 + 2a^3 + a^2}{(a+1)^2} - 9\right] \cdot \frac{1}{3a-9} - \frac{a}{3}$ R. 1.
280. $\left[\left(\frac{9a^2 - x^2 - 2x - 1}{3a - x - 1} - 3a\right)^2 + 2(x+1) + 1\right] : (x+2)$ R. $x+2$.
281. $\left(\frac{b^2 - 2b + 1 - 4a^2}{2a + b - 1} + 2a\right)^2 + 2(b-1) + 1 - b^2$ R. 0.
282. $\frac{4a^2 - 4ax + x^2 - (2b+x)^2}{2a+2b} \cdot \frac{1}{a-x-b} - 2$ R. 0.
283. $\left(\frac{x^2 + 3x - x^4 - 3x^3}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{1-x}\right)^2 + 2(x+1) + 1 : (x+2)^2 - 1$ R. 0.
284. $\left[\left(\frac{3x^2 - 2xy - y^2}{3x+y}\right)^2 - (x-y)^2 + x^2 + y^2\right] : (x^2 + y^2)^2$ R. $\frac{1}{x^2 + y^2}$.

8. Ecuații de gradul întâi cu o necunoscută

Să se rezolve:

1. $\left[\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{8+3x}{9}\right] : \frac{2x-7}{3} = \left(\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,02} + \frac{1}{0,01}\right) : 159$ R. $x = 7$.
2. $2x - \frac{19-2x}{2} = \frac{2x-11}{2}$ R. $x = 2$.
3. $\frac{10x+3}{3} - \frac{3x-1}{5} = x - 2$ R. $x = -\frac{24}{13}$.
4. $x + \frac{3x-9}{5} = 4 - \frac{5x-12}{3}$ R. $x = 3$.
5. $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$ R. $x = 7$.
6. $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$ R. $x = 8$.
7. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{5} = \frac{x+14}{2} - 2$ R. $x = 4$.
8. $\frac{1}{7}(3x-4) + \frac{1}{3}(5x+3) = 43 - 5x$ R. $x = 6$.
9. $\frac{1}{2}(27-x) = \frac{9}{2} + \frac{1}{10}(7x-54)$ R. $x = 12$.

$$10. \frac{1}{6}(8-x) + x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3}.$$

$$R. x = 5.$$

$$11. \frac{x}{6} - \frac{x - \frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0.$$

$$R. x = \frac{3}{5}.$$

$$12. \frac{7}{24} - \frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}} = \frac{1}{4}.$$

$$R. x = 30.$$

$$13. \frac{4x-8}{10} - \frac{20-x}{4} + \frac{x + \frac{1}{2}}{3} = 6\frac{1}{6}.$$

$$R. x = 12.$$

$$14. \frac{\frac{x}{2} - 5}{\frac{x+8}{2} - 8} + \frac{x-8}{2} + x = \frac{3x}{2} + \frac{49}{16}.$$

$$R. x = \frac{65}{97}.$$

$$15. x^2 - x - \frac{15}{4} - (x^2 - 2x - 15) = 9\frac{3}{4}.$$

$$R. x = -\frac{3}{2}.$$

$$16. \frac{2(5x-1)}{5} - \frac{3(2x+3)}{2} = 5x + \frac{1}{10}.$$

$$R. x = -\frac{5}{6}.$$

$$17. \frac{1}{4} \times \frac{\frac{3x-5}{2} - \frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{3} - \frac{2x-6}{4}} = \frac{2x-4}{3+5x}.$$

$$R. x = 1.$$

$$18. \frac{3x+9}{72} + \frac{5x-33}{36} - \frac{48-x}{9} + \frac{x-17}{4} = \frac{3+x}{24}.$$

$$R. x = 21.$$

$$19. \frac{5\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{x+2}}{1 - \frac{1}{x+2}}$$

$$R. x = 2.$$

$$20. (x+1)^2 = [6 - (1-x)]x - 2.$$

$$R. x = 1.$$

$$21. x - \frac{x-1}{2} + \frac{2x-1}{3} - \frac{3x-2}{4} - \frac{4x-3}{6} = 1$$

$$R. x = \frac{2}{3}.$$

$$22. \frac{1}{2}(x-1) - \frac{2}{3}(x-2) + \frac{3}{4}(x-3) = \frac{4}{5}(x-4) - \frac{1}{6}.$$

$$R. x = 9.$$

$$23. \frac{3}{4}(5x-2) - \frac{1}{2}(3x+4) = 1.$$

$$R. x = 2.$$

$$24. \frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}.$$

$$R. x = 15.$$

25. $\frac{x+3}{0,1} = \frac{5x+0,4}{0,4} - 5.$ R. $x = 13,6.$
26. $\frac{0,01-x}{0,02} - \frac{5}{2} = \frac{2-3x}{0,01}.$ R. $x = 0,808.$
27. $\frac{13}{12x-18} = \frac{3}{12x-8}.$ R. $x = \frac{5}{12}.$
28. $\frac{5,134}{4x^2-9} = \frac{1,7}{2x-3}.$ R. $x = 0,01.$
29. $\frac{1}{2} + \frac{2}{x+2} = \frac{13}{8} - \frac{5x}{4x+8}.$ R. $x = 2.$
30. $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{4}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2}.$ R. $x = 1.$
31. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}.$ R. $x = 1\frac{1}{2}.$
32. $(x-1)(x-2) = (x-3)(x-4).$ R. $x = 2\frac{1}{2}.$
33. $\frac{x-\frac{1}{0,3}}{2+\frac{1}{0,5}} - \frac{1-x}{3+\frac{1}{5}} = \frac{3-\frac{x}{0,2}}{0,6} + 7\frac{19}{96}.$ R. $x = 1\frac{1}{2}.$
34. $\frac{x-3}{2} - \frac{2(1-3x)}{0,2} + 1 = \frac{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{2} - 7.$ R. $x = \frac{4}{25}.$
35. $x + \frac{1}{2} \left[\frac{2(x+1)}{3} + \frac{4(x+2)}{5} \right] = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{3} \left[\frac{3(x-1)}{4} - \frac{6(x-1)}{5} \right].$
R. $x = -\frac{20}{23}.$
36. $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 1 \right) - 1 \right] - 1 \right\} - 1 = 0.$ R. $x = 30.$
37. $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 1\frac{1}{2} \right) - 1\frac{1}{2} \right] - 1\frac{1}{2} \right\} - 1\frac{1}{2} = 0.$ R. $x = 45.$
38. $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - 2\frac{1}{2} \right) - 2\frac{1}{2} \right] - 2\frac{1}{2} \right\} - 2\frac{1}{2} = 0.$ R. $x = 75.$
39. $\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} x + 2 \right) + 2 \right] + 2 \right\} - 1 = 0.$ R. $x = 3.$

Să se rezolve ecuațiile următoare în care necunoscuta este x .

40. $\frac{16a^2x^2-48ax+36}{8ax-12} - \frac{ax-5}{5} - \frac{3ax}{2} - \frac{3ax}{10} = 2-x.$ R. $x = 4.$
41. $\frac{36-x^2}{x+6} - \frac{12x^2+36x+27}{3(2x+3)} = \frac{2x-1}{5}.$ R. $x = \frac{16}{17}.$

$$42. \left(\frac{a^2 + x^2}{2ax} - 1 \right) : (a - x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{a} + \frac{1}{ax}. \quad \text{R. } x = \frac{2}{3}.$$

$$43. \left(\frac{x^2 + b^2}{2bx} - 1 \right) : (x - b) = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2x} + \frac{4}{2bx} - \frac{4}{2ab} - \frac{4a - 8}{2abx}. \quad \text{R. } x = 2.$$

$$44. \frac{1 - 36x^2}{6x + 1} \cdot \frac{1 - 6x}{0,25(4x^2 - 16)} : \frac{1 - 12x + 36x^2}{x - 2} = 1. \quad \text{R. } x = -1.$$

$$45. \frac{108 - 3x^2}{18 + 3x} - \frac{12x^2 + 36x + 27}{12x + 18} = \frac{2x + 3}{2}. \quad \text{R. } x = 1.$$

$$46. \frac{x^2 + 2ax}{x^2 - a^2} + \frac{x}{(x + a)^2 - ax} = \frac{1}{x - a}. \quad \text{R. } x = -a.$$

Soluția $x = a$ nu are sens.

47. Să se rezolve ecuația în care necunoscuta este a .

$$\frac{4a^2 - 1}{1 + 2a} + \frac{a^2 + 9 + 6a}{(3 + a)^2} = 8. \quad \text{R. } a = 4.$$

$$48. \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 1} - \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{1,5x - 2}{x^2 - 1}. \quad \text{R. } x = 1 \frac{1}{3}.$$

$$49. -4x - \{5x - [6x - (7x - (8x - 9))]\} = -10. \quad \text{R. } x = \frac{1}{2}.$$

$$50. \frac{2x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{2x^2 + 2x + 3}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{2x^2 + 2}{(x + 2)(x + 3)} + 2. \quad \text{R. } x = -\frac{1}{2}.$$

$$51. \frac{1}{9} \left\{ \frac{1}{7} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} (x + 2) + 4 \right) + 6 \right] + 8 \right\} = 1. \quad \text{R. } x = 1.$$

$$52. \frac{3x}{a^2 + 4n(a + n)} - \frac{2(a - n)x - a^2 + 4n^2}{a^3 + 4a^2n + 4an^2} = \frac{1}{a}. \quad \text{R. } x = 4n.$$

$$53. \frac{x + a}{a - b} + \frac{x - a}{a + b} = \frac{x + b}{a + b} + \frac{2(x - b)}{a - b}. \quad \text{R. } x = 3b.$$

$$54. \frac{x - a}{x + b} = \frac{x - 2a - b}{x + a + 2b}. \quad \text{R. } x = \frac{a - b}{2}.$$

$$55. (a + b + c)x - \frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{2abx}{a + b} + \frac{a + b}{a - b} \cdot c. \quad \text{R. } x = \frac{a + b}{a - b}.$$

$$56. \frac{3abc}{a + b} + \frac{a^2b^2}{(a + b)^3} + \frac{(2a + b)b^2x}{a(a + b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}. \quad \text{R. } x = \frac{ab}{a + b}.$$

$$57. x \left(\frac{x - 2a}{x + a} \right)^3 + a \left(\frac{2x - a}{x + a} \right)^3 = x^2 - a^2. \quad \text{R. } x = 1 - a.$$

$$58. \frac{(a - x)^2 + (x - b)^2}{(a - x)^2 - (x - b)^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}. \quad \text{R. } x = \frac{2ab}{a + b}.$$

$$59. \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} = \frac{a(x - b^2) + b(a^2 - x)}{a(x - b^2) - b(a^2 - x)}. \quad \text{R. } x = a^2 + b^2.$$

$$60. \frac{a^2 - x}{x - 2a} = \frac{2a + x}{a^2 - x} + \frac{a^4}{a^2x + 2ax - 2a^3 - x^2}. \quad \text{R. } x = 2.$$

$$61. \frac{a^2 + x}{b^2 - x} - \frac{a^2 - x}{b^2 + x} = \frac{4abx + 2a^2 - 2b^2}{b^4 - x^2}. \quad \text{R. } x = \frac{a+b}{a-b}.$$

$$62. \frac{a^2 + ax + x^2}{a^3 + a^2x + ax^2 + x^3} - \frac{a^2 - a^2x - ax^2 - x^3}{a^4 - x^4} = \frac{1}{a-x}.$$

R. Nu are soluție în R , dar are în C , $x_{1,2} = a \pm \frac{a\sqrt{-3}}{2}$.

$$63. \frac{2(x-a)}{a^2 - c^2 - 2ax + x^2} + \frac{c-x}{a^2 - ac + cx - 2ax + x^2} = \frac{1}{x-a}. \quad \text{R. } x = \frac{a(a-c)}{a-2c}.$$

Să se verifice identitățile

$$64. \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

$$65. \pi h \left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \frac{\pi h}{3} \left(\frac{R-r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

$$66. (a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$67. \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 = 1.$$

$$68. \frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1} : \left[1 + \frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}\right] = -\frac{1}{1+a^2}.$$

Indicație. Avem succesiv:

$$\frac{1-ax+ax+x^2}{-(a^2x^2-2ax+1)} : \frac{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2} = -\frac{1}{1+a^2}.$$

$$69. x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2.$$

$$70. (1+y+y^2+y^3)^2=1+2y+3y^2+4y^3+3y^4+2y^5+y^6+3y^4.$$

9. Inegalități; inecuații

Numeroase probleme practice și teoretice duc la rezolvarea de inecuații, de aici necesitatea de a studia acest capitol.

71. O brigadă de tractoriști trebuie să are după plan câte 50 ha pe zi. Cu cât trebuie să-și mărească norma zilnică pentru a ara în trei zile mai mult de 210 ha?

Dacă notăm cu x creșterea zilnică a normei, în cele trei zile brigada va ara $3(50+x)$ ha și trebuie ca $3(50+x) > 210$.

Rezolvăm inecuația. Împărțim ambii membri cu 3 și găsim:

$$50+x > 70, \text{ de unde } x > 70-50; x > 20.$$

Brigada va trebui să are zilnic cu mai mult de 20 ha peste normă.

Observare. La același rezultat s-ar fi ajuns și prin raționamentul aritmetic elementar.

Exerciții cu inegalități

72. Să se adune inegalitățile următoare:

$$5 > -3; 8 > 5.$$

$$\text{R. } 13 > 2.$$

$$2 < 5; -7 < -3.$$

$$\text{R. } -5 < 2.$$

$$x^2 > a + 1; 2x > a - 5.$$

$$R. x^2 + 2x > 2a - 4.$$

$$3x + y < 2a + 1; 3y - 2x < 14 - 2a.$$

$$R. 4y + x < 15.$$

73. În exemplele următoare să se scadă inegalitatea a doua din prima:

$$16 > 13; 2 < 5.$$

$$R. 14 > 3.$$

$$-8 < -5; -2 > -7.$$

$$R. -6 < 2.$$

$$2x > b^2; a^2 < 9 - x.$$

$$R. x - a^2 > b^2 - 9.$$

$$(a - b)^2 < 2; (a + b)^2 > 8.$$

$$R. 2ab > 3.$$

74. Să se înmulțească ambii membri ai inegalităților următoare cu factorul indicat:

$$5 > -2 \text{ cu } 5.$$

$$R. 25 > -10.$$

$$-7 < -5 \text{ cu } -2.$$

$$R. 14 > 10.$$

$$a^2 > b \text{ cu } -b.$$

$$R. \text{ Dacă } b > 0, -a^2b < -b^2 \\ \text{ Dacă } b < 0, -a^2b > -b^2.$$

$$a - 1 < b \text{ cu } -m.$$

$$R. \text{ Dacă } m > 0, m - ma > -mb \\ \text{ Dacă } m < 0, m - ma < -mb.$$

75. Să se împartă ambii membri ai inegalităților următoare cu numărul indicat:

$$-6 < 9 \text{ cu } 3.$$

$$R. -2 < 3.$$

$$-15 > -35 \text{ cu } -5.$$

$$R. 3 < 7.$$

$$a^3 < a^2 \text{ cu } -a.$$

$$R. \text{ Dacă } 0 < a < 1, -a^2 > -a. \\ \text{ Dacă } a < 0, -a^2 < -a.$$

$$(a - b)^3 > (a - b)^2 \text{ cu } (a - b).$$

$$R. \text{ Dacă } a - b > 1, (a - b)^2 > a - b.$$

Să se rezolve inecuațiile următoare:

$$76. x + 4 > 2 - 3x.$$

$$R. x > -\frac{1}{2} \text{ sau } x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

$$77. 4(x - 1) > 2 + 7x.$$

$$R. x < -2 \text{ sau } x \in (-\infty, -2).$$

$$78. \frac{3x}{2} - \frac{3}{5} \leq 4x - 3.$$

$$R. x \geq \frac{24}{25} \text{ sau } x \in \left[\frac{24}{25}, +\infty\right).$$

$$79. \frac{37 - 2t}{3} + 9 < \frac{3t - 8}{4} - t.$$

$$R. t > 56 \text{ sau } t \in (56, +\infty).$$

$$80. (x - 1)^2 + 7 > (x + 4)^2.$$

$$R. x < -\frac{4}{5} \text{ sau } x \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right).$$

$$81. \frac{7 - 6x}{2} + 12 \leq \frac{8x + 1}{3} - 10x.$$

$$R. x \leq -3,5 \text{ sau } x \in (-\infty, -3,5].$$

$$82. \frac{y - 2}{2} \geq \frac{1 - 3y}{3}.$$

$$R. y \geq \frac{8}{9} \text{ sau } y \in \left[\frac{8}{9}, +\infty\right).$$

$$83. \frac{7x + 5}{3} > 4x + \frac{1}{5}.$$

$$R. x < \frac{22}{25} \text{ sau } x \in \left(-\infty, \frac{22}{25}\right).$$

$$84. \frac{z}{8} + \frac{1}{2} \geq \frac{5(z+4)}{8}.$$

$$R. z \leq -4 \text{ sau } z \in (-\infty, -4].$$

$$85. \frac{x}{3} - 2 \geq \frac{3-5x}{4} + 2.$$

$$R. x \geq 3 \text{ sau } x \in [3, +\infty).$$

$$86. (3a-8)(5-a).$$

$$R. 2\frac{2}{3} < a < 5 \text{ sau } a \in \left(2\frac{2}{3}, 5\right).$$

$$87. (2-3a)(2a+7).$$

$$R. -\frac{7}{2} < a < \frac{2}{3} \text{ sau } a \in \left(-\frac{7}{2}, \frac{2}{3}\right).$$

Să se afle valorile întregi ale lui y care fac fracția pozitivă:

$$88. \frac{3y-7}{2-5y}.$$

$$R. \frac{2}{5} < y < 2\frac{1}{3} \text{ sau } y \in \left(\frac{2}{5}, 2\frac{1}{3}\right) \text{ deci soluțiile sînt } 1 \text{ și } 2.$$

Să se afle pentru ce valori ale lui a fracțiile următoare sînt negative (soluția grafică):

$$89. \frac{8-3a}{7a-2}.$$

$$R. a < \frac{2}{7} \text{ și } a > \frac{8}{3} \text{ sau } a \in \left(-\infty, \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right).$$

$$90. \frac{5a+8}{3a-7}.$$

$$R. -1\frac{3}{5} < a < 2\frac{1}{3} \text{ sau } a \in \left(-1\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3}\right).$$

91. Pornind de la inegalitatea $(a-b)^2 > 0$, să se demonstreze că suma pătratelor a două numere neegale este totdeauna mai mare decît dublul produsului acelorasi numere.

92. Să se arate că într-un triunghi oarecare jumătatea perimetrului este mai mare decît orice latură.

Indicație. a, b și c fiind laturile unui triunghi, se folosește relația $a < b + c$ și se ține seama că se poate aduna a în ambii membri ai inegalității.

93. Să se arate că în orice triunghi dreptunghic cu catetele neegale înălțimea coborîtă pe ipotenuză este mai mică decît jumătate din ipotenuză.

94. Într-un vas sînt 4 l de apă cu temperatura de 13°C . Pînă la ce temperatură t trebuie să încălzim 5 l de apă pentru ca, prin amestecul cu apa din primul vas, să obținem apa cu o temperatură de cel puțin 25°C și cel mult 30°C ?

$$R. 34,6^\circ < t < 43,6^\circ \text{ sau } t \in (34,6^\circ; 43,6^\circ).$$

10. Probleme de gradul I cu o necunoscută

1. Să se afle două numere, cunoscînd suma lor 85 și diferența 15.

$$R. 50; 35.$$

2. Diferența a două numere este 8, raportul lor este $3 : 2$. Care sînt numerele?

$$R. 24; 16.$$

3. Să se împartă numărul 46 în două părți în așa fel ca o treime a părții întîi să întrecă cu doi o șeptime a părții a doua.

$$R. 18; 28.$$

4. Suma a două numere este 64. Împărțind numărul cel mai mare la cel mai mic, obținem citul 3 și restul 4. Să se găsească cele două numere.

R. 49; 15.

5. Diferența a două numere este 35. Împărțind numărul cel mare la cel mic, obținem citul 4 și restul 2. Să se găsească cele două numere.

R. 46; 11.

6. Avem două rezervoare, dintre care unul conține de două ori mai multă apă decît celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hl, ambele rezervoare conțin aceeași cantitate de apă. Cîtă apă a fost în fiecare rezervor?

R. 64 hl; 32 hl.

7. În clasele I A și I B ale unei școli au fost înscriși la începutul anului 90 de elevi, clasa I A avînd un număr mai mic de elevi. După un trimestru, doi elevi din clasa I A au fost mutați în clasa I B. Acum raportul dintre numărul elevilor din clasa I A și numărul elevilor din clasa I B este $\frac{7}{8}$.

Cîți elevi au fost în fiecare clasă la începutul anului școlar?

R. 44; 46.

8. În trei coșuri se află 47 de mere. În primele două, numărul merelor este același, iar în al treilea coș sînt cu două mere mai mult decît în fiecare din celelalte. Cîte mere sînt în fiecare coș?

R. 15; 15; 17.

9. Pe trei rafturi se află 63 de cărți; pe primul raft, de trei ori mai multe decît pe al doilea și pe al doilea de două ori mai multe decît pe al treilea. Cîte cărți sînt pe fiecare raft?

R. 42; 14; 7.

10. Din două metale cu densitatea de 7 200 kg/m³ și 8 400 kg/m³ s-au fabricat 19 kg de aliaj cu densitatea 7600 kg/m³. Cît s-a luat din fiecare metal?

R. $12\frac{2}{3}$ kg; $6\frac{1}{3}$ kg.

11. Un număr e format din două cifre. Dacă scădem din el 18, obținem numărul răsturnat. Să se afle numărul știînd că suma cifrelor sale este 12.

R. 75.

12. O traversă de fier trebuie tăiată în două părți ale căror lungimi să fie în raport 5 : 3, iar prima parte trebuie să fie cu 5 dm mai lungă decît $\frac{5}{9}$ din toată traversa. Să se afle lungimile celor două părți.

R. 45 dm; 27 dm.

13. Dintr-un rezervor s-a scos la început jumătate din apa care se află în el plus $\frac{1}{2}$ hl, pe urmă jumătate din acest rest plus $\frac{1}{2}$ hl; în sfîrșit, încă o jumătate din rest plus $\frac{1}{2}$ hl. După aceste operații, rezervorul mai conține 6 hl de apă. Cîtă apă a fost la început în rezervor?

R. 55 hl.

14. În trei lăzi sînt 300 de mere. Numărul merelor din lada a doua este egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul merelor din prima ladă, iar numărul merelor din lada a treia este cît 0,5 din a doua. Cîte mere sînt în fiecare ladă?

R. 150 de mere; 100 de mere; 50 de mere.

15. Un metrou are patru scări rulante. Cea mai mică scară rulantă are o lungime de 60 m; această lungime reprezintă $\frac{15}{16}$ din lungimea celei de-a doua scări, $\frac{5}{6}$ din lungimea celei de-a treia și $\frac{5}{7}$ din lungimea celei de-a patra. Să se afle lungimea fiecărei scări rulante.

R. 64 m; 72 m și 84 m.

16. Distanța între două sate poate fi parcursă într-un timp cunoscut. De cîte ori mai mult sau mai puțin timp va fi necesar ca să se parcurgă o distanță egală cu $\frac{11}{12}$ din prima, dacă se fac de 1 $\frac{1}{3}$ ori mai mulți pași pe minut decît mai înainte și dacă mărimea pasului va fi de două ori mai mică decît cea precedentă?

R. Timpul al doilea este $\frac{11}{8}$ din primul.

17. Pentru arăturile de toamnă, terenul unei cooperative agricole de producție a fost repartizat la trei brigăzi. Să se afle ariile suprafețelor repartizate fiecărei brigăzi, dacă $\frac{3}{4}$ din terenul repartizat primei brigăzi reprezintă 0,3 din cel al brigăzii a 2-a și $\frac{1}{8}$ din al brigăzii a 3-a. Aria suprafeței întregului teren este 2 413 ari.

Indicații pentru rezolvarea aritmetică

Terenul I reprezintă $\frac{3}{10} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$ din terenul II, iar terenul III reprezintă $\frac{3}{10} : \frac{1}{8} = \frac{12}{5}$ din terenul II.

Toate terenurile la un loc reprezintă:

$$\frac{2}{5} + \frac{12}{5} + 1 = \frac{19}{5} \text{ din suprafața terenului II.}$$

$$\text{R. Deci terenul II este } 2\,413 : \frac{19}{5} = \frac{24\,130}{38} = 635 \text{ ari;}$$

$$\text{terenul I} = \frac{2}{5} \cdot 635 = 254 \text{ ari; terenul III} = 1\,524 \text{ ari.}$$

18. O cooperativă agricolă de producție și-a depozitat ovăzul în trei hambare. În primul era $\frac{3}{8}$ din întreaga cantitate de ovăz, în al doilea de 1 $\frac{2}{3}$ ori mai puțin decît în primul, iar în al treilea restul ovăzului. Cînd s-au luat 1 $\frac{1}{2}$ hl

din cel de-al doilea hambar și 33 hl din al treilea, în fiecare hambar a rămas aceeași cantitate de ovăz.

Cît ovăz a fost în fiecare hambar?

$$R. \left\{ \begin{array}{l} I. 67,5 \text{ hl} \\ II. 40,5 \text{ hl} \\ III. 72 \text{ hl} \end{array} \right\}$$

19. Într-un atelier al unei cooperative se află două bucăți de stofă de calitate diferite. Prima bucată, cu prețul de $93 \frac{3}{4}$ lei metrul, costă cu $187 \frac{1}{2}$ lei mai puțin decît a doua, cu toate că este cu $1 \frac{1}{2}$ m mai lungă decît bucata a doua, al cărei preț este de $112 \frac{1}{2}$ lei metrul. Să se afle lungimea fiecărei bucăți.

$$R. \left\{ \begin{array}{l} 19 \text{ m.} \\ 17,50 \text{ m} \end{array} \right\}$$

20. Cinci țărani cooperatori au primit pentru o parte din normele de muncă efectuate 8 591 de lei. Să se afle partea ce s-a convenit fiecăruia, știind că al doilea a primit $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit primul, al treilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al doilea, al patrulea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al treilea, iar al cincilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al patrulea.

Indicație. Părțile fiecăruia sînt:

$$x; \frac{3x}{4}; \frac{9x}{16}; \frac{27x}{64}; \frac{81x}{256}.$$

$$R. I. 2816; II. 2112; III. 1584;$$

$$IV. 1188; V. 891 \text{ de lei.}$$

21. Într-o ladă se află 0,208 t de mălai, iar în alta 0,01 t. De cîte ori trebuie să se adauge în fiecare ladă cîte 7 kg pentru ca în prima ladă să fie o cantitate de mălai de patru ori mai mare decît în a doua?

$$R. \text{ De } 8 \text{ ori.}$$

22. Într-un hambar sînt de două ori mai multe cereale decît în altul. Dacă se scot din primul hambar 750 t și se aduc în hambarul al doilea 350 t, amîndouă hambarele conțin aceeași cantitate de cereale. Cîte tone de cereale au fost la început în fiecare hambar?

$$R. 2200 \text{ t; } 1100 \text{ t.}$$

23. Un atelier prelucrează trei bucăți de metal: primele două bucăți au aceeași masă, iar a treia cîntărește cît primele două la un loc. Cîte kilograme cîntărește fiecare bucată, dacă prima și a treia cîntăresc împreună 15 kg?

$$R. 5 \text{ kg; } 5 \text{ kg; } 10 \text{ kg.}$$

24. Un copil avea un număr de bile în două cutii, *A* și *B*. Dacă la bilele din cutia *A* s-ar adăuga încă 4, atunci în cutia *B* ar fi de patru ori mai multe decît în *A*; dacă însă la cutia *B* s-ar adăuga 2 bile, atunci în această cutie ar fi de șase ori mai multe bile decît în *A*. Cîte bile au fost în fiecare cutie?

$$R. 9 \text{ și } 52.$$

25. La un centru de pîine, aproape de închidere, vin 5 cumpărători. S-a vîndut primului cumpărător jumătate din cantitatea de pîine pe care o mai avea înainte de închidere și încă o jumătate de pîine; cumpărătorului al doilea i s-a vîndut jumătate din pîinile rămase și încă jumătate de pîine. În același fel s-au vîndut pîinile la încă doi cumpărători. Cînd s-a apropiat al cincilea cumpărător mai rămăsese o singură pîine. Cîte pîini mai avea de vînzare centrul de pîine înainte de închidere?

Indicație. Ecuația problemei este:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + \frac{x+1}{16} + 1 = x.$$

$$x = 31 \text{ (de pîini).}$$

26. La o cooperativă agricolă de producție, s-a arat într-o zi cu 20 ha mai mult decît $\frac{2}{5}$ dintr-un lot al cooperativei. Din cauza timpului nefavorabil, în ziua a doua s-a arat cu 10 ha mai puțin decît $\frac{5}{13}$ din ceea ce a rămas, iar în a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest. Știind că au mai rămas de arat pentru ziua a patra 60 ha, să se afle cîte hectare are lotul.

R. 250 ha.

27. Un elev a dat din suma pe care a scos-o de la CEC, pentru două cărți, cu un leu mai puțin decît $\frac{1}{2}$ din sumă. Din banii rămași a dat $\frac{5}{7}$ și încă 3 lei pentru abonament pe un an la „Gazeta matematică” și astfel i-au rămas 3 lei. Ce sumă a scos elevul de la CEC?

R. 40 de lei.

28. Un elev a cheltuit o sumă de bani astfel: prima dată jumătate din banii săi și încă un leu, a doua oară jumătate din rest și încă 1 leu, a treia oară $\frac{1}{2}$ din noul rest și încă 3 lei, cheltuind astfel întreaga sumă. Cîți lei a cheltuit?

R. 30 de lei.

29. O cantitate de pește a fost împărțită la trei magazine astfel: prima a primit $\frac{2}{3}$ din întreaga cantitate de pește prins, a doua a primit 0,3 din ceea ce a rămas, iar a treia restul; primul magazin a primit cu 143 kg mai mult pește decît al treilea. Cîte kilograme de pește a primit fiecare magazin?

R. I. 220 kg; II. 33 kg; III. 73 kg.

30. Într-o zi s-a scos $\frac{1}{5}$ din grîul ce se află într-un hambar, în ziua a doua $\frac{1}{3}$ din rest, în a treia zi s-a scos de 3 ori mai mult grîu decît în a patra zi, iar în ziua a patra a fost scoasă toată cantitatea de grîu rămasă, adică cu 16 t și 5 q mai puțin decît în prima zi. Cîte tone de grîu au fost în hambar?

Indicație pentru soluția aritmetică. În ziua I și a II-a s-a scos din hambar $\frac{1}{5} + \frac{1}{3}$.

$\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{7}{15}$, deci pentru a III-a și a IV-a zi au mai rămas $\frac{8}{15}$ din cantitatea inițială. Știind că în ziua a treia s-a scos de 3 ori mai mult decît în a patra zi, rezultă că

din cele $\frac{8}{15}$ rămase, s-au scos $\frac{6}{15}$ în ziua a III-a și $\frac{2}{15}$ în ziua a IV-a. Conform enunțului, se deduce că $\frac{1}{15}$ din cantitatea totală reprezintă 16,5 t.

R. 247,5 t.

31. O cooperativă agricolă de producție a semănat un teren astfel: 0,24 din el cu grâu, 0,25 din rest cu ovăz, 0,5 din noul rest cu cartofi, iar pe lotul rămas s-a pus floarea-soarelui. Câte hectare avea acel teren, dacă diferența dintre partea semănată cu floarea-soarelui și cea semănată cu ovăz a fost de 50,312 ha?

R. 529,6 ha.

32. Doi taxatori de tramvai, funcționând unul la cl. I și celălalt la cl. a II-a, aveau bilete de valori diferite. $\frac{2}{5}$ din toate biletele erau de 0,25 lei, $\frac{4}{10}$ din numărul rămas de bilete erau de câte 0,35 lei, iar restul erau bilete de câte 0,40 lei și valoarea acestora din urmă era de 144 lei. Câte bilete au avut cei doi taxatori și care este valoarea lor în lei?

R. 1 000 de bilete în valoare de 328 lei.

33. Un tractorist trebuia să are 18 ha și a depășit norma cu un anumit procent. Un al doilea tractorist trebuia să are 24 ha și a depășit norma, procentul de depășire fiind cu 3 unități mai mare decât la primul. Amândoi tractoriștii au arat împreună 44,82 ha. Cu cât la sută a depășit norma primul tractorist?

Indicație. Ecuația problemei este:

$$18 + \frac{18x}{100} + 24 + 24 \left(\frac{x+3}{100} \right) = 44,82$$

R. 5%.

34. Trei strungari lucrează într-un atelier, la 3 strunguri cu turații diferite. Primul strung face 360 de rotații pe minut, al doilea 270 de rotații pe minut și al treilea 240 de rotații pe minut. Se întreabă:

- După cât timp toți strungarii vor termina piesa în același moment?
- Câte piese produce atelierul în medie pe oră, dacă se știe că pentru o piesă fiecare strung trebuie să facă 900 de rotații, iar strungarii lucrează cu același ritm?
- Fie P mulțimea a cărei elemente sînt numărul de piese făcute de cele trei strunguri pe oră și M mulțimea a cărei elemente sînt trei numere proporționale cu cele trei elemente ale mulțimii P în așa fel ca aceste numere să fie mai mici ca numerele ce sînt elementele mulțimii P și să aparțină numerelor naturale. Scrieți aceste mulțimi.
- Determinați $P \cap M$.

R. a) În 30 minute vor face toți un număr întreg de piese și anume 12; 9; 8; b) $19 \frac{1}{3}$

piese; c) $P = \{24; 18; 16\}$; $M = \{12; 9; 8\}$; d) $\emptyset$.

35. Două brigăzi, avînd împreună 25 de tractoriști, ară în 12 zile 2 040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi și unul din a doua, 8 ha pe zi.
- Cîți tractoriști sînt în fiecare brigadă?
 - Ce economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economisește 2 l de combustibil la ha și a doua, 1,5 l la ha și dacă litrul de combustibil costă 2,20 lei?

- c) Să se scrie mulțimea M a cărei elemente sînt cifrele ce reprezintă numărul de tractoriști din prima și a doua brigadă.
d) Fie N mulțimea factorilor primi ai c.m.m.m.c. a numerelor de tractoriști din cele două brigăzi. Să se scrie relațiile: $M \cup N$ și $M \cap N$.
e) Ce relații mai puteți pune în evidență între elementele celor două mulțimi?

Indicație. Dacă toți tractoriștii ar fi arat cîte 6 ha pe zi, atunci 25 de tractoriști ar fi arat 150 ha pe zi, iar în 12 zile 1 800 ha. În realitate, ei au lucrat cu $2040 - 1800 = 240$ ha mai mult, ceea ce provine din faptul că tractoriștii din a doua brigadă au arat cu $8 - 6 = 2$ ha mai mult pe zi, prin urmare în 12 zile, cei din a doua brigadă au arat în plus 24 ha.

Observare: Problema se putea rezolva presupunînd că toți tractoriștii ar fi arat cîte 8 ha pe zi.

R. — a) 15; 10. b) 7 920 lei. c) $M = \{0; 1; 5\}$

36. Un lucrător face cîte a piese pe zi, iar un altul cu b piese mai mult pe zi, dar a lucrat cu c zile mai puțin decît primul.

a) Să se afle cîte zile a muncit fiecare știind că ei au lucrat același număr de piese.

b) Caz numeric: $2 < a < 25 \mid a \in N$ a cărui divizori scriși în ordinea crescătoare fără extreme, alcătuiesc mulțimea $M = \{3; 4; 6; 12\}$, $b = 4$ și $c = 3$.

Indicație. a) Pentru primul muncitor $\frac{c(a+b)}{b}$ zile.

Numărul de zile lucrate pentru al doilea muncitor $\frac{ac}{b}$.

b) Primul muncitor, lucrînd cîte 24 de piese zilnic, în cele trei zile lucrate în plus a făcut 72 piese. Numărul pieselor lucrate de fiecare dintre cei doi lucrători fiind același, cel de-al doilea lucrător a făcut acest număr de 72 de piese lucrînd mai multe piese în fiecare zi. Știm că a lucrat cu 4 piese pe zi mai multe decît primul; a realizat deci cele 72 de piese în 18 zile.

R. b) 21 zile; 18 zile.

37. O brigadă a unei cooperative agricole de producție trebuia să semene un ogor în 14 zile. Depășind norma cu 2 ha pe zi, a terminat semănatul în 10 zile. Cîte hectare trebuia să semene brigada pe zi și cîte hectare au fost semămate în total?

Indicație. Brigada a lucrat 4 zile mai puțin, deoarece a semănat cîte 2 ha în plus pe zi, deci, în 10 zile a semănat 20 ha în plus față de normă. Pentru cele 20 ha ar mai fi trebuit 4 zile.

R. 70 ha în total.

38. În două depozite s-au adus 4 365 kg de orez. Știind că $\frac{3}{5}$ din cantitatea de orez adus la un depozit împreună cu $\frac{11}{15}$ din cantitatea de orez adus la al doilea depozit reprezintă $2\,821\frac{2}{5}$ kg. Să se afle cît orez s-a adus la fiecare depozit?

Indicație. Știm că $\frac{9}{15}$ din prima categorie și cu $\frac{11}{15}$ din a doua fac 2821,40 kg.

Așezăm cercurile ce reprezintă grămezile unul sub altul, ca în figura III.1 și apoi grupăm un cerc plin ● cu un cerc ○, așa cum se vede în schemă.

Fiecare grupare ca aceasta reprezintă o cantitate ce cântărește, $4\,365 : 15 = 291$ kg. Însă sînt 9 grupări de acest fel. Ele vor reprezenta $291 \cdot 9 = 2\,619$ kg.

Dacă din $2\,824,40$ kg scădem $2\,619$ kg, rămîn $202,40$ kg care reprezintă cît cîntăresc cele două grămezi rămase, notate cu 2 cercuri goale. Rezultă că o grămadă reprezentată printr-un cerc gol cîntărește $101,20$ kg.

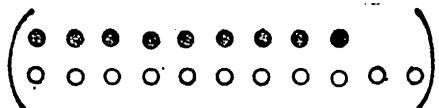


Fig. III.1

R. 2847 kg; 1518 kg.

39. a) Să se găsească numerele A și B , știind că admit pe 40 ca cel mai mare divizor comun și pe $3\,600$ ca cel mai mic multiplu comun.
b) Factorii primi ai c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. luați în ordinea crescătoare sînt elementele mulțimii D respectiv C . Să se determine $D \cap C$.

R. a) Prima soluție este $A = D = 40$; $B = M = 3600$; putem lua pentru A și B și alte valori.

40. Doi concurenți, participînd la un concurs, au răspuns corect — primul la 8 întrebări, al doilea la 6 întrebări.
Suma primită de fiecare drept premiu este proporțională cu numărul de întrebări la care a răspuns corect.

a) Ce sumă a primit fiecare, dacă $\frac{1}{6}$ din suma primită de-al doilea concurent, mărită cu 25% din suma primită de primul, este cu $1\,100$ de lei mai mică decît sumele primite de ei împreună.

b) $800 = 8 \cdot 10^2$; $600 = 6 \cdot 10^2$

Fie $M = \{8; 10^2\}$; $N = \{6 \cdot 10^2\}$.

Să se determine $M \cup N$; $M \cap N$.

c) Să se pună în evidență prin grafic $M \cap N$.

Indicație. Primul a primit 8 părți, iar al doilea, 6 părți. În total 14 părți.

O parte este $\frac{1}{14}$ din întreg. Dacă din tot întregul scădem a 4 -a parte din cît a luat primul,

adică două părți, și $\frac{1}{6}$ din cît a luat al doilea, adică o parte, în total 3 părți, obținem $1\,100$ de lei $\Rightarrow 11$ părți fac $1\,100$ lei.

R. 800 lei; 600 lei.

41. Trei evidențiați în muncă A , B și C au primit $1\,520$ de lei. Suma primită de cel de-al doilea reprezintă $\frac{4}{5}$ din suma primită de primul evidențiat, iar suma primită de cel de-al doilea se raportează la suma primită de cel de-al treilea ca numerele $6\frac{1}{2} : 9\frac{1}{8}$.

a) Să se afle cîți lei a primit fiecare evidențiat.

b) Fie A mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi a c.m.m.m.c. al numerelor ce exprimă răspunsul la întrebarea a) și B mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.d.c. al numerelor menționate. Să se scrie aceste mulțimi în mai multe moduri.

c) Să se reprezinte grafic $A \cap B$.

Indicație. Presupunem că A a primit 65 lei, atunci B primește $65 \cdot \frac{4}{5} = 52$ de lei, iar

C primește $65 \cdot \frac{73}{65} = 73$ lei.

$1\,520 : 190 = 8$ ori mai mică decît cea din enunț.

Rezultă că sumele primite de cei trei evidențiați vor fi de 8 ori mai mari decât cele calculate de noi, adică sînt respectiv: 520 de lei, 416 lei, 584 de lei.

R. a) 520 lei; 416 lei; 584 lei.

42. O coloană de soldați mergea pe o șosea cu viteza de 3 km/oră. Unui biciclist care mergea în același sens, cu viteza de 15 km/oră, i-au trebuit 2 minute pentru a merge de la un capăt la celălalt al coloanei.
Să se afle lungimea coloanei de soldați.

Indicație. În fiecare oră biciclistul va înainta cu $15 - 3 = 12$ km mai mult decât coloana. Într-un minut va înainta cu $12 : 60 = 0,2$ km mai mult decât coloana, iar în două minute cu $0,2 \times 2 = 0,4$ km mai mult. Astfel el ajunge la capătul celălalt al coloanei, care are deci 0,4 km lungime.

R. 0,4 km.

43. Doi drumeți au pornit în același timp pe jos de la sat la oraș. Primul drumeț a sosit la oraș cu 2 ore mai tîrziu decât al doilea. Viteza primului drumeț este de 4 km/oră, iar viteza celui de-al doilea, de 6 km/oră.

a) Să se determine distanța de la sat la oraș.

b) Fie elementele mulțimii A , factori primi a numărului ce exprimă distanța de la sat la oraș și B mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.m.c. obținut din elementele mulțimii A și factorii primi ai numărului 120. Să se determine $A - B$ și C_{AB} .

Indicație. Fie s distanța între sat și oraș (în kilometri). Primul drumeț o parcurge într-un timp t_1 :

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{4} \text{ ore};$$

iar cel de-al doilea în timpul

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{6}.$$

R. 24 km.

44. Un călător care mergea într-un tren de persoane, ce avea viteza de 40 km/oră, a observat că un tren accelerat care mergea în sens contrar a trecut pe lângă el în 3 secunde.

a) Să se afle viteza trenului accelerat, știind că lungimea lui este de 75 m.

b) Fie A mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai numărului care reprezintă lungimea trenului accelerat și B mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi a numărului ce reprezintă viteza trenului accelerat. Să se determine $A - B$ și $A \cap B$.

Indicație. Viteza personalului (în care se află călătorul) $v_1 = 40$ km/oră.

Viteza aparentă a acceleratului:

$$v_2 = \frac{s}{t} = \frac{75}{3} = 25 \text{ m/s} = \frac{25 \cdot 3\,600}{1\,000} = 90 \text{ km/oră}.$$

Viteza acceleratului:

$$v_a = v_2 - v_1 = 90 - 40 = 50 \text{ km/oră}.$$

Deci acceleratul avea viteza de 50 km/oră.

R. 50 km/oră.

45. O barcă cu visle parcurge o distanță în sensul cursului apei în $4\frac{1}{2}$ ore, iar împotriva curentului apei parcurge aceeași distanță în 6 ore. În câte ore parcurge aceeași distanță o plută minată numai de viteza apei?

Indicație. Considerînd distanța parcursă ca un întreg, drumul parcurs în josul apei, într-o oră, va fi $\frac{1}{4,5}$, iar în susul ei, $\frac{1}{6}$.

R. 36 ore.

46. Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 8, numărul obținut este de $4\frac{1}{2}$ ori mai mare decît acela pe care îl vom obține dacă scriem cifra 8 la sfîrșitul lui. Care este acel număr?

Indicație. Fie a cifra căutată. Dacă așezăm cifra 8 înaintea sa, înseamnă că numărul obținut se va scrie algebric $80 + a$.

(8 fiind cifra zecilor și a fiind cifra unităților).

Dacă scriem acum cifra 8 la dreapta sa, adică numărul scris aritmetic este $\overline{a8}$, înseamnă că cifra zecilor devine a și a unităților simple 8, deci el se scrie algebric $10a + 8$.

Enunțul problemei conduce la ecuația:

$$a + 80 = \frac{9}{2} (10a + 8),$$

cu soluția $a = 1 \Rightarrow$ numărul căutat este 1.

R. 1.

47. O lucrare trebuia să fie terminată de 18 muncitori în 25 de zile. În cît timp a fost terminată lucrarea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, iar alți doi muncitori cu 12,5%?

Indicație. Dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, înseamnă că ei au produs în plus, la un loc, cît jumătate din norma unui muncitor; de asemenea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 12,5%, ei au produs în plus cîte un sfert din norma unui muncitor. Situația este ca și cum s-ar fi efectuat: $18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 18\frac{3}{4}$ norme. Acum problema se reduce la o regulă de trei simplă.

Se obține: 24 de zile.

R. 24 zile.

48. Locatarii unei case trebuie să plătească încălzitul. Dacă fiecare dintre ei ar plăti cîte 10 lei, ar mai lipsi 88 de lei, iar dacă fiecare ar da cîte 10,80 lei, s-ar strînge cu 2,5% mai mult decît trebuie.

a) Cît costă încălzitul casei și cîți locatari sînt în casă?

b) Fie M mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai cifrelor din care este compus numărul ce reprezintă numărul de locatari, iar N mulțimea a cărei elemente sînt cifrele numărului de trei ori mai mare decît numărul a cărui cifre a format elementele mulțimii M .

Să se determine $C_N M = N - M$.

R. a) 164 locatari; 1 728 lei; b) $C_N M = \{4; 9\}$.

49. Alama este un aliaj de aramă și zinc. O bucată de alamă cu o masă de 124 g, fiind cufundată în apă, „pierde” din masa sa 15 g. Cîtă aramă și cît zinc conține, știind că 89 g de aramă „pierd” în apă 10 g, iar 7 g de zinc „pierd” 1 g?

Indicație. Să notăm cu x și y cantitățile de aramă și de zinc, exprimate în grame, conținute în aliajul considerat.

Dacă cele 89 g de aramă „pierd” din masă 10 g sub apă, conform principiului lui Arhimede, atunci:

$$1 \text{ g „pierde” } \frac{10}{89} \text{ g,}$$

cele x grame de aramă „pierd” sub apă $\frac{10x}{89}$ g,

iar dacă cele 7 g de zinc „pierd” 1 g sub apă atunci:

$$1 \text{ g „pierde” } \frac{1}{7} \text{ g,}$$

și cele y grame de zinc vor „pierde” sub apă $\frac{y}{7}$ grame.

$$x = 80; y = 35.$$

R. 80 g aramă; 35 g zinc.

50. Un aliaj de aur și aramă are titlul de 0,650 și cântărește 10 g. Cît aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,950?

Indicație. T = Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului prețios (m) pe care îl conține și masa totală a aliajului (M),

adică $T = \frac{m}{M}$. Calculăm mai întâi masa aurului corespunzătoare la 10 g aliaj cu titlul de 0,650; se obțin 6,5 g.

Notăm cu x masa aurului pe care trebuie să-l adăugăm ca să avem titlul de 0,950.

$$\text{Obținem ecuația: } 0,950 = \frac{6,5 + x}{10 + x}.$$

R. 60 (grame aur).

51. Un aliaj este format din 10 g aur și 20 grame argint. Cît aur trebuie să-i adăugăm pentru a obține un aliaj cu titlul de 0,800?

$$\text{Indicație. Interpretați ecuația } 0,800 = \frac{10 + x}{10 + 20 + x}.$$

R. 70 g aur.

52. Un aliaj de 4 kg cu titlul de 0,900 este făcut dintr-o bucată de aur cu titlul de 0,700 și o alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel de aur a intrat în aliaj?

Rezolvare.

$$\begin{array}{c} 0,950 \searrow \\ 0,700 \nearrow \end{array} 0,900 \begin{array}{c} \swarrow 0,200 \\ \searrow 0,050 \end{array} \left. \begin{array}{l} 0,200 \\ 0,050 \end{array} \right\} = \frac{20}{5}$$

$$20 + 5 = 25 \text{ părți.}$$

Acum calculăm cantitatea luată din fiecare bucată de aur:

$$\frac{4 \cdot 20}{25} = 3,2 \text{ kg; } \frac{4 \cdot 5}{25} = 0,8 \text{ kg.}$$

R. 3,2 kg; 0,8 kg.

53. Secția de strungărie a unei întreprinderi are ca sarcină lunară de plan confecționarea a 75 000 de piese. Acest număr de piese este repartizat celor trei

brigăzi de strungari, compuse din 7,8 și 10 muncitori, proporțional cu numărul lor. Încă din prima lună a anului, cele trei brigăzi au depășit norma lunară respectiv cu 12%, 12,5%, 13%. Să se afle numărul de piese confecționate în această lună de către fiecare brigadă, precum și procentul de depășire a planului întregii secții.

R. 21 000 piese; 24 000 piese; 30 000 piese $\approx$ 12,5% depășire.

54. Un muncitor poate să facă o lucrare în 12 zile. Alt muncitor poate să facă aceeași lucrare în 15 zile. Ei au început să lucreze în același timp și au lucrat împreună un anumit număr de zile, după care primul muncitor a fost mutat la altă lucrare, iar muncitorul al doilea a terminat partea rămasă în 6 zile. Cite zile a lucrat primul muncitor?

Indicație. Interpretați ecuația:

$$\frac{x}{12} + \frac{x+6}{15} = 1.$$

R. 4 zile.

55. Două tractoare, lucrând împreună, au arat în 15 ore a 6-a parte dintr-un teren. Dacă primul tractor ar lucra singur 12 ore și pe urmă ar lucra tractorul al doilea 20 de ore, ele ar ara 20% din tot terenul. În cât timp poate ara terenul fiecare tractor lucrând singur?

Indicație. Cele două tractoare lucrând împreună, ară într-o singură oră $\frac{1}{6} : 15 = \frac{1}{90}$ din întregul teren.

În 12 ore, lucrând împreună, ele ară $\frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ din teren.

Tractorul al doilea ară cu 8 ore mai mult.

În acest timp el ară:

$$\frac{20}{100} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15} \text{ din teren.}$$

Rezultă că tractorul al doilea ară întreg terenul în 120 de ore.

Primul tractor ară în 15 ore $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ din teren, iar întregul teren în 360 de ore.

R. 360 ore; 120 ore.

56. Cîțiva excursioniști au angajat o barcă pentru 3 ore și au pornit în sensul curențului apei. Cu cîți km pot să se depărteze ei de la debarcader ca să ajungă înapoi în 3 ore, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 7,5 km/oră, iar viteza apei este de 2,5 km/oră?

Indicație. Să notăm cu s spațiul parcurs, socotit în kilometri.

$$7,5 + 2,5 = 10 \text{ km/oră} = \text{viteza la dus.}$$

Timpul necesar va fi: $\frac{s}{10}$ ore.

La întoarcere $7,5 - 2,5 = 5 \text{ km/oră}$; $t = \frac{s}{5}$.

Timpul dus-întors este de 3 ore, adică:

$$\frac{s}{10} + \frac{s}{5} = 3,$$

de unde $s = 10 \text{ km}$.

R. 10 km.

57. Lungimea circumferinței roții dinapoi a unei căruțe este de 2 ori mai mare decât lungimea circumferinței roții dinainte. Pe distanța de 300 m roata dinainte a făcut cu 100 de învîrtituri mai multe decât cea dinapoi. Să se afle lungimea circumferinței fiecărei roți.

Indicație. Deoarece lungimea circumferinței roții din față este de 2 ori mai mică, înseamnă că a făcut de 2 ori mai multe învîrtituri decât roata din spate.

Deci, diferența dintre numărul de învîrtituri făcute de cele două roți este egală cu numărul de învîrtituri făcute de roata din spate.

Deci, roata din spate a făcut 100 de învîrtituri $\Rightarrow$ circumferința roții din spate este 3 m. Circumferința roții din față este: $3 : 2 = 1,5$ m.

R. 3 m; 1,5 m.

58. Un grup de pionieri pleacă cu bicicletele în excursie de la București spre o pădure situată la o distanță de 40 km de locul de plecare. Odată cu ei, pleacă și un motociclist. Bicicliștii merg cu 12 km/oră, iar motociclistul cu 36 km/oră. Motociclistul ajunge la pădure, unde se odihnește o oră, apoi se întoarce în întîmpinarea bicicliștilor.

a) După cît timp de la plecarea din București întîlnește pe pionieri și la ce distanță de București?

b) Fie B mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai numărului ce reprezintă viteza bicicliștilor și M mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai numărului ce reprezintă viteza motociclistului. Să se determine mulțimea $C_{B^M} = B - M$.

c) Să se arate că $B \cap M = B \cup M$

Indicație. Motociclistul, mergînd cu 36 km/oră, a parcurs 40 km în $1 \frac{1}{9}$ ore și a mai stat o oră în pădure; deci, în total, s-au scurs de la plecarea lui din București $2 \frac{1}{9}$ ore.

În acest răstimp, bicicliștii au parcurs $\left(2 \frac{1}{9}\right) \cdot (12)$ km, adică $25 \frac{1}{3}$ km și au ajuns în punctul A (v. fig. III.2).

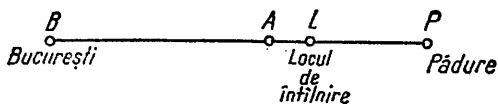


Fig. III.2

Urmează că de la A la pădure sînt: $40 - 25 \frac{1}{3} = 14 \frac{2}{3}$ km. Această distanță o parcurg bicicliștii, de la A către pădure, cu 12 km/oră, iar motociclistul de la P la A , cu o viteză de 36 km/oră, adică de trei ori mai mare, deci în timp ce bicicliștii fac un sfert din distanță AP , motociclistul face trei sferturi. Găsim distanța de la A pînă la locul de întîlnire L , apoi timpul respectiv.

R. a) $\frac{29}{12}$ ore. 29 km. b) $\emptyset$.

Elementele poligoanelor regulate înscrise în cerc
(hexagon, triunghi, pătrat)

	latura	apotema	aria	aria
triunghi	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$
pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	l_4^2
hexagon	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}$

GEOMETRIE

II. Probleme de geometrie plană

1. Se dă un triunghi oarecare ABC . Ducem înălțimea AD ($D \in BC$) iar din D ducem o perpendiculară pe AC , care întâlnește bisectoarea unghiului DAC în O . Să se arate că triunghiul DOM (M fiind piciorul bisectoarei) este isoscel (fig. III.3).
2. Pe cercul circumscris unui triunghi echilateral ABC se ia un punct oarecare M . Să se demonstreze că cel mai mare dintre segmentele MA , MB , MC este egal cu suma celorlalte două (fig. III.4).

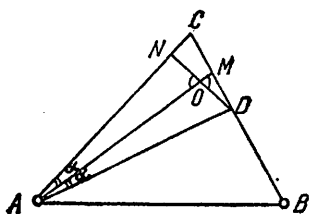


Fig. III.3

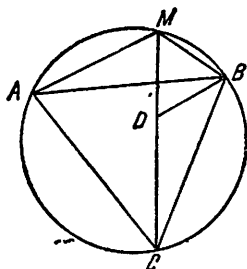


Fig. III.4

Indicație. Luăm pe MC punctul D astfel că $MB = MD$; $\triangle DMB$ echilateral. Observăm că $\triangle AMB = \triangle BDC$

$$\widehat{ABM} = \widehat{BCD} = 60^\circ - \widehat{ABD}.$$

$\Rightarrow DC = AM$ (se opun la unghiuri egale în triunghiuri egale).

Urmează că:

$$MC = MD + DC = MB + AM.$$

3. Să se demonstreze, bazându-ne pe egalități de triunghiuri, că dreapta care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia și egală cu jumătatea ei.

4. Să se demonstreze că:

1) Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei relative la ipotenuză este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

2) Dacă un unghi ascuțit are 30° , cateta opusă lui este egală cu jumătate din ipotenuză.

5. Pe prelungirea unei coarde AB a unui cerc O se ia lungimea BC egală cu raza cercului și apoi se duce secanta COE , unde E este punctul cel mai depărtat de C . Să se arate că $\widehat{AOE} = 3\widehat{ACO}$.

6. Fie AB și CD două coarde perpendiculare într-un cerc cu centrul în O și un punct M situat pe arc BD . Să se arate că unghiurile AMD și BMC sînt complementare.

7. La două cercuri, $O \cap O_1 = \{A\}$ se duce tangenta comună exterioară BC , B și C fiind punctele de contact. Să se demonstreze că unghiul BAC este drept.

8. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct arbitrar pe latura BC , ($M \in BC$). Fie ME și MF distanțele de la punctul M la laturile AB și AC . Să se arate că suma $ME + MF$ este constantă și egală cu înălțimea triunghiului dat (fig. III.5).

Indicații. Să unim pe M cu A și să scriem că

aria $\triangle CMA + \text{aria } \triangle BMA = \text{aria } \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{AC \cdot ME}{2} + \frac{AB \cdot MF}{2} = \frac{AC \cdot BH}{2}.$$

Fiindcă $AC = AB$, avem, după ce împărțim în ambii membri cu $\frac{AC}{2}$,

$$ME + MF = BH.$$

Observare. Considerațiile de mai sus rămîn valabile și în cazul triunghiului isoscel (cînd $AB = AC$); atunci valoarea constantei este egală cu una dintre cele două înălțimi ce se pot duce din vîrfurile unghiurilor egale ale triunghiului.

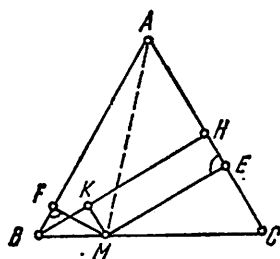


Fig. III.5

9. În triunghiul dreptunghic ABC , cu unghiul drept în A , avem $AC = 2AB$. Se ia pe cateta AC un punct D , astfel ca $\widehat{BDA} = 90^\circ - \hat{C}$. Să se arate că $DC = 3AD$.

Indicație. Înlocuind pe AC cu valoarea sa din enunțul problemei, obținem din asemănarea triunghiurilor ABC și ABD :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{2AB}{AB}, \text{ de unde: } AB = 2AD$$

și fiindcă prin ipoteză $AC = 2AB$, deducem, ținînd seama de cele de mai sus, că: $AC = 4AD$.

10. Fie ABC un triunghi oarecare și D un punct situat pe prelungirea lui AC , astfel ca $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$. Să se demonstreze că BD este medie proporțională între AD și CD .

11. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi ABC . Prin virfurile B și C ducem paralele la AD . Acestea întâlnesc prelungirea lui AC în M și prelungirea lui AB în N . Să se arate că: $MB \cdot DC = NC \cdot DB$.
12. În triunghiul ABC se duce o paralelă la mediana AD . Fie E, F punctele unde aceasta întâlnește respectiv laturile AB, AC . Să se demonstreze că:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}.$$

Indicații. Ducind $GE \parallel BC$ se obține: $\triangle AGE \sim \triangle ACB$ (fig. III.6).

13. Produsul a două laturi AB, AC ale unui triunghi ABC este egal cu produsul diametrului cercului circumscris triunghiului prin înălțimea AA' , dusă din vârful A (fig. III.7).

Indicație. Triunghiurile ADC și ABA' asemenea sînt dreptunghice respectiv în A' și C .

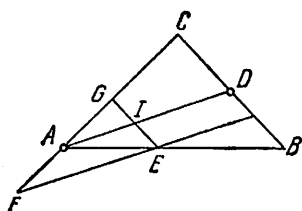


Fig. III.6

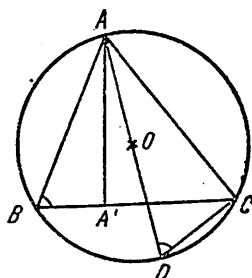


Fig. III.7

14. Se dă un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce MP paralelă la AB și MQ paralelă cu CD . $P \in BC$ iar $Q \in AD$. Să se demonstreze că:

$$\frac{MP}{AB} + \frac{MQ}{CD} = 1$$

Indicație. $\triangle MPC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{MC}{AC}$

$$\triangle AMQ \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{MQ}{CD} = \frac{AM}{AC}.$$

Adunăm membru cu membru egalitățile de mai sus și obținem 1.

15. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy , se consideră un punct fix A . O secantă variabilă ce trece prin A taie pe Ox în M și pe Oy în N . Să se arate că suma:

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$$

are aceeași valoare, oricare ar fi poziția secantei.

Indicație. Ducem din A perpendicularele AP și AQ pe Ox și Oy . Triunghiurile AQN și MON sînt asemenea

$$\Rightarrow \frac{QA}{OM} + \frac{OQ}{OM} = 1.$$

Sau, vom scrie că suma ariilor triunghiurilor OAN și OAM este egală cu aria triunghiului OMN :

$$\frac{OM \cdot PA}{2} + \frac{ON \cdot QA}{2} = \frac{OM \cdot ON}{2}.$$

16. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a . Pe diagonala AC se ia punctul P , astfel încît $PC = \frac{AC}{4}$. Notez $PB \cap CD = \{E\}$, O centrul pătratului, OU perpendiculară din O pe BC și $BP \cap OU = \{M\}$.

1) Să se determine CE .

2) Să se arate că triunghiul OEM este isoscel.

Indicație. Dreapta OMU este paralelă cu AB , ambele fiind perpendiculare pe BC . Triunghiurile PAB și POM sînt asemenea. Scriind proporționalitatea laturilor omoloage, avem:

$$\frac{OM}{AB} = \frac{PM}{PB} = \frac{PQ}{PA} = \frac{1}{3},$$

$$\Rightarrow OM = \frac{a}{3}.$$

Pe de altă parte triunghiurile OPM și PEC sînt egale, avînd o latură egală, $PO = PC$ și unghiurile alăturate egale, de unde:

$$EC = OM = \frac{a}{3}$$

Sau: Patrulaterul $ECMO$ este un paralelogram $\Rightarrow OE = MC$.

$$\Rightarrow OE = MB.$$

17. Catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic ABC sînt respectiv de 15 și 20 de unități de lungime. Să se determine mărimea înălțimii AP duse din vîrfurile unghiului drept pe ipotenuză și cele două segmente PB și PC determinate de aceasta pe ipotenuză.

$$\text{R. } AP = 12; PB = 9; PC = 16.$$

18. Catetele unui triunghi dreptunghic au 8 și 15 unități de lungime. Cît de mare este raza cercului înscris în acel triunghi?

$$\text{R. } 3.$$

19. Latura l_3 a unui triunghi echilateral este egală cu 10 cm. Să se calculeze care este raza unui cerc a cărui arie este a patra parte din aria cercului în care se poate înscrie triunghiul dat.

$$\text{R. } \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ cm.}$$

20. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Din centrul O al cercului ducem $OD \parallel BC$. $D \in AC$. Să se determine mărimile segmentelor AD și DC , cunoscînd că lungimea l_3 a laturii triunghiului ABC este de $12\sqrt{3}$ cm.

$$\text{R. } 8\sqrt{3}; 4\sqrt{3} \text{ cm.}$$

21. Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ de latură l . Se construiește pe fiecare latură a sa, în exterior, cîte un triunghi echilateral. Se obține în modul acesta un poligon cu 12 laturi în formă de stea. Se cere să se afle aria. Să se afle apoi latura unui alt hexagon care are aria egală cu aria poligonului cu 12 laturi.

Indicație. Aria poligonului în formă de stea se compune din aria hexagonului de latură l și ariile a șase triunghiuri echilaterale de aceeași latură.

Observații. Latura noului hexagon este cît latura unui pătrat înscris în același cerc în care se poate înscrie hexagonul $ABCDEF$, ceea ce ne permite să-l construim cu rigla și cu compasul.

$$\text{R. Aria poligonului cu 12 laturi este } 3l^2\sqrt{3}.$$

22. Să se arate că aria unui hexagon regulat este dublul ariei triunghiului echilateral înscris în același cerc cu el. Presupunind că latura triunghiului echilateral este de 3 cm, cât este de mare aria pătratului înscris în același cerc?

$$6R \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Indicație. $A_6 = \frac{6R \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2}$; $A_4 = 6 \text{ cm}^2$.

23. Se dă un octogon regulat $ABCDEFGH$. Să se calculeze aria cuprinsă între acest octogon și pătratul $BDFH$, presupunind că se cunoaște raza R a cercului circumscris octogonului.

Indicație. Pentru a înscrie un octogon într-un cerc, înscriem în prealabil un pătrat $BDFH$ și prelungim apotemele acestuia pînă taie cercul. Se obțin astfel 4 puncte care împreună cu vîrfurile pătratului determină vîrfurile octogonului regulat.

$$R. 2(\sqrt{2} - 1)R^2.$$

24. Se împart laturile unui pătrat $ABCD$ cu latura l în cîte patru părți egale și se taie colțurile așa cum se vede în figura III.8. Se obține un octogon. Se cere:

- 1) Să i se calculeze aria și perimetrul.
- 2) Cît este de mare înălțimea ce pleacă din vîrfurile unghiului obtuz al unui triunghi arătat în figură prin RPM unde R este mijlocul laturii PQ a octogonului?

Indicație. Cele patru triunghiuri tăiate de la colțuri sînt dreptunghice isoscele egale.

Este deci suficient să calculăm de exemplu aria triunghiului AMP . Avem: aria $AMP = \frac{l^2}{32}$.

De unde rezultă că aria tuturor colțurilor tăiate este:

$$\frac{4l^2}{32} = \frac{l^2}{8}$$

și, în consecință, aria A a octogonului este:

$$\frac{7l^2}{8}.$$

Perimetrul său se va compune din patru laturi egale cu MN și din patru laturi egale cu ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel de felul lui PAM cu catetele egale cu $\frac{l}{4}$.

Perimetrul căutat va fi:

$$P = 4MN + 4MP = l(2 + \sqrt{2}).$$

Pentru calculul înălțimii PQ ne vom folosi de aria triunghiului RPM . Aria unui triunghi de felul lui RPM se află, luînd ca bază, de exemplu, RP și ca înălțime pe MA . Aceeași arie se poate afla luînd ca bază pe MR și ca înălțime pe PQ .

$$RM = \sqrt{AR^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{16}} = \frac{l\sqrt{5}}{4}.$$

Prin compararea ariilor

$$\Rightarrow PQ = \frac{l}{4\sqrt{5}}.$$

$$R. (1) \frac{7l^2}{8}; l(2 + \sqrt{2}); 2) \frac{l}{4\sqrt{5}}.$$

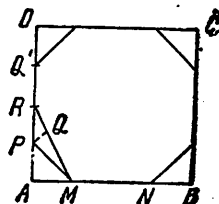


Fig. III.8

de unde:

$$c = \sqrt{\frac{p^2 + pq}{2}}; b = \sqrt{\frac{p^2 + 3pq + 2q^2}{2}}.$$

Verificare. În triunghiul dreptunghic ABC , suma pătratelor catetelor este:

$$b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 3pq + 2q^2}{2} + \frac{p^2 + pq}{2} = p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$$

și, fiindcă $a = BC = BD + DC = p + q$, obținem în virtutea egalității precedente:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

egalitate ce exprimă teorema lui Pitagora, ceea ce trebuia verificat.

$$\text{R. } b = \sqrt{\frac{p^2 + 3pq + 2q^2}{2}}; c = \sqrt{\frac{p^2 + pq}{2}}.$$

27. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC

cu $\hat{C} = 30^\circ$ (fig. III.10) și fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Cateta AB este latura unui triunghi echilateral ABD , înscris în cercul O_1 , secant cu cercul O în A și B . Cateta AC este latura pătratului înscris în cercul O_2 secant cu cercul O în A și C . Să se demonstreze că înălțimea triunghiului echilateral ABD este egală cu apotema pătratului din figură, iar latura pătratului este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul O .

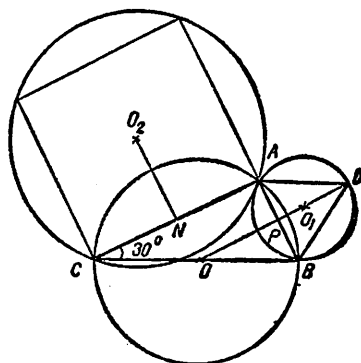


Fig. III.10

Indicație. Patrulaterul $ACOD$ este un paralelogram. $\Rightarrow AD = R$; unde R este raza cercului O , iar $AP = \frac{R}{2}$.

În triunghiul dreptunghic ADP avem:

$$DP = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Dar $\triangle BDP = \triangle BOP$, deci: $DO = 2DP = AC$ = latura pătratului din figură. Însă și $NO_2 = \frac{AC}{2} \Rightarrow DP = NO_2$, iar pentru mărimea laturii pătratului se observă că subîntinde un arc de 120° în cercul inițial adică este tocmai latura triunghiului echilateral înscris în cercul O .

28. La o cooperativă agricolă de producție s-a obținut, folosindu-se îngrășă-minte chimice, un spor de recoltă de 360 kg de porumb la hectar. În prealabil s-a făcut experiență pe o tarla ce avea formă de trapez isoscel, cu laturile $AB = 70$ m, $AC = BD = 280$ m și $CD = 406$ m. Care a fost sporul de porumb obținut pe această tarla?

Indicație. Fie AE și BF înălțimile trapezului duse din A și B pe baza mare CD ; $CE + 4 \cdot FD = 406 - 70 = 336$ m. Cum $CE = FD \Rightarrow$ că fiecare din acestea au o lungime de $\frac{336}{2} = 168$ m.

$$AE^2 = 280^2 - 168^2 = (280 - 168)(280 + 168) = 112 \cdot 448.$$

Observăm că $448 = 4 \cdot 112$, astfel că putem scrie:

$$AE^2 = 112 \cdot 112 \cdot 4, \quad AE = 224.$$

R. 1 919,232 kg porumb.

29. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în A . Cercul ce are ca diametru latura oblică taie latura opusă AD în M și N . Să se arate că fiecare din produsele $MA \cdot MD$ și $NA \cdot ND$ este egal cu produsul bazelor trapezului.

Indicații. Triunghiurile MDC și MBA sînt dreptunghice în D și A . $\widehat{DCM} = \widehat{AMB}$, ca unghiuri cu laturi perpendiculare $\Rightarrow \triangle MDC \sim \triangle MBA$.

$$\Rightarrow MA \cdot MD = AB \cdot DC.$$

Analog:

$$\triangle NDC \sim \triangle NBA$$

$$\Rightarrow ND \cdot NA = DC \cdot AB$$

$$\Rightarrow MA \cdot MD = NA \cdot ND = AB \cdot DC$$

30. Să se demonstreze că diametrul EF al cercului înscris într-un trapez isoscel $ABCD$ este medie proporțională între cele două baze ale acestuia.

Indicație. Centrul cercului O este la intersecția bisectoarelor unghiurilor trapezului.

31. Se dă un paralelogram $ABCD$. Fie F un punct pe prelungirea laturii AB , iar $FD \cap AC = \{E\}$. Să se determine lungimea segmentului BF știind că

$$\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n} \quad \text{și} \quad AB = a.$$

Indicație. $\triangle AEF \sim \triangle CED$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{DC}.$$

Înlocuind primul raport cu $\frac{m}{n}$, iar pe $AF = a + BF$, cunoscute, obținem:

$$\frac{m}{n} = \frac{a + BF}{a} \Rightarrow \frac{m - n}{n} = \frac{BF}{a}.$$

$$\text{R. } BF = \frac{a(m - n)}{n}.$$

32. a) Să se afle perimetrul și aria unui romb, $ABCD$, ale cărui diagonale sînt $AC = 60$ cm și $BD = 80$ cm. Să se afle distanța dintre laturile paralele ale rombului.

b) Fie A mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.m.c. a numerelor ce reprezintă diagonalele și distanța cerută mai sus. Fie B și C mulțimile ale căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă diagonala mare și diagonala mică. Să se determine $C_A B = A - B$. Să se determine $(A \cap B) \cup C$ și $(A \cup C) \cap B$.

R. a) $P = 200$ cm; 48 cm; b) $\{3\}$.

33. În trapezul dreptunghic $ABCD$, avînd ca baze AB și CD , fie E mijlocul înălțimii AD și $AD = DC$. Să se arate că, dacă BE este perpendiculară pe EC atunci aria trapezului $ABCD$ este egală cu $10 \cdot AB^2$.

Indicație. $\widehat{ABE} = \widehat{DEC}$ ca avînd laturile perpendiculare $\Rightarrow$ triunghiurile ABE și DEO sînt asemenea. E este mijlocul lui AD și $DC = AD$ prin ipoteză,

$$\Rightarrow \frac{AE}{2AE} = \frac{AB}{AE}$$

de unde: $AE = 2AB \Rightarrow DC = AD = 2AE = 4AB$,

$$AD = 4AB.$$

Acum este suficient să înlocuim în formula ariei trapezului.

34. Un teren de sport este format dintr-un dreptunghi $ABCD$ și două semicercuri cu diametrul cît lățimea dreptunghiului. Lungimea dreptunghiului este de 172 m, iar lungimea unui semicerc este de 329,70 m. Cîtă sămînță de iarbă este necesară pentru a însămînța tot terenul, dacă la 1 m^2 se folosesc 12 g de sămînță?

R. 848 852 g.

35. a) Să se calculeze aria unui cerc O , în care o coardă AB are lungimea de 8 cm și săgeata sa CD e lungă de 3 cm.

b) Fie $\{m, n, p\}$ trei puncte distincte pe OC și $\{a, b, c\}$ trei puncte pe DC . Să se pună în evidență proprietatea comună a acestor puncte.

$$\text{R. } \begin{cases} \text{a) } \frac{625\pi}{36} \text{ cm}^2 \\ \text{b) } \{(m; n; p; a; b; c) \in OD \mid \text{sînt} \\ \text{egal depărtate de } A \text{ și } B\}. \end{cases}$$

36. Distanța dintre centrele O_1 și O_2 a două cercuri egale este egală cu raza R a cercurilor.

Să se calculeze aria comună a celor două cercuri în funcție de R . Aplicație: $R = 6 \text{ cm}$.

Indicație. Fie C și C_1 cele două cercuri. $C \cap C_1 = \{A, B\}$.

Fie I punctul unde coarda comună taie linia centrelor O_1O_2 . Cum ariile segmentelor de cerc O_1AB și O_2AB sînt egale, problema revine la a calcula una din ele. Aria sectorului circular AO_1B este a treia parte din aria cercului;

$$\text{rezultă } A_{\text{segm}} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right),$$

iar aria comună celor două cercuri este $2A_{\text{segm}} = R^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

În particular, dacă $R = 6 \text{ cm}$:

$$2A = (24\pi - 18\sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

37. Să se împartă, prin cercuri concentrice, un cerc cu raza r în patru părți echivalente (de aceeași arie).

Indicație. Să notăm cu x, y, z razele OE, OD, OB ale celor trei cercuri concentrice cerute (fig. III.11). Ariile acestor cercuri sînt: $\pi x^2, \pi y^2, \pi z^2$. Se vor studia relațiile dintre ele.

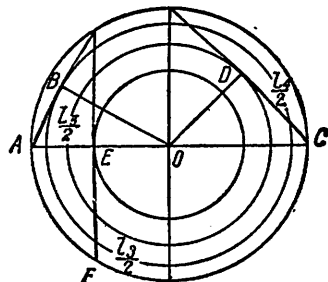


Fig. III.11

38. Se dă un triunghi dreptunghic cu catetele c și b .
Să se afle ariile triunghiurilor ABD și BDC obținute prin ducerea bisec-
toarei BD a unghiului ascuțit B .

Indicație. Aria $ABD = \text{aria } ABC - \text{aria } BDC = \frac{bc}{2} - \frac{ac(a-c)}{2b} = \frac{b^2c - ac(a-c)}{2b} =$
 $= \frac{c(b^2 - a^2 + ac)}{2b}.$

39. Cu o rază dată, să se descrie un cerc tangent la un cerc dat și care să aibă centrul pe o dreaptă dată.
40. Să se demonstreze că într-un triunghi diferența pătratelor a două laturi este egală cu diferența pătratelor proiecțiilor lor pe latura a treia.
41. Să se construiască media proporțională între două segmente a și b de lungime: $a = 20$ mm, $b = 45$ mm, folosind teorema catetei și apoi a înălțimii. Să se afle prin calcul media proporțională a acestor lungimi și să se verifice concordanța celor trei rezultate.
42. Să se afle prin desen valoarea mediei proporționale a numerelor 37 și 54 și să se verifice rezultatul prin calcul.

Indicație. Se construiește grafic media proporțională între 37 mm și 54 mm și apoi se măsoară segmentul obținut.

43. Să se deseneze un dreptunghi oarecare. Apoi să se deseneze, fără calcule sau măsurători, un pătrat echivalent cu dreptunghiul inițial.

Indicație. Se va construi media proporțională a dimensiunilor dreptunghiului.

44. Fiind date două lungimi a și b , să se construiască cu rigla și compasul o lungime x , așa fel încît $x^2 = a^2 + b^2$, și o lungime y , așa fel încît $y^2 = a^2 - b^2$.

Indicație. Se va construi un triunghi dreptunghic în care a și b sînt catetele și un alt triunghi în care a este ipotenuza și b este o catetă.

45. Într-un triunghi isoscel obtuzunghic ABC ($AB = AC$), baza $BC = 32$ m, iar laturile egale sînt de 20 m. Din vîrfurile A se duce o perpendiculară pe BC ($AE \cap BC = \{E\}$). Să se calculeze lungimea segmentelor AE și CE . (fig. III.12).

Indicație. $AD^2 + DE^2 = AE^2$, dar: $AE^2 = BE \cdot DE$, deci $BE \cdot DE = AD^2 + DE^2$.

R. 15 m și 7 m.

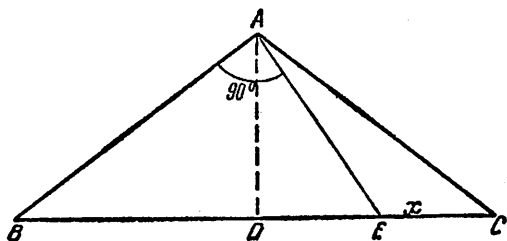


Fig. III.12

46. Diagonala unui pătrat este de 32 cm; să se găsească lungimea laturii pătratului și proiecția ei pe diagonală.

R. $16\sqrt{2}$ cm și 16 cm.

47. Într-un cerc cu raza de 6 m se duc o coardă de 7,2 m și cele două tangente la extremitățile coardei. Să se afle:

- 1) distanța d_1 de la centru la coardă;
- 2) distanța d_2 de la centru pînă la punctul de întîlnire al tangentelor.

$$R. \begin{cases} d_1 = \sqrt{6^2 - 3,6^2} = 4,8 \text{ m;} \\ d_2 = \frac{6^2}{d_1} = 7,5 \text{ m} \end{cases}$$

48. Trebuie frezată o piesă pătratică cu latura de 32 mm. Care este cel mai mic diametru pe care trebuie să-l aibă o bucată rotundă de fier pentru acest scop?

R. ≈ 45 mm.

49. Diametrul unei birne este de 12 cm. Se poate ciopli din ea o grindă pătrată cu latura de 10 cm?

R. Nu.

50. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt de 8 dm și 18 cm. Să se determine raza cercului circumscris.

R. 41 cm.

51. Să se afle aria cercului înscris într-un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm.

R. $3\pi \text{ cm}^2$.

52. Ce diametru trebuie să aibă un copac, ca prin cioplire, să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un pătrat, a cărui latură să fie de 3 dm?

R. $3\sqrt{2} \approx 4,23$ dm.

53. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un triunghi echilateral, a cărui latură să fie de 4 dm?

R. $\approx 4,62$ dm.

54. Prin vîrfurile unui triunghi ABC se duc paralele la fiecare latură. Fie A' , B' , C' punctele opuse respectiv lui A , B , C . Se unește B cu B' și C cu C' ; $BB' \cap AC = \{E\}$ și $CC' \cap AB = \{D\}$. Să se arate că triunghiul CEB este echivalent cu triunghiul BCD .

Indicație. Se arată că trunghiurile CEB și BDC au aceeași înălțime și au baza comună. Pe de altă parte patrulateralele $ABCB'$ și $ACBC'$ sînt paralelograme.

55. Să se arate că paralela EF dusă la bazele unui trapez $ABCD$ prin punctul M de întîlnire al diagonalelor, este împărțită în două părți egale de acest punct.

Indicație. Se folosește asemănarea triunghiurilor formate.

56. Razele a două cercuri sînt de 27 cm și 13 cm, iar distanța dintre centrele lor este de 50 cm. Să se determine lungimea unei tangente exterioare și a uneia interioare.

R. tg. ext. = 48 cm; tg. int. = 30 cm.

57. Într-un cerc O cu raza de 18 m se duc o coardă MN de 16 m și diametrul AB , perpendicular pe această coardă. Să se calculeze:

- a) distanța de la centrul cercului la coarda MN ;
- b) cele două segmente ale diametrului determinate de coardă.

R. 1,88; 19,88 m; 16,12 m.

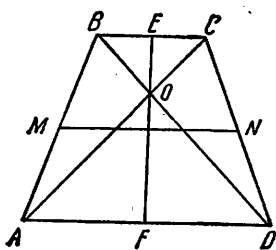


Fig. III.13

58. Într-un cerc cu raza de 6,5 m se duce un diametru AB , pe care se ia distanța $AM = 4$ m, iar din M se ridică o perpendiculară, care întâlnește cercul într-un punct N . Să se calculeze aria triunghiului NAB .

R. 39 cm².

59. Să se construiască un hexagon regulat cu latura de 2 cm și pe fiecare latură a lui să se construiască, în afară, câte un pătrat. Se unesc vîrfurile pătratelor necomune cu hexagonul și se obține un poligon cu 12 laturi. Să se arate că este regulat și să i se calculeze aria.

Indicație. Aria cerută se compune din aria hexagonului cu latura de 2 cm, la care se adaugă aria a șase pătrate egale, avînd latura de câte 2 cm, și aria a șase triunghiuri echilaterale avînd latura de 2 cm.

R. $12(2 + \sqrt{3})$ cm².

60. Într-un trapez isoscel, înălțimea este de 10 cm, iar diagonalele lui sînt perpendiculare între ele. Să se afle linia mijlocie. (fig. III.13.)

Indicație. În $\triangle AOB$ (fig. III.13) ($\angle AOB = 90^\circ$); $OF = FB \Rightarrow AB = 2 OF$. Analog se studiază triunghiul COD .

R. 10 cm.

61. Să se arate că mijloacele laturilor unui triunghi oarecare și piciorul uneia din înălțimile triunghiului sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

Indicație. Se aplică teorema referitoare la linia mijlocie într-un triunghi și teorema referitoare la mediana corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic.

62. Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unui triunghi la o dreaptă exterioară triunghiului este egală cu suma distanțelor mijloacelor laturilor triunghiului la aceeași dreaptă.

Indicație. Se va aplica teorema referitoare la linia mijlocie în trapez.

63. Fie M și N mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez, iar P și Q mijloacele diagonalelor sale. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

Indicație. Se aplică teoremele referitoare la linia mijlocie în triunghi și în trapez.

64. Să se calculeze latura unui triunghi echilateral știind că diferența dintre raza cercului circumscris și a celui înscris este de 24 mm.

R. $48\sqrt{3}$ mm.

65. Un triunghi echilateral este tăiat prin paralele duse la laturi la $\frac{1}{3}$ din

înălțimea socotită de la vîrf. Să se demonstreze că figura obținută în interiorul triunghiului este un hexagon regulat și să se afle aria acestui hexagon, știind că latura triunghiului dat este de 120 mm.

R. 4152 mm².

66. Să se calculeze aria unui triunghi cu laturile de 65 cm, 40 cm și 87 cm.

Indicație. Se aplică de două ori teorema lui Pitagora pentru aflarea înălțimii.

R. 1224 cm².

67. Un triunghi are laturile de 29 cm, 25 cm și 6 cm. Să se calculeze raza cercului înscris.

R. 2 cm.

68. Capătul unei tije cilindrice cu diametrul de 48 mm trebuie cioplit astfel încît secțiunea să fie pătratul cu latura cea mai mare posibilă. Să se calculeze latura pătratului.

R. ≈ 34 mm.

69. Unui cerc cu raza de 16 cm i se circumscrie un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Să se determine lungimile laturilor acestor poligoane cu o precizie de 1 mm.

Indicație. Pentru aflarea laturii triunghiului se vor uni punctele de contact ale laturilor triunghiului cu cercul și se vor folosi proprietățile liniei mijlocii.

R. 55,3 cm; 32 cm; 18,4 cm.

70. Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscriu un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Să se afle raportul dintre suma laturilor acestor poligoane și suma celor trei apoteme. Să se arate că acest raport nu depinde de raza cercului.

$$R. \quad l_3 + l_4 + l_6 = R(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$$

$$a_3 + a_4 + a_6 = R\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Valoarea raportului este totdeauna 2.

71. Latura unui triunghi echilateral este de 6 cm. Să se găsească aria triunghiului și raza cercului circumscris.

R. 15,57 cm²; 3,46 cm.

72. Aria planului unei parcele în formă de romb este de 243,75 cm² (scara este $\frac{1}{10\,000}$). Să se afle aria reală a locului.

R. 243,75 hm².

73. Pe laturile unui romb $ABCD$ se iau punctele M, N, P, Q astfel ca $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{ND} = \frac{CP}{PD} = \frac{CQ}{QB} = 2$. Să se găsească valoarea raportului dintre aria rombului și aria dreptunghiului $MNPQ$.

R. $\frac{9}{4}$.

74. Să se determine aria unui paralelogram știind că una dintre laturile sale este de 51 cm, iar diagonalele sale sînt de 40 cm și 74 cm.

R. 1 224 cm².

75. O sală trebuie pardosită cu plăci în forma unui hexagon regulat cu latura de 12 cm. Sala are 7,48 m lungime și 3,25 m lățime. Să se determine numărul de plăci necesare pentru pardosire.

R. 650 de plăci.

76. O tablă de oțel în formă de hexagon regulat cu latura de 60 cm trebuie vopsită pe ambele părți. Să se calculeze cantitatea de vopsea necesară, dacă pentru 6,5 cm² se consumă 1,5 g de vopsea.

R. 4,312 kg.

77. Circumferința unei roți de transmisie este de 810 mm. Cureaua de transmisie este în contact cu roata de-a lungul unui arc ce are lungimea de 200 mm. Să se calculeze unghiul corespunzător acestui arc.

R. $88^{\circ}53'20''$.

78. Un sabot de frână se aplică unei roți cu diametrul de 950 mm. Sabotul cuprinde o parte din periferia roții care corespunde unghiului la centru de 18° ; șina roții are lățimea de 53 mm. Să se calculeze suprafața de frinare.

Indicație. Suprafața de frinare cilindrică dă prin desfășurare un dreptunghi cu o latură de 53 mm și cealaltă latură egală cu lungimea arcului.

R. 79 cm^2 .

79. Să se calculeze apăsarea exercitată de abur asupra pistonului unei mașini, știind că diametrul pistonului este de 9 cm și că presiunea medie este de 3 at (presiunea de 1 at este egală cu 1 kgf/cm^2).

R. $190,75 \text{ kgf}$.

80. Fundul unui butoi este format din patru scinduri de aceeași lățime. Raza cercului fiind de 30 cm, să se afle aria fiecărei scinduri.

R. două scinduri de câte $552,75 \text{ cm}^2$; alte două scinduri de câte $860,25 \text{ cm}^2$.

81. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic mediana și înălțimea duse din vârful unghiului drept formează între ele un unghi egal cu diferența unghiurilor ascuțite ale triunghiului.

82. Dintre cele trei tangente comune la două cercuri tangente exterior, tangenta interioară împarte în două părți egale segmentele celor două tangente exterioare cuprinse între punctele de contact.

83. Prin punctul A al unui cerc se duce o coardă AB și tangenta în punctul B ; diametrul perpendicular pe raza OA întâlnește tangenta și coarda (sau prelungirea ei) respectiv în punctele C și D . Să se demonstreze că $BC = CD$.

84. Pe un cerc se iau patru puncte oarecare A, B, C, D . Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele arcelor AB, BC, CD, DA . Să se demonstreze că dreptele MP și NQ sint perpendiculare.

Indicație. Se găsește că măsura unghiului format de drepte este jumătate de semicerc.

85. Se duce o rază BO perpendiculară pe un diametru al cercului O . Se unește B cu un punct A al diametrului și BA taie cercul în P . Tangenta în P taie prelungirea diametrului în C . Să se demonstreze că $CA = CP$.

Indicație. Se arată că $\widehat{APC} = \widehat{CAP}$.

86. Să se arate că dacă a, b, c sint laturile unui triunghi oarecare atunci există relația

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 > 0.$$

Indicație. Se transformă diferența de pătrate din membrul întâi al inegalității.

87. În triunghiul dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) unghiul $\hat{B} = 60^\circ$ se duce AM mediană, $M \in BC$. Din M se duc perpendicularele pe AM și pe BC astfel $MN \cap AC = \{N\}$ și $ME \cap AC = \{E\}$.

1) Ce fel de triunghiuri sînt AMN și MEN .

2) Să se arate că $NE = \frac{AC}{3}$.

88. Fie $\triangle ABC$ și $DE \parallel BC$; ($D \in AB$ și $E \in AC$) și înălțimea AA' ($A' \in BC$) și $AA' \cap DE = \{F\}$.

Paralela din F la AB și paralela din A' la AC se intersectează în P .

Să se arate că punctele B , P , E sînt coliniare.

89. În triunghiul ABC se duc perpendiculare din A pe bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ și obținem astfel punctele E , D , N , M . Să se arate că aceste puncte sînt coliniare.

Indicație. Se vor observa dreptunghiurile care se formează.

90. În $\triangle$ dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) se duce mediana AM ($M \in BC$). Fie D un punct oarecare pe BM ; N mijlocul lui AD și P simetricul punctului M în raport cu N . $PD \cap AC = \{O\}$ și $PD \cap AB = \{Q\}$.

Să se arate că $QD = DB$; $\triangle ODC$ este isoscel; $OQ = 2AP$.

91. Într-un cerc O se duce diametrul AB ; din B se duc de o parte și de alta a diametrului două coarde oarecare, care intersectează cercul în C și D . Cunoscînd că BD intersectează tangenta la cerc dusă în A în punctul E , să se arate că $\widehat{BCD} = \widehat{AEB}$.

Indicație. $\widehat{BD} = \widehat{AB} - \widehat{AD}$.

Valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30° , 45° și 60° :

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

92. Pe un teren înclinat al unei cooperative agricole de producție trebuie să se planteze pomi care să aibă între ei o distanță de 5 m. La ce distanță trebuie săpate gropile pentru sădirea pomilor dacă panta are o înclinare de 31° față de orizontală?

R. 5,83 m.

93. Un coș de fabrică înalt de 30 m lasă o umbră de 45 m. Să se afle înălțimea soarelui deasupra orizontului, în momentul când s-a măsurat umbra.
R. $\approx 33^\circ 30'$.

94. Câtă tablă este necesară pentru confecționarea unui acoperiș cu două pante al unei hale dreptunghiulare de 30 m lungime și 10 m lățime, știind că panta acoperișului este de 40° și că pentru încheierea tablei se mai adaugă 5% material.

Indicație. Fiecare pantă formează un dreptunghi (fig. III.14) cu dimensiunile $a = 30$ m și b , care se poate calcula din triunghiul dreptunghic ABC (hașurat), în care avem: $BC = 5$ m și unghiul $ACB = 40^\circ$.

$$R. 2 \cdot 195,6 + \frac{5}{100} (2 \cdot 195,6) \approx 411 \text{ m}^2.$$

95. Un vagonet cîntărește încărcat 300 kg N. Cu ce forță trebuie împins vagonetul pe un plan înclinat cu 17° față de sol pentru ca vagonetul să se urnească din loc?

$$R. 8,76 \text{ N}.$$

96. Dintr-un punct aflat la distanța $a = 86,6$ m de centrul bazei unui turn vizăm turnul sub unghiul $22^\circ 30'$. Să se calculeze înălțimea turnului.

$$R. 35,8 \text{ m}.$$

97. O cale ferată se ridică la fiecare 30 m de șine cu o cotă de 1 m. Să se afle unghiul de urcare.

$$R. \approx 2^\circ.$$

98. Un elicopter se află la 1 700 m deasupra unei ținte a cărei poziție o semnalează aeroportul. În acel moment observatorul citește unghiul direcției elicopterului cu orizontul de 35° . Să se afle distanța (în linie orizontală) de la aeroport la elicopter.

$$R. 2\,427,6 \text{ m}.$$

99. În capătul A al unei macarale de perete este atârnată o greutate P de 900 N. Barele AB și AC ale macaralei formează un unghi de 40° (fig. III.15). Să se determine efortul din bare.

Indicație. Forța P se descompune în două componente după direcțiile barelor P_1 (forța ce întinde bara AB), P_2 (forța ce comprimă bara AC).

$$R. P_1 = P \operatorname{ctg} 40^\circ = 1\,073 \text{ N}; P_2 = 1\,400 \text{ N}.$$

100. Să se afle lungimea proiecției unui segment. $AB = a$ pe o dreaptă $x'x$, care face cu AB un unghi dat α . (Aplicație $a = 21$ m, $\alpha = 25^\circ$.)

$$R. A'B' = 21 \cos 25^\circ = 21 \cdot 0,906 \approx 19,03 \text{ m}.$$

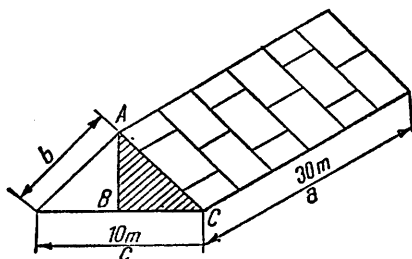


Fig. III.14

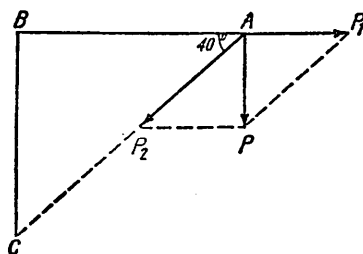


Fig. III.15

101. O scară de piatră este formată din trepte care au lăţimea $l = 27$ cm şi înălţimea $a = 18$ cm. Să se calculeze unghiul pe care îl face scara cu direcţia orizontului.

R. $\approx 33^\circ 30'$.

102. Într-un trapez isoscel, diferenţa bazelor este de 2 cm, iar linia mijlocie este de 6 cm. Latura ne paralelă face cu baza un unghi de 60° .

Să se calculeze:

- 1) Bazele trapezului.
- 2) Aria trapezului.

R. 7 cm; 5 cm; $6\sqrt{3}$ cm².

103. Un cerc cu raza R este circumscris unui pentagon regulat. Să se afle latura, apotema şi aria pentagonului.

Indicaţie. Se foloseşte triunghiul dreptunghic care are ipotenuza R , iar catete apotema poligonului şi jumătatea laturii.

R. Notind cu l_5 , a_5 , A_5 elementele cerute, obţinem:

$$l_5 = 2R \sin 36^\circ;$$

$$a_5 = R \cos 36^\circ;$$

$$A_5 = 5R^2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ.$$

104. I. Două terenuri în formă de dreptunghi au fost inundate parţial, așa cum se vede în figura III.16 *a* şi *b*. Bazele fiind inaccesibile, s-a putut măsura la primul teren lăţimea de 180 m, care se vede din punctul A sub unghiul de $32^\circ 30'$. II. La terenul al doilea s-a putut măsura lungimea de 160 m, care este văzută tot din punctul A sub unghiul de 34° . Să se afle aria celor două terenuri.

R. I. 50 862,60 m²; II. 17 254,40 m².

105. O scândură lungă de 42,6 dm este sprijinită pe un prag înalt de 180 cm spre a servi ca plan înclinat pentru rostogolirea pe ea a unui butoi greu, care trebuie ridicat peste prag. Să se determine unghiul ce-l face scândura cu pavajul orizontal al curţii.

R. 25° .

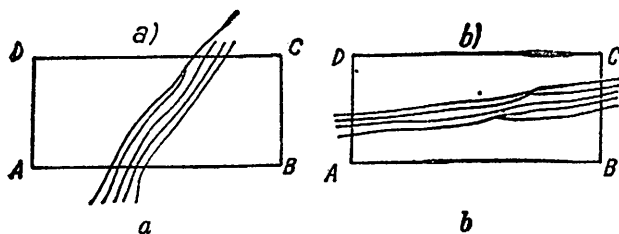


Fig. III.16

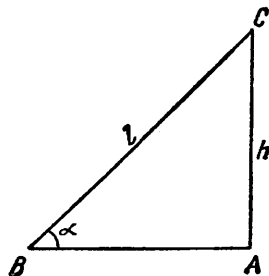


Fig. III.17

106. O scară BC de lungime dată L este rezemată de o podea orizontală AB şi de un perete vertical AC (fig. III.17). Se cunoaşte unghiul α pe care scara BC îl face cu orizontala AB . Se cere să se afle înălţimea $AC = h$ pe care o putem atinge cu această scară, precum şi distanţa $AB = k$ a extremităţii B a scării de la piciorul A al zidului.

(Aplicaţie numerică: $L = 5,20$ m; $\alpha = 68^\circ 30'$)

R. $h = 4,836$ m; $k = 1,908$ m.

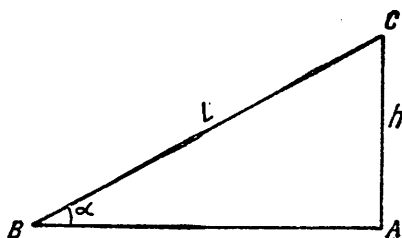


Fig. III.18

107. Un drum în linie dreaptă este înclinat față de orizontala AB cu unghiul α . Se cere să se calculeze lungimea acestui drum și înclinarea sa α deasupra orizontalei, cind se cunoaște $AB = 589$ m; $h = 121,5$ m (fig. III.18).

R. $\alpha \approx 11^\circ 30'$;

$L = 601,4$ m.

III. Probleme și exerciții recapitulative

1. Care este unghiul al cărui suplement este de n ori mai mare decît complementul său. Cazuri particulare: $n = 4$, $n = 5$.

R. $\frac{90(n-2)}{n-1}$; 60° ; $67^\circ 30'$.

2. Dintre cele trei unghiuri ale unui triunghi ABC , al doilea îl întrece pe cel dintîi cu 40° și al treilea pe cel de-al doilea cu aceeași cantitate. Se cer unghiurile triunghiului.

R. $A = 20^\circ$, $B = 60^\circ$; $C = 100^\circ$.

3. Unul din unghiurile unui triunghi este de n° , iar diferența celorlalte unghiuri este de m° . Să se determine unghiurile triunghiului. Caz particular: $n^\circ = 40^\circ$; $m^\circ = 18^\circ$.

R. $A = 40^\circ$; $B = 79^\circ$; $C = 61^\circ$.

4. Laturile unui triunghi sînt de 3 m, 4 m și 6 m. Perimetrul unui alt triunghi asemenea cu primul este de 26 m. Să se determine lungimile laturilor acestui triunghi.

R. 6 m; 8 m; 12 m.

5. Lungimea unui dreptunghi este cu un metru mai mare decît lățimea lui. Micșorînd amîndouă dimensiunile cu cîte un metru, aria dreptunghiului scade cu 12 metri pătrați. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

R. 6 m; 7 m.

6. Să se calculeze dimensiunile unui dreptunghi știind că, dacă mărim baza cu 2 cm și micșorăm înălțimea cu 1 cm, aria se mărește cu 2 cm pătrați, iar dacă micșorăm baza cu 1 cm și mărim înălțimea cu 1 cm, aria sa rămîne neschimbată.

R. 6 cm; 5 cm.

7. Cît de mare trebuie să fie înălțimea unui dreptunghi, pentru ca aria lui să crească cu 16 m², dacă mărim baza cu o cantitate egală cu înălțimea?

R. 4 m.

8. Se dau două dreptunghiuri. Baza unuia este de 5 cm, iar a celuilalt este de 4 cm. Suma ariilor lor este de 42 cm². Dacă mărim baza primului dreptunghi de două ori, iar baza dreptunghiului al doilea cu 1 cm, fără să schimbăm înălțimile lor, suma ariilor dreptunghiurilor obținute este cu 33 cm²

mai mare decât suma ariilor dreptunghiurilor inițiale. Să se afle înălțimea fiecăruia din aceste dreptunghiuri.

R. 6 cm; 3 cm.

9. Să se determine dimensiunile unui dreptunghi cunoscând mărimea $2p$ a perimetrului său și raportul $\frac{m}{n}$ dintre baza și înălțimea sa.

$$R. \frac{pm}{m+n}; \frac{pn}{m+n}.$$

10. Două laturi omoloage a două poligoane asemenea sînt respectiv de 15 m și 5 m, iar diferența dintre perimetrele lor este de 60 m. Să se determine perimetrele celor două poligoane.

R. 30 m; 90 m.

11. Raportul dintre lungimile b și c ale celor două catete AC și AB ale unui triunghi dreptunghic este $\frac{5}{6}$, iar ipotenuza BC are lungimea de 122 cm. Să se afle lungimile segmentelor determinate de înălțimea AD pe ipotenuză.

R. 72 cm; 50 cm.

12. Raportul catetelor unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{4}$, iar lungimea ipotenuzei este de 175 cm. Să se afle lungimile celor două catete și diferența dintre cele două segmente determinate pe ipotenuză de înălțimea ce pleacă din vârful unghiului drept.

R. 140 cm; 105 cm; 49 cm.

13. Să se înscrie un pătrat $EFGH$ într-un triunghi ABC a cărui bază BC este = 10 cm, iar înălțimea este de 5 cm, astfel ca virfurile E și F ale pătratului să fie pe latura BC a triunghiului, iar virfurile G și H pe laturile AC și AB .

R. $l_4 = 3,75$ cm.

14. Un trapez are bazele de 8 m și 26 m și înălțimea de 3 m. La o distanță de 2 m de baza mare se duce o paralelă EF la baze, care determină două trapeze. Să se afle ariile celor două trapeze.

R. 40 m²; 11 m².

15. Distanța cea mai mare dintre punctele a două cercuri concentrice este de a cm, iar distanța cea mai mică este de b cm. Să se determine razele celor două cercuri. Caz numeric $a = 18$ cm; $b = 10$ cm.

R. 14 cm; 4 cm.

16. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu a m. Suma formată de bază și una din laturile egale este egală cu b m. Să se determine lungimile fiecărei laturi. Să se cerceteze condițiile de posibilitate ale problemei.

Indicație.

$$AC = AB = x \text{ și } BC = y,$$

$$2x + y = a.$$

$$x + y = b.$$

După rezolvarea sistemului deducem ușor că $b > \frac{a}{2}$; $b < \frac{3a}{4}$; $\frac{a}{2} < b < \frac{3a}{4}$.

$$R. a - b; 2b - a; \frac{a}{2} < b < \frac{3a}{4}.$$

17. Să se determine numărul laturilor pe care trebuie să le aibă un poligon pentru ca suma unghiurilor lui să fie de patru ori mai mare decât aceea a unui alt poligon, care are un număr de laturi de două ori mai mic decât primul.

R. 6 laturi.

18. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 15 m. Să se afle ipotenuza presupunind: 1) că a doua catetă este cu 5 m mai scurtă decât ipotenuza. 2) că ea este $\frac{4}{5}$ din ipotenuză.

R. 25 m.

19. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catetele de 3 cm și 4 cm. Se duce bisectoarea unghiului drept A care taie ipotenuza în D . Să se calculeze lungimile segmentelor BD și DC .

R. $\frac{20}{7}$ și $\frac{15}{7}$ cm.

20. Într-un triunghi isoscel ($AB = AC$), înălțimea dusă din A pe baza BC este de 4 m, iar înălțimea dusă din vârful B pe AC este de 4,8 m. Să se determine laturile triunghiului.

R. 5 m; 6 m.

21. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$), cu baza $BC = 8$ cm și înălțimea $AD = 3$ cm. Din piciorul D al înălțimii duse din A se duc $DE \parallel AB$ și $DF \parallel AC$, $E \in AC$, $F \in AB$. Diagonalele paralelogramului $AFDE$ se taie în O . a) Să se arate că înălțimea BM dusă din B pe AC este de patru ori mai mare decât distanța OH de la O la latura AC . b) Să se calculeze lungimea lui OH .

Indicații.

a) Se folosește proprietatea liniei mijlocii a triunghiului;

b) Se folosește asemănarea triunghiurilor AHO și ACD .

R. b) $OH = \frac{6}{5}$.

22. Un trapez $ABCD$ are bazele $AB = 24$ m, $CD = 15$ m, iar înălțimea 6 m. Se cere: a) înălțimea triunghiului CED format din baza mică a trapezului cu prelungirea laturilor neparalele ale acestuia; b) să se deducă în ce raport trebuie să fie bazele unui trapez pentru ca înălțimea triunghiului considerat să fie un sfert din înălțimea trapezului.

R. a) 10 m; b) $\frac{1}{5}$.

23. Perimetrul unui triunghi este $\frac{11}{13}$ din perimetrul unui alt triunghi asemenea cu el. Diferența dintre două laturi omoloage este de 1 m. Să se determine aceste laturi.

R. 6,5 și 5,5 m.

24. Raportul dintre catetele unui triunghi dreptunghic este 3 : 2, iar înălțimea împarte ipotenuza în două segmente, din care unul este cu 2 m mai mare decât celălalt. Să se determine ipotenuza.

R. 5,2 m.

25. Perimetrul unui dreptunghi este 40 m. Știind că lungimea este cu 5 m mai mare decât lățimea, să se calculeze lungimea dreptunghiului.

R. 12,5 m.

26. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu p , iar diferența laturilor neegale este egală cu d . Să se determine laturile dreptunghiului. Aplicație numerică: $p = 60$, $d = 20$.

R. 25; 5.

27. Laturile unui patrulater oarecare sînt proporționale cu numerele $1; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ și 2. Perimetrul unui patrulater asemenea cu el este de 75 m. Să se determine laturile patrulaterului al doilea.

R. 18; 9; 12; 36 m.

28. Laturile unui patrulater sînt de 10 dm, 15 dm, 20 dm și 25 dm. Într-un patrulater asemenea cu el, latura cea mai mare adăugată la cea mai mică nedă 28 dm.

Să se determine mărimile laturilor celui de-al doilea patrulater.

R. 8, 12, 16, 20 dm.

29. Una din bazele unui trapez este egală cu 10 m, înălțimea este de 4 m, iar aria de 32 m^2 . La o distanță de 1 m de baza dată, se duce o paralelă cu ea între cele două baze.

Se cere lungimea acestei paralele.

R. 9 m.

30. Raza unui cerc este de 25 cm; două coarde paralele sînt de 14 cm și 40 cm. Să se determine distanța dintre ele.

Se vor considera două cazuri: 1) coardele de aceeași parte a centrului și 2) opuse față de centru.

R. 9 cm și 39 cm.

31. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2 . Înălțimea lui este de 60 dm, iar una din dimensiunile dreptunghiului de bază este $\frac{1}{2}$ din cealaltă. Să se afle dimensiunile bazei acestui paralelipiped.

R. $\begin{cases} 2 \text{ m.} \\ 4 \text{ m.} \end{cases}$

32. Să se afle dimensiunile bazei unui paralelipiped dreptunghic, știind că aceste dimensiuni sînt în raportul de $\frac{3}{5}$, înălțimea paralelipipedului este de 10 m, iar aria laterală a paralelipipedului este de 256 m^2 .

R. $4\frac{4}{5} \text{ m}$ și 8 m.

33. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este de 52 m. Să se afle volumul paralelipipedului, știind că dimensiunile sînt proporționale cu numerele 1, 4, 8.

R. $V = 2048 \text{ m}^3$.

34. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic, știind că o catetă este egală cu 27 m, iar cealaltă este cu 9 m mai mică decît ipotenuza.

R. $A = 486 \text{ m}^2$.

35. Un trapez are baza mare de 32 m, baza mică de 24 m și înălțimea de 15 m. Să se calculeze aria triunghiului format din baza mică și prelungirea laturilor neparalele.

R. $A = 540 \text{ m}^2$.

36. Într-un trapez cu baza mare de 35 m, baza mică de 20 m și înălțimea de 12 m se duce o dreaptă lungă de 31 m, paralelă cu bazele, limitată de laturile neparalele. Să se calculeze distanța de la această dreaptă la baza mare.

R. 3,20 m.

37. Se dă triunghiul dreptunghic ABC (unghiul drept în A) în care unghiul C are 60° . În punctul C se duce dreapta (d) perpendiculară pe BC . Prelungirea laturii AB întâlnește această dreaptă în C' iar perpendiculara în B pe AB întâlnește dreapta d în C'' . Segmentul CC' este de $12\sqrt{3}$ cm. Să se afle: Aria patrulaterului $C'BC''B'$ (B' fiind simetricul lui B față de dreapta (d)).

R. $1\,728\sqrt{3}$ cm².

38. În triunghiul ABC , latura $AC = 12,5$ cm, iar înălțimea $AD = 10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încît să avem $BM : MA = \frac{1}{4}$.

Prin M se duce paralela la AC și perpendiculara pe BC , care determină pe BC , respectiv, punctele N și P . Fie P' simetricul lui P față de N . Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q .

- Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram;
- Să se calculeze lungimile laturilor și diagonalelor paralelogramului $MPQP'$;
- Prelungirea dreptei NM întâlnește tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC , în punctul T . Să se arate că triunghiurile ATM și ABC sînt asemenea.

R. b) $MP = QP' = 2$; $PQ = PM = \sqrt{13}$; $PP' = 3$; $MQ = 5$.

39. Fie triunghiul dreptunghic ABD ($A = 90^\circ$) în care sînt date AD de 15 cm și tangenta unghiului B de $3/4$.

Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei întâlnește paralela dusă prin B la cateta AD în C și ipotenuza în I . Paralela dusă prin I la AD întâlnește pe AB și CD respectiv în M și N .

- Să se afle laturile și diagonalele trapezului $ABCD$.
- Să se arate că $MI = IN$.

R. $BC = 80/3$ cm; $AB = 20$ cm; $BD = 25$ cm;

$CD = 5\sqrt{139}/3$ cm; $AC = 33\frac{1}{3}$ cm.

40. Într-un trapez $ABCD$ raportul dintre baza mică și baza mare este de $1/3$, iar înălțimea este de 6 cm. Laturile neparalele prelungite se întîlnesc în punctul F . Să se afle distanța de la acest punct la fiecare bază.

R. 3; 9

41. Fie paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 2 \cdot BC$ și unghiul $A = 60^\circ$. Notăm cu M mijlocul laturii CD . Dreapta AM intersectează diagonala DB în E . Se cere:

- Să se demonstreze că triunghiul BCM este echilateral.
- Să se arate că $ABDM$ este un trapez înscris în cercul de diametru AB .
- Triunghiurile ADB și AMB sînt dreptunghice egale.
- Dacă $DB = 5\sqrt{3}$ cm, să se afle perimetrul triunghiului DEM .

R. d) $\frac{5}{3}(3 + 2\sqrt{3})$ cm.

42. Fie cercul de centru O și rază R în care se construiește diametrul CD și perpendiculara în P (mijlocul lui OD) pe CD intersectează cercul în A și B .
- Să se arate că coarda AD este egală cu raza R .
 - Să se arate că $AP = \frac{BC}{2}$.
 - Să se arate că $AD + PD = PC$.
 - Să se calculeze raportul $\frac{BC}{AD}$.
 - Să se arate că $(\sin \widehat{PCB})^2 + (\sin \widehat{PDA})^2 = 1$.
 - Dacă M este mijlocul lui BC și E este proiecția lui P pe AD , atunci punctele M , P și E sînt coliniare.

R. d) $\frac{BC}{AD} = 2$.

43. Se dă ecuația: $(5x - 6)^{371} \cdot (6x - 7)^{370} \cdot (7x - 8)^{369} = 1$ definită pe mulțimea $A = \{2; 3; 1; 4\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : x \in A$.

44. Se consideră un triunghi ABC în care $AB + AC = 12$ cm și $BAC = 48^\circ$. Fie D simetricul punctului B față de dreapta AC și E simetricul punctului C față de dreapta AB .
- Să se afle lungimea liniei frînte EAD .
 - Să se afle unghiul EAD .
 - Cîte grade trebuie să aibă unghiul ACB pentru ca semidreptele AE și AD să fie în prelungire.

R. 12 cm; 144° ; 60.

45. Prin vîrfurile A al unui triunghi isoscel ($AB = AC$) se duce o dreaptă (D) care taie pe BC în M și cercul circumscris triunghiului în N . Să se arate că:

- Triunghiurile ABM și MCN sînt asemenea.
- AB este medie geometrică a segmentelor AM și AN .
- $\frac{AM}{NA} = \left(\frac{CM}{CN}\right)^2$ și $\frac{AM \cdot AN}{CN^2} = \left(\frac{MB}{MN}\right)^2$

46. Se consideră triunghiul oarecare ABC . Fie M un punct oarecare în interiorul segmentului BC . Perpendicularele în B și C respectiv pe BC taie perpendiculara dusă în A pe AM respectiv în B' și C' . Să se arate că triunghiurile ABC și $B'MC'$ sînt asemenea.

47. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = c$ cm și $AC = b$ cm. Notăm cu O mijlocul laturii BC . Paralelele la AO duse respectiv prin B și C întîlnesc perpendiculara din A pe AO respectiv în B' și C' .
- Să se arate că AC este bisectoarea unghiului OCC' iar AB bisectoarea unghiului OBB' .
 - Să se arate că AB' este medie proporțională între segmentele CC' și BB' . Care triunghiuri formate sînt asemenea între ele?
 - Să se calculeze perimetrul patrulaterului $B'BCC'$ în cazul cînd

$$AB = 12 \text{ cm și } AC = 16 \text{ cm.}$$

R. 59,2 cm.

48. Se dă:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{\frac{245}{5}} \cdot \frac{4}{7} - x^2\right) : (2 - x)}{9}$$

a) Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care expresia $f(x)$ este un număr întreg.

b) Să se determine mulțimea valorilor lui x pentru care $\frac{1}{f(x)}$ este un număr întreg.

c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției p : „mulțimea valorilor pentru care $\frac{1}{f(x)}$ este un număr întreg este inclusă în mulțimea $\{x \in \mathbb{Z} \mid -12 < x < 12\}$ ”.

R. a) $x = 9k - 2$; $k \in \mathbb{Z}$. b) $\{\pm 1; -3; -5; 7; -11\}$. c) adevărată.

49. În triunghiul ABC , unghiurile sînt proporționale cu numerele 2, 3, 13.

a) Să se calculeze unghiurile și să se construiască triunghiul știind că latura $AB = 12$ cm.

b) În acest triunghi se duce bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ la înălțimea din A , care se întîlnesc în punctul D . Să se calculeze unghiurile triunghiului ADB .

c) Fie F simetricul punctului A față de dreapta BC . Să se calculeze laturile triunghiului ABF .

d) Să se arate că triunghiul ABC este echivalent cu triunghiul BCF .

R. a) 20° ; 30° ; 130° ; b) 15° ; 60° ; 105° ;
c) echilateral; $l = 12$ cm.

50. Din punctul P exterior cercului (O) , se duc tangentele PA și PB astfel că triunghiul PAB este echilateral.

a) Să se calculeze unghiurile patrulaterului $PAOB$ și să se exprime perimetrul lui în funcție de raza R a cercului (O) .

b) Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului PAB este egal cu cercul (O) și apoi să se facă construcția grafică a întregii figuri (folosind numai compasul și rigla negradată).

R. $P = 60^\circ$; $D = 120^\circ$; $2R(\sqrt{3} + 1)$.

51. Se consideră două cercuri tangente — exterioare în A . Notăm cu O_1 și O_2 centrele celor două cercuri și cu R și r razele lor (R mai mare ca r). Fie apoi B și C punctele de contact ale unei tangente comune exterioare și O mijlocul segmentului BC . Paralela dusă prin O_2 la BC taie raza O_1B în D . Se cere:

a) Să se arate că patrulaterul BCO_2D este dreptunghi și să se deducă apoi că avem $BC = 2\sqrt{Rr}$.

b) Să se arate că triunghiurile ABC și OO_1O_2 sînt dreptunghice și asemenea între ele.

c) Folosind asemănarea precedentă să se calculeze laturile triunghiului ABC în funcție de razele R și r ale celor două cercuri.

d) Aplicație numerică $R = 9$, $r = 4$.

R. d) $AB = \frac{36\sqrt{13}}{13}$, $AC = \frac{24\sqrt{13}}{13}$; $BC = 12$.

52. Se dă expresia $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$

Pentru ce valoare a lui x expresia $f(x) : 8$ este un număr întreg.

R. $x = \frac{8k + 1}{2}$; ($k \in \mathbb{N}$).

53. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB baza mare) și MP, MN paralele duse la AB , respectiv AD . ($N \in DC$ și $P \in BC$).

a) Să se arate că unghiurile $\widehat{CNP}$ și $\widehat{ABD}$ sînt egale.

b) Paralela din N la BC taie pe BD în R . Să se arate că punctele B, N și mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare.

c) Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relația $NP = \frac{2}{3} DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA} = 2$.

54. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care unghiul $ABC = 150^\circ$ și diagonala BD perpendiculară pe AB . Fie E proiecția lui C pe AD și F intersecția laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC , avînd centrul O .

1) Să se arate că DF este perpendiculară pe BC .

2) Să se arate că punctele E, O, F sînt coliniare.

3) Să se arate că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC .

4) Să se demonstreze că $BD^2 = BF \cdot AD$.

5) Dacă $AB = 2a$, ($a > 0$), să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. 5) $2a(\sqrt{3} + 1)$.

55. Se dă ecuația:

$$\frac{9}{7} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3} + 0,25\right) \left[0,(\overline{3}) - \frac{1}{4}\right]}{0,1 - 0,0625} - \frac{\left[\frac{1}{2} + 0,(\overline{3})\right] \left(0,5 - \frac{1}{3}\right)}{0,25 - \frac{1}{x-1}} = 0$$

Să se determine soluția ecuației.

R. $x = 7$.

56. Se dau polinoamele:

$$A(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + 1; B(x) = x^2 + x + 1; C(x) = x^2 - x + 1.$$

a) Să se calculeze expresia

$$f(x) = \frac{A(x) - B(x) \cdot C(x)}{[A(x) - B(x) - C(x)] - [(B(x) - C(x))]} + 2x$$

aducînd-o la forma cea mai simplă prin simplificare.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei simplificate pentru $x = 1$.

R. a) = 1; b) expresia este o constantă ce nu depinde de x .

57. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$E_1 = \left[\frac{a-1}{a+1} \left(a - \frac{1}{a} \right) (a-1) \right] \cdot \frac{a}{a-1}$$

$$E_2 = \left(a + 2 + \frac{1}{a} \right) \left(a - 2 + \frac{1}{a} \right) a^2$$

și să se arate că E_1 și E_2 sînt pătrate perfecte.

R. $E_1 = (a-1)^2$; $E_2 = (1-a^2)$.

58. Se dau expresiile:

$$E_1(x; y) = 1 - 9y^2 - 10y - [(2x + 3y)(2x - 3y) - 25y^2 - 4x^2];$$

$$E_2(x; y) = [(2y + 1)^2 - (4y^2 + 12xy + 6x - 1)] : (2 - 6x).$$

a) Să se aducă expresiile la forma cea mai simplă.

b) Să se descompună în factori:

$$[E_1(x; y) - E_2(x; y) \cdot (1 - 5y)] : (-7).$$

c) Să se calculeze valoarea numerică a expresiilor E_1 și E_2 pentru

$$x = \frac{(-2) \cdot (+3)}{18} + \frac{(-2) \cdot (-2)}{3} + \frac{(-2)^3 + (+4) \cdot (-1)^2}{3} + \frac{\sqrt{75}}{5\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{(-7) - \left(-\frac{1}{4}\right) - 3,25 \cdot \sqrt{45}}{15\sqrt{5}}.$$

$$R. (1 - 5y)^2; 2y + 1; y(1 - 5y); 20\frac{1}{4}; -\frac{2}{5}.$$

59. Se dau expresiile: $E_1 = (ax + b)^2 - (b - ax^2) - 2abx;$

$$E_2 = [a + b(x + a^2)] : \left(b + \frac{a}{x + a^2}\right) + (b - a^2x) : \left(a^2 - \frac{b}{x}\right)$$

$$E_3 = [b + a(a + 2b^2x^2)] : \left(a + \frac{b}{a + 2b^2x^2}\right) - [a(a + b^2x^2) - b] : \left(a - \frac{b}{a + b^2x^2}\right)$$

unde $a, b \in N$ și se cere:

a) Să se aducă la forma cea mai simplă cele trei expresii.

b) Să se arate că $E_1 + E_2 + E_3$ este un pătrat perfect.

c) Să se scrie sub formă de produs expresia $E = E_1^2 - (E_2 + E_3)^2 + 4.$

$$R. a) (E_1 = 2abx; E_2 = a^2; E_3 = b^2x^2.$$

$$b) E_1 + E_2 + E_3 = (a + bx)^2$$

$$c) (2 + a^2 - b^2x^2)(2 - a^2 + b^2x^2)$$

$$60. \text{ Se dă } f(x) = \frac{a^4(x + a)^3}{a^4(a^2 + x^2) + 2a^5x} : \left\{ 2(x - a) : \left[\frac{ax - 2x - a^2 + 2a}{ax} : \left(\frac{x(a - 2)}{a} - \frac{a - 2}{x} : \frac{1 - \frac{2}{a} : \frac{x}{2a}}{a - 2} + \frac{a - 2}{a} \right] + 2a - x - 2 \right\}.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p : f(x) \in N$

$$R. f(x) = 1$$

$$61. a) \text{ Să se rezolve ecuația: } \frac{a^2(b + c)}{a - x} = \frac{b^2(a + c)}{b - x},$$

unde necunoscuta este x iar a, b și c sînt constante diferite de 0.

b) Să se verifice că rădăcina ecuației de la punctul a) este și rădăcina ecuației:

$$\frac{b^2(a + c)}{b - x} = \frac{c^2(a + b)}{c - x} \text{ (în aceleași condiții)}$$

$$R. a) x = \frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

62. Să se aducă următoarea expresie la forma cea mai simplă:

$$P(y) = \frac{a(9y^4 - 16)}{y + \frac{4}{3y}} + 9y^3 - 7 - \frac{\frac{3}{y} - 2}{\frac{1}{ay}}; \quad (a \neq 0; y \neq 0)$$

și apoi să se determine a astfel ca polinomul obținut să fie de gradul întâi în y .

Care este acest polinom?

$$\text{R. } \begin{cases} P(y) = 14y - 10 \\ \text{pentru } a = -1. \end{cases}$$

63. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{7y - 5}{y + 4} \leq 3$$

și apoi să se determine mulțimea numerelor întregi care o verifică.

$$\text{R. Toate numerele întregi din intervalul } \left[-4; \frac{17}{4}\right].$$

64. Se dau expresiile:

$$A(x) = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}}; \quad B(x) = \left(\frac{x}{x-5} + \frac{x-5}{x} - 2\right) : \frac{25}{x}.$$

a) Să se aducă $A(x)$ și $B(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se rezolve ecuația $A(x) + B(x) + \frac{3x^2 A(x) \cdot B(x)}{4} = 0$.

c) Să se reprezinte grafic funcția: $y = \frac{1}{A(x)} + \frac{1}{B(x)}$.

d) Să se calculeze valorile numerice ale lui

$$A(x) \text{ și } B(x) \text{ pentru } x = 2\frac{1}{2} + \frac{1}{1\frac{1}{3}} - \sqrt{3,8025} + 3,1(6)$$

e) Dacă $y \neq 1$ și $x = \frac{y}{y-1}$ să se arate că:

$$[(x+y)^3 - x^3 - y^3][(x+y)^5 - x^5 - y^5] = 15x^5y^5(xy-1).$$

$$\text{R. } \begin{cases} \text{a) } A(x) = \frac{1}{x-2}; B(x) = \frac{1}{x-5}; \\ \text{b) } x_1 = -\frac{14}{3}; x_2 \text{ nu convine;} \\ \text{d) } \frac{15}{37}; -1\frac{7}{8}. \end{cases}$$

65. Se dă expresia $f(x) = \frac{4x^2 - 10x + 6}{2x - 3}$

Să se arate că după simplificare, produsul $xf(x)$ este divizibil prin unul din elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 10\}$.

$$\text{R. } f(x) = 2(x-1).$$

66. Se dă inecuația:

$$\frac{2x-1}{6} - \frac{x+1}{2} > \frac{x-1}{9} \text{ definită pe mulțimea:}$$

$$A = \{2; -2; 3; -3; 5\}$$

Să se determine mulțimea $x \in \mathbb{Z}$ ce satisface inecuația.

R. $\{-3\}$.

67. Se dă rombul $ABCD$ unde unghiul $A = 60^\circ$, O este intersecția diagonalelor, E simetricul lui O față de AD și M intersecția dreptelor OE și AD . Se cere:

1) Să se arate că punctele C , D și E sînt pe aceeași dreaptă (coliniare).

2) Să se arate că patrulaterul $ABCE$ este trapez dreptunghiic.

3) Dacă N este piciorul perpendicularei din O pe AE să se arate că $AN = NM = OM$ și că MN este paralelă cu AO .

4) Să se arate că patrulaterul $ANMO$ poate fi înscris într-un cerc. Care este centrul?

5) Să se arate că $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$.

68. Se dă ecuația:

$$(9x^2 - 9x^2 : 36) : \left(3x - \frac{x}{2}\right) = 7.$$

Să se găsească valoarea de adevăr a propoziției $p : \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 4\}$.

R. $x = 2$.

69. Se consideră expresia:

$$E(x, y) = x(x + 2y)^2 - (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 4x^2y.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă și să se descompună rezultatul în factori.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei date pentru:

$$x = 2$$

$$y = -\frac{31}{2} : 5,1(6) + 3,5.$$

R. a) $y^2(4x + y)$; b) $1\frac{7}{8}$.

70. Să se arate că:

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1) + 2(x^{16}+1)$$

este pătratul unui binom.

R. $(x^{16} + 1)^2$

71. Să se arate că suma pătratelor a trei numere consecutive mărită cu 1 este un număr divizibil cu 3.

72. Se dă ecuația:

$$\frac{4x^2 + 2x + 2}{x-1} : (4x-2) = x \text{ definită pe mulțimea}$$

$\{x \in \mathbb{N} \mid x < 9\}$. Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației date pe mulțimea indicată.

R. $\{1\}$.

73. Se dau mulțimile:

$$A = \{4; 5; 6; 7\}, B = \{x; 4; 5; 6; 7\}.$$

$\{x \in N \mid x \text{ este soluția ecuației.}$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 + x + 1} : (2x + 1) + 2 = x\}$$

Să se determine mulțimile $A - B; B - A$.

$$R. A - B = \emptyset, B - A = \{3\}.$$

74. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid 2 < x < 9\}.$$

$$B = \{x \in N \mid 2 \mid x \text{ și } x \in A\}.$$

Să se determine valoarea de adevăr a propoziției

$$p : A \cap B = A \cup B.$$

75. Se dă ecuația:

$$R. p: \text{ falsă; } A \cap B \neq A \cup B.$$

$$(4x^2 - 2x : 8x^3) : \left(2x - \frac{1}{2x}\right) = 2x + 1$$

$$\text{definită pe mulțimea } A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 5; 2\right\}.$$

Să se determine mulțimea soluțiilor.

$$R. S = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

76. Se dau mulțimile:

$$M = \{1; 2; 3\}; P = \{1; 5; 6; 2; 4; 3\}.$$

Să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$a) a : M \cup P = P; b) p : M \subset P; c) q : P \subset M.$$

$$R. a) a; b) a; c) f.$$

77. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\left(\frac{1}{3} + 0,25\right) \left[0, (3) - \frac{1}{4}\right]}{0,1 - 0,0625} - \frac{\left[\frac{1}{2} + 0, (3)\right] \left(0,5 - \frac{1}{3}\right)}{0,25 - \frac{1}{x-1}} = 0.$$

$$R. x = 8.$$

78. Se dau polinoamele:

$$A(x) = 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + 1; B(x) = x^2 + x + 1; C(x) = x^2 - x + 1.$$

a) Să se calculeze expresia:

$$F(x) = \frac{A(x) - B(x) \cdot C(x)}{A(x) + B(x) \cdot C(x) - [B(x) + C(x)]}$$

aducând-o la forma cea mai simplă.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei simplificate pentru $x = 1$.

$$R. a) \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 1}; b) 0.$$

79. Fiind date mulțimile:

$$A = \{2; 6; 8\}; B = \{6; 8; 12; 9\}; C = \{3; 6; 8\}.$$

Să se determine valoarea de adevăr a propoziției

$$p: (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

$$R. \text{ adevărată.}$$

80. Se dau mulțimile $A = \{x; 1; 4; 5\}$; $B = \{3; 6; 1; 4; 5\}$.

$x \in N \mid x$ este baza sistemului de numerație din relația

$$\frac{20}{120} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{200}{020} = 1.$$

Să se determine a) $C_A B$; b) $B - A$; c) $A \cup B \cap A$ și $A \cap B \cup B$.

R. a) $C_A B = \emptyset$; b) $B - A = \{6\}$.

81. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x-1}{x-1} = x.$$

82. Se consideră patru numere naturale consecutive, de exemplu 5, 6, 7, 8. Produsul primelor trei numere este de $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$, produsul ultimelor trei numere este $6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$, diferența produselor este $336 - 210 = 126$. S-a obținut triplul produsului numerelor mijlocii $(6 \cdot 7) \cdot 3 = 126$. Pentru orice patru numere consecutive diferența produselor ultimelor trei și primelor trei numere este triplul produsului numerelor mijlocii? Dacă da, demonștrați.

83. Fiind dat $a < 0$ (a negativ) să se rezolve inecuația $\frac{2x+a}{3x+a} \geq 0$.

84. Într-un romb latura este medie proporțională (geometrică) a diagonalelor. Să se afle unghiul ascuțit.

85. a) Să se demonstreze că: într-un triunghi dreptunghic isoscel, raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$.
b) Reciproc, într-un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este $\sqrt{2}$. Triunghiul este isoscel? Demonștrați.
c) Fie b și c catetele, iar a ipotenuza unui triunghi dreptunghic, $b = c$.

Raportul $\frac{b+c}{a}$ poate fi mai mare decît $\sqrt{2}$? De ce?

Să se înlocuiască în propoziția următoare punctele prin: „egal”, „cel puțin egal” sau „cel mult egal”: Într-un triunghi dreptunghic, raportul dintre suma catetelor și ipotenuză este ... cu $\sqrt{2}$.

86. Într-un cerc cu diametrul BC , se duce o rază $OA \perp BC$ (O este centrul cercului) și se ia un punct oarecare M situat pe același cerc, simetric cu punctul A . Să se spună care linie frîntă are lungimea mai mare BAC sau BMC ?
87. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M și N situate de o parte și de alta a lui BC . Cum trebuie alese punctele M și N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cît mai mare? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

R. Patrulaterul $BMCN$ este un pătrat.

88. Se dau mulțimile: $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{x; 4\}$, $x \in N \mid x$ este soluția ecuației:

$$(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = 9.$$

Să se calculeze $C_A B$ și $C_B A$

R. $\{1; 2\}$; $\emptyset$.

ALGEBRĂ

I. Exerciții și probleme

1. Împărțirea a două polinoame

1. $(6a^4 + a^2x - 15x^2) : (2a^2 - 3x)$. R. $3a^2 + 5x$.
2. $(6x^2 - 2xy^2 - 28y^4) : (2x + 4y^2)$. R. $3x - 7y^2$.
3. $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$. R. $2x^2 + 5x - 7$.
4. $(3a^5 + 5a^4b - 33a^3b^2 + 14a^2b^3) : (a^2 + 7ab)$.
R. $3a^3 - 16a^2b + 79ab^2 - 539b^3$; rest $3773ab^4$.
5. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$.
R. $a^2 - 5ab + 6b^2$.
6. $(14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$.
R. $7a^3 - 3a^2b - ab^2$.
7. $(6a^6b^3 - 13a^5b^4 + 28a^4b^5 - 23a^3b^6 + 20a^2b^7) : (2a^2b^2 - 3ab^3 + 4b^4)$.
R. $3a^4b - 2a^3b^2 + 5a^2b^3$.
8. $(10a^5b - 21a^4b^2 - 56ab^5 - 3a^2b^4 - 10a^3b^3) : (8b^3 - 3ab^2 + 5a^2b)$.
R. $2a^3 - 3a^2b - 7ab^2$.
9. $\left(x^4 - \frac{13}{6}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x - 2\right) : \left(\frac{4}{3}x - 2\right)$. R. $\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.
10. $(27x^5 - 9x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 14x + 6) : (9x^3 - 6x^2 + 8x - 6)$.
R. $3x^2 + x - 1$.
11. $(a^4 + 2a^3b^2 + 9b^4) : (a^2 - 2ab + 3b^2)$. R. $a^2 + 2ab + 3b^2$.
12. $(12 - 22x + 2x^2 - 9x^4 + 27x^5) : (9x^3 + 8x - 6x^2 - 6)$.
R. $3x^2 + x - 2$.
13. $(3x^2 - 14x + 15) : (x - 3)$. R. $3x - 5$.
14. $(4x^5 - 5ax^4 - 20a^2x^3 - 5a^3x^2 + 6a^4x) : (x^3 - 2ax^2 - 3a^2x)$.
R. $4x^2 + 3ax - 2a^2$.
15. $(x^5 + a^5) : (x + a)$. R. $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$.
16. $(x^5 - a^5) : (x - a)$. R. $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$.
17. $(x^6 - 7^6) : (x + 7)$. R. $x^5 - 7x^4 + 7^2x^3 - 7^3x^2 + 7^4x - 7^5$.
18. $(x^5 + 1) : (x - 1)$. R. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; rest 2.

$$19. (6x^5 - 28x^4 + 37x^3 - 16x^2 + 12x + 4) : (3x^3 - 8x^2 + 4x - 4).$$

$$R. 2x^2 - 4x - 1.$$

$$20. (15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4) : (3a^2 + b^2 - 2ab).$$

$$R. 5a^2 + ab - 3b^2.$$

2. Exerciții în care se utilizează calculul prescurtat

$$21. \{ [3x^2y^2 - 3x^2 : (-3) - x^2 + 2y^2] \cdot (3y^2x^2 - 2y^2) \}^2 + 72x^4y^8 - 17y^8 : (9x^4y^4 - y^4).$$

$$R. 9x^4y^4 + y^4.$$

$$22. \{ [(12x^2y - 8)(3x^2y + 2) : 4 + 4 - x^2]^2 + 18x^6y^2 - 2x^4 \} : (9x^4y^2 - x^2) - 9x^4y^2 - 1.$$

$$R. x^2 - 1.$$

$$23. \left[\left(\frac{4x^2}{9} - 1 \right) : \left(\frac{2x}{3} + 1 \right) - \frac{2x}{3} - x^2 + 2x \right] : -(x - 1).$$

$$R. x - 1.$$

$$24. \{ [(36x^4 - 100x^2y^2) : (12x^3 + 20x^2y)]^2 + 30xy - 26y^2 \} : (3x - y).$$

$$R. 3x + y.$$

$$25. \left\{ \left[(0,625x^2 - 4) \left(\frac{5x^2}{8} + 4 \right) - \frac{24x^4}{64} \right]^2 + \frac{x^4}{2} - 256 \right\} : \frac{x^4}{8^2}.$$

$$R. \frac{x^4}{64}.$$

$$26. [(6x^3 - 9x^2y)(2x^2 + 3xy) : 3x^3 + 9y^2 - 4xy + y^2 - 1] : (2x - y + 1) + y.$$

$$R. 2x - 1.$$

$$27. \left\{ \left[\left(\frac{2a}{5} - 1 \right) \left(\frac{2a}{5} + 1 \right) : 0,04 : (2a - 5) \right]^2 - 25 \right\} : (a + 5) : a^2.$$

$$R. \frac{4}{a}.$$

$$28. \{ [(a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3) : (a^2 - b^2)(a^2 - ab)]^2 + 2a^6b^2 - 2a^4b^4 \} : (a^4 - a^2b^2).$$

$$R. a^2(a^2 + b^2).$$

$$29. \{ [(x^5 - a^5) : (x - a) - ax^3 - a^2x^2 - a^3x - 2a^4] : (x - a) - ax^2 - a^2x \} : (x + a).$$

$$R. x^3 - ax + a^3.$$

$$30. \{ [(3 - 6x^2 + 4x^4 - x^6) : (3 - 3x^2 + x^4)(1 + x^2)]^2 - x^2 \} : (1 - x - x^4).$$

$$R. 1 - x^4 + x.$$

$$31. \{ [(3x^4 + 12x^3y + 12x^2y^2) : 3x^2 - 2xy - 4y^2]^3 - 12x^4y^2 - 6x^5y \} : (x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2).$$

$$R. x(x + 2y).$$

$$32. \{ [(16x^3 - 2) : (2 + 4x + 8x^2)]^3 - 8x^3 + 28x^2 - 14x + 2 \} : (4x - 1).$$

$$R. 4x - 1.$$

$$33. \{ [(20x^2y^4 - 45) : 5 : (2xy^2 + 3)]^2 - 4x^2y^4 + 9x^2 + 4y^4 - 9 \}^3 : (3x - 2y^2)^3 + 54x^2y^2 - 36xy^4.$$

$$R. 27x^3 - 8y^6.$$

34. $\{(1 - x^3)(1 + x) : (x^2 + x + 1)\}^2 + 4x^2 + x^5 + x^3 : (x^3 + x^2 + 1).$
R. $1 + x^2$.
35. $\{(a^3 - 2a^2 + 2a - 4) : (a^2 + 2)\}^2 + a^3 + 5a^2 + 16a + 4 : (a + 2)^2(a - 2) + 4.$
R. a^2 .
36. $[(18a^4x + 3a^2x^2 - 45x^3) : (6a^2x - 9x^2) \cdot (3a^2 - 5x)]^2 + 450a^4x^2 - 80a^8 - 624x^4.$
R. $(x^4 + a^8).$
37. $\{[(24x^4 - 3x) : (6x^2 - 3x) + 2x] : (2x + 1)\}^3 - 6x(2x + 1) : (2x + 1) - 2x.$
R. $(2x - 1)^2$.
38. $[(2x + 54x^4) : (2x + 6x^2) - 3x] \cdot (1 - 3x)^3 : (1 - 3x)^6 - \frac{1}{1 - 3x}.$
R. 0.
39. $\left\{[(27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3) : (9a^2 + 6ab) - \frac{4b^2}{3a}] \cdot (3a + 4b)^2 - 108a^2b - 144ab^2\right\} : (3a + 4b) - 12ab.$
R. $(3a - 4b)^2$.
40. $\{[(15 - 3x^3 + 5x^2 - 9x) : (5 - 3x) \cdot (x^2 - 3)]^2 + 18x^4 - 80\}^3 - x^{24} - 3x^{16}.$
R. $3x^8 + i$.
41. $\{[(1 + 2m^2 - m + m^4 - m^3) : (1 + m^2 - m) + 2m]^2 - 1\} : (m^2 + 2m + 2) + 1.$
R. $(m + 1)^2$.
42. $\{[(9a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1) : (3a^2 - 2a + 1) - 3a^2]^2 - 4a^2\}^3 + 12a - 48a^2 : (1 - 4a) + 4a.$
R. $(1 + 4a)^2$.
43. $\{[(16x^2 - (3x + 5y)^2) : (7x + 5y)]^3 + 15x^2y - 75xy^2\} : (x - 5y) + 5xy.$
R. $(x + 5y)^2$.
44. $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2(ax - by).$ R. $(a + b + x + y)(a - b + x - y).$
45. $m^2 + 2mn + n^2 - mp - np.$ R. $(m + n)(m + n - p).$
46. $mp - np - m^2 + 2mn - n^2.$ R. $(m - n)(p - m + n).$
47. $x^6z^2 - 2x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2.$ R. $x^2z^2(x + y)^2(x - y)^2.$
48. $x^2y^4z^2 - x^4y^2z^2 - x^2y^2z^4 + x^4z^4.$ R. $-x^2z^2(x + y)(x - y)(y + z)(y - z).$
49. $x^2 + 3x^3 - x^4 - 3x.$ R. $x(1 + x)(1 - x)(x - 3).$
50. $x^4 + x^3 + x + 1.$ R. $(x + 1)^2(x^2 - x + 1).$
51. $x^2 + 2xy + y^2 - (z^2 + 2zn + n^2).$ R. $(x + y - z - n)(x + y + z + n).$
52. $(x^2 - xy - y^2)^3 - (x^2 - xy + y^2)^2.$ R. $-4xy^2(x - y).$
53. $2a^2b - 18b^7 + 12b^4 - 2b.$ R. $2b(a + 3b^2 - 1)(a - 3b^2 + 1).$

54. $m^3 - 8 + 6m^2 - 12m$. R. $(m - 2)(m^2 + 8m + 4)$.
55. $a^5 - a^3 + a^2 - 1$. R. $(a + 1)^2(a - 1)(a^2 - a + 1)$.
56. $a^5 + a^3 - a^2 - 1$. R. $(a - 1)(a^2 + 1)(a^2 + a + 1)$.
57. $x^4 + 2ax^3 - a^4 - 2a^3x$. R. $(x + a)^3(x - a)$.
58. $(a + x)^4 - (a - x)^4$. R. $8ax(a^2 + x^2)$.
59. $(a^6 + b^2)^2 - 4a^6b^2$. R. $(a^3 + b)^2(a^3 - b)^2$.
60. $4a^6b^4 - (a^6 + b^4)^2$. R. $-(a^3 + b^2)(a^3 - b^2)^2$.
61. $x^4 + x^2y^2 + y^4$. R. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.
62. $3x^4y^4 - x^8 - y^8$. R. $(x^2y^2 + x^4 - y^4)(x^2y^2 - x^4 + y^4)$.
63. $x^8 + x^4 + 1$. R. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.
64. $3x^6 - x^{12} - 1$. R. $(x^3 + x^6 - 1)(x^3 - x^6 + 1)$.
65. $x^6 - y^6$. R. $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.
66. $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$. R. $(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$.
67. $(c^2 - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2$. R. $(a + b + c)(a - b + c)(-a + b + c)(-a - b + c)$.
68. $a^2b^2 + c^2d^2 - a^2c^2 - b^2d^2 - 4abcd$. R. $(ab - cd)(ac + bd)(ab - cd - ac - bd)$.
69. $a^2c^2 + b^2d^2 - b^2c^2 - a^2d^2 + 4abcd$. R. $(ac + bd + bc - ad)(ac + bd - bc + ad)$.
70. $a^2(a - 2) + 4a(2 - a) + 4(a - 2)$. R. $(a - 2)^3$.
71. $3p(p - q) - 5(q - p)^2$. R. $(p - q)(8p - 5q)$.
72. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
 $P_1(x) = 6x^6 + 12x^5 - 24x^4 - 48x^3$;
 $P_2(x) = 8x^5 + 48x^4 + 96x^3 + 64x^2$. R. $2x^2(x + 2)^2$.
73. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
 $P_1(x, y) = 280x^4y - 280x^3y^2 + 70x^2y^3$;
 $P_2(x, y) = 336x^3y^2 - 42y^5$. R. $14y(2x - y)$.
74. Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor:
 $x^2 + 2x + 1$; $x^2 - 1$; $x + 1$. R. $x^3 - x^2 - x - 1$.
75. Aceeași întrebare pentru polinoamele:
 $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$; $x^3 + 1$; $x^3 - 1$; $x^2 - 1$. R. $x^6 - 1$.

76. Aceeași întrebare pentru polinoamele:

$$x^2 - 1; x^2 + x - 2; x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

$$\text{R. } x^4 - 5x^3 + 4.$$

77. Aceeași întrebare pentru polinoamele:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4; x^3 + x^2 - 4x - 4.$$

$$\text{R. primul polinom.}$$

3. Simplificarea fracțiilor algebrice

$$78. \frac{x^3 + y^3}{2(x + y)}.$$

$$\text{R. } \frac{x^3 - xy + y^3}{2}.$$

$$79. \frac{a^3 + b^3 + (a + b)^3}{2(a + b)}.$$

$$\text{R. } \frac{2(a^2 + b^2) + ab}{2}.$$

$$80. \frac{(x^2 - y^2)(x^3 - y^3)}{(x - y)(x^2 + y^3)}.$$

$$\text{R. } \frac{x^3 - y^3}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$81. \frac{3x^3 + 24}{2x + 4 - 5(x + 2)}.$$

$$\text{R. } -x^2 + 2x - 4.$$

$$82. \frac{x^2 - 3xy + xz + 2y^2 - 2yz}{x^2 - y^2 + 2yz - z^2}.$$

$$\text{R. } \frac{x - 2y}{x + y - z}.$$

$$83. \frac{a^3 - 3a^2b - b^3 + 3ab^2 + x(a - b)^2}{(1 + x)(a^2 - 2ab + b^2)}.$$

$$\text{R. } a - b.$$

$$84. \frac{a^3x^3 + b^3x^3 + 27(a^3 + b^3)}{(x + 3)(a + b)}.$$

$$\text{R. } (x^3 - 3x + 9)(a^2 - ab + b^2).$$

$$85. \frac{a^3x^2 + b^3x^2 + 3abx^2(a + b) + (a + b)^3}{a^2x^2 + 2abx^2 + b^2x^2 + (a + b)^2}.$$

$$\text{R. } a + b.$$

$$86. \frac{8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 - 1}{(2a - 3b)^2 + 2a - 3b + 1}.$$

$$\text{R. } 2a - 3b - 1.$$

$$87. \frac{a^5 + b^5 - a^2b^3 - a^3b^2}{(a - b)^2(a^2 + ab + b^2)}.$$

$$\text{R. } a + b.$$

$$88. \frac{27a^3x + 54a^2bx + 36ab^2x + 8b^3x - (3a + 2b)^2}{(x^2 - 1)(3a + 2b)^2}.$$

$$\text{R. } \frac{3a + 2b}{x + 1}.$$

$$89. \frac{8ax^3 + ay^3 + 8bx^3 + by^3}{4x^2 - 2xy + y^2}.$$

$$\text{R. } (2x + y)(a + b).$$

$$90. \frac{(x^2 - 1 - 3x^2 + 3x)(x - 1)^2(x - 1) - 1}{(x - 1)^2 + 1}.$$

$$\text{R. } (x - 1)^2 - 1.$$

$$91. \frac{a^3x - a^3y - 3a^2x^2 + 3a^2xy + 3ax^3 - 3ax^2y + x^3y - x^4}{(x - y)(a - x)^2}.$$

$$\text{R. } a - x.$$

92. $\frac{0,125x^3 - 1 + \frac{x^3y}{8} - 9}{0,25(x^2 + 2x + 4)(y + 1)}.$ R. $\frac{x-2}{2}.$
93. $\frac{0,027x^3 + 8 - \frac{27x^3y^3}{1000} - 8y^3}{(0,09x^2 - 0,6x + 4)(y^2 + y + 1)}.$ R. $(1-y)\left(\frac{3x}{10} + 2\right).$
94. $\frac{6a^2b^2 - 3a^3b - 3ab^3 + (a-b)(a^3 - b^3)}{(b-a)(a^2 + b^2 - 2ab)}.$ R. $b - a.$
95. $\frac{x^3y^2 - x^5y^2 + y^3(1-x^2)}{[(1-xy)^2 - (x-y)^2](x^2 - x + 1)}.$ R. $\frac{y^2(x+1)}{1-y^2}.$
96. $\frac{x^4 + ax^3 - a^2x^4}{x^4 - a^4x^4 + 2ax^3 + a^2x^2}.$ R. $\frac{x}{x+a+a^2x}.$
97. $\frac{a^2 + 2a + 2}{(a+1)^4 - 1}.$ R. $\frac{1}{a(a+2)}.$
98. $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 + 5x^2 - x - 5}.$ R. $\frac{1}{x-1}.$
99. $\frac{x^4 - 7x^2 + 6}{(x^2 - 6)(x+1)}.$ R. $x - 1.$

4. Operații cu fracții algebrice

100. $\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} + \frac{3a^2 + b^2}{2ab}.$ R. $\frac{a^2 - b^2}{2ab}.$
101. $\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} + 2.$ R. $\frac{(a+b)^2}{ab}.$
102. $\frac{a+b}{a^2b} + \frac{a-b}{ab^2}.$ R. $\frac{a^2 + b^2}{a^2b^2}.$
103. $\frac{1}{(a-b)^2} - \frac{b}{(b-a)^2}.$ R. $\frac{a}{(a-b)^3}.$
104. $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 4}.$ R. $\frac{x^2 - 20x - 28}{(x+2)^2(x-2)}.$
105. $\frac{1}{p-3} - \frac{3}{2p+6} - \frac{p}{2p^2 - 12p + 18}.$ R. $\frac{-2p^2 + 15p - 45}{2(p-3)^2(p+3)}.$
106. $\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ac}.$ R. $\frac{2(ab+bc+ca)}{abc}.$
107. $\frac{c^2 - b^2 - a^2}{2ab} + 1.$ R. $\frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}.$
108. $\frac{a^2 - x^2 - y^2}{2xy} - 1.$ R. $\frac{(a+x+y)(a-x-y)}{2xy}.$

109. $\frac{1}{b^3c^2a} + \frac{1}{c^3a^2b} + \frac{1}{a^3b^2c}$. R. $\frac{a^2c + b^2a + c^2b}{a^3b^3c^3}$.
110. $\frac{a-b-c}{bc} + \frac{b+c+a}{ca} + \frac{c+a-b}{ab}$. R. $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$.
111. $\frac{a^2+ab+b^2}{ab} + \frac{b^2+bc+c^2}{bc} + \frac{c^2+ac+a^2}{ac} - 1$. R. $\frac{(b+c)(a+b)(c+a)}{abc}$.
112. $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2} + \frac{a^2-ab-b^2}{ab} + \frac{a^2-ab-b^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$. R. $\frac{a^2-b^2}{b^2}$.
113. $\frac{a+2b}{a+b} - \frac{(3a+2b)b}{(a+b)^2}$. R. $\frac{a^2}{(a+b)^2}$.
114. $\frac{7}{2n-m} - \frac{6}{m+2n} - \frac{12m}{4n^2-m^2}$. R. $\frac{1}{2n-m}$.
115. $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$. R. $\frac{10(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}$.
116. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{a^2-b^2}$. R. $\frac{a+b}{a-b}$.
117. $\frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{a-x}{a+x} + \frac{a+x}{a-x}$. R. $\frac{2(a^2+x^2)+ax}{a^2-x^2}$.
118. $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. R. $\frac{2y}{y-x}$.
119. $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a-b}{a^2+ab}$. R. $\frac{4}{a+b}$.
120. $\frac{1}{x-y} + \frac{x+2y}{x^2-xy} + \frac{x-y}{x^2}$. R. $\frac{3x^2+y^2}{x^2(x-y)}$.
121. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} - \frac{a-x}{a+x}$. R. $\frac{a^2+4ax+x^2}{a^2-x^2}$.
122. $\frac{x^2+y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy+y^2} - \frac{x^2}{x^2+xy}$. R. $\frac{y}{x}$.
123. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}} (a+b)^2$. R. $(a+b)^3$.
124. $\left[\left(\frac{a}{2} - 1 \right)^2 + a \right] \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right)$. R. $\frac{a^4}{16} - 1$.
125. $\left[\left(\frac{2a}{b} - \frac{b}{2a} \right)^2 + 2 \right] \left(\frac{ab}{16a^4 + b^4} \right)$. R. $\frac{1}{2ab}$.
126. $\left[\left(\frac{a^2x}{2} - \frac{3}{ax^2} \right)^2 - \frac{a^4x^2}{4} \right] \times \frac{x}{a^3x^3 - 3} \div \frac{3}{a^2x^2}$. R. -1 .

127. $\frac{1-a}{b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^3} + 1 - a - \frac{b}{3(1+a)}.$ R. $1 - a.$
128. $\frac{x+y}{4y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} (2xy - 2y^2).$ R. $\frac{x^2+y^2}{2y}.$
129. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a-4b}\right) \frac{4}{a^2+ab}.$ R. $-\frac{3a}{a^2+b^2}.$
130. $\left[\left(\frac{a}{m+1} - d + \frac{a}{m-1}\right)(m^2-1) - 2am\right] : (m+1).$ R. $-d(m-1).$
131. $-\frac{b^2-a^2}{a} \cdot \left(-\frac{b^2+a^2}{5a+5b}\right).$ R. $\frac{(b-a)(b^2+a^2)}{5a}.$
132. $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab} + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{a^2-b^3}{2a^2-a-3b}.$ R. $\frac{b}{a}.$
133. $\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right).$ R. $\frac{1}{a}.$
134. $\left(m+1 - \frac{1}{1-m}\right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right).$ R. $-m.$
135. $\left(a - \frac{1}{1-a}\right) : \frac{a^2-a+1}{a^3-2a+1}.$ R. $a-1.$
136. $\left(\frac{4c^2+21}{2-2c} - 6\right) : \frac{2cn+3n-4c-6}{2-2c^2}.$ R. $\frac{(2c+3)(1+c)}{n-2}.$
137. $\left(\frac{2ab+4b-3a-6}{2-2b^2}\right) : \left(\frac{4b^2+21}{2+2b} - 6\right).$ R. $\frac{a+2}{(1-b)(2b-3)}.$
138. $\frac{3x^2y^3-12x^2y^5}{3(1-4y^2)} - x^2y^3 + \frac{0,04x^2-1}{\frac{x}{5}+1}.$ R. $\frac{x}{5} - 1.$
139. $\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{6}\right) : (2a+b) - 0,125\right] : 0,25a^2.$ R. $\frac{1}{2a^2}.$
140. $\frac{\left(\frac{5x}{2a} - \frac{4x}{3a} + \frac{x}{a}\right) 6a}{9ax}.$ R. $\frac{13}{9a}.$
141. $\left(\frac{4a}{9b^2} - \frac{5b}{6a^2} + \frac{c}{10a^2b^2}\right) \left(\frac{90a^3b^3}{40a^4-75b^4+9abc}\right).$ R. $1.$
142. $\left(\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2} + 2ab^2 - \frac{3}{2ab}\right) \cdot \frac{10a^3b^3}{5a^2b(1+4a^2b^3)+c^2}.$ R. $1.$
143. $\frac{\frac{6-a^2}{6a} + \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{a}\right)}{12a^2b^3} + 2.$ R. $2.$
144. $\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : \frac{(a+b)^2}{ab}.$ R. $\frac{1}{ab}.$

145. $\left[\frac{p-q}{pq}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\right] : \left[\frac{p^2+q^2}{pq}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right]$. R. $\frac{-(p+q)}{p^2+q^2}$.
146. $\left(\frac{a+1}{2a-2} + \frac{16}{2a^2-2} - \frac{a+3}{2a+2}\right) \cdot \frac{4a^2-4}{3}$. R. $3\frac{1}{3}$.
147. $\left(\frac{3a}{1-3a} + \frac{2a}{3a+1}\right) : \frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$. R. $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$.
148. $\left(\frac{5a}{a+x} + \frac{5x}{a-x} + \frac{10ax}{a^2-x^2}\right) : \left(\frac{a}{a+x} + \frac{x}{a-x} + \frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$. R. 5.
149. $\left(\frac{b}{a^2+ab} - \frac{2}{a+b} + \frac{a}{b^2+ab}\right) : \left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right)$. R. $\frac{1}{a+b}$.
150. $\left(\frac{a^2}{a+n} - \frac{a^2}{a^2+n^2+2an}\right) : \left(\frac{a}{a+n} - \frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$. R. $\frac{a(n-a)}{n+a}$.
151. $\left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1}\right)$. R. 4.
152. $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2} + \frac{b}{3b-2a}\right) : \left(1 - \frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$. R. $\frac{b}{2(3b-2a)}$.
153. $\left(\frac{p}{p^2-4} + \frac{2}{2-p} + \frac{1}{p+2}\right) : \left(p-2 + \frac{10-p^2}{p+2}\right)$. R. $\frac{1}{2-p}$.
154. $\left(\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right) : \left(\frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a}\right)$. R. $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$.
155. $\left(\frac{8+a^3}{x^2-y^2} : \frac{4-2a+a^2}{x-y}\right) : \left(x + \frac{xy+y^2}{x+y}\right)$. R. $\frac{a+2}{(x+y)^2}$.
156. $\left(x - \frac{4xy}{x+y} + y\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x} - \frac{2xy}{x^2-y^2}\right)$. R. $x-y$.
157. $\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab}\right)$. R. $\frac{b}{b-a}$.
158. $\left(\frac{3a+2}{3a^2+1} - \frac{18a^3-a-9}{9a^4-1} + \frac{3a-2}{3a^2-1}\right) : \frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}$. R. $\frac{1}{a+5}$.
159. $\left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} - \frac{4x^2}{x^2-1}\right) : \left[-2\left(\frac{1}{x^2+x^2} - \frac{1-x}{x^2} - 1\right)\right]$. R. $\frac{2(x+1)}{1-x}$.
160. $\left(\frac{1+2n}{4+2n} - \frac{n}{3n-6} + \frac{\frac{2}{3}n^2}{4-n^2}\right) \frac{24-12n}{6+13n}$. R. $\frac{2}{2+n}$.
161. $\left[\frac{a+b}{2(a-b)} - \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{2b^2}{b^2-a^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. R. $\frac{2}{a}$.
162. $\left(\frac{5}{2a+3} + \frac{2}{3-2a} + \frac{2a+9}{4a^2-9}\right) : \frac{8}{4a^2+12a+9}$. R. $a+1.5$.

163. $\left(\frac{1}{2a-b} + \frac{3b}{b^2-4a^2} - \frac{2}{2a+b}\right) : \left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} + 1\right)$. R. $-\frac{1}{4a}$.
164. $\left(\frac{1}{p-2q} + \frac{6q}{4q^2-p^2} - \frac{2}{p+2q}\right) : \left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2} + 1\right)$. R. $-\frac{1}{2p}$.
165. $\left[\frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{ab+b^2} + \frac{b}{a^2+ab}\right)\right] : \frac{b}{a-b}$. R. $\frac{a}{a+b}$.
166. $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right)$. R. $a-b$.
167. $\left(\frac{a^2+b^2}{ab} - 2\right) : \left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}\right)$. R. $\frac{2}{b}$.
168. $\left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3} - \frac{1}{a-b} + \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right] \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. R. $\frac{1}{ab}$.
169. $2 \frac{a^2x-ax^2}{a^2-x^2} + \frac{a^3+a^2x}{a^2+2ax+x^2} + \frac{ax^2-x^3}{a^2-x^2}$. R. $a+x$.
170. $\frac{1}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{x^2+ax+a^2} + \frac{2ax}{x^4+a^2x^2+a^4}$. R. $\frac{2}{x^2-ax+a^2}$.
171. $1 - \frac{8}{a^2-4} \left[\left(1 - \frac{a^2+4}{4a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)\right]$. R. $\frac{a-2}{a+2}$.
172. $\left(\frac{1+a^2}{1-a^2} - \frac{1-a^2}{1+a^2}\right) : \left(\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}\right)$. R. $\frac{a}{1+a^2}$.
173. $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{2b}{b-a}\right) : \frac{b-a}{a^2+b^2} + \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2}\right) : \frac{2+a}{1-2a}$. R. $-\frac{2+b}{2b}$.
174. $\frac{4a^2}{a^4+a^3+a+1} : \left(\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{2}{a+1} \cdot \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a^2-2a+1}\right)$. R. $\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$.
175. $\frac{a-2n}{a^3+n^3} - \frac{a-n}{a^2n-an^2+n^3} - \frac{1}{an+n^2}$. R. $-\frac{2}{n(a+n)}$.
176. $\frac{1}{n-x} - \frac{3nx}{n^3-x^3} + \frac{x-n}{n^3+nx+x^2}$. R. 0.
177. $\frac{a}{b+x} - \frac{bx}{b^2+x^2} + \frac{x^2}{b^2-x^2} - \frac{2bx^3}{b^4-x^2}$. R. $\frac{a-x}{b+x}$.
178. $\left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-3a+a^2}{a^3-1} - \frac{1}{a-1}\right] : \frac{a^2+1}{1-a}$. R. $\frac{1}{a^2+a+1}$.

5. Valoarea numerică a unei expresii algebrice

179. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{1 - \frac{3x^2}{1-x^2}}{1 + \frac{x}{1+x}}, \quad E_2 = \left(\frac{2x^3+2x}{4x^2} - 1\right) \cdot \frac{2x-2}{x^2-x}.$$

- 1) Să se calculeze valoarea lui E_1 și E_2 pentru $x = \frac{1}{4}$.
- 2) Să se calculeze valoarea lui E_1 pentru $x = 1,41(6)$.
- 3) Să se calculeze media proporțională a lui E_1 și E_2 .

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{2}{3}; \quad E_2 = 9; \quad 2) E_1 = \frac{22}{5};$$

3) media proporțională a lui E_1 și E_2 este $\sqrt{6}$.

180. Se dau expresiile:

$$a = 4x^2 + (8x^3 - 1) \cdot \left(\frac{2x + 4x^2}{4x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{2x - 1} \right)$$

și

$$b = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} + \frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
- 2) Să se arate apoi că:

$$ab - a + b + 1 = 0,$$

pentru orice valoare a lui x pentru care a și b au sens.

$$\text{R. } -2x - 1; \quad \frac{x + 1}{x}.$$

181. Se dau expresiile:

$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}; \quad B = \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2} - 1}; \quad C = x - \frac{1-2x^2}{1-x} + 1.$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
- 2) Să se calculeze media lor aritmetică.
- 3) Să se calculeze valoarea numerică a mediei aritmetice găsite pentru

$$x = \frac{1,5 - \frac{1}{4}}{\sqrt{1,5625}} \cdot 1,1(6).$$

$$\text{R. 1) } A = \frac{1+x}{1-x}; \quad B = \frac{x+1}{x-1}; \quad C = \frac{x^2}{1-x};$$

$$2) \frac{x^2}{3(1-x)}; \quad 3) -\frac{49}{18}.$$

182. Se dă expresia:

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^3 + xy^2}{x + y}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă și apoi să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x = \left(1,75 : \frac{2}{3} - 1,75 \cdot 1 \frac{1}{8} \right) : \frac{7}{16} \quad \text{și} \quad y = \frac{8}{5} \sqrt{\frac{225}{4096}}. \quad \text{R. } \frac{x-y}{x}; \quad \frac{3}{4}.$$

183. Să se afle valoarea numerică a expresiei

$$\frac{2(7,125 + x) - \frac{1}{21} \sqrt{7056}}{\left(3x + 1\frac{7}{8}\right) : 3}$$

pentru $x = \frac{\left(\frac{5}{8} \cdot 3 + 3\frac{5}{8}\right) : \frac{4}{19}}{2^3 \cdot 3^2 - 5^2}$.

R. 5.

184. Se dă expresia:

$$F(x) = \left[\left(\frac{x}{x+1} - \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} \right) : \left(\frac{x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x+1} \right) \right] \cdot \frac{x+1}{x}.$$

a. Să se aducă la forma cea mai simplă.

b. Să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x = \left[\frac{\left(0,15 \cdot 10 + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}\right) \cdot 3,6}{14 - 15\frac{1}{8} : 2} + \frac{59}{103} \right] \cdot \left(2,4 + 2\frac{2}{11} \cdot \frac{\sqrt{10,89}}{3} \right).$$

R. a) $x - 1$; b) 23.

185. Se dă expresia:

$$F(x) = \left(\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x^2 - 4} \right) \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{2x+5}{1-x^2} \right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x} \right).$$

a. Să se restrângă expresia.

b. Să se afle valoarea numerică pentru:

$$x = \frac{\left(0,305 : 10 - 0,00205 \cdot 10 + 2\frac{1}{25} : 51\right) \cdot 13\frac{1}{3}}{(11,9 - \sqrt{108,16}) : 0,75} \div 1\frac{2}{3}.$$

R. a) $2x$; b) 4.

186. Să se aducă expresia de mai jos la forma cea mai simplă și să se afle valoarea ei numerică pentru $u = -0,5$.

$$\left(\frac{u+2}{u-2} \right)^3 : \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{3u^2 - 12u + 12} \cdot \frac{u}{3}.$$

R. $\frac{u+2}{u-2}$; $-0,6$.

187. Se dau expresiile algebrice:

$$E_1 = 10x^3 + 5x^2 - 4x^2(2x+1) + 4x^2 + 4x + 1.$$

$$E_2 = x^2 + 2x + 1 - 2x^2(x+1)^2.$$

1) Să se ordoneze după puterile descrescătoare ale lui x .

2) Să se scrie fiecare expresie sub formă de produs.

3) Să se simplifice fracția algebrică

$$\frac{E_1}{E_2}$$

și să se calculeze valoarea numerică a fracției obținute după simplificare pentru:

$$x = -\frac{1}{2} \text{ și } x = -3\frac{1}{2}.$$

$$\text{R. 2) } E_1 = (x+1)^2 (2x+1);$$

$$E_2 = (1-2x^2)(x+1)^2.$$

$$3) \frac{E_1}{E_2} = \frac{2x+1}{1-2x^2}; \quad 0; \quad \frac{12}{47}.$$

6. Exerciții de sinteză

$$188. \left[(\sqrt{(867)^3})^2 : \sqrt{27 \cdot 17^{12}} \right] \cdot \frac{(\sqrt{289})^3}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2604} + 4\frac{1}{3} \cdot (-2)^0 \cdot (-5)^0.$$

R. 10.

$$189. \left[(\sqrt{0,625})^2 : \frac{5^8}{2^{20}} \right]^3 \cdot \frac{8}{125} \cdot \frac{1}{5^{36}} : \left(\frac{2}{5} \right)^{54} + (13^0)^0 - 3.$$

R. -1.

$$190. \left\{ \frac{\left[\left(\frac{16}{125} \right)^5 \cdot (0,4)^3 \right]^3}{\left(\frac{2}{5} \right)^{69}} - 2^{15} + (\sqrt{0,125})^4 : \frac{1}{16} \right\} : \frac{1}{2^{10}} - (-1).$$

R. 2.

$$191. \sqrt{(0,75)^5} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 0,125 \left] ^5 \cdot \frac{125}{8} : \left(\frac{5}{2} \right)^8 \cdot \frac{2^5}{5^7} + \frac{4}{5^7} - \frac{6}{5^6}.$$

R. $-\frac{1}{5^5}.$

$$192. \left\{ \left[\frac{2(x-y)^2 - 5y(y-x)}{2x+3y} \right]^2 (x+y) \right\} : (x-y) - 2xy + 2y^2.$$

R. $(x-y)^2.$

$$193. \left\{ \left[\frac{x(y-1) + z(1-y) - y+1}{x-z-1} \right]^2 (y+1) \right\} : (y-1) + 2y + 2.$$

R. $(y+1)^2.$

$$194. \left\{ \left(\frac{y(2-x^2) + z(x^2-2) - 2 + x^2}{y-z-1} (x^2+2) \right)^2 - 16 - x^4 \right\} : (x^4 - 3x^2)$$

R. $x^4 + 3x^2.$

$$195. \left[\frac{9(a^3 + a^2 - a) + a^3 + a^2 - a}{a^2 + a - 1} - a^2 - 2a - 16 \right] : (a-4).$$

R. $4-a.$

$$196. \left\{ \left[\frac{x(1-y+y^2) - 1 + y - y^2}{1-y+y^2} \right]^2 (x+1) \right\} : (x-1) + 2(x+1).$$

R. $(x+1)^2.$

$$197. \left\{ \left[\frac{(x^2 + 4x)^2 - 4}{x^2 - 4x + 2} + 6 \right] - xy - 2y + x^2 + 2x \right\} : [2(x + 1) - y].$$

$$R. x + 2$$

$$198. \left\{ \left[\frac{9a^2 - (2a + 3b)^2}{5a + 3b} (a + 3b) \right]^2 + 18a^2b^2 + a^4x^2 + 81b^4x^2 \right\} : (1 + x^2).$$

$$R. a^4 + 81b^4.$$

$$199. \left\{ \left[\frac{(x + 3y)^2 - 4(y - x)^2}{5y - x} - 3x^3 - x^2y \right] : (1 - x) \right\} : (3x + y).$$

$$R. 1 + x.$$

$$200. \left\{ \left[\left[\frac{a(x - 1)^2 - x^2 + x + ax - a}{a - 1} \right]^2 + 2x^3 \right] \cdot [x^2(x^2 - 1)] + x^9 - x^5 \right\} : (x^8 - x^4).$$

$$R. x + 1.$$

$$201. \left\{ \left[\frac{(x + 3y)^2 - 12(xy + 3x^2)^2}{5x + 3y} \right]^2 - 9y \right\} : (7x + 6y).$$

$$R. -1.$$

$$202. \left\{ \left[\frac{(4x^2 + 8x + 4)(2x - 2)}{8(x + 1)} \right]^2 + 2x^2 \right\} : (x^4 + 1).$$

$$R. 1.$$

$$203. \left\{ \left[\frac{(4x^2 - 12xy + 9y^2)(2x + 3y)}{2x - 3y} \right]^2 + 72x^2y^2 - 82y^4 \right\} : (4x^2 + y^2).$$

$$R. 4x^2 - y^2.$$

$$204. \left\{ \left[\frac{(27x^5y^2 - 36x^4y + 12x^3)(3x^2y + 2x)}{9x^5y - 6x^4} \right]^2 + 72x^2y^2 - 17 \right\} : (9x^2y^2 + 1).$$

$$R. 9x^2y^2 - 1.$$

$$205. \left\{ \left[\frac{(75x^4y^2 - 30x^2y + 3)(5x^2y + 1)}{25x^4y^2 - 1} \right]^2 + 90x^2y \right\} : 9.$$

$$R. 25x^4y^2 + 1.$$

$$206. \left\{ \left[\frac{(98x^5y^2 - 56x^4y + 8x^3)(7x^2y + 2x)}{14x^5y - 4x^4} \right]^2 + 392x^2y^2 - 20 \right\} : (49x^2y^2 + 2).$$

$$R. 49x^2y^2 - 2.$$

$$207. \left\{ \left[\frac{(27x^6y^2 + 36x^5y + 12x^4) : 3x^2}{3x^2y + 2x} \right] (2x^2y - 2x) \right\}^2 + 72x^6y^2 - 17x^4$$

$$R. 81x^2y^4 - x^4.$$

$$208. \left\{ \left[\frac{[(16x^5y^4 - 8x^4y^3 + x^3y^2) : x^2y^2] (4x^2y + 1)}{4x^2y - 1} \right]^2 - 257x^8y^4 + 32x^4y^2 \right\} : (1 - x^4y^2)$$

$$R. 1 + x^4y^2.$$

$$209. \left\{ \left[\frac{3x^2 - 6x + 3}{3x - 3} (x + 1) \right]^2 + 2x^2 - 2 \right\} : (x^2 + 1) - 2x + 2.$$

$$R. (x - 1)^2$$

$$210. \frac{[(12x^2y - 8)(3x^2y + 2) : 4 + 4 - x^2]^2 + 18x^6y^2 - 2x^4}{9x^4y^2 - x^2 - 9x^2y^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^4}.$$

$$R. 9x^2y^2 + 1.$$

$$211. \left\{ \left[\frac{2(x-y)^2 + 8y(y-x)}{2x-10y} \right]^2 (x-y) \right\} + 2x - 2y + 1$$

$$R. (x-y+1)^2.$$

$$212. E = \left[\frac{x^2(y-1) + 2x(1-y) + y-1}{x-1} \right]^2 : [(y-1)^2 (x-1)] : 8.$$

Pentru ce valori întregi date lui x , E este un număr întreg?

$$R. x = 8k + 1; k \in \mathbb{Z}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$213. \frac{6x^2 + 5xy + y^2}{2x + y}.$$

$$R. 3x + y.$$

$$214. \frac{3 - x^2 - 2x}{x + 3}.$$

$$R. (1 - x).$$

$$215. \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3x - y}.$$

$$R. x + y.$$

$$216. \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 - 9x - 9} + \frac{x^2 + x}{x^2 - 3}.$$

$$R. \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3}.$$

$$217. \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2xy + 2x - 2y}{x^2 - y^2 - 1 + 2y}$$

$$R. \frac{x - y + 1}{x + y - 1}.$$

$$218. \frac{a^6 + 2a^4 - 2a^5 - 2a^3 + a^2}{a^5 - a^4 + a^3 - a^2}$$

$$R. (a - 1).$$

$$219. \frac{a^4 - 8a^3 + 13a^2 - 6a}{(a^2 - 6a)(a - 1)} + a^2 - 3a + 2.$$

$$R. (a - 1)^2.$$

$$220. \left[\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \cdot (x - 1) \right] : (x^3 - 1).$$

$$R. 1.$$

$$221. a^2b^2 + \frac{a^8 - 3a^4b^4 + b^8}{a^4 + a^2b^2 - b^4} - a^4.$$

$$R. -b^4.$$

$$222. \frac{x^2 + 2ax + a^2 - (b+c)^2}{(x+b)^2 - (a+c)^2} - 1.$$

$$R. \frac{2(a-b)}{x-a+b-c}.$$

$$223. \frac{[(1+x-y-xy-yz+z) : (1+x+z)(1+y)]^2 - 3y^2(y^2-1)}{(1-y)(1+y^2+y)}$$

$$R. 1 + y^2.$$

$$224. \left[\frac{(x - xy + xy^3 - y^2 + y - 1)(y + 1)}{x - 1} + 3y^2 + 3y - 1 \right] : (3 + 3y + y^2).$$

R. y .

$$225. \left\{ \left[\frac{2(x - y)^2 - 5y^2 + 3xy}{2x - 3y} \right]^3 - 3xy(x + y) \right\} : (x^2 + y^2 - xy).$$

R. $x + y$.

$$226. \left[\left(\frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^6 + 1} - x^3 \right) : (x^3 + 1) - 3x^2 + 3x \right] : (1 - 2x + x^2).$$

R. $x - 1$.

$$227. \frac{2x^5 + 4ax^4 + 2x^3(a^2 + b) + 4abx^2 + 2a^2bx}{x^5 + ax^5 - b^2x^2 - b^2ax} : \frac{2}{x^2 - b}.$$

R. $a + x$.

$$228. \left[1 + \frac{(a^4 + a^2b^2 + b^4)(a - b)}{a^2 + b^2 - ab} + b^3 \right] (a^3 - 1) - a^9.$$

R. -1 .

$$229. \frac{ax^2 + bx^3 - bx - ax + cx^2 - cx}{a + b + c} + 3x + 1.$$

R. $(x + 1)^2$.

$$230. \frac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2} : (a - 2b).$$

R. $\frac{1}{a + b - c}$.

$$231. \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{x^5 + x^4 - 9x - 9}.$$

R. $\frac{x + 1}{x^2 - 3}$.

$$232. \frac{a^3c - 2a^2c^2 + ac^2 - ab^2c}{(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2}.$$

R. $\frac{ac}{(a + c)^2 - b^2}$.

233. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia are valoare $3/5$.

$$\left\{ \left[\left(\frac{x}{x+1} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{x^2-1} \right) \left(\frac{x-1}{x+1} \right) - \frac{2x-2}{x+1} + 1 \right] - 1 \right\} : \frac{x+3}{x+1}.$$

R. $\frac{1-x}{1+x}$; $\frac{1}{4}$.

234. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia este egală cu 4.

$$\frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 - x + 2} + x - 1.$$

R. $(x + 1)^2$; 1 și -3

$$235. \frac{x^3 + x^5 + x}{x^5 + x^3 + x} (x^2 + 1).$$

R. $x^2 + 1$.

$$236. \frac{x^4 - 3x^2y^2 + y^4}{x^4 - x^2y^2 - x^3y + x^2 - y^2 - xy}.$$

$$R. \frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 + 1}.$$

$$237. \frac{x^3 - 8 - 6x^2 + 12x}{x^2 - 4x + 4} (x + 2).$$

$$R. x^2 - 4.$$

$$238. \frac{a^3 + 1 + b^2 - 2ab + 2a - 2b}{a^2 - 1 - b^2 + 2b} : \frac{(a - b + 1)^2}{-a + b - 1}.$$

$$R. \frac{-1}{a + b - 1}.$$

$$239. \left\{ \left[\left(\frac{6a^4 - 5a^3x + a^2(6a - 5x)}{6(a^3x + a^2x) - 6a^2 - 6a} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{ax - 1}{6a - 5x} \right) - 3x \right]^3 + 9x - 27x^2 \right\} : (1 + 3x + 9x^2)$$

$$R. 1 - 3x.$$

$$240. \frac{(2a^2x^2 - 6a^2 + 4ax^2 - 12a + 2x^2 - 6)(x + 1)}{2x^7 + 2x^6 - 18x^3 - 18x^2}$$

$$R. \frac{(a + 1)^2}{x^2(x^3 + 3)}.$$

$$241. \frac{a^2x - 3a^2 + 2ax - 6a + x - 3}{(a + 1)(x^2 + 9 - 6x)}.$$

$$R. \frac{a + 1}{x - 3}.$$

$$242. \frac{8ax^2 + 4x^2 + 8ax + 4x + 2a + 1}{(2a + 1)(4x^2 + 1 + 4x)}.$$

$$R. 1.$$

$$243. \left(\frac{9x^4y^2 - 6x^2y - 9x^3y + 3x + 1}{3x^2y - 1} + 1 \right) \frac{1}{3x^2y^2 - 3x}.$$

$$R. \frac{1}{xy + 1}.$$

$$244. \left\{ \left[\left(\frac{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}{4x^5 + 1 + 4x^4 + x} - 1 \right) \frac{4x^4 + 1}{4 - 6x^2} \right]^2 - 1 \right\} : \frac{x^2 + 2}{2}.$$

$$R. \frac{x^3}{2} - 1.$$

$$245. \frac{(a^4 + 2a^2 - 2a^3 - 2a + 1)(a^3 - 8a^2 + 13a - 6)}{(a^3 - a^2 + a - 1)(a - 6)}.$$

$$R. (a - 1)^3.$$

$$246. \frac{2x^4 + 3x^2 + 8ax^3 + 12ax + 12a^2 + 8a^2x^2}{(x + 2a)^3(2x^2 + 3)}.$$

$$R. \frac{1}{x + 2a}.$$

$$247. \frac{(a^3x - a^3 + 3ax - 3a + 3a^2x - 3a^2 + x - 1)(x - 1)}{(ax^2 + x^2 - 2ax - 2x + a + 1)(a - 1)^2}$$

$$\frac{(a + 1)^3(x - 1)^2}{(x - 1)^2(a + 1)(a - 1)^2}.$$

$$R. \frac{(a + 1)^2}{(a - 1)^2}$$

$$248. \frac{2a^3x - 4a^3 - 8a^2x + 16a^2 - 16a + 8ax}{24a^3 - 16a^2 + 2a^5 - 12a^4}.$$

$$R. \frac{x - 2}{a(a - 2)}.$$

$$249. \left\{ \left[\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} + 2 \left(\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} \right)^3 + \left(\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} \right)^2 \right] : \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^4} \right\}.$$

$$R. 4a^2.$$

Să se verifice identitățile:

$$250. \frac{1 - ax + (a + x)x}{2ax - a^2x^2 - 1} : \left[1 + \frac{a^2 + 2ax + x^2}{(1 - ax)^2} \right] = - \frac{1}{1 + a^3}.$$

Avem succesiv:

$$\frac{1 - ax + ax + x^3}{-(a^2x^2 - 2ax + 1)} \cdot \frac{1 - 2ax + a^2x^2 + a^2 + 2ax + x^2}{(1 - ax)^2} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

251. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2.$

252. $(1+y+y^2+y^3)^2=1+2y+3y^2+4y^3+3y^4+2y^5+y^6.$

253. Să se arate că expresia

$$(2x+3y-z)^3+(3x+7y+z)^3$$

este divizibilă prin binomul $(x+2y).$

Indicație. Se va descompune expresia dată în factori.

7. Sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute

Să se rezolve următoarele sisteme de două ecuații cu două necunoscute:

1.
$$\begin{cases} 2(x+1)=3(y-1)+14 \\ 4x-3(2x+y-1)=2(-x+y)+8. \end{cases} \quad \text{R. } (3; -1).$$

2.
$$\begin{cases} 2(x+2y)-3(x+3y)=5 \\ x=1-2y. \end{cases} \quad \text{R. } (5; -2).$$

3.
$$\begin{cases} 4(0,1x+1)+5=1,1y \\ \frac{11+0,3y-x}{5}-5=4\left(\frac{1}{5}-1\right). \end{cases} \quad \text{R. } (5; 10).$$

4.
$$\begin{cases} \frac{x+1}{y+2}=5 \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5. \end{cases} \quad \text{R. } (4; -1).$$

5.
$$\begin{cases} \frac{2x+3}{3y-2}=1 \\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1. \end{cases} \quad \text{R. } (-1; 1).$$

6.
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5} \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x. \end{cases} \quad \text{R. } (11; 6).$$

7.
$$\begin{cases} x+\frac{5}{y}=15 \\ 2x-\frac{25}{y}=23. \end{cases} \quad \text{R. } (14; 5).$$

Indicație. Se vor lua ca necunoscute x și $\frac{5}{y}.$

Să se rezolve grafic sistemele:

$$8. \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{3y-1}{3} = \frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{R. } (4; 3).$$

$$9. \begin{cases} \frac{3x-1}{5} + 3y - 4 = 15 \\ \frac{3y-5}{6} + 2x - 8 = \frac{23}{3} \end{cases} \quad \text{R. } (7; 5).$$

$$10. \begin{cases} 2x + y = -\frac{2a}{3} \\ x - \frac{y}{2} = -\frac{2a}{3} \end{cases} \quad \text{R. } \left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{3}\right).$$

$$11. \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ \frac{(x-3)^2}{2} = 10 + \frac{(1-x)^2}{2} - y \end{cases} \quad \text{R. } (-2; 2).$$

Să se rezolve:

$$12. \begin{cases} \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5} \\ \frac{x+4}{y+4} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad \text{R. } (4; 16);$$

$$13. \begin{cases} 0,25x + 0,04y = 2 \\ 4x + 25y = 641 \end{cases} \quad \text{R. } (4; 25);$$

$$14. \begin{cases} x + \frac{5y-1}{3} = -\frac{2}{3} \\ 3y - \frac{2x+3}{2} = -\frac{21}{2} \end{cases} \quad \text{R. } (3; -2);$$

$$15. \begin{cases} \frac{5}{x-1} : \frac{4}{y-1} = 25 : 24 \\ \frac{2}{x+1} : \frac{3}{y+1} = 7 : 12 \end{cases} \quad \text{R. } (7; 6).$$

$$16. \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15 \\ y - \frac{y-x}{5} = 6 \end{cases} \quad \text{R. } (10; 5);$$

$$17. \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8 \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11 \end{cases} \quad \text{R. } (18; 6).$$

$$18. \begin{cases} \frac{3x-5y}{2} + 3 = \frac{2x+y}{5} \\ 8 - \frac{x-2y}{5} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \end{cases} \quad \text{R. (12; 6).}$$

$$19. \begin{cases} \frac{5}{x+4} = \frac{2}{y-1} \\ \frac{3}{x+2} = \frac{4}{y+1} \end{cases} \quad \text{R. (1; 3).}$$

$$20. \begin{cases} x - y = \frac{1}{12} \\ 18x - 5y = 4\frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right).$$

$$21. \begin{cases} \frac{ay}{bx} = \frac{d}{c} \\ bx + ay = d + c \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{c}{b}; \frac{d}{a} \right).$$

$$22. \begin{cases} \frac{1}{2}y - 3x = 2 \\ y = 14x \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}; 7 \right).$$

$$23. \begin{cases} \frac{9x-y}{8} = 1 \\ 7(x-1) = \frac{1}{9}(1-y) \end{cases} \quad \text{R. (1; 1).}$$

$$24. \begin{cases} x(y-1) - y(3+x) = 4 \\ \frac{x+2y-3}{y-x+2} = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{R. (5, -3).}$$

Să se discute fără rezolvare sistemele următoare și ca verificare să se rezolve

$$25. \begin{cases} 5 + 4(0,1x + 1) = 1,1y \\ 5 + 4\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{11 + 0,3y - x}{x} \end{cases} \quad \text{R. determinat; (5; 10).}$$

$$26. \begin{cases} \frac{x-y+1}{y-x+1} = \frac{-3}{5} \\ \frac{2x+3y-5}{6+2y-x} = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{R. determinat; (-2; 2).}$$

$$27. \begin{cases} 2x - \frac{11y}{3} + \frac{5}{3} = 0 \\ 48x - 88y = -15 \end{cases} \quad \text{R. incompatibil}$$

$$28. \begin{cases} 8 - \frac{z-2y}{5} = \frac{z}{2} + \frac{y}{3} \\ 2y - 21z + 240 = 0. \end{cases} \quad \text{R. nedeterminat.}$$

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații, în care a , b și c reprezintă numere date.

$$29. \begin{cases} (a+c)x - by = bc \\ x + y = a + b. \end{cases} \quad \text{R. } (b; a).$$

$$30. \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{ab^2c}{a^2+b^2}; \frac{a^2bc}{a^2+b^2} \right)$$

$$31. \begin{cases} \frac{x+y-a}{x+y+a} = \frac{2}{3} \\ 2x - 3y = -5a. \end{cases} \quad \text{R. } (2a; 3a).$$

$$32. \begin{cases} a(x+y) + b(x-y) = 1 \\ a(x-y) + b(x+y) = 1. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{a+b}; 0 \right).$$

$$33. \begin{cases} \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0 \\ \frac{x+y-b}{a} + \frac{x-y-a}{b} = 0. \end{cases} \quad \text{R. } (a; b).$$

$$34. \begin{cases} (a+b)x - (a-b)y = 4ab \\ (a-b)x + (a+b)y = 2a^2 - 2b^2. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b); (a-b).$$

$$35. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2}. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b)^2; (a-b)^2.$$

$$36. \begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2ab \\ (a+c)x + (a-c)y = 2ac. \end{cases} \quad \text{R. } (a; -a).$$

$$37. \begin{cases} (a+2b)x - (a-2b)y = 6ac \\ (a+3c)y - (a-3c)x = 4ab. \end{cases} \quad \text{R. } (a-2b+3c); (a+2b-3c).$$

$$38. \begin{cases} \frac{x+a}{y-b} = \frac{2a+b}{a-2b} \\ \frac{x+5-y}{y-x+3} = \frac{2b+5}{3-2b}. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b); (a-b).$$

$$39. \begin{cases} \frac{a-x}{b} - \frac{b-y}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab} \\ \frac{a-x}{b} + \frac{b-y}{a} = \frac{(a-b)^2}{ab}. \end{cases} \quad \text{R. } (b; a).$$

$$40. \begin{cases} \frac{a^2 - b^2}{x} + \frac{b^2}{y} = a \\ \frac{a+b}{x} + \frac{b}{y} = 2. \end{cases} \quad \text{R. } (a+b; b).$$

$$41. \begin{cases} ax + by = 2(a^2 - b^2) \\ \frac{y}{a-b} - \frac{x}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{ab}. \end{cases} \quad \text{R. } \frac{a^2 - b^2}{a}; \frac{a^2 - b^2}{b}.$$

$$42. \begin{cases} \frac{1}{x-a} + \frac{1}{y+b} = \frac{a+b}{ab} \\ \frac{a}{x-a} - \frac{b}{y+b} = \frac{a^2 - b^2}{ab} \end{cases} \quad \text{R. } (a+b); (a-b).$$

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\frac{1}{x-a}$ și $\frac{1}{y+b}$.

$$43. \begin{cases} x - a(1-y) = 0 \\ a(x-a) + y = \frac{1}{a}. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{a^3 - a + 1}{a^2 - 1}; \frac{1}{a(1-a^2)} \right).$$

$$44. \begin{cases} a\left(x - \frac{1}{b}\right) = b\left(y + \frac{1}{a}\right) \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{a+b}{ab}; \frac{a-b}{ab} \right).$$

$$45. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = a+b \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2a. \end{cases} \quad \text{R. } a(a+b); b(a-b).$$

$$46. \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}. \end{cases} \quad \text{R. } \frac{a}{a-b}; \frac{b}{a+b}.$$

Indicație. Luăm ca necunoscute $\frac{x}{a+b}$ și $\frac{y}{a-b}$.

$$47. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a} = a \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a-b} = -b. \end{cases} \quad \text{R. } b(a-b); a(a-b).$$

$$48. \begin{cases} \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 1. \end{cases} \quad \text{R. } \frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}.$$

$$49. \begin{cases} \frac{x}{2a-b} - \frac{y}{2a+b} = \frac{8ab}{4a^2-b^2} \\ \frac{x}{2a-b} + \frac{y}{2a+b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{cases}$$

R. $(2a+b); 2a-b$.

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\frac{x}{2a-b}$ și $\frac{y}{2a+b}$.

Să se rezolve prin metoda reducerii

$$50. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 61 \\ 3x + 2y + z = 54 \\ 5x - 4y + 3z = 44 \end{cases}$$

R. $(12, 7; 4)$.

Să se rezolve prin metoda substituției

$$51. \begin{cases} 5x - 3y + 2z = -7 \\ 7x + 5y - 4z = -5 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

R. $(-1; 2; 2)$.

Să se rezolve sistemele următoare

$$52. \begin{cases} 2x - 3z - 4y = -1 \\ 3y + z - x = 6 \\ 5z - 3x + 2y = -13 \end{cases}$$

R. $(-2; 3; -5)$.

$$53. \begin{cases} x + y - z = -6 \\ z - 3x + 2y = 1 \\ 3y + 2z - x = -5 \end{cases}$$

R. $(-2; -3; 1)$.

$$54. \begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ z - y - 2x = -\frac{1}{2} \\ 2x + 3y - z = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

R. $\left(2; -3; \frac{1}{2}\right)$.

$$55. \begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ y + z - x = 3 \end{cases}$$

R. $(4; 2; 5)$.

$$56. \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 17 \\ 3x + 2y - z = 2 \\ 5x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

R. $(-1; 3; 1)$.

$$57. \begin{cases} x + y - 6z = 9 \\ x - y + 4z = 5 \\ 3y - 2x - z = 4 \end{cases}$$

R. $(8; 7; 1)$.

$$58. \begin{cases} 2x + 3y - z = 13 \\ 3x + 2y - 2z = 13 \\ 5x - 4y - 2z = 11 \end{cases}$$

R. $(5; 2; 3)$.

$$59. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 28 \\ 3x + 2y - 5z = 16 \\ 2x + y - 3z = 10. \end{cases} \quad \text{R. } (10; 8; 6).$$

$$60. \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31. \end{cases} \quad \text{R. } (3; 5; 8).$$

$$61. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 10 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 11. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{8} \right).$$

$$62. \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right).$$

$$63. \begin{cases} x + y + z = 99. \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{1} \end{cases} \quad \text{R. } (55; 33; 11).$$

$$64. \begin{cases} \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{2}{x+z} = 1 \\ \frac{3}{x+y} = 1. \end{cases} \quad \text{R. } (0; 1; 2).$$

$$65. \begin{cases} \frac{3x+y}{z+1} = 2 \\ \frac{3y+x}{x+1} = 2 \\ \frac{3z+x}{y+1} = 2. \end{cases} \quad \text{R. } (1; 1; 1).$$

$$66. \begin{cases} \frac{xy}{4y-3x} = 20 \\ \frac{xz}{2x-3z} = 18 \\ \frac{yz}{4y-5z} = 12 \end{cases} \quad \text{R. } (5; 4; 3).$$

$$67. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{R. (20; 30; 60).}$$

Indicație. Se folosește substituția $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$; $\frac{1}{z} = t$.

$$68. \begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{18} \\ 3x + 5y + z = 34. \end{cases} \quad \text{R. (4; 2; 12).}$$

Indicație. Se amplifică primul raport cu 3, al doilea cu 5 și se aplică apoi proprietatea șirului de rapoarte egale.

$$69. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{32}{15} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{17}{15} \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{3}{4}; 3; 1 \frac{1}{4} \right).$$

$$70. \begin{cases} 2x + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = 4 \\ \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{17}{12} \\ x + \frac{4}{y} = \frac{10}{3} \end{cases} \quad \text{R. (2; 3; 4).}$$

$$71. \begin{cases} (x+2)(2y+1) = (2x+7)y \\ (x-2)(3z+1) = (x+3)(3z-1) \\ (y+1)(z+2) = (y+3)(z+1) \end{cases} \quad \text{R. (7; 3; 1).}$$

Să se determine x , y și z din sistemele:

$$72. \begin{cases} x + y - z = a \\ x + z - y = b \\ y + z - x = c \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{1}{2}(a+b); \frac{1}{2}(c+a); \frac{1}{2}(b+c) \right).$$

$$73. \begin{cases} ax + by - bz = c \\ ay + bx - bz = c \\ az + by - bx = c \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{c}{a}; \frac{c}{a}, \frac{c}{a} \right).$$

$$74. \begin{cases} x - 3y + z = b \\ x - y + 3z = c \\ 3x - y + z = a \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{4a-b-c}{10}; \frac{-4b+c+a}{10}; \frac{4c-a-b}{10} \right).$$

$$75. \begin{cases} ax + by - cz = 2ab \\ by + cz - ax = 2bc \\ cz + ax - by = 2ac \end{cases} \quad \text{R. } (b + c; c + a; a + b).$$

$$76. \begin{cases} ax + by - cz = b^2 \\ bx - cy + az = a^2 \\ cx + ay - bz = c^2. \end{cases} \quad \text{R. } (c; b; a).$$

$$77. \begin{cases} a^2x + b^2y + c^2z = 3abc \\ abx - bcy = b^2c - ac^2 \\ bcy - acz = ac^2 - a^2b. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{bc}{a}; \frac{ca}{b}; \frac{ab}{c} \right).$$

$$78. \begin{cases} ax + by = a^2 + b(a + c) \\ ay - cz = 0 \\ z - x = -b \end{cases} \quad \text{R. } (a + b; c; a).$$

$$79. \begin{cases} \frac{x - 2(z - 1)}{(a + b)^2} = \frac{1}{ab} \\ x - y + z = 5 \\ \frac{a}{b} - \frac{1}{2}(x + y) + \frac{b}{a} = 0. \end{cases} \quad \text{R. } \left(\frac{(a + b)^2}{ab}; \frac{(a - b)^2}{ab}; 1 \right).$$

8. Sisteme de inecuații de gradul I

Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații de gradul I:

$$80. \begin{cases} \frac{x + 0,5}{9} + \frac{1}{2} < 3x + 1 \\ 12x - 1 > 10x + 3. \end{cases} \quad \text{R. } x > 2 \text{ sau } x \in (2, +\infty).$$

$$81. \begin{cases} \frac{1 + x}{\frac{1}{2}} < \frac{x}{3} + 1 \\ \frac{3x + 2}{2} \leq \frac{2x + 1}{4} + \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{R. } x < -\frac{3}{5} \text{ sau } x \in \left(-\infty, -\frac{3}{5} \right).$$

$$82. \begin{cases} \frac{2x - 1}{5} \geq \frac{x + 1}{2} - \frac{23}{5} \\ \frac{3x + 2}{7} < \frac{x}{3,5} + 6. \end{cases} \quad \text{R. } x \leq 39 \text{ sau } x \in (-\infty; 39].$$

$$83. \begin{cases} \frac{3 - x}{2} < \frac{x}{5} \\ 4x < 3x + 1. \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

$$84. \begin{cases} 5a - 3 > 1 + a \\ \frac{1}{2} - 3a \leq \frac{2}{3}a - 5. \end{cases} \quad \text{R. } a \geq \frac{3}{2} \text{ sau } a \in \left[\frac{3}{2}, +\infty \right).$$

$$85. \begin{cases} 2(x-3) - 1 < 5 \\ \frac{3x}{8} - 7 > \frac{x}{12} \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

Să se rezolve următoarele inecuații simultane cu metoda grafică:

$$86. \begin{cases} 2x > 4x + 6 \\ 4x + 3 > 5x + 1 \end{cases} \quad \text{R. } x < -3 \text{ sau } x \in (-\infty, -3).$$

$$87. \begin{cases} 5x - 3 > 1 + x \\ 0,5 - 3x \leq \frac{2}{3}x - 5 \end{cases} \quad \text{R. } x \geq 1,5 \text{ sau } x \in [1,5, +\infty).$$

$$88. \begin{cases} 4x + 7 > 2x + 13 \\ 3x - 18 \leq 2x + 1 \end{cases} \quad \text{R. } 3 < x \leq 19 \text{ sau } x \in (3, 19].$$

$$89. \begin{cases} 6x - 7 > 5x - 1 \\ 3x + 6 > 8x - 4 \end{cases} \quad \text{R. Nu are soluții.}$$

Să se afle valorile întregi ale lui x care satisfac simultan inecuațiile

$$90. \begin{cases} 3x + 7 > 7x - 9 \\ x - 3 > -3x + 1 \end{cases} \quad \text{R. } x \in (1, 4) \text{ deci soluțiile sînt 2 și 3.}$$

Să se afle pentru ce valori ale lui a produsele următoare sînt pozitive.
Să se folosească metoda grafică.

$$91. (2a - 3)(3a - 2) \quad \text{R. } a < \frac{2}{3} \text{ și } a > \frac{3}{2} \text{ sau } a \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

9. Exerciții recapitulative

1. Fie mulțimea $M = \{0; 1; 2; 3\}$

a) Să se determine mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid x = 143a - 17, a \in M\}; B = \{x \in N \mid x = 139b - 13, b \in M\};$$

$$C = \{x \in N \mid x = 126 - 12c, c \in M \text{ și } c < 1\}.$$

b) Să se arate că $A \cap B = C$.

$$\begin{aligned} \text{R. a) } A &= \{126; 269; 412\}; \\ B &= \{126; 265; 404\}; \\ C &= \{126\}. \\ \text{b) } A \cap B &= \{126\} \Rightarrow A \cap B = C. \end{aligned}$$

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\frac{1 + 3 \left[\frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2} \right]^2 - \left[\frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2} \right]^3 - 3 \frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2}}{3 \frac{x + y}{x - y} - 3 \left(\frac{x + y}{x - y} \right)^3 + \left(\frac{x + y}{x - y} \right)^3 - 1}$$

$$\text{R. } \left(\frac{x - y}{x + y} \right)^3$$

3. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia devine egală cu 3.

$$\frac{x^5 + x^3 + x}{x^3 - x^2 + x}$$

R. $(x^2 + x + 1); (+1; -2)$.

4. Să se arate în care sistem de numerație există relația:

$$\left(\frac{4}{14} + \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{140}{104} = 1$$

Indicație.

$$\left(\frac{4}{x+4} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 4} = 1.$$

R. 5.

5. Se dă polinomul $E_1 = 9x^3 + 18x^2 - 3x - 7$.

1) Să se afle restul împărțirii prin $x + 2$ fără a efectua împărțirea.

2) Cu ce polinom a fost împărțit E_1 știind că s-a obținut cîțul $x + 2$ și restul $x + 1$.

R. 1) -1 ; 2) $9x^2 - 4$.

6. Să se scrie mulțimea și să se determine cardinalul ei:

$$M = \{x \in N \mid x = 2y, y \in N, 5 < x < 9\}.$$

R. $M = \{6; 8\}$; Card $M = 2$.

7. Se consideră fracția algebrică:

$$\frac{ax^2 + x^2 - 2ax - 2x + a + 1}{x - 1}.$$

1) a fiind număr real să se afle domeniul de existență a fracției privitor la variabila x .

2) Să se simplifice fracția.

3) Să se determine valoarea lui x pentru ca expresia simplificată să devină $a + 1$.

R. 1) $x \in R - \{1\}$; 2) $(x - 1)(a + 1)$; 3) 2.

8. Se consideră fracția algebrică:

$$\frac{a^5 + 2a^3 - 2a^2 - 2a^2 + a}{a(2a^2 - 2)(a^2 + 1)}.$$

1) Pentru ce valori ale lui a fracția are sens?

2) Să se simplifice fracția.

3) Să se determine valoarea lui a pentru ca fracția să ia valoarea -1 .

R. 1) $a \in R - \{-1; 0; 1\}$; 2) $\frac{a-1}{2(a+1)}$; 3) $a = -\frac{1}{3}$.

9. Se dă expresia:

$$\left[\left(\frac{8x^3 - 1}{2x - 1} - 6x\right) \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} - (8x^3 - 1)\right] \cdot \frac{1}{1 - 2x}$$

Se cere:

1) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

2) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

3) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru

$$x = \frac{\sqrt{1,0404} + \frac{49}{50} - 1,1(6) \cdot \frac{3}{7}}{1 : (394 \cdot 19 + 2\,606 \cdot 19 - 2999 \cdot 19)} \cdot \frac{1}{19}$$

$$\text{R. } 1) x \in R - \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\};$$

$$2) E = 6x;$$

$$3) 9.$$

10. Fie mulțimea $A = \{x \in N \mid x < 11\}$. Să se scrie mulțimile

$$a) M = \{x \in N \mid x = 2n, n \in A\}$$

$$b) P = \{x \in N \mid x = 3p, p \in A\}$$

$$\text{R. } A = \{0; 1; 2; 3 \dots 10\}$$

$$a) M = \{0; 2; 4 \dots 20\} \text{ (numere pare)}$$

$$b) P = \{0; 3; 6 \dots 30\} \text{ (multipli de 3)}.$$

11. Se consideră expresia:

$$E = \left[(2 + 2x) \left(\frac{4x^2 + 21}{2 + 2x} - 6 \right) + \frac{8x^3 - 27}{4x^2 + 6x + 9} \right] \cdot \frac{1}{2x - 2}$$

1) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

2) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

3) Să se calculeze valoarea expresiei pentru:

$$x = \frac{\sqrt{1,0816} + \frac{24}{25} + 1}{\frac{1}{2} + \frac{3}{8} : 0,25 - 0,1(6) \cdot \frac{3}{2} + 0,75}$$

$$\text{R. } 1) x \in R - \{\pm 1\}; 2) 2x - 3; 3) -\frac{3}{5}$$

12. Se consideră expresia:

$$E = \left[\left(\frac{125x^3 + 1}{1 + 5x} - 5x - \frac{15x - 75x^2}{5x - 1} - 15x \right) + 2(5x - 1) \right] \cdot \frac{1}{5x - 1}.$$

1) Pentru ce valori atribuite lui x expresia dată are sens?

2) Să se simplifice expresia.

3) Să se calculeze valoarea expresiei pentru

$$x = \frac{\sqrt{1,1025} + \frac{19}{20} - 1,0(5) + \frac{1}{18}}{120 : 20 \cdot 5 \cdot 0,04 - 1,18}$$

$$\text{R. } 1) x \in R - \left\{ \pm \frac{1}{5} \right\}; 2) 5x + 1; 3) 251.$$

13. Se dă expresia:

$$\left\{ \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)}{a^2 - ab + b^2} \right] \right\} : \frac{ab}{a^2 - ab + b^2}$$

în care cantitățile a și b îndeplinesc condițiile $a \neq \pm b$ și se cere:

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei, dacă

$$a = \frac{(8^4 \cdot 3^5 \cdot 9^7) : (9^8 \cdot 8^3 \cdot 3^8) + 16 : 3 - \frac{1}{3} + 1}{\sqrt{1,004004} + \frac{499}{500} + 28}$$

$$b = -10$$

$$\text{R. 1) } \frac{1}{a+b}; 2) -\frac{1}{9}.$$

14. Se dau mulțimile $M_1 = \{4; x\}$ și $M_2 = \{5; 6\}$. Care este valoarea lui x astfel ca $M = M_1 \cup M_2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

$$\text{R. } x = 3.$$

15. Se consideră:

$$E = \left[\left(\frac{\frac{x^3 - y^3}{x - y} + xy - \frac{y^3 + z^3}{z + y} + yz \right)}{x + 2y - z} \right]^3 - x^3 + z^3x + z^4 - z^3 : (3x + z^2)$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Să se afle valoarea numerică pentru $x = -1$; $y = 1$, $z = 2$.

$$\text{R. } z(x + z); 2.$$

$$16. f(x) = \left(\frac{\frac{x^2 - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{\frac{x^2 - 1}{x + 1}} \right) \cdot \left(\frac{2x^3 + 2x}{4x^2} + 1 \right) \cdot \frac{2x}{2x^2 + 2}$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui x expresia inițială nu are sens?

3) Pentru ce valori ale lui x expresia adusă la forma simplă este pozitivă?

4) Să se calculeze valoarea numerică pentru $x = \frac{3}{2}$.

$$\text{R. 1) } \frac{x+1}{x-1}; 2) x = \pm 1 \text{ și } x = 0;$$

$$3) x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty); 4) 5.$$

$$17. f(a) = \left[\left(\frac{a+1}{1-a} - \frac{4a^2}{a^2-1} - \frac{1-a}{1+a} \right) : \left[-2 \left(\frac{1}{a^2+a^3} - \frac{1-a}{a^2} - 1 \right) \right] \right] \cdot \frac{1-a}{a+1} - \frac{3a}{2a+7}.$$

1) Pentru ce valori ale lui a expresia are sens?

2) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

3) Pentru ce valori ale lui a expresia adusă la forma cea mai simplă este negativă?

$$\text{R. 1) } a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{7}{2}; -1; 0; 1 \right\}; 2) 2 - \frac{3a}{2a+7}; 3) -14 < a < -\frac{7}{2}.$$

18. Să se găsească mulțimea B și cardinalul acestei mulțimi știind că:

$$B = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ și } x < 11\};$$

$$19. E = \left[\frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-y^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right) \right] : \frac{2xy^2 - x^2 - y^4}{xy^2} \cdot \frac{4xy^2 - 3x^2y^2}{5-2x}.$$

1) Să se arate că $E = \frac{3x-4}{5-2x}$.

2) Să se stabilească valorile lui x pentru ca $E < 2$.

$$R. x \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty \right).$$

$$20. \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 - xy^2 + x^2y - x^3} \right) \left(1 - \frac{y-1}{x} - \frac{y}{x^2} \right) \cdot xy(x-5).$$

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui x expresia este negativă?

$$R. 1) (x+1)(x-5); 2) -1 < x < 5 \text{ sau } x \in (-1, 5).$$

21. Se dau mulțimile:

$$A = \{a; b; c; d\}; B = \{a; 3; 4; 5\}. \text{ Să se determine Card}(A \cup B).$$

$$R. 7 \geq \text{Card}(A \cup B) \geq 4$$

22. Se dau expresiile:

$$A(x) = 1 + \frac{2x}{3 + \frac{4x}{5}}; B(x) = 9 - \frac{4 - \frac{15}{x}}{2}$$

Să se calculeze:

1) $E_1 = \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) A,$

2) $E_2 = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) B$

3) Să se rezolve ecuația: $\left(2E_1 - E_2 + \frac{15}{4x+15} \right) = 1.$

$$R. 1) E_1 = \frac{15+6x}{15+4x}; 2) E_2 = \frac{15+2x}{2x}$$

$$3) 8x^2 - 30x - 225 = 0; x_1 = \frac{15}{2}; x_2 = -\frac{15}{4} \text{ (nu convine).}$$

23. Se dă ecuația:

$$\left[\left(\frac{a+2}{a-2} \right)^3 : \frac{a^3 + 4a^2 + 4a}{3a^2 - 12a + 12} \cdot \frac{a}{3} \right] x + \left[6a + \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right] : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16} \Big] x = a^3 + 6a^2 + 12a + \frac{a+2}{a-2} x.$$

1) Ce valoare trebuie să aibă a ca ecuația propusă să aibă sens?

2) Să se rezolve ecuația.

$$R. 1) a \neq -2; 0; 2; 2) x = \frac{a(a^2 + 6a + 12)}{(a+2)^2}.$$

24. Se dau mulțimile $A = \{2; 4; 5; 6\}$; $B = \{1; 3; 7\}$.

a) Să se scrie mulțimea $M = A \cap B$.

b) Să se găsească $A - B$

c) $(A \cap B) \cup B$.

R. a) $M = \emptyset$ b) A ; c) B .

25. Se dau expresiile:

$$m_1 = \frac{ax^4 - 4ax^2 - 3ax^3 + 12ax}{ax}.$$

$$m_2 = \frac{a^2x^5 - 9x^3a^2 + 2x^4a^2 - 18a^2x^2}{a^2x^2}.$$

$$m_3 = \frac{a^3x - 4x^4a^3 + 3x^5a^3 - 12a^3x^3}{a^3x^3}.$$

1) Să se găsească: c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

2) Să se determine x din ecuația:

$$\left[\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_3} (2 - x) \right] (x + 3) - 1 = 0$$

R. 1) $x + 2$; $(x^2 - 9)(x^2 - 4)$

2) $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

26. Se dă fracția:

$$\frac{x^2 - 4x + 6x\sqrt{y} + 9y - 12\sqrt{y}}{x^2 - 2x + 3x\sqrt{y} - 6\sqrt{y}}$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Ce valoare numerică are fracția dată pentru $y = \frac{4}{9}$?

R. 1) $\frac{x + 3\sqrt{y} - 4}{x - 2}$; 2) 1.

27. Se dau expresiile:

$$f(x) = x^2 + 2x - 15, \quad f_1(x) = x^2 - 6x + 9, \quad f_2(x) = x^2 + 10x + 25.$$

1) Să se arate că $f(x)$ este medie proporțională între $f_1(x)$ și $f_2(x)$.

2) Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{f_2(x) + f(x)}{f_2(x) - f(x)}$$

R. $\frac{x + 1}{4}$.

28. Să se simplifice fracția:

$$\frac{3x^2 + 2xy - y^2}{6x^2 + x^2y - 4xy^2 + y^3}$$

Dacă $y = 6$, să se arate pentru ce valori ale lui x , expresia nu are sens.

R. $\frac{1}{2x - y}$; $x \neq 2; 3; -6$.

Indicație. Se va ține seamă de factorii obținuți la numărător și scriind unul din termenii de la numitor sub formă de sumă a trei termeni se obține ușor gruparea termenilor, sau se va scrie: $-4xy^2 = -5xy^2 + xy^2$ și $6x^3$ sub formă de sumă a doi termeni și apoi gruparea termenilor este evidentă.

29. Se dau mulțimile:

$$A = \{x \in N \mid x < 6\}; B = \{x \in N \mid x \leq 4\}.$$

a) Să se enumere elementele celor două mulțimi.

b) Sint echipotente mulțimile A și B ?

c) Să se scrie mulțimea: $M = \{x \in A \mid x < y, y \in B\}$.

R. a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\};$

$B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

b) Nu căci $\text{Card } A = 6$ și $\text{Card } B = 5$.

c) $M = \{0; 1; 2; 3\}$.

30. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este $8a$, iar raportul dimensiunilor bazei este:

$$\frac{x}{y} = \frac{2a+b}{2a-b} \quad (a > 0; b > 0)$$

1) Să se calculeze aria bazei.

2) Să se afle înălțimea paralelipipedului știind că

$$V = 8a^2b - 4a^3 + ab^2 - 2b^3.$$

3) Să se calculeze diagonala paralelipipedului când $a = 4$ și $b = 3$.

R. 1) $4a^2 - b^2$; 2) $2b - a$; 3) $5\sqrt{6}$.

31. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{4x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2} - \frac{(x^3 + 8)(x^2 - 1)}{x^4 - 5x^2 + 4} = 0.$$

R. 0.

32. Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{x^2 - 6xy + y^2}{(x+y)^2 - 8xy} - x^3 \right] : (1-x) + x = 9.$$

R. $x_1 = 2$; $x_2 = -4$.

33. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^4 - 4x^3 + 12x - 9,$$

$$E_2 = \frac{(x-1)(x-3)}{x^2-3}.$$

Se cere:

1) Să se descompună în factori E_1 .

2) Să se arate că $E_1 \times E_2$ și $\frac{E_1}{E_2}$ sint pătrate perfecte.

R. 1) $E_1 = (x^2 - 3)(x - 3)(x - 1)$; 2) $E_1 \cdot E_2 = (x - 1)^2 (x - 3)^2 \frac{E_1}{E_2} = (x^2 - 3)^2$.

34. Se dă expresia:

$$E_1 = \left(\frac{2x^4 + x^5 - 2x^3y + x^3 - 2y - 4xy}{4(4x^3 - 8y)} + 1 + \frac{2x + 2}{4} \right) : (x + 5).$$

- 1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia E_1 este un număr întreg.
- 3) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} E_1 \cdot \sqrt{256} < 2x - 3, \\ \frac{x}{3} - 2 > \frac{3 - 5x}{4} + 2. \end{cases}$$

$$\text{R. 1) } \frac{x+5}{16}; \quad 2) \quad x = k \cdot 16 - 5; \quad 3) \quad x \in (8; +\infty).$$

35. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{7x + 6}{8x + 5} \text{ și mulțimile } A = \{2; 3; 13; 14\}; \quad B = \{5; 6; 13\}.$$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: A \cap B$ să conțină elemente prin care $f(x)$ se simplifică, oricare ar fi $x \in Z$.

R. adevărată.

36. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 5a + 2}{(a^2 + a + 1)(a + 1)^2};$$

$$E_2 = \frac{a^4 - 2a^3 + a}{(a^2 - 1)(a^2 - a - 1)}.$$

Se cere:

- 1) Să se aducă expresiile la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valoare a lui a avem $\frac{E_1 + E_2}{a + 1} < 2$
- 3) Să se rezolve ecuația:

$$\frac{E_1}{E_2} = a + 2.$$

$$\begin{aligned} \text{R. 1) } E_1 &= \frac{a+2}{a+1}; \quad E_2 = \frac{a}{a+1} \\ 2) \quad a &\in (-\infty, -1) \cup (0, \infty); \\ 3) \quad a_1 &= -2, \quad a_2 = 1. \end{aligned}$$

37. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left\{ \left[\frac{(8 + x^3)(x - 2)}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} \right]^2 + \frac{2x^2 - 8}{x^2} + 1 \right\} : \frac{2x^2 - 4}{x^4}$$

$$E_2 = \left\{ \left(\frac{1 - 8x^3}{4x^4 + 2x^3 + x^2} \cdot \frac{1 + 2x}{x^2} \right)^3 + \frac{12x^2 - 48x^4}{x^{12}} \right\} \cdot \frac{x^{12}}{1 + 4x^2 + 16x^4}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.
- 2) Să se rezolve inecuația: $\frac{E_1 + E_2 + 2x^2 + x}{x + 2} < -4$

3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{2}{1-2x} - 1 = 0$.

R. 1) $E_1 = 2x^2 - 4$; $1 - 4x^2 = E_2$; 2) $-2 < x < -1$; 3) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

38. Se dă polinomul $E = 1 + x + x^2 + 2x^3$.

Prin ce polinom a fost împărțit E , știind că s-a obținut citul $11 + 5x + 2x^2$ și restul 23.

R. $x - 2$.

39. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2} - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - 4x - 4} \right) : \frac{9}{(x^2 - 4)(x - 1)} \right]^2 - \frac{2}{x + 1} + 1.$$

$$E_2 = \left\{ \left[\frac{64 - 8x^3}{4x^2 + 8x + 16} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) : \frac{2}{x} \right]^3 + \frac{2x - 2x^2 + 4}{x} + 1 \right\} \cdot \frac{x}{2x - x^2 + 2} + x.$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Care sînt valorile lui x pentru care E_1 și E_2 au sens (studiul se face pe forma simplificată).

3) Să se rezolve ecuația: $(E_1 \cdot E_2 - 1) \cdot (x + 1) = 0$.

R. 1) $\left(\frac{x}{x+1} \right)^2$; $\frac{2(x+1)}{x}$; 2) $x \neq -1$; $x \neq 0$; 3) $x = 1$.

40. Se dă mulțimea: $P = \{x \in N \mid x = 2y - 4, y \in N, 12 < x \leq 18\}$. Să se scrie mulțimea și să se determine cardinalul acestei mulțimi.

R. $P = \{14; 16; 18\}$; 3

41. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)^3}{16x^2}$$

$$E_2 = \frac{(x^3 - 1 - 3x^2 + 3x)(x-1)^2(x-1) - 1}{x^4 + 3x^2 - 3x^3 - 2x}$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori (numere întregi) atribuite lui x , expresia E_1 devine număr întreg.

3) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1 E_2}{x-1} = 0$.

R. 1) $E_1 = \frac{x+1}{4}$; $E_2 = x^2 - 3x + 3$

2) $x = 4k - 1, k \in Z$; 3) $x = -1$.

42. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 6. \end{cases}$$

R. $x = 8$; $y = 2$.

43. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - 3ax + 2a^2},$$

$$E_2 = \frac{x^3 + ax^2 - a^2x - a^3}{x + a}.$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1 + E_2}{1 + a + x}(x + b) = 0$.

(după ce în prealabil s-a simplificat fracția).

R. 1) $E_1 = x - a$; $E_2 = x^2 - a^2$.

2) $x_1 = a$; $x_2 = -b$.

44. Să se simplifice fracția:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 4}{2x^2 - 2x + 2}$$

R. $x - 2$.

45. Se dă mulțimea $A = \{2; 3; 4\}$. Care sînt numerele de pe tricourile unor sportivi, ce se pot forma, folosind elementele mulțimii A , dacă fiecare număr are numai două cifre.

Indicație. Se folosește scrierea elementelor produsului cartezian $A \times A$.

R. 22; 23; 24; 32; 33; 34; 42; 43; 44.

46. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{(x - a)(x - 2a)}$$

$$E_2 = \frac{x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3}{x - 2a}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Să se găsească valorile întregi atribuite lui x astfel ca expresia:

$$\left(\frac{E_1 - E_2}{E_1} + ax^2\right) : (1 - a - ax) \left(-\frac{2}{9}\right) \text{ să fie număr întreg.}$$

R. 1) $E_1 = x - a$, $E_2 = x^2 - a^2$

2) $x = \frac{9k + 2}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

47. Se dau polinoamele:

$$E_1 = 2x^3 + 7x^2 - 2x^2y - 7xy + 6x - 6y;$$

$$E_2 = 2x^3 - x^2 - 2x^2y + xy - 6x + 6y.$$

Se cere:

1) Să se transforme E_1 și E_2 într-un produs de factori.

2) Să se efectueze:

$$\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4} - \frac{x^3 + 9}{x^2 - 8}$$

3) Pentru ce valoare a lui x avem $\frac{E_1}{E_2} > 1$.

$$\begin{aligned} \text{R. 1) } E_1 &= (x-y)(x+2)(2x+3) \\ E_2 &= (x-2)(2x+3)(x-y) \\ 2) \frac{-1}{x^3-8} \quad 3) x &> 2 \end{aligned}$$

48. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$E_1 = \frac{\left(1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) \left(\frac{y^3}{x^2} + \frac{2y^2}{x} + y\right) \cdot \frac{x^4}{y} + 2(x^2 - y^2) + 1}{x^2 - y^2 + 1}$$

$$E_2 = \frac{x^2 - y^2 + 2y - 1}{x - y + 1}$$

Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{E_1^2 - E_2^2}{(x^2 - y^2 - x - y + 2)(x - y + 1)} = 6 \\ x^2 - y^2 = 60. \end{cases}$$

$$\text{R. } \begin{cases} E_1 = x^2 - y^2 + 1. \\ E_2 = x + y - 1. \\ x = 8 \\ y = -2 \end{cases}$$

49. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{4x^2 - 20x + 9}{(2x-1)^2 + (1-2x)} \cdot \frac{x-1}{2x-9}$$

$$E_2 = \left[\frac{z-y}{(x-y)(x-z)} + \frac{y+z}{(y-z)(y-x)} + \frac{y+z}{(z-x)(z-y)} \right] \cdot \frac{z-x}{y}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2
- 2) Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{Z}$ avem:

$$\left(E_1 \cdot E_2 + \frac{1}{x+y} \right) \frac{x^2 - y^2}{x(x+2)} \text{ este întreg.}$$

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{1}{2}; E_2 = \frac{2}{x-y}; x \in \{-1, -3, -4\}.$$

50. Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 8\}$.

- a) Să se scrie elementele mulțimii $M = \{x \in A \mid \text{există } y \in A, x + y = 6\}$.
- b) Să se scrie $C_A M$.
- c) Să se scrie $M \cap C_A M$.
- d) Să se găsească $\text{Card } A - \text{Card } M$.

$$\begin{aligned} \text{R. a) } A &= \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}; M \subset A = \{1; 2; 4; 5\} \\ \text{b) } &\{3; 6; 7\} \\ \text{c) } &\emptyset \\ \text{d) } \text{Card } C_A M &= 3. \end{aligned}$$

51. Se dau expresiile:

$$A = 4yz; B = x^2 - y^2 - 4z^2; C = x^2 - y^2 + 4z(z+x)$$

Se cere:

1) Să se calculeze $A^2 - B^2$ și să se descompună expresia obținută în factori;

2) Să se simplifice fracția: $\frac{A^2 - B^2}{C^2}$.

$$\text{R. } 1) (x + y + 2z)(x - y + 2z)(x + y - 2z)(-x + y + 2z) \\ 2) y + 2z - x.$$

52. Să se rezolve ecuația (după simplificarea fracțiilor):

$$\frac{2x - 1 + (1 - 2x)^2 + (2x - 1)^3}{8x^3 + 1} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Să se determine valoarea numerică a lui x pentru:

$$a = \sqrt[3]{\frac{125}{108}} \cdot \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}} + 1,1(6) - \frac{2}{3};$$

$$b = \left(\sqrt{1,0201} + \frac{9}{100} \right) : \frac{1}{10}.$$

$$\text{R. } \frac{a^2}{2b^2}; \frac{9}{242}.$$

53. c.m.m.d.c. al două numere naturale este 2. c.m.m.m.c. al acestor numere este 60, iar raportul lor este $\frac{5}{6}$. Să se găsească aceste numere.

$$\text{R. } \{10; 12\}$$

54. Să se determine x din ecuația (după simplificare):

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} - \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^4 - 5x^2 + 4} + \frac{3 - 2x - x^2}{(x + 3)(x^2 - 1)} = \frac{1}{x - 1}.$$

R. nu are soluție.

55. Să se rezolve ecuația:

$$\left\{ \left[\left(\frac{3x + 6}{3x - 6} \right)^2 - \frac{2x + 4}{x - 2} + 1 \right] - 1 \right\} : \frac{1}{(x - 2)^2} = 0.$$

$$\text{R. } \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

56. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x - 2)(y - 3) = 1, \\ (x - 2) : (y - 3) = 1. \end{cases}$$

$$\text{R. } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$$

57. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a + b} + \frac{y}{a - b} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \\ ax + by = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\text{R. } \begin{cases} x = a \\ y = b. \end{cases}$$

58. Se dă expresia:

$$E = \frac{(2x-3)^2 + 4x^2 + 4x - 15}{8x^3 - 12x^2 - 12x(2x-3) + 18x - 27}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valoare a lui x se obține:

$$\frac{4(2x-3)}{2x+1} < 3.$$

- 3) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia

$$\frac{E \cdot 4(2x-3)}{2x+1}$$

este un număr întreg.

$$\text{R. 1) } E = \frac{2(2x+1)}{(2x-3)^2};$$

$$2) x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right);$$

3) 1, 2.

59. Să se găsească mulțimile $\{x, y\}$ pentru care x și $y \in N$ și $x \cdot y = 8$.

60. Se dă fracția:

$$E = \frac{6x^2(y+z)^2 - 24x^2yz}{3y^4 - 6y^3z - 6yz^3 + 6y^2z^2 + 3z^4}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
- 2) Să se arate că dacă $E = 2$, atunci x, y, z , pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

$$\text{R. } E = \frac{2x^2}{y^2 + z^2}.$$

61. Dacă numerele a și b sînt prime între ele, să se cerceteze dacă sumele $a+b$ și a^2+b^2 sînt prime între ele?

Indicație. Putem scrie $a^2 + b^2 = (a+b)(a+b) - 2ab$. În baza acestei egalități orice număr care divide pe $a^2 + b^2$ și pe $(a+b)$ trebuie să dividă și pe $2ab$. Întrucît a și b sînt numere prime între ele suma lor $a+b$ și produsul lor ab sînt prime între ele, deci 2 este singurul divizor al lui $2ab$, comun pentru $a^2 + b^2$ și $a+b$.

Exemplu: $a = 8$; $b = 5$; $a^2 + b^2 = 89$ și $a+b = 13$ sînt prime între ele.

62. Să se simplifice fracția:

$$E = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 7}{x^2 + 5x + 7}.$$

Să se determine valorile lui x (numere întregi) ca să avem:

$$\frac{E}{x-2} \geq 3$$

$$\text{R. } E = x + 1; \quad x = 3.$$

$$x \in \left(2; \frac{7}{2}\right]$$

63. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left\{ \left[\frac{m^2x + 2mx + x - 3m^2 - 6m - 3}{(m+1)(9-6x+x^2)} \right]^2 - 1 \right\} \cdot \frac{m+x-2}{x-3}$$

$$E_2 = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x(x-3) + x-3}{(x^3-27)(x+1)}.$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .

2) Pentru ce valoare a lui x expresia $(E_1 + 1) \cdot \frac{x+2}{m+1}$ este negativă.

3) Pentru ce valoare a lui x , expresiile E_1 și E_2 nu au sens.

$$\text{R. } \begin{cases} E_1 = \frac{m-x+4}{x-3} \\ E_2 = \frac{x+1}{x^2+3x+9} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -2 < x < 3 \\ \text{sau } x \in (-2, 3) \end{cases}$$

$$3) x = -1 \text{ și } x = 3.$$

64. Se dă mulțimea $A = \{x \in N \mid x = 2n + 1, n \in N\}$.

Să se scrie mulțimea formată din primele cinci elemente.

$$\text{R. } \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

65. Să se afle în care sistem de numerație există relația:

$$\left(\frac{4}{14} + \frac{1}{10} \right) \cdot \frac{140}{104} = 1.$$

$$\text{R. } 5.$$

66. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{27 - 125x^3}{50x^2 + 30x + 18} \right)^2 - \frac{10x-6}{2} + 1,1(6) - \frac{1}{6} \right] \cdot \frac{4}{25}$$

$$E_2 = \frac{\left[\left(\frac{4x^2 + 4x}{4x^2} \right)^2 + \frac{4x^2 + 4x}{2x^2} + \sqrt{4,1616} - 1 \frac{1}{25} \right] - 1}{\frac{3x+1}{x}}$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{-2x}{3-3x^2}$ este un număr întreg?

$$\text{R. } 1) \begin{cases} E_1 = (1-x)^2 \\ E_2 = \frac{x+1}{x} \end{cases}$$

$$2) x = \frac{3k+2}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

67. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{\frac{1}{a^3 - ab^3} + \frac{1}{a^2b + 2ab^2 + b^3}}{(a - b)^2 : (a + b)^2} : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{a^2}{b} - 2a + b \right)$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a - b^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b^2} \right) \right] : \frac{2ab^3 - a^2 - b^4}{ab^2}.$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui a expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{b^2(b-a)(a-2)}{8}$ este negativă.

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{a}{a-b}; \quad -\frac{1}{ab^2} = E_2; \quad 2) \ a < 2 \text{ sau } a \in (-\infty, 2).$$

68. Se dă expresia:

$$\frac{a^3 + a^2(1-b) - b^2(1+a) + b^3}{a^3 + a^2(1+b) - b^2(1+a) - b^3} = \frac{A}{B}.$$

Se cere:

1) Să se simplifice fracția $\frac{A}{B}$

2) Să se rezolve sistemul:

$$A = \frac{2y+x}{x}, \quad B = \frac{2x+y}{y}.$$

în care A și B sînt termenii fracției, iar necunoscutele sînt a și b .

$$\text{R. } \begin{cases} 1) \frac{A}{B} = \frac{a-b+1}{a+b+1} \\ 2) \begin{cases} a = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ b = \frac{x^2-y^2}{xy} \end{cases} \end{cases}$$

69. Se dă expresia:

$$E = \left(\frac{x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - 2y^2 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 - 1} - x^2y \right) : (x^2 - y - 1).$$

1) Să se aducă E la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuația: $\frac{E}{y+1} < -3$.

$$\text{R. 1) } E = 1 - y; \quad 2) \ y \in (-2, -1)$$

70. Se dau expresiile:

$$E_1 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$E_2 = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$$

Se cere:

1) Să se descompună în factori E_1 și E_2 .

2) Să se simplifice expresia $\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x-6}{x^2+1}$.

$$\text{R. } 1) \begin{cases} E_1 = (x^2 + 1)(x + 1)^2 \\ E_2 = (x - 1)^2(x - 6) \end{cases}$$

$$2) \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2$$

71. Să se arate că dacă x, y, z sînt laturile unui triunghi, atunci avem:

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{x}{z}\right) < 3 + \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y}.$$

72. Să se aducă la forma cea mai simplă fracția:

$$E = \frac{\left[\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1 \right) \frac{xy}{x^2+y^2} \right]^2 + \frac{2x+2y}{x-y} + 1}{\frac{4x^2}{(x-y)^2}}.$$

R. 1.

73. Se dă expresia $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ este pozitivă.

b) Se dă mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$. Să se arate că dacă $f(x) = 9$, atunci ecuația are soluții în mulțimea A .

74. Să se simplifice fracția:

$$\frac{3x^3 + 1 + 2x^3 + 3x}{x^2 + x + 1}$$

R. $2x + 1$.

75. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3 - 6ax^2 + 12a^2x + 56a^3}{x^3 + 28a^2 - 8ax}$$

$$E_2 = \frac{x^3 + 6ax^2 + 12a^2x + 72a^3}{x^2 + 12a^2}$$

Se cere:

1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuația (după ce s-a simplificat fracția):

$$\frac{E_1 \cdot E_2 + 4a^2 + 2x + 8a + 1}{(x + 4a + 1)^2} = x^2$$

$$\text{R. } 1) \begin{cases} E_1 = x + 2a, \\ E_2 = x + 6a; \end{cases}$$

$$2) \quad x = \pm 1.$$

76. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x(x+1)^2 \cdot (x^2+1) + 1}{x^3 + x^2 + 1}$$

$$E_2 = \frac{x^6 + 2x^5 + x^3 - 2x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 + 2}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .
- 2) Să se rezolve ecuația:

$$\left[\frac{E_1(x-1)}{E_2} + x \right] (2-x) = 0.$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} E_1 = x^2 + x + 1 \\ E_2 = x^3 - 1. \end{cases}$$

$$2) \quad x_1 = -1; \quad x_2 = +2.$$

77. Se dau expresiile:

$$E = \frac{(x-1)^3 + (x+y)^2 + (y-1)^3 - 4}{x^2 + y^2 - xy + 3}$$

$$E_1 = \frac{x^3 + x^2y - 2x^2 - x - y + 2}{x^2 - 1}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E și E_1
- 2) Pentru ce valoare a lui x expresia

$$\left(\frac{E}{E_1} - x^3 \right) : (x^2 + x + 1)(x + 3) \text{ este negativă?}$$

- 3) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{E \cdot E_1 - 2xy - 4 - 2y^2}{x - y - 4} = 1. \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} x + y - 2 = E, \\ x + y - 2 = E_1 \end{cases} \quad 2) \quad x \in (\infty; -3) \cup (1; \infty);$$

$$3) \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{23}{8} \\ y_2 = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

78. Să se simplifice fracția:

$$\frac{x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1}{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 1}$$

$$\text{R. } x^2 - 1.$$

79. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{(x^4 - x^3 + 8x^2 - 2x + 12)(x + 2)}{(-8x^2 - 16)(x^2 - x + 6)}$$

$$E_2 = \frac{6 + 6x + 5x^2 + 3x^3 + x^4}{(x^2 + 2)(x^2 + 3x + 3)}$$

Se cere:

- 1) Să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.
- 2) Pentru ce valoare a lui x expresia $E_1 \frac{E_2}{x-1}$ este negativă.

3) Care sînt numerele întregi atribuite lui x pentru ca E_1 să fie număr întreg?

$$\text{R. 1) } E_1 = \frac{x+2}{-8}; E_2 = 1; 2) x \in (-\infty; -2) \cup (1, \infty).$$

$$3) x = 8k - 2 (k \in \mathbb{Z})$$

80. Să se aducă fracția la forma ireductibilă:

$$E(x) = \frac{4x^2 - 4x - 15}{8x^2 - 24x + 10}$$

2) Pentru ce valoare a lui x expresia $E(x) < -4$.

$$\text{R. 1) } \frac{2x+3}{2(2x-1)}, 2) x \in \left(\frac{5}{18}; \frac{1}{2}\right).$$

81. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left[\left(\frac{5x+5}{5x} \right)^2 + \frac{2x+2}{x} - \frac{2x+1}{x} + 1 \right] : \frac{2x+1}{x^2}$$

$$E_2 = \left(\frac{8x^3 - 2 + 4x^2}{2x^2 + 2x + 1} \right)^2 + 2(4x - 2) + 1.$$

Se cere:

1) Să se aducă aceste expresii la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui x avem: $\frac{E_2 - 16x^2}{E_1} < 0$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} E_1 = x + 1 \\ E_2 = (4x - 1)^2 \end{cases}$$

$$2) x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{8}; \infty\right)$$

82. Să se arate în care sistem de numerație există relația

$$\left(\frac{20}{120} + \frac{1}{10} \right) \cdot \frac{1}{1020} = 1.$$

R. baza = 3.

83. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}{a+b+\sqrt{a^2-b^2}} + \frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$E_2 = \left[1 + \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 + \frac{2a+2b}{a-b} - 1 \right] \frac{(a-b)^2}{3a-b}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2

2) Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{E_1}{E_2} + \frac{a^2}{b^2(a+b)} + \frac{1}{a+b} \right) \cdot b^2 = ax^2 + bx^2$$

$$\text{R. } E_1 = \frac{2a}{b}; E_2 = (a+b); x = \pm 1.$$

84. Se dau expresiile:

$$E_1 = \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 - xy^2 + x^2y - x^3} \right) \cdot \frac{(x - y)(x + 1)}{x}$$

$$E_2 = \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x - y} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] \cdot \frac{xy}{(x - y)^2}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2

2) Să se rezolve ecuația: $\frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1}{x} \cdot (x - 2) = 0$.

3) Pentru ce valoare a lui x expresia $\frac{E_1 \cdot E_2}{x} (x - 4)$ este negativă?

4) Pentru ce valori întregi atribuite lui x expresia:

$$E_1 \cdot \frac{24y}{x^2 - 3x - 4} \text{ este un număr întreg?}$$

$$\text{R. 1) } \begin{cases} E_1 = \frac{x + 1}{y} \\ E_2 = \frac{1}{xy} \end{cases}$$

2) $x_1 = 2, x_2 = -1$; 3) $-1 < x < 4$.

4) $\begin{cases} \text{Toate valorile care fac ca numitorul să fie} \\ \text{divizorul lui 24 cu excepția } x = 4 \text{ și } x = -1. \end{cases}$

85. Fie fracțiile:

$$\frac{4x + 3}{5x + 2}; \frac{3x + 2}{4x + 1}; \frac{5x + 4}{6x + 3}.$$

Să se afle valorile lui x pentru care fracțiile se pot simplifica.

Indicație. Orice divizor comun al celor două numere ce formează fracția întii este și divizorul expresiei:

$$(5x + 2) - (4x + 3) = x - 1;$$

$x = M7 + 1$. Verificare $M7 = 14$.

$$\frac{(14 + 1)4 + 3}{5(14 + 1) + 2} = \frac{63}{77} \text{ au divizor comun pe 7 și fracția se poate simplifica.}$$

86. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{2(x - y)^2 - 5y^2 + 3xy}{2x - 3y} + \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{3x - y}$$

$$E_2 = \left[\left(\frac{x + y}{x - y} \right)^2 + 1 + \frac{2x + 2y}{x - y} \right] \cdot \frac{(x - y)^2}{-16x^2}$$

Se cere:

1) Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile E_1 și E_2

2) Pentru ce numere întregi atribuite lui x expresia:

$$E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{x + 1}{x + y} \text{ este un număr întreg.}$$

3) Pentru ce valoare a lui x se obține:

$$E_1 \cdot E_2 : (x + y) \cdot \frac{x+1}{x-1} < -4.$$

$$\text{R. 1) } E_1 = 2(x + y); \quad E_2 = \frac{-1}{4}; \quad 2) \quad x = 2k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z});$$

$$3) \quad 1 < x < \frac{9}{7}$$

10. Probleme care conduc la sisteme de ecuații de gradul întâi cu două și trei necunoscute

1. La o întreprindere muncitorii lucrând câte 15 piese pe zi, depășeau norma zilnică cu 0,25 din ea. Dacă numărul muncitorilor s-ar micșora cu $\frac{1}{5}$ din numărul lor și fiecare muncitor și-ar depăși norma zilnică cu 10 piese, atelierul ar realiza 2 800 de piese mai mult decât prevedea planul inițial. Câți muncitori erau inițial în atelier și care era planul pe zi?

R. 500 de muncitori; 6 000 de piese pe zi.

2. Două brigăzi ale unei secții de strungărie trebuia să lucreze zilnic, conform planului, un număr de piese care se găsesc în raportul de $\frac{3}{4}$. Prima brigadă a depășit planul cu 15%, iar a doua cu $\frac{3}{20}$ din norma de zi. Știind că în felul acesta au lucrat împreună 805 piese zilnic să se afle câte piese trebuia să lucreze fiecare după plan și care a fost realizarea în procente, față de plan?

R. 300 și 400 de piese; 115% realizare.

3. La un magazin de legume și fructe s-au adus de la o cooperativă agricolă de producție cireșe socotite la doi lei/kg și căpșuni socotite la 3 lei/kg, în valoare totală de 2 600 de lei.

Cireșele au avut un scăzământ de 5%, iar căpșunile 10%. Pentru a se recupera scăzământul, s-a mărit prețul pe kg cu procente scăzământelor respective. Din vânzare s-a încasat pe căpșuni cu 984 de lei mai mult decât de pe cireșe.

1) Câte kg de cireșe și de căpșuni s-au luat de la cooperativa agricolă de producție?

2) Ce procent reprezintă scăzământul cireșelor față de cel al căpșunilor?

Indicație. Se va calcula aritmetic nou preț pe kg al cireșelor și al căpșunilor.

R. 600 kg căpșuni; 400 kg cireșe; 33%.

4. Pentru construcția a două clădiri trebuiau transportate cantități egale de ciment, cu două camioane. Un camion transporta ciment pentru clădirea mai apropiată și la fiecare drum ducea 1,5 t; celălalt transporta ciment pentru clădirea mai depărtată și la fiecare drum ducea cu $\frac{2}{3}$ t mai mult decât primul. Până la amiază camionul al doilea a făcut 3 drumuri mai puțin decât primul și au rămas netransportate $3\frac{1}{2}$ t de ciment pentru clădirea apropiată și 2 t pentru clădirea mai depărtată.

- a) Cîte tone de ciment trebuiau transportate pentru fiecare clădire?
b) Cîte drumuri a făcut fiecare camion?

R. a) 17 t; b) 9 drumuri; 6 drumuri.

5. O brigadă de țărani cooperatori și-a propus să termine prășitul unei parcele de floarea-soarelui într-un anumit număr de zile. Dacă s-ar fi prășit cîte 12 ha pe zi, ar fi rămas 8 ha neprășite față de plan. Prășind însă cu cîte 4 ha mai mult pe zi, s-a terminat prășitul parcelei cu o zi mai devreme față de plan. În cîte zile trebuia terminat prășitul după plan?

R. 6 zile.

6. Un grup de pionieri din București au organizat prin O.N.T. o excursie la Tușnad, dînd fiecare cîte 50 de lei. Înaintea plecării s-au mai înscris 3 pionieri, plătînd și ei cîte 50 de lei și după ce au convenit să mai dea fiecare cîte 5 lei, realizîndu-se un plus de 315 lei, excursia s-a prelungit pînă la Borsec. Cîți excursioniști au fost inițial și care a fost costul total al excursiei la Tușnad?

R. 30 de pionieri; 1 500 de lei.

7. Cooperatorii unei cooperative agricole de producție aveau de recoltat 380 de ha grîu și 230 ha secară în timp de două săptămîni. În prima săptămînă s-au recoltat de două ori mai multe ha de grîu decît de secară, iar în săptămîna a doua de două ori și jumătate mai multe ha de secară decît de grîu. Cîte ha de grîu au fost recoltate în prima săptămînă?

R. 360 ha.

8. Două secții ale unei uzine au produs împreună într-un an 8 900 piese. În anul următor, producția primei secții a crescut cu 12% iar a celei de-a doua cu 10%, așa încît cea de a doua secție a produs cu 2 686 mai multe piese decît prima secție. Cîte piese a produs fiecare secție în primul an?

R. 3 200 piese; 5 700 de piese

9. În două silozuri s-au înmagazinat 186 t cereale. Din primul siloz s-au scos 60% din cantitatea înmagazinată, iar din al doilea $\frac{5}{6}$ și a mai rămas în primul siloz de 12 ori mai mult decît în al doilea. Cîte tone au fost în fiecare siloz?

R. 155 t; 31 t.

10. Doi muncitori lucrînd împreună, pot să facă o anumită lucrare în 12 zile; dacă primul muncitor ar lucra 12 zile, iar muncitorul al doilea 3 zile, atunci ei ar face numai 20% din lucrarea întreagă. În cîte zile poate să facă lucrarea fiecare muncitor lucrînd singur?

Indicație. Notăm cu x partea din lucrare, făcută de primul muncitor într-o zi, singur și cu y partea executată de-al doilea muncitor într-o zi dacă ar lucra singur; se găsește

$$x = \frac{1}{20}; \quad y = \frac{1}{30}.$$

R. 20 zile; 30 zile.

11. Pentru executarea unei comenzi, o fabrică a întrebuintat două tipuri de strunguri: 12 strunguri de tipul A și alte 12 de tipul B și a terminat comanda în 8 zile. Se știe că 3 strunguri de tipul A pot strunji într-o oră aceeași cantitate de piese cît strunjesc două strunguri de tipul B . În cît timp se va efectua o altă comandă la fel de mare dacă la ea lucrează 9 strunguri de tipul A și 4 strunguri de tipul B ?

R. 16 zile.

12. Un detașament de pionieri a organizat o excursie la hidrocentrala de la Bicăz. Dacă fiecare participant ar contribui la cheltuielile pentru transport cu câte 25 de lei, suma adunată de la toți pionierii ar fi mai mică cu 200 de lei decât cea necesară; dacă fiecare pionier ar contribui cu câte 32 de lei, suma adunată ar acoperi cheltuielile și ar mai rămâne 24 de lei. Câți pionieri erau în detașament?

R. 32 de pionieri.

13. Câțiva turiști au luat masa la o cabană. Dacă ar fi fost cu 5 mai mulți și dacă costul total al mesei ar fi fost cu 60 de lei mai mare, fiecare ar fi plătit cu 2 lei mai mult, iar dacă ar fi fost 15 turiști în plus și masa ar fi costat cu 40 de lei mai mult, fiecare ar fi plătit 2 lei mai puțin. Câți turiști au luat masa la cabană și cât a plătit fiecare pentru masă?

R. 10 turiști; 6 lei.

14. Pentru două școli care s-au construit în Calafat, au fost necesare cantități egale de ciment. De la depozit, cimentul a fost cărat de 2 camioane. Pentru școala cea mai apropiată un camion a transportat $2\frac{1}{2}$ t la fiecare drum; pentru școala mai depărtată, celălalt camion a transportat 3,5 t la fiecare drum. Până la amiază camionul al doilea a făcut cu 3 drumuri mai puțin decât primul și au rămas netransportate $65\frac{1}{2}$ t pentru școala apropiată și 69 t pentru cea depărtată. Cite tone de ciment au fost necesare pentru fiecare școală?

R. 83 tone.

15. O cooperativă agricolă de producție a pregătit fin pentru hrana unei cirezi de vaci. Dacă vinde 20 de vaci, atunci va hrăni restul de vaci cu 10 zile mai mult decât timpul prevăzut la început; dacă însă va mai cumpăra 80 de vaci, rezerva de fin însă se va consuma cu 20 de zile mai devreme decât termenul fixat.

Pentru câte vaci și pentru câte zile s-a făcut rezervă de fin?

R. 120 de vaci; 50 de zile.

16. Mai mulți pionieri au vrut să cumpere un joc de șah. Dacă fiecare ar fi dat câte 5 lei, nu le-ar fi ajuns pentru a cumpăra șahul o sumă de două ori mai mică decât costul șahului. Doi dintre pionieri au renunțat să mai ia parte la cumpărarea șahului, și atunci, dând fiecare câte 20 de lei, le-a mai rămas o sumă egală cu 20% din costul șahului, care reprezintă costul a 5 piese de rezervă pentru șah.

1) Cât a costat jocul de șah?

2) Câți pionieri au fost inițial?

3) Cât costă o piesă de rezervă?

R. 50 de lei costă șahul; 5 pionieri și o piesă de rezervă 2 lei.

17. Terenul unei cooperative agricole de producție a fost repartizat la trei brigăzi astfel: 0,75 din terenul primei brigăzi reprezintă 0,3 din terenul repartizat brigăzii a doua și $\frac{1}{8}$ din terenul brigăzii a treia.

Aria terenului fiind de 2 413 ari, să se afle, suprafața repartizată fiecărei brigăzi.

R. 2,54 ha; 6,35 ha; 15,24 ha.

18. Din producția unei grădini de zarzavat s-a vîndut o dată $21/40$ cu un cîștig de 30% față de cheltuieli, iar restul s-a vîndut cu suma de 2 270 lei. În acest fel s-a realizat un beneficiu total de 25% față de cheltuieli. Ce sumă s-a încasat din această vînzare?

R. 5 000 de lei.

Indicație pentru soluția aritmetică.

Se folosește metoda presupunerii: să presupunem că prețul de cost ar fi fost 100 lei. Se găsește că pentru prima parte, vîndută cu un beneficiu de 30%, s-ar fi încasat 68,25 lei; dar cum întreaga cantitate s-a vîndut cu un beneficiu de 25%, adică s-ar fi încasat 125 lei, rezultă că pentru a doua parte a vînzării, s-ar fi încasat $125 - 68,25 = 56,75$ lei. În realitate s-au încasat pentru partea a doua 2 270 lei, adică de 40 de ori mai mult ($2\,270 : 56,75 = 40$) decît prin presupunerea noastră. Aceasta înseamnă că prețul de cost a fost $100 \times 40 = 4\,000$ lei, iar suma încasată prin vînzare a fost 5 000 lei.

19. Să se împartă 232 în trei părți, astfel că, dacă la prima parte se adaugă jumătate din suma celorlalte două, la a doua se adaugă a treia parte din suma celorlalte două, iar la a treia a patra parte din suma celorlalte două, rezultatele să fie egale între ele.

R. 40; 88 și 104.

20. Într-o pivniță sînt trei butoaie. Dacă s-ar umple primul butoi cu apă și s-ar turna din el în butoiul al doilea pînă ce acesta s-ar umple, în primul butoi ar rămîne $\frac{2}{7}$ din apa care era în el; dar dacă butoaiele al doilea și al treilea, fiind pline, le-am deșerta în primul butoi, ar mai lipsi 10 litri ca acesta din urmă să se umple. Cîți litri de apă conține fiecare dintre aceste butoaie, dacă în toate trei încap 270 litri.

R. 140 litri; 100 l; 30 l.

21. Perimetrul unui triunghi este de 36 m. Raportul dintre latura cea mai mică și cea mai mare a acestui triunghi este $\frac{3}{5}$ iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mijlocie este 3 m. Să se afle laturile triunghiului.

R. 9 m; 12 m; 15 m.

22. Să se împartă numărul 49 în trei părți, astfel încît dacă adăugăm primei părți o treime din suma celorlalte două, celei de-a doua $\frac{1}{4}$ din suma celorlalte două și celei de-a treia $\frac{1}{5}$ din suma celorlalte două, să obținem numere egale.

Indicație. Se va obține sistemul:

$$x + y + z = 49$$

$$x + \frac{y + z}{3} = y + \frac{x + z}{4} = z + \frac{x + y}{5}.$$

R. 13; 17; 19.

23. O marfă se vinde cu un cîștig de 0,11 din prețul ei de cost; dar acest cîștig este mai mic cu 181,50 lei decît 0,11 din întreaga sumă încasată prin vînzarea mărfii.

Care este prețul de cost al mărfii, dar prețul de vînzare?

R. 15 000 lei; 16 650 lei.

Indicație pentru soluția aritmetică.

Folosim metoda falsei ipoteze; să presupunem că prețul de cost al mărfii ar fi fost 100 lei; atunci câștigul ar fi fost, conform condițiilor din enunț, de 11 lei, deci suma încasată din vânzare ar fi fost 111 lei. Frația 0,11 din întreaga sumă încasată este atunci $0,11 \times 111 = 12,21$ lei, față de care câștigul este mai mic cu 1,21 lei. Cum câștigul real este mai mic cu 181,50 lei decât fracția 0,11 din suma de vânzare, rezultă că adevăratul preț de cost este mai mare decât cel presupus și anume de atâtea ori mai mare de câte cuprinderi de câte 1,21 sînt în 181,50. Numărul acestor cuprinderi fiind 150 înseamnă că prețul real de cost este $100 \times 150 = 15\ 000$ lei.

24. Dacă un kg de fructe s-ar vinde cu 2,80 lei s-ar pierde $6\frac{2}{3}\%$ din prețul de cost; dacă aceleași fructe s-ar vinde cu prețul de 3,30 lei kg atunci s-ar câștiga la întreaga cantitate vîndută 36 lei.

Care este prețul de cost al întregii cantități de fructe?

R. 360 lei.

25. Trei cooperative agricole de producție s-au înțeles să împartă cheltuielile pentru construcția unui pod, proporțional cu numărul de membri ai gospodăriilor și invers proporțional cu distanța cooperativelor pînă la pod. Podul costă 55 320 lei, cooperativele au respectiv, 84 membri, 156 membri, 56 membri, iar distanțele pînă la pod sînt, respectiv, de 3 km, 2,6 km și $1\frac{3}{4}$ km.

Ce sumă va plăti fiecare cooperativă?

R. 12 908 lei? 27 660 lei; 14 752 lei.

26. La un atelier de confecții s-au cumpărat 140 metri de stofă de trei feluri plătindu-se sumele de 9 000 lei, 6 600 lei și 4 000 lei, respectiv pentru cele trei calități. Cîți metri de stofă are fiecare bucată, dacă se știe că 1,1 m din prima calitate costă tot atît cît 1,8 m din calitatea a doua, iar $6\frac{2}{3}$ m din a doua costă tot atît cît $5\frac{1}{2}$ m din calitatea a treia.

R. 50 m; 60 m; 30 m.

Indicație pentru soluția aritmetică.

Folosim metoda falsei ipoteze: dacă prima bucată de stofă ar avea 20 m, atunci 1 m ar costa 450 lei. Potrivit relațiilor date între prețuri ar rezulta că 1 m din bucata a doua costă 275 lei și deci această bucată ar avea $6\ 600 : 275 = 24$ m. Judecînd la fel pentru bucata a treia, se găsește că un metru costă $333\frac{1}{3}$ lei și ar fi 12 m. Numărul total de m ar fi astfel $20 + 24 + 12 = 56$ m (față de 140 m dați în enunț). Cantitățile trebuie majorate de 2,5 ori ($140 : 56 = 2,5$).

27. Un biciclist mergînd dintr-un sat spre oraș, parcurge această distanță cu viteza de 8 km/h, la dus și cu viteza de 12 km/h la întors. El a mers în total 10 ore. Care este distanța de la sat la oraș? Să se dea și soluția aritmetică.

R. 48 km

Indicație pentru soluția aritmetică.

Se va calcula timpul necesar parcurgerii unui km, atît la dus, cît și la întors, spre a putea deduce drumul străbătut în cele 10 ore de mers.

28. Trei brigăzi de muncitori ar fi executat aceeași lucrare astfel: primul ar fi terminat-o în 9 zile, a doua în 10 zile, a treia în 12 zile. S-a alcătuit o brigadă

din $\frac{1}{4}$ din efectivul brigăzii întâi, $\frac{1}{3}$ din efectivul brigăzii a doua și $\frac{1}{2}$ din efectivul celei de-a treia. În câte zile s-a executat aceeași lucrare cu brigada astfel alcătuită?

R. 10 zile aprox.

29. Trei brigăzi de muncitori au primit pentru o lucrare suma de 34 200 lei. Prima brigadă de 8 oameni a lucrat 5 zile, a doua compusă din 7 membri a lucrat 8 zile, iar brigada a treia compusă din 12 oameni a lucrat 4 zile. Calificarea fiind aceeași pentru membrii tuturor brigăzilor, să se afle ce sumă revine de plată fiecărei brigăzi?

R. 9 500 lei; 13 300 lei; 11 400 lei.

30. O roată dințată A are 60 de dinți și face 80 rotații pe minut. O altă roată B , angrenată cu prima, are 48 de dinți. Câte rotații face roata B pe minut? Dacă, la un moment dat, un dinte a al roții A este angrenat cu un dinte b al roții B , peste cât timp dinții a și b se angrenează iarăși?

R. 100 rotații; 3 s.

31. Într-o excursie timpul coboririi de pe un munte a fost cu 1,2 ori mai mic decât timpul necesar urcușului. Care este distanța parcursă până la vârful muntelui știind că la urcarea pe munte s-a parcurs, în medie, 106,2 m în $\frac{1}{5}$ oră, iar timpul necesar coboririi a fost $\frac{3}{5}$ din cel necesar urcușului.

R. 1 593 m.

32. Dacă un tren ar merge cu viteza de 54 km/h, ar străbate distanța dintre două localități într-un timp mai mic cu jumătate de oră decât cel programat, iar dacă ar merge cu viteza de 36 km/h, i-ar trebui 1 oră și $\frac{1}{2}$ mai mult decât timpul programat pentru străbaterea acelei distanțe. Care este viteza programată a acelui tren?
(Se presupune mișcarea uniformă).

R. 48 km/h.

33. Luni, la ora 5 dimineața a plecat un vapor de pasageri dintr-un port spre un alt port; în același timp, a plecat de la al doilea port către primul, un șlep care are viteza $\frac{1}{2}$ din viteza vaporului. Cele două nave s-au întâlnit la ora 11 noaptea. Cînd va ajunge fiecare dintre ele la destinație?

R. marți la ora 8; miercuri la ora 11.

34. Vitezele a trei trenuri: unul de marfă, altul personal și al treilea rapid sînt proporționale cu numerele 1; $1\frac{1}{2}$; 3. Știind că pentru o aceeași distanță trenul de marfă folosește o oră și 20 minute mai mult decât personalul, să se afle în cit timp a parcurs acea distanță fiecare din cele trei trenuri.

R. 240 min; 160 min; 80 min.

35. Într-o lună, două echipe de muncitori aveau de efectuat, după plan, 2 750 de piese. Prima echipă a depășit planul cu 20%, iar a doua echipă cu 15%. Știind că în acest caz prima echipă a efectuat în acea lună cu 480 de piese mai mult decât a doua echipă, să se calculeze:

- numărul de piese planificate inițial pentru fiecare echipă;
- numărul de piese efectuate peste plan de către fiecare echipă.

R. I. 1 550; II. 1 200 de piese realizate peste plan;
310; 180 de piese efectuate peste plan.

36. Din două calități de produse cu prețul de 5 lei și 3 lei kg, s-a făcut un amestec de 18 kg. Dacă acest amestec s-ar vinde cu 3,90 lei kg, s-ar pierde 3,80 lei. Cite kg de produse din fiecare cantitate s-au luat pentru amestec?

R. 10 kg de calitatea I; 8 kg de calitatea a II-a.

37. Trei brigăzi ale unei cooperative agricole de producție au cultivat zarzavaturi astfel: 20% din lotul primei brigăzi împreună cu 25% din lotul celei de-a treia brigăzi împreună cu jumătate din lotul brigăzii a doua și tot atât cît $\frac{1}{11}$ din lotul primei brigăzi plus jumătate din lotul brigăzii a doua.

Cite hectare de zarzavaturi s-au cultivat de fiecare brigadă?

R. 27,5 ha; 11 ha; 10 ha

38. Pentru rezultatele deosebite în muncă, trei muncitori au primit drept primă suma de 3 000 lei. 75% din prima primită de primul muncitor este cu 100 de lei mai mare decît suma primită de al doilea muncitor, iar raportul dintre suma primului muncitor și celui de-al doilea este de $\frac{6}{5}$. Să se afle sumele primite de fiecare muncitor.

R. 1 200; 800; 1 000 de lei.

39. Într-un an, o cooperativă agricolă de producție a recoltat de pe două loturi semănate unul cu grîu și celălalt cu orz 1 370 q de cereale. În anul al doilea, folosind îngrășăminte chimice, recolta de pe lotul semănat cu grîu s-a mărit cu 15%, iar cea de pe lotul semănat cu orz s-a mărit cu 10%, obținindu-se astfel de pe ambele loturi 1 551 q de cereale.

Cît s-a recoltat pe fiecare lot în anul următor?

R. 1 012 q; 539 q.

40. Avem două bucăți de aliaj, dintre care prima bucată conține 270 g de aur și 30 g de aramă, iar bucata a doua conține 400 g de aur și 100 g de aramă. Cît trebuie luat din fiecare bucată de aliaj, pentru a obține 400 g de aliaj cu titlul de 0,825?

R. 100 g; 300 g.

41. Două aliaje de aur și aramă, dintre care unul cu proba de 950, iar celălalt cu proba de 800, se topesc împreună cu 2 g de aur curat și se obține un aliaj nou cu masa de 25 g și cu proba de 906. Să se afle masa celor două aliaje date. (Se numește proba unui aliaj, de 1 000 ori titlul lui.)

R. 15 g; 8 g.

42. Pentru 5 kilograme de cafea de două calități s-au plătit 345 de lei. Un kilogram de cafea de prima calitate costă 75 de lei, iar un kilogram de calitatea a doua costă 60 de lei. Cite kg de cafea de fiecare calitate s-au cumpărat?

R. 3 kg; 2 kg.

43. Un aliaj de aur și argint cu masa de 1,06 kg, fiind introdus în apă „pierde” 70 g. Cît aur și cît argint este în acest aliaj, dacă aurul „pierde” în apă $\frac{1}{19}$ din masă, iar argintul „pierde” 0,1 din masă?

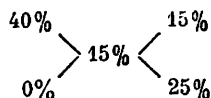
R. 760 g; 300 g.

44. Se cîntărește o medalie în apă și se găsește că are 22,5 g, iar în aer 25 g. Medalia fiind un aliaj de cupru și argint, să se afle ce cantitate din fiecare metal cuprinde, știind că densitatea argintului este de 10 450 kg/m³, iar a cuprului 8 800 kg/m³.

R. Ag 19 g; Cu 6 g.

45. Se amestecă 15 kg acid sulfuric de 40% cu apă și se obține o soluție cu o concentrație de 15%. Să se calculeze masa amestecului obținut.

Indicație. Pentru realizarea aritmetică



Raportul părților este $15/25 = 3/5$; noul amestec conține în total $3 + 5 = 8$ părți egale dintre care 3 corespund la 15 kg. O singură parte conține 5 kg, iar amestecul total va avea 40 kg.

R. 40 de kg.

46. Pentru a prepara 40 kg acid cu tăria de 20% se amestecă acid de 80% cu acid de 15%. Ce cantități de acid se vor folosi din fiecare fel?

R. 3,07 kg; 36,93 kg.

47. Din două calități de grâu de 4 lei/kg și 3 lei/kg trebuie făcut un amestec de 350 kg spre a fi vândut cu 3,40 lei/kg (fără câștig sau pierdere). Ce cantitate de grâu trebuie să se ia din fiecare cantitate?

Indicație pentru rezolvarea aritmetică. Se utilizează metoda falsei ipoteze: dacă tot grâul ar fi de calitatea 3 lei/kg, atunci costul a 350 kg ar fi 1 050 lei; dar grâul amestecat este vândut cu $3,40 \times 350 = 1\,190$ lei. Diferența de 140 de lei provine de la 140 kg grâu de calitatea 4 lei/kg și restul (210 kg) cuprinde grâul de calitate 3 lei/kg. Se poate utiliza și metoda obișnuită pentru problemele de amestec.

R. 140 kg; 210 kg.

48. Un aliaj de aur de 2 kg cu titlul de 0,910 s-a obținut dintr-o bucată de aliaj de aur cu titlul de 0,800 și alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel s-a folosit pentru noul aliaj?

R. 0,533 kg; 1,467 kg.

49. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de două ori mai mică decât cifra unităților. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obținem un număr cu 27 de unități mai mare decât cel de la început. Să se afle numărul.

R. 36.

50. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de trei ori mai mare decât cifra unităților. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obținem un număr cu 36 de unități mai mic decât numărul de la început. Să se afle numărul.

R. 62.

51. Suma cifrelor unui număr de două cifre este 11. Dacă adăugăm la acest număr 63, obținem un număr format din aceleași cifre, dar așezate în ordine inversă. Să se afle numărul.

R. 29.

52. Să se găsească două numere știind că unul este mai mare decât celălalt cu 14 unități, iar dacă se împarte cel mai mare la 5 și cel mai mic la 8, diferența citorilor obținute este 4.

R. 30; 16.

Probleme de mișcare.

53. Pentru a ajunge din sat la oraș în timpul stabilit, un drumeț trebuia să meargă cu viteza de 4 km/h. El merge jumătate din drum cu viteza stabilită, iar restul cu un autocamion care merge cu 20 km/h. El sosește în oraș cu două ore înaintea timpului stabilit. Să se afle distanța de la sat pînă la oraș.
R. 20 km.
54. Un drumeț a socotit că, făcînd cîte 3 km pe oră, va sosi din sat la oraș la o anumită oră. După ce a făcut jumătate din drum cu viteza stabilită, el s-a oprit pentru o oră și apoi a trebuit să-și mărească viteza, pentru partea de drum rămasă, cu 1 km pe oră. Să se afle distanța de la sat la oraș.
R. 24 km.
55. Roata din față a unei trăsurii are circumferința de 30 dm, iar roata din spate, de 40 dm. Pe distanța de la A la B , roata din față a făcut cu 30 de învîrtituri mai mult decît roata din spate. Să se afle distanța de la A pînă la B .
R. 360 m.
56. Pe aceeași distanță, roata din față a unei trăsurii face 240 de învîrtituri, iar cea din spate, a cărei circumferință este cu 0,6 m mai mare, face 180 de învîrtituri. Să se afle lungimea circumferinței fiecărei din aceste roți.
R. 1,8 m; 2,4 m.
57. Roata din față a unei căruțe a făcut pe o anumită distanță cu 15 învîrtituri mai mult decît cea din spate. Circumferința roții din față este de 2,5 m, iar a celei din spate, de 4 m. Cîte învîrtituri a făcut fiecare roată și ce distanță a parcurs căruța?
R. 40; 25; 100 m.
58. Cu cîți km poate să se îndepărteze de la debarcader o barcă care merge împotriva curentului, pentru ca să se întoarcă înapoi în 4 ore, dacă viteza apei este de 2 km/h și viteza bărcii în apă stătătoare este de 8 km/h?
R. 15 km.
59. Un curier a parcurs pe bicicletă un drum cu viteza medie de 8 km/h. El s-a înapoiat pe alt drum, cu 3 km mai lung decît primul. La întoarcere curierul a mers cu o viteză medie de 9 km/h și a făcut cu $\frac{1}{8}$ oră mai mult decît la dus. Să se afle lungimea fiecărui drum.
R. 15 km; 18 km.
60. Un călător trebuie să străbată într-un timp stabilit distanța dintre orașul A și orașul B ; dacă el ar face acest drum cu o motocicletă, parcurgînd cîte 35 km/oră, ar întîrzia cu 2 ore, iar dacă ar face acest drum cu un automobil parcurgînd cîte 50 km/oră, ar sosi cu o oră mai devreme. Să se afle distanța dintre orașele A și B și în cîte ore trebuia să ajungă călătorul în orașul B .
R. 5 km/oră; 3 km/oră.
61. Doi turiști merg unul către celălalt din două orașe A și B , situate la o distanță de 30 km unul de celălalt. Dacă primul turist pornește cu 2 ore înaintea celui de-al doilea, ei se întîlnesc după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecarea turistului al doilea, iar dacă turistul al doilea, pornește cu 2 ore înaintea primului, ei se întîlnesc după trei ore de la plecarea primului turist. Cîți kilometri pe oră face fiecare turist?
R. 5 km/oră; 3 km/oră.

62. Un călăreț și un pieton pornesc din același punct A spre punctul B . Călărețul, ajungând în B cu 50 minute înaintea pietonului, se reîntoarce imediat spre A și se întâlnește cu pietonul la o distanță de 2 km de B . Pentru tot drumul de la A la B și înapoi, i-a trebuit călărețului 1 oră 40 minute. Să se afle distanța de la A la B , viteza călărețului și a pietonului.

Indicație pentru metoda aritmetică.

Se deduce ușor că distanța AB a fost parcursă de călăreț în 50 min. Dacă pietonul a sosit în B la 50 minute după călăreț, înseamnă că în același moment călărețul ajunsese din nou în A , deci viteza pietonului este de două ori mai mică decât a călărețului și, prin urmare, când călărețul sosise în B , pietonul era la jumătatea drumului. La întoarcere călărețul face 2 km până îl întâlnește pe pieton, care, în acest timp, mergând cu o viteză de două ori mai mică, a parcurs un km de la jumătatea drumului; aceasta înseamnă că jumătatea distanței dintre A și B este $1 + 2 = 3$ km. Acum se poate afla distanța AB , apoi vitezele.

R. 6 km; 7,2 km/oră; 3,6 km/oră.

63. Un înotător înoată pe riul Neva împotriva curentului. Lângă Podul Republicii el pierde o ploscă goală. După ce mai înoată 20 de minute împotriva curentului, observă pierderea, se întoarce și ajunge plosca lângă Podul Smidt. Să se afle cu ce viteză curge Neva, știind că distanța între poduri este de 2 km.

Rezolvare. Să notăm cu x viteza cu care curge Neva, exprimată în km pe oră. Pentru a lucra cu aceleași unități de măsură, vom transforma în prealabil cele 20 de minute în ore, adică $20 \text{ de minute} = \frac{20}{60} \text{ ore} = \frac{1}{3} \text{ ore}$. Să notăm cu A punctul unde înotătorul a observat că a pierdut plosca.

De la Podul Republicii, R , până la A el a parcurs distanța împotriva curentului deci viteza lui față de țărmlul apei a fost diferența dintre viteza v (viteza proprie a înotătorului) și viteza apei, adică $v - x$; fiindcă el a parcurs distanța RA în $\frac{1}{3}$ ore, avem

$$RA = \frac{1}{3} (v - x).$$

Întorcându-se de la A la R , el parcurge această distanță cu o viteză egală cu $v + x$ întrucât la viteza sa proprie se adaugă viteza apei. Ca să ajungă plosca, el mai parcurge încă o distanță RS dintre Podul Republicii și Podul Smidt, care este de 2 km, avînd o viteză tot de $v + x$.

Deci, drumul total parcurs în sensul curentului va fi:

$$AR + RS = \frac{1}{3} (v - x) + 2.$$

Prin urmare, timpul necesar ca să parcurgă acest spațiu, adică să ajungă plosca este:

$$\frac{\frac{1}{3} (v - x) + 2}{v + x}$$

Dacă la acest timp adăugăm cele 20 minute $= \frac{1}{3}$ ore, de cînd a pierdut plosca, înseamnă că pentru ca s-o prindă s-a scurs un timp egal cu:

$$\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3} (v - x) + 2}{v + x}.$$

Acest timp trebuie să fie egal cu acela necesar pentru ca plosca să parcurgă cei 2 km cu viteza x a apei, întrucât ea nu a avut o viteză proprie, adică cu $\frac{2}{x}$.

Ecuatia problemei este așa dar:

$$\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(v - x) + 2}{v + x} = \frac{2}{x}$$

de unde:

$$\frac{1}{3} + \frac{6 + v - x}{3} \cdot \frac{1}{v + x} = \frac{2}{x}.$$

Înmulțind ambii membri cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor, $3x(v + x)$ care este diferit de zero obținem:

$$x^2 + vx + 6x + vx - x^2 = 6x + 6v,$$

sau, după reducerea termenilor, $2vx - 6x = 0$

$$2v(x - 3) = 0.$$

Cum v este diferit de zero, deoarece reprezintă în problema noastră viteza înotătorului, urmează că: $x - 3 = 0$,

deci: $x = 3$.

Prin urmare, viteza Nevei este de 3 km/oră. Ecuatia (1) ne arată că viteza înotătorului nu joacă nici un rol în problemă.

64. Două bucăți de zefir pentru cămăși, de aceeași calitate, valorează una 238 de lei și alta 182 de lei; dacă prețul metrului s-ar micșora cu 2 lei, prima bucată ar costa cu 48 de lei mai mult decât a doua.

a) Care este prețul unui metru de zefir și câți metri are fiecare bucată?
b) Elementele mulțimilor A respectiv B sînt factorii primi ai numerelor 238 și 182 din problemă, iar elementele mulțimii C sînt factorii primi ai numărului ce reprezintă prețul unui metru de zefir.

Să se calculeze $A - B = C_A^B$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \cap B) \cup C$; $A \cup B \cup C$; $(A \cap B) \cap C$.

R. a) 17 m; 13 m; 14 lei metrul.

65. O cooperativă agricolă de producție a contractat cu statul 800 q de grâu și 300 q de ovăz, pe care le-a dat în două tranșe. Prima dată a dat de 3 ori mai mult grâu decât ovăz, iar a doua oară a dat de 2 ori mai mult grâu decât ovăz. Să se afle cantitățile predate în fiecare tranșă?

Se obține ecuația: $800 - 3x = 2(300 - x)$.

R. I. 600 q grâu; 200 q ovăz

II. 200 q grâu; 100 q ovăz.

66. Pentru reparația unui imobil, întreprinderea de administrație locativă a plătit unor zugravi și dulgheri 31 900 de lei. Zidarii au primit câte 500 de lei fiecare, iar dulgherii câte 600 de lei fiecare. Toți dulgherii împreună au primit cu 3 100 de lei mai puțin decât zidarii.

a) Câți zidari și câți dulgheri au fost?

b) Fie Z respectiv D mulțimea zidarilor și mulțimea dulgherilor și Z_1 respectiv D_1 mulțimea monedelor de câte un leu primite de fiecare zidar și fiecare dulgher. Factorii primi ai numerelor ce exprimă mulțimile de mai sus, sînt elementele acestor mulțimi. Să se determine $Z \cup D$ și $Z_1 \cup D_1$.

Indicații. Din întreaga sumă scoatem 3 100 lei : 31 900 lei - 3 100 = 28 800. Acum părțile sînt egale pentru amîndouă echipele. O echipă va primi 28 800 : 2 = 14 400 lei. A doua echipă va primi 14 400 + 3 100 = 17 500 lei.

R. a) 35 zidari; 24 dulgheri.

67. Producția zilnică a unei echipe de muncitori era, după plan, de 19 800 de piese. Introducerea de utilaj modern a făcut ca productivitatea să crească astfel că, dacă ar fi fost cu 18 muncitori mai puțini în echipă, s-ar fi produs tot atît cît înainte de introducerea utilajului. Aplicîndu-se apoi o inovație, productivitatea fiecărui muncitor a crescut din nou cu același număr de unități, astfel că dacă ar fi fost cu 33 de muncitori mai puțini în echipă, față de numărul inițial, s-ar fi produs tot atît cît se producea la început.

a) Cîți muncitori au fost la început și care era norma?

b) Cu cît s-a mărit norma de fiecare dată?

c) Fie elementele mulțimii M factorii primi ai c.m.m.m.c. al numerelor ce reprezintă numărul de muncitori și numărul de piese lucrate. Fie N mulțimea a căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă numărul de piese.

Să se determine $M - N$

d) Să se determine $M \cap N$ și $M \cup N$.

R. a) 198 muncitori; 100 piese; b) cu 10 piese.

68. Dacă pentru îndeplinirea unui angajament o uzină ar face zilnic cîte 20 de tractoare, ar lipsi la termenul stabilit 100 de tractoare, iar dacă uzina ar face zilnic cîte 23 de tractoare ar preda la termenul stabilit cu 20 de tractoare mai mult decît prevede angajamentul. Cîte tractoare au fost comandate și ce termen a fost stabilit pentru îndeplinirea angajamentului? Ce relație se poate stabili între 900 de tractoare și 900 de tractoriști dacă pe fiecare tractor lucrează cîte un tractorist.

Indicație: Dacă, în loc de 20 de tractoare, uzina ar face 23 de tractoare pe zi, există un plus de $100 + 20 = 120$ de tractoare, care provin de la surplusul zilnic de 3 tractoare (40) zile; $40 \cdot 20 + 100 = 900$ tractoare.

R. 900 de tractoriști; 40 de zile.

69. Să se găsească un număr de trei cifre, divizibil cu 9, astfel încît cifra sutelor să fie de trei ori mai mică decît a unităților, iar dacă îi adăugăm 594 să obținem răsturnatul lui.

Indicație. Numărul se scrie algebric. $100x + 10y + z$ răsturnatul lui $100z + 10y + x$.

70. Să se determine un număr cuprins între 400 și 500, știind că suma cifrelor sale este 9 și că răsturnatul numărului este $36/47$ din el.

Indicație. Numărul căutat fiind cuprins între 400 și 500, cifra sutelor este 4; suma celorlalte două cifre este deci 5.

R. 423

71. Prima cifră a unui număr de șase cifre este 9. Dacă se ia această cifră de la început și se așază la sfîrșitul numărului, se obține sfertul primului număr. Care este acel număr?

Indicații: Tăiem pe 9. Această operație este echivalentă cu a scădea 900 000 din numărul dat, și obținem:

(1) $x - 900\,000$.

Acest număr are cinci cifre. Vom adăuga apoi cifra 0 la sfîrșitul său. El recapătă 6 cifre. Operațiunea este echivalentă cu înmulțirea numărului (1) cu 10:

$$10(x - 900\,000).$$

În fine, în ultima etapă, adăugăm acestui număr cifra 9 la sfârșit:

$$10(x - 900\,000) + 9.$$

Acum scriem că numărul astfel obținut este $\frac{1}{4}$ din numărul inițial adică

$$10(x - 900\,000) + 9 = \frac{x}{4}$$

R. 923 076.

72. Un număr de 6 cifre are ultima cifră 7. Dacă se taie de la urmă cifra 7 și se mută în fața numărului, vom obține un număr de 5 ori mai mare decât numărul dat. Să se afle primul număr.

Indicație: Scădem din acest număr pe 7, adică ultima sa cifră. Atunci, toate cifrele lui rămân la fel ca și înainte, dar ultima devine zero. Dacă acum tăiem pe acest zero de la sfârșit, numărul s-a împărțit cu 10, adică a devenit cu 5 cifre și se va scrie

$$\frac{x - 7}{10} \quad (1)$$

Luăm cifra 7 și o punem acum în fața numărului. Atunci, numărul are din nou șase cifre, iar cifra sutelor de mii este 7. Aceasta echivalează cu a adăuga 700 000 la numărul (1); numărul astfel obținut se va scrie:

$$700\,000 + \frac{x - 7}{10}$$

El trebuie să fie egal cu de 5 ori numărul căutat, de unde ecuația problemei:

$$700\,000 + \frac{x - 7}{10} = 5x$$

a cărei soluție este $x = 142\,857$.

R. 142 857.

73. Atelierul unei cooperative de croitorie a primit postav de două calități și anume: din calitatea întâi 240 m și din a doua 360 m, în valoare totală de 103 200 lei.

Pentru confecționarea unor paltoane, atelierul a întrebuințat 30% din prima calitate și 45% din a doua calitate.

Știind că postavul de calitatea a doua întrebuințat pentru paltoane a costat cu 1 440 de lei mai mult decât postavul de calitatea întâi întrebuințat, se cere:

- a) Să se afle costul unui metru de postav din fiecare calitate.
b) Cifrele numerelor care reprezintă costul unui metru de postav de calitatea întâi respectiv calitatea a doua sint elementele mulțimilor A respectiv B . Să se calculeze $A - B$ și $B - A$.
c) Reprezentați printr-o schemă $A \cap B$.

R. a) 250 de lei; 120 lei.

74. Pentru a se hrăni 10 cai și 14 vaci se dădeau câte 180 kg de fin pe zi. Mărindu-se rația de fin pentru cai cu 25% iar pentru vaci cu $33\frac{1}{3}\%$, s-au dat câte 232 kg de fin pe zi. Câte kg de fin se dădeau pe zi la început pentru un cal și câte pentru o vacă?

R. 9,6 kg; 6 kg.

75. Un muncitor a economisit 1 600 lei pentru cumpărarea unui covor și a unui pardesiu. În urma reducerilor de prețuri, covoarele s-au ieftinit cu 38%, iar pardesiurile cu 24%. Cumpărând la prețurile reduse un covor și două pardesii, i-au mai rămas 68 de lei din suma pe care a avut-o.

a) Să se afle prețul unui covor și al unui pardesiu, înainte și după reducerea de prețuri.

b) C.m.m.m.c și c.m.m.d.c al numerelor ce reprezintă prețurile: pardesiu-lui și covorului sint elementele mulțimilor A și B . Să se pună în evidență relațiile următoare între aceste mulțimi: $A - B$; $B - A$. $A \cup B$; $A \cap B$.

R. 1 000 lei și 600 lei.

76. Două secții ale unei fabrici de încălțăminte trebuiau să lucreze, conform planului, 4 000 de perechi de pantofi într-o lună. Depășindu-se planul de către prima secție cu 12% și de către a doua cu 8% pe lună, după 3 luni, a doua secție a făcut cu 1 080 de perechi de pantofi mai mult decât prima.

a) Care este planul lunar pentru fiecare?

b) Fie A mulțimea a cărei elemente sint factorii primi ai c.m.m.m.c al celor două numere care reprezintă planul lunar al celor două secții și B mulțimea a cărei elemente sint factorii primi ai numărului ce reprezintă planul lunar al secției a doua.

Să se calculeze $C_A B$.

c) Să se determine $A \cap B$.

R. 1 800 perechi; 2 200 perechi.

77. În primul an de existență o cooperativă agricolă de producție a recoltat, de pe un loc de 20 ha semănate cu grâu și 30 ha semănate cu porumb, 1 180 q de cereale. În al doilea an, folosind noi metode agrotehnice înaintate, producția de grâu la ha s-a mărit cu 20%, iar cea de porumb cu 2 q la hectar. În aceste condiții, recolta de pe trei hectare semănate cu grâu întrece cu 1,2 q recolta culeasă de pe două hectare semănate cu porumb. Să se calculeze recolta de grâu și porumb la hectar în fiecare din cei doi ani.

R. I. 17 q grâu și 28 q porumb II. 20 q grâu și 30 q porumb.

78. Un obiect care are masa de 300 g este alcătuit din aur și argint. În apă el cîntărește cu 20 g mai puțin. Să se afle cantitatea de aur și argint din acel obiect, știind că densitatea aurului este de 19 200 kg/m³ și a argintului de 10 500 kg/m³.

Indicație: Fie x și y numerele ce ne arată masa în grame a aurului și a argintului considerat: $x + y = 300$.

Obiectul cufundat în apă este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de apă dezlucit (principiul lui Arhimede); aceasta va fi de 20 de grame. Pe de altă parte raportul dintre masa unui corp și densitatea sa este egală cu volumul său, deci putem scrie ecuația:

$$\frac{x}{19,2} + \frac{y}{10,5} = 20,$$

unde $\frac{x}{19,2}$ și $\frac{y}{10,5}$ sint respectiv, volumele aurului și argintului.

R. $x = 198,62$ g; $y = 101,38$ g.

79. Pentru scopuri tehnice, s-au amestecat 5 l de spirt, de o calitate, cu 7 l de spirt de o altă calitate și s-a obținut spirt de tăria de 65°. Dacă s-ar lua 20 de litri de spirt de prima calitate și 41 de calitate a doua amestecul ar avea tăria de 70°.

Să se determine tăria spirtului de fiecare calitate.

Indicații: Fie x și y țările spirtului de prima, respectiv a doua calitate. Atunci 5 l de spirt de prima calitate conțin $\frac{5x}{100}$ l de alcool pur, 7 l din calitatea a doua conțin $\frac{7y}{100}$ l de alcool pur, iar amestecul lor conține $\frac{12 \cdot 65}{100}$ alcool curat.

(1)

Apoi, 20 l de spirt de prima calitate conțin $\frac{20x}{100}$ alcool, iar 4 l de calitatea a doua conțin $\frac{4y}{100}$.

R. 72°; 60°.

80. O cooperativă agricolă de producție a vândut 3 000 q de cereale și anume: orz, secară și grâu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei și pentru grâu 84 000 de lei. Știind că 6 q de orz costă cât 5 q de secară și că 7 q de secară costă cât 6 q de grâu, să se afle cantitatea de chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Rezolvare: Să notăm cu x , y , z numerele ce reprezintă cantitățile în chintale de orz, secară și grâu vândute de cooperativă $x + y + z = 3\ 000$.

Scriem acum că 6 q de orz costă cât 5 q de secară.

$$\frac{6 \cdot 140\ 000}{x} = \frac{5 \cdot 120\ 000}{y}$$

Apoi, scriem că 7 q de secară costă cât 6 q de grâu:

$$\frac{7 \cdot 120\ 000}{y} = \frac{6 \cdot 84\ 000}{z}$$

$$x = 1\ 400, y = 1\ 000, z = 600$$

R. 100 lei; 120 lei; 140 lei.

81. Două robinete, curgînd împreună, pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore, apoi s-a închis primul robinet și bazinul s-a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet.

a) În cît timp poate să umple bazinul fiecare robinet?

b) Se consideră cifrele scrise în ordinea crescătoare a numerelor ce exprimă timpul în care cele două robinete umple bazinul, elementele mulțimilor A respectiv B . Să se determine $A - B$ și $A \cap B$.

Indicație: Într-o oră ele umplu $\frac{1}{8}$ din bazin. În două ore robinetele au umplut $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

Cel de-al doilea robinet a umplut în 18 ore $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ din bazin și, prin urmare,

întregul bazin îl umple în $18 : \frac{3}{4} = 24$ ore.

Deoarece al doilea robinet a umplut $\frac{1}{24}$ din bazin într-o oră primul va umple într-o oră

$\frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$ din bazin și prin urmare va umple tot bazinul în 12 ore.

R. 12 ore și 24 ore.

82. Un număr de camioane trebuie să transporte o anumită cantitate de materiale, într-un timp stabilit.

Dacă ar fi fost cu 2 camioane mai puțin, ar fi trebuit pentru transportul materialelor cu 2 ore mai mult; dacă ar fi fost cu 4 camioane mai mult, lucrul

s-ar fi terminat cu 2 ore înainte de timpul stabilit. Câte camioane au fost planificate inițial și în cât timp putem executa lucrarea?

Indicație: Notăm cu x numărul de camioane planificate și cu y numărul de ore necesare și procedăm ca în problema precedentă.

R. 8 camioane; 6 ore.

83. Un vapor face pe Dunăre o distanță de 60 km, în susul apei, în 4 ore iar în jos, aceeași distanță și cu aceeași putere a mașinii, în 3 ore. Care ar fi viteza vaporului dacă nu ar fi curentul apei și care este viteza apei?

Indicație: Scriind de fiecare dată ecuația de mișcare $s = vt$, avem pe rând:

$$60 = 4(x - y)$$

$$60 = 3(x + y).$$

R. 17,5 km/oră; 2,5 km/oră.

84. Un hambar are forma unui paralelipiped dreptunghic; se știe că suma celor trei dimensiuni ale sale este 24 m, iar 25% din lungimea bazei împreună cu $33\frac{1}{3}\%$ din lățimea ei sînt cu 6 m mai mici decît înălțimea paralelipipedului.

Raportul dintre lățimea bazei și înălțimea corpului este de $\frac{3}{5}$.

1) Să se afle diagonala paralelipipedului.

2) Să se determine unghiul ce-l formează diagonala paralelipipedului cu planul bazei.

R. Diagonala = $10\sqrt{2}$ m, 45° .

85. Un rezervor de păcură are forma unui cilindru circular drept; media aritmetică între diametrul, generatoarea și diagonala secțiunii axiale a cilindrului este tot atît cît media aritmetică între această diagonală și diametrul cilindrului, ambele medii fiind de 16 m. Se mai știe că diametrul cilindrului este cît $\frac{3}{4}$ din generatoarea sa. La $\frac{1}{4}$ din înălțime față de planul bazei se duce o secțiune paralelă cu baza. Să se determine raportul în care această secțiune împarte diagonala secțiunii axiale, precum și mărimea segmentelor determinate de secțiune pe diagonala secțiunii axiale.

R. Diametrul = 12 m; generatoarea = 16 m; diagonala = 20 m; $\frac{1}{3}$; 5m; 15m.

86. O pică de lemn are forma unei piramide triunghiulare cu perimetrul bazei de 30 cm. Una din laturile bazei este cu 2 cm mai mare decît a doua și cu 2 cm mai mică decît a treia latură. Înălțimea piramidei este de 30 cm. Să se calculeze laturile bazei și volumul piramidei.

R. 8 cm; 10 cm; 12 cm; volumul = $150\sqrt{7}$ cm³.

87. Într-un con generatoarea, înălțimea și raza sînt proporționale cu numerele 5, 4 și 3, iar suma lor este de 48 m. Să se afle aria și volumul sferei înscrise în acel con.

R. $A = 144\pi$ m²; $V = 288\pi$ m³.

88. Un soclu are forma de trunchi de con în care suma razelor împreună cu generatoarea sa este de 2,4 m. Diferența razelor trunchiului este de 6 dm, iar 75% din raza mică întrece cu 1 dm 20% din generatoarea sa. Să se afle volumul trunchiului.

R. 10 dm; $r = 4$ dm; $l = 8$ dm; $V = 416\pi$ dm³.

89. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată se ştie că $\frac{1}{3}$ din apotema bazei mari împreună cu 50% din apotema bazei mici şi cu 25% din apotema trunchiului de piramidă fac 14 metri. Media lor aritmetică este $14\frac{2}{3}$ m, iar raportul dintre apotemele bazelor este $\frac{1}{3}$. Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

R. Apotema bazei mari = 18 m; apotema bazei mici = 6 m;
apotema trunchiului = 20 m; înălţimea = 16 m; $V = 8\,636,160\text{ m}^3$.

90. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, perimetrele celor două baze împreună cu apotema trunchiului reprezintă 61 de metri. Raportul laturilor celor două baze este $\frac{2}{5}$, iar diferenţa dintre latura bazei mari şi apotema trunchiului este de 5 m. Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

R. $L_4 = 10\text{ m}$; $l_4 = 4\text{ m}$; apotema = 5 m; înălţimea = 4 m;
 $V = 208\text{ m}^3$.

91. Diferenţa dintre suma apotemelor bazelor unui trunchi de piramidă hexagonală regulată şi înălţimea lui este 10 cm. Suma apotemelor bazelor este 18 cm, iar raportul lor este $\frac{1}{2}$. Să se afle aria laterală a trunchiului.

R. Apotema bazei mari = 12 cm; apotema bazei mici = 6 cm;
înălţimea = 8 cm; apotema trunchiului = 10 cm; aria

$$\text{laterală} = \frac{1\,080}{\sqrt{3}}\text{ cm}^2 \approx 623\text{ cm}^2.$$

92. Suma dintre raza, înălţimea şi generatoarea unui con circular drept este de 24 m, iar 20% din generatoarea conului reprezintă diferenţa dintre înălţimea şi raza conului. Înălţimea conului este cu 2 cm mai mare decât raza lui. La distanţa de $\frac{3}{4}$ din înălţime, faţă de baza conului, se face o secţiune paralelă cu baza. Să se afle raza cercului de secţiune.

R. $r = 1,5\text{ m}$.

11. Ecuaţii de gradul al doilea cu o necunoscută

Să se rezolve ecuaţiile

1. $5x^2 - 34 = x^2 + 30$

R. $\{-4; 4\}$

2. $(x - 2)^2 + 6x = 4$

R. $\{-2; 0\}$

3. $x^2 - 9x + 8 = 0$

R. $\{1; 8\}$

4. $x^2 + 7x + 10 = 0$

R. $\{-5; 2\}$

5. $6x^2 - 5x + 1 = 0$

R. $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

6. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

R. $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

7. $5x^2 + 14x - 3 = 0.$ R. $\left\{-3; \frac{1}{5}\right\}$
8. $x^2 - 4x + 3 = 0.$ R. $\{1; 3\}$
9. $x^2 + 10x + 24 = 0.$ R. $\{-6; -4\}$
10. $x^2 - 4x - 21 = 0.$ R. $\{-3; 7\}$
11. $x^2 - 4x + 1 = 0.$ R. $\{2 \pm \sqrt{3}\}$
12. $2x^2 = \frac{x^2}{4} + 7.$ R. $\{-2; 2\}$
13. $(3x^2 - 14)2 = 2x^2 + 8.$ R. $\{-3; 3\}$
14. $\frac{x^2}{3} = 2x.$ R. $\{0, 6\}$
15. $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}.$ R. $\{\pm 5\}$
16. $\frac{3x^2 + 5}{10} - \frac{2x^2 - 5}{10} = 1.$ R. $x_1 = x_2 = 0.$
17. $\frac{8x^2}{3} = 5x.$ R. $\left\{0; \frac{15}{8}\right\}$
18. $(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2 = 4x + 3.$ R. $\left\{\frac{2}{3}; 4\right\}$
19. $(x + 5)(x - 4) + 3(x + 2)(x - 3) = (x + 3)^2 + 13.$ R. $\left\{-\frac{10}{3}; 6\right\}$
20. $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{25}{12}.$ R. $\{-7; 7\}$
21. $\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} = 0.$ R. $\left\{\frac{-6 - \sqrt{3}}{3}; \frac{-6 + \sqrt{3}}{3}\right\}$
22. $\frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1}.$ R. $x = 2.$
23. $\frac{2x + 1}{x + 3} - \frac{x - 1}{x^2 - 9} = \frac{x + 3}{3 - x} - \frac{4 + x}{3 + x}.$ R. $\left\{-\frac{5}{4}; 1\right\}$
24. $\frac{x}{2x - 1} + \frac{25}{4x^2 - 1} = \frac{1}{27} - \frac{13}{1 - 2x}.$ R. $x = 13.$
25. $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x + 2}{x - 2} - \frac{2x + 13}{x + 1} = 0.$ R. $\left\{\frac{6}{5}; 5\right\}$
26. $ax^2 + bx = 0.$ R. $\left\{-\frac{b}{a}; 0\right\}$
27. $(x - a)^2 + (x - b)^2 = a^2 + b^2.$ R. $\{a + b; 0\}$
28. $n^2x^2 + mx = m^2x^2 + nx.$ R. $\left\{\frac{1}{m + n}; 0\right\}$

29. $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$. R. $\left\{\frac{3a}{2}; 0\right\}$
30. $x^2 = 9a^2b^2$. R. $\{\pm 3ab\}$
31. $\frac{x-a}{a} = \frac{a}{x-a}$. R. $\{2a; 0\}$
32. $\frac{x+a}{x+b} = \frac{a-x}{x-b}$. R. $\{\pm \sqrt{ab}\}$
33. $1 + 2x + x^2 = n^2 \left(1 + \frac{2x}{n^2} + \frac{x^2}{n^4}\right)$ R. $\{\pm n\}$
34. $\frac{ax}{a+1} + \frac{a+1}{ax}$. R. $\left(\pm \frac{a+1}{a}\right)$
35. $ax^2 - b^3 = a^3 - bx^2$. R. $\{\pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}\}$
36. $\frac{2a+b-x}{2b+a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+b}{x+a}$. R. $\{a; b\}$
37. $\frac{4a+3b-x}{4b+3a-x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{2a+3b+x}{2b+3a+x}$. R. $\{a; b\}$

12. Graficul funcției de gradul II

Intrucît în numeroase probleme de fizică și tehnică se întîlnesc funcții de gradul II, este util pentru aplicațiile practice, precum și pentru urmărirea desfășurării fenomenelor respective să știm cum se reprezintă grafic o funcție de gradul II.

Reprezentarea funcției: $y = ax^2$.

Presupunem $a > 0$; observăm de la început că valorile acestei funcții se obțin din funcția $y = x^2$ (fig. IV.1), înmulțind valorile acesteia cu a ; deci și ordonatele diagramei funcției $y = ax^2$ vor fi de a ori mai mari decît ordonatele parabolei $y = x^2$.

Cînd $a > 1$, produsul ax^2 este mai mare ca x^2 , deci ordonatele funcției $y = ax^2$ sînt mai mari pentru aceeași valoare a lui x decît ordonatele funcției, $y = x^2$.

Curba are aceeași formă ca $y = x^2$, numai că este mai apropiată de axa Oy .

Cînd $a < 1$, produsul ax^2 este mai mic decît x^2 , deci ordonatele funcției $y = ax^2$ vor fi mai mici decît ale parabolei $y = x^2$. Curba este mai deschisă, adică mai depărtată de axa Oy .

Pentru a exemplifica cele găsite mai sus pe cale de raționament, să facem tabelul și reprezentarea grafică a funcțiilor:

$$y = 2x^2 \quad \text{și} \quad y = \frac{1}{3}x^2.$$

Am ales pentru prima funcție intervalul $[-2, 2]$:

x		...	- 2	- 1	0	1	2	...
y		...	8	2	0	2	8	...

Pentru funcția $y = \frac{1}{3} x^2$ am ales intervalul $[-3,3]$:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3	...

În figura IV.2 sînt reprezentate ambele diagrame.

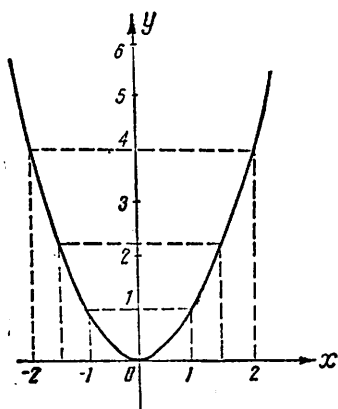


Fig. IV.1

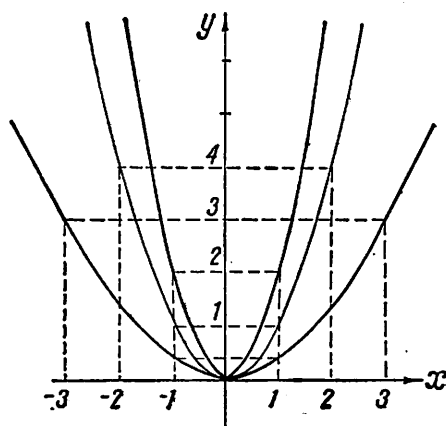


Fig. IV.2

Observare. Cînd a crește, parabola se strînge, adică se apropie de axa Oy . Cînd a descrește, curba se desface, adică se depărtează de Oy , pînă cînd pentru $a = 0$ se așterne peste axa Ox .

Presupunem acum $a < 0$; $y = -\frac{1}{3} x^2$. Dacă facem compararea cu parabola

$y = \frac{1}{3} x^2$, observăm că la fiecare valoare a lui x , ordonata funcției

$y = -\frac{1}{3} x^2$ este egală, dar de semn contrar cu aceea a parabolei $y = \frac{1}{3} x^2$.

Punctele rezultate sînt simetrice față de axa Ox și deci cele două curbe sînt în întregime simetrice față de axa Ox .

De aici rezultă că funcția $y = -\frac{1}{3} x^2$ are ca reprezentare grafică o parabolă

simetrică parabolei $y = \frac{1}{3} x^2$ față de axa Ox , prin urmare este în întregime așezată sub axa Ox . Cele două parabole au un punct comun (fig. IV.3) în originea axelor de coordonate.

Observare. Din $y = ax^2$ rezultă că valorile y sînt proporționale cu pătratele valorilor lui x .

De exemplu, aria cercului este proporțională cu pătratul razei $A = \pi R^2$.

38. Să se figureze în raport cu două axe dreptunghiulare punctele următoare: $A(3,2)$; $B(3, 1)$; $C(-1,2)$; $D(5, 3)$; $M(5, 0)$; $N(-5,0)$; $P(0, -4)$; $Q(0,3)$, $O(0,0)$; $L(-3, -2)$; $E(4,4)$; $G(-6,6)$.

39. Să se calculeze distanța de la origine pînă la punctul $M(3,4)$.

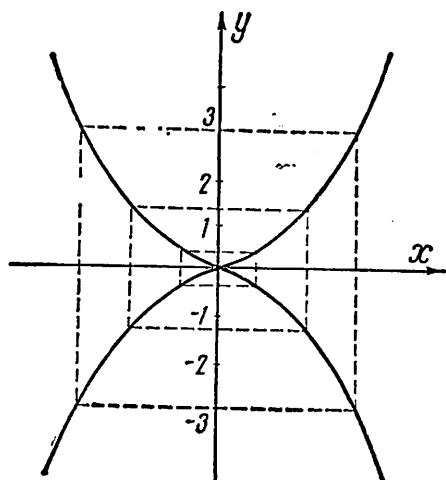


Fig. IV.3

40. Să se reprezinte grafic:

$$y = x + 1;$$

$$y = 3 + x;$$

$$x = y + 3;$$

$$y = 2x - 3;$$

$$x + y = 6;$$

$$y = \frac{1}{2}x + 3;$$

$$y = x - 1;$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{8};$$

$$y = -2y + 1;$$

$$y = 0,7x + 2.$$

$$x - y = 6;$$

41. Să se construiască dreptele:

$$3y + x = 0; y = \frac{1}{2}x - 2;$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1; y = \frac{1}{2}x + 1;$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2; x + y + 3 = 0; 4x + 3y = 18.$$

42. Să se verifice pe cale grafică dacă dreptele ce au ecuațiile $5x - y = 7$, $x - 4y + 10 = 0$, $2x + 3y = 13$ se întâlnesc în același punct.

43. Să se reprezinte grafic variația lungimii unui cerc în funcție de raza cercului ($\pi = 3,14$), luând pentru R valorile 1, 2, 3, 4, 5 (cm).

44. Un dreptunghi are baza de 3 m și înălțimea variabilă. Să se reprezinte grafic variația ariei dreptunghiului în funcție de înălțime.

45. Un pieton a plecat din oraș la ora 12 și a mers cu o viteză constantă de 3 km pe oră. La ora 14 pleacă pe același drum un alt pieton și merge cu o viteză de 4,5 km pe oră. La ce oră și la ce distanță de oraș ajunge al doilea pieton pe cel dintâi.

Soluția grafică.

46. Să se reprezinte grafic funcțiile următoare:

$$y = x^2; y = \frac{1}{2}x^2; y = 2x^2; y = -x^2;$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2; y = -3x^2; y = \frac{x^2}{5}.$$

47. Să se reprezinte grafic variația ariei pătratului în funcție de latura sa.

48. Să se reprezinte grafic variația ariei cercului în funcție de raza sa.

13. Probleme care conduc la ecuații de gradul II

1. Produsul a două numere cu soț consecutive este 224. Care sînt aceste două numere?

R. 14, 16 sau -16, -14.

2. Suma pătratelor a trei numere cu soț consecutive este 116. Să se afle aceste numere.

R. 4; 6; 8.

3. Suma a două numere este 42 și produsul lor 432. Să se găsească cele două numere.

R. 18; 24.

4. Suma a două numere este 16, diferența pătratelor lor este 32. Să se găsească cele două numere.

R. 9; 7.

5. Un obiect se vinde cu 39 lei câștigându-se atît la sută cît a costat obiectul. Care a fost costul obiectului?

R. 30 lei.

6. Un dreptunghi cu diagonala de 25 m are aria de 300 m². Să se calculeze dimensiunile dreptunghiului.

R. 20 m; 15 m.

7. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel: pe una din catete se construiește în afara triunghiului un triunghi echilateral și pe cealaltă catetă un pătrat. Se unesc cele două vîrfuri consecutive ale acestor două figuri și se cere să se determine laturile triunghiului, în așa fel ca aria totală a figurii obținute să fie egală cu a^2 (cantitate constantă dată).

Indicație: Fie x o catetă a triunghiului dreptunghic isoscel; vom avea ecuația problemei.

$$\frac{x^2}{2} + x^2 + \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = a^2$$

$$R. x = \frac{a\sqrt{2}}{3 + \sqrt{3}} \quad b = \frac{2a}{3 + \sqrt{3}}.$$

8. Într-un triunghi dreptunghic, o catetă este $\frac{3}{4}$ din cealaltă catetă, iar ipotezuza este de 10 cm. Să se afle mărimea catetelor.

R. 8 cm; 6 cm.

9. Într-un triunghi, baza este de trei ori mai mare decît înălțimea. Aria triunghiului este de 37,50 cm². Să se afle baza și înălțimea triunghiului.

R. $B = 15$ m; $h = 5$ m.

10. Într-un dreptunghi o latură este de 5 ori mai mare decît cealaltă, iar aria dreptunghiului este de 80 cm². Se cer laturile dreptunghiului.

R. 20 cm; 4 cm.

11. Dacă mărim o latură a unui pătrat cu 9 cm și micșorăm o altă latură tot cu 9 cm, obținem cu aceste noi dimensiuni un dreptunghi cu aria de 144 cm². Să se afle latura pătratului.

R. 15 cm.

12. Care este baza sistemului de numerație în care numărul 417 din sistemul zecimal se scrie 513?

R. 9.

13. Care va fi raza unui cerc pentru ca aria pătratului înscris în acel cerc să fie de 86,50 m².

R. $R \approx 6,57$ m.

14. În mijlocul C al unui segment AB de 18 m se ridică o perpendiculară CD de 3 m. Care este raza cercului ce trece prin punctele A , D și B ?

Indicație. Se aplică relațiile metrice ale triunghiului dreptunghic.

R. $R = 15$ m.

15. Într-un cerc cu raza de 3 m se duce o coardă de 1 m. Să se afle distanța acestei coarde față de centrul cercului.

R. $\frac{\sqrt{35}}{2}$ m.

16. Să se calculeze cu aproximație de 0,01 raza unui cerc, știind că dacă această rază crește cu 1 cm, aria cercului se mărește cu 1m^2 .

R. 15, 92 m.

17. Două cercuri concentrice formează o coroană lată de 3 m, a cărei arie este de $122,46\text{ m}^2$. Să se afle raza cercurilor (se va considera $\pi = 3,14$).

R. 8 m; 5 m.

18. Un mobil se mișcă uniform accelerat, ecuația mișcării fiind $s = 3t^2 - 28t$; timpul final dat în secunde, iar spațiul în metri, să se afle după cât timp de la momentul inițial a străbătut 20 de metri.

R. 10 s.

19. Să se calculeze adâncimea unui puț, știind că au trecut 4 s de la momentul lăsării unei pietre în acel puț până la momentul auzirii zgomotului pe care piatra l-a produs lovind fundul puțului.

R. 70,5 m.

20. Comandantul unui regiment format din 1 066 de oameni așază oamenii săi în două grupe pătrate; pe latura unuia dintre pătrate se găsesc patru oameni mai mult decât pe latura celuilalt pătrat. Câți oameni se găsesc într-un șir din fiecare pătrat?

R. 21; 25.

21. Suma pătratelor a trei numere cu soț, consecutive, este 200. Să se afle aceste numere.

R. 6; 8; 10.

22. Două robinete umplu un bazin în 6 ore. Primului robinet îi trebuie cu 5 ore mai puțin decât celui de-al doilea ca să umple bazinul. În cât timp poate umple fiecare robinet, singur, bazinul.

R. 10 ore; 15 ore.

23. Alegem un număr întreg și pozitiv, scriem la dreapta sa cifra 7 și înmulțim numărul astfel format cu numărul ales la început. Produsul este 111. Să se afle numărul inițial.

R. 3.

24. Doi muncitori, lucrând împreună, pot face o anumită lucrare în 12 ore. Dacă ar lucra separat, primul lucrător ar termina lucrarea cu 10 ore mai repede ca celălalt. În cât timp ar face fiecare, singur, lucrarea?

R. 20 de ore și 30 de ore.

25. Prețul de cost al unui obiect este la început de 25 de lei; după două reduceri consecutive cu același număr de procente, prețul a scăzut la 20,25 de lei. Cu cât la sută a scăzut prețul de cost la fiecare reducere?

R. 10%.

26. Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza este cu 9 cm mai mare decât o catetă și cu 18 cm mai mare decât cealaltă. Să se afle laturile acestui triunghi dreptunghic.

R. 27 cm; 36 cm; 45 cm.

27. Dacă micșorăm o latură a unui pătrat cu 2 m, iar o altă latură cu 5 m, suprafața dreptunghiului obținut cu aceste dimensiuni este de 40 m². Să se afle latura pătratului.

R. 10 m.

28. Laturile unui triunghi dreptunghic se exprimă prin trei numere consecutive. Să se afle aceste numere (dimensiunile sînt în dm).

R. 6 dm; 8 dm; 10 dm.

29. Un tren a fost reținut 16 min și a recuperat întârzierea pe o distanță de 80 km, mărind viteza cu 10 km pe oră. Să se afle viteza inițială a trenului.

R. 50 km pe oră.

30. Înălțimea unui paralelipiped dreptunghic este de 10 m. O latură a bazei este doinitul celeilalte. Aria totală este 216 m². Să se afle:

a) Dimensiunile bazei;

b) Aria fiecăreia din fețele laterale.

Indicație. Notînd cu x cea mai mică din laturile bazei, se obține ecuația:

$$2(x \cdot 2x) + 2x \cdot 10 + 2(2x) \cdot 10 = 216.$$

R. a) 3 m; 6 m; b) $A_1 = 30 \text{ m}^2$; $A_2 = 60 \text{ m}^2$.

31. Volumul unui trunchi de con este de 21,98 m³; trunchiul de con are înălțimea de trei metri, iar raza bazei mici de 1 m. Să se afle raza bazei mari.

R. 2 m.

32. Aria laterală a unui cilindru este de 11,304 m² iar suma diametrului și a generatoarei sale este de 4,2 m. Să se afle raza și generatoarea cilindrului.

R. $R = 0,6 \text{ m}$; $G = 3 \text{ m}$.

33. Se construiește un rezervor avînd forma unui trunchi de con cu înălțimea de 6 m. Volumul rezervorului este de 383,08 m³, iar diferența dintre raza bazelor este 1 m. Să se afle razele bazelor.

R. $R = 5 \text{ m}$; $r = 4 \text{ m}$.

34. Un agregat dintr-o uzină chimică are forma unui trunchi de con, avînd raza bazei mici de 4 m, iar aria laterală de 314 m². Raportul dintre generatoare și raza bazei mari este de $\frac{5}{3}$. Să se afle generatoarea și raza bazei mari.

R. $G = 10 \text{ m}$; $R = 6 \text{ m}$.

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

II. Probleme de geometrie în spațiu

1. Probleme

1. Fie triunghiul echilateral cu aria de 692 cm^2 ce are ca proiecție pe un plan un triunghi isoscel cu aria 346 cm^2 . Știind că două din virfurile triunghiului echilateral sînt situate în plan, să se afle distanța virfului al treilea al triunghiului echilateral la planul de proiecție (se va lua $\sqrt{3} = 1,73$).

R. distanța 30 cm.

2. Catetele unui triunghi dreptunghic ABC sînt 12 și 16 cm. Din virful unghiului drept A este dusă pe planul triunghiului perpendiculara AD , lungă de 28 cm.

Să se afle aria triunghiului BCD .

Indicație. Înălțimea triunghiului BCD se poate afla folosind teorema celor trei perpendiculare.

R. Aria $BCD = 296 \text{ cm}^2$.

3. O placă în formă de triunghi isoscel ABC stă înclinată față de un plan, astfel că BC (baza triunghiului) de 50 cm se află în plan, iar virful A se găsește la distanța de 24 cm de plan.

Să se afle aria acestei plăci, știind că distanța de la piciorul perpendicularei coborîte din virful A al triunghiului pe plan la baza BC a triunghiului este de 10 cm.

Indicație. Prin teorema celor trei perpendiculare se află înălțimea triunghiului.

R. 650 cm^2 .

4. Un paralelipiped dreptunghic are volumul de 480 dm^3 , lungimea și lățimea bazei respectiv de 8 dm și 6 dm. Să se calculeze: 1) aria totală; 2) diagonala paralelipipedului; 3) să se afle cîte grade are unghiul dintre diagonala bazei și diagonala paralelipipedului.

R. 376 dm^2 ; $10\sqrt{2}$; 45° .

5. Un perete are forma unui paralelipiped dreptunghic lung de 12 m, înalt de 3 m și gros de 0,30 m. Acest perete are o ușă largă de 1,20 m și înaltă de 1,90 m. Să se afle volumul zidăriei peretelui.

Indicație. $V_{\text{zid}} = V_1 - V_2$, unde am notat:

V_1 — volumul prisme cu dimensiunile 3 m; 12 m; 0,30 m;

V_2 — volumul prisme cu dimensiunile 1,20 m; 1,90 m; 0,30 m.

R. Volumul peretelui = $10,116 \text{ m}^3$.

6. Dintr-o groapă de var adîncă de 3 m, lungă de 5,2 m și lată de 4,5 m se scoate varul și se transportă cu o căruță avînd forma unei prisme cu baza un trapez. Căruța e lungă de 2 m, bazele trapezului sînt de 0,8 m și 0,4 m și înălțimea bazei de 0,5 m. Cîte căruțe sînt necesare?

R. 117 căruțe.

7. Dintr-un trunchi de arbore, lung de 4 m, avînd secțiunea un cerc de diametru 3 dm, s-a cioplit un paralelipiped avînd ca bază un pătrat cu diagonala cît diametrul trunchiului. Să se afle volumul paralelipipedului, știind că din lungimea trunchiului nu s-a cioplit nimic.

R. 180 dm^3 .

8. Dintr-un bazin prismatic, cu baza în formă de hexagon regulat cu latura de 2 m, plin cu petrol pînă la o înălțime de 1,8 m, se scurge petrolul în alt bazin în formă de paralelipiped cu baza un pătrat, avînd latura de 2,4 m. Pînă la ce înălțime se va ridica petrolul în bazinul al doilea?

R. $1,8 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$

9. Cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghic sînt proporționale cu numerele 5,2 și 4, iar suma lor este de 27,5 cm. Să se afle aria laterală și volumul lui.

R. $Al = 350 \text{ cm}^2$;
 $V = 625 \text{ cm}^3$.

10. Care este masa unei grinzi de fier în formă de prismă, lungă de 1,50 m și avînd secțiunea un pătrat cu diagonala de $4\sqrt{2} \text{ cm}$? Densitatea fierului este 7800 kg/m^3 .

R. $18,72 \text{ kg}$.

11. O prismă hexagonală regulată are înălțimea de 3 m și latura bazei de 2 m. Să se afle lungimea celei mai mari diagonale a prisme, aria totală și volumul ei.

R. diagonala = 5 m;
aria bazei = $6\sqrt{3} \approx 10,38 \text{ m}^2$;
aria totală = $36 + 2 \cdot 10,38 = 56,76 \text{ m}^2$
volumul = $18\sqrt{3} \text{ m}^3$.

12. Să se afle raportul între volumele a două paralelipipe cu baza pătrată, știind că fiecare are înălțimea cît latura bazei celuilalt. Aceeași problemă pentru prisme hexagonale regulate.

R. Raportul $\frac{l_1}{l_2}$ al laturilor.

13. O cutie are forma de prismă hexagonală regulată. Latura hexagonului este de 2 dm, iar muchia laterală este de 5 dm. Să se afle aria laterală și volumul cutiei.

R. 60 dm^2 și $30\sqrt{3} \text{ dm}^3$

14. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt: 15 m, 50 m și 36 m. Să se afle muchia cubului echivalent lui (avînd același volum).

Indicație. Se află volumul paralelipipedului, se observă că rezultatul este un cub perfect.

R. $L = 30 \text{ m}$.

15. O prismă hexagonală regulată are latura bazei de 18 cm, înălțimea prisme fiind $\frac{2}{3}$ din apotema poligonului de bază. Care este volumul prisme?

R. 8748 cm^3 .

16. O prismă hexagonală regulată are aria laterală de $480\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar înălțimea de $10\sqrt{3} \text{ cm}$. Să se afle volumul prisme.

R. $V = 2880 \text{ cm}^3$.

17. Volumul unei prisme hexagonale regulate este de $2\,160\sqrt{3}\text{ cm}^3$, iar latura bazei de 12 cm. Să se afle aria laterală?

R. $A_l = 720\text{ cm}^2$.

18. O prismă triunghiulară regulată are aria laterală de $144\sqrt{3}\text{ cm}^2$ iar înălțimea de 8 cm. Să se afle volumul prisme.

R. $V = 216\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

19. O plută este formată din 16 grinzi cu secțiunea dreptunghiulară, fiecare avînd lungimea de 3,6 m, lățimea de 2 dm și grosimea de 25 cm. Care este volumul și masa plutei, știind că densitatea lemnului este de 600 kg/m^3 .

R. $V = 2,88\text{ m}^3$; $G = 1\,728\text{ kg}$.

20. Pe o suprafață dreptunghiulară cu lungimea de 4,5 m și lățimea de $\frac{2}{3}$ din lungime se instalează un rezervor pentru apă cu o capacitate de 540 hl. Să se afle înălțimea rezervorului.

R. $l = 4\text{ m}$.

21. O prismă de lemn are ca bază un pătrat cu diagonalele de $12\sqrt{2}\text{ cm}$. Știind că masa prisme este de 30,240 kg, iar densitatea sa este de 600 kg/m^3 , să se afle înălțimea prisme.

R. $l = 3,5\text{ m}$.

22. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 26 cm și o catetă de 10 cm. Știind că aria laterală a prisme este de $1\,800\text{ cm}^2$, să se afle volumul prisme.

R. $3\,600\text{ cm}^3$.

23. Acoperișul unui turn are forma unei piramide regulate hexagonale, cu latura bazei de 4 m, iar muchia laterală de 4,8 m. Pentru a înveli acoperișul se folosesc foi de tablă dreptunghiulare, cu dimensiunile de 80 cm și 60 cm; știind că pierderea (deșeurilor) reprezintă 25% din suprafața acoperișului, să se afle cîte foi de tablă sînt necesare.

R. 137 de foi.

24. Un vas de fier are forma unei prisme hexagonale regulate. Latura bazei este de 0,6 m, iar înălțimea vasului de $0,25\sqrt{3}\text{ m}$. Vasul este așezat cu virful în jos și printr-un orificiu făcut în virf se scurge lichidul din el. Dacă în fiecare minut se scurg în medie 5 litri, în cît timp se golește vasul (presupus plin)?

R. 27 min.

25. O piramidă regulată are ca bază un triunghi înscris într-un cerc cu raza de 12 cm, iar aria laterală este de $1\,080\text{ cm}^2$. Să se afle volumul piramidei.

R. $216\sqrt{97}\text{ cm}^3$.

26. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 dm. Înălțimea piramidei este cît înălțimea triunghiului de bază. Să se calculeze volumul acestei piramide.

Indicație: Înălțimea triunghiului de bază $= 3\sqrt{3}\text{ dm}$.

Aria bazei $= 9\sqrt{3}\text{ dm}^2$.

R. Volumul piramidei $= 27\text{ dm}^3$

27. O piramidă regulată are ca bază un pătrat cu diagonala de $30\sqrt{2}$ cm, iar înălțimea de 2 ori cît apotema bazei. Să se afle volumul piramidei.

$$R. V = 9\,000 \text{ cm}^3.$$

28. O piramidă regulată hexagonală are latura bazei de 8 cm. Știind că înălțimea este triplul apotemei bazei, să se afle volumul piramidei.

$$R. V = 1\,152 \text{ cm}^3.$$

29. Într-o piramidă regulată pătratică, latura bazei este 1m, iar aria laterală este de 260 dm^2 . Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

$$\begin{aligned} R. \text{ apotema} &= 13 \text{ dm}; \\ \text{muchia} &= 13,96 \text{ dm}; \\ \text{volumul} &= 400 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

30. O piramidă are ca bază un pătrat înscris într-un cerc cu raza $15\sqrt{2}$ cm, iar aria ei laterală este de $1\,500 \text{ cm}^2$. Să se afle volumul piramidei.

$$R. V = 6\,000 \text{ cm}^3.$$

31. Cîți lucrători sînt necesari pentru a săpa în 6 ore un șanț de scurgere a apei lung de 25 m, avînd drept secțiune un trapez cu bazele de 1,10 m și 0,70 m, iar înălțimea de 0,60 m, dacă un lucrător sapă într-o oră $0,75 \text{ m}^3$?

$$R. 3 \text{ lucrători.}$$

32. Latura unei piramide triunghiulare regulate este de $6\sqrt{3}$ cm, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45° . Să se afle volumul piramidei.

Indicație. Se va calcula raza cercului circumscris. Se va considera triunghiul dreptunghic format de muchia, înălțimea piramidei și raza cercului circumscris.

$$R. V = 54\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

33. Într-o piramidă patrulateră regulată aria laterală este de 960 cm^2 , iar aria totală de $1\,536 \text{ cm}^2$. Să se calculeze volumul piramidei.

$$R. V = 3\,072 \text{ cm}^3.$$

34. Într-o piramidă patrulateră regulată, muchia laterală este de 25 m, iar latura bazei de 30 m. Să se afle aria laterală și volumul ei.

$$R. Al = 1\,200 \text{ m}^2; V = 1\,500\sqrt{7} \text{ m}^3.$$

35. O piramidă patrulateră regulată are volumul de $18\,432,7 \text{ cm}^3$, iar latura bazei de 48 cm. Să se afle aria laterală.

$$R. Al = 4\,608,2 \text{ cm}^2.$$

36. Un cort are forma unei prisme patrulatere regulate, iar deasupra o piramidă regulată. Latura bazei este de 4 m, înălțimea prisme de 3,2 m și înălțimea piramidei de 1,5 m. Pinza folosită pentru acest cort are lățimea de 0,80 m. Cîți metri de pînză se vor folosi?

$$R. 89 \text{ m.}$$

37. Latura unei piramide hexagonale regulate este de 6 cm. Unghiul diedru format de o față laterală cu baza este de 45° . Să se afle volumul piramidei.

$$R. V = 162 \text{ cm}^3.$$

38. Baza unei piramide este un romb cu latura de 25 dm și diagonala mică de 30 dm. Înălțimea piramidei cade în centrul rombului și este egală cu diagonala mare a rombului. Să se afle volumul piramidei.

$$R. V = 8 \text{ m}^3.$$

39. Aria laterală a unei coloane cilindrice cu înălțimea de 10 m este de $31,40 \text{ m}^2$. Să se afle volumul și masa coloanei, știind că este făcută din piatră, cu densitatea $3\,000 \text{ kg/m}^3$.

$$\text{R. } V = 2,5 \text{ m}^3; G = 23,55 \text{ t.}$$

40. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2} \text{ cm}$. Să se calculeze volumul și aria laterală a cilindrului.

$$\begin{aligned} \text{R. Latura pătratului bazei} &= 6 \text{ cm}; \\ \text{volumul} &= 54 \pi \text{ cm}^3; \\ \text{aria laterală} &= 36 \pi \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

41. Pe coșul cilindric al unei fabrici înalt de 15 m și cu diametrul de 1 m, s-a depus un strat de funingine gros de 5 cm. Ce volum de funingine se scoate la curățarea coșului?

$$\text{R. } 2,237 \text{ m}^3.$$

42. Un cazan de apă în formă de cilindru are diametrul de 50 cm, iar lungimea lui este egală cu 3,6 m. Cât de mare este presiunea vaporilor pe suprafața totală a cazanului, dacă pe un centimetru pătrat presiunea vaporilor este de 10 kg?

Indicație. Se va calcula aria totală în centimetri pătrați, apoi presiunea vaporilor.

$$\begin{aligned} \text{R. Aria totală} &= 6 \text{ m}^2; \\ \text{presiunea} &= 604\,450 \text{ kg.} \end{aligned}$$

43. Un dreptunghi are lungimea a și lățimea b . Să se afle raportul volumelor celor doi cilindri obținuți când se rotește dreptunghiul în jurul lungimii și apoi în jurul înălțimii sale.

$$\text{R. } \frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi ab^2}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}.$$

44. Un puț adânc de 10 m are căptușeala formată dintr-o zidărie cilindrică groasă de 50 cm. Dacă diametrul interior este de 3 m, care este volumul zidului?

Indicație. Se va calcula: raza interioară, raza exterioară, aria bazei (având forma unei coroane circulare), apoi volumul.

$$\text{R. } V = 17,5 \text{ m}^3.$$

45. Într-un cilindru, raza bazei este de 2 cm, iar înălțimea de 7 cm. Să se determine raza unui cerc a cărui arie este echivalentă cu aria totală a cilindrului.

$$\text{R. } 6 \text{ cm.}$$

46. Să se calculeze volumul unui cilindru echilateral a cărui arie laterală este de $100 \pi \text{ cm}^2$.

Indicație. Se va considera secțiunea axială care este un pătrat; se va calcula apoi raza.

$$\text{R. } V = 250 \pi \text{ cm}^3.$$

47. Aria laterală a unui cilindru fiind de $72 \pi \text{ cm}^2$, care este volumul său dacă înălțimea este dublul diametrului bazei?

$$\text{R. } V = 108 \pi \text{ cm}^3.$$

48. Dintr-o bucată de lemn în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile bazei de 2,4 m, 1,5 m și înălțimea de 0,6 m, se scot forme cilindrice cu diametrul de 30 cm, având aceeași înălțime ca bucata de lemn. Câte forme se pot scoate din această bucată de lemn și ce cantitate de lemn se pierde?

$$\text{R. } 40 \text{ de forme; } V = 0,47 \text{ m}^3.$$

49. Cablul telefonic este îmbrăcat într-un înveliș de plumb. Știind că diametrul cablului este de 2 cm, iar grosimea învelișului de 2 mm, să se afle masa plumbului pentru un cablu de 10 km lungime, știind că densitatea plumbului este $11\,400\text{ kg/m}^3$.

Indicație. Se va calcula aria coroanei circulare, volumul și apoi masa.

$$\text{R. Masa} = 157,5\text{ t.}$$

50. O coloană are forma unui cilindru de 7 m înălțime. Lungimea bazei este de 12,56 m. Cît va costa vopsirea cu ulei a acestei coloane știind că 1 kg de ulei costă 20 de lei, că pentru vopsirea unui metru pătrat trebuie 300 g, iar pentru lucru se plătește 5 lei pe metru pătrat?

$$\text{R. } 967,1\text{ lei}$$

51. Un con are raza bazei egală cu jumătate din generatoarea. Aria totală a conului fiind 2 cm^2 , să se calculeze: 1) raza bazei, 2) înălțimea, 3) volumul.

$$\text{R. } 1) r = \sqrt{\frac{3}{9,42}}\text{ cm} \approx 0,4\text{ cm.}$$

$$2) r \sqrt{3}\text{ cm.}$$

$$3) \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}\text{ cm}^3.$$

52. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Conul este înscris într-o sferă. Să se calculeze volumul sferei.

$$\text{R. Raza sferei} = 6,25\text{ m.}$$

53. Raza bazei unui con circular drept este 3 m. Secțiunea sa paralelă la bază la o distanță de 3 m de vîrf are raza de 2 m. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

$$\text{R. volumul} = 42,390\text{ m}^3$$

$$\text{aria laterală} = 50,8680\text{ m}^2.$$

54. Se dă un con cu raza de 15 cm; la distanța de 24 cm de vîrf se face o secțiune paralelă cu baza. Generatoarea conului obținut este de 26 cm. Care e volumul conului inițial?

$$\text{R. } V = 2\,700\pi\text{ cm}^3.$$

55. La o cooperativă agricolă de producție, după ce griul a fost treierat, a fost așezat la arie într-o grămadă de formă conică, cu lungimea cercului de bază de 10,99 m și generatoarea de 2,94 m. Cîți saci de cîte un hectolitru se vor umple cu acest griu?

$$\text{R. Se pot umple 75 de saci și încă unul cu 0,64 hl.}$$

56. Aria unei sfere este de $9\pi\text{ cm}^2$. Care este volumul?

$$\text{R. } V = 4,5\pi\text{ cm}^3.$$

57. Tăind o sferă printr-un plan așezat la 2 cm de centru se obține ca secțiune un cerc cu aria de $2,25\pi\text{ cm}^2$. Care este aria și volumul acestei sfere?

Indicație. Se va afla întii raza cercului de secțiune, apoi raza sferei.

$$\text{R. Aria} = 25\pi\text{ cm}^2; V = \frac{62,5}{3}\pi\text{ cm}^3.$$

58. O parte din acoperișul unui ateneu avînd forma unei jumătăți de sferă este învelit cu tablă groasă de 3 mm. Ce masă are tabla întrebuințată, știind că densitatea tablei este de 8.500 kg/m^3 , iar raza sferei este de 3,6 m?

Indicație. Se va calcula volumul interior și exterior.

R. Masa $\approx 2 \text{ t}$.

59. Un cazan pentru păcură are forma de cilindru, prevăzut la capete cu cîte o jumătate de sferă. Lungimea cazanului este de 10 m, iar diametrul lui este de 4 m. Să se afle capacitatea lui. Cîte cazane sînt necesare pentru a umple un rezervor mare cilindric, înalt de 20 m și cu lungimea cercului de bază de $40\pi \text{ m}$?

Indicație. Pentru a afla capacitatea cazanului se află întîi volumul și apoi se ține seama de relație: $1 \text{ m}^3 \approx 10 \text{ hl}$.

$$R. = \frac{1\,520\pi}{3} \text{ hl}; 16 \text{ cazane.}$$

60. Într-o sferă cu diametrul de $12\sqrt{2} \text{ cm}$ este înscris un cilindru echilateral. Să se calculeze raza și înălțimea cilindrului, aria laterală și volumul lui.

$$R. r = 6 \text{ cm}; l = 12 \text{ cm};$$

$$Al = 144\pi \text{ cm}^2; V = 432\pi \text{ cm}^3.$$

61. Într-o sferă cu raza de 6 cm este înscris un con echilateral. Să se afle elementele conului (raza, generatoarea, înălțimea), aria laterală și volumul lui.

$$R. R = 3\sqrt{3} \text{ cm}; G = 6\sqrt{3} \text{ cm};$$

$$l^2 = (6\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{3})^2 = 108 - 27 = 81;$$

$$l = 9 \text{ cm}; Al = 54\pi \text{ cm}^2; V = 81\pi \text{ cm}^3;$$

62. Unui cub cu latura de 8 cm i se circumscrie o sferă. Să se afle aria sferei.

$$R. \text{ Aria sferei} = 192\pi \text{ cm}^2.$$

63. Care este raportul dintre suprafața Pămîntului și aceea a Lunii, știind că diametrul Pămîntului este egal cu $3\frac{2}{3}$ ori diametrul Lunii?

$$R. \frac{121}{9}.$$

64. O sferă are raza de 5 cm; se duce o secțiune la 3 cm de centru. Să se afle volumul conului care are virful în centrul sferei, iar ca bază secțiunea obținută.

$$R. V = 50,240 \text{ cm}^3.$$

65. O grămadă de piatră spartă are forma conică cu baza de 2,8 m și generatoarea de 3,5 m. Cîte căruțe trebuie pentru a transporta piatra spartă, depozitată în 10 grămezi, știind că un metru cub de piatră cîntărește 3 t, iar într-o căruță se încarcă 500 kg?

$$R. 1\,034 \text{ de căruțe.}$$

66. Într-o mină s-a întrebuințat un explozibil care a produs în pămînt, prin explozie, o pilnie cu un diametru de 4 m, adîncimea pilniei fiind de 1,5 m. Ce cantitate de pămînt se aruncă, știind că 1 m^3 de pămînt cîntărește 1 650 kg?

$$R. \approx 10 \text{ t.}$$

67. Aria laterală a unui con este de $80 \pi \text{ cm}^2$, iar diametrul de 16 cm. Să se afle volumul acestui con?

R. $128 \pi \text{ cm}^3$.

68. Se dă o prismă hexagonală regulată. Diagonala unei fețe laterale este egală cu $2a \text{ cm}$ și face cu muchia laterală un unghi de 30° .

1) Să se calculeze volumul prisme.

2) Să se calculeze aria laterală și volumul piramidei înscrise în prismă, care are ca bază una din bazele prisme, iar vârful în centrul celeilalte baze.

3) Se duce un plan P de secțiune, paralel cu bazele, la o distanță egală cu $\frac{2}{3}$ din înălțimea prisme față de baza piramidei. Să se afle raportul dintre ariile obținute prin secționarea prisme și a piramidei cu planul P .

$$\text{R. 1) volumul prisme} = \frac{9a^3}{2}$$

$$2) \text{ aria laterală a piramidei} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{2}$$

$$3) \text{ volumul piramidei} = \frac{3a^3}{2}; 4) \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$$

69. Aria laterală a unui con drept este de $2,4 \text{ cm}^2$, iar aria totală de $3,84 \pi \text{ cm}^2$. Să se afle volumul acestui con.

R. $0,768 \pi \text{ cm}^3$.

70. Înălțimea unui con este de 12 cm, iar volumul său este de $1\,024 \pi \text{ cm}^3$. Să se afle aria laterală și aria totală a acestui con.

$$\text{R. } Al = 320 \pi \text{ cm}^2;$$

$$At = 576 \pi \text{ cm}^2.$$

71. Un con, avînd aria laterală de $540 \pi \text{ cm}^2$ și raza de 18 cm, este tăiat printr-un plan paralel cu baza, la o distanță de 16 cm de vîrf. Care este raza cercului de secțiune, generatoarea conului astfel format, aria laterală și volumul acestui con?

$$\text{R. } r = 12 \text{ cm}; g = 20 \text{ cm}; Al = 140 \pi \text{ cm}^2;$$

$$V = 768 \pi \text{ cm}^3.$$

72. Un con avînd volumul de $324 \pi \text{ cm}^3$, iar înălțimea de 12 cm, este tăiat printr-un plan paralel cu baza și dus la o distanță de 8 cm de vîrf. Să se afle aria laterală și volumul conului astfel format.

$$\text{R. } Al = 60 \pi \text{ cm}^2; V = 96 \pi \text{ cm}^3.$$

73. Jumătate din înălțimea unui con întrece a treia parte a razei cercului de bază, iar suma razei și înălțimii este de 7 m. Să se afle elementele conului (raza, înălțimea, generatoarea), aria laterală și volumul conului.

$$\text{R. } R = 3 \text{ cm}; I = 4 \text{ cm}; G = 5 \text{ cm};$$

$$Al = 15 \pi \text{ cm}^2; V = 12 \pi \text{ cm}^3.$$

74. Un soclu de granit are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Să se afle masa acestui soclu, știind că laturile bazelor sale sînt respectiv de 3 și 2,5 m, că înălțimea este de 3,5 m, iar densitatea granitului de $2\,500 \text{ kg/m}^3$.

R. $66,354 \text{ t}$.

75. Un vagonet pentru cărat cărbuni cu lungimea de 2,75 m are secțiunea în formă de trapez isoscel, cu bazele de 0,60 m și 1,15 m, iar înălțimea de 1 m. Ce cantitate de cărbune poate transporta dacă 1 m³ de cărbune cântărește aproximativ 700 kg?

R. 1 684 kg.

76. Un rezervor are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Adâncimea rezervorului este de 5 m, latura bazei mari de 8,5 m, a bazei mici de 6 m. Câte tone de păcură poate cuprinde acest rezervor dacă densitatea păcurii este de 880 kg/m³.

R. 234 t.

77. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 4 și 6 cm. Volumul său este de 44 cm³. Să se calculeze aria totală.

R. $At = 92 \text{ cm}^2$.

78. Să se calculeze lucrul mecanic făcut de o macara care ridică la o înălțime de 4 m un bloc de fontă în formă de trunchi de piramidă. Bazele acestui bloc sînt pătrate, cu laturile respective de 1 m și 0,75 m, iar înălțimea sa este 1,6 m ($d = 7\,800 \text{ kg/m}^3$).

Indicație. Formula lucrului mecanic este: $L = mgh$, în care m = masa corpului, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ și h = înălțimea la care se ridică corpul.

R. 377 002 J

79. Un jgheab are secțiunea în formă de trapez cu bazele de 20 cm și de 30 cm, iar înălțimea de 40 cm.

Să se calculeze debitul maxim de apă al acestui jgheab în metri cubi pe minut, știind că viteza maximă a apei în jgheab este de 2 m/s.

Indicații. Jgheabul varsă pe secundă un volum de apă egal cu volumul unei prisme a cărei bază este egală cu secțiunea jgheabului și a cărei înălțime este distanța parcursă de apă într-o secundă.

R. 12 m³/min.

80. Se dă un trunchi de piramidă cu bazele triunghiuri dreptunghice (ABC și $A'B'C'$ cu unghiul drept în A și A'). Știind că $AB = 24 \text{ cm}$, $AC = 54 \text{ cm}$, $A'B' = 6 \text{ cm}$, iar înălțimea $I = 45 \text{ cm}$, să se determine volumul trunchiului.

R. $V = 12\,757,5 \text{ cm}^3$.

81. Un coș de fabrică, în formă de trunchi de con înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m și la vîrf de 2,4 m. Diametrul interior al coșului este pe toată înălțimea de 1,6 m. Să se afle masa acestui coș, știind că 1 m³ de zidărie cântărește 1 800 kg.

R. $\approx 278 \text{ t}$.

82. Să se afle numărul de puieți sădiți de elevii unei școli într-o grădină, știind că au săpat un volum de 127,4 m³ de pămînt și că o groapă are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, cu laturile bazelor de 50 cm și 30 cm, iar înălțimea trunchiului de 39 cm.

R. 2 000 de puieți.

83. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 90 cm și 30 cm. Știind că volumul trunchiului este de 156 000 cm³ să se calculeze aria laterală.

R. $Al = 12\,000 \text{ cm}^2$.

84. Un trapez isoscel $ABCD$ se rotește pe rînd în jurul bazelor sale. Să se determine aria și volumul corpurilor generate prin rotație, știind că laturile paralele sînt egale, respectiv, cu 24 cm și 36 cm, iar laturile neparalele sînt egale cu 10 cm.

$$\text{R. Aria corp. } 544 \pi \text{ cm}^2; V = 1\,792 \pi \text{ cm}^3; \\ \text{aria corp. } 736 \pi \text{ cm}^2; V = 2\,048 \pi \text{ cm}^3.$$

85. Un triunghi dreptunghic se rotește în jurul: a) catetei AC ; b) catetei AB ; c) ipotenuzei BC . Să se determine aria și volumul corpurilor de rotație generate, știind că ipotenuza $BC = 45$ cm și cateta $AC = 27$ cm.

$$\text{R. a) } Al \approx 5\,086,8 \text{ cm}^2; Al \approx 9\,156,24 \text{ cm}^2; \\ V \approx 36\,625 \text{ cm}^3; \\ \text{b) } Al \approx 3\,815 \text{ cm}^2; Al \approx 6\,104 \text{ cm}^2; \\ V \approx 27\,469 \text{ cm}^3; \\ \text{c) } Al \approx 4\,273 \text{ cm}^2; V \approx 21\,975 \text{ cm}^3.$$

86. O coloană de beton în formă de trunchi de con are diametrele bazelor, respectiv, de 50 cm și 30 cm, iar înălțimea de 6 m. Să se determine masa coloanei, știind că densitatea betonului este de 2 200 kg/m³.

$$\text{R. } 1\,692,46 \text{ kg.}$$

87. Se dă un trapez isoscel care se rotește în jurul dreptei ce unește mijloacele laturilor paralele; cunoscînd că laturile paralele sînt egale, respectiv cu 24 și 36 cm și laturile neparalele sînt de cîte 20 cm, să se determine aria laterală, totală și volumul corpului generat prin rotație.

$$\text{R. } Al = 1\,884 \text{ cm}^2; Al = 3\,353,52 \text{ cm}^2; \\ V = 13\,638,276 \text{ cm}^3.$$

2. Probleme ce se rezolvă cu ajutorul algebrei

88. Se dă un trapez isoscel în care diferența bazelor este de 2 cm iar dreapta care unește mijloacele laturilor neparalele este de 6 cm; latura neparalelă cu baza face un unghi de 60°. Să se calculeze bazele trapezului și aria trapezului.

$$\text{R. } B = 7 \text{ cm}^2; b = 5 \text{ cm}; \text{ aria} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

89. Să se găsească pe latura AD a triunghiului ADE un punct I , astfel ca paralela IM la baza DE a triunghiului să fie egală cu ID .

90. Să se calculeze volumul unui con circular drept, știind că aria laterală este de patru ori mai mare decît aria bazei, iar înălțimea cu 5 cm mai mare ca raza.

Indicație. Notînd $R = x$, $I = y$, se obține din datele problemei:

$$G = \sqrt{I^2 + R^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 4x.$$

$$y - x = 5.$$

$$\text{R. } \left\{ \frac{\pi}{3} \cdot \frac{125\sqrt{15}}{(\sqrt{15} - 1)^3} \approx 19 \text{ cm}^3. \right.$$

91. Un trapez are baza mare de 23 m, baza mică de 14 m, și înălțimea de 12 m. Să se calculeze lungimea dreptei duse în interiorul trapezului, paralelă cu bazele și la distanță de 4 m de baza cea mare.

$$\text{R. } 20 \text{ m.}$$

92. Se dă dreptunghiul $ABCD$, în care $AD=15$ m și $AB=18$ m. Să se construiască un dreptunghi $A'B'C'D'$ cu vîrfurile situate respectiv pe laturile AB , BC , CD și DA , astfel ca raportul $\frac{A'B'}{A'D'} = \frac{1}{2}$.

Indicație. Se vor lua următoarele necunoscute:

$AA' = x$, $AD' = y$. Se observă că $\widehat{AD'A'} = \widehat{BA'B'}$ avînd laturile perpendiculare. Rezultă $\triangle AA'D' \sim \triangle BB'A'$; $\triangle AD'A' = \triangle CB'C'$ și $DC'D' = BA'B'$.

Se găsește

$$x = 8, y = 14.$$

93. Baza unui triunghi este $AB = 14$ m. Celelalte două laturi sînt $AC = 15$ m și $BC = 13$ m. Se duce o paralelă MN la bază ($M \in AC$, $N \in BC$) astfel încît $AM + BN = MN$. Să se afle cele două segmente, AM și BN .

Indicație. Notăm cele două segmente cu x și y

$$MN = x + y, MC = 15 - x, NC = 13 - y.$$

$$\text{R. } 5 \text{ m; } 4\frac{1}{3} \text{ m.}$$

94. Un paralelipiped dreptunghic are aria laterală de 450 cm^2 și înălțimea de 9 cm . Știind că $\frac{1}{3}$ din lungimea bazei este egală cu $\frac{1}{2}$ din lățimea ei, să se afle volumul și masa, cunoscînd că $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$

$$\text{R. } L = 15 \text{ cm; } l = 10 \text{ cm;}$$

$$V = 1\,350 \text{ cm}^3; m = 10,530 \text{ kg.}$$

95. Un paralelipiped dreptunghic are înălțimea de 5 cm , iar aria laterală de 160 cm^2 . Știind că $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei plus $\frac{1}{3}$ din lățime fac împreună 7 cm , să se afle laturile bazei și volumul paralelipipedului dreptunghic.

$$\text{R. } L = 10 \text{ cm; } l = 6 \text{ cm; } V = 300 \text{ cm}^3.$$

96. Un dreptunghi cu perimetrul de 34 cm se rotește în jurul laturii mici. Se știe că lungimea întrece cu 7 cm lățimea. Se cere:

1) Volumul și aria corpului generat.

2) Volumul și aria prisme patrulaterare regulate înscrise în cilindrul rezultat.

$$\text{R. } 1) V = 2\,260,80 \text{ cm}^3; A = 1\,281,12 \text{ cm}^2;$$

$$2) V = 1\,440 \text{ cm}^3; A = 914,40 \text{ cm}^2.$$

97. Într-un con este înscris un cilindru care are aria totală echivalentă cu aria laterală a conului. Unghiul maxim dintre două generatoare de la vîrfurile conului este drept. Să se demonstreze că distanța de la vîrfurile conului pînă la baza superioară a cilindrului este egală cu jumătate din generatoarea conului.

Indicație. Se notează raza cilindrului cu r , iar raza conului cu $(r + x)$ generatoarea conului cu G și din echivalența ariilor se scoate:

$$\pi G(r + x) = 2\pi r(r + x); \text{ apoi } G = 2r.$$

98. Un rezervor de benzină cu forma unui paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei în raportul de $\frac{10}{15,7}$, diferența acestor dimensiuni este de $5,7 \text{ m}$, iar înălțimea de 8 m . Cîte cisterne în formă de cilindru sînt necesare pentru a umple acest rezervor, știind că cisterna are diametrul de 3 m , iar lungimea de 4 m .

$$\text{R. } 44 \text{ de cisterne.}$$

99. Un trapez dreptunghic are baza mică egală cu înălțimea. Aceasta este cu 12 cm mai mică decât baza mare, iar latura oblică este de 15 cm. Trapezul se rotește în jurul bazei mari, dînd naștere unui corp al cărui volum și arie se cer.

$$R. V = 3\,306,420 \text{ cm}^3; A = 1\,186,92 \text{ cm}^2.$$

100. Într-o piramidă cu baza un dreptunghi, lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decît lățimea.

Dacă mărim lungimea bazei cu 2 cm, iar lățimea cu 2 cm, aria bazei crește cu 44 cm^2 . Știind că fețele laterale mai mici fac cu baza un unghi de 45° , să se afle laturile bazei și volumul piramidei.

$$R. L = 12 \text{ cm}; l = 8 \text{ cm}; V = 192 \text{ cm}^3$$

101. O piramidă are ca bază un dreptunghi cu perimetrul de 40 cm. Dacă mărim lungimea bazei cu 3 cm și micșorăm lățimea bazei cu 2 cm, aria bazei se micșorează cu 6 cm^2 . Știind că înălțimea piramidei este cît $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei, să se afle laturile bazei, aria laterală și volumul piramidei. Virful piramidei se proiectează în punctul de intersecție al diagonalelor.

$$R. Al = (48\sqrt{2} + 24\sqrt{13}) \text{ cm}^2; V = 192 \text{ cm}^3.$$

102. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2 , înălțimea lui este de 6 m. Dimensiunile dreptunghiului de la bază sînt în raportul de $\frac{1}{2}$.

a) Să se afle dimensiunile dreptunghiului de bază.

b) Aceeași chestiune în cazul cînd raportul dimensiunilor este de $\frac{3}{5}$, aria laterală 256 m^2 și înălțimea de 8 m.

$$R. a) l = 2 \text{ m}; L = 4 \text{ m};$$

$$b) l = 6 \text{ m}; L = 10 \text{ m}.$$

103. Să se determine R și G ale unui cilindru drept, știind că înălțimea este cu 5 cm mai mare decît raza, iar raportul lor este de $\frac{7}{2}$.

$$R. R = 2 \text{ cm}; G = 7 \text{ cm}.$$

104. Raza unui con circular drept este de 3 dm, iar raza cercului determinat de un plan de secțiune dus la 1 dm de bază este de 10 cm. Să se afle înălțimea și generatoarea conului.

$$R. G = 3,35 \text{ dm}; l = 1,5 \text{ dm}.$$

105. Într-un trunchi de con, razele sînt proporționale cu numerele 3 și 2, iar $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{2}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului este egală cu 5 cm. Să se afle aria laterală și volumul trunchiului.

$$R. Al = 100 \pi \text{ cm}^2; V = 304 \pi \text{ cm}^3.$$

106. Într-un trunchi de con, suma razelor este egală cu raza unei sfere avînd aria de $400 \pi \text{ cm}^2$. Știind că raza mare întrece cu 1 cm dublul razei mici, iar înălțimea este cît raza mare, să se afle cele două raze, aria laterală și volumul trunchiului de con.

$$R. R = 7 \text{ cm}; r = 3 \text{ cm}; Al = 10\sqrt{65} \pi \text{ cm}^2;$$

$$V = \frac{553}{3} \pi \text{ cm}^3.$$

107. Într-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, aria laterală este de 480 cm^2 , iar apotema trunchiului 8 cm . Știind că $\frac{1}{3}$ din latura bazei mari întrece cu 3 cm $\frac{1}{4}$ din latura bazei mici, să se afle laturile celor două baze și volumul trunchiului de piramidă.

$$\text{R. } L_4 = 18 \text{ cm}; l_4 = 12 \text{ cm};$$

$$V = \frac{\sqrt{55}}{3} (324 + 216 + 144) \text{ cm}^3.$$

108. Un trunchi de con în care suma razelor este cît raza unui cerc cu aria de $625 \pi \text{ cm}^2$ are înălțimea de 7 cm și generatoarea de $7\sqrt{2} \text{ cm}$. Să se afle volumul trunchiului.

$$\text{R. } R = 16 \text{ cm}; r = 9 \text{ cm}; V = \frac{3 \cdot 367}{3} \text{ cm}^3.$$

109. Într-un trunchi de con, înălțimea este de 8 m . Ea este media aritmetică a celor două raze. Să se afle volumul trunchiului, știind că generatoarea este de $8\sqrt{2} \text{ cm}$.

$$\text{R. } R = 12 \text{ cm}; r = 4 \text{ cm}; V = \frac{1 \cdot 664 \pi}{3} \text{ cm}^3.$$

110. Un dig de beton armat are secțiunea un trapez cu baza mică de 3 m , înălțimea de 2 m , iar laturile neparalele ale trapezului fac cu planul bazei unghiuri de 30° și 45° . Lungimea digului este 100 m . Câți metri cubi de beton sînt necesari pentru construirea digului și ce greutate are acest dig cunoscînd că densitatea betonului este 2500 kg/m^3 .

$$\text{R. } V = 1146 \text{ m}^3; m = 2865 \text{ t}.$$

111. Un rezervor de benzină de forma unui paralelipiped dreptunghic are diagonală bazei de 10 m și această diagonală formează cu una din laturi un unghi de $40^\circ 30'$. Diagonală paralelipipedului formează cu diagonală bazei un unghi de 75° . Să se calculeze volumul și aria laterală a rezervorului.

Indicație. Se aplică pe rînd funcțiile trigonometrice în cele două triunghiuri dreptunghice ce se formează cu cele două diagonale.

$$\text{R. } L = 7,6 \text{ m}; l = 6,5 \text{ m}; I = 37,3 \text{ m}; \\ V \approx 1843 \text{ m}^3; Al \approx 1052 \text{ m}^2.$$

112. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, în care AB este baza mică și CD cea mare ($BC = AD$). Considerăm punctele M și N așezate respectiv la mijloacele laturilor BC și AD . Se dă $MN = 13 \text{ dm}$ și diferența bazelor de 10 dm . Din învîrtirea trapezului în jurul dreptei care unește mijloacele bazelor rezultă un trunchi de con. Știind că generatoarea lui este medie proporțională între razele cercurilor de bază, se cere volumul trunchiului de con.

Indicație. MN = semisuma bazelor trapezului. Din rezolvarea unui sistem de ecuații se găsește că bazele trapezului sînt de 8 dm și 18 dm . Razele bazelor trunchiului de con sînt: $R = 9 \text{ dm}$ și $r = 4 \text{ dm}$.

De aici se deduce generatoarea de 6 dm și apoi înălțimea.

$$\text{R. } V = \frac{133\sqrt{11}\pi}{3} \text{ dm}^3 \approx 461 \text{ dm}^3.$$

113. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are apotema de 17 cm iar aria laterală de 1 904 cm². Diferența dintre ariile celor două baze este de 896 cm². Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

Indicație. x și y laturile pătratelor. Se găsește un sistem

$$x = 36 \text{ cm}; y = 20 \text{ cm}.$$

$$\text{R. } V = 12\,080 \text{ cm}^3.$$

114. Apotema și înălțimea unei piramide hexagonale regulate sînt respectiv cantitățile x și y date de sistemul:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2}; \quad \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{4} = 8$$

x și y fiind exprimate în centimetri. Să se afle volumul piramidei, aria laterală și aria totală.

$$x = 29, y = 24.$$

$$\begin{aligned} \text{R. } V &\approx 9\,700 \text{ dm}^3; Al \approx 2\,010 \text{ dm}^2; \\ At &\approx 3\,395 \text{ dm}^2. \end{aligned}$$

115. O piramidă are baza un trapez isoscel $ABCD$, în care CD este baza mică, AB este baza mare și $BC = AD$. Înălțimea trapezului este de 15 cm, iar înălțimea piramidei de 1 m.

Știind că înălțimea piramidei cade în mijlocul M al bazei, iar laturile CD și BC sînt respectiv egale cu cantitățile x și y date de sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y+1}{6} = \frac{x}{2} \\ \frac{x-8}{4} + \frac{y-8}{9} = \frac{x}{5} \end{cases}$$

se cere să se afle volumul piramidei și lungimile muchiilor piramidei.

$$\begin{aligned} \text{R. } AB &= 36 \text{ cm}; CD = 20 \text{ cm}; BC = 17 \text{ cm}; \\ V &= 14 \text{ dm}^3; VA = VB \approx 101,6 \text{ cm}; \\ VC &= VD \approx 101,6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

116. Înălțimea unui trapez dreptunghic este: jumătate din baza mică $3\frac{1}{2}$ ori mai mică decît baza mare și cu 2 cm mai mică decît latura neperpendiculară a trapezului. Știind că perimetrul trapezului este de 24 cm, să se afle aria laterală a corpului format prin rotirea în jurul laturii perpendiculare pe bază.

$$\text{R. } 251,20 \text{ cm}^2.$$

117. Baza unui paralelipiped este un romb. Secțiunile diagonale sînt perpendiculare pe planul bazei, avînd respectiv ariile de 100 cm² și 105 cm², iar lungimea liniei intersecției lor este egală cu 10 cm. Să se determine:

- Volumul acestui paralelipiped
- Aria laterală
- Aria totală

Indicație. Fețele laterale sînt dreptunghiuri cu baza cît latura rombului și înălțimea de 10 cm. Se obține: $l = \sqrt{52,5625} = 7,25 \text{ cm}$.

$$\text{R. a) } V = 525 \text{ cm}^3; Al = 290 \text{ cm}^2; At = 398 \text{ cm}^2.$$

118. Într-un paralelipiped cu baza un dreptunghi, diferența dintre pătratul diagonalei dreptunghiului de bază și pătratul unei laturi a dreptunghiului este de 65, iar suma acestor două lungimi (diagonala bazei și una din laturile dreptunghiului) este de 13 cm. Înălțimea paralelipipedului este media proporțională a celor două lungimi. Să se calculeze diagonala paralelipipedului.

$$R. \ 3\sqrt{13} \text{ cm.}$$

119. O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghic în care una din catete este de 15 cm, iar cealaltă catetă este cu 5 cm mai mică decât ipotenuza. Înălțimea piramidei este cu 20% mai mare decât ipotenuza triunghiului de bază.
- 1) Să se afle aria secțiunii făcute în această piramidă printr-un plan paralel cu baza făcute la $\frac{2}{3}$ din înălțime față de planul bazei.
 - 2) Să se afle volumul piramidei care are ca bază această secțiune și virful comun cu virful piramidei date.

$$R. \ A = 16\frac{2}{3} \text{ cm}^2; \ V = 55\frac{5}{9} \text{ cm}^3.$$

120. O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghic ale cărui catete sînt în raportul $\frac{3}{2}$, iar diferența dintre segmentele determinate de înălțimea triunghiului pe ipotenuză este de 2 cm. Să se afle volumul piramidei, știind că înălțimea ei este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decât ipotenuza triunghiului de bază.

$$R. \ V = 27,04 \text{ cm}^3.$$

121. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura pătratului bazei mari de 20 cm, iar 25% din apotema triunghiului este cu $1\frac{1}{6}$ cm mai mare decât 0,1(6) din înălțimea lui. Diferența dintre apotemă și înălțime fiind de 0,2 dm, să se afle aria laterală a trunchiului.

$$R. \ Al = 560 \text{ cm}^2.$$

122. Un trunchi de piramidă are bazele dreptunghiulare; dimensiunile bazei mari sînt în raport de $\frac{3}{4}$, iar diferența acestor dimensiuni este de 4 cm. Știind că raportul perimetrelor celor două baze este $\frac{1}{4}$, iar diagonala trunchiului este de 2,05 dm, să se afle aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă.

$$R. \ A \approx 203,10 \text{ cm}^2.$$

123. Raza unui con circular drept este de 4 ori mai mare decât 0,(3) din înălțimea lui, iar diferența dintre raza și înălțimea conului este de 2 cm. La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de baza conului se face o secțiune paralelă cu baza. Să se afle raportul ariilor laterale ale corpurilor formate: con și trunchi de con. Cît la sută reprezintă aria laterală a trunchiului de con?

$$R. \ \frac{1}{8}; \ 12.5\%.$$

124. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată se cunosc următoarele date:

a) media aritmetică între latura bazei mari și latura bazei mici este de 7 cm;

b) $\frac{1}{3}$ din apotema bazei mici este egală cu $\frac{1}{4}$ din apotema bazei mari;

c) apotema trunchiului de piramidă este medie proporțională între cele două apoteme ale bazelor.

Să se calculeze cit la sută din apotema trunchiului de piramidă reprezintă înălțimea corpului.

$$R. L_s = 8 \text{ cm}; l_s = 6 \text{ cm}; 95\%.$$

125. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt în raportul de $\frac{1}{2}$. Latura bazei mici micșorată de trei ori și apoi mărită cu 2 cm este cit $\frac{1}{2}$ din latura bazei mari. Fețele laterale ale trunchiului formează un unghi de 60° cu planul bazei. Să se afle volumul trunchiului.

$$R. V = \frac{63\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^3.$$

126. Să se afle aria laterală și volumul unui cilindru circular drept știind că raza cilindrului este cu 1 cm mai mare decît $\frac{1}{3}$ din generatoare, iar media aritmetică între înălțime și rază este 6,5 m.

$$R. Al = 72\pi \text{ cm}^2; V = 144\pi \text{ cm}^3.$$

127. Diferența laturilor de bază ale unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este de 2 dm, apotema trunchiului este de 40 dm, iar aria laterală este de 2 400 dm².

Să se afle ariile triunghiurilor de bază ale trunchiului, apoi să se compare raportul acestor arii cu raportul dintre laturile triunghiului de bază.

$$R. \text{Aria}_1 = \frac{441\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2;$$

$$\text{Aria}_2 = \frac{361\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2$$

128. Într-un trunchi de con, razele sînt proporționale cu numerele 3 și 2, iar $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului face cu planul bazei mari un unghi de 45° . Să se afle aria laterală și volumul trunchiului de con.

$$R. Al = 80\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2; V = \frac{1\,216\pi}{3} \text{ cm}^3$$

129. Suma celor două raze ale unui trunchi de con este 25 cm, iar diferența lor 9 cm. Știind că generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 45° , să se afle cele două raze și volumul trunchiului de con.

$$R. R = 17 \text{ cm}; r = 8 \text{ cm}; V = 1\,467\pi \text{ cm}^3.$$

130. Un trunchi de con cu înălțimea de 18 cm are suma razelor bazelor de 16 cm, iar $\frac{3}{11}$ din raza mare este cu 2 cm mai mică decât raza mică.

Înălțimea este împărțită în trei părți egale și prin punctele de diviziune se fac două secțiuni paralele cu bazele. Să se afle ariile acestor două secțiuni.

$$R. 49\pi \text{ cm}^2; 81\pi \text{ cm}^2.$$

131. Într-un trunchi de con, raza mică este cu 2 cm mai mică decât raza mare, iar media aritmetică a celor două raze este 0,004 dm; înălțimea trunchiului dat este de 12 cm. Din acest trunchi se taie două conuri care au ca bază bazele trunchiului dat, iar generatoarele unuia sînt în continuarea generatoarelor celuilalt. În ce raport se află volumele celor două conuri astfel obținute?

$$R. \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{125}.$$

132. Raza mică a unui trunchi de con este cu 1 cm mai mare decât $33\frac{1}{3}\%$ din raza mare.

Înălțimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului dat este de 9 cm, iar înălțimea trunchiului este de 5 cm. Să se afle:

- Aria laterală a trunchiului.
- Volumul trunchiului de con.
- Unghiul ce-l formează generatoarea cu planul bazei mari.

$$R. A = 65\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2; V = \frac{665\pi}{3} \text{ cm}^3; 45^\circ.$$

133. Un trunchi de con și un con au generatoarele și ariile lor laterale egale. Raza mică a trunchiului de con mărită cu 1 cm și apoi micșorată de 2 ori este tot atît cît 20% din raza mare a trunchiului mărită cu $\frac{1}{10}$ dm. Raportul razelor trunchiului de con este exprimat prin $2\frac{1}{2} : 4\frac{1}{6}$. Să se calculeze raza conului.

$$R. R = 8 \text{ cm}.$$

134. Într-un con, 0,125 din înălțime este cu 3 cm mai mică decât $\frac{2}{5}$ din generatoare, iar diferența dintre generatoare și înălțime este 0,2 dm. Să se afle volumul sferei înscrise în acel con.

$$R. V = 36\pi \text{ cm}^3.$$

135. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 12 cm, iar suma dintre ipotenuză și cealaltă catetă este de 24 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului dreptunghic în jurul ipotenuzei.

$$R. V = 259,2\pi \text{ cm}^3.$$

136. Baza mică a unui trapez dreptunghic mărită cu o treime a ei este tot atît cît 25% din baza mare, mărită cu lungimea bazei mici. Înălțimea trapezului este de 4 cm, iar diferența bazelor este de 3 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a trapezului dreptunghic în jurul bazei mici.

$$R. V = 176\pi \text{ cm}^3.$$

137. Un trapez dreptunghic în care baza mică este egală cu înălțimea se rotește complet în jurul laturii perpendiculare pe bază.

Să se afle aria laterală a corpului format prin această rotație, știind că 20% din latura oblică față de baze este cu 2 cm mai mică decât 50% din înălțimea trapezului, iar suma acestor lungimi este de 18 cm.

$$R. Al = 220\pi \text{ cm}^2.$$

138. Un elev își construiește o piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile din sîrmă. Pentru confecționarea piramidei a folosit 1,08 m sîrmă. Știind că muchia laterală este cu 16 cm mai mare decât latura bazei, să se afle latura triunghiului de bază, muchia piramidei și înălțimea corpului construit.

$$R. 10 \text{ cm}; 26 \text{ cm}; \sqrt{1928/3} \text{ cm}.$$

139. Un alt elev își construiește, tot din sîrmă, un model de trunchi de piramidă patrulateră regulată, folosind 156 cm sîrmă.

Știind că perimetrul unei fețe laterale este de 48 cm, iar latura bazei mici este de $2/3$ din latura bazei mari, să se afle laturile celor două baze și muchia laterală a trunchiului de piramidă.

$$R. L = 18 \text{ cm}; l = 12 \text{ cm}; m = 9 \text{ cm}.$$

140. Într-un trunchi de con raza mică este egală cu înălțimea. Din acest trunchi de con se scoate o emisferă care are ca bază baza mică a trunchiului de con. Se știe că raza mică a trunchiului de con este de 6 cm, iar volumul corpului rămas după această scoatere este de $248\pi \text{ cm}^3$. Să se afle raza mare a trunchiului de con.

$$R. 10 \text{ cm}.$$

141. O cutie de sticlă (transparentă) are formă de paralelipiped dreptunghic. Una dintre muchiile sale este de 12 cm, iar celelalte sînt necunoscute. Cutia conține o cantitate de apă. Dacă așezăm cutia astfel ca fața cu dimensiunile necunoscute să fie baza, apa se ridică pînă la o înălțime de 2 cm; dacă o așezăm astfel ca una sau alta dintre fețele ei să fie orizontală, apa se ridică o dată pînă la înălțimea de 3 cm și a doua oară pînă la o înălțime de 4 cm.

1) Să se afle dimensiunile cutiei.

2) Cîtă apă conține cutia?

3) Cîtă apă ar conține cutia dacă ar fi plină?

$$R. 12 \text{ cm}, 18 \text{ cm}, 24 \text{ cm}; 864 \text{ cm}^3, 5184 \text{ cm}^3.$$

142. Secțiunea transversală printr-o grindă de forma unei prisme drepte avînd lungimea L este un trapez dreptunghic cu perimetrul p și suma laturilor neparalele S . Să se calculeze ariile fețelor laterale paralele ale grinzii, știind că diferența acestor arii este d .

Aplicație numerică:

$$L = 8 \text{ m}; p = 1,6 \text{ m}; S = 0,8 \text{ m}; d = 3,2 \text{ m}^2.$$

Indicație. Se notează cu x și y bazele trapezului și se obține sistemul:

$$\begin{cases} p = x + y + S \\ Ly - Lx = d. \end{cases}$$

$$R. x = 0,2 \text{ m}; y = 0,6 \text{ m}; \text{aria}_1 = xL = 0,2 \cdot 8 = 1,6 \text{ m}^2; \text{aria}_2 = yL = 0,6 \cdot 8 = 4,8 \text{ m}^2.$$

143. Un turn de formă cilindrică are un vîrf conic a cărui bază este egală cu baza conului.

a) Să se calculeze înălțimea totală a turnului, știind că ea este de n ori mai mare decît înălțimea părții cilindrice.

Volumul total al turnului fiind V , iar raza R .

b) Să se calculeze aria turnului.

Aplicație numerică:

$$n = 6; R = 3 \text{ m}; V = 150,72 \text{ m}^3.$$

R. a) Înălțimea totală = 12 m; b) aria turnului $\approx 135 \text{ m}^2$.

144. Un tub cilindric confecționat din cupru, avînd densitatea de $10^3 \rho \text{ kg/m}^3$ are masa de $m \text{ kg}$.

a) Să se calculeze diametrul interior și diametrul exterior al tubului, știind că suma lor este S , iar lungimea tubului este L .

b) Să se calculeze diferența dintre aria suprafeței laterale exterioare și aria suprafeței interioare.

Aplicație numerică:

$$S = 0,2 \text{ m}; L = 12 \text{ m}; \rho = 8\,900 \text{ kg/m}^3; G = 134,14 \text{ kg}.$$

Indicație. Dacă notăm razele cu x și y , se obține sistemul:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{G}{\pi \rho L} \\ x + y = S. \end{cases}$$

R. $x = 1,01 \text{ dm}; y = 0,99 \text{ dm}; \approx 15 \text{ dm}^2$.

145. Capsula de protecție a aparatajului instalat în vîrfurile unei rachete meteorologice are forma din figura IV.4. Știind că ea are masa de $m \text{ kg}$ și este confecționată dintr-un aliaj special, avînd densitatea de $10^3 \rho \text{ kg/m}^3$, să i se calculeze înălțimea.

Raza bazei este de $R \text{ cm}$, iar raportul dintre lungimea porțiunii de metal și lungimea porțiunii goale de-a lungul axei de simetrie a capsulei este K .

Aplicație numerică:

$$m = 5,338 \text{ kg}; R = 10 \text{ cm}; \rho = 8\,500 \text{ kg/m}^3; K = \frac{1}{5}.$$

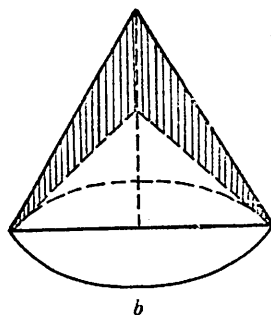
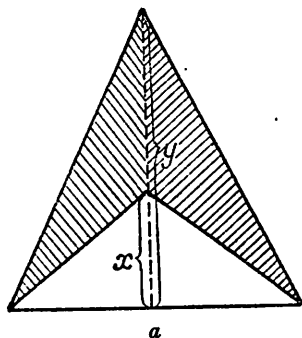


Fig. IV.4

Indicație. $\frac{m}{\rho} = V = \frac{\pi R^2}{3} (y - x); \frac{y - x}{x} = K$

$$\begin{cases} y - x = \frac{3m}{\pi R^2 \rho} \\ y - x(1 + K) = 0. \end{cases}$$

Scăzând ecuațiile membru cu membru, se obține: $x = \frac{3m}{\pi R^2 \rho K}$.

Se înlocuiește în prima ecuație și rezultă $y = \frac{3m}{\pi R^2 \rho} \left(1 + \frac{1}{K}\right)$.

R. 36 cm.

146. Pentru alimentarea unui agregat pentru măcinat cereale este necesară o pilnie de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată ale cărei laturi de bază sînt de 2 m și respectiv 0,2 m, iar unghiul dintre apotemele a două fețe opuse este de 60° .

Să se calculeze:

a) Capacitatea pilniei.

b) Cantitatea de vopsea necesară pentru vopsirea pilniei, știind că pentru vopsirea unui metru pătrat de tablă sînt necesare 50 g de vopsea.

R. a) $\approx 2\,305\text{ l}$; b) $= 396\text{ g}$ de vopsea.

147. Un bazin de înot are forma de paralelipiped dreptunghic. La un moment dat, bazinul cuprinde o anumită cantitate de apă. După un timp oarecare, bazinul pierde prin evaporare o cantitate $Q\text{ m}^3$ de apă. Să se calculeze nivelul inițial și cel final din bazin, precum și volumul de apă inițial, știind că aria fundului bazinului este S , iar nivelul la care ar ajunge apa, dacă peste cantitatea inițială s-ar adăuga cea rămasă după evaporare, ar fi de $L\text{ m}$.

Aplicație numerică:

$$Q = 600\text{ m}^3; S = 1\,500\text{ m}^2 \text{ și } L = 3\text{ m}.$$

Indicație. Notînd cu x = înălțimea inițială a apei și cu y = înălțimea finală a apei obținem:

$$\begin{cases} x - y = \frac{Q}{S} \\ x + y = L. \end{cases}$$

R. $x = 1,7\text{ m}$; $y = 1,3\text{ m}$; V inițial $= 1\,500 \cdot 1,7 = 2\,550\text{ m}^3$.

148. Să se calculeze masa unei perechi de valțuri ale unui agregat de măcinat, confecționate dintr-un aliaj special, avînd densitatea de $\rho\text{ kg/dm}^3$. Cele două valțuri au forma cilindrică și sînt tangente în lungul unei generatoare. Distanța între axele valțurilor este de $d\text{ m}$, diferența ariilor secțiunilor transversale $\Delta\text{ m}^2$, iar lungimea $l\text{ m}$.

Aplicație numerică:

$$\rho = 9\text{ kg/dm}^3; d = 0,6\text{ m}; \Delta = 0,3768\text{ m}^2; l = 0,95\text{ m}.$$

Indicație. Notînd cu x și y razele cercurilor de bază, obținem sistemul:

$$\begin{cases} x + y = d \\ \pi x^2 - \pi y^2 = \Delta. \end{cases}$$

R. $x = 0,4\text{ m}$; $y = 0,2\text{ m}$; $G = G_1 + G_2 = 1\,368\pi + 342\pi = 1\,710\pi \approx 5\,369,4\text{ kg}$.

III Probleme și exerciții recapitulative

1. Probleme de geometrie plană

1. În triunghiul ABC se duc înălțimile AA' și BB' ce se intersectează în H și fac cu AB unghiurile de 50° și respectiv de 10° .

Se cere:

- 1) Unghiurile triunghiului ABC .

Să se arate că

2) $AC + BC = 2(A'C + B'C)$

3) $A'H^2 + A'C^2 = \frac{BH^2 + AC^2}{4}$

R. 1) $A = 80^\circ$; $B = 40^\circ$; $C = 60^\circ$.

2. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$ și $ACFG$. BG se intersectează cu EC în P .

Să se demonstreze că:

1) $EC = BG$.

2) AP este bisectoarea unghiului EPG .

3) Să se arate că triunghiul EPG este dreptunghic.

3. Se dă trapezul isoscel $ABCD$ ($AB = DC$). Pe baza mare BC se iau segmentele $MB = CN$ în sensuri opuse. Fie Q intersecția segmentelor AN și MD .

Se cere:

1) Să se arate că $MD = AN$.

2) Triunghiul MQN este isoscel.

3) Notînd cu P intersecția prelungirii laturilor egale a trapezului isoscel să se arate că PQ este bisectoarea unghiului P .

4) Să se arate că $\triangle PMN$ este isoscel.

4. Într-un cerc cu diametrul $AB = 24$ cm se înscrie un trapez isoscel $ABCD$. Latura BC formează cu diametrul un unghi de 60° . Pe semicercul opus celui în care este înscris trapezul, se consideră un punct M din care se coboară perpendiculara MP pe AB .

Se cere:

1) Perimetrul poligonului $AMB CD$ știind că unghiul format de coarda MB cu diametrul AB este de 30° .

2) Să se determine poziția lui M pe semicerc, astfel încît perimetrul poligonului să fie minim.

3) Să se calculeze în acest caz perimetrul poligonului.

R. $\begin{cases} 1) 12(4 + \sqrt{3}) \text{ cm.} \\ 3) \text{ Per. minim} = 5R. \end{cases}$

5. Laturile unui paralelogram $ABCD$ sînt $AB = 10$ cm; $AD = 9$ cm. Diagonalele $BD \cap AC = \{O\}$. Aria $\triangle AOB = 18$ cm².

Se cere:

1) Să se calculeze diagonalele paralelogramului.

2) Să se construiască paralelogramul $ABCD$.

R. 1) $BD = 17$ cm; $AC = \sqrt{73}$ cm.

6. În $\triangle$ isoscel ABC una din laturile egale $AB = a$. Fie E mijlocul lui BC și FE mediatoarea laturii AB astfel încît $FE \cap BC = \{E\}$.

1) Să se arate că CE este cit apotema unui pătrat înscris într-un cerc de rază a .

2) Să se arate că există relația $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{AC}$.

$$R. EC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

7. Se dă paralelogramul $ABCD$. Din A se duce perpendiculara AA' pe latura BC iar din B se duce perpendiculara BB' pe CD .

Se cere:

1) Să se arate că există relația

$$\frac{AB}{BC + AB} = \frac{A'B}{B'C + A'B}.$$

8. Cercul O de diametru AB taie pe AD în M , iar cercul O' de diametru BC taie cercul O în N . Să se arate că ANB este triunghi dreptunghic.

Să se arate că punctele A, N, C sînt coliniare.

9. Perpendicularele pe diagonala BD a dreptunghiului $ABCD$ duse în B și D intersectează laturile DC și BC în M și N .

Să se arate că:

$$1) BC^2 + CD^2 = BC \cdot CN + MC \cdot CD$$

$$2) AB \cdot AC = CN \cdot BM$$

$$3) BD^2 = \frac{BN \cdot BC + CD \cdot MD}{2}.$$

4) Cunoscînd că diagonala dreptunghiului este 8 cm iar proiecția ei pe BC este de 6,4 cm, să se calculeze perimetrul triunghiului MND .

$$R. \approx 33,2 \text{ cm.}$$

10. Se dă patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul O cu diagonalele BD și AC ; $BD \cap AC = \{N\}$.

Se cere:

Să se determine diagonala BD a patrulaterului știind că $BC = 12$ cm, $AD = 6$ cm, $BN = 8$ cm și $AC = 9$ cm.

Indicație. Se va observa că triunghiurile BNC și NAD sînt asemenea.

$$R. BD = 10,5 \text{ cm.}$$

11. În $\triangle$ isoscel ABC , $AB = AC$ și $\hat{A} < 60^\circ$; fie MD mediatoarea laturii AB și BD bisectoarea unghiului B . ($M \in AB$ și $D \in AC$); AP bisectoarea unghiului $\hat{A}$; $P \in BD$; $AP \cap MD = \{N\}$ și $AP \cap BD = \{P\}$.

1) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC .

2) Să se arate că $\triangle NPD$ este isoscel.

3) Se prelungește $\overline{BA}$ cu segmentul $\overline{AA'}$ și $\overline{DB}$ cu $\overline{BB'}$ așa fel încît $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. Să se arate că $\triangle AA'C = \triangle ABB'$.

$$R. A = 36^\circ; B = 72^\circ.$$

12. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) se cunoaște că $\overline{AB} = 3$ cm și $\overline{AC} = 6$ cm. Fie M mijlocul laturii AC . Se împarte BC în 5 părți egale prin punctele D, E, F, G pornind de la B .

Se cere:

- 1) Să se calculeze segmentul MF .
- 2) Să se arate că $\triangle ABE$ este isoscel.

$$\text{R. 1) } MF = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ cm.}$$

13. În cercul O este înscris un triunghi ABC cu unghiul $\hat{B} = 48^\circ$. Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ este perpendiculară pe diametrul care trece prin C . Să se afle unghiurile triunghiului ABC .

$$\text{R. } (108^\circ; 24^\circ).$$

14. Laturile unui triunghi oarecare ABC sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}$. Latura cea mai mare $\overline{AB}$ este cu 3 cm mai mare decît latura cea mai mică AC .

Perpendiculara dusă în B pe BC , intersectează perpendicularele în A pe AB și în C pe AC , în M și N . $AM \cap CN = \{P\}$; $MN = 15$ cm.

Se cere:

- 1) Perimetrul triunghiului ABC .
- 2) Să se calculeze laturile triunghiului MNP .

Indicație.

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP.$$

$$\text{R. 1) } 14 \text{ cm, 2) } 18 \text{ cm; } 15 \text{ cm; } 9 \text{ cm.}$$

15. Într-un triunghi ABC unghiul $\hat{C} = 30^\circ$. Înălțimea dusă din B determină pe AC segmentele AD și DC care sînt invers proporționale cu numerele 1 și $\frac{1}{12}$, iar latura $AC = 26$ cm. Se cere:

- 1) Laturile triunghiului ABC .
- 2) Aria triunghiului ABC .
- 3) Aria triunghiului BDC .
- 4) Unghiurile triunghiului ABC .

$$\text{R. 1) } AB = 14 \text{ cm; } BC = 16\sqrt{3} \text{ cm; } AC = 24 \text{ cm.}$$

$$2) 104\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$3) 96\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

$$4) A \approx 81^\circ 50'; B \approx 68^\circ 10'; C = 30^\circ.$$

16. Fie punctele B și C pe segmentul $AB = 18$ cm, BC este media aritmetică între AB și CD și $\frac{AC}{2} = BD$.

În punctul B se ridică o perpendiculară pe AD ($BE = 6$ cm), iar în punctul D perpendiculara $DF = 12$ cm, de aceeași parte cu BE . Paralela dusă din E la AB întâlnește perpendiculara dusă din A în punctul G .

Se cere:

- 1) Lungimea segmentelor AB , BC și CD ;
- 2) Să se arate că triunghiul GEF este isoscel.

$$\text{R. } AB = 10 \text{ cm; } BC = 6 \text{ cm; } CD = 2 \text{ cm.}$$

17. În $\triangle$ isoscel ABC ($AB = AC$); $\hat{A} = 40^\circ$. BD bisectoarea unghiului B taie latura AC în D . Simetricul punctului D față de AB este punctul E , iar simetricul punctului D față de BC este F . $EF \cap AB = \{P\}$ și $EF \cap BC = \{G\}$.

Se cere:

- 1) Să se arate că triunghiul DEF este isoscel și să se calculeze unghiurile lui.
- 2) Să se arate că $EF \perp BD$.
- 3) Să se calculeze unghiurile poligonului $MPGND$, M și N fiind proiecțiile lui D pe AB și respectiv PC .

$$\text{R. 1) } \hat{D} = 110^\circ; \hat{E} = \hat{F} = 35^\circ;$$

$$3) \hat{G} = \hat{P} = 125^\circ; \hat{M} = \hat{N} = 90^\circ.$$

18. ABC este $\triangle$ dreptunghic ($\hat{A} = 90^\circ$); $BC = 15$ cm, iar $AB = \frac{4}{5}$ din BC . Punctul M aparține lui AC ; $AM = 3$ cm. Se duce $AN \parallel AB$; ($AN \cap BC = \{N\}$). Din M se duce $MG \perp BC$; $MG \cap BC = \{G\}$.
- 1) Să se calculeze aria $\triangle ABC$.
 - 2) Să se calculeze perimetrul $\triangle MNG$.

$$\text{R. 1) } 12 \text{ cm}^2; 2) 19,2 \text{ cm}.$$

19. Într-un triunghi ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), în care AB și AC sînt invers proporționale cu $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$ iar diferența catetelor este de 6 cm, se duce înălțimea AD și mediana AM ($D \in BC$, $M \in BC$). Din M se duce perpendiculara MN pe AM astfel încît $MN \cap AD = \{N\}$.
- 1) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABD .
 - 2) Să se afle aria triunghiului ANM .
 - 3) Să se afle aria patrulaterului $ABNM$.

$$\text{R. 1) } 43,2 \text{ cm}; 2) 32 \frac{13}{16} \text{ cm}^2; 3) 117 \frac{3}{16} \text{ cm}^2.$$

20. ABC $\triangle$ dreptunghic ($\hat{A} = 90^\circ$). Punctul $D \in AC$; se duce $DE \parallel BC$; $E \in AB$. Fie M mijlocul segmentului DE ; $AM \cap BC = \{N\}$. Se cere:
- 1) Să se arate că $BN = NC$.
 - 2) Să se arate că $AN < \frac{AB + AC}{2}$.

21. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează sub un unghi de 110° . Se duce o perpendiculară din B pe AC în E , care intersectează pe AD în F . Să se arate că: $AF \cdot AD = BF \cdot BE$; Să se calculeze unghiurile patrulaterului $EFDO$ (O fiind intersecția diagonalelor).

Indicație. $\triangle ABF \sim \triangle BCE$.

$$\text{R. } 110^\circ; 35^\circ; 90^\circ; 125^\circ.$$

22. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, diagonala $AC \perp CB$; $BC = AC$. Înălțimea AD a trapezului este egală cu a . Se cere:
- 1) Aria trapezului.
 - 2) Unghiurile trapezului.
 - 3) Aria triunghiului dreptunghic ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele ale trapezului.

$$\text{R. 1) } \frac{3a^2}{2}; 2) \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ; \hat{B} = 45^\circ \text{ și } \hat{C} = 135^\circ$$

$$3) 2a^2.$$

23. Fie cercul C de centru O și razele OB și OA ce formează $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Se duc tangente prin punctele A și B și se intersectează în Q .

Se cere:

- 1) Să se arate că OQ este bisectoarea unghiului AOB .
- 2) Să se arate că diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

24. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB = AC$). Punctul O este la intersecția mediatoarelor laturilor egale. Perpendiculara dusă din B pe BC intersectează mediatoarea OE în M , ($E \in AB$), iar paralela dusă din C la AB intersectează mediatoarea OD în N . Unghiul MAN este de 150° . ($D \in AC$).

Se cere:

- 1) Să se afle unghiurile triunghiului ABC .
- 2) Cunoscînd $AB = 4a$ cm, să se exprime în funcție de „ a ” aria triunghiului ABC .

$$\text{R. } 1) \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ; \\ 2) \text{ aria} = 4a^2 \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

25. În $\triangle ABC$ se duce bisectoarea AD ($D \in BC$). Simetricile punctului D față de AC și AB sînt respectiv M și N .

Se cere:

- 1) Să se arate că $\triangle DMN$ este isoscel.
- 2) Unghiul $NDM = \hat{B} + \hat{C}$.
- 3) $AD \perp MN$.

26. Un trapez isoscel are baza mare de 8 cm, baza mică de 2 cm și un unghi de 45° . Să se afle aria acestui trapez cu ajutorul unei construcții ajutătoare (nu se vor utiliza relațiile metrice, funcțiile trigonometrice sau proprietatea triunghiului dreptunghic isoscel).

27. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construiește pe latura BC un triunghi isoscel OBC avînd unghiurile de la bază de 15° .

Să se arate că $\triangle AOD$ este echilateral.

Indicații. Se va lua în considerație particularitatea ce o are un $\triangle$ dreptunghic cu un unghi de 15° . (Înălțimea dusă din unghiul drept pe ipotenuză este $1/4$ din ipotenuză.)

28. Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $AD = CB = a$. Se prelungesc segmentele AD și BC ; ($AD \cap BC = \{M\}$). Fie MH bisectoarea unghiului M care intersectează pe DC în H . Se consideră N și G mijloacele segmentelor DC și AB . Să se arate că: $MH \cap NG = \emptyset$.

Indicație. Din N se duc paralele la AD și CB egale cu a .

29. Avem $\triangle$ dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) și punctul $M \in BC$. Simetricul lui M față de AC este punctul N , simetricul lui M față de AB este punctul P , iar D și E sînt proiecțiile lui M pe AB și pe AC .

- 1) Să se arate că triunghiurile AEN și ADP sînt egale.
- 2) Să se demonstreze că punctele N , A și P sînt coliniare.
- 3) $NC \cap MP = \{G\}$. Să se arate că triunghiul MGC este isoscel.
- 4) Să se arate că există relația:

$$\frac{AD}{AB + AD} = \frac{CM}{CB + CM}$$

30. Într-un triunghi ABC unghiul exterior B este de trei ori mai mare decât unghiul A al triunghiului și cu $\frac{4}{9}$ din mai mare decât unghiul C al triunghiului.

Prin vârful A al triunghiului se duce o paralelă la baza BC .

Bisectoarea interioară a unghiului B întâlnește această paralelă în punctul M iar latura AC a triunghiului în punctul N .

- 1) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC .
- 2) Să se arate că triunghiurile ABN și MNC sunt echivalente.
- 3) Să se arate că există relația $AB \cdot NB = MN \cdot BC$.

$$R. \hat{A} = 40^\circ; \hat{B} = 60^\circ; \hat{C} = 80^\circ.$$

31. Aria unui trapez este de 48 cm^2 , raportul bazelor este $\frac{3}{5}$, iar înălțimea lui este de 6 cm .

- 1) Să se afle bazele trapezului.
- 2) Cât la sută din aria trapezului reprezintă aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele ale trapezului și având ca bază, baza mică a trapezului.

$$R. B = 10 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}; 56,25\%.$$

32. Într-un trapez diferența bazelor este 20 cm , iar linia mijlocie a trapezului este de $66, (6)\%$ din baza mare. Una din laturile neparalele și cu baza mare determină un unghi de 60° , cealaltă latură neparalelă este de 20 cm . La distanța de $4\sqrt{3} \text{ cm}$ de baza mare se duce o paralelă la baze.

- 1) Ce fel de trapez este în condițiile problemei?
- 2) Să se calculeze înălțimea trapezului.
- 3) Să se afle lungimea paralelei dusă la baza mare.

$$R. 1) \text{ Trapezul este isoscel;}$$

$$2) 10\sqrt{3} \text{ cm}; 3) 22 \text{ cm}.$$

33. În triunghiul ABC unghiul $\hat{A}$ are 60° iar unghiul B are 45° . Bisectoarea unghiului A întâlnește latura BC în D apoi se duce $DN \perp AB$ și se prelungește această perpendiculară pînă se taie cu prelungirea laturii AC în M . Să se arate că:

$$1) AD = \frac{2}{3} \text{ din } MN.$$

$$2) AD^2 = CM \cdot AB.$$

$$3) AN^2 = DN \cdot MN.$$

34. Într-un paralelogram $ABCD$ bisectoarele unghiurilor consecutive A și B se întâlnesc pe latura CD în punctul E ($E \in CD$).

- 1) Să se arate că triunghiul BCE este isoscel.
- 2) Știind că bisectoarele AE și BE sînt în raportul de $4/3$ iar diferența proiecțiilor lor pe latura AB este de $2,8 \text{ cm}$ să se afle aria paralelogramului și lungimea segmentelor AE și EB .

$$R. 1) \text{ Aria paralelogramului} = 48 \text{ cm}^2$$

$$2) AE = 8 \text{ cm}; BE = 6 \text{ cm}.$$

35. Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC se înscrie un dreptunghi ce are două vîrfuri pe ipotenuza triunghiului, iar celelalte două vîrfuri pe catetele triunghiului. Raportul dimensiunilor dreptunghiului este de $2/5$, iar ipotenuza triunghiului dreptunghic este de 45 cm .

- 1) Să se afle dimensiunile dreptunghiului.
- 2) Cât la sută reprezintă lăţimea dreptunghiului din înălţimea triunghiului dat.

R. 1) 10 cm şi 25 cm; 2) $44\frac{4}{9}\%$.

36. Se dă triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) cu înălţimea AD , fie E şi F simetricele punctului D faţă de laturile egale ale triunghiului $EF \cap AC = \{M\}$; $EF \cap AD = \{O\}$; $EF \cap AB = \{N\}$.

- 1) Să se arate că patrulaterul $BCEF$ este un trapez isoscel. (Se pot folosi cunoştinţe diferite şi se pot da cel puţin trei demonstraţii diferite.)
- 2) Să se determine natura patrulaterului $DCEM$ şi să se arate că este echivalent cu patrulaterul $BDNF$.
- 3) Să se demonstreze că AD este bisectoare pentru un unghi al triunghiului AEF ; la fel pentru un unghi al triunghiului EDF .
- 4) Să se studieze natura şi elementele patrulaterului $ADEF$.
- 5) Să se arate că există relaţia:

$$\frac{AN + AM}{AB + AC} = \frac{AO + ON}{AD + BD} = \frac{AN}{AC}.$$

37. Într-un trapez isoscel $ABCD$, cu baza mare $BC = 0,20$ m se înscrie un dreptunghi a cărui arie este de 48 cm^2 , lungimea dreptunghiului fiind baza mică (AD) a trapezului. $BA \cap CD = \{E\}$. Perpendiculara dusă din E pe AD este de 4 cm.

Se cere:

- 1) Aria trapezului $ABCD$.
- 2) Să se demonstreze $\triangle BDE \Leftrightarrow \triangle CAE$.
- 3) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului EBC .
- 4) Să se arate că aria triunghiului EAD este a treia parte din aria dreptunghiului înscris, iar raportul dintre aria dreptunghiului şi aceea a trapezului este de $4/7$.
- 5) Cum se poate construi (fără calcule sau măsurători) un dreptunghi a cărui arie este jumătate din aria trapezului?

R. 1) aria trapezului este de 84 cm^2 ;

3) raza cercului este de 10 cm.

38. Raportul bazelor unui trapez $ABCD$ este de $2/5$. Latura ne paralelă BC are 12 cm şi face cu baza mare (AB) un unghi de 60° iar latura ne paralelă AD face cu baza mare un unghi de 30° .

Să se calculeze:

- 1) aria $\triangle MDC$ ($AB \cap CD = \{M\}$).
- 2) aria $\triangle ACD$;
- 3) raportul ariilor $\triangle BCD$ şi $\triangle MAB$.
- 4) să se arate că $\triangle MAC \Leftrightarrow \triangle MBD$;
- 5) O fiind punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului, să se arate că $\triangle AOD$ este echivalent cu $\triangle BOC$.

R. 1) $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 2) $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$; 3) $6/25$.

39. Pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct N aşa fel încît $\frac{NA}{ND} = 4$; pe latura BC a dreptunghiului se ia un alt punct M aşa fel încît $\frac{MB}{MC} = \frac{2}{3}$. Perimetrul dreptunghiului este de 52 cm, iar raportul dintre cele două dimensiuni ale dreptunghiului este $3/10$.

- 1) Să se calculeze lungimea segmentului MN .
- 2) Să se arate că prelungirile segmentului MN în ambele sensuri, până la intersecția cu prelungirile laturilor AB și CD sint două segmente, unul egal cu MN și altul $\frac{MN}{2}$.

R. $MN = 10$ cm.

40. Într-un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuțit în $\hat{A}$ se prelungește AB (latura mai mică a paralelogramului cu un segment BF ; $FD \cap AC = \{E\}$). Latura AB este cu 1 cm mai mică decât suma segmentelor AE și EC de pe diagonala AC și cu 1 cm mai mare decât segmentul AE ; se mai știe că $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$.

Să se afle:

- 1) segmentul BF ;
- 2) lungimea laturii AB ;
- 3) mărimea raportului $\frac{AF}{CD}$;
- 4) să se arate că există relația: $\frac{EC \cdot BF}{AE - EC} = AB$.

R. 1) $BF = 2$ cm; 2) $AB = 4$ cm; 3) $\frac{AF}{CD} = \frac{3}{2}$.

41. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mare CD egală cu înălțimea AD iar baza mică AB de 5 cm; se ia un punct E la mijlocul înălțimii AD .
- 1) Știind că triunghiul BCE este dreptunghic în E să se arate că aria trapezului, în acest caz, este de 250 cm^2 și latura BC a trapezului este de 25 cm.
 - 2) Să se arate că jumătate din înălțimea trapezului este medie proporțională între baza mică și înălțimea trapezului.
 - 3) Să se demonstreze că există relația:

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{CD - DE}{DE}.$$

42. Raportul bazelor unui trapez este $1/3$. Latura ne paralelă $BC = 6\sqrt{2}$ cm face cu baza mare AB un unghi de 45° , iar diferența bazelor este de 8 cm. Să se calculeze:

- 1) aria $\triangle MAB$ cunoscând că $AD \cap BC = \{M\}$.
- 2) raportul ariilor $\triangle DCB$ și $\triangle MAB$;
- 3) aria $\triangle ADC$;
- 4) să se arate că $\triangle MAC \Leftrightarrow \triangle MBD$;
- 5) să se arate că $\triangle AOD \Leftrightarrow \triangle BOC$ știind că $AC \cap BD = \{O\}$.

R. 1) 54 cm^2 ; 2) $2/9$; 3) 12 cm^2 .

43. Într-un triunghi dreptunghic ABC raportul catetelor $\frac{AB}{AC} = \frac{7,8}{10,4}$ și diferența proiecțiilor lor pe ipotenuză este de 2,8 cm. Bisectoarea unghiului $\hat{B}$ intersectează cateta AC în D ($D \in AC$). Să se afle:
- 1) perimetrul triunghiului ABC ;
 - 2) raportul ariilor celor două triunghiuri formate în triunghiul ABC prin ducerea bisectoarei AD ;
 - 3) aria patrulaterului $ABED$ (E fiind piciorul perpendicularei dusă din A pe BC).

R. 1) 24 cm; 2) $3/5$; 3) $14,60 \text{ cm}^2$.

44. Un triunghi isoscel obtuzunghi ABC are perimetrul de 72 cm și 0,125 din baza BC a triunghiului este de 5 ori mai mică decât una din laturile egale ale triunghiului. Prin vârful A al triunghiului se duce o perpendiculară pe AB ($AB \cap BC = \{E\}$). Să se afle:

- 1) laturile triunghiului ABC ;
- 2) lungimea segmentelor AE și EC ;
- 3) cât la sută reprezintă baza triunghiului isoscel din ipotenuza triunghiului dreptunghic ABE .

R. 1) 20 cm, 20 cm, 32 cm;
2) $AE = 15$ cm, $EC = 7$ cm;
3) 128%.

45. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) AB micșorată cu $3\frac{1}{3}\%$ din ea este de două ori mai mare decât 0,25 din cateta AC , iar cateta AC mărită cu 0,75 din ea este cu 8 cm mai mare decât AB . Se duce bisectoarea BE ($E \in AC$) și mediana AG ($G \in BC$); $BE \cap AG = \{I\}$. Să se afle:

- 1) raportul catetelor triunghiului ABC ;
- 2) aria triunghiului AGC ;
- 3) considerînd $\angle B = 60^\circ$ să se demonstreze că triunghiul BIG este dreptunghic în I și să se afle raportul dintre EG și BE ;
- 4) în acest caz particular cât la sută reprezintă aria triunghiului BIG din aria triunghiului ABC ?

R. 1) $\frac{3}{4}$; 2) 12 cm^2 ; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 25%.

46. Într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC = 2a$ linia centrelor O și O' ale cercurilor înscris și circumscris acestui triunghi este egală cu segmentul AO ce unește vârful unghiului drept cu centrul cercului înscris în triunghi.

Să se afle:

- 1) unghiurile triunghiului ABC ;
- 2) raportul catetelor;
- 3) raportul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;
- 4) raportul ariilor cercurilor înscris și circumscris.

R. 1) 90° , 60° , 30° ;
2) $\sqrt{3}$; 3) 3;
4) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

47. Un triunghi ABC are aria de 360 cm^2 . Pe baza BC se ia un punct oarecare D și un alt punct M la mijlocul segmentului AD . Se cere:

- 1) aria triunghiului MBC ;
- 2) valoarea raportului ariilor triunghiului ABM și BMD ;
- 3) să se demonstreze că:

$$\frac{\text{aria } \triangle ABM + \text{aria } \triangle AMC}{\text{aria } \triangle MBD + \text{aria } \triangle MCD} = 1.$$

- 4) cât la sută reprezintă aria triunghiului CMD din aria triunghiului AMC ?

R. 1) 180 cm^2 ; 2) 1; 3) 100%.

48. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) bisectoarea unghiului C intersectează înălțimea AD în E și latura AB în F iar bisectoarea unghiului B intersectează latura AC în P .

Se cere:

- 1) Să se arate că bisectoarele se intersectează sub un unghi de 45° .
- 2) Considerind FP diametrul unui cerc să se arate că arcul $\widehat{MN}$ cuprins între punctele de intersecție a cercului cu cele două bisectoare este de 90° .
- 3) Să se arate că AFE este isoscel.

2. Probleme de geometrie în spațiu

1. Fie planul P și un punct $A \notin P$, se duc: perpendiculara AM pe plan și oblicele egale AB și AC , astfel ca unghiul BMC să fie drept. Presupunind că AM este egal cu 2 cm, iar unghiul $BAM = 60^\circ$, să se calculeze distanța BC dintre picioarele B și C ale oblicelor (fig. IV.5).

R. $BC = 2\sqrt{6}$ cm.

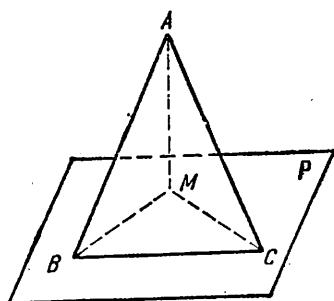


Fig. IV.5

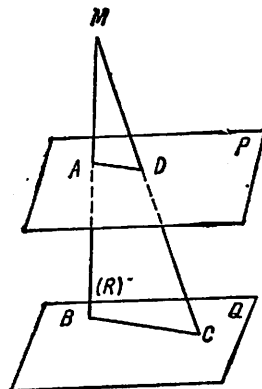


Fig. IV.6

2. Se dă un punct M la distanța $MA = 3$ cm de un plan P și la distanța $MB = 8$ cm de un alt plan Q , paralel cu primul. Segmentul $BC = 6$ cm $C \in Q$. MC intersectează planul P în D . Să se afle perimetrul triunghiului MAD .

R. 9 cm.

3. Un vas de formă cubică, plin cu alcool cîntărește 52,688 kg, iar vasul gol cîntărește 2 kg. Să se afle adîncimea vasului, știind că densitatea alcoolului este de 792 kg/m^3 .

Indicație. Vom afla, în prealabil, masa netă a alcoolului. Volumul alcoolului din vas se va obține împărțind masa sa la densitate. Dacă masa este dată în kg volumul se obține în decimetri cubi.

Găsim:

$$V = \frac{50 \cdot 688}{0,792} = 64 \text{ dm}^3$$

R. Înălțimea = 4 dm.

4. Se dă un cub $ABCD A'B'C'D'$ a cărui muchie are lungimea a .
a) Să se calculeze distanța AP de la vîrfurile A la diagonala CA' a cubului.

Indicație. Observăm că triunghiul $A'AC$ este dreptunghic în A , muchia $A'A$ a cubului fiind perpendiculară pe planul bazei, este perpendiculară pe toate dreptele din plan.

Scriem în două moduri deosebite dublul ariei triunghiului $A'AC$ și avem

$$AP = \frac{AC \cdot AA'}{A'C}.$$

Mărima segmentului AC se deduce din triunghiul dreptunghic CDA . $AC = a\sqrt{2}$.

$$R. PA = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Observație. Se înțelege că aceeași valoare se obține pentru oricare din distanțele de la un vîrf al cubului la o diagonală a acestuia.

5. Se dă o prismă patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$. Latura pătratului bazei este de 2 dm, iar diagonală AC' a prismei de 4 dm.

1. Să se arate că triunghiul ACC' este isoscel.

2. Să se calculeze aria totală a prismei.

3. Presupunem că prismă este metalică și după ce o topim, vrem să confecționăm alta care are baza un dreptunghi cu lungimea de 2 dm și lățimea $\sqrt{2}$ dm.

Să se arate că înălțimea prismei confecționate este egală cu diagonală prismei inițiale.

Indicație. 1. $AC = 2\sqrt{2}$. Triunghiul $C'CA$ este dreptunghic în C .

$$C'C = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

2. Aria totală se compune din aria a două pătrate $ABCD$ și $A'B'C'D'$ la care se adaugă patru fețe dreptunghiulare, fiecare avînd dimensiunile 2 dm și $2\sqrt{2}$ dm, adică o arie laterală de $16\sqrt{2}$ dm²; aria totală = $8(1 + 2\sqrt{2})$ m².

3. Volumul prismei inițiale = $8\sqrt{2}$ dm³. Prin topire, volumul rămîne același, numai forma se schimbă. Dacă vrem să facem din același metal o altă prismă dreptunghiulară, cu dimensiunile bazei de 2 dm și $\sqrt{2}$ dm, avînd deci o arie de $2\sqrt{2}$ dm², ea va trebui să aibă o înălțime egală cu:

$$\frac{V}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 4 \text{ dm, adică cu diagonală prismei inițiale.}$$

$$R. 2) 8(1 + 2\sqrt{2}) \text{ m}^2.$$

6. O groapă prismatică, cu baza un triunghi echilateral, cu latura de 2 m și adîncă de 4 m, este plină cu îngrășămintă animale. Aceste îngrășămintă se împrășteie pe suprafața unui lot de flori în formă de hexagon cu latura de 10 m. Ce grosime are stratul de îngrășămintă?

$$R. \approx 0,026 \text{ m.}$$

7. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un vas paralelipipedic închis, avînd dimensiunile 2 dm, 3 dm, 4 dm. El conține apă, care ocupă $\frac{3}{8}$ din volumul său.

Se cere înălțimea pînă la care se ridică lichidul cînd culcăm vasul, pe rînd, pe cîte una din fețele sale.

$$R. 1,125 \text{ dm.}$$

8. Un cub $ABCD A'B'C'D'$ este înscris într-o sferă cu raza de 2 cm. Să se afle volumul cubului.

Indicație. Diagonalele cubului trec prin centrul O al sferei.

Fie a lungimea laturii cubului. Triunghiul ACC' este dreptunghic.

$$(1) a^2 + AC^2 = AC'^2,$$

$$(2) AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Înlocuind această valoare a lui AC^2 în (1) și ținând seama că $AC' = 4$, volumul cubului va fi $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3 \approx 12,331 \text{ cm}^3$.

$$\text{R. } V \approx 12,331 \text{ cm}^3.$$

9. O prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral, are volumul $27\sqrt{3} \text{ cm}^3$ și înălțimea de 12 cm. Să se afle suma tuturor muchiilor.

$$\text{R. } 54 \text{ cm.}$$

10. Se dă o prismă dreaptă $ABCD A'B'C'D'$ cu baza $ABCD$, un romb. Diagonalele $A'C$ și $B'D$ ale prisme au lungimile $A'C = 8 \text{ cm}$, $B'D = 5 \text{ cm}$, iar muchiile laterale ale prisme sînt de 2 cm. Să se calculeze latura rombului de bază și aria sa.

$$\text{R. } l = \frac{9}{2} \text{ cm}; 3\sqrt{35} \text{ cm}^2.$$

11. O piramidă pătratică regulată are apotema de 12 cm și muchia laterală de 13 cm.

a) Să se calculeze volumul și aria totală.

b) Fie M mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.m.c. al numerelor ce reprezintă aria totală și aria laterală a piramidei și N mulțimea a cărei elemente sînt factorii primi ai numărului ce reprezintă apotema piramidei.

Să se calculeze $C_M N$.

c) Să se determine $M \cap N$ și $M - N$.

$$\text{R. a) } V \approx 363 \text{ cm}^3; \text{ aria totală} = 340 \text{ cm}^2.$$

12. Într-o piramidă patrulateră regulată, latura bazei este 1 m, iar aria laterală este de 260 dm^2 . Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

Indicație. Aria laterală cunoscută se compune din patru triunghiuri egale.

Se obține valoarea apotemei piramidei 13 dm.

Aplicînd teorema lui Pitagora, se obține și lungimea unei muchii.

$$\text{R. } 13 \text{ dm}; 2) 13,92 \text{ dm}; 3) 400 \text{ dm}^3.$$

13. Să se afle volumul unui tetraedru regulat $ABCD$ a cărui muchie are lungimea l . Aplicație numerică: $l = 10 \text{ cm}$.

$$V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$\text{R. } V \approx 117,450 \text{ cm}^3.$$

14. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi dreptunghic ABC , cu catetele $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm. Muchia laterală VA are 32 cm și este perpendiculară pe planul bazei. Se cere:

- 1) Lungimile înălțimilor BB' și CC' ale piramidei coborâte din B pe fața VAC și din C pe fața VAB .
- 2) aria totală a piramidei.

R. 1) 30 cm; 40 cm; 2) 2 720 cm².

15. S-au construit 10 corturi pentru o tabără de pionieri. Fiecare cort avea forma unui paralelipiped drept, cu baza un pătrat, cu latura de 4 metri și acoperișul în formă de piramidă regulată, cu înălțimea egală cu aceea a paralelipipedului și egală cu diagonală pătratului de bază. Pentru fixarea unui cort se leagă vârful piramidei cu frîngii trase în prelungirea muchiilor laterale ale ei și fixate apoi cu cîte un țărșuș în pămînt.

Se cere:

- a) Să se calculeze cîți metri pătrați de pînză trebuie pentru aceste corturi.

R. 1 382,4 m².

16. Un cristal de cuarț este format dintr-o prismă hexagonală regulată și două piramide regulate, cu virfurile în S și S' . Știind că cele două piramide sînt egale, că cristalul cîntărește 15,6 g, că densitatea sa este de 2 600 kg/m³, că latura hexagonului este 1 cm, iar înălțimea prisme este jumătate din distanța dintre virfurile piramidelor, să se calculeze distanța SS' .

R. $\approx 3,44$ cm.

17. Un cub are muchia egală cu a . Să se determine aria laterală a unei piramide care are vârful în centrul bazei superioare, iar baza piramidei are virfurile în mijloacele laturilor bazei inferioare.

Aplicație numerică $a = 3$ cm.

R. 13,5 cm².

18. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ este egală cu 10 m, aria bazei este egală cu $75\sqrt{3}$ m². La distanța $2\sqrt{3}$ m de vîrf facem o secțiune DEF paralelă cu baza. Să se afle volumul piramidei formate $VDEF$.

R. 18 m³.

19. Într-o piramidă patrulateră regulată este înscris un cub astfel încît patru virfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru virfuri se află în planul bazei. Să se determine volumul cubului dacă latura bazei piramidei este $a = 4$ cm, iar înălțimea este de $h = 8$ cm.

Indicație. $\triangle VO'N \sim \triangle VOD$.

(1)

Dar: (x fiind muchia cubului)

$$O'N = \frac{x\sqrt{2}}{2}, \quad OD = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$VO = h, \quad VO' = h - x \rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h - x}{h},$$

$$x = \frac{ah}{h + a} = \frac{8}{3} \text{ cm}, \quad V = l^3 = \left(\frac{8}{3}\right)^3 \text{ cm}^3.$$

20. O piramidă hexagonală regulată are înălțimea de 9 m. La 3 m de vîrf se duce o secțiune paralelă cu baza,

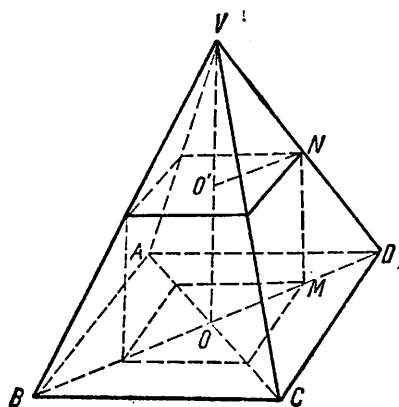


Fig. IV.7

avînd aria de $24\sqrt{3}$ m². Să se determine raportul volumelor celor două piramide, cea dată și cea obținută prin secțiune.

$$R. \frac{27}{1}.$$

21. Să se determine volumul piramidei octogonale regulate cu latura bazei de 6 dm și cu muchiile laterale înclinate pe planul bazei cu un unghi de 60°.

Indicație. Se calculează R cercului circumscris octogonului, apoi muchia piramidei prin trigonometrie.

$$R. V \approx 790 \text{ dm}^3.$$

22. Într-un trunchi de con $R = 13$ cm, $r = 5$ cm, iar generatoarea este înclinată pe bază cu un unghi de 45°. Să se afle: aria laterală a trunchiului de con, aria totală și volumul.

$$R. \text{ Aria laterală} = 144\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2; \text{ Aria totală} = \pi(144\sqrt{2} + 169 + 25) \text{ cm}^2.$$

$$\text{Volumul} = \frac{8\pi}{3}(169 + 25 + 65) \text{ cm}^3.$$

23. Să se determine aria totală și volumul piramidei patrulatere regulate care are muchia laterală $M = 12$ dm, știind că muchia este înclinată pe planul bazei cu un unghi de 60°.

Indicație: Aflăm înălțimea piramidei $I = 12 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$, apoi apotema piramidei $A = 3\sqrt{14}$. Aria laterală ≈ 190 dm². Aria totală ≈ 262 dm².

$$R. V = 144\sqrt{3} \text{ dm}^3$$

24. Un vas cilindric închis avînd raza de 10 cm și generatoarea de 15 cm, conține lichid cît $\frac{1}{3}$ din volumul său. Să se afle aria porțiunii din capacele vasului care este acoperită de lichid, vasul fiind în poziție orizontală.

Indicație. Volumul lichidului este a treia parte din volumul vasului, întrucît cînd s-a întors vasul nu s-a introdus, nici nu s-a scos nimic din lichid:

$$\frac{1}{3} \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3 = 500\pi \text{ cm}^3.$$

Volumul lichidului se obține înmulțind aria A a segmentului de cerc cu înălțimea cilindrului, de unde avem:

$$A = \frac{500\pi}{15} = \frac{100\pi}{3} \approx 104,7 \text{ cm}^2.$$

$$R. \approx 104,7 \text{ cm}^2.$$

25. Un rezervor cilindric de fontă cu raza de 7 m, iar înălțimea de 12 m, este plin cu benzină, a cărei densitate este de 700 kg/m³. Să se afle în cîte vagoane-cisternă se va putea încărcă toată benzina din acel rezervor, știind că într-un vagon încap 10 000 kg de benzină.

$$R. \approx 129 \text{ vagoane.}$$

26. Un tub cilindric de sticlă cîntărește 80 g cînd este gol și 140 g cînd se introduce în el mercur pînă la o înălțime de 4 cm. Densitatea mercurului fiind de 13 600 kg/m³, să se afle diametrul interior al tubului.

Indicație. Masa mercurului este $140 - 80 = 60$ g.

iar $V = \frac{m}{\rho}$. În cazul de față masa fiind dată în grame, volumul se va afla în centimetri cubi:

$$V = \frac{60}{13,6} \approx 4,4 \text{ cm}^3,$$

$$R. \approx 1,18 \text{ cm.}$$

27. Un vagon-cisternă plin cu ulei este format dintr-o parte cilindrică, avînd lungimea de 5 m, și din două emisfere avînd raza egală cu 1,20 m (ca și partea cilindrică). Să se afle masa uleiului din acest vagon, densitatea uleiului fiind de 920 kg/m^3 .

$$R. 31,6 \text{ t.}$$

28. Un ax de oțel cu lungimea de 1,40 m și diametrul de 84 mm se strunjește astfel, încît diametrul să se reducă la 80 mm. Să se calculeze cît la sută din masa inițială se pierde prin strunjire.

Indicație. Volumul pierdut prin strunjire va fi:

$$V_1 - V_2 = 1\,400(42^2 - 40^2) \text{ mm}^3.$$

Dacă notăm cu ρ densitatea oțelului, masa axului nestrunjit va fi $V_1\rho$ mg, a axului strunjit $V_2\rho$ mg, iar a oțelului pierdut prin strunjire $(V_1 - V_2)\rho$ mg. Raționăm astfel: dacă la o masă egală cu $V_1\rho$ mg se pierd $(V_1 - V_2)\rho$ mg, atunci la 100 mg se vor pierde:

$$\frac{100(V_1\rho - V_2\rho)}{V_1\rho} = \frac{100(V_1 - V_2)}{V_1}.$$

$$R. \approx 9,29\%.$$

29. Aria totală a unui cilindru este în două ori aria unui cerc cu raza R . Știind că diametrul cilindrului este egal cu înălțimea lui, să i se calculeze volumul în funcție de R .

$$R. \approx 1,2 R^3.$$

30. Un cilindru circular drept are generatoarea G egală cu diametrul $2R$ al bazei. Să se determine G și R , știind că aria totală a cilindrului este egală cu de patru ori aria unei sfere cu raza de 0,25 m.

$$R. \approx 0,41 \text{ m}; \approx 0,82 \text{ m.}$$

31. Într-un cilindru circular drept se duce un plan paralel cu axa cilindrului care taie din cercul bazei un arc de 120° . Înălțimea cilindrului este de 10 cm, iar distanța OI , de la centrul cercului de bază, la planul secant, este de 2 cm.

Să se determine aria secțiunii.

Indicație. Secțiunea paralelă cu axa cilindrului este un dreptunghi $ABCD$, a cărui înălțime AD este chiar $OO' = 10$ cm. Baza sa este o coardă AB care subîntinde 120° . AB fiind coardă subîntînsă de arcul de 120° , este latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

$$R. 40\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

32. Aria laterală a unui con este de 10 cm^2 . Dacă îl desfășurăm, obținem un sector circular cu unghiul la centru de 36° . Se cere aria totală a conului.

$$R. 11 \text{ cm}^2.$$

33. Un pionier a confecționat un con dintr-o bucată de carton avînd forma unui sfert de cerc, a cărui arie este de $9\pi \text{ cm}^2$. Să se calculeze volumul conului astfel obținut.

$$R. \frac{9\pi\sqrt{15}}{8} \text{ cm}^3.$$

34. Secțiunea axială VAB făcută într-un vas de formă conică este un triunghi dreptunghic isoscel, a cărui arie este de 18 cm^2 . Printr-un mic orificiu în V se toarnă mercur pînă la jumătate din înălțimea vasului. Ce masă va avea mercurul din vas, știind că densitatea mercurului este de $13\,600 \text{ kg/m}^3$.

Indicație. Mercurul din vas ia forma vasului. Volumul său va fi diferența dintre V_1 al vasului, adică a conului mare cu vîrf V , și al volumului V_2 al conului mic cu același vîrf și care reprezintă partea goală din vas.

$$R. m \approx 942 \text{ g.}$$

35. Astupăm vîrfurile unei pîlnii înalte de 12 cm și turnăm în ea $301,44 \text{ ml}$ apă. Apa se ridică la o înălțime de 8 cm . Care este capacitatea pîlniei?

$$R. \approx 1 \text{ litru.}$$

36. Un triunghi dreptunghic ABC are ipotenuza $BC = a$ și catetele $AC = b$, $AB = c$, astfel ca $c < b$. Se rotește acest triunghi pe rînd în jurul celor două catete. Să se afle ariile laterale ale corpurilor astfel obținute, și să se spună care e mai mare dintre ele. Același lucru pentru volume. Să se afle și volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei. Caz numeric: $c = 9 \text{ cm}$; $b = 12 \text{ cm}$.

Indicație. Deoarece a este lungimea ipotenuzei, putem scrie:

$$(1) \quad c < b < a.$$

Prin rotirea în jurul catetei AB , obținem un con cu raza bazei b , înălțimea c și generatoarea a ; iar prin rotirea în jurul catetei AC , un alt con cu raza bazei c , înălțimea b și generatoarea a . Notînd cu A_{AB} și A_{AC} ariile laterale ale celor două conuri, avem:

$$(2) \quad A_{AB} = \pi ba; \quad A_{AC} = \pi ca.$$

Comparînd valorile lui A_{AB} și A_{AC} se vede că $A_{AB} > A_{AC}$.

Tot astfel, notînd cu V_{AB} și V_{AC} volumele celor două conuri și fiindcă $c < b$, rezultă $V_{AB} < V_{AC}$.

$$A_{BC} = \frac{\pi bc(b+c)}{a}, \quad V_{BC} = \frac{1}{3} \frac{\pi b^2 c^3}{a}.$$

În cazul numeric:

$$A_{AB} = 180\pi \text{ cm}^2, \quad A_{AC} = 135\pi \text{ cm}^2, \quad A_{BC} = 151,2\pi \text{ cm}^2,$$

$$V_{AB} = 432\pi \text{ cm}^3, \quad V_{AC} = 324\pi \text{ cm}^3, \quad V_{BC} = 259,200\pi \text{ cm}^3.$$

37. Să se calculeze raza sferei circumscrise unui con drept cu generatoarea de 37 cm și raza bazei de 12 cm .

$$R. \approx 19,5 \text{ cm}$$

38. Înălțimea VO a unui con este de 8 m , iar generatoarea sa VA este de 10 m .

a) Să se afle volumul sferei S înscris în con.

b) Punctul $M \in VA$, simetricul lui M față de OA este M' iar față de VO este M'' . Să se arate că $O \in M'M''$.

$$R. a) 36\pi \text{ m}^3.$$

39. Cite bile avînd diametrul de 10 mm, putem confecționa din 5 kg de plumb? Cite kg de alamă ne trebuie pentru a confecționa un număr egal de bile? (Densitatea plumbului este $11\,350\text{ kg/m}^3$, iar densitatea alamei este $8\,400\text{ kg/m}^3$.)

Indicație. Volumul unei bile cu diametrul de $10\text{ mm} = 1\text{ cm}$ este:

$$V = \frac{\pi}{6}\text{ cm}^3.$$

Dacă bila este de plumb, va avea o masă m_p :

$$(1) \quad m_p = \frac{11,35\pi}{6}\text{ g},$$

iar dacă este de alamă va avea o masă m_A :

$$(2) \quad m_A = \frac{8,4\pi}{6}\text{ g}.$$

(Masa a fost obținută în grame, deoarece volumul s-a calculat în centimetri cubi.) Găsim numărul n de bile de plumb ce se pot confecționa din 5 kg.

$$(3) \quad n = 5\,000 : \frac{11,35\pi}{6} \approx 841.$$

Cum fiecare bilă de alamă ar cântări m_A g, pentru a vedea cîtă alamă ne trebuie pentru ca să confecționăm tot n bile, vom înmulți m_A cu n , adică:

$$m_A \cdot n = \frac{5 \cdot 8,4}{11,35}\text{ kg} = 3,70\text{ kg de alamă}.$$

R. 841 bile; 3,70 kg de alamă.

40. O bilă de cupru goală în interior cîntărește $2,5344\pi\text{ kg}$. Raza ei interioară este de 3 cm. Cît este de mare raza exterioară, știind că densitatea cuprului este $8\,800\text{ kg/m}^3$.

Indicație. Fie R raza bilei. Va trebui ca:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 324\pi,$$

$$\rightarrow R^3 = 243 = 3^5 = 3^3 \cdot 3^2 \rightarrow R = 3\sqrt[3]{3^2}\text{ cm}.$$

41. Dintr-un cub de fildeș cu muchia $l = 6\text{ cm}$, vrem să tăiem o sferă, astfel ca partea pierdută să fie cît mai mică posibil. Cît la sută se pierde? Care este masa părții pierdute, dacă densitatea fildeșului este $1\,920\text{ kg/m}^3$.

Indicație. Pentru ca partea pierdută să fie cît mai mică, trebuie să tăiem din cub numai atît cît să ajungem la sfera înscrisă în el, adică la sfera de diametru egal cu muchia l a cubului.

Volumul V al părții pierdute va fi diferența dintre volumul cubului și al sferei înscrise:

$$V = l^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^3 = l^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right).$$

Volumul cubului fiind l^3 , vom lucra prin regula de trei simplă și vom găsi pierderea în procente:

$$\frac{100\,l^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)}{l^3} = 100\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{50(6 - \pi)}{3}.$$

Obținem o pierdere de 47,66%. Masa părții pierdute este:

$$m = V\rho \approx 197,68 \text{ g.}$$

Observare. Mărimea muchiei l a cubului s-a eliminat din calculul procentual ceea ce era natural deoarece în această problemă volumul cubului nu influențează asupra procentului de pierdere.

R. 47,66%; $m \approx 197,68 \text{ g.}$

42. Se strunjește o sferă metalică cu raza $R = 100 \text{ mm}$, pînă cînd i se micșorează raza cu 10 mm . Se topesc resturile de la strunjire și se confecționează din ele un obiect de formă conică, avînd raza bazei egală cu raza sferei inițiale. Ce înălțime are conul obținut?

R. 108,4 mm.

43. Considerăm un cilindru și un con echilateral, circumscrise unei sfere. Să se arate că: 1) aria totală a cilindrului este medie proporțională între aria sferei și aria totală a conului; 2) volumul cilindrului este medie proporțională între celelalte două volume; 3) raportul fiecărui volum la aria sa totală este egal cu o treime din rază.

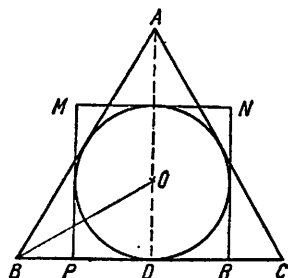


Fig. IV.8

Indicație. Un plan secant dus prin axa conului ne dă un cerc mare al sferei, înscris în același timp într-un pătrat (care reprezintă secțiunea făcută în cilindru) și un triunghi echilateral (care reprezintă secțiunea din con).

Notînd cu R raza sferei, $OD = R$.

Avem $OB = 2 \cdot R$ și cum $OB = OA \Rightarrow OA = 2R$ și deci $AD = 3R$.

Avem $6\pi R^2 =$ aria totală a cilindrului.

Pentru aflarea ariei laterale a conului, cunoaștem înălțimea conului

$AD = 3R$; $AB = BC = 2BD$; dar $BD^2 = AB^2 - AD^2 \Rightarrow 3BD^2 = 9R^2$, $BD = R\sqrt{3}$.

Rezultă că aria laterală a conului $= \pi BD \cdot AB = \pi R\sqrt{3} \cdot 2R\sqrt{3} = 6\pi R^2$.

Aria bazei conului $= \pi BD^2 = \pi(R\sqrt{3})^2 = 3\pi R^2$.

Aria totală $= 6\pi R^2 + 3\pi R^2 = 9\pi R^2$.

- 1) Pentru a răspunde la prima întrebare trebuie să arătăm că:

$$(A_{\text{cil}})^2 = A_{\text{sf}} \cdot A_{\text{con}}.$$

Înlocuind obținem:

$$(6\pi R^2)^2 = 4\pi R^2 \cdot 9\pi R^2; 36\pi^2 R^4 = 36\pi^2 R^4.$$

- 2) Pentru volumul corpurilor avem:

$$\text{Volumul sferei} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Volumul cilindrului} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

$$\text{Volumul conului} = \frac{1}{3} \cdot 3\pi R^2 \cdot 3R = 3\pi R^3.$$

Demonstrăm ușor egalitatea

$$(V_{\text{cil}})^2 = V_{\text{sf}} \cdot V_{\text{con}},$$

adică:

$$(2\pi R^3)^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 3\pi R^3.$$

3)

$$\frac{\text{Volumul sferei}}{\text{Aria sferei}} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{1}{3} R.$$

$$\frac{\text{Volumul cilindrului}}{\text{Aria totală a cilindrului}} = \frac{2\pi R^3}{6\pi R^2} = \frac{1}{3} R$$

$$\frac{\text{Volumul conului}}{\text{Aria totală a conului}} = \frac{3\pi R^3}{9\pi R^2} = \frac{1}{3} R.$$

44. Să se afle raza unei sfere de fontă care cântărește 10 kg, cunoscând că densitatea fontei este 7 200 kg/m³.

$$R \approx 0,7 \text{ dm.}$$

45. Generatoarea unui cilindru este $\frac{3}{4}$ din raza cercului de bază. Știind că acest cilindru are aria totală de 56π cm², să se afle volumul. Din acest cilindru facem o prismă hexagonală regulată maximă. Cit la sută din volum s-a pierdut.

Indicație.

$$\text{Pierdere} = \pi r^2 h - \frac{3r^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h = r^2 h \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \approx r^2 h \cdot 0,55 = 26,40 \text{ cm}^3.$$

$$\frac{V_{\text{pierd}}}{V_{\text{cil}}} = \frac{48 \cdot 0,55}{48\pi} = \frac{0,55}{3,14} = 0,175; 0,175 \cdot 100 = 17,5\%.$$

$$\text{R. } V = 48\pi \text{ cm}^3; \approx 17,5\% \text{ pierdere.}$$

46. Să se afle volumul corpului de rotație, obținut prin rotirea unui hexagon regulat în jurul unei diagonale. Să se compare acest volum cu volumul sferei circumscrise lui. Se dă $l_0 = a$.

Indicație. Volumul acestui corp este format din volumul a două conuri și al unui cilindru.

$$R_{\text{con}} = R_{\text{cil}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; I_{\text{con}} = \frac{a}{2}; I_{\text{cil}} = a.$$

$$\Rightarrow V = \pi \frac{3a^3}{4} \cdot \frac{4a}{3} = \pi a^3.$$

$$V_{\text{sferi}} = \frac{4\pi a^3}{3}; \frac{V_{\text{sferi}}}{V_{\text{corp}}} = \frac{\frac{4\pi a^3}{3}}{\pi a^3} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{R. } V = \pi a^3; \frac{V_{\text{sf}}}{V_{\text{corp}}} = \frac{4}{3}.$$

47. Un cilindru echilateral are raza R . Să se calculeze: aria totală, volumul și diagonala secțiunii axiale. (Cilindrul echilateral este cilindrul care are secțiunea prin axă un pătrat, adică $G = 2R$.)

$$\text{Indicație. } A_t = 2\pi R(R + G) = 2\pi R(R + 2R) = 6\pi R^2;$$

$$V = \pi R^2 G = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

$$\text{R. } 6\pi R^2; 2\pi R^3; 2R\sqrt{2}.$$

48. Soclul unei statui are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Latura pătratului bazei mari este de 0,84 m, înălțimea trunchiului este de 1,18 m și apotema de 1,2 m. Să se afle aria laterală.

$$R. \approx 3 \text{ m}^2.$$

49. a) Să se afle volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă diagonalele lui sînt de 9 cm, iar laturile bazelor sînt de 7 cm și 5 cm.
b) Fie A mulțimea a căror elemente sînt cifrele numărului ce reprezintă volumul trunchiului și B mulțimea a cărei elemente sînt cifrele numărului $\{80 < x < 109 \mid x \text{ să fie divizibil prin } 2; 3; 5; 9\}$. Să se calculeze $C_A B$.

$$R. \text{ a) } 109 \text{ cm}^3; \text{ b) } C_A B = \{1\}.$$

50. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt de 2 cm și 6 cm. Fața laterală formează cu planul bazei un unghi de 60° . Să se afle volumul trunchiului.

$$R. \frac{26\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3.$$

51. Raza bazei unui con circular drept este 3 m. Secțiunea paralelă la bază la o distanță de 3 m de vîrf are raza de 2 m. Să se afle volumul și aria laterală a conului.

$$R. 42,390 \text{ m}^3; 50,8680 \text{ m}^2.$$

52. Un vas are formă de con cu vîrf D în jos. Secțiunea axială este un triunghi echilateral. În el se lasă să cadă o sferă de rază r . În vas se toarnă apă, astfel încît suprafața apei formează un plan tangent la sferă. Care este adîncimea apei după ce se scoate sfera?

Indicație. Pentru a putea calcula adîncimea apei după ce scoatem sfera, va trebui să scoatem volumul sferei din volumul conului care conține lichid pînă la suprafața sferei, deci volumul ABD .

Notăm: V = volumul conului ABD ; H = înălțimea conului ABD ; i și r_1 înălțimea și raza conului de apă fără sferă; V_1 = volumul conului de apă fără sferă.

Secțiunea este un triunghi echilateral $\Rightarrow \hat{D}_1 = 30^\circ$. Cunoaștem de asemenea raza sferei $= r$; $\Rightarrow OD = 2r$ și, ținînd seama că $OC = r$, $\Rightarrow H = 3r$.

Notăm raza conului (CB) cu x , conform aceleiași teoreme $BD = 2x$.

Din triunghiul DBC , avem:

$$4x^2 - x^2 = 9r^2; 3x^2 = 9r^2, x^2 = 3r^2 = R^2; R = r\sqrt{3};$$

$$V = 3\pi r^3,$$

iar:

$$V_1 = 3\pi r^3 - \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5\pi r^3}{3}.$$

Scoțînd sfera din apă, nivelul apei scade și urmează să calculăm înălțimea conului nou format:

$$V = \frac{\pi r_1^2 i}{3}.$$

Nu cunoaștem pe r_1 și pe i , pe care le putem determina din triunghiul dreptunghic $DD'N$, unde D' este centrul bazei conului obținut după scoaterea sferei, iar N intersecția diametrului cu generatoarea. Notînd $DD' = i = y$, avem: $\text{tg} 30^\circ = \frac{ND'}{DD'}$, de unde

$$ND' = r_1 = y \text{ tg } 30^\circ = \frac{y}{\sqrt{3}};$$

$$\text{Volumul apei va fi } \frac{\pi r^2}{3} : i = \frac{\pi \left(\frac{y}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot y}{3} = \frac{\pi y^3}{9}.$$

Volumele $\frac{5\pi r^3}{3}$ și $\frac{\pi y^3}{9}$ sînt egale, deci

$$\frac{5\pi r^3}{3} = \frac{\pi y^3}{9}, \text{ de unde: } y^3 = 15r^3.$$

Adîncimea apei $i = \sqrt[3]{15}r$.

R. a) $\sqrt[3]{15}r$.

53. Într-un vas în formă de con, cu virful în jos cu înălțimea de 12 dm, baza conului fiind orizontală, se toarnă 301,44 l de apă. Apa se urcă în vas pînă la 8 dm. Să se afle capacitatea vasului întreg.

R. 324π litri.

54. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Conul este înscris într-o sferă. Să se calculeze volumul sferei.

R. $\frac{25^3\pi}{48} \text{ m}^3$.

55. Înălțimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Să se afle volumul sferei înscrise în con.

R. $36\pi \text{ m}^3$.

56. Un con circular drept are baza de 40 cm și generatoarea de 50 cm. La depărtare de 10 cm de virf se face o tăietură printr-un plan paralel cu baza. Să se afle aria totală și volumul conului care are ca bază cercul de secțiune și virful în centrul bazei conului dat.

R. $At \approx 4\,689 \text{ cm}^2$ $V \approx 3\,722 \text{ cm}^3$.

57. Un con circular drept are volumul $12,56 \text{ dm}^3$ și lungimea cercului de bază 12,56 dm. Să se afle aria totală.

R. $At \approx 35,17 \text{ dm}^2$.

58. Un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 15 cm și o catetă de 12 cm se rotește în jurul ipotenuzei. Să se calculeze volumul și aria corpului format.

R. $151,20\pi \text{ cm}^3$; $259,200\pi \text{ cm}^2$.

59. Să se afle volumul sferei circumscrise paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile 2 cm, 3 cm, 4 cm.

Indicație. Dacă se notează cu a ; b ; c dimensiunile paralelipipedului, diagonala d este dată de relația:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

și pentru raza sferei circumscrise:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2},$$

R. $V = \frac{29\pi\sqrt{29}}{6} \text{ cm}^3$

60. Într-o sferă de rază r se face o secțiune cu un plan la distanța d de centru. Să se afle raportul ariilor catetelor formate și aria cercului de secțiune.

Indicație.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\pi r(r-d)}{2\pi r(r+d)} = \frac{r-d}{r+d}.$$

$$A_{\text{cercului}} = \pi(r^2 - d^2).$$

Aria celei de-a doua calote se poate afla scăzând din aria sferei aria primei calote:

$$A_2 = A_{\text{sferă}} - A_1 = 4\pi r^2 - 2\pi r(r-d) = 2\pi r(r+d).$$

- 61.** Într-o sferă cu raza de 14 cm este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, care are diagonalele unei fețe laterale de 26 cm. Să se afle latura bazei prisme.

Indicație. Metoda 1. Avem $A'B$ = diagonala unei fețe; $A'B = 26$; AA' = înălțimea prisme, pe care o notăm cu x .

$MO = \frac{x}{2}$; OB = raza cercului circumscris triunghiului ABC ; MB = raza sferei = 14.

Din $\triangle MOB \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$; $\frac{x^2}{4} = R^2 - r^2$,

adică $x^2 = 4R^2 - 4r^2$

$$(1) \quad x^2 = 4 \cdot 196 - 4r^2.$$

Din $\triangle ABA'$ avem:

$$x^2 = A'B^2 - AB^2 = 26^2 - AB^2 = 676 - AB^2.$$

dar $AB = l_3 = r\sqrt{3}$, deci:

$$(2) \quad x^2 = 676 - 3r^2.$$

Din relațiile (1) și (2) avem: $676 - 3r^2 = 4 \cdot 196 - 4r^2$; $r = 6\sqrt{3}$, de unde $l_3 = r\sqrt{3} = 18$ cm.

Metoda 2-a. $A'B = 26$ cm = diagonala feței; $MO = x$; $A'A$ = înălțimea prisme = $2x$; MB = raza sferei = 14 cm; $OB = y$ = raza cercului circumscris triunghiului de bază al prisme.

Din triunghiul dreptunghic MOB avem:

$$(1) \quad MO^2 + OB^2 = MB^2$$

sau:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 196.$$

Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ avem:

$$(2) \quad A'A^2 + AB^2 = A'B^2$$

sau:

$$(2) \quad 4x^2 + 3y^2 = 676 \quad (\text{fiindcă } AB = l_3 = r\sqrt{3}).$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 196 \\ 4x^2 + 3y^2 = 676 \end{cases}$$

Obținem $y^2 = 108$, de unde $AB^2 = 3y^2 = 324$, iar $AB = 18$.

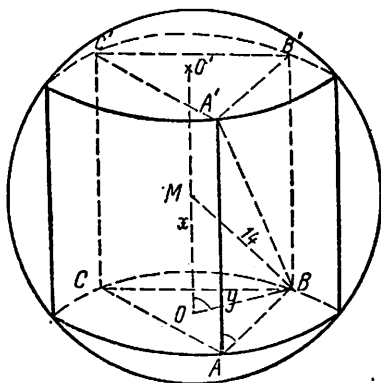


Fig. IV.9

- 62.** O piesă este compusă dintr-un vas cilindric $ABCD$ (secțiune) cu diametrul de 0,20 m, care este introdus într-un alt vas de forma unui trunchi de con, $ABFE$ (secțiune) ce are generatoarea de 0,9 m. Știind că generatoarea trunchiului de con face cu înălțimea cilindrului un unghi de 10° , să se afle capacitatea vasului în formă de trunchi de con.

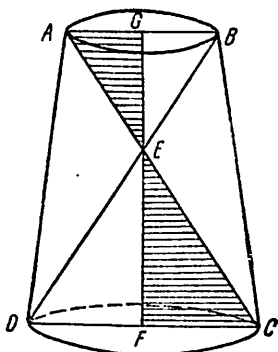


Fig. IV.11

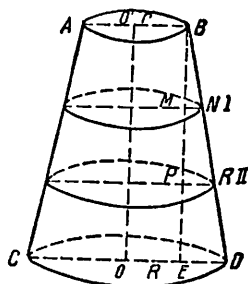


Fig. IV.12

Cunoaștem elementele conurilor, necesare pentru aflarea volumelor.

Din volumul trunchiului scădem suma volumelor celor două conuri:

$$V_{tr.} = \frac{12\pi}{3} (25 + 9 + 15) = 196\pi \text{ cm}^3$$

$$V_1 = \frac{25\pi}{3} \cdot 7,5 = 62,500\pi \text{ cm}^3; \quad V_2 = \frac{9\pi}{3} \cdot 4,5 = 13,5\pi \text{ cm}^3$$

$$V_1 + V_2 = 76\pi \text{ cm}^3.$$

$$\text{Partea rămasă} = 196\pi - 76\pi = 120\pi \text{ cm}^3.$$

67. Un trunchi de con are înălțimea de 18 cm, iar razele bazelor de 5 cm și 11 cm. Înălțimea este împărțită în trei părți egale de către două plane paralele cu bazele. Să se afle ariile secțiunilor (fig. IV.12).

Indicație. Secționînd trunchiul cu un plan axial, obținem trapezul ABCD. Coborînd înălțimea din B pe DC, se formează triunghiurile dreptunghice:

1) $BED \sim BMN$; 2) $BED \sim BPR$.

Se obțin razele secțiunilor și ariile lor.

$$R. \quad 49\pi \text{ cm}^2; \quad 81\pi \text{ cm}^2.$$

68. Trunchiul de con cu razele de 3 m și 5 m și un con de aceeași înălțime au volumele egale. Să se afle raza bazei conului.

$$R. \quad 7 \text{ cm}.$$

69. Să se afle volumul solidului născut prin rotația completă a unui hexagon regulat cu latura de 2 cm în jurul unei laturi (fig. 47).

Rezolvare. 1° Trunchiul de con $ABB'A'$ născut din rotirea laturii AB are

$$\text{Raza conului mare } R = BF = l_3 = AB \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

$$\text{Raza cercului mic } r = AM = LF = \frac{2\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \sqrt{3} \text{ cm}. \quad h = MF = AL = 1 \text{ cm}.$$

$$\text{Volumul } V_1 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \cdot 1}{3} (12 + 3 + 6) = 7\pi \text{ cm}^3.$$

2° Cilindrul $BCB'C'$ născut din rotirea laturii BC, are raza

$$R = BF = 2\sqrt{3} \text{ cm}, \text{ înălțimea } H = EF = BC = 2 \text{ cm}, \text{ iar volumul:}$$

$$V_2 = \pi R^2 \cdot H = 24\pi \text{ cm}^3.$$

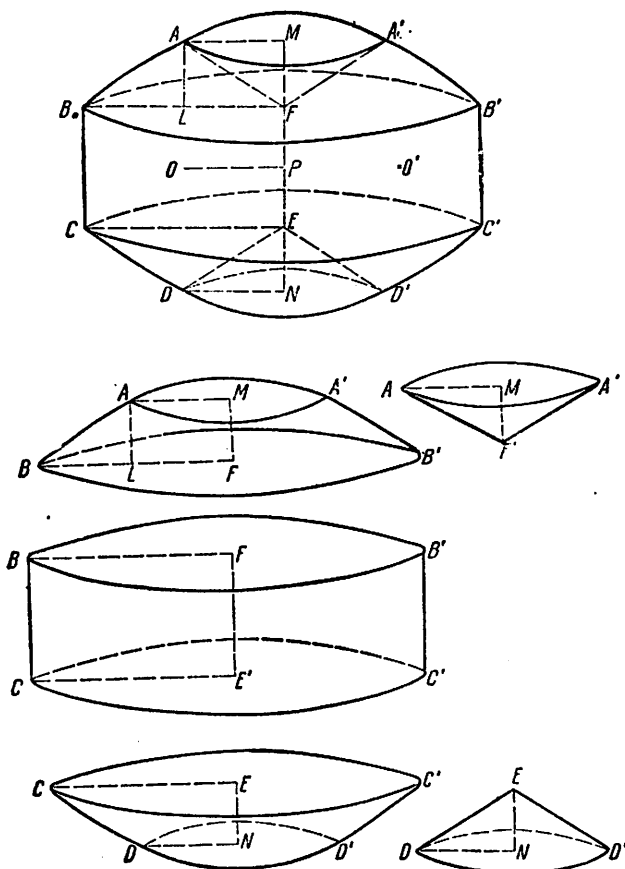


Fig. IV.13

3° Volumul conului FAA' născut din rotirea laturii AF are raza cercului de bază $r = AM = \sqrt{3}$ cm. Înălțimea $FM = 1$ cm, deci volumul

$$V_3 = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 3 \cdot 1}{3} = \pi \text{ cm}^3.$$

4° Corpul născut prin rotirea hexagonului este format astfel:

$$V = 2 \cdot V_1 + V_2 - 2V_3 = 14\pi + 24\pi - 2\pi = 36\pi \text{ cm}^3 \approx 113,04 \text{ cm}^3.$$

70. Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se găsesc punctele E și F astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{3}{4}$.

Cunoscând că aria triunghiului EFD este de 74 m^2 să se calculeze volumul piramidei care are ca bază pătratul $ABCD$ și înălțimea $6/7$ din latura pătratului de bază.

2) Se face în piramidă o secțiune paralelă cu baza ce împarte înălțimea în raportul de $1/3$ față de vîrf. Să se afle aria laterală a trunchiului de piramidă ce se formează.

R. 784 m^2 .

71. Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($\hat{A} = 90^\circ$). Se duce bisectoarea $AD = a$ ($D \in BC$) și din D se duce bisectoarea DE a unghiului ADC ($E \in AC$). Se cere:

1) Perimetrul patrulaterului $ABDE$.

2) Să se arate că $AB \parallel DE$.

3) Să se calculeze volumul corpului format prin rotirea completă a triunghiului ABC în jurul lui BC .

R. 1) $a(1 + 2\sqrt{2})$

3) $\frac{2\pi a^3}{3}$

72. Pentru construcția unui pilon de beton necesar la podul de peste Dunăre s-au întrebuințat următoarele materiale:

a) cimentul reprezintă $\frac{1}{4}$ din masa lui și încă 500 chintale;

b) pietrișul și nisipul reprezintă $\frac{2}{5}$ din masa pilonului și încă 800 chintale exceptând masa cimentului;

c) fier beton cu masa de 2 500 chintale.

Pilonul are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată avind raportul laturilor bazelor $\frac{1}{3}$, aria totală 210 m² și aria laterală 120 m².

Se cere:

1) Să se calculeze masa totală a pilonului.

2) Volumul acestui pilon.

R. $\approx 10\ 857$ chintale,
156 m³.

73. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu latura cea mai mare de 24 dam era folosit astfel:

$\frac{1}{3}$ din el și încă 10 dam² pentru teren de sport;

$\frac{2}{9}$ din restul terenului pentru parcat mașinile agricole.

Restul de 0,42 hectare pentru cultivat zarzavaturi.

Terenul a fost amenajat pentru construcția unei școli ce ocupă o suprafață pătratică cu două vîrfuri pe catetele triunghiului dreptunghic și două vîrfuri pe ipotenuză.

Se cere:

1) Să se afle aria întregului teren.

2) Suprafața ocupată de clădirea școlii.

3) Cît la sută reprezintă suprafața ocupată de școală din suprafața ce era ocupată inițial de terenul de sport.

4) Clădirea școlii fiind de forma unui paralelipiped cu aria laterală de 2 940 m², să se afle volumul școlii.

R. 1) 96 dam², 3) $\approx 85\%$,
2) 36 dam², 4) 44 100 cm³.

74. Un teren în forma unui triunghi dreptunghic avind latura cea mai mică de 25 m a fost folosit astfel:

$\frac{1}{3}$ din suprafața terenului și încă 10 m² pentru un teren de sport, $\frac{2}{7}$ din suprafața rămasă, pentru parcat mașinile agricole, iar 350 m² s-au folosit

pentru cultivat diverse zarzavaturi. S-a amenajat acest teren pentru a se construi pe el o creșă de forma unui cub avind unul din colțuri comun cu unghiul drept al terenului, iar un colț al clădirii pe ipotenuza triunghiului dreptunghic.

Se cere:

- 1) Aria terenului și perimetrul lui.
- 2) Cît la sută reprezintă suprafața ocupată de clădire din suprafața întregului teren.
- 3) Volumul clădirii.

R. 1) 750 m², 150 m; 2) $\approx 41,5\%$; 3) $\approx 5\,495$ m³.

75. O locuință personală de forma unui paralelipiped dreptunghic s-a construit pe un teren de forma unui triunghi isoscel, avind un unghi comun, iar una din muchiile clădirii pe lungimea cea mai mare a terenului. Înălțimea clădirii, este de $\frac{2}{5}$ din perimetrul bazei clădirii. Înainte de construcția clădirii, terenul era folosit pentru cultivat zarzavaturi, astfel:

$\frac{1}{4}$ din suprafață și încă 9 m² pentru cultivat ceapă, 0,(3) din terenul rămas cultivat cu roșii, iar restul terenului de 94 m² era cultivat cu cartofi. Se cere:

- 1) Aria terenului.
- 2) Aria laterală a clădirii.

R. 1) 200 m²;
2) 640 m².

76. Un teren de forma unui trapez isoscel, cu baza mare 54 m, baza mică 24 m a fost împrejmuit cu gard astfel:
În prima zi cu 4 m mai puțin decît 25% din perimetrul lui;
a doua zi 50% din perimetrul rămas; iar a treia zi, restul de 50 m.
Suprafața terenului a fost împărțită în trei parcele invers proporționale cu numerele 6; $\frac{2}{3}$ și 0,375.

Pe cele două parcele mai mici s-au cultivat zarzavaturi iar pe parcela cea mai mare s-a construit o cisternă, pentru apă, de forma unui trunchi de con cu aria totală de 108 π m², aria laterală de 50 π m², iar raportul razelor bazelor sale de $\frac{3}{7}$ (cisterna-trunchi de con este cu baza mică în sus).

Se cere:

- 1) Aria terenului;
- 2) Aria celor trei parcele;
- 3) Cîți litri de apă s-au pompat în cisternă, dacă apa s-a ridicat pînă la 75% din înălțimea ei, față de bază.

R. 1) 780 m²,
2) 30 m², 270 m², 480 m²,
3) 219 125 litri.

77. Un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) are $AB = 6$ cm și $BC = 12$ cm. Se duce mediana AM . Înălțimea BP a triunghiului ABM intersectează pe AC în D , iar prelungirea lui MD taie pe AB în N . Se cunoaște că $\frac{PD}{BP} = \frac{1}{3}$.

Se cere:

- 1) Aria triunghiului MNB .
- 2) Să se arate că aria triunghiului MDC este a treia parte din aria triunghiului ABC .
- 3) Să se arate că $\triangle NDC$ este isoscel.
- 4) Să se arate că $\triangle BNC$ este echilateral.
- 5) Volumul corpului format din rotația completă a triunghiului ABC în jurul lui BC .

$$R. 1) 18\sqrt{3} \text{ cm}^2,$$

$$5) 108\pi \text{ cm}^3.$$

78. Un teren agricol al G.A.C., de formă dreptunghiulară are lungimea cu 1 km mai mare decât lățimea, iar perimetrul lui este egal cu perimetrul unui alt teren de forma unui pătrat cu aria 15 625 ha.

Terenul se împarte în trei parcele astfel încît raportul primelor două este de $\frac{3}{4}$, iar a ultimelor două $\frac{4}{5}$.

Pe parcela cea mai mică s-au cultivat zarzavaturi, roșii, cartofi și mazăre, proporțional cu numerele $\frac{1}{3}$; 0,(6) și $\frac{4}{9}$. Parcela cea mai mare a fost cultivată cu grâu, iar cealaltă cultivată cu porumb.

Se cere:

- 1) Ariile celor trei parcele.
- 2) Suprafețele cultivate cu roșii, cartofi, mazăre.
- 3) Cît la sută din suprafața totală reprezintă suprafața ocupată prin construirea unui siloz de forma unui paralelipiped dreptunghic cu înălțimea cît $\frac{5}{3}$ din lățime, lățimea $\frac{3}{4}$ din lungime și suma tuturor muchiilor sale egale cu suma muchiilor unui cub cu aria totală de 96 dam².
- 4) Să se calculeze volumul silozului.

$$R. 1) 39 \text{ km}^2; 52 \text{ km}^2; 65 \text{ km}^2;$$

$$2) 9 \text{ km}^2; 18 \text{ km}^2; 12 \text{ km}^2;$$

$$3) \frac{1}{1300} \%;$$

$$4) 60 \text{ dam}^3.$$

79. Pe două semidrepte Ox și Oy făcînd un unghi $xOy = 120^\circ$ se iau două segmente egale $OA = OB = a$, iar pe perpendiculara în O pe planul xOy se ia un segment OC egal cu diagonala pătratului de latură a .

- 1) Să se demonstreze că ABC e echilateral;
- 2) Să se afle aria totală și volumul piramidei $COAB$;
- 3) Aria triunghiului ABP (P fiind mijlocul segmentului OC);
- 4) Aria și volumul corpului obținut prin rotația completă a triunghiului ABP în jurul lui AB . (a se socotește exprimat în cm.)

$$R. 2) \text{ Aria tot.} = a^2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vol.} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{6}}{12} \text{ cm}^3.$$

$$3) \text{ Aria } (ABP) = \frac{3a^2}{4} \text{ cm}^2.$$

$$4) \text{ Aria solid.} = \frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2} \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vol.} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4} \text{ cm}^3.$$

80. Un trunchi de con cu aria laterală de $100 \pi \text{ cm}^2$ este circumscris unei sfere cu raza de 4 cm.

Se cere aria totală a cilindrului înscris în trunchiul de con cu una din baze comună cu baza mică a trunchiului de con și cu aceeași înălțime ca și tr. de con.

R. $40\pi \text{ cm}^2$.

81. O piramidă cu vârful în V are ca bază un romb $ABCD$ cu unghiul $\hat{A} = 60^\circ$ și diagonala $BD = 4a$. Înălțimea $VO = 2a\sqrt{3}$ (O centrul rombului). Din această piramidă se scoate un con circular drept cu același vîrf, iar baza un cerc cu centrul o , raza conului fiind jumătate din raza cercului înscris în romb. (a este socotit în cm.)

Se cere:

- 1) Volumul și aria laterală a piramidei;
- 2) Cît la sută reprezintă volumul conului din volumul piramidei;
- 3) Lungimile muchiilor VA și VB ;
- 4) Unghiul format de muchiile VA și VB cu planul bazei.

R. 1) $16a^3 \text{ cm}^3$; Aria lat. $= 8a^2\sqrt{15} \text{ cm}^2$;

2) $\approx 17\%$;

3) $VA = 2a\sqrt{6} \text{ cm}$; $VB = 4a \text{ cm}$;

4) 45° ; 60° .

82. Un trapez $ABCD$ are baza mare $BC = 30 \text{ cm}$, baza mică $AD = 9 \text{ cm}$, $AB = 10 \text{ cm}$ și $CD = 17 \text{ cm}$.

Se cere:

- 1) Aria trapezului.
- 2) Să se construiască acest trapez.
- 3) Să se afle aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele avînd ca bază baza mare a trapezului.
- 4) Să se afle volumul corpului format prin rotația completă a trapezului în jurul bazei mari.

R. 1) 156 cm^2 ;

3) $171 \frac{3}{7} \text{ cm}^2$.

4) $V = 1024\pi \text{ cm}^3$;

83. O cisternă de formă sferică pentru vin este montată într-un suport de beton de formă conică, așa fel încît cisterna este tangentă la generatoarele și baza conului.

Generatoarea conului este de 25% din înălțimea lui plus 8 m, iar raportul acestora este de $\frac{5}{4}$.

Pentru a umple vasul cu vin erau necesare un număr de pompe ce trebuiau să funcționeze un anumit număr de ore.

S-au adus încă 4 pompe în plus și vasul s-a umplut cu 2 ore mai devreme. Dacă inițial ar fi fost cu 2 pompe mai puțin decît în plan atunci vasul s-ar fi umplut cu două ore mai tîrziu.

Se cere:

- 1) Capacitatea cisternei.
- 2) Cîte pompe erau necesare pentru a umple vasul conform planului și în cîte ore.

R. 1) $36\pi \text{ Kl}$.

2) 8 pompe; 6 ore.

84. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este de 5500 cm^2 ; $3\frac{1}{3}\%$ din raza bazei mici este cu 79 cm mai mică decât raza bazei mari, iar diferența acestor raze este de 50 cm.

Se cere:

- 1) La ce distanță de planul bazei mici se întâlnește generatoarea cu axa conului din care face parte trunchiul.
- 2) Să se determine unghiul format de generatoare cu planul bazei mari și de asemenea să se calculeze unghiul ce se formează la vârful conului din care face parte trunchiul.
- 3) Turnînd apă într-un vas de forma și dimensiunile trunchiului de con considerat, pînă la o înălțime egală cu 40% din înălțimea trunchiului de con față de baza mare, să se calculeze ce cantitate de apă în litri este turnată în vas.

R. 1) 30 cm; 2) $38,726 \text{ l}$.

85. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare.

Razele bazelor sînt în raport de $\frac{1}{2}$, iar suma lor este de 12 cm;

Se cere:

- 1) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con.
- 2) Să se calculeze volumul conului întreg din care face parte trunchiul dat.

R. 1) $48\sqrt{10} \pi \text{ cm}^2$.

2) $512 \pi \text{ cm}^3$.

86. Un teren în formă de dreptunghi $ABCD$ este folosit astfel: $0,375$ din suprafața lui și încă 10 m^2 pentru teren de sport; $\frac{2}{5}$ din restul suprafeței, și încă 4 m^2 pentru răsaduri de flori. Restul terenului de 140 m^2 este folosit pentru parcat mașinile agricole. Se face pe acest teren un șanț de canalizare pe direcția bisectoarei dusă din B care intersectează latura AD în punctul P . Se știe că raportul ariilor ABP și $ABCD$ este $\frac{1}{4}$.

Se cere:

- 1) Aria terenului.
- 2) Să se calculeze dimensiunile terenului.
- 3) Să se calculeze lungimea șanțului.

R. 1) 400 m^2 ;

2) $10\sqrt{2} \text{ m}$; $20\sqrt{2} \text{ m}$.

3) 20 m .

87. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ latura bazei este cît media proporțională a numerelor 6 și $8\frac{1}{6}$. În această piramidă se face o secțiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza avînd latura de 5 cm. Diagonala BD' a trunchiului de piramidă ce se formează este cît baza de numerație a numărului 65 care scris în baza zece este 59.

Se cere:

- 1) Aria secțiunii diagonale $B'D'BD$.
- 2) Volumul piramidei.

R. 1) $18\sqrt{2} \text{ cm}^2$;

2) $V = 171,5 \text{ cm}^3$.

88. Pe un teren de forma unui trapez isoscel cu perimetrul de 48 m și baza mică de 6 m s-a construit o cisternă cilindrică avînd baza tangentă la laturile trapezului. Înălțimea cisternei este $\frac{2}{\sqrt{3}}$ din raza cercului.

Să se afle:

- 1) Aria terenului.
- 2) Volumul cisternei.

R. $72\sqrt{3} \text{ m}^2$; $162 \pi \text{ m}^3$.

89. Media aritmetică a dimensiunilor bazei unui paralelipiped dreptunghic este 20 cm; $\frac{2}{3}$ din dimensiunea cea mai mare a bazei, micșorată apoi cu 25% din ea este cît dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului micșorată cu 6 cm. Muchia paralelipipedului este — în cm — media proporțională a numerelor 20 și 5. Pe lungimea AD a dreptunghiului $ABCD$, baza paralelipipedului, se ia un punct N așa fel încît $NA/ND = 7$, iar pe lungimea BC , opusă lui AD se ia un alt punct M așa fel încît $MB/MC = 3/5$. Să se calculeze:

- 1) dimensiunile paralelipipedului;
- 2) cît la sută reprezintă dimensiunea cea mai mare din dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului;
- 3) diagonala paralelipipedului (cu aproximație în minus de o zecime);
- 4) lungimea segmentului MN ;
- 5) cu cît trebuie prelungite laturile dreptunghiului pentru a intersecta prelungirile segmentului MN în ambele sensuri.

R. 1) 24 cm, 16 cm, 10 cm;
2) 150%; 3) 30,5 cm.
4) $MN = 20$ cm;
5) 4 cm; 12 cm.

90. Baza unei piramide este un triunghi ale cărui laturi sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{74}$ și $\frac{1}{102}$, iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică a triunghiului este 31 cm; înălțimea piramidei este cu 25% mai mare decît înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei, secțiune al cărei perimetru este 0,54 m.

Să se calculeze:

- 1) laturile triunghiului de bază a piramidei;
- 2) laturile triunghiului de secțiune;
- 3) cît la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a secțiunii;
- 4) să se afle volumul piramidei inițiale.

R. 1) 20 cm, 37 cm, 51 cm;
2) 10 cm, 18,5 cm, 25,5 cm;
3) 200%; 4) 1530 cm^3 .

91. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $18\sqrt{3}$ cm iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45° . La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de bază se face o secțiune paralelă cu baza piramidei. Să se calculeze:

- 1) media aritmetică între latura bazei piramidei și înălțimea piramidei;
- 2) volumul piramidei;
- 3) volumul piramidei avînd ca bază secțiunea efectuată;

- 4) raportul volumelor celor două piramide;
 5) cât la sută reprezintă aria bazei piramidei inițiale din aria bazei piramidei a doua?

R. 1) $3(\sqrt{3} + 1)$; 2) $54\sqrt{3} \text{ cm}^3$; 3) $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$;
 4) $\frac{1}{27}$; 5) 900%.

92. O piramidă are ca bază un triunghi ABC ale cărui laturi sint proporționale cu numerele 12, 16, 20, iar diferența dintre latura cea mai mare și cea mai mică este 2 cm; înălțimea piramidei este cu 0,8(3) cm mai mare decât înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei al cărei perimetru este 0,04 m. Să se calculeze:

- 1) laturile triunghiului de bază a piramidei;
 2) laturile triunghiului de secțiune făcută în piramidă;
 3) înălțimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare;
 4) volumul piramidei inițiale;
 5) cât la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a triunghiului de secțiune?

R. 1) 3 cm, 4 cm, 5 cm;
 2) 1 cm; $1\frac{1}{3}$ cm; $1\frac{2}{3}$ cm;
 3) 2,4 cm; 4) 6,5 cm³; 5) 300%.

93. O piramidă are ca bază un triunghi al cărui perimetru este 15 cm; laturile lui sint trei numere consecutive. Se face o secțiune paralelă cu baza, avind latura cea mai mare a triunghiului de secțiune de 1,5 cm. Să se calculeze:

- 1) laturile bazei piramidei;
 2) perimetrul triunghiului de secțiune;
 3) media proporțională între laturile mijlocii ale triunghiului de bază și cel de secțiune.

R. 1) 4 cm, 5 cm, 6 cm;
 2) 3,75 cm; 3) 2,5.

94. O prismă dreaptă are ca bază un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea AB egală cu 133,3(3)% din lățimea BC , iar înălțimea prisme este cu 25% mai mare decât dimensiunea cea mai mare a bazei. 0,125 din lungimea dreptunghiului este cu 1 cm mai mică decât $33\frac{1}{3}\%$ din lățimea lui. Din punctele A și C

se duce câte o perpendiculară pe diagonala BD a dreptunghiului. Figura $AA'CC'$ este baza unei alte prisme drepte cu aceeași înălțime ca și prima prismă (A' și C' sint picioarele perpendicularelor duse pe diagonala BD , $A' \text{ și } C' \in BD$). Să se afle:

- 1) volumul prisme inițiale;
 2) să se arate că $AA'CC'$ este un paralelogram;
 3) să se determine laturile și diagonalele paralelogramului $AA'CC'$;
 4) să se calculeze unghiul format de diagonala prisme inițiale cu planul bazei.

R. 1) $V = 480 \text{ cm}^3$;
 3) $AA' = 4,8 \text{ cm}$; $AC' = \sqrt{30,28} \text{ cm}$;
 $AC = 10 \text{ cm}$; $A'C' = 2,8 \text{ cm}$;
 4) 45° .

95. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este a cm; muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60° . Se face o secțiune paralelă cu baza pe la mijlocul înălțimii. Să se afle raportul volumelor celor două corpuri formate prin această secțiune.

R. $\frac{1}{7}$.

96. $\frac{2}{7}$ din latura unei piramide patrulatere regulate este cu 2 cm mai mare decât 0,2 din latura unei prisme patrulatere regulate înscrisă în piramidă, cu baza pe planul bazei piramidei. Raportul dintre latura bazei piramidei micșorată cu un sfert din dublul laturii piramidei și latura prisme micșorată cu 3 cm este 1. Diagonala trunchiului de piramidă ce se formează prin înscrierea prisme este — în cm — media proporțională a numerelor 40,5 și 8. Să se afle:
1) volumul piramidei;
2) aria laterală a prisme.

R. 1) $V = 1\,372\text{ cm}^3$; 2) Aria laterală = 240 cm^2 .

97. 25% din înălțimea unui con mărită cu 2 cm este cît 0,6 din generatoarea lui micșorată cu 2 cm, iar media lor aritmetică mărită cu 1 cm este cît cea mai mare dintre ele. Să se calculeze:

- 1) cît la sută reprezintă raza conului din raza unei sfere înscrisă în acest con;
2) volumul sferei înscrisă în con;
3) aria laterală a conului;
4) raportul volumelor sferei și conului.

R. 1) 200%; 2) $36\pi\text{ cm}^3$;

3) $60\pi\text{ cm}^2$; 4) $\frac{3}{8}$.

98. $\frac{1}{11}$ din raza bazei unui con este cu 8 cm mai mică decât raza unui cerc de secțiune paralelă cu baza conului făcută la o distanță de bază, egală cu media proporțională între numerele 144 și 9 (socotită în cm). Raportul razelor trunchiului de con format prin planul de secțiune este $\frac{5}{11}$, iar înălțimea trunchiului este împărțită de două plane de secțiune paralele cu bazele în trei părți egale. Să se afle razele cercurilor de secțiune.

R. (raza conului = 32 cm) 10 cm; 14 cm; 18 cm.

99. Să se afle aria unei sfere circumscrise paralelipedului dreptunghic, cu dimensiunile invers proporționale cu numerele 0,25, $\frac{1}{6}$ și 0,125, iar diferența dintre suma dimensiunilor bazei paralelipedului și muchia lui este de 1 cm. Să se determine raportul dintre numărul care exprimă raza sferei și media proporțională dintre numerele 29 și 4.

R. $29\pi\text{ cm}^2$; $\frac{1}{4}$.

100. Suma dintre diagonalele unui paralelogram și una dintre laturile sale este 165 cm. Suma diagonalelor întrece cu 12 cm dublul acestei laturi a paralelogramului, iar diferența dintre această latură a paralelogramului și diagonala cea mai mică este de 11 cm.

1) Să se afle volumul piramidei care are ca bază acest paralelogram, iar înălțimea cît $33\frac{1}{3}\%$ din latura paralelogramului.

2) Cît la sută reprezintă diagonala mică a paralelogramului din înălțimea lui?

R. 1) $6\,936\text{ cm}^3$; 2) $166,6\%$.

101. Într-o prismă cu baza un triunghi dreptunghic în care raportul catetelor este $\frac{3}{4}$ iar diferența dintre proiecțiile lor pe ipotenuză este de $2,8\text{ cm}$, se înscrie un cilindru cu aceeași înălțime ca și prisma.

1) Să se calculeze raportul volumelor cilindrului și al prisme în care este înscris cilindrul.

2) Să se calculeze a patra proporțională între raza cilindrului, înălțimea triunghiului dreptunghic dusă din vârful unghiului drept și cateta cea mai mică.

R. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $14,4$.

102. Un cub este înscris într-o piramidă patrulateră regulată astfel încît patru vîrfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se află pe planul bazei.

1) Să se determine aria totală a cubului știind că $0,75$ din latura bazei piramidei întrece cu 2 cm $0,125$ din înălțimea ei, iar raportul acestora este $\frac{1}{2}$.

2) Să se arate că numărul care exprimă volumul piramidei este același cu cel ce exprimă aria totală a cubului.

3) În ce raport se află ariile bazelor cubului și piramidei?

R. 1) $42\frac{2}{3}\text{ m}^2$; 2) $42\frac{2}{3}\text{ m}^3$; 3) $\frac{4}{9}$.

103. Într-un con cu unghiul din vîrf de 90° se înscrie un cilindru echilateral; diagonala secțiunii axiale a cilindrului este $a\sqrt{2}\text{ cm}$. Baza cilindrului este pe planul bazei conului iar generatoarele lui întîlnesc generatoarele conului respectiv. Să se determine raportul dintre aria totală a cilindrului și aria laterală a conului.

R. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

104. Într-un trunchi de con, diferența pătratelor celor două raze este 16 , iar suma lor este 8 cm . Diferența razelor reprezintă $16,6\%$ din înălțimea trunchiului. Din el se taie două conuri ce au ca baze, bazele trunchiului, iar generatoarele unuia sînt în prelungirea generatoarelor celuilalt. Să se determine:

1) volumul trunchiului de con;

2) cît la sută reprezintă înălțimea conului celui mare din înălțimea conului mic;

3) raportul înălțimilor celor două conuri;

4) Să se determine raportul dintre volumul părții rămase după scoaterea celor două conuri și volumul trunchiului de con.

R. 1) $196\pi\text{ cm}^3$; 2) $166,6\%$;

3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{30}{49}$.

105. Într-un triunghi ABC , $1/9$ din AC este cît $0,1$ din latura AB și $3/5$ din AB este cu 3 cm mai mare decît $0,3(3)$ din AC . Înălțimea BD este de 8 cm. Să se afle:

- 1) perimetrul triunghiului ABC ;
- 2) înălțimea dusă din vîrfurile C în triunghiul ABC .
- 3) triunghiul ABC este baza unei piramide cu înălțimea VA , această înălțime fiind cu 25% mai mare decît înălțimea BD a triunghiului de bază. Să se afle unghiul format de muchia VB cu latura AB a triunghiului de bază;
- 4) să se afle volumul piramidei $VABC$.

R. 1) $(19 + \sqrt{73})$ cm; 2) $7,2$ cm; 3) 45° ; 4) 120 cm³.

106. Baza unei prisme este un triunghi dreptunghic ABC ($\angle A = 90^\circ$) în care cateta AB este $0,75$ din AC iar de patru ori AC micșorată cu 7 cm este de trei ori mai mare decît AB . Înălțimea prisme întrece înălțimea AD a triunghiului de bază ($D \in BC$) de cinci ori. Se face o secțiune în prismă printr-un plan care trece prin muchia laterală BB' a prisme și prin bisectoarea BE a unghiului B al triunghiului de bază ($E \in AC$). Să se afle:

- 1) perimetrul triunghiului ABC ;
- 2) proiecțiile catetelor pe ipotenuza BC ;
- 3) volumul prisme cu baza BEC și cu aceeași înălțime ca și prisma inițială.

R. 1) 12 cm; 2) $1,8$ cm; $3,2$ cm; 3) 45 cm³.

107. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi echilateral (ABC) și ca înălțime una dintre muchiile sale laterale VA . Suma muchiilor egale împreună cu perimetrul triunghiului de bază este $139,5$ cm, iar raportul dintre latura triunghiului de bază și una din muchiile laterale egale este $\frac{2,5}{4}$. Pe latura AB a triunghiului de bază se ia un punct M ($M \in AB$) care împarte latura AB în raportul $2/7$. Din M se duce o paralelă la muchia VB , care taie înălțimea piramidei în N ($N \in VA$) și o paralelă MG la BC latura triunghiului de bază care taie latura AC a triunghiului în punctul G ($G \in AC$). Să se calculeze:

- 1) aria triunghiului MNG ;
- 2) volumul piramidei $VABC$.

R. 1) ≈ 19 cm²; 2) $V \approx 2\,050$ cm³.

108. Mediana BE dusă pe una din laturile egale ale unui triunghi isoscel ABC (cu baza BC) împarte perimetrul triunghiului în două părți: $AB + BE$ și $BC + CE$. Prima parte este mai mică decît a doua și raportul celor două

părți este $\frac{7\frac{1}{2}}{8,5}$. Se cunoaște că $1/3$ din partea cea mai mică mărită cu $1/5$ din ea este cu 9 cm mai mică decît partea cea mai mare. Înălțimea AD și mediana BE se taie în G ($D \in BC$). Să se calculeze:

- 1) aria triunghiului ABC ;
- 2) să se demonstreze că patrulaterul $GECD$ este echivalent cu triunghiul ABG ;
- 3) să se calculeze înălțimea triunghiului AGE corespunzătoare laturii AE ;
- 4) să se calculeze aria și volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului isoscel în jurul uneia dintre laturile egale.

R. 1) 48 cm²; 2) 16 cm²; 3) $3,2$ cm;

4) $211,2\pi$ cm²; $307,2\pi$ cm³.

109. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) cateta AB mărită cu 25% din ea este cu 13 cm mai mică decât suma catetelor triunghiului iar 0,125 din AB este de 15 ori mai mică decât AC . Triunghiul ABC este baza unei piramide a cărei înălțime VA este $\frac{17}{60}$ din înălțimea AD a triunghiului ABC ($D \in BC$).

Se face o secțiune printr-un plan paralel cu baza la distanța de $\frac{17}{20}$ din înălțimea piramidei față de vîrf și o altă secțiune prin muchia VA și mediana AE relativă la ipotenuză ($E \in BC$). Să se afle:

- 1) Volumul trunchiului de piramidă format prin prima secțiune;
- 2) aria triunghiului din secțiunea VAE .

$$\text{R. } 1) \approx 70 \text{ cm}^3; 2) 38 \frac{1}{2} \text{ cm}^2.$$

110. Într-un romb $ABCD$ diagonală mică AC este $2\sqrt{5}$ cm iar suma dintre latura rombului și proiecția ei pe diagonală mare este de $5 + 2\sqrt{5}$ cm. Fie AN înălțimea dusă din A pe CD și AM înălțimea dusă din A pe BC ; apoi $AM \cap BD = \{E\}$ și $AN \cap BD = \{F\}$.

Să se calculeze:

- 1) aria rombului;
- 2) mărimea înălțimii rombului AM (sau AN), apoi valoarea rapoartelor AF/FN și OF/FD ;
- 3) să se arate că patrulaterul $MCNA$ este inscriptibil;
- 4) cît la sută reprezintă aria pentagonului $MCNFE$ din aria patrulaterului $MCNA$?
- 5) să se afle volumul piramidei ce are ca bază rombul $ABCD$ știind că muchia SA a piramidei este perpendiculară pe planul bazei și formează cu muchia SC a piramidei un unghi de 30° .

$$\text{R. } 1) 20 \text{ cm}^2; 2) AM = 4 \text{ cm}; \frac{AF}{FN} = \frac{5}{3}; \frac{OF}{FD} = \frac{1}{3};$$

$$4) 68,75\%; 5) \frac{40\sqrt{15}}{3} \text{ cm}^3.$$

111. Baza unei prisme drepte este un triunghi ABC . Pe prelungirea laturii AC se ia un punct D astfel ca $\angle BAC = \angle CBD$. Segmentul AD este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decât segmentul CD , iar $AD + CD = 13$ cm. Latura BC a triunghiului ABC este de 2 cm, iar înălțimea prisme este $\sqrt{65}$ cm.

- 1) Să se arate că BD este media proporțională a segmentelor AD și CD .
- 2) Să se afle laturile triunghiului ABC .
- 3) Să se afle aria laterală a prisme.

$$\text{R. } 2) AB = \sqrt{10} \text{ cm}; AC = 5\frac{4}{7} \text{ cm};$$

$$3) \frac{53 + 7\sqrt{10}}{7} \cdot \sqrt{65} \text{ cm}^2.$$

112. Într-un cilindru circular drept este înscrisă o prismă cu baza un triunghi echilateral ABC avînd latura de $12\sqrt{3}$ cm. Din centrul O al bazei cilindrului se duce o paralelă OD la latura BC a triunghiului ($D \in AC$). Înălțimea prisme este $12\sqrt{3}$ cm și este egală cu înălțimea cilindrului.

Să se afle:

- 1) volumul cilindrului;
- 2) volumul prisme cu baza ABC ;
- 3) notînd cu M piciorul perpendicularei dusă din O pe latura BC ($M \in BC$) să se afle volumul prisme avînd ca bază patrulaterul $ODCM$ și aceeași înălțime ca și cilindrul.

R. 1) $1\,728\sqrt{3}\pi\text{ cm}^3$; 2) $3\,888\text{ cm}^3$; 3) $1\,080\text{ cm}^3$.

113. Una din laturile unui paralelogram este cu 11 cm mai mare decît diagonală mică a lui și 0,5 din diagonală mare micșorată cu 25% din diagonală mică este 27 cm. Suma dintre diferența menționată mai sus și latura considerată este 78 cm. Paralelogramul este baza unei piramide în care se face o secțiune paralelă cu baza ce împarte înălțimea piramidei în raportul de $3/5$ socotit de la vîrf. Se știe că înălțimea piramidei este cu 25% mai mică decît diagonală mică a paralelogramului. Să se calculeze:

- 1) diagonalele paralelogramului;
- 2) volumul piramidei;
- 3) volumul piramidei care are ca bază secțiunea făcută în piramida inițială și vîrfurile comune cu prima.

R. 1) 40 cm, 74 cm; 2) $12\,240\text{ cm}^3$;
3) $645,46875\text{ cm}^3$.

114. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$ (BC baza mare) diagonală BD este perpendiculară pe latura ne paralelă CD . 0,125 din înălțimea AB a trapezului este cu 1 cm mai mică decît 20% din CD . Raportul acestora este $4/5$ ($AB/CD = 4/5$). Se cere:

- 1) perimetrul trapezului $ABCD$;
- 2) aria triunghiului ACD ;
- 3) aria triunghiului DCE (E fiind punctul de intersecție al paralelei dusă din C la AB și prelungirea diagonalei mici BD);
- 4) distanța punctului A la latura CD ;
- 5) aria și volumul corpului format prin rotația completă a trapezului $ABCD$ în jurul bazei mici.

R. 1) $45\frac{1}{3}\text{ cm}$; 2) $42\frac{2}{3}\text{ cm}^2$;

3) $37,5\text{ cm}^2$; 4) $8\frac{8}{15}\text{ cm}$;

5) $\frac{1\,232\pi}{3}\text{ cm}^2$; $\frac{2\,816\pi}{3}\text{ cm}^3$.

115. Într-o prismă dreptunghiulară oblică înălțimea $A'M$ a feței laterale $ABB'A'$ este și înălțimea prisme ($M \in AB$), iar $\frac{MA}{MB} = 1$. Lățimea dreptunghiului de bază este de 6 cm iar diferența dintre diagonală și lungimea dreptunghiului este de 2 cm. Segmentul ce unește vîrfurile A' cu O (punctul de intersecție al diagonalelor bazei) este de 5 cm. Să se afle:

- 1) volumul prisme;
- 2) unghiul format de muchia AA' cu latura AB a dreptunghiului de bază;
- 3) aria triunghiului AMO ;
- 4) volumul piramidei ce are ca bază triunghiul AMO și vîrfurile în A' .

R. 1) 192 cm^3 ; 2) 45° ; 3) 6 cm^2 ; 4) 8 cm^3 .

116. Într-o piramidă dreptunghiulară cu muchiile laterale egale se cunosc următoarele date: 40% din diagonală bazei micșorată cu 0,1(6) din lățimea bazei este de două ori mai mică decît lățimea, iar diferența dintre diagonală și

lăţime este de 4 cm. Muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60° . Se face o secţiune paralelă cu baza al cărei perimetru este de 7 cm. Să se afle:

- 1) cât la sută reprezintă diagonală bazei din lungimea bazei?
- 2) volumul piramidei iniţiale;
- 3) volumul trunchiului de piramidă obţinut prin secţiunea dată;
- 4) aria secţiunii diagonale a trunchiului de piramidă;
- 5) diagonală trunchiului de piramidă.

$$\text{R. } 1) 125\%; 2) 80\sqrt{3} \text{ cm}^3; 3) \frac{315\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3;$$

$$4) \frac{12,5 \cdot 15\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2; 5) \frac{5\sqrt{13}}{2} \text{ cm}.$$

117. Un turn de formă cilindrică are un acoperiş de forma unei piramide hexagonale regulate cu baza $ABCDEF$ şi vârful V . Înălţimea cilindrului este de 20 m. Triunghiul VAD este echilateral. Baza superioară a cilindrului este un cerc înscris în hexagonul $ABCDEF$. Muchia laterală a piramidei este de $4\sqrt{3}$ m. Să se afle volumul cilindrului.

$$\text{R. } 180\pi \text{ m}^3.$$

118. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) în care cunoaştem următoarele: bisectoarea unghiului B întâlneşte cateta AC în E şi este perpendiculară pe mediana AD ($D \in BC$), segmentul AE este de 6 cm. Înălţimea piramidei este muchia $VA = 10\sqrt{3}$ cm. Să se afle:

- 1) perimetrul triunghiului dreptunghic ABC ;
- 2) volumul piramidei $VABC$;
- 3) volumul piramidei $VABD$ (are ca bază triunghiul ABD şi acelaşi vîrf ca şi prima piramidă);
- 4) să se arate că jumătate din ipotenuza triunghiului ABC este medie proporţională între cateta cea mai mare a triunghiului şi proiecţia bisectoarei BE pe această catetă.

$$\text{R. } 1) 18(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}; 2) 540 \text{ cm}^3; 3) 270 \text{ cm}^3.$$

119. Într-o prismă cu baza un trapez isoscel $ABCD$, în care linia mijlocie este de 6,5 cm şi cu 2,5 cm mai mică decît baza mare, se înscrie un cilindru a cărui înălţime este egală cu 10 cm şi egală cu înălţimea prisme. Se consideră apoi prisma care are ca bază triunghiul BOC (O fiind centrul cercului de bază a cilindrului) şi aceeaşi înălţime cu prisma iniţială, precum şi corpul care are ca bază sectorul MON şi aceeaşi înălţime ca a prisme (sau a cilindrului). Să se afle:

- 1) volumul prisme cu baza $ABCD$;
- 2) volumul cilindrului înscris;
- 3) volumul prisme cu baza BOC ;
- 4) volumul corpului care are ca bază sectorul MON .

$$\text{R. } 1) 390 \text{ cm}^3; 2) 90\pi \text{ cm}^3; 3) 97,5 \text{ cm}^3; 4) 22,5\pi \text{ cm}^3.$$

120. O piramidă are ca bază un triunghi ABC în care $BC = 16$ cm, $AB = 10$ cm, iar înălţimea $AD = 8$ cm ($D \in BC$). Înălţimea piramidei este de 30 cm. Fie E, F, G respectiv mijloacele laturilor AB, AC şi BC ale triunghiului ABC . Să se afle volumul piramidei care are ca bază patrulaterul $DEFG$ şi acelaşi vîrf cu prima piramidă.

$$\text{R. } 200 \text{ cm}^3.$$

121. Un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) este înscris în cercul O a cărui rază mărită cu 20% este cât una din laturile egale a triunghiului isoscel micșorată cu 25%, iar dublul razei cercului mărită cu 2 cm și apoi împărțită la lungimea laturii considerate a triunghiului micșorată cu 2 cm dă câtul 2. Fie BM înălțimea dusă din B pe AC și AE bisectoarea dusă din A pe BC ; $BM \cap AE = \{N\}$. Paralela dusă din A la BC intersectează perpendiculara dusă din B pe BC în D ; $BD \cap AD = \{D\}$. Se cere:

1) perimetrul patrulaterului $ABCD$;

2) înălțimea BM ;

3) să se demonstreze că $\frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{ABD} = \frac{\widehat{BOC}}{4}$

4) să se arate că $BE^2 = \frac{BM \cdot BN}{2}$

5) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC .

R. 1) 28,8 cm; 2) 7,68 cm; 5) $131,072\pi$ cm³.

122. Aria unui triunghi ABC este de 24 cm². Punctul $D \in BC$ și M este mijlocul lui AD . Fie E și F simetricele punctului M față de AB și AC , $ME \cap AB = \{H\}$ și $MF \cap AC = \{N\}$. Proiecția laturii AB pe latura BC a triunghiului este segmentul BG ($G \in BC$). Se cunoaște că $2/3$ din lungimea BC este cu 0,5 dm mai mare decât segmentul BG și $4/3$ din BG este cât jumătate din BC micșorată cu $\frac{1}{6}$ din aceasta. Se cere:

1) să se arate că aria AMB + aria $AMC = 1/2$ aria ABC ;

2) să se arate că aria patrulaterului $ANMH$ este $\frac{1}{2}$ din aria patrulaterului $AEMF$;

3) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC .

R. 1) 64π cm³.

123. Într-un trapez $ABCD$ ($AB =$ baza mare) diagonalele AC și BD se întâlnesc în punctul O . Aria triunghiului AOB este de 60 cm². Se știe că 0,125 din baza mică este cu 0,3 dm mai mică decât 20% din baza mare, iar raportul mărimilor celor două baze este $5/2$. Se cere:

1) lungimea liniei mijlocii a trapezului;

2) să se demonstreze că triunghiurile AOD și BOC sint echivalente; la fel pentru triunghiurile ADC și DBC ;

3) aria trapezului;

4) volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB (baza mare a trapezului);

5) să se construiască un dreptunghi echivalent cu trapezul $ABCD$;

6) printr-un punct M situat pe baza mică a trapezului să se ducă o dreaptă în interiorul trapezului așa fel ca să-l împartă în două părți echivalente.

R. 1) 14 cm; 3) 117,6 cm²; 4) 240π cm³.

124. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ (AB este baza mare) circumscris unui cerc O a cărui rază este cu 3,5 cm mai mică decât linia mijlocie a trapezului și 0,3 din raza cercului mărită cu $2/3$ din ea este cu 1,7 cm mai mare decât 20% din linia mijlocie a trapezului. Raportul bazelor trapezului este $2/2,5$. Se cere:

1) aria trapezului $ABCD$;

2) să se arate (fără calcul) că linia mijlocie a trapezului este egală cu una din laturile neparalele ale trapezului;

- 3) să se arate că triunghiul COB este dreptunghic și aria lui este $\frac{1}{4}$ din aria trapezului;
- 4) notînd cu M , respectiv N , mijloacele bazelor DC și AB ale trapezului să se arate că triunghiurile MOC și NOB sînt asemenea;
- 5) să se arate că $MN^2 = DC \cdot AB$;
- 6) să se calculeze volumul corpului format prin rotația completă a trapezului în jurul bazei mari AB .

$$\text{R. 1) } 39 \text{ cm}^2; \text{ 6) } \frac{676}{3} \pi \text{ cm}^3.$$

125. Într-un triunghi dreptunghic ABC ($\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} > \hat{C}$) bisectoarea unghiului B taie mediana AD în M , iar cateta AC în N ($D \in BC$) și $0,6$ din unghiul B micșorat cu 25% din el este de 5 ori mai mare decît $\frac{1}{6}$ din unghiul C al triunghiului. Se cere:

- 1) lungimea laturilor triunghiului ABC cunoscînd ipotenuza de $6\sqrt{3}$ cm;
- 2) să se arate că triunghiurile AMB și AMC sînt echivalente;
- 3) să se arate că triunghiul ABD este echilateral, triunghiul BND este dreptunghic și triunghiul AND este isoscel;
- 4) să se afle volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul catetei AC .

$$\text{R. 1) } BC = 6\sqrt{3} \text{ cm}; AB = 3\sqrt{3} \text{ cm}; AC = 9 \text{ cm}; \\ \text{4) } 81\pi \text{ cm}^3.$$

126. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB = AC$) se cunoaște că $0,375$ din una din laturile egale ale triunghiului este cu 2 cm mai mare decît 20% din raza cercului O circumscris triunghiului și raportul dintre raza cercului și una din laturile egale este $2,5/4$. Fie AD înălțimea triunghiului isoscel. Prin O (centrul cercului), se duce o paralelă la AB care întilnește pe AB în N iar pe AC în M ; fie M' simetricul punctului M față de BC și A' punctul de intersecție obținut prin prelungirea laturii AB și a dreptei pe care se află segmentul MM' . Se cere:

- 1) să se arate că triunghiul $AA'M$ este isoscel;
- 2) punctele N , D și M' sînt coliniare;
- 3) cît la sută reprezintă mărimea razei cercului O din lungimea laturii AB a triunghiului isoscel?
- 3) volumul piramidei ce are ca bază triunghiul ABC știind că înălțimea piramidei este egală cu înălțimea AD a triunghiului ABC .

$$\text{R. 3) } 62,5\%; \text{ 4) } 8,192 \text{ cm}^3.$$

127. Ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC ($A = 90^\circ$) se împarte în opt părți egale și se notează cu M punctul cel mai apropiat de C . Se împarte și cateta AC în 3 părți egale și se notează cu N punctul cel mai apropiat de C și cu D punctul cel mai apropiat de A . Prin D se duce o paralelă la BC , care taie pe AB în E ($E \in AB$). Se cunoaște că diferența dintre $0,4$ din ipotenuza BC și 25% din AC este 2 cm, iar triplul catetei AC comparată cu 20% din ipotenuza BC formează raportul $24/2$. Se cere:

- 1) a cîta parte din aria triunghiului ABC este aria triunghiurilor MNC și AED .
- 2) să se demonstreze că triunghiul ADM este echivalent cu triunghiul MNC iar aria triunghiului AMC este cît întreitul ariei triunghiului MND .
- 3) a cîta parte din aria triunghiului ABC este aria pentagonului $BMNDE$?
- 4) volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului ABC în jurul ipotenuzei BC .

$$\text{R. 1) } \frac{1}{24} \text{ și } \frac{1}{9}; \text{ 3) } \frac{61}{72}; \text{ 4) } v = \frac{4,8^2 \pi 10}{3} \text{ cm}^3.$$

128. În trapezul $ABCD$ cu aria de 48 cm^2 , avînd baza mică AD , se duce $AE \parallel DC$, ($E \in BC$) astfel încît $\frac{CE}{EB} = \frac{1}{2}$. Se duce $DF \parallel AB$, ($F \in BC$); $DF \cap AE = \{M\}$. $DF \perp AE$ și punctul M este mijlocul segmentului DF . Se cunoaște că $2/5$ din baza mică este cu 1 cm mai mică decît $0,125$ din perimetrul triunghiului ABE , iar dublul bazei mici mărită cu 2 cm este în raport de $1/2$ față de perimetrul triunghiului ABE . Se cere:

- 1) perimetrul trapezului;
- 2) să se arate că triunghiul ABE este dreptunghic;
- 3) să se arate că patrulaterul $ADEF$ este un romb;
- 4) să se arate că triunghiul ABF este isoscel;
- 5) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor trapezului să se demonstreze că triunghiurile AOB și COD sînt echivalente;
- 6) să se calculeze volumul și aria corpului format prin rotația triunghiului ABE în jurul laturii BE .

R. 1) 34 cm ; 6) $V = 76,8\pi \text{ cm}^3$; aria $= 67,2\pi \text{ cm}^2$.

129. Se consideră $ABCD$ romb, (diagonala mare BD); latura AB mărită cu $\frac{3}{5}$ din ea este cu 5 cm mai mare decît BD micșorată cu $0,125$ din ea. 25% din BD mărită de 3 ori comparată cu AB mărită cu 20% din ea dă raportul a cărei valoare este 1 . Se duce $AM \perp BC$, ($M \in BC$) și $AN \perp CD$, ($N \in CD$) $AM \cap BD = \{E\}$ și $AN \cap BD = \{F\}$. Se cere:

- 1) a patra proporțională între diagonalele AC , BD și latura rombului;
- 2) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor rombului să se arate că există relația:

$$\frac{2AO}{AM + AN} = \frac{OE + OF}{2CM}$$

- 3) aria și volumul corpului format prin rotația completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB a rombului;
- 4) rombul dat fiind baza unei piramide a cărei înălțime este VO , să se calculeze volumul piramidei $VABCD$ știind că muchia VA este de 25 cm ;
- 5) se face o secțiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza $ABCD$ la $3/4$ din înălțime față de bază, în piramida $VABCD$. Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'D'$.

R. 1) $\frac{100}{3}$ 3) $420\pi \text{ cm}^2$; $1\,200\pi \text{ cm}^2$;

4) $4\,000 \text{ cm}^3$; 5) $62,5 \text{ cm}^3$.

130. Un cilindru are raza de 3 cm și înălțimea de 10 cm . Pe axa lui se ia un punct M situat la o distanță x de la baza cilindrului și se scoate conul care are ca bază, baza cilindrului și vîrfurile în M .

- 1) Să se exprime în funcție de x volumul corpului rămas după această scoatere;
- 2) Să se alcătuiască tabloul de variație al funcției;
- 3) Să se construiască graficul acestei funcții (se vor lua ca unități: pe axa absciselor cîte 1 cm pentru fiecare cm de înălțime, pe axa ordonatelor cîte 1 cm pentru $10\pi \text{ cm}^3$);

4) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat $a \text{ cm}^3$. Între ce limite trebuie să fie cuprins numărul a pentru ca problema să fie posibilă în cazul dimensiunilor date în enunțul problemei?

R. 1) $V = 90\pi - 3\pi x$; $x \in [0, 10]$.

2) funcția este descrescătoare, avînd maximum său pentru $x=0$ (cînd corpul rămîne cilindric) și minimum pentru $x=10$ (cînd conul ajunge cu vîrfurile în centrul celeilalte baze a cilindricului);

4) cu condiția $0 \leq x \leq 10$ se obține $60\pi \leq a \leq 90\pi$.

131. Un buștean cilindric cu raza de 12 cm și înălțimea de 3 m se cioplește la un capăt astfel încît să aibă un vîrf conic, înălțimea conului fiind $x \text{ cm}$.

1) Să se exprime în funcție de x volumul corpului obținut prin cioplire;

2) Să se alcătuiască tabloul de variație al acestei funcții;

3) Să se construiască graficul funcției.

R. 1) $V = 12\pi(3500 - 8x)$:

2) Volumul are un maxim pentru $x=0$, cînd corpul rămîne cilindric ($V = 43200\pi \text{ cm}^3$) și un minim pentru $x=300$, cînd corpul capătă forma de con ($V = 14400\pi \text{ cm}^3$).

132. Pe o sferă cu raza de 2 dm se consideră o calotă de înălțime x .

1) Să se exprime aria calotei în funcție de x ;

2) Între ce limite poate varia înălțimea x ?

3) Între ce limite poate varia aria calotei?

4) Să se alcătuiască tabloul de variație și să se facă graficul acestei funcții.

5) Să se determine x astfel ca aria calotei să fie egală cu un număr dat a ; între ce limite poate fi cuprins numărul a , pentru ca problema să fie posibilă?

R. 1) $A = 4\pi x$; 2) $0 \leq x \leq 4$; 3) $0 \leq A \leq 16\pi$; 4) funcția este crescătoare, avînd un minimum 0, pentru $x=0$ și un maxim pentru $x=4$, în valoare

de 16π ; 5) $x = \frac{a}{4\pi}$; $0 \leq a \leq 16\pi$.

133. Un dreptunghi cu dimensiunile $a = 30 \text{ cm}$ și $b = 20 \text{ cm}$ se rotește întîi în jurul laturii b , apoi în jurul laturii a . Să se afle:

1) raportul dintre volumele celor doi cilindri care se formează prin aceste rotații;

2) raportul dintre ariile lor laterale;

3) raportul dintre ariile lor totale.

R. 1) $\frac{3}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{7}{8}$.

134. Un trapez dreptunghic cu bazele a și b ($a > b$) și înălțimea i se rotește în jurul bazei mici, apoi în jurul bazei mari.

1) Să se calculeze raportul dintre volumele acestor corpuri, stabilind dacă acest raport este mai mare sau mai mic decît 1.

2) Ce relație trebuie să existe între a și b ca acest raport să fie $3/2$?

3) În ce caz este acest raport egal cu 1? Interpretați geometric rezultatul.

4) În ce caz este acest raport egal cu 2? Interpretați geometric.

R. 1) Raportul este $\frac{2a+b}{a+2b}$; 2) $a = 4b$;

3) $a = b$, atunci trapezul devine dreptunghi și este indiferent în jurul cărei laturi de bază se rotește; 4) $b = 0$, trapezul se reduce la un triunghi.

135. Într-un trunchi de con, în care $R = 10$ cm și $r = 6$ cm, micșorăm raza mare cu un segment cit diferența razelor și mărim raza mică cu același segment. Presupunem că înălțimea corpului a rămas aceeași.
- 1) Ce modificare se face în volumul corpului după această transformare?
 - 2) Aceeași întrebare privitoare la aria laterală.
 - 3) Explicați rezultatul.
136. Un cilindru are înălțimea de 10 cm, iar raza x variabilă.
- 1) Să se exprime aria sa laterală în funcție de x și să se construiască graficul acestei funcții când x variază de la zero la 5. (Pe axa absciselor se ia ca unitate 1 cm; pe axa ordonatelor să ia ca unitate $20\pi\text{cm}^2$.)
 - 2) Să se exprime volumul său ca funcție de x și să se construiască graficul acestei funcții când x variază de la zero la 5. (Pe axa absciselor — aceeași unitate ca mai înainte; pe axa ordonatelor se ia ca unitate $10\pi\text{cm}^3$.)

R. 1) $20\pi x \text{ cm}^2$; 2) $10\pi x^2 \text{ cm}^3$.

IV. Exerciții și probleme pentru cercurile de matematică

1. Se dă ecuația:

$$(2x - 1)^2 + 2(2x - 1) + 1 = 16a^2.$$

- a) Să se determine x în funcție de a .
- b) Să se determine mulțimea soluțiilor lui x din ecuația dată definită pe mulțimea $\{x \in N \mid x < 3 \text{ și } a = 1\}$

R. a) $x = \pm 2a$ b) $x = 2$.

2. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu $\frac{2}{3}$ din diametru.

- 1) Să se afle aria totală, aria laterală și volumul conului.
- 2) Se desfășoară suprafața laterală a conului, obținându-se astfel un sector de cerc. Câte grade are unghiul acestui sector?
- 3) La ce distanță de vîrfurile conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza astfel ca lungimea cercului de secțiune să fie $9\pi\text{cm}$?

R. 1) $60\pi \text{ cm}^2$; $96\pi \text{ cm}^2$; $96\pi \text{ cm}^3$ 2) 216° 3) 6 cm.

3. Se dă expresia:

$$E = \left(\frac{4x^2}{2x-1} - \frac{8}{4x^2-1} + \frac{8x-7}{1-2x} \right) : \frac{1-2x}{2x+1}$$

- 1) Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă este $E = -2x + 1$; să se stabilească mulțimea valorilor lui x , pentru care expresia dată nu are sens.

- 2) Să se afle mulțimea numerelor reale pozitive pentru care $-2x + 1 \geq \frac{2}{3}$.

$$\text{R. } \begin{cases} 1) \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \\ x \in \left[0, \frac{1}{6} \right]. \end{cases}$$

4. Fie mulțimile:

$$A = \{1; 3; 2; 5\}, B = \{x; 5; 6; 7\}, x \in N \text{ par} \mid 1 < x < 4.$$

Să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor

$$p: A \cap B = \{2; 5\}$$

$$r: A - B = \{6; 7\}.$$

R. p : adevărată; r : falsă.

5. Se dă un triunghi ABC în care $AB = AC = 6$ cm și $A = 120^\circ$. Fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi și D punctul diametral opus lui A .

a) Să se arate că triunghiul BCD este echilateral.

b) Fie (Δ) perpendiculara în O pe planul triunghiului BCD și un punct M pe (Δ) . Să se arate că $MB = MC = MD$.

c) Se consideră tetraedrul $MBCD$. Să se arate că muchiile opuse sînt perpendiculare ($MB \perp CD$).

d) Să se calculeze volumul tetraedrului știind că $MB = 6 \sqrt{3}$ cm.

R. d) $54 \sqrt{6}$ cm³.

6. Se consideră două conuri avînd ca axă de rotație dreapta (Δ) .

Baza unui con este cercul circumscris triunghiului echilateral BCD , iar baza celuilalt con este cercul înscris în același triunghi.

a) Care este raportul volumelor celor două conuri dacă înălțimile lor sînt egale?

b) Care este raportul volumelor celor două conuri dacă secțiunile lor axiale sînt triunghiuri echilaterale?

$$R. \begin{cases} a) \frac{4}{1} \\ b) \frac{8}{1} \end{cases}$$

7. Se dă ecuația:

$$\frac{(x^3 + 3x - 3x^2 - 1)(x - 1)^2(x - 1) - 1}{(x - 1)^3 - 1} \cdot \frac{1}{(x - 1)^3 + 1} = x,$$

definită pe mulțimea $A = \{1; 3; 4\}$.

Să se arate că una din soluțiile ecuației, după simplificare, este $\{x \in N \mid x \text{ element al mulțimii } A\}$

R. $S = \{1\}$.

8. Se dă expresia:

$$\frac{\left[\frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}\right]^2 + \frac{2x - 4}{x + 2} + 1}{8x^2} \cdot (x + 2)^3.$$

Pentru ce valoare a lui x expresia este un număr întreg.

R. $x = 2k$ ($k \in Z$).

9. Se dă expresia:

$$(3x^3 + 8x^2 + 5x + 2) : (x + 2).$$

Să se găsească restul împărțirii fără a efectua operația:

R. 0.

10. Pe planul pătratului $ABCD$ cu latura a se ridică perpendicularele $AM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ și $CP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Se unește M cu P .

1) Să se demonstreze că planele triunghiurilor MBD și PBD sînt perpendiculare.

2) Să se calculeze volumul poliedrului $ABCDMP$.

3) Să se determine latura pătratului, notată cu a , știind că prin rotirea triunghiului COP (O fiind centrul pătratului $ABCD$), în jurul lui CP partea din con exterioară poliedrului $ABCDMP$ are volumul egal cu $4\pi\sqrt{6}$ (unități de volum).

$$\text{R. 2) } V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}; \quad 3) \quad a = 4.$$

11. Se dă piramida $SABC$ astfel ca $SA = SB = SC = a$; $\widehat{ASB} = 60^\circ$; $\widehat{ASC} = 90^\circ$; $\widehat{BSC} = 120^\circ$.

Se cere:

1) Perimetrul triunghiului ABC .

2) Să se arate că $\triangle ABC$ este dreptunghic.

3) Aria totală a piramidei.

4) Volumul piramidei ce se formează făcînd o secțiune paralelă cu baza la distanța de $\frac{1}{4}$ din înălțime față de vîrf.

5) Raportul volumelor celor două corpuri obținute.

$$\begin{aligned} & 1) \quad a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ & \text{R. 3) } \left\{ \begin{array}{l} \text{Aria } ASB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Aria } ASC = \frac{a^2}{2} \\ \text{Aria } BSC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ \text{Aria } ABC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \\ \text{Aria } A_t = \frac{a^2}{2}(\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}) \end{array} \right. \\ & 4) \quad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{768}; \quad 5) \quad \frac{1}{63}. \end{aligned}$$

12. Se dă ecuația $\left[\left(\frac{3x^6 - x^{12} - 1}{x^3 - x^6 + 1} - x^3\right) : (x^2 + x + 1) - x^4 + x^3\right] = 1$. și mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{x; 1; 3; 4\}$; $x \in N \mid x$ este rădăcina ecuației date și $x \in B$.

Să se arate valoarea de adevăr a propoziției $p : (C_A B \text{ și } C_B A = \{2\})$.

13. Care este numărul de două cifre care micșorat cu 5 să fie egal cu triplul răsturnatului său.

R. 92.

14. Pe un șantier, prin săparea unor fundații s-au format trei grămezi de pămînt în formă de con circular drept. Suma dintre lungimea cercului de bază și generatoarea primei grămezi este egală cu 30,12 m. Diferența dintre diametrul cercului de bază și generatoarea aceleiași grămezi este egală cu 3 m.

Volumul celei de-a doua grămezi reprezintă $1\frac{1}{8}$ din volumul primei grămezi iar a treia grămadă are volumul cu $3\pi\text{m}^3$ mai mare decât prima grămadă. Se cere:

- a) Să se afle volumul total al celor trei grămezi de pământ.
b) Câte camioane cu capacitatea de 2 m^3 sînt necesare pentru transportul pămîntului din cele trei grămezi în timp de o zi, ştiind că fiecare camion face zilnic opt transporturi.

$$\begin{aligned} \text{R. a) } V &= 53\pi\text{ m}^3; (V_1 = 16\pi\text{ m}^3; V_2 = 18\pi\text{ m}^3; \\ &V_3 = 19\pi\text{ m}^3); \\ \text{b) } &\approx 10\text{ camioane.} \end{aligned}$$

15. Se dă fracția:

$$E(x) = \frac{8x^3 + 12x^2 + 50x + 75 - 20x(2x + 3)}{4x^2 - 4x - 15}.$$

- a) Să se aducă la forma cea mai simplă.
b) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(x)$ pentru

$$x = \frac{6,8(3) - 5\frac{5}{6}}{1,0816 + 0,9184}$$

$$\text{R. a) } 2x - 5; \text{ b) } -4.$$

16. Un lăcătuş vrea să-şi construiască dintr-o bară metalică o piesă care să aibă forma unei prisme drepte, avînd ca baze triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza de 10 cm ; proiecția uneia din catete pe ipotenuză este egală cu $3,6\text{ cm}$, iar înălțimea prisme în centimetri egală cu $\frac{3}{8}$ din numărul care exprimă mărimea ariei triunghiului de bază.

Ştiind că bara metalică are formă de cilindru, la care se cunoaşte că raportul dintre aria laterală şi aria totală este $\frac{9}{14}$, că diametrul cercului de bază este cu 1 cm mai lung decât înălțimea cilindrului şi că densitatea metalului din care este construită bara cilindrică este de $7,8\text{ g/cm}^3$, se cere:

- 1) Greutatea barei metalice.
2) Să se dovedească că se poate construi piesa din bară folosind operația de pilire şi tăiere.
3) Să se afle greutatea metalului înlăturat din bară la construirea piesei.

$$\begin{aligned} \text{R. } (V_1 &= 216\text{ cm}^3; V_2 = 706,500\text{ cm}^3); \\ 1) G_1 &= 5\,510,70\text{ g} \approx 54\text{ N}; \\ 3) G_2 &= 3\,825,90\text{ g} \approx 37,5\text{ N.} \end{aligned}$$

17. Se dă fracția: $f(x) = \frac{6x + 5}{7x + 4}$.

Să se determine $\{x \in N\}$ astfel că $f(x)$ să se simplifice.

$$\text{R. } x = \{23\}.$$

18. Să se arate că există identitatea

$$\frac{8a^3 - 12a^2b + 6ab^2}{4a(a-b) - 2ab + 3b^2} = 2a.$$

19. Aria unui teren în formă de trapez este de $5\,500\text{ m}^2$. Ştiind că înălțimea este de 50 m şi baza mică întrece cu 10 m jumătatea bazei mari să se afle bazele trapezului.

$$\text{R. } B = 140\text{ m}; b = 80\text{ m.}$$

20. Să se treacă numărul 5 211₇ în baza 10.

R. 1 821₁₀

21. Un siloz în formă de cilindru circular drept are diametrul interior egal cu jumătate din înălțime, iar suma dintre rază și înălțime este egală cu 15 m. Se cere:

a) Volumul părții interioare a silozului.

b) Ce greutate are grâul ce se poate depozita în acest siloz dacă 1 hl de grâu cântărește 78 kg?

R. a) $108\pi \text{ m}^3 \approx 339,12 \text{ m}^3$;

b) $264 \text{ } 513,6 \text{ kg} \cdot 9,8 \approx 2 \text{ } 952 \text{ } 233 \text{ N}$.

22. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^2y + y^2x - 2x - 2y - xy + 2}{xy - 2}$$

$$E_2 = \frac{x^2 - y^2 - 2y - 1}{x - y - 1}$$

Se cere:

1) să se aducă E_1 și E_2 la forma cea mai simplă.

2) să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{E_1 + E_2}{x + y} - x \right) (x + 1) = 0.$$

R. 1) $E_1 = x + y - 1$; $E_2 = x + y + 1$;

2) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

23. Diagonalele unui trapez isoscel se intersectează în punctul O .

1) Să se afle distanțele de la O la baza mare și la baza mică a trapezului, știind că aceste distanțe sînt direct proporționale cu numerele 8,5 și 3,5 și că $\frac{2}{5}$ din distanța la baza mare este cu 4 cm mai mare decît 40% din distanța la baza mică.

2) Dacă baza mică a trapezului este 14 cm, latura ne paralelă 26 cm și perimetrul de 100 cm, să se afle unghiul format de o diagonală cu baza mare și să se deducă apoi că diagonalele sînt perpendiculare.

3) Pe perpendiculara în O pe planul trapezului se ia un punct V așa încît $OV = 40$ cm. Să se afle volumul piramidei care are ca bază trapezul dat și ca vîrf punctul V .

R. 1) 17; 2) 45° ; 3) $V = 7 \text{ } 680 \text{ cm}^3$.

24. Se dă expresia: $f(x) = \left(\frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{y^3 + x^2y - x^3 - xy^2} \right) \cdot \frac{y(x - y)}{x} + 53$.

mulțimea $A = \{x \in N \mid x \text{ să se dividă cu } 2 \text{ și cu } 9 \text{ și } 29 < x < 90\}$. Să se afle valoarea de adevăr a propoziției p : " $f(x)$ este un element al mulțimii A ."

R. $f(x) = 54 \text{ } p$ adevărată.

25. Se dă $f(a) = \frac{a + 1}{2a + 1}$. Să se determine mulțimea $a \in N$ pentru care $f(a)$ se simplifică.

R. $\emptyset$; $f(a)$ este ireductibilă.

26. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2mx - m^2x^2 + p^2 - 1}{p - mx + 1} - p = 0 \text{ necunoscuta fiind } x$$

$$\text{R. } x = \frac{1}{m}.$$

27. Într-o prismă dreaptă în care bazele sînt pătratele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ se cunoaște că perimetrul bazei $ABCD$ este $\frac{3}{4}$ din perimetrul secțiunii $A'D'CB$ (în formă de dreptunghi) iar $A'B$ este cu 4 cm mai mare ca latura AB .

Să se calculeze lungimea laturii pătratului $ABCD$, aria secțiunii $A'D'CB$, înălțimea prisme, aria totală și volumul prisme.

$$\text{R. } 6 \text{ cm}; 60 \text{ cm}^2; 8 \text{ cm}; At = 264 \text{ cm}^2; V = 288 \text{ cm}^3.$$

28. Se dă expresia:

$$E = \left[\left(\frac{y-x}{x^4 - x^2y^2} + \frac{1}{x^3 - x^2y + y^3 - xy^2} \right) \cdot \frac{x^7 - x^5y^2 - x^4y^3 + x^2y^5}{8x^3y - y^4} - 1 \right] \cdot \frac{4x^2 + 2xy + y^2}{3x^2 + xy}.$$

$$\text{R. } -1.$$

29. Să se aducă la forma cea mai simplă.

Se dă un triunghi ABC în care unghiul $\hat{A} = 2\hat{B}$. ($AB = 6$ cm). Bisectoarea unghiului A taie pe BC în D . Se cunoaște că $AD = 5$ cm și $\frac{DB}{DC} = \frac{5}{7}$.

Bisectoarea unghiului ADC taie pe AC în N .

Se cere:

1) Înălțimea ΔABC dusă din $\hat{A}$ pe BC .

2) Dacă $VD = 3$ cm este înălțimea piramidei cu baza ABD să se afle aria totală a acestei piramide.

$$\text{R. } \begin{cases} 1) \frac{24}{5} \text{ cm.} \\ 2) 42 \text{ cm}^2. \end{cases}$$

30. Se dă expresia:

$$E = \left[\left(\frac{x^3 - \sqrt{2,0(3) + 61 \frac{29}{30}}}{x^2 + 3x + 4} \right)^3 + 1 \right] : \frac{x^2 - 5x + 7}{x + 2}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă.

Pentru ce valoare a lui x , $E < -2$.

$$\text{R. } \begin{cases} E = (x-1)(x+2) \\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

$$31. \text{ Se dă } f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{(x+3)(x-1)}.$$

Să se determine mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru ca $f(x) < 0$.

$$\text{R. } -3 < x < 1.$$

32. Un con este înscris într-un cilindru cu aceeași bază și aceeași înălțime; generatoarele lor fac un unghi de 30° . În con este înscrisă o sferă.

Se cere:

- 1) Să se exprime volumul acestor corpuri în funcție de raza bazei cilindrului.
- 2) Să se arate că volumele menționate sînt invers proporționale cu $3; 1; \frac{27}{4}$.
- 3) Considerînd suma între generatoare și raza conului egală cu 45 cm, să se afle aria laterală a conului.

$$\text{R. } 1) \pi R^3 \sqrt{3}; \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}; \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{27}.$$

$$3) 450\pi \text{ cm}^2.$$

33. Să se efectueze:

$$\left(\frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x^4 - x^2 - 2} \right)^2 + \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 2} + 1$$

$$\text{R. } \frac{4x^4}{(x^2 - 2)^2}.$$

34. Laturile bazei unei piramide triunghiulare sînt invers proporționale cu $\frac{1}{6\sqrt{2}}; \frac{1}{10}; \frac{1}{14}$, iar diferența dintre laturile cele mai mari ale triunghiului este de 2 cm.

Înălțimea piramidei este cu 20% mai mare decît latura cea mai mare a bazei. Se cere volumul piramidei

$$\text{R. } V = 29,4 \text{ cm}^3$$

35. Să se rezolve ecuația:

$$\left\{ \left[\left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 3^2 \cdot 2^5 \cdot 5^0}{2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^3} + x^3 \right) \cdot \frac{25x}{5x + 2} \right] - 1 \right\} \cdot \left(\frac{x}{5} + 1 \right) = 0.$$

$$\text{R. } x = \pm 5.$$

36. Se dă un cerc circumscris triunghiului ABN . Se prelungește BN cu un segment oarecare NC . Perpendicularele în B și C pe BC taie perpendiculaara dusă în A pe AN respectiv în B', C' . Se cunoaște că $AN = 20$ cm;

$$C'N = 25 \text{ cm și } \frac{AB'}{AC'} = \frac{3}{5}.$$

Să se determine segmentul AB' .

$$\text{R. } 9 \text{ cm}.$$

35. Se dă ecuația:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = x - 3 \text{ definită pe mulțimea } A = \{3; 4; 5; 6\}.$$

Să se determine valoarea de adevăr a propoziției $r: \{x \in N \mid x \text{ o soluție a ecuației este un element al mulțimii } A\}$

R. propoziția r este adevărată.

38. Se dă sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{a+2} - \frac{y}{a-2} = 1 \\ 3x + 2y = a - 1 \end{cases}$$

definit pe mulțimea $M = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \neq -\frac{2}{5} \right\}$.

Să se discute sistemul în funcție de a .

$$\text{R.} \begin{cases} a \neq -\frac{2}{5} \text{ sistem compatibil și determinat.} \\ a = -\frac{2}{5} \text{ sistem incompatibil.} \end{cases}$$

39. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x^3 + x^2y - 2x^2 - 2xy + x + y}{xy(x-1)^2} = 5 \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{1}{6}; \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

$$\text{R.} \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \right).$$

40. O piramidă are ca bază un trapez dreptunghic $ABCD$ în care $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$.

Fața piramidei VBC este un triunghi echilateral și este perpendiculară pe planul bazei.

Se știe că $AB = AD = 3$ cm și $DC = 6$ cm.

Se cere:

1) Volumul piramidei.

2) Unghiurile trapezului de bază.

$$\text{R.} \begin{cases} 1) \frac{27\sqrt{6}}{4} \text{ cm}^3; \\ 2) \hat{B} = 135^\circ; \hat{C} = 45^\circ. \end{cases}$$

41. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă:

$$\left(1 : \frac{x-2}{x^2 - \frac{4b+4a}{a+b}} \right)^2 - \frac{2}{x^2 - 4} \cdot \left[\frac{(x^3 - 8)(x+2)^2}{x^2 + 2x + 4} \right] + 1.$$

$$\text{R.} = (x+1)^2.$$

42. Aria totală a unui cub este de 288 cm^2 .

1) Să se afle volumul și diagonala cubului.

$$\text{R.} \begin{cases} 192\sqrt{3} \text{ cm}^3, \\ 12 \text{ cm.} \end{cases}$$

43. Se dă ecuația:

$$\frac{16x^4 - y + 8x^2y - 2x}{(4x^2 + 2x + 1)(2x + y)} = 3$$

După simplificarea fracției să se rezolve ecuația.

R. $x = 2$.

44. Aria totală a unei prisme patrulateră regulată este de 1 602 cm² iar latura bazei este de 9 cm.

Să se calculeze diagonala unei fețe laterale a prisme.

R. 41 cm.

45. Să se efectueze

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{108} + \sqrt{300}}{\sqrt{3}} - x^4}{2 + x} + 8x - 4x^2 \right) : (x + 2)^2$$

R. $2 - x$.

46. Se dă mulțimea $A = \{2; 3\}$ și $f(x) = \frac{6}{2x - 3}$.

Să se determine $x \in A$ pentru care $f(x)$ este un număr întreg pozitiv.

R. a) $x = \{2; 3\}$.

47. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$f(x) = \frac{x-1}{2} - \frac{x-1}{x+1} \left(x - \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x+1}} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Să se stabilească domeniul de definiție a lui x pentru ca $f(x) < 2$.

c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 3\}$.

$$R. \begin{cases} \text{a) } \frac{x-1}{x+1} \\ \text{b) } x \in (-\infty; -3) \cup (-1, \infty) \\ \text{c) } \text{falsă.} \end{cases}$$

48. Într-un trunchi de con este înscris un cilindru având aceeași înălțime și una din baze comună. Generatoarele celor două corpuri sunt invers proporționale cu numerele 0,25 și 0,20 iar diferența lor este de 2 cm.

Aria laterală a trunchiului de con este cu 44π cm² mai mare decât aria totală a cilindrului.

Se cere volumul conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului de con dat, având ca bază, baza cea mare a trunchiului de con.

$$R. \frac{4\,000}{9} \pi \text{ cm}^3.$$

49. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A să se arate că:

$$(a + b + c)^2 = 2(a + b)(a + c) > 8bc.$$

Indicație. $2(a + b)(a + c) > 8bc$; $a^2 + ac + ab > 3bc =$
 $= a^2 - bc + ac - bc + ab - bc > 0.$

50. Se dă ecuația:

$$\frac{\frac{x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 9x^2 - 6x - 1}{x^2 - 1} - 10x^2 - 2}{x^2 + 6x - 1} = 10.$$

definită pe mulțimea $A = \{-5; -4; -3; +3; +4; +5\}$. Să se arate că soluțiile ecuației aparțin lui A .

R. $x = \{-3; 3\}$, deci $x \in A$.

51. Dacă un muncitor ar lucra 8 zile la o lucrare, al doilea ar termina-o în 18 zile. Dacă primul ar lucra 10 zile, atunci al doilea ar termina-o în 15 zile. În câte zile ar termina lucrarea dacă ar lucra împreună?

R. 12 zile.

52. Unghiul la centru al unui sector de cerc este 60° . Raza cercului este de 9 cm. Să se calculeze raza cercului înscris în sectorul de cerc.

R. 3 cm.

53. Două brigăzi ale unei cooperative agricole de producție seamănă sfeclă de zahăr pe o tarla în formă de triunghi ce are baza de 16 km. Pentru efectuarea lucrării se împarte tarla în două parcele proporționale cu numărul lucrătorilor din fiecare brigadă. Știind că împărțirea s-a făcut printr-o dreaptă paralelă cu baza, dreaptă care are o lungime de 12 km și este dusă la o distanță de 750 de metri de bază, iar numărul lucrătorilor este de 96, să se afle:

a) Aria fiecărei parcele.

b) Numărul lucrătorilor din fiecare brigadă.

R. a) Aria tarlalei = 24 km^2 ; Aria I = $13,5 \text{ km}^2$;
 aria a II-a = $10,5 \text{ km}^2$

b) numărul lucrătorilor este 54 și 42.

54. Se dă ecuația:

$$\frac{8x^3y + 16x^4 - y - 2x}{(2x + 4x^2 + 1)(2x + y)} = 7 \text{ definită pe mulțime } A = \{2; 3; 4; 5\}.$$

După simplificarea fracției să se rezolve ecuația.

R. $x = 4$ deci $x \in A$.

55. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{1 + ax} \cdot \sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}} \cdot \frac{\sqrt{1 - b^2x^2}}{1 + ax} \cdot \frac{(1 + ax)^2}{1 + bx} = x.$$

R. $x = 1$.

56. O piramidă are ca bază un trapez isoscel în care se cunoaște $AD = BC = 10$ cm, baza mare $AB = 15$ cm. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în O . Fie VO înălțimea piramidei egală cu 3 cm și $OB = 6$ cm. Să se afle perimetrul triunghiului VOD .

R. 12 cm.

57. Raportul dintre aria laterală și cea totală a unui cilindru circular drept este $\frac{4}{7}$, iar diametrul bazei cilindrului este cu 4 cm mai mare ca generatoarea. Să se afle volumul cilindrului.

R. 288 cm³.

58. Să se arate că expresia $y^2 - 3y + 2$ este divizibilă prin 2 fără a efectua împărțirea.

R. $(y - 1)(y - 2)$ este produsul a două numere consecutive.

59. O grămadă de pietriș are forma conică cu raza bazei de 2 m și generatoarea de 2,5 m. Câte căruțe trebuie pentru a transporta pietrișul depozitat în 10 grămezi? 1 m³ de pietriș cântărește 3 t, iar într-o căruță se încarcă 0,5 t.

R. ≈ 377 căruțe.

60. Să se construiască un pătrat cunoscându-se suma dintre diagonală și latura sa.

61. Perimetrul unui dreptunghi este de 120 cm, iar dimensiunile sale sînt direct proporționale cu numerele 9 și 11.

1) Să se calculeze dimensiunile dreptunghiului.

2) Să se afle aria laterală și volumul conului cu raza egală cu baza dreptunghiului și cu înălțimea egală cu înălțimea dreptunghiului.

R. 1) 33 cm; 27 cm;

2) $\begin{cases} A_l = 99\pi\sqrt{202} \approx 1\,405,8\pi \text{ cm}^2 \approx 4\,414,21 \text{ cm}^2; \\ V = 9\,801\pi \text{ cm}^3. \end{cases}$

62. Să se verifice că sistemul:

$$\begin{cases} \frac{y^3 + x^2 + xy^2 - y^2 - x - y}{y^2 - 1 + x - y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

admite o soluție $x = 3$ și $y = 1$.

63. Într-un atelier mecanic s-a cerut unor lucrători să execute din bare cilindrice de metal niște piese care să aibă forme de prisme drepte cu baza pătrat.

Cunoscându-se că diametrul bazei $D = 2$ dm și generatoarea $G = 3$ dm și că diagonala pătratului bazei prisme trebuie să fie egală cu diametrul cercului de bază al cilindrului, iar înălțimea prisme egală cu generatoarea barei cilindrice, se cere:

1) Să se afle latura pătratului de bază a prisme.

2) Să se arate cît la sută din greutatea barei cilindrice se înlătură în obținerea unei singure piese cerute.

3) Știind că trei muncitori pot lucra 24 de piese în patru ore, cîte piese pot lucra 5 muncitori în două ore.

R. 1) $L_1 = \sqrt{2}$ dm; 2) 36% (cu aproximație); 3) 20 de piese.

64. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^4 + x - 2x^3}{x^3 - x^2 - x}, \quad E_2 = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}.$$

- 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 și E_2 .
- 2) Să se rezolve ecuația $E_1 \cdot E_2 + 2(x - 1) + 1 = 9a^2$ în care x este necunoscută.
- 3) Să se arate că ecuația $E_1 + E_2 + \frac{(x-1)^2}{4} + 1 = 1$ are ca soluție unul din elementele mulțimii $A = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3\}$.

R. 1) $x - 1; x - 1$
 2) $x = \pm 3a$
 3) $x \in A; x = 1$.

65. Să se arate că fracția $\frac{x+1}{2x+1}$ este ireductibilă oricare ar fi valoarea lui x .

66. Aria secțiunii diagonale care trece prin două muchii laterale opuse a unui paralelipiped dreptunghic este egală cu aria unui pătrat de 1 681 cm². Diagonala bazei paralelipipedului este egală cu latura acelui pătrat și lungimea dreptunghiului de bază a paralelipipedului este de 40 cm.

Se cere:

- 1) Aria laterală a paralelipipedului.
- 2) Să se determine unghiul format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei.

R. 4 018 cm²; 45°.

67. Fie ecuația:

$$\left[\frac{2x - 2y + (y - x)^2 + 1}{x - y + 1} + x^2 - y^2 - 1 \right] : (x + y + 1) + y = 4$$

definită pe mulțimea $A = \{3; 4; 5\}$. După simplificări în condiții posibile, să se arate că mulțimea soluțiilor este inclusă în A .

R. $x = 4 \in A$.

68. Se dă o prismă oblică $ABCD A'B'C'D'$ cu baza un pătrat.

Proiecția muchiei $B'C'$ este muchia AD , muchia $AB = 3$ cm iar $AA' = 6$ cm.

Se cere:

- 1) Volumul prisme.
- 2) Aria totală a prisme.

R. 1) $27 \sqrt{3}$ cm³; 2) $18(3 + \sqrt{3})$ cm².

69. Să se arate că $x = 4$ și $y = 3$ este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{2xy + 3x^2 - y^2}{3x - y} \right)^2 - y^2 \right] : (x + 2y) = 4 \\ \frac{2x + 3y}{2(x - y)^2 - 5y(y - x)} = 1 \end{cases}$$

70. Se dă expresia $f(x) = \frac{8}{2x-8}$. Să se determine mulțimea $\{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \text{ să fie un număr întreg}\}$.

R. $\{0; 2; 3; 5; 6; 8\}$

71. O piramidă are la bază un trapez isoscel cu perimetrul de 16 cm. Raportul bazelor trapezului este de $\frac{4}{7}$ iar suma acestora este de 11 cm. Înălțimea piramidei este cu 25% mai mare decât înălțimea trapezului de bază. Se cere volumul piramidei.

R. $V = \frac{27,5}{3} \text{ cm}^3$

72. Se dă ecuația:

$$\frac{(x^6 + x^4y - y^3 - x^2y^2)(x-2)}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + y)^2} \cdot \frac{1}{x^2 - y} = \frac{x}{x-1}$$

După simplificări posibile să se determine mulțimea soluțiilor $x \in \mathbb{N}$.

R. Nu are soluție.

73. Într-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$); $AB = 36 \text{ cm}$; $AD = 15 \text{ cm}$.

Diagonala mare BD este împărțită de diagonala mică AC în raportul de $\frac{3}{10}$.

Înălțimea piramidei $VO = 40 \text{ cm}$, O fiind punctul de intersecție a diagonalelor bazei.

Se cere perimetrul triunghiului VOD și volumul piramidei.

R. 90 cm ; 4680 cm^3 .

74. Se dă expresia $f(y) = \frac{12 - 4y + y^2 - y^3}{6 + y + y^2} \cdot \frac{1}{1-y}$

Să se determine mulțimea $\{y \in \mathbb{N} \mid f(y) \text{ să fie negativă}\}$.

R. $1 < y < 2$.

75. Laturile bazelor unui paralelipiped dreptunghic sînt $AB = x$ și $BC = y$. Să se determine înălțimea paralelipipedului cunoscînd că diagonala paralelipipedului este de $x + y$.

R. $\sqrt{2xy}$.

76. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\frac{\sqrt{28}}{x} : \frac{\sqrt{7}}{x^2} - \sqrt{3}\right)(2x + \sqrt{3}) - 3x + 2 = 0$$

definită pe mulțimea $A = \left\{1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; 3\right\}$.

Să se găsească mulțimea soluțiilor $x \in A$.

R. $S = \left\{1; -\frac{1}{4}\right\}$.

77. Se dă ecuația:

$$\frac{(x^2 + 1)^2 (x^2 + x + 1)}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} = 10 \text{ definită pe mulțimea } A = \{2; 3; 4; 6\}.$$

Să se arate că printre soluțiile ecuației sînt elemente ale mulțimii A .

R. $x = \{3\}$.

78. Să se arate care elemente ale mulțimii $\{2; 3; 4; 6\}$, aparțin următoarelor mulțimi.

$$A = \{x \mid x^3 = 6x^2 - 27\}$$

$$B = \{x \mid x^4 = 3x + 10\}.$$

$$R. \quad 3 \in A; 2 \in B.$$

79. Dintr-o prismă de metal, triunghiulară regulată, cu latura bazei 3 dm și înălțimea de 6 dm, se scoate o piramidă cu aceeași bază și aceeași înălțime cu prisma. Din metalul rămas se toarnă prin topire, o nouă prismă triunghiulară regulată cu înălțimea de 1 dm. Se cere:

a) Latura bazei prisme obținute.

b) Dacă noua prismă se taie printr-un plan care trece printr-o muchie a bazei și prin mijlocul muchiei laterale opuse, se cere aria secțiunii obținute.

$$R. \quad \begin{cases} a) \quad 6 \text{ dm} \\ b) \quad \frac{3\sqrt{109}}{2} \text{ dm}^2. \end{cases}$$

80. Se dă expresia:

$$f(x) = \frac{x^4 + y^4 - 3x^2y^2}{x^4 + x^2 - x^2y^2 - x^3y - y^2 - xy} : \frac{x^2 - y^2 + xy}{x^2 + 1} + 2$$

și mulțimea $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Să se arate că $f(x) \in A$.

$$R. \quad f(x) = 3 \Rightarrow f(x) \in A.$$

81. Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al polinoamelor:

$$E_1 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4,$$

$$E_2 = x^2 - 4$$

$$E_3 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 8.$$

$$R. \quad \text{C.m.m.d.c.} = x + 2$$

$$\text{C.m.m.m.c.} = (x + 2)^2 (x^2 + 2) (x - 2).$$

82. Se dă mulțimea $A = \{1; 10; 7; 8\}$ și o submulțime B a mulțimii A cu două elemente.

Dacă $B = \{x; 7\}$ să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor p :

$C_B A = \emptyset$; r : $B - A = A \cap B$ știind că

$\{x \in N \text{ și este o rădăcină a ecuației}\}.$

$$\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} \cdot (x - 1) : (x^3 - 1) = x$$

$$R. \quad p: \text{adevărată}; A - B = \{8; 10\}; A \cap B = \{1; 7\} \Rightarrow A - B \neq A \cap B$$

83. Se dau mulțimile $A = \{x \in N \mid 42 < x < 93\}$, $B = \{x \in N \mid x \mid 2\}$.

Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției p : $A \cap B = A \cup B$.

$$R. \quad p: \text{falsă} \quad (A \cap B \neq A \cup B).$$

84. Într-o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$; $AD = DC = a$; unghiul $ABC = 45^\circ$.

Înălțimea piramidei este $VC = a\sqrt{2}$.

Se cere:

1. Să se arate că $AC = BC$.

2. Să se afle aria laterală și volumul tetraedrului $VABC$.

$$R. \begin{cases} 2) a^2(2 + \sqrt{3}) \\ \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

85. Un cilindru circular drept și un con circular drept au aceeași bază și aceeași înălțime, conul fiind înscris în cilindru. În con este înscris un alt cilindru avînd una din baze la $\frac{3}{8}$ din înălțimea conului, față de vârful lui.

Suma dintre generatoarea conului și raza cilindrului mare este de 16 cm, iar generatoarea cilindrului în care este înscris conul este de 8 cm.

Se cere: raportul dintre aria laterală a cilindrului mic și aria totală a cilindrului mare.

$$R. \frac{15}{112}$$

86. Fie

$$\left(\frac{3\sqrt{7} \sqrt{\frac{245x^4}{80}}}{\frac{\sqrt{343x^3}}{4}} - x \right)^2 - 16 = 0$$

definită pe mulțimea $A = \{\pm 3; \pm 2; \pm 4; 5\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr $p : (x_1; x_2)$ elemente ale mulțimii A .

R. p : adevărată; $S = \{\pm 2\}$.

87. Se dă expresia:

$$f(x) = \left[\left(\frac{x}{xy - y^2} - \frac{y}{xy - x^2} + \frac{2}{y - x} \right)^2 + \frac{2x^2y - 2xy^2}{x^2y^2} + 1 \right] \cdot \frac{x^2y^2}{x - y + xy} \cdot \frac{1}{x - y + xy}$$

și mulțimile $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

Să se arate valoarea de adevăr a propoziției $a: C_A B = f(xy) = \{1\} = A - B$.

R. Propoziția este adevărată.

88. Se dă expresia: $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care $f(x)$ este mai mare ca 1.

$$R. \begin{cases} \frac{3}{4} < x < 2 \\ \text{sau } x \in \left(\frac{3}{4}; 2 \right) \end{cases}$$

89. Într-o sferă se înscrie un con cu secțiunea axială triunghi isoscel ABC ($AB = AC = 17$ cm). Prin A se duce $AM = 10$ cm, $AM \cap BC = \{M\}$, și AM taie sfera în N ($BM < MC$). Se cunoaște că $MB = 9$ cm și $NC = 35,7$ cm.

Să se afle volumul conului înscris în sferă.

Să se calculeze perimetrul patrulaterului $ABNC$.

Să se calculeze diametrul sferei.

$$R. 600 \pi \text{ cm}^3; 85 \text{ cm}; 36 \frac{1}{8} \text{ cm}.$$

90. Să se efectueze:

$$\left[\left(\frac{x^4 + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - x\sqrt{2} - 2 \right) + x^6 \right] : (x^4 + 1)$$

R. $x^2 + 1$.

91. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 62, \\ x^2 - y^2 + x - y = 50. \end{cases}$$

R. $\begin{cases} x_1 = 7, & y_1 = 2; \\ x_2 = 7, & y_2 = -3; \\ x_3 = -8, & y_3 = 2; \\ x_4 = -8, & y_4 = -3. \end{cases}$

92. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este egală cu diferența ariilor bazelor, iar razele bazelor sînt R și r . Să se afle volumul trunchiului de con

R. $\frac{\pi^2}{3} (R^3 - r^3)$.

93. Să se efectueze:

$$\frac{\left(\frac{4x^2 + 12x + 9 - 2b^2x - 3b^2}{2x + 3 - b^2} \right)^3 - 8x^3 - 36x^2 - x^3(2x + 1)}{(3 - x)(2x + 1)} - x^2$$

R. $9 + 3x$.

94. Se dă un tetraedru $VABC$ în care avem $VC = VB = 30$ cm și $BC = 36$ cm. Muchiile VA , AB și AC se împart în 3 părți egale și se notează cu M , N , P punctele cele mai apropiate de A .

Se cere aria secțiunii MNP și să se arate că aria acestei secțiuni este $\frac{1}{9}$ din aria feței laterale VBC .

R. 48 cm^2

95. Să se afle aria totală și volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei egală cu a cm, avînd înălțimea cît dublul laturii bazei sale.

R. $\frac{a^2}{2} (12 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$.

96. Să se efectueze:

$$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{19 \cdot 16 + 11 \cdot 16 - 14 \cdot 16}}{x^2} - 1 \right) : \left(\frac{4}{x} + 1 \right) + \left(\frac{4 - x}{x} \right)^2 + 1.$$

R. $\frac{16}{x^2}$.

97. O piramidă are ca bază un triunghi ABC , $AB = 10$ cm; $AC = 14$ cm și $BC = 12$ cm.

Pe latura AB se ia un punct D și se duce paralela DE la BC ($E \in AC$) așa fel încît perimetrul triunghiului ADE să fie egal cu perimetrul trapezului $BDEC$. Înălțimea piramidei VD este de 40 cm. Se cere perimetrul secțiunii VDE .

R. 90 cm .

98. Un turist pleacă dintr-un sat la oraș. Dacă merge cu 4 kilometri mai mult pe zi față de viteza planificată sosește la oraș cu o zi mai devreme față de timpul stabilit. Dacă însă merge cu 5 km mai puțin pe zi față de viteza planificată inițial, atunci sosește la oraș cu 2 zile mai târziu. Care este distanța între sat și oraș și în câte zile trebuia să fie parcursă această distanță după plan?

R. 120 km; 6 zile.

99. Să se arate că numărul $1947 = 2\,200\,010_3$ și că $5\,211_7 = 1\,821$.

100. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 1 oră și 20 de minute; dacă se deschide primul robinet pentru 10 minute, iar al doilea pentru 12 minute, se umple $\frac{2}{15}$ din bazin.

În cît timp umple bazinul fiecare robinet singur?

R. 120 minute și 240 minute.

101. Se dă expresia:

$$\frac{\left[\frac{x^2-4}{(x+2)^2}\right]^2 + \frac{2x-4}{x+2} + 1}{8x^2} \cdot (x+2)^3$$

Pentru ce valoare a lui x expresia este un număr întreg?

R. $x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

102. Se dă expresia:

$$(3x^3 + 8x^2 + 5x + 2) : (x + 2).$$

Să se găsească restul împărțirii fără a efectua operația:

R. 0.

103. Se dă expresia: $\frac{b+1}{2b+1}$. Să se determine mulțimea valorilor lui $b \in N$ astfel ca expresia să se simplifice.

R. Expresia este ireductibilă oricare ar fi $b \in N$.

104. Se dau mulțimile:

$$D = \{3; 5; 6\} \quad C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor

$$1) a: D \cap C = \{D\} \quad 2) p: D \subset C \quad 3) n: C \subset D.$$

R. 1) adevărată; 2) adevărată; 3) falsă.

105. Se dă expresia $f(x) = \frac{9x+8}{10x+7}$ și mulțimea $A = \{12; 13; 16; 18; 21\}$.

a) Să se determine valoarea lui x ca $f(x)$ să se simplifice.

b) să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: x \in N \mid x \in A$.

R. $x = 18$; $18 \in A$.

106. Se dă trapezul dreptunghic cu baza mare $AB = 16$ cm, baza mică $CD = 9$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm și diagonalele $BD \cap AC = \{0\}$.

a) Să se arate că $BD \perp AC$.

b) Să se arate că $\triangle ADC$ și $\triangle DOC$ sînt echivalente.

107. Se dă ecuația:

$$\left\{ \left[\frac{(\sqrt{1,0201} + 0,99)^2 - \frac{x^2}{4}}{2 + \frac{x}{2}} \right] - 1 \right\} \cdot \frac{8}{x^2 - 7x + 10} = -\frac{4}{25}$$

definită pe mulțimea $A = \{12; 15; 22; 30; 31\}$.

Să se găsească mulțimea soluțiilor $\{x \in N \mid x \text{ element al mulțimii } A\}$.

R. $x = 30 \in A$.

108. Într-un trapez dreptunghic $ABCD$, cu baza mare AB și unghiurile drepte $\hat{A}$ și $\hat{D}$, unghiul $\widehat{ACD}$ este egal cu unghiul $\widehat{ABC}$. Se duce perpendiculara din vîrfurile D pe diagonala AC și se notează cu E piciorul acestei perpendiculare

Se dau: $AD = 5$ dm și $CD = \frac{15}{4}$ dm.

1) Să se afle lungimea segmentului DE .

2) Să se calculeze perimetrul și aria trapezului $ABCD$.

3) Se rotește trapezul $ABCD$ în jurul bazei mari. Să se afle aria totală și volumul corpului astfel format.

R. 1) $DE = 3$ dm; 2) $P = 22,5$ dm; $A = 28,125$ dm².

109. Se dă expresia:

$$E = \frac{\frac{(x+y)^2}{xy}}{\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1} : \frac{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}}$$

unde

$$y = 0,45 + \frac{0,1 + \frac{\sqrt{1,0404}}{10,2} \left(2,2 + \frac{54 \cdot 4}{2^3} \right)}{\left(4,4 : \frac{1}{5} \right) - 2}$$

Se cere:

1) Să se afle numărul y .

2) Să se arate că forma cea mai simplă pentru E este $(x+y)$; pentru ce valori ale lui x expresia E nu are sens?

3) Să se afle mulțimea numerelor x întregi pentru care expresia $x + \frac{1}{2}$ este mai mare decît (-7) și mai mică decît (-2) .

R. 1) $\frac{1}{2}$

2) $x = y$ și $x = -y$
 $x = 0$ și $y = 0$

3) $\{-7; -6; -5; -4; -3\}$.

110. Se dă o prismă dreaptă $ABCD A' B' C' D'$ cu baza paralelogram. Diagonala BD a bazei cu lungimea de a cm este perpendiculară pe latura AD , iar unghiul $\hat{B} = 150^\circ$. Planul determinat de muchiile opuse AB și $C'B'$ formează cu planul bazei un unghi de 60° . Să se afle:

- a) Diagonalele prisme
b) Raportul dintre aria bazei $ABCD$ și aria secțiunii $ABD'C'$.
c) Aria și volumul prisme.

R. a) $\frac{a\sqrt{61}}{2}$ cm; $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ cm

b) $\frac{1}{2}$

c) $a^2(6 + 5\sqrt{3})$ cm²; $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$ cm³.

111. Să se determine mulțimea:

$$M = \{a \in \mathbb{Z} \text{ există } b \in \mathbb{Z} \text{ astfel încît } a^2 - b^2 + 2 = 0\}.$$

Indicație. $a^2 - b^2 + 2 = 0$ se poate scrie $b^2 - a^2 = 2$;

$$(b - a)(b + a) = 2.$$

Divizorii lui 2 în $\mathbb{Z}$ sînt ± 1 ; ± 2 . Formăm sistemele de ecuații determinate de condițiile $(b - a)(b + a) = 2$.

$$\begin{array}{l} b - a = 1 \\ b + a = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b - a = 2 \\ b + a = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b - a = -1 \\ b + a = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b - a = -2 \\ b + a = -1 \end{array}$$

Se constată că în toate situațiile $a \notin \mathbb{Z}$ și nici $b \notin \mathbb{Z}$, rezultă că $M = \emptyset$.

112. Se consideră expresiile:

$$E_1 = \frac{x^2 + 1}{2}; \quad E_2 = \frac{x^2 - 1}{2}; \quad E_3 = x.$$

- a) Să se arate că $E_1 \geq E_3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
b) Pentru ce valori ale lui x , E_1 , E_2 , E_3 pot reprezenta mărimile laturilor unui triunghi dreptunghic?

R. $x > 1$.

113. Se dă mulțimea $A = \{2; 3; 4\}$.

Să se arate că $f(a) = a^2 - 3a + 2$ se poate transforma într-un produs de factori care are ca divizor unul din elementele mulțimii A pentru orice a real.

114. Să se determine numerele naturale x și y care satisfac egalitatea

$$\frac{4(x + y)}{(x + y)^2 - (x - y)^2} = 1.$$

R. $x = y = 2$.

115. Se dă un tetraedru regulat de muchie a .

- 1) Să se determine înălțimea, apotema (piramidei) și valoarea cosinusului unghiului dintre două fețe ale tetraedrului.
2) Să se determine distanțele unui punct oarecare de pe înălțimea tetraedrului la fețele laterale în funcție de distanța x a acestuia la planul bazei.

- a) Să se deducă de aici că suma distanțelor oricărui punct de pe înălțime la fețele tetraedrului este constantă.
 b) Să se determine punctul de pe înălțime, egal depărtat de toate fețele tetraedrului.
 3) Să se arate că două muchii neașezate pe aceeași față sînt perpendiculare.

$$\text{R. 1) } \frac{a\sqrt{3}}{2} = \text{apotema, } \frac{a\sqrt{6}}{3} = \text{înălțimea;}$$

$$\frac{1}{3} = \text{cosinusul unghiului diedru.}$$

$$2) \frac{a\sqrt{6} - 3x}{9} \quad \text{b) punctul de concurență a}$$

înălțimilor tetraedrului.

116. Fie ecuația $\frac{x(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2)}{(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 1)} = 4$ definită pe mulțimea $A = \{2, 3, 4\}$. Fie $B = \{2, 3, 5, 6\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției $p: C_A B = x$ una din soluțiile ecuației.

R. p este adevărată.

117. Se dă expresia:

$$F = \frac{(x^2y + x^2 + xy^2 + y^2 + x + y + 2xy)(1 - x)(x + 3)}{3 - x^2 - 2x}$$

- 1) Să se aducă F la forma cea mai simplă.
 2) Să se arate că F adusă la forma cea mai simplă este divizibilă prin 2 pentru orice $x \in N$ și $y \in N$.

Indicație. După simplificare obținem $F = (x + y)(x + 1)(y + 1)$

a) F este divizibilă prin 2 dacă unul din factorii lui F este divizibil prin 2.

b) Dacă x și y sînt numere pare $(x + 1)$ și $(y + 1)$ sînt impare, dar suma $(x + y)$ este pară $\Rightarrow F$ este divizibil prin 2.

Dacă x este par și y este impar sau invers, avem unul din factori par $\Rightarrow F$ este divizibil prin 2.

Dacă x și y sînt impare $\Rightarrow x + 1$ și $y + 1$ sînt pare deci F este divizibil prin 2.

$$\text{R. 1) } (x + y)(x + 1)(y + 1).$$

118. Un trapez isoscel $ABCD$ ($BC > AD$, $BC = 2a$, $AD = 2b$) este circumscris unui cerc de centru O . Fie M și N punctele în care CD , respectiv AB sînt tangente cercului și E punctul de intersecție al diagonalelor.

1) Să se calculeze raza cercului în funcție de a și b .

2) Să se arate că punctele M , E și N sînt coliniare.

3) Să se calculeze ME (tot în funcție de a și b)

4) Paralela din O la bază taie pe CD în P .

Din compararea segmentelor OP , OM și EM să se deducă inegalitățile dintre media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor pozitive a și b , înțelegîndu-se prin media armonică numărul x , unde $\frac{2}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Indicație. Se ține seama că laturile neparalele ale trapezului sînt egale cu semisuma bazelor și că înălțimea este diametrul cercului.

Se studiază asemănarea triunghiurilor formate din care se deduce raportul lor de asemănare; rezultă ME și $NE \parallel BC$.

Se ține seama de proprietatea liniei mijlocii a unui trapez, de mărimea razei aflate la punctul 1) și se calculează EM .

$$\text{R. 1) } R = \sqrt{ab} \quad 3) ME = \frac{2ab}{a + b}.$$

119. Se consideră ecuațiile:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - (a^2 + 1)x + 3a = 0$$

unde a este număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuațiile au o rădăcină comună?

Indicație. Prima ecuație are două rădăcini numerice. Pe rând se pune condiția ca una din ele să verifice ecuația a doua. Se obțin două ecuații de gradul II în a care dau 4 soluții pentru parametrul a .

R. $\{-1; 0; 2; 3\}$.

120. Să se afle două numere naturale b și c astfel încît pentru orice k natural par să avem:

$$b(1 - c)(-1)^{k+1} - (b + c)(-1)^{k+2} + 1 = 0$$

Indicație. Se ține seama de puterile numărului -1 și egalitatea devine:

$$-b(1 - c) - (b + c) + 1 = 0$$

de unde $b = \frac{c-1}{c-2}$ cu condiția $c \neq 2$, $b = 1 + \frac{1}{c-2}$.

R. $b = 2; c = 3$.

a) Să se găsească minimul expresiei $E = a^2 + b^2 - 3a - 3b$ unde a și b sint numere reale.

b) Dacă $a > 3$, $b > 3$ să se arate că $E > 0$.

Indicație. Formăm pătrate perfecte (al căror minim este zero)

$$E = a^2 - 3a + \frac{9}{4} + b^2 - 3b + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}.$$

Minimul este -4 , 5 pentru $a = b = \frac{3}{2}$.

Dacă $a > 3 \Rightarrow a^2 > 3a \Rightarrow a^2 - 3a > 0$; $b > 3 \Rightarrow b^2 > 3b \Rightarrow b^2 - 3b > 0$,
deci $E = a^2 + b^2 - 3a - 3b = a^2 - 3a + b^2 - 3b > 0$.

121. Se consideră un trapez:

a) Rotim trapezul în jurul bazei mici.

b) Rotim trapezul în jurul bazei mari.

Cînd este mai mare volumul obținut, în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?

R. Volumul mai mare corespunde cazului a)
Volumele nu pot deveni egale.

122. Care sint singurele poligoane regulate ce se pot obține prin secționarea unui cub cu un plan? Justificați răspunsul.

R. Triunghiul echilateral, pătratul și hexagonul regulat.

123. Dintr-o piesă uzată în formă de con circular drept cu raza bazei de 2 dm și înălțimea de $2\sqrt{2}$ dm se taie un corp în formă de cub cu una din fețe așezată pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că în felul acesta se folosește mai puțin de un sfert din material.

Indicație. Problema revine la înscrierea unui cub într-un con dat.

Se va afla muchia cubului, apoi se compară volumul cubului cu volumul conului.

124. Se consideră:

$$A(x) = (1 - 2x)^{244} \cdot (2 - 3x^2)^{247} \cdot (3 - 4x^2)^{248}; \quad (x \in \mathbb{R})$$

1) După efectuarea ridicărilor la putere, a înmulțirilor, a reducerilor se poate obține polinomul $A(x)$ ordonat după puterile lui x . Fără a face aceste calcule, să se afle suma coeficienților polinomului ordonat după puterile lui x .

2) Să se arate că:

$$A(x) \cdot [a(-1)^{k+1} + a(-1)^{k+2} + (-1)^{k+2} + (-1)^{k+3}] = 0$$

pentru orice a și x reali și orice k natural.

Indicație. Se știe că se poate obține suma coeficienților unui polinom $P(x)$ dacă se face $P(1)$.

Se vor considera cazurile pentru k par și impar și se va ține seamă de puterile numărului -1 .

$$\text{R. 1) } (+1) \cdot (-1) \cdot (+1) = -1$$

125. Să se arate că dacă două conuri circulare drepte au ariile totale egale și ariile secțiunilor axiale egale, atunci ele sînt egale.

Indicație. Notînd cu R_1, G_1, h_1 elementele unui con și cu R_2, G_2, h_2 elementele conului al

doilea și scriind relațiile date prin problemă se obține $\frac{R_1}{R_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{G_1}{G_2}$.

Se deduce că elementele conurilor sînt egale, deci conurile sînt egale.

126. Notăm produsele

$$A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100}\right);$$

$$B = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{99}\right);$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{101}\right) B. \text{ Să se arate că:}$$

$$\text{a) } A < B$$

$$\text{b) } A < \frac{1}{10} < B;$$

$$\text{c) } A < C < B.$$

Indicație. Se compară factorii produselor.

Se face produsul $A \times B$ și se găsește $A \times B = \frac{1}{100} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$ dar cum $A < B \Rightarrow$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{10}; B > \frac{1}{10}.$$

127. Un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB = 4$ m și $AD = 3$ m se rotește în jurul unei drepte care trece prin A și este paralelă cu diagonala BD .

a) Care este aria corpului de rotație obținut?

b) Care este volumul corpului de rotație obținut prin rotirea dreptunghiului dat în jurul unei axe dusă din A perpendiculară pe AC .

Indicație. Aria corpului se compune din aria laterală a trunchiului de con cu BC generatoare plus aria laterală a trunchiului de con cu DC generatoare plus aria laterală a conurilor cu generatoarele AD și AB .

$$\text{R. a) } \frac{336\pi}{5} \text{ m}^2; \text{ b) } 60\pi \text{ m}^2$$

128. a) Să se găsească două polinoame de gradul II, $P(x)$ și $Q(x)$ astfel ca

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x - 1}{x + 2}.$$

- b) Să se arate că $P(x) - 2Q(x)$ este de gradul I
c) Polinomul $R(x) = P^2(x) + Q^2(x)$ se divide prin $(x^2 + 1)$.

Indicație. Polinomul $P(x)$ și $Q(x)$ trebuie să conțină un același factor liniar, deci vor fi de forma:

$$P(x) = (2x - 1)(ax + b)$$

$$Q(x) = (x + 2)(ax + b)$$

129. Pentru vopsirea unui cub sînt necesare 6 kg de vopsea.

a) Dacă, după ce am vopsit cubul îl tăiem în cubulețe cu latura de 2 ori mai mică, de cîte kg mai avem nevoie pentru a vopsi și părțile neacoperite încă de culoare?

b) Dar dacă tăiem cubul în cubulețe cu latura de trei ori mai mică cîtă vopsea mai este necesară?

Indicație. a) Se formează opt cuburi prin 3 secțiuni mari cît o față a cubului inițial.

$$\text{R. a) } 6 \text{ kg; b) } 12 \text{ kg.}$$

130. Să se rezolve ecuația:

$$Y \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 8\}$$

Indicații. din $Y \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 8\} \Rightarrow 8 \in Y \Rightarrow Y$ nu poate conține nici un alt element diferit de 1; 2; 8 căci ar apărea în reuniune $\Rightarrow Y$ va fi oricare din submulțimile lui $\{1; 2; 8\}$ care îl conține pe 8.

$$\text{R. } Y = \{8\} \text{ sau } \{1; 8\} \text{ sau } \{2; 8\} \text{ sau } \{1; 2; 8\}.$$

131. Să se simplifice fracția rațională.

$$F = \frac{(x-3)(x-4) - (3-x)(6-x) - 4 + (x-1)^2}{5(x-3) - (x-1)(x-3)}.$$

$$\text{R. } \frac{x+3}{6-x}.$$

132. Să se construiască pe același grafic dreptele (d_1) și (d_2) reprezentate de funcțiile $y = x + 3$ și $y = 4 - x$.

133. Doi stâlpi verticali sînt înfiți într-un plan orizontal A și C fiind respectiv bazele lor; $AB = CD = 16$ dm.

Stîlpul CD este ancorat cu două cabluri: unul fixat în punctul E , situat în plan orizontal, astfel încît $EC = 12$ dm și al doilea fixat în punctul A astfel încît cablul $AD = 5\sqrt{17}$ dm.

Stîlpul AB este ancorat cu un singur cablu din punctul E , astfel încît $AE = 5$ dm.

a) Din triunghiul ACE să se calculeze $\widehat{AEC}$.

b) Se cer unghiurile BEC și DEA .

c) Se cere tangenta trigonometrică a unghiului DAE .

Indicație. a) Se calculează AC și se deduce că triunghiul ACE este dreptunghic.
b) Se folosește una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare.

R. a) $\widehat{AEC} = 90^\circ$

b) $\widehat{BEC} = \widehat{DEA} = 90^\circ$.

c) $\widehat{DAE} = 4$.

134. Să se determine A, B, C, D numere întregi pare și diferite între ele, astfel încît suma

$$\frac{1}{A} + \frac{9}{B} + \frac{7}{C} + \frac{4}{D} \text{ să fie cît mai mare posibilă.}$$

Indicație. Numărătorii fiind dați, fracțiile vor avea valoarea cea mai mare, dacă au numitorii cei mai mici posibili. Cu numerele pare cele mai mici se formează fracții convenabile.

R. $\frac{1}{8} + \frac{9}{2} + \frac{7}{4} + \frac{4}{6} = 7\frac{1}{24}$.

135. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) construim $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și $DM \perp AC$ ($M \in AC$). Fie G mijlocul lui DM ; $BM \cap AG = \{N\}$.
Să se arate că $AN \perp BM$.

Indicație. Fie P mijlocul lui MC . Se consideră triunghiul ADP , în care DM este înălțime; de asemenea PG prelungită este tot înălțime, avînd piciorul la intersecția cu AD . Rezultă că AG prelungită, care intersectează pe DP , este a treia înălțime a triunghiului ADP . Se ține seama că $DP \parallel BM$ este linie mijlocie în triunghiul BMC .

136. Pe laturile AC și AB ale triunghiului ABC se construiesc în exterior, pătratele $ACDE$ și $ABGF$. Fie $AN \perp FE$ ($N \in FE$).
Să se arate că prelungirea lui NA este mediană în triunghiul ABC .

137. O piramidă triunghiulară $VABC$ are înălțimea de 9 cm. În triunghiul ABC care este baza piramidei, înălțimea CD împarte latura AB astfel: $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{7}$.

Aria triunghiului ACD este de 40 cm². La $\frac{2}{3}$ de bază se face secțiunea $A'B'C'$ paralelă cu baza. Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'$.

R. 20 cm³.

138. Pe laturile AB și AC ale triunghiului oarecare ABC se ridică perpendiculare în punctul A și se ia $AB' = AB$, $AC' = AC$.
Să se demonstreze că mediana AD a triunghiului ABC , prelungită, este perpendiculară pe $B'C'$.

Indicație. Fie A' simetricul punctului A în raport cu D , se formează paralelogramul $ABA'C'$; se studiază unghiurile acestui paralelogram în legătură cu unghiurile triunghiului $AB'C'$.

139. Fie a, b, c numere reale pozitive care satisfac egalitatea:

$$(b + c + a)(b + c - a) = 2bc.$$

Să se arate că a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic.

140. Se dă $P(x) = 25x^4 + 2 - 30x^3 + 9x^2$.

Să se arate că pentru orice $x \in R$, $P(x)$ este pozitiv.

Indicație. $(5x^2 - 3x)^2 + 2 > 0$.

141. Fie M și N mulțimile ale căror elemente sînt soluțiile pentru $a \in N$ și $b \in N$ din egalitatea:

$$(a + 2)(b + 3) = 2ab.$$

Să se determine $M \cap N$.

Indicație. Egalitatea devine $ab - 3a - 2b - 6 = 0$

(în membrul întîi al ecuației este necesar să obținem un produs de factori iar în membrul doi un număr natural).

Se adaugă și se scade numărul 12 și obținem

$$(b - 3)(a - 2) = 12.$$

Divizorii lui 12 în N sînt: 1, 2, 3, 4, 6, 12; și astfel obținem

$$\begin{cases} b - 3 = 12 \\ a - 2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b - 3 = 1 \\ a - 12 = 12 \end{cases} \text{ și așa mai departe.}$$

$$R. M \cap N = \{4; 5; 6\}.$$

V. Sisteme de numerație

Sistemul de numerație obișnuit este sistemul zecimal. Zece unități de un ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

Pentru scrierea numerelor din acest sistem se folosesc zece cifre 0, 1, 2, 3, ..., 9.

Dar se pot folosi și alte sisteme de numerație, în care o unitate de un ordin oarecare să fie formată din două, trei ... unități ale ordinului imediat inferior; avem atunci, de exemplu, un sistem cu baza 2 (binar), cu baza 3, baza 8, baza 16, ...

Numărul cifrelor necesare într-un sistem este egal cu baza. Astfel în sistemul cu baza trei se vor întrebuința trei cifre 0, 1 și 2; în sistemul cu baza 7 se vor întrebuința 7 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. În sistemul cu baza 2, se folosesc numai cifrele 0 și 1. Acest sistem este folosit la mașinile electronice de calcul.

Trecerea de la o bază de numerație la alta.

1. Să se scrie $N = 325_6$ în sistemul zecimal;

$$N = 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 + 5 = 108 + 12 + 5 = 125_{10}$$

$$N = 325_6 = 125_{10} = 125^*.$$

2. Să se scrie $N = 125$ în sistemul cu baza 6:

$$\begin{array}{r|l} 125 & 6 \\ \hline 5 & 20 \end{array}; \quad \begin{array}{r|l} 20 & 6 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

$$N = 125 = 325_6.$$

* Cînd numărul este scris în baza 10, nu vom mai indica baza.

3. Să se scrie $N = 4215_6$ în baza 5:

il trecem pe N în baza 10, apoi în baza 5:

$$4215_6 = 4 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 5 = 864 + 72 + 6 + 5 = 947$$

$$\begin{array}{r|l} 947 & 5 \\ \hline 2 & 189 \end{array}; \begin{array}{r|l} 189 & 5 \\ \hline 4 & 37 \end{array}; \begin{array}{r|l} 37 & 5 \\ \hline 2 & 7 \end{array}; \begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$N = 4215_6 = 947 = 12242_5$$

4. Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 358, scris în sistemul zecimal.

$$R. 1354_6.$$

5. Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 99, scris în sistemul zecimal.

$$R. 344_5.$$

6. Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 401, scris în sistemul zecimal.

$$R. 110010001_2.$$

7. Să se scrie în sistemul cu baza 8 numărul 1004, scris în sistemul zecimal.

$$R. 1754_8.$$

8. Să se scrie în sistemul cu baza 10 următoarele numere scrise în diferite baze:

$$N_1 = 3428_9; N_2 = 450_8; N_3 = 1101001_2; N_4 = 1022_3$$

$$R. 3428_9 = 2537; 450_8 = 296; 1101001_2 = 105; 1022_3 = 35.$$

9. Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 458 scris în baza 9.

$$R. 458_9 = 377 = 30025_5.$$

10. Să se scrie în sistemul cu baza 3 numărul 505 scris în baza 8.

$$R. 505_8 = 325 = 110001_3.$$

11. Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 40 scris în baza 7.

$$R. 40_7 = 28 = 11100_2.$$

12. Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 10010000 scris în 2.

$$R. 10010000_2 = 144 = 400_6.$$

13. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.

$$\frac{149_5 + 220_3 + 10000_2}{11_7}.$$

$$R. 11.$$

14. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.

$$\frac{236_7 + 113_4 - 16}{202_3}.$$

$$R. \frac{33}{5}.$$

15. Să se simplifice fracția, scriind rezultatul în baza 2.

$$\frac{451_6 - 610 + 10002_3}{100_2}.$$

$$R. 111111_2.$$

16. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în baza 8 de numerație.

$$\frac{142_5 + 1111_2 + 5001_6 - 3_{10}}{42_{10} - 53_7}.$$

R. 435₈.

17. Să se verifice dacă egalitatea următoare este adevărată, numerele fiind scrise în baza 6 de numerație:

$$\left(30 \times 40 - \frac{1220}{2}\right) \cdot 5 = 10310.$$

18. Idem, numerele fiind scrise în baza 3 de numerație.

$$2 \left[(120 \times 100) + \frac{22 \times 10}{2} - (101 \times 11) \right] = 21221.$$

19. Idem, numerele fiind scrise în baza 9 de numerație:

$$(3^2 + 4^2 + 12^2) \cdot (30 - 16) = 2356.$$

20. Idem, numerele fiind scrise în sistemul binar:

$$(1 + 10 + 11 + 100) \cdot \frac{10000}{10} = 1\,010\,000.$$

21. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$22 \times 160 = 3740.$$

Indicație. Pentru baza b trebuie să avem $2 < b < 10$.

R. baza este 8.

22. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$5 \times 61 = 425$$

R. baza este 7.

23. Să se rezolve ecuația:

$$x + \frac{3x - 100_3}{101_2} = 11_3 - \frac{5x - 15_7}{3},$$

în care numerele fără indici sînt considerate în baza 10 de numerație.

R. $x = 3$.

24. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{12}(3x - 4) + \frac{1}{3}(10x + 3) = 133 - 10x$$

toate numerele fiind scrise în baza 5, să se dea răspunsul în baza 5, apoi în sistemul binar.

R. $x = 11_5 = 110_2$.

25. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 - 12x + \sqrt{1100} = 0$$

numerele fiind scrise în sistemul trinar, soluțiile se vor da în aceeași bază.

R. $x' = 2$; $x'' = 10$.

26. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{12_5}{x^2 - 1} + \frac{1000_3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1101_3 - 10_9x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

Soluția se va scrie în baza 10

$$R. x = \frac{3}{2}.$$

27. Un număr scris în baza 2 este $N = 10110001$; în ce bază același număr se scrie $N = 342$.

Indicație. În sistemul zecimal, să scriem un număr punând în evidență puterile lui 10, adică puterile bazei, de exemplu:

$$\begin{aligned} 7542 &= 7 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 2 \\ &= 7 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2 \end{aligned}$$

deci $N = 342$ se poate scrie $3x^2 + 4x + 2$ în care s-a notat cu x baza necunoscută a sistemului nou de numerație.

R. baza este 7.

28. Să se rezolve ecuația următoare, în care necunoscuta este baza unui sistem de numerație:

$$110110_2 = 312_x$$

R. baza este 4, $x = 4$.

29. Să se rezolve ecuația:

$$91_3 - 1020_{x^2} + 88_9 = 100100_2$$

R. $x = 2$.

30. Să se aducă expresia următoare la forma cea mai simplă (indicii x și y sînt baze de numerație, iar numerele fără indici se consideră în sistemul zecimal)

$$\frac{11_x}{11_y} : \left(1 - \frac{1}{12_x}\right) \cdot 7(11_y).$$

R. $7(x + 2)$.

VI. Probleme pentru utilizarea diferitelor metode aritmetice

1. Tatăl a chemat pe feciorul său cel mare și i-a spus: în sertarul bibliotecii veți găsi o casetă cu o sumă de bani, ce nu depășește 50 lei; să-ți iei partea ta și să lași acolo restul pentru ceilalți doi frați ai tăi, ținînd seama că toți trebuie să primiți sume egale. Copilul a putut face acest lucru corect după ce i-a dat 1 leu mamei sale. A chemat apoi pe fiul mijlociu căruia i-a spus același lucru. Acesta crezînd că este primul care împarte suma, a putut face aceasta după ce i-a dat mai întîi și el 1 leu mamei sale. Al treilea fecior crezînd și el că este primul ce împarte suma a făcut și el același lucru ca și frații săi. Ce sumă a fost în sertar inițial și ce sumă a găsit fiecare în sertar?

Se admite numai soluție aritmetică.

(Pentru a suscita interesul în rezolvarea aritmetică a acestei probleme nu dăm răspunsul care poate fi verificat.)

2. Se dau trei săculețe cu nuci; în fiecare din ele se află un același număr de nuci. Dacă se iau câte 8 nuci din fiecare săculeț, rămân în toate cele trei săculețe tot atâtea nuci câte au fost la început în fiecare săculeț. Cite nuci sînt în fiecare săculeț?

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura IV.14 (metoda figurativă).

R. 12 nuci.

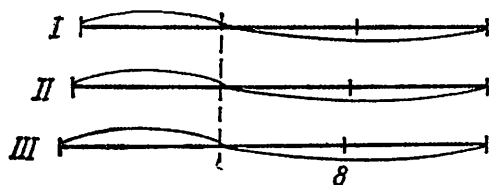


Fig. IV.14

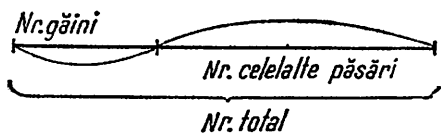


Fig. IV.15

3. Într-o curte sînt găini, găște rațe și curci. Numărul găinilor reprezintă $\frac{1}{2}$ din numărul celorlalte păsări; numărul găștelor reprezintă $\frac{1}{3}$ din numărul celorlalte păsări; numărul rațelor reprezintă $\frac{1}{4}$ din numărul celorlalte păsări. Știind că numărul curcilor este de 260, să se afle numărul total a păsărilor din aceeași gospodărie.

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura IV.15 (metoda figurativă). De fiecare dată se va considera mulțimea formată de celelalte păsări ca un întreg.

R. 1 200 păsări.

4. Mama este mai în vîrstă decît fiica sa de $2\frac{1}{2}$ ori. Cu 6 ani în urmă, mama era de 4 ori mai în vîrstă decît fiica. Care este vîrsta actuală a celor două persoane?

R. 30 ani; 12 ani.

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică este dată în figura VI.16 (metoda figurativă).

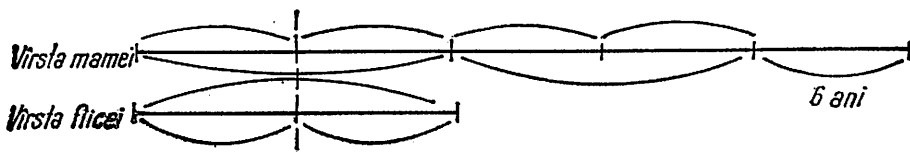


Fig. IV.16

5. Vîrsta tatălui reprezintă $1\frac{5}{6}$ din vîrsta fiului său. Acum 10 ani vîrsta fiului era 44, (4)% din vîrsta tatălui. Cîți ani are tatăl? Dar fiul?

R. 55 ani; 30 ani.

Indicație. Schița pentru rezolvarea aritmetică este dată în figura IV.17 (metoda figurativă).

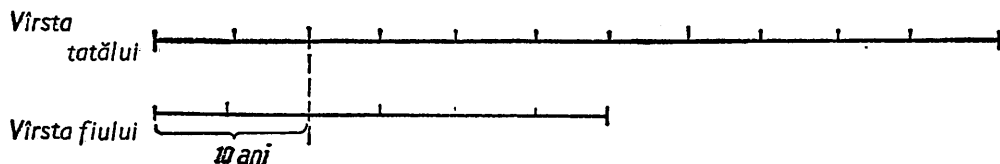


Fig. IV.17

6. O studentă are azi de 5 ori vîrsta pe care o avea ea, cînd fratele ei avea vîrsta ei actuală; cînd ea va avea etatea de azi a fratelui ei, suma vîrstelor va fi 88 ani. Ce etate are fiecare acum?

R. 20 ani; 36 ani

Indicație. Schița pentru soluția aritmetică (metoda figurativă):

	trecut	prezent	viitor
pentru vîrsta studentei	(1) 0	(5) 00000	(9) 000000000
pentru vîrsta fratelui ei	(5) 0 0000	(9) 00000 0000	(13) 000000000 0000
			$9 + 13 = 22$ părți egale corespond la 88 ani

7. Să se afle trei numere știind că $\frac{2}{3}$ din primul este cît $\frac{5}{8}$ din al doilea, iar $\frac{5}{12}$ din al doilea valorează cît $\frac{7}{18}$ din al treilea. Suma numerelor este 33,7.

R. 10,5; 11,2; 12.

Indicație (pentru soluția aritmetică). Se folosește metoda falsei ipoteze: se presupune că primul număr ar fi 21; atunci, conform enunțului, se găsește că al doilea ar fi 22,4, iar al treilea 24. Suma celor trei numere ar fi atunci 67,4 adică dublul celei din enunț; prin urmare, toate numerele trebuie micșorate de două ori.

8. Dintr-un depozit de lemne se vinde o cantitate de 10 st. Se mai aduce apoi în depozit o cantitate de lemne egală cu cea ce rămăsese și se vinde o cantitate de 30 st. Se mai aduce în depozit o cantitate de trei ori cît cea rămasă și se face o altă vînzare de 360 st. După aceste operații se află în depozit o cantitate de lemne egală cu cea de la început. Cîți steri de lemne au fost la început în acel depozit?

R. 80 st.

Indicație (pentru soluția aritmetică). Folosim metoda falsei ipoteze: se presupune că depozitul avea 200 st lemne; găsim că atunci ar rămîne, după operațiile indicate, 1 040 st. Dacă se presupune că avea 190 st, găsim restul 960 st, iar pornind de la o cantitate inițială de 180 st ar rămîne 880 st. Restul întrece numerele presupuse cu 840, respectiv 770, 700 st. Deci, cu o diferență de 20 st în minus, ne apropiem cu 70 st. Pentru a ne apropia cu 700 st, vom lua de 10 ori 10 st mai puțin decît ultima presupunere, adică $180 - 10 \times 10 = 80$ st.

9. Într-o echipă de jocuri populare românești se află de 4 ori mai mulți băieți decît fete. Plecînd de la un spectacol 4 perechi de dansatori (4 băieți și 4 fete), rămîn în echipă de 7 ori mai mulți băieți decît fete. Cîți dansatori avea echipa?

R. 40 dansatori.

Indicație (pentru soluția aritmetică). Se poate folosi metoda falsei ipoteze: se presupune că sînt 12 fete și deci 48 băieți. Plecînd cele 4 perechi, rămîn 8 fete și 44 băieți (în loc de $8 \cdot 7 = 56$), deci o diferență de 12 băieți; trebuie să micșorăm numărul fetelor. Presupunînd că ar fi 11 fete, găsim diferența 9, adică pentru o fată mai puțin, diferența scade cu 3. Diferența de 12 băieți se va anula deci prin 4 diferențe de câte 3, adică în echipă sînt $12 - 4 = 8$ fete și 32 băieți. Echipa este formată din 40 dansatori.

10. Dintr-o sticlă cu esență de oțet se consumă a treia parte apoi se umple cu apă. După aceea, se consumă a treia parte din amestec și se pune iar la loc apă. După patru asemenea operații, în sticlă se mai află 16 cl esență (restul apă).

Cîtă esență de oțet conținea sticla la început?

Cîtă esență de oțet amestecat cu apă s-a consumat în total?

R. 81 cl esență; 108 cl consum total.

Indicație (pentru metoda aritmetică). Se folosește metoda retrogradă:

	rest	consumat	la începutul operației
prin operația IV	16 cl esență	8 cl esență	$16 + 8 = 24$ cl esență
prin operația III	24 cl esență	12 cl esență	$24 + 12 = 36$ cl esență
prin operația II	36 cl esență	18 cl esență	$36 + 18 = 54$ cl esență
prin operația I	54 cl esență	27 cl esență	$54 + 27 = 81$ cl esență

De fiecare dată s-a consumat $1/3$ din 81 cl = 27 cl.

În total s-au consumat $27 \times 4 = 108$ cl amestec.

11. Pe două rafturi ale unui dulap cu cărți se află 48 volume. Se trece din raftul I în raftul II un număr de cărți cîte erau în raftul II; în felul acesta în raftul II sînt acum mai multe cărți. Se repetă operația în sens invers, din raftul II spre raftul I. După aceste două mutări, în ambele rafturi se află același număr de volume. Cîte volume erau la început în fiecare raft?

R. 30; 18.

Indicație (pentru soluția aritmetică). Se folosește metoda retrogradă:

	pe raftul I	pe raftul II
Situația finală	24	24
Înainte de mutarea II	$24 - 12 = 12$	$24 + 12 = 36$
Înainte de mutarea I	$12 + 18 = 30$	$36 - 18 = 18$
(adică la început)		

12. Un copil nu are 100 de nuci, ci îi lipsesc atîtea nuci cîte ar avea peste 100, dacă ar avea de 9 ori cîte are acum. Cîte nuci are acel copil?

R. 20 nuci.

Indicație. Schița pentru metoda figurativă este dată în figura IV.18.

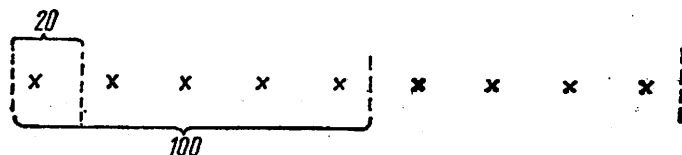


Fig. IV.18

13. Se repartizează 22 000 volume pentru bibliotecile de la 3 licee, 2 școli generale și o școală profesională. Fiecare liceu primește de 3 ori mai multe cărți decât școala profesională, iar școala profesională primește de două ori mai multe cărți decât fiecare școală generală. Câte cărți primește fiecare școală din cele trei categorii?

R. 6 000 vol.; 1 000 vol.; 2 000 vol.

Indicație. Schița pentru metoda figurativă este dată în figura IV.19.

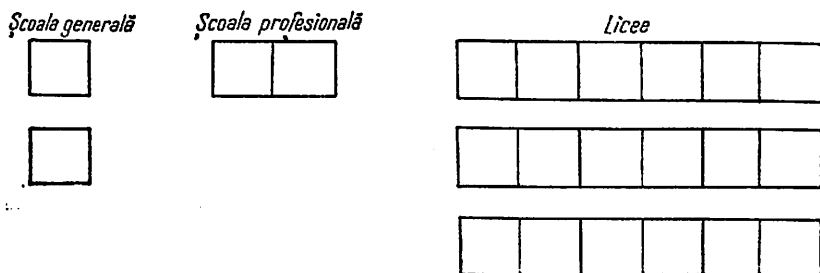


Fig. IV.19

14. Două ateliere care produc piese metalice au randamente diferite: dacă fiecare ar realiza 1 000 piese mai mult pe lună, atunci producția primului atelier ar fi de trei ori mai mare decât producția celui de-al doilea atelier, iar dacă fiecare ar lucra 1 000 piese mai puțin pe lună producția primului atelier ar fi de 5 ori mai mare decât a celui de-al doilea atelier. Câte piese produce lunar fiecare dintre cele două ateliere?

R. 11 000 piese; 3 000 piese.

Indicație. Schița pentru metoda figurativă este dată în figura IV.20. Reprezentăm producția celui de-al doilea atelier prin AB ; după creșterea cu 1 000 piese, producția devine AC , iar producția primului atelier o reprezentăm prin $A'C' = 3AC$. ($A'M = MN = NC' = AC$). Notăm micșorarea de 1 000 piese cu $BP = B'P'$; rezultă $AP = NP'$. Dar $A'P'$ trebuie să fie de 5 ori cât AP , deci AP se cuprinde în $A'N$ de 4 ori și în AC de 2 ori, adică $AP = PC$ și corespunde cu 2 000 piese, de unde rezultă că AB corespunde unei producții de 3 000 piese. Producțiile sînt de 11 000 piese, respectiv 3 000 piese lunar.

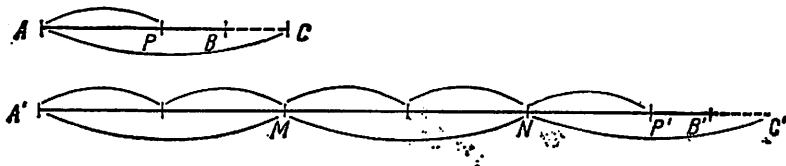


Fig. IV.20

1. Generalizarea și discuția problemelor

1. La rezolvarea problemelor de matematici, elevii se mulțumesc — de multe ori — să considere ca juste soluțiile găsite pentru necunoscutele problemei, fără a analiza dacă rezultatele sînt posibile, dacă aceste rezultate pot ocaziona unele interpretări sau generalizări.

Pentru a înlătura această tendință cît și pentru a forma deprinderea de a generaliza și discuta problemele, — obiectiv de urmărit mai ales la „cercurile de matematici”, — vom da cîteva exemple de generalizare și discuție a problemelor.

Dacă datele unei probleme sînt numerice, găsirea soluției nu ne dă o idee completă asupra condițiilor de posibilitate a problemei sau asupra eventualelor particularități ce s-ar putea ivi prin modificarea datelor, pe cînd dacă enunțul problemei conține date literale, rezolvarea ei ne conduce la formule din care putem trage următoarele foloase:

a) putem scoate reguli generale, care se aplică la toate problemele de același fel, prin care putem găsi direct soluțiile oricărei probleme de felul celei considerate;

b) soluțiile generale sau formulele ne permit a studia o problemă în toate amănunțele și în toate cazurile care se pot prezenta discutînd soluțiile adică examinînd ce devin ele în diferitele supoziții ce putem face asupra datelor literale; se obține astfel o idee generală și completă asupra acelei probleme. În fine, uneori la rezolvarea unei probleme obținem o soluție negativă care prin ea însăși pare că nu are sens și problema este considerată imposibilă; dar dacă în problemă sînt mărimi ce pot fi socotite în două sensuri opuse, se poate ca această imposibilitate să fie aparentă, adică soluția să poată fi interpretată.

Cîteva exemple ne vor edifica asupra celor expuse mai sus.

1. *Se topesc împreună două aliaje de argint; unul de 240 g, cu titlul de 0,800 și altul de 160 g, cu titlul de 0,300. Care va fi titlul noului aliaj obținut?*

Se știe că titlul arată cît metal fin se cuprinde în unitatea de masă. Să însemnăm titlul necunoscut prin x . Relația de egalitate, care ne va da ecuația problemei, o vom avea exprimînd că acea cantitate de argint din cele două aliaje date trebuie să fie egală cu cea cuprinsă în aliajul nou.

Dacă într-un gram din primul aliaj se cuprind 0,800 g de argint, în 240 g se vor cuprinde $0,800 \times 240$ g; tot asemenea în al doilea aliaj se cuprind $0,300 \times 160$ g de argint.

În aliajul ce va rezulta după topire și care va avea masa de $(240 + 160)$ g se vor cuprinde $x(240 + 160)$ g de argint.

Vom avea deci:

$$(1) \quad 0,8 \times 240 + 0,3 \times 160 = x(240 + 160).$$

Generalizare

Să însemnăm titlurile celor două aliaje prin t și t' și greutatea lor prin g și g' , iar titlul noului aliaj să-l însemnăm cu T . În locul ecuației (1) vom avea ecuația (2), adică:

$$(2) \quad tg + t'g' = T(g + g').$$

Aceasta este ecuația generală sau formula aliajelor.

Cu ajutorul ei vom putea rezolva orice problemă de aliaj analoagă cu cea dată. Această formulă ne mai permite a afla oricare din cîtimile t , t' , g și g' cînd celelalte ar fi cunoscute, adică cu ajutorul ei putem rezolva problemele de felul celor următoare:

a) Ce titlu trebuie să aibă un aliaj pentru ca topind 240 g din el cu 160 g dintr-un alt aliaj cu titlul de 0,300 să se ridice titlul la 0,600?

b) Ce cantitate trebuie să luăm dintr-un aliaj cu titlul de 0,300 pentru ca topindu-l cu 240 g de aliaj cu titlul de 0,800 să ne dea un aliaj cu titlul de 0,600?

Tot formula de mai sus ne dă soluția problemelor în care unul din aliaje nu cuprinde deloc metal fin (titlul fiind zero) sau este metal fin curat (titlul fiind 1).

Discuție

Formula se poate pune sub forma:

$$(3) \quad (t - T)g = (T - t')g'.$$

Fiindcă titlurile t , t' și T , precum și masele g și g' sînt cantități esențial pozitive, se vede din formula (3) că T trebuie să fie cuprins între t și t' ; dacă $t = t'$, atunci evident că $T = t = t'$, ceea ce se vede și din formula (2).

2. Se dă un trapez $ABCD$, în care unghiurile A și C sînt drepte (fig. IV.21); se prelungesc laturile AC și BD pînă se întîlnesc în O . Se cere distanța CO , știind că

$$AB = a, \quad CD = b, \quad AC = i.$$

Notînd distanța necunoscută CO prin x , din triunghiurile asemenea OCD și OAB avem:

$$\frac{x}{x+i} = \frac{b}{a}, \quad \text{din care scoatem: } x = \frac{bi}{a-b}.$$

— Dacă $a = b$, valoarea lui x devine:

$$x = \frac{bi}{0},$$

conducînd la o operație fără sens; în acest caz trapezul devine un dreptunghi și laturile AC și BD sînt paralele.

— Dacă $b = 0$, vom avea $x = 0$, atunci trapezul se schimbă într-un triunghi și prin urmare distanța de la C la punctul de întîlnire este 0.

3. Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de trei ori cît vîrsta fiului, dacă acum tatăl are 56 de ani și fiul 30 de ani?

Notăm cu x numărul de ani peste care vîrsta tatălui va fi de trei ori cît a fiului. Peste x ani vîrsta fiului va fi $(30 + x)$, a tatălui $(56 + x)$.

Ecuția problemei este:

$$56 + x = 3(30 + x).$$

Rezolvînd ecuația problemei, obținem: $2x = -34$; $x = -17$.

Răspunsul arată că fenomenul a avut loc în trecut, acum 17 ani. În adevăr, atunci tatăl avea 39 ani, fiul 13 ani și vîrsta tatălui era întreitul vîrstei fiului.

Cazul general

Peste cîți ani vîrsta tatălui va fi de n ori vîrsta fiului, dacă acum tatăl are a ani și fiul are b ani în (ipoteza A $n > 1$).

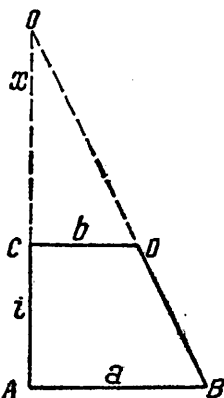


Fig. IV.21

Ecuția problemei este:

$$a + x = n(b + x),$$

cu soluția: $x = \frac{a - nb}{n - 1}$, și putem avea trei cazuri.

- 1) dacă $a - nb > 0$, atunci $x > 0$ și fenomenul va avea loc în viitor;
- 2) dacă $a - nb < 0$, atunci $x < 0$; adică fenomenul a avut loc în trecut (ca în exemplul numeric de mai sus);

3) dacă $a - nb = 0$, $x = 0$ în prezent, vârsta tatălui este de n ori vârsta fiului.

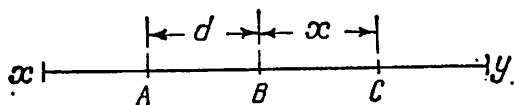


Fig. IV.22

4. Doi curieri merg pe distanța de la X la Y cu mișcare uniformă, unul avînd viteza v și altul v' . Într-un moment oarecare, cel din-

ții se află în punctul A și cel de-al doilea în punctul B (fig. IV.22). Se întreabă la ce depărtare de punctul B se vor întîlni?

Pentru a pune problema în ecuație, să presupunem că ei merg amîndoi în același sens și fie C punctul unde se întîlnesc; notăm prin x distanța BC și prin d distanța fixă cunoscută AB.

v fiind viteza primului curier și t timpul necesar sosirii în C, legea spațiilor ne dă

$$d + x = vt,$$

de unde

$$t = \frac{d + x}{v}.$$

Cel de-al doilea curier ajunge în C tot în același timp t , căci am presupus că el a pornit din B cînd cel dintîi a pornit din A; notînd viteza lui cu v' , vom avea

$$x = v't,$$

de unde

$$t = \frac{x}{v'}.$$

Egalînd valorile lui t , avem:

$$(1) \quad \frac{x}{v'} = \frac{d + x}{v} \text{ și } x = \frac{dv'}{v - v'}.$$

Discuție:

- a) Presupunem că $v > v'$, atunci valoarea lui x este pozitivă, ceea ce arată că întîlnirea se va face într-adevăr în partea dreaptă a punctului B, așa cum am presupus. Aceasta se poate înțelege ușor, căci dacă primul curier se află în A în momentul cînd al doilea se găsește în B, viteza primului fiind mai mare, el trebuie să ajungă pe al doilea în partea dreaptă a punctului B.
- b) Presupunem că $v < v'$; formula dă în acest caz pentru x o valoare negativă, ce arată că întîlnirea a avut loc înainte de a ajunge curierii în A și B, adică în partea stîngă a punctului B, căci din momentul ce ei sînt

în A și B , cel de-al doilea mergînd mai repede se va depărta mereu de cel dintîi, așa că ei nu se pot întîlni la dreapta lui B .

c) Dacă $v = v'$, valoarea lui x în acest caz devine $\frac{dv'}{0}$, ceea ce conduce la o imposibilitate; cei doi curieri nu se întîlnesc niciodată.

Aceasta este evident, deoarece ambii deplasîndu-se în aceeași direcție, cu aceeași viteză, distanța dintre ei rămîne mereu d .

d) Dacă $v = v'$ și presupunem $d = 0$, în această situație valoarea lui x are forma $\frac{0}{0}$, adică este un caz de nedeterminare, ceea ce se înțelege, căci ei, aflîndu-se în același punct într-un moment dat și avînd aceeași viteză, se găsesc mereu împreună.

e) Dacă $v \neq v'$ și $d = 0$, avem $x = \frac{0}{v - v'} = 0$. În acest caz, punctul lor de întîlnire este în B , care devine punct comun de plecare.

f) Dacă ei ar fi mers în sens contrar (unul către altul), atunci întîlnirea s-ar face între A și B , și dacă se înseamnă ca și mai sus cu x distanța de la B la punctul de întîlnire, obținem ecuația:

$$(2) \quad \frac{d - x}{v} = \frac{x}{v'} \text{ și } x = \frac{dv'}{v + v'}.$$

Considerînd viteza v' ca pozitivă, cînd mișcarea celui de-al doilea se face spre dreapta și ca negativă cînd mișcarea se face în sens opus și dacă luăm distanța socotită spre dreapta punctului B ca pozitivă și cele socotite spre stînga ca negative, vom recunoaște că formula (2) este conținută în formula (1).

Prin urmare, formula $x = \frac{dv'}{v - v'}$ se aplică în ambele cazuri ale problemei.

De aici se poate vedea cum, introducînd cantitățile negative ca date ale unor probleme, putem să generalizăm problemele, adică cu o singură formulă, găsită pentru unul din cazurile problemei, putem să studiem toate celelalte cazuri ce le-ar putea prezenta ea, dacă atribuim citimilor cunoscute atît valori pozitive cît și negative.

5. *Circumferința roții din față a unei trăsuri este k metri, circumferința roții din spate este de l metri.*

Pe ce distanță va face roata din față cu u învîrtituri mai mult decît cea din spate?

Notăm distanța parcursă cu x . Ecuația problemei este:

$$\frac{x}{k} - u = \frac{x}{l},$$

de unde

$$x = \frac{lku}{l - k}.$$

a) Ce fel de mărimi sînt l , k și u ?

Dacă $x < 0$ cînd $l - k < 0$, deci $l < k$, ce putem spune despre raza roții din spate în raport cu cea din față? Discuția rămîne pe seama cititorului.

VII. Probleme diverse

1. Probleme de coliniaritate

Printre problemele de geometrie plană, interesante sînt problemele de coliniaritate. Metodele de rezolvare folosite la aceste probleme sînt variate și se utilizează proprietăți ale figurilor geometrice și teoreme din diferite capitole.

În cele ce urmează prezentăm cîteva probleme de coliniaritate rezolvate.

1. Să se demonstreze că simetricile vîrfurilor B și C ale unui triunghi ABC față de mijloacele laturilor AC și AB (respectiv) sînt coliniare cu vîrfurile A .

Rezolvare. Fie B'' și C'' simetricile vîrfurilor B și C față de mijloacele B' și C' ale laturilor AC și AB (fig. IV.23). Patrulaterul $ABCB''$ este paralelogram, deoarece diagonalele AC și BB'' se taie în părți egale, conform construcției. Rezultă că $AB'' \parallel BC$. În mod analog se demonstrează că patrulaterul $ACBC''$ este paralelogram și rezultă $AC'' \parallel BC$. Prin urmare, prin vîrfurile A trec două paralele cu BC și anume AB'' și AC'' . Ele nu pot fi diferite, ca direcție, conform *postulatului lui Euclid*; aceasta înseamnă că punctele C'' , A și B'' sînt coliniare.

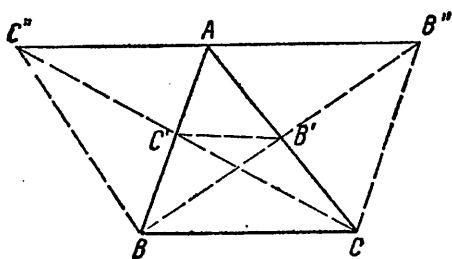


Fig. IV.23

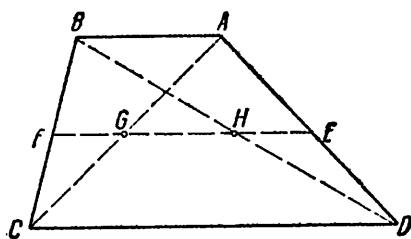


Fig. IV.24

2. Să se arate că mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez și mijloacele diagonalelor sînt patru puncte coliniare.

Rezolvare. În triunghiul ABC , FG fiind linie mijlocie avem $FG \parallel AB$ (fig. IV.24). În triunghiul BCD , FH este linie mijlocie și avem: $FH \parallel CD$. Bazele trapezului fiind paralele rezultă că prin punctul F trec două paralele la aceeași direcție; ele nu pot fi diferite conform *postulatului lui Euclid*, deci punctele F , G și H sînt coliniare.

Cu o demonstrație analoagă obținem că și punctul E se găsește pe aceeași dreaptă cu primele trei puncte, adică cele patru puncte considerate sînt coliniare.

3. Două cercuri O și O' sînt secante în A și B . Prin A se duc diametrele AC și AD ale celor două cercuri. Să se demonstreze că punctele C , B și D sînt coliniare.

Rezolvare. Unghiul ABC este drept fiind înscris într-un semicerc; aceeași observație pentru unghiul ABD (fig. IV.25). Unghiurile adiacente ABC și ABD fiind suplementare rezultă că au laturile necomune în prelungire, adică punctele C , B și D sînt coliniare.

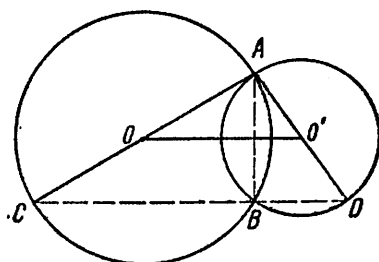


Fig. IV.25

4. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$. Să se demonstreze că punctul de intersecție al diagonalelor, centrul cercului circumscris și punctul de intersecție al laturilor neparalele ale trapezului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Se analizează proprietatea fiecărui punct și se observă o însușire comună; într-adevăr:

1) centrul O al cercului circumscris este echidistant de punctele C și D (situat pe cerc) (fig. IV.26);
 2) punctul F de intersecție al diagonalelor este echidistant de punctele C și D (proprietatea diagonalelor trapezului isoscel);
 3) punctul E de intersecție al prelungirilor neparalele este echidistant de punctele C și D , deoarece triunghiul CDE este isoscel. Prin urmare, punctele O, E și F aparțin mediatoarei segmentului CD care este locul geometric al tuturor punctelor cu această proprietate.

S-a recunoscut o dreaptă — loc geometric care conține cele trei puncte considerate, adică punctele sînt coliniare.

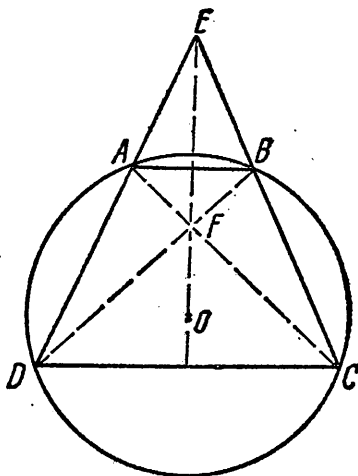


Fig. IV.26

5. Să se demonstreze că dacă se proiectează unul dintre vîrfurile unui triunghi pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor corespunzătoare celorlalte două vîrfuri ale triunghiului se obțin, pe aceste bisectoare, patru puncte coliniare.

Rezolvare. Patrulaterul $ADBF$ este dreptunghi, conform enunțului, și centrul său de simetrie (M) este la mijlocul laturii AB (fig. IV.27). Se demonstrează că diagonala DF a dreptunghiului este paralelă cu BC și deoarece această diagonală trece prin mijlocul laturii AB rezultă că DF are direcția liniei mijlocii a triunghiului ABC . Analog pentru EG , diagonala dreptunghiului $AECG$. Prin urmare, punctele D, E, F și G sînt situate pe o aceeași paralelă cu BC , adică sînt coliniare.

S-a folosit unicitatea liniei mijlocii, adică postulatul lui Euclid.

6. Pe două laturi consecutive ale unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF (primul interior și celălalt exterior pătratului). Să se demonstreze că punctele D, E, F sînt coliniare.

Rezolvare. În triunghiul isoscel ADE (deoarece $AD = AE$) avem $\sphericalangle 1 = 30^\circ$; rezultă $\sphericalangle 2 = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$ (fig. IV.28);

— în triunghiul echilateral ABE : $\sphericalangle 3 = 60^\circ$;

— în triunghiul dreptunghic isoscel BEF : $\sphericalangle 4 = 45^\circ$.

Unghiurile 2, 3 și 4 adiacente — consecutive însumează 180° , deci ele sînt situate de aceeași parte a unei drepte; urmează că punctele D, E și F sînt coliniare.

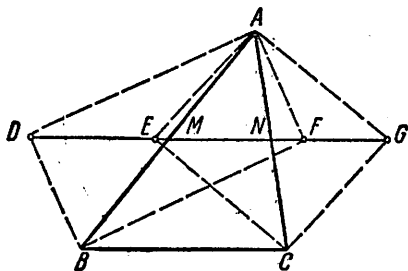


Fig. IV.27

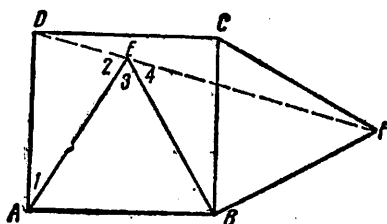


Fig. IV.28

7. În patrulaterul $ABCD$ se consideră M și N mijloacele laturilor opuse AB și CD . Prin M ducem MP paralelă cu BC și MQ paralelă cu AD , iar prin vîrfurile C și D dîm o paralelă cu AB . Se formează astfel paralelogramele $BCPM$ și $ADQM$. Să se arate că vîrfurile P și Q ale acestor paralelograme sînt coliniare cu punctul N .

Rezolvare. Se compară triunghiurile CNP și DNQ (fig. IV.29) ele au:

$$CP = DQ = \frac{AB}{2}, \quad CN = DN = \frac{CD}{2}$$

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ca alterne interne formate de paralelele CP și DQ cu secanta CD .

Din egalitatea acestor triunghiuri rezultă $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. Aceste două unghiuri egale sînt situate de o parte și de alta a dreptei CD ; rezultă că ele sînt opuse la vîrf; atunci laturile PN și NQ sînt în prelungire și punctele P, N, Q sînt coliniare.

S-a utilizat teorema: dacă două unghiuri egale au vîrfurile comune, o latură comună și sînt așezate de o parte și de alta a laturii comune, atunci ele sînt opuse la vîrf.

8. Două cercuri O_1 și O_2 sînt tangente exterior în punctul T . O secantă dusă prin T taie cercurile în A și B . Se consideră diametrele AC și BD ale cercurilor O_1 și O_2 , respectiv. Să se demonstreze că punctele C și D sînt coliniare cu punctul T de tangență.

Rezolvare. Unghiurile ATC și BTD sînt drepte ca unghiuri înscrise într-un semicerc (fig. IV.30). Aceste unghiuri egale au vîrfurile comune și sînt situate de o parte și de alta a unei laturi comune (AB); ele sînt unghiuri opuse la vîrf adică laturile CT și DT sînt în prelungire; prin urmare punctele C, T și D sînt coliniare.

9. Se consideră un triunghi oarecare ABC . Să se demonstreze că ortocentrul acestui triunghi (H), centrul de greutate și centrul cercului circumscris triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Fie AD diametrul cercului circumscris ce trece prin vîrfurile A al triunghiului (fig. IV.31). Se demonstrează că patrulaterul $BHCD$ este paralelogram. Diagonalele sale sînt BC și HD , deci A'' este centrul de simetrie al paralelogramului; rezultă că:

AA'' este o mediană a triunghiului ABC ; OA'' este perpendiculară pe BC ; OA'' este paralelă cu înălțimea AA' a triunghiului; OA'' este linie mijlocie în triunghiul $ADH \Rightarrow OA'' = \frac{AH}{2}$.

Se unește H cu O . Se demonstrează că triunghiurile $A''OG$ și AGH sînt asemenea,

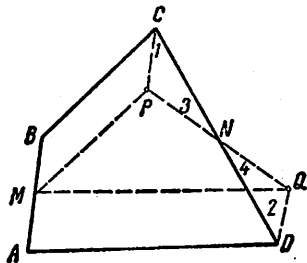


Fig. IV.29

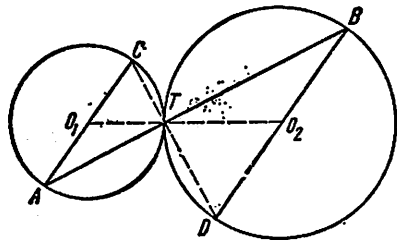


Fig. IV.30

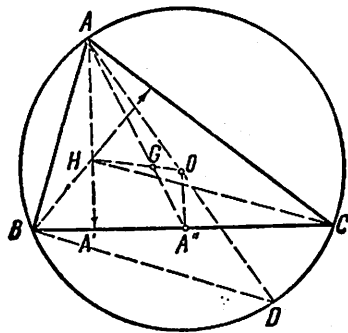


Fig. IV.31

raportul lor de asemănare fiind $1/2$; adică pe mediana AA'' există un punct care determină raportul $\frac{GA''}{GA} = \frac{1}{2}$. Rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului, adică cen-

trul de greutate se află pe linia care unește ortocentrul cu centrul cercului circumscris. Cele trei puncte H , G și O sînt coliniare.

Am utilizat, în ultima parte a demonstrației, *asemănarea a două triunghiuri* cu interpretarea raportului lor de asemănare.

10. *Se dă triunghiul ABC . Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare al cercului circumscris triunghiului pe laturile triunghiului sînt trei puncte coliniare.*

Rezolvare. Demonstrația se face pe baza proprietăților patrulaterului inscriptibil. Notăm cu D , E și F picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare M al cercului respectiv pe laturile BC , AB și AC ale triunghiului (fig. IV. 32).

Patrulaterul $BEMD$ este inscriptibil avînd două unghiuri opuse suplementare (unghiurile din D și E) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$.

Patrulaterul $DMCF$ este inscriptibil deoarece diagonalele (CD și FM) fac unghiuri egale cu laturile opuse DM și CF ale patrulaterului $\Rightarrow \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

Pe de altă parte în triunghiurile dreptunghice BEM și CFM avem $\sphericalangle EBM = \sphericalangle MCF$ pe baza proprietății unghiului exterior al patrulaterului înscris $ABMC \Rightarrow \sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ fiind complemente de unghiuri egale. De aici rezultă egalitatea unghiurilor 1 și 3 care au vîrfurile comune D , o latură comună (latura BC), fiind așezate de o parte și de alta a acestei laturi.

Același raționament ca și în cazul problemelor 7 și 8 conduce la concluzia că punctele D , E , F sînt coliniare și dreapta pe care se află ele situate este numită în geometrie *dreapta lui Simson*.

11. *Două cercuri egale se taie în punctele A și B . Din A drept centru și cu o rază arbitrară se descrie un alt cerc care le taie pe primele două în patru puncte. Să se demonstreze că punctul B și două dintre punctele de intersecție ale cercului al treilea sînt coliniare.*

Rezolvare. $AC = AD$ ca raze în cercul al treilea (fig. IV. 33). Aceste raze egale sînt coarde egale în cercurile egale O_1 și $O_2 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AD}$ și deci arcele au aceeași măsură. Rezultă că unghiul ABD (înscris în cercul O_1) are aceeași mărime ca și unghiul ABC (înscris în cercul O_2). Aceste unghiuri egale au vîrfurile comune (B), o latură comună (AB) și sînt așezate de aceeași parte a laturii comune, deci laturile BC și BD se suprapun rezultînd că punctele B , D și C sînt coliniare.

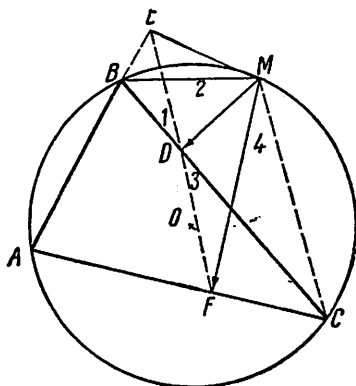


Fig. IV. 32

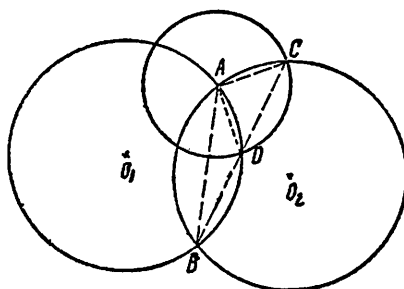


Fig. IV. 33

Cu centrul în A și cu o rază egală cu $b = 3$ cm descriem un arc de cerc care intersectează dreapta BD în două puncte: C_1 și C_2 .

Am obținut astfel două triunghiuri, ABC_1 și ABC_2 care răspund problemei noastre.

Discuție. Să judecăm dacă problema este totdeauna posibilă, adică dacă putem face construcția triunghiului cu orice date.

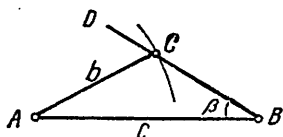


Fig. IV. 39

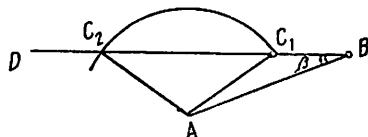


Fig. IV. 40

— Latura AB , alăturată unghiului cunoscut, o putem construi întotdeauna, oricare ar fi mărimea ei.

— Unghiul ABC poate fi construit cu vârful în B , oricare ar fi mărimea lui (în afară de cazul când $\beta = 0$ sau 180°).

— Când luăm în compas mărimea laturii AC , opusă unghiului dat, și descriem cercul cu centrul în vârful A , trebuie ca acest cerc să taie a doua latură a unghiului B , pentru a putea determina vârful al treilea al triunghiului; adică lungimea acestei laturi trebuie să fie mai mare sau cel puțin egală cu distanța vârfului A la latura BD . Deducem de aici că sînt posibile mai multe cazuri.

1) Dacă latura opusă unghiului dat este egală cu această distanță, cercul atinge latura BD într-un singur punct. Avem o singură soluție, și anume un triunghi dreptunghic.

2) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mare decît această distanță, avem două soluții diferite (așa cum s-a întîmplat cu datele de mai sus), dar avem de observat că $AC_1 = AC_2$.

3) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mică decît această distanță, triunghiul nu se închide și construcția nu se poate face.

5. Să se ducă într-un cerc o coardă paralelă cu o dreaptă dată și care să aibă o lungime dată l .

Rezolvare. Fie Δ dreapta dată (fig. IV. 41). Dintr-un punct arbitrar M , luat pe cercul O , descriem un arc de cerc cu raza l . Fie N unul din punctele unde acest arc de cerc taie cercul O .

Am fixat astfel pe cercul O o coardă MN a cărei lungime este l . Ea nu este însă paralelă cu Δ .

Acum trebuie să o așezăm astfel ca să fie paralelă cu Δ .

Dacă ducem din O o perpendiculară OP pe MN și din O ca centru descriem un cerc cu raza OP observăm că coarda MN este tangentă la acest cerc și că orice coardă a primului cerc tangentă la cel de-al doilea are aceeași lungime l .

Atunci nu avem decît să construim o tangentă la cercul interior, paralelă cu dreapta Δ , construcție care se face ușor. Din O ducem o perpendiculară pe Δ . Ea va tăia cercul interior în punctele E și F .

Tangentele în E și F la cercul cel mic răspund problemei noastre, adică problema admite două soluții.

Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să ni se dea lungimea l mai mică decît diametrul cercului mare, fiindcă într-un cerc cea mai mare coardă este diametrul său.

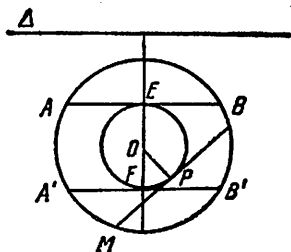


Fig. IV. 41

6. Fie AD o coardă în cercul de centru O ; o altă coardă, DC taie diametrul ce trece prin A în punctul B . Cum trebuie dusă coarda DC pentru ca $AB = AC$? Problema este totdeauna posibilă?

Rezolvare. Fie E punctul diametral opus lui A (fig. IV. 42). Presupunem problema rezolvată, adică am dus coarda DC astfel ca $AB = AC$. Atunci, triunghiul ABC este isoscel, de unde:

$$(1) \widehat{ACB} = \widehat{ABC}.$$

Însă, $\widehat{ABC} = \widehat{DBE}$ ca opuse la vîrf, iar

$$(2) \widehat{ACD} = \widehat{BED} \text{ ca unghiuri cu vîrfurile pe cerc și avînd}$$

aceeași măsură $\frac{\widehat{AD}}{2}$.

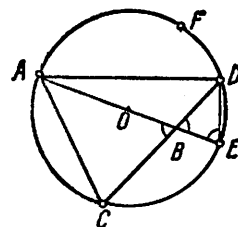


Fig. IV. 42

Urmează de aici că, dacă triunghiul ABC este isoscel, și triunghiul DBE este isoscel.

Fie acum F un punct pe arcul AD , astfel ca $\widehat{DE} = \widehat{DF}$. Însă:

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{DE}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{DF}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2}.$$

iar:

$$\widehat{ACD} = \frac{\widehat{DF}}{2} + \frac{\widehat{FA}}{2},$$

de unde reiese că $\widehat{AF} = \widehat{AC}$.

De aici rezultă construcția. Se ia $\widehat{DF} = \widehat{DE}$ și apoi $\widehat{AC} = \widehat{AF}$. Unind punctul C astfel aflat cu D , dreapta DC este coarda căutată. Ea va tăia pe AE în B , așa încît $AB = AC$.

Discuție. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca arcul DA să fie mai mare

decît arcul DE , căci numai așa F este cuprins între D și A . Cum însă $\widehat{DE} + \widehat{DA} = 180^\circ$, rezultă că lungimea coardei AD trebuie să fie mai mare decît latura pătratului înscris în cercul O . Nici în cazul cînd coarda AB este egală cu latura pătratului problema nu este posibilă, căci atunci punctul F cade chiar în A .

7. Se dau trei drepte (D_1) , (D_2) , (D_3) . Să se găsească pe dreapta (D_1) un punct astfel ca simetricul său față de dreapta (D_2) să fie așezat pe dreapta (D_3) .

Rezolvare. Ducem simetrica dreptei (D_1) față de dreapta (D_2) , găsim dreapta (D_4) , care taie pe (D_3) în punctul M' (fig. IV. 43). Simetricul punctului M' față de dreapta (D_2) va fi punctul M așezat pe dreapta (D_1) ; acesta este punctul căutat.

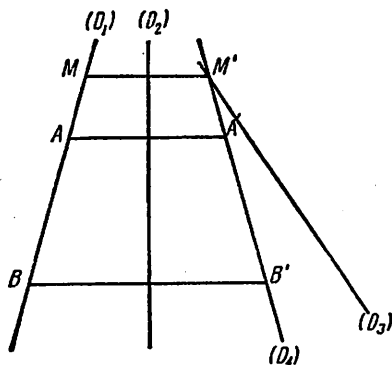


Fig. IV. 43

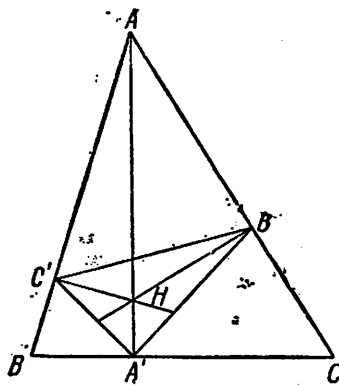


Fig. IV. 44

8. Să se construiască un triunghi cunoscînd picioarele înălțimilor.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată. A' , B' , C' sînt picioarele celor trei înălțimi (fig. IV. 44). Obținem triunghiul $A'B'C'$ ortic triunghiului cerut. Înălțimile AA' , BB' , CC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$. Deducem construcția:

- Se construiește triunghiul $A'B'C'$.
- Bisectoarele celor trei unghiuri A' , B' , C' se întâlnesc în H (ortocentrul).
- În A' , B' , C' ducem perpendiculare la aceste trei bisectoare și obținem astfel virfurile A , B , C .

9. Să se construiască un triunghi dreptunghic când se cunosc înălțimea și mediana care pleacă din vârful unghiului drept.

Rezolvare.

Presupunem problema rezolvată și analizăm figura IV. 45.

În triunghiul ABC cunoaștem înălțimea AD și mediana AA' .

De aici rezultă modul de construcție:

— Putem construi triunghiul dreptunghic ADA' , în care cunoaștem cateta AD și ipotezuza AA' .

— Știm că în orice triunghi dreptunghic mediana $AA' = \frac{BC}{2}$, deci putem construi $A'B$ și $A'C$, fiecare egal cu AA' , obținând astfel virfurile triunghiului.

10. Să se construiască triunghiul ABC , cunoscând mijloacele B' , C' ale laturilor AC și AB , precum și piciorul D al înălțimii care cade pe latura BC .

Rezolvare.

Presupunem problema rezolvată și fie ABC , triunghiul cerut (fig. IV. 46).

În acest triunghi cunoaștem D , piciorul înălțimii AD , B' , mijlocul laturii AC și C' , mijlocul laturii AB . Analizând figura, se vede ușor că A este simetricul lui D față de linia mijlocie $B'C'$.

Din cele constatate deducem modul de construcție:

- Unim B' cu C' .
- Construim punctul A simetric cu D față de $B'C'$.
- Ducem în D o perpendiculară pe AD .
- Dreapta AC' taie această perpendiculară în B .
- Dreapta AB' va tăia această perpendiculară în C .

Triunghiul ABC astfel construit corespunde datelor cerute în problemă.

11. Să se construiască un triunghi cunoscând două unghiuri și înălțimea dusă din vârful unghiului al treilea.

Rezolvare.

În triunghiul ABC (fig. IV. 47) cunoaștem unghiul B , unghiul C și înălțimea AA' . Se vede ușor că, ducând înălțimea AA' , obținem două triunghiuri dreptunghice: triunghiul

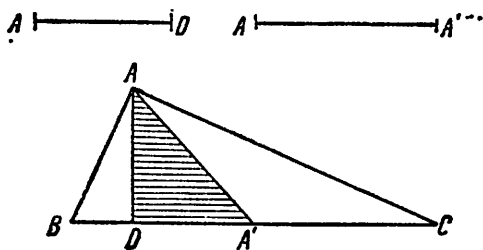


Fig. IV. 45

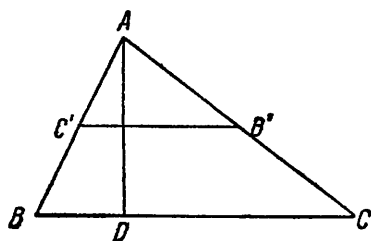


Fig. IV. 46

$AA'B$ și triunghiul $AA'C$, cunoscând în fiecare din ele cateta AA' și unghiul B , respectiv unghiul C . De aici deducem modul de construcție:

- Construim unghiul B .
- Construim o paralelă la una din laturile unghiului, la o distanță cit înălțimea dată care taie a doua latură a unghiului B în vârful A .

- Perpendiculara AA' va fi înălțimea triunghiului cerut.

- În punctul M , luat arbitrar pe prima latură a unghiului, construim un unghi egal cu unghiul C .

- Din A ducem prin mișcare de translație o paralelă la a doua latură a acestui unghi și obținem astfel al treilea vîrf C al triunghiului.

A, B, C sînt vîrfurile triunghiului cerut.

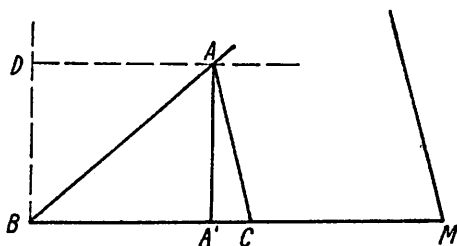


Fig. IV. 47

12. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscând ipotenuza și înălțimea, corespunzătoare ei.

Rezolvare. Construcția figurii fiind ușoară, nu mai este nevoie să presupunem problema rezolvată, ci trecem direct la construcție (fig. 82).

- Construim ipotenuza BC (dată).
- Construim un semicerc cu diametrul BC .
- Ducem în B o perpendiculară pe BC .
- Luăm $BD = AA'$ (dată).
- Din D ducem o paralelă la BC , care taie cercul în punctele A și A' .

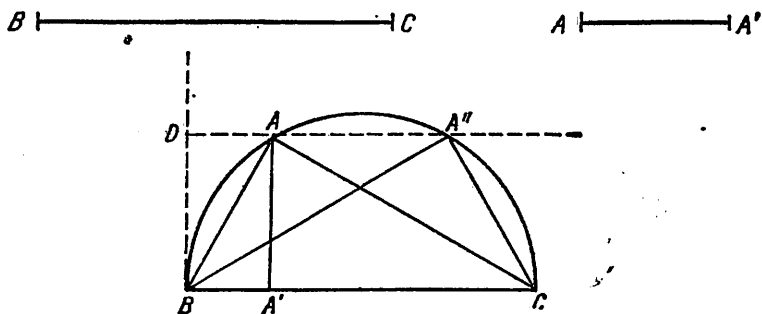


Fig. IV. 48

— Triunghiul BAC și triunghiul $BA'C$ sînt soluțiile problemei.

Discuție. Notăm $R = \frac{BC}{2}$.

Dacă $AA' < R$, avem două soluții.

Dacă $AA' = R$, avem o singură soluție.

Dacă $AA' > R$, triunghiul nu se poate construi.

13. Să se construiască un triunghi ABC , cunoscând mărimile laturilor AB, BC și mediana AA' .

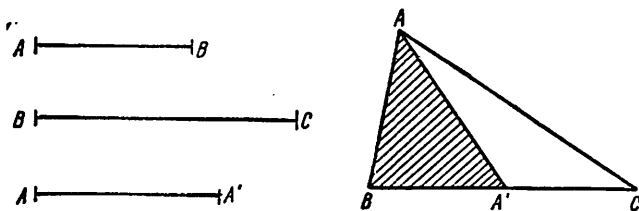


Fig. IV. 49

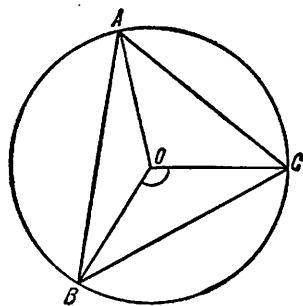


Fig. IV. 50

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată. La triunghiul ABC (fig. IV. 49) cunoaștem AB , BC și mediana AA' .

Din analiza figurii putem vedea modul de construcție:

— Construim triunghiul ABA' , în care cunoaștem AB , $BA' = \frac{BC}{2}$ și AA' deci cele trei laturi.

— $A'C = BA' = \frac{BC}{2}$.

— Unim A cu C , triunghiul astfel construit corespunde condițiilor date.

14. Să se construiască un triunghi cunoscând unghiurile și raza cercului circumscris.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată.

Analizând figura IV. 50 se vede ușor că unghiul la centru BOC este dublul unghiului A ; analog pentru celelalte unghiuri.

De aici se deduce modul de construcție:

— Construim cercul cu raza dată R .

— Ducem o rază arbitrară OB .

— Construim unghiul la centru, de mărime $2\hat{A}$, și obținem vârful C al triunghiului.

— Construim în continuare al doilea unghi la centru, de mărime $2\hat{B}$, și obținem al treilea vârf A .

Unim A cu B și cu C și obținem triunghiul cerut.

b) Probleme propuse

(cele cu* sint pentru cercul de matematică)

15. Se dau două unghiuri ale unui triunghi. Să se construiască cel de-al treilea unghi.
16. Se dă un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic. Să se construiască celălalt unghi ascuțit.
17. Să se ducă o dreaptă paralelă cu o dreaptă dată, care să fie la o distanță dată de prima dreaptă.
18. Să se împartă în două părți egale un unghi al cărui vârf nu încapă în cadrul foi de desen.
19. Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să formeze cu o dreaptă dată un unghi dat.

20. Se iau două drepte xy , $x'y'$ și un punct P ; să se ducă prin acest punct o secantă, astfel încît partea ei cuprinsă între dreptele date să fie împărțită în punctul P în două părți egale.
21. Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă astfel încît segmentul ei, cuprins între două drepte paralele date, să fie egal cu un segment dat.
22. Să se așeze un segment de dreaptă de lungime dată între laturile unui unghi ascuțit dat, astfel încît el să fie perpendicular pe una din laturile unghiului.
23. Să se așeze un segment de dreaptă de lungime dată între laturile unui unghi dat, paralel cu o dreaptă dată, care întîlnește amîndouă laturile unghiului dat.
24. *Să se așeze un segment de dreaptă de lungime dată între laturile unui unghi dat, astfel încît el să taie pe laturile unghiului segmente egale.
25. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cunoscînd un unghi ascuțit și cateta opusă lui.
26. Să se construiască un triunghi, cunoscînd două unghiuri și latura opusă unuia dintre unghiurile cunoscute.
27. Să se construiască un triunghi isoscel, cunoscînd unghiul de la vîrf și baza.
28. Să se construiască un triunghi isoscel, cunoscînd un unghi de la bază și înălțimea coborîtă pe una din laturile egale.
29. Să se construiască un triunghi isoscel, cunoscînd una dintre laturile egale și înălțimea coborîtă pe ea.
30. Să se construiască un triunghi echilateral, cunoscînd înălțimea lui.
31. Să se împartă un unghi drept în trei părți egale (cu alte cuvinte să se construiască un unghi egal cu $\frac{1}{3}$ dr.).
32. Să se construiască un triunghi, cunoscînd baza, înălțimea corespunzătoare și o altă latură.
33. Să se construiască un triunghi, cunoscînd baza, înălțimea și un unghi de la bază.
34. *Să se construiască un triunghi, cunoscînd un unghi și cele două înălțimi coborîte pe laturile lui.

Indicație. Se construiește triunghiul dreptunghic, în care se cunoaște unghiul dat și una din înălțimile triunghiului; cu a doua înălțime ca rază se duce un cerc tangent la ipotenuza triunghiului dreptunghic construit.

35. *Să se construiască un triunghi, cunoscînd o latură, suma celorlalte două laturi și înălțimea coborîtă pe una din ele.

Indicație. Se construiește triunghiul dreptunghic care are ca ipotenuză latura cunoscută și o catetă înălțimea dată; prelungim cateta a doua cu un segment astfel ca să obținem suma laturilor date; se folosește apoi mediatoarea pentru vîrfurile al treilea.

36. Să se construiască un triunghi, cunoscind înălțimea, perimetrul și un unghi de la bază.

Indicație. Se ia un segment egal cu perimetrul dat; la o distanță egală cu înălțimea dată se duce o paralelă; se construiește triunghiul dreptunghic în care cunoaștem unghiul dat și o catetă egală cu înălțimea dată; se duce apoi mediatoarea segmentului, se unește vârful triunghiului dreptunghic cu extremitatea segmentului egal cu perimetrul, determinând astfel al treilea vîrf al triunghiului.

37. * Să se ducă într-un triunghi o dreaptă paralelă cu baza, astfel încît segmentul cuprins între celelalte două laturi să fie egal cu suma părților acestor laturi alăturate bazei.

Indicație. Se vor duce bisectoarele unghiurilor de la baza triunghiului.

38. Să se determine pe o dreaptă dată un punct care să fie situat la cea mai mică distanță de un cerc dat.

Indicație. Se va duce tangenta paralelă la dreapta dată.

39. * Să se ducă printr-un punct dat, în interiorul unui cerc, o coardă care să fie împărțită de acest punct în două părți egale.

40. Printr-un punct dat, pe latura unui unghi (punct considerat drept centru) să se descrie un cerc care să taie pe cealaltă latură a unghiului o coardă de o lungime dată.

41. Să se construiască un cerc de rază dată, al cărui centru să se afle pe o latură a unui unghi dat și care să taie pe cealaltă latură a unghiului o coardă de o lungime dată.

42. Să se construiască un cerc de rază dată care să fie tangent la o dreaptă dată într-un punct dat.

43. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat A și care să fie tangent la o dreaptă dată într-un punct B al acestei drepte.

44. Să se construiască un cerc tangent la laturile unui unghi dat, iar la una din ele, într-un punct dat.

Indicație. Se va folosi bisectoarea unghiului dat.

45. Se dă un punct situat între două drepte paralele. Să se ducă un cerc care să treacă prin acest punct și să fie tangent la cele două drepte date.

46. Să se ducă o tangentă la un cerc care să taie o dreaptă sub un unghi dat. Cîte soluții sînt?

47. Dintr-un punct dat, exterior unui cerc, să se ducă o secantă astfel încît partea ei interioară să fie egală cu un segment dat. Să se facă discuția problemei.

48. Să se construiască un cerc de rază dată, care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la o dreaptă dată. Problema este întotdeauna posibilă?

Indicații. Se duce o paralelă la dreapta dată la o distanță egală cu raza dată. Din punctul dat se descrie un cerc cu raza dată care intersectează paralela ducă determinînd centrul cercului cerut.

49. Să se determine pe o dreaptă dată un punct astfel încît tangentele duse din el la un cerc dat să fie de o lungime dată.

50. Să se construiască un triunghi, cunoscînd un unghi și două înălțimi, dintre care una este dusă din vârful unghiului dat.

Indicație. Se va construi inițial un triunghi dreptunghic care are o catetă egală cu o înălțime dată și un unghi dat.

51. Se dau două puncte; să se ducă o dreaptă astfel încît perpendicularele din aceste puncte, coborîte pe ea, să fie de lungimi date.

52. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la un cerc dat, într-un punct dat.

53. Să se construiască un cerc care să fie tangent la două drepte paralele date și la un cerc dat situat între ele.

Indicație. Fie d , distanța între cele două paralele și r raza cercului dat. Se construiește un cerc concentric cu cel dat de rază $R = \frac{d}{2} + r$, ce intersectează paralela dusă între cele două drepte la distanța de $\frac{d}{2}$.

Punctele de intersecție sînt centrele cercului cerut.

54. *Să se construiască un cerc de o rază dată, care să fie tangent la un cerc dat și să treacă printr-un punct dat. Se vor cerceta trei cazuri: 1) punctul dat este exterior cercului; 2) pe cerc; 3) în interiorul cercului.

55. Să se construiască un cerc de rază dată, care să fie tangent la o dreaptă dată și la un cerc dat.

Indicație. Se duce o paralelă la dreapta dată la distanța $d =$ raza dată și din centrul cercului dat se descrie un cerc cu rază cît raza cercului dat plus raza dată. Se determină astfel centrul cercului cerut.

56. *Să se construiască un cerc de rază dată, care să taie pe laturile unui unghi dat coarde de lungimi date.

57. Să se construiască un cerc tangent la un cerc dat, într-un punct dat și la o dreaptă dată (două soluții).

58. *Să se construiască un cerc tangent la o dreaptă dată, într-un punct dat și la un cerc dat (două soluții).

59. Să se construiască un cerc tangent la două cercuri date, punctul de contact cu unul din ele fiind dat. Se vor cerceta trei cazuri:

1) Cercul căutat se află în afara cercurilor date.

2) Unul din cercurile date se află în afara cercului căutat, iar celălalt în interiorul lui.

3) Ambele cercuri date se află în interiorul cercului căutat.

60. *Să se construiască un patrulater cunoscînd trei laturi și ambele diagonale.

Indicație. Construim triunghiul format de două laturi consecutive și diagonala dată, apoi se determină al patrulea vîrf al patrulaterului.

61. Să se construiască un paralelogram, cunoscînd laturile și una din diagonale.

62. Să se construiască un paralelogram, cunoscînd o latură și cele două diagonale.

Indicație. Se construiește triunghiul format de jumătățile diagonalelor și latura dată.

63. Să se construiască un paralelogram, cunoscând cele două diagonale și unghiul dintre ele.
64. Să se construiască un paralelogram, cunoscând baza, înălțimea și o diagonală.
65. Să se construiască un dreptunghi, cunoscând o diagonală și unghiul dintre diagonale.

Indicație. Se construiește triunghiul format de jumătățile diagonalelor și unghiul dat.

66. Să se construiască un romb, cunoscând latura și o diagonală.
67. Să se construiască un romb, cunoscând cele două diagonale.
68. Să se construiască un romb, cunoscând înălțimea și o diagonală.
69. Să se construiască un romb, cunoscând un unghi și diagonala care trece prin vârful acestui unghi.
70. Să se construiască un romb, cunoscând o diagonală și unghiul opus ei.
71. Să se construiască un romb, cunoscând suma diagonalelor și unghiul format de o diagonală cu latura rombului.

Indicație. Se reduce la construirea unui triunghi când se cunoaște suma a două laturi și un unghi.

72. Să se construiască un pătrat, cunoscând diagonala.
73. *Să se construiască un trapez, cunoscând o bază, un unghi alăturat și cele două laturi neparalele (pot fi două soluții, una sau nici una).
74. Să se construiască un trapez, cunoscând diferența bazelor celor două laturi neparalele și o diagonală.
75. Să se construiască un trapez, cunoscând cele patru laturi. Este problema totdeauna posibilă?
76. *Să se construiască un trapez, cunoscând o bază, înălțimea și cele două diagonale.
77. *Să se construiască un pătrat, cunoscând suma formată din latura și diagonala sa.
78. *Să se construiască un pătrat, cunoscând diferența dintre diagonală și latura sa.
79. Să se construiască un paralelogram, cunoscând cele două diagonale și înălțimea.
80. Să se construiască un paralelogram, cunoscând o latură, suma diagonalelor și unghiul dintre ele.
81. Să se construiască un triunghi, cunoscând două laturi și mediana dusă pe latura a treia.
82. Să se construiască un triunghi, cunoscând baza, înălțimea și mediana dusă pe una din celelalte laturi.
83. Să se construiască un triunghi dreptunghic, cunoscând ipotenuza și diferența catetelor.

CUPRINS

I. MULȚIMI

1. Simboluri	4
2. Propoziții	6
3. Funcții	7

Clasa a V-a

I. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Exerciții și probleme cu numere naturale.....	10
2. Operații cu fracții zecimale și ordinare.....	23
3. Exerciții și probleme recapitulative.....	28

Clasa a VI-a

ARITMETICĂ

I. EXERCITII ȘI PROBLEME

1. Exerciții cu fracții ordinare și zecimale.....	38
2. Exerciții și probleme diverse.....	44

GEOMETRIE

II. PROBLEME DE GEOMETRIE

1. Unghiuri	52
2. Triunghiuri	54
3. Linii importante în triunghi.....	55
4. Egalitatea triunghiurilor	58
5. Suma unghiurilor unui poligon convex.....	60
6. Drepte paralele	61
7. Patrulater	62
8. Probleme recapitulative	64

Clasa a VII-a

ALGEBRĂ

I. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Operații cu numere pozitive și negative.....	72
2. Exerciții de calcul algebric.....	73
3. Înmulțirea expresiilor algebrice.....	76
4. Împărțirea unui polinom cu un monom.....	77
5. Descompunerea în factori	78
6. Simplificarea fracțiilor algebrice.....	80
7. Operații cu fracții algebrice.....	85
8. Ecuații de gradul I cu o necunoscută.....	86
9. Inegalități, inecuații	90
10. Probleme de gradul I cu o necunoscută.....	92

GEOMETRIE

II. PROBLEME DE GEOMETRIE PLANĂ.....	105
III. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE.....	122

Clasa a VIII-a

ALGEBRĂ

I. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

1. Împărțirea a două polinoame.....	135
2. Exerciții în care se utilizează calcul prescurtat.....	136
3. Simplificarea fracțiilor algebrice	139
4. Operații cu fracții algebrice.....	140
5. Valoarea numerică a unei expresii algebrice.....	144
6. Exerciții recapitulative	147
7. Sisteme de ecuații de gradul I cu două și trei necunoscute	152
8. Sisteme de inecuații de gradul I.....	160
9. Exerciții recapitulative	161
10. Probleme care conduc la sisteme de ecuații de gradul I cu două și trei necunoscute	180
11. Ecuații de gradul II cu o necunoscută.....	196
12. Graficul funcției de gradul II.....	198
13. Probleme care conduc la ecuații de gradul II.....	200

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

II. PROBLEME DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1. Probleme	204
2. Probleme care se rezolvă cu ajutorul algebrei	213

III. PROBLEME ȘI EXERCIIȚII RECAPITULATIVE

1. Probleme de geometrie plană	224
2. Probleme de geometrie în spațiu.....	233

IV. EXERCIIȚII ȘI PROBLEME PENTRU CERURILE DE MATEMATICĂ

266

V. SISTEME DE NUMERAȚIE.....

290

VI. PROBLEME PENTRU UTILIZAREA DIFERITELOR METODE ARITMETICE

1. Generalizarea și discuția problemelor	297

VII. PROBLEME DIVERSE

1. Probleme de coliniaritate	302
2. Probleme de construcții geometrice	306

Nr. colilor de tipar : 20
Tiraj : 259 065 ex.
Bun de tipar : 13.X.1975



Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII“
București — R.S.R.
Com. nr. 50 455/6 125