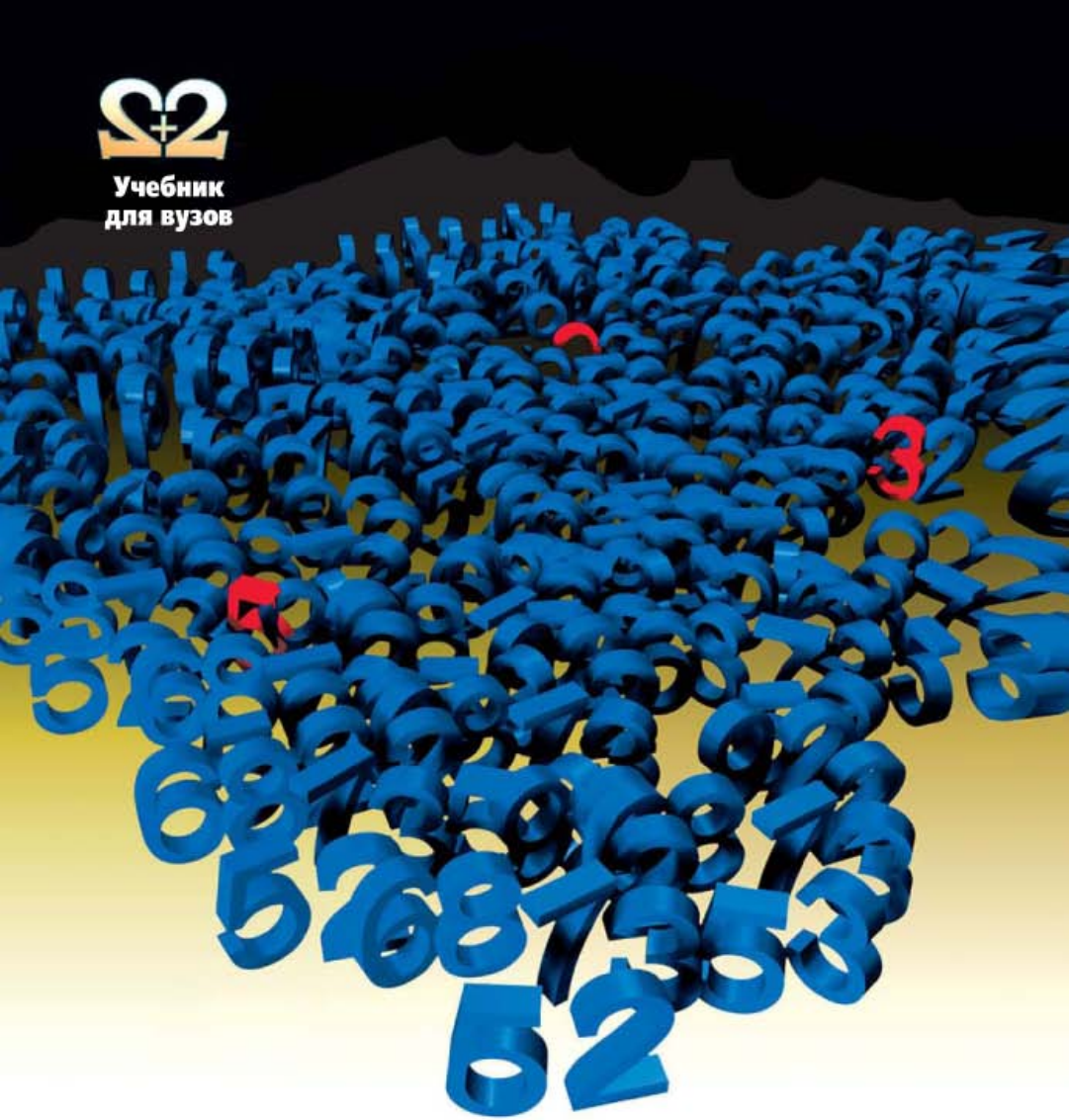
Учебник
для вузов



В.В. Афанасьев

Теория вероятностей

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
ВЛАДОС

Учебник для вузов

В.В. Афанасьев

Теория вероятностей

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика»

Москва

ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС

2007

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1
А94

Афанасьев В.В.

А94 Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика» / В.В. Афанасьев. — М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. — 350 с. — (Учебник для вузов).

ISBN 978-5-691-01525-0.

Агентство CIP РГБ.

В пособии изложены основные идеи теории вероятностей, математической статистики, энтропии и информации. Каждая глава содержит перечень опорных понятий, теорем, умений, навыков, методов и алгоритмов. В начале параграфов даются краткие теоретические сведения, содержание которых раскрывается вопросами для самоконтроля, решенными примерами и трехуровневой системой задач.

Учебное пособие адресовано студентам высших учебных заведений.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1

ISBN 978-5-691-01525-0

© Афанасьев В.В., 2007
© ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 2007
© Оформление. ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС», 2007

Содержание

Введение 6

Глава I. Элементы комбинаторики 9
1.1. Опорная таблица 10
1.2. Методы 12
1.3. Алгоритмы 12
1.4. Спираль фундирования понятия комбинаторной задачи 12
§ 1. Выборки и случай 13
§ 2. Основные правила комбинаторики 16
§ 3. Методы комбинаторики 20
§ 4. Графы 25

Глава II. Случайные события 32
2.1. Опорная таблица 33
2.2. Методы 35
2.3. Алгоритмы 35
2.4. Спираль фундирования понятия вероятности случайного события 35
§ 1. Классическая вероятность 36
§ 2. Условные вероятности 43
§ 3. Формула полной вероятности и формула Байеса 48
§ 4. Схема Бернулли 53
§ 5. Приближенные формулы для схемы Бернулли 57
§ 6. Вероятность и числовые ряды 61
§ 7. Цепи Маркова 70
§ 8. Аксиоматика теории вероятностей 78

Глава III. Случайные величины 84
3.1. Опорная таблица 85
3.2. Методы 89

3.3. Алгоритмы ... 89
3.4. Спираль фундирования случайных величин ... 89
§ 1. Закон и функция распределения дискретной случайной величины ... 90
§ 2. Числовые характеристики дискретных случайных величин ... 95
§ 3. Классические распределения ... 102
§ 4. Случайные величины и азартные игры ... 109
§ 5. Закон больших чисел ... 117
§ 6. Непрерывные случайные величины и их характеристики ... 123
§ 7. Нормальный закон распределения ... 130
§ 8. Двумерные случайные величины ... 135
§ 9. Характеристики двумерных случайных величин ... 141
§ 10. Корреляционный граф многомерных случайных величин ... 148

Глава IV. Энтропия и информация ... 156
4.1. Опорная таблица ... 156
4.2. Методы ... 159
4.3. Алгоритмы ... 159
4.4. Спираль фундирования энтропии и информации ... 159
§ 1. Энтропия как мера неопределенности ... 160
§ 2. Условные энтропии ... 164
§ 3. Энтропия случайных величин ... 170
§ 4. Энтропия цепей Маркова ... 173
§ 5. Количество информации ... 179
§ 6. Информация и логические задачи ... 184
§ 7. Кодирование и декодирование ... 190
§ 8. Блочные коды ... 196
§ 9. Коды Фано и Хаффмана ... 200

Глава V. Математическая статистика ... 208
5.1. Опорная таблица ... 209
5.2. Методы ... 213
5.3. Алгоритмы ... 213
5.4. Спираль фундирования выборочных характеристик ... 213
§ 1. Вариационный и статистический ряд ... 214

§ 2. Выборочные характеристики вариационного ряда 223
§ 3. Доверительный интервал 231
§ 4. Выборочный коэффициент корреляции 237
§ 5. Ранговая корреляция 248
§ 6. Статистические гипотезы 257
§ 7. Критерии Пирсона и Стьюдента 265
§ 8. Математическая статистика в психологии 277
§ 9. Статистические методы в педагогике 291

Ответы 305
Указатель обозначений 322
Приложения 327
Литература 349

Введение

В новых стандартах для средней (полной) школы введена стохастическая линия. Введение нового школьного предмета стохастики, который представляет собой соединение элементов теории вероятностей и математической статистики, предполагает и новые подходы к преподаванию одноименного курса в педагогическом вузе. Автор в течение двух десятилетий читал курс теории вероятностей с элементами математической статистики, исходя из посылки о широком применении изучаемого материала в разных областях науки, в практической деятельности человека и как предмет, способствующий развитию математической и общекультурной составляющей будущего учителя математики. Теперь добавляются и чисто профессиональные требования — овладение предметом, который студент математического отделения будет преподавать в школе.

Лаплас называл теорию вероятностей здравым смыслом, сведенным к исчислению, и говорил о ней, что «нет науки, более достойной наших размышлений», и что «было бы полезно ввести ее в систему народного просвещения». И этот призыв был наконец-то услышан в нашем обществе.

Вводимому курсу предписывается не только образовательное, но и большое воспитательное значение. Так, академик Б.Б. Голицын в начале XX в. говорил: «Признаю за таким курсом высокообразовательное значение, как введение ко всяким стохастическим исследованиям и методам, имеющим такое широкое применение в различных областях знания и в практической жизни. Большое значение имеет этот курс и для более сознательного и глубокого усвоения отечествоведения, этому курсу я придаю первенствующее значение в средней школе».

Особенностью авторского курса теории вероятностей является изложение предмета с систематическим использованием графов, что делает более наглядным и доступным рассматриваемый

материал. Эффективность применения графов в теории вероятностей демонстрируется, в частности, получением некоторых результатов из математического анализа (сходимость последовательностей, суммирование числовых рядов) вероятностными средствами. Успех применения графов можно объяснить тем, что они являются удобным языком (наряду с матричными записями и теоретико-множественным языком) для формулировки и эффективным инструментом для решения задач, относящихся к весьма широкому кругу научных проблем.

Предлагаемое пособие представляет собой проработанную в деталях совместную педагогическую деятельность преподавателя и студента. За счет уровневой теоретической и практической подготовки, фундирования школьных математических знаний, продуктивности методики преподавания устраняется формализм в усвоении материала, усиливаются логико-наглядные связи школьной и вузовской стохастической линии.

Академический материал курса теории вероятностей распределен по пяти главам: элементы комбинаторики, случайные события, случайные величины, энтропия и информация, математическая статистика. Каждая глава содержит несколько учебных элементов.

Фрейм базовых учебных элементов содержит опорную таблицу основных знаний, умений, навыков, методов и алгоритмов по курсу. Определен оптимальный объем учебной информации, необходимой для успешного освоения программного материала. Кодирование информации, использование символики математической логики для записи определений, теорем при достаточной информационной насыщенности фрейма создают определенную четкость, отражают сущность базовых понятий и утверждений. Указан конкретизирующий набор уровневых упражнений, задач и вопросов для самоконтроля.

Фрейм аннотированной учебной программы является звеном диагностируемого целеполагания будущего учителя математики для вероятностного образования и задает необходимый объем учебной информации. Предполагается, что овладение вероятностными методами, построение алгоритмов решения задач, их трансформация в другие разделы математики и дальнейшие обобщения способствуют творческой активности студентов.

По многим позициям пособие расширяет и углубляет традиционный материал стохастической линии физико-математического факультета высшего педагогического учебного заведения, в нем сделан акцент на использование методов математической

статистики в педагогике и психологии. Учитель математики имеет возможность использовать пособие для модернизации школьного курса стохастики, применить идею модульного построения курса в своей педагогической работе.

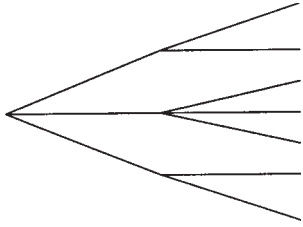
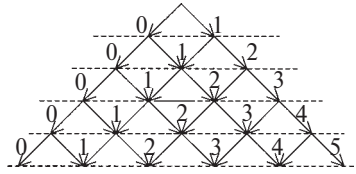
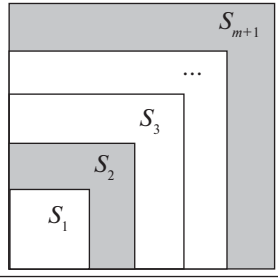
Глава I
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторная математика занимается в основном задачами о существовании и подсчете различных комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. Эту область математики так назвал Готфрид Вильгельм Лейбниц в 1666 г. в своей диссертации об искусстве комбинаторики, в которой он решает основные комбинаторные задачи, приводящие к биномиальным коэффициентам и к факториалу. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII в. Паскаль, Ферма, Яков Бернулли и Эйлер, рассматривая азартные игры и всевозможные лотереи. В XVIII—XIX вв. в германских государствах Европы была предпринята попытка создать (Гинденбург, Штейнер, Эшенбах, Роте) комбинаторный анализ как единую науку, чему помешали громоздкость символического аппарата и слабость его оперативно-вычислительных возможностей.

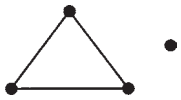
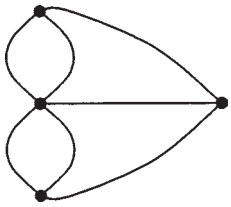
В связи с развитием вычислительной техники резко расширились возможности перебора и повысился интерес к дискретным моделям, что обусловило новый подъем комбинаторной математики. Комбинаторные методы применяются сейчас в теории кодирования, планировании эксперимента, топологии, математической логике, теории игр, кристаллографии, биологии, статистической физике, экономике и т. д.

В нашем случае комбинаторика является основой для изучения теории вероятностей и математической статистики.

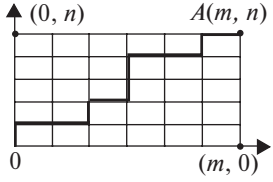
1.1. Опорная таблица

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Выборки	Основные правила комбинаторики $\lvert A+B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$, $A\cdot B = \varnothing$ $\lvert A\times B\rvert = \lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$	Выделять подмножества Строить дерево исходов 
Размещения Перестановки Сочетания	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ $\bar{A}_n^m = n^m$ $P_n = n!$ $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$ $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ $\bar{C}_m^m = C_{n+m-1}^m$	Подсчитывать число различных комбинаций Приводить геометрические иллюстрации комбинаторных утверждений
Треугольник Паскаля Производящие функции Свертка Вандермонда Линейные однородные рекуррентные соотношения Числа Фибоначчи	Свойства сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$ $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ $C_{m-1}^{m+1} + C_m^{m-1} + C_{m+1}^{m-1} + \ldots +$ $+C_{m+n-1}^{m-1} = C_{n+m}^m$ $\bar{C}_m^0 + \bar{C}_m^1 + \bar{C}_m^2 + \ldots +$ $+\bar{C}_m^n = \bar{C}_{m+1}^m$ Следствия: $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + m(m+1) = \dfrac{m(m+1)(m+2)}{3}$ $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + m(m+1)(m+2) = \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$	 Использовать орграф для получения свойств сочетаний Приводить геометрические интерпретации некоторых конечных сумм 

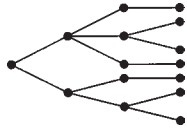
Окончание табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Линейные неоднородные рекуррентные соотношения	$1^2+2^2+\ldots+m^2=$ $=\frac{m(2m+1)(m+1)}{6}$ $1^3+2^3+\ldots+m^3=$ $=\frac{m^2(m+1)^2}{4}$	
Неориентированные и ориентированные графы	Каждый граф может быть уложен в трехмерном евклидовом пространстве	Определять инцидентность вершин и ребра, смежность вершин
Изоморфизм графов Деревья, связность	Любой простой граф с n вершинами и более чем $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребрами связен	 Строить графы Находить пути на графе
Эйлеровы графы	Связный граф является Эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая его вершина имеет четную степень	
Гамильтоновы графы	Если в простом графе с n вершинами $\rho(v)\geq\frac{n}{2}$ для любой вершины v, то граф является гамильтоновым	
Вероятностные графы		Строить вероятностные графы

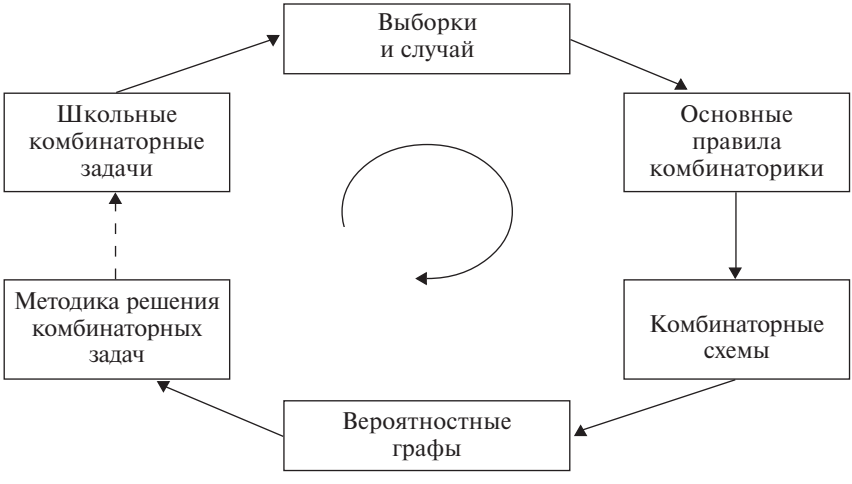
1.2. Методы

Геометрический	Рекуррентных соотношений	Производящих функций
	$f_n^r = \varphi\left(f_{n-1}^r, f_n^{r-1}, \ldots\right)$	$\prod_{r=1}^{n}(1+x_r t) = \sum_{r=0}^{n} a_r t^r$
Метод математической индукции $n := n+1$		

1.3. Алгоритмы

Определение упорядоченности выборки	Выборки без повторений (с повторениями)	Построение графов испытаний
размещения [+] перестановки [+] сочетания [—]	$A_n^m \left(\bar{A}_n^m\right)$ $P_n \left(P_{m_1, m_2, \ldots, m_n}\right)$ $C_n^m \left(\bar{C}_n^m\right)$	

1.4. Спираль фундирования понятия комбинаторной задачи



§ 1. Выборки и случай

Понятие выборки — одно из основных в комбинаторике, теории вероятностей и математической статистике, а подсчет числа выборок исторически был одной из первых задач комбинаторики. В типичных задачах по теории вероятностей подсчитывается число различных вариантов (выборок), а через них и вероятностей событий, связанных в большинстве случаев с бросанием монеты, кубика или со случайным выбором шаров из урны. Одним из первых занялся подсчетом различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Приведем здесь одну из таких задач.

Пример 1. На какую сумму очков, выпадающих при подбрасываниях двух костей, разумно сделать ставку?

Решение. Перечислим возможные суммы и способы их получения.

2 = 1 + 1; **3** = 1 + 2 = 2 + 1; **4** = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2; **5** = 1 + 4 = = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2; **6** = 1 + 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3; **7** = 1 + 6 = 6 + 1 = 2 + 5 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4; **8** = 2 + 6 = 6 + 2 = = 3 + 5 = 5 + 3 = 4 + 4; **9** = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4; **10** = 4 + 6 = = 6 + 4 = 5 + 5; **11** = 5 + 6 = 6 + 5; **12** = 6 + 6.

Откуда видно, что целесообразно сделать ставку на выпадение в сумме **7** очков, поскольку она получается наибольшим количеством вариантов, а, следовательно, имеет больше шансов на выпадение, чем другие суммы.

Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр — определения, сколькими способами можно получить данное число очков, бросая несколько костей, как в предыдущем примере, или сколькими способами можно получить тот или иной набор карт. Размышления над анализом азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики и развивавшейся одновременно с ней теорией вероятностей. Такой подход логично продолжить и для рассмотрения современных игр.

Пример 2. Является ли выбор с помощью «считалки» случайным и справедливым?

Пусть два брата считаются до числа, которое оказалось суммой «выброшенных» пальцев одной руки каждого. Тот, на котором остановился счет, выходит, а оставшийся убирает квартиру. Играет ли роль, с кого начинать счет?

Решение. Очевидно, что выбор таким образом дежурного является случайным. Обратим внимание на то, что первый, с кого

начинается счет, не убирает квартиру, если сумма «выброшенных» пальцев окажется нечетной, а второй — если четной.

I игрок: $3 = 1 + 2 = 2 + 1$
$5 = 1 + 4 = 4 + 1 = 2 + 3 = 3 + 2$
$7 = 2 + 5 = 5 + 2 = 3 + 4 = 4 + 3$
$9 = 4 + 5 = 5 + 4$

II игрок: $2 = 1 + 1$
$4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2$
$6 = 1 + 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3$
$8 = 3 + 5 = 5 + 3 = 4 + 4$
$10 = 5 + 5$

Для первого игрока получили 12 благоприятных ему исходов, а для второго — 13, следовательно, при игре в «считалки» предпочтительней стоять вторым.

Элементы комбинаторики в данной работе играют вспомогательную роль при вычислении вероятностей **случайных событий**. Событие, которое может произойти или не произойти, называют случайным событием. Примерами таких событий являются попадание стрелка в мишень при данном выстреле, извлечение туза из колоды карт, выигрыш билета в очередном розыгрыше лотереи и т. д.

В трактате Я. Бернулли «Искусство предположений» (1713) введено понятие вероятности, хотя и в далеко не совершенной форме, а в 30-х годах XVIII столетия классическое понятие вероятности стало общеупотребительным, и никто из ученых этих лет не мог бы ограничиться только подсчетом числа благоприятствующих событию шансов. Под вероятностью случайного события А стали понимать **число $P(A)$**, равное отношению числа благоприятствующих ему исходов к общему числу несовместных, единственно возможных и равновозможных исходов.

Пример 3. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3, 4 и 5. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на 3?

Решение. Пусть событие A = {сумма чисел на трех карточках делится на 3}. Три произвольные карточки можно выбрать 10 способами:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5).

Из них 4 карточки удовлетворяют событию A = {(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)}. Следовательно, по определению вероятности

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Пример 4. Монета бросается три раза. Найдите вероятности следующих событий:

A = {число выпадений «герба» больше числа выпадений «решки»};

B = {выпадает в точности два «герба»};

C = {результаты всех бросаний одинаковы}.

Решение. Перечислим все возможные исходы данного испытания:

(Р, Р, Р), (Р, Р, Г), (Р, Г, Р), (Г, Р, Р), (Р, Г, Г), (Г, Р, Г), (Г, Г, Р), (Г, Г, Г).

Их получилось 8. Тогда

A = {(Р, Г, Г), (Г, Р, Г), (Г, Г, Р), (Г, Г, Г)} и $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$;

B = {(Р, Г, Г), (Г, Р, Г), (Г, Г, Р)}, $P(B)=\frac{3}{8}$;

C = {(Р, Р, Р), (Г, Г, Г)}, $P(C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

Пример 5. Как выбрать справедливо случайным образом один из восьми фантов, если имеется только одна монета?

Решение. Подбрасывая монету три раза, в предыдущем примере получили 8 исходов, каждому из которых поставим в соответствие один из 8 фантов. Например, пронумеруем фанты в двоичной системе от 000_2 до 111_2, выпадение «решки» обозначим 0, а «герба» — 1. Тогда получаем взаимно однозначное соответствие между фантами и исходами трех подбрасываний монеты.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры случайных событий.
2. Какие числовые характеристики по результатам контрольных работ находит учитель математики?
3. Выберите из нескольких множеств упорядоченные и неупорядоченные наборы.
4. Постройте дерево исходов для трех подбрасываний монеты.
5. Приведите примеры возможных, невозможных и достоверных событий, попарно несовместных событий.
6. В чем заключалась ошибка Д'Аламбера?
7. Какие типы задач рассматриваются в комбинаторике?
8. В каком случае шанс выиграть главный приз больше: в спортлото или в спортлото-2?

Задачи

1. Из города *A* в город *B* ведут 4 дороги, а из города *B* в город *C* ведут 3 дороги. Сколько путей, проходящих через город *B*, ведет из *A* в *C*?

2. Сколько имеется трехзначных чисел, которые делятся на пять?

3. Бросаем три игральные кости. На какую сумму очков разумно поставить?

4. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря равно 5, равно 31?

5. Из полной игры лото наудачу извлекается один бочонок. На бочонках написаны числа от 1 до 90. Какова вероятность того, что на извлеченном бочонке написано простое число?

6. Монета и игральная кость брошены одновременно. Каким образом можно описать все способы падения? Подсчитать их число.

7*. Сколькими способами можно посадить за круглый стол *n* мужчин и *n* женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

8*. В турнире, где разыгрывается приз по олимпийской системе, участвуют 16 команд. Какова вероятность того, что две сильнейшие команды встретятся в финале?

9**. После перетасовки четырех тузов из колоды карт берутся два из них. Как с помощью этих тузов имитировать бросание игрального кубика?

10**. Сколько делителей имеет число $m_1^{\alpha_1} \cdot m_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot m_n^{\alpha_n}$, где m_i — различные простые числа, а α_i — натуральные числа? Чему равна сумма делителей?

§ 2. Основные правила комбинаторики

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух **основных правил** — правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект *A* можно выбрать *n* способами, а другой объект *B* можно выбрать *m* способами, то выбор «либо *A*, либо *B*» можно осуществить $n + m$ способами.

Правило произведения. Если объект *A* можно выбрать *n* способами, а после каждого такого выбора другой объект *B* можно выбрать (независимо от выбора объекта *A*) *m* способами, то пары объектов *A* и *B* можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ и $|A|$ — число элементов множества A. Составим декартово произведение $A \times B$ множеств A и B, т. е. множество пар (a_i, b_i).

$$a_i \in A, b_i \in B: A \times B = \begin{array}{l} \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_m), \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_2, b_m), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (a_n, b_1), (a_n, b_2), ..., (a_n, b_m)\}. \end{array}$$

Тогда правило произведения записывается следующим образом:

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Пример 6. Сколько существует двузначных чисел?

Решение. Поскольку в двузначном числе цифра, обозначающая число десятков, должна быть отлична от нуля, то $A = \{1, 2, ..., 9\}$, $B = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ и $A \times B = \{10, 11, ..., 19, ..., 90, 91, ..., 99\}$, $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 90$.

Выборки элементов без повторений

Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначим A_n^m. Используя основное правило комбинаторики, получаем:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Если $m = n$, то A_n^n — число таких размещений, которые отличаются только порядком расположения элементов. Такие размещения называются **перестановками**. Их число P_n находится по формуле:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Выборки из m элементов, взятых из данных n, отличающихся только составом элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по m. Число C_n^m таких сочетаний находится:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 7. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского, испанского — на любой другой из этих пяти языков?

Решение. Поскольку важен порядок, с какого языка задается перевод на другой, то для ответа на вопрос необходимо найти число размещений из пяти по два.

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (словарей).}$$

Пример 8. В соревнованиях на первенство университета по волейболу участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

Решение. При проведении турнира по круговой системе каждый участник встречался с каждым и порядок их вхождения в пару не важен. Следовательно, по круговой системе потребуется провести $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ встреч, а по олимпийской только 7 (четыре встречи в $\frac{1}{4}$ финала, две — в полуфинале и одна в финале).

Выборки элементов с повторениями

В данных выборках допускается повторение элементов, что является достаточно естественным (например, в телефонных и автомобильных номерах возможно использование одной цифры несколько раз).

Число **размещений** из n элементов по m с повторениями обозначается $\overline{A}_n^m$ и находится как:

$$\overline{A}_n^m = n^m .$$

Число **перестановок** $P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$, в которых 1-й элемент повторяется m_1 раз, 2-й — m_2 раз, а k-й — m_k раз, находится следующим образом:

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} .$$

Пример 9. Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Решение. Заметим, что если бы все буквы были различны, то получили бы P_{10} новых «слов», но буква «М» употребляется в «слове» 2 раза, «А» — 3 раза, «Т» — 2 раза, оставшиеся три буквы — по разу. Следовательно, искомое число будет в $P_2 \cdot P_3 \cdot P_2$ раз меньше, чем P_{10} , и равно:

$$P_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200 .$$

Число **сочетаний** с повторениями $\overline{C}_n^m$ из n элементов по m выражается через число сочетаний без повторений:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m .$$

Пример 10. В кафе в продаже имеются 5 сортов пирожных. Сколькими способами 8 студенток могут заказать себе по одному пирожному?

Решение. Зашифруем каждую покупку 8 пирожных единицами по 5 сортам, разделяя сорта нулями. Тогда каждой покупке будет соответствовать упорядоченный набор из 8 единиц и 4 (= 5 – 1) разделительных нулей, а общее число покупок будет соответствовать числу перестановок этих нулей и единиц $P_{8,4}$. Таким образом,

$$\overline{C}_5^8 = P_{8,4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495 = C_{5+8-1}^8 .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Основные правила комбинаторики и их иллюстрация на графе.
2. Порядок решения комбинаторных задач.
3. Приведите примеры размещений и перестановок без повторений.
4. Свойства сочетаний без повторений.
5. Как получить треугольник Паскаля, и где он применяется?
6. Приведите примеры выборок с повторениями.
7. Каких выборок больше: с повторениями или без повторений?
8. Что понимают под словом длины k над алфавитом A?

Задачи

11. В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Сколькими способами может определиться тройка призеров?

12. Из колоды, содержащей 36 карт, вынули 10 карт. Сколькими различными способами это можно сделать? В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? В скольких случаях окажется ровно один туз?

13. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь друг за другом?

14. Сколькими способами можно расставить на книжной полке 5 учебников по комбинаторике, 4 — по алгебре и 3 — по математическому анализу, если учебники по каждому предмету одинаковые?

15. На физмате работают 76 преподавателей. Из них 49 знают английский язык, 32 — немецкий и 15 — оба языка. Сколько преподавателей на физмате не знает ни английского, ни немецкого языков?

16*. В цветочном магазине продаются цветы четырех сортов. Сколько можно составить различных букетов из пяти цветов в каждом?

17*. В азбуке Морзе буквы представляются последовательностями тире и точек. Сколько символов потребуется, чтобы закодировать буквы русского алфавита?

18**. Какова вероятность выиграть хотя бы один из призов в спортлото?

19**. Доказать с помощью комбинаторных рассуждений тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (m-1)^{n-k} = m^n .$$

20. Доказать тождество

$$\sum \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = k^n ,$$

где суммирование распространяется по всем упорядоченным разбиениям n на k слагаемых: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, $n_i \geq 0$ — целые числа.

§ 3. Методы комбинаторики

В классической комбинаторике используются три основных метода: геометрический, рекуррентных соотношений и производящих функций.

Метод производящих функций является одним из наиболее развитых комбинаторных методов. Главные его идеи были впервые высказаны в конце XVIII в. в работах Лапласа по теории вероятностей. Поясним их на следующем примере.

Пример 11. Используя биномиальный ряд Ньютона, получить некоторые свойства для сочетаний.

Решение. Рассмотрим биномиальный ряд Ньютона

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots, \ |x| < 1,$$

и выбирая в качестве α и x определенные значения, можно получить некоторые комбинаторные соотношения.

Пусть α — натуральное число n, тогда все слагаемые в правой части, начиная с $n + 2$ слагаемого ($k = n + 1$), обращаются в нуль. Получаем в этом случае бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^m x^m + \ldots + C_n^n x^n .$$

Придавая теперь различные частные значения переменной x, можно получить многие важные тождества.

а) $x = 1$ $\qquad 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

б) $x = -1$ $\qquad 0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^m C_n^m + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

Складывая и вычитая полученные соотношения, получаем еще два свойства для чисел сочетаний:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2m} = 2^{n-1},$$

$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{2m-1} = 2^{n-1}$, где m — целая часть числа $\dfrac{n}{2}$.

В данном случае функцию $f(x) = (1 + x)^n$ называют производящей функцией числа сочетаний из n элементов.

Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется **методом рекуррентных соотношений** (от латинского recurrere — возвращаться). Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить.

Пример 12. Используя метод рекуррентных соотношений, получить формулу для числа P_n перестановок n элементов без повторений.

Решение. Пусть у нас есть n предметов $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$. Любую их перестановку можно получить, если присоединить элемент a_n к перестановке $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$. Число различных мест, которые может занять элемент a_n, равно n, и поэтому перестановок из n элементов в n раз больше, чем перестановок из $n - 1$ элементов. Тем самым установлено рекуррентное соотношение:

$$P_n = n \cdot P_{n-1},$$

пользуясь которым, последовательно выводим, что:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n(n-1) \cdot P_{n-2} = n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot P_1.$$

Поскольку из одного элемента можно сделать лишь одну перестановку, то $P_1 = 1$ и

$$P_n = n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Пример 13 (числа Фибоначчи, 1202 год). Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Решение. Обозначим через $F(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года, тогда через $n + 1$ месяцев будут эти $F(n)$ пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца $n - 1$, т. е. еще $F(n - 1)$ пар кроликов. Следовательно, имеет место рекуррентное соотношение

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1).$$

По условию $F(0) = 1$ и $F(1) = 2$, а далее последовательно находим $F(2) = 3$, $F(3) = 5$, $F(4) = 8$, $F(5) = 13$, ..., $F(12) = 377$. Числа $F(n)$ называют **числами Фибоначчи**.

Геометрический способ в комбинаторике основан на подсчете различных кратчайших путей (ломаных), ведущих из точки O (0, 0) в точку A (n, m). Такие пути можно зашифровать последовательностью из n нулей и m единиц: нуль означает место, где ломаная идет вправо, а единица — место, где она идет вверх. Число последовательностей из n нулей и m единиц равно числу перестановок с повторениями:

$$P_{n,m} = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!} = C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}.$$

Пример 14. Используя геометрический метод, докажите свойства числа сочетаний (с повторениями и без повторений):

а) $C_{n+m}^{m} = C_{n-1}^{0} + C_{n}^{1} + C_{n+1}^{2} + ... + C_{n+m+1}^{m}$ или

$\overline{C}_{n+1}^{m} = \overline{C}_{n}^{0} + \overline{C}_{n}^{1} + \overline{C}_{n}^{2} + ... + \overline{C}_{n}^{m}$;

б) $C_{n+m}^{n} = C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \ldots + C_{n+m-1}^{n-1}$ или

$$\bar{C}_{m+1}^{n} = \bar{C}_{1}^{n-1} + \bar{C}_{2}^{n-1} + \bar{C}_{3}^{n-1} + \ldots + \bar{C}_{m+1}^{n-1}.$$

Решение. Выберем точку $A(n, m)$ и прямую $x = n - 1$, на которой выделим $m + 1$ точку $A_0(n - 1, 0)$, $A_1(n - 1, 1)$, ..., $A_m(n - 1, m)$. Каждый путь, проходящий через точку A_i, и уходящий вправо, единственным способом по прямой $x = n$ достигает точки A.

а) Поскольку от точки $O(0, 0)$ до точки $A_i(n - 1, i)$, ($i = 0, 1, 2, \ldots, m$), существует C_{n-1+i}^{i} путей, то по правилу сложения получаем:

$$C_{n-1}^{0} + C_{n}^{1} + C_{n+1}^{2} + \ldots + C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m}^{m}.$$

Полученное соотношение можно переписать на языке сочетаний с повторениями:

$$\bar{C}_{n}^{0} + \bar{C}_{n}^{1} + \bar{C}_{n}^{2} + \ldots + \bar{C}_{n}^{m} = \bar{C}_{n+1}^{m}.$$

б) Учитывая, что количество кратчайших путей от точки O до точки A_i можно найти и иначе, а именно как C_{n-1+i}^{n-1}, получаем следующее соотношение:

$$C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \ldots + C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m}^{n} \text{ или}$$

$$\bar{C}_{1}^{n-1} + \bar{C}_{2}^{n-1} + \bar{C}_{3}^{n-1} + \ldots + \bar{C}_{m+1}^{n-1} = \bar{C}_{m+1}^{n}.$$

Следующий пример, с одной стороны, важен для авторского доказательства теоремы Бернулли (см. далее § 1, Глава II), а с другой, является хорошим поводом для иллюстрации принципа вариативности при решении математических задач.

Пример 15. Доказать, что $C_{n}^{m} = C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1}$.

Решение.

1-й способ (вычислительный).

$$C_{n-1}^{m} + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!\cdot(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\cdot(n-1-m+1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{m!\cdot(n-m)!}\left[(n-m)+m\right] = \frac{(n-1)!}{m!\cdot(n-m)!} = C_{n}^{m}.$$

2-й способ (комбинаторный).

Пусть формируется делегация для заграничной поездки из m человек от Государственной думы, состоящей из n депутатов. Существует C_{n}^{m} способов выбора делегации, и в делегацию спикер

может входить, тогда остальные члены делегации выбираются C_{n-1}^{m-1} способами, а может и не входить, тогда вся делегация (m человек) формируется из остальных $n - 1$ депутатов. По правилу сложения получаем:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

3-й способ (геометрический).

Обратим внимание на то, что к точке $A(m, n - m)$ можно пройти обязательно через одну из двух точек $A_1(m, n - m - 1)$ и $A_2(m - 1, n - m)$, а к ним ведут $C_{(n-m-1)+m}^m$ и $C_{(n-m)+(m-1)}^{m-1}$ путей соответственно. Тогда получаем:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

4-й способ (производящих функций).

В примере 11 показано, что $f_n(x) = (1 + x)^n$ является производящей функцией для числа сочетаний. Поскольку $f_n(x) = (1 + x)^n = (1 + x)f_{n-1}(x)$, то коэффициенты при x^m в левой и в правой частях тождества равны:

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие функции называются производящими? Приведите примеры.
2. Производящие функции для сочетаний и размещений.
3. Использование производящих функций для получения комбинаторных соотношений.
4. Покажите на примерах эффективность метода производящих функций.
5. Метод рекуррентных соотношений.
6. Получите последовательность чисел Фибоначчи.
7. В чем смысл геометрического метода в комбинаторике?
8. Приведите примеры использования геометрического метода.

Задачи

21. Докажите свертку Вандермонда:

$$C_n^k = \sum_{r=0}^{n} C_{n-m}^r \cdot C_m^{k-r}.$$

22. Докажите равенство $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (-1)nC_n^n = 0$.

23. Найдите десятый член последовательности Фибоначчи.

24. Найдите методом воспроизводящих функций и геометрическим способом сумму знакочередующего ряда $1 - x + x^2 - x^3 + + ...$.

25. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка 6 львов и 5 тигров, при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

26. На сколько частей делят плоскость n прямых, если никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

27*. Докажите, что $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$.

28*. Докажите, что $C_{n+1}^2 + C_n^2 + C_{n-1}^2 + ... + C_3^2 + C_2^2 = C_{n+2}^3$.

29**. Докажите тождества:

а) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$;

б) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot C_n^k = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$.

30**. Докажите полиномиальную теорему:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^n = \sum \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_m!} a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot ... \cdot a_m^{n_m},$$

где сумма берется по всем решениям уравнения $n_1 + n_2 + ... + n_m = n$ в целых неотрицательных числах.

§ 4. Графы

Начало теории графов было положено Эйлером в 1736 г. в его знаменитой задаче о кенигсбергских мостах. Исследования электрических цепей, моделей кристаллов и структур молекул, развитие формальной логики побудили к изучению графов. Большое число популярных головоломок поддавалось формулировкам непосредственно в терминах графов. Проблема четырех красок — наиболее известная среди таких задач — была поставлена

Де Морганом в 1850 г. В XX столетии теория графов получила дальнейшее развитие, которое связано с новыми ее приложениями: в теории игр и программировании, теории передачи сообщений, электрических сетей и контактных цепей, а также проблем биологии и психологии.

В данной работе графы являются основой для иллюстрации основных результатов в теории вероятностей, что позволяет сделать рассматриваемый материал более наглядным и доступным.

Графом называется два множества с отношением инцидентности между их элементами, называемыми вершинами и ребрами. Это отношение удовлетворяет единственному требованию (аксиоме) — любое ребро инцидентно не более чем двум вершинам.

Пример 16. Построить граф, вершинами которого является множество {2, 3, 4, 5, 6}, а инцидентность задается наличием у указанных цифр делителей, отличных от единицы.

Решение. Взятые цифры обозначим на рисунке кружками, которые соединим отрезками (либо петлями) при наличии общих делителей.

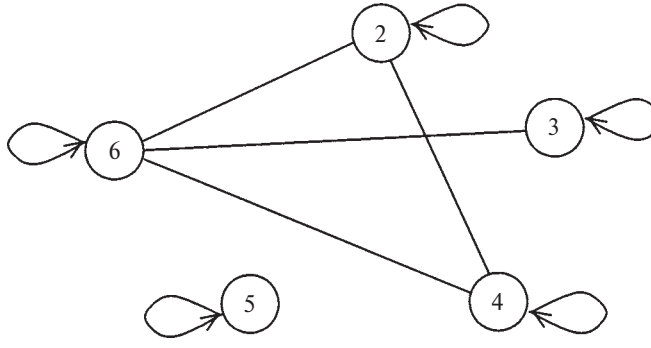


Рис. 1

Этот граф содержит 5 петель — ребра, соединяющие (инцидентные) вершину саму с собой. Вершина «5» — изолированная, а подграф с вершинами {2, 3, 4, 6} является связным. Граф связный, если из любой вершины в любую другую можно «пройти» по ребрам. *Циклом* называется замкнутый путь из ребер, например, вершины {2, 4, 6} с соединяющими их попарно ребрами. *Степенью вершины* называется число ребер графа, инцидентных этой вершине.

Пример 17. Сколько различных обедов П.И. Чичиков мог насчитать из блюд, выставленных на столе у П.П. Петуха, если

бы на каждый обед выбирать только одно холодное блюдо, одно первое блюдо и одно второе блюдо? На столе у П.П. Петуха на этот раз были выставлены из холодных блюд студень с хреном, свежая икра, свежепросоленная белужина; на первое — уха из стерлядей, щи с грибами; на второе — осетрина жареная, теленок, жаренный на вертеле.

Решение. Каждое блюдо изобразим кружком с первой буквой названия блюда, а соответствие блюд одного обеда — отрезками, соединяющими кружки. Возникает схема (граф), изображенный на рисунке:

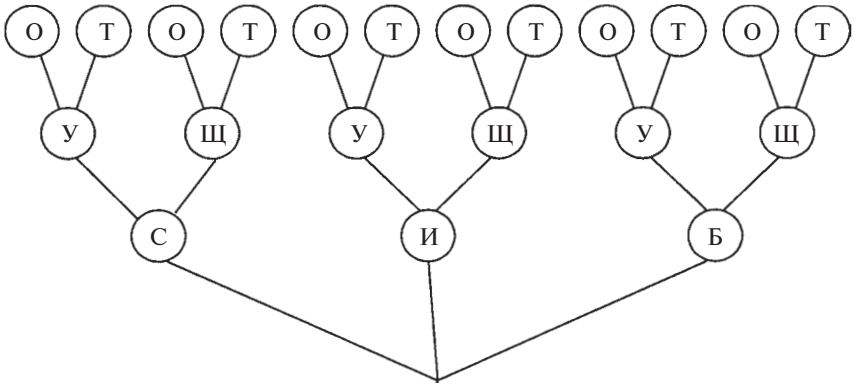


Рис. 2

Граф помогает сосчитать число возможностей, их оказалось 12. Он же помогает узнать, сколько различных обедов можно составить, например, с икрой.

Математики, обратив внимание на сходство схемы на рисунке 2 с веткой дерева с листочками, назвали такие графы «деревьями».

Деревом называется связный граф без циклов. Очень важное понятие для нашего подхода к изложению теории вероятностей. При помощи дерева удобно изображать исходы того или иного испытания.

Пример 18. Поступающий на физмат должен сдать три вступительных экзамена по десятибалльной системе. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы быть принятым в университет, если проходной балл в тот год составил 28 баллов?

Решение. Для решения этой задачи, как и во многих других комбинаторных и вероятностных задачах, эффективным оказывается организация элементов анализируемого множества в виде

дерева. От одной выделенной вершины проводятся ребра, соответствующие оценке на первом экзамене, а затем к их концам добавляются новые ребра, соответствующие возможным результатам второго экзамена, а затем и третьего.

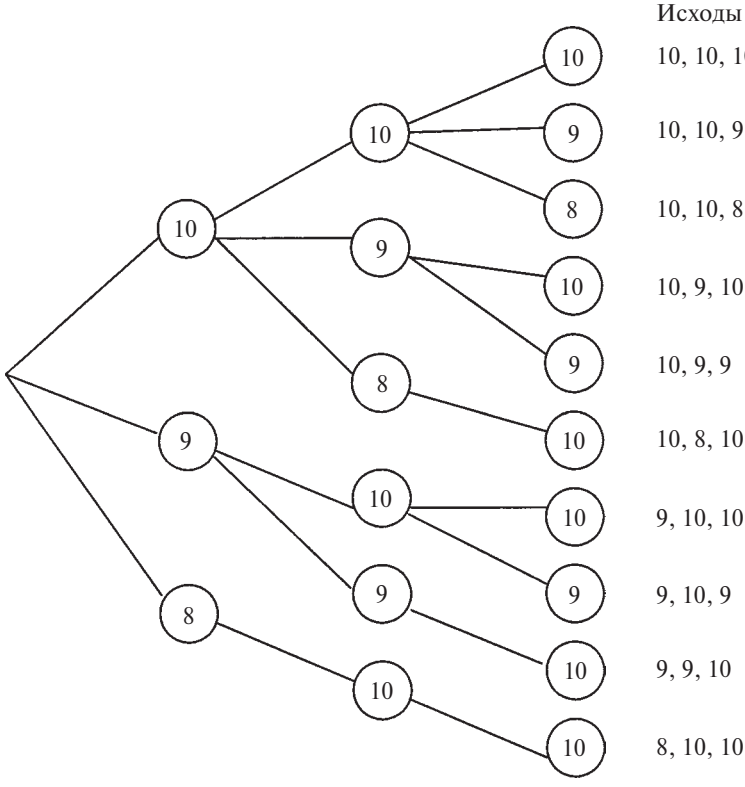


Рис. 3

Таким образом, для поступления на физмат можно сдать вступительные экзамены 10 различными способами.

Из этого представления можно извлечь ряд идей, плодотворных для изучения комбинаторики и вероятности.

При рассмотрении цепей Маркова нам потребуются графы, на ребрах которых поставлены стрелки, указывающие на переход из одного состояния в другое. Ребро графа называется *ориентированным*, если одну вершину считают началом ребра, а другую — концом. Граф, все ребра которого ориентированы, называется **ориентированным графом**.

Пример 19. Турнир по волейболу проводится по круговой системе между n командами. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали в турнире одинаковое число побед, то найдутся среди участников три команды I, II и III такие, что I выиграла у II, II выиграла у III, а III выиграла у I.

Решение. Пусть A и B — две команды, одержавшие одинаковое число побед, например, l побед. Пусть к тому же A выиграла у B. Те l команд, у которых выиграла команда B, обозначим C_1, C_2, ..., C_l (рис. 4).

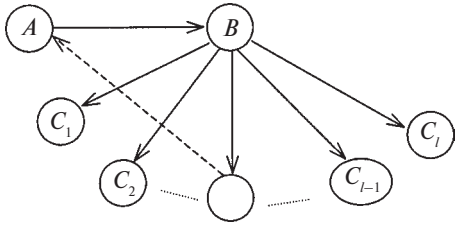


Рис. 4

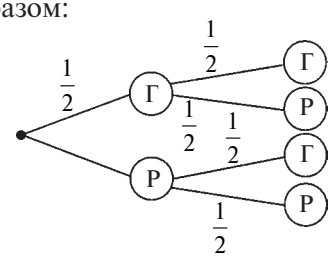
Команда A не могла одержать победы над всеми командами C_1, C_2, ..., C_l, так как иначе она одержала бы больше чем l побед (одна победа над B уже имеется). Следовательно, среди команд C_1, C_2, ..., C_l найдется хотя бы одна, которая одержала победу над A.

Из этого примера следует один из результатов теории графов о существовании ориентированных циклов в полном ориентированном графе.

Граф будет называться *вероятностным*, если рядом с каждым его ребром запишем соответствующую вероятность.

Пример 20. Построить вероятностное дерево исходов двух подбрасываний монеты на твердую поверхность.

Решение. Поскольку каждое подбрасывание монеты может закончиться одним из двух исходов, а именно, выпадением «герба» или «решки», то вероятностное дерево выглядит следующим образом:



Исходы:	Вероятность:
ГГ	$\frac{1}{4}$
ГР	$\frac{1}{4}$
РГ	$\frac{1}{4}$
РР	$\frac{1}{4}$

Рис. 5

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется графом? Примеры.
2. Какой граф является связным?
3. Дерево исходов.
4. Эйлеровы графы, необходимые и достаточные условия.
5. Примеры Гамильтоновых графов.
6. Ориентированные графы.
7. Вероятностные графы и порядок их построения.
8. Приведите примеры вероятностных деревьев.

Задачи

31. Имеются три листа бумаги; некоторые из них разрезаются на три части, несколько новых кусков — на три более мелкие части и т. д. Сколько всего получится листков, если всего разрезано было k листков?

32. Составьте множество трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 2 и 5. Сколько таких чисел?

33. В волейбольном турнире участвуют 19 команд. Докажите, что в любой момент найдется команда, сыгравшая четное число матчей.

34. Найдется ли граф с пятью вершинами, степени которых все различны между собой, т. е. равны 0, 1, 2, 3, 4?

35. Участники областного студенческого лагеря актива, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Докажите, что:

а) всего было передано четное число конвертов;

б) число студентов, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четное.

36. Девять школьников участвуют в шахматном турнире в один круг. В определенный момент выясняется, что в точности двое сыграли одинаковое число партий. Докажите, что тогда либо в точности один школьник еще не сыграл ни одной партии, либо в точности один сыграл все партии.

37*. Сколько существует неизоморфных деревьев с семью вершинами?

38*. Построить вероятностное дерево вынимания «дуплей» при извлечении двух «костей» из полного набора домино.

39**. Принял бы ты приглашение участвовать в игре, в которой ты и твой соперник попеременно выбираете (без возвращения) шар из урны с 7 черными и одним белым шаром? Побеждает

тот, кто первым извлек белый шар. Является ли право первым выбирать шар привилегией?

40**. Извлекаем последовательно три карты с возвратом (без возврата) из колоды в 52 карты. Построить вероятностное дерево вынимания козырной карты. Какова вероятность извлечения по крайней мере одной козырной карты?

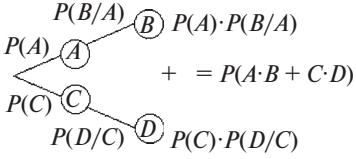
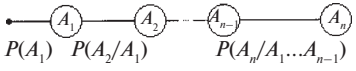
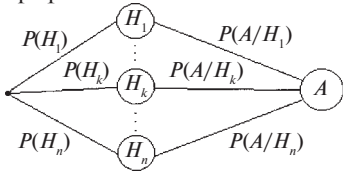
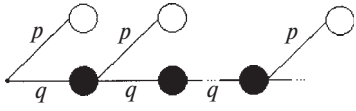
Глава II
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Данную главу можно рассматривать как собственно первый раздел курса теории вероятностей, изучающей закономерности массовых случайных явлений. Великий математик и физик Лаплас дает такое определение сущности этой теории: «Каждое явление вполне обусловлено и определено в своих мельчайших подробностях всеми предшествующими ему явлениями, и в этом смысле нет случайности во всем, что происходит в мире. Но ум человека «невсеобъемлющ»; весьма часто мы совсем не знаем причин явления или знаем о них так немного, что не можем предвидеть результаты их совместного действия; тогда этот результат мы называем **случайным явлением**».

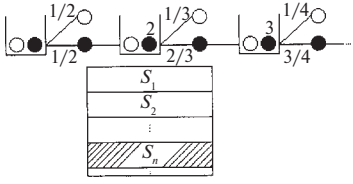
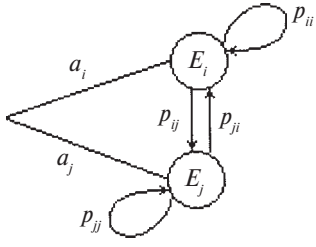
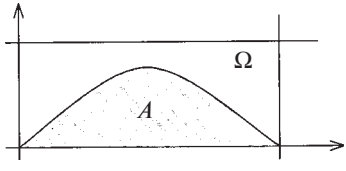
Чем больше случайных явлений мы наблюдаем, тем более взаимно уравновешиваются явления второстепенных причин и выдвигается действие главных, постоянных причин. Закономерности такого ряда называются **вероятностными**, или **стохастическими** закономерностями, которые и составляют основное содержание главы.

Предложенный материал может быть основой школьной стохастической линии. Его изучение, понимание основных принципов, определений, теорем, методов и алгоритмов, неформальное владение этими принципами имеет большое методологическое и мировоззренческое значение, повышает математическую культуру учащихся. При этом закладываются основы для дальнейшего восприятия теории вероятностей и математической статистики и будущей профессиональной деятельности студентов.

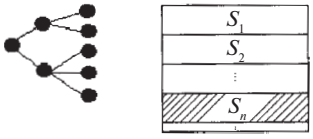
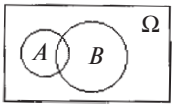
2.1. Опорная таблица

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Случайные события	Алгебра событий	Проводить операции (бинарные и унарную) над событиями
Вероятность случайного события	Свойства вероятностей	Строить вероятностное дерево исходов Использовать элементы комбинаторики
Совместные и несовместные события	$P(A+B)=P(A)+$ $+P(B)-P(A\cdot B)$; $P(A+B)=P(A)+P(B)$; если $A\cdot B=0$; $P(A)+P(\overline{A})=1$	Выражать одни события через другие, определять их несовместность 
События зависимые и независимые	$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$; $P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=$ $=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot$ $\cdot P(A_n/A_1A_2A_{n-1})$	Выяснять независимость событий 
Полная группа событий	Формула полной вероятности $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ Формула Байеса $P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}$	Выдвигать гипотезы, строить граф 
Повторные независимые испытания	Формула Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^n$ Наивероятнейшее число $np-q\le m_0\le np+p$ Геометрическая прогрессия Закон больших чисел Локальная и интегральная теоремы Муавра—Лапласа	Различать последовательности испытаний  Находить вероятностное дерево исходов

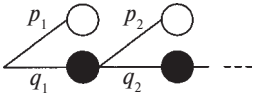
Окончание табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Повторные зависимые испытания Вероятность как счетно-аддитивная мера	Вероятностные и геометрические способы суммирования некоторых числовых рядов	Строить вероятностные и геометрические модели  $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = 1$
Цепи Маркова Матрица и граф перехода Вектор начальных вероятностей	$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ $p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{k} p_{im} \cdot p_{mj}^{(n-1)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$	Вычислять вероятность нахождения системы в определенном состоянии Находить матрицу и граф перехода  $P = (p_{ij}), \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$
Геометрическая вероятность	$P(A) = 0, A = \varnothing$ $P(A) = 1, A = \Omega$ Задача Бюффона	Находить меру геометрической фигуры 

2.2. Методы

Комбинаторный	Геометрический	Логический
$\lvert A\times B\rvert = \lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$ $A_n^m,\ P_n,\ C_n^m$ $\bar{A}_n^m,\ \bar{C}_n^m,\ P_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$		 $A+B,\ A\cdot B,\ \bar{A},\ A\subset B$
Метод математической индукции n: $= n + 1$		

2.3. Алгоритмы

Разложить событие на элементарные составляющие	Определение несовместности и независимости событий	Построение вероятностных графов испытаний
$\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\} = A \subseteq \Omega$	$A\cdot B = 0$ $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$	

2.4. Спираль фундирования понятия вероятности случайного события

Рис. 6

§ 1. Классическая вероятность

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях. Возникновение теории относится к середине XVII в. и связано с именем Гюйгенса, Паскаля, Ферма, Я. Бернулли.

Неразложимые исходы $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ некоторого эксперимента будем называть *элементарными событиями*, а их совокупность

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

(конечным) **пространством элементарных событий**, или **пространством исходов**.

Пример 21. а) При подбрасывании игральной кости пространство элементарных событий состоит из шести точек:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

б) Подбрасываем монету два раза подряд, тогда

$$\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\},$$

где Г — «герб», Р — «решетка» и общее число исходов $|\Omega| = 4$.

в) Подбрасываем монету до первого появления «герба», тогда

$$\Omega = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, ...\}.$$

В этом случае Ω называется **дискретным** пространством элементарных событий.

Обычно интересуются не тем, какой конкретно исход имеет место в результате испытания, а тем, принадлежит ли исход тому или иному подмножеству всех исходов. Все те подмножества A, для которых по условиям эксперимента возможен ответ одного из двух типов: «исход $\omega \in A$» или «исход $\omega \notin A$», будем называть **событиями**.

В примере 21 б) множество $A = \{ГГ, ГР, РГ\}$ является событием, состоящим в том, что выпадает по крайней мере один «герб». Событие A состоит из трех элементарных исходов пространства Ω, поэтому $|A| = 3$.

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в выполнении события A или события B.

Произведением событий A и B называется событие $D = A \cdot B$, состоящее в совместном исполнении события A и события B.

Противоположным по отношению к событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в непоявлении A и, значит, дополняющее его до Ω.

Множество Ω называется **достоверным** событием, пустое множество $\varnothing$ — **невозможным**.

Если каждое появление события A сопровождается появлением B, то пишут $A \subset B$ и говорят, что *A предшествует B* или A влечет за собой B.

События A и B называются *равносильными*, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A называется *число*, равное отношению числа элементарных исходов, составляющих событие A, к числу всех элементарных исходов

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Случай равновозможных событий $P(\omega_1) = \frac{1}{n}$, ($i$ = 1, 2, ..., n) называется «классическим», поэтому и вероятность

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

называется «классической».

Элементарные события (исходы опыта), входящие в событие A, называются «благоприятными».

Свойства классической вероятности:

1. $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$.
3. $P(A) = 1 \Leftrightarrow A = \Omega$.
4. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $A \cdot B = \varnothing$ (A и B — несовместные события).
5. $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
6. $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$.

Пример 22 (задача Гюйгенса). В урне 2 белых и 4 черных шара. Один азартный человек держит пари с другим, что среди вынутых трех шаров будет ровно один белый. В каком отношении находятся шансы спорящих?

Решение 1 (традиционное). В данном случае испытание Ω = = {вынимание трех шаров}, а событие A — благоприятствующее одному из спорящих:

A = {достать ровно один белый шар}.

Поскольку порядок вынимания трех шаров не важен, то

$$|\Omega| = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

Один белый шар можно достать в C_2^1 случаев, а два черных — C_4^2, и тогда по основному правилу комбинаторики $|A| = C_2^1 \cdot C_4^2 = 12$.

Отсюда $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$, а по пятому свойству вероятности $P(\bar{A})=1-P(A)=\frac{2}{5}$. Следовательно, $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{3}{2}$.

Решение 2. Составим вероятностное дерево исходов:

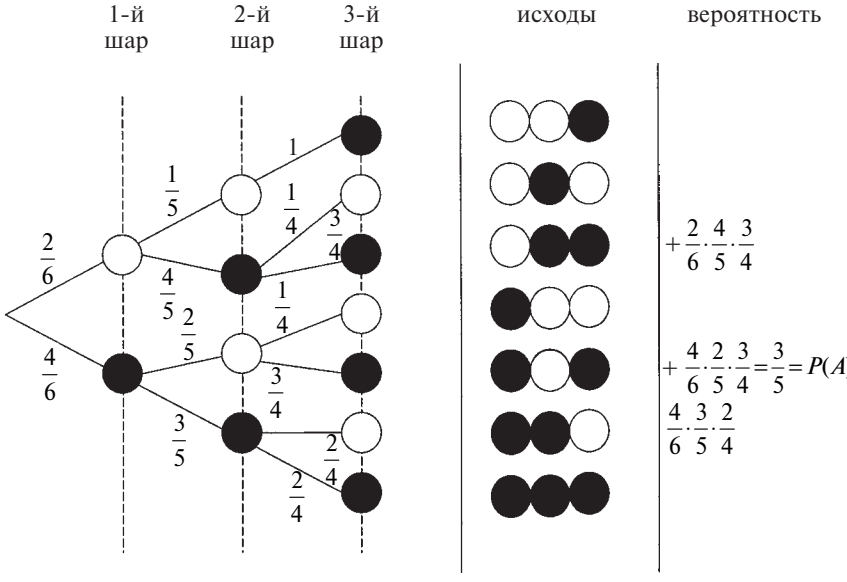


Рис. 7

Пример 23. Рассмотрим копилку, в которой осталось четыре монеты — три по 2 руб. и одна в 5 руб. Извлекаем две монеты.

Решение. а) Два последовательных извлечения (с возвращением) могут привести к следующим исходам:

(2) (2), (2) (5), (5) (2), (5) (5)

Какова вероятность каждого из этих исходов?

В таблице показаны все шестнадцать возможных случаев.

		2-е извлечение			
		5	2	2	2
1-е извлечение	5	5 5	5 2	5 2	5 2
	2	2 5	2 2	2 2	2 2
	2	2 5	2 2	2 2	2 2
	2	2 5	2 2	2 2	2 2

Следовательно,

$$P(5\,5) = \frac{1}{16},\ P(5\,2) = \frac{3}{16},\ P(2\,5) = \frac{3}{16},\ P(2\,2) = \frac{9}{16}.$$

К тем же результатам ведет и следующее дерево:

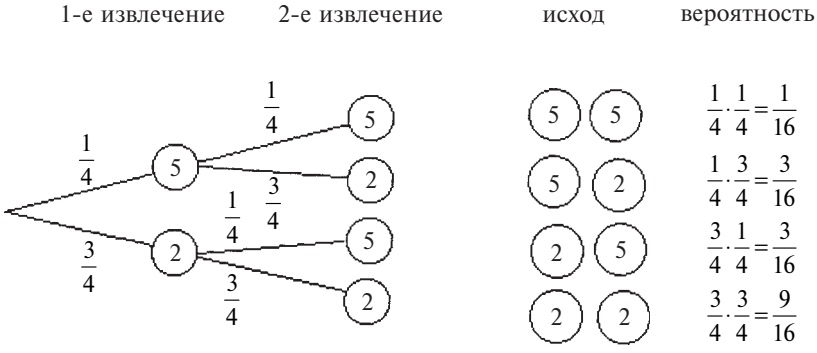


Рис. 8

б) Два последовательных извлечения (без повторения) могут привести к следующим трем исходам:

2 5, 5 2, 5 5

В таблице покажем все возможные исходы:

2-е извлечение

1-е извлечение	5	2	2	2
5		5 2	5 2	5 2
2	2 5		2 2	2 2
2	2 5	2 2		2 2
2	2 5	2 2	2 2	

Следовательно,

$$P(5\,2) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},\ P(2\,5) = \frac{1}{4},\ P(2\,2) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

К тем же результатам ведет и соответствующее дерево:

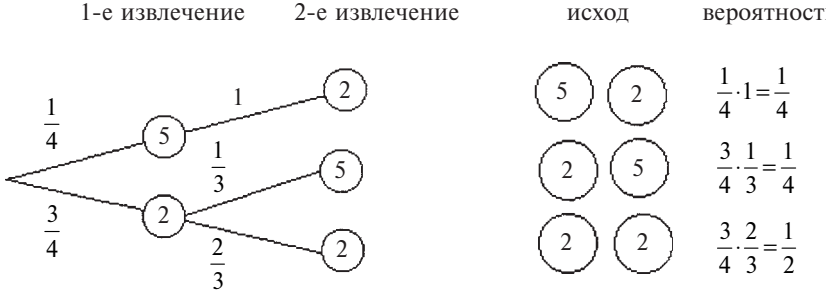
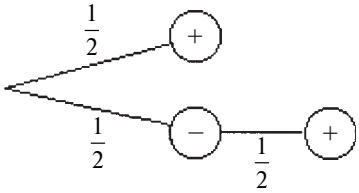


Рис. 9

Пример 24 (задача де Мере). Двое играют в «орлянку» до пяти побед. Игра прекращена, когда первый выиграл четыре партии, а второй — три. Как в этом случае следует поделить первоначальную ставку?

Решение. Пусть событие A = {выиграть приз первым игроком}. Тогда вероятностное дерево выигрыша для первого игрока следующее:



$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Рис. 10

Отсюда $P(\bar{A})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{3}{1}$ и три части ставки следует отдать первому игроку, а второму — одну часть.

Покажем эффективность решения вероятностных задач с помощью графов и на следующем примере, который мы рассматривали в Главе I, § 1 (пример 2).

Пример 25. Является ли выбор с помощью «считалки» справедливым?

Решение. Составим вероятностное дерево исходов:

Рис. 11

$P_2 > P_1$ и, следовательно, при игре в «считалки» выгодней стоять вторым.

В последнем решении использованы интерпретации на графах теорем сложения и умножения вероятностей:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$ и в частности

$P(A + B) = P(A) + P(B)$, если A и B — несовместные события и $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$, если A и B — независимые события.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое событие называется элементарным?
2. Бинарные операции над событиями. Примеры.
3. Противоположные события, примеры их.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Приведите примеры достоверного и невозможного событий.
6. Какие свойства вероятностей вы знаете?
7. Верно ли, что $[P(A)]^2 \le P(A)$?
8. Что можно сказать о вероятностях события и противоположного ему события?
9. В чем различие между теоремами сложения для совместимых и несовместных событий?

Задачи

41. Составьте множество элементарных событий в эксперименте:

а) подбрасывают три монеты достоинством 1, 5, 10 коп.;

б) подбрасывают игральную кость и монету достоинством 1 руб.

Найдите вероятности этих элементарных событий.

42. Подбрасывают три монеты (1, 5, 10 коп.). Найдите вероятность события, противоположного событию:

а) герб выпал по крайней мере на одной монете;

б) сумма выпавших копеек больше 10.

43. Упростите $(A+B)\cdot(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)\cdot(\overline{A}+\overline{B})$.

44. События A_1, A_2, A_3 означают выполнение домашнего задания одним из трех студентов. Записать событие, состоящее в том, что:

а) все они выполнили задание;

б) хотя бы один из них выполнил задание;

в) не все выполнили задание;

г) задание выполнено только одним из студентов.

45. Брошены две игральные кости. Найдите вероятность следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 5;

б) сумма выпавших очков равна 8, а абсолютная величина разности — 4;

в) какая из возможных сумм имеет наибольшую вероятность появления?

46. Какова вероятность извлечь туза или бубновую карту из колоды в 36 карт?

47*. Имеется пять отрезков длиной 1, 2, 3, 5 и 7 см. Найдите вероятность того, что из трех наугад взятых отрезков можно составить треугольник.

48*. В первенстве участвуют 16 команд, среди которых две сильнейшие. Какова вероятность того, что при разбиении команд на две равные подгруппы сильнейшие команды окажутся:

а) в разных подгруппах;

б) в одной подгруппе.

49**. В турнире, где разыгрывается приз по олимпийской системе, участвуют 2^n команд. Какова вероятность того, что две сильнейшие команды встретятся в финале?

50**. Что более вероятно: получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

§ 2. Условные вероятности

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A при условии, что событие B произошло ($P(B) \neq 0$), назовем отношение $P(A \cdot B)/P(B)$.

Это определение эквивалентно так называемой **теореме умножения**, согласно которой $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$, т. е. вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое событие наступило.

Два события A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Построение классической вероятности основано на правилах сложения и умножения вероятностей, следствия которых имеют следующие интерпретации на вероятностных деревьях:

1. $P(A \cdot B + C \cdot D) = P(A) \cdot P(B/A) + P(C) \cdot P(D/C)$, где $A \cdot B$ и $C \cdot D$ — несовместные события

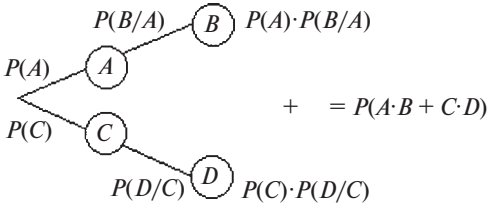


Рис. 12

2. $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

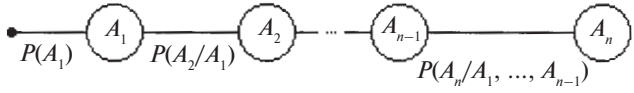


Рис. 13

Назовем произведение $P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$ весом ветви, проходящей через корень дерева и вершины, соответствующие событиям $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Интерпретацией теорем сложения и умножения на вероятностных деревьях служит дерево исходов, соответствующее «благоприятному» событию. Рядом с каждым ребром такого дерева запишем вероятность исхода, соответствующего конечной вершине этого ребра при условии выполнения произведения всех исходов, соответствующих вершинам пути от корня дерева до данной вершины.

Эффективность данных интерпретаций покажем на следующих примерах.

Пример 26. Слово «МАТЕМАТИКА» разделено на отдельные буквы, из них произвольным образом отбираются и выкладываются по порядку четыре буквы. Какова вероятность получения слова «МАМА»?

Решение. Пусть событие A = {получить слово «МАМА»}. Возьмем в дереве испытаний ветвь, соответствующую событию A, и найдем ее вес:

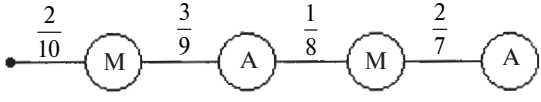


Рис. 14

$$P(A) = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{420}.$$

Пример 27. Два игрока по очереди выбирают вслепую фишку из имеющихся двух белых и трех черных. Побеждает тот, кто первым вытянет белую фишку. В каком отношении находятся шансы игроков на успех?

Решение. Обозначим через A_i = {победа i-го игрока}, i = 1, 2. Составим вероятностное дерево исходов данного испытания.

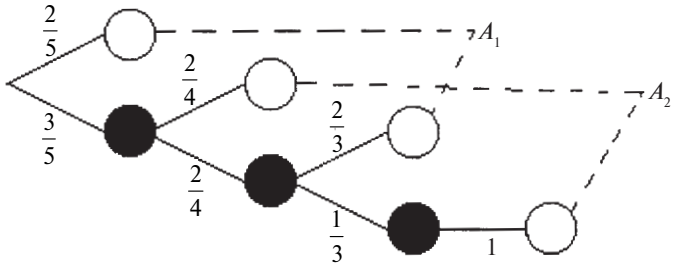


Рис. 15

$$P(A_1)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{5},\ P(A_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{5},\ \frac{P(A_1)}{P(A_2)}=\frac{3}{2}.$$

Пример 28. Четыре брата определяют дежурного по квартире при помощи четырех спичек, одна из которых короче остальных. В равных ли условиях находятся братья?

Решение. Пусть четверо вытягивают по очереди одну спичку до тех пор, пока кто-нибудь не вытянет короткую. Тот, кто вытянет короткую спичку, станет дежурным.

Вероятностное дерево исходов будет иметь вид:

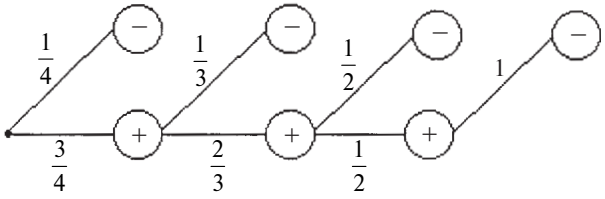


Рис. 16

$$P_1=\frac{1}{4},\ P_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3},\ P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2},\ P_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1.$$

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$

и, следовательно, в этом случае шансы у всех равные.

Пример 29. Доказать, что $C_a^0\cdot C_b^n+C_a^1\cdot C_b^{n-1}+\ldots+C_a^n\cdot C_b^0=C_{a+b}^n$, где $n \le a$ и $n \le b$.

Решение. Возьмем урну, содержащую a белых и b черных шаров. Пусть Ω = {вынимание n шаров} и A_i = {вынимание i белых шаров}. Тогда $\Omega = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ и $1 = P(\Omega) = P(A_0) + P(A_1) + \ldots +$

$$+ P(A_n) = \frac{C_a^0 \cdot C_b^n}{C_{a+b}^n} + \frac{C_a^1 \cdot C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} + \ldots + \frac{C_a^n \cdot C_b^0}{C_{a+b}^n}.$$

Пример 30 (пример Бернштейна). Доказать, что вообще говоря $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$ для попарно независимых событий A_i, A_j $(i \neq j)$ (сравни с вероятностью суммы попарно несовместных событий).

Решение. Рассмотрим 9 карточек, на которых написаны упорядоченные тройки букв a, b, c:

a, b, c	a, c, b	a, a, a
b, a, c	b, c, a	b, b, b
c, a, b	c, b, a	c, c, c

Примем за событие A_i = {достать карточку с буквой a на i-м месте}. События A_1 и A_2 независимы, поскольку

$$\frac{1}{9} = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9}.$$

Аналогично доказывается, что A_1, A_3 и A_2, A_3 тоже попарно независимые события.

Однако $\frac{1}{9} = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры независимых событий.
2. Сформулируйте правило умножения вероятностей.
3. В чем заключается пример Бернштейна?
4. В каком случае вероятность произведения нескольких событий равняется произведению вероятностей этих событий?
5. Верно ли, что если события A и B независимы, то $\overline{A}$ и $\overline{B}$ тоже независимые события?
6. Что такое условная вероятность? В каком случае она определена?
7. Перечислите свойства условных вероятностей.

8. Покажите, что если $P(A)\cdot P(B) \neq 0$, то обе условные вероятности $P(A/B)$ и $P(B/A)$ определены.

9. Проиллюстрируйте теоремы умножения на графах.

Задачи

51. В коробке у Пети карточки с цифрами 0, 3, 5, а у Саши — с цифрами 1, 2, 4, 5. Они наугад вытаскивают по одной карточке. Побеждает тот, у которого цифра больше. Найдите вероятности событий:

а) победит Петя;

б) победит Саша;

в) ничья.

52. В коробке имеется 13 карточек с номерами от 1 до 13. Вытаскиваем одну карточку и записываем ее номер, а затем вынимаем еще одну карточку и ее номер записываем справа от номера первой карточки. Найдите вероятность того, что:

а) полученное число — двузначное;

б) полученное число — трехзначное;

в) полученное число — четырехзначное;

д) полученное число — четырехзначное четное.

53. Пусть $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$, $P(A+B)=\frac{2}{3}$. Независимы или нет события A и B? Решите задачу для случая $P(A+B)=\frac{3}{4}$.

54. Пользуясь вероятностным деревом, докажите тождество:

$$1+\frac{A-a}{A-1}+\frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)}+\ldots+$$

$$+\frac{(A-a)(A-a-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(A-1)(A-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)\cdot a}=\frac{A}{a}.$$

55. Студент забыл последнюю цифру телефонного номера друга. Какова вероятность, что он дозвонится, имея три жетона?

56. Докажите, что если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

57*. Дежурный по классу выбирается среди пяти учащихся при помощи пяти (шести) спичек, одна из которых короче остальных. Определите вероятность дежурства каждого участника.

58*. Является ли выбор дежурного по классу при помощи «считалки» из трех учащихся справедливым?

59**. Используя вычисление вероятностей, докажите тождества, содержащие биномиальные коэффициенты:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$;

б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}$;

в) $2 \cdot 1 \cdot C_n^2 + 3 \cdot 2 \cdot C_n^3 + 4 \cdot 3 \cdot C_n^4 + ... + n(n-1) \cdot C_n^n = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$;

г) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

60**. Докажите, что $P(B/A) \geq 1 - \dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$.

§ 3. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие A может наступить только при появлении одного из несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, ..., H_n, то вероятность события A вычисляется по формуле *полной вероятности*: $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n)$, где $P(H_i)$ — вероятность гипотезы H_i, $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$; $P(A/H_i)$ — условная вероятность события A при выполнении гипотезы H_i ($i = 1, 2, ..., n$).

Проиллюстрируем формулу полной вероятности на графе с выделенной вершиной:

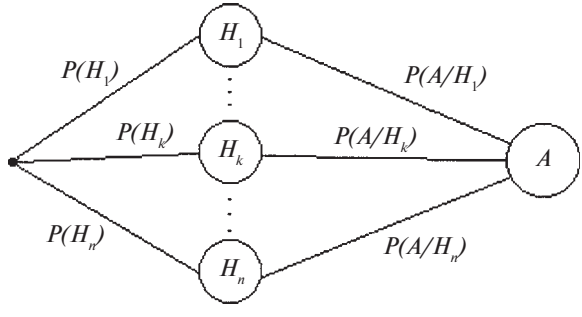


Рис. 17

Полная вероятность события A равна весу всего вероятностного графа с гипотезами.

С формулой полной вероятности тесно связана формула Байеса. Если до опыта вероятности гипотез были $P(H_1)$, $P(H_2)$, ..., $P(H_n)$, а в результате опыта появилось событие A, то с учетом этого события «новые», т. е. условные вероятности гипотез вычисляются по формуле Байеса

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A / H_k)}{P(A)} \quad (k = 1, 2, ..., n), \text{ где}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A / H_i).$$

Формула Байеса дает возможность «пересмотреть» вероятность гипотез с учетом наблюдавшегося результата опыта. Условная вероятность $P(H_k/A)$ может находиться как отношение веса ветви, проходящей через вершину, соответствующую гипотезе H_k, к весу всего вероятностного графа.

Пример 31. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая — 35%, третья — 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?

Решение. Пусть событие A = {выбрать дефектный болт}.

Выдвигаем три гипотезы:

H_1 = {болт изготовлен первой машиной}, $P(H_1) = 0{,}25$, $P(A/H_1) = 0{,}05$;

H_2 = {болт изготовлен второй машиной}, $P(H_2) = 0{,}35$, $P(A/H_2) = 0{,}04$;

H_3 = {болт изготовлен третьей машиной}, $P(H_3) = 0{,}4$, $P(A/H_3) = 0{,}02$.

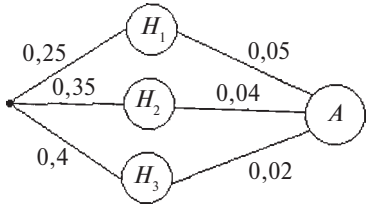


Рис. 18

а) $P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 = 0{,}0345$;

б) $P(H_1 / A) = \dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}0345} = \dfrac{25}{69}$;

$$P(H_2 / A) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}04}{0{,}0345} = \frac{28}{69};$$

$$P(H_3 / A) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}0345} = \frac{16}{69}.$$

Пример 32. Студент подготовил к экзамену 20 билетов из 25. В каком случае шансы взять известный билет больше — когда студент пришел на экзамен первым или вторым?

Решение. $P_1 = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$. Найдем вероятность P_2 взять известный билет, придя на экзамен вторым, учитывая, что первый может взять как известный, так и неизвестный второму билет.

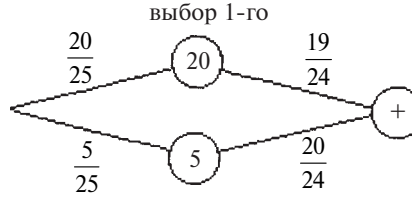


Рис. 19

$P_2 = \dfrac{20}{25} \cdot \dfrac{19}{24} + \dfrac{5}{25} \cdot \dfrac{20}{24} = \dfrac{4}{5}$ и шансы равные.

Пример 33. Наудачу выбираем колоду, а из нее карту. В каком случае вероятность достать туз дольше: если выбирать карту из двух колод, содержащих по 32 и 52 карты, или выбирать карту из трех колод в 36 карт и одной в 52?

Решение. Пусть событие T = {достать туз}.

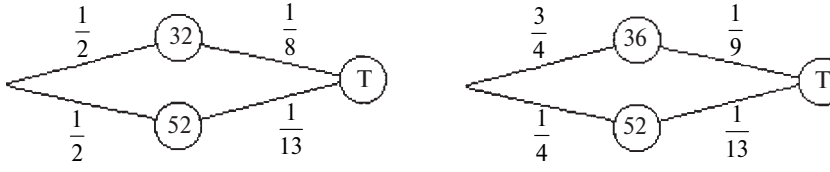


Рис. 20

$$P_1(T)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13}=\frac{21}{208};\ P_2(T)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{13}=\frac{4}{39};$$

$\frac{P_1(T)}{P_2(T)}=\frac{63}{64}<1$, следовательно, в первом случае вероятность достать туз меньше, чем во втором.

Пример 34. В каждой из трех урн содержится по одному белому и одному черному шару. Из первой урны во вторую переложили один шар, из второй пополненной урны в третью тоже переложили один шар, а затем из третьей урны наудачу извлекли один шар. Какова вероятность извлечь белый шар из третьей пополненной урны?

Решение.

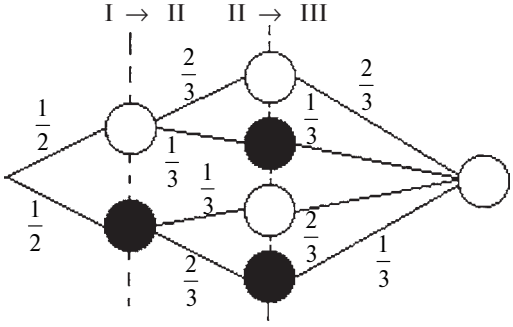


Рис. 21

$$P(бел)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Какие гипотезы использовались в решении этой задачи?

Пример 35. Предположим, что 5 мужчин из 100 и 25 женщин из 10000 являются дальтониками. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение.

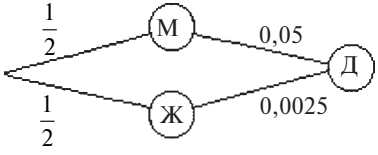


Рис. 22

$$P(М/Д)=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}05}{\frac{1}{2}\cdot 0{,}05+\frac{1}{2}\cdot 0{,}0025}=\frac{20}{21}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие события образуют полную группу?
2. Что можно сказать о вероятностях событий, образующих полную группу событий?
3. Получите формулу для вычисления полной вероятности.
4. В каком случае применяется формула полной вероятности? Приведите примеры.
5. Интерпретация формулы полной вероятности на графах.
6. Поясните смысл выражения «условная вероятность гипотезы».
7. Докажите формулу Байеса.
8. Как с помощью вероятностного графа можно «пересматривать» вероятности гипотез?

Задачи

61. Одна кость из полного набора домино утеряна. Какова вероятность того, что извлеченная из оставшихся кость «подходит» к утерянной?

62. Имеются три урны: в первой — 3 белых и 2 черных, во второй — 2 белых и 3 черных, в третьей — 5 белых шаров. Наугад выбирается урна и из нее извлекается один шар. Этот шар оказался белым. Найдите вероятность того, что шар вынут из первой урны.

63. В первой урне 2 белых и 5 черных шаров, во второй — 3 белых и 4 черных. Из первой урны один шар переложен во вторую, после чего из второй урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

64. В двух пакетах по 20 конфет одинаковой формы, в первом пакете 5 конфет с начинкой, а во втором — 8. Наугад выбранная конфета оказалась с начинкой. Найдите вероятность того, что она была вынута из второго пакета.

65. Имеются три колоды в 32 карты, две — в 36 и одна — в 52. Выбираем колоду и из нее одну карту. Какова вероятность того, что вынутая карта окажется тузом?

66. Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и две коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9, а завода № 2 — 0,8. Сборщик извлек стандартную деталь из наудачу взятой коробки. Найдите вероятность того, что она изготовлена заводом № 1.

67*. В первой урне содержатся один белый и один черный шар, а во второй — один белый и два черных шара. Найдите вероятность извлечения белого шара, если:

а) урна выбирается случайно и из нее извлекается шар;

б) из каждой урны извлекли по одному шару и из них выбирается шар;

в) из первой урны переложили во вторую один шар, а затем из нее извлекли шар.

68*. В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар окажется белым.

69**. Король Артур проводит рыцарский турнир, в котором порядок состязания определяется жребием. Среди восьми рыцарей, одинаково искушенных в ратном деле, два близнеца. Какова вероятность того, что они встретятся в поединке?

70**. Преподаватель шутки ради предложил студенту распределить по двум урнам два белых и один черный шар. Преподаватель выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар: если шар будет белый, то студент получает зачет по теории вероятностей. Каким образом студенту нужно распределить шары в урнах, чтобы иметь наибольшие шансы на получение зачета?

§ 4. Схема Бернулли

Под схемой Бернулли понимают конечную серию n повторных независимых испытаний с двумя исходами. Вероятность появления (удачи) одного исхода при одном испытании обозначают $p = P(Y)$, а непоявления (неудачи) его $P(H) = q = 1 - p$. Я. Бернулли установил, что вероятность ровно m успехов в серии из n повторных независимых испытаний вычисляется по следующей формуле:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

То значение m_0, при котором число $P_n(m)$ является максимальным из множества $\{P_n(m)\}$, называется **наивероятнейшим**, и оно удовлетворяет условию

$$np - q \le m_0 \le np + p \ (m_0 \in Z).$$

Формулу Бернулли можно обобщить на случай, когда при каждом испытании происходит одно и только одно из k событий с вероятностью p_i ($i = 1, 2, ..., k$). Вероятность появления m_1 раз

первого события и m_2 — второго и m_k — k-го находится по формуле

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} \cdot p^{m_1} \cdot p^{m_2} \cdot ... \cdot p^{m_k}.$$

Пример 36. Система радиолокационных станций ведет наблюдение за группой объектов, состоящей из 8 единиц. Каждый объект может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы один из объектов будет потерян.

Решение. Пусть событие A = {потерять системой радиолокационных станций хотя бы один объект}, тогда $P(A)=P_8(1)+P_8(2)+...+$ $+P_8(8)$.

Проще найти вероятность противоположного события — ни один объект не потерян.

$$P(\bar{A}) = P_8(0) = C_8^0 \cdot (0{,}1)^0 \cdot (0{,}9)^8 \approx 0{,}43 \text{ и } P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}57.$$

Пример 37. На I курс педуниверситета поступило 1100 студентов. Найти наиболее вероятное число первокурсников ЯГПУ, родившихся в один день — в день знаний 1 сентября.

Решение. В нашем случае $p \approx \frac{1}{365}$, n = 1100. Используем соотношение для наивероятнейшего числа m_0:

$$1100 \cdot \frac{1}{365} - \frac{364}{365} \le m_0 \le 1100 \cdot \frac{1}{365} + \frac{1}{365}.$$

Учитывая, что m_0 целое число, получаем m_0 = 3.

Пример 38. Сколько раз придется бросать игральную кость, чтобы наивероятнейшее число появления шестерки было бы 10?

Решение. По условию задачи имеем наивероятнейшее число m_0 = 10 и вероятность выпадения шестерки при одном подбрасывании игральной кости $p = \frac{1}{6}$, тогда $n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 10 \le n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$. Это двойное неравенство равносильно системе двух неравенств:

$$\begin{cases} n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 10 \\ n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ge 10 \end{cases} \qquad 59 \le n \le 65.$$

Пример 39. В Ярославле 50% школьников изучают английский язык, 30% — немецкий и 20% — французский. Какова вероятность того, что из девяти слушателей подготовительного отделения физмата четверо изучали в школе английский язык, трое — немецкий и двое — французский?

Решение. По условию задачи $n = 9$, $m_1 = 4$, $p_1 = 0{,}5$, $m_2 = 3$, $p_2 = 0{,}3$, $m_3 = 2$, $p_3 = 0{,}2$ и

$$P_9(4,3,2) = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!}(0{,}5)^4 \cdot (0{,}3)^3 \cdot (0{,}2)^2 \approx 0{,}0085 .$$

Пример 40 (задача С. Пепайса). Пепайс предложил Ньютону следующую задачу. Какое из событий более вероятно:

A = {появление по крайней мере одной шестерки при подбрасывании 6 костей},

B = {появление хотя бы двух шестерок при подбрасывании 12 костей} и

C = {появление не менее трех шестерок при бросании 18 костей}?

Решение. Проще находить, а затем сравнивать вероятности противоположных событий.

$$P(\overline{A}) = P_6(0) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}335 ;$$

$$P(\overline{B}) = P_{12}(0) + P_{12}(1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\cdot\frac{1}{6} \approx 0{,}381 ;$$

$$P(\overline{C}) = P_{18}(0) + P_{18}(1) + P_{18}(2) =$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{18} + 18\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\cdot\frac{1}{6} + C_{18}^2\left(\frac{5}{6}\right)^{16}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}403 .$$

Отсюда $P(\overline{A}) < P(\overline{B}) < P(\overline{C})$, или $1 - P(A) < 1 - P(B) < 1 - P(C)$, т. е. $P(A) > P(B) > P(C)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие повторные испытания называются независимыми? Примеры.
2. Что называют схемой Бернулли?

3. Сколько ветвей содержит дерево исходов при четырех испытаниях схемы Бернулли?

4. Какие способы получения формулы Бернулли вы знаете?

5. В чем заключаются обобщения схемы Бернулли?

6. Какое число называют наивероятнейшим? Как его найти?

7. Сколько существует наивероятнейших чисел?

8. В каком случае наивероятнейшее число равно нулю?

Задачи

71. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника в теннис два сета из четырех или три из шести?

72. Пассажиру, путешествующему в купейном вагоне, удобно, когда все его попутчики — лица того же пола, что и он. Сколько процентов таких пассажиров случайно попадают в удобные условия?

73. В Ярославской области 60% школьников изучают английский язык, 30% — немецкий и 10% — французский. Какова вероятность того, что из десяти слушателей подготовительного отделения физмата пятеро изучали в школе английский язык, трое — немецкий и двое — французский?

74. В семье четверо детей. Найдите вероятность того, что среди них поровну мальчиков и девочек.

75. Найдите наибольшее вероятное число выпадания шести очков при 100 подбрасываниях игральной кости.

76. Среди облигаций займа 10% выигравших. Найдите вероятность того, что из четырех взятых облигаций:

а) все облигации выиграют;

б) хотя бы одна облигация выиграет;

в) выиграет ровно одна облигация.

77*. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 99 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступления события в этих испытаниях равно 60?

78*. (Задача де Мере). Сколько раз надо бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей $\frac{1}{2}$, можно было утверждать, что хотя бы раз появится 12 очков?

79**. Найдите вероятностным способом частичную сумму убывающей геометрической прогрессии.

80**. Контрольное задание состоит из десяти вопросов, предусматривающих ответы «да» и «нет». Подсчитать вероятность того,

что студент, давший 8 верных ответов, знает 8 вопросов, если известно, что 10% студентов знают 6 вопросов, 20% студентов — 7 вопросов, 30% — 8 вопросов, а остальные знают более 8 вопросов.

§ 5. Приближенные формулы для схемы Бернулли

Нахождение вероятностей $P_n(m)$ по формуле Бернулли при достаточно больших значениях n сопряжено с большим числом вычислений. Это обстоятельство было отмечено в ряде работ математиков начала XVIII в., посвященных демографическим проблемам. Возникла необходимость в асимптотических формулах как для $P_n(m)$, так и для $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$.

Из локальной предельной теоремы Муавра—Лапласа следует приближенная формула

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$ и таблица значений функции ϕ приведена в приложении 1.

Из интегральной теоремы Муавра—Лапласа следует приближенная формула для вычисления числа «успехов» от m_1 до m_2

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа, таблица значений которой приведена в приложении 2.

Из предельной теоремы Пуассона следует приближенная формула:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

причем $\lambda = np$, а таблица значений функции $\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$ имеется в приложении 3.

Формулы Бернулли, Муавра—Лапласа и Пуассона применяются в тех случаях, когда рассматриваются испытания, удовлетворяющие схеме Бернулли. При этом важно правильно выбрать соответствующую формулу.

Пример 41. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,8. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 400 изделий 315 будут первого сорта.

Решение. Эксперимент заключается в проведении 400 повторных независимых испытаний с двумя исходами и постоянной вероятностью в каждом. Следовательно, схема Бернулли применима. Поскольку n достаточно велико, то используем локальную теорему Муавра—Лапласа при $n = 400$, $m = 315$, $p = 0{,}8$.

$$P_{400}(315) \approx \frac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\cdot\varphi\left(\frac{315-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\varphi\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{1}{8}\varphi(-0{,}625).$$

По таблице значений ϕ находим $\phi(0{,}625) \approx 0{,}33$, так как функция ϕ четная.

$$P_{400}(315) \approx \frac{1}{8}\cdot 0{,}33 \approx 0{,}04\,.$$

Пример 42. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что из взятых на проверку 400 изделий первого сорта будут от 300 до 340 изделий.

Решение. По условию задачи $n = 400$, $m_1 = 300$, $m_2 = 340$, и для вычисления $P_{400}(300 \le m \le 340)$ используем интегральную теорему Муавра—Лапласа:

$$P_{400}(300 \le m \le 340) \approx \Phi\left(\frac{340-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{300-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$

$$=\Phi(2{,}5)-\Phi(-2{,}5)=2\Phi(2{,}5)\approx 2\cdot 0{,}494=0{,}988.$$

Пример 43. Среди шариковых авторучек в среднем при упаковке, отгрузке и доставке в магазин повреждаются 0,02%. Найти вероятность того, что среди 5000 авторучек окажутся поврежденными не более трех ручек.

Решение. Применим формулу Пуассона для $n = 5000$, $p = 0{,}0002$ и $\lambda = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$, находя приближенные значения соответствующих вероятностей в приложении 3. Тогда

$$P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) \approx$$

$$\approx 0{,}34 + 0{,}37 + 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}98.$$

Пример 44. Два процента электроламп, изготовленных на заводе, в среднем имеют брак. На контроль отобрано 1000 ламп. Оцените вероятность того, что относительная частота бракованных ламп отличается от средней вероятности не более чем на один процент.

Решение. Надо оценить вероятность неравенства

$$\left|\frac{m}{1000} - 0{,}02\right| \le 0{,}01 \text{ или } 10 \le m \le 30.$$

Применяя интегральную формулу Муавра—Лапласа для $n = 1000$, $p = 0{,}02$ и $10 \le m \le 30$, получаем

$$P(10 \le m \le 30) \approx \Phi\left(\frac{30 - 1000 \cdot 0{,}2}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 1000 \cdot 0{,}2}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98}}\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi(2{,}26) \approx 2 \cdot 0{,}488 = 0{,}976.$$

Пример 45. Опыт Бюффона состоял в бросании монеты 4040 раз, из которых в 2048 случаях выпал «герб». Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «герба» отклонится от ее вероятности не более чем в опыте Бюффона.

Решение. Поскольку вероятность выпадения «герба» при одном испытании равна 0,5, то в опыте Бюффона найдем отклонение $\varepsilon = \left|\frac{2048}{4040} - 0{,}5\right| = 0{,}0069$. Используя интегральную теорему Муавра—Лапласа, получаем

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0{,}5\right|\le\varepsilon\right\}=P\left\{0{,}5-\varepsilon\le\frac{m}{n}\le 0{,}5+\varepsilon\right\}=$$

$$=P\{0{,}5n-\varepsilon n\le m\le 0{,}5n+\varepsilon n\}\approx$$

$$\approx\Phi\left(\frac{0{,}5n+\varepsilon n-n\cdot 0{,}5}{\sqrt{n\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)-\Phi\left(\frac{0{,}5n-\varepsilon n-n\cdot 0{,}5}{\sqrt{n\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(2\varepsilon\cdot\sqrt{n}\right).$$

При $n = 4040$ и $\varepsilon = 0{,}0069$ по таблице приложения 2 находим $\Phi(0{,}877) \approx 0{,}31$ и искомую вероятность 0,62.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Муавра—Лапласа.
2. Нарисуйте графики функций Лапласа.
3. В чем смысл теоремы Пуассона?
4. В каком случае применяют формулу Пуассона?
5. В каком случае применяются приближенные формулы?
6. Преимущества и недостатки приближенных формул.
7. Применения интегральной теоремы Муавра—Лапласа.
8. В каком случае $P(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ имеет два максимальных значения?

Задачи

81. Вероятность выигрыша на один билет лотереи равна 0,02. Какова вероятность того, что из 100 билетов выигрыш выпадет на два билета; хотя бы на один билет?

82. Найдите вероятность того, что событие A наступит ровно 40 раз в 200 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

83. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

84. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найдите вероятность того, что среди 500 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 80 до 100 деталей.

85. В университете обучаются 5840 студентов. Найдите наиболее вероятное число студентов университета, родившихся 1 января, и вероятность этого события.

86. Игральную кость бросают 120 раз. Найдите наивероятнейшее число выпадений шестерки и ее вероятность.

87*. Телефонная станция получает в среднем 15 вызовов в минуту. Какова вероятность того, что за 4 с она получит ровно 2 вызова?

88*. Вероятность того, что деталь нестандартна, равна $p = 0{,}1$. Найдите вероятность того, что среди случайно отобранных 100 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклоняется от вероятности 0,1 по абсолютной величине не более чем на 0,02.

89**. В школе 18 классов по 30 человек. Сколько отличников должно быть в школе, чтобы с вероятностью, большей 0,9, можно было бы быть уверенным в том, что в наудачу выбранном классе окажется не меньше двух отличников?

90**. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью, равной 0,7, можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления «герба» от его вероятности окажется по абсолютной величине не более 0,02?

§ 6. Вероятность и числовые ряды

В схеме Бернулли снимем ограничение на конечность числа испытаний и будем «проводить» повторные испытания (как независимые, так и зависимые) неограниченное число раз.

Рассмотрим урну, в которой содержатся белые и черные шары. Проводим эксперимент, который состоит в изъятии шара из урны до тех пор, пока не будет вынут белый шар.

Пусть событие A = {извлечь белый шар} и A_i = {извлечь белый шар при i-м испытании} ($i = 1, 2, 3, \ldots$).

Тогда
$$A = A_1 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \ldots + \\ + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-1} \cdot A_n + \ldots,\ A_i \cdot A_j = \varnothing\ (i \neq j)$$

и
$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) + \ldots + \\ + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-1} \cdot A_n) + \ldots,$$

а $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n \cdot \ldots) \overset{опр}{=} \lim\limits_{n\to\infty} P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n)$.

Заметим, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ и если, например, $P(\overline{A}) = 0$, то $P(A) = 1$. Это обстоятельство используем при решении следующих примеров.

Пример 46 (сумма убывающей геометрической прогрессии). Доказать, что $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$, где q — рациональное число, удовлетворяющее неравенству $0 < q < 1$.

Решение 1 (вероятностное). Примем за $p = P(A_i)$ и $q = 1 - p = P(\overline{A}_i)$. Проводим повторные вынимания шара с возвратом до появления белого шара. Вероятностное дерево эксперимента имеет вид:

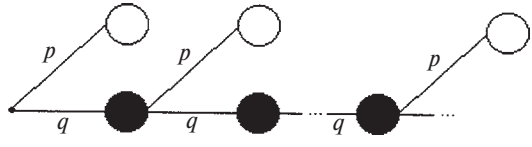


Рис. 23

Пользуясь определением суммы ряда и вероятностным деревом, получим, что $P(A) = p + q \cdot p + q^2 \cdot p + \ldots + q^{n-1} \cdot p + \ldots$

и $P(\overline{A}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Наконец, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1$ отсюда получаем, что

$$p + q \cdot p + q^2 \cdot p + \ldots + q^{n-1} \cdot p + \ldots = 1$$

или $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{1-q}$.

Решение 2 (геометрическое). Заполним единичный квадрат прямоугольниками, пары сторон которых лежат на сторонах квадрата, а вершинами прямоугольников выбираем соседние точки, удаленные от сторон квадрата на расстояния $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, q^n, \ldots$

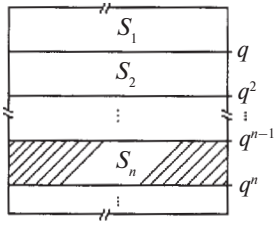


Рис. 24

Поскольку $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots = 1$, то
$(1 - q) + (q - q^2) + (q^2 - q^3) + \ldots + (q^{n-1} - q^n) + \ldots = 1$,

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-q}.$$

Пример 47. Доказать, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots=1$.

Решение 1. Возьмем урну, в которой находятся один белый и один черный шары. Вынимаем один шар; если он белый, то эксперимент на этом заканчивается, а если черный, то возвращаем его обратно в урну и добавляем еще один черный шар. Вероятностное дерево, соответствующее данному эксперименту, следующее:

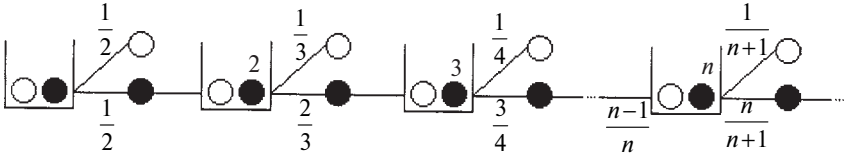


Рис. 25

Это позволяет записать

$$P(\bar{A})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Откуда

$$1=P(A)+P(\bar{A})=P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\ldots$$

что и требовалось доказать.

Решение 2. Заполним единичный квадрат прямоугольниками, пары сторон которых лежат на сторонах квадрата, а их вершинами выбираем соседние точки, удаленные от одной из сторон квадрата на расстояние $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}, \ldots$:

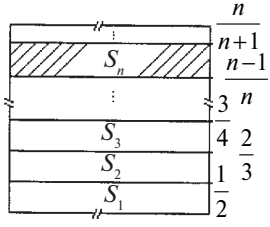


Рис. 26

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots = 1,$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) + \ldots = 1,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots = 1.$$

Пример 48. Найти суммы рядов:

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots$

б) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \ldots$

Решение.

а) Из урны, содержащей два белых и один черный шары, извлекаем шар. Если он белый, то на этом испытание заканчиваем, а если черный, то возвращаем его обратно в урну и добавляем еще один черный шар. И так до тех пор, пока не «натолкнемся» на белый шар.

Построим соответствующее вероятностное дерево исходов:

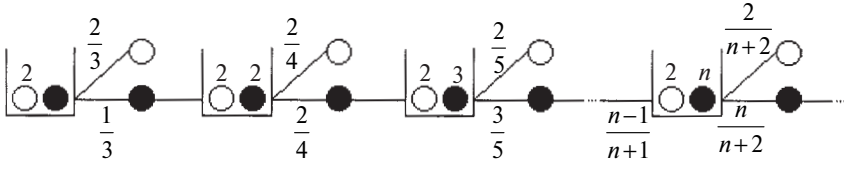


Рис. 27

$$P(\bar{A})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}=0.$$

Следовательно, $P(A) = 1$,

$$P(A)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+2}+\ldots$$

Разделим обе части равенства на 2·2, получим искомую сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots=\frac{1}{4}.$$

б) Рассмотрим, как и в предыдущем случае, урну, содержащую два белых и один черный шар. Проводим извлечения шара до появления белого, но в случае извлечения черного шара возвращаем его и уже добавляем два черных шара.

Получаем следующее вероятностное дерево:

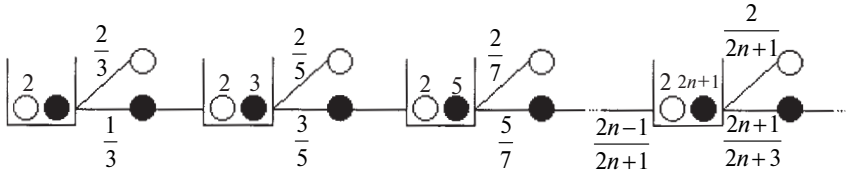


Рис. 28

$$P(\bar{A})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0.$$

$$1=P(A)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2}{2n+3}+\ldots$$

Разделив обе части равенства на два, получаем искомую сумму ряда.

Решение 2.

а) Заполним единичный квадрат трапециями с общей высотой — одной из сторон квадрата. Вершинами трапеций выбираем соседние точки на параллельных сторонах квадрата и удаленных от общей высоты на расстояние $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ соответственно, на другой стороне — $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{n}{n+2}, \ldots$

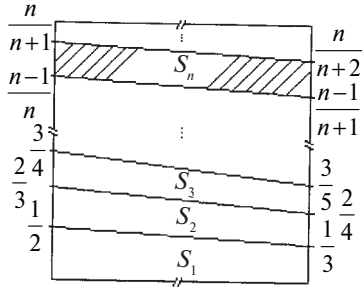


Рис. 29

$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots = 1$, т. е.

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}\right)\right]+\ldots=1,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{1\cdot2\cdot3}+\frac{8}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{3n+2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots\right)=1,$$

$$\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots\right)=1.$$

Используя результат примера 47, получаем

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots=$$

$$=1-\frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

б) Построения, аналогичные решению 2 примера 47.

Замечание 1. Приведенные вероятностные и геометрические модели суммирования числовых рядов просты для применения и обладают очевидным преимуществом наглядности по сравнению с традиционным подходом.

Замечание 2. Предложенный вероятностный метод применим для суммирования рядов типа:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{(n+k)!}=\frac{1}{k\cdot k!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^{n-1}\cdot n}{(n+k)!}=\frac{1}{k!}$, $(k\in N)$,

а при определенных вариациях и для других рядов.

Замечание 3. Суммирование отдельных рядов можно рекомендовать для факультативов по математике средней школы.

Пример 49. Двое поочередно вынимают карту и возвращают ее обратно в колоду из 36 карт. Первый вынимающий делает ставку на «пики», а второй — на карту с картинками. Найти отношения вероятностей на выигрыш игроков.

Решение. Составим вероятностное дерево испытания:

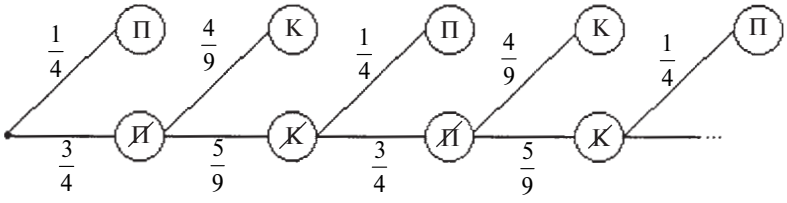


Рис. 30

$$P_1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{4}+\ldots=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{12}}=\frac{3}{7},$$

$$P_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{9}\right)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{12}}=\frac{4}{7}\cdot$$

Откуда $\frac{P_1}{P_2}=\frac{3}{4}$.

Пример 50. В урне пять черных и один белый шар. Два друга по очереди вынимают по одному шару, и побеждает тот, кому первому достанется белый шар. Какой совет вы дали бы игрокам относительно выбора шаров — с возвратом или без возврата?

Решение. Составим вероятностное дерево исходов для вынимания шаров без возврата:

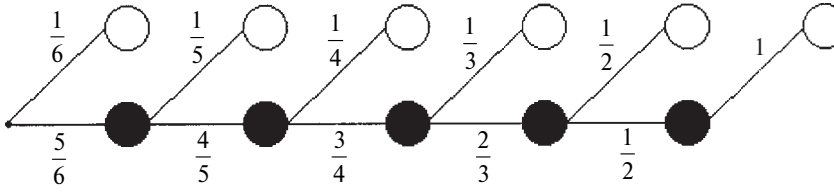


Рис. 31

$$P_1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\left(=P_2\right).$$

Для вынимания шаров с возвратом вероятностное дерево исходов выглядит следующим образом:

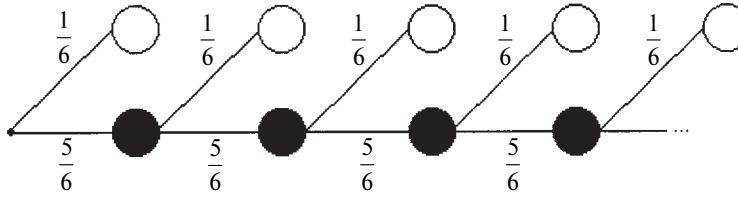


Рис. 32

$$P_1=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11},\ P_2=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}.$$

Поэтому если ваш друг вынимает шар первым, то для него предпочтительнее выбрать схему с возвратом, а для второго — без возврата.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие ряды рассматриваются (и как?) в школьном курсе математики?
2. Необходимое условие сходимости числового ряда.
3. Продолжение схемы Бернулли для бесконечного числа испытаний.
4. Геометрическая прогрессия и ее вероятностный и геометрический способы суммирования.
5. В чем заключаются достоинства и недостатки вероятностного и геометрического способов суммирования геометрической прогрессии?
6. Основная идея вероятностного способа суммирования числовых рядов.
7. На чем основаны вероятностный и геометрический способы суммирования числовых рядов?
8. Приведите примеры использования числовых рядов для оценки шансов игроков на победу в азартой игре.

Задачи

91. Докажите, что

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=1.$$

92. Найти суммы следующих рядов:

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)}+\ldots;$

б) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$

93. Докажите, что

а) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+$

$$+\frac{1}{n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots=\frac{1}{18};$$

б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots=\frac{1}{3}.$

94. Найдите сумму ряда:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots .$$

95. При последовательном вынимании с возвратом кости из полного набора домино первый игрок поставил на нечетную сумму, а второй — на четную. В каком соотношении находятся их шансы на победу?

96. Как относятся шансы на победу, если первый игрок поставил на простую цифру, а второй — на составную (цифры выбираются случайно для каждого и с повторением)?

97*. Покажите вероятностным и геометрическим способами, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}\cdot n}{(n+2)!}=\frac{1}{2}.$$

98*. Докажите, что

$$1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-q)^2}$$

для любого рационального q ($0 < q < 1$).

99**. Найдите вероятностным и геометрическим способами суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}\cdot n}{(n+3)!}$;

б) $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{10}+\ldots+\frac{3^{n-1}\cdot(3n-2)}{4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}+\ldots$.

100**. В урне три черных и один белый шар. Два игрока по очереди вынимают шары из этой урны, а побеждает тот, кому первому достался белый шар. Первый игрок имеет право выбирать, с возвращением или без возвращения шара проводить испытания. Какое решение ты принял(а) бы на его месте?

§ 7. Цепи Маркова

Пусть $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ — множество состояний некоторой физической системы. В любой момент времени система может находиться в одном состоянии и меняет свое состояние только в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$. Для однородных цепей Маркова

вероятность p_{ij} перехода системы из состояния E_i в состояние E_j за один шаг зависит только от того, из какого состояния в какое осуществлялся переход.

Вероятности перехода p_{ij} удобно располагать в виде матрицы. Обозначим ее

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix}$$

и будем называть *матрицей перехода* однородной цепи Маркова за один шаг. Матрица **P** обладает следующими свойствами:

а) $0 \le p_{ij} \le 1$; б) $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$ $(i = 1, 2, ..., k)$;

т. е. сумма элементов каждой строки матрицы перехода равна единице. Квадратные матрицы, для которых выполняются условия а) и б), называются *стохастическими*.

Вектор $a = (a_1, a_2, ...a_k)$, где $a_i = P(E_i)$ — вероятность появления состояния E_i $(i = 1, 2, ..., k)$ в начальном испытании, называется *вектором начальных вероятностей*.

Свойства однородных марковских цепей полностью определяются вектором начальных вероятностей и матрицей вероятностей перехода. В некоторых случаях вместо матрицы **P** используют ориентированный граф, вершинами которого являются состояния цепи, а стрелка, идущая от состояния E_i в состояние E_j с числом p_{ij} рядом с ней, показывает, что из состояния E_i возможен переход в состояние E_j с вероятностью p_{ij}. В том случае, когда $p_{ij} = 0$, соответствующее ребро не проводится. В случае однородных цепей Маркова с вектором начальных вероятностей появляется еще начальная вершина графа, которая соединяется с состоянием E_i ребром с числом a_i рядом с ним.

Можно показать, что матрица перехода $\mathbf{P}^{(n)}$ за n шагов находится как P^n.

Если из состояния E_i система может перейти в состояние E_j с положительной вероятностью за конечное число шагов, то говорят, что E_j достижимо из E_i. Состояние E_i называется *существенным*, если для каждого состояния E_j, достижимого из E_i, E_i

достижимо из E_j. В противном случае E_i называется *несущественным* состоянием.

Понятие марковской цепи принадлежит русскому математику А.А. Маркову, чьи первые статьи по этому вопросу при решении лингвистических проблем были опубликованы в 1906—1908 гг.

Пример 51. Частица, находящаяся на прямой, движется по этой прямой под влиянием случайных толчков, происходящих в моменты t_1, t_2, t_3, ... Частица может находиться в точках с целочисленными координатами 1, 2, 3, 4, 5; в точках 1 и 5 находятся отражающие стенки. Каждый толчок перемещает частицу вправо с вероятностью p и влево с вероятностью q, если частицы не находятся у стенки. Если же частица находится у стенки, то любой толчок переводит ее на единицу внутрь промежутка [1, 5]. Найти матрицу перехода **P** и ей соответствующий граф.

Решение. Пусть $E_i = (t)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда граф перехода выглядит следующим образом:

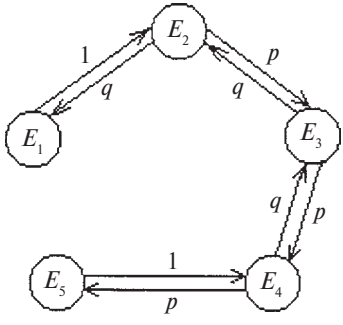


Рис. 33

а матрица перехода — $$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пример 52. Вероятности перехода за один шаг в цепях Маркова задаются матрицей:

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Требуется:

а) найти число состояний;

б) установить, сколько среди них существенных и несущественных;

в) построить граф, соответствующий матрице **P**.

Решение.

а) 4 состояния;

б) состояния E_1, E_2 несущественны, поскольку остальные состояния достижимы из них, но E_1 недостижимо из E_4, а E_2 недостижимо из E_3; состояния E_3 и E_4 являются существенными;

в)

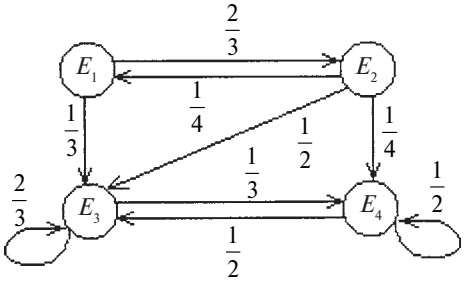


Рис. 34

Пример 53 (задача о скрещивании). В близко родственном скрещивании две особи, и среди их прямых потомков случайным образом выбираются две особи разного пола. Они вновь скрещиваются, и процесс этот продолжается бесконечно. Каждый родительский ген может передаваться с вероятностью $\frac{1}{2}$, и последовательные испытания независимые. Имея три генотипа AA, Aa, aa для каждого родителя, мы можем различать шесть комбинаций родителей, которые пометим следующим образом:

$E_1 = \text{AA} \times \text{AA}$, $E_2 = \text{AA} \times \text{Aa}$, $E_3 = \text{AA} \times \text{aa}$, $E_4 = \text{Aa} \times \text{Aa}$, $E_5 = \text{Aa} \times \text{aa}$, $E_6 = \text{aa} \times \text{aa}$. Найдите граф и матрицу перехода.

Решение. $E_1 \xrightarrow{1} E_1$. Рассмотрим, какое потомство и с какой вероятностью может быть у особей разного пола, если они выбираются из E_2.

Пусть B_i = {i-й потомок}, $i = 1, 2$ и B_1, B_2 — разного пола, тогда варианты потомков и их вероятности можно найти по следующему графу:

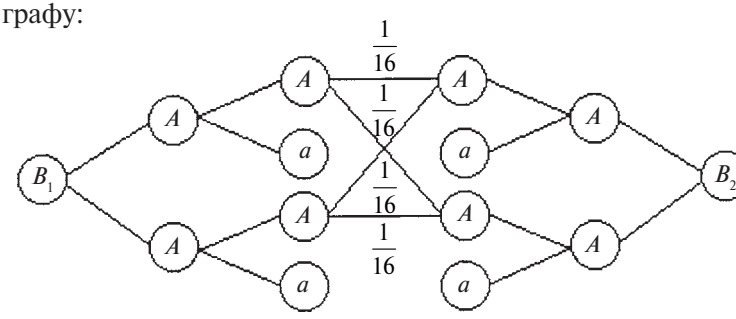


Рис. 35

Получаем, что $E_2 \xrightarrow{4/16} E_1$, $E_2 \xrightarrow{1/2} E_2$, $E_2 \xrightarrow{1/4} E_4$.

Аналогично находим и вероятности других переходов:

$E_3 \xrightarrow{1} E_4$, $E_4 \xrightarrow{1/16} E_1$, $E_4 \xrightarrow{4/16} E_2$, $E_4 \xrightarrow{2/16} E_3$, $E_4 \xrightarrow{4/16} E_4$,

$E_4 \xrightarrow{4/16} E_5$, $E_4 \xrightarrow{1/16} E_6$, $E_5 \xrightarrow{4/16} E_4$, $E_5 \xrightarrow{8/16} E_5$, $E_5 \xrightarrow{4/16} E_6$,

$E_6 \xrightarrow{1} E_6$.

Тогда искомый *граф перехода* выглядит следующим образом:

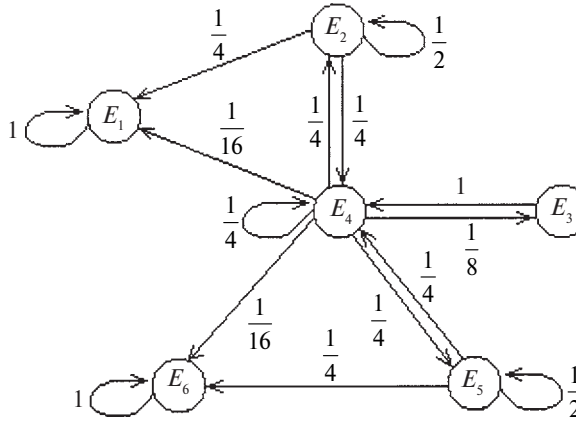


Рис. 36

а матрица перехода $-\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 1/8 & 1/4 & 1/4 & 1/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Пример 54. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Распределение по состояниям в момент времени $t = 0$ определяется вектором (0,6, 0,1, 0,3). Найти распределения по состояниям в момент $t = 2$.

Решение. Построим граф, соответствующий вектору начальных вероятностей и матрице перехода:

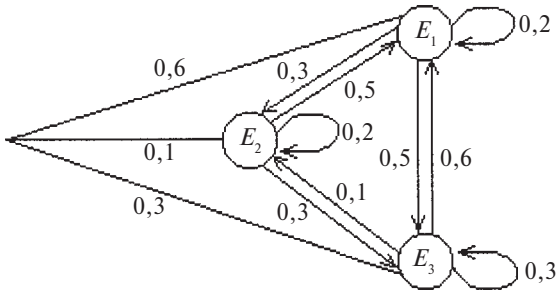


Рис. 37

По этому графу находим распределение по состояниям в момент $t = 2$:

$P(E_1) = (0{,}6\cdot(0{,}2)^2 + 0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}5 + 0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}6) + (0{,}1\cdot0{,}5\cdot0{,}2 + 0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}5 + 0{,}1\cdot0{,}3\cdot0{,}6) + (0{,}3\cdot0{,}6\cdot0{,}2 + (0{,}3)^2\cdot0{,}6) + (0{,}3\cdot0{,}1\cdot0{,}5) = 0{,}437$;

$P(E_2) = (0{,}1\cdot(0{,}2)^2 + 0{,}1\cdot0{,}5\cdot0{,}3 + 0{,}1\cdot0{,}3\cdot0{,}1) + 0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}2 + 0{,}6\cdot0{,}2\cdot0{,}3 + 0{,}6\cdot0{,}5\cdot0{,}1) + (0{,}3\cdot0{,}1\cdot0{,}2 + (0{,}3)^2\cdot0{,}1 + 0{,}3\cdot0{,}6\cdot0{,}3) = 0{,}193$;

$P(E_3) = 0{,}37$.

Пример 55. Доказать, что $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$ для двух состояний цепи Маркова.

Решение. Пусть цепь Маркова с двумя состояниями E_1 и E_2 задана своей матрицей перехода $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

Докажем утверждение методом математической индукции.

Пусть $n = 2$. Тогда

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11}^2 + p_{12} \cdot p_{21} & p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{21} \cdot p_{11} + p_{21} \cdot p_{22} & p_{21} \cdot p_{12} + p_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Вероятности перехода за два шага удобно находить по графу перехода:

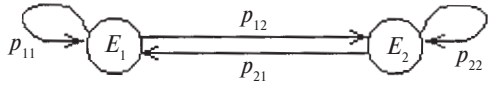


Рис. 38

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11}^2 + p_{12} \cdot p_{21} & p_{11} \cdot p_{12} + p_{12} \cdot p_{22} \\ p_{21} \cdot p_{11} + p_{21} \cdot p_{22} & p_{21} \cdot p_{12} + p_{22}^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Следовательно, $\mathbf{P}^{(2)} = \mathrm{P}^2$, и первый шаг метода математической индукции выполняется. Предположим далее, что при $n = k$ проверяемое утверждение истинно, т. е. $\mathbf{P}^{(k)} = \mathbf{P}^k$, тогда матрица перехода за $k + 1$ шаг

$\mathbf{P}^{(k+1)} = \mathbf{P}^{(k)} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^k \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^{k+1}$, что и требовалось доказать.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое цепь Маркова?
2. Какие цепи Маркова называются однородными?
3. Как задаются однородные цепи Маркова?

4. Какие матрицы называются стохастическими?
5. Граф перехода цепи Маркова.
6. Как находится матрица перехода за n шагов?
7. Какое состояние системы называется существенным?
8. Вектор начальных вероятностей.

Задачи

101. Вероятности перехода задаются матрицей

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Чему равно число состояний? Найти вероятности перехода из одного состояния в другое за два шага.

102. Дана матрица вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

и вектор начальных вероятностей $\vec{a}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$. Найти распределение по состояниям в момент $t = 2$.

103. Система находится в одной из вершин правильного шестиугольника, причем в соседние вершины она переходит с вероятностью $^1/_6$, а в противоположную — с вероятностью $^2/_3$. Найти матрицу и граф перехода.

104. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}.$$

Вектор начальных вероятностей $\vec{a}(0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}7)$. Найти вероятность того, что через два шага система будет находиться в состоянии E_3.

105. Частица находится в одном из трех состояний E_1, E_2, E_3, которые выбираются в начальный момент с вероятностями $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_6$ соответственно. Под воздействием случайных толчков

система переходит в другое состояние с вероятностью $^1/_4$ и остается на месте с вероятностью $^1/_2$. Найти вероятность того, что через два толчка система будет находиться в состоянии E_1.

106. Вероятности перехода за один шаг в цепи Маркова задаются матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Найти число состояний и определить среди них существенные и несущественные. Построить граф, соответствующий матрице **P**.

107*. Бросаем игральную кость и условимся, что в момент n система находится в состоянии E_i, если i — наибольшее из чисел, выпавших в первых n бросаниях. Найти матрицу перехода **P** и ей соответствующий граф.

108*. Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли и определим, что в момент времени n наблюдается состояние E_1, если испытания с номерами $n - 1$, n привели к результату YY. Аналогично E_2, E_3, E_4 означают переходы YH, HY, HH. Найти матрицу перехода **P** и все ее степени.

109**. Доказать, что для однородной цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода $\mathbf{P} = (p_{ij})$ имеют место следующие соотношения:

а) $p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{k} p_{im} \cdot p_{mj}^{(n-1)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

б) $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$.

110**. В двух отделениях ящика находятся четыре шара. Каждую минуту случайным образом выбирается отделение и из него перекладывается в другое отделение один шар. В качестве состояний марковской цепи рассматривается число шаров в первом отделении. Найти матрицу перехода из состояния в состояние за один шаг.

§ 8. Аксиоматика теории вероятностей

Классическое определение вероятности случайного события предполагает конечное число всех исходов испытания. Но часто встречаются такие испытания, для которых число возможных

исходов бесконечно. В этом случае, если позволяют обстоятельства, используют понятие геометрической вероятности.

Геометрической вероятностью события A называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события *A*, к мере всей области исходов Ω

$$P(A)=\frac{\text{мера}\,A}{\text{мера}\,\Omega}.$$

Пример 56. Две студентки физмата договорились о встрече у деканата на большой перемене (40 мин), условившись каждая ждать другую не более 10 мин. Какова вероятность того, что встреча состоится?

Решение. Обозначим через x и y время в ч прихода к деканату студенток с начала перемены. Тогда $\Omega=\left\{(x,y)/0\le x\le\frac{2}{3},\ 0\le y\le\frac{2}{3}\right\}$ на плоскости $x0y$ (рис. 39). Область равновозможных значений x и y представлена квадратом Ω площадью $\frac{4}{9}$. Область благоприятных значений A = {встреча состоится} = $=\left\{(x,y)/0\le x\le\frac{2}{3},\ 0\le y\le\frac{2}{3},\ |y-x|\le\frac{1}{6}\right\}$ заключена между прямыми $y=x-\frac{1}{6}$ и $y=x+\frac{1}{6}$.

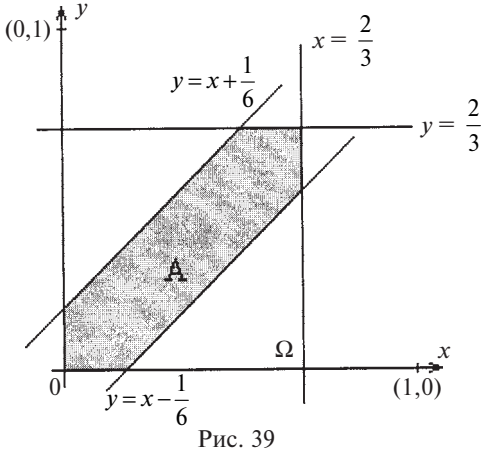


Рис. 39

$$S_A = \frac{4}{9} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{9}-\frac{1}{4}=\frac{7}{36},$$

следовательно, $P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega} = \dfrac{7/36}{4/9} = \dfrac{7}{16}$.

Пример 57. Палка длины l разломана на 3 части. Найти вероятность того, что из полученных частей можно составить треугольник.

Решение. Обозначим через x и y длины двух получившихся частей палки, тогда длина третьей части будет $l - x - y$. $\Omega = \{(x,y)/0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l\}$. Событие A = {из трех частей можно составить треугольник} выполняется, когда имеют место неравенства треугольника:

$$\begin{cases} x + y > l - x - y \\ x + (l - x - y) > y \\ y + (l - x - y) > x. \end{cases}$$

Итак, событие $A = \{(x,y)\ /\ 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l,\ x + y > \dfrac{l}{2},$ $y < \dfrac{l}{2}, x < \dfrac{l}{2}\}$ на плоскости $x0y$ представляет треугольник (рис. 40).

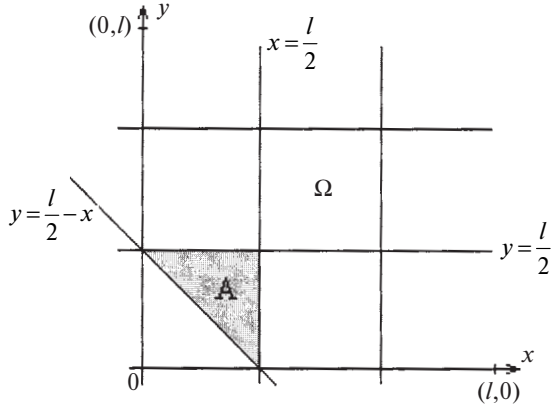


Рис. 40

Отсюда $P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega} = \dfrac{1}{8}$.

Рассмотренные выше классическая и геометрическая вероятности побуждают на выделение наиболее существенных и общих для них свойств, которые можно было бы принять в качестве основных аксиом при построении математического основания теории вероятностей.

Пусть каждому событию A ставится в соответствие некоторое число $P(A)$, которое удовлетворяет общепринятой системе аксиом Колмогорова:

1. Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \le P(A) \le 1 \text{ и } P(\Omega) = 1.$$

2. Если A и B независимые события ($A \cdot B = \varnothing$), то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

3. Если имеется счетное множество несовместных событий A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ($A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $i \ne j$), то $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Выведем из предложенных аксиом некоторые «классические» формулы.

Пример 58. Доказать, что $P(A \cdot B) = P(A) - P(A \cdot \overline{B})$.

Решение. $A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$ и $(A \cdot B) \cdot (A \cdot \overline{B}) = \varnothing$. Следовательно, по второй аксиоме $P(A) = P(A \cdot B + A \cdot \overline{B}) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B})$ и $P(A \cdot B) = P(A) - P(A \cdot \overline{B})$.

Пример 59. Найти $P(A + B)$.

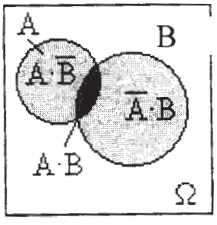


Рис. 41

Решение. $A + B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B$. По следствию из второй аксиомы $P(A + B) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B)$. Но $A = A \cdot (B + \overline{B}) = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$; $P(A) = P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B})$; $B = B \cdot (A + \overline{A}) = B \cdot A + B \cdot \overline{A}$; $P(B) = P(B \cdot A) + P(B \cdot \overline{A})$; откуда $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B)$ и $P(B \cdot \overline{A}) = P(B) -$

$- P(B{\cdot}A)$. Следовательно, $P(A + B) = [P(A) - P(A{\cdot}B)] + [P(B) - P(B{\cdot}A)] + P(A{\cdot}B) = P(A) + P(B) - P(A{\cdot}B)$.

Пример 60. Доказать, что $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A{\cdot}B)$, где $A\Delta B = (A+B) / (A{\cdot}B)$.

Решение. $A\Delta B = (A+B) / (A{\cdot}B) = A{\cdot}\overline{B} + B{\cdot}\overline{A}$ и $(A{\cdot}\overline{B}){\cdot}(B{\cdot}\overline{A}) = \varnothing$. Используем результат примера **58**:

$P(A{\cdot}\overline{B}) = P(A) - P(A{\cdot}B)$ и $P(B{\cdot}\overline{A}) = P(B) - P(A{\cdot}B)$.

Тогда $P(A\Delta B) = P(A{\cdot}\overline{B} + B{\cdot}\overline{A}) = P(A{\cdot}\overline{B}) + P(B{\cdot}\overline{A}) = [P(A) - P(A{\cdot}B)] + [P(B) - P(A{\cdot}B)] = P(A) + P(B) - 2P(A{\cdot}B)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Почему целесообразно введение геометрической вероятности?
2. Сравните свойства геометрической и классической вероятностей.
3. Возможно ли событие, если его геометрическая вероятность равна нулю?
4. Для чего можно использовать результат задачи Бюффона?
5. Приведите примеры конечно-аддитивной и счетно-аддитивной меры.
6. Приведите примеры конечно-аддитивной, но не счетно-аддитивной меры.
7. Получите классическую вероятность из аксиоматики Колмогорова.
8. Приведите простейшие следствия из аксиоматики Колмогорова.
9. На чем основан вероятностный способ суммирования числовых рядов?
10. Сравните геометрический и вероятностный способы суммирования числовых рядов.

Задачи

111. Точка брошена наудачу внутрь окружности радиуса r. Какова вероятность того, что расстояние точки от центра окружности меньше $r/3$?

112. В квадрат с вершинами в точках $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y < x^2$?

113. Шар радиуса r брошен в проволочную сетку, образующую квадраты со стороной $5r$. Какова вероятность того, что шар не заденет сетки?

114. Доказать, что сумма вероятностей полной группы событий равна единице.

115. Доказать, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

116. Найти вероятность суммы попарно несовместных событий.

117*. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где коэффициенты p и q выбраны наудачу на сегменте $[-1; 2]$, окажутся:

а) действительными;

б) отрицательными.

118*. Найти вероятность суммы трех событий.

119**. В любые моменты промежутка времени T равновозможны поступления в радиоприемник двух сигналов. Приемник будет забит (сигналы неразличимы), если промежуток времени между моментами поступления сигналов меньше t. Определите вероятность того, что приемник будет забит.

120**. Доказать, что «расстояние» $\rho(A, B)$, определенное по формуле $\rho(A, B) = P(A \Delta B)$, удовлетворяет неравенству треугольника.

Глава III
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В XVIII в. в работах Котса, Симпсона и Д. Бернулли начала развиваться теория ошибок измерений, возникшая в первую очередь под влиянием метрологии. Ошибка измерения в зависимости от случая может принимать различные значения. Эта позиция была высказана еще Галилеем, который ввел в обиход понятия «случайная» и «систематическая» ошибки измерения. «Случайная» ошибка зависит от многочисленных причин, влияние которых невозможно учесть и которые изменяются от измерения к измерению. Вот такая ошибка измерения и представляет собой случайную величину с каким-то распределением вероятностей.

Случайная величина X, связанная с некоторым испытанием, которое описывается пространством элементарных событий, — это функция, отображающая пространство Ω на подмножество действительных чисел. Если область значений этой функции конечное или счетное множество, то случайная величина называется *дискретной*. Дискретная случайная величина задается законом распределения — соотношением, устанавливающим связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями.

Закон распределения можно проиллюстрировать на графе:

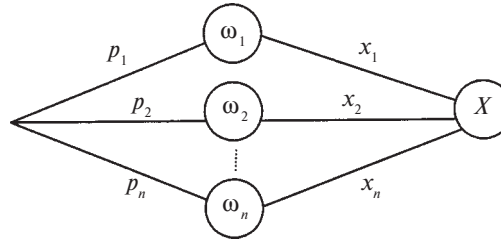
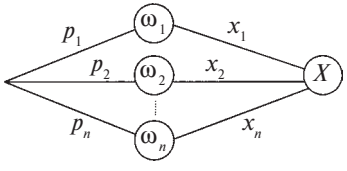


Рис. 42

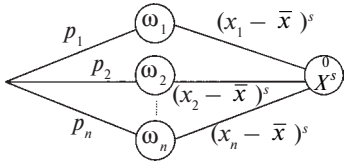
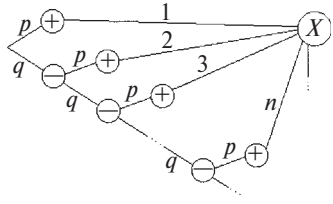
Этот граф будем называть графом распределения дискретной случайной величины X. По нему удобно находить главную характеристику положения случайной величины — математическое ожидание.

Рассмотрение раздела «Дискретные случайные величины» для будущего учителя математики разумно хотя бы потому, что вооружает его вероятностно обоснованными методами обработки и анализа экспериментальных данных, анкет и тестов, которые широко используются в практической деятельности. Разумно в школе применять и авторский подход по мотивации изучения случайных величин через рассмотрение различных азартных игр, как мы делали это в предыдущей главе, оценивая шансы игроков на победу в различных «считалках». В этом разделе будем пытаться давать рекомендации игроку по принятию (или непринятию) условий игры, по выработке вероятностно обоснованной стратегии игры. В основе такого подхода лежит вычисление математического ожидания величины выигрыша или других числовых характеристик этой случайной величины.

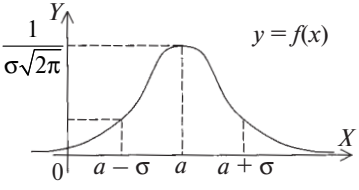
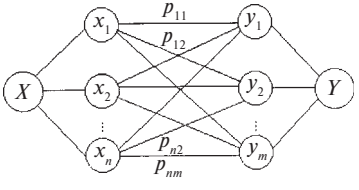
3.1. Опорная таблица

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Законы распределения дискретной случайной величины. Интегральная функция Индикатор события	$\sum_i p_i = 1$, где $p_i = P\{X = x_i\}$, $0 \le F(x) \le 1$; $P\{a \le x < b\} =$ $= F(b) - F(a)$; $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$; $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$	Находить закон распределения. Строить граф распределения 
Характеристики положения: начальные моменты, математическое ожидание, мода, медиана.	$M[C] = C$; $M[C \cdot X] = CM[X]$; $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$; $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$; X, Y — независимые случайные величины,	Находить начальные моменты как полный вес графа распределения X^s. Находить центральные моменты μ_s как полный вес графа распределения случайной величины

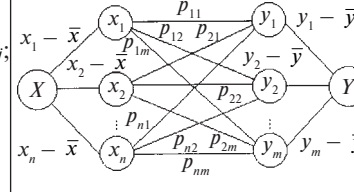
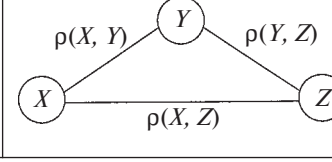
Продолжение табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Центральные моменты: дисперсия, среднее квадратическое отклонение	$D[X] = M[X^2] - M[X]^2$; $D[C] = 0$; $D[C \cdot X] = C^2 D[X]$; $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$	$\overset{0}{X}{}^s = (X - \bar{x})^s$: 
Равномерное распределение Биномиальный закон распределения Распределение Пуассона Геометрический закон распределения Гипергеометрическое распределение	$M[X] = \frac{n+1}{2}$, $D[X] = \frac{n^2-1}{2}$; $M[X] = np$, $D[X] = npq$; $M[X] = D[X] = \lambda$; $M[X] = \frac{1}{p}$, $D[X] = \frac{q}{p^2}$, $M[X] = \frac{k \cdot m}{n}$, $D[X] = \frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}$	Находить характеристики положения и рассеивания 
Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины $f(x) = F'(x)$	$f(x) \geq 0$, $P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$	Строить графики функций плотности вероятностей и интегральных функций распределения

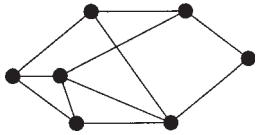
Продолжение табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Математическое ожидание $M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$. Дисперсия $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx$. Асимметрия $A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Эксцесс $E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$	$M[X]=\frac{a+b}{2}$, $D[X]=\frac{(a-b)^2}{12}$ для равномерного распределения X. $M[X]=\sigma_x=\frac{1}{\lambda}$ для показательного распределения	Вычислять характеристики положения (математическое ожидание, моду, медиану) и характеристики рассеивания (дисперсию, среднее квадратическое отклонение); асимметрию и эксцесс
Нормальный закон распределения $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$M[X] = a$, $D[X] = \sigma^2$, $A_s = E_k = 0$. Правило трех сигм: $P\{a - 3\sigma < a + 3\sigma\} \approx$ $\approx 0{,}998$	Находить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение по графику функции плотности вероятностей: 
Закон распределения дискретной двумерной случайной величины. Интегральная и дифференциальная функции распределения Условные математические ожидания	$f(x, y) \geq 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$; $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$; $P\{(x,y)\in D\}=$ $=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$	Находить закон распределения. Строить граф распределения 

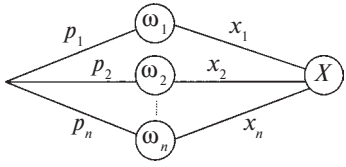
Окончание табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
	$M[Y/x_i]=$ $=\sum_j y_j P\{Y=y_j/X=x_i\}$; $M[Y/x_i]=$ $=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x_i)dy$	Находить законы распределения одномерных составляющих и их числовые характеристики. Строить графики линий регрессии
Начальные и центральные моменты. Ковариация $Cov(X,Y)=$ $=M[(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]$. Коэффициент корреляции $\rho(X,Y)=$ $=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}}$	$\mu_{2,0}=D[X]$; $\mu_{0,2}=D[Y]$; $\mu_{1,1}=Cov(X,Y)$; $Cov(X,Y)=$ $=\sum_i\sum_j (x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})p_{ij}$; $Cov(X,Y)=$ $=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})\times$ $\times f(x,y)dxdy$; $Cov(X,Y)=0$, если X, Y независимы; $\lvert\rho(X,Y)\rvert\le 1$; $\lvert\rho(X,Y)\rvert=1$, если $Y=A\cdot X+B$	Находить ковариацию и коэффициент корреляции по ковариационному графу: 
Многомерные случайные величины	$\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$	Находить характеристики двумерных составляющих. Строить корреляционный граф 

3.2. Методы

Комбинаторный	Аналитический	Графический
Основные правила, нахождение различных комбинаций	$M[X]=\sum_{m=0}^{+\infty} m\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$; $D[X]=$ $=D[X_1]+D[X_2]+\ldots+D[X_n]$	

3.3. Алгоритмы

Нахождение законов или функций распределения	Построение графов распределения и их вариаций	Вычисление числовых характеристик
$P\{x=x_i\}=p_i$ $F(x)=P\{X<x\}$ $f(x)=F'(x)$		$M[X]$, M_o, M_e, $D[X]$, σ_x, A_s, E_k, $Cov\,(X, Y)$, $\rho(X, Y)$

3.4. Спираль фундирования случайных величин

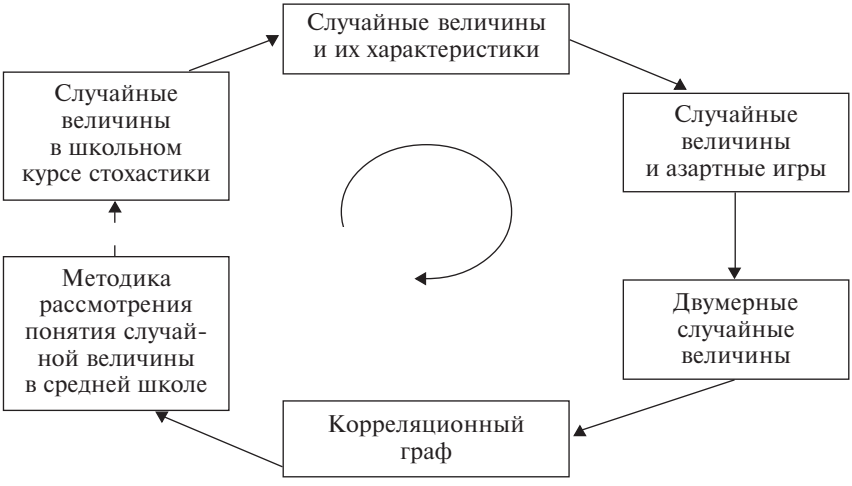


Рис. 43

§ 1. Закон и функция распределения дискретной случайной величины

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — дискретное (конечное или счетное) пространство элементарных событий.

Случайной величиной X называется функция $X(\omega)$, определенная на множестве Ω и принимающая вещественные (комплексные) значения.

Если X — случайная величина, а x_1, x_2, ... — ее значения, то совокупность всех элементарных событий, на которых X принимает фиксированное значение x_i, образует событие

$\{X = x_i\} = \omega_i$, т. е. $\omega_i = \{X = x_i\} = \{\omega\colon \omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}$.

Обозначим через p_i вероятность этого события:

$$p_i = P(\omega_i) = P\{X = x_i\} = \sum_{\omega: X(\omega) = x_i} P(\omega)$$

(знак суммы означает, что сумма берется по ω таким, для которых $X(\omega) = x_i$).

Функция $P\{X = x_i\} = p_i$ ($i = 1, 2, \ldots$) называется **законом распределения** (вероятностей) дискретной случайной величины (д.с.в.) X.

Учитывая, что при экспериментах фиксируются значения x_i случайной величины X, закон распределения д.с.в. даем в виде таблицы

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

где в верхней строчке написаны значения случайной величины, а в нижней — под каждым x_i — вероятности $p_i = P\{X = x_i\}$.

Заметим, что $\sum_i p_i = 1$.

$F(x) = P\{X < x\}$ называется **интегральной функцией** распределения с.в. X.

Свойства интегральной функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a)$;
3. $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$;
4. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Если X — д. с. в., то $F(x)=P\{X<x\}=\sum\limits_{x_i<x} p_i$, где суммируются вероятности тех значений x_i, которые меньше x.

Пример 61. Найти закон и интегральную функцию распределения индикатора события.

Решение. Индикатором события A называется д. с. в.

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ если } \omega \in A, \\ 0, \text{ если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Закон распределения индикатора I_A имеет вид

I_A	0	1
P	q	p

где $p = P(A)$, $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Интегральная функция распределения индикатора задается следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ q, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Пример 62. Найти закон и интегральную функцию распределения для числа выпадения «герба» при трех подбрасываниях монеты.

Решение. Пусть Ω = {подбрасывание монеты три раза} и X = {число выпадений «герба»}. Тогда искомый закон распределения можно записать двумя нижними строками таблицы:

Ω	РРР	РРГ	РГР	ГРР	РГГ	ГРГ	ГГР	ГГГ
X	0	1			2			3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$			$\frac{3}{8}$			$\frac{1}{8}$

А интегральная функция распределения д.с.в. X задается следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ \frac{1}{8}, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ \frac{7}{8}, \text{ если } 2 < x \le 3, \\ 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Построим график интегральной функции распределения:

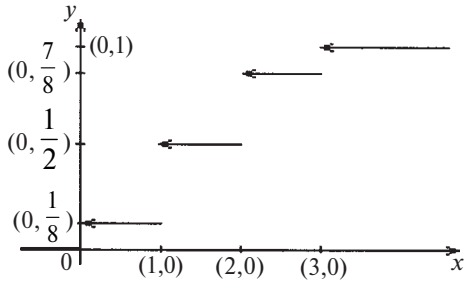


Рис. 44

Интегральная функция распределения д.с.в. непрерывна слева.

Пример 63. Построить граф распределения для числа подбрасывания монеты до появления «герба».

Решение. Пусть с.в. X = {число подбрасываний монеты до появления «герба»}. Тогда искомый граф распределения с.в. выглядит следующим образом:

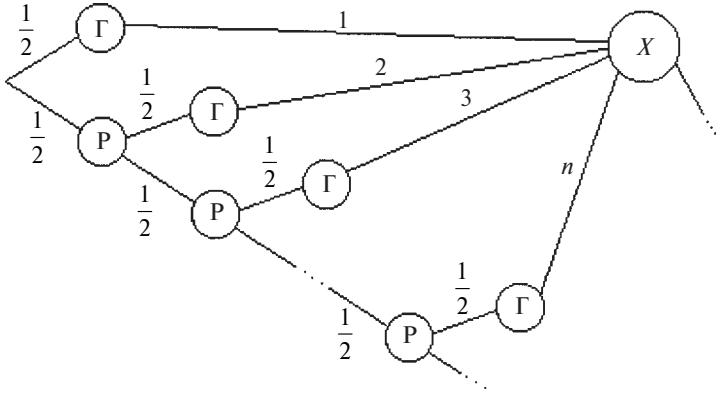


Рис. 45

Используя формулу суммы убывающей геометрической прогрессии (см. Глава II, § 6), убеждаемся, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Это пример бесконечной дискретной случайной величины.

Пример 64. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	-2	-1	0	1
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти интегральную функцию распределения для случайной величины $Z = X^2 - 1$.

Решение. $P\{Z = -1\} = P\{X = 0\} = 0{,}3$, $P\{Z = 0\} = P\{(X = -1) + (X = 1)\} = 0{,}6$, $P\{Z = 3\} = P\{X = -2\} = 0{,}1$. Отсюда интегральная функция распределения с.в. Z имеет следующий вид:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ если } z \le -1, \\ 0{,}3, \text{ если } -1 < z \le 0, \\ 0{,}9, \text{ если } 0 < z \le 3, \\ 1, \text{ если } z > 3. \end{cases}$$

Пример 65. Рассматривается работа трех независимо работающих технических устройств (ТУ). Вероятность нормальной работы первого ТУ равна 0,8, второго — 0,6, третьего — 0,5. Построить закон распределения для числа нормально работающих ТУ.

Решение. Пусть с.в. X = {число нормально работающих ТУ}. Построим граф распределения с.в. X:

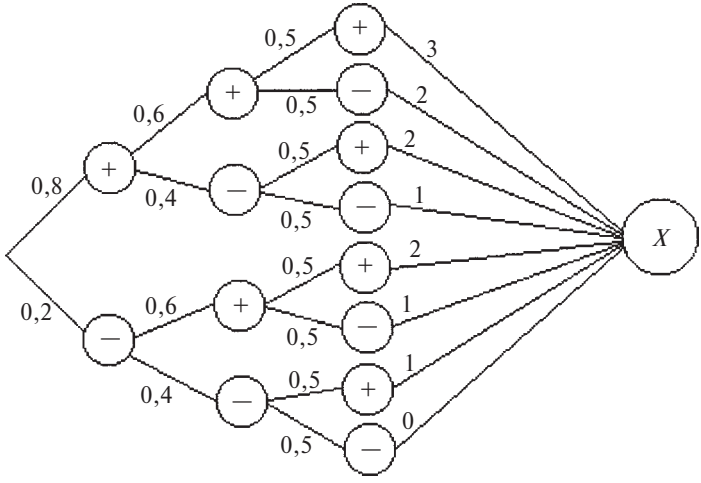


Рис. 46

Тогда по графу находим $P(X = 3) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}24$; $P(X = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}46$; $P(X = 1) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}26$; $P(X = 0) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}04$ и получаем закон распределения:

X	0	1	2	3
P	0,04	0,26	0,46	0,24

Вопросы для самоконтроля

1. Какая случайная величина называется дискретной?
2. Какие типы дискретных случайных величин вы знаете?
3. Как задается дискретная случайная величина?
4. Приведите примеры дискретных случайных величин.
5. Что называется графом распределения случайной величины?
6. Особенности графика интегральной функции распределения дискретной случайной величины.
7. Что такое индикатор события?
8. Область изменения интегральной функции индикатора события.

Задачи

121. Составить закон распределения для суммы очков, выпадающих на двух игральных костях.

122. С.в. X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 0{,}1, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 0{,}4, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ 1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Найдите закон распределения с.в. X.

123. Найти интегральную функцию распределения для числа простых цифр, полученных при извлечении двух карточек полной цифровой азбуки.

124. Составить закон распределения для суммы очков на случайно выбранной «кости» из полного набора домино.

125. Построить граф распределения для числа «дуплей» при извлечении двух «костей» из полного набора домино.

126. Найти интегральную функцию распределения для числа выпадения шести очков при двух подбрасываниях игрального кубика.

127. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	-2	-1	0	1	2	3
P	0,2	0,1	0,15	0,4	0,1	0,05

Найдите закон распределения с.в. $Y = X^2 - 2$.

128. Случайная величина X задана законом распределения

X	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
P	0,2	0,3	0,5

Найти закон и интегральную функцию распределения для случайной величины $Y = \sin X$.

129. Найти интегральную функцию распределения для числа подбрасываний монеты до появления «герба».

130. Найти закон, граф и интегральную функцию распределения для числа подбрасываний игральной кости до выпадения шестерки.

§ 2. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Пусть дана случайная величина $X(\omega)$ на Ω. Если ряд $\sum\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ сходится абсолютно, то его сумма $\sum\limits_{\omega:\omega\in\Omega} X(\omega)\cdot P(\omega) = M[X]$ называется **математическим ожиданием** (м.о.) с.в. X.

Свойства математического ожидания:

1. $M[C] = C$, где C — *const;*
2. $M[C\cdot X] = C\cdot M[X]$;
3. $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$;
4. $M[X\cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$, где X и Y — независимые с.в.

Случайные величины X и Y называются **независимыми**, если для любых x_i, y_j имеет место равенство $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}\cdot P\{Y = y_j\}$.

Модой M_o д. с. в. называется ее наиболее вероятное значение.

Медианой M_e ряда значений $x_1 < x_2 < ... < x_n$, которые с.в. X принимает с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно, называется значение x_k с таким индексом k, что $\sum_{i=1}^{k} p_i \geq \frac{1}{2}$ и $\sum_{i=k}^{n} p_i \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что приблизительно одинаково вероятно, продолжится ли процесс после медианы или закончится до нее.

Если математическое ожидание с.в. X^s существует, то оно называется **начальным моментом** $\alpha_s[X]$ порядка s с.в. X:

$$\alpha_s[X] = M[X^s] = \sum_i x_i^s p_i \ .$$

Поскольку $|X|^{s-1} \leq |X|^s + 1$, то из существования $\alpha_s[X]$ вытекает существование $\alpha_{s-1}[X]$ и, следовательно, существование всех начальных моментов порядка меньше $s - 1$.

Математическое ожидание с.в. является ее первым начальным моментом:

$$M[X] = \alpha_1[X].$$

Начальные моменты, мода и медиана являются характеристиками положения случайной величины.

Начальный момент $\alpha_s[X]$ д.с.в. можно находить как вес всего графа распределения с.в. X^s:

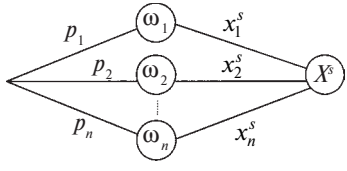


Рис. 47

$$\alpha_s[X] = \sum_i x_i^s p_i$$

Понятие математического ожидания случайной величины ввели в середине XVII в. Гюйгенс и Схоутен.

Пример 66. Найти начальные моменты индикатора события A.

Решение. $\alpha_s[I_A] = M[I_A^s] = 0^S \cdot q + 1^S \cdot p = p$.

Пример 67. (Санкт-Петербургский парадокс).

Бросаем монету до тех пор, пока не выпадет решка; если это произойдет при r-м бросании, игрок получает из банка 2^r долларов. Сколько следует заплатить игроку за участие в игре, чтобы игра стала безобидной?

Решение. Безобидность игры рассматриваем в классическом смысле: математическое ожидание чистого выигрыша должно быть равно 0.

Пусть X = {величина выигрыша игрока}. Составим граф распределения для X:

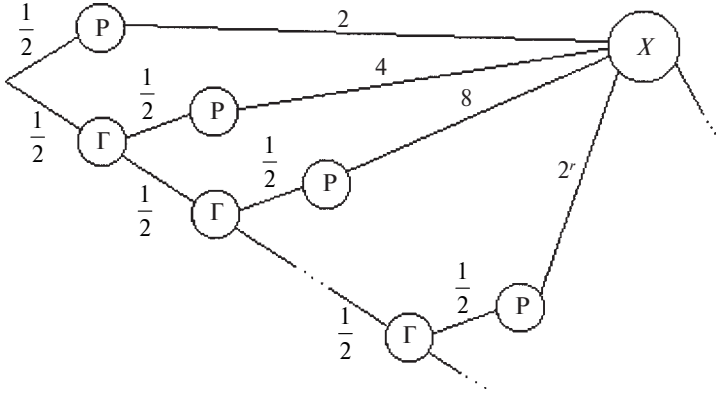


Рис. 48

$$M[X]=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{r}\cdot 2^{r}+\ldots=1+1+\ldots+1+\ldots$$

Следовательно, выигрыш игрока имеет бесконечное математическое ожидание, и игра стала бы безобидной при бесконечном взносе, что невозможно.

Решим эту задачу при естественном предположении об ограниченности ресурсов банка. Пусть в данный момент в банке имеется 100 тыс. долларов ($2^{17} = 131072 > 10^5$), и условимся, что если решка впервые выпадет при 17-м бросании монеты или еще позднее, то банк отдает все имеющиеся у него в настоящее время доллары, т. е. 100 тыс. долларов. Тогда

$$M[X]=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\cdot 2^{16}+$$

$$+\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{17}+\left(\frac{1}{2}\right)^{18}+\ldots\right)\cdot 10^{5}=$$

$$=16+\frac{10^{5}}{2^{17}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)\approx 16+1{,}5=17{,}5.$$

Следовательно, при вступительном взносе игрока, равном 17,5 долларов, игра будет безобидной, а при большем взносе станет выгодной для банка.

Пример 68. Бросаем игральную кость до появления шестерки. Если это произойдет при k-м бросании, то игрок получит приз в k рублей. Какой вступительный взнос следует заплатить игроку, чтобы игра стала безобидной?

Решение. Пусть X = {величина приза}, тогда с.в. имеет следующий граф распределения:

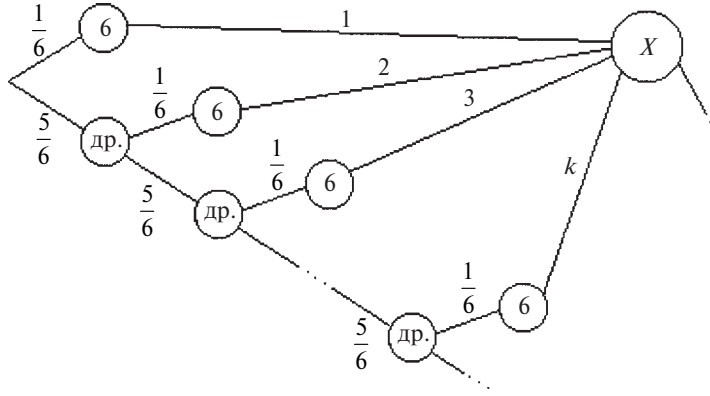


Рис. 49

$$M[X]=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot 3+\ldots+\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot k+\ldots=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+2\cdot\frac{5}{6}+3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\ldots+k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=6.$$

Итак, для того, чтобы игра была безобидной, вступительный взнос должен составлять 6 руб.

Это пример геометрического распределения, для которого

$P\{X = k\} = q^{k-1}\cdot p$, где $k = 1, 2, \ldots$

Центрированной с.в. называется отклонение с.в. от ее математического ожидания:

$$\overset{o}{X} = X - M[X] = X - \overline{x}\,.$$

Центральным моментом порядка s с.в. X называется м. о. s-й степени центрированной с.в.:

$$\mu_s[X] = M[\overset{o}{X}{}^s] = M[(X - \overline{x})^s]\,.$$

Для вычисления центральных моментов удобно использовать следующий граф:

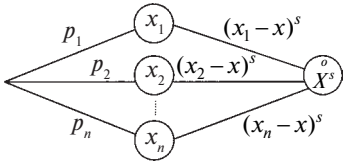


Рис. 50

$$\mu_s[X] = \sum_i p_i (x_i - \overline{x})^s\,.$$

Центральные моменты характеризуют рассеивание с.в. и выражаются через начальные моменты по следующим формулам:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2\,;$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3\,;$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4\,.$$

Особое значение для практики имеет второй центральный момент μ_2, который называется **дисперсией** с.в. X:

$$D[X] = \mu_2 = M[(X - \overline{x})^2] = \sum_i (x_i - \overline{x})^2 p_i\,.$$

Для вычисления $D[X]$ удобна следующая формула:
$D[X] = M[X^2] - M^2[X]$.
Свойства дисперсии:
1. $D[C] = 0$, где C — *const*;
2. $D[C{\cdot}X] = C^2{\cdot}D[X]$;
3. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$, если X, Y — независимые с.в.

Дисперсия имеет размерность квадрата с.в. Положительное значение квадратного корня из дисперсии называется **средним квадратическим отклонением** (или стандартным отклонением):

$$\sigma[X] = \sigma_X = +\sqrt{D[X]}\,.$$

Впервые термины «стандартное отклонение» и «дисперсия» использовались К. Пирсоном в 1895 г. и Р. Фишером в 1920 г.

Пример 69. Найти центральные моменты индикатора события *A*.

Решение. $\mu_s = M[(I_A - p)^s] = (-p)^s q + q^s p = pq[(-1)^s p^{s-1} + q^{s-1}]$.

Пример 70. Случайная величина $X^* = \dfrac{X - \bar{x}}{\sigma_x}$. Доказать, что $M[X^*] = 0$ и $D[X^*] = 1$, $(\alpha X + \beta)^* = X^*$, если $\alpha > 0$ и если $\alpha < 0$, то $(\alpha X + \beta)^* = -X^*$.

Решение. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем

$$M[X^*] = M\left[\frac{X - \bar{x}}{\sigma_x}\right] = \frac{1}{\sigma_x} M[X - \bar{x}] = \frac{1}{\sigma_x}\left(M[X] - M[\bar{x}]\right) = 0,$$

$$D[X^*] = D\left[\frac{X - \bar{x}}{\sigma_x}\right] = \left(\frac{1}{\sigma_x}\right)^2 D[X - \bar{x}] = \frac{1}{\sigma_x^2} D[X] = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} = 1,$$

$$(\alpha X + \beta)^* = \frac{\left[(\alpha X + \beta) - (\alpha \bar{x} + \beta)\right]}{|\alpha| \sigma_x} =$$

$$= \frac{\alpha (X - \bar{x})}{|\alpha| \sigma_x} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot \frac{X - \bar{x}}{\sigma_x} = \frac{\alpha}{|\alpha|} \cdot X^*.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие характеристики положения вы знаете?
2. Вероятностный смысл моды и медианы.
3. Сколько у случайной величины мод и медиан?
4. Свойства математического ожидания.
5. Всегда ли существует математическое ожидание случайной величины?
6. Что характеризуют центральные моменты?
7. Назовите основные характеристики рассеивания.

8. Нахождения числовых характеристик дискретных случайных величин по графу распределения.

Задачи

131. Из урны, содержащей три шара с номерами 1, 2 и 3, последовательно достают два шара. Найти математические ожидания сумм номеров извлеченных шаров, если шары достают с возвратом и без возврата.

132. Найти математические ожидания сумм выпавших очков при подбрасывании костей, если:

а) бросают один раз одну кость;

б) бросают один раз две кости;

в) бросают вместе две кости сто раз.

133. Случайная величина X принимает три значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Известны математическое ожидание и дисперсия этой величины: $M[X] = 2{,}3$ и $D[X] = 0{,}61$. Найти закон распределения для случайной величины X.

134. Биатлонист поражает мишень из положения лежа с вероятностью 0,9, а из положения стоя с вероятностью –0,7. Найти математическое ожидание суммарного числа пораженных мишеней при десяти выстрелах из каждого положения.

135. Найти дисперсию для числа выпавших «гербов» при подбрасывании одной монеты; двух и ста монет.

136. Найти средние квадратические отклонения для сумм выпавших очков при двух и десяти подбрасываниях игральной кости.

137*. Случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	3
P	0,2	0,8

Y	0	2	4
P	0,5	0,4	0,1

Найти характеристики положения и рассеивания случайной величины $X + Y$.

138*. Какую игру вы выбираете: с призом 8 руб. за выпадение по крайней мере одного «герба» или с призом в 16 руб. за выпадение двух «гербов» при трех подбрасываниях монеты?

139**. Найти начальные и центральные моменты до пятого порядка для индикатора события A.

140**. Доказать разумность или опровергнуть идею мартингальной системы, заключающейся в удвоении ставки при проигрыше. (Предположим, что мы играем в рулетку и всегда ставим на красное. Сначала поставим один доллар. Если выигрываем, то прекращаем игру; при проигрыше ставим в следующий раз 2 доллара и т. д.).

§ 3. Классические распределения

В этом параграфе рассматриваем по единому плану хорошо известные распределения дискретных случайных величин. Во-первых, проверяем выполняемость главного требования к закону распределения $\left(\sum_i p_i = 1\right)$, во-вторых, находим основные характеристики положения и, в-третьих, выписываем характеристики рассеивания.

Пример 71. Равномерный закон распределения

Решение.

1) $P\{X=k\}=\frac{1}{n}(1\le k\le n,\ k\in N)$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^{n} P\{X=k\}=1$.

2) Характеристики положения:

а) Математическое ожидание

$$M[X]=1\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n}+\ldots+(n-1)\cdot\frac{1}{n}+n\cdot\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot(1+2+\ldots+n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

б) Мода M_o — каждое значение с.в., поскольку все $P\{X=k\}=\frac{1}{n}$.

в) Медиана $M_e=\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

3) Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой $D[X] = M[X^2] - M^2[X]$.

Найдем

$$M[X^2]=1^2\cdot\frac{1}{n}+2^2\cdot\frac{1}{n}+\ldots+(n-1)^2\cdot\frac{1}{n}+n^2\cdot\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Тогда $D[X]=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2=\dfrac{n+1}{12}\left[2(2n+1)-3(n+1)\right]=$

$$=\frac{n^2-1}{12}.$$

Пример 72. Биномиальный закон распределения.

Решение.

1) С.в. X = {число «успехов» при n повторных независимых испытаниях}. Тогда по формуле Бернулли $P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}$ (см. Глава II, § 4). Используя бином Ньютона, получаем

$$\sum_{m=0}^{n}P\{X=m\}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=(p+q)^n=1.$$

2) а) Для вычисления математического ожидания воспользуемся индикатором $I_Y(\omega_i)$ «успехов» при i-м испытании (i = 1, 2, ..., n). Тогда

$$X=I_Y(\omega_1)+I_Y(\omega_2)+\ldots+I_Y(\omega_n) \text{ и}$$

$$M[X]=M[I_Y(\omega_1)]+M[I_Y(\omega_2)]+\ldots+M[I_Y(\omega_n)]=np,$$

поскольку $M[I_Y(\omega_i)]=p$ (см. пример 66).

б) M_o — наивероятнейшее число (см. Глава II, § 4).

3) Для нахождения дисперсии воспользуемся опять индикатором «успехов» и третьим свойством $D[X]$:

$$D[X]=D[I_Y(\omega_1)]+D[I_Y(\omega_2)]+\ldots+D[I_Y(\omega_n)]=npq,$$

поскольку $D[I_Y(\omega_i)]=pq$ (см. пример 69).

Пример 73. Гипергеометрическое распределение. Из урны, содержащей n шаров, среди которых m белых, извлекаем k шаров. Составить закон распределения для числа белых шаров, оказавшихся в выборке, и найти его числовые характеристики.

Решение. $X = \{$число белых шаров в выборке из k шаров$\} = \{0, 1, 2, ..., m\}$ и $P\{X=i\} = \dfrac{C_m^i \cdot C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k}$, где $i = 0, 1, 2, ..., m$.

1) $$\sum_{i=0}^{m} P\{X=i\} = \frac{1}{C_n^k}\left[C_m^0 \cdot C_{n-m}^k + C_m^1 \cdot C_{n-m}^{k-1} + C_m^2 \cdot C_{n-m}^{k-2} + ... + C_m^m \cdot C_{n-m}^{k-m}\right] =$$

$$= \frac{1}{C_n^k} \cdot C_n^k = 1.$$

Использовали одно из свойств сочетаний (см. Глава I, § 3).

2) а) Математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{i=1}^{m} i \cdot \frac{C_m^i \cdot C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k} = \frac{1}{C_n^k}\left[1 \cdot C_m^1 \cdot C_{n-m}^{k-1} + 2 \cdot C_m^2 \cdot C_{n-m}^{k-2} + ... + m \cdot C_m^m \cdot C_{n-}^{k-}\right.$$

$$= \frac{k!(n-k)!}{n!}\left[m \cdot C_{n-m}^{k-1} + \frac{m(m-1)}{2} \cdot 2 \cdot C_{n-m}^{k-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \cdot 3 \cdot C_{n-m}^{k-3} + ... +\right.$$

$$\left. + (m-1) \cdot C_m^{m-1} \cdot C_{n-m}^{k-m+1} + m \cdot C_m^m \cdot C_{n-m}^{k-m}\right] = \frac{k \cdot m}{n} \cdot \frac{1}{C_{n-1}^{k-1}} \cdot$$

$$\cdot [C_{m-1}^0 \cdot C_{(n-1)-(m-1)}^{k-1} + C_{m-1}^1 \cdot C_{(n-1)-(m-1)}^{k-2} + ... + C_{m-1}^{m-2} \cdot C_{(n-1)-(m-1)}^{(k-1)-(m-2)} +$$

$$+ C_{m-1}^{m-1} \cdot C_{(n-1)-(m-1)}^{(k-1)-(m-1)}] = \frac{k \cdot m}{n} \cdot \frac{1}{C_{n-1}^{k-1}} \cdot C_{n-1}^{k-1} = \frac{k \cdot m}{n}.$$

б) Моду M_o находим аналогично определению наивероятнейшего числа биномиального закона распределения из решения системы неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{P\{X = M_o - 1\}}{P\{X = M_o\}} \le 1 \\[2ex] \dfrac{P\{X = M_o\}}{P\{X = M_o + 1\}} \ge 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{C_m^{M_o - 1} \cdot C_{n-m}^{k-M_o+1}}{C_n^{M_o} \cdot C_{n-m}^{k-M_o}} \le 1 \\[2ex] \dfrac{C_n^{M_o} \cdot C_{n-m}^{k-M_o}}{C_m^{M_o - 1} \cdot C_{n-m}^{k-M_o-1}} \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{M_o}{n-M_o+1}\cdot\dfrac{n-m-k+M_o}{k-M_o+1}\le 1 \\ \dfrac{M_o+1}{n-M_o}\cdot\dfrac{n-m-k+M_o+1}{k-M_o}\ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_o\cdot n\le m\cdot k+m-M_o+k-M_o+1 \\ M_o\cdot n+M_o+n-m-k+M_o+1\ge m\cdot k \end{cases}$$

Откуда получаем $\dfrac{(k+1)(m+1)-n}{n+2}\le M_o\le\dfrac{(k+1)(m+1)}{n}$ и $M_o\in Z$.

3) Прямое вычисление дисперсии громоздко, поэтому $D[X]$ найдем позднее с использованием ковариации (см. пример 110).

В последних трех примерах рассмотрены конечные случайные величины.

Пример 74. Распределение Пуассона.

Решение. Распределение Пуассона можно получить из биномиального, приняв за $\lambda = np$ и устремив число испытаний n в бесконечность. В самом деле

$$P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}$$

по формуле Бернулли и при $n=\dfrac{\lambda}{p}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{-\lambda}(-\lambda)}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m}=$$

$$=1\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}\cdot 1=\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}.$$

1) Рассмотрим бесконечное дискретное распределение $P\{X=m\}=\dfrac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}$, где $0<\lambda$ — параметр, а $m = 0, 1, 2, \ldots$ Проверим, что

$$1=\sum_{m=0}^{+\infty}P\{X=m\}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$$

2) а) Математическое ожидание

$$M[X]=\sum_{m=0}^{\infty} m\cdot\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(m-1)!}=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

б) $M_o = 0$, если $0 < \lambda < 1$.

3) Дисперсия

$$M[X^2]=\sum_{m=0}^{\infty} m^2\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{(m-1)!}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}[(m-1)+1]\frac{\lambda^m}{(m-1)!}=e^{-\lambda}\left[\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(m-2)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^m}{(m-1)!}\right]=$$

$$=e^{-\lambda}\left[\lambda^2e^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}\right]=\lambda^2+\lambda.$$

Следовательно, $D[X]=M[X^2]-M^2[X]=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda.$

Пример 75. Геометрическое распределение.

Решение.

1) Проводим повторные независимые испытания до появления «успеха». Граф распределения в этом случае выглядит следующим образом.

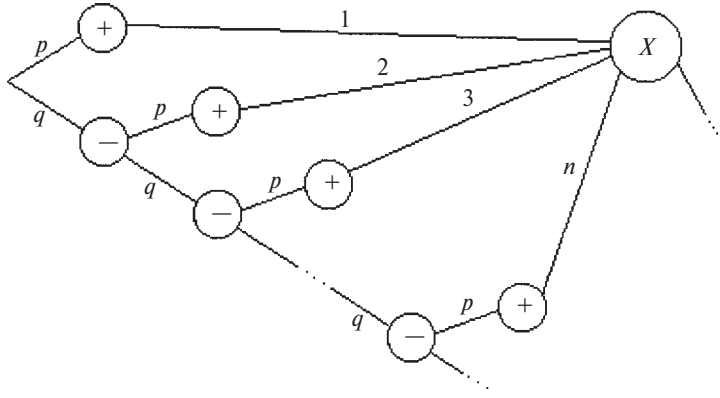


Рис. 51

$P\{X=k\}=q^{m-1}p$, где m = 1, 2, 3, ...

Проверим, что

$$1=\sum_{m=1}^{+\infty}P\{X=m\}=p+q\cdot p+q^2\cdot p+...+q^{n-1}\cdot p+...=$$

$$=p(1+q+q^2+...+q^{n-1}+...)=p\cdot\frac{1}{1-q}=p\cdot\frac{1}{p}=1.$$

2) а) Математическое ожидание

$$M[X]=1\cdot p+2\cdot q\cdot p+3\cdot q^2\cdot p+...+nq^{n-1}\cdot p+...=$$

$$=p(1+2q+3q^2+...+nq^{n-1}+...)=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

б) M_o = 1, так как $p = max\ \{P\{X = m\}, m = 1, 2, 3, ...\}$.

в) Для нахождения M_e решим систему неравенств

$$\begin{cases} p+q\cdot p+q^2\cdot p+...q^{M_e-1}\cdot p\geq\frac{1}{2} \\ q^{M_e-1}\cdot p+q^{M_e}\cdot p+q^{M_e+1}\cdot p+...\geq\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} p\cdot\frac{1-q^{M_e}}{1-q}\geq\frac{1}{2} \\ q^{M_e-1}\cdot p\cdot\frac{1}{1-q}\geq\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 1-q^{M_e}\geq 2^{-1} \\ q^{M_e-1}\geq 2^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} q^{M_e}\leq 2^{-1} \\ q^{M_e-1}\geq 2^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} M_e\cdot\log_2 q\leq -1 \\ (M_e-1)\cdot\log_2 q\geq -1 \end{cases}$$

Отсюда $-\frac{1}{\log_2 q}\leq M_e\leq 1-\frac{1}{\log_2 q}$.

3) Для вычисления дисперсии найдем

$$M[X^2]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}kq^k\right)_q^1=p\left(q\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\right)_q^1=$$

$$=p\left[\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}+q\left(\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\right)_q^1\right]=p\left[\frac{1}{(1-q)^2}+q\frac{2}{(1-q)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{2q}{p^2}=\frac{1+q}{p^2}.$$

Тогда $D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры классических дискретных случайных величин.
2. Числовые характеристики равномерного закона распределения.
3. Как можно получить распределение Пуассона?
4. В чем состоит, на ваш взгляд, особенность распределения Пуассона?
5. Числовые характеристики биномиального закона распределения.
6. Гипергеометрическое распределение и треугольник Паскаля.
7. Числовые характеристики геометрического закона распределения.
8. Какие классические распределения являются бесконечными?

Задачи

141. Найти характеристики положения для числа выпадения шестерки при десяти подбрасываниях игральной кости.

142. Найти медиану для числа подбрасываний игральной кости до выпадения шестерки.

143. Найти числовые характеристики для числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

144. Найти дисперсию для числа X появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M[X] = 1{,}4$.

145. В урне 10 шаров, половина из которых белые. Наугад достают три шара. Найти характеристики положения для числа белых шаров, оказавшихся в выборке.

146. Найти медиану для случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$.

147*. Брошены n игральных костей. Найти дисперсию суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

148*. В урне находятся 7 белых и 7 черных шаров. Бросают игральную кость и по числу выпавших на ней очков извлекают такое же количество шаров. Какова вероятность достать одинаковое число черных и белых шаров?

149**. Найти центральные и начальные моменты третьего порядка для равномерного закона распределения.

150**. Кот Базилио и Буратино кладут в шляпу по 50 золотых монет, перемешивают их и высыпают на стол. Базилио забирает все монеты, которые лежат кверху «орлом», а Буратино — те, которые лежат кверху «решкой». Каков риск этой игры для каждого игрока?

§ 4. Случайные величины и азартные игры

В § 6 Главы II мы уже рассматривали некоторые известные игры (различные «считалки», например) и оценивали вероятности игроков на победу в них. В этом разделе будем рассматривать такие азартные игры, которые допускают их оценки через характеристики положения (математическое ожидание, медиану и моду) случайной величины выигрыша (числа набранных очков). Игра называется безобидной, если математическое ожидание величины выигрыша равно нулю, а по его знаку («плюс» или «минус») судим о приемлемости принятия этих условий для участия в игре.

Пример 76. Азартному человеку предлагаются следующие условия игры: если он достанет из полного набора домино кость с суммой очков 3, 6 или 9, то он получит приз в размере 9, 6 или 3 долларов соответственно, в противном случае он платит организаторам 2 доллара. Принимать ли ему участие в игре по таким правилам?

Решение. X = {величина выигрыша участника} = {–2, 3, 6, 9}. Обратим внимание, что 3 очка в сумме можно получить двумя способами (0 + 3 = 1 + 2), 6 очков — четырьмя (0 + 6 = 1 + 5 = 2 + 4 = = 3 + 3), 9 очков — двумя (3 + 6 = 4 + 5), а остальные 20 случаев дают другие суммы. По графу распределения с.в. X находим $M[X]$.

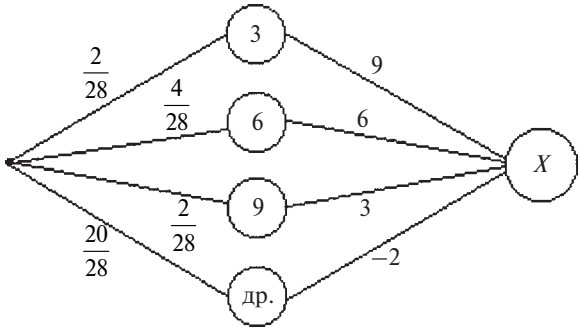


Рис. 52

$$M[X]=9\cdot\frac{2}{28}+6\cdot\frac{4}{28}+3\cdot\frac{2}{28}+(-2)\cdot\frac{20}{28}=\frac{8}{28}=\frac{2}{7}>0,$$

и можно дать совет азартному человеку об участии в этой игре.

Из решения видно, что игра будет безобидной, если установить плату за участие в игре в размере $\frac{2}{7}$ долларов.

Пример 77. Два игрока бросают игральную кость сериями по очереди, складывая количество выпавших очков, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но, если выпало 1 очко, то очки серии «сгорают» и ход автоматически передается противнику. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

Решение. Возможны два подхода к выбору стратегии:

1) по количеству набранных очков в серии;

2) по числу подбрасываний в серии.

Стратегия № 1 (по количеству набранных очков).

Пусть мы набрали N очков в данной серии.

Случайная величина X = {число очков серии после следующего броска}.

Построим граф распределения с.в. X:

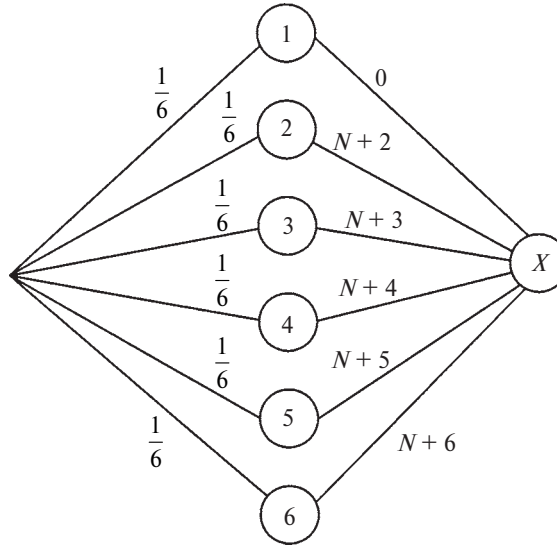


Рис. 53

Найдем математическое ожидание как вес всего графа.

$$M[X]=\frac{1}{6}(5N+20)\,.$$

Продолжение станет невыгодным, если $M[X] = N$:

$$\frac{1}{6}(5N+20)\le N,\ N\ge 20\,,$$

при $N \geq 20$ продолжение игры становится для игрока невыгодным.

Следовательно, можно предложить игроку бросать игральную кость в серии до появления в сумме от 19 до 24 очков и передать ход другому игроку.

Стратегия № 2 (по числу сделанных бросков).

Пусть n число бросков.

Случайная величина X_1 = {число очков при одном бросании}.

Случайная величина X_1 имеет следующий закон распределения

X_1	0	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найдем математическое ожидание с.в. X_1

$$M[X_1]=\frac{1}{6}\cdot(2+3+4+5+6)=\frac{10}{3}\text{, тогда } M[n\cdot X_1]=n\cdot M[X_1]=\frac{10n}{3}\,.$$

Заметим, что $M[n{\cdot}X_1]$ является случайной величиной. Вычислим математическое ожидание с.в. $M[n{\cdot}X_1]$. Составим закон распределения для с.в. $M[n{\cdot}X_1]$.

$M[n{\cdot}X_1]$	$\frac{10}{3}\cdot n$	0
P	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$M\left[M[n\cdot X_1]\right]=\frac{10n}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n\text{, тогда } M\left[M[(n+1)\cdot X_1]\right]=\frac{10(n+1)}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\,.$$

Продолжение серии бросков будет невыгодным, если

$$M\left[M[(n+1)\cdot X_1]\right] \le M\left[M[n\cdot X_1]\right], \text{ т. е. } \frac{10(n+1)}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \le \frac{10n}{3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n},$$

$$(n+1)\cdot\frac{5}{6} \le n,\ n \ge 5.$$

Значит, следует делать не более 5-ти бросков в серии.

Пример 78. Два игрока бросают две монеты сериями по очереди, складывая количество выпавших «гербов», за каждый выпавший «герб» игрок получает одно очко, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но если не выпало ни одного «герба», то очки серии «сгорают» и ход передается другому игроку. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

Решение 1 (по числу набранных очков).

Пусть мы набрали N очков в данной серии, а случайная величина X = {число очков серии после следующего броска}.

Построим граф распределения и найдем математическое ожидание с.в. X.

$$M[X] = \frac{1}{4}(N+2) + 2\frac{1}{4}(N+1) + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{3}{4}\cdot N + 1.$$

Продолжение станет невыгодным, если $M[X] \le N$, т. е.

$$\frac{3}{4}N + 1 \le N,\ N \ge 4.$$

При $N \ge 4$ продолжение игры становится для игрока невыгодным.

Следовательно, можно предложить игроку бросать пару монет в серии до появления в сумме 3 или 4 очков и передать ход другому игроку.

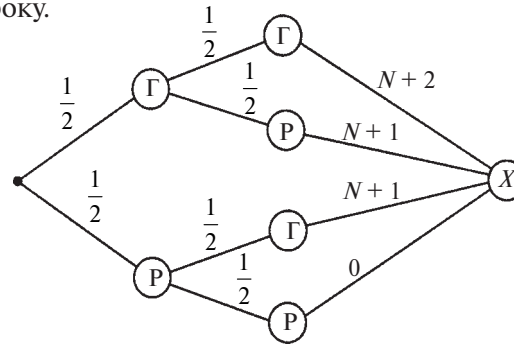


Рис. 54

Решение 2 (по числу сделанных бросков).

Пусть n число бросков. Случайная величина X_1 = {число очков при одном бросании}. Случайная величина X_1 имеет следующий закон распределения.

X_1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Найдем математическое ожидание с.в. X_1

$$M[X_1]=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}=1\,.$$

$M[n\cdot X_1] = n\cdot M[X_1] = n$. Заметим, что $M[n\cdot X_1]$ является случайной величиной. Вычислим математическое ожидание с.в. $M[n\cdot X_1]$. Составим закон распределения для $M[n\cdot X_1]$, учитывая, что очки «не сгорят» (если ни разу не выпадет пара «решек»)

$M[n\cdot X_1]$	n	0
P	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$M\left[M[n\cdot X_1]\right]=n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$; $M\left[M[(n+1)\cdot X_1]\right]=(n+1)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)}$. Продолжение серии бросков будет невыгодным, если $M[M[(n + 1)\cdot X_1]] \le$ $\le M[M[n\cdot X_1]]$, т. е.

$$(n+1)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)}\le n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n;$$

$$(n+1)\cdot\frac{3}{4}\le n\,;$$

$n \ge 3$.

Значит, следует делать не более трех бросков.

Сравним эффективность предложенных двух подходов в определении стратегии: по количеству набранных очков и по количеству подбрасываний в серии. Для этого найдем математические ожидания набранных очков в серии.

1) Прекратим испытания при появлении трех очков в серии.

$$M[X]=(1+1+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(1+1+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+(1+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+(2+1)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+(2+2)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{8}+\frac{4}{8}=\frac{13}{8}=1{,}625.$$

2) Прекратим испытания при появлении по крайней мере четырех очков в серии. Построим вероятностное дерево исходов:

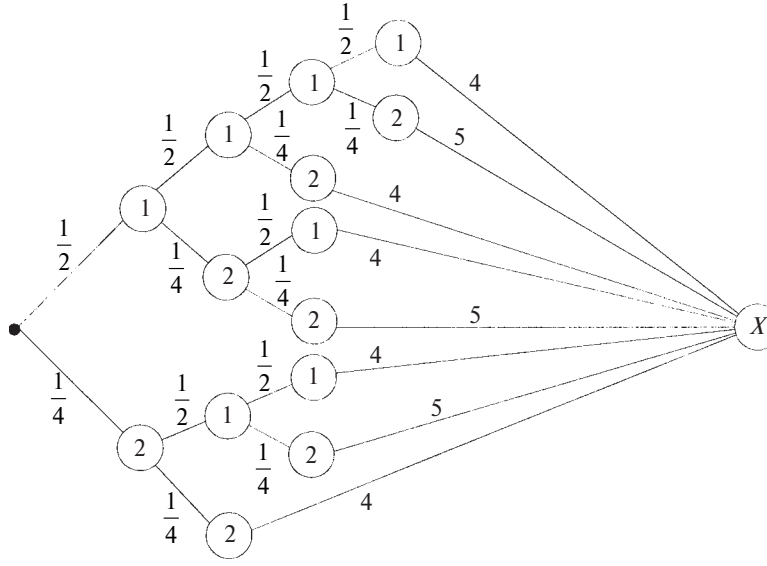


Рис. 55

$$M[X]=4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{32}+4\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{32}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{32}+4\cdot\frac{1}{16}=$$

$$=\frac{20}{16}+\frac{15}{32}=\frac{55}{32}\approx 1{,}72.$$

По числу бросков $n = 3$, $M[X]=3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\approx 1{,}26$.

1,72 > 1,625 > 1,26, следовательно, более эффективна первая стратегия (по числу набранных очков в серии).

Пример 79. Два игрока ставят свои монеты одного достоинства на одну из клеток полосы с натуральными номерами. Фишку устанавливают на клетку с номером первого появления шестерки при повторных подбрасываниях игральной кости. На какую клетку лучше поставить свою монету, если победитель определяется по наименьшему расстоянию от фишки до монеты участника?

Решение. Свою монету разумно поставить на медиану M_e случайной величины X = {номер выпадения шести очков при подбрасывании кости}. В нашем случае $M_e = 4$, так как

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{672}{1296}\geq\frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=\frac{125}{216}\geq\frac{1}{2}.$$

Пример 80. Два игрока ставят свои монеты на клетки полосы с целыми неотрицательными номерами. Фишку устанавливают на клетку с номером, соответствующим числу выпадения «герба» при шести подбрасываниях монеты. На какую клетку выгодно поставить свою монету, если победитель определяется по близости фишки до монеты участника?

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, можно посоветовать поставить монету на медиану M_e с.в. X = {число выпадений «герба» при шести подбрасываниях монеты}.

$$M_e=4, \text{поскольку } P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)+P_6(3)=\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64}+\frac{20}{64}=\frac{42}{64}\geq\frac{1}{2}$$

и $P_6(3)+P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)=\dfrac{42}{64}\geq\dfrac{1}{2}$.

Последние два примера на использование медианы геометрического и биномиального законов распределения.

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите пример азартной игры.
2. Какие типы азартных игр вы знаете?
3. Что понимают под безобидностью игры?
4. В чем заключается парадокс «Санкт-Петербургского парадокса»?

5. Какие характеристики случайных величин чаще используются при поиске стратегии игр?

6. Приведите примеры игр со «сгорающими» очками.

7. Какие подходы возможны к стратегиям игр со «сгорающими» очками?

8. Ваш совет в установлении ставок в азартной игре.

Задачи

151. Из колоды в 32 карты достают по одной с возвратом две карты. Стоимость участия в игре составляет один доллар, а приз в размере одного доллара выплачивается за каждую козырную карту. Принимать ли участие в этой игре?

152. Азартному студенту предлагаются следующие условия игры: если он достает из полного набора домино кость с суммой очков 3, 6 или 9, то получит равную им сумму долларов, в противном случае он платит организаторам 2 доллара. Принимать ли ему участие в игре по таким правилам?

153. В условиях предыдущей задачи определить, какую следует установить плату за участие, чтобы игра была безобидной.

154. Из колоды в 36 карт извлекли две карты (без возврата) и выплачиваем приз в размере 10 руб. за каждую козырную карту. Каким должен быть вступительный взнос, чтобы игра была безобидной?

155. Бросаем игральный кубик до появления шести очков и устанавливаем приз в рублях, равный номеру выпадения шестерки. Каким должен быть вступительный взнос, чтобы игра была безобидной?

156. Организатор предлагает выплатить за каждый выпавший «герб» при пяти подбрасываниях монеты 16 руб. Какой должна быть величина стоимости участия в игре, чтобы она была выгодной для организатора?

157*. Два игрока ставят свои монеты одного достоинства на одну из клеток полосы с натуральными номерами. Фишку устанавливают на клетку с номером первого появления шестерки при повторных подбрасываниях игральной кости. На какую клетку лучше поставить свою монету, если победитель определяется по наименьшему расстоянию от фишки до монеты участника?

158*. В условиях предыдущей задачи заменим подбрасывание игральной кости на подбрасывание двух монет до появления «гербов» на обеих монетах.

159**. Два игрока подбрасывают игральную кость сериями, суммируя выпавшие очки от 1 до 5, а при выпадении шестерки очки данной серии «сгорают» и ход передается другому участнику. Победитель определяется по наибольшей сумме очков всех серий. Какой стратегии придерживаться игроку?

160**. В условиях предыдущей задачи заменим подбрасывание игральной кости на подбрасывание трех монет и суммирование числа «гербов», при отсутствии «гербов» очки серии «сгорают».

§ 5. Закон больших чисел

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия *случайного события* и *случайной величины*. При этом предсказать заранее результат испытания, в котором может появиться или не появиться то или иное событие или какое-либо определенное значение случайной величины, невозможно, так как исход испытания зависит от многих случайных причин, не поддающихся учету.

Однако при неоднократном повторении испытаний наблюдаются закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Эти закономерности обладают свойством *устойчивости*. Суть этого свойства состоит в том, что конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате большой массы подобных явлений, а характеристики случайных событий и случайных величин, наблюдаемых в испытаниях, при неограниченном увеличении числа испытаний становятся практически не случайными.

Пусть производится большая серия однотипных опытов. Исход каждого отдельного опыта является случайным, неопределенным. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер, становится закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*.

Под законом больших чисел не следует понимать какой-то один общий закон, связанный с большими числами. Закон больших чисел — это обобщенное название нескольких теорем, из которых следует, что при неограниченном увеличении числа

испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным.

К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли. Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли — простейшим.

В основе доказательства теорем, объединенных термином «закон больших чисел», лежит неравенство Чебышева, по которому устанавливается вероятность отклонения X от ее математического ожидания:

$$P\{|X - M[X]| < \xi\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\xi^2}.$$

Пример 81. Устройство состоит из 100 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,03. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом (математическом ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение.

а) Обозначим через X число отказавших элементов за время T. Тогда $M[X] = np = 100 \cdot 0{,}03 = 3$ и $D[X] = npq = 100 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97 = 2{,}91$ (см. пример 72). Воспользуемся неравенством Чебышева:

$$P\{|X - M[X]| < \xi\} \geq 1 - \frac{D[X]}{\xi^2},$$

подставив в него $M[X] = 3$, $D[X] = 2{,}91$, $\xi = 2$, получим

$$P\{|X - 3| < 2\} \geq 1 - \frac{2{,}91}{4} \approx 0{,}27.$$

б). События $|X - 3| < 2$ и $|X - 3| \geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно,

$P\{|X - 3| \geq 2\} \leq 1 - 0{,}27 = 0{,}83$.

Пример 82. Оценить вероятность события $|X - M[X]| < 3\sigma$, где σ — среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. Полагая $\varepsilon = 3\sigma$, получим в правой части неравенства число $1 - \frac{D[X]}{9\sigma^2}$, т. е. $\frac{8}{9}$. Таким образом, вероятность события $M[X] - 3\sigma < X < M[X] + 3\sigma$ не меньше, чем $\frac{8}{9}$.

В действительности для подавляющего большинства встречающихся на практике случайных величин эта вероятность значительно ближе к единице, чем $\frac{8}{9}$.

В теореме Чебышева (справедлива как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин) утверждается, что если рассматривается достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

Формулируя теорему Чебышева, мы предполагали, что случайные величины имеют различные математические ожидания. На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Очевидно, что если вновь допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.

Пример 83. Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений и их среднее арифметическое принимают в качестве искомого размера. При каких условиях этот способ измерения можно считать правильным?

Решение. Ответ на этот вопрос даст теорема Чебышева (ее частный случай). Рассмотрим результаты каждого измерения как случайные величины X_1, X_2, ... X_n. К этим величинам можно применить теорему Чебышева, если: 1) они попарно независимы; 2) имеют одно и то же математическое ожидание; 3) дисперсии их ограничены.

Первое требование выполняется, если результат каждого измерения не зависит от результатов остальных. Второе требование выполняется, если измерения проведены без систематических (одного знака) ошибок. В этом случае математические ожидания всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру a. Третье требование выполняется, если прибор обеспечивает определенную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но рассеяние их ограничено. Если все указанные требования выполнены, мы вправе применить к результатам измерений теорему Чебышева: при достаточно большом n вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$$

как угодно близка к единице. Другими словами, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отличается от истинного значения измеряемой величины.

Итак, теорема Чебышева указывает условия, при которых описанный способ измерения может быть применен. Однако, ошибочно думать, что увеличивая число измерений, можно достичь сколь угодно большой точности. Дело в том, что сам прибор дает показания лишь с точностью $\pm\alpha$; поэтому каждый из результатов измерений, а следовательно, и их среднее арифметическое будут получены лишь с точностью, не превышающей точности прибора.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят обо всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появлений события? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Якобом Бернулли (опубликована в 1713 г.), которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Бернулли было сложным; простое доказательство дано П.Л. Чебышевым в 1846 г.

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико. Другими словами, если ε сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении условий теоремы имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 .$$

При доказательстве теоремы Бернулли получаем оценку

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} .$$

Как видим, теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает

свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности (см. Глава II, § 8).

Пример 84. Оценим вероятность того, что при подбрасывании игральной кости 300 раз относительная частота появления шести очков отклонится от вероятности этого события не более чем на 0,01.

Решение. Для оценки события $\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}01\right\}$ применим неравенство из доказательства теоремы Бернулли, где $n = 300$, $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, $\varepsilon = 0{,}05$:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}01\right\}\ge 1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{300\cdot(0{,}05)^2}\approx 0{,}815.$$

Пример 85. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 200 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 10 до 30 деталей.

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева, определив $M[X]$ и ε.

$M[X] = np = 200\cdot 0{,}1 = 20$ и $|X - 20| \le \varepsilon$, $\varepsilon - 20 \le X \le 20 + \varepsilon$, откуда $\varepsilon = 10$. Следовательно,

$$P\{|X-20|\le 10\}\ge 1-\frac{200\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}{10^2}=0{,}82.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите геометрическую иллюстрацию неравенства Чебышева.
2. В чем смысл теоремы Чебышева?
3. Использование интегральной теоремы Муавра-Лапласа для доказательства теоремы Бернулли.
4. Как вы понимаете сходимость по вероятности?
5. Теорема Пуассона и ее применение в теории измерений.
6. Что вы понимаете под законом больших чисел?

7. Обобщение теоремы Чебышева.

8. Проведите эксперимент для иллюстрации закона больших чисел.

Задачи

161. Оцените вероятность того, что $|X - M[X]| < 0{,}2$, если $D[X] = 0{,}01$.

162. Дано $P\{|X - M[X]| < \varepsilon\} \geq 0{,}8$ и $D[X] = 0{,}004$. Используя неравенство Чебышева, оценить ε снизу.

163. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за время T окажется: а) меньше трех; б) не меньше трех.

164. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что

$|X - M[X]| < 0{,}1$, если $D[X] = 0{,}001$.

165. Изготовлена партия деталей. Среднее значение длины детали равно 30 см, а среднее квадратическое отклонение равно 0,2 см. Оцените снизу вероятность того, что длина наудачу взятой детали окажется не менее 29,5 см и не более 30,5 см.

166. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин равна 4. Оцените вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий по абсолютной величине не превысит 0,2.

167. Применима ли к последовательности независимых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, ... теорема Чебышева, если каждая случайная величина X_k задана законом распределения

X_k	$-k\alpha$	0	$k\alpha$
P	$\frac{1}{2k^2}$	$1-\frac{1}{k^2}$	$\frac{1}{2k^2}$

где постоянная величина $\alpha > 0$?

168*. Каждая из 1000 независимых случайных величин имеет дисперсию, равную 4, а математические ожидания их одинаковы. Оцените вероятность того, что среднее арифметическое случайных

величин отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 0,1.

169**. Применима ли к последовательности случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, ..., имеющих равномерное распределение в промежутке $]a, b[$, теорема Чебышева?

170**. Пусть $f(x) > 0$ — неубывающая функция. Доказать, что если существует $M[f(|X - M[X]|)]$, то

$$P\{|X - M[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\left[f\left(|X - M[X]|\right)\right]}{f(\varepsilon)}.$$

§ 6. Непрерывные случайные величины и их характеристики

Случайную величину X будем называть *непрерывной*, если ее интегральная функция распределения $F(x) = P\{X < x\}$ непрерывна и дифференцируема, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Дифференциальной функцией распределения f называют производную от интегральной функции

$$f(x) = F'(x).$$

Вместо термина «дифференциальная функция» используют другое название — «плотность вероятности», поскольку

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{P\{x \leq X < x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Свойства дифференциальной функции:

1. $f(x) \geq 0$;

2. $P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x)dx$;

3. $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1$;

4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Пусть функция $y = g(x)$ монотонно возрастает и $x = g^{-1}(y)$ — обратная функция. Тогда

$F(y) = P\{Y < y\} = P\{g(x) < y\} = P\{X < g^{-1}(y)\} = F(g^{-1}(y))$.

Дифференцируя это равенство по y, получаем (если $g(x)$ дифференцируема): $\frac{dF(y)}{dy}=\frac{dF\left(g^{-1}(y)\right)}{dx}\cdot\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$ т. е. $f(y) = f(g^{-1}(y))\cdot$ $\cdot(g^{-1}(y))'$.

Если $y = g(x)$ монотонно убывающая функция, то аналогично получаются следующие соотношения:

$F(y) = 1 - F(g^{-1}(y)), f(y) = f(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'\cdot(-1)$.

Случай, когда функция $y = g(x)$ является монотонно возрастающей или убывающей, имеет основное прикладное значение.

Пример 86. Закон равномерного распределения вероятностей.

Решение. Распределение вероятностей называется равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, дифференциальная функция имеет постоянное значение.

Пусть $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \\ C, \text{ если } a < x < b, \\ 0, \text{ если } b \le x, \end{cases}$ так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, то $C = \frac{1}{b-a}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{ если } a < x < b, \\ 1, \text{ если } x \ge b. \end{cases}$$

Пример 87. Показательное распределение.

Решение. Показательное распределение задается своей дифференциальной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x \ge 0, \text{ где } \lambda \text{ — параметр.} \end{cases}$$

Проверим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = (-e^{-\lambda x})\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Найдем интегральную функцию

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$$

Продолжительность существования радиоактивных частиц описывается показательным распределением.

Характеристиками положения н.с.в., так же как и дискретной, являются математическое ожидание, мода и медиана.

Математическим ожиданием н.с.в. называют число

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности, и предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Модой н.с.в. называется значение с.в., при котором плотность вероятности максимальна.

Медианой н.с.в. X называется такое ее значение M_e, что $P\{X < M_e\} = P\{X > M_e\}$.

Основными характеристиками рассеивания н.с.в. являются дисперсия, асимметрия и эксцесс.

Дисперсия н.с.в. $D[X]$ находится следующим образом:

$$D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\overline{x})^2 f(x)dx \text{ или } D[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2[X].$$

Асимметрия — это число $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3}=\dfrac{M\left[(X-\overline{x})^3\right]}{\sigma^3}$, где σ — среднее квадратическое отклонение с.в. X. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то $A_s = 0$.

Эксцессом с.в. X называется число $E_k=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\dfrac{M\left[(X-\overline{x})^4\right]}{\sigma^4}-3$.

Число E_k характеризует «крутость» кривой плотности вероятности по сравнению с кривой Гаусса. Для нормального закона распределения $E_k = 0$, для островершинных $E_k > 0$, для пологих $E_k < 0$.

Пример 88. Найти математическое ожидание, медиану, дисперсию и асимметрию для равномерного распределения.

Решение. $M[X]=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0\cdot dx+\int_{a}^{b}\frac{x}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx=$

$$=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_c^b=\frac{a+b}{2}=M_e.$$

$$D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

$$A_s=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\frac{\frac{dx}{b-a}}{\left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^3}=\left|x-\frac{a+b}{2}=y\right|=$$

$$=\frac{24\sqrt{3}}{(b-a)^4}\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} y^3dy=0.$$

Пример 89. Найти математическое ожидание и дисперсию для показательного распределения.

Решение.

$$M[X]=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\lambda e^{-\lambda x} & v=-e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=$$

$$=x\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

$$D[X]=\int_0^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}dx-\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx+\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\lambda e^{-\lambda x} & v=-e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Пример 90. Найти характеристики положения с.в. X, распределенной по закону Рэлея: $F(x)=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(x\geq 0)$.

Решение. 1) Поскольку с.в. задана интегральной функцией распределения, то проще начать с нахождения медианы M_e. Так как

$$P\{X < M_e\} = F(M_e) = \frac{1}{2}, \text{ то } 1 - e^{-\frac{M_e^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2},\ e^{-\frac{M_e^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2},\ -\frac{M_e^2}{2\sigma^2} = -\ln 2,$$

$M_e = \sigma\sqrt{2\ln 2}$.

Для вычисления других характеристик положения необходима дифференциальная функция распределения. Найдем ее:

$$f(x) = F'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sigma^2}\right) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ (x \geq 0).$$

2) Мода $M_o : f(M_o) = \max\{f(x)\}$.

Исследуем функцию $y = f(x)$ на экстремум, для этого найдем ее производную.

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \frac{x}{\sigma^2}\left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2\sigma^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{x^2}{\sigma^4} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

$\frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) = 0$, отсюда $x = \sigma$ и $M_o = \sigma$.

3) $$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \frac{x}{\sigma} = t \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \left| \begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}} dt & v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix} \right| = \sigma\left(0 + \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая случайная величина называется непрерывной?
2. Какое другое название имеет дифференциальная функция распределения и почему?
3. Основное свойство дифференциальной функции распределения.
4. Нахождение интегральной функции распределения через дифференциальную.
5. Какие характеристики положения вы знаете?
6. Как находятся характеристики рассеивания?
7. Какие процессы можно описать с помощью показательного закона распределения?
8. Какие числовые характеристики показательного закона распределения совпадают?

Задачи

171. Найти интегральную функцию распределения для случайной величины X, распределенной по закону Лапласа, т. е.

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

172. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 1, \\ \dfrac{x}{2}, \text{ при } 1 < x \le 2, \\ 1, \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение:

а) меньше 0,4; б) больше 1,8; в) от 1,3 до 1,5.

173. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x \le 0, \\ x^2, \text{ при } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{ при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате трех независимых испытаний X ровно два раза примет значение, принадлежащее интервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$.

174. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2\sin 4x$ в интервале $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

175. Плотность распределения случайной величины X задана на всей оси OX равенством $f(x)=\frac{a}{e^x+e^{-x}}$. Найти постоянный параметр a.

176. Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1, \\ a\cdot\operatorname{arctg} x, & \text{при } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Найти параметр a.

177*. Случайная величина X распределена по закону Коши с дифференциальной функций распределения $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти математическое ожидание и вероятность того, что случайная величина X примет значение в интервале $(-1, 1)$.

178*. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на интервале $(-2, 8)$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

179**. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1-\frac{x_0^2}{x^2}, & \text{при } x \ge x_0, \\ 0, & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

Найти числовые характеристики величины X.

180**. Диаметр круга X измерен приближенно, причем $a \le x \le b$. Рассматривая диаметр как случайную величину X, распределенную

равномерно в интервале (a, b), найти математическое ожидание площади круга.

§ 7. Нормальный закон распределения

В начале XIX в. нормальное распределение затмило собой все остальные, поскольку в работах Гаусса и Лежандра утверждалось о нормальном законе распределения ошибок наблюдений.

Нормальный закон распределения (или распределение Гаусса) задается следующей дифференциальной функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a, σ — параметры.

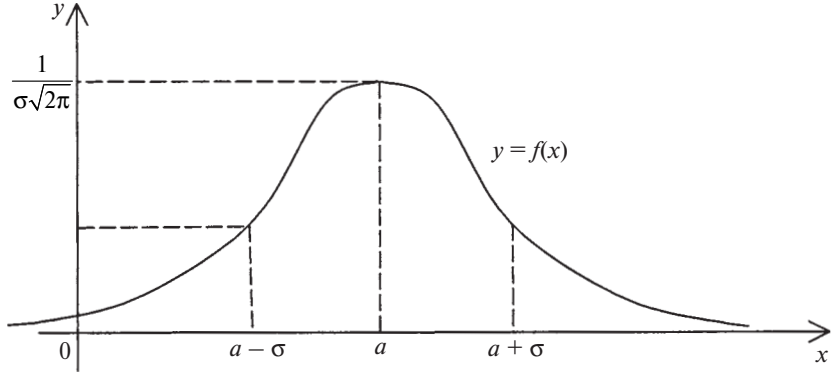


Рис. 56

$f(a)$ — max
$x_1 = a - \sigma$, $x_2 = a + \sigma$ — точки перегиба.

Пример 91. Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ является дифференциальной функцией распределения н.с.в.

Решение. Проверим, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Пример 92. Правило трех сигм.

Решение. Найдем вероятность того, что распределенная нормально с.в. X находится на промежутке $]\alpha, \beta[$.

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Φ — табличная функция Лапласа (см. Глава II, § 5 и приложение 2).

$P\{a - \sigma < x < a + \sigma\} = 2\Phi(1) \approx 2 \cdot 0{,}341 = 0{,}682$;

$P\{a - 2\sigma < x < a + 2\sigma\} = 2\Phi(2) \approx 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954$;

$P\{a - 3\sigma < x < a + 3\sigma\} = 2\Phi(3) \approx 2 \cdot 0{,}499 = 0{,}998$,

т. е. можно считать практически достоверным, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, находится на интервале $]a - 3\sigma, a + 3\sigma[$.

Пример 93. Найти характеристики положения для нормального закона распределения.

Решение. 1) $$M[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} (\sigma t + a) dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} t dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 + a \cdot 1 = a,$$

поскольку интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$.

2) $f'(x) = -\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $f'(a) = 0$ и $f'(a-0) > 0, f'(a+0) < 0$, то $M_o = a$.

3) $M_e = a$, так как график функции $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ симметричен относительно прямой $x = a$.

Пример 94. Найти характеристики рассеивания для нормального закона распределения.

Решение. 1) $D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt =$

$$= \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt & v = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right] = \sigma^2.$$

2) Среднее квадратическое отклонение $\sigma_x = +\sqrt{D[X]}$ в нашем случае равно σ.

3) Найдем асимметрию A_s.

$$A_s = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^3 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^4\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0.$$

Пример 95. Найти математическое ожидание и дисперсию для показательного двустороннего закона Лапласа, заданного дифференцирующей функцией $f(x) = \frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x-a|}$.

Решение.

1) $$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-a|}dx=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{a} xe^{\lambda(x-a)}dx+\frac{\lambda}{2}\int_{a}^{+\infty} xe^{-\lambda(x-a)}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{\pm\lambda(x-a)} & v=\pm\frac{1}{\lambda}e^{\pm\lambda(x-a)} \end{vmatrix}=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{\lambda(x-a)}\cdot x\Big|_{-\infty}^{a}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a} e^{\lambda(x-a)}dx-\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda(x-a)}\cdot x\Big|_{a}^{+\infty}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{a}^{+\infty} e^{-\lambda(x-a)}dx=\frac{a}{2}-\frac{1}{2\lambda}e^{\lambda(x-a)}\Big|_{-\infty}^{a}+\frac{a}{2}-\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda(x-a)}\Big|_{a}^{+\infty}=$$

$$=a-\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{2\lambda}=a.$$

2) Для нахождения дисперсии вычислим $M[X^2]$:

$$M[X^2]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-a|}dx=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{a} x^2e^{\lambda(x-a)}dx+\frac{\lambda}{2}\int_{a}^{+\infty} x^2e^{-\lambda(x-a)}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^{\pm\lambda(x-a)} & v=\pm\frac{1}{\lambda}e^{\pm\lambda(x-a)} \end{vmatrix}=\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{\lambda(x-a)}\cdot x^2\Big|_{-\infty}^{a}-$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{a} 2x\frac{1}{\lambda}e^{\lambda(x-a)}dx-\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda(x-a)}\cdot x\Big|_{a}^{+\infty}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_{a}^{+\infty} 2x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(x-a)}dx=\frac{a^2}{2}-2\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2\lambda}\right)+\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2\lambda}\right)=$$

$$=a^2+\frac{2}{\lambda}.$$

Тогда $D[X]=M[X^2]-M^2[X]=\left(a^2+\frac{2}{\lambda}-a^2\right)=\frac{2}{\lambda}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как задается нормальный закон распределения?
2. Свойства дифференциальной функции распределения нормального закона.
3. Как изменяется кривая нормального распределения при изменении ее параметров?
4. Какие числовые характеристики нормального распределения совпадают?
5. Как можно находить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение по кривой нормального распределения?
6. Каким образом можно получить асимптотическую формулу Лапласа?
7. Правило трех сигм.
8. Какие вы знаете непрерывные случайные величины, «похожие» на нормальный закон распределения?

Задачи

181. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $a = 1$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$. Написать дифференциальную функцию распределения для X.

182. Найти плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X, зная, что $M[X] = 2$, $D[X] = 9$.

183. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

184. Нормально распределенная случайная величина X задана функцией плотности вероятности $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{72}}$. Найти моду и медиану X.

185. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $a = 3$ и $\sigma = 0{,}5$. Определить вероятность того, что ее значение отклоняется от a по абсолютной величине не более чем на 0,7.

186. Случайная величина X задана дифференциальной функцией $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{0{,}5}}$. Найти вероятность того, что случайная величина попадет в интервал (0, 2).

187*. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 2$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,995 случайная величина X оба раза попадет в результате двух испытаний.

188*. Случайная величина X распределена нормально и имеет плотность вероятности $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y, если $Y = 5X + 1$.

189**. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Найти дифференциальную функцию обратной ей величины $Y=\frac{1}{X}$.

190**. Доказать, что если случайная величина X имеет нормальное распределение, то линейная функция $Y = AX + B$ ($A \neq 0$) также имеет нормальное распределение.

§ 8. Двумерные случайные величины

Если на пространстве событий $\Omega = \{\omega\}$ заданы две случайные функции $X = \phi(\omega)$ и $Y = \psi(\omega)$, то говорят, что задана двумерная случайная величина (X, Y).

Интегральной функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств:

$$X < x \text{ и } Y < y:$$

$$F(x, y) = P\{X < x,\ Y < y\}$$

и геометрически определяет вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрат с вершиной в точке (x, y), лежащей левее и ниже ее.

Закон распределения дискретной двумерной с.в. (X, Y) может быть задан с помощью таблицы:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

где $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Для двумерной с.в. (X, Y) дискретного и непрерывного типов интегральные функции распределения соответственно равны

$$F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij} \text{ и } F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

где $f(x, y)$ — плотность вероятности величины (X, Y).

Свойства функции плотности вероятности:

1. $f(x, y) \geq 0$,

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$,

3. $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$,

4. $P\{(X,Y) \in D\} = \iint_{(D)} f(x,y)dxdy$.

Пример 96. Составить закон распределения двух шаров в первых двух ящиках, если два шара случайно размещаются по трем ящикам.

Решение. Пусть X = {число шаров в первом ящике} и Y = {число шаров во втором ящике}, тогда искомый закон совместного распределения с.в. (X, Y) представляется следующей таблицей:

$X \backslash Y$	0	1	2	Распределение X
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
Распределение Y	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

Пример 97. Найти интегральную функцию распределения для числа попаданий и числа промахов по мишени при одном выстреле, вероятность попадания при котором равна p.

Решение. Пусть X = {число попаданий в мишень} и Y = {число промахов по мишени}, тогда закон распределения двумерной с.в. (X, Y) будет следующий:

$X \backslash Y$	0	1
0	0	q
1	p	0

а искомая интегральная функция

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1, y \le 1, \\ p, \text{ если } x > 1, y \le 1, \\ q, \text{ если } x \le 1, y > 1, \\ 1, \text{ если } x > 1, y > 1. \end{cases}$$

Условным математическим ожиданием одной из с.в. называется ее математическое ожидание, вычисленное при условии, что другая с.в. приняла определенное значение:

$$M[Y / x_i] = \sum_j y_i \cdot P\{Y = y_j / X = x_i\}.$$

Для непрерывных с.в. X и Y

$$M[Y / x_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y / x)\, dy,$$

где $f(y/x)$ — условная плотность распределения с.в. Y при $X = x$.

Условное математическое ожидание с.в. при заданном $X = x$ называется регрессией Y на X. График этой зависимости от x называется линией регрессии Y на x.

Пример 98. Найти линию регрессии Y на x для двумерной с.в. из примера 96.

Решение. Найдем условные математические ожидания с.в. Y при условии, что с.в. X зафиксирована:

$$M[Y/x=0]=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{4}{9},$$

$$M[Y/x=1]=0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot 0=\frac{2}{9},$$

$$M[Y/x=2]=0\cdot\frac{1}{9}+1\cdot 0+2\cdot 0=0.$$

Получили три точки $(0, \frac{4}{9})$, $(1, \frac{2}{9})$, $(2, 0)$, которые лежат на прямой $y=-\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}$, являющейся в данном случае линией регрессии Y на x.

Пример 99. Двумерная с.в. (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2(1+x^2)(2+y^2)}.$$

Найти: а) величину A; б) функцию распределения $F(x, y)$; в) вероятность попадания случайной точки (x, y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{2}$.

Решение. а) Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$, то

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Adxdy}{\pi^2(1+x^2)(2+y^2)}=\frac{A}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{2+y^2}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right)=$$

$$=\frac{A}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{2+y^2}=\frac{A}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right)=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

и $A = \sqrt{2}$;

б) $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{\sqrt{2}dudv}{\pi^2(1+u^2)(2+v^2)}=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{\sqrt{2}du}{\pi^2(1+u^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{y}\right)=$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right);$$

в) $P\left\{0\le X\le 1,\ 0\le Y\le\sqrt{2}\right\}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_{0}^{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}dy}{(2+y^2)\pi^2}=$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{16}.$$

Пример 100. Найти $F(x, y)$, $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_X(X/Y=y)$, $f_Y(Y/X=x)$ для функции плотности вероятности

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(x^2-y^2)e^{-x},\ 0<x<\infty,\ |y|<x.$$

Решение.

$$f_X(x)=\frac{e^{-x}}{8}\int\limits_{-x}^{x}(x^2-y^2)dy=\frac{e^{-x}}{8}\left(x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-x}^{x}=\frac{x^3e^{-x}}{6},\ x>0;$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{8}\int\limits_{|y|}^{+\infty}(x^2-y^2)e^{-x}dx=\frac{1}{8}\left(\int\limits_{|y|}^{+\infty}x^2e^{-x}dx-\int\limits_{|y|}^{+\infty}y^2e^{-x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(y^2e^{-|y|}+2|y|e^{-|y|}+2^{-|y|}+y^2e^{-x}\Big|_{|y|}^{+\infty}\right)=\frac{1}{4}e^{-|y|}\left(1+|y|\right);$$

$$F_X(x)=\frac{1}{6}\int\limits_{0}^{x}u^3e^{-u}du=1-\left(e^{-x}+xe^{-x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}\right);$$

$$F_Y(y)=1-\frac{1}{2}e^{-y}\left(1+\frac{y}{2}\right),\ y>0;$$

$$F_Y(y)=1-F_Y(-y),\ y<0.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие способы задания двумерной случайной величины вы знаете?
2. Геометрический смысл интегральной функции распределения.
3. Как найти центр рассеивания двумерной случайной величины?
4. Свойства интегральной функции распределения.
5. Вычисление условных математических ожиданий на графе распределения.
6. Что называется линией регрессии?
7. Как находятся условные плотности распределения?
8. Как определить независимость составляющих двумерной случайной величины?

Задачи

191. Найти закон распределения для числа белых и черных шаров при извлечении двух шаров из урны, содержащей один белый и два черных шара.

192. Составить закон распределения для сумм очков на «костях» из полного набора домино, взятых по модулю 4, и для их разностей по модулю 2.

193. Составить закон распределения для сумм очков на «костях» из полного набора домино, взятых по модулю 4, и для их абсолютных разностей.

194. Найти интегральную функцию распределения для числа «гербов» и «решек» при одном подбрасывании монеты.

195. Двумерная случайная величина задана дифференциальной функцией

$$f(x, y) = \begin{cases} C, \text{ если } x^2 + y^2 < 1, \\ 0, \text{ если } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Найти постоянную C.

196. Найти условные математического ожидания двумерной случайной величины, заданной законом распределения:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0,2	0,1	0,3
1	0,05	0,15	0,2

197*. Найти линию регрессии Y на x для двумерной случайной величины из предыдущего примера.

198*. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{A}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Найти: а) величину A; б) функцию распределения $F(x, y)$; в) вероятность попадания случайной точки (x, y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{2}$.

199**. Плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины $f(x, y) = \cos x \cdot \cos y$ в квадрате $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Доказать, что составляющие X и Y независимы.

200**. Найти линии регрессии X на y и Y на x для двумерной дискретной случайной величины из задачи 192.

§ 9. Характеристики двумерных случайных величин

В качестве числовых характеристик двумерных случайных величин (X, Y) обычно рассматриваются начальные и центральные моменты различных порядков.

Математическое ожидание произведения

$$(X-a)^k \cdot (Y-b)^s$$

называется моментом порядка $k + s$. Если $a = b = 0$, то моменты называются начальными и обозначаются $\alpha_{k,s}$; если $a = M[X]$ и $b = M[Y]$, то моменты называются центральными — $\mu_{k,s}$.

Начальный и центральный моменты дискретных и непрерывных с.в. (X, Y) определяются по следующим формулам:

$$\alpha_{k,s}=\sum_i\sum_j x_i^k \cdot y_j^s \cdot p_{ij}, \quad \alpha_{k,s}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy,$$

$$\mu_{k,s}=\sum_i\sum_j (x_i-\overline{x})^k \cdot (y_j-\overline{y})^s \cdot p_{ij},$$

$$\mu_{k,s}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})^k (y-\overline{y})^s f(x,y)dxdy.$$

Порядком начального (центрального) момента называется сумма его индексов $k + s$. На практике чаще всего встречаются моменты первого и второго порядков.

Начальные моменты первого порядка представляют собой математические ожидания с.в. X и Y. Точка ($M[X]$, $M[Y]$) называется центром рассеивания двумерной с.в. (X, Y).

Центральные моменты первого порядка равны нулю, а второго:

$$\mu_{2,0} = M\left[\overset{o}{X}{}^2 \cdot \overset{o}{Y}{}^0\right] = M\left[\overset{o}{X}{}^2\right] = D[X];$$

$$\mu_{0,2} = M\left[\overset{o}{X}{}^0 \cdot \overset{o}{Y}{}^2\right] = M\left[\overset{o}{Y}{}^2\right] = D[Y];$$

$$\mu_{1,1} = M\left[\overset{o}{X} \cdot \overset{o}{Y}\right].$$

$\mu_{1,1}$ называется **ковариацией** (или корреляционным моментом) с.в. (X, Y), будем его обозначать

$$Cov(X,Y) = M\left[\overset{o}{X} \cdot \overset{o}{Y}\right] = M\left[(X-\overline{x})(Y-\overline{y})\right].$$

Ковариация двух с.в. (X, Y) характеризует не только степень зависимости случайных величин (ковариация двух независимых с.в. равна нулю), но также их рассеивание вокруг точки $(\overline{x},\overline{y})$.

Для характеристики линейной зависимости между X и Y служит **коэффициент корреляции**:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]D[Y]}}.$$

Абсолютное значение коэффициента корреляции максимально (т. е. равно 1), когда между X и Y существует линейная зависимость. Случайные величины X и Y называются некоррелированными, если $\rho(X, Y) = 0$.

Коэффициент корреляции является одним из основных понятий в теории вероятностей и математической статистике, был введен Ф. Гальтоном и Пирсоном.

Для конечных с.в. X, Y ковариацию (и аналогично начальные и центральные моменты) удобно находить как полный вес графа, который будем называть ковариационным:

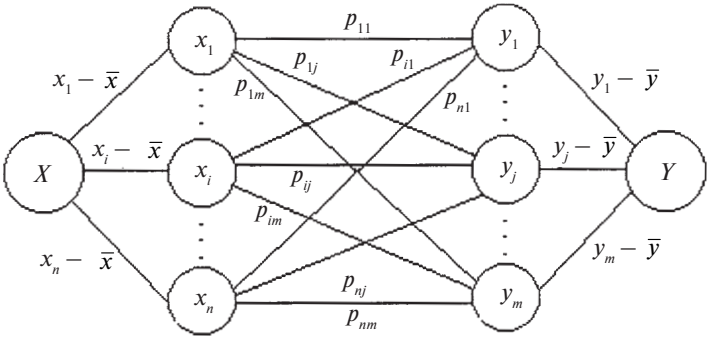


Рис. 57

Пример 101. Найти ковариацию для двумерной случайной величины из примера 96.

Решение. Во-первых, вычислим математические ожидания с.в. X и Y:

$$\bar{x} = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \bar{y}\ .$$

Во-вторых, построим ковариационный граф:

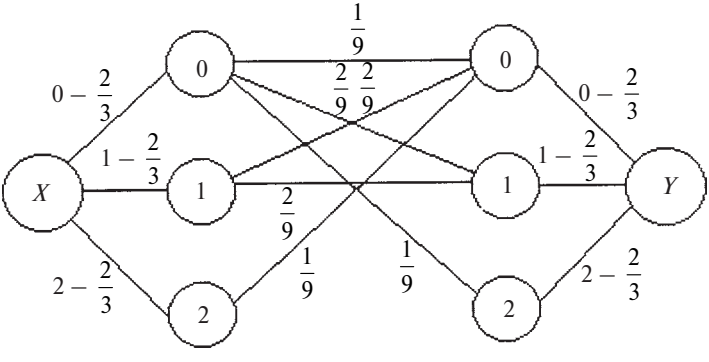


Рис. 58

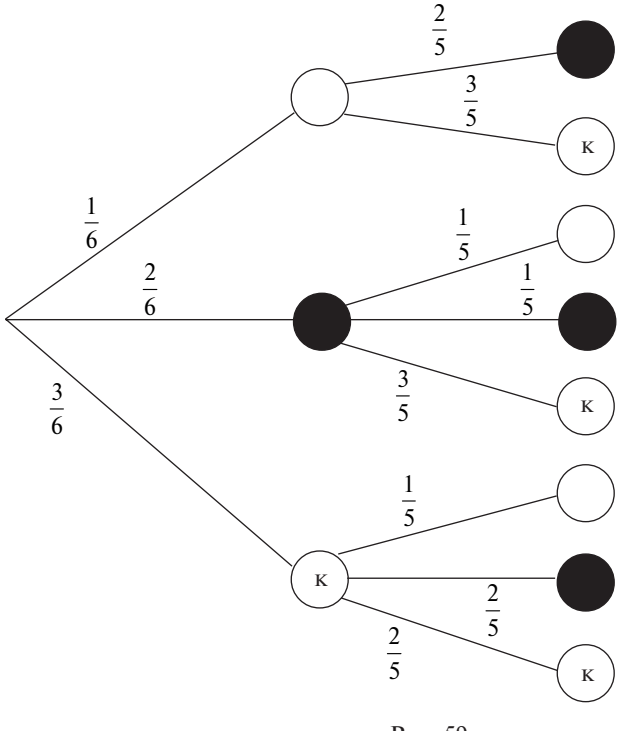
В-третьих, ковариацию находим как вес полученного ковариационного графа:

$$Cov(X,Y)=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{3}+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{18}{81}=-\frac{2}{9}.$$

Пример 102. Из урны, содержащей один белый, два черных и три красных шара, последовательно извлекаем два шара. Найти коэффициент корреляции для числа белых (X) и черных (Y) шаров, оказавшихся в выборке.

Решение. Построим сначала, как мы это делали в предыдущей главе, вероятностное дерево исходов, добавив к нему два столбца для значений случайных величин X и Y.



P	X	Y
$\frac{1}{15}$	1	1
$\frac{1}{10}$	1	0
$\frac{1}{15}$	1	1
$\frac{1}{15}$	0	2
$\frac{1}{5}$	0	1
$\frac{1}{10}$	1	0
$\frac{1}{5}$	0	1
$\frac{1}{5}$	0	0

Рис. 59

По полученным данным построим ковариационный граф:

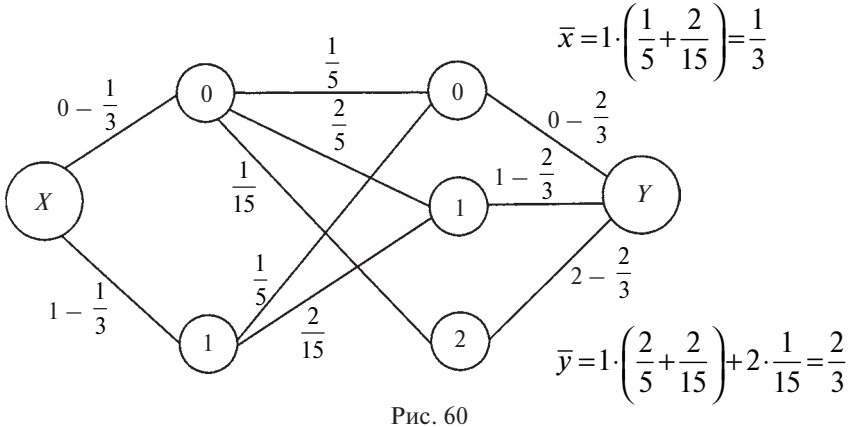


Рис. 60

$$Cov(X,Y) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{4}{3} +$$

$$+ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4}{45}.$$

Для получения коэффициента корреляции найдем дисперсии с.в. X и Y по ковариационному графу:

$$D[X] = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{15}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{15}\right) = \frac{2}{9},$$

$$D[Y] = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{15}\right) + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{15} = \frac{16}{45}.$$

Тогда $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}} = \dfrac{-\frac{4}{15}}{\sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{16}{45}}} = -\dfrac{4 \cdot 9 \cdot \sqrt{5}}{45 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

Пример 103. Доказать, что если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью, то абсолютная величина их коэффициента корреляции равна единице.

Решение. По условию задачи $Y = aX + b$ и

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}} = \frac{M\left[(X-\overline{x})\cdot\left((aX+b)-(a\overline{x}+b)\right)\right]}{\sqrt{D[X]\cdot D[aX+b]}} =$$

$$= \frac{aM\left[(X-\overline{x})^2\right]}{\sqrt{a^2D^2[X]}} = \frac{aD[X]}{|a|\cdot D[X]} = \frac{a}{|a|} = \pm 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 104. Показать, что для любых случайных величин X и Y с конечной дисперсией $D[X]$ выполняется соотношение

$D[X] = M[D(X/Y)] + D[M(X/Y)]$.

Решение. По свойству дисперсии

$$M\left[D(X/Y)\right] = M\left[M(X^2/Y) - M^2(X/Y)\right] = M\left[M(X^2/Y)\right] -$$

$$-M\left[M^2(X/Y)\right] = M[X^2] - M^2[X] = D[X],$$

так как $M\left[M(X/Y)\right] = M[X]$ и $M\left[M(X^2/Y)\right] = M[X^2]$.

Пример 105. Найти коэффициент корреляции двумерной случайной величины из примера 99.

Решение. Найдем математические ожидания с.в. X и Y:

$$M[X] = \alpha_{1,0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}x}{\pi^2(1+x^2)(2+y^2)}dxdy = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^2}\right)\frac{dy}{2+y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right)\frac{dy}{2+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{c\to\infty}\left[\ln(1+c^2) - \ln\left(1+(-c)^2\right)\right]\right)$$

$$\cdot\frac{dy}{2+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lim_{c\to\infty}(\ln 1)\right)\frac{dy}{2+y^2} = 0.$$

Аналогично получаем, что $M[Y] = 0$.

Тогда

$$Cov(X,Y)=M\left[(X-0)\cdot(Y-0)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}xy}{\pi^2(1+x^2)(2+y^2)}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\right)\frac{ydy}{2+y^2}=0.$$

Следовательно, $\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}}=0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Порядок начального (центрального) момента.
2. Что характеризует ковариация?
3. Чему равна ковариация двух независимых случайных величин?
4. Ковариационный граф.
5. Кто ввел понятие коэффициента корреляции?
6. Каково максимальное абсолютное значение коэффициента корреляции? Приведите примеры.
7. Какие случайные величины называются некоррелированными?
8. Нахождение коэффициента корреляции по ковариационному графу.

Задачи

201. Найти начальные моменты первого и второго порядков для двумерной случайной величины, заданной законом распределения:

$X \backslash Y$	-1	0	1	2
-1	0,1	0,2	0,05	0,15
1	0,05	0,1	0,25	0,1

202. Построить ковариационный граф для двумерной дискретной случайной величины из задачи 192.

203. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X, Y):

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 2e^{-2x}, & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } y < 0, \\ 3e^{-3y}, & \text{при } y \geq 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы; б) ковариацию двумерной случайной величины (X, Y).

204. Доказать, что для любых постоянных a, b, c, d справедливо равенство $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$.

205. Найти ковариацию для сумм очков и числа тузов при выборе двух карт из колоды, содержащей только тузов, королей и дам.

206. Найти ковариацию для числа простых цифр в двузначном числе и числа простых двузначных чисел.

207*. Найти коэффициент корреляции для числа нечетных цифр и числа простых двузначных чисел, получающихся при последовательном извлечении двух простых цифр, написанных на карточках.

208*. Задана плотность совместного распределения непрерывной двумерной случайной величины $(X,Y): f(x,y) = \frac{1}{4}\sin x \cdot \sin y$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$; вне квадрата $f(x, y) = 0$. Найти коэффициент корреляции $\rho(x, y)$.

209**. Приведите пример, показывающий, что из равенства нулю коэффициента корреляции не следует независимость соответствующих случайных величин.

210**. Докажите, что если две случайные величины X и Y принимают только два значения каждая и $Cov(X, Y) = 0$, то X и Y независимы.

§ 10. Корреляционный граф многомерных случайных величин

Понятие совместного распределения переносится также на системы из более чем двух с.в. В качестве мер связи используются коэффициенты парной корреляции, которые удобно интерпретировать на графе. Корреляционным графом назовем множество вершин, обозначающих переменные и соединенных попарно ребрами с проставленными рядом соответствующими им

коэффициентами корреляции. Так, для трех случайных величин X, Y, Z корреляционный граф выглядит следующим образом:

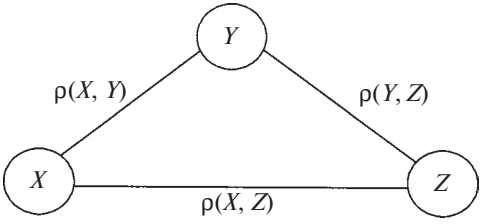


Рис. 61

Пример 106. Найти корреляционный граф для числа белых, черных и красных шаров, оказавшихся в выборке из примера 102.

Решение. Приняв за с.в. Z = {число красных шаров в выборке}, находим $\rho(X, Z)$ по ковариационному графу:

$$\overline{z} = 1 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} \right) + 2 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

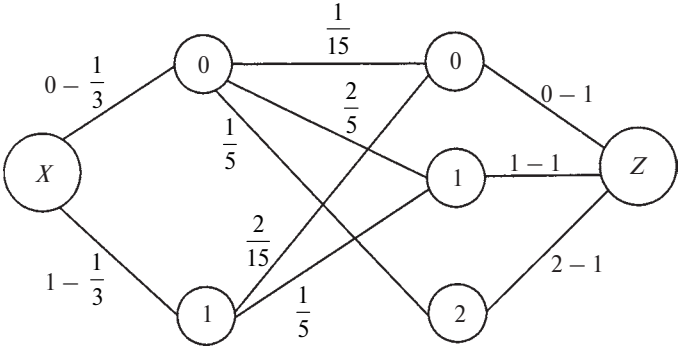


Рис. 62

$$Cov(X,Z) = \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{15} \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{15} \cdot (-1) - \frac{6}{45} = -\frac{2}{15}.$$

$$D[Z] = (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{2}{15} \right) + 1^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Тогда $\rho(X,Z)=\dfrac{-\dfrac{2}{15}}{\sqrt{\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2}{5}}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Аналогично находим коэффициент корреляции $\rho(Y,Z)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, искомый корреляционный граф выглядит следующим образом:

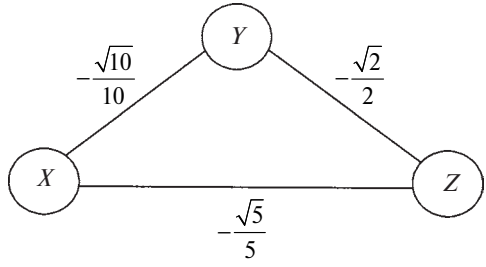
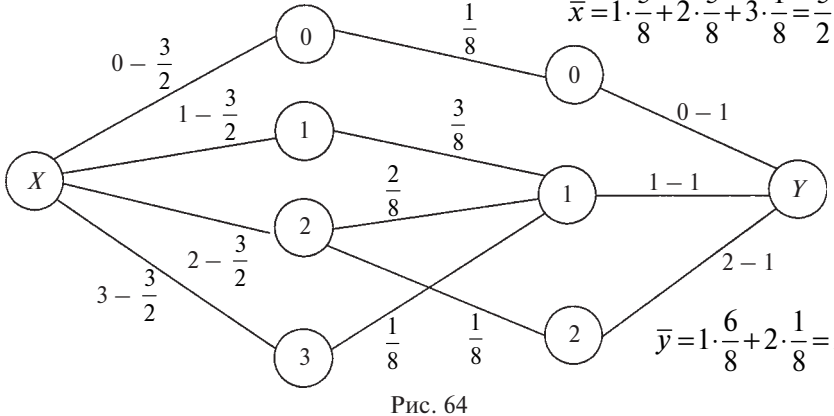


Рис. 63

Пример 107. Пусть X, Y, Z — соответственно число выпадений «герба», число серий «гербов» и длина максимальной из этих серий при трех бросаниях монеты. Постройте корреляционный граф с.в. X, Y, Z.

Решение. Используя вероятностное дерево для трех бросаний монеты, находим три ковариационных графа и по ним соответствующие коэффициенты корреляции.

$$\bar{x}=1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2},$$



$$\bar{y}=1\cdot\frac{6}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=1.$$

Рис. 64

$$Cov(X,Y)=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

$$D[X]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

$$D[Y]=(-1)^2\cdot\frac{1}{8}+0^2\cdot\frac{6}{8}+1^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4},$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{z}=1\cdot\frac{4}{8}+2\cdot\frac{2}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{11}{8}.$$

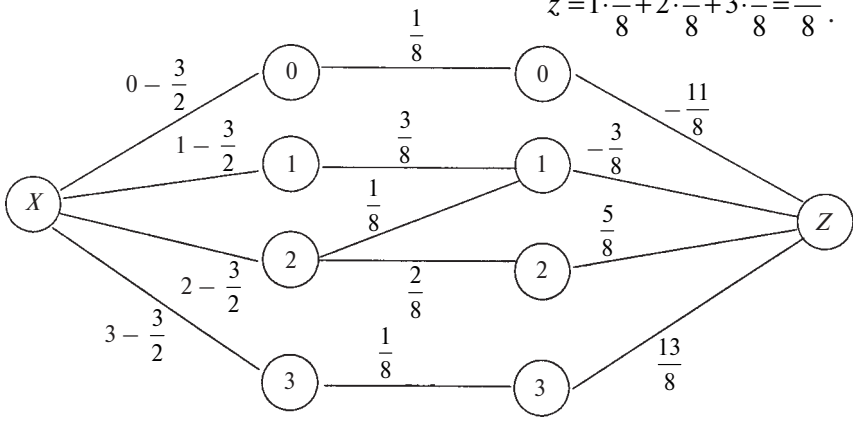


Рис. 65

$$Cov(X,Z)=\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{13}{8}=\frac{11}{16},$$

$$D[Z]=\left(-\frac{11}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\left(-\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{4}{8}+\left(\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{2}{8}+\left(\frac{13}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{47}{64},$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\frac{11}{16}}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{47}{64}}}=\frac{11}{\sqrt{141}}.$$

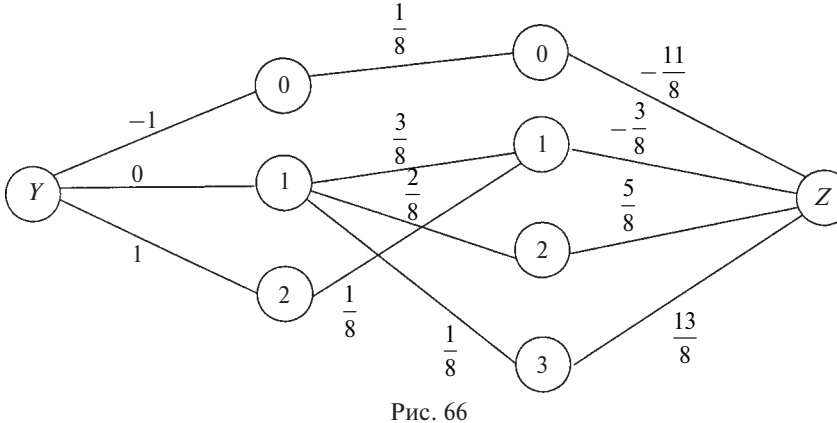


Рис. 66

$$Cov(Y,Z)=(-1)\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)+1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{8},$$

$$\rho(Y,Z)=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{47}{64}}}=\frac{2}{\sqrt{47}}.$$

Следовательно, искомый корреляционный граф имеет вид

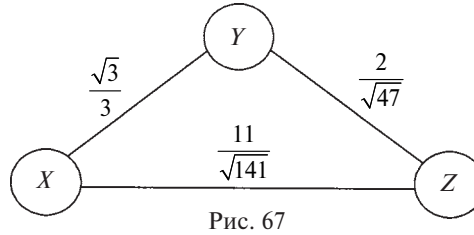


Рис. 67

Пример 108. Доказать, что

$$D[x_1 + x_2 + ... + x_n] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_k^2 + 2\sum_{ij} Cov(x_i, x_j)$$

для случайных величин X_1, X_2, ..., X_n с конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$.

Решение.

$$\left[(X_1 + ... + X_n) - (\overline{x}_1 + ... + \overline{x}_n)\right]^2 = \sum (X_k - \overline{x}_k)^2 +$$

$$+2\sum (X_i - \overline{x}_i) \cdot (X_j - \overline{x}_j).$$

Вычисляя математическое ожидание от обеих частей, получаем искомое соотношение.

Используем в дальнейшем полученный результат для выводов, которые прямыми вычислениями получаются достаточно сложно.

Пример 109. Найти математическое ожидание и дисперсию для числа совпадений занумерованных карт с номером раскладывания их в случайном порядке.

Решение. Определим с.в. X_k, принимающую значения 1 или 0 в зависимости от того, попала ли карта с номером k на k-е место или нет.

$$P\{X_k = 1\} = \frac{1}{n} \text{ и } P\{X_k = 0\} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Следовательно, $M[X_k] = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$

и $M[X_1 + X_2 + ... + X_n] = \frac{1}{n} \cdot n = 1$,

а $D[X_k] = \sigma_k^2 = M[X_k^2] - M^2[X_k] = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n-1}{n^2}$.

$$M[X_i \cdot X_j] = \frac{1}{n(n-1)} \text{ и } Cov\left(X_i, X_j\right) = \frac{1}{n(n-1)} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Тогда $D[X_1+X_2+...+X_n]=n\cdot\frac{n-1}{n^2}+2C_n^2\cdot\frac{1}{n^2(n-1)}=$

$$=\frac{n-1}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2(n-1)}=1.$$

Таким образом, получили, что и математическое ожидание, и дисперсия числа совпадений равны единице.

Пример 110. Найти дисперсию для гипергеометрического распределения (см. пример 73).

Решение. Введем с.в. X_l, принимающую два значения 1 или 0 в зависимости от того, является ли l-й элемент в выборке белым или нет ($l \le k$).

$$M[X_l]=1\cdot\frac{m}{n}+0\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n} \text{ и } D[X_l]=\frac{m}{n}-\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{nm-m^2}{n^2},$$

а $M[X_i\cdot X_j]=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}$

и $Cov\left(X_i,X_j\right)=\frac{m(m-1)}{n(n-1)}-\left(\frac{m}{n}\right)^2=\frac{nm(m-1)-m^2(n-1)}{n^2(n-1)}=\frac{m^2-nm}{n^2(n-1)}.$

Следовательно,

$$D\left[X_1+X_2+...+X_k\right]=k\cdot\frac{nm-m^2}{n^2}+2C_k^2\cdot\frac{m^2}{n^2(n-1)}=$$

$$=\frac{k(nm-m^2)}{n^2}\left[1-\frac{k-1}{n-1}\right]=\frac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая случайная величина называется многомерной?
2. Приведите примеры трехмерной случайной величины.
3. Как можно рассматривать многомерную случайную величину?
4. Как можно описать степень связи составляющих многомерной случайной величины?

5. Что называется корреляционным графом?
6. Приведите примеры возможного корреляционного графа.
7. Какие существуют ограничения для корреляционного графа?
8. О чем можно судить по корреляционному графу?

Задачи

211. Построить корреляционный граф для количества «костей» с суммой в 12 очков, с четной суммой и с суммой очков, кратных трем при случайном выборе одной «кости» из полного набора домино.

212. Подбрасываем по одному разу игральную кость и монету. Найти законы двумерных распределений для числа выпадения шести очков, четного числа очков на игральной кости и числа выпадения «гербов» на монете.

213. Составить законы двумерных распределений для числа выпадения шести очков, числа очков, кратных трем, и четного числа очков при двух подбрасываниях игральной кости.

214. Подбрасываем один раз игральную кость и два раза монету. Построить корреляционные графы для числа выпадения шести очков, четного числа очков на игральной кости и числа выпадения «гербов» на монете.

215. Построить корреляционный граф для количества «дуплей», количества «костей» с суммой очков, равных 4 или 8, при случайном выборе одной «кости» из полного набора домино.

216. Составить законы распределения двух шаров, случайно размещающихся в трех ящиках.

217*. Найти корреляционный граф для распределения трех шаров, случайно размещающихся в трех ящиках.

218*. Из урны, содержащей один белый, три черных и пять красных шаров, последовательно извлекаем два шара. Найти корреляционный граф для числа белых, черных или красных шаров, оказавшихся в выборке.

219**. В каком случае дисперсия суммы n взаимно независимых случайных величин, принимающих два значения 0 и 1, наибольшая? Чему она равна?

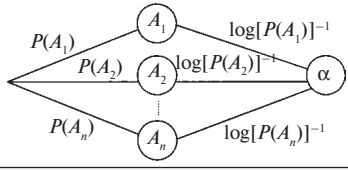
220**. Построить корреляционный граф для числа выпаданий «герба», числа серий «гербов» и длины, максимальной из этих серий, при четырех подбрасываниях монеты.

Глава IV
ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ

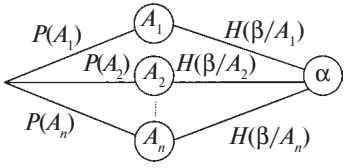
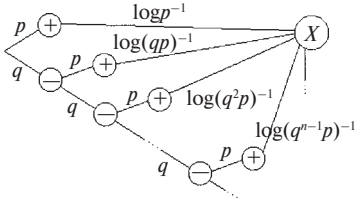
Настоящая глава является логическим и методическим продолжением предыдущих, но не является общепринятым материалом курса «Теория вероятностей». Однако, на наш взгляд, весьма логичным является рассмотрение здесь вопросов по энтропии, информации и кодированию. Знакомство будущего учителя математики с нетрадиционными вопросами теории вероятностей позволяет, с одной стороны, увидеть возможности продолжения понятия вероятности и их применения для решения школьных логических задач, а с другой — расширяет представление студента как о дискретной математике, так и о ее возможностях при вполне жизненных ситуациях.

Глава построена на тех же дидактических принципах фундирования и широком использовании графов. Применение графов для нахождения степени неопределенности позволяет установить аналогии новых результатов с ранее рассматриваемыми. Для определения количества информации впервые предлагается использовать ориентированный граф, а кодовое дерево применяется как для решения логических задач, так и для построения различных кодов.

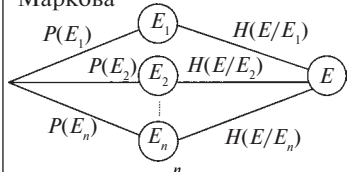
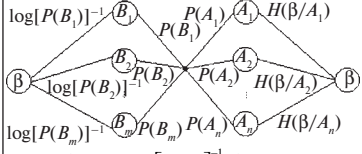
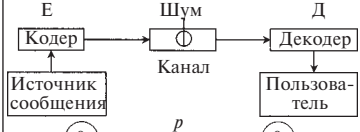
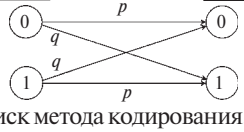
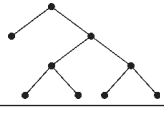
4.1. Опорная таблица

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Энтропия опыта. Формулы Хартли и Шеннона	$H(\alpha) \geq 0$; $H(\alpha) = 0$, если $\exists A_k : P(A_k) = 1$; $H(\alpha)$ — max, если $\forall A_i : P(A_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$	Вычислять меру неопределенности по формулам Хартли и Шеннона. Находить энтропию по графу неопределенности опыта 

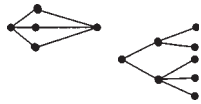
Продолжение табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Условные энтропии	$H(\alpha\cdot\beta) = H(\alpha) + H(\beta/\alpha)$, $0 \le H(\beta/\alpha) \le H(\beta)$; $H(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_k) \le H(\alpha_1) + H(\alpha_2) + H(\alpha_k)$	Находить условную энтропию как полный вес графа  $H(\beta/\alpha) = \sum_i P(A_i)\cdot H(\beta/A_i)$
Энтропия дискретных случайных величин	Энтропия биномиального распределения $H(X) =$ $= -\sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \log C_n^m -$ $-n(p\log p + q\log q)$, энтропия геометрического распределения $H(X) = -\log p - \frac{q}{p}\log q$	Вычислять энтропию дискретной случайной величины 
Дифференциальная энтропия непрерывных случайных величин	Энтропия показательного распределения $H(X) = \log\frac{e}{\lambda}$, энтропия нормального распределения $H(X) = \log\sigma\sqrt{2\pi e}$, энтропия распределения Лапласа $H(X) = \log\frac{2}{\lambda}$	Находить дифференциальную энтропию $H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log f(x)dx$

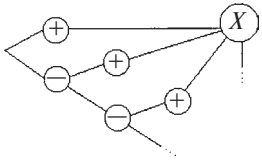
Окончание табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Энтропия цепей Маркова с вектором начальных вероятностей		Вычислять энтропию цепей Маркова  $H(E/E_m)=\sum_{i=1}^{n} p_{m_i}\log p_{m_i}^{-1}$
Количество информации $I(\alpha,\beta)=H(\beta)-H(\beta/\alpha)$; $H(A_k)\geq I(A_k/\beta)\geq H(\beta)$	$0\leq I(\alpha,\beta)\leq H(\beta)$; $I(\alpha,\beta)=H(\alpha)+H(\beta)-H(\alpha,\beta)$; $I(\alpha,\beta)=I(\beta,\alpha)$	Находить информацию об опыте β, содержащемся в опыте α  $I(\alpha,\beta)=\sum_j P(B_j)\log\left[P(B_j)\right]^{-1}-\sum_i P(A_i)H(\beta/A_i)$ Решать логические задачи с помощью подсчета информации. Строить кодовые деревья
Кодирование и декодирование		
Двоичный симметричный канал	Необходимые и достаточные условия возможности обнаружения (исправления) ошибок в коде	
Блочные (m,n)-коды Е: $2^m\to 2^n$, Д: $2^n\to 2^m$, $m\leq n$. Матричное кодирование. Коды Фано и Хаффмана	$d(a+c,b+c)=d(a,b)=w(a+b)$. Основная теорема о кодировании	Поиск метода кодирования. Поиск кодов, способных обнаруживать (исправлять) ошибки. Находить матрицы цепи Маркова вероятностей приема кода. Сравнивать экономность кодов. Построение бинарных деревьев 

4.2. Методы

Комбинаторный	Вероятностный	Графический
Основное правило, размещения, перестановки и сочетания, t-схемы	Случайные события и величины, цепи Маркова	

4.3. Алгоритмы

Определение последовательности испытаний	Поиск равновероятных исходов	Поиск схем кодирования и декодирования
	Максимальная энтропия и логические задачи, код Фано	Коды с обнаружением (исправлением) ошибок, экономичность кода

4.4. Спираль фундирования энтропии и информации

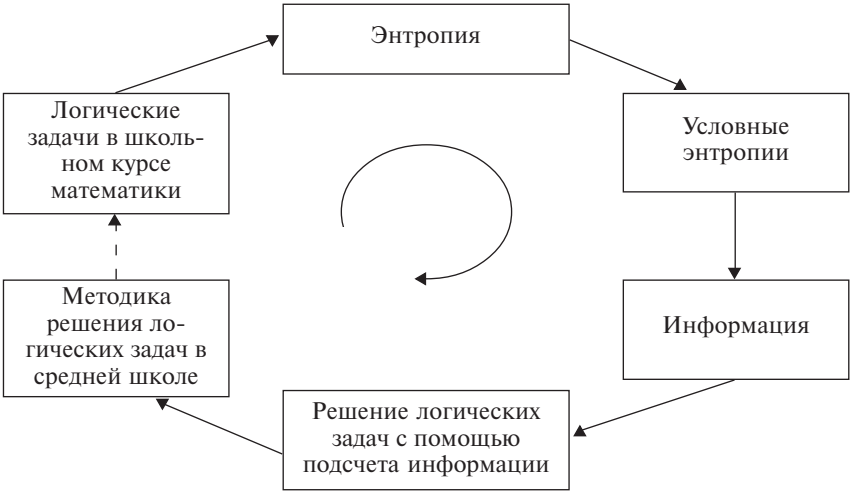


Рис. 68

§ 1. Энтропия как мера неопределенности

В курсе теории вероятностей до сих пор мы находили, в том случае, когда это возможно, вероятности случайных событий. Здесь же мы обратим внимание на неопределенность связанных с этими событиями опытов. Интуитивно ясно, что степень неопределенности (неожиданности) при подбрасывании монеты или игрального кубика различна. Для практики важно уметь численно оценивать степень неопределенности самых разнообразных опытов, чтобы иметь возможность сравнивать их с этой стороны.

Исторически первые шаги к введению понятия энтропии были сделаны в 1928 г. американским инженером-связистом Хартли, предложившим характеризовать степень неопределенности опыта с k различными исходами числом $\log k$. Однако он считал несущественным возможность неравновероятных исходов. Ошибочность точки зрения Хартли была показана Клодом Шенноном, предложившим принять в качестве меры неопределенности опыта α с возможными исходами $A_1, A_2, \ldots, A_k$ величину

$$H(\alpha)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\log[P(A_i)]^{-1}=-\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\log[P(A_i)].$$

Он же предложил назвать это число «энтропией».

В применениях энтропии обычно используются логарифмы по основанию два. Это означает, что за единицу измерения энтропии принимается неопределенность, содержащаяся в опыте, имеющем два равновероятных исхода. Такая единица измерения неопределенности называется двойной единицей, или *битом*.

Энтропию дискретного опыта предлагается находить как вес всего графа неопределенности

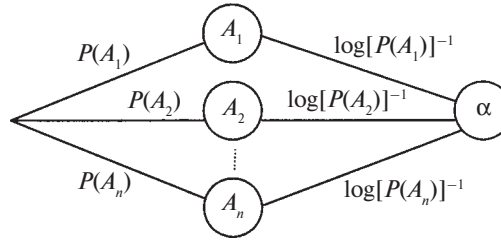


Рис. 69

Реальная ценность понятия энтропии определяется в первую очередь тем, что выражаемая им «степень неопределенности» опытов оказывается во многих случаях именно той характеристикой,

которая играет роль в разнообразных процессах, встречающихся в природе и технике и так или иначе связанных с передачей и хранением каких-либо сообщений.

Будущему педагогу понятие энтропии полезно знать, например, для возможного применения в экспериментальной психологии, одной из основных задач которой является изучение психологической реакции организма на какое-либо воздействие. Установлено, что среднее время реакции определяется энтропией опыта α, состоящего в подаче сигнала.

Пример 111. Какую степень неопределенности содержит опыт извлечения карточки с простой цифрой, вынутой из разрезной цифровой азбуки?

Решение. Из десяти цифр четыре (2, 3, 5, 7) являются простыми, поэтому вероятность p_1 извлечь карточку с простой цифрой равна 0,4, а вероятность противоположного события $p_2 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Воспользуемся формулой Шеннона

$$H(\alpha) = \frac{4}{10}\log\frac{10}{4} + \frac{6}{10}\log\frac{10}{6} = \log 10 - \log 4 - \log 6 =$$

$$= \log 2 + \log 5 - 2 - \log 2 - \log 3 = (\log 5 - \log 3 - 2) \text{ (бит)}.$$

Пример 112. Какую степень неопределенности содержит угадывание месяца рождения случайно встреченного человека?

Решение. Поскольку можно считать равновероятным рождение неизвестного человека в любой из 12 месяцев, то воспользуемся формулой Хартли

$$H(\alpha) = \log 12 = \log 4 + \log 3 = (2 + \log 3) \text{ (бит)}.$$

Пример 113. В одной группе 6 студентов из 24 получили в сессию неудовлетворительную оценку, а в другой — 9 из 27. В каком случае сложнее предсказать успеваемость студента?

Решение. Используем формулу Шеннона

$$H_1 = \frac{6}{24}\log\frac{24}{6} + \frac{18}{24}\log\frac{24}{18} = \frac{1}{4}\log 4 + \frac{3}{4}\log\frac{4}{3} =$$

$$= \log 4 - \frac{3}{4}\log 3 = 2 - \frac{3}{4}\log 3 \approx 2 - \frac{3}{4}\cdot 1{,}6 = 0{,}8 \text{ (бит)}.$$

$$H_2 = \frac{9}{27}\log\frac{27}{9} + \frac{18}{27}\log\frac{27}{18} = \frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3}\log\frac{3}{2} =$$

$$= \log 3 - \frac{2}{3} \approx 1{,}6 - 0{,}66 = 0{,}94 \text{ (бит)}.$$

$H_2 > H_1$, поэтому сложнее предсказать успеваемость студента во второй группе.

Пример 114. Какую степень неопределенности содержит опыт угадывания цвета двух шаров, извлеченных из урны, в которой находятся два белых и три черных шара?

Решение. Построим граф неопределенности данного опыта.

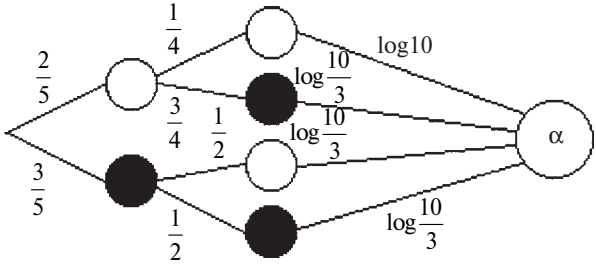


Рис. 70

$H(\alpha)$ находим как вес всего полученного графа.

$$H(\alpha) = \frac{1}{10}\log 10 + \left(\frac{3}{10}\log\frac{10}{3}\right)\cdot 3 = \log 10 - \frac{9}{10}\log 3 =$$

$$= (1 + \log 5 - 0{,}9\log 3) \text{ (бит)}.$$

Пример 115. Доказать, что у опытов α с двумя исходами наибольшую энтропию имеет тот α_0, у которого исходы равновероятны.

Решение. Построим график функции $f(x) = -x\log x$ (основание у логарифма больше 1) и рассмотрим среднюю линию MN трапеции $ABCD$, где $A(p,0)$; $B(p,f(p))$; $C(q,f(q))$; $D(q,0)$.

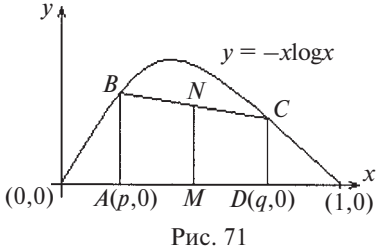


Рис. 71

$|MN| = \frac{1}{2}(-p\log p - q\log q) \le -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$, поскольку функция $f(x)$ на промежутке выпукла вверх.

Тогда

$$H(\alpha) = p\log p^{-1} + q\log q^{-1} = -p\log p - q\log q \le \log 2 = H(\alpha_0).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы основные требования к функции меры неопределенности?
2. Формула Хартли и ее недостатки.
3. Формула Шеннона.
4. В чем различие формул Хартли и Шеннона?
5. Какие свойства энтропии вы знаете?
6. В каком случае неопределенность опыта наибольшая?
7. Основные единицы измерения энтропии и их связь.
8. Бит и другие его названия.

Задачи

221. Какую степень неопределенности содержит угадывание дня рождения случайно встреченного человека?

222. В каком случае менее предсказуем исход: в том, когда подбрасываем монету, или в том, когда угадываем пол первого случайно встреченного человека?

223. Что более непредсказуемо:

а) исход подбрасывания двух игральных костей или

б) угадывание карты из колоды в 36 карт (32 карты)?

224. В одной группе 6 студентов из 20 получили в сессию неудовлетворительные оценки, а в другой — 8 из 24. В каком случае сложнее предсказать успевающего студента?

225. Одна урна содержит один белый и два черных шара, а другая — два белых и три черных. В каком случае угадывание цвета извлеченного из урны шара более предсказуемо?

226. Что более предсказуемо: угадывание масти случайно выбранной карты из колоды в 32 карты или из колоды в 52 карты?

227*. Какую степень неопределенности содержит опыт извлечения двух карт из колоды в 36 карт относительно козырных карт?

228*. Найдите степень неопределенности извлечения двух шаров из урны, содержащей один белый, два черных и три красных шара.

229**. В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй — 3 белых и 3 черных. Из каждой урны вынимают по два шара. Исход какого из этих двух опытов более непредсказуем?

230**. В одной подгруппе 3 из 10 студентов получили неудовлетворительную оценку по немецкому языку, а в другой — 4 из 12 по английскому. В каком случае сложнее предсказать успеваемость по иностранному языку двух случайно выбранных студентов одной подгруппы?

§ 2. Условные энтропии

Условная энтропия $H(\beta/A_k)$ опыта β относительно исхода A_k определяется следующим образом

$$H(\beta/A_k)=\sum_j P(B_j/A_k)\log[P(B_j/A_k)]^{-1}.$$

Условной энтропией $H(\beta/\alpha)$ опыта β относительно опыта α называется математическое ожидание условной энтропии опыта β относительно всех исходов опыта α:

$$H(\beta/\alpha)=\sum_i P(A_i)H(\beta/A_i).$$

Условную энтропию $H(\beta/\alpha)$ предлагается находить по следующему графу:

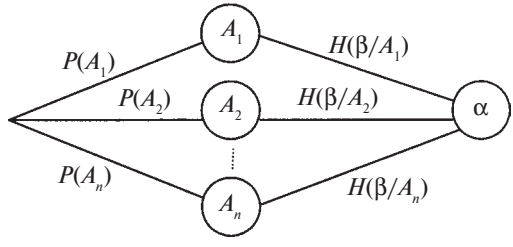


Рис. 72

Свойства энтропии:

1) $H(\alpha)\geq 0$;

2) $H(\alpha)=0$, если $P(A_i)=1$, и все $P(A_j)=0, j\neq i$;

3) $H(\alpha)$ — max, если все $P(A_i)=\frac{1}{n}$, $i = 1, 2, ..., n$;

4) $H(\alpha\cdot\beta) = H(\alpha) + H(\beta/\alpha)$;

5) $0 \le H(\beta/\alpha) \le H(\beta)$;

6) $H(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_k) \le H(\alpha_1) + H(\alpha_2) +...+ H(\alpha_k)$.

Пример 116. Какую энтропию содержит опыт угадывания простой цифры при извлечении из цифровой азбуки при условии, что одна карточка утеряна?

Решение 1. Пусть опыт α = {утеряна одна карточка} = $\{A_1,A_2\}$, где A_1 = {утеряна карточка с простой цифрой}, A_2 = {утеряна карточка с непростой цифрой}. Опыт β = {угадывание карточки с простой цифрой}, и в задаче предлагается найти условную энтропию $H(\beta/\alpha)$.

$$H(\beta/\alpha)=P(A_1)\cdot H(\beta/A_1)+P(A_2)\cdot H(\beta/A_2)\,.$$

Поскольку карточек с простыми цифрами четыре, то $P(A_1)=\frac{4}{10}$,

а $P(A_2)=1-P(A_1)=\frac{6}{10}$, $H(\beta/A_1)=\frac{3}{9}\log\frac{9}{3}+\frac{6}{9}\log\frac{9}{6}=\log 3-\frac{2}{3}$ поскольку после утери карточки с простой цифрой осталось 9 карточек, и из них 3 с простой цифрой.

$$H(\beta/A_2)=\frac{4}{9}\log\frac{9}{4}+\frac{5}{9}\log\frac{9}{5}=\log 9-\frac{4}{9}\cdot 2-\frac{5}{9}\log 5=$$

$$=2\log 3-\frac{5}{9}\log 5-\frac{8}{9}.$$

Следовательно,

$$H(\beta/\alpha)=\frac{2}{5}\left(\log 3-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{5}\left(2\log 3-\frac{5}{9}\log 5-\frac{8}{9}\right)=$$

$$=\left(\frac{8}{5}\log 3-\frac{1}{3}\log 5-\frac{4}{5}\right)\text{(бит)}.$$

Решение 2. Построим граф двух зависимых опытов α и β:

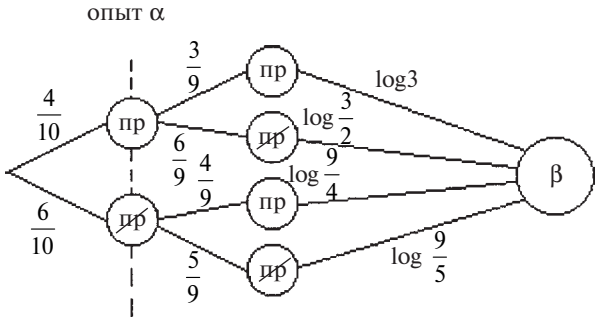


Рис. 73

Тогда

$$H(\beta/\alpha)=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\log 3+\frac{2}{3}\log\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\log\frac{9}{4}+\frac{5}{9}\log\frac{9}{5}\right)=$$

$$=\frac{8}{5}\log 3-\frac{1}{3}\log 5-\frac{4}{5}\approx 1{,}6\cdot 1{,}6-0{,}33\cdot 2{,}3-0{,}8\approx 1 \text{ (бит)}.$$

Пример 117. Найти энтропию угадывания простых цифр при извлечении двух карточек из цифровой азбуки.

Решение 1. Построим граф неопределенности данного сложного опыта.

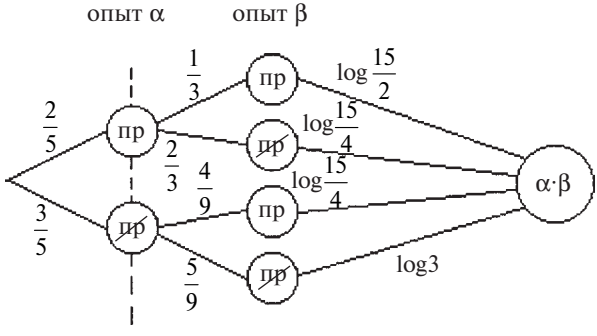


Рис. 74

$$H(\alpha\cdot\beta)=\frac{2}{15}\log\frac{15}{2}+\left(\frac{4}{15}\log\frac{15}{4}\right)\cdot 2+\frac{1}{3}\log 3=$$

$$=\frac{2}{15}\log 3+\frac{2}{15}\log 5-\frac{2}{15}+\frac{8}{15}\log 3+\frac{8}{15}\log 5-$$

$$-\frac{8}{15}\cdot 2+\frac{1}{3}\log 3=\left(\log 3+\frac{2}{3}\log 5-\frac{5}{6}\right)\text{(бит)}.$$

Решение 2. Воспользуемся свойством энтропии, по которому $H(\alpha\cdot\beta)=H(\alpha)+H(\beta/\alpha)$. Из предыдущего примера

$$H(\beta/\alpha)=\frac{8}{5}\log 3-\frac{1}{3}\log 5-\frac{4}{5},$$

а $H(\alpha)=\frac{2}{5}\log\frac{5}{2}+\frac{3}{5}\log\frac{5}{3}=\log 5-\frac{3}{5}\log 3-\frac{2}{5}$.

Тогда $H(\alpha\cdot\beta)=\left(\log 5-\frac{3}{5}\log 3-\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{8}{5}\log 3-\frac{1}{3}\log 5-\frac{4}{5}\right)=$

$$=\left(\log 3+\frac{2}{3}\log 5-\frac{6}{5}\right)\text{(бит)}.$$

Пример 118. Какую неопределенность содержит опыт угадывания четности суммы очков случайно взятой кости домино, если известно, что одна кость утеряна?

Решение. Утеряна может быть кость с четной суммой или с нечетной, что задает предварительный опыт α. Находим условную энтропию как полный вес графа

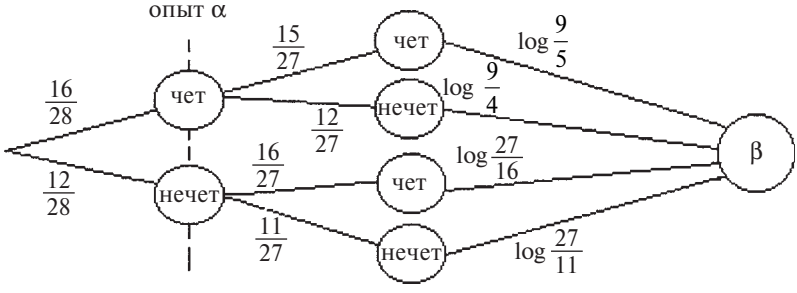


Рис. 75

$$H(\beta/\alpha)=\frac{4}{7}\left(\frac{5}{9}\log\frac{9}{5}+\frac{4}{9}\log\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{7}\left(\frac{16}{27}\log\frac{27}{16}+\frac{11}{27}\log\frac{27}{11}\right)=$$

$$=\frac{4}{7}\left(2\log 3-\frac{5}{9}\log 5-\frac{8}{9}\right)+\frac{3}{7}\left(3\log 3-\frac{16}{27}\cdot 4-\frac{11}{27}\log 11\right)=$$

$$=\left(\frac{17}{7}\log 3-\frac{20}{63}\log 5-\frac{11}{63}\log 11-\frac{32}{21}\right)\text{(бит)}.$$

Пример 119. Найти энтропию четности сумм очков на двух костях, извлеченных из полного набора домино.

Решение. Пусть опыт α = {извлечение первой кости домино}, а β = {извлечение второй кости домино}. Тогда энтропию сложного опыта $\alpha\cdot\beta$ находим по правилу сложения энтропий.

$H(\alpha\cdot\beta)=H(\alpha)+H(\beta/\alpha)$, где условная энтропия $H(\beta/\alpha)$ вычислена в решении предыдущего примера.

$$H(\alpha)=\frac{4}{7}\log\frac{7}{4}+\frac{3}{7}\log\frac{7}{3}=\log 7-\frac{4}{7}\cdot 2-\frac{3}{7}\log 3.$$

$$H(\alpha\cdot\beta)=\left(\log 7-\frac{8}{7}-\frac{3}{7}\log 3\right)+\left(\frac{17}{7}\log 3-\frac{20}{63}\log 5-\frac{11}{63}\log 11-\frac{32}{21}\right)=$$

$$=\left(2\log 3-\frac{20}{63}\log 5+\log 7-\frac{11}{63}\log 11-\frac{56}{21}\right)\text{(бит)}.$$

Пример 120. Доказать, что $H(\alpha\cdot\beta)=H(\alpha)+H(\beta/\alpha)$ если опыты α и β содержат по два исхода.

Решение. Пусть $\alpha=\{A_1,A_2\}$, а $\beta=\{B_1,B_2\}$, тогда $\alpha\cdot\beta=\{A_1\cdot B_1, A_1\cdot B_2, A_2\cdot B_1, A_2\cdot B_2\}$ и

$$H(\alpha\cdot\beta)=-[P(A_1\cdot B_1)\log P(A_1\cdot B_1)+P(A_1\cdot B_2)\log P(A_1\cdot B_2)+$$

$$+P(A_2\cdot B_1)\log P(A_2\cdot B_1)+P(A_2\cdot B_2)\log P(A_2\cdot B_2)]=$$

$$=-P(A_1)\cdot P(B_1/A_1)[\log P(A_1)+\log P(B_1/A_1)]-$$

$$-P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)[\log P(A_1)+\log P(B_2/A_1)]-$$

$$-P(A_2)\cdot P(B_1/A_2)[\log P(A_2)+\log P(B_1/A_2)]-$$

$$-P(A_2)\cdot P(B_2/A_2)[\log P(A_2)+\log P(B_2/A_2)]=$$

$$=H(\alpha)+P(A_1)\cdot H(\beta/A_1)+P(A_2)\cdot H(\beta/A_2)=H(\alpha)+H(\beta/\alpha).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите правило сложения энтропий. При каких условиях оно выполняется?
2. Как изменяется правило сложения энтропий, если изменить его условия?
3. Как изменяется энтропия опыта, если известен результат одного из его исходов?
4. В каком случае мера неопределенности не изменится при проведении предварительного опыта?
5. Назовите свойства условных энтропий.
6. В каком случае условная энтропия принимает наименьшее значение?
7. Приведите примеры максимальных и минимальных условных энтропий.

Задачи

231. Какую степень неопределенности содержит опыт извлечения двух костей домино относительно «дуплей»?

232. Найдите энтропию четности сумм очков на двух костях, извлеченных из полного набора домино.

233. Какую степень неопределенности содержит опыт извлечения двух шаров из урны, в которой находятся два белых и три черных шара?

234. На сколько изменится энтропия опыта из предыдущей задачи, если известно, что первым был извлечен белый шар?

235. Найдите энтропию угадывания дней рождения двух случайно встреченных людей.

236. Найдите энтропию угадывания месяцев рождения двух незнакомых вам студентов.

237*. Какую энтропию содержит опыт угадывания четных цифр при извлечении из цифровой азбуки двух карточек?

238*. Какую энтропию содержит опыт угадывания простых цифр при извлечении двух карточек из цифровой азбуки при условии, что одна из карточек утеряна?

239**. Найдите энтропию угадывания простых цифр при извлечении трех карточек из цифровой азбуки.

240**. На сколько изменится энтропия опыта из предыдущей задачи, если известно, что первой была извлечена карточка с простой цифрой?

§ 3. Энтропия случайных величин

Энтропия $H(X)$ дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$H(X)=\sum_i P\{X=x_i\}\log[P\{X=x_i\}]^{-1}.$$

Для непрерывной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ определяется дифференциальная энтропия как

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log f(x)dx.$$

Здесь везде полагаем, что $p_i \log p_i^{-1}=0$, если $p_i=0$ и $f(x)\log f(x)=0$, если $f(x)=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\log x=0$.

Пример 121. Найти энтропию для биномиального распределения.

Решение.

$$H(X)=\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\log(C_n^m p^m q^{n-m})^{-1}=$$

$$=-\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\left[\log C_n^m+m\log p+(n-m)\log q\right]=$$

$$=-\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\log C_n^m-p\log p\sum_{m=1}^{n}\frac{n!\,p^{m-1}q^{n-m}}{(m-1)!(n-m)!}-$$

$$-q\log q\sum_{m=1}^{n}\frac{n!\,p^m q^{n-m-1}}{m!(n-m-1)!}=-\sum_{m=1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\log C_n^m-n(p\log p+q\log q).$$

Пример 122. Найти энтропию для геометрического распределения.

Решение. Проводим независимые повторные испытания до появления «успеха». Для вычисления $H(X)$ воспользуемся графом:

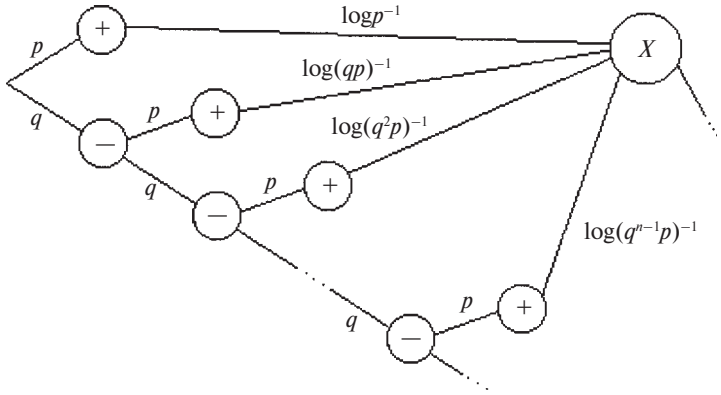


Рис. 76

$$H(X) = -p\log p - qp\log(qp) - q^2 p\log(q^2 p) - \ldots -$$

$$-q^{n-1} p\log(q^{n-1} p) - \ldots = -p\log p(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots) -$$

$$-qp\log q(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots) = -p\log p\frac{1}{1-q} -$$

$$-qp\log q\frac{1}{(1-q)^2} = -\log p - \frac{q}{p}\log q.$$

Пример 123. Найти дифференциальную энтропию для показательного распределения.

Решение.

$$H(X) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\log(\lambda e^{-\lambda x})^{-1} dx = -\log\lambda\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda\log e\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \log\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \lambda\log e\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} d(\lambda x) & v = -e^{-\lambda x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\log\lambda + \lambda\log e(-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\log\lambda - (\log e)e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \log\lambda + \log e = \log\frac{e}{\lambda}.$$

Пример 124. Найти дифференциальную энтропию для нормального закона распределения.

Решение.

$$H(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=-\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx+\frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{x-a}{\sigma}=t\\ dx=\sigma dt\end{matrix}\right|=\log(\sigma\sqrt{2\pi})+\frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}t^2dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt & v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\end{matrix}\right|=\log(\sigma\sqrt{2\pi})+\frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}}\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=$$

$$=\log(\sigma\sqrt{2\pi})+\frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}}(0+\sqrt{2\pi})=\log(\sigma\sqrt{2\pi})+\log\sqrt{e}=\log(\sigma\sqrt{2\pi e}).$$

Пример 125. Найти дифференциальную энтропию для случайной величины, распределенной по закону Лапласа.

Решение. Для закона Лапласа $f(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-a|}$, поэтому

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-a|}\cdot\log\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-a|}dx=-\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda|x-a|}\cdot$$

$$\cdot(\log\frac{\lambda}{2}-\lambda|x-a|\log e)dx=-\frac{\lambda}{2}[\int_{-\infty}^{a}e^{-\lambda|x-a|}\cdot\log\frac{\lambda}{2}dx+$$

$$+\int_{a}^{+\infty}e^{-\lambda|x-a|}\cdot\log\frac{\lambda}{2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda|x-a|}\cdot\lambda(x-a)\log edx-$$

$$-\int_{a}^{+\infty}e^{\lambda|x-a|}\cdot\lambda(x-a)\log edx=-\frac{\lambda}{2}\log\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{\lambda|x-a|}\Big|_{-\infty}^{a}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\log\frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x-a|}\Big|_{a}^{+\infty}+0+0=-\frac{1}{2}\log\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{\lambda}{2}=\log\frac{2}{\lambda}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется энтропия дискретных случайных величин?
2. Приведите примеры вычисления энтропии дискретной случайной величины на графе.
3. Чему равна энтропия индикатора события A?
4. В каком случае энтропия индикатора события A наибольшая?
5. Приведите примеры энтропий для классических законов распределения.
6. Для каких случайных величин задается дифференциальная энтропия?
7. Чему равна дифференциальная энтропия для показательного закона распределения?

Задачи

241. Найдите энтропию для числа белых шаров при извлечении двух шаров из урны, содержащей два белых и один черный шар.

242. Найдите энтропию для числа козырных карт при извлечении двух карт из колоды в 36 карт.

243. Какую степень неопределенности содержит опыт угадывания суммы очков на извлеченной кости из полного набора домино?

244. Найдите энтропию для числа тузов при извлечении трех карт из карт с картинками.

245. Найдите дифференциальную энтропию для равномерного распределения.

246. Найдите дифференциальную энтропию для показательного закона распределения, если известно, что случайная величина X принимает значение меньше единицы с вероятностью 0,5.

247*. Чему равна энтропия для распределения Паскаля?

248*. Найдите дифференциальную энтропию для распределения Коши.

249**. Найдите энтропию для распределения Пуассона.

250**. Найдите дифференциальную энтропию для распределения Лапласа, если известно, что случайная величина X отклоняется на единицу от значения a с вероятностью 0,5.

§ 4. Энтропия цепей Маркова

Энтропию цепей Маркова с вектором начальных вероятностей $\vec{a}(P(E_1), P(E_2), ..., P(E_n))$ находим как математическое

ожидание условных энтропий системы E относительно всех ее состояний:

$$H(E)=P(E_1)\cdot H(E/E_1)+P(E_2)\cdot H(E/E_2)+\ldots+P(E_n)\cdot H(E/E_n),$$

где $H(E/E_m)=p_{m_1}\log p_{m_1}^{-1}+p_{m_2}\log p_{m_2}^{-1}+\ldots+p_{m_n}\log p_{m_n}^{-1}$.

Нахождение энтропии цепи Маркова с вектором начальных вероятностей допускает удобную интерпретацию на графе:

$$H(E)=\sum_i P(E_i)\cdot H(E/E_i)$$

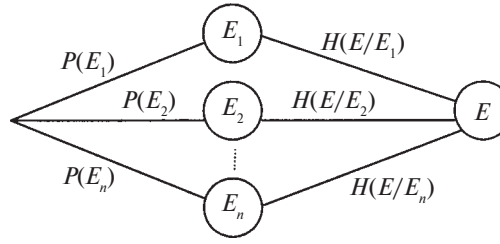


Рис. 77

Энтропию цепей Маркова предлагаем находить, суммируя условные энтропии системы E относительно всех ее состояний.

Пример 126. Найти энтропию цепи Маркова E, заданной матрицей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{bmatrix}.$$

Решение. $H(E)=H(E/E_1)+H(E/E_2)$, где

$$H(E/E_1)=\frac{1}{5}\log 5+\frac{4}{5}\log\frac{5}{4},\ \text{а}\ H(E/E_2)=\frac{7}{10}\log\frac{10}{7}+\frac{3}{10}\log\frac{10}{3}.$$

Следовательно,

$$H(E)=(\log 5-\frac{4}{5}\cdot 2)+(\log 10-0{,}7\log 7-0{,}3\log 3)=$$

$$=2\log 5-0{,}6-0{,}7\log 7-0{,}3\log 3\ (\text{бит}).$$

Пример 127. На сколько изменится энтропия цепи Маркова из предыдущего примера, если допустить переход за два шага?

Решение. Цепь Маркова E_1 за два шага задается квадратом матрицы **P**.

$$\mathbf{P}^2=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}7 & 0{,}3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0{,}35 & 0{,}65\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$H(E_1)=\left(\frac{3}{5}\log\frac{5}{3}+\frac{2}{5}\log\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{7}{20}\log\frac{20}{7}+\frac{13}{20}\log\frac{20}{13}\right)=$$

$$=\left(\log 5-\frac{3}{5}\log 3-\frac{2}{5}\right)+\left(\log 5+2-\frac{7}{20}\log 7-\frac{13}{20}\log 13\right)=$$

$$=2\log 5+1{,}6-0{,}6\log 3-0{,}35\log 7-0{,}65\log 13 \text{ (бит)}$$

и $H(E_1)-H(E)=2{,}2-0{,}3\log 3+0{,}35\log 7-0{,}65\log 13\approx 0{,}3$ (бит).

Таким образом, энтропия возросла на 0,3 бита.

Пример 128. Найти энтропию цепи Маркова, заданной матрицей вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3\end{bmatrix}$$

и вектором начальных вероятностей $\vec{a}(0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}3)$.

Решение. Находим $H(E)$ как вес графа:

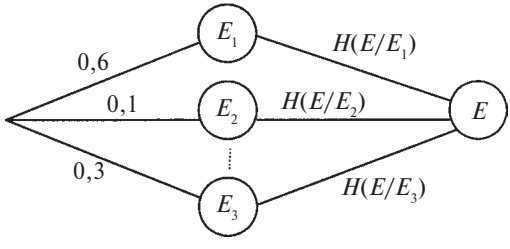


Рис. 78

$$H(E/E_1)=\frac{2}{10}\log\frac{10}{2}+\frac{3}{10}\log\frac{10}{3}+\frac{1}{2}\log 2=$$

$$=0{,}5\log 5-0{,}3\log 3+0{,}8=H(E/E_2),$$

$$H(E/E_3)=\frac{6}{10}\log\frac{10}{6}+\frac{1}{10}\log 10+\frac{3}{10}\log\frac{10}{3}=\log 5-0{,}9\log 3+0{,}4.$$

$$H(E)=0{,}7(0{,}5\log 5-0{,}3\log 3+0{,}8)+0{,}3(\log 5-0{,}9\log 3+0{,}4)=$$

$$=0{,}65\log 5-0{,}48\log 3+0{,}68 \text{ (бит)}.$$

Пример 129. Игральная кость под воздействием ветра с вероятностью $\frac{1}{2}$ остается на месте, с вероятностью $\frac{1}{6}$ переворачивается на противоположную грань и равновероятно поворачивается на соседние грани. Найти энтропию данной цепи Маркова.

Решение. Рассматриваемую цепь Маркова можно задать следующей матрицей перехода:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/6 \\ 1/12 & 1/2 & 1/12 & 1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/2 & 1/6 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 & 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 & 1/12 & 1/2 & 1/12 \\ 1/6 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/12 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$H(E)=\left[\frac{1}{2}\log 2+\left(\frac{1}{12}\log 12\right)\cdot 4+\frac{1}{6}\log 6\right]\cdot 6=(8+3\log 3) \text{ (бит)}.$$

Пример 130. Найти энтропию цепи Маркова из предыдущего примера, полагая, что в начальный момент времени игральный кубик бросается на ровную поверхность.

Решение. В этом случае имеем цепь Маркова E_1 с вектором начальных вероятностей $\vec{a}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ и

$$H(E_1)=\frac{1}{6}H(E/E_1)+\frac{1}{6}H(E/E_2)+\frac{1}{6}H(E/E_3)+$$

$$+\frac{1}{6}H(E/E_4)+\frac{1}{6}H(E/E_5)+\frac{1}{6}H(E/E_6)=\frac{1}{6}H(E)=$$

$$=\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\log 3\right) \text{ (бит)}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое энтропия системы относительно одного из ее состояний?
2. В каком случае энтропия системы относительно одного из ее состояний является наибольшей, а в каком — наименьшей?
3. Как определяется энтропия цепей Маркова с вектором начальных вероятностей?
4. Различные подходы к введению энтропии цепей Маркова.
5. В каком случае при увеличении числа состояний системы энтропия не изменяется?
6. Приведите модели цепей Маркова для единицы измерения энтропии.
7. Когда энтропия цепей Маркова принимает наибольшее значение?
8. Приведите примеры цепей Маркова с наибольшими и наименьшими значениями энтропии.

Задачи

251. Какую степень неопределенности содержит выбор состояния E_1 в цепи Маркова, заданной матрицей

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

252. Дана матрица вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

и вектор начальных вероятностей $\vec{a}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Найдите энтропию заданной цепи Маркова.

253. Найдите энтропию системы, которая находится в одной из вершин четырехугольника и переходит в соседние вершины с вероятностью $\frac{1}{4}$, а в противоположную — с вероятностью $\frac{1}{2}$.

254. Найдите энтропию системы, заданной матрицей вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4\end{bmatrix}$$

и вектором начальных вероятностей $\vec{a}(0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}6)$.

255. Сравните энтропии цепей Маркова, заданных матрицами вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

256. Цепь Маркова задана вектором начальных вероятностей $\vec{a}(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1)$ и матрицей вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0 & 0{,}2 & 0{,}8\\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1\\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5\end{bmatrix}.$$

Найдите энтропию заданной цепи Маркова.

257*. Даны вектор начальных вероятностей $\vec{a}\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$ и переходные вероятности $p_{1i}=\frac{i}{6}$, $p_{2i}=\frac{3+i}{15}$, $p_{3i}=\frac{6+i}{24}$ (i = 1, 2, 3). Найдите энтропию цепи Маркова за два шага.

258*. Рассмотрим марковскую цепь с двумя состояниями E_1 и E_2 и матрицей вероятностей перехода

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1/4 & 3/4\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}.$$

Найдите энтропию цепи Маркова за три шага.

259**. В двух отделениях ящика находятся три шара. Каждую минуту случайным образом выбирается отделение и из него перекладывается в другое отделение один шар. Найдите энтропию марковской цепи, рассматривающей в качестве состояний число шаров в первом отделении.

260**. По двум урнам разложены 3 черных и 3 белых шара так, что каждая урна содержит 3 шара. Число белых шаров в первой урне определяет состояние системы. В каждый момент времени выбирают случайно по одному шару из урны и выбранные шары меняют местами. Найдите энтропию заданной цепи Маркова.

§ 5. Количество информации

Основные задачи, которые ставил перед собой К. Шеннон в середине XX в. при создании направления, в последующие годы получившего название «теория информации», были связаны с чисто техническими вопросами электросвязи и радиосвязи. Работы Шеннона оказали большое стимулирующее влияние на исследования, относящиеся к передаче и сохранению какой бы то ни было информации в природе и технике.

Информацию можно измерить числом, которое называется количеством информации об опыте β, содержащемся в опыте α:

$$I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha).$$

Количество информации I(α, β) показывает, насколько осуществление опыта α уменьшает неопределенность опыта β.

Количество информации предлагается находить на ориентированном графе:

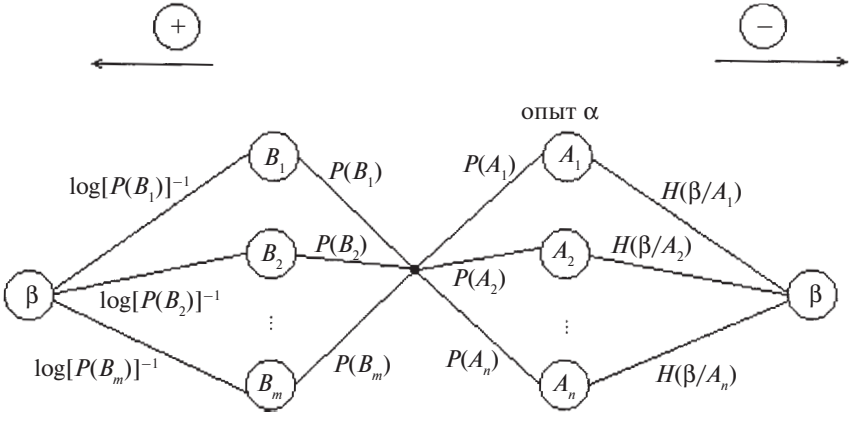


Рис. 79

Поскольку представленный способ вычисления количества информации на графе является авторским, то проиллюстрируем его на следующем примере.

Пример 131. В урне два белых и два черных шара. Опыт β состоит в извлечении из урны шара, а опыт α — в предварительном извлечении из той же урны (без возвращения) двух шаров. Найти количество информации об опыте β, содержащемся в опыте α.

Решение. Построим ориентированный граф опытов α и β.

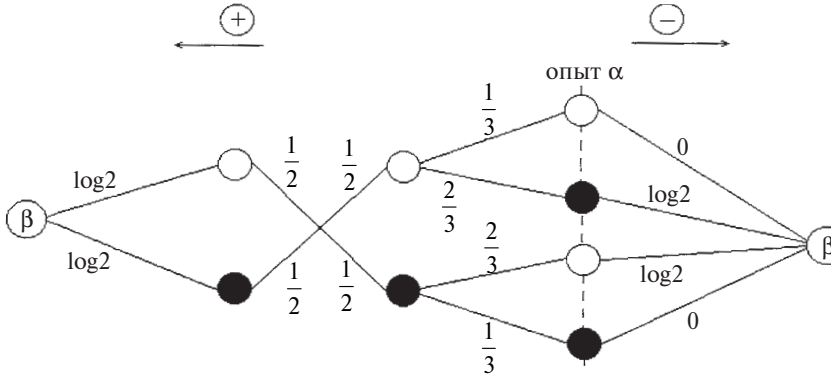


Рис. 80

$$I(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\log 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\log 2\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\ \text{(бит)}.$$

Свойства количества информации:

1. $0 \le I(\alpha,\beta) \le H(\beta)$;
2. $I(\alpha,\beta) = H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha\cdot\beta)$;
3. $I(\alpha,\beta) = I(\beta,\alpha)$;
4. $I(\alpha,\beta,\gamma) \ge I(\alpha,\beta)$, где α, β, γ — три произвольных опыта.

К понятию меры количества информации можно подойти с другой стороны. Пусть происходит некоторое событие A с вероятностью $P(A)$. Если вероятность $P(A)$ близка к единице, то событие A практически достоверно и его появление не несет никакой информации. Однако если произойдет противоположное событие $\overline{A}$, то $\overline{A}$ несет значительную информацию (близкую к сенсации). Поэтому за количество меры информации события A принимаем величину

$$I(A)=\log\left[P(A)\right]^{-1}=-\log P(A)\,.$$

Пусть α есть некоторый эксперимент с исходами $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые осуществляются с вероятностями $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$.

Информация, полученная в результате испытания α, есть случайная величина I_α, принимающая значения $-\log P(A_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

$$I(A):\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ -\log P(A_1) & -\log P(A_2) & \dots & -\log P(A_n) \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем среднюю информацию опыта α. Примем за меру исхода A_i его вероятность $P(A_i)$. Тогда

$$M[I_A] = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\log P(A_i) = H(\alpha).$$

Таким образом, математическое ожидание информации эксперимента α есть энтропия этого эксперимента.

Единица измерения информации такая, как и энтропии, — 1 бит.

Пример 132. В предыдущем примере поменяем местами очередность проведения опытов α и β. Найти количество информации об опыте α, содержащемся в опыте β.

Решение.

$$H(\alpha) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 = 1.$$

Найдем условную энтропию $H(\alpha/\beta)$ по графу

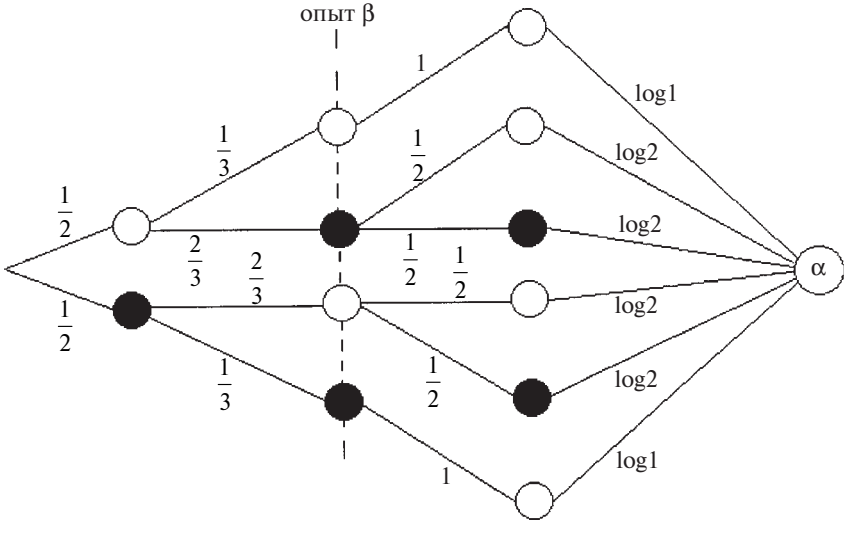


Рис. 81

$$H(\alpha/\beta)=\frac{1}{6}(1\log 1)\cdot 2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log 2\right)\cdot 4=\frac{2}{3}.$$

Отсюда $I(\beta,\alpha)=H(\alpha)-H(\alpha/\beta)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Эти два примера иллюстрируют свойство 3) количества информации.

Пример 133. Какое количество информации получаем для геометрического распределения, если дополнительно сообщается, что испытаний проводится не больше двух?

Решение. $H(X)=-\log p-\frac{q}{p}\log q$.

Пусть α — проведение двух повторных испытаний, тогда

$$H(X/\alpha)=-p\log p-qp\log(qp)=-p(1+q)\log p-pq\log q.$$

$$I(\alpha,X)=H(X)-H(X/\alpha)=-\log p-\frac{q}{p}\log p+p(1+q)\log p+pq\log q$$

$$=(p+pq-1)\log p+\left(pq-\frac{q}{p}\right)\log q=-q^2\left[\log p+\left(1+\frac{1}{p}\right)\log q\right].$$

Пример 134. Найти количество информации при вынимании козырной карты из 16 карт с картинками, содержащейся в предварительно извлеченной одной карте.

Решение. Пусть опыт β = {извлечение карты из 16 карт с картинками}, а опыт α = {предварительное извлечение одной карты}. Для вычисления $I(\alpha,\beta)$ используем ориентированный граф.

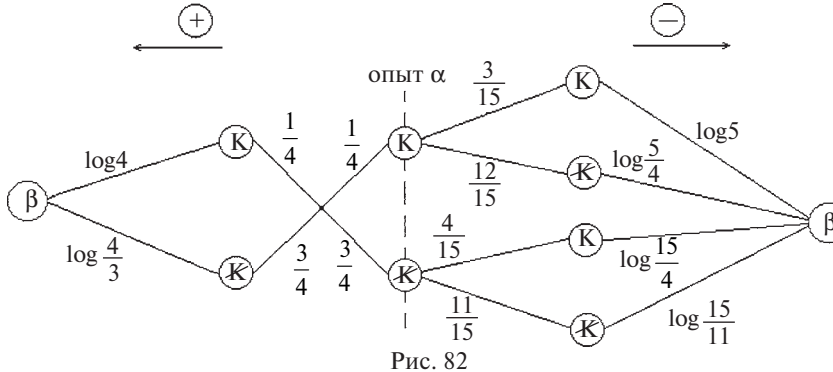


Рис. 82

$$I(\alpha,\beta)=H(\beta)-H(\beta/\alpha)=\left(\frac{1}{4}\log 4+\frac{3}{4}\log\frac{4}{3}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\log 5+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\log\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15}\log\frac{15}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{15}\log\frac{15}{11}\right)=$$

$$=\left(2-\frac{3}{4}\log 3\right)-\left(\frac{1}{4}\log 5-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\log 15-\frac{2}{5}-\frac{11}{20}\log 11\right)=$$

$$=\left(2{,}8-\frac{3}{2}\log 3-\log 5+\frac{11}{20}\log 11\right)\text{(бит)}.$$

Пример 135. Доказать, что

а) $I(\alpha,\beta) = H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha\cdot\beta)$,

б) $I(\alpha,\beta) = I(\beta,\alpha)$.

Решение. Поскольку энтропия произведения двух опытов $H(\alpha\cdot\beta) = H(\alpha) + H(\beta/\alpha)$, то

$$I(\alpha,\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha) = H(\beta) + H(\alpha) - H(\alpha\cdot\beta).$$

С другой стороны, $H(\alpha\cdot\beta) = H(\beta\cdot\alpha) = H(\beta) + H(\alpha/\beta)$, тогда

$$I(\beta,\alpha) = H(\alpha) - H(\alpha/\beta) = H(\beta) - H(\beta/\alpha) = I(\alpha,\beta).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое информация?
2. Как можно измерить информацию?
3. Единицы измерения информации.
4. Возможные способы подсчета информации.
5. Какой информации больше: об опыте β, содержащейся в опыте α, или об опыте α, содержащейся в β?
6. Наименьшее значение количества информации и его интерпретация.
7. В каком случае получаем наибольшую информацию?
8. Интерпретация информации через энтропию.

Задачи

261. В урне находятся один белый и два черных шара. Найдите количество информации об извлечении шара, содержащейся в предварительном извлечении одного шара.

262. Найдите количество информации при вынимании «дупля» из полного набора домино, содержащейся в предварительно извлеченной одной «кости».

263. Найдите количество информации о простых цифрах при извлечении двух карточек из цифровой азбуки, содержащейся в предварительном извлечении одной карточки.

264. В каком отношении находятся известные единицы измерения информации: двоичная (бит), натуральная (нат), десятичная (дит)?

265. Какое количество информации следует получить, чтобы определить студента, выбранного из 48 «математиков» III курса?

266. Какое количество информации в среднем получает человек, определяющий день рождения своего собеседника, когда последний сообщает ему месяц, в котором он родился?

267*. Из урны, содержащей два белых и три черных шара, извлекли шар. Найдите информацию об этом опыте, содержащуюся в предварительном извлечении из этой урны пары шаров.

268*. Предлагается угадать карту, наудачу вынутую из колоды в 36 карт. Какое количество информации получит угадывающий, если дополнительно сообщить:

а) масть вынутой карты,

б) что вынутая карта оказалась тузом?

269**. Какое количество информации получаем для биноминального распределения, если известно, что повторные испытания проводятся ровно два раза?

270**. Какое количество информации получаем для геометрического распределения, если дополнительно сообщается, что испытаний проводится не больше трех?

§ 6. Информация и логические задачи

В этом параграфе понятие энтропии и информации применим к анализу некоторых занимательных логических задач. Во всех этих примерах нас будет интересовать некоторый объект из конечного множества M однотипных объектов. Для выделения интересующего нас объекта (исхода опыта β) будем использовать вспомогательные опыты α. Каждый из этих опытов позволяет выделить те или иные исходы опыта β, отбрасывая ряд исходов множества M как «ложные». Требуется указать наименьшее число вспомогательных опытов α, необходимых для выяснения правильного ответа на интересующий нас вопрос, и описать, как именно можно быстрее всего найти этот ответ.

Как правило, вспомогательные опыты α ставятся так, чтобы они имели равновероятные исходы, что позволяет «снимать» наибольшую неопределенность.

Пример 136. Студенты из группы, в которой учится 25 человек, загадали одного из студентов. Сколько вопросов надо задать группе, чтобы отгадать выбранного студента, если группа на все вопросы отвечает «да» или «нет»?

Решение. Опыт β, состоящий в отгадывании студента, может иметь 25 равновероятных исходов, т. е. энтропия $H(\beta) = \log 25 \approx$ $\approx 4{,}64$ бита. Рассмотрим опыт $A_k = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k$, заключающийся в том, что опрашивающий задает k вопросов. Поскольку α_i может иметь два исхода, то $H(\alpha_i) = 1$ бит и $H(A_k) \le k$ бит. С другой стороны, $I(A_k,\beta) \le H(A_k)$.

Для того, чтобы исход опыта A_k полностью определял исход β, необходимо выполнение неравенства $I(A_k,\beta) \ge H(\beta)$.

Отсюда $\log 25 = H(\beta) \le I(A_k,\beta) \le H(A_k) \le k$, т. е. $k \ge \log 25 \approx 4{,}64$, или так как k — целое число, то $k \ge 5$.

Для отгадывания задуманного студента разобьем группу примерно на две равные части (так как исходы опыта α_1 должны быть примерно равновероятны, чтобы энтропия $H(\alpha_1)$ была наибольшей) и спросим, относится ли студент к одной из них.

Теперь, разбивая оставшуюся часть группы на возможно более близкие по численности части, мы определим задуманного студента с помощью пяти вопросов.

Другим способом отыскания задуманного студента может быть нумерация каждого студента в двоичной системе и расшифровка одного из двух символов, стоящего на каждом месте.

Пример 137. Сколько вопросов надо задать, чтобы отгадать месяц рождения незнакомого человека, если на все вопросы он будет отвечать «да» или «нет»?

Решение. Энтропию опыта β = {угадывание месяца рождения незнакомого человека} находим по формуле Хартли $H(\beta) = \log 12$.

Тогда $k \ge H(\alpha_1) + H(\alpha_2)+...+H(\alpha_k) \ge I(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k, \beta) \ge H(\beta) = \log 12$.

Отсюда $k \ge \log 12$ и $k \ge 4$.

А определить искомый месяц можно, пронумеровав его в двоичной системе и расшифровывая один из двух символов, стоящий на каждом месте. Так, если незнакомец родился в мае — пятом по порядку месяце в году — то ему будет соответствовать следующая запись в двоичной системе: (0, 1, 0, 1), так как $5 = 0\cdot 2^3 +$ $+ 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$.

Пример 138. Имеется 9 монет одного достоинства, одна из которых фальшивая, отличающаяся от остальных по весу (причем

неизвестно, легче она или тяжелее настоящих). Каково наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, которое позволяет обнаружить фальшивую монету?

Решение. Опыт β, результат которого требуется определить, имеет 18 возможных исходов (каждая из 9 монет может оказаться фальшивой, и она может быть легче или тяжелее настоящей). Эти исходы естественно считать равновероятными, и тогда $H(\beta) = \log 18$, т. е. определение фальшивой монеты связано с получением информации, измеряющейся числом log18. Опыт α_1, состоящий в одном взвешивании, может иметь три исхода, поэтому $H(\alpha_1) \le \log 3$ и информация $I(\alpha_1, \beta) \le \log 3$.

Рассмотрим теперь сложный опыт $A_k = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k$, заключающийся в k последовательных взвешиваниях, он дает информацию, не превосходящую $k \cdot \log 3$. Если опыт A_k позволяет полностью определить исход опыта β, то должно быть $H(A_k) \ge I(A_k,\beta) \ge H(\beta)$ или $k \cdot \log 3 \ge \log 18$. Отсюда $3^k \ge 18$ и $k \ge \log_3 18$, так как k — целое число, то $k \ge 3$.

Покажем на «кодовом дереве», как с помощью трех взвешиваний определить фальшивую монету. Каждое взвешивание строим таким образом, чтобы на любой возможный исход приходилась максимальная энтропия.

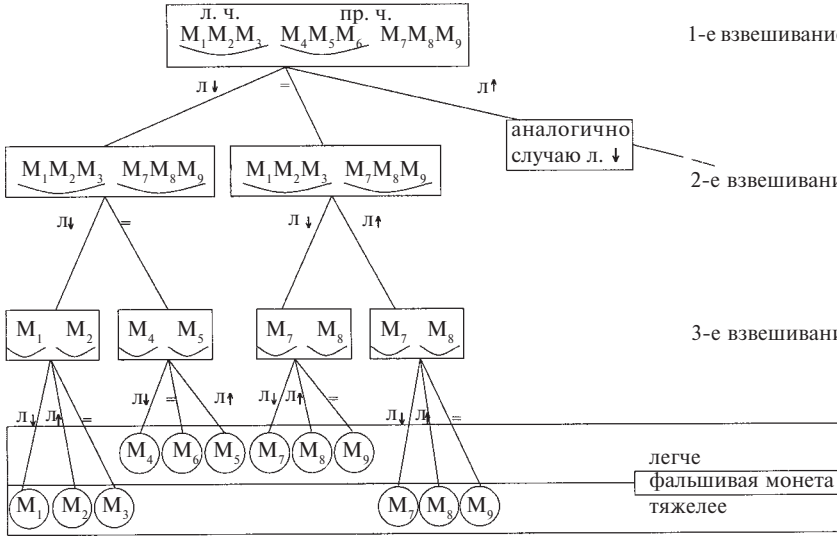


Рис. 83

Пример 139. Имеются три города А, Б и В, причем жители А во всех случаях говорят правду, жители Б — только неправду, а жители В через раз отвечают на вопросы верно и неверно.

Наблюдатель хочет выяснить, в каком городе он находится и в каком городе живет встреченный им человек. Сколько вопросов ему потребуется задать этому встречному, если на все вопросы его собеседник отвечает «да» или «нет»?

Решение. Поскольку наблюдатель может находиться в одном из трех городов А, Б или В и его собеседник может проживать в любом из этих трех городов, то интересующий нас опыт имеет 9 равновозможных исходов. Следовательно, энтропия $H(\beta) = \log 9$. Пусть опыт $A_k = \alpha_1\alpha_2...\alpha_k$ состоит в том, что наблюдатель задает k вопросов. Так как на каждый вопрос он может получить только два ответа, то $H(\alpha_i) \le 1$ бита.

С другой стороны, по свойству энтропии:

$H(A_k) = H(\alpha_1\alpha_2...\alpha_k) \le H(\alpha_1) + H(\alpha_2) +...+ H(\alpha_k) \le k$ и $\log 9 \le$ $\le I(A_k)^3 \le H(A_k) \le k$.

Получили, что $k \ge \log 9 > \log 8 = 3$, и четыре удачно поставленных вопроса позволяют выяснить, в каком городе мы находимся и в каком городе живет встреченный человек.

Четыре вопроса могут быть следующие:

1. Нахожусь ли я в одном из городов А или Б?
2. Нахожусь ли я в городе В?
3. Живете ли вы в городе В?
4. Нахожусь ли я в городе А?

Покажем на «дереве ответов», что ответы на эти четыре вопроса позволяют однозначно определить, из какого города встреченный человек и в каком городе мы находимся. «Дерево ответов» выглядит следующим образом:

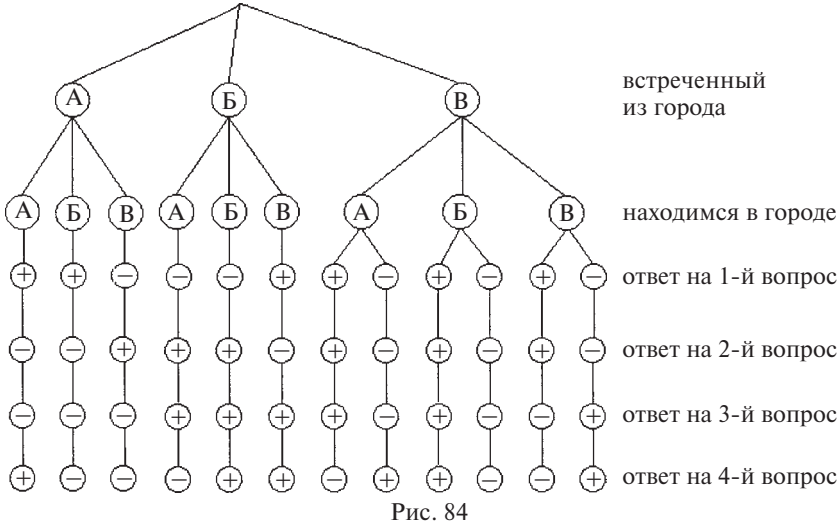


Рис. 84

На следующем примере покажем, что минимальное количество вспомогательных опытов, полученных из анализа условий задачи, не всегда достаточно для выделения интересующего нас объекта.

Пример 140. Жители города А говорят только правду, а жители города Б чередуют правдивые и ложные ответы. Сколько вопросов потребуется задать наблюдателю встречному человеку, чтобы определить, в каком городе он находится и из какого города его собеседник?

Решение. Как и в предыдущем примере, анализ условия задачи приводит нас к следующему выводу, что $k \geq \log 4 = 2$ (бит).

Откуда следует, что потребуется задать не менее двух вопросов. Сформулируем возможные два вопроса:

1. Нахожусь ли я в городе А?
2. Нахожусь ли я в городе Б?

В этом случае дерево ответов выглядит следующим образом:

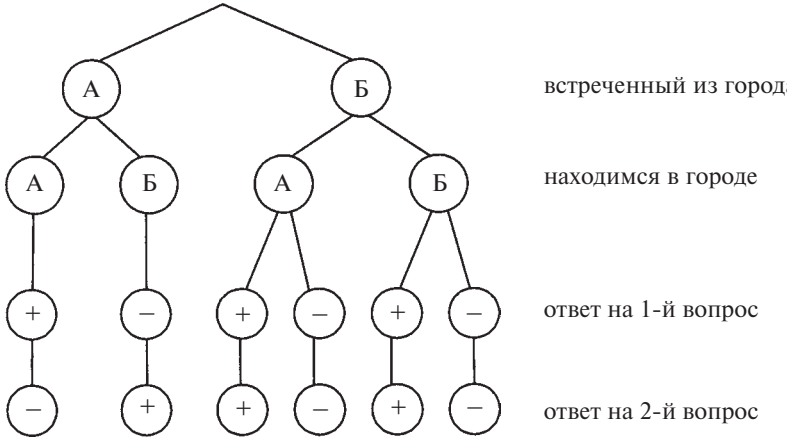


Рис. 85

Поскольку по возможным ответам нельзя однозначно определить, где находится наблюдатель и откуда встреченный им человек, то потребуется задать еще один вопрос, например, «2×2 = 4?».

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите пример школьной логической задачи.
2. Какие вы знаете типы логических задач, которые допускают для их решения использование понятия информации?

3. Условия применимости информации для определения объекта.

4. Как находить наименьшее число опытов при анализе занимательных логических задач?

5. Какое утверждение об энтропии используется часто при решении логических задач?

6. Решение простейших логических задач с использованием энтропии и двоичной системы счисления.

7. Иллюстрация решения логических задач на «кодовом дереве».

8. Попробуйте угадать номер квартиры или комнаты в общежитии, в которой живет ваш однокурсник, если вы этого не знаете.

Задачи

271. 50 студентов-математиков III курса загадали одного из студентов. Сколько вопросов надо задать курсу, чтобы отгадать выбранного студента, если курс на все вопросы отвечает лишь «да» или «нет»?

272. Вы хотите узнать номер телефона жителя Ярославля, задавая вопросы, на которые он отвечает либо «да», либо «нет». За какое возможно меньшее количество вопросов вам это удастся?

273. Сколько вопросов надо задать, чтобы отгадать день рождения незнакомого человека, если на все вопросы он будет отвечать «да» или «нет»?

274. Имеется 9 монет одного достоинства, одна из которых фальшивая и легче других. Как на чашечных весах без гирь обнаружить фальшивую монету?

275. Известно, что жители одного города всегда говорят правду, а другого всегда обманывают. Каково наименьшее число вопросов должен задать наблюдатель, чтобы определить, в каком городе живет встреченный им человек и в каком городе он находится?

276. Имеется 12 монет одного достоинства, одна из которых фальшивая и тяжелее других. Сколькими взвешиваниями на чашечных весах без гирь можно обнаружить эту фальшивую монету?

277. Имеется 27 монет одного достоинства, среди которых одна фальшивая, отличающаяся от остальных по весу. Сколькими

взвешиваниями на чашечных весах и как можно обнаружить эту фальшивую монету?

278*. Известно, что жители города А всегда говорят правду, а жители города В говорят правду через два раза, на третий. Какое наименьшее число вопросов и каких может задать наблюдатель, чтобы определить город, в котором он находится, и в каком городе живет его собеседник?

279**. Вы хотите узнать шестизначный номер моего телефона, задавая вопросы, на которые я отвечаю либо «да», либо «нет», и на один из ваших вопросов я могу дать неправильный ответ. Какое наименьшее число вопросов и какие вы будете задавать, чтобы отгадать номер?

280**. Из пяти имеющихся предметов никакие два не весят одинаково. Расположите эти предметы в ряд по возрастанию их веса, используя рычажные весы без гирь. Каково наименьшее число взвешиваний?

§ 7. Кодирование и декодирование

Коды появились в глубокой древности в виде криптограмм, когда ими пользовались для засекречивания важного сообщения от тех, кому оно не было предназначено. Еще знаменитый греческий историк Геродот (V век до н. э.) приводил примеры писем, понятных лишь для одного адресата. Спартанцы имели специальный механический прибор, при помощи которого важные сообщения можно было писать особым способом, обеспечивающим сохранение тайны. Собственная секретная азбука была у Юлия Цезаря. В Средние века и эпоху Возрождения над изобретением тайных шифров трудились философ Фрэнсис Бэкон, крупные математики того времени Франсуа Виет, Джероламо Кардано, Джон Валлис.

В этом разделе речь будет идти в основном об ином направлении в кодировании, которое возникло в близкую к нам эпоху. Связано оно с проблемой передачи сообщений по линиям связи, без которых (телеграфа, телефона, радио, телевидения и т. д.) немыслимо наше нынешнее существование. Задачей такого кодирования является сделать передачу сообщений быстрой, удобной и надежной. Предназначенное для этой цели кодирующее устройство сопоставляет каждому символу передаваемого текста, а иногда и целым словам или фразам (сообщениям) определенную комбинацию сигналов (применяемую для передачи по

данному каналу связи), называемую кодом или кодовым словом. При этом операцию перевода сообщений в определенные последовательности сигналов называют кодированием, а обратную операцию, восстанавливающую по принятым сигналам (кодовым словам) передаваемые сообщения, — декодированием.

Исторически первый код, предназначенный для передачи сообщений, связан с именем изобретателя телеграфного аппарата Сэмюэля Морзе и известен как азбука Морзе. В этом коде каждой букве или цифре сопоставляется своя последовательность из кратковременных (называемых точками) и длительных (тире) импульсов тока, разделяемых паузами. Другой код, столь же распространенный в телеграфии (код Бодо), использует для кодирования два элементарных символа — импульс и паузу, при этом сопоставляемые буквам кодовые слова состоят из пяти таких сигналов.

Общую схему передачи сообщений можно представить так:

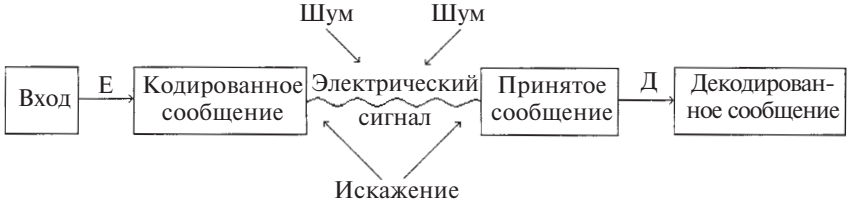


Рис. 86

Коды, использующие два различных элементарных сигнала, называются двоичными. Удобно обозначать эти два сигнала 0 и 1. Тогда кодовые слова можно представлять как последовательность из нулей и единиц.

Пример 141. Как можно закодировать четыре сообщения a, b, c, d, используя только два сигнала, 0 и 1?

Решение. Один из вариантов кодирования может быть следующим: 00, 01, 10, 11. При таком кодировании вероятность появления сообщений не учитывалась или предполагалась равновероятность ($p = 0{,}25$). Между тем их появление в информационном тексте может происходить с различной частотой; предположим, вероятности появления сообщений равны:

$$p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}3;\ p_3 = 0{,}2;\ p_4 = 0{,}1.$$

Учитывая вероятность сообщений, Фано предложил следующее оптимальное кодирование:

Сообщения	*a*	*b*	*c*	*d*
Коды	1	01	001	000

Показателем экономичности кода служит средняя длина кодового слова (математическое ожидание длины кодового слова). Для кодировки сообщений первым способом средняя длина равна 2, а по методу Фано — 1,9. Следовательно, закодированный по методике Фано информационный текст окажется короче.

На первый взгляд, кодирование по методу Фано кажется избыточным, поскольку представленные коды можно сократить, например, так

Сообщения	*a*	*b*	*c*	*d*
Коды	1	0	01	00

Однако если возьмем следующий закодированный текст: 011001, то по последней таблице данный текст не может быть однозначно дешифрован, так как непонятно, что, собственно, подразумевается: сообщение *cada* или *cabba*, или *baada* и т. д. Расшифровка же текста по методу Фано однозначна — *bac*. Такой код называется префиксным. Никакое кодовое слово префиксного кода не является началом другого кодового слова. Наряду с кодом Фано, существует префиксное кодирование по методу Хаффмана, экономность которого еще выше.

Пусть двоичные сигналы 0, 1 последовательно передаются по каналу связи на приемник, тогда вероятности перехода в двоичном симметричном канале представлены следующим образом:

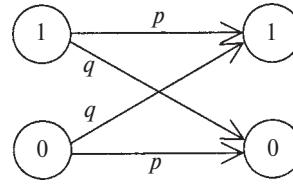


Рис. 87

Для защиты передаваемых текстов от помех используются корректирующие коды, которые основаны на информационной избыточности. Самый простой способ создания избыточности

достигается многократным дублированием передаваемых символов, т. е. образованием символьных блоков: $0 \to 00000$, $1 \to 11111$. В случае сбоя решение при дешифровке принимается по большинству оставшихся символов в блоке.

Существует очень простая, но эффективная защита информационного текста от единичного сбоя, которая требует минимальной избыточности в один дополнительный символ. Это проверка на четность. При кодировании к тексту добавляется 0 или 1 в зависимости от четности или нечетности суммы единиц в тексте. Если при декодировании обнаружится нечетное число единиц, значит, текст был принят неверно.

Процедура кодирования с помощью двух символов может быть представлена бинарным деревом. Длина ветвей, равная длине каждого кодового слова, определяет естественные порядковые уровни. Например, рассмотренный выше код Фано может быть представлен следующим бинарным деревом:

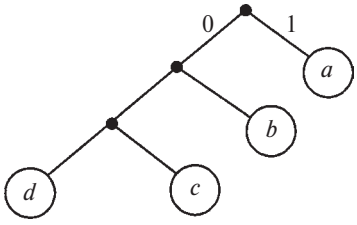


Рис. 88

В нашем дереве символу 0 соответствует ребро, отклоняющееся влево, а символу 1 — ребро, отклоняющееся вправо.

Кодирование и декодирование используем для демонстрации передачи и хранения необходимой информации. Такой целостный взгляд на предложенную цепочку не только обогащает студента новыми знаниями, но и показывает целостность математики. Так, рассматриваемый материал дает представление, сколь широки и разнообразны связи теории кодирования и декодирования с разными разделами математики (алгебра, геометрия, комбинаторный анализ) и как порой абстрактные математические теории могут с успехом применяться для решения практических задач.

Двоичным (m,n)-кодом называется пара, состоящая из схемы кодирования Е: $2^m \to 2^n$ и схемы декодирования Д: $2^n \to 2^m$, где 2^n — множество всех двоичных последовательностей длины n. Функции

Е и Д выбираются так, чтобы функция Н = Е ◊ Т ◊ Д (Т — «функция ошибок») с вероятностью, близкой к единице, была тождественной.

Коды делятся на два класса. Коды с исправлением ошибок имеют целью правильно восстановить с вероятностью, близкой к единице, посланное сообщение. Коды с обнаружением ошибок имеют целью выявить с вероятностью, близкой к единице, наличие ошибок.

Пример 142. Построить схему кодирования и декодирования (3,4)-кода с обнаружением ошибок, основанного на принципе проверки четности.

Решение. Схему кодирования определим следующим образом:

Е: 000 → 0000; 001 → 0011; 010 → 0101; 100 → 1001;

011 → 0110; 101 → 1010; 110 → 1100; 111 → 1111,

а схему декодирования:

Д: $b \to c$, где $b_i = c_i$ при $i = 1, 2, 3$ и если $\sum_{i=0}^{4} b_i$ нечетна, то приемник укажет наличие ошибки передачи.

Пример 143. Найти долю ошибочных сообщений, оставшихся незамеченными, относительно всех ошибочных сообщений для кода из предыдущего примера.

Решение. Приемник укажет наличие ошибки передачи, если сумма $\sum_{i=1}^{4} b_i$ окажется нечетной и доля неверно принятых сообщений будет $q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3$ (четыре, три, две или одна ошибка). Из них незамеченными окажутся только ошибки в двух или четырех знаках, не изменяющие четности. Следовательно, доля ошибочных сообщений, оставшихся незамеченными, составляет

$$\frac{q^4 + 6q^2p^2}{q^4 + 4q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3} = \frac{q^3 + 6qp^2}{q^3 + 4q^2p + 6qp + 4p^3}.$$

Пример 144. На сколько снижается вероятность ошибки приема одного символа в $(m,3m)$-коде с тройным повторением?

Решение. В нашем случае схема кодирования следующая:

E: $a \to b = a_1a_2...a_ma_1a_2...a_ma_1a_2...a_m$, а декодирования: D: $b \to c$ и c_i выбирается по принципу большинства (два или три раза встречающиеся) из тройки b_i, b_{i+m}, b_{i+2m}. В этом случае вероятность правильного приема символа равна p^3+3p^2q, а ошибочного — $3pq^2+q^3$.

Пример 145. Найти граф цепи Маркова вероятностей приема двоичного (2,2)-кода.

Решение. Учитывая, что

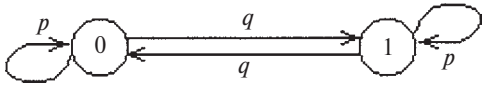


Рис. 89

получаем искомый граф:

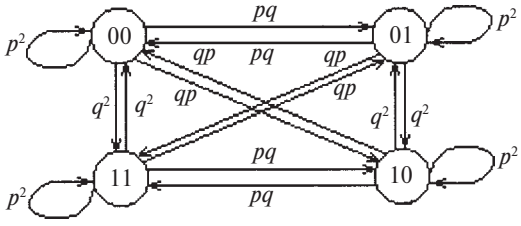


Рис. 90

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под кодированием сообщения?
2. Приведите простейшие примеры кодовых сообщений.
3. Что называется основанием кода?
4. Какие коды называются равномерными?
5. Что понимают под экономностью кода?
6. Назовите условия однозначно декодируемых кодов.
7. Двоичные коды.
8. Что понимают под матрицей цепи Маркова вероятностей приема кода?

Задачи

281. Постройте схему кодирования и декодирования для (2,3)-кода, основанном на схеме проверки четности.

282. Для кода из предыдущего примера найти долю не замеченных при декодировании ошибок.

283. Найдите вероятность ошибки для $(m,5m)$-кода с пятикратным повторением и декодированием по принципу «большинства голосов».

284. Найдите долю не замеченных ошибок при декодировании по принципу «большинства голосов» при пятикратной передаче.

285. Найдите матрицу цепи Маркова вероятностей приема двоичного кода (3,3).

286. Найдите матрицу цепи Маркова вероятностей приема двоичного кода (1,3) с исправлением ошибки.

287*. Найдите матрицу цепи Маркова вероятностей приема двоичного кода (2,3) с обнаружением ошибки.

288*. Предположим, что по двоичному симметричному каналу передаются строки длины 12.

а) Какова вероятность того, что ровно 5 символов будут приняты неправильно?

б) Какова вероятность того, что не больше 5 символов будут приняты неправильно?

в) Сколько имеется строк, отличающихся от данной не больше чем в трех позициях?

289**. Пусть строка длины три передается по двоичному симметричному каналу, но вероятность ошибки меняется со временем так, что i-й сигнал принимается правильно с вероятностью p_i ($i = 1, 2, 3$). Показать, что

а) матрица $\mathbf{P} = (p_{ij})$ симметрична,

б) $\mathbf{P}$ — стохастическая матрица.

290**. Можно ли найти 32 двоичных слова длины 8 таких, что каждое отличается от другого слова не меньше, чем в трех позициях?

§ 8. Блочные коды

Блочный код заменяет каждый блок из m символов более длинным блоком из n символов, которые после передачи подлежат декодированию. Из соображений простоты и надежности большинство систем связи конструируются для передачи двоичных последовательностей, такими являются и (m,n)-коды.

Одним из ключевых понятий теории кодирования является понятие расстояния между двоичными словами. Расстояние $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ между словами $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ равно числу позиций, в которых $a_i \neq b_i$. Весом $w(\boldsymbol{a})$ слова $\boldsymbol{a}$ называется число единиц среди его координат. Тогда расстояние $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ будет равно весу $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, т. е. $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = w(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$.

Пример 146. Показать, что сдвиг $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ не изменяет расстояние между словами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Решение. $d(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = w((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})) = w(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Пример 147. Найти вероятность того, что переданное слово $\boldsymbol{a}$ будет принято как $\boldsymbol{a}^*$.

Решение. Воспользуемся функцией расстояния $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*)$ для представления вероятностей ошибок. Ошибочно будет принято $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*)$ символов, каждый с вероятностью q, а вероятность того, что переданное слово $\boldsymbol{a}$ будет принято как $\boldsymbol{a}^*$, равна $p^{n-d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*)}\cdot q^{d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*)}$.

Пример 148. Для того, чтобы код давал возможность исправлять все ошибки не более чем в k позициях, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее расстояние между двумя кодовыми словами было $2k + 1$.

Решение. Если это условие на Е выполнено, то в качестве Д следует взять функцию $a \to$ (ближайшее слово из образа Е), которая исправит ошибки в k позициях.

Для блоков большой длины задание кодового слова для каждого блока требует большого объема памяти. Значительно экономней результат дает методика матричного кодирования. Пусть $m\times n$ — матрица Е с элементами e_{ij} из нулей и единиц. Обозначая знаком + сложение по модулю 2, определим схему кодирования уравнениями:

$$b_j = a_1e_{1j} + a_2e_{2j} +\ldots+ a_me_{mj}\ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Она отвечает умножению строки на кодированную матрицу Е справа и определяет (m,n)-код.

Код не должен приписывать одно и то же кодовое слово разным словам. Одним из способов добиться этого состоит в том, чтобы первые m столбцов матрицы Е образовали единичную матрицу.

Пример 149. Построить (3,5)-код, используя следующую 3×5 матрицу:

$$E=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Решение. Полный список кодирования таков:

$\boldsymbol{a}^0 = 000 \to 00000$	$\boldsymbol{a}^4 = 110 \to 11001$
$\boldsymbol{a}^1 = 100 \to 10010$	$\boldsymbol{a}^5 = 101 \to 10111$
$\boldsymbol{a}^2 = 010 \to 01010$	$\boldsymbol{a}^6 = 011 \to 01110$
$\boldsymbol{a}^3 = 001 \to 00101$	$\boldsymbol{a}^7 = 111 \to 11100$

Этот список показывает преимущество матричного кодирования: достаточно запомнить m кодовых слов вместо 2^m слов.

Блочный код называется групповым, если его кодовые слова образуют группу относительно покоординатного сложения по

модулю 2. Поскольку $d(\boldsymbol{b}^i,\boldsymbol{b}^j) = w(\boldsymbol{b}^i + \boldsymbol{b}^j)$, то в групповом коде наименьшее расстояние между двумя кодовыми словами равно наименьшему весу ненулевого кодового слова.

Рассмотрим задачу оптимизации декодирования группового кода E: $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{a}$E с двоичной матрицей кодирования E. Наша задача — минимизировать вероятность того, что Д[$\boldsymbol{a}$E] $\neq \boldsymbol{a}$, предполагая равными вероятности передачи сигнала по двоичному симметричному каналу.

Схема декодирования основана на таблице C всех слов, которые могут быть приняты. Поскольку кодовые слова образуют подгруппу $B \subset C$, то можно расположить C, записав в одну строку элементы смежного класса по модулю B. Первая строка отвечает нулевому классу:

$$\mathbf{0}, \boldsymbol{b}^1, \boldsymbol{b}^2, \ldots, \boldsymbol{b}^{2^m-1}.$$

Если $\boldsymbol{c}^i \in C$ и $\boldsymbol{c}^i \notin B$, то строка, содержащая слово $\boldsymbol{c}^i$, имеет вид

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{b}^1 + \boldsymbol{c}^i, \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{c}^i, \ldots, \boldsymbol{b}^{2^m-1} + \boldsymbol{c}^i,$$

где в качестве $\boldsymbol{c}^i$ выбирается слово наименьшего веса, называемого *лидером* этого класса.

Декодирование слова $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}^j + \boldsymbol{c}^i$ состоит в выборе кодового слова $\boldsymbol{b}^j$ в качестве переданного и последующем применении операции E^{-1}.

Пример 150. Составить таблицу декодирования для (3,5)-кода из предыдущего примера.

Решение. В первой строке поместим кодовые слова, а в первом столбце — лидеров класса, вес которых равен 0 и 1.

00000	10010	01010	00101	11001	10111	01110	11100
10000	00010	11010	10101	01001	00111	11110	01100
01000	11010	00010	11101	10001	11111	00110	10100
00100	10110	01110	00001	11101	10011	01010	11000

Чтобы декодировать принятое слово, следует отыскать его в таблице и выбрать в качестве переданного кодовое слово из того же столбца и из первой строки.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется вес слова?
2. Какая связь между кодовым расстоянием и весом слова?
3. Существует ли связь между вероятностью принятия переданного слова и расстоянием между переданным и принятым словами?

4. Необходимые и достаточные условия обнаружения ошибок.
5. Назовите условия исправления ошибок.
6. В чем заключается методика матричного кодирования?
7. Какой код называется групповым?
8. Геометрические интерпретации кодирующих и декодирующих систем.

Задачи

291. Докажите, что если расстояние между кодовыми словами равно 5, то код способен обнаруживать до четырех ошибок и исправлять до двух ошибок.

292. Какова вероятность того, что не будет обнаружена ошибка при передаче слова в (6,7)-коде с проверкой на четность?

293. Вычислите вероятность пропуска ошибок в таком (4,8)-коде, что минимальное расстояние между кодовыми словами равно 4.

294. Рассмотрите (3,4)-код с проверкой на четность и (3,9)-код с трехкратной передачей. При $p = 0{,}9$ вычислите вероятность того, что ошибочно переданное слово не будет обнаружено.

295. Найдите кодирующую матрицу для (3,4)-кода с проверкой на четность.

296. Найдите кодирующую матрицу для (2,6)-кода с трехкратной передачей.

297*. Код задан матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Какова вероятность того, что слово будет принято как правильное, тогда как на самом деле остались необнаруженными ошибки?

298*. Постройте стандартную матрицу, порождающую код, эквивалентный коду с матрицей

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

299**. Покажите, что следующие операции над кодирующей матрицей приводят к эквивалентному коду:

а) перестановка строк,

б) перестановка столбцов,

в) замена одной строки суммой ее с другой строкой.

300**. (4,8)-код состоит из слов вида $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, где $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1$, $\alpha_3 + \alpha_4 = \beta_2$, $\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_3$, $\alpha_2 + \alpha_4 = \beta_4$. Является ли этот код групповым? Чему равно минимальное расстояние этого кода?

§ 9. Коды Фано и Хаффмана

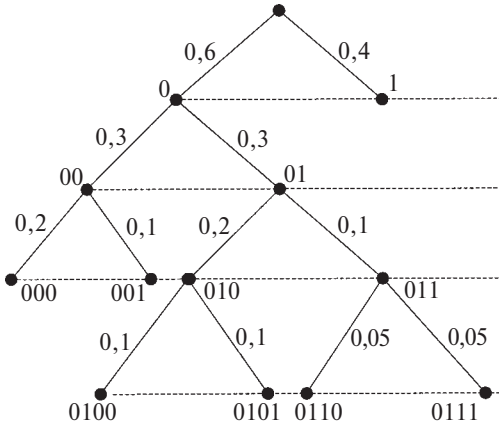
Коды Фано и Хаффмана являются оптимальными и префиксными. При построении искомых кодов будем применять как традиционный табличный способ кодирования, так и использовать «кодовые деревья».

При кодировании по Фано все сообщения записываются в таблицу по степени убывания вероятности и разбиваются на две группы примерно (насколько это возможно) равной вероятности. Соответственно этой процедуре из корня кодового дерева исходят два ребра, которым в качестве весов присваиваются полученные вероятности. Двум образовавшимся вершинам приписывают кодовые символы 0 и 1. Затем каждая из групп вероятностей вновь делится на две подгруппы примерно равной вероятности. В соответствии с этим из каждой вершины 0 и 1 исходят по два ребра с весами, равными вероятностям подгрупп, а вновь образованным вершинам приписывают символы 00 и 01, 10 и 11. В результате многократного повторения процедуры разделения вероятностей и образования вершин приходим к ситуации, когда в качестве веса, приписанного ребру бинарного дерева, выступает вероятность одного из данных сообщений. В этом случае вновь образованная вершина оказывается листом дерева, так как процесс деления вероятностей для нее завершен. Задача кодирования считается решенной, когда на всех ветвях кодового бинарного дерева образуются листья.

Пример 151. Закодировать по Фано сообщения, имеющие следующие вероятности:

Сообщение	1	2	3	4	5	6	7
Вероятность	0,4	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Решение 1 (с использованием кодового дерева).



Коды	Сообщения
1	1
000	2
001	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7

Рис. 91

Листья кодового дерева представляют собой кодируемые сообщения с присвоенными им кодовыми словами.

Решение 2 (табличный способ).

Сообщение	*P*	Разбиение на подгруппы	Кодовое обозначение
1	0,4	} I	1
2	0,2	} I } I } I	000
3	0,1	} II	001
4	0,1	} II } II } I } I	0100
5	0,1	} II	0101
6	0,05	} II } II } I	0110
7	0,05	} II	0111

Цена кодирования (средняя длина кодового слова *l*) является критерием степени оптимальности кодирования. Вычислим ее в нашем случае.

$$l = \sum_{i=1}^{7} l_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot (0{,}1 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 2) = 2{,}5.$$

Для того, чтобы закодировать сообщения по Хаффману, предварительно преобразуется таблица, задающая вероятности сообщений.

Исходные данные записываются в столбец, две последние (наименьшие) вероятности в котором складываются, а полученная сумма становится новым элементом таблицы, занимающим соответствующее место в списке убывающих по величине вероятностей. Эта процедура продолжается до тех пор, пока в столбце не останутся всего два элемента.

Пример 152. Закодировать сообщения из предыдущего примера по методу Хаффмана.

Решение 1. Первый шаг.

Сообщения	p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4	0,4
3	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	
4	0,1	0,1	0,1	0,2		
5	0,1	0,1	0,1			
6	0,05	0,1				
7	0,05					

Вторым шагом производим кодирование, «проходя» по таблице справа налево (обычно это проделывается в одной таблице):

	A	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6 0
2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,4 00	0,4 1
3	0,1	0,1	0,2	0,2 000	0,2 01	
4	0,1	0,1	0,1 0010	0,2 001		
5	0,1	0,1 0000	0,1 0011			
6	0,05 00010	0,1 0001				
7	0,05 00011					

Решение 2. Построение кодового дерева начинается с корня. Двум исходящим из него ребрам приписывается в качестве весов вероятности 0,6 и 0,4, стоящие в последнем столбце. Образовавшимся при этом вершинам дерева приписываются кодовые символы 0 и 1. Далее «идем» по таблице справа налево. Поскольку вероятность 0,6 является результатом сложения двух вероятностей

0,4 и 0,2, из вершины 0 исходят два ребра с весами 0,4 и 0,2 соответственно, что приводит к образованию двух новых вершин с кодовыми символами 00 и 01. Процедура продолжается до тех пор, пока в таблице остаются вероятности, получившиеся в результате суммирования. Построение кодового дерева заканчивается образованием семи листьев, соответствующих данным сообщениям с присвоенными им кодами. Дерево, полученное в результате кодирования по Хаффману, имеет следующий вид:

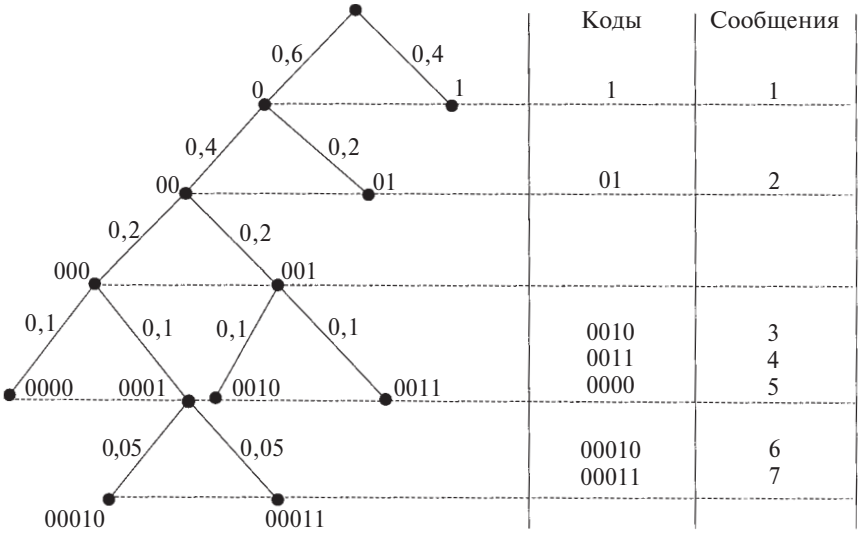


Рис. 92

Листья кодового дерева представляют собой кодируемые сообщения с присвоенными им кодовыми словами. Таблица кодов имеет вид:

Сообщение	1	2	3	4	5	6	7
Код	1	01	0010	0011	0000	00010	00011

Цена кодирования здесь будет равна

$$l = \sum_{i=1}^{7} l_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot (0{,}1 \cdot 3) + 5 \cdot (0{,}05 \cdot 2) = 2{,}5.$$

Для передачи данных сообщений можно перейти от побуквенного (поцифрового) кодирования к кодированию «блоков», состоящих из фиксированного числа последовательных «букв».

Пример 153. Провести кодирование по методу Фано двухбуквенных комбинаций, когда алфавит состоит из двух букв А и Б, имеющих вероятности P(А) = 0,8 и P(Б) = 0,2.

Решение.

Комбинации букв	Вероятность	Разбиение на подгруппы	Код
АА	0,64	}I	0
АБ	0,16	}I	10
БА	0,16	}II }I	110
ББ	0,04	}II	111

Цена кода $l = 1\cdot0{,}64 + 2\cdot0{,}16 + 3\cdot(0{,}16 + 0{,}04) = 1{,}56$, и на одну букву алфавита приходится 0,78 бита информации. При побуквенном кодировании на каждую букву приходится следующее количество информации:

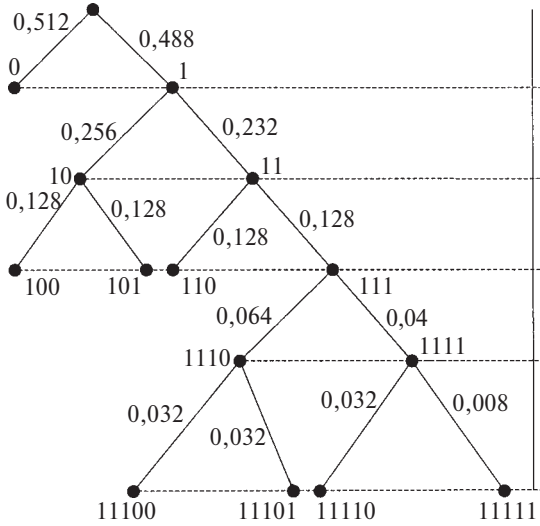
$$H = \frac{4}{5}\log\frac{5}{4} + \frac{1}{5}\log 5 = \log 5 - \frac{4}{5}\log 4 = \log 5 - 1{,}6 \approx 0{,}72 \text{ (бит)}.$$

Пример 154. Провести кодирование по Хаффману трехбуквенных комбинаций для алфавита из предыдущего примера.

Решение.

Комбинация букв	p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
ААА	0,512	0,512	0,512	0,512	0,512	0,512	0,512
ААБ	0,128	0,128	0,128	0,128	0,232	0,256	0,488
АБА	0,128	0,128	0,128	0,128	0,128	0,232	
БАА	0,128	0,128	0,128	0,128	0,128		
АББ	0,032	0,04	0,064	0,104			
БАБ	0,032	0,032	0,04				
ББА	0,032	0,032					
БББ	0,008						

Построим кодовое дерево.



Коды	Сообщения
0	ААА
100 101 110	ААБ АБА БАА
11100 11101 11110 11111	АББ БАБ ББА БББ

Рис. 93

Найдем цену кодирования

$l = 1\cdot 0{,}512 + 3\cdot(0{,}128\cdot 3) + 5\cdot(0{,}032\cdot 3 + 0{,}008) = 2{,}184.$

На каждую букву алфавита приходится в среднем 0,728 бита, в то время как при побуквенном кодировании — 0,72 бита.

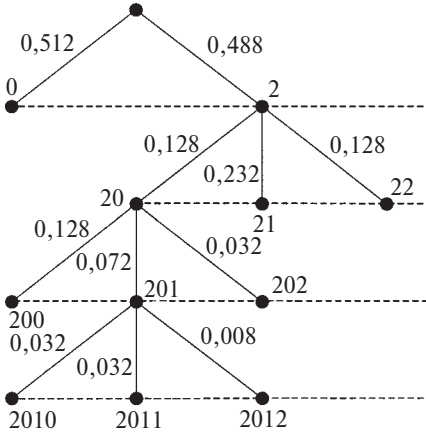
Большей оптимизации кодирования можно достичь еще и использованием трех символов — 0, 1, 2 — вместо двух. Тринарное дерево Хаффмана получается, если суммируются не две наименьшие вероятности, а три, и приписываются каждому левому ребру 0, правому — 2, а серединному — 1.

Пример 155. Построить тринарное дерево Хаффмана для кодирования трехбуквенных комбинаций из примера 153.

Решение. Составим таблицу тройного «сжатия» по методу Хаффмана.

Сообщение	p	p_1	p_2	p_3
ААА	0,512	0,512	0,512	0,512
ААБ	0,128	0,128	0,232	0,488
АБА	0,128	0,128	0,128	
БАА	0,128	0,128	0,128	
АББ	0,032	0,072		
БАБ	0,032	0,032		
ББА	0,032			
БББ	0,008			

Тогда тринарное дерево выглядит следующим образом:



Коды	Сообщения
0	ААА
21 22	ААБ АБА
200 202	БАА АББ
2010 2011 2012	БАБ ББА БББ

Рис. 94

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется среднее число элементарных сигналов, приходящихся на одну букву алфавита?
2. Префиксные коды.
3. Сколько требуется двоичных знаков для записи кодированного сообщения?
4. На чем основано построение кода Фано?
5. Что такое сжатие алфавита?
6. Какой код самый выгодный?
7. Основная теорема о кодировании.
8. Энтропия конкретных типов сообщений.

Задачи

301. Проведите кодирование по методу Фано алфавита из четырех букв, вероятности которых равны 0,4; 0,3; 0,2 и 0,1.

302. Алфавит содержит 8 букв, которые встречаются с вероятностями 0,3; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,08; 0,06; 0,06. Осуществите кодирование по методу Фано.

303. Алфавит состоит из двух букв, А и Б, встречающихся с вероятностями P(А) = 0,8 и P(Б) = 0,2. Примените метод Фано

к кодированию всевозможных двухбуквенных и трехбуквенных комбинаций.

304. Проведите кодирование по методу Хаффмана двухбуквенных слов из предыдущей задачи.

305. Проведите кодирование 7 букв из задачи 302 по методу Хаффмана.

306. Проведите кодирование по методам Фано и Хаффмана пяти букв, равновероятно встречающихся.

307*. Осуществите кодирование двухбуквенных комбинаций четырех букв из задачи 301.

308*. Проведите кодирование всевозможных четырехбуквенных слов из задачи 303.

309**. Сравните эффективность кодов Фано и Хаффмана при кодировании алфавита из десяти букв, которые встречаются с вероятностями 0,3; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05; 0,05; 0,04; 0,03; 0,03.

310**. Сравните эффективность двоичного кода Фано и кода Хаффмана при кодировании алфавита из 16 букв, которые встречаются с вероятностями 0,25; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,04; 0,04; 0,03; 0,03; 0,03; 0,03; 0,02; 0,02; 0,01; 0,01.

Глава V
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Термин *статистика* происходит от латинского слова «status» — состояние. Первоначально, в XVIII в., когда статистика начала оформляться в научную дисциплину, термин статистика связывался с системой описания фактов, характеризующих состояние государства. В настоящее время **статистика** включает в себя следующие три раздела:

1) *сбор статистических сведений* каких-либо массовых совокупностей;

2) *статистическое исследование* полученных данных, выяснение закономерностей, которые могут быть установлены на основе данных массового наблюдения;

3) *разработка приемов статистического наблюдения и анализа* статистических данных.

Последний раздел и составляет содержание **математической статистики**.

Математическая статистика возникла в XVII в. и создавалась параллельно с теорией вероятностей. Дальнейшее развитие математической статистики во второй половине XIX в. и в XX в. обязано в первую очередь П.Л. Чебышеву, А.М. Ляпунову, А.Н. Колмогорову, А.Я. Хинчину, К. Гауссу, Ф. Гальтону, К. Пирсону, Р. Фишеру.

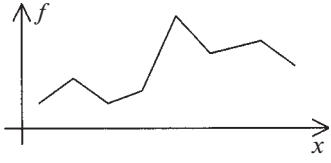
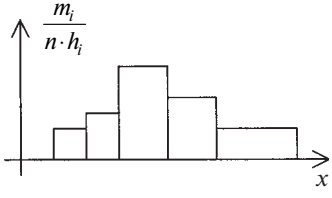
Совокупность значений какого-то признака объекта называется генеральной совокупностью, а основной задачей математической статистики является выяснение вероятностных свойств генеральной совокупности (распределение, числовые характеристики и т. д.). Полное исследование генеральной совокупности практически невозможно, поэтому обычно рассматривают только некоторые ее объекты, т. е. делают выборку, с помощью которой по вероятностным свойствам оценивают генеральную совокупность.

Рассмотрение математической статистики для будущего учителя математики (и не только) целесообразно в связи с тем, что дает

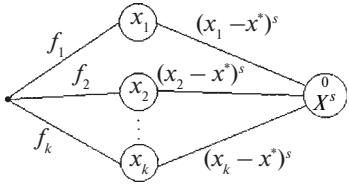
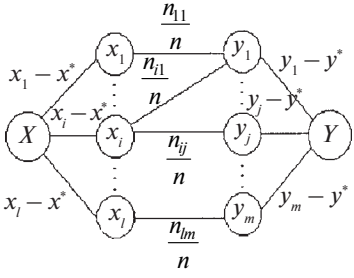
ему возможность грамотно применять (и учить других учителей и учащихся) вероятностно-статистические методы обработки и анализа экспериментальных данных по физике, химии, биологии и другим предметам. Для творческого развития учащихся разумна в школе и статистическая проверка авторских рекомендаций по стратегиям азартных игр, рассмотренных в главе III.

Особенностью данной главы является то, что в нем сделан акцент на использование методов математической статистики в педагогике и психологии, большинство приведенных задач взяты из исследований и реальной жизни Ярославской области, отраженной в статистических данных (социально-экономическое развитие Ярославской области в сравнении с другими областями, качественный и количественный состав учительских кадров, урожайность коллективных хозяйств, экономическая рентабельность предприятий, спортивные достижения команд и т. д.) При вычислении выборочных числовых характеристик применяется авторский подход использования графов распределения.

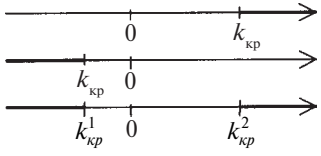
5.1. Опорная таблица

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Выборка Выборка объема n $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$ Вариационный, статистический ряд Размах варьирования Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ Закон и граф распределения	$\sum_i f_i = 1$ $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$	Находить полигон частот и относительных частот  Строить гистограмму выборки 
Числовые характеристики вариационного ряда Показатели положения: выборочная средняя, мода, медиана	$(x + y)^* = x^* + y^*$ $(cx)^* = cx^*$ $D^*(C) = 0$; $D^*(C \cdot X) = C^2 D^*(X)$; $D^*(X \pm Y) = D^*(X) + D^*(Y)$;	

Продолжение табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Показатели разброса: выборочная дисперсия, неисправленная дисперсия, статистическое и исправленное среднее квадратическое отклонение Асимметрия Выборочные начальные и центральные моменты	$S=\sqrt{\sum\frac{m_i(x_i-x^*)^2}{n-1}}$ $S^2=\frac{n}{n-1}D^*;$ $M[S^2]=D^*;$ $D_{\text{общ.}}=D_{\text{внгр.}}+D_{\text{межгр.}};$ $D_{\text{межгр.}}/D_{\text{общ.}}\le 1;$	Вычислять показатели положения. Находить центральные моменты μ_s как полный вес графа распределения статистического ряда: 
Доверительный интервал Надежность	$x^*-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<x^*+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$ где $F(t)=\frac{\alpha}{2}$; $x^*-t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}}<a<x^*+t_\alpha\frac{S}{\sqrt{n}},$ где $t_\alpha=\gamma(n,\alpha)$; $S(1-q)<\sigma<S(1+q)$	Находить доверительный интервал, который с заданной надежностью α покрывает оцениваемый параметр (математическое ожидание или среднее квадратическое отклонение)
Выборочная ковариация $k(X,Y)$ Выборочный коэффициент корреляции $r(x,y)$ Выборочное корреляционное отношение	$k(X,Y)=\frac{1}{n}\sum(x_i-x^*)\times$ $\times(y_j-y^*)n_{ij}$ $r(X,Y)=\frac{\sum n_{xy}xy-x^*y^*}{n\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*},$ $\lvert r(X,Y)\rvert\le 1$ $\eta_{yx}=\frac{\sigma_{y_x^*}}{\sigma_y^*},$ $0\le\eta\le 1,\ \eta\ge\lvert r(X,Y)\rvert,$ $D_{внгр.}=D_{общ.}(1-\eta^2).$	Находить выборочную ковариацию как полный вес ковариационного графа: 

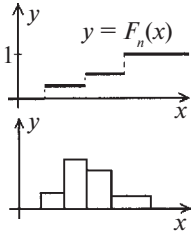
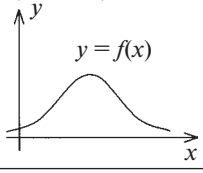
Продолжение табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Уравнение регрессии Y на X (X на Y) Ранговая корреляция Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена Коэффициент ранговой корреляции Кендалла	$y_x^* - y^* = \frac{k(X,Y)}{D_x^*}(x - x^*)$ $r_s^* = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}$ $r_{s\,\text{кр}}^* = t_{кр}(\alpha, n-2)\sqrt{\frac{1-(r_s^*)^2}{n-2}}$; $r_k^* = \frac{4R}{n(n-1)} - 1$; $r_{k\,\text{кр}}^*(0{,}05) = 1{,}96\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}$	Строить графики регрессии $y_x^* = f(x)$ или $x_y^* = \phi(y)$, пользуясь методом наименьших квадратов. Находить коэффициенты ранговой корреляции Спирмена, Кендалла и область принятия нулевой гипотезы. Обосновать область принятия нулевой гипотезы
Статистические гипотезы Параметрические и непараметрические критерии	Статистические критерии Уровни статистической значимости	Отыскивать области принятия конкурирующей гипотезы 
t-распределение Стьюдента	$t_{\text{эмп}} = \frac{x^* - y^*}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \times$ $\times\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$	$T_{\text{эмп}} \geq t_{\text{кр}}$
Критерий Крамера–Уэлча	$T_{\text{эмп}} = \frac{\sqrt{n \cdot m}\left\lvert x^* - y^* \right\rvert}{\sqrt{nD_x^* + mD_y^*}}$	$T_{\text{эмп}} \geq T_{\text{кр}}(0{,}05) = 1{,}96$
χ^2 — критерий Пирсона	$x_{\text{эмп}}^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	$x_{\text{эмп}}^2 \geq x_{\text{кр}}^2$
λ — критерий Колмогорова—Смирнова	$\lambda = d_{\max} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$	$\lambda_{\text{эмп}} \geq \lambda_{\text{кр}}$

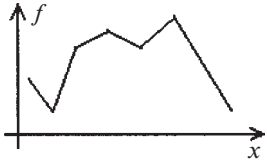
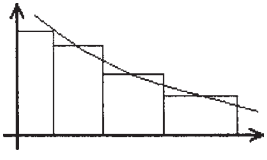
Окончание табл.

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Критерий χ_r^2 Фридмана	$x_{r\,\text{эмп}}^2 = \frac{12}{n \cdot c \cdot (c+1)} \cdot \sum T_j^2 - 3n(c+1)$	$x_{r\,\text{эмп}}^2 \geq x_{r\,\text{кр}}^2$
Критерий L Пейджа	$L_{\text{эмп}} = \sum T_j \cdot j$	$L_{\text{эмп}} \geq L_{\text{кр}}$
Критерий Q Розенбаума	$Q_{\text{эмп}} = S_1 + S_2$	$Q_{\text{эмп}} \geq Q_{\text{кр}}$
Критерий T Вилкоксона	$T_{\text{эмп}} = \sum R_r$	$T_{\text{эмп}} < T_{\text{кр}}$
Критерий U Манна—Уитни	$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x \cdot (n_x+1)}{2} - T_x$	$U_{\text{эмп}} < U_{\text{кр}}$
Критерий H Крускала—Уоллиса	$H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum \frac{T_j^2}{n} - 3(N+1)$	$H_{\text{эмп}} \geq H_{\text{кр}}$
Критерий Барлетта	$B = 2{,}3\left[\left(\sum n_i - m\right)\lg D^* - \sum (n_j - 1)\lg D_j^*\right]$, $C = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left[\sum \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{\sum n_j - m}\right]$	$\frac{B}{C} \geq \chi^2(\alpha, m-1)$
Критерий Фишера	$\varphi_{\text{эмп}}^* = \left\lvert 2\arcsin\sqrt{p_1} - 2\arcsin\sqrt{p_2}\right\rvert \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$	$\varphi_{\text{эмп}}^* \geq \varphi_{\text{кр}}^2(0{,}05) = 1{,}64$

5.2. Методы

Параметрического и непараметрического оценивания	Упорядочения моделей	Оценивания параметров модели	Проверки гипотез и критерии согласия
	Выбор аппроксимирующего распределения (модели) 	Интервальное и точечное оценивание $\bar{x}$, M_o, M_e, D, σ, r Доверительные интервалы Метод наибольшего правдоподобия	χ^2 — Пирсона, t-критерий, λ-критерий, критерий χ^2_r и т. д.

5.3. Алгоритмы

Сбор, систематизация и обработка статистических данных	Представления и интерпретации	Формирования практических выводов
		Различия в признаках существенны $F_{эмп} \geq F_{кр}$ $T_{эмп} \geq t_{кр}$ $T_{эмп} < T_{кр}$ $U_{эмп} < U_{кр}$ $x^2_{эмп} \geq x^2_{кр}$
Применения критериев согласия		

5.4. Спираль фундирования выборочных характеристик

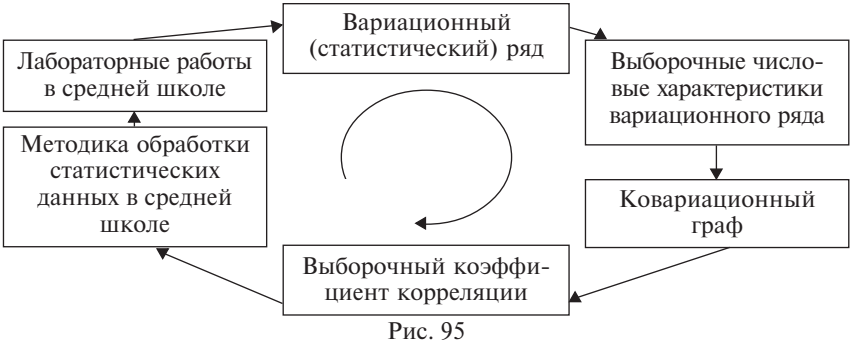


Рис. 95

§ 1. Вариационный и статистический ряд

В математической статистике исследуются утверждения, которые могут быть сделаны на основе измерения некоторой величины, на простейшем примере поясним постановку (одной из многих) задач математической статистики.

Пусть требуется измерить некоторую величину a. Результаты измерений

$$x_1, x_2, \dots x_n$$

естественно рассматривать как значения случайных величин X_1, X_2, ..., X_n, полученных в данном эксперименте. Если измерительный инструмент не имеет систематической ошибки, то можно положить $M[X_n] = a$. Следовательно, возникает задача **оценить параметр** a. Для решения задачи рассмотрим случайную величину

$$X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k .$$

Тогда $M[X] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = a = M[X_k]$.

Это обстоятельство приводит к мысли построить статистические характеристики:

$$a^* \equiv \bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$D^* \equiv \bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2.$$

Первая представляет среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины X_k и статистическую дисперсию — во втором случае. В соответствии с законом больших чисел эти среднеарифметические сходятся по вероятности соответственно к математическому ожиданию величины X и к дисперсии

$$D[X] = M[(X-a)^2]: \bar{a} \to a, \bar{D} \to D.$$

При ограниченности наблюдений эксперимента заменой $M[X]$ и $D[X]$ на $\bar{a}$ и $\bar{D}$ совершаем погрешность, а при небольшом числе наблюдений величины $\bar{a}$, $\bar{D}$ являются случайными величинами. Возникает задача об оценке неизвестных параметров a, D случайной величины X на основе экспериментальных данных, т. е. задача — найти подходящие значения этих параметров.

Множество результатов измерений $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ величины X называется **выборкой** объема n. Для того, чтобы иметь возможность воспользоваться аппаратом теории вероятностей, целесообразно наблюдаемую величину X рассматривать как случайную величину, функцию распределения которой

$$F(x) = P\{X < x\}$$

следует определить.

Полученный статистический материал $x_1, x_2, ... x_n$ наблюдений представляет собой первичные данные о величине, подлежащей статистической обработке. Обычно такие статистические данные оформляются в виде таблицы, графика, гистограммы и т. д.

Если выборка объема n содержит k различных элементов x_1', x_2', ..., x_k', причем x_i' встречается m_i раз, то число m_i называется **частотой** элемента x_i', а отношение $\frac{m_i}{n} = f_i$ называется **относительной частотой** элемента x_i'. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} f_i = 1$.

Вариационным (статистическим) рядом называется таблица, первая строка которой содержит в порядке возрастания элементы x_i', а вторая — их частоты m_i (относительные частоты f_i).

Полигоном частот (относительных частот) выборки называется ломаная с вершинами в точках (x_i, m_i) $((x_i, f_i))$.

Функция $F_n(x) = \frac{l}{n}$, где n — объем выборки, а l — число значений X в выборке, меньших x, называется эмпирической функцией распределения. Функция $F_n(x)$ служит оценкой неизвестной функции распределения $F(x)$, т. е. $F_n(x) \to F(x)$.

Пусть теперь X — непрерывная случайная величина с неизвестной плотностью вероятности $f(x)$. Для оценки $f(x)$ по выборке $x_1, x_2, ... x_n$ разобьем область значений X на интервалы длины h_i ($i = 1, 2, ..., s$). Обозначим через $\tilde{x}_i$ середины интервалов, а через m_i число элементов выборки, попавших в указанный интервал. Тогда $f(\tilde{x}_i) \sim \frac{m_i}{nh_i}$ — оценка плотности вероятности в точке $\tilde{x}_i$. В прямоугольной системе координат построим прямоугольники с основаниями h_i и высотами $\frac{m_i}{n \cdot h_i}$, т. е. площади прямоугольника,

равной относительной частоте данного разряда. Полученная таким образом фигура называется **гистограммой** выборки.

Пример 156. Имеются данные о количестве студентов в 30 группах физико-математического факультета:

26	25	25	26	25	23
23	24	19	23	20	19
22	24	24	23	20	23
24	19	21	18	21	18
20	18	18	21	15	15

Найти вариационный ряд количества студентов в группах и размах варьирования. Построить полигон частот.

Решение. Записывая исходные данные в порядке возрастания, составим вариационный ряд:

x_i	15	18	19	20	21	22	23	24	25	26
m_i	2	4	2	4	3	1	5	4	3	2

Размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min} = 26 - 15 = 11$.

Для построения полигона частот обозначим на оси абсцисс возможные значения признака, а на оси ординат соответствующие частоты m_i и полученные точки соединим отрезками.

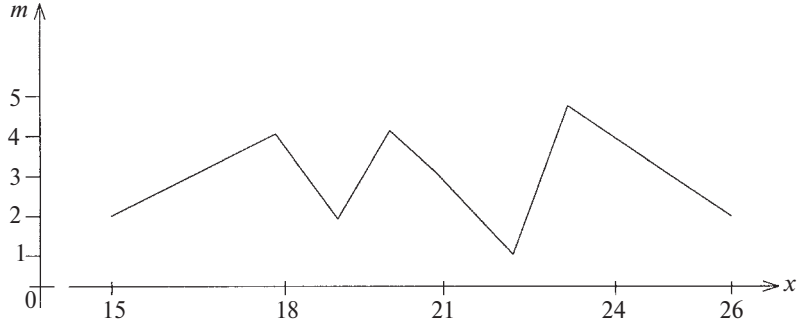


Рис. 96

Пример 157. Школьникам предлагалось разгадать несколько числовых закономерностей и вписать в пропуски недостающие числа. Оценка осуществлялась по количеству правильно решенных задач и дала следующие результаты:

Кол-во баллов	13	14	15	16	17	18	19	20
Кол-во школьников	2	3	2	4	12	10	8	9

Составить статистическое распределение количества школьников по количеству набранных баллов и построить полигон относительных частот.

Решение. Пусть x = {количество набранных баллов}, а f = = {относительные частоты}. Тогда статистическое распределение выборки можно представить в виде следующей таблицы:

x	13	14	15	16	17	18	19	20
f	0,04	0,06	0,04	0,08	0,24	0,2	0,16	0,18

Чтобы построить полигон относительных частот, отложим на оси абсцисс значения x, а на оси ординат — относительные частоты f. После этого последовательно соединим полученные точки отрезками.

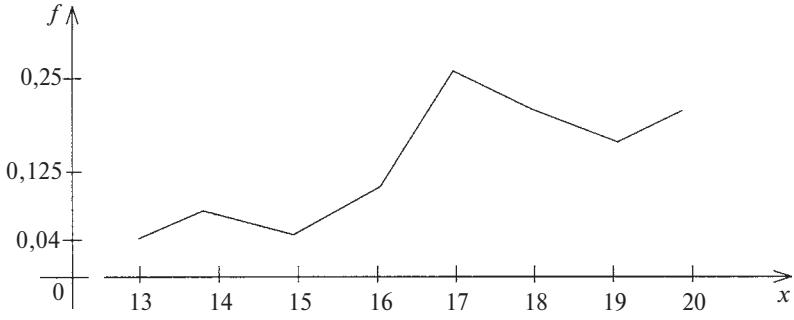


Рис. 97

Пример 158. В 2002 г. количество служб, представляющих гражданам жилищные субсидии, по сельским районам области распределено следующим образом:

5, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 10, 1, 1, 1, 4, 4, 5, 1, 1.

Построить эмпирическую функцию распределения.

Решение. Найдем сначала статистический ряд распределения числа служб в районах области.

x_i	1	4	5	10
f_i	$\frac{11}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{17}$

Эмпирическую функцию распределения находим аналогично интегральной функции (см. § 1, Глава III).

$$F_{17}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1, \\ \dfrac{11}{17}, \text{ если } 1 < x \le 4, \\ \dfrac{13}{17}, \text{ если } 4 < x \le 5, \\ \dfrac{16}{17}, \text{ если } 5 < x \le 10, \\ 1, \text{ если } x > 10. \end{cases}$$

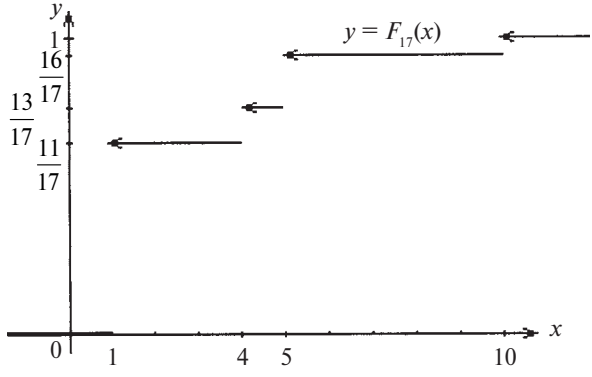


Рис. 98

Пример 159. Построить гистограмму следующей выборки объема 50.

Номер интервала	Границы интервала x_i—x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала m_i	Плотность относительной частоты $\dfrac{m_i}{n \cdot h_i}$
1	3—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	20	
4	17—21	8	
5	21—28	7	

Решение. Найдем плотность $\frac{m_i}{n \cdot h_i}$ относительной частоты $\frac{m_i}{n}$ для каждого интервала и заполним последний столбец таблицы:

$$\frac{m_1}{nh_1} = \frac{5}{50 \cdot 4} = 0{,}025; \ \frac{m_2}{nh_2} = \frac{10}{50 \cdot 5} = 0{,}04; \ \frac{m_3}{nh_3} = \frac{20}{50 \cdot 5} = 0{,}08;$$

$$\frac{m_4}{nh_4} = \frac{8}{50 \cdot 4} = 0{,}04; \ \frac{m_5}{nh_5} = \frac{7}{50 \cdot 7} = 0{,}02.$$

Построим на оси абсцисс заданные интервалы и проведем над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся на расстояниях, равных соответствующим плотностям относительной частоты $\frac{m_i}{n \cdot h_i}$.

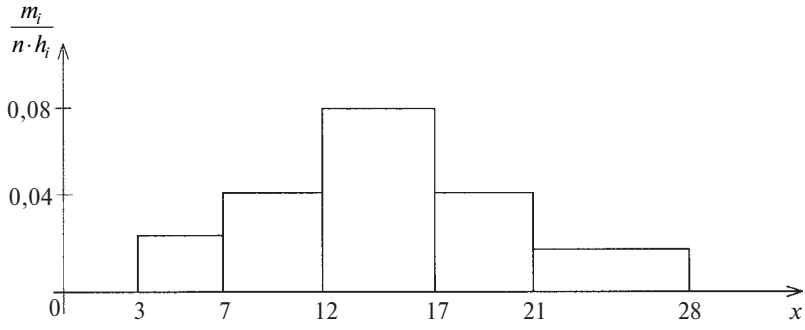


Рис. 99

Из способа построения гистограммы следует, что полная ее площадь равна единице.

Пример 160. Число школ Ярославской области в 2002/2003 учебном году по малым городам и районам составило:

20, 21, 31, 17, 13, 21, 16, 17, 26, 19, 15, 20, 17, 22, 28, 29, 25.

Построить гистограмму распределения числа школ по районам области.

Решение. Выберем границы интервалов и составим по данной выборке следующую таблицу:

Номер интервала	Границы интервала x_i—x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала m_i	Плотность относительной частоты $\frac{m_i}{n \cdot h_i}$
1	13—17	6	$\frac{6}{17 \cdot 4} = \frac{3}{34}$
2	17—20	3	$\frac{3}{17 \cdot 3} = \frac{1}{17}$
3	20—25	4	$\frac{4}{17 \cdot 5} = \frac{4}{85}$
4	25—31	4	$\frac{4}{17 \cdot 6} = \frac{2}{51}$

Аналогично предыдущему примеру строим гистограмму числа школ, распределенных по малым городам и районам области.

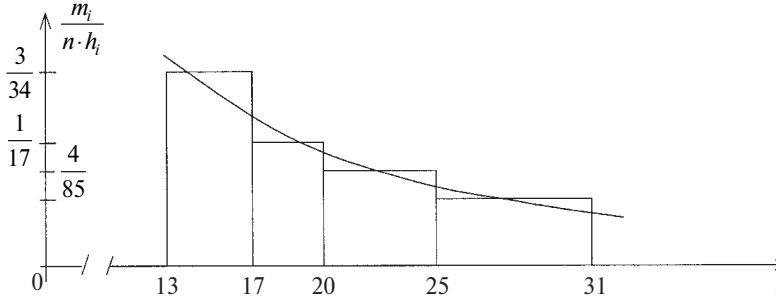


Рис. 100

«Сглаживая» полученную гистограмму, получаем «похожесть» данного дискретного закона распределения на классический показательный (непрерывный) закон. В этом и заключается основное предназначение гистограмм выборок.

Вопросы для самоконтроля

1. На каких методах основано изучение статистических данных?
2. Основные задачи математической статистики.

3. Какие способы отбора из генеральной совокупности вы знаете?

4. Какая выборка называется представительной?

5. В чем отличие вариационного от статистического ряда?

6. Для чего используется полигон частот?

7. Свойства эмпирической функции распределения.

8. В каком случае и для чего строятся гистограммы?

Задачи

311. Записать выборку 2, 7, 3, 5, 4, 10, 5, 5, 2, 8, 10, 2, 7, 7, 7, 5, 4, 2, 4, 7, 8 в виде: а) вариационного ряда; б) статистического ряда.

312. Найдите эмпирическую функцию распределения для выборки, представленной вариационным рядом:

x_i	1	2	4	7
m_i	10	20	30	40

313. Имеются данные о количестве сельских населенных пунктов районов Ярославской области с численностью населения более 500 человек:

Большесельский — 4, Борисоглебский — 2, Брейтовский — 1, Гаврилов-Ямский — 2, Даниловский — 2, Любимский — 1, Мышкинский — 0, Некоузский — 6, Некрасовский — 5, Первомайский — 2, Переславский — 11, Пошехонский — 0, Ростовский — 11, Рыбинский — 12, Тутаевский — 3, Угличский — 4, Ярославский — 27.

Найдите вариационный ряд количества населенных пунктов Ярославской области с численностью населения более 500 человек. Постройте полигон частот.

314. В 2002 г. количество крупных и средних промышленных предприятий по районам (в том же порядке, что и в предыдущей задаче) области распределено следующим образом:

2, 2, 2, 6, 5, 6, 1, 4, 1, 5, 4, 4, 9, 6, 3, 0, 6.

Постройте полигон частот и эмпирическую функцию распределения.

315. Количество учащихся, получивших аттестат с медалью, в 2001 г. по городам и районам Ярославской области:

г. Ярославль — 280, г. Рыбинск — 66, г. Ростов — 61, г. Переславль — 27, г. Углич — 32, г. Тутаев — 36;

Большесельский — 8, Борисоглебский — 3, Брейтовский — 11, Гаврилов-Ямский — 7, Даниловский — 19, Любимский — 11, Мышкинский — 3, Некоузский — 15, Некрасовский — 7, Первомайский — 6, Переславский — 1, Пошехонский — 8, Ярославский — 30.

Найдите вариационный ряд распределения медалистов, размах варьирования и среднее число медалистов по городам и районам области.

316. Посевные площади картофеля (тыс. гектаров) в сельских хозяйствах Ярославской области по районам:

1,5; 1,5; 0,6; 1,3; 0,9; 0,9; 0,6; 1,3; 1,1; 0,6; 1,1; 0,9; 1,6; 1,3; 0,8; 0,4; 1,1.

Найдите статистический ряд распределения посевных площадей и постройте полигон относительных частот.

317*. Построить гистограмму выборки, представленной в виде таблицы частот. Объем выборки $n = 100$.

Номер интервала	Границы интервала x_i—x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала m_i
1	1—5	24
2	5—8	30
3	8—13	40
4	13—15	6

318*. Построить гистограмму выборки объема $n = 75$, представленной в виде таблицы частот:

Номер интервала	Границы интервала x_i—x_{i+1}	Сумма частот вариант интервала m_i
1	0—2	3
2	2—4	6
3	4—7	8
4	7—12	25
5	12—15	15
6	15—20	18

319**. Директорский корпус средних школ Ярославской области характеризуется по стажу работы следующим образом:

до 2-х лет — 6 человек, от 2 до 5—7, от 5 до 10—21 человек, от 10 до 20—59 человек, свыше 20 — 196, пенсионеров — 65 человек. Получите интервальный ряд распределения и постройте гистограмму относительных частот стажа директоров школ области.

320**. Рождаемость (смертность) населения Ярославской области в 2003 г. по малым городам и районам области составили:

85, 159, 80, 249, 289, 151, 105, 180, 199, 122, 153, 157, 336, 231, 148, 96, 519;

309, 350, 267, 738, 750, 371, 239, 598, 715, 277, 726, 466, 905, 777, 415, 376, 993.

Найдите интервальные ряды распределения и гистограммы рождаемости и смертности по районам Ярославской области.

§ 2. Выборочные характеристики вариационного ряда

Пусть выборка задана вариационным рядом

x_i	x_1	x_2	. . .	x_k
m_i	m_1	m_2	. . .	m_k

, где $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Выборочным средним называется величина $x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i$.

Выборочная дисперсия $D^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x^*)^2 \cdot m_i$ а положительное значение корня квадратного из выборочной дисперсии называется **выборочным средним квадратическим отклонением** (иначе «стандартным отклонением») $\sigma^*[X] = +\sqrt{D^*[X]}$.

Выборочные начальные и центральные моменты порядка s определяются соответственно формулами:

$$\alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^s \cdot m_i \ ; \ \mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - x^*)^s \cdot m_i \ .$$

Модой (M_o) называется вариант, наиболее часто встречающийся в данном вариационном ряду.

Медианой (M_e) называется вариант x_l такой, что $\sum_{i=1}^{l} m_i \geq \frac{n}{2}$ и $\sum_{i=l}^{k} m_i \geq \frac{n}{2}$. Медиана обладает тем свойством, что сумма абсолютных

величин отклонений вариантов от медианы меньше, чем от любой другой величины (в том числе и от выборочной средней).

Важность эмпирических характеристик заключается в том, что они близки (при достаточно большом n) к соответствующим теоретическим значениям. Поскольку выборочные характеристики являются случайными величинами, а теоретические — числа, то близость понимается в смысле сходимости по вероятностям.

Пример 161. Известно распределение золотых медалистов, окончивших в 2001 г. школы Ярославской области, по районам:

Кол-во золотых медалистов	0	1	3	4	6	8	20
Кол-во районов	6	1	4	2	1	3	1

Дайте характеристику распределения признака (число золотых медалистов по районам), вычислив для этого:

а) выборочную среднюю, б) моду и медиану, в) показатели вариации (дисперсию, среднее квадратическое отклонение, размах варьирования).

Решение. а) $x^* = \frac{1}{18}(0\cdot 6+1\cdot 1+3\cdot 4+4\cdot 2+6\cdot 1+8\cdot 3+20\cdot 1)\approx 4$;

б) $M_o = 0$, так как $6 = \max\{6,1,4,2,3\}$.

$M_e = 3$, так как $6+1+4=11\geq\frac{18}{2}$ и $4+2+1+3+1=11\geq\frac{18}{2}$;

в) $D^*[X]=\frac{1}{18}(16\cdot 6+9\cdot 1+1\cdot 4+4\cdot 1+16\cdot 3+256\cdot 1)\approx 23{,}2$;

$\sigma^*[X]=+\sqrt{23{,}2}\approx 4{,}8$;

$R = 20 - 0 = 20$.

Пример 162. Измерение роста (в см) 100 студентов-первокурсников университета дало следующие результаты:

Рост	154—158	158—162	162—166	166—170	170—174	174—178	178—182
Число студ-ов	10	14	26	28	12	8	2

Найдите выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение роста первокурсников.

Решение. В качестве вариант x_i примем середины интервалов и найдем выборочную среднюю роста студентов.

$$x^* = 0{,}01\cdot(156\cdot 10+160\cdot 14+164\cdot 26+168\cdot 28+$$

$$+172\cdot 12+176\cdot 8+180\cdot 2) = 166 \text{ (см)}.$$

Вычислим теперь выборочную дисперсию

$$D^* = 0{,}01\cdot[(-10)^2\cdot 10+(-6)^2\cdot 14+(-2)^2\cdot 26+2^2\cdot 28+$$

$$+6^2\cdot 12+10^2\cdot 8+14^2\cdot 2] = 33{,}44$$

и, извлекая из полученного числа корень квадратный, находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma^*[X] = \sqrt{D^*[X]} = \sqrt{33{,}44} \approx 5{,}78 \text{ (см)}.$$

Допустим, что все значения количественного признака X разбиты на k групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти **групповые средние и дисперсии**. **Внутригрупповой дисперсией** называют среднюю арифметическую дисперсий, взвешенную по объемам групп:

$$D_{\text{внгр}} = \frac{\left(\sum N_j\cdot D_{j\text{гр}}\right)}{n} \quad (N_j \text{ — объем группы } j,\ n = \sum N_j\ ).$$

Межгрупповой дисперсией называют дисперсию групповых средних относительно общей средней:

$$D_{\text{межгр}} = \frac{\left(\sum N_j\cdot(x_j^* - x^*)^2\right)}{n} \quad (x^*,\ x_j^* \text{ — общая и групповые средние}\ .$$

Пример 163. Найти групповые, внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из следующих двух групп:

Первая группа

x_i	2	4	7
m_i	3	5	2

$N_1 = 10$

Вторая группа

x_i	3	5	6	10
m_i	4	4	3	4

$N_2 = 15$

Решение. 1) Найдем общую и групповые средние:

$$x^* = \frac{1}{25}\cdot(2\cdot 3+4\cdot 5+7\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 4+6\cdot 3+10\cdot 4) = 4{,}8;$$

$$x_1^* = \frac{1}{10}\cdot(2\cdot 3+4\cdot 5+7\cdot 2)=4\ ;\ x_2^* = \frac{1}{15}\cdot(3\cdot 4+5\cdot 4+6\cdot 3+10\cdot 4)=6\ ,$$

и, используя их, — групповые дисперсии:

$$D_{1\ \text{гр}} = \frac{1}{10}\cdot\left((2-4)^2\cdot 3+(4-4)^2\cdot 5+(7-4)^2\cdot 2\right)=3\ ;$$

$$D_{2\ \text{гр}} = \frac{1}{15}\cdot\left((3-6)^2\cdot 4+(5-6)^2\cdot 4+(6-6)^2\cdot 3+(10-6)^2\cdot 4\right)=\frac{104}{15}\ .$$

2) Найдем внутригрупповую и межгрупповую дисперсии

$$D_{\text{внгр}} = \frac{1}{25}\cdot\left(10\cdot 3+15\cdot\frac{104}{15}\right)=\frac{134}{25}=5{,}36\ ;$$

$$D_{\text{межгр}} = \frac{1}{25}\cdot\left(10\cdot(4-4{,}8)^2+15\cdot(6-4{,}8)^2\right)=1{,}12\ .$$

3) Найдем общую дисперсию

$$D_{\text{общ}} = \frac{1}{25}\cdot((2-4{,}8)^2\cdot 3+(4-4{,}8)^2\cdot 5+(7-4{,}8)^2\cdot 2+(3-4{,}8)^2\cdot 4+$$

$$+(5-4{,}8)^2\cdot 4+(6-4{,}8)^2\cdot 3+(10-4{,}8)^2\cdot 4)=6{,}48=D_{\text{внгр}}+D_{\text{межгр}}.$$

Для вычисления выборочных характеристик при больших выборках используют метод произведений, который продемонстрируем на следующем примере.

Пример 164. Найти выборочные среднюю и дисперсию следующего статистического распределения:

x_i	20,0	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0
m_i	2	3	7	11	17	20	16	13	6	4	1

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего:

1) запишем варианты в первый столбец;

2) запишем частоты во второй столбец, сумму частот (100) поместим в нижнюю клетку столбца;

3) в качестве ложного нуля выберем варианту 21,0 (в середине ряда) и записываем условные варианты $u_i = \dfrac{x_i-21}{0{,}2}$;

4) произведения частот на условные варианты записываем в четвертый столбец; отдельно находим сумму отрицательных (–82) и отдельно сумму положительных (81) чисел, а их сумму (–1) помещаем в нижнюю клетку столбца;

5) произведения частот на квадраты условных вариант записываем в пятый столбец, а их сумму (433) помещаем в нижнюю клетку столбца;

6) произведения частот на квадраты условных вариант, увеличенных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец, а их сумму помещаем в нижнюю клетку столбца.

Контроль:

$$\sum m_i \cdot u_i^2 + 2\sum m_i \cdot u_i + n =$$

$$= 433 + 2 \cdot (-1) + 100 = 531 = \sum m_i \cdot (u_i + 1)^2,$$

и вычисления произведены правильно.

1	2	3	4	5	6
x_i	m_i	u_i	$m_i \cdot u_i$	$m_i \cdot u_i^2$	$m_i \cdot (u_i + 1)^2$
20,0	2	–5	–10	50	32
20,2	3	–4	–12	48	27
20,4	7	–3	–21	63	28
20,6	11	–2	–22	44	11
20,8	17	–1	–17	17	0
21,0	20	0	$A_1 = -82$		20
21,2	160	1	16	16	64
21,4	13	2	26	52	117
21,6	6	3	18	54	96
21,8	4	4	16	64	100
22,0	1	5	5	25	36
	100		$A_2 = 81$		
			$\Sigma m_i \cdot u_i = -1$	$\Sigma m_i \cdot u_i^2 = 433$	$\Sigma m_i \cdot (u_i + 1)^2 = 531$

Вычислим теперь условные моменты первого и второго порядков:

$$M_1^* = \frac{\sum m_i u_i}{n} = -\frac{1}{100} = -0{,}01;$$

$$M_2^* = \frac{\sum m_i u_i^2}{n} = -\frac{433}{100} = 4{,}33 .$$

Найдем искомые выборочные среднюю и дисперсию:

$$x^* = M_1^* \cdot h + C = (-0{,}01) \cdot 0{,}2 + 21{,}0 = 20{,}8 ;$$

$$D^*[X] = \left[M_2^* - (M_1^*)^2 \right] \cdot h^2 = \left[4{,}33 - (-0{,}01)^2 \right] \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}173 .$$

Если первоначальные варианты не являются равноотстоящими, то интервал, в котором заключены все варианты выборки, делят на несколько равных частичных интервалов.

Пример 165. Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию для следующего вариационного ряда:

x_i	1	1,03	1,05	1,06	1,08	1,10	1,12	1,13	1,16
m_i	1	3	6	4	2	4	3	6	5
x_i	1,19	1,20	1,21	1,25	1,26	1,28	1,30	1,32	1,35
m_i	2	4	4	8	4	4	6	4	6
x_i	1,37	1,38	1,39	1,40	1,44	1,46	1,47	1,49	1,50
m_i	5	1	2	2	3	3	4	3	2

Решение. Выделим пять частичных интервалов и половину вариантов пограничных точек отнесем к одному интервалу, а вторую половину — к другому:

1,0—1,1 $m_1 = 1 + 3 + 6 + 4 + 2 + 4:2 = 18$,
1,1—1,2 $m_2 = 4:2 + 3 + 6 + 5 + 2 + 4:2 = 20$,
1,2—1,3 $m_3 = 4:2 + 4 + 8 + 4 + 4 + 6:2 = 25$,
1,3—1,4 $m_4 = 6:2 + 4 + 6 + 5 + 1 + 2 + 2:2 = 22$,
1,4—1,5 $m_5 = 2:2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2:2 = 15$.

Составим новый вариационный ряд из середин выбранных частичных интервалов:

y_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
m_i	18	20	25	22	15

$y^* = 1{,}246$, $D_y^* = 0{,}017$ и, сравнивая с $\bar{x}^* = 1{,}25$, $D_x^* = 0{,}018$, замечаем, что $y^* \approx x^*$, а $D_y^* \approx D_x^*$, а вычислений значительно меньше.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие выборочные числовые характеристики вариационного ряда вам известны?
2. Существует ли зависимость между внутригрупповой, межгрупповой и общей дисперсией?
3. Почему делается акцент на несмещенные оценки?
4. Какие свойства отклонения от общей средней вы знаете?
5. Как вводятся условные варианты?
6. В чем смысл метода произведения?
7. На каких свойствах математического ожидания и дисперсии основан метод произведения?
8. Как свести первоначальные варианты к равноотстоящим?

Задачи

321. α-частицы, достигающие счетчика в некотором опыте, образуют следующую выборку:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_i	21	81	156	200	195	152	97	54	26	11	7

Найдите выборочную среднюю, моду и медиану для числа α-частиц, достигающих счетчика.

322. Распределение рабочих цеха по проценту выполнения норм выработки выглядит следующим образом:

% выполнения норм	50—70	70—90	90—110	110—130	130—150	150—170
Число рабочих	20	25	35	30	20	10

Найдите средний процент выполнения норм выработки рабочими цеха.

323. Для определения «общего интеллекта» школьникам предлагалось раскрыть геометрические закономерности. Оценка осуществлялась по количеству правильно решенных задач и дала следующие результаты:

Кол-во баллов	14	15	16	17	18	19	20
Кол-во школьников	4	11	15	16	19	15	5

Найдите моду и медиану данного вариационного ряда.

324. Дайте характеристику изменений показателей психологической защищенности младших подростков до и после эксперимента, в ходе которого получены следующие результаты:

Показатели психологической защищенности	От публичного унижения	От оскорблений	От высмеиваний	От угроз	От обзываний	От неприязненных отношений	От игнорирования	От недобрых отношений
До эксперимента	2,4	2,1	2,2	2,5	2,2	2,2	2,4	2,2
После эксперимента	2,6	2,2	2,4	2,8	2,3	2,6	2,8	2,4

325. Какой вывод можно сделать об эффективности интерактивного обучения по выраженности базовых ценностей и экологических ориентаций в экспериментальной и контрольной группах в конце обучения? Количества выборов представлены в таблице:

Наименование показателя	Признание и уважение людей	Природа как среда сущ. любимых животных и растений	Природа как условие благополучия будущего поколения	Природа как объект заботы
Среднее по эксп. группе	6,64	2,24	4,4	3,92
Среднее по контр. группе	4,95	3,53	3,53	2,88

326. Найдите внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсию выборки, состоящей из трех групп:

первая группа

x_i	2	3	8
m_i	30	20	10

вторая группа

x_i	1	6
m_i	10	20

третья группа

x_i	3	5	7
m_i	8	12	10

327*. Найдите методом произведений выборочную среднюю и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объема $n = 100$:

Варианты	22	24	26	28	30	32
Частота	5	15	50	18	10	4

328*. Найдите методом произведений выборочные среднюю и дисперсию вариационного ряда:

x_i	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
m_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

329**. Вычислите выборочные средние и дисперсии по первоначальным и равностоящим вариантам (и сравните их) для вариационного ряда:

x_i	m_i	x_i	m_i	x_i	m_i
1,00	1	1,12	3	1,25	8
1,03	3	1,15	6	1,26	4
1,05	6	1,16	5	1,29	4
1,06	4	1,19	2	1,30	6
1,08	2	1,20	4	1,32	4
1,10	4	1,23	4	1,33	5

330**. Найдите выборочную среднюю и выборочную дисперсию по первоначальным и равностоящим вариантам для следующего вариационного ряда:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18,5	23	25	26
m_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

§ 3. Доверительный интервал

Доверительным называется **интервал**, который с заданной надежностью α покрывает оцениваемый параметр.

Для оценки математического ожидания a случайной величины X, распределенной по нормальному закону, при известном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал

$$x^* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x^* + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ — точность оценки, n — объем выборки, x^* — выборочное среднее, t — аргумент функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\alpha}{2}$.

Пример 166. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,9 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $x^* = 20$ и объем выборки $n = 100$.

Решение. Требуется найти доверительный интервал

$$x^* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x^* + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Все величины, кроме t, известны. Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$.

По таблице приложения 2 находим $t = 1{,}65$ и получаем доверительный интервал

$$19{,}175 < a < 20{,}825.$$

Если среднее квадратическое отклонение σ неизвестно, то для оценки $M[X] = a$ служит доверительный интервал

$$x^* - t_\alpha\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}} < a < x^* + t_\alpha\frac{\overline{s}}{\sqrt{n}},$$

где t_α находится в приложении 4 по заданным n и α, а вместо $\overline{s}$ часто бывает возможно подставить любую из оценок

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^*)^2 \cdot m_i}, \quad s^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x^*)^2 \cdot m_i}.$$

— исправленное среднеквадратическое, статистическое среднеквадратическое отклонения соответственно. При увеличении n обе оценки s и s^* будут различаться сколь угодно мало и будут сходиться по вероятностям к одной и той же величине σ.

Пример 167. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	-1	0	1	2	3
m_i	10	5	15	15	5

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней.

Решение. Выборочную среднюю и исправленное среднее квадратическое отклонение найдем соответственно по формулам

$$x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i m_i = \frac{1}{50}(-10+15+30+15) = 1,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - x^*)m_i} = \frac{1}{7}\sqrt{(-2)^2\cdot 10+(-1)^2\cdot 5+1\cdot 15+2^2\cdot 5} \approx 1{,}28.$$

Пользуясь таблицей приложения 4, по $\alpha = 0{,}95$ и $n = 50$ находим $t_\alpha = 2{,}01$.

Найдем искомый доверительный интервал:

$$x^* - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < a < x^* + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}},$$

подставляя $x^* = 1$, $t_\alpha = 2{,}01$, $s \approx 1{,}28$, $n = 50$, получим

$$0{,}64 < a < 1{,}36.$$

Пример 168. Результаты исследования длительности оборота (в днях) оборотных средств торговых фирм г. Ярославля представлены в группированном виде:

$t_i - t_{i+1}$	24—32	32—40	40—48	48—56	56—64	64—72	72—80
m_i	2	4	10	15	11	5	3

Построить доверительный интервал с надежностью 0,99 для средней длительности оборотных средств торговых фирм города.

Решение. Найдем выборочную среднюю длительности оборотных средств.

$$t^* = \frac{1}{50}(28\cdot 2+36\cdot 4+44\cdot 10+52\cdot 15+60\cdot 11+68\cdot 5+76\cdot 3) = 52{,}96.$$

Для упрощения вычисления исправленного среднеквадратического отклонения выберем приближенное значение $t^* \approx 53$.

Тогда

$$s=\sqrt{\frac{1}{49}\left[(28-53)^2\cdot 2+(36-53)^2\cdot 4+(44-53)^2\cdot 10+(52-53)^2\cdot 15+\right.}$$
$$\left.+(60-53)^2\cdot 11+(68-53)^2\cdot 5+(76-53)^2\cdot 3\right]=\frac{1}{7}\sqrt{6482}\approx 11{,}5.$$

В приложении 4 по n = 50 и α = 0,99 находим t_α = 2,68, а следовательно, и доверительный интервал

$$52{,}96-2{,}68\cdot\frac{11{,}5}{\sqrt{50}}<a<52{,}96+2{,}68\cdot\frac{11{,}5}{\sqrt{50}} \text{ или}$$
$$48{,}6<a<57{,}32.$$

Рассматривая n независимых испытаний, можно оценить вероятность p по относительной частоте.

Пример 169. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности этого события по абсолютной величине не более чем на 0,05?

Решение. По условию α = 0,95, $p=\frac{1}{2}$, ε = 0,1.

Тогда $\alpha=P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1\right\}=2\Phi\left(0{,}1\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right)$,

$2\Phi\left(0{,}2\sqrt{n}\right)\approx 0{,}95$ и $\Phi\left(0{,}2\sqrt{n}\right)\approx 0{,}475$.

Из таблицы значений функции Лапласа находим, что $0{,}2\sqrt{n}\approx 2$, откуда $n\approx 100$.

Точечные оценки неизвестных параметров распределения можно находить по методу наибольшего правдоподобия, предложенному Р. Фишером.

Пример 170. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра p биномиального распределения

$$P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k},$$

если в n_1 независимых испытаниях событие A появилось m_1 раз и в n_2 независимых испытаниях событие A появилось m_2 раз.

Решение. Составим функцию правдоподобия:

$$L = P_{n_1}(m_1) \cdot P_{n_2}(m_2) = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \cdot p^{m_1+m_2}(1-p)^{[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)]}.$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = \ln\left(C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2}\right) + (m_1+m_2)\ln p + \left[(n_1+n_2)-(m_1+m_2)\right]\ln(1-p).$$

Вычислим первую производную по p:

$$\frac{d\ln L}{dp} = \frac{m_1+m_2}{p} - \frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p}.$$

Запишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную к нулю:

$$\frac{m_1+m_2}{p} - \frac{(n_1+n_2)-(m_1+m_2)}{1-p} = 0.$$

Решив полученное уравнение относительно p, найдем критическую точку:

$$p = \frac{m_1+m_2}{n_1+n_2},$$

в которой производная отрицательна. Следовательно, $p = \dfrac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$ — точка максимума и, значит, ее надо принять в качестве наибольшего правдоподобия неизвестной вероятности p биномиального распределения.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая оценка называется точечной?
2. Какие точечные оценки генеральных числовых характеристик вы знаете?
3. Чем определяется интервальная оценка?
4. Надежность оценки и другое ее название.
5. На чем основано нахождение доверительного интервала для оценки математического ожидания?
6. Каким образом оценивают истинное значение измеряемой величины?
7. Точечная и интервальная оценка вероятности биномиального распределения.
8. В чем суть метода наибольшего правдоподобия?

Задачи

331. Игральная кость подбрасывается 300 раз. Какова вероятность того, что относительная частота появления шести очков на верхней грани кости отклонится от вероятности появления события в одном испытании по абсолютной величине не более чем на 0,05?

332. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что относительная частота появления «герба» отклонится от вероятности этого события по абсолютной величине не более чем на 0,1?

333. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 1$. Найдите доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним $x^* = 3{,}4$, если объем выборки $n = 49$ и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}9$.

334. Исследовалось время безотказной работы 50 лазерных принтеров. Из априорных наблюдений известно, что среднее квадратическое отклонение времени безотказной работы $\sigma = 16$ ч. По результатам исследований получено среднее время безотказной работы $x^* = 1000$ ч. Постройте 90%-ный доверительный интервал для среднего времени безотказной работы.

335. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема $n = 25$ найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение $S = 0{,}9$. Найдите доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надежностью 0,95.

336. Произведено 16 измерений одним прибором некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение S случайных ошибок измерений оказалось равным 0,7. Найдите интервал ошибок прибора с надежностью 0,99. Предполагается, что ошибки измерений распределены нормально.

337*. Время (в мин) обслуживания клиентов в железнодорожной кассе представлено выборкой: 2,0; 1,5; 1,0; 1,0; 1,25; 3,5; 3,0; 3,0; 3.75; 3,7; 4,0; 6,0; 7,0; 1,5; 8,0; 3,5; 5,0; 3,5; 14,0; 12,0; 15,1; 18,0; 18,5; 17,0. Определите процент клиентов, время обслуживания которых более 12 мин и менее 5 мин.

338*. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 16$:

x_i	–0,4	–0,2	–0,1	0	0,2	0,5	0,7	1	1,2	1,6
m_i	1	3	2	1	1	1	2	1	2	2

Оцените с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала.

339**. Результаты исследования длительности оборота оборотных средств торговых фирм города (в днях) представлены в группированном виде:

t_i—t_{i+1}	24—33	33—42	42—51	51—60	60—69	69—78	78—87
m_i	1	4	9	18	10	6	2

Постройте доверительный интервал с надежностью 0,95 для средней длительности оборотных средств торговых фирм города при условии, что среднее квадратическое отклонение σ неизвестно (известно и равно 10 дням).

340**. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра λ распределения Пуассона $P\{X = x_i\} = \dfrac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$.

§ 4. Выборочный коэффициент корреляции

Понятие корреляции является одним из основных понятий теории вероятностей и математической статистики, оно было введено Гальтоном и Пирсоном.

Закон природы или общественного развития может быть представлен описанием совокупности взаимосвязей. Если эти зависимости стохастичны, а анализ осуществляется по выборке из генеральной совокупности, то данная область исследования относится к задачам стохастического исследования зависимостей, которые включают в себя корреляционный, регрессионный, дисперсионный и ковариационный анализы. В данном разделе рассмотрена теснота статистической связи между анализируемыми переменными, т. е. задачи корреляционного анализа.

В качестве измерителей степени тесноты парных связей между количественными переменными используются коэффициент корреляции (или то же самое «коэффициент корреляции Пирсона») и корреляционное отношение.

Пусть при проведении некоторого опыта наблюдаются две случайные величины X и Y, причем одно и то же значение x встречается n_x раз, y — n_y раз, одна и та же пара чисел (x, y) наблюдается n_{xy} раз. Все данные записываются в виде таблицы, которую называют корреляционной.

Выборочная ковариация $k(X, Y)$ величин X и Y определяется формулой

$$k(X,Y)=\frac{1}{n}\sum(x_i-x^*)(y_j-y^*)n_{ij},$$

где $n = \Sigma n_{ij}$, а x^*, y^* — выборочные средние величин X и Y. При небольшом количестве экспериментальных данных $k(X, Y)$ удобно находить как полный вес ковариационного графа:

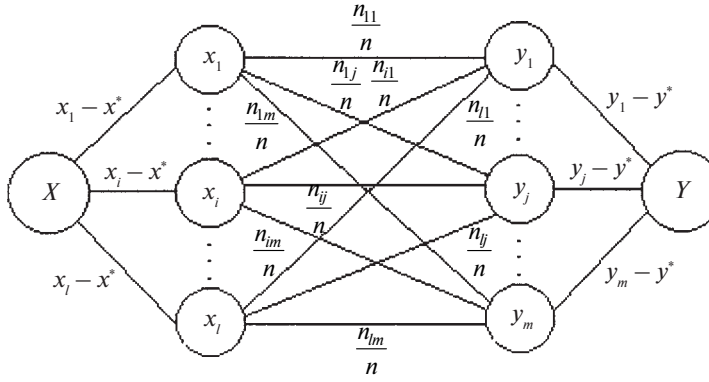


Рис. 101

Выборочный коэффициент корреляции находится по формуле

$$r(X,Y)=\frac{k(X,Y)}{\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*}=\frac{\sum n_{xy}xy-x^*y^*}{n\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*},$$

где σ_x^*, σ_y^* — выборочные средние квадратические отклонения величин X и Y.

Выборочный коэффициент корреляции $r(X, Y)$ показывает тесноту линейной связи между X и Y: чем ближе $|r(X, Y)|$ к единице, тем сильнее линейная связь между X и Y.

Пример 171. Среднемесячная заработная плата (тыс. руб.) в Ярославской области в 2001—2002 гг. составила по отраслям:

Отрасль	ЖКХ	Здравоохранение	Наука	Образование	Транспорт	Промышленность
2001 год	2	1,5	2,7	1,3	3,2	3,2
2002 год	3	2,8	3,6	2,4	4,9	4,5

Найдите выборочный коэффициент корреляции для заработной платы в указанные годы.

Решение. 1) Найдем выборочные средние

$$x^* = \frac{1}{6}(2+1{,}5+2{,}7+1{,}3+3{,}2+3{,}2) \approx 2{,}3;\ y^* \approx 3{,}5.$$

2) Вычислим выборочную ковариацию

$$k(X,Y) = \frac{1}{6}[(2-2{,}3)\cdot(3-3{,}5)+(1{,}5-2{,}3)\cdot(2{,}8-3{,}5)+(2{,}7-2{,}3)\cdot(3{,}6-3{,}5)+$$

$$+(1{,}3-2{,}3)\cdot(2{,}4-3{,}5)+(3{,}2-2{,}3)\cdot(4{,}9-3{,}5)+(3{,}2-2{,}3)\cdot(4{,}5-3{,}5)] = 0{,}668.$$

3) Найдем выборочные средние квадратические отклонения:

$$D_x^* = \frac{1}{6}\left[(-0{,}3)^2+(-0{,}8)^2+0{,}4^2+1^2+0{,}9^2\cdot 2\right] = 0{,}585;\ \sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = 0{,}765;$$

$$D_y^* = 0{,}82;\ \sigma_y^* = 0{,}91.$$

4) Вычислим теперь выборочный коэффициент корреляции

$$r(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*} = \frac{0{,}668}{0{,}765\cdot 0{,}91} \approx 0{,}96.$$

Поскольку $r(X,Y)$ достаточно близко к 1, то между заработной платой по отраслям в 2001 и 2002 гг. существовала почти линейная зависимость (зарплата в 2002 г. по каждой отрасли увеличилась примерно в 1,5 раза).

Пример 172. В выпускном классе проводились контрольные работы по физике и математике, которые дали следующие результаты:

Оценки по физике \ Оценки по математике	2	3	4	5
2	1	2	1	—
3	1	4	2	—
4	—	1	3	4
5	—	1	3	2

Найдите выборочный коэффициент корреляции оценок контрольных работ по физике и математике.

Решение. В этом случае удобно начать с построения ковариационного графа, вычислив предварительно выборочные средние.

$$x^* = 2\cdot 0{,}16 + 3\cdot 0{,}28 + 4\cdot 0{,}32 + 5\cdot 0{,}24 = 3{,}64 \approx 3{,}6;\ y^* = 3{,}76 \approx 3{,}8.$$

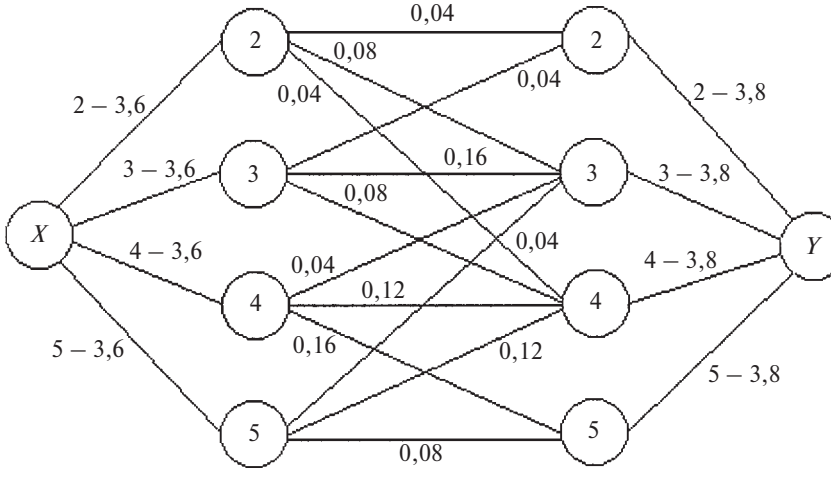


Рис. 102

Выборочную ковариацию находим как вес всего ковариационного графа:

$$k(X,Y) = (-1{,}6)\cdot 0{,}04\cdot(-1{,}8) + (-1{,}6)\cdot 0{,}08\cdot(-0{,}8) + (-1{,}6)\cdot 0{,}04\cdot 0{,}2 +$$

$$+(-0{,}6)\cdot 0{,}04\cdot(-1{,}8) + (-0{,}6)\cdot 0{,}16\cdot(-0{,}8) + (-0{,}6)\cdot 0{,}08\cdot 0{,}2 +$$

$$+0{,}4\cdot 0{,}04\cdot(-0{,}8) + 0{,}4\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}16\cdot 1{,}2 +$$

$$+1{,}4\cdot 0{,}04\cdot(-0{,}8) + 1{,}4\cdot 0{,}12\cdot 0{,}2 + 1{,}4\cdot 0{,}08\cdot 1{,}2 = 0{,}512.$$

По графу можно вычислить и выборочные дисперсии

$$D_x^* = (-1{,}6)^2\cdot(0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}04) + (-0{,}6)^2\cdot 0{,}28 +$$

$$+0{,}4^2\cdot 0{,}32 + 1{,}4^2\cdot 0{,}24 = 1{,}032,$$

$$D_y^* = 0{,}824;$$

$$\sigma_x^* \approx 1{,}016,\ \sigma_y^* \approx 0{,}908.$$

Следовательно, $r(X,Y)=\dfrac{k(X,Y)}{\sigma_x^*\cdot\sigma_y^*}=\dfrac{0{,}512}{1{,}016\cdot 0{,}908}\approx 0{,}56$ и можно утверждать, что между оценками тех контрольных работ по физике и математике существует средней тесноты линейная прямая связь.

Корреляционной зависимостью Y от X называют функциональную зависимость условной средней y_x^* от x.

$y_x^*=f(x)$ представляет **уравнение регрессии** Y на X, а $x_y^*=\varphi(y)$ — уравнение регрессии X на Y.

Корреляционная зависимость может быть линейной и криволинейной. В случае линейной корреляционной зависимости выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$y_x^*-y^*=\frac{k(X,Y)}{D_x^*}(x-x^*)\,.$$

Параметры a и b уравнения прямой $y_x^*=ax+b$ линии регрессии Y на X можно находить по методу наименьших квадратов из системы уравнений

$$\begin{cases} n(x^*)^2a+nx^*b=\sum n_{xy}xy \\ x^*a+b=y^* \end{cases}$$

Пример 173. Построить прямую регрессии мировых рекордов по прыжкам с шестом от соответствующего года, если нам известна динамика результатов в XX в.

1912 г.	Стокгольм,	Гарри Бебкок (США)	—	3,95
1936 г.	Берлин,	Эрл Мидоуз (США)	—	4,35
1972 г.	Мюнхен,	Волфганг Нордвик (ГДР)	—	5,50
1980 г.	Москва,	Владислав Казакевич (Польша)	—	5,78
1988 г.	Сеул,	Сергей Бубка (СССР)	—	5,90
1994 г.	Сетриере,	Сергей Бубка (Украина)	—	6,14

Решение. 1) Запишем в таблицу соответствие результатов некоторых мировых рекордов по прыжкам с шестом и годы их установления в XX в.

X = {год рекорда}	(19)12	36	72	80	88	94
Y = {высота рекорда}	395	435	550	578	590	614

2) $x^* = 64$; $y^* = \frac{1}{6}(395+435+550+578+590+614) = 527$ (см);

3) $k(X,Y) = \frac{1}{6}[(-52)\cdot(-132)+(-28)\cdot(-32)+8\cdot 32+16\cdot 51+$

$+24\cdot 63+30\cdot 87] \approx 2427$;

4) $D_x^* = \frac{1}{6}\left[(-52)^2+(-28)^2+8^2+16^2+24^2+30^2\right] \approx 880$;

5) Искомое уравнение прямой регрессии выглядит следующим образом

$$y_x^* - 527 = \frac{2427}{880}(x-64),$$

или $y_x^* = 2{,}75x + 351$.

По полученной прямой регрессии можно на вероятностном языке предсказывать уровень мировых рекордов по прыжкам с шестом, так, в 2010 г. ($x = 110$) получаем ожидаемый прыжок на высоту примерно в 6 м 53 см (поживем — увидим!).

В том случае, когда исследуется связь между несколькими признаками, то корреляцию называют множественной и она задается всеми коэффициентами парных корреляций, которые записываются в корреляционную матрицу.

Пример 174. Найти корреляционную матрицу зависимости суммы двоеборья, результатов в толчке и рывке, веса спортсмена и его возраста для пяти весовых категорий тяжелоатлетов.

№ категории	x_1 Двоеборье	x_2 Рывок	x_3 Толчок	x_4 Вес атлета	x_5 Возраст
1	400	180	220	80	24
2	420	195	225	90	27
3	440	200	240	100	21
4	435	195	240	110	26
5	465	205	260	130	22

Решение. 1) $x_1^* = 432,\ x_2^* = 195,\ x_3^* = 237,\ x_4^* = 102,\ x_5^* = 24.$

2) Составим таблицу разностей $x_i - x_i^*$ и их квадратов

№ катего-рии	$x_1 - x_1^*$ / $(x_1 - x_1^*)^2$	$x_2 - x_2^*$ / $(x_2 - x_2^*)^2$	$x_3 - x_3^*$ / $(x_3 - x_3^*)^2$	$x_4 - x_4^*$ / $(x_4 - x_4^*)^2$	$x_5 - x_5^*$ / $(x_5 - x_5^*)^2$
1	–32 / 1024	–15 / 225	–17 / 289	–22 / 484	0 / 0
2	–12 / 144	0 / 0	–12 / 144	–12 / 144	3 / 9
3	8 / 64	5 / 25	3 / 9	–2 / 4	–3 / 9
4	3 / 9	0 / 0	3 / 9	8 / 64	2 / 4
5	33 / 1089	10 / 100	23 / 529	28 / 784	–2 / 4

3) Найдем ковариации $k(x_i, x_j) = k_{ij}$.

$k_{12} = \frac{1}{5}\left[(-32)\cdot(-15)+(-12)\cdot 0+8\cdot 5+3\cdot 0+33\cdot 10\right]=170$, и аналогично

$k_{13} = 296$, $k_{14} = 356$, $k_{15} = -24$,
$k_{23} = 100$, $k_{24} = 120$, $k_{25} = -7$,
$k_{34} = 236$, $k_{35} = -17$, $k_{45} = -14$.

4) Вычислим дисперсии и по ним — средние квадратические отклонения

$D_{x_1}^* = \frac{1}{5}(1024+144+64+9+1089) = 466$ и $\sigma_{x_1}^* = +\sqrt{D_{x_1}^*} \approx 21{,}6$;

$D_{x_2}^* = 70$ и $\sigma_{x_2}^* \approx 8{,}37$; $D_{x_3}^* = 196$ и $\sigma_{x_3}^* = 14$;

$D_{x_4}^* = 296$ и $\sigma_{x_4}^* \approx 17{,}2$; $D_{x_5}^* = 5{,}2$ и $\sigma_{x_5}^* \approx 2{,}3$.

5) Найдем выборочные коэффициенты парной корреляции

$$r_{12} = \frac{k_{12}}{\sigma_{x_1}^* \cdot \sigma_{x_2}^*} = \frac{170}{21{,}6\cdot 8{,}37} \approx 0{,}94;$$

$r_{13} \approx 0{,}98$; $r_{14} \approx 0{,}96$; $r_{15} \approx -0{,}48$;
$r_{23} \approx 0{,}85$; $r_{24} \approx 0{,}83$; $r_{25} \approx -0{,}36$;
$r_{34} \approx 0{,}98$; $r_{35} \approx -0{,}52$; $r_{45} \approx -0{,}35$.

6) Запишем полученные результаты в виде корреляционной матрицы (**r**), учитывая, что $r_{ii} = 1$, а $r_{ij} = r_{ji}$:

$$(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}94 & 0{,}98 & 0{,}96 & -0{,}48 \\ & 1 & 0{,}85 & 0{,}83 & -0{,}36 \\ & & 1 & 0{,}98 & -0{,}52 \\ & & & 1 & -0{,}35 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Определите, какие показатели имеют наибольшую (наименьшую) прямую связь.

Для оценки тесноты **нелинейной** корреляционной связи вводят выборочные корреляционные отношения. **Выборочным корреляционным отношением** Y к X называют отношение межгруппового среднего квадратического отклонения к общему среднему квадратическому отклонению признака Y:

$$\eta_{yx} = \sigma_{\text{межгр}} / \sigma_{\text{общ}}, \text{ или в других обозначениях}$$

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x^*}}{\sigma_y^*}.$$

Корреляционное отношение удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le \eta \le 1,$$

и если $\eta = 0$, то признак Y с признаком X корреляционной зависимостью не связан, а если $\eta = 1$, то признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью.

Пример 175. Найти выборочное корреляционное отношение между себестоимостью зерна и урожайностью зерновых по данным 80 хозяйств области.

Урожайность зерновых, ц/га X	Себестоимость 1 ц зерна, руб. Y				Число хозяйств	Средняя себестоимость 1 ц зерна по группам y_j^*
	до 200 $y_1 = 180$	200—240 $y_2 = 220$	240—280 $y_3 = 260$	свыше 280 $y_4 = 300$		
до 15	—	—	—	2	2	300
15—17	—	1	2	3	6	273,3
17—19	—	—	7	1	8	265
19—21	—	8	8	—	16	240
21—23	2	20	12	—	34	231,8
23—25	1	8	1	—	10	220
свыше 25	3	1	—	—	4	190
Число хоз-в	6	38	30	6	80	$y^* = 238$

Решение. 1) Найдем выборочную среднюю себестоимости:

$$y^* = \frac{1}{80}(6 \cdot 180 + 38 \cdot 220 + 30 \cdot 260 + 6 \cdot 300) = 238.$$

2) Найдем общее среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_y^* = \sqrt{\frac{1}{80}[6\cdot(180-238)^2 + 38\cdot(220-238)^2 + 30\cdot(260-238)^2 + 6\cdot(300-238)^2]} \approx 29{,}6.$$

3) Найдем межгрупповое среднее квадратическое отклонение:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x^*}}{\sigma_y^*} = \frac{20{,}86}{29{,}6} \approx 0{,}7.$$

4) Вычислим теперь искомое корреляционное отношение:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{y_x^*}}{\sigma_y^*} = \frac{20{,}86}{29{,}6} \approx 0{,}7.$$

Полученное значение $\eta = 0{,}7$ характеризует тесноту связи выше средней.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой граф называется ковариационным?
2. Как можно вычислять выборочную ковариацию?
3. О чем судят по выборочному коэффициенту корреляции?
4. Что такое корреляционная зависимость?
5. Простейший вид корреляционной зависимости.
6. Какой метод нахождения линии регрессии вы знаете?
7. Расскажите о методике вычисления выборочного коэффициента корреляции.
8. Назовите свойства выборочного корреляционного отношения.

Задачи

341. Итоги аттестации педагогических работников Ярославской области на квалификационные категории за 1998—2002 гг. представлены в таблице:

Годы	1998	1999	2000	2001	2002
ВК	433	494	638	634	1287
I кат.	1371	1512	2166	2170	3004

Найдите выборочный коэффициент корреляции между первой и высшей категориями.

342. О ходе уборки зерновых в 20 хозяйствах области, отобранных случайным образом, представлены следующие данные (X — скошено тыс. га, Y — обмолочено тыс. га):

X	4	3,5	3,5	3,5	3,5	3	3,5	3,5	4	4
Y	3	2,5	2	2,5	2	2,5	3	2	3	2,5
X	3	3	3	4	4	3,5	3	4	3	4
Y	2	2,5	2	2,5	3	3	2,5	3	2	2,5

Сгруппируйте данные в корреляционную таблицу. Постройте ковариационный граф и найдите ковариацию.

343. Найдите уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным $n = 20$ наблюдений:

X \ Y	2	4
1	8	2
3	4	6

344. Известна реальная начисленная среднемесячная заработная плата по кварталам 2002 г., в % к предыдущему периоду:

Квартал	1	2	3	4
%	86	97	105	102

Найдите уравнение регрессии $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

345. Средняя стоимость (в тыс. руб.) 1 м^2 жилых домов по г. Ярославлю за последние шесть лет составила:

Годы	1	2	3	4	5	6
Стоимость	5,6	6	6,5	11,7	12,4	16

Выразите эти данные по прямой $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

346. Найдите прямую регрессии цены на золото на мировом рынке за последние десять лет по данным World Gold Conneil.

Год	1993	1995	1997	1999	2001	2003
Цена на золото ($ за 1 унцию)	360	395	315	290	260	305

347*. Найдите степень тесноты множественной статистической связи между стоимостью квартир (X в тыс. руб.), площадью (Y в м^2) и их удаленностью от областного центра (Z в км) по приведенным результатам исследования.

X	560	700	290	690	250	600	690
Y	44	69	27	78	30	48	54
Z	74	47	92	48	93	72	71

348*. Количество дошкольных учреждений системы образования Ярославской области за последние пять лет изменялось следующим образом:

Годы (X)	1	2	3	4	5
Кол-во (Y) дошк. учрежд.	480	520	520	480	490

Полагая, что X и Y связаны зависимостью $y = ax^2 + bx + c$, найдите коэффициенты a, b и c методом наименьших квадратов.

349**. Найдите выборочные уравнения прямых линий регрессии Y на X, X на Y по данным, приведенным в корреляционной таблице:

X \ Y	10	15	20	25	30	n_x
2	2	3	—	—	—	5
12	—	4	5	—	—	9
22	—	—	16	2	4	22
32	—	—	3	6	2	11
42	—	—	—	1	2	3
n_y	2	7	24	9	8	$n = 50$

350**. Найдите выборочное уравнение регрессии $y_x^* = Ax^2 + Bx + C$ и выборочное корреляционное отношение по данным, приведенным в корреляционной таблице:

Y \ X	0	4	5	n_x
1	50	5	1	56
35	—	44	—	44
50	—	5	45	50
n_y	50	54	46	$n = 150$

§ 5. Ранговая корреляция

Пусть объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками и выборка объема n содержит независимые объекты, которые будем располагать (ранжировать) в порядке ухудшения (или улучшения) качества. Для оценки **степени связи признаков** вводят коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Рассматривая ранги $x_1, x_2, ..., x_n$ как возможные значения случайной величины X, а $y_1, y_2, ..., y_n$ — как возможные значения с.в. Y, можно вычислить выборочный коэффициент корреляции.

Пример 176. Получить выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена

$$r_s^* = 1 - \frac{6\sum d_j^2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}, \text{ где } d_i = x_i - y_i.$$

Решение. Примем в качестве условных вариант отклонения $u_i = x_i - x^*$, $v_i = y_i - y^*$ и вычислим выборочный коэффициент корреляции

$$r^* = \frac{\sum n_{uv}uv - nu^*v^*}{n\cdot\sigma^*(u)\cdot\sigma^*(v)}.$$

$$u^* = \frac{1}{n}\sum u_i = \frac{1}{n}\sum(x_i - x^*) = \frac{1}{n}\sum x_i - \frac{1}{n}\cdot n\cdot x^* = x^* - x^* = 0 = v^*.$$

Тогда $r^* = \dfrac{\sum u_i v_i}{n\cdot\sigma^*(u)\cdot\sigma^*(v)}$ и надо найти $\sum u_i\cdot v_i$ и $\sigma^*(u), \sigma^*(v)$.

Найдем $\sigma^*(u)$ и $\sigma^*(v)$.

Поскольку $x^* = \dfrac{1}{n}(1+2+...+n) = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} = y^*$, то $y^* - x^* = 0$, и

$$\sum u_i^2 = \sum(x_i - x^*)^2 = \sum x_i^2 - 2x^*\sum x_i + \sum(x^*)^2 = (1^2 + 2^2 + ... + n^2) -$$

$$-2\cdot\frac{n+1}{2}(1+2+...+n) + n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1)\frac{n(n+1)}{2} +$$

$$+n\frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{12}\left[2(2n+1) - 6(n+1) + 3(n+1)\right] = \frac{n(n+1)}{12}(n-1) =$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{12} = \sum v_i^2$$

(использовали известные формулы конечных сумм).

Тогда $D^*[u]=\frac{1}{n}\sum(u_i-u^*)^2=\frac{1}{n}\sum u_i^2=\frac{n^2-1}{12}=D^*[v]$ и

$$\sigma^*(u)=\sigma^*(v)=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}\ .$$

Выразим теперь $\sum u_i\cdot v_i$ через n и $d_i=x_i-y_i=(x_i-y_i)+(y^*-x^*)=$ $=(x_i-x^*)-(y_i-y^*)=u_i-v_i$.

$$\sum d_i^2=\sum(u_i-v_i)^2=\sum u_i^2-2\sum u_iv_i+\sum v_i^2=\frac{n(n^2-1)}{12}\cdot 2-2\sum u_iv_i\ .$$

Отсюда $\sum u_iv_i=\frac{n(n^2-1)}{12}-\frac{1}{2}\sum d_i^2$ и

$$r_s^*=\frac{\sum u_iv_i}{n\cdot\sigma^*(u)\cdot\sigma^*(v)}=\frac{\frac{n(n^2-1)}{12}-\frac{1}{2}\sum d_i^2}{n\cdot\frac{n^2-1}{12}}=1-\frac{6\sum d_i^2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}.$$

Покажем эффективность использования полученного коэффициента ранговой корреляции **Спирмена** на следующем примере.

Пример 177. Знания 10 студентов проверены по двум тестам, А и В. Оценки по стобалльной системе оказались следующими:

Тест А	95	90	87	84	75	70	61	60	58	55
Тест В	92	94	83	79	58	61	47	72	62	68

Найдите выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена между оценками по двум тестам.

Решение. Запишем ранги студентов по тестам и квадраты их разностей:

Ранг по тесту А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг по тесту В	2	1	3	4	9	8	10	5	7	6
d_i^2	1	1	0	0	16	4	9	9	4	16

Тогда $\sum d_i^2 = 1+1+16+4+9+9+4+16 = 60$ и

$$r_s^* = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{6\cdot 60}{9\cdot 10\cdot 11} = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}.$$

В психолого-педагогических исследованиях достаточно часто используется ранговая корреляция Спирмена, поэтому приведем здесь алгоритм ее применения и пример из диссертационного исследования по психологии.

Алгоритм применения ранговой корреляции Спирмена для оценки степени связи признаков

1. Проранжировать значения первой переменной *A*, начисляя ранг 1 наименьшему (или наибольшему) значению, и записать ранги в первый столбец по порядку номеров испытуемых или по возрастанию ранга, при равных переменных им присваивается одинаковый среднеарифметический ранг.

2. Проранжировать значения второй переменной *B* по тем же правилам и занести соответствующие ранги во второй столбец.

3. Подсчитать разности d_j между рангами *A* и *B* по каждой строке и занести их в третий столбец.

4. Квадраты d_j^2 занести в четвертый столбец и подсчитать их сумму Σd_j^2.

5. При наличии одинаковых рангов рассчитать поправки:

$$T_a = \frac{\sum(a^3 - a)}{12},\ T_b = \frac{\sum(b^3 - b)}{12},$$

где *a, b* — объем каждой группы одинаковых рангов в ранговых рядах *A* и *B*.

6. Рассчитать коэффициент ранговой корреляции Спирмена r_s^* по формуле:

а) $r_s^* = 1 - \dfrac{6\sum d_i^2}{n\cdot(n^2-1)}$, при отсутствии одинаковых рангов;

б) при наличии одинаковых рангов

$$r_s^* = 1 - 6\frac{\sum d_i^2 + T_a + T_b}{n\cdot(n^2-1)},$$

где *n* — количество испытуемых, участвовавших в ранжировании.

7. Определить критические значения $r_{s\ \text{кр}} = t_{\text{кр}}(\alpha, n-2) \cdot \sqrt{\dfrac{1-(r_s^*)^2}{n-2}}$.

Если $r_s^* \geq r_{s\ \text{кр}}$, то корреляция достоверно отличается от 0 (этот пункт будет рассмотрен в следующем параграфе).

Пример 178. Найти коэффициент ранговой корреляции Спирмена по связи эмоционального состояния и зрительной памяти после иппотерапии по результатам исследования.

Количество выборов, соответствующее положительному эмоциональному состоянию		Зрительная память		d	d^2
баллы	ранг	баллы	ранг		
3	19,5	6	22	–2,5	6,25
3	19,5	5	14	5,5	30,25
2	10,5	5	14	–3,5	12,25
1	3,5	3	3	0,5	0,25
3	19,5	5	14	5,5	30,25
2	10,5	5	14	–3,5	12,25
1	3,5	4	7	–3,5	12,25
1	3,5	3	3	0,5	0,25
3	19,5	6	22	–2,5	6,25
2	10,5	3	3	7,5	56,25
3	19,5	5	14	5,5	30,25
2	10,5	5	14	–3,5	12,25
3	19,5	6	22	–2,5	6,25
2	10,5	6	22	11,5	132,25
3	19,5	5	14	5,5	30,25
3	19,5	6	22	–2,5	6,25
2	10,5	5	14	–3,5	12,25
3	19,5	4	7	12,5	156,25
2	10,5	5	14	–3,5	12,25
1	3,5	4	7	–3,5	12,25
1	3,5	3	3	0,5	0,25
1	3,5	3	3	0,5	0,25
2	10,5	5	14	–3,5	12,25
3	19,5	5	14	5,5	30,25
				Σ =	620
				r =	**0,611**

5. $T_a = \frac{6^3-6}{12} + \frac{8^3-8}{12} + \frac{10^3-10}{12} = \frac{35}{2} + 42 + \frac{165}{2} = 142$,

$$T_b = \frac{5^3-5}{12} + \frac{3^3-3}{12} + \frac{11^3-11}{12} + \frac{5^3-5}{12} = 10+2+110+10 = 132.$$

6. $r_s^* = 1 - 6 \cdot \frac{620+142+132}{24(24^2-1)} = 1 - 0{,}389 = 0{,}611$.

7. Найдем критическую точку:

$$r_{s\,\text{кр}} = t_{\text{кр}}(0{,}05;22) \cdot \sqrt{\frac{1-0{,}36}{22}} \approx 2{,}07 \cdot 0{,}17 \approx 0{,}35$$

$r_{s\,\text{эмп}} = 0{,}611 > 0{,}35 = r_{s\,\text{кр}}$ и H_0 отвергается.

Связь между двумя качественными признаками можно оценить, используя выборочный коэффициент ранговой корреляции **Кендалла**:

$r_k^* = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1$, где $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}$ и R_i — число рангов $y_{i+1}, \ldots, y_n$, больших y_i.

Пример 179. Определите степень связи итогов чемпионата России по футболу в премьер-лиге и результаты первого круга 2002 г.

Команда	Локо	ЦСКА	Спартак	Торпедо	Кр. Сов.	Сатурн	Шинник	Динамо	Ротор	Зенит
Итог 2002	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I круг	1	2	3	10	6	4	8	7	5	9

Решение. Определим степень связи по выборочному коэффициенту ранговой корреляции Кендалла.

$R_1 = 9$, $R_2 = 8$, $R_3 = 7$, $R_4 = 0$, $R_5 = 3$, $R_6 = 4$, $R_7 = 1$, $R_8 = 1$, $R_9 = 1$, тогда $R = \Sigma R_i = 34$, $n = 10$, а

$$r_k^* = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 34}{10 \cdot 9} - 1 = \frac{23}{45} \approx 0{,}51,$$

и между итогом чемпионата и результатом первого круга существует прямая средней тесноты связь.

Если статистическая информация о многомерном признаке представлена в порядковой шкале, то измерение парных связей осуществляется через коэффициенты ранговой корреляции Кендалла или Спирмена.

Пример 180. Три арбитра оценили мастерство 10 фигуристов, в итоге были получены три последовательности рангов:

Ранг арбитра А	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг арбитра В	3	10	6	2	8	5	7	9	1	4
Ранг арбитра С	6	3	1	2	9	4	5	7	10	8

Найдите матрицу ранговой корреляции Спирмена и пару арбитров, оценки которых наиболее согласуются.

Решение. Найдем r_{12}, вычислив сумму квадратов разностей $\sum\limits_{1,2} d_i^2$ рангов арбитров А и В.

$$\sum_{1,2} d_i^2 = 4+64+9+4+9+1+0+1+64+36=192$$

и $r_{12} = 1-\dfrac{6\cdot 192}{9\cdot 10\cdot 11} \approx -0{,}16$ аналогично находим, что $r_{13} = 1-\dfrac{6\cdot 64}{9\cdot 10\cdot 11} \approx 0{,}61$ и $r_{23} = 1-\dfrac{1-6\cdot 190}{9\cdot 10\cdot 11} \approx 0{,}15$, а искомая матрица ранговой корреляции Спирмена выглядит следующим образом

$$(\mathbf{r_s}) = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}16 & 0{,}61 \\ & 1 & 0{,}15 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку коэффициент $r_{13} = 0{,}61$ является максимальным, то оценки арбитров А и С наиболее согласуются.

Вопросы для самоконтроля

1. Для чего служат выборочные коэффициенты ранговой корреляции?

2. Как получается выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена?

3. Каким образом можно вычислить $1^2 + 2^2 + ... + n^2$?

4. В чем отличие коэффициента Кендалла от коэффициента Спирмена?

5. Чему равны выборочные коэффициенты ранговой корреляции «полной прямой зависимости», «противоположной зависимости» признаков?

6. В каком случае связь между качественными признаками небольшая?

7. Что характеризует корреляционная матрица?

8. Свойства корреляционной матрицы.

Задачи

351. Специалисты двух заводов проранжировали 8 факторов, влияющих на ход технологического процесса. В итоге были получены две последовательности рангов:

1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 4 3 8 7 5 6

Определите, согласуются ли мнения специалистов различных заводов, используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

352. Получены рейтинги строительства жилья в регионах Центрального федерального округа в 2001 и 2002 гг.:

Область	Московская	Тверская	Орловская	Тульская	Рязанская	Владимирская	Калужская	Ярославская	Костромская	Ивановская
2001 г.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2002 г.	1	3	2	9	7	4	8	6	5	10

Найдите коэффициент ранговой корреляции Спирмена для строительства жилья в 2001 и 2002 гг. по 10 регионам РФ.

353. Установить, как коррелируют результаты чемпионата России по хоккею в суперлиге по итогам двух кругов чемпионата 2001 и 2002 гг.:

Команда	Ак Барс	Авангард	Мет. М.	Лада	Сев. Ч.	Неф.	Локо.	Мечел	Амур	Мет. Нк.	ЦСКА	Динамо
Место 2001 г.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Место 2002 г.	4	3	7	5	2	11	1	12	9	8	10	6

354. По данным статистического сборника «Социальная сфера регионов Центральной России», денежные доходы и потребительские расходы в расчете на душу населения в ноябре 2002 гг. составили:

Области	Брянская	Владимирская	Ивановская	Калужская	Костромская	Московская	Орловская	Рязанская	Тверская	Ярославская
Доходы (руб.)	2542	2256	1793	2633	2440	3631	2614	2726	2416	3630
Расходы (руб.)	1666	1259	1241	1693	1459	2788	1868	1673	1620	1902

Проранжируйте полученные данные и найдите коэффициент ранговой корреляции Кенделла для доходов и расходов на душу населения в областях Центрального федерального округа.

355. За пять лет ввод общей площади (в тыс. кв. м) жилых домов в области и в городе Ярославле характеризуются следующими данными:

Год	1997	1998	1999	2000	2001
Яр. область	222,6	231,7	221	130,6	162,3
г. Ярославль	118,6	119,7	113,3	66,5	89

Что можно сказать о степени зависимости ввода жилья в Ярославской области и в г. Ярославле?

356. Двенадцать цветных полос расположены в порядке убывания окраски от темной к светлой, и каждой полосе присвоен ранг — порядковый номер.

При проверке способности различать оттенки цветов испытуемый расположил полосы в следующем порядке:

y_i: 6, 3, 4, 2, 1, 10, 7, 8, 9, 5, 11, 12.

Найти коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла между «правильными» рангами x_i и рангами y_i, которые присвоены полосам испытуемым.

357*. Четыре преподавателя расположили 10 студентов по результатам текущей успеваемости по алгебре, аналитической геометрии, общей физике и истории отечества:

Ранг успев. по алгебре	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг успев. по анал. геом.	1	2	4	3	6	7	5	10	8	9
Ранг успев. по физике	3	5	1	4	2	9	7	6	10	8
Ранг успев. по истории	8	6	10	1	9	2	4	3	5	7

Найдите матрицу ранговой корреляции Кенделла и два предмета, оценки по которым наиболее согласуются.

358*. Докажите, что если между качественными признаками А и В имеется «полная прямая зависимость» («противоположная зависимость»), то выборочные коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла равны единице (минус единице).

359**. Найдите корреляционную матрицу для характеристики директорского и учительского корпуса Ярославской области по стажу педагогической работы.

	Всего	До 2 лет		2—5 лет		5—10 лет		10—20 лет		Свыше 20 лет		Пенсионеры	
		Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%
Дир. СШ	354	6	1,7	7	2,0	21	5,9	59	16,7	198	55,9	63	18,8
Зам. дир. СШ	750	29	3,9	27	3,6	67	8,9	241	32,1	323	43,1	63	8,4

Окончание табл.

	Всего	До 2 лет		2—5 лет		5—10 лет		10—20 лет		свыше 20 лет		пенсионеры	
		Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%
Учит. гуманит. и ест.-мат циклов	7109	462	6,5	411	5,8	843	11,9	2039	28,7	2588	36,4	766	10,7
Учит. др. спец.	2125	135	6,4	119	5,6	299	14,1	684	32,1	747	35,2	141	6,6

360**. Найдите корреляционные матрицы по производству продуктов животноводства (в тыс. т и в % к 2001 г.) в хозяйствах 10 регионов РФ в 2002 г.

Области	Скот и птица			Молоко			Яйца		
	тыс. т	в % к 2001 г.	рост	тыс. т	в % к 2001 г.	рост	тыс. т	в % к 2001 г.	рост
Орловская	56,7	108,6		279,6	98,9		202	92	
Московская	103,4	106,4		778,5	97,8		1238	88	
Ярославская	32,5	105,5		291	99,6		384	105,8	
Владимирская	42,7	105,3		283	100,3		333	107,3	
Калужская	40,5	103,3		238	93,8		171	124	
Тульская	51,0	102,8		282	99,8		401	100,6	
Рязанская	41,7	100,3		380	102,5		332	98,3	
Тверская	45,9	99,7		373	99,4		385	102	
Ивановская	27,6	99,6		194	97,7		204	103,7	
Костромская	30,4	97,5		195	101		365	112,1	

Какая из полученных корреляционных матриц лучше отражает связь при производстве продуктов животноводства в регионах РФ?

§ 6. Статистические гипотезы

На разных этапах статистического исследования возникает необходимость в формулировании и экспериментальной проверке некоторых предположительных утверждений (гипотез).

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Выдвигается основная (нулевая) гипотеза H_0 и проверяется, не противоречит ли она имеющимся эмпирическим данным. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

В результате статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. **Ошибка первого рода** состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза; вероятность совершить такую ошибку обозначают α и называют ее **уровнем значимости**. **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, вероятность которой обозначают β, а мощностью критерия является вероятность $1-\beta$.

Процедура обоснованного сопоставления высказанной гипотезы с имеющейся выборкой осуществляется с помощью того или иного статистического критерия и называется статистической проверкой гипотез. Под **критической областью** понимают совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу H_0 отвергают. Критическую область при заданном уровне значимости следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Статистические критерии проверки гипотез разнообразны, но у них единая логическая схема построения, которую представим на рис. 103.

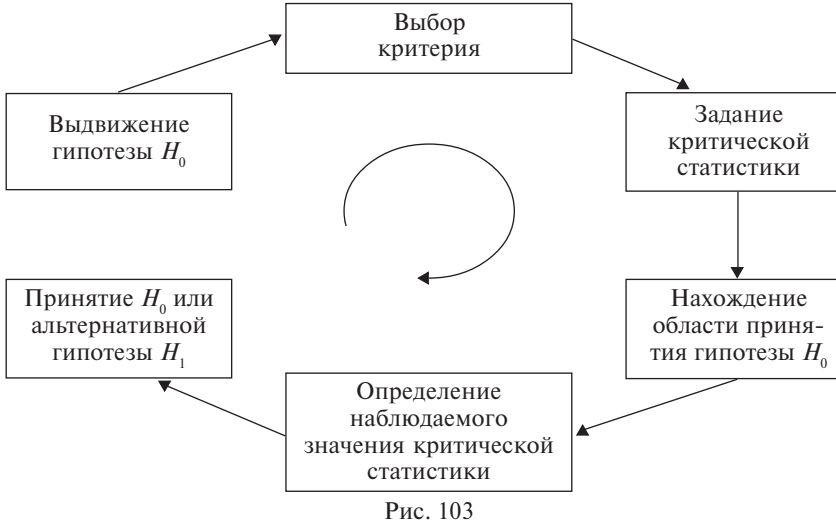


Рис. 103

1. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза, состоящая в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 = D[X] = D[Y].$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину отношения большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2}.$$

Величина F имеет распределение Фишера—Снедекора, которое зависит только от чисел степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$.

Пример 181. Исследование длительности оборотных средств двух групп предприятий (по 13 предприятий в каждой) дало следующие результаты:

$x^* = 23$ дня, $y^* = 26$ дней, $\sigma_x^2 = 3$ дня, $\sigma_y^2 = 6$ дней.

Можно ли считать, что отклонения в длительности оборота оборотных средств групп предприятий одинаковы для уровня значимости 0,1?

Решение. В этой задаче надо проверить нулевую гипотезу H_0: $D[X] = D[Y]$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе H_1: $D[X] \neq D[Y]$. Используем критерий Фишера—Снедекора со степенями свободы $k_1 = k_2 = 13 - 1$ и вычислим наблюдаемое значение критерия (отношение большей дисперсии к меньшей)

$$F_{эмп} = \frac{S_б^2}{S_м^2} = \frac{\frac{n}{n-1}\sigma_y^2}{\frac{n}{n-1}\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{6}{3} = 2.$$

По таблице приложения 6 по уровню значимости для двусторонней критической области $\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05$ и числам степеней свободы $k_1 = k_2 = 12$ находим критическую точку

$$F_{кр}(0,05;\ 12;\ 12) = 2,69.$$

Так как $F_{эмп} = 2 < 2,69 = F_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве отклонений в длительности оборота оборотных средств двух групп предприятий.

Пример 182. Школьникам давались обычные арифметические задачи, а потом одной случайно выбранной половине учащихся сообщалось, что они не выдержали испытания, а остальным — обратное. Затем у каждого из них спрашивали, сколько секунд ему потребуется для решения новой задачи. Экспериментатор, вычисляя разность между определенным временем решения задачи, которое называл школьник, и результатами ранее выполненного задания, получил следующие данные:

Группа 1 (учащиеся, которым сообщалось о положительном результате)	$n_1 = 13,\ S_1^2 = 4{,}06$
Группа 2 (учащиеся, которым сообщалось о неудаче)	$n_2 = 12,\ S_2^2 = 20{,}25$

Проверьте на уровне значимости 0,01 гипотезу о том, что дисперсия совокупности детских оценок, имеющих отношение к оценке их возможностей, не зависит от того, что сообщалось детям о плохих результатах испытаний или об удачном решении первой задачи.

Решение. Применим критерий Фишера—Снедекора для нулевой гипотезы H_0: $D[X] = D[Y]$ и конкурирующей H_1: $D[Y] > D[X]$. Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$F_{\text{эмп}} = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{20{,}25}{4{,}06} \approx 4{,}99.$$

Критическую точку находим в приложении для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ и числам степеней свободы $k_1 = 12 - 1$ и $k_2 = 13 - 1$:

$F_{\text{кр}}$ (0,01; 11; 12) = 4,22.

Получили, что $F_{\text{эмп}} = 4{,}99 > 4{,}22 = F_{\text{кр}}$ и нулевая гипотеза на уровне значимости 0,01 отвергается.

2. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями. Проверяется нулевая гипотеза о равенстве генеральных средних рассматриваемых совокупностей с заданными или вычисляемыми дисперсиями. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$Z = \frac{x^* - y^*}{\sqrt{\dfrac{D[X]}{n} + \dfrac{D[Y]}{m}}}.$$

Пример 183. Производительность двух моторных заводов, выпускающих дизельные двигатели, характеризуется следующими данными:

1-й завод	72	84	69	74	82	67	75	86	68	61
2-й завод	55	65	73	66	58	71	77	68	68	59

Можно ли считать одинаковыми производительности дизельных двигателей на обоих заводах при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$?

Решение. Найдем выборочные числовые характеристики данных независимых выборок:

$$x^* = 74,\ D_x^* = 59{,}2,\ y^* = 66,\ D_y^* = 43{,}8.$$

Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$Z = \frac{x^* - y^*}{\sqrt{\dfrac{D_x^*}{n} + \dfrac{D_y^*}{m}}} = \frac{74-66}{\sqrt{5{,}92+4{,}38}} \approx 2{,}5.$$

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид $M[X] \neq M[Y]$, поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем критическую точку:

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475,$$

по таблице функции Лапласа (прил. 2) находим $Z_{\text{кр}} \approx 2$.

Так как $|Z_{\text{эмп}}| = 2{,}5 > 2 = Z_{\text{кр}}$, то нулевая гипотеза об одинаковости производительности двух заводов отклоняется.

3. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности. По выборочной средней при заданном уровне значимости проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0$ о равенстве генеральной средней a гипотетическому значению a_0. В качестве проверки нулевой гипотезы примем случайную величину

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma(\bar{X})} = \frac{\left(\bar{X} - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma},$$

которая распределена нормально.

Пример 184. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}2$ извлечена

выборка объема $n = 25$ и по ней найдена выборочная средняя $x^* = 21{,}04$. Проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 21$, при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 21$ и уровне значимости 0,1.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{эмп}} = \frac{\left(x^* - a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(21{,}04 - 21)\sqrt{25}}{0{,}2} = 1.$$

Найдем критическую точку двусторонней критической области:

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}1}{2} = 0{,}45$$

и по таблице функции Лапласа находим $U_{\text{кр}} \approx 1{,}65$.

Поскольку $U_{\text{кр}} = 1{,}65 > 1 = U_{\text{эмп}}$, то нулевая гипотеза принимается.

4. Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события. При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза, состоящая в том, что неизвестная вероятность p появления события равна гипотетической вероятности p_0 серии повторных независимых испытаний.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимаем случайную величину

$$U = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}.$$

Пример 185. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота 0,07. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу H_0: $p = p_0 = 0{,}1$ при конкурирующей гипотезе H_1: $p \neq 0{,}1$.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

$$U_{\text{эмп}} = \frac{\left(\frac{m}{n} - p_0\right)\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 \cdot q_0}} = \frac{(0{,}07 - 0{,}1)\cdot\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}07\cdot 0{,}93}} \approx -1{,}18.$$

Учитывая, что критическая область двусторонняя, находим $U_{\text{кр}}$ из равенства

$$\Phi(U_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-0{,}05}{2} = 0{,}475.$$

По таблице функции Лапласа (прил. 2) находим $U_{кр} \approx 2$.

Поскольку $|U_{эмп}| = 1{,}18 < 2 = U_{кр}$, то нет оснований отвергать гипотезу о незначительном отличии наблюдаемой относительной частоты от гипотетической вероятности.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные типы статистических критериев проверки гипотез.
2. Что означает уровень значимости критерия?
3. Что общего в методике построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез?
4. Поясните смысл понятий «ошибка первого рода», «ошибка второго рода», «мощность критерия».
5. В чем отличие одностороннего и двухстороннего критериев, простой и сложной гипотез?
6. Как зависят области принятия основной гипотезы от уровня значимости?
7. Как определяются критические границы для одностороннего и двухстороннего критериев при заданном уровне значимости?
8. Приведите примеры практических задач по проверке гипотез о равенстве математических ожиданий, дисперсий.

Задачи

361. По двум независимым выборкам, объемы которых $n_1 = 10$ и $n_2 = 11$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные средние квадратические отклонения $S_x = 0{,}54$ и $S_y = 0{,}32$. При уровне значимости $a = 0{,}01$ проверьте нулевую гипотезу H_0: $D[X] = D[Y]$ о равенстве генеральных дисперсий, при конкурирующей гипотезе H_1: $D[X] > D[Y]$.

362. По двум независимым выборкам, объем которых $n_1 = 9$ и $n_2 = 16$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные дисперсии $D_x^* = 20{,}2$ и $D_y^* = 14$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте нулевую гипотезу H_0: $D[X] = D[Y]$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D[X] \neq D[Y]$.

363. Проведено исследование розничного товарооборота продовольственных магазинов в двух районах Ярославской области

(по 20 магазинов в каждом). Априори известны средние значения розничного товарооборота — 78,8 и 78,56 тыс. руб. Полученные в результате оценки средних квадратичных отклонений в первом и втором районах соответственно равны 7,2 и 7,8 тыс. руб. Можно ли считать, что разброс розничного товарооборота магазинов в районах неодинаков при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$? Можно ли сделать вывод о разной покупательной способности населения районов?

364. По выборке объема $n_1 = 30$ найден средний вес $x^* = 130$ г изделий, изготовленных на первом станке; по выборке объема $n_2 = 40$ найден средний вес $y^* = 125$ г изделий, изготовленных на втором станке. Генеральные дисперсии известны: $D[X] = 60$ г^2, $D[Y] = 80$ г^2. Проверьте нулевую гипотезу H_0: $M[X] = M[Y]$ при конкурирующей гипотезе $M[X] \neq M[Y]$ и уровне значимости 0,05. Предполагаем, что случайные величины X и Y распределены нормально и выборки независимы.

365. Исследование пропусков по болезни детей в двух группах детского сада в течение года (по 16 детей в каждой группе) дало следующие результаты: $x^* = 32$ дня, $y^* = 41$ день, $S_x^2 = 16$ дней^2, $S_y^2 = 17$ дней^2.

Можно ли считать, что среднее количество дней пропусков по болезни в обеих группах одинаково при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$?

366. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ известна выборка объема $n = 36$, и по ней найдена выборочная средняя $x^* = 107{,}5$. Проверьте нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 110$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 110$ и уровне значимости 0,01.

367*. Из двух партий изделий, изготовленных на двух одинаково настроенных станках, известны малые выборки, объемы которых $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$. Получены следующие результаты:

Контролируемый размер изделий первого станка	3,4	3,5	3,8	3,9
Число изделий	2	4	5	1

Контролируемый размер изделий второго станка	3,2	3,4	3,7
Число изделий	4	3	8

Проверьте нулевую гипотезу о равенстве средних размеров изделий при уровне значимости 0,05.

368*. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота $m/n = 0{,}13$. При уровне значимости 0,05 проверьте нулевую гипотезу H_0: $p = p_0 = 0{,}2$ при конкурирующей гипотезе: а) H_1: $p \neq 0{,}2$; б) H_1: $p < p_0$.

369**. В банке в течение двух дней проводилось исследование времени обслуживания клиентов, данные которого представлены в таблице:

Номер интервала	Время обслуживания (мин)	Число клиентов в 1-й день	Число клиентов во 2-й день
1	6—8	2	3
2	8—10	3	4
3	10—12	8	9
4	12—14	12	13
5	14—16	15	17
6	16—18	10	8
7	18—20	3	3

Можно ли считать одинаковыми отклонения от среднего времени обслуживания клиентов банка в 1-й и 2-й дни при $\alpha = 0{,}05$?

370**. За смену отказали 20 элементов первого устройства, состоящего из 800 элементов, и 30 элементов второго, состоящего из 1000 элементов. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверьте нулевую гипотезу $H_0 = p_1 = p_2 = p$ о равенстве вероятностей отказа элементов обоих устройств при конкурирующей гипотезе H_1: $p_1 \neq p_2$.

§ 7. Критерии Пирсона и Стьюдента

Рассмотрим нормальные независимые случайные величины X_i ($i = 1, 2, ..., n$), причем $M[X_i] = 0$, а $\sigma(X_i) = 1$. Тогда сумма квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону χ^2 с $k = n - 1$ степенями свободы. С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.

1. Проверка гипотезы о расхождении между эмпирическими (экспериментальными) частотами n_i и теоретическими (контрольными) частотами n_i'.

Алгоритм применения критерия χ^2 Пирсона для сопоставления эмпирического и теоретического (другого эмпирического) распределений одного признака

1. Занести в таблицу наименование разрядов и эмпирические частоты (данные по экспериментальной группе).

2. Во 2-й столбец записать теоретические частоты (данные по контрольной группе).

3. Проверить равенство сумм частот $\sum n_i = \sum n_i'$ (или их уравнять).

4. Подсчитать разности между эмпирическими и теоретическими частотами (экспериментальной и контрольной группами) по каждой строке и записать их в 3-й столбец.

5. Возвести в квадрат полученные разности и записать их в 4-й столбец.

6. Разделить полученные квадраты разностей на теоретические частоты (данные по контрольной группе) и записать в 5-й столбец.

7. Просуммировать значения 5-го столбца, обозначив ее $\chi^2_{\text{эмп}}$.

8. Определить по таблице критическое значение для соответствующего уровня значимости α и данного числа степеней свободы $r = m - 1$ (m — количество разрядов признака, т. е. строк в таблице).

Если $\chi^2_{\text{эмп}} \geq \chi^2_{\text{кр}}$, то расхождения между распределениями существенны на данном уровне значимости.

Пример 186. В банке в течение двух дней проводилось исследование времени обслуживания клиентов, результаты которого следующие:

Номер интервала	Время обслуживания (мин)	Число клиентов в 1-й день	Число клиентов во 2-й день
1	4—6	2	3
2	6—8	3	4
3	8—10	7	9
4	10—12	12	14
5	12—14	15	17
6	14—16	8	9
7	16—18	3	4

Можно ли считать одинаковыми среднее время обслуживания клиентов банка в первый и второй дни при $\alpha = 0{,}05$?

Решение. Вычислим

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \sum_{i=1}^{7} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(3-4)^2}{4} + \frac{(7-9)^2}{9} +$$

$$+ \frac{(12-14)^2}{14} + \frac{(15-17)^2}{17} + \frac{(8-9)^2}{9} + \frac{(3-4)^2}{4} \approx 1{,}91.$$

По таблице (приложение 5) критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = 7 - 1$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 6) = 12{,}6$.

Поскольку $\chi^2_{\text{эмп}} = 1{,}91 < 12{,}6 = \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу об одинаковом времени обслуживания клиентов банка в разные дни.

2. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Для того, чтобы свести задачу к указанному в предыдущем пункте алгоритму, вычислим выборочные среднюю x^* и среднее квадратическое отклонение σ^*, а затем — теоретические частоты $n_i' = \frac{nh}{\sigma^*} \cdot \varphi(u_i)$, где n — объем выборки, h — шаг (разность между двумя соседними вариантами), $u_i = \frac{x_i - x^*}{\sigma^*}$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ (приложение 1).

Пример 187. В результате выборочного обследования стажа работы профессорско-преподавательского состава получены следующие данные:

Стаж работы (лет)	0—4	4—8	8—12	12—16	16—20	20—24	24—28	28—32
Число преподавателей	3	8	25	40	46	31	6	2

Выясните, является ли распределение стажа работы нормальным при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Решение. Перейдем от заданного интервального распределения к распределению равноотстоящих вариант и вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение.

$n = 161$,

$$x^* = \frac{1}{161}(2\cdot 3+6\cdot 8+10\cdot 25+14\cdot 40+18\cdot 46+22\cdot 31+26\cdot 6+30\cdot 2)\approx 16,$$

$$\sigma^* = \sqrt{D_x^*}\approx 5{,}43, \text{ а } n_i' = \frac{n\cdot h}{\sigma^*}\varphi(u_i) = 118{,}6\cdot\varphi(u_i).$$

Составим расчетную таблицу, заполняя ее последовательно по столбцам слева направо:

i	x_i	$u_i = \frac{x_i - x^*}{\sigma^*}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = 75{,}8\varphi(u_i)$	n_i	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	2	–2,58	0,014	1,66	3	1,8	1,08
2	6	–1,84	0,073	8,66	8	0,44	0,05
3	10	–1,1	0,218	25,85	25	0,72	0,033
4	14	–0,37	0,373	44,24	40	17,98	0,41
5	18	0,37	0,373	44,24	46	3,1	0,07
6	22	1,1	0,218	25,85	31	26,52	1,03
7	26	1,84	0,073	8,66	6	7,08	0,82
8	30	2,58	0,014	1,66	2	0,12	0,07
Σ					161		$\chi^2_{\text{эмп}} = 3{,}56$

По таблице критических точек распределения (приложение 5) по уровню значимости $\alpha = 0{,}01$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 8 - 3 = 5$ находим критическую точку правосторонней критической области

$$\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 5) = 15{,}1.$$

Так как $\chi^2_{\text{эмп}} = 3{,}56 < 15{,}1 = \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности принимаем.

Пусть Z — нормальная случайная величина, причем $M[Z] = 0$, $\sigma(Z) = 1$, а V — независимая от Z величина, которая распределена по закону χ^2 с k степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{k}}}$$

имеет распределение, которое называют t-распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета), с k степенями свободы. С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

Алгоритм применения t-критерия Стьюдента для сравнения оценки средних величин двух выборок

1. Записать вариационный ряд результатов X экспериментальной группы.
2. Записать вариационный ряд результатов Y контрольной группы.
3. Найти выборочные средние двух выборок x^* и y^*.
4. Найти выборочные дисперсии S_x^2 и S_y^2.
5. Вычислить эмпирическое значение критической статистики

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\left|x^* - y^*\right|}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_x^2 + (n^2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1+n_2}}.$$

6. Определить по таблице критическое значение $t_{\text{кр}}(\alpha, n_1 + n_2 - 2)$ для соответствующего уровня значимости α и данного числа степеней свободы $r = n_1 + n_2 - 2$.

Если $t_{\text{эмп}} \geq t_{\text{кр}}$, то различия между средними значениями экспериментальной и контрольной групп существенны на данном уровне значимости.

3. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей. Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M[X] = M[Y]$ с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями (в случае независимых малых выборок) при конкурирующей гипотезе $M[X] \neq M[Y]$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$t_{\text{эмп}} = \frac{\left|x^* - y^*\right|}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n + m - 2$ найти критическую точку $t_{кр}(\alpha; k)$.

Пример 188. Для экспериментальной и контрольной групп в ходе 5-летнего эксперимента чтения одинаковых лекционных курсов и проведения практических занятий при корреляции по годам средней успеваемости групп на начало эксперимента получено следующее варьирование разницы средних проявлений квазиисследовательской творческой деятельности студентов по годам для дисциплины теория вероятностей (с множителем 100):

Эксперимент	5	6	7	6	7	$\bar{d}_э = 6{,}2$
Контроль	1	2	2	2	1	$\bar{d}_к = 1{,}6$

Используя t-критерий Стьюдента на 1%-м уровне значимости, докажите достоверность различия между средними величинами опыта и контроля.

Решение. В нашем случае $x^* = 6{,}2$ и $y^* = 1{,}6$. Найдем исправленные дисперсии

$$S_x^2 = \frac{1}{4}\left[(5-6{,}2)^2 + (6-6{,}2)^2 \cdot 2 + (7-6{,}2)^2 \cdot 2\right] \approx 0{,}7 \text{ и } S_y^2 \approx 0{,}3 .$$

Тогда $t_{эмп} = \dfrac{6{,}2-1{,}6}{\sqrt{4\cdot 0{,}7 + 4\cdot 0{,}3}} \cdot \sqrt{\dfrac{5\cdot 5\cdot(5+5-2)}{5+5}} \approx 10{,}3,$

а по приложению 4 находим $t_{кр}(0{,}01; 8) = 3{,}36$.

Поскольку $t_{эмп} = 10{,}3 > 3{,}36 = t_{кр}$, то нулевую гипотезу о незначительности различия между средними величинами опыта и контроля отвергают.

4. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции. Для того, чтобы при данном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $r = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конкурирующей гипотезе H_1: $r \neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:

$$t_{эмп} = \frac{r^*\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r^*)^2}}$$

и по таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$ найти критическую точку $t_{кр}(\alpha; k)$.

Пример 189. Определите, существует ли корреляционная связь между рождаемостью и смертностью для городов Ярославской области, используя информационно-статистические материалы по итогам 2002 г. в сравнении с предыдущим.

Города	Ярославль	Рыбинск	Переславль	Ростов	Тутаев	Углич
Рождаемость X	104,9	102,7	114,8	124,1	104,0	119,3
Смертность Y	103,4	99,5	103,0	102,5	114,0	105,9

Решение. 1) Найдем выборочные средние

$$x^* = \frac{1}{6}(107{,}9 + 102{,}7 + 114{,}8 + 124{,}1 + 104 + 119{,}6) \approx 111{,}6;\ y^* \approx 104{,}7.$$

2) Вычислим выборочную ковариацию

$$k(X,Y) = \frac{1}{6}[(104{,}9 - 111{,}6)\cdot(103{,}4 - 104{,}7) + \ldots +$$

$$+(119{,}3 - 111{,}6)\cdot(105{,}9 - 104{,}7)] \approx -7{,}01.$$

3) Найдем выборочные дисперсии

$$D_x^* = \frac{1}{6}\left[(104{,}9 - 111{,}6)^2 + (102{,}7 - 111{,}6)^2 + \ldots + (119{,}3 - 111{,}6)^2\right] \approx 67{,}9$$

$$D_y^* \approx 20{,}73.$$

4) Вычислим выборочный коэффициент корреляции

$$r(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{\sqrt{D_x^* \cdot D_y^*}} = \frac{-7{,}01}{\sqrt{67{,}94 \cdot 20{,}73}} \approx -0{,}187.$$

5) Вычислим наблюдаемое значение критерия

$$t_{эмп} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{-0{,}187 \cdot 2}{\sqrt{1-(-0{,}187)^2}} \approx -0{,}38.$$

6) Выберем уровень значимости $\alpha = 0{,}1$ и найдем критическую точку $t_{кр}(0{,}1;\ 4) = 2{,}13$.

7) Поскольку $|t_{эмп}| = 0{,}38 < 2{,}13 = t_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу H_0: $r = 0$.

В педагогике иногда t-критерий Стьюдента заменяют на более простой **критерий Крамера—Уэлча**. Эмпирическое значение данного критерия рассчитывается по следующей формуле:

$$T_{эмп} = \frac{\sqrt{n_1 \cdot n_2}\left|x^* - y^*\right|}{\sqrt{n_1 \cdot D_x^* + n_2 \cdot D_y^*}}.$$

Пример 190. Результаты измерений уровня знаний в контрольной и экспериментальной группах до и после педагогического эксперимента приведены в таблице:

Число правильно решенных задач			
Контрольная группа (до экспер.)	Экспериментальная группа (до экспер.)	Контрольная группа (после экспер.)	Экспериментальная группа (после экспер.)
15	12	16	15
13	11	12	18
11	15	14	13
18	17	17	20
10	18	11	16
8	6	9	9
20	8	15	14
7	10	8	11
8	16	6	14
12	12	13	17
10	15	11	19
11	14	12	18
9	12	10	13
11	10	10	12
6	10	6	11
13	13	13	14
12	9	11	11
11	10	11	12
—	14	—	14
—	9	—	11

Сравнить уровень знаний в контрольной и экспериментальной группах до и после эксперимента.

Решение. Найдем эмпирические значения критерия Крамера—Уэлча до и после эксперимента для контрольной (X) и экспериментальной (Y) групп с $T_{кр}$ для выбранного уровня значимости, например, $\alpha = 0{,}05$.

1) До эксперимента

$$x^* = \frac{1}{18}(15+13+11+...+13+12+11) \approx 11{,}4,$$

$$y^* = \frac{1}{20}(12+11+15+...+10+14+9) \approx 12,$$

$$D_x^* = \frac{1}{18}\left[(15-11{,}4)^2 + (13-11{,}4)^2 + ... + (11-11{,}4)^2\right] \approx \frac{1}{18}\cdot 218,$$

$$D_y^* \approx \frac{1}{20}\cdot 191.$$

Следовательно, $T_{эмп} = \dfrac{\sqrt{18\cdot 20}\cdot 0{,}6}{\sqrt{218+191}} \approx 0{,}56.$

Заметим, что $T_{кр}(0{,}05) = t_{кр}(0{,}05;+\infty) = 1{,}96$.

Поскольку $T_{эмп} = 0{,}56 < 1{,}96 = T_{кр}(0{,}05)$, то уровень знаний в контрольной и экспериментальной группах до эксперимента отличается незначительно, что свидетельствует о корректности набора групп для организации эксперимента.

2) После эксперимента

$$x^* = 11{,}4;\ y^* = 14{,}2;$$

$$D_x^* = \frac{1}{18}\cdot 158;\ D_y^* = \frac{1}{20}\cdot 168.$$

$T_{эмп} = \dfrac{\sqrt{18\cdot 20}\cdot 2{,}8}{\sqrt{158+168}} \approx 2{,}95 > 1{,}96 = T_{кр}(0{,}05)$ и уровни знаний в контрольной и экспериментальной группах после эксперимента отличаются значимо.

Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные типы статистических критериев проверки гипотезы.
2. В каких случаях применяются критерии Стьюдента и Пирсона?
3. Как определяются степени свободы?
4. Какие выборки следует считать однородными?
5. Какие критерии однородности вы знаете? Каковы условия применимости этих критериев?
6. Почему в критерии χ^2 — Пирсона не может быть недопустимо малых значений критической статистики?
7. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена, Кендалла и критические точки распределения Стьюдента.
8. Приведите примеры практических задач, когда необходима проверка гипотез о равенстве математических ожиданий, дисперсий.

Задачи

371. По выборке объема $n = 16$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя $x^* = 59{,}1$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $S^* = 1{,}8$. Проверьте нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 60$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 60$ и уровне значимости 0,05.

372. Проектный контролируемый размер изделий, изготавливаемых станком-автоматом, $a = a_0 = 25$ мм. Измерения 20 случайно отобранных изделий дали следующие результаты:

Контролируемый размер	24,8	24,9	25,0	25,1	25,3
Частота (число изделий)	2	3	4	6	5

Проверьте нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 25$ при конкурирующей гипотезе H_1: $a \neq 25$ и уровне значимости 0,05.

373. Физическая подготовка 10 спортсменов была проверена при поступлении на факультет физической культуры, а затем после первого семестра. Итоги проверки в баллах оказались следующими:

Число баллов при поступлении	75	72	55	48	60	68	28	65	58	71
Число баллов после I семестра	80	85	51	52	60	62	35	83	61	87

Установите при уровне значимости 0,05, значимо или незначимо улучшилась физическая подготовка спортсменов, в предположении, что число баллов распределено нормально.

374. Известны следующие выборочные данные о посеве яровых за день (в процентах к плану) хозяйствами области: 3, 4, 7, 1, 3, 3, 1, 5, 6, 2, 4, 3, 4, 5, 2, 2, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 4.

Составьте вариационный ряд, постройте полигон относительных частот и проверьте по критерию Пирсона, что распределение нормальное.

375. Точность работы станка-автомата проверяется по дисперсии контролируемого размера изделий, которая не должна превышать $\sigma_0^2 = 0{,}1$. Взята проба из 25 случайно отобранных изделий, которая дала следующие результаты измерений:

Контролируемый размер	3,0	3,5	3,8	4,4	4,5
Частота	2	6	9	7	1

Проверьте, обеспечивает ли станок требуемую точность при уровне значимости 0,05.

376. Исследование в течение 10 дней производительности двух предприятий, выпускающих стиральные машины, дало следующие результаты:

1-е предприятие	82	74	64	72	84	68	76	88	75	60
2-е предприятие	52	63	72	64	48	70	78	68	75	54

Можно ли считать одинаковыми распределения производительности выпуска стиральных машин на обоих предприятиях при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$?

377*. Во время медосбора были получены следующие выборочные данные о суточной прибавке меда на пасеках области:

Суточная прибавка (кг)	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9
Количество пчелосемей	6	26	55	45	15	3

Подчиняется ли суточная прибавка меда нормальному закону?

378*. Найдите выборочный коэффициент ранговой корреляции для измерениями двумя приборами шести деталей (в сотых долях миллиметра):

x_i	10	11	12	9	13	8
y_i	12	9	13	7	14	8

Установите, при каком уровне значимости α ранговая корреляционная связь будет значимой.

379**. Результаты выборочного обследования коров стада одного сельхозпредприятия по годовому надою приведены в таблице:

Годовой надой (тыс. кг)	2,7—2,9	2,9—3,1	3,1—3,3	3,3—3,5	3,5—3,7	3,7—3,9	3,9—4,1	4,1—4,3
Количество коров	5	16	33	43	37	20	7	2

Выясните, является ли распределение годового надоя нормальным. Найдите процент надоев в среднем по хозяйству не менее 3500 кг и процент коров, у которых средний годовой надой отличается от среднего годового надоя по хозяйству меньше чем на 500 кг.

380**. По выборке объема $n = 100$, известной из двумерной нормальной генеральной совокупности (X, Y), составлена корреляционная таблица:

X \ Y	10	15	20	25	30	35	n_x
25	5	1	—	—	—	—	6
35	—	6	2	—	—	—	8
45	—	—	5	40	5	—	50
55	—	—	2	8	7	—	17
65	—	—	—	4	7	8	19
n_y	5	7	9	52	19	8	$n = 100$

Найдите выборочный коэффициент корреляции и проверьте нулевую гипотезу о равенстве генерального коэффициента корреляции нулю при конкурирующей гипотезе H_1: $r \neq 0$ и при уровне значимости 0,05.

§ 8. Математическая статистика в психологии

Для будущего учителя очень важно уметь анализировать результаты своей педагогической деятельности, а также грамотно планировать, проводить психолого-педагогические эксперименты и обрабатывать их результаты, чему и посвящены остальные два параграфа книги.

Разделение использования методов математической статистики в психологии и педагогике весьма условно и преследует здесь скорее цель рассмотреть больше примеров из реальных исследований в этих областях.

Специфика статистической обработки результатов психолого-педагогических исследований заключается в том, что анализируемая база данных характеризуется большим количеством показателей различных типов, их высокой вариативностью под влиянием неконтролируемых случайных явлений, необходимостью учета объективных и субъективных факторов, сложностью корреляционных связей между переменными выборками.

Психолого-педагогические исследования можно разбить на три группы. *Первая* — это номинальные переменные (пол, возраст и другие анкетные данные и т. д.). Арифметические операции над такими величинами лишены смысла, так что результаты описательной статистики (выборочные средние, дисперсия) к таким величинам не применимы. Классический способ их анализа — разбиение на классы относительно тех или иных номинальных признаков и проверка значимых различий по классам. *Вторая* группа данных имеет количественную шкалу измерения, но эта шкала является порядковой (ординальной). При анализе ординальных переменных используются как разбиение на подвыборки, так и ранговые технологии (например, нахождение ранговой корреляции). *Третья* группа — количественные переменные, отражающие степень выраженности замеряемого показателя, — это успеваемость, тесты Амтхауэра, Кеттелла и другие оценочные тесты. При работе с выборками этой группы применимы все стандартные виды анализа, и при достаточно большом объеме выборки их распределение обычно близко к нормальному.

Одной из главных целей исследования является анализ изменений, происходящих в процессе обучения, оценка значимости и направленности этих изменений и выявление основных факторов, влияющих на процесс. При этом возможны два подхода. Можно рассматривать длительность обучения и вычислять его

корреляцию с интересующими нас индивидуальными характеристиками испытуемого. Однако проводимые исследования показывают, что в процессе профессионализации изменяются зачастую не сами показатели, а структура взаимосвязей между ними. Поэтому более предпочтительным методом является разбиение данных на группы (подвыборки), их самостоятельный, а затем сравнительный анализ и проверка значимости различий в группах.

Прежде чем рассматривать конкретные примеры, приведем, следуя [48], классификацию психолого-педагогических задач и предлагаемых методов их решений, а также опишем наиболее часто встречающиеся алгоритмы.

Классификация психологических и педагогических задач и методов их решения

Задачи	Условия	Методы
1. Выявление различий в уровне исследуемого признака	а) 2 выборки испытуемых	критерий Розенбаума; критерий Манна—Уитни; критерий Стьюдента; критерий Крамера-Уэлча
	б) 3 и более выборок испытуемых	критерий тенденций Джонкира; критерий Крускала—Уоллиса
2. Оценка сдвига значений исследуемого признака	а) 2 замера на одной и той же выборке испытуемых	критерий Вилкоксона; критерий знаков; критерий Фишера
	б) 3 и более замеров на одной и той же выборке испытуемых	критерий Фридмана; критерий тенденций Пейджа
3. Выявление различий в распределении признака	а) при сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим	Биноминальный критерий
		критерий Пирсона; критерий Колмогорова—Смирнова
	б) при сопоставлении двух эмпирических признаков	критерий Фишера
4. Выявление степени согласованности изменений	а) двух признаков б) двух иерархий или профилей	коэффициент ранговой корреляции Спирмена или Кендалла; критерий линейной корреляции Пирсона

Окончание табл.

Задачи	Условия	Методы
5. Анализ изменений признака под влиянием контролируемых условий	а) под влиянием одного фактора	критерий тенденций Пейджа; однофакторный дисперсный анализ; критерий Барлетта; G — критерий Кохрена
	б) под влиянием нескольких факторов одновременно	*n* — факторный дисперсный анализ

Алгоритм применения критерия U Манна—Уитни для оценки различий между двумя малыми выборками по уровню признака

1. Перенести все данные испытуемых на индивидуальные карточки, пометив карточки 1-й выборки одним цветом, а 2-й — другим.
2. Разложить все карточки в единый ряд по степени возрастания признака и проранжировать в таком порядке.
3. Вновь разложить карточки по цвету на две группы.
4. Подсчитать сумму рангов отдельно по группам и проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной.
5. Определить большую из двух ранговых сумм T_x.
6. Вычислить значение U:

$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x$, где n_i — количество испытуемых в i — выборке (i = 1, 2), n_x — количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

7. Определить критическое значение $U_{кр}$ (по таблице приложения 7). Если $U_{эмп} \geq U_{кр}$, то H_0 принимается.

Пример 191. Индивидуальные значения вербального интеллекта в выборках студентов специальности история и иностранный язык (n_1 = 12) и история и психология (n_2 = 11) приведены в таблице. Подсчитаем ранговые суммы по выборкам студентов исторического факультета.

Студенты спец. история и ин. язык (n_1 = 12)			Студенты спец. история и психол. (n_2 = 11)	
Показатель верб. интеллекта		Ранг	Показатель верб. интеллекта	Ранг
127		23		
			123	22
			122	21
			117	20
116		19		
115		17,5		
115		17,5		
			114	16
			113	15
			112	14
111		12,5	111	12,5
			108	11
107		8,5	107	8,5
107		8,5		
107		8,5		
106		6	105	5
104		3,5	104	3,5
95		2		
90		1		
суммы		127,5		148,5
средние	108,3		112,4	

Общая сумма рангов: $127{,}5+148{,}5=276=\sum R_i=\dfrac{23\cdot(23+1)}{2}$

$T_x = 148{,}5$

$$U_{\text{эмп}}=12\cdot 11+\frac{11\cdot(11+1)}{2}-148{,}5=49{,}5$$

По табл. находим $U_{\text{кр}}$ для $n_1 = 11$ и $n_2 = 12$

$$U_{\text{кр}} = \begin{cases} 38(\alpha = 0{,}05) \\ 28\ (\alpha = 0{,}01) \end{cases}$$

$U_{\text{эмп}} = 49{,}5 \geq U_{\text{кр}}(0{,}05) = 38$

Ответ: гипотеза H_0 = {студенты группы история и психология не превосходят студентов группы история и ин. язык по уровню вербального интеллекта} принимается.

Алгоритм применения критерия Т Вилкоксона для сопоставления двух показателей испытуемых

1. Составить список испытуемых.

2. Вычислить разность между индивидуальными значениями во 2-м и 1-м замерах («после» — «до»). Определить, что будет считаться «типичным» сдвигом, и сформулировать гипотезу.

3. Найти абсолютные величины разностей.

4. Проранжировать абсолютные величины разностей, начиная с меньшего значения.

5. Отметить ранги, соответствующие сдвигам в «нетипичном» направлении, подсчитать сумму этих рангов $T_{эмп} = \Sigma R_r$.

6. Определить критические значения $T_{кр}$ для данного n (по таблице приложения 10). Если $T_{эмп} < T_{кр}$, то сдвиг в «типичную» сторону по интенсивности достоверно преобладает.

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке испытуемых.

Пример 192. 12 участников тренинга партнерского общения дважды («до» и «после») оценивали у себя уровень владения аргументацией. Получены данные по 10-балльной шкале.

№	1-е измерение $a_{до}$	2-е измерение $a_{после}$	Разность $a_{после} - a_{до}$	$\lvert a_{после} - a_{до} \rvert$	Ранг абс. разности
1	5	7	2	2	9
2	4	5	1	1	4,5
3	5	6	1	1	4,5
4	5	4	–1	1	4,5
5	4	5	1	1	4,5
6	3	6	3	3	11,5
7	2	5	3	3	11,5
8	3	5	2	2	9
9	5	3	–2	2	9
10	5	6	1	1	4,5
11	3	3	0	0	1
12	4	5	1	1	4,5
Сумма					78

6. По таблице приложения 10 находим $T_{кр}$ для $n = 12$ и $\alpha = 0{,}05$.

$T_{кр}(0{,}05; 12) = 17 > T_{эмп} = 13{,}5$ и уровень владения аргументацией после тренинга значимо изменился.

Алгоритм применения критерия тенденций L Пейджа для сопоставления трех и более показателей испытуемых

1. Проранжировать индивидуальные значения каждого испытуемого, полученные ими в 1-м, 2-м, 3-м и т. д. замерах.

2. Просуммировать ранги по условиям, в которых осуществлялись замеры. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной.

3. Расположить все условия в порядке возрастания их ранговых сумм в таблицах.

4. Определить эмпирическое значение $L_{эмп}$ по формуле $L=\sum_j T_j \cdot j$, где T_j — сумма рангов по данному условию; j — порядковый номер, приписанный в упорядоченной последовательности условий.

5. По таблице приложения 8 определить критические значения $L_{кр}$ для данного количества испытуемых n и данного количества условий c.

Если $L_{эмп} \geq L_{кр}$, то тенденция принимается.

Пример 193. Определить, являются ли случайными результаты тестирования по определению врожденных способностей у 12 младших школьников

Испытуемый	Тест				Ранг			
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4
А. Саша	9	7	6	1	1	2	3	4
А. Иван	5	3	8	6	3	4	1	2
Б. Катя	2	8	10	7	4	2	1	3
В. Сергей	7	6	5	5	1	2	3,5	3,5
Г. Аркадий	7	6	7	3	1,5	3	1,5	4
Д. Даша	8	9	9	4	3	1,5	1,5	4
Д. Валерий	7	8	10	7	3,5	2	1	3,5
Е. Лиза	9	4	8	5	1	4	2	3
К. Миша	2	9	7	3	4	1	2	3
Л. Антон	10	9	7	7	1	2	3,5	3,5
О. Настя	8	8	9	7	2,5	2,5	1	4
П. Лена	9	8	9	4	1,5	3	1,5	4
Сумма рангов					27	29	22,5	41,5
j					2	3	1	4

Решение. Проранжируем индивидуальные ранги каждого испытуемого по четырем тестам и найдем их суммы. Проверим, что общая сумма рангов

27 + 29 + 22,5 + 41,5 = 120

совпадает с расчетной

(1 + 2 + 3 + 4) · 12 = 120.

Определим эмпирическое значение критерия:

$L_{эмп}$ = 22,5·1 + 27·2 + 29·3 + 41,5·4 = 329,5.

Найдем в приложении 8 критическое значение $L_{кр}$ для n = 12 испытуемых, количества условий c = 4 и уровня значимости α = 0,05: $L_{кр}$(0,05; 12; 4) = 317. Поскольку $L_{эмп}$ = 329,5 ≥ 317 = $L_{кр}$, то результаты тестирования не являются случайными.

Алгоритм применения критерия χ^2_r Фридмана для сопоставления трех и более показателей испытуемых

1. Проранжировать индивидуальные значения каждого испытуемого, полученные им в 1-м, 2-м, 3-м и т. д. замерах.

2. Просуммировать ранги, проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной.

3. Определить эмпирическое значение χ^2_r по формуле:

$\chi^2_{r\ эмп} = \dfrac{12}{n \cdot c(c+1)} \sum T_j^2 - 3n(c+1)$, где c — количество условий, n — количество испытуемых, T_j — сумма рангов по каждому из условий.

4. Определить уровни статистической значимости для χ^2_r, для $c = 3$, $n \le 9$ и $c = 4$, $n \le 4$ (по таблице приложения 11).

5. При большом количестве условий или испытуемых определить критические значения критерия $\chi^2_{кр}$ при данном числе степеней свободы $\nu = c - 1$.

Если $\chi^2_{r\ эмп} \ge \chi^2_{кр}$, то различия статистически достоверны.

Критерий применяется для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых.

Пример 194. Пять учащихся исследуются по четырем тестам. Являются ли результаты тестирования случайными?

Решение. 1. Ранги тестирования представлены в таблице.

	Баллы по тесту				Ранг по баллам			
№	A	B	C	D	A	B	C	D
1	3,6	4,1	2,9	3,5	2	1	4	3
2	3,8	4,2	3,7	4,6	3	2	4	1
3	3,3	3,8	3	3,7	3	1	4	2
4	3,8	3,3	3,4	2,7	1	3	2	4
5	4	3,6	1,9	3,1	1	2	4	3
Сумма					10	9	18	13

2. 10 + 9 + 18 + 13 = 50 = 5·10

3. $\chi^2_{r\ \text{эмп}} = \dfrac{12}{5\cdot 4\cdot(4+1)}\left(10^2+9^2+18^2+13^2\right) - 3\cdot 5\cdot(4+1) = 5{,}88.$

5. Для 3(= 4 – 1) степеней свободы находим по таблице приложения 5 $\chi^2_{\text{кр}} = (0{,}05;\ 3) = 7{,}8$.

Поскольку $\chi^2_{r\ \text{эмп}} = 5{,}88 < 7{,}8 = \chi^2_{\text{кр}}$, то различия результатов тестирования достаточно случайны.

Алгоритм применения критерия λ Колмогорова—Смирнова для сопоставления эмпирического и теоретического (другого эмпирического) распределений

1. Записать в таблицу наименование разрядов и полученные эмпирические частоты в два столбца.

2. Подсчитать эмпирические относительные частоты $f_i = \dfrac{m_j}{n_i}$ $(i = 1,\ 2)$ и занести их в 3-й и 4-й столбцы.

3. Подсчитать накопленные эмпирические относительные частоты:

$f_j^1 = \sum\limits_{k\le j} f_k^1,\ f_j^2 = \sum\limits_{k\le j} f_k^2$. Полученные суммы записать в 5-й и 6-й столбцы.

4. Записать в 7-й столбец абсолютные величины разностей $\left|f_j^1 - f_j^2\right| = d_j$.

5. Определить $d_{\max} = \max\{d_j\}$.

6. Подсчитать значения критерия λ по формуле $\lambda_{\text{эмп}} = d_{\max} \cdot \sqrt{\dfrac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$.

7. По таблице приложения 12 определить, какому уровню статистической значимости α соответствует $\lambda_{\text{эмп}}$.

8. Если $\lambda_{\text{эмп}} \geq 1{,}36 = \lambda_{\text{кр}}$ ($\alpha = 0{,}05$) или $\lambda_{\text{эмп}} \geq 1{,}63 = \lambda_{\text{кр}}$ ($\alpha = 0{,}01$), то различия между распределениями существенны на соответствующем уровне значимости.

Пример 195. Используя критерий Колмогорова—Смирнова, сравнить результаты динамики развития профессионально-коммуникативных качеств у студентов экспериментальной и контрольной групп.

Решение:

Номер интервала	Частоты		Относ. частоты		Накопл. относ. частоты		Абс. разность
	контр. m_1	экспер. m_2	f_1	f_2	$\sum f_j^1$	$\sum f_j^2$	$d_j = \left\lvert \sum f_j^1 - \sum f_j^2 \right\rvert$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0,033	0,066	0,033	0,066	0,033
3	7	8	0,234	0,267	0,267	0,333	0,066
4	4	7	0,133	0,234	0,400	0,567	0,167
5	4	11	0,133	0,367	0,533	0,934	0,401
6	10	2	0,334	0,066	0,867	1,000	0,133
7	4	0	0,133	0	1,000	1,000	0
Суммы	30	30	1,0	1,000			

5. $d_{\max} = 0{,}401$ — приходится на пятый интервал;

6. $\lambda_{\text{эмп}} = 0{,}401 \cdot \sqrt{\dfrac{30 \cdot 30}{30 + 30}} \approx 1{,}55$;

7. $\lambda_{\text{кр}}(0{,}05) = 1{,}36$;

8. $\lambda_{\text{эмп}} \approx 1{,}55 > 1{,}36 = \lambda_{\text{кр}}$ и результаты динамики развития профессиональной коммуникативности у студентов экспериментальной и контрольной групп отличаются на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие психологические явления являются измеряемыми? Примеры.
2. Принципы классификации шкал измерения.
3. Как получить процентальную шкалу?
4. Наиболее практически важные параметры распределения признака.
5. Как осуществить проверку гипотезы?
6. Какие параметрические критерии вы знаете?
7. По чему судят о мощности критерия?
8. Приведите примеры методов решения психологических задач.

Задачи

381. У предполагаемых участников психологического эксперимента был измерен уровень вербального и невербального интеллекта с помощью методики Д. Векслера. Были обследованы 12 студентов специальности история и иностранный язык и 11 студентов специальности история и психология. Показатели вербального интеллекта представлены в таблице:

Специальность история и иностранный язык		Специальность история и психология	
Код имени испытуемого	Показатель вербального интеллекта	Код имени испытуемого	Показатель вербального интеллекта
1. В. А.	132	1. Т. Н.	126
2. С. А.	134	2. В. О.	127
3. К. В.	124	3. В. Е.	132
4. П. В.	135	4. А. М.	120
5. А. С.	132	5. З. А.	119
6. Т. А.	131	6. Н. И.	126
7. Ф. А.	121	7. К. М.	120
8. В. И.	127	8. О. К.	123
9. К. А.	136	9. М. В.	120
10. Л. Б.	129	10. Н. М.	116
11. Ф. В.	136	11. В. Н.	115
12. О. А.	136		

Используя критерий U Манна—Уитни, определите, превосходят ли студенты специальности история и иностранный язык студентов специальности история и психология по уровню вербального интеллекта.

382. Используя критерий Вилкоксона, определите значимость различий изменений вербальной памяти после иппотерапии по результатам следующего эксперимента:

1-е измерение (до)	6	5	4	3	7	6	4	4	5	6
2-е измерение (после)	8	5	6	4	7	7	5	3	8	7

383. При изучении психологического влияния иппотерапии на связь эмоционального состояния и зрительной памяти получены следующие результаты:

Кол-во выборов, соотв. положительному эмоциональному состоянию (баллы)	3	3	2	1	3	2	1	1	3	2	3	2	3	2	3	3	2	3	2	1
Зрительная память (баллы)	6	5	5	3	5	5	4	3	6	3	5	5	6	6	5	6	5	4	5	4

Существенна ли связь эмоционального состояния и зрительной памяти под влиянием иппотерапии?

384. Соотношение средних величин невербального, вербального и общего IQ в различных системах обучения дало следующие результаты:

Система обучения	$IQ_н$	$IQ_в$	IQ
Традиционная	113	116	117
Л.В. Занкова	111	121	118
Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова	120	131	128

Применяя критерий χ_r^2 Фридмана, покажите, являются ли полученные результаты случайными.

385. Определить значимость различий изменения уровня агрессивности по методике Басса—Дарки до и после коррекционной работы.

До эксперимента	2	1	4	4	3	4	5	3	3	4	5
После эксперимента	4	2	4	3	4	5	6	5	5	6	6

386. В исследовании эффективности нестандартной методики изучения дифференцируемых функций были получены следующие данные для экспериментальной и контрольной групп по 50 человек в каждой.

Рис. 104. Число набранных баллов

Используя критерий λ Колмогорова—Смирнова, установите статистическую зависимость полученных результатов.

387*. В 2003 г. проводилось анкетирование школьников 8 класса по отношению к обучению математике, которое дало следующие результаты по 16-балльной шкале:

Номер ученика	Самооценка	Оценка учителя	Оценка эксперта
1	10	12	12
2	11	10	11
3	7	6	7
4	14	15	15
5	11	9	10
6	10	10	9
7	9	7	8
8	10	8	8
9	3	4	4
10	13	13	13
11	14	14	13
12	7	6	7

Выявить значимость различий результатов оценки.

388*. Изучалась проблема психологических барьеров при обращении в службу знакомств у мужчин и женщин. В эксперименте участвовали 17 мужчин и 23 женщины в возрасте от 17 до 45 лет (средний возраст 32,5 года). Испытуемые должны были отметить на отрезке точку, соответствующую интенсивности внутреннего сопротивления, которое им пришлось преодолеть, чтобы обратиться в службу знакомств. Длина отрезка, отражающая максимально возможное сопротивление, составляла 100 мм. В таблице приведены показатели интенсивности сопротивления, выраженные в миллиметрах.

Группа I — мужчины ($n_1 = 17$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Длина отрезка «сопротивления»	81	80	73	72	72	69	69	65	65	62	60	54	54	43	30	26	26

Группа II — женщины ($n_2 = 23$)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Длина отрезка	70	66	66	63	63	61	60	54	47	43	41	40

Группа II — женщины ($n_2 = 23$)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Длина отрезка	39	38	38	35	30	27	25	23	17	10	9

Можно ли утверждать, что мужчинам приходится преодолевать субъективно более мощное сопротивление?

389**. 10 участников комплексной программы тренинга партнерского общения, продолжавшегося 7 дней, дважды оценивали у себя уровень владения тремя важнейшими коммуникативными навыками. Участники должны были наметить для себя и реально достижимый, с их точки зрения, индивидуальный идеал в развитии каждого из навыков. Измерения проводились по 10-балльной шкале и дали следующие результаты:

№ участника	1-е измерение						2-е измерение					
	Активное слушание		Снижение эмоционального напряжения		Аргументация		Активное слушание		Снижение эмоционального напряжения		Аргументация	
	Реал.	Идеал.	Реал.	Идеал.	Реал.	Идеал.	Реал.	Идеал.	Реал.	Идеал.	Реал.	Идеал.
1	6	9	5	8	5	8	7	10	6	10	7	9
2	3	5	1	3	4	5	5	7	4	6	5	7
3	4	6	4	6	5	8	8	10	7	8	6	8
4	4	6	4	5	5	7	6	7	5	7	5	7
5	6	9	4	9	4	8	4	10	5	10	5	10
6	6	8	5	8	3	6	8	9	7	9	6	8
7	3	8	5	10	2	6	7	8	8	10	5	7
8	6	9	5	8	3	7	5	8	7	10	5	9
9	6	8	5	9	5	9	7	8	6	9	5	9
10	5	8	6	9	5	8	7	10	7	10	6	10

Ощущаются ли участниками достоверные сдвиги в уровне владения каждым из трех навыков после тренинга? Уменьшается ли расхождение между «идеальным» и реальным уровнем владения навыками после тренинга?

390**. В опытах по изучению объема памяти испытуемых предлагали заучивать последовательности из восьми трехзначных чисел. В одной серии числа отбирали из 64 известных испытуемому чисел, а в другой серии — из 512. В опытах участвовали

15 испытуемых. С каждым из них в каждой серии было проведено по 10 опытов. Результаты эксперимента представлены в таблице:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Среднее значение числа повторений в 1-м опыте	3,6	4,8	7,0	4,3	6,4	4,3	5,0	5,2	4,1	6,1	4,2	3,8	3,2	3,8	3,9
Среднее значение числа повторений во 2-м опыте	2,6	4,3	3,9	4,0	3,0	3,9	4,7	3,9	4,6	4,4	3,5	3,4	3,1	3,1	3,1

Значимы ли различия между рядами полученных чисел или имеющиеся расхождения можно считать случайными? Сформулируйте проверяемые гипотезы и обоснуйте выбор статистического критерия.

§ 9. Статистические методы в педагогике

С помощью математической статистики выявляется обоснованность заключений педагогических исследований. Целью экспериментального исследования является, как правило, проверка эффективности того или иного педагогического подхода к решению поставленной в исследовании задачи. Педагогический эксперимент традиционно проводится в три этапа.

На *первом* (**констатирующем**) этапе проводится анализ педагогических условий, сложившихся в современной практике на обозначенной проблеме, и диагностическое исследование участников. Выделяются контрольные и экспериментальные группы примерно равной численности и уровня подготовленности. Результаты констатирующего этапа должны свидетельствовать о нерешенности (искомой осознанности, недостаточном осмыслении) проблемы.

На *втором* (**формирующем**) этапе эксперимента реализуются обозначенные педагогические условия. В рамках реализации педагогических, учебно-методических условий студентам экспериментальной группы предлагаются программы по формированию умений и навыков умения работы с информацией, организации учебного процесса и самостоятельной работы, их контроля.

На *третьем* (**контрольном**) этапе проводится повторное диагностическое исследование качества обучения в контрольной и экспериментальной группах. Полученные результаты сопоставляются

с данными констатирующего этапа эксперимента, делаются выводы. Особое внимание уделяется обоснованности выводов при использовании того или иного критерия достоверности на заданном уровне значимости.

Принцип отбора критериев в данном параграфе — простота и практичность. Большинство методов построены на понятных для педагогов преобразованиях.

Алгоритм применения критерия Q Розенбаума для оценки между двумя выборками по уровню признака

1. Проверить, выполняются ли ограничения: $n_1, n_2 \geq 11$, $n_1 \approx n_2$.
2. Упорядочить значения отдельно в каждой выборке по степени возрастания признака. Считать выборкой 1 ту, значения в которой предположительно больше.
3. Определить максимальное значение в выборке 2.
4. Подсчитать количество S_1 значений в выборке 1, которые больше максимальных значений в выборке 2.
5. Определить минимальное значение в выборке 1.
6. Подсчитать количество S_2 значений в выборке 2, которые меньше минимального значения выборки 1.
7. Подсчитать эмпирическое значение $Q_{эмп} = S_1 + S_2$.
8. По таблице приложения 9 определить критические значения $Q_{кр}$ для данных n_1, n_2 и уровня значимости α. Если $Q_{эмп} \geq Q_{кр}$, то H_0 отвергается.

Пример 196. Можно ли считать эффективными результаты педагогического эксперимента по изменению показателей психологической защищенности старших подростков до и после эксперимента:

Показатели психологической защищенности		Младшие подр. (сред. значен.)		Старшие подр. (сред. значен.)		Педагоги (сред. значен.)	
		до	после	до	после	до	после
От публичного унижения	учеников	2,4	2,6	3,1	3,9	2,6	3,5
	учителей	2,4	2,8	2,9	3,8	2,7	3,7
От оскорблений	учеников	2,1	2,2	2,8	3,8	2,4	3,0
	учителей	2,7	2,8	3,0	3,1	2,7	3,7

Окончание табл.

Показатели психологической защищенности	Младшие подр. (сред. значен.)		Старшие подр. (сред. значен.)		Педагоги (сред. значен.)	
	до	после	до	после	до	после
От высмеиваний учеников	2,2	2,4	2,6	3,8	2,6	2,6
учителей	2,7	2,9	3,0	4,0	2,8	2,8
От угроз учеников	2,5	2,8	3,2	4,2	2,8	3,7
учителей	2,7	3,1	3,2	3,2	2,9	3,9
От обзываний учеников	2,2	2,3	2,4	3,7	2,5	3,5
учителей	2,5	2,9	3,0	3,8	2,9	3,9
От того, что заставят делать против желания ученики	2,7	3,0	3,2	4,1	2,7	4,0
учителя	2,1	2,5	2,1	2,5	2,4	3,6
От игнорирования учеников	2,4	2,8	2,6	3,6	2,6	2,6
учителей	2,6	2,7	2,5	3,8	2,6	2,6
От неуважит. отношения учеников	2,2	2,6	2,6	3,6	2,4	3,6
учителей	2,4	2,8	2,8	2,9	2,6	3,7
От недоброжелательного отношения учеников	2,2	2,4	2,6	3,7	2,3	3,6
учителей	2,4	2,7	2,6	2,8	2,5	2,7

Решение.

1) $n_1 = n_2 = 18$.

2) Выборкой 1 считаем средние значения защищенности после эксперимента.

3) Максимальное значение в выборке до эксперимента равно 3,2.

4) $S_1 = 13$.

5) Минимальное значение в выборке 1 равно 2,5.

6) $S_2 = 2$.

7) $Q_{эмп} = S_1 + S_2 = 13 + 2 = 15$.

8) По приложению 9 при $n_1 = n_2 = 18$ и $\alpha = 0{,}01$ находим $Q_{кр} = 9$.

Поскольку $Q_{эмп} = 15 > Q_{кр} = 9$, то H_0 отклоняется и можно считать эффективными результаты эксперимента.

Алгоритм применения критерия Н Крускала—Уоллиса для оценки различий между несколькими выборками по уровню признака

1. Перенести все показатели испытуемых на индивидуальные карточки.

2. Пометить карточки испытуемых каждой группы своим цветом.

3. Разложить все карточки в единый ряд по степени нарастания признака.

4. Проранжировать значения на карточках, приписывая меньшему значению меньший ранг. Написать на каждой карточке ее ранг.

5. Вновь разложить карточки по группам, ориентируясь на цвет.

6. Подсчитать суммы рангов отдельно по каждой группе. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной.

7. Подсчитать значение критерия $H_{эмп}$ по формуле:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_j \frac{T_j^2}{n_j} - 3(N+1),$$

где N — общее количество испытуемых, T_j — сумма рангов в j-й группе, состоящей из n_j испытуемых.

8. а) При количестве группы $c = 3$ или количестве испытуемых $n_1, n_2, n_3 \leq 5$ определить критические значения по таблице.

б) При количестве $c > 3$ или количестве испытуемых $n_1, n_2, n_3 > 5$ определить критические значения χ^2 по приложению 5.

Если $H_{эмп} \geq H_{кр}$, то H_0 отвергается.

Пример 197. Одинаковы ли воздействия педагогического эксперимента на младших и старших подростков, а также на учителей под воздействием учеников по показателям психологической защищенности после эксперимента из предыдущего примера?

Решение. Составим таблицу получившихся рангов по трем группам и их суммы:

										Σ
Младшие подр.	6,5	1	3,5	9,5	2	11,5	9,5	6,5	3,5	53,5
Старшие подр.	24	22,5	22,5	27	20	26	16,5	16,5	20	195
Педагоги	13,5	11,5	6,5	20	13,5	25	6,5	16,5	16,5	129,5
Проверка: $1 + 2 + ... + 27 = \frac{1+27}{2} \cdot 27 =$										378

Подсчитаем значения критерия

$$H_{\text{эмп}} = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_j \frac{T_j^2}{n_j} - 3(N+1) =$$

$$= \frac{12}{27 \cdot 28}\left(\frac{53{,}5^2}{9} + \frac{195^2}{9} + \frac{129{,}5^2}{9}\right) - 3 \cdot 28 \approx 17{,}69.$$

Определим по приложению 5 критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}$ для уровня значимости α = 0,01 и степеней свободы k = 3 – 1. $\chi^2_{\text{кр}}$ (0,01; 2) = 9,21.

Поскольку $H_{\text{эмп}}$ = 17,69 > 9,21 = $\chi^2_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается, т. е. результаты воздействия эксперимента на младших и старших подростков и учителей различны.

Алгоритм применения критерия Фишера для составления выборок по качественно определяемому признаку

1. Определить значения признака, которые будут критерием для разделения испытуемых на тех, у кого «есть эффект» и тех, у кого «нет эффекта».

2. Начертить четырехклеточную таблицу. Первая строка — «есть эффект», вторая — «нет эффекта»; первый столбец — первая (контрольная) выборка объема n_1, второй — вторая (экспериментальная) выборка объема n_2.

3. Заполнить таблицу, подсчитав доли (p_1, p_2) испытуемых в выборках, у которых «есть эффект» и у которых «нет эффекта» (q_1, q_2).

4. Проверить, не является ли нулем одна из долей. Если это так, сдвинуть точку разделения выборок в ту или иную сторону.

5. Подсчитать эмпирическое значение φ^* по формуле

$$\varphi^*_{\text{эмп}} = \left|2\arcsin\sqrt{p_1} - 2\arcsin\sqrt{p_2}\right| \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}\ .$$

6. Сравнить полученное значение $\varphi_{\text{эмп}}$ с критическими значениями $\varphi^*_{\text{кр}}$ (0,05) = 1,64 и $\varphi^*_{\text{кр}}$ (0,01) = 2,31. Если $\varphi^*_{\text{эмп}} \geq \varphi^*_{\text{кр}}$, то H_0 отвергается.

Пример 198. Определить по критерию Фишера совпадение уровня знаний в контрольной и экспериментальной группах из примера 190, приняв за «успешность усвоения материал» правильное решение более 10 задач.

Решение. Порядковая шкала с двумя баллами — «успешно усвоен материал» и «не усвоен» — называется *дихотомической шкалой*. Четырехклеточная таблица результатов дихотомических измерений уровня знаний в контрольной и экспериментальной группах из примера 190 выглядит следующим образом:

	Контр. группа до эксперимента	Экспер. группа до эксперимента	Контр. группа после эксперимента	Экспер. группа после эксперимента
Доля, которую составляют учащиеся, усвоившие материал	0,55	0,66	0,7	0,95
Доля, которую составляют учащиеся, не усвоившие материал	0,45	0,34	0,3	0,05

Найдем эмпирические значения φ* до и после эксперимента по формуле

$$\varphi^*_{\text{эмп}} = \left|2\arcsin\sqrt{p_1} - 2\arcsin\sqrt{p_2}\right| \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

в нашем случае, $n_1 = 18$ и $n_2 = 20$.

1) До эксперимента

$p_1 = 0{,}55$, $p_2 = 0{,}66$;

$$\varphi^*_{\text{эмп}} = \left|2\arcsin\sqrt{0{,}55} - 2\arcsin\sqrt{0{,}66}\right| \cdot \sqrt{\frac{18 \cdot 20}{18 + 20}} \approx$$

$$\approx \left|2 \cdot 0{,}835 - 2 \cdot 0{,}948\right| \cdot 3{,}08 \approx 0{,}7;$$

$\varphi^*_{\text{эмп}} = 0{,}7 < 1{,}64 = \varphi^*_{\text{кр}}(0{,}05)$ и нулевая гипотеза H_0 о незначительном различии в уровне знаний в контрольной и экспериментальной группах принимается.

2) После эксперимента
$p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}95$;

$$\varphi^*_{\text{эмп}} = \left|2\arcsin\sqrt{0{,}7} - 2\arcsin\sqrt{0{,}95}\right| \cdot \sqrt{\frac{18\cdot 20}{18+20}} \approx$$

$$\approx \left|2\cdot 0{,}99 - 2\cdot 1{,}345\right| \cdot 3{,}08 \approx 2{,}19;$$

$\varphi^*_{\text{эмп}} = 2{,}19 \geq 1{,}64 = \varphi^*_{\text{кр}}(0{,}05)$, следовательно, нулевая гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Алгоритм применения критерия Барлетта для оценки однородности дисперсий

1. Вычислить выборочные дисперсии D^*_j для каждой из m выборок объемом n_j.
2. Вычислить

$$B = 2{,}3\left[\left(\sum_{j=1}^{m} n_j - m\right)\lg D^* - \sum_{j=1}^{m}(n_j - 1)\lg D^*_j\right], \text{ где } D^* = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_j}\sum_{j=1}^{m} n_j D^*_j .$$

3. Вычислить $C = 1 + \dfrac{1}{3(m-1)}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{1}{n_j - 1} - \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_j - m}\right)$.

4. Найти отношение $\dfrac{B}{C}$, которое распределено приблизительно по закону χ^2 с $k = m - 1$ степенями свободы при условии, что все $n_j \geq 5$.

5. Гипотеза об однородности всех D^*_j принимается, если $\dfrac{B}{C} \leq$ $\leq \chi^2(\alpha, m - 1)$, и отклоняется, если $\dfrac{B}{C} > \chi^2(\alpha, m - 1)$.

Пример 199. Определить, изменяется ли дисперсия оценок при переходе от младших школьников к старшим, если ученики сельской школы получили следующие оценки по тесту «числовые ряды»:

	Классы					
	6	7	8	9	10	11
Оценки по тесту (x_{ij})	9,5 12,0 14,0 12,5 10,0 14,5 15,0 9,0 10,0 12,5 14,0 11,5 13,0 14,0 13,0	13,0 18,5 13,5 17,0 11,5 15,0 18,5 14,5 10,5 13,5 14,0 16,5 7,5 — —	18,5 14,0 15,0 11,5 15,0 14,0 19,0 18,0 10,0 14,5 18,0 13,0 14,5 19,0 —	19,5 17,0 14,5 20,0 19,5 23,0 17,5 17,0 13,0 21,0 17,0 20,5 18,5 — —	18,0 23,5 16,5 22,0 19,0 15,5 25,0 21,0 21,0 20,5 20,0 16,5 — — —	18,5 18,0 17,5 19,0 18,5 18,0 19,5 20,5 23,0 19,5 22,5 — — — —
$S_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$	194,5	183,5	214,5	238	238,5	214,5
n_j	15	13	14	13	12	11

Составим таблицу к расчету критерия Барлетта при неравных объемах выборок.

J	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2$	$\frac{S_j^2}{n_j}$	$\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{S_j^2}{n_j}$	$n_j - 1$	D_j^*	$\lg D_j^*$	$(n_j - 1)\cdot\lg D_j^*$
1	2621,3	2269,4	351,9	14	25,14	1,40	19,6
2	2709,3	2590,2	119,1	12	9,93	0,997	11,964
3	3390,3	3271,1	119,2	13	9,17	0,962	12,506
4	4445,5	4357,2	88,3	12	7,36	0,867	10,404
5	4833,3	4740,2	93,1	11	8,46	0,928	10,208
6	4215,8	4182,8	33,0	10	3,30	0,519	5,19
Σ		21410,9	804,6	$72 = m(n-1)$	63,36	—	69,872

Найдем общую выборочную дисперсию D^* по указанной в критерии формуле:

$$D^* = \frac{1}{\sum_{j=1}^{6} n_j} \cdot \sum_{j=1}^{6} n_j D_j^* = \frac{1}{78} \cdot 868{,}07 \approx 11{,}13 \text{ и } \lg D^* \approx 1{,}05.$$

Вычислим

$$B = 2{,}3 \cdot \left[\left(\sum n_j - m \right) \lg D^* - \sum (n_j - 1) \lg D_j^* \right] =$$

$$= 2{,}3 \cdot \left[(78-6) \cdot 1{,}05 - 69{,}872 \right] \approx 13{,}17$$

$$\text{и } C = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} n_j - m} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{12} + \frac{1}{11} + \frac{1}{10} - \frac{1}{72} \right) \approx 1{,}033.$$

Найдем теперь $\frac{B}{C} \approx 12{,}75$, а по приложению 5 $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 5) = 15{,}1$ и $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 5) = 11{,}1$.

Следовательно, $\frac{B}{C} = 12{,}75 > 11{,}1 = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 5)$ и нулевая гипотеза об однородности дисперсий по критерию Барлетта отклоняется на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и принимается на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$, так как в этом случае $\frac{B}{C} = 12{,}75 < 15{,}1 = \chi^2_{\text{кр}}(0{,}01;\ 5)$.

Пример 200. Анализ факторов, влияющих на обучение в информационно-обучающей среде, и степени их влияния на

результаты обучения каждого участника эксперимента дали следующие результаты:

Ранг / №	Общего уровня усвоения знаний	Интенсивности сам. работы	По инструментальному типу мотивации	
			начало экспер.	конец экспер.
1	1	4	2,5	1
2	2	1	14	5,5
3	3	6	7,5	3,5
4	4	5	11	9,5
5	5	7	2,5	3,5
6	6	9	5	7
7	7	2	13	14
8	8	3	9	11
9	9	12	4	2
10	10	10	1	5,5
11	11	8	6	9,5
12	12	14	11	12,5
13	13	11	7,5	8
14	14	13	11	12,5

Найдите корреляционную матрицу анализа факторов, влияющих на обучение, для данного педагогического эксперимента.

Решение. Найдем все выборочные коэффициенты ранговой парной корреляции Спирмена данного эксперимента. Заметим, что третий и четвертый столбцы таблицы содержат одинаковые ранги, и поэтому в этих случаях, как и в рассмотренном примере 178, рассчитаем и учтем поправки:

$$T_3 = \frac{2+2}{12} = \frac{1}{3} \text{ и } T_3 = \frac{2+2+2+2}{12} = \frac{2}{3}.$$

r_{12} вычислим по формуле Спирмена $r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{(n-1)n(n+1)}$ при отсутствии одинаковых рангов:

$$r_{12} = 1 - \frac{6(9+1+9+1+4+9+25+25+9+0+9+4+4+1)}{13 \cdot 14 \cdot 15} \approx 0{,}76.$$

Остальные коэффициенты парной корреляции вычисляем с учетом рассчитанных поправок по формуле $r_s = 1 - 6\frac{\sum d_i^2 + T_a + T_b}{(n-1)n(n+1)}$, где в нашем случае T_a и T_b принимают два значения $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

$$r_{13}=1-6\frac{427+\frac{1}{3}}{13\cdot 14\cdot 15}\approx 0{,}06;\ r_{14}=1-6\frac{181+\frac{2}{3}}{13\cdot 14\cdot 15}\approx 0{,}6;$$

$$r_{23}=1-6\frac{577+\frac{1}{3}}{13\cdot 14\cdot 15}\approx -0{,}27;\ r_{24}=1-6\frac{396+\frac{2}{3}}{13\cdot 14\cdot 15}\approx 0{,}13;$$

$$r_{34}=1-6\frac{74+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{13\cdot 14\cdot 15}\approx 0{,}84.$$

И тогда искомая корреляционная матрица выглядит следующим образом:

$$(\mathbf{r})=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}76 & 0{,}06 & 0{,}6 \\ & 1 & -0{,}27 & 0{,}13 \\ & & 1 & 0{,}84 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Типы педагогических исследований.

2. Этапы процедуры анализа происходящих в процессе обучения изменений.

3. Репрезентативность выборки.

4. В чем отличие формирующего от констатирующего педагогического эксперимента?

5. О чем судят по корреляционному моменту, коэффициенту линейной корреляции и корреляционным отношениям?

6. Критерии согласия педагогических исследований и их уровни значимости.

7. Какие критерии для оценки уровня признака между двумя выборками вы знаете?

8. Критерии для сопоставления нескольких показателей испытуемых.

Задачи

391. Одинаковы ли воздействия педагогического эксперимента на учащихся четырех классов по выявлению врожденных способностей?

Учащиеся / Класс	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	100	97	103	96	97	105	115	109	116	107	98
II	82	97	98	107	107	100	118	93	95	101	104
III	95	99	81	87	105	99	113	99	102	102	102
IV	95	87	109	105	99	72	99	105	96	102	98

392. Существенны ли различия между уровнем знания двух групп, если известно число допущенных ошибок в каждой из групп?

1-я группа

№ студента	1	2	3	4	5	6	7	8
Число ошибок	30	57	16	84	93	23	37	95

2-я группа

№ студента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Число ошибок	15	7	22	8	38	49	20	99	9	13	29	22	10	63	78

393. Как изменится результат решения примера 198, если принять за «успешность усвоения материала» правильное решение не менее 10 задач?

394. Найдите матрицу ранговых корреляций для следующей таблицы рангов обучаемых по различным видам контроля знаний:

Ранг по разделу / №	Лексика I	Лексика II	Грамматика III	Грамматика IV
1	2	1	1,5	1
2	3	3	1,5	2
3	1	4	3	3

Окончание табл.

№ \ Ранг по разделу	Лексика I	Лексика II	Грамматика III	Грамматика IV
4	5	2	6	4,5
5	8	5	4	4,5
6	4	7	8	8
7	6	9	7	6
8	10	8	5	7
9	9	6	12	9
10	11	10	9	10
11	7	12	11	13,5
12	12	11	10	11
13	13	13	13	12
14	14	14	14	13,5

395. Есть ли различия в скорости решения задач шестью испытуемыми четырех вариантов логических задач?

№	1-я задача	2-я задача	3-я задача	4-я задача
1	8	3	5	12
2	4	15	12	13
3	6	23	15	20
4	3	6	6	12
5	7	12	3	8
6	15	24	12	3

396. Можно ли считать эффективными результаты педагогического эксперимента с младшими подростками из примера 196.

397*. На сколько схожи требования студентов и преподавателей к личности преподавателя, если судить по следующим статистическим данным:

Качества личности	Студенты, %	Преподаватели, %	Качества личности	Студенты, %	Преподаватели, %
1. Глубокие знания	54	67	6. Отзывчивость	34	16
2. Умение объяснять	87	70	7. Чувство юмора	54	12
3. Увлеченность наукой	10	22	8. Интеллигентность	16	32
4. Знание практики	34	46	9. Требовательность	13	42
5. Общительность	39	18	10. Демократичность	21	8

398*. Сравните уровни развитости системности мышления студентов на промежуточном и заключительном этапах опытно-экспериментальной работы:

№ задания	Высокий уровень		Достаточный уровень		Низкий уровень		Не справились	
	пром.	закл.	пром.	закл.	пром.	закл.	пром.	закл.
1	8	18	10	13	22	14	6	2
2	11	14	12	22	24	11	0	0
3	5	9	17	20	11	15	14	3

399**. Показать эффективность предложенной методики по результатам проведенного в контрольной и экспериментальной группах специального теста, содержащего 10 вопросов, на которые даны следующие ответы:

Число верных ответов	4	5	6	7	8	9	10
Контр. группа (число шк-в)	2	0	9	3	6	2	0
Экспер. группа (число шк-в)	0	0	1	3	2	7	9

400**. Изучая динамику профессиональной идентичности студентов педагогического университета, получили следующие результаты:

Показатели	Мотивационный прогноз	Желание работать учителем	Удовлетворенность профессиональным выбором	Интерес к работе с детьми
1-й курс	7,4	7,4	7,6	8,0
2-й курс	6,2	6,1	6,1	7,4
3-й курс	6,3	7,6	7,5	8,3
4-й курс	6,8	8,3	7,8	9,1
5-й курс	5,6	7,5	7,6	7,7

Покажите, являются ли полученные результаты случайными или нет. Найдите корреляционную матрицу парных выборов.

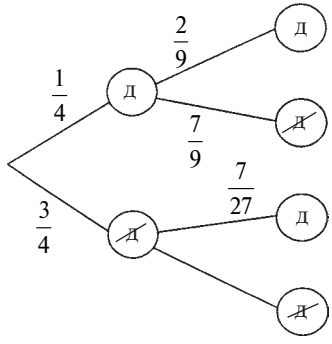
ОТВЕТЫ

Глава I

1. 12 путей. **2.** 180. **3.** На 11. **4.** 7/365. **5.** 4/15. **6.** 12. **7.** $2(n!)2$. **8.** 8/15. **9.** Выбирать, например, две карты из любых четырех. **10.** $\frac{m_1^{\alpha_1+1}-1}{m_1-1}\cdot\frac{m_2^{\alpha_2+1}-1}{m_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{m_n^{\alpha_n+1}-1}{m_n-1}$. **11.** 3360. **12.** 254186856; 189674616; 112195200. **13.** 40320. **14.** 27720. **15.** 10. **16.** 56. **17.** 5. **18.** 0,000987. **19.** Подсчитать число размещений из n элементов по m с повторениями через подсчет по классам, отнеся в k-й класс те, в которых элементы первого типа находятся на k местах. **20.** Подсчитать число размещений из n элементов по k с повторениями через подсчет по классам, отнеся в один класс те, в которые входят n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа и т. д. **21.** Используйте производящую функцию $f(x) = (1 + x)^n$ и соотношение $(1 + x)^n = (1 + x)^{n-m}\cdot(1 + x)^m$. **22.** Найдите производную от обеих частей равенства $(1-x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$ и подставьте $x = 1$. **23.** 55. **24.** Заполните единичный квадрат прямоугольниками, пары сторон которых лежат на сторонах квадрата, а их вершинами выбираем соседние точки, удаленные от одной из сторон квадрата на расстояния x^2, x^4, ..., x^{2n}, ... **25.** 345600. **26.** $\frac{n(n+1)}{2}+1$. **27.** *1-й способ (метод производящих функций)*. Рассмотрите равенство $(1-x)^{2n} = \left[(1+x)^n\right]^2 = \left(1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n\right)^2$ и приравняйте коэффициенты при x^n в левой и правой частях этого равенства. *2-й способ (геометрический метод)*. Подсчитайте количество путей из $O(0,0)$ в $A(n,n)$, проходящих через точки $A_k(k, n-k)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). **28.** *1-й способ (геометрический метод)*. Найдите все пути из $O(0,0)$ в $A(3, n-1)$, пересекающие прямую $x = 2$ в точках A_i $(2, i)$ ($i = 0, 1,\ldots, n-1$). *2-й способ (метод*

рекуррентных соотношений). Используйте рекуррентное соотношение $f_n^r = f_{n-1}^r + f_n^{r-1}$ при $r = 3$. **29.** а) Найдите производную разложения бинома $(1 + x)^n$ при $x = 1$. б) Используйте соотношение $\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$. **30.** Примените метод математической индукции по m. **31.** $2k + 3$. **32.** 8. **33.** В противном случае сумма степеней всех вершин соответствующего графа будет нечетным числом. **34.** Нет. **35.** Определите четность суммы степеней всех вершин графа. **37.** Существует ровно 11 деревьев.

38.



39. Не является. **40.** $P_1 = \frac{37}{64}\left(P_2 = \frac{703}{1700}\right)$.

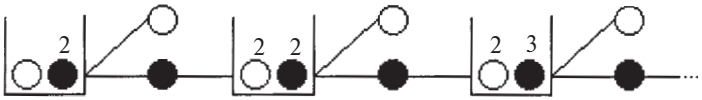
Глава II

41. а) {ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРГ, РГР, ГРР, РРР};
б) {1Г, 1Р, 2Г, 2Р, 3Г, 3Р, 4Г, 4Р, 5Г, 5Р, 6Г, 6Р}.

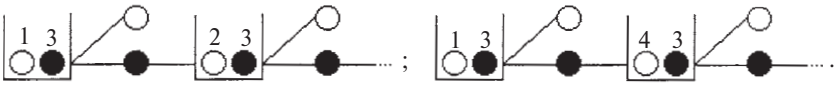
42. а) 7/8, б) 5/8. **43.** Ω. **44.** а) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; б) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; в) $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$; г) $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$, $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. **45**. а) 1/9; б) 1/16; в) 7. **46.** 1/3. **47.** 1/10. **48.** а) 8/15; б) 7/15. **49**. $2^{n-1}/(2^n - 1)$. **50**. Первое более вероятно. **51.** а) 5/12; б) 1/2; в) 1/12. **52.** а) 6/13; б) 6/13; в) 1/13; г) 1/26. **53.** В первом случае события зависимы, во втором — нет. **54.** Из урны, содержащей A шаров, среди которых a белых, наудачу по одному извлекаются шары без возвращения до появления белого шара. **55**. 0,3. **57.** По 1/5 (1/3, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6).

58. Нет. **61.** 7/8. **62**. 0,3. **63**. 23/56. **64.** 5/13. **65.** 631/5616. **66**. 27/43. **67**. а) 5/12; б) 5/12; в) 3/8. **68.** $(n + 2)/2\cdot(n + 1)$. **69.** 1/4 (использовать идею из решения задачи 49 о фиксации места для одного брата). **70.** В одну урну положить белый шар, а в другую — белый и черный. **71.** Вероятнее выиграть два сета из четырех. **72.** 12,5%. **73.** ≈ 0,1. **74.** 3/8. **75.** $m_0 = 16$. **76.** а) $(0,1)^4$; б) ≈ 0,159; в) ≈ 0,568. **77.** $p \in [0,6;0,61]$. **78**. Не менее 36 раз. **79.** Проводим стрельбу по цели до первого попадания, или пока не кончатся патроны. **80.** 0,4. **81.** ≈ 0,285; ≈ 0,76. **82.** ≈ 0,07. **83.** ≈ 0,18. **84.** ≈ 0,487. **85.** 16 человек; ≈ 0,1. **86.** $m_0 = 20$; ≈ 0,1. **87**. ≈ 0,24. **88.** ≈ 0,49. **89.** Не менее 83 человек. **90.** 676. **92.** а) 1/4; б) 1/2. **94.** 1. **95.** 21: 16. **96.** 5:3.

97.



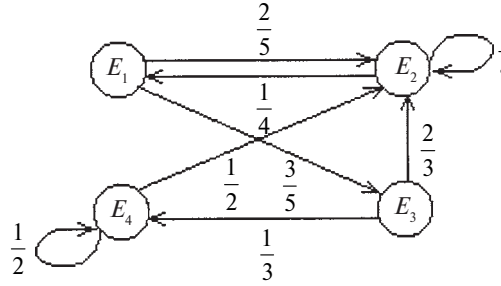
98. Из урны, содержащей белые и черные шары, производим вынимание шара с возвратом до появления двух белых шаров.



99. а) 1/6; б) 1. **100.** Испытания проводить с возращением шара. **101.** 3 состояния; $\mathbf{P}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$. **102.** $\mathbf{P}(E_1) = 18/75$, $\mathbf{P}(E_2) = 57/75$.

103. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 & 2/3 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 2/3 & 0 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$. **104.** 0,32. **105.** 11/32.

106. 4 состояния: все состояния существенные.



107. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

108. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{bmatrix}$, $n = 2, 3, \ldots$.

110. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

111. 1/9. **112.** 2/3. **113.** 9/25. **116.** $\mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n)$. **117.** а) 13/24; б) 1/48. **118.** $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C)$. **119.** $t(2T + t)/T^2$.

Глава III

121.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

122.

X	0	1	2
P	0,1	0,3	0,6

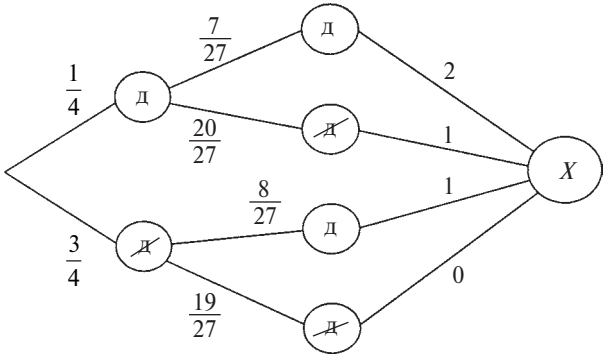
123.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1/3, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 13/15, \text{ если } 1 < x \le 2 \\ 1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

124.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/28	1/28	2/28	2/28	3/28	3/28	4/28	3/28	3/28	2/28	2/28	1/28	1/28

125.



126.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 25/36, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 35/36, & \text{если } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

127.

Y	–2	–1	2	7
P	0,15	0,5	0,3	0,05

128.

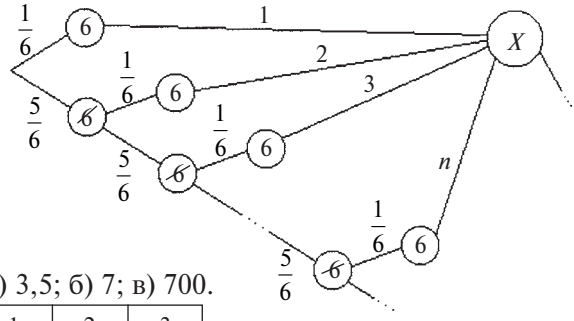
Y	$\sqrt{2}/2$	1
P	0,7	0,3

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le \sqrt{2}/2, \\ 0{,}7, & \text{если } \sqrt{2}/2 < y \le 1, \\ 1, & \text{если } y > 1. \end{cases}$$

129.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1/2, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 3/4, \text{ если } 1 < x \le 2, \\ \vdots \\ (2^k - 1)/2^k, \text{ если } k - 1 < x \le k. \\ \vdots \end{cases}$$

130.



131. 4. **132.** а) 3,5; б) 7; в) 700.

133.

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

134. 16. **135.** 0,25; 0,5; 25. **136.** ≈ 2,42; ≈ 12,1. **137.** $M_o(X + Y) = M_e(X + Y) = 3$. $M[X + Y] = 3{,}8$; $D[X + Y] = 2{,}4$. **138.** Выбираем вторую игру. **139.** $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = p$; $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = pq$, $\mu_3 = pq(q - p)$, $\mu_4 = pq(q - p)(1 - pq)$, $\mu_5 = pq(q - p)(1 - 2pq)$. **141.** $M[X] = 5/3$, $M_e = 2$, $M_o = 1$. **142.** $M_e = 3$. **143.** $M[X] = 3{,}5$; $M_e = 3$ или 4; $M_o = 1,2,3,4,5$ или 6; $D[X] = 35/12$. **144.** 0,42. **145.** $M[X] = 1{,}5$; $M_e = 1$; $M_o = 1$ или 2. **146.** 2. **147.** $2{,}92 \cdot n$. **148.** 0,23. **149.** $\alpha_3 = (n + 1)/4$; $\mu_3 = (n + 1)^2(1 - n)/4$. **150.** 5 червонцев. **151.** Нет. **152.** Да. **153.** 2/7$. **154.** 5 руб. **155.** 1 руб. **156.** Больше 40 руб. **157.** На № 4. **158.** На № 3. **159.** Следует делать не более 5-ти бросков в серии или передать ход другому, набрав от 14 до 19 очков. **160.** Следует делать или не более семи бросков в серии или передать ход другому игроку, набрав от 11 до 14 очков. **161.** Вероятность не меньше 0,75. **162.** $\varepsilon > 0{,}14$. **163.** а) Вероятность больше 0,64; б) вероятность меньше 0,36. **164.** Вероятность не меньше 0,9. **165.** Вероятность не меньше 0,84. **166.** Вероятность не меньше 0,8. **167.** Применима. **168.** Вероятность не меньше 0,6. **169.** Применима.

171.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} e^x, \text{ если } x \le 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2} e^{-x}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

172. а) 0; б) 0,1; в) 0,1. **173.** ≈ 0,2. **174.** 3/4. **175.** $a = 2/\pi$. **176.** $a = 4/(\pi - \ln 4)$. **177.** $M[X] = 0$; 1/2. **178.** $M[X] = 3$; $D[X] = 25/3$.

179. $M[X] = 2x_0$, $M_e = x_0\sqrt{2}$, $M_o = x_0$. **180.** $M[S] = \dfrac{\pi(b+a)}{8(b-a)}$.

181. $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$. **182.** $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. **183.** $M[X] = 3$; $D[X] = 4$. **184.** $M_o = M_e = 2$. **185.** ≈ 0,84. **186.** ≈ 0,95. **187.** 12.

188. $M[Y] = 6$; $D[X] = 225$. **189.** $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 y^2}} \cdot \dfrac{1}{y^2}$.

191.

X \ Y	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{2}{3}$	0

192.

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{7}$	0
1	0	$\frac{3}{14}$
2	$\frac{2}{7}$	0
3	0	$\frac{3}{14}$

193.

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{14}$	0	0
1	0	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{28}$	0
2	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{1}{28}$	0	$\frac{1}{28}$
3	0	$\frac{3}{28}$	0	$\frac{1}{14}$	0	$\frac{1}{28}$	0

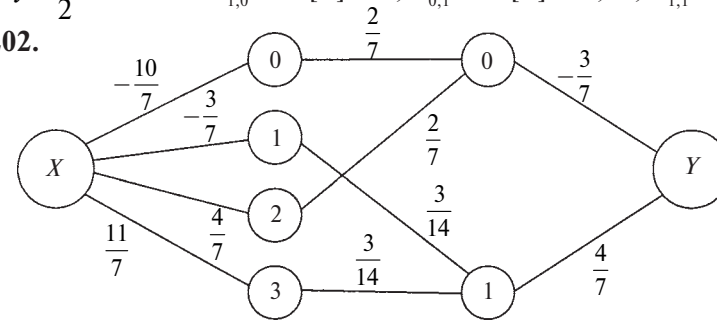
194.
$$F(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ при } x > 1,\ y > 1; \\ 0{,}5, \text{ при } x > 1,\ 0 < y \le 1 \text{ или при } 0 < x \le 1,\ y > 1; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

195. C = 1/π. **196.** $M[X/Y = -1] = 0{,}6$; $M[X/Y = 0] = 0{,}2$; $M[X/Y = 1] = -0{,}2$; $M[Y/X = -1] = 1/6$; $M[Y/X = 1] = 3/8$. **197.** $48Y - 5X - 13 = 0$. **198.** а) A = 1;

б) $F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{arctg}y + \frac{\pi}{2}\right)$; в) $P = \frac{\pi}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

200. $y = \frac{7}{2}x - 2$. **201.** $\alpha_{1,0} = M[X] = 0$; $\alpha_{0,1} = M[Y] = 0{,}65$; $\alpha_{1,1} = 0{,}15$.

202.

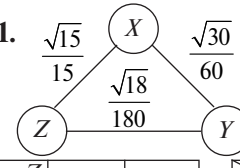


203. $f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x}\cdot e^{-3y}, \text{ если } x \geq, y \geq 0, \\ 0, \text{ в других случаях;} \end{cases}$ $Cov(X,Y) = 0$.

205. $Cov(X,Y) \approx 3$. **206.** $Cov(X,Y) \approx 0{,}06$. **207.** $\rho(X,Y) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

208. $\rho(X,Y) = 0$. **209.** Рассмотрите случайную величину X, которая принимает четыре значения ±1, ±2 с вероятностью $\frac{1}{4}$ каждое и случайную величину $Y = X^2$. Совместное распределение определяется соотношениями $P\{X = \pm 1, Y = 1\} = \frac{1}{4}$ и $P\{X = \pm 2, Y = 4\} = \frac{1}{4}$. Проверьте, что $Cov(X,Y) = 0$, хотя между X и Y существует функциональная зависимость.

211.



212.

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{6}$

;

X \ Z	0	1
0	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

;

Y \ Z	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

213.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$

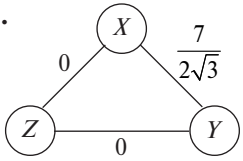
;

$X \backslash Z$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$

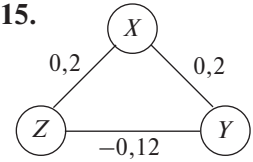
;

$Y \backslash Z$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

214.



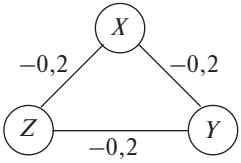
215.



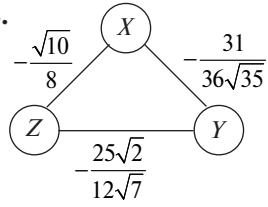
216. Три одинаковых закона распределения двумерных случайных величин

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}$	0	0

217.

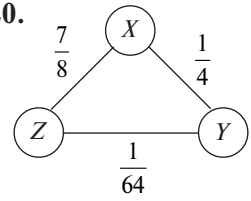


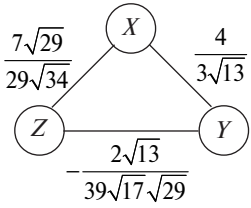
218.



219. $n/4$.

220.





Глава IV

221. ≈ 8,5 бита. **222.** В первом. **223.** Одинаково (в первом). **224.** Во второй. **225.** Во втором. **226.** Одинаково. **227.** ≈ 1,2 бита. **228.** ≈ 2,84 бита. **229.** Второго. **230.** Во второй группе. **231.** ≈ 1,64 бита. **232.** ≈ 2 бита. **233.** ≈ 1,89 бита. **234.** Уменьшится на 1,08 бита. **235.** ≈ 17 бит. **236.** ≈ 7,18 бита. **237.** ≈ 1,94 бита. **238.** ≈ 1,92 бита. **239.** ≈ 2,85 бита. **240.** Уменьшится на 1 бит. **241.** ≈ 0,92 бита. **242.** ≈ 1,23 бита. **243.** ≈ 3,56 бита. **244.** 1,6 бита. **245.** $\log(b - a)$. **246.** $\log e - \log(\ln 2)$. **247.** $(a + 1)\log(1 + a) - a\log a$. **248.** $\log 4\pi - \log b$. **249.** $\lambda\log\frac{e}{\lambda}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot\log(k!)$. **250.** $1 - \log(\ln 2)$ (бит). **251.** 1,5 бита. **252.** ≈ 0,9 бита. **253.** 6 бит. **254.** ≈ 1,04 бита. **255.** Равны. **256.** ≈ 1,02 бита. **257.** ≈ 0,67 бита. **258.** 5,62 бита. **259.** 4 бита. **260.** ≈ 2,8 бита. **261.** $\log 3-\frac{4}{3}$ (бит). **262.** ≈ 0,18 бита. **263.** ≈ 0,55 бита. **264.** 1,0:1,443:3,322 (единица нат. — логарифм берется по основанию e). **265.** $4 + \log 3$ (бит). **266.** ≈ 3,6 бита. **267.** ≈ 0,14 бита. **268.** а) 2 бита; б) $2\log 3$. **269.** $-\sum_{m=1}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}\log C_n^m+(2-n)(p\log p+q\log q)$. **270.** $-q^3\left(\log p+\frac{1+2p}{p}\log q\right)$. **271.** 6 вопросов. **272.** Достаточно 17 вопросов (считаем, что телефон имеет каждый четвертый ярославец). **273.** 9 вопросов. **274.** Первым взвешиванием сравните две тройки монет. **275.** Два. **276.** Тремя взвешиваниями. **277.** 4 взвешивания. **278.** 4 вопроса. **281.** E: 00 → 000, 01 → 011, 10 → 101, 11 → → 110. **282.** $\frac{3qp}{q^2+3qp+p^2}$. **283.** $(35p^3+21qp^2+7q^2p+q^3)\cdot q^4$. **284.** $\frac{q^2(1+3qp+9p^2)}{1+p+p^2(1+2p)}$. **285.** $\begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ pq & p^2 & q^2 & pq \\ pq & q^2 & p^2 & pq \\ q^2 & pq & pq & p^2 \end{bmatrix}$.

286. $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p^3+3p^2q & 3pq^2+q^3 \\ 3pq^2+q^3 & p^3+3p^2q \end{bmatrix}$. **287.** $p_{11}=\frac{1}{3}p^2q+p^3$,

$p_{12}=\frac{5}{6}p^2q+pq^2+\frac{1}{3}q^3$, $p_{13}=\frac{5}{6}p^2q+pq^2+\frac{1}{3}q^3$, $p_{14}=p^2q+pq^2+\frac{1}{3}q^3$.

288. а) $792p^5q^7$, б) $(792p^5+495p^4q+220p^3q^2+66p^2q^3+12pq^4+q^5)q^7$;

в) Существует 298 строк. **292.** $7q^2p(q^4+5q^2p^2+3p^4)$.

293. $(4q^3p+22q^2p^2+50qp^3+69p^4+1)\cdot q^4$. **294.** 0,0487; 0,084.

295. $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **296.** $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 01 & 01 & 01 \end{bmatrix}$. **297.** $p^2q^3(3+p)$.

298. $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

301.

Номер буквы	1	2	3	4
Кодовое обозначение	1	01	001	000

302.

Номер буквы	1	2	3	4	5	6	7	8
Кодовое обозначение	11	10	011	010	0011	0010	0001	0000

303.

Комбинация букв	АА	АБ	БА	ББ
Кодовое обозначение	1	01	001	000

Комбинация букв	ААА	ААБ	АБА	БАА	АББ	БАБ	ББА	БББ
Кодовое обозначение	1	011	010	001	00011	00010	00001	00000

304.

Комбинация букв	АА	АБ	БА	ББ
Кодовое обозначение	1	00	011	010

305.

Номер буквы	1	2	3	4	5	6	7	8
Кодовое обозначение	11	01	001	000	1111	1110	1101	1100

306.

Номер буквы	1	2	3	4	5
Кодовое обозначение по Фано	11	10	01	001	000
Кодовое обозначение по Хаффману	10	111	110	01	00

307.

Комбинация букв	АА	АБ	БА	ББ	АВ	ВА	БВ	ВБ
Кодовое обозначение	111	110	101	100	0111	0110	0101	0100
Комбинация букв	ВВ	АС	СА	БС	СБ	ВС	СВ	СС
Кодовое обозначение	0011	00101	00100	00011	00010	00001	000001	00000

308.

Комбинация букв	АААА	ААА Б	ААБА	АБАА	БАА А	ААББ	АБАБ	БААБ	ББАА
Кодовое обозначение	11	10	011	010	0011	00101	00100	00011	000101

Комбинация букв	БАБА	АББА	АБББ	БАББ	ББАБ	БББА	ББББ
Кодовое обозначение	000100	00001	0000011	0000010	0000001	00000001	00000000

309.

Номер буквы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кодовое обозначение по Фано	11	10	0111	0110	010	0011	0010	0001	00001	00000
Кодовое обозначение по Хаффману	00	10	110	111	0100	0111	01010	01011	01100	01100

Средняя длина закодированной буквы по Фано равна 2,96, а по Хаффману — 2,65.

310. Средняя длина кодового слова по методу Фано равна 3,42, а по методу Хаффмана — 3,41.

Глава V

311. а)

x_i	2	3	4	5	7	8	10
m_i	4	1	3	4	5	2	2

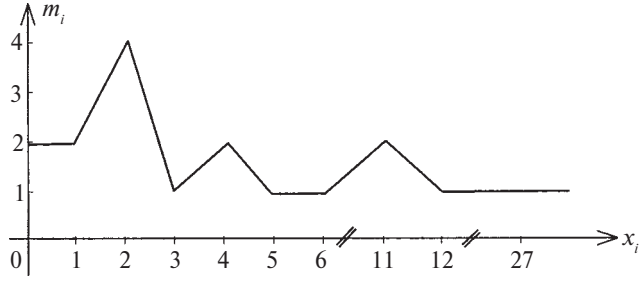
б)

x_i	2	3	4	5	7	8	10
f_i	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$

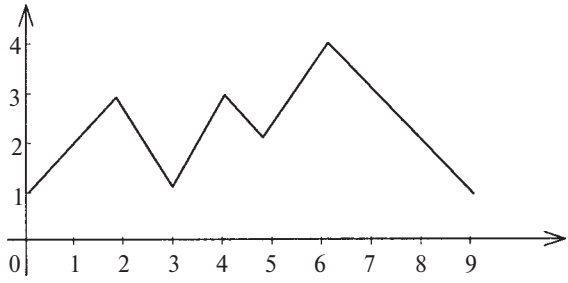
312.

$$F_{100}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ 0{,}1, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0{,}3, & \text{если } 2 < x \le 4, \\ 0{,}6, & \text{если } 4 < x \le 7, \\ 1, & \text{если } x > 7. \end{cases}$$

313.



314.

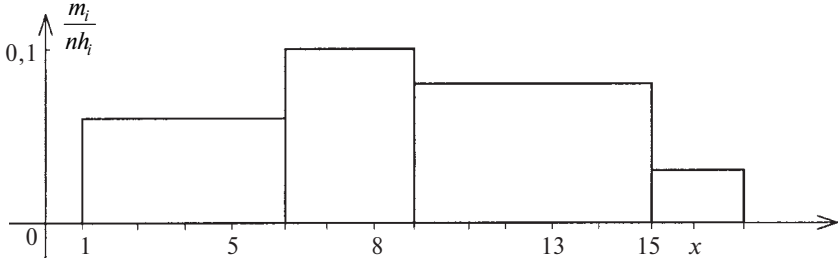


315. $R = 279$; $x^* \approx 31$.

316.

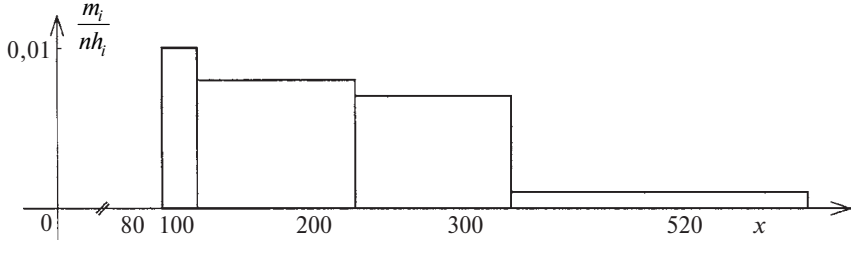
x_i	0,4	0,6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,6
f_i	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{17}$

317.



318. Аналогично 317.

319.



321. $x^* \approx 3{,}87$, $M_o = 3$, $M_e = 4$. **322.** 105%. **323.** $M_o = 18$, $M_e = 17$. **324.** Методика наиболее эффективна от непр. отношений и игнорирования; средний показатель защищенности возрос на 0,24 балла. **325.** Обучение эффективнее. **326.** $Д_{вн} = 4{,}26$, $Д_{межгр} = 0{,}57$, $Д_{общ} = 4{,}83$. **327.** $x^* = 26{,}4$; $D^* = 4{,}3$. **328.** $x^* = 7{,}11$; $D^* = 0{,}14$. **329.** $x^* = 1{,}19$; $D^* = 0{,}01$. **330.** $x^* = 15{,}58$; $D^* \approx 37{,}45$. **331.** $\approx 0{,}98$. **332.** $n \approx 100$. **333.** $3{,}164 < a < 3{,}636$. **334.** $996{,}3 < a < 1003{,}7$. **335.** $0{,}612 < \sigma < 1{,}188$. **336.** $0{,}21 < \sigma < 1{,}19$. **337.** 79%. **338.** $0{,}15 < a < 0{,}85$.

339. $45{,}37 < a < 51{,}43$ ($45{,}57 < a < 51{,}23$). **340.** $\lambda = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$.

341. 0,943. **342.** 0,0875. **343.** $y = \dfrac{2}{5}x + 2$. **344.** $y = 5{,}6x + 83{,}5$.

345. $y = 2{,}2x + 2$. **346.** $y = -20x + 390$. **347.** $(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}92 & -0{,}89 \\ & 1 & -0{,}06 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

348. $y = -7{,}14x^2 + 40{,}86x + 454$. **349.** $y_x^* = 0{,}37x + 13{,}4$; $x_y^* = 1{,}48y - 10$. **350.** $y_x^* = 1{,}48x^2 + 2{,}41x$. **351.** Согласуются, $r_s \approx 0{,}76$. **352.** $r_s \approx 0{,}17$. **353.** Коррелируют среднее, $r_s = \dfrac{7}{16}$. **354.** $r_k = \dfrac{5}{9}$. **355.** Существует полная прямая зависимость. **356.** $r_s = \dfrac{9}{13}$, $r_k = \dfrac{16}{33}$. **357.** $(\mathbf{r_k}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} \\ & 1 & -\frac{17}{45} & -\frac{7}{45} \\ & & 1 & -\frac{19}{45} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

359. $(\mathbf{r_s}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}83 & 0{,}77 & 0{,}77 \\ & 1 & 0{,}94 & 0{,}94 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. **360.** $(\mathbf{r_s}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}59 & 0{,}41 \\ & 1 & 0{,}58 \\ & & 1 \end{bmatrix}$,

$(\mathbf{r_s}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}42 & 0{,}38 \\ & 1 & 0{,}42 \\ & & 1 \end{bmatrix}$. **361.** H_0 принимается. **362.** H_0 принимается.

363. Разброс розничного товарооборота незначителен. Потребительская способность населения районов примерно одинаковая. **364.** H_0 отклоняется. **365.** Нельзя. **366.** H_0 принимается. **367.** H_0 принимается. **368.** а) H_0 принимается; б) H_0 отклоняется. **369.** Можно. **371.** H_0 принимается. **373.** Значимо.

374.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
m_i	2	4	6	6	4	2	1

375. Нет. **376.** По критерию Крюгера—Уэлча распределения различны. **377.** По критерию Пирсона суточная прибавка меда подчинена нормальному закону. **378.** $r_s = 31/35$; $\alpha = 0{,}01$. **380.** $r^* = 0{,}8$; H_0 отклоняется. **381.** Превосходят. **382.** Различия значимы. **383.** $r_s \approx 0{,}7$. **384.** На уровне значимости 0,2 результаты не случайны. **385.** По критерию Вилкоксона различия значимы при $\alpha = 0{,}05$. **386.** Различия между результатами экспериментальной и контрольной групп существенны. **387.** По критерию Манна—Уитни мужчины преодолевают субъективно более мощное сопротивление. **388.** По критерию Вилкоксона на уровне значимости 0,05 достоверные сдвиги ощущаются в навыках активного слушания и снижения эмоционального напряжения. Расхождение между «идеальным» и реальным уровнями не уменьшается. **389.** Факты свидетельствуют против проверяемой гипотезы. **390.** Различия значимы по критерию Вилкоксона на уровне значимости 0,01. **391.** По критерию Крускала—Уоллиса воздействия можно считать одинаковыми. **392.** По критерию Манна—Уитни различия несущественны. **393.** По критерию Фишера нулевая гипотеза принимается как до, так и после эксперимента.

394. $(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}83 & 0{,}77 & 0{,}8 \\ & 1 & 0{,}84 & 0{,}93 \\ & & 1 & 0{,}94 \end{bmatrix}.$

395. По критерию Фридмана различия незначительны. **396.** По критерию Розенбаума результаты эксперимента с младшими подростками эффективны. **397.** Существует средняя прямая связь. **398.** По критерию Пирсона уровень развитости мышления студентов значимо вырос. **399.** По критерию Колмогорова—Смирнова число верных ответов в экспериментальной группе стохастически больше, чем в контрольной. **400.** По критерию Фридмана результаты не являются случайными на уровне значимости 0,05.

$$(\mathbf{r}_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}2 & 0{,}425 & 0{,}6 \\ & 1 & 0{,}675 & 0{,}9 \\ & & 1 & 0{,}675 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Глава I

Множества: $A, B, C, \ldots$
$A \subseteq B$ — включение множества A в B,
$A \cup B$ — объединение множеств,
$A \cap B$, AB — пересечение множеств,
$|A|$ — число элементов множества A,
$\bar{A}$ — дополнение множества $A \subseteq \Omega$ в Ω,
$A \times B$ — прямое произведение множеств.
Выборки: r — выборка ...

A_n^r — число упорядоченных r — выборок из n — множества (размещений без повторений),
P_n — число перестановок из n — множества,
C_n^r — число неупорядоченных r — выборок из n — множества (сочетаний без повторений),
$\bar{A}_n^r$ — число размещений с повторениями,
$P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ — число перестановок с повторениями,
$\bar{C}_n^m$ — число сочетаний с повторениями.

Производящая функция: $A(t) = a_0 + a_1 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots$
$A = (a_{ij})$ — прямоугольная таблица-матрица,
A^{T} — транспонированная матрица,
I — матрица из нулей и единиц,
$\det A$ — определитель матрицы.
$G(V)$ — граф с множеством вершин V,
$U(V)$ — полный граф,
$\bar{G}$ — дополнение графа G в полном графе U,
$\rho(a)$ — число ребер, инцидентных вершине a,
$P(V)$ — вероятностный граф.

Глава II

Случайные события: $A, B, C, \ldots$

$A + B$ — сумма случайных событий A и B,

$A \cdot B$ — произведение случайных событий A и B,

$A \subset B$ — событие A предшествует событию B,

$\overline{A}$ — отрицание события A,

$P(A)$ — вероятность случайного события A,

$P(A/B)$ — условная вероятность события A при условии выполнения события B,

$P_n(m)$ — вероятность ровно m «успехов» в серии из n повторных независимых испытаний,

p — вероятность «успеха» при одном испытании,

$P_n(m_1 \le m \le m_2)$ — вероятность числа «успехов» от m_1 до m_2 в серии из n повторных независимых испытаний,

m_0 — наивероятнейшее число,

$\phi(x)$, $\Phi(x)$ — табличные функции Лапласа,

$P(m, \lambda)$ — распределение Пуассона,

$\dfrac{m}{n}$ — относительная частота испытания,

$\mathbf{P}$ — матрица перехода цепи Маркова,

$\mathbf{P}^{(n)}$ — матрица перехода цепи Маркова за n шагов,

p_{ij} — вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j,

$\vec{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — вектор начальных вероятностей.

Глава III

Случайные величины: $X, Y, Z, \ldots$

$X + Y$ — сумма случайных величин X и Y,

$X \cdot Y$ — произведение случайных величин X и Y,

$P\{X = x_i\} = p_i$ — закон распределения дискретной случайной величины X,

д.с.в. — дискретная случайная величина,

$F(x)$ — интегральная функция распределения,

н.с.в. — непрерывная случайная величина,

$f(x)$ — дифференциальная функция распределения или плотность вероятности,

I_A — индикатор события A,

$M[X]$ — математическое ожидание случайной величины X,

$\alpha_S[X]$ — начальные моменты порядка S,
M_o — мода,
M_e — медиана,
$D[X]$ — дисперсия случайной величины X,
σ_X — среднее квадратическое отклонение,
$\mu_S[X]$ — центральные моменты порядка S,
A_s — асимметрия,
E_k — эксцесс,
(X, Y) — двумерные случайные величины,
$F(x, y)$ — интегральная функция двумерной случайной величины,
$f(x, y)$ — дифференциальная функция двумерной случайной величины,
$\alpha_{R,S}$ — начальные моменты порядка $R + S$ двумерной случайной величины,
$\mu_{R,S}$ — центральные моменты порядка $R + S$ двумерной случайной величины,
$Cov(X,Y)$ — ковариация,
$\rho(X,Y)$ — коэффициент корреляции,
$M[Y/x_i]$ — условные математические ожидания,
$f[x, y]$ — условная плотность распределения.

Глава IV

$A_1, A_2, ..., A_n$ — исходы опыта α,
$H(\alpha)$ — энтропия опыта α,
бит — единица измерения энтропии и информации,
$H(X)$ — энтропия случайной величины X,
$H(E)$ — энтропия цепи Маркова,
$H(\beta/A)$ — условная энтропия опыта β относительно исхода A,
$H(\beta/\alpha)$ — условная энтропия опыта β относительно опыта α,
$H(E/E_k)$ — условная энтропия цепи Маркова относительно одного из ее состояний E_k,
$I(\alpha, \beta)$ — количество информации об опыте β, содержащейся в опыте α,
$D: b \to c$ — схема кодирования,
(m, n)-код — код из n символов с m информационными символами,
$(2, n)$-код — двоичный код,
$n - m$ — избыточность кода,

$R = \dfrac{m}{n}$ — скорость кода,

$d(a, b)$ — расстояние между кодовыми словами a и b,
$w(a)$ — вес слова a.

Глава V

$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ — выборка объема n,
m_i — частота элемента x_i,

$\dfrac{m_i}{n} = f_i$ — относительная частота элемента x_i,

$F_n(x)$— эмпирическая функция распределения,
R — размах варьирования,
x^* — выборочная средняя,

D_n^* — выборочная дисперсия,

$D_{\text{внгр}}$ — внутригрупповая дисперсия,
$D_{\text{межгр}}$ — межгрупповая дисперсия,
$D_{\text{общ}}$ — общая дисперсия,

σ_x^* — выборочное среднее квадратическое отклонение,

α_s^* — выборочные начальные моменты порядка S,

μ_s^* — выборочные центральные моменты порядка S,

$M_{\text{о}}$ — мода вариационного ряда,
$M_{\text{е}}$ — медиана вариационного ряда,
$\Phi(t)$ — функция Лапласа,
γ — надежность,
$k(x, y)$ — выборочная ковариация,
$r(x, y)$ — выборочный коэффициент корреляции,
$\mathbf{(r)}$ — корреляционная матрица,
η — выборочное корреляционное отношение,

$y_x^* = f(x)$ — уравнение регрессии Y на X,

d — разность между рангами,
S^2 — исправленная дисперсия,
r_s — коэффициент ранговой корреляции Спирмена,
r_k — коэффициент ранговой корреляции Кендалла,

χ^2— критерий Пирсона,

t — критерий Стьюдента,

H_0 — нулевая гипотеза,

H_1 — альтернативная гипотеза,

α — вероятность ошибки I рода (отклонение H_0, которая верна),

β — вероятность ошибки II рода (принятие H_0, которая неверна),

H — критерий Крускала—Уоллиса,

U — критерий Манна—Уитни,

χ_r^2 — критерий Фридмана,

λ — критерий Колмогорова—Смирнова,

T — критерий Вилкоксона,

L — критерий Пейджа,

Q — критерий Розенбаума,

F — критерий Фишера—Снедекора,

T — критерий Крамера—Уэлча,

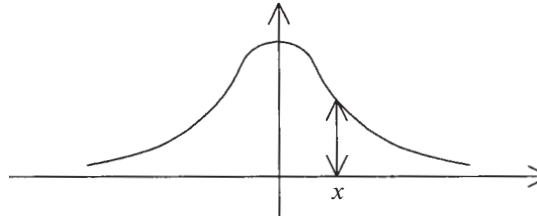
φ — критерий Фишера,

B/C — критерий Барлетта.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

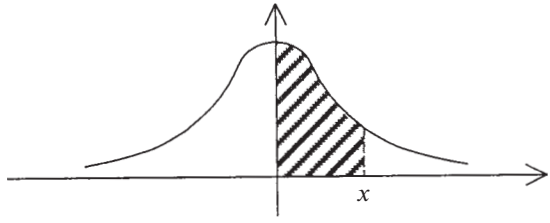
Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$
0,0	0,399	1,1	0,218	2,2	0,036
0,1	0,397	1,2	0,194	2,3	0,028
0,2	0,391	1,3	0,171	2,4	0,022
0,36	0,381	1,4	0,150	2,5	0,018
0,4	0,368	1,5	0,130	2,6	0,014
0,5	0,352	1,6	0,110	2,7	0,010
0,6	0,333	1,7	0,094	2,8	0,008
0,7	0,312	1,8	0,079	2,9	0,006
0,8	0,290	1,9	0,066	3,0	0,004
0,9	0,266	2,0	0,054	3,2	0,002
1,0	0,242	2,1	0,044	3,5	0,001

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,000	1,1	0,364	2,2	0,486
0,1	0,040	1,2	0,384	2,3	0,489
0,2	0,080	1,3	0,403	2,4	0,492
0,36	0,118	1,4	0,419	2,5	0,494
0,4	0,155	1,5	0,433	2,6	0,495
0,5	0,192	1,6	0,445	2,7	0,496
0,6	0,226	1,7	0,455	2,8	0,497
0,7	0,258	1,8	0,464	2,9	0,498
0,8	0,288	1,9	0,471	3,0	0,499
0,9	0,316	2,0	0,477	3,4	0,4997
1,0	0,341	2,1	0,482	3,8	0,4999

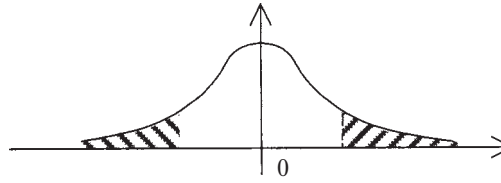
Приложение 3

Распределение Пуассона $P\{X = m\} = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,3	0,6	1	2	3	4
0	0,91	0,74	0,55	0,37	0,14	0,05	0,02
1	0,09	0,22	0,34	0,37	0,27	0,15	0,07
2	0,01	0,03	0,10	0,18	0,27	0,22	0,15
3	0,00	0,00	0,02	0,06	0,18	0,22	0,20
4			0,00	0,02	0,09	0,17	0,19
5				0,00	0,04	0,10	0,16
6					0,01	0,05	0,10
7					0,00	0,02	0,06
8						0,01	0,03
9						0,00	0,01
10							0,00

Приложение 4

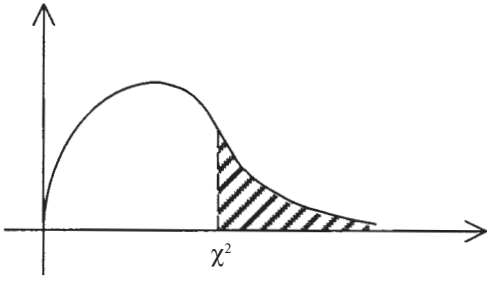
Распределение Стьюдента $t_\alpha = t(\alpha, n)$



n \ α	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
2	2,92	4,30	6,97	9,52
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,90	2,37	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
12	1,78	2,18	2,68	3,06
14	1,76	2,15	2,62	2,98
16	1,75	2,12	2,58	2,92
18	1,73	2,10	2,55	2,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82
30	1,70	2,04	2,46	2,75
50	1,68	2,01	2,40	2,68
70	1,67	2,00	2,38	2,65
100	1,66	1,98	2,36	2,63
∞	1,65	1,96	2,33	2,58

Приложение 5

χ^2 — распределение



m \ α	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	2,7	3,8	5,4	6,6
2	4,6	6,0	7,8	9,2
3	6,3	7,8	9,8	11,3
4	7,8	9,5	11,7	13,3
5	9,2	11,1	13,4	15,1
6	10,6	12,6	15,0	16,8
7	12,0	14,1	16,6	18,5
8	13,4	15,5	18,2	20,1
9	14,7	16,9	19,7	21,7
10	16,0	18,3	21,2	23,2
11	17,3	19,7	22,6	24,7
12	18,5	21,0	24,1	26,2
13	19,8	22,4	25,5	27,7
14	21,1	23,7	26,9	29,1
15	22,3	25,0	28,3	30,6
16	23,5	26,3	29,6	32,0
17	24,8	27,6	31,0	33,4
18	26,0	28,9	32,3	34,8
19	27,2	30,1	33,7	36,2
20	28,4	34,1	35,0	37,6
21	29,6	32,7	36,3	38,9
22	30,8	33,9	37,7	40,3
23	32,0	35,2	39,0	41,6
24	33,2	36,4	40,3	43,0
25	34,4	37,7	41,6	44,3

Приложение 6

Критические точки распределения *F* Фишера—Снедекора (k_1(k_2) — число степеней свободы большей (меньшей) дисперсии)

Уровень значимости α = 0,01										
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6054
2	98,5	99,0	99,2	99,25	99,3	99,33	99,34	99,36	99,38	99,4
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1
6	13,8	11,0	9,8	9,2	8,8	8,5	8,3	8,1	8,0	7,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	7,0	6,8	6,7	6,6
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,2	6,0	5,9	5,8
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,6	5,5	5,4	5,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9
11	9,9	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,9	4,7	4,6	4,5
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,7	4,5	4,4	4,3

Уровень значимости α = 0,05										
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242
2	18,5	19,0	19,2	19,25	19,3	19,33	19,36	19,37	19,38	19,38
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	7,7	7,0	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	6,04	6,0	5,96
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,9	4,8	4,78	4,74
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,15	4,1	4,06
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,8	3,7	3,68	3,63
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,44	3,4	3,34
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,18	3,13
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,07	3,02	2,97
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,95	2,9	2,86
12	4,75	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,85	2,8	2,76

Приложение 7

Критические значения критерия *U* Манна—Уитни

Уровень значимости α = 0,05

n_2 \ n_1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	1																			
6	3	5																		
9	6	12	21																	
12	9	17	30	42																
15	12	23	39	55	72															
18	16	28	48	68	88	109														
21	19	34	57	81	105	130	154													
24	22	39	66	94	122	150	179	207												
27	25	45	75	107	139	171	203	236	268											
30	28	50	85	120	156	192	228	265	301	338										
33	31	56	94	133	173	213	253	293	334	374	415									
36	35	61	103	146	189	233	278	322	367	411	456	501								
39	38	67	112	159	206	254	302	351	399	448	497	546	595							
42	41	72	121	172	223	275	327	380	432	485	538	591	644	697						
45	44	78	131	185	240	296	352	408	465	522	579	636	693	750	808					
48	47	83	140	198	257	317	377	437	498	559	620	681	742	804	865	927				
51	50	89	149	211	274	338	402	466	531	596	661	726	791	857	922	988	1054			
54	53	94	158	224	291	359	427	495	564	633	702	771	841	910	980	1050	1119	1189		
57	57	100	167	237	308	379	451	524	597	670	743	816	890	964	1037	1111	1185	1259	1333	
60	60	105	177	250	325	400	476	553	630	707	784	862	939	1017	1095	1199	1251	1329	1407	1486

Окончание приложения 7

Уровень значимости α = 0,01

n_2 \ n_1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	0																			
6	1	3																		
9	3	7	14																	
12	5	11	21	31																
15	7	15	28	42	56															
18	9	19	36	53	70	88														
21	10	22	42	63	84	105	127													
24	12	26	49	74	98	123	149	174												
27	14	30	57	85	113	142	171	200	229											
30	15	34	64	95	127	160	192	225	258	292										
33	17	38	72	106	142	178	214	251	288	325	362									
36	19	42	79	117	156	196	236	277	318	358	399	440								
39	21	46	86	128	171	214	258	303	347	392	437	482	527							
42	23	50	94	139	186	233	280	328	377	425	474	523	572	621						
45	25	54	101	150	200	251	303	354	407	459	511	564	617	670	723					
48	27	58	109	161	215	269	325	380	436	492	549	606	662	719	776	834				
51	29	63	116	172	229	288	347	406	466	526	587	647	708	769	830	891	952			
54	31	67	124	183	244	306	369	432	496	560	624	689	753	818	883	948	1013	1078		
57	33	71	131	194	259	324	391	458	526	593	662	730	799	867	936	1005	1074	1141	1213	
60	35	75	138	205	273	343	413	484	555	627	699	772	844	917	990	1063	1136	1209	1282	1356

Приложение 8

Критические значения критерия тенденций *L* Пейджа

n	*c* (количество условий)				**α**
	3	**4**	**5**	**6**	
2	—	60	106	173	0,01
	28	58	103	166	0,05
3	42	87	155	252	0,01
	41	84	150	244	0,05
4	55	114	204	331	0,01
	54	111	197	321	0,05
5	68	141	251	409	0,01
	66	137	244	397	0,05
6	81	167	299	486	0,01
	79	163	291	474	0,05
7	93	193	346	563	0,01
	91	189	338	550	0,05
8	106	220	393	640	0,01
	104	214	384	625	0,05
9	119	246	441	717	0,01
	116	240	431	701	0,05
10	131	272	487	793	0,01
	128	266	477	777	0,05
11	144	298	534	869	0,01
	141	292	523	852	0,05
12	156	324	581	946	0,01
	153	317	570	928	0,05

Приложение 9

Критические значения критерия *Q* Розенбаума

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
α = 0,05																
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	8	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7

Окончание приложения 9

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
α = 0,01																
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

Приложение 10

Критические значения критерия *T* Вилкоксона

n	α	
	0,05	0,01
5	0	—
6	2	—
7	3	0
8	5	1
9	8	3
10	10	5
11	13	7
12	17	9
13	21	12
14	25	15
15	30	19
16	35	23
17	41	27
18	47	32
19	53	37
20	60	43
21	67	49
22	75	55
23	83	62
24	91	69
25	100	76
26	110	84
27	119	92

n	α	
	0,05	0,01
28	130	101
29	140	110
30	151	120
31	163	130
32	175	140
33	187	151
34	200	162
35	213	173
36	227	185
37	241	198
38	256	211
39	271	224
40	286	238
41	302	252
42	319	266
43	336	281
44	353	296
45	371	312
46	389	328
47	407	345
48	426	362
49	446	379
50	466	397

Приложение 11

Критические значения критерия χ_r^2 Фридмана для количества условий $c = 3$ и количества испытуемых от двух до девяти ($2 \le n \le 9$)

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$	
χ_r^2	α	χ_r^2	α	χ_r^2	α	χ_r^2	α
0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0
1	0,83	0,67	0,95	0,5	0,93	0,4	0,95
3	0,50	2,0	0,53	1,5	0,65	1,2	0,69
4	0,17	2,7	0,36	2,0	0,43	1,6	0,52
		4,7	0,2	3,5	0,27	2,8	0,37
		6,0	0,03	4,5	0,13	4,8	0,12
				6,0	0,07	5,2	0,09
				6,5	0,04	6,2	0,05
				8,0	0,005	6,4	0,04
						7,6	0,02
						8,4	0,01

$n = 6$		$n = 7$		$n = 8$		$n = 9$	
χ_r^2	α	χ_r^2	α	χ_r^2	α	χ_r^2	α
0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0
0,33	0,96	0,3	0,97	0,25	0,97	0,22	0,97
1,0	0,74	1,0	0,69	0,75	0,8	0,67	0,81
1,33	0,57	2,0	0,49	1,0	0,65	1,0	0,62
2,33	0,43	3,0	0,27	1,75	0,53	1,5	0,53
3,0	0,25	4,5	0,1	2,25	0,36	2,0	0,4
4,0	0,18	6,0	0,05	3,0	0,29	2,7	0,33
5,0	0,07	7,0	0,03	4,0	0,15	3,5	0,18
7,0	0,03	8,0	0,02	5,0	0,1	4,0	0,16
9,0	0,01	10,0	0,004	6,25	0,05	5,0	0,08
				7,0	0,03	6,0	0,06
				9,0	0,01	10,0	0,004

Окончание приложения 11

Критические значения критерия χ_r^2 Фридмана для количества условий $c = 4$ и $2 \le n \le 4$

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$			
χ_r^2	α	χ_r^2	α	χ_r^2	α	χ_r^2	α
0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	1,0	5,4	0,16
0,6	0,96	0,6	0,96	0,3	0,99	5,7	0,14
1,2	0,83	1,0	0,91	0,6	0,93	6,0	0,11
1,8	0,79	1,8	0,73	0,9	0,90	6,3	0,09
2,4	0,63	2,2	0,61	1,2	0,80	6,6	0,08
3,0	0,54	2,6	0,52	1,5	0,75	6,9	0,07
3,6	0,46	3,4	0,45	1,8	0,68	7,2	0,054
4,2	0,38	3,8	0,34	2,1	0,65	7,5	0,052
4,8	0,21	4,2	0,30	2,4	0,52	7,8	0,036
5,4	0,17	5,0	0,21	2,7	0,51	8,1	0,033
6,0	0,04	5,4	0,18	3,0	0,43	8,4	0,019
		5,8	0,15	3,3	0,39	8,7	0,014
		6,6	0,08	3,6	0,36	9,0	0,012
		7,0	0,05	3,9	0,32		
		7,4	0,03	4,5	0,24		
		8,2	0,02	4,8	0,20		
		9,0	0,002	5,1	0,19		

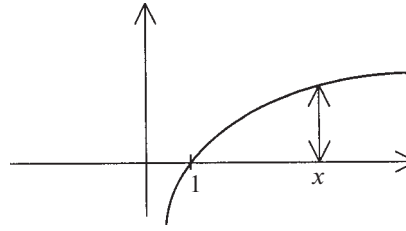
Приложение 12

Критерий λ Колмогорова—Смирнова

λ	P	λ	P	λ	P
0,30	1,000	0,76	0,610	1,00	0,270
0,37	0,999	0,79	0,561	1,21	0,107
0,40	0,997	0,82	0,512	1,24	0,092
0,43	0,993	0,85	0,465	1,27	0,079
0,46	0,984	0,88	0,421	1,30	0,068
0,49	0,970	0,91	0,379	1,35	0,052
0,52	0,950	0,94	0,400	1,40	0,040
0,55	0,923	0,97	0,304	1,50	0,022
0,58	0,890	1,03	0,239	1,60	0,012
0,61	0,851	1,07	0,202	1,70	0,006
0,64	0,807	0,10	0,178	1,80	0,003
0,67	0,760	1,13	0,156	1,90	0,002
0,70	0,711	1,16	0,136	2,00	0,001
0,73	0,661	1,19	0,118	2,10	0,0003

Приложение 13

Таблица двоичных логарифмов

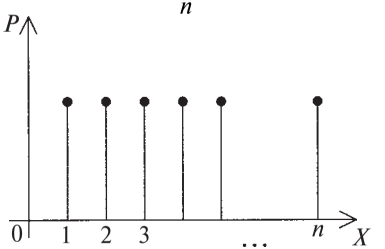
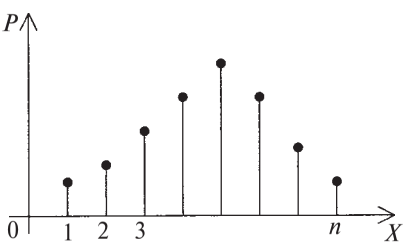


x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$	x	$\log_2 x$
3	1,59	18	4,17	54	5,76
4	2,00	20	4,32	57	5,83
5	2,32	22	4,46	60	5,90
6	2,58	24	4,59	63	5,98
7	2,81	26	4,70	66	6,04
8	3,00	28	4,81	69	6,11
9	3,17	30	4,91	72	6,17
10	3,32	33	5,04	76	6,23
11	3,46	36	5,17	78	6,29
12	3,59	39	5,29	81	6,34
13	3,70	42	5,40	85	6,41
14	3,81	45	5,49	90	6,49
15	3,91	48	5,59	95	6,57
16	4,00	51	5,67	100	6,63

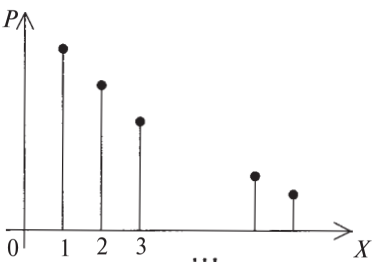
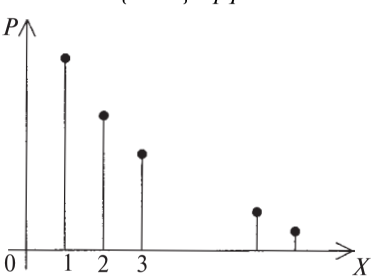
Приложение 14

Характеристики законов распределения

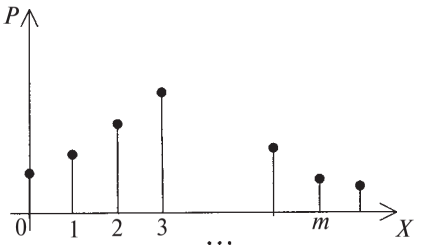
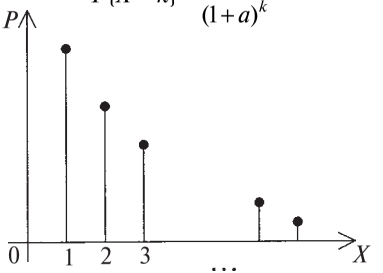
А. Дискретные законы

Закон	Аналитическое выражение и график	Математическое ожидание	Дисперсия	Энтропия
1. Равномерный	$P\{X=k\}=\frac{1}{n}\ (1\le k\le n)$ 	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{2}$	$\log n$
2. Биномиальный	$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ 	np	npq	$-n(p\log p+q\log q)-$ $-\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k}\log C_n^k$

Продолжение приложения 14

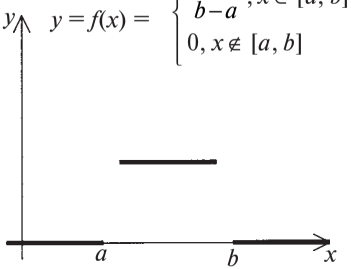
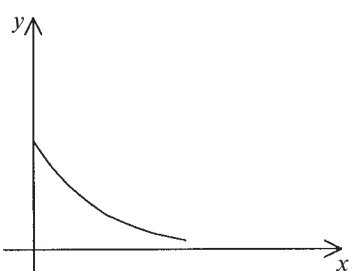
Закон	Аналитическое выражение и график	Математическое ожидание	Дисперсия	Энтропия
3. Пуассона	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ 	λ	λ	$\lambda\log\frac{e}{\lambda}+$ $+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\log(k!)$
4. Геометрический	$P\{X=k\}=pq^{k-1}$ 	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$-\log p-\frac{q}{p}\log q$

Продолжение приложения 14

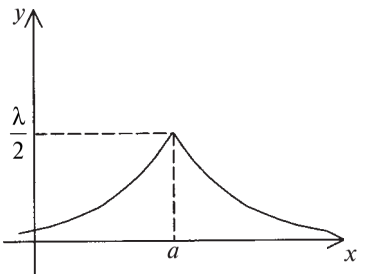
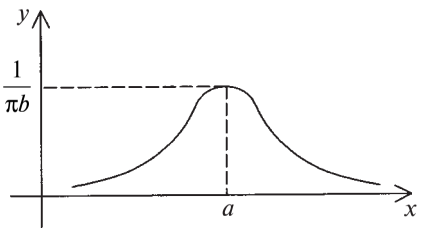
Закон	Аналитическое выражение и график	Математическое ожидание	Дисперсия	Энтропия
5. Гипергеометрический	$P\{X=i\}=\dfrac{C_m^i \cdot C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k}$ 	$\dfrac{k \cdot m}{n}$	$\dfrac{km(n-m)(n-k)}{n^2(n-1)}$	$\log C_n^k - -\sum\limits_{i=0}^{m} \dfrac{C_m^i \cdot C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k} \cdot \cdot(\log C_m^i + \log C_{n-m}^{k-i})$
6. Паскаля	$P\{X=k\}=\dfrac{a^{k-1}}{(1+a)^k}$ 	$1 + a$	$a(1 + a)$	$(1 + a)\log(1 + a) - - a\log a$

Продолжение приложения 14

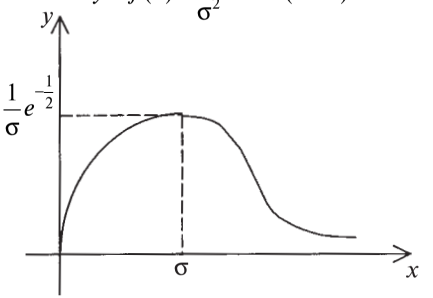
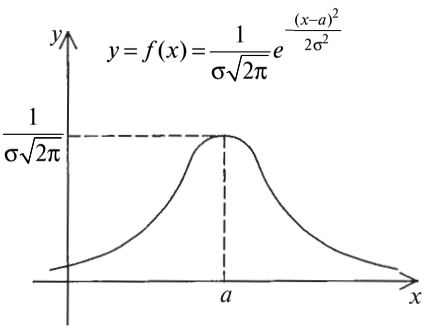
Б. Непрерывные законы

Закон	Аналитическое выражение и график	Математическое ожидание	Дисперсия	Энтропия
1. Равномерный	$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, x \in [a, b] \\ 0, x \notin [a, b] \end{cases}$ 	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(a-b)^2}{2}$	$\log(b-a)$
2. Показательный	$y = f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ 	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$\log\dfrac{e}{\lambda}$

Продолжение приложения 14

Закон	Аналитическое выражение и график	Математическое ожидание	Дисперсия	Энтропия
3. Лапласа (показательный двусторонний)	$y = f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\lvert x-a\rvert}$ 	a	$\frac{2}{\lambda}$	$\log\frac{2}{\lambda}$
4. Коши	$y = f(x) = \frac{b}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-a)^2 + b^2}$ 	a	—	$\log\frac{4\pi}{6}$

Окончание приложения 14

Закон	Аналитическое выражение и график	Математическое ожидание	Дисперсия	Энтропия
5. Рэлея	$y = f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ (x \geq 0)$ 	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{c}{2}+1\right)\log e$ $c \approx 0{,}577$
6. Нормальный		a	σ^2	$\log(\sigma\sqrt{2\pi e})$

ЛИТЕРАТУРА

Афанасьев В.В. Введение в теорию вероятностей с помощью графов. 1999. № 35. (Приложение к газете «Первое сентября».)

Афанасьев В.В. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учеб. пособие. Ярославль, 1994.

Афанасьев В.В. Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач: Монография. Ярославль, 1996.

Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М., 1969.

Гласс Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. М., 1976.

Глеман М. Вероятность в играх и развлечениях: Элементы теории вероятностей в курсе сред. школы. М., 1979.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. 7-е изд. М., 2000.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., 1988.

Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). М., 2004.

Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М., 2002.

Райзер Г.- Дж. Комбинаторная математика. М., 1966.

Растригин Л.А. По воле случая. М., 1986.

Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963.

Садовский Л.Е. Математика и спорт. М., 1985.

Солодовников А.С. Теория вероятностей: Учеб. пособие. М., 1978.

Федосеев В.Н. Решение вероятностных задач: Ч. 2. М., 1999.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. М., 1984.

Холл М. Комбинаторика. М., 1970.

Ширяев А.Н. Вероятность: Учеб. пособие. М., 1980.

Alder H.Z., Roessler E.B. Introduction to Probability and Statistics. San Francisco. 1975.

Учебное издание

Афанасьев Владимир Васильевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика»

Зав. редакцией *С.В. Платонов*
Редактор *В.В. Бердников*
Зав. художественной редакцией *И.А. Пшеничников*
Компьютерная верстка *А.И. Попов*
Корректор *Т.Я. Кокорева*

Отпечатано с диапозитивов, изготовленных
ООО «Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС».

Лицензия ИД № 03115 от 10.11.2000.
Санитарноэпидемиологическое заключение
№ 77.99.24.953.Д.006900.08.06 от 08.08.2006 г.
Сдано в набор 10.09.05. Подписано в печать 07.12.05.
Формат 60×90/16. Печать офсетная. Бумага газетная. Усл. печ. л. 22,00.
Тираж 10 000 экз. (1-й завод 1–5 000 экз.).
Заказ № .

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС.
119571, Москва, просп. Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет.
Тел. 437-11-11, 437-25-52, 437-99-98; тел./факс 735-66-25.
E-mail: vlados@dol.ru
http://www.vlados.ru

ГУП РК «Республиканская типография им. П.Ф. Анохина».
185005, Петрозаводск, ул. «Правды», 4.