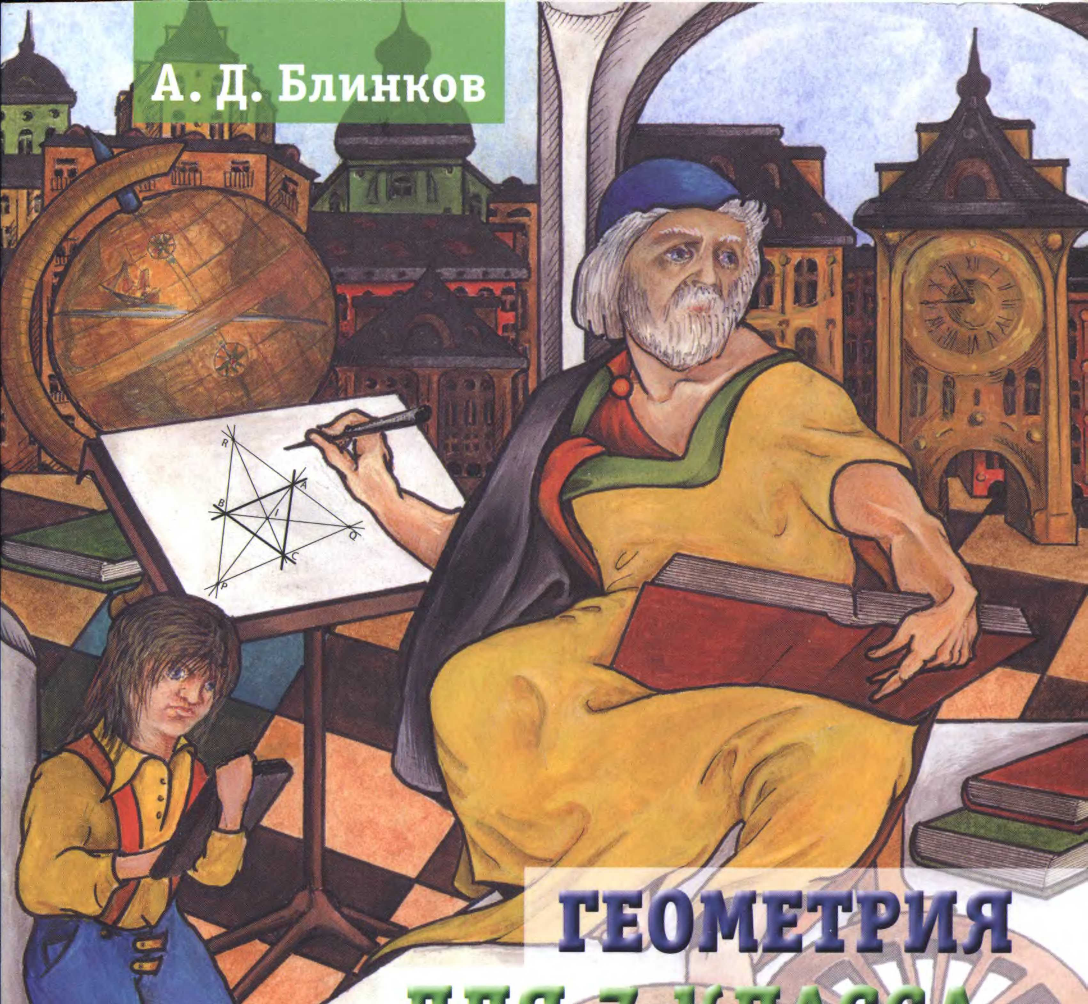
А. Д. Блинков



ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА, ОБЫЧНАЯ И НЕ ОЧЕНЬ

ЧАСТЬ 2

ШКОЛЬНЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
КРУЖКИ

Школьные математические кружки
Выпуск 22

А. Д. Блинков

Геометрия для 7 класса, обычная и не очень

Часть 2

Издательство МЦНМО
Москва, 2021

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Блинков А. Д.

Б69 Геометрия для 7 класса, обычная и не очень: В 2 ч. Часть 2. — М.: МЦНМО, 2021. — 144 с.: ил. — (Школьные математические кружки; Вып. 22).

ISBN 978-5-4439-1584-5
ISBN 978-5-4439-1583-8 (ч. 2)

Двадцать вторая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена занятиям по геометрии со школьниками 7 класса. В неё вошли разработки ещё восьми занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для преподавателя.

Значительный объём книжки занимает список дополнительных задач, их решения и комментарии. Приведён список использованной литературы, а также указаны авторы задач. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям элементарной геометрии.

Учебно-методическое издание

Александр Давидович Блинков

Геометрия для 7 класса, обычная и не очень. Часть 2

Серия «Школьные математические кружки»

Иллюстрация и оформление обложки
художник Евгений Чижевский

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+

Подписано в печать 29.04.2021 г. Формат $60 \times 88\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объём 9 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № 1038.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1584-5
ISBN 978-5-4439-1583-8 (ч. 2)

Предисловие

Вторая часть книги «Геометрия для 7 класса» содержит восемь занятий, так же как и первая, но тематика этих занятий не вполне обычная. Решение задач занятий 9—12 даст школьникам возможность закрепить навыки, полученные при освоении традиционных тем, в различных геометрических конструкциях, которые практически отсутствуют в стандартных школьных учебниках. Занятия 13—16 посвящены темам, которые не всегда включаются в программу 7 класса, но, по нашему убеждению, должны там быть, несмотря на то, что их изучение может вызывать некоторые трудности. Они помещены в конце книги, и в зависимости от уровня технической или логической подготовки учащихся их изучение можно перенести в 8 класс (по усмотрению преподавателя).

При этом и во второй части книги отсутствуют занятия, связанные с окружностью (за исключением использования её определения как геометрического места точек), так как в большинстве случаев этот материал не входит в программу 7 класса. Кроме того, задачам, связанным с окружностями, посвящена семнадцатая книжка серии «Вписанные углы» (авторы — Ю. Блинков и Е. Горская), первые два занятия которой можно при желании использовать для работы с семиклассниками. Отсутствуют и экстремальные задачи, хотя некоторые из них доступны семиклассникам, так как таким задачам планируется посвятить отдельную книжку.

По-прежнему в материалы каждого занятия входят вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; упражнения и задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя (в том числе и комментарии в начале занятия, поясняющие основное содержание и цели занятия и содержащие перечень необходимых предварительных сведений).

Отдельным списком представлены дополнительные задачи различного уровня трудности, часть из которых в какой-то степени дублирует задачи, предложенные для занятий, а часть дополняет их новыми идеями (наиболее сложные задачи отмечены знаком *). Эти задачи можно использовать на усмотрение преподавателя (или обучающегося). Для них также приведены подробные решения. Для удобства в конце каждого занятия приведен список задач из этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля его освоения и углубления. Следует учесть, что есть задачи, которые могут быть отнесены к нескольким занятиям (в том числе из разных частей книги).

Краткое содержание и цели занятий

Отметим также, что в тексте есть ссылки и на задачи из первой части книги.

Занятие 9. Разобьем на равнобедренные треугольники. Бо́льшая часть задач, предлагаемых на этом занятии, лежит на стыке классической и комбинаторной геометрии. Разбор и решение этих задач послужат формированию у школьников комбинаторного мышления при рассмотрении несложных геометрических конструкций. Помимо этого, приобретаются навыки простейших оценок на основании теорем о сумме углов и внешнем угле треугольника. Отдельное внимание уделяется умению строить примеры и контрпримеры, продолжая «линию» прошлого занятия. Для решения предложенных задач достаточно знаний, умений и навыков, полученных на предыдущих занятиях, в частности умения считать углы и применять свойства и признаки равнобедренного и прямоугольного треугольников.

Занятие 10. Геометрия на клетчатой бумаге. Основная идея этого занятия — применение накопленных навыков и умений в нестандартной ситуации. Решение и разбор предложенных задач не только призваны закрепить эти навыки, но и направлены на развитие геометрического воображения школьников. Это занятие также может служить пропедевтикой дальнейшей работы с системой координат и векторами. Основное внимание уделено построениям на клетчатой бумаге и их обоснованиям, а также вычислению углов и сумм углов. При желании занятие можно дополнить упражнениями на вычисление площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге, а также задачами на треугольной сетке (из раздела дополнительных задач).

Занятие 11. Перегибая бумагу, получаем задачу. Это занятие, так же как и предыдущее, ориентировано на применение накопленных навыков и умений в нестандартных ситуациях. Основу занятия составляют задачи, возникающие при перегибании листа бумаги. Они привлекательны своей естественностью и давно вошли в практику различных математических олимпиад, причем это задачи и на построение, и на доказательство, и на вычисление. Решение и разбор таких задач позволяют также закрепить наглядные представления о фигурах, симметричных относительно прямой, и показать возможность применения симметрии для строгих рассуждений.

Занятие 12. Квадраты. Это занятие посвящено задачам, в которых используются простейшие свойства квадрата. Наличие квадратов в условиях задач даёт возможность повторить и закрепить навыки, выработанные на предыдущих занятиях: применение свойств равнобедренных и прямоугольных треугольников и параллельности; использование дополнительных построений, в частности симметрии, для получения равных треугольников или для счёта углов. В ряде задач рассматриваются комбинации квадратов с равнобедренными или равносторонними треугольниками, что позволяет не только повторить некоторые уже встречавшиеся приёмы, но и познакомить школьников с новым методом решения задач, который принято называть «обратным ходом».

Занятие 13. Неравенство треугольника. Основная цель этого занятия — научить школьников применять неравенство треугольника в различных геометрических конструкциях. Рассматриваются как задачи с числовыми данными, так и доказательство неравенств общего вида. Решение некоторых задач даёт возможность вновь обратиться к типовым дополнительным построениям, которые встречались на предыдущих занятиях. Кроме того, разбор и решение предлагаемых задач позволяют отработать элементарные алгебраические навыки работы с неравенствами.

Занятие 14. Соответствия между длинами сторон и величинами углов треугольника. Основное содержание этого занятия — задачи, для решения которых применяются простейшие соотношения между сторонами и углами треугольника: напротив большей стороны треугольника лежит больший угол, и обратно, напротив большего угла лежит бóльшая сторона. В школьных учебниках эти факты, как правило, не выделяются, поэтому в начале занятия приведено их доказательство. Помимо прочего, освоение предложенного материала позволяет повторить важное следствие из теоремы о внешнем угле треугольника, а также строго доказать неравенство треугольника.

Занятие 15. Геометрические места точек. Приоритетная цель этого занятия — повторить основные геометрические места точек на плоскости и научиться с их помощью решать задачи на поиск других геометрических мест точек. Отдельное внимание уделено двум возможным типам рассуждений при решении таких задач: доказательству взаимно обратных утверждений и построению цепочки равносильных утверждений. Некоторые задачи этого занятия дают возможность повторить свойства и признаки равнобедренного и прямоугольного треугольников и материал занятия 14, а другие позволяют при желании обоснованно ввести понятия описанной, вписанной и вневписанных окружностей для треугольника.

Занятие 16. Применение геометрических мест точек. На этом занятии предлагаются задачи, для решения которых используются серединный перпендикуляр к отрезку и биссектриса угла в качестве геометрических мест точек. В отличие от задач занятия 15, в условиях задач не используется словосочетание ГМТ. Отдельная цель — приобретение учащимися навыков точных и грамотных ссылок на используемые геометрические места точек в процессе обсуждении решений. Кроме того, некоторые задачи этого занятия дают возможность рассмотреть геометрические конструкции, которые ранее почти не встречались.

По традиции в конце книжки все занятия представлены в виде дидактических материалов. Понятно, что преподаватель математического кружка (или учитель на уроках или факультативных занятиях) может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Выражаю благодарность всем авторам книг и статей, указанных в списке литературы, а также авторам всех использо-

ванных задач (многих из которых установить, к сожалению, не удалось).

Автор благодарен Ю. А. Блинкову, М. А. Волчкевичу и Д. В. Прокопенко, в чьих материалах были найдены некоторые задачи, а также всем школьникам, на занятиях с которыми этот материал был апробирован и «протестирован».

Кроме того, Ю. Блинков, будучи редактором книги, оказал существенное влияние на её идеологию, компоновку материалов и улучшение текста. Ряд важных замечаний от редактора серии А. В. Шаповалова также способствовал улучшению текста книги, особенно в её методической составляющей. Отдельная благодарность В. Шувалову за профессиональную верстку и выполнение чертежей.

Занятие 9
Разобьём на равнобедренные треугольники

Бо́льшая часть задач, предлагаемых на этом занятии, лежит на стыке классической и комбинаторной геометрии. Разбор и решение этих задач послужат формированию у школьников комбинаторного мышления при рассмотрении несложных геометрических конструкций. Помимо этого, приобретаются навыки простейших оценок на основании теорем о сумме углов и внешнем угле треугольника. Отдельное внимание уделяется умению строить примеры и контрпримеры, продолжая «линию» прошлого занятия. Для решения предложенных задач достаточно знаний, умений и навыков, полученных на предыдущих занятиях, в частности умения считать углы и применять свойства и признаки равнобедренного и прямоугольного треугольников.

В геометрии часто встречаются задачи, в которых прямая разбивает (разрезает) треугольник на два равнобедренных треугольника. Основная трудность при их решении состоит в том, что возникает много случаев и какой-нибудь из них легко упустить. Поэтому имеет смысл провести небольшое *исследование*: какие случаи возможны и какую информацию в каждом из них можно получить об углах исходного треугольника.

Для того чтобы при разрезании треугольника получилось два треугольника, разрез должен проходить через вершину. Пусть в треугольнике ABC отрезок CD разбивает его на два равнобедренных треугольника ACD и BCD. Тогда хотя бы один из углов ADC или BDC не будет острым. Для определённости можно считать, что $\angle ADC \geqslant 90°$, тогда основанием равнобедренного треугольника ACD может являться только отрезок AC (см. рис. 9.1 *а—в*).

В треугольнике BCD любая из сторон может служить основанием, поэтому и возникают три случая. Обозначив углы A и B исходного треугольника через α и β соответственно и отметив равные стороны и углы при основаниях в равнобедренных треугольниках, рассмотрим эти случаи.

1. Отрезок BC — основание треугольника BCD (см. рис. 9.1 *а*). Тогда медиана CD в два раза меньше, чем AB, значит, $\angle ACB = 90°$. Таким образом, треугольник ABC прямоугольный, *α и β — острые углы, сумма которых равна* $90°$.

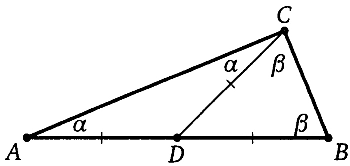


Рис. 9.1 *а*

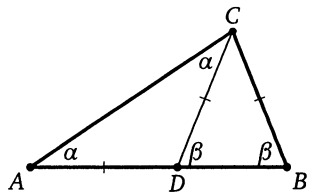


Рис. 9.1 *б*

2. Отрезок BD — основание треугольника BCD (см. рис. 9.1 *б*). Тогда угол BDC внешний для треугольника ACD, значит, $\beta = 2\alpha$, причём оба этих угла острые, следовательно, $\alpha < 45°$. Угол ACB может быть острым, прямым или тупым, но $\angle ACB = 180° - 3\alpha > 45°$.

3. Отрезок CD — основание треугольника BCD (см. рис. 9.1 *в*). Тогда $2\alpha < 90°$, т. е. $\alpha < 45°$, $\beta = 180° - 4\alpha$ и β может быть любого вида. Угол ACB также может иметь любой вид, но $\angle ACB = 3\alpha$, поэтому $\angle ACB < 135°$.

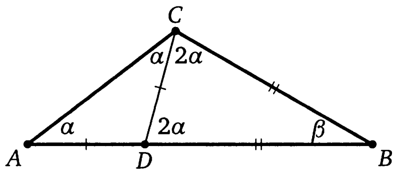


Рис. 9.1 *в*

Посмотрим, как полученные результаты могут помочь при решении конкретной задачи.

Пример 9.1. Один из углов треугольника равен $40°$. Известно, что его можно разбить отрезком на два равнобедренных треугольника. Найдите остальные углы данного треугольника.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник. Согласно сказанному выше рассмотрим три случая, соответствующие случаям исследования с той же нумерацией. При разборе каждого из них будут возникать три варианта, в зависимости от того, какой именно угол треугольника равен $40°$.

1. В случае прямоугольного треугольника получаем $\angle ACB = 90^\circ$; $\angle A = 40^\circ$; $\angle B = 50^\circ$ (см. рис. 9.2 *а*).

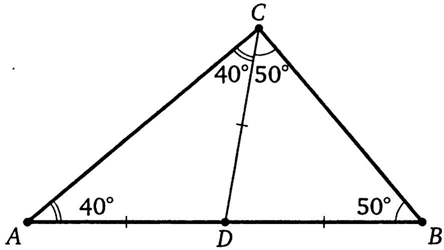


Рис. 9.2 *а*

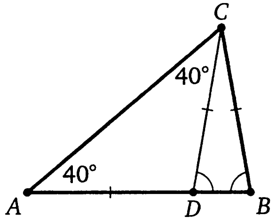


Рис. 9.2 *б*

Случай $\angle B = 40^\circ$ невозможен, так как $\angle ADC \geqslant 90^\circ$.

2. Если $\angle A = 40^\circ$, то $\angle B = \angle CDB = 80^\circ$; $\angle ACB = 60^\circ$ (см. рис. 9.2 *б*).

Если $\angle B = 40^\circ$, то $\angle CDB = 40^\circ$; $\angle A = \angle ACD = 20^\circ$, $\angle ACB = 120^\circ$ (см. рис. 9.2 *в*).

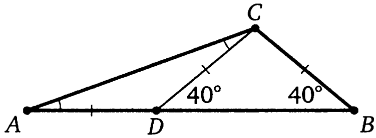


Рис. 9.2 *в*

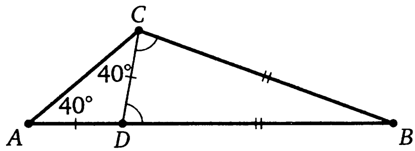


Рис. 9.2 *г*

Случай $\angle ACB = 40^\circ$ невозможен, так как этот угол должен быть больше, чем 45°.

3. Если $\angle A = 40^\circ$, то $\angle CDB = 80^\circ = \angle DCB$; $\angle B = 20^\circ$, $\angle ACB = 120^\circ$ (см. рис. 9.2 *г*).

Если $\angle B = 40^\circ$, то $\angle CDB = \angle DCB = 70^\circ$; $\angle A = \angle ACD = 35^\circ$, $\angle ACB = 105^\circ$ (см. рис. 9.2 *д*).

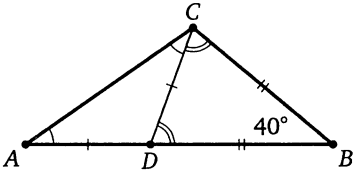


Рис. 9.2 *д*

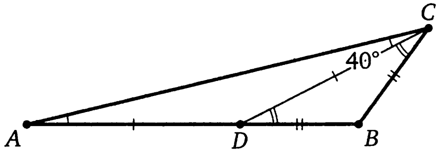


Рис. 9.2 *е*

Если $\angle ACB = 40°$, то $\angle DCB = 2\angle ACD$, $\angle A = \angle ACD = \frac{40°}{3}$, $\angle B = \frac{380°}{3}$ (см. рис. 9.2 *е*).

Ответ: $90°$, $50°$; $60°$, $80°$; $120°$, $20°$; $105°$, $35°$, $\frac{40°}{3}$, $\frac{380°}{3}$.

Сформулируем теперь основные принципы, помогающие при переборном решении похожих геометрических задач. Для того чтобы не пропустить какой-либо случай, полезно до начала перебора перечислить все логически возможные случаи. Это обычно делается так: каждая возможная картинка однозначно определяется какими-то параметрами. Перечислим все возможные комбинации параметров, а затем начнём перебор. Невозможные комбинации пусть отсеются по ходу решения.

Можно ещё после формирования списка, но до начала перебора обратить внимание на какое-то свойство, с помощью которого удаётся отсеять или «склеить» какие-то группы случаев.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

9.1. Два угла треугольника равны $100°$ и $60°$. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.

9.2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?

9.3. Про треугольник, один из углов которого равен $120°$, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

9.4. Треугольник ABC можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину C. Найдите углы треугольника ABC.

9.5. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника.

9.6. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

9.7. Равносторонний треугольник разрезали на пять равнобедренных треугольников. Обязательно ли все углы получившихся треугольников измеряются целым числом градусов?

9.1. Ответ: см. рис. 9.3.

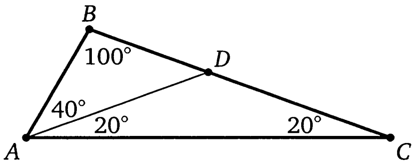


Рис. 9.3

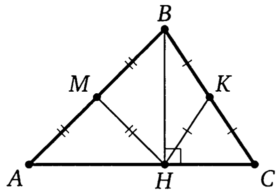


Рис. 9.4

9.2. Ответ: верно.

В любом треугольнике высота, проведённая к наибольшей стороне, лежит внутри треугольника. Рассмотрим треугольник ABC, в котором AC — наибольшая сторона, и проведём его высоту BH (см. рис. 9.4). Она разбивает исходный треугольник на два прямоугольных треугольника. В этих прямоугольных треугольниках проведём медианы HM и HK к гипотенузам. Они разобьют каждый прямоугольный треугольник на два равнобедренных треугольника.

Таким образом, произвольный треугольник ABC разобьётся на 4 равнобедренных треугольника: AMH, BMH, BKH и CKH.

9.3. Ответ: 40° и 20° или 45° и 15°.

► Здесь возможны два случая: разрез проходит через вершину данного угла или через вершину другого. Разобраться внутри каждого из них поможет проведённое ранее исследование. ◄

Пусть в треугольнике ABC угол C равен 120°. Если разрез проходит через вершину C, то возможны только два случая, соответствующие рис. 9.1 *б* и 9.1 *в*.

1. Пусть $BD=CD=CA$ (см. рис. 9.5 *а*). Тогда $\angle DBC=\angle DCB=$ $=\alpha$, $\angle CAD=\angle CDA=2\alpha$. Значит, $2\alpha+\alpha=60$; $\alpha=20$.

Таким образом, $\angle B=20°$, $\angle A=40°$.

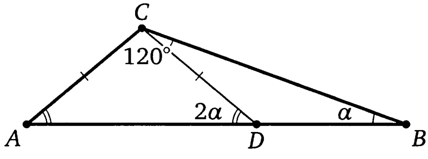


Рис. 9.5 *а*

2. Пусть $BD = CD$ и $AC = AD$ (см. рис. 9.5 *б*). Тогда $\angle DBC = \angle DCB = \alpha$, $\angle ACD = \angle ADC = 2\alpha$. Значит, $\angle ACB = 3\alpha$, т. е. $\alpha = 40°$. Таким образом, $\angle B = 40°$, $\angle ACD = \angle ADC = 80°$, $\angle A = 20°$.

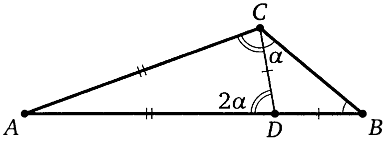


Рис. 9.5 *б*

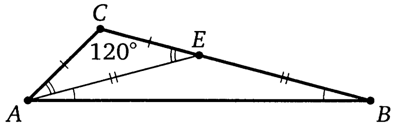


Рис. 9.5 *в*

Если же разрез проходит через вершину A или вершину B, то угол при этой вершине должен быть больше другого. Пусть AE — линия разреза (см. рис. 9.5 *в*). Тогда оба образовавшихся треугольника будут тупоугольными. Получим, что $AC = CE$ и $AE = EB$. Следовательно, $\angle CAE = \angle CEA = (180° - \angle C) : 2 = 30°$, а $\angle EAB = \angle EBA = 0{,}5\angle CEA = 15°$. Таким образом, $\angle B = 15°$, $\angle A = 45°$.

9.4. Ответ: 20°, 40° и 120° или 36°, 36° и 108°.

► И в этой задаче удобно проводить разбор случаев в соответствии с исследованием. ◄

Заметим, что если к разрезу, показанному на рис. 9.1 *а*, добавить второй требуемый разрез, соответствующий либо рис. 9.1 *б*, либо рис. 9.1 *в*, то получится треугольник с углами 90°, 60° и 30°. Для такого треугольника все три способа разрезания, указанных в исследовании, совпадают.

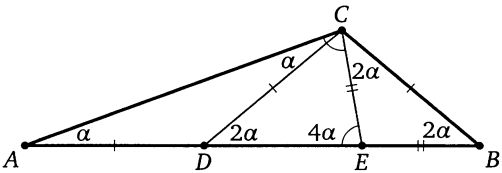


Рис. 9.6 *а*

Добавим второй разрез CE к случаю, который показан на рис. 9.1 *б*, учитывая, что $\beta = 2\alpha$ (см. рис. 9.6 *а*). Так как угол AEC внешний для треугольника BEC, то $\angle AEC > \angle BEC = 2\alpha > \angle EAC = \alpha$. Следовательно, AE не может оказаться основанием равнобедренного треугольника ACE. Сторона AC также не может быть основанием этого треугольника, так как $\angle ACE \neq \angle ACD = \angle CAE$. Значит, $AC = AE$. Тогда угол AEC

острый, поэтому основанием равнобедренного треугольника BEC является BC.

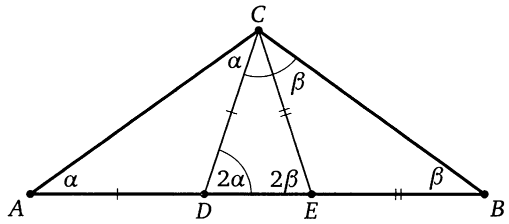


Рис. 9.6 *б*

В этом случае $\angle ACE = \angle AEC = 4\alpha$. Тогда значение α можно найти, например, по сумме углов треугольника ACE: $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$; $\alpha = 20°$. Следовательно, углы исходного треугольника: 20°, 40° и 120°.

Второй разрез можно добавить и на рис. 9.1 *в* (см. рис. 9.6 *б*). Тогда, учитывая, что $\angle BCD = \angle BDC = 2\alpha$ и $\angle ACE = \angle AEC = 2\beta$, получим $\angle ACB = 3\alpha = 3\beta$, т. е. $\alpha = \beta$. Значит, треугольник ABC равнобедренный, $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. В этом случае углы исходного треугольника: 36°, 36° и 108°.

9.5. Ответ: 45°, 45°, 90°; 36°, 36°, 108°; 72°, 72°, 36°; $\frac{540°}{7}$, $\frac{540°}{7}$, $\frac{180°}{7}$.

Пусть в треугольнике ABC равны стороны CA и CB. Указанная прямая может проходить либо к основанию, либо к одной из боковых сторон. Внутри каждого из этих случаев возможны два варианта получения равнобедренных треугольников (см. исследование).

Пусть CD — указанный разрез. Тогда возможны два случая.

1. Пусть $AD = BD = CD$ (см. рис. 9.7 *а*). Тогда $\angle C = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$.

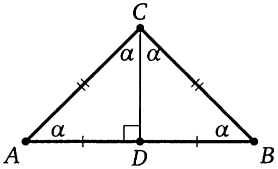


Рис. 9.7 *а*

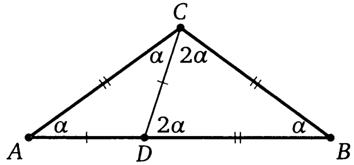


Рис. 9.7 *б*

2. Пусть $AD = CD$ и $BC = BD$ (см. рис. 9.7 *б*). Тогда $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. Значит, $\angle A = \angle B = 36°$, $\angle C = 108°$.

► Отметим, что такой треугольник уже возникал при решении задачи 9.4. ◄

Пусть теперь разрез AD проходит к боковой стороне CB. И здесь возможны два случая.

3. Пусть $AB=AD=CD$ (см. рис. 9.7 *в*). Тогда $\alpha+2\alpha+2\alpha=180°$; $\alpha=36°$. Значит, $\angle C=36°$, $\angle A=\angle B=72°$.

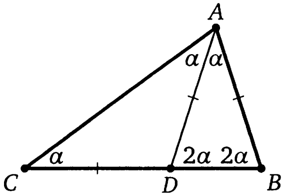


Рис. 9.7 *в*

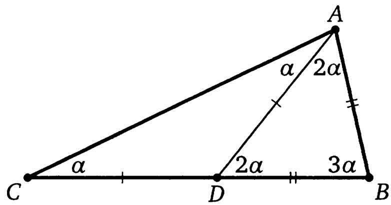


Рис. 9.7 *г*

► Полезно обратить внимание учащихся на тот факт, что углы исходного треугольника такие же, как углы треугольника ABD. ◄

4. Пусть $AD=CD$ и $AB=BD$ (см. рис. 9.7 *г*). Тогда $\alpha+3\alpha+3\alpha=180°$; $\alpha=\dfrac{180°}{7}$. Значит, $\angle C=\dfrac{180°}{7}$, $\angle A=\angle B=\dfrac{540°}{7}$.

► Отметим, что в двух случаях разрезающая треугольник прямая является биссектрисой угла, из вершины которого она проведена, а в двух других она делит этот угол в отношении $1:2$. ◄

9.6. Ответ: два угла по 72° и угол 36°.

Так как сумма углов A и C треугольника ABC меньше чем 180°, то $\angle TAC+\angle TCA<90°$, поэтому угол ATC тупой (см. рис. 9.8). Значит, в равнобедренном треугольнике ATC сторона AC является основанием. Тогда $\angle TAC=\angle TCA=\alpha$, поэтому $\angle BAC=\angle BCA=2\alpha$. Угол ATM внешний для треугольника ATC, значит, $\angle ATM=2\alpha$.

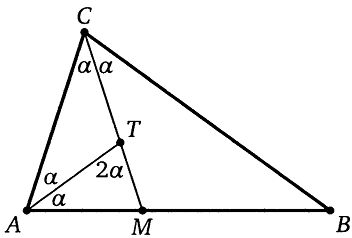


Рис. 9.8

Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник ATM. Если ATM — его угол при вершине, то $\angle TMA = \angle TAM = \alpha$, тогда сумма углов этого треугольника равна 4α и равна $180°$, но это невозможно, поскольку в этом случае и сумма углов A и C исходного треугольника будет равна $180°$. Значит, ATM — угол при основании этого треугольника. В этом случае сумма углов треугольника ATM равна 5α. Из равенства $5\alpha = 180°$ получим, что $\alpha = 36°$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = 72°$, $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA) = 36°$.

В этом случае треугольник CMB (третий треугольник разбиения) также оказывается равнобедренным, так как $\angle MCB = \angle MBC = 36°$.

► Отметим, что можно проводить аналогичные рассуждения, рассматривая треугольники разбиения в другом порядке. Также отметим, что описанная ситуация оказалась возможной, так как отрезок CM отсекает от треугольника ABC треугольник CAM с такими же углами, как у исходного, что уже встречалось при решении задачи 9.5. ◄

9.7. Ответ: не обязательно.

На биссектрисе угла B равностороннего треугольника ABC отметим точку P так, что $\angle APC = 135°$ (см. рис. 9.9 *а*). Тогда треугольник APC равнобедренный с углом 22,5° при основании. На сторонах AB и BC отметим точки E и D соответственно так, что $BE = BD = BP$, и получим равнобедренные треугольники PBE и PBD с углами при основании 75°.

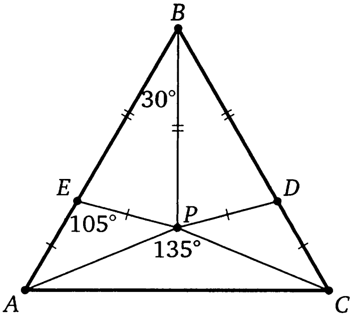


Рис. 9.9 *а*

Докажем, что треугольники PEA равнобедренный. Действительно, $\angle PEA = 105°$, $\angle PAE = 60° - 22{,}5° = 37{,}5°$, значит,

$\angle APE = 37{,}5^\circ = \angle PAE$. Треугольник PDC симметричен треугольнику PEA относительно прямой BP, поэтому он также равнобедренный.

Таким образом в трёх из пяти треугольников есть углы, которые измеряются не целым числом градусов.

▶ Возможно и другое рассуждение, которое выходит за рамки программы 7 класса. Пусть $MN \parallel AC$ и $MN < 0{,}5AC$ (см. рис. 9.9*б*). Тогда вокруг равнобедренной трапеции $AMNC$ можно описать окружность, центр O которой лежит внутри трапеции. Треугольник MBN равносторонний, а треугольники AOM, MON, CON и AOC равнобедренные. Тогда найдётся такое положение отрезка MN, для которого какие-то углы равнобедренных треугольников не будут измеряться целым числом градусов. ◀

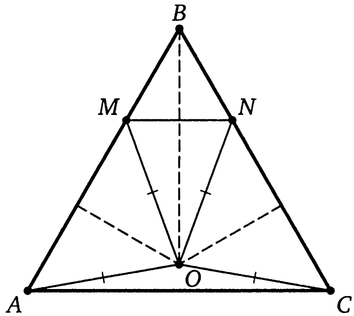


Рис. 9.9*б*

▶ Можно также использовать задачи Д93—Д101. ◀

Занятие 10
Геометрия на клетчатой бумаге

Основная идея этого занятия — применение накопленных навыков и умений в нестандартной ситуации. Решение и разбор предложенных задач будут способствовать не только закреплению этих навыков, но и развитию геометрического воображения школьников. Это занятие также может служить пропедевтикой дальнейшей работы с системой координат и векторами.

Основное внимание будет уделено построениям на клетчатой бумаге и их обоснованиям, а также вычислению углов и сумм углов. Отметим, что, несмотря на активное использование прямоугольных треугольников, знания теоремы Пифагора от учащихся не требуется.

При желании занятие можно дополнить упражнениями на вычисление площадей фигур, изображённых на клетчатой бумаге, а также задачами на треугольной сетке (см. дополнительные задачи).

На этом занятии мы займёмся не совсем обычной геометрией, а именно геометрией на клетчатой бумаге. Такая геометрия, с одной стороны, необычная, а с другой — вполне обыкновенная. Необычная — потому что все фигуры будут изображаться на «клеточках», а обычная — потому что все рассуждения будут опираться на уже известные факты школьного курса геометрии.

Для начала требуется обсудить основные построения, которые возможны на клетчатой бумаге. Такие построения имеют свою специфику, так как, в отличие от традиционных геометрических задач на построение, они осуществляются без инструментов. Это оказывается возможным, так как при построениях мы сможем использовать параллельные и перпендикулярные линии квадратной сетки и её узлы.

Условимся считать клетчатый лист неограниченным, а также будем считать, что мы можем соединить отрезком два узла сетки, если на нём нет других узлов. Договоримся о том, как проводить прямую через две точки, заданные в узлах. Пусть, например, заданы точки A и B так, как показано на рис. 10.1 a. Соединим их отрезком и заметим, что из точки A в точку B можно попасть, двигаясь на две клетки вправо и на одну вверх. Тогда, двигаясь на две клетки вправо и на одну вверх из точки B, получим узел C, лежащий на прямой AB, а двигаясь таким же образом из C, получим узел D и т. д. (см. рис. 10.1 *б*). Так как между A и B не было узлов сетки, то их не будет между B и C, не будет между C и D, т. е., продолжая отрезок AB за точку B, мы движемся от узла к узлу.

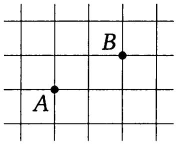


Рис. 10.1 *а*

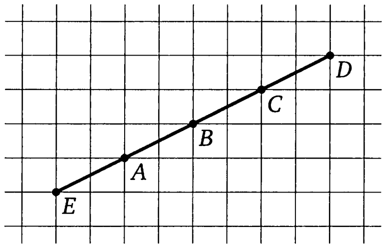


Рис. 10.1 *б*

Для того чтобы продолжить этот отрезок за точку A, мы движемся от узла к узлу на две клетки влево и одну вниз (так же, как из B в A), получаем узел E и так далее.

Отсюда понятно, что если бы изначально были даны точки D и E, то для построения прямой DE достаточно заметить, что из D в E можно попасть, двигаясь на 8 клеток влево и на 4 вниз. Так как $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, то от узла к узлу можно двигаться, проходя каждый раз 2 клетки влево и одну вниз. Тем самым легко убедиться, что на прямой DE будут лежать узлы C, B и A (см. рис. 10.1 *б*). Понятно, что указанные узлы расположены равномерно на отрезке DE.

► С «продвинутыми» учащимися можно обсудить общий случай. Если из узла A в узел B мы попадаем движением на x клеток по горизонтали и y клеток по вертикали, то, максимально сократив дробь $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, получим, что на отрезке AB узел C, ближайший к A, получится при движении из A на a и b клеток в тех же направлениях соответственно. Тогда остальные узлы определяются движением на $2a$ и $2b$, $3a$ и $3b$, ... в тех же направлениях. Если же дробь $\frac{y}{x}$ несократима, то на отрезке AB других узлов нет. При этом дробь $\frac{y}{x}$ выражает угловой коэффициент прямой (с точностью до знака). ◄

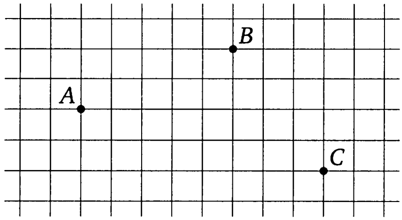
Теперь научимся выполнять ряд элементарных построений и обоснуем их.

Пример 10.1. Даны точки A, B и C в узлах сетки (см. рисунок). Постройте:

а) отрезок CD, равный отрезку AB;

б) прямую AE, параллельную прямой BC.

Обоснуйте эти построения.



Решение. а) Построим отрезок AB и заметим, что если двигаться из точки A в точку B по линиям сетки, то надо пройти пять клеток вправо и две клетки вверх. Для построения искомого отрезка CD надо построить точку D. Для этого достаточно пройти по линиям сетки из точки C две и пять клеток в любых двух перпендикулярных направлениях, например, так, как показано на рис. 10.1, отметить точку D и провести отрезок CD.

Для обоснования достаточно построить прямоугольные треугольники AMB и CND с катетами, лежащими на линиях сетки (см. рис. 10.2). Эти треугольники равны (по двум катетам), следовательно, $CD = AB$.

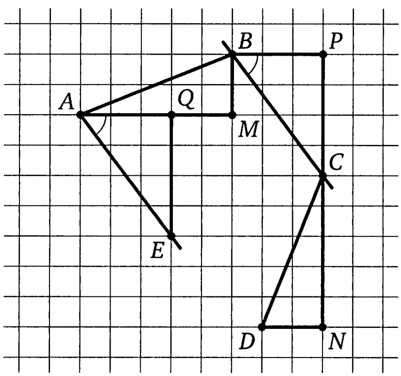


Рис. 10.2

Заметим, что можно было, наоборот, пройти из точки C две клетки вниз и пять влево и получить другой отрезок, равный AB. Так как существует четыре направления движения из точки C по линиям сетки, то выбрать пару перпендикулярных направлений можно восемью способами: есть четыре способа выбрать шаг длины 5, а затем в каждом случае есть два способа выбрать шаг длины 2. Таким образом, задача имеет восемь решений.

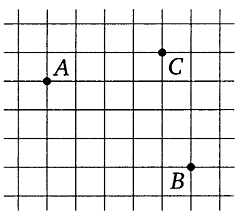
► Кроме того, в равных треугольниках AMB и CND равны соответствующие острые углы, поэтому аналогичные построения можно использовать для построения угла с заданной вершиной, равного данному. ◄

б) Построим прямую BC и заметим, что если двигаться из точки B в точку C по линиям сетки, то надо пройти три клетки вправо и четыре клетки вниз. Отсчитаем от точки A три клетки вправо и четыре клетки вниз и отметим точку E (см. рис. 10.2). Прямая AE — искомая.

Действительно, построим прямоугольные треугольники BPC и AQE с катетами, лежащими на линиях сетки (см. рис. 10.2). Эти треугольники равны (по двум катетам), следовательно, $\angle PBC = \angle QAE$. Тогда $\angle EAB + \angle CBA = \angle QAE + \angle BAQ + \angle CBA = \angle BAQ + \angle CBA + \angle PBC = \angle BAQ + \angle PBA = 180°$, так как $BP \parallel AQ$.

► Отметим, что при таком построении отрезки AE и BC сонаправлены, так как из точек A и B мы двигались в одинаковых направлениях. При этом прямую, параллельную BC, можно получить и по-другому, двигаясь из точки A на три клетки влево и на четыре вверх и получая тем самым прямоугольный треугольник с углом, вертикальным углу QAE (почему угол вертикальный?). ◄

Пример 10.2. Даны точки A, B и C в узлах сетки (см. рисунок). Постройте прямую, перпендикулярную прямой AB и проходящую через точку: а) B; б) C. Обоснуйте построения.



Решение. Проведём прямую AB и заметим, что если двигаться из точки A в точку B по линиям сетки, то надо пройти три клетки вниз и пять клеток вправо.

а) Отсчитаем от точки B три клетки вправо и пять клеток вверх и отметим точку D (см. рис. 10.3). Прямая BD — искомая.

б) Отсчитаем от точки C пять клеток вниз и три клетки влево и отметим точку E (см. рис. 10.3). Прямая CE — искомая.

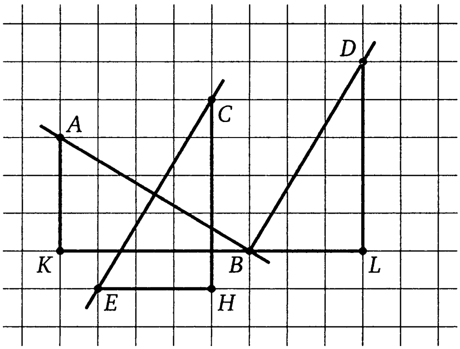


Рис. 10.3

Для обоснования достаточно построить прямоугольные треугольники AKB, BLD и EHC с катетами, лежащими на линиях сетки (см. рис. 10.3). Эти треугольники равны (по двум катетам), следовательно, $\angle ABK = \angle BDL = 90° - \angle DBL$, значит, $\angle ABK + \angle DBL = 90°$. Тогда $\angle ABD = 180° - (\angle ABK + \angle DBL) = 90°$, т. е. $BD \perp AB$. Кроме того, из равенства углов CEH и DBL и сонаправленности лучей EH и BL следует, что $CE \parallel BD$ (см. пример 10.1 б), поэтому $CE \perp AB$.

Полученные результаты позволяют формализовать способы проведения прямой, перпендикулярной данной. Пусть в узлах сетки даны такие точки A, B и C, что путь по линиям сетки из A в B — это x клеток по горизонтали и y клеток по вертикали. Тогда для проведения из точки C перпендикуляра к AB достаточно отметить узел D, который получится движением точки C на y клеток по горизонтали и на x клеток по вертикали, причём в одном случае сохранив направление, а в другом — поменяв его на противоположное.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

► По-прежнему будем считать, что размеры листа клетчатой бумаги неограниченны. ◄

10.1. Даны точки A, B и C в узлах сетки (см. рис. 1). Постройте:

а) серединный перпендикуляр к отрезку AB;

б) биссектрису угла BAC.

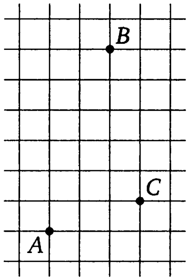


Рис. 1

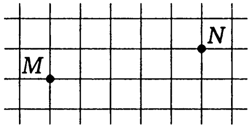


Рис. 2

10.2. Даны точки M и N в узлах сетки (см. рис. 2). Постройте квадрат, у которого данные точки являются: а) соседними; б) противоположными вершинами.

10.3. Даны точки:

а) A, B, C и D;

б) E, F, G и H

в узлах сетки (см. рис. 3 *а*, *б*).

Покажите, что прямые AB и CD пересекаются в узле сетки, а точка пересечения прямых EF и GH не является узлом сетки.

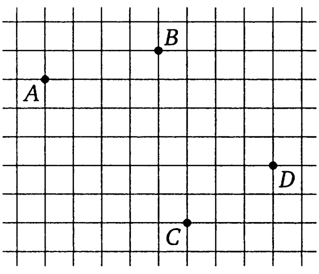


Рис. 3 *а*

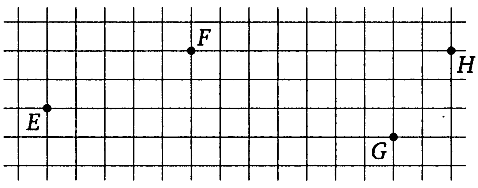


Рис. 3 *б*

10.4. Даны точки A, B, C и D в узлах сетки (см. рис. 4). Постройте:

а) серединный перпендикуляр к отрезку AB;

б) середину отрезка CD.

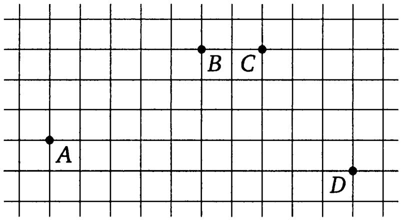


Рис. 4

10.5. Найдите:

а) угол между прямыми AE и DQ (см. рис. 5 *а*);

б) $\angle AKM$ (см. рис. 5 *б*).

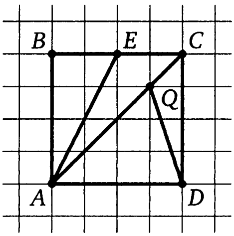


Рис. 5 *а*

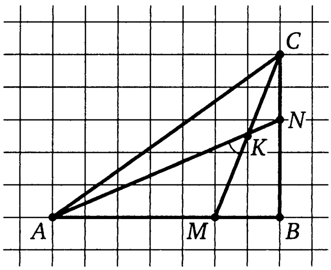


Рис. 5 *б*

10.6. Докажите, что углы MAN и BPM равны (см. рис. 6).

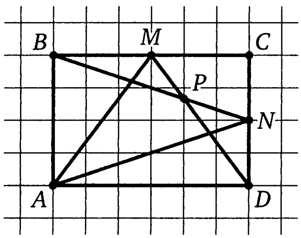


Рис. 6

10.7. а) Найдите сумму трёх углов, обозначенных на рис. 7 *а*.

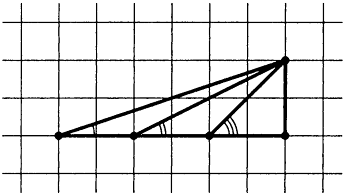


Рис. 7 *а*

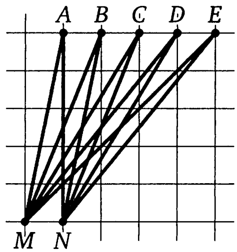


Рис. 7 *б*

б) Найдите сумму пяти углов: MAN, MBN, MCN, MDN и MEN (см. рис. 7 *б*).

10.8. От квадрата $ABCD$ «отрезали» прямоугольный треугольник MND (см. рис. 8). Найдите сумму трёх углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

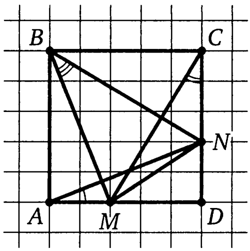


Рис. 8

Ответы, решения, комментарии

10.1. а) Отметим узел D сетки, лежащий на отрезке AB (см. рис. 10.4), тогда $AD = BD$ (см. пример 10.1 а). Построим перпендикуляр DE к прямой AB (см. пример 10.2 а). Прямая DE — искомая.

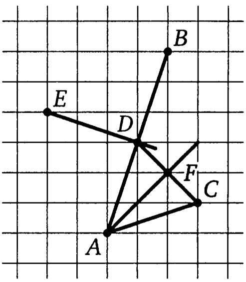


Рис. 10.4

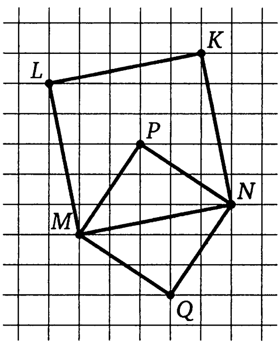


Рис. 10.5

б) Заметим, что треугольник ACD равнобедренный: $AC = AD$ (см. рис. 10.4). Отметим узел F — середину отрезка DC, тогда AF — медиана треугольника ACD, значит, луч AF — биссектриса угла BAC.

10.2. а) Отметим узлы K и L так, что отрезки NK и ML равны и перпендикулярны отрезку MN (см. рис. 10.5). Тогда $KLMN$ — искомый квадрат.

б) Отметим узел P так, что $PM = PN$ и $PM \perp PN$ (см. рис. 10.5). Тогда треугольник MPN прямоугольный и равнобедренный, MN — его гипотенуза. Аналогично отметим точку Q, тогда $PMQN$ — искомый квадрат.

10.3. а) Построим лучи AB и CD, отмечая последовательно все узлы. Они пересекутся в узле M (см. рис. 10.6 *а*). Проверим подсчётом, что мы не ошиблись. Действительно, сдвиг от B к M составляет $16 = 4 \cdot 4$ клеток вправо и $4 = 4 \cdot 1$ клетки вверх, т. е. четыре сдвига от A к B. Сдвиг от D к M составляет $12 = 4 \cdot 3$ клеток вправо и $8 = 4 \cdot 2$ клеток вверх, т. е. четыре сдвига от C к D.

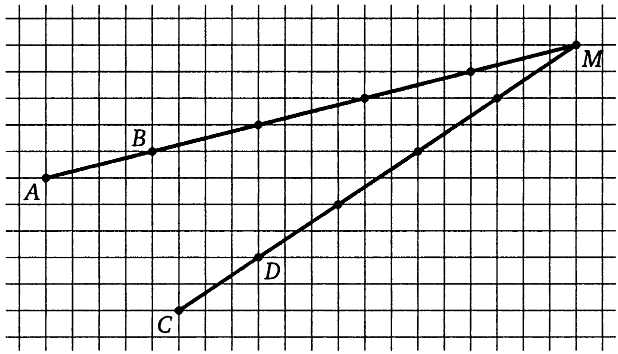


Рис. 10.6*а*

► «Продвинутые» школьники могут рассуждать иначе. Прямая AB проходит через точку M, так как из точки A в точку B можно попасть движением на 4 клетки вправо и на одну вверх, а из A в M — на 20 клеток вправо и на 5 вверх, причём $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. Чтобы попасть из C в M, надо пройти 15 клеток вправо и 10 клеток вверх. Так как движение из C в D — это 3 клетки вправо и 2 вверх, а $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, то прямая CD также проходит через точку M. ◄

б) Построим лучи EF и GH, отмечая последовательно все узлы. Они пересекутся в точке P (см. рис. 10.6*б*). Покажем, что P не является узлом сетки. Проведя вычисления, аналогичные п. а), проверим, что на прямой EF лежат узлы K и L, между которыми нет других узлов, а на прямой GH лежат узлы M и N, между которыми также нет других узлов. Так как точка P лежит как между K и L, так и между M и N, то узлом она быть не может.

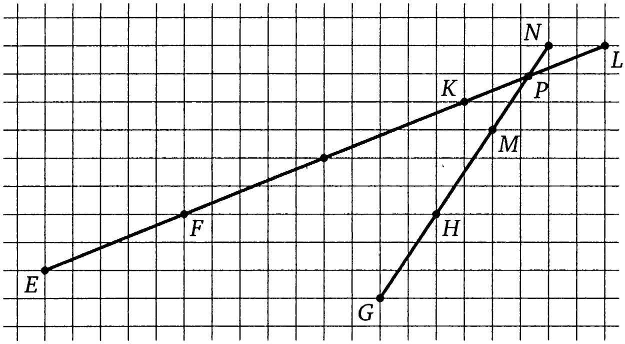


Рис. 10.6*б*

► «Продвинутые» школьники могут рассуждать иначе. Точки K и L получаются из E движением на 15 клеток вправо и на 6 вверх и на 20 клеток вправо и на 8 вверх соответственно. Эти точки лежат на этой прямой, так как движение из E в F — это 5 клеток вправо и 2 вверх, а $\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$. Из точки G в точку H приводит движение на 2 клетки вправо и на 3 вверх, из G в K — на 3 клетки вправо и на 7 вверх, а из G в L — на 8 клеток вправо и на 9 вверх. Так как $\frac{9}{8} < \frac{3}{2} < \frac{7}{3}$, то P — не узел сетки. ◄

10.4. а) ► Так как середина отрезка AB не лежит в узле сетки, то найти её так, как это сделано при решении задачи 10.1 а, невозможно. ◄

Аналогично решению задачи 10.2 *б* построим квадрат $AEBF$, в котором отрезок AB будет диагональю (см. рис. 10.7). Тогда EF — серединный перпендикуляр к AB. Это можно обосновать как сославшись на свойства квадрата, так и заметив равенство треугольников AEF и BEF, откуда следует, что $\angle AEF = \angle BEF$.

Тогда прямая EF содержит медиану и высоту равнобедренного треугольника AEB.

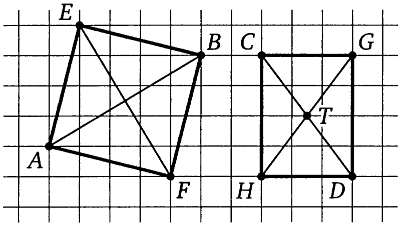


Рис. 10.7

б) ▶ Заметим, что при таком расположении точек C и D построить квадрат с диагональю CD и вершинами в узлах сетки невозможно. Найдём другой способ решения. ◀

Построим прямоугольник $CGDH$, стороны которого идут по линиям сетки, и проведём его диагонали (см. рис. 10.7). Точка T их пересечения является серединой отрезка CD. Это можно обосновать как сославшись на свойства прямоугольника, так и заметив равенство треугольников, например, CTG и DTH. Действительно, так как отрезки CG и DH равны и параллельны, то $\angle TCG = \angle TDH$ и $\angle TGC = \angle THD$, поэтому указанные треугольники равны (по стороне и прилежащим углам). Следовательно, $CT = DT$.

10.5. Ответ: а), б) $45°$.

▶ Удобнее искать угол между отрезками, если они выходят из одной точки, а на клетчатой бумаге — из одного узла. Вспомним, что угол не изменится при замене отрезка на ему сонаправленный, что подсказывает дополнительное построение. Всегда полезно внимательнее посмотреть на треугольник, образованный вершиной угла и ближайшими к ней узлами на сторонах угла. ◀

▶ В п. а) надо также учесть, что угол между прямыми — это наименьший из углов, образованных при их пересечении, т. е. он не может быть тупым. ◀

а) Отложим отрезок AP, равный и сонаправленный отрезку PQ (см. рис. 10.8 *а*). Тогда треугольник PAE прямоугольный и равнобедренный, значит, $\angle PAE = 45°$. Таким образом, искомый угол между прямыми AE и DQ равен углу между прямыми AP и AE, т. е. равен углу PAE.

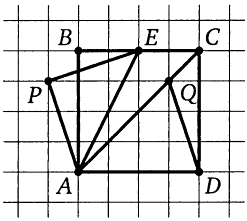


Рис. 10.8 *а*

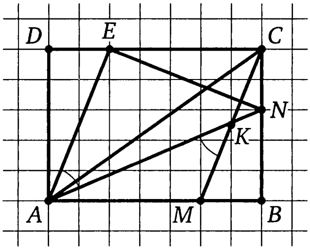


Рис. 10.8 *б*

б) Достроим прямоугольный треугольник ABC до прямоугольника $ABCD$ и проведём отрезок AE, равный и параллельный CM (см. рис. 10.8 *б*). Тогда $\angle AKM = \angle EAN$. Так как треугольник AEN прямоугольный и равнобедренный, то $\angle EAN = 45^\circ$, т. е. $\angle AKM = 45^\circ$.

10.6. Проведём отрезок DQ, равный и параллельный BN. Заметим, что DQ пересечёт AN в узле сетки, который обозначим E. Тогда $\angle BPM = \angle MDQ = \angle MAN$ (см. рис. 10.9). Последнее равенство следует либо из равенства треугольников MAE и MDE (по трём сторонам), либо из симметрии относительно прямой ME.

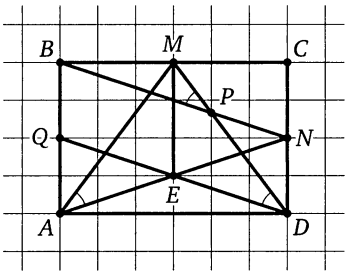


Рис. 10.9

10.7. Ответ: а) 90°; б) 45°.

► В таких случаях надо попытаться «состыковать» все углы, сумму которых надо найти, т. е. расположить их так, чтобы они имели общую вершину, а соседние углы — общую сторону. ◄

а) Введём обозначения так, как показано на рис. 10.10 *а*, и заметим, что $\angle BEC = 45^\circ$. Построим угол KAE, равный углу BDC (используя равенство треугольников KAE и BDC), и угол KAM, равный углу BEC (используя равнобедренный прямоугольный треугольник KAM). Тогда искомая сумма равна углу BAM, т. е. равна $90°$.

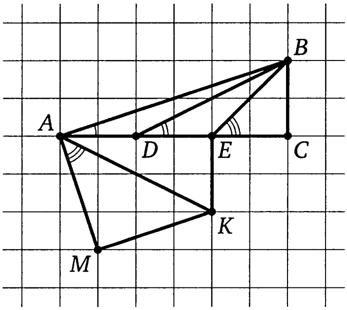


Рис. 10.10 *а*

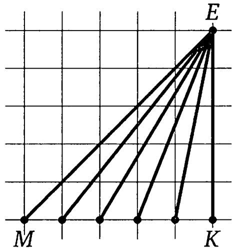


Рис. 10.10 *б*

б) Перенесём углы вправо так, чтобы их вершина оказалась в точке E: угол MAN — на 4 клетки, угол MBN — на 3, угол MCN — на 2, а угол MDN — на одну клетку (см. рис. 10.10 *б*). Это можно осуществить построением соответствующих треугольников, равных тем, в которых находятся указанные углы. Тогда искомая сумма пяти углов будет равна углу MEK, т. е. равна $45°$.

10.8. Ответ: 90°.

Используем равенство двух пар треугольников: BAM и ADN, BCN и CDM (см. рис. 10.11). Тогда $\angle ABM = \angle DAN$ и $\angle CBN = \angle DCM$, следовательно, искомая сумма равна $\angle ABM + \angle MBN + \angle CBN = \angle ABC = 90°$.

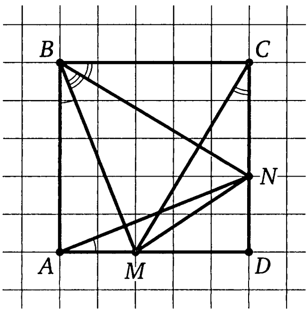


Рис. 10.11

► Можно также использовать задачи Д102–Д114, Д125. ◄

Занятие 11
Перегибая бумагу, получаем задачу

Это занятие, так же как и предыдущее, ориентировано на применение накопленных навыков и умений в нестандартных ситуациях. Основу занятия составляют задачи, возникающие при перегибании листа бумаги. Они привлекательны своей естественностью и давно вошли в практику различных математических олимпиад, причём это задачи и на построение, и на доказательство, и на вычисление. Решение и разбор таких задач позволят также закрепить наглядные представления о фигурах, симметричных относительно прямой, и показать возможность применения симметрии для строгих рассуждений.

На этом занятии мы рассмотрим задачи, которые возникают при различных перегибаниях бумаги. *Если при перегибании листа бумаги две фигуры совместились, то* говорят, что *они симметричны относительно линии сгиба.* С такой ситуацией вы могли уже встречаться при решении задач (например, см. комментарий к задаче 6.8). Если же *при перегибании листа совмещаются две части одной фигуры, то линия сгиба является осью симметрии этой фигуры.*

Фигур, имеющих ось симметрии, много, и вы тоже с ними знакомы. Несложно проверить, что осью симметрии отрезка является серединный перпендикуляр к нему, осью симметрии угла является его биссектриса, осью симметрии равнобедренного треугольника — высота (она же медиана и биссектриса), проведённая к основанию, осью симметрии квадрата — любая его диагональ, осью симметрии круга — любой его диаметр, и этот ряд можно продолжить.

Таким образом, методы решения задач, связанных с перегибанием бумаги, основаны на симметрии. Поэтому и возникает идея использовать для их решения равенство симметричных отрезков, углов или треугольников. Рассмотрим примеры.

Пример 11.1. Дан прямоугольный лист бумаги. Используя только его перегибание, постройте угол, равный $22{,}5^\circ$.

Решение. Воспользуемся тем, что $22{,}5 = 90:4$. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ сторона AB меньше стороны AD. Перегнём прямоугольник так, чтобы вершина B попала на сторону AD, тогда линия сгиба AE будет биссектрисой прямого угла (см. рис. 11.1). Аналогично, совместив перегибанием лучи AD и AE, построим биссектрису угла DAE и получим искомый угол.

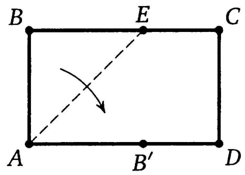


Рис. 11.1

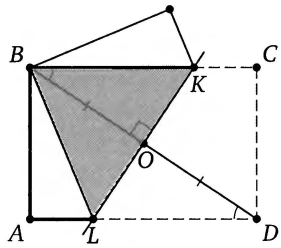


Рис. 11.2

Пример 11.2. Прямоугольный лист бумаги перегнули по прямой так, что противоположные вершины совместились. В результате получились три треугольника: в середине — один двухслойный, а по краям — два однослойных. Докажите, что двухслойный треугольник равнобедренный.

Решение. Пусть прямоугольник $ABCD$ перегнули так, что вершина D совпала с вершиной B, тогда эти вершины симметричны относительно линии сгиба KL (см. рис. 11.2). Следовательно, KL — серединный перпендикуляр к диагонали BD. Кроме того, $\angle CBD = \angle ADB$, значит, прямоугольные треугольники KBO и LDO равны (по катету и острому углу). Следовательно, $KO = LO$, тогда BO — высота и медиана треугольника KBL, значит, этот треугольник равнобедренный.

► Отметим, что возможно и другое рассуждение: $BL = DL$ из симметрии относительно KL, а $BK = DL$, так как O — центр симметрии прямоугольника, а прямые BD и KL содержат точку O, значит, BK и DL симметричны относительно O. ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

11.1. Верно ли, что из любого прямоугольного листа бумаги можно несколькими перегибаниями получить квадрат?

11.2. У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, а потом разогнули обратно. A — общая точка линии сгиба и ровного края (см. рис. 2). Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A, используя только перегибание бумаги.

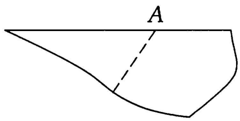


Рис. 2

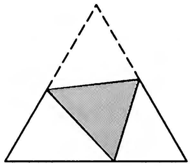


Рис. 3

11.3. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рис. 3). Докажите, что для каждого угла левого белого треугольника найдётся равный ему угол в правом белом треугольнике.

11.4. Квадратный лист бумаги сначала сложили вдвое, а затем так, как показано на рис. 4. Чему равен отмеченный угол?

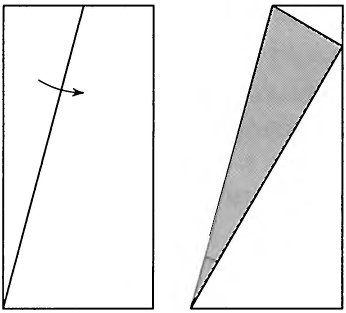


Рис. 4

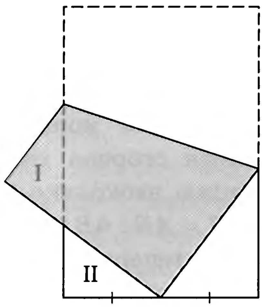


Рис. 5

11.5. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (см. рис. 5). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.

11.6. Бумажный прямоугольник $ABCD$ перегибается так, что точка C попадает в точку C' — середину стороны AD. Найдите отношение $DK : AB$, где K — точка линии сгиба на стороне CD.

11.7. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник MAN (см. рис. 7 *а*, *б*). Найдите угол ANM.

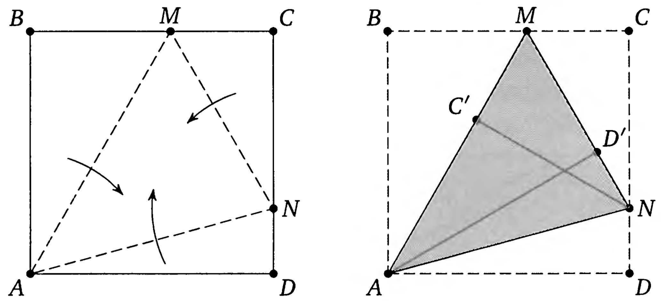


Рис. 7 *а* Рис. 7 *б*

11.8. Барон Мюнхгаузен говорит, что перегнул некоторый бумажный треугольник по прямой, сделал ножницами прямой разрез, получил три части, согнутые разогнул — и все три оказались равными неравнобедренными треугольниками. Могут ли слова барона быть правдой?

Ответы, решения, комментарии

11.1. Ответ: верно.

Пусть в прямоугольнике $ABFG$ сторона AB меньше стороны AG. Заметим, что, складывая его по оси симметрии, параллельной AB, можно получить прямоугольник, у которого бо́льшая сторона уменьшится в два раза. Повторив такую операцию несколько раз, получим прямоугольник $ABCD$, в котором $1 < AD : AB \leqslant 2$.

Перегнём теперь $ABCD$ по биссектрисе AE прямого угла (так же, как в примере 11.1) и получим точку B' на стороне AD. Разогнём обратно и перегнём $ABCD$ по прямой $B'E$. Получим квадрат $ABEB'$.

▶ Отметим, что получить прямоугольник с отношением сторон, не превосходящим двух, можно иначе. А именно, использовать описанное перегибание по биссектрисе, тем самым «отрезая» от исходного прямоугольника квадраты. ◀

11.2. Перегнём лист по данной линии AB, тогда ровный край листа займёт положение луча AC (см. рис. 11.3). Теперь совместим другую часть этого края с лучом AC и получим линию сгиба AD.

Тогда AD — искомый перпендикуляр, так как $\angle BAD$ образован биссектрисами двух смежных углов.

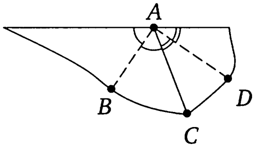


Рис. 11.3

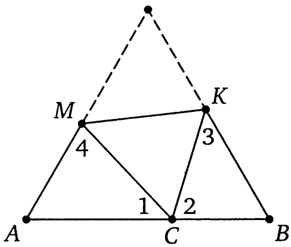


Рис. 11.4

11.3. Введём обозначения так, как показано на рис. 11.4. Исходный треугольник равносторонний, поэтому

$$\angle MCK = \angle A = \angle B = 60^\circ.$$

Угол ACB развёрнутый, значит,

$$\angle 1 + \angle 2 = 120^\circ. \qquad (*)$$

Из треугольника KBC по теореме о сумме углов треугольника получим

$$\angle 2 + \angle 3 = 120^\circ. \qquad (**)$$

Из равенств (*) и (**) следует, что $\angle 1 = \angle 3$.

Равенство углов 2 и 4 можно либо доказать аналогично, рассмотрев сумму углов в треугольнике MAC, либо воспользоваться тем, что в треугольниках MAC и KBC соответственно равны две пары углов, поэтому равны и третьи углы.

► Отметим, что если школьники уже знакомы с подобием треугольников, то вопрос задачи можно сформулировать по-другому: «Докажите, что белые треугольники подобны». ◄

11.4. Ответ: 15°.

Заметим, что при сложении квадрата вдвое получился прямоугольник с отношением сторон $2:1$. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, получившийся в итоге, E — вершина прямоугольника, попавшая при втором складывании на сторону CD (см. рис. 11.5). Тогда в прямоугольном треугольнике EAD катет AD в два раза меньше гипотенузы AE, следовательно, $\angle AED = 30^\circ$. Значит, $\angle EAD = 60^\circ$, а искомый угол является половиной угла, дополняющего угол EAD до угла прямоугольника. Таким образом, $\angle BAE = \frac{90^\circ - 60^\circ}{2} = 15^\circ$.

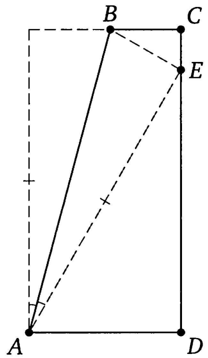


Рис. 11.5

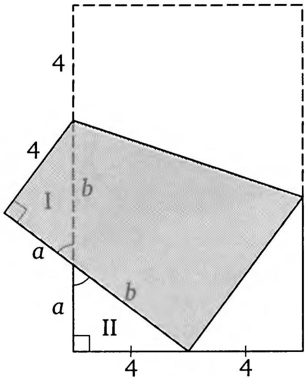


Рис. 11.6

► Отметим, что попутно показано, каким образом из квадратного листа бумаги можно сложить углы 15°, 30°, 60° и 75°, а учитывая факт, доказанный в задаче 11.1, такие же углы можно сложить из любого прямоугольного листа. ◄

11.5. Ответ: 12.

Так как в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, то отметим на чертеже равные отрезки и введём обозначения (см. рис. 11.6). Тогда длина большей стороны равна $a+b+4$, а длина меньшей стороны равна $a+b$. Следовательно, $a+b=8$, значит, бóльшая сторона имеет длину $a+b+4=8+4=12$.

► Отметим, что, используя равенство $a+b=8$ и теорему Пифагора, можно также найти длины остальных сторон треугольников I и II. Получится, что $a=3$, $b=5$, т. е. эти треугольники египетские. ◄

11.6. Ответ: $1:3$.

Из условия задачи следует, что равны треугольники $BC'K$ и BCK, значит, $B'C = BC$ (см. рис. 11.7). Тогда в прямоугольном треугольнике BAC' катет AC' равен половине гипотенузы BC', поэтому $\angle ABC' = 30^\circ$. Следовательно, $\angle AC'B = 60^\circ$, и тогда $\angle KC'D = 30^\circ$.

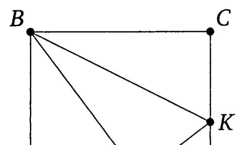


Рис. 11.7

Из треугольника $KC'D$ получаем, что

$$DK = \frac{1}{2}KC' = \frac{1}{2}KC = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3}AB.$$

11.7. Ответ: 75°.

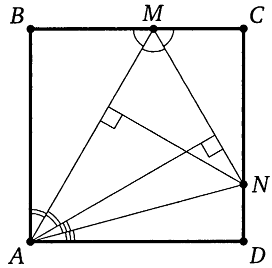


Рис. 11.8

Разогнём бумагу и отметим равные углы, которые были совмещены при сгибании квадрата $ABCD$ (см. рис. 11.8). Угол MAN составляет половину прямого угла BAD, значит, $\angle MAN = 45°$. Три равных угла с вершиной M вместе образуют развёрнутый угол, поэтому $\angle AMN = 60°$. По теореме о сумме углов треугольника находим, что $\angle ANM = 75°$.

▶ Отметим, что из условия задачи также следует, что периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата. ◀

11.8. Ответ: могут.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$. Проведём его биссектрису AD и перпендикуляр DE к катету BC (см. рис. 11.9 *а*). Перегнём треугольник по прямой DE, тогда точка A займёт положение A', после чего сделаем разрез по прямой DA' (см. рис. 11.9 *б*).

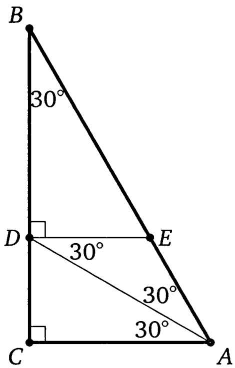


Рис. 11.9 *а*

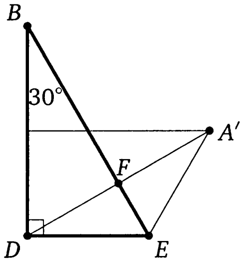


Рис. 11.9 *б*

При таком разрезании и последующем разгибании образуются три треугольника: ACD, AFD и BFD, где F — точка пересечения прямых DA' и AB.

Докажем, что эти треугольники равны. Для этого достаточно доказать, что $DF \perp AB$, так как в этом случае равенство треугольников ACD и AFD будет следовать из их симметрии относительно биссектрисы AD, а равенство треугольников AFD и BFD — из равенства соответствующих острых углов и наличия общей стороны DF.

Так как $DE \parallel CA$, то $\angle DEF = \angle CAB = 60°$, $\angle ADE = \angle CAD = 30°$. Из симметрии относительно прямой DE следует, что $\angle FDE = \angle ADE = 30°$, значит, $\angle AFD = 90°$, что и требовалось.

► Догадаться до этого решения может помочь комментарий к задаче 6.3. ◄

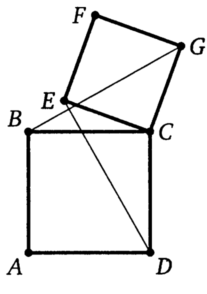
► Можно также использовать задачи Д115—Д120. ◄

Занятие 12
Квадраты

Это занятие посвящено задачам, в которых используются простейшие свойства квадрата. Наличие квадратов в условиях задач даёт возможность повторить и закрепить навыки, выработанные на предыдущих занятиях: применение свойств равнобедренных и прямоугольных треугольников и параллельности; использование дополнительных построений, в частности симметрии, для получения равных треугольников или для счёта углов. Некоторые задачи можно использовать для пропедевтики поворота вокруг точки. Кроме того, в ряде задач рассматриваются комбинации квадратов с равнобедренными или равносторонними треугольниками, что позволяет не только повторить некоторые приёмы, уже встречавшиеся в занятии 5, но и познакомить школьников с новым методом решения задач, который принято называть «обратным ходом».

На этом занятии будут рассмотрены задачи, в условиях которых фигурируют квадраты. Общеизвестно, что квадрат — это четырёхугольник с равными сторонами и прямыми углами. Нам потребуются также *простейшие свойства диагоналей квадрата*: *они делятся пополам точкой пересечения*, *являются биссектрисами углов и перпендикулярны друг другу*, *откуда следует*, *что диагональ квадрата является его осью симметрии*. Кроме того, *осями симметрии квадрата являются и общие серединные перпендикуляры к параллельным сторонам*. Отметим, что свойства осей симметрии квадрата уже использовались при решении некоторых задач занятия 11.

Для начала разберёмся с применением равенства треугольников в конструкции из двух квадратов.



Пример 12.1. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что $DE = BG$ и $DE \perp BG$.

Решение. 1. Заметим, что по условию $DC = BC$ и $CE = CG$. Кроме того,

$$\angle DCE = \angle DCB + \angle BCE = 90^\circ + \angle BCE = \\ = \angle GCE + \angle BCE = \angle BCG$$

(см. рисунок в условии). Следовательно, треугольники DCE и BCG равны (по двум сторонам и углу между ними), значит, $DE = BG$.

2. Обозначим через P и Q точки пересечения прямой DE с прямыми BG и BC соответственно (см. рис. 12.1). Тогда из доказанного равенства треугольников следует, что $\angle QDC = \angle QBP$. Учитывая равенство вертикальных углов при вершине Q в треугольниках QDC и QBP, получим $\angle QPB = \angle QCD = 90°$, т. е. $DE \perp BG$.

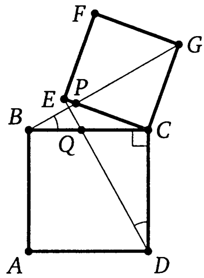


Рис. 12.1

▶ С «продвинутыми» учащимися можно также обсудить, что треугольник BCG получается из треугольника DCE с помощью поворота с центром C на 90° по часовой стрелке. Это даст возможность сразу обосновать и равенство отрезков, и перпендикулярность соответствующих прямых.

С более слабыми школьниками можно обсудить, что в некоторых случаях поворот позволяет увидеть равные треугольники. ◀

Часто встречаются задачи, в условиях которых на стороне квадрата построен какой-либо треугольник. Рассмотрим одну из таких задач.

Пример 12.2. На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник BEC с основанием BC. Известно, что угол EAD равен 75°. Найдите угол BEC.

▶ Попытка вычислить искомый угол «в лоб» терпит неудачу: как правило, удаётся только найти, что $\angle AED = 30°$, а что делать дальше, неясно. Далее можно обсудить со школьниками, какие дополнительные условия могли бы помочь найти ответ. Кроме того, имеет смысл предложить школьникам сделать аккуратный чертёж и попытаться угадать ответ. После этого можно обсудить приём, с которым они, скорее всего, не встречались ранее. ◀

Решение. Построим вне квадрата на стороне BC равносторонний треугольник $BE'C$ (см. рис. 12.2). Тогда треугольник ABE' равнобедренный, $\angle E'BA = \angle ABC + \angle CBE' = 150°$. Следовательно, $\angle BE'A = \angle BAE' = 15°$. Поэтому

$$\angle E'AD = 90° - \angle BAE' = 75°.$$

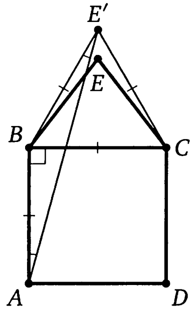


Рис. 12.2

Таким образом, точка E из условия задачи лежит на луче AE'. Кроме того, так как $EB = EC$ и $E'B = E'C$, то точки E и E' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Этот перпендикуляр не может пересекать луч AE' более чем в одной точке, значит, точка E' совпадает с точкой E, т. е. $\angle BEC = 60°$.

Ответ: $60°$.

При решении этой задачи был использован приём, который обычно называют «обратным ходом». Угадав ответ, мы рассмотрели обратную задачу, которая решается просто, а затем доказали, что рассмотренная конструкция «жёсткая», т. е. однозначно определяется условиями задачи.

► При этом важно довести до сознания учащихся, что этот метод отнюдь не универсален, так как «жёсткие» конструкции встречаются в геометрии не очень часто, и вспомнить примеры утверждений, верных только «в одну сторону», которые встречались на предыдущих занятиях. ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

12.1. Квадраты $ABCD$ и $CEFG$ расположены так, как показано на рис. 1 *а*, *б*. Для каждого из случаев расположения докажите, что $DE = BG$ и $DE \perp BG$.

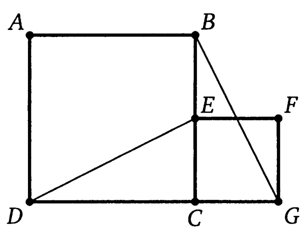


Рис. 1 *а*

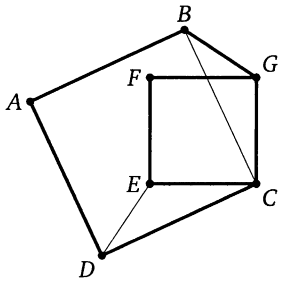


Рис. 1 *б*

12.2. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники AMB и AND. Докажите, что треугольник MCN также равносторонний.

12.3. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что $\angle MBC = \angle MCB = 15^\circ$. Докажите, что треугольник AMD равносторонний.

12.4. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

12.5. В квадрате $ABCD$ на стороне CD отмечена точка K, а на продолжении стороны DA за точку A отмечена точка N. Докажите, что $\angle BKN = 45^\circ$ тогда и только тогда, когда $AN = CK$.

12.6. $ABCD$ — квадрат. Треугольники AMD и AKB равносторонние (см. рис. 6). Докажите, что точки C, M и K лежат на одной прямой.

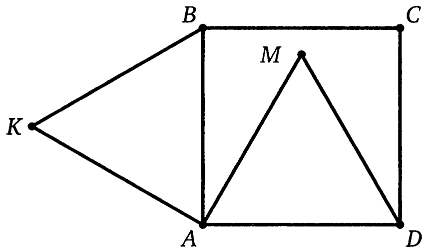


Рис. 6

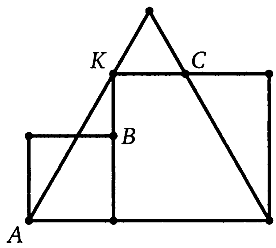


Рис. 7

12.7. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рис. 7 (вершина K большого квадрата лежит на боковой стороне треугольника, а нижние стороны квадратов лежат на основании треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Ответы, решения, комментарии

12.1. 1. В каждом случае требуемое равенство отрезков следует из того, что равны треугольники DCE и BCG (по двум сторонам и углу между ними). Так как $DC = BC$ и $CE = CG$ по условию, то остаётся обосновать равенство углов между этими сторонами:

а) $\angle DCE = 90^\circ = \angle BCG$;

б) $\angle DCE = \angle DCB - \angle BCE = 90^\circ - \angle BCE = \angle GCE - \angle BCE = \angle BCG$.

2. Для доказательства перпендикулярности в каждом случае обозначим через P и Q точки пересечения прямой DE

с прямыми BG и BC соответственно (см. рис. 12.3 *а*, *б*); при этом на рис. 12.3 *а* точка Q совпадёт с E. Тогда из доказанного равенства треугольников следует, что $\angle QDC = \angle QBP$. Учитывая равенство вертикальных углов при вершине Q в треугольниках QDC и QBP, получим $\angle QPB = \angle QCD = 90°$, т. е. $DE \perp BG$.

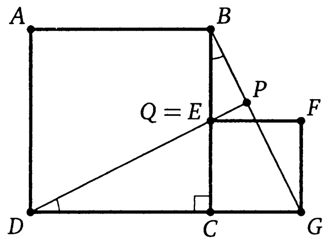


Рис. 12.3 *а*

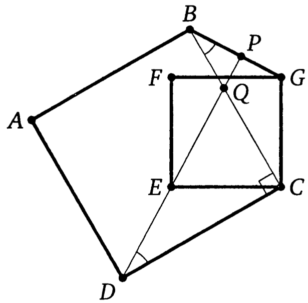


Рис. 12.3 *б*

► С «продвинутыми» учащимися можно также обсудить, что на каждом из данных чертежей треугольник BCG можно получить из треугольника DCE с помощью поворота с центром C на $90°$ по часовой стрелке. Как и в примере 12.1, это даст возможность сразу обосновать и равенство отрезков, и перпендикулярность соответствующих прямых. ◄

12.2. *Первый способ.* Рассмотрим треугольники CBM и CDN (см. рис. 12.4). Так как $BC = BM = CD = DN$ и $\angle CBM = 90° + 60° = 150° = \angle CDN$, то эти равнобедренные треугольники равны. Следовательно, $CM = CN$. Кроме того, $\angle BCM = (180° - \angle CBM) : 2 = 15° = \angle DCN$, значит, $\angle MCN = 60°$. Таким образом, треугольник MCN равнобедренный с углом $60°$, т. е. этот треугольник равносторонний.

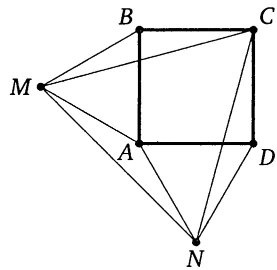


Рис. 12.4

Второй способ. Рассмотрим треугольники MAN, CBM и NDC (см. рис. 12.4). Они равнобедренные и все их боковые стороны равны стороне квадрата. Кроме того,

$$\angle MAN = 360° - (\angle BAD + \angle MAB + \angle NAD) = \\ = 150° = \angle CBM = \angle NDC.$$

Следовательно, эти треугольники равны, поэтому $MN = CM = NC$, что и требовалось.

► Полезно обратить внимание школьников на то, что чертёж симметричен относительно прямой AC. ◄

12.3. ► В случае затруднений имеет смысл обратить внимание школьников на то, что в процессе обсуждения примера 12.2 была сначала решена обратная задача. Поэтому по аналогии с этим примером можно использовать «обратный ход», причём рассуждения будут также аналогичны. ◄

Отметим внутри квадрата точку F так, чтобы треугольник AFD был равносторонним (см. рис. 12.5). Тогда $DC = DF$ и $\angle CDF = 90° - \angle FDA = 30°$. Следовательно,

$$\angle DCF = \angle DFC = (180° - \angle CDF) : 2 = 75°,$$

значит, $\angle BCF = 90° - \angle DCF = 15°$. Аналогично, используя равнобедренный треугольник ABF, получим, что $\angle CBF = 15°$.

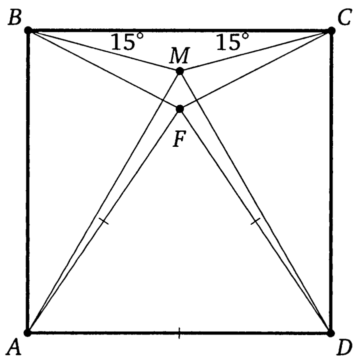


Рис. 12.5

Следовательно, точка F лежит как на луче CM, так и на луче BM, т. е. она совпадает с M. Таким образом, треугольник AMD равносторонний, что и требовалось.

► Можно также не вычислять угол CBF, а, как и в примере 12.2, использовать, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к стороне AD, а точка F — на серединном перпендикуляре к стороне BC. Но это одна и та же прямая, значит, обе точки являются точками её пересечения с лучом CM, поэтому точки M и F совпадают.◄

12.4. Ответ: 30°.

Проведём отрезки BK, DK и BD (см. рис. 12.6). Тогда $BD = AC = BK = DK$ (последнее равенство следует из равенства треугольников BCK и DCK по двум сторонам и углу между ними), т. е. треугольник BKD равносторонний, значит, $\angle BKD = 60°$. Следовательно, $\angle BKC = 30°$.

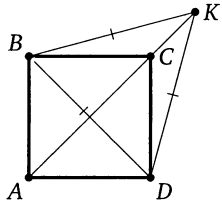


Рис. 12.6

► Для доказательства того, что $BK = DK$, можно также использовать симметрию относительно прямой AC либо тот факт, что диагонали квадрата перпендикулярны и точкой O пересечения делятся пополам. Тогда в прямоугольном треугольнике BKO катет BO в два раза меньше гипотенузы BK, поэтому $\angle BKC = 30°$. ◄

12.5. ► Имеет смысл ещё раз вспомнить, что такая формулировка задачи предполагает доказательство двух взаимно обратных утверждений. Хорошо, если школьники самостоятельно поймут, какое из этих двух утверждений доказывается проще, но в случае затруднений им можно в этом помочь. Тогда, проведя это рассуждение, они догадаются, что второе утверждение проще всего доказать «обратным ходом». ◄

1. Пусть $AN = CK$, тогда прямоугольные треугольники BCK и BAN равны (по двум катетам). Следовательно, $BK = BN$ и $\angle CBK = \angle ABN$. Тогда $\angle KBN = 90°$, т. е. треугольник KBN равнобедренный и прямоугольный. Следовательно, $\angle BKN = 45°$.

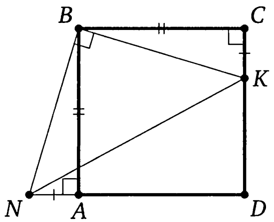


Рис. 12.7 *а*

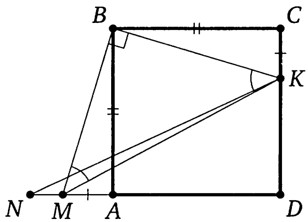


Рис. 12.7 *б*

► С «продвинутыми» учащимися можно обсудить, что треугольник BAN получается из треугольника BCK поворотом вокруг точки B на 90° по часовой стрелке. ◄

2. Пусть $\angle BKN = 45°$. На продолжении стороны DA за точку A отметим точку M так, что $AM = CK$ (см. рис. 12.7 *б*). То-

гда по доказанному в п. 1 треугольник KBM равнобедренный и прямоугольный и $\angle BKM = 45°$. Следовательно, лучи KM и KN совпадают, поэтому совпадают их точки пересечения M и N с прямой AD, т. е. $AN = CK$.

► С «продвинутыми» учащимися можно обсудить, что мы можем получить равнобедренный прямоугольный треугольник KBM и по-другому: рассмотреть поворот с центром B на 90° по часовой стрелке и доказать, что образ точки K лежит на продолжении DA. ◄

12.6. ► В случае затруднений имеет смысл обсудить со школьниками наиболее доступные им способы доказательства того, что какие-то три точки лежат на одной прямой. ◄

Проведём отрезки MK и MC и докажем, что $\angle KMC$ развёрнутый (см. рис. 12.8). Так как сторона каждого равностороннего треугольника равна стороне квадрата, то треугольники KAM и MDC равнобедренные с основаниями KM и MC соответственно. Заметим, что

$$\angle KAM = \angle KAB + \angle BAM = 60° + 30° = 90°,$$

а $\angle MDC = 30°$. Следовательно, $\angle KMA = 45°$, $\angle DMC = 75°$. Таким образом,

$$\angle KMC = \angle KMA + \angle AMD + \angle DMC = 45° + 60° + 75° = 180°,$$

т. е. точки C, M и K лежат на одной прямой.

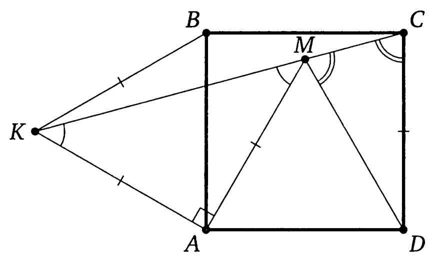


Рис. 12.8

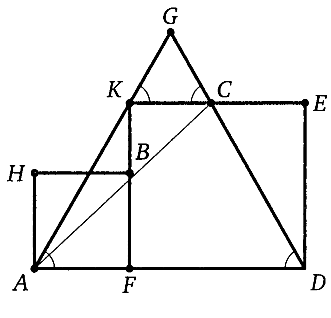


Рис. 12.9

► В рассуждениях можно также использовать, что $\angle MBC = \angle MCB = 15°$ (см. задачу 12.3). ◄

12.7. Введём обозначения так, как показано на рис. 12.9, и проведём отрезки AB и BC. Так как $\angle ABH = 45°$, то достаточно доказать, что $\angle CBK = 45^\circ$, тогда

$$\angle ABH + \angle HBK + \angle CBK = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

что равносильно утверждению задачи.

Используя равенство соответственных углов при параллельных прямых и равнобедренность треугольника AGD, получим $\angle GKC = \angle GAD = \angle GDA = \angle GCK$. Следовательно, $GK = GC$, поэтому $AK = CD$. Кроме того, $KF = DE$, тогда равны прямоугольные треугольники AKF и DCE (по гипотенузе и катету). Следовательно, $CE = AF = BF$, тогда $BK = CK$, значит, $\angle CBK = 45^\circ$, что и требовалось.

► Можно также использовать задачи Д121—Д135. ◄

Занятие 13
Неравенство треугольника

Основная цель этого занятия — научить школьников применять неравенство треугольника в простых геометрических конструкциях. Рассматриваются как задачи с числовыми данными, так и доказательство неравенств общего вида. Кроме того, разбор и решение предлагаемых задач позволяют постепенно вырабатывать элементарные алгебраические навыки работы с неравенствами.

На предыдущих занятиях мы эпизодически встречались с простейшими геометрическими неравенствами (см., например, задачи 1.8 и 4.1). На этом занятии мы вплотную займёмся задачами, связанными геометрическими неравенствами, а именно такими, в которых применяется *неравенство треугольника*.

Пусть дан треугольник ABC. Обозначим длины его сторон через a, b и c (см. рис. 13.1). Учитывая, что отрезок является кратчайшим маршрутом между двумя точками, можно записать три неравенства:

$$c < a + b, \tag{1}$$

$$b < c + a, \tag{2}$$

$$a < b + c, \tag{3}$$

т. е. *любая сторона треугольника меньше суммы двух других.*

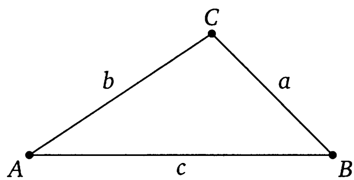


Рис. 13.1

► Это рассуждение не является строгим доказательством, которое во многом зависит от использованной ранее системы аксиом и логики построения курса геометрии. Неравенство треугольника будет строго доказано при решении задач в занятии 14. ◄

Отметим, что если заранее известно, какая из сторон треугольника наибольшая, например c, то из первого неравенства два других следуют автоматически. Верно и обратное: если даны три отрезка a, b и c, причём c — наибольший из них, то выполнения неравенства $c < a + b$ достаточно, чтобы из этих отрезков можно было составить треугольник (вспомните построение треугольника по трём сторонам).

Неравенство треугольника можно записать и в более общем виде. Действительно, неравенства (2) и (3) можно записать по-другому: $c > b - a$ и $c > a - b$, и, следовательно, $c > |b - a|$. Тогда имеет место двойное неравенство: $|b - a| < c < a + b$.

► С «продвинутыми» учащимися можно обсудить, что в наиболее общем виде неравенство треугольника формулируется так: *для любых трёх точек A, B и C выполнены неравенства* $|AC - BC| \leqslant AB \leqslant AC + BC$, *причём в случае, когда эти точки лежат на одной прямой* (*и только тогда*), *одно из неравенств обращается в равенство.* ◄

Перед тем как рассмотреть примеры применения неравенства треугольника, напомним *простейшие свойства работы с неравенствами*: к обеим частям неравенства можно прибавлять одно и то же число (любого знака), можно умножать или делить обе части неравенства на одно и то же положительное число, а также неравенства одного знака можно почленно складывать. Во всех перечисленных случаях получается неравенство, *равносильное* исходному.

Рассмотрим два примера, в которых, в частности, доказываются неравенства, являющиеся базовыми для решения других задач.

Пример 13.1. Докажите, что для медианы CM произвольного треугольника ABC выполняются неравенства

$$\frac{|AC - BC|}{2} < CM < \frac{AC + BC}{2}.$$

Решение. ► Как это было уже не раз в такой конструкции, к успеху приводит «удвоение» медианы. ◄

Продлим медиану CM на её длину: $DM = CM$ (см. рис. 13.2). Тогда из равенства треугольников AMD и BMC следует, что $AD = BC$. Из треугольника ACD получим

$$|AC - AD| < CD < AC + AD,$$

значит, $|AC-BC|<2CM<AC+BC$. Разделив каждую часть этого неравенства на 2, получим требуемое двойное неравенство.

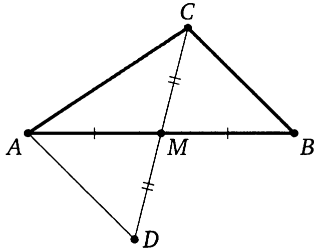


Рис. 13.2

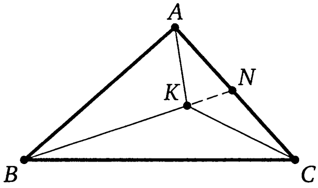


Рис. 13.3

Пример 13.2. Докажите, что для любой точки K, лежащей внутри треугольника ABC, выполняются неравенства:

а) $AB+AC>KB+KC$;

б) $p<AK+BK+CK<2p$, где p — полупериметр треугольника ABC.

► Используем дополнительное построение, аналогичное одному из способов решения задачи 4.1, которое обычно называют «спрямлением». ◄

Решение. а) Пусть N — точка пересечения луча BK со стороной AC (см. рис. 13.3). Тогда, рассматривая треугольник ABN, получим

$$AB+AN>BN=KB+KN;$$

а рассматривая треугольник KNC, получим

$$KN+NC>KC.$$

Сложим полученные неравенства почленно:

$$AB+AN+KN+NC>BK+KN+KC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB+AC+KN>KB+KN+KC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB+AC>KB+KC,$$

что и требовалось.

► Эту же идею можно реализовать иначе. «Разрежем» треугольник ABC по прямой BN и отбросим треугольник ABN (см. рис. 13.3). Сравним периметр оставшейся части с исходным. Отброшена сумма AB и AN, добавлен отрезок BN. По неравенству треугольника добавлено меньше, чем отброшено, поэтому периметр уменьшился. Повторим операцию: «разрежем» по прямой KC и отбросим треугольник KCN. Так как $KC < KN + NC$, то периметр ещё уменьшился. В итоге получим, что периметр треугольника KBC меньше периметра треугольника ABC. Отбросив общую сторону BC, получим требуемое неравенство.

Отметим, что аналогичным образом доказывается, что если одна выпуклая фигура лежит внутри другой, то периметр внутренней фигуры меньше. ◀

б) ▶ Если точка лежит внутри треугольника, то часто удаётся решить задачу, соединив её отрезками со всеми вершинами. ◀

Так как $AK + BK > AB$, $BK + CK > BC$, $CK + AK > CA$, то, сложив эти неравенства почленно, получим

$$2(AK + BK + CK) > 2p \;\Leftrightarrow\; AK + BK + CK > p.$$

С другой стороны, используя п. а), запишем три верных неравенства:

$$AB + AC > KB + KC, \quad BA + BC > KA + KC, \quad CA + CB > KA + KB.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$4p > 2(KA + KB + KC) \;\Leftrightarrow\; AK + BK + CK < 2p.$$

▶ Неравенство из п. а) иногда называют «неравенством резинки». Его в каком-то смысле можно считать обобщением неравенства треугольника: точку K, изначально лежащую на стороне BC, «подвинули» внутрь треугольника. ◀

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

13.1. Две стороны равнобедренного треугольника равны 5 и 10. Найдите его периметр.

13.2. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра.

13.3. Длины сторон треугольника — последовательные натуральные числа. Найдите их, если известно, что одна из медиан треугольника перпендикулярна одной из его биссектрис.

13.4. В четырёхугольнике $ABCD$ тупые углы B и C равны, $AB = 3$, $CD = 1$. Докажите, что $AD > 2$.

13.5. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

13.6. Докажите, что любая сторона треугольника меньше половины его периметра.

13.7. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника:

а) больше суммы его двух противолежащих сторон;

б) больше полупериметра, но меньше периметра.

13.8. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Докажите, что $BK < 2CK$.

Ответы, решения, комментарии

13.1. Ответ: 25.

Рассмотрим два случая.

1. Боковые стороны равны по 5, основание равно 10. Это невозможно, так как не выполняется неравенство треугольника: $5 + 5 = 10$, а не больше.

2. Боковые стороны равны по 10, а основание равно 5. Неравенство треугольника, очевидно, выполняется. Периметр равен $10 + 10 + 5 = 25$.

► Из неравенства треугольника следует, что в равнобедренном треугольнике отношение основания к боковой стороне меньше двух. ◄

13.2. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда

$$AA_1 < \frac{AB + AC}{2}; \quad BB_1 < \frac{AB + BC}{2}; \quad CC_1 < \frac{AC + BC}{2}$$

(см. пример 13.1). Сложив эти неравенства почленно, получим

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 < AB + BC + AC = P_{ABC}.$$

13.3. Ответ: 2; 3; 4.

Отметим, что перпендикулярные медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины, так как тогда угол при этой вершине окажется больше чем 180°.

Пусть ABC — данный треугольник, в котором медиана BM перпендикулярна биссектрисе AK и они пересекаются в точке P (см. рис. 13.4). Тогда AP — биссектриса и высота треугольника ABM, следовательно, $AB = AM = 0{,}5AC$. Так как длины сторон треугольника ABC — последовательные натуральные числа, то осталось проверить только два варианта: $AB = 1$; $AC = 2$ или $AB = 2$; $AC = 4$. В обоих случаях остаётся принять, что $BC = 3$, но первый вариант невозможен, так как не выполняется неравенство треугольника.

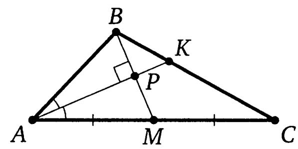


Рис. 13.4

► Для треугольника ABC со сторонами $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = 4$ условие перпендикулярности медианы и биссектрисы действительно выполняется, так как треугольник ABM равнобедренный ($AB = AM$). ◄

13.4. ► Ищем дополнительное построение, позволяющее получить треугольник. ◄

Продлим стороны AB и DC до пересечения в точке P (см. рис. 13.5). Тогда $\angle PBC = \angle PCB$ (углы, смежные равным), поэтому $BP = CP$. Из треугольника APD получим

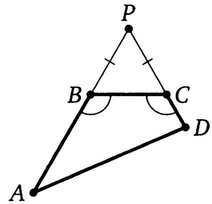


Рис. 13.5

$$AD > AP - DP =$$
$$= (AB + BP) - (DC + CP) = AB - DC = 2,$$

что и требовалось.

13.5. Ответ: 2,8.

Проведя диагональ четырёхугольника, получим два треугольника. Для каждого из них должно выполняться неравенство треугольника. Будем его проверять, исключая невозможные случаи.

Если длина диагонали равна 7,5, то оставшиеся четыре числа надо разбить на две пары так, чтобы сумма чисел в каждой из них была больше 7,5. Но этого сделать нельзя, так как даже $1 + 2 + 2{,}8 < 7{,}5$. Аналогично длина диагонали не равна 5, так как сумма любых двух из трёх меньших чисел данного набора меньше пяти.

Если длина диагонали равна 1, то оставшиеся четыре числа надо разбить на две пары так, чтобы разность чисел в каждой из них была меньше 1, но этого, очевидно, сделать нельзя. По аналогичным причинам длина диагонали не может быть равна 2.

Остаётся единственный вариант — 2,8.

▶ Указанный четырёхугольник существует, поэтому доказывать, что 2,8 удовлетворяет условию, не обязательно. Но это действительно так: $1+2>2{,}8$ и $7{,}5-5<2{,}8$. ◀

13.6. Пусть a, b и c — стороны треугольника, тогда его периметр P равен $a+b+c$. Без ограничения общности докажем, что утверждение выполняется для стороны c.

Действительно, так как $a+b>c$, то $P>2c$, значит, $c<0{,}5P$, что и требовалось.

▶ Возможно также рассуждение методом «от противного». ◀

13.7. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, диагонали которого пересекаются в точке P (см. рис. 13.6 *а*).

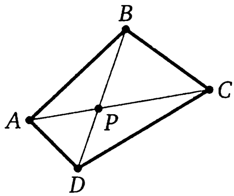


Рис. 13.6 *а*

а) ▶ Отметим, что утверждение достаточно доказать для одной пары противолежащих сторон четырёхугольника, выбрав любую из них. Поэтому логично рассмотреть два треугольника с такими сторонами и общей вершиной P. ◀

Из треугольника APB получим $AB<AP+BP$, а из треугольника CPD получим $CD<CP+DP$. Сложив эти неравенства почленно, получим

$$AB+CD < AP+BP+CP+DP = \\ = (AP+CP)+(BP+DP) = AC+BD,$$

что и требовалось.

б) 1. Воспользуемся п. а):

$$AC+BD > AB+CD \quad \text{и} \quad AC+BD > BC+DA.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$2AC+2BD > AB+BC+CD+DA = P_{ABCD},$$

значит, $AC+BD>0{,}5P_{ABCD}$.

2. Каждая диагональ разбила $ABCD$ на два треугольника. Применяя для каждого из них неравенство треугольника, получим

$$AC < AB+BC; \quad AC < CD+DA;$$
$$BD < BC+CD; \quad BD < DA+AB.$$

Сложив эти неравенства почленно, получим

$$2AC + 2BD < 2AB + 2BC + 2CD + 2DA \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; AC + BD < AB + BC + CD + DA = P_{ABCD},$$

что и требовалось.

▶ Отметим, что если четырёхугольник $ABCD$ не выпуклый, то из сформулированных утверждений верно только, что сумма диагоналей меньше периметра. В этом несложно убедиться, повторив для такого четырёхугольника рассуждение 2 из п. б). Два других утверждения неверны, так как в примере на рис. 13.6 *б* каждая сторона четырёхугольника $ABCD$, очевидно, больше, чем любая из его диагоналей. ◀

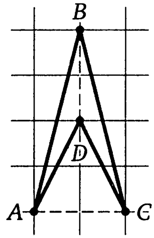


Рис. 13.6 *б*

13.8. Через точку K проведём прямую, параллельную основанию BC. Пусть M — точка её пересечения с боковой стороной AB (см. рис. 13.7).

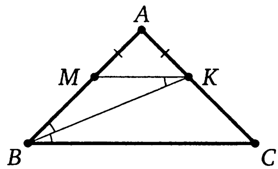


Рис. 13.7

Заметим, что треугольник MAK также равнобедренный, так как $\angle AMK = \angle ABC = \angle ACB = \angle AKM$, следовательно, $BM = CK$. Кроме того, $\angle BKM = \angle CBK = \angle ABK$, значит, $BM = MK$. Таким образом, $2CK = BM + MK > BK$, что и требовалось.

▶ Можно также использовать задачи Д120, Д136–Д148. ◀

Занятие 14
Соответствия между длинами сторон и величинами углов треугольника

Основное содержание этого занятия — задачи, для решения которых применяются простейшие соотношения между сторонами и углами треугольника: напротив большей стороны треугольника лежит больший угол, и обратно, напротив большего угла лежит бо́льшая сторона. Так как в школьных учебниках эти факты, как правило, не выделяются, то в начале занятия приведено их доказательство. Помимо прочего, освоение предложенного материала позволяет повторить важное следствие из теоремы о внешнем угле треугольника (внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного, см. занятие 4), а также строго доказать неравенство треугольника.

Это занятие в основном посвящено простейшим соотношениям между сторонами и углами треугольника: *напротив большей стороны треугольника лежит больший угол, и наоборот, напротив большего угла — большая сторона.*

Напомним, откуда это следует. Докажем сначала, что напротив большей стороны треугольника лежит больший угол. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AC > BC$, и на стороне AC отметим точку D так, что $CD = CB$ (см. рис. 14.1). Тогда $\angle CBD = \angle CDB > \angle A$, так как угол CDB внешний для треугольника ABD. Следовательно, $\angle B > \angle CBD > \angle A$, что и требовалось.

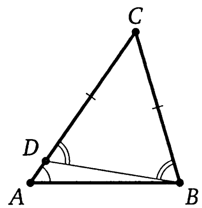


Рис. 14.1

► Отметим, что каждой стороне соответствует один противолежащий угол и каждому углу — одна сторона (соответствие между сторонами треугольника и противолежащими углами взаимно однозначное). В таких случаях обратное утверждение обязательно выполняется. Но школьники ещё мало встречались с такой ситуацией, поэтому полезно это показать, используя метод «от противного». ◄

Докажем теперь обратное утверждение: напротив большего угла треугольника лежит бо́льшая сторона. Пусть $\angle B > \angle A$, но $AC \leqslant BC$. Получим противоречие, так как если $AC < BC$, то $\angle B < \angle A$ (по доказанному выше), а если $AC = BC$, то $\angle B = \angle A$ (по свойству равнобедренного треугольника). Следовательно, $AC > BC$, что и требовалось.

Из доказанного утверждения, в частности, следует, что *в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов*, так как она лежит напротив прямого угла, а катет — напротив острого угла. Кроме того, оно позволит строго доказать *неравенство треугольника* (см. задачу 14.5).

Рассмотрим теперь задачу, которая, в свою очередь, может являться базовой для решения других задач.

Пример 14.1. а) Внутри стороны AC треугольника ABC отмечена точка D. Докажите, что длина отрезка BD меньше, чем хотя бы одна из сторон AB или BC.

б) Внутри сторон AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и K. Докажите, что длина отрезка MK меньше, чем хотя бы одна из сторон треугольника ABC.

Решение. а) Один из двух углов, ADB или CDB, не является острым, например угол ADB (см. рис. 14.2 *а*). Тогда этот угол является наибольшим в треугольнике ABD, значит, $BD < AB$.

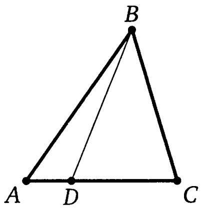


Рис. 14.2 *а*

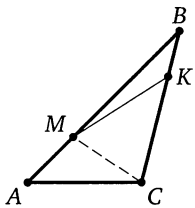


Рис. 14.2 *б*

б) Проведём отрезок CM, тогда, используя результат п. а) для треугольника CBM, получим $MK < MB < AB$ или $MK < MC$, а MC, в свою очередь, меньше AC или BC.

Полезным является и ещё одно соотношение, которое связано с медианой треугольника.

Пример 14.2. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Сравните длины сторон AC и BC, если $\angle ACM > \angle BCM$.

▶ Опять поможет «удвоение» медианы. ◀

Решение. Продлим медиану CM на её длину: $DM = CM$ (см. рис. 14.3). Тогда из равенства треугольников AMD и BMC следует, что $BC = AD$ и $\angle BCM = \angle ADM$. Рассмотрим треугольник ACD: в нём $\angle ACD > \angle ADC$, значит, $AD > AC$. Следовательно, $BC > AC$.

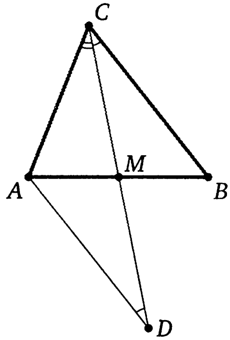


Рис. 14.3

Ответ: $BC > AC$.

► Верно и обратное: если $BC > AC$, то $\angle ACM > \angle BCM$. Это можно доказать аналогичными рассуждениями либо методом «от противного».

Кроме того, если $BC > AC$, то $\angle A > \angle B$. Тогда

$$\angle BMC = \angle A + \angle ACM > \angle B + \angle BCM = \angle BMC,$$

т. е. $\angle BMC > 90°$. ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

14.1. Существует ли прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна 10, а проведённая к ней высота равна 6?

14.2. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Докажите, что угол AKC тупой.

14.3. В треугольнике ABC с тупым углом C на сторонах AC и BC отмечены точки M и N. Докажите, что $MN < AB$.

14.4. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle B < 90°$, $\angle D > \angle C$. Сравните длины сторон AD и BC.

14.5. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB за вершину A отмечена точка D так, что $AD = AC$. Докажите, что: а) $BD > BC$; б) сумма двух сторон треугольника больше третьей.

14.6. В треугольнике ABC, отличном от равностороннего, угол A равен $60°$. Докажите, что $AB + AC < 2BC$.

14.7. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с гипотенузой AB. На сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно, отличные от вершин. Докажите, что $AK + KM > AB$.

14.8. Докажите, что биссектриса треугольника не больше его медианы, проведённой из той же вершины.

14.1. Ответ: нет.

► Напомним, что если задана гипотенуза прямоугольного треугольника, то часто имеет смысл найти медиану, проведённую к ней. ◄

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = 10$. Проведём его медиану CM и высоту CH, тогда $CM = \frac{1}{2}AB = 5$.

Если высота совпадает с медианой, то $CH = 5$. Если они не совпадают, то CM — гипотенуза прямоугольного треугольника CMH, а CH — его катет (см. рис. 14.4). Так как гипотенуза больше катета, то $CH < 5$. В обоих случаях получаем противоречие с условием задачи.

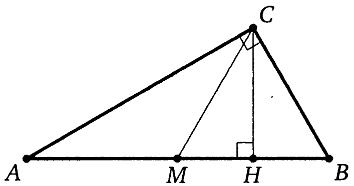


Рис. 14.4

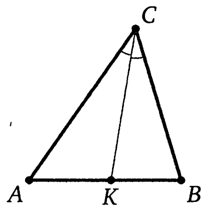


Рис. 14.5

14.2. Так как $AC > BC$, то $\angle B > \angle A$. Кроме того, $\angle ACK = \angle BCK$ (см. рис. 14.5). По теореме о внешнем угле

$$\angle AKC = \angle BCK + \angle B > \angle ACK + \angle A = \angle BKC.$$

Больший из двух смежных углов является тупым.

14.3. *Первый способ.* Из примера 14.1 б следует, что MN меньше хотя бы одной из сторон треугольника ABC. Так как угол C тупой, то AB — наибольшая сторона данного треугольника, значит, $MN < AB$.

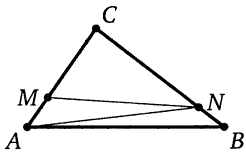


Рис. 14.6

Второй способ. Проведём отрезок AN (см. рис. 14.6). Угол AMN внешний для треугольника MCN, значит, $\angle AMN > \angle MCN > 90°$, поэтому $MN < AN$. Аналогично угол ANB внешний для треугольника ACN, значит, $\angle ANB > \angle ACN > 90°$, поэтому $AN < AB$.

Таким образом, $MN < AB$.

14.4. Ответ: $AD < BC$.

Продолжим стороны AD и BC до их пересечения в точке E (см. рис. 14.7). Так как $\angle A = \angle B$, то AEB — равнобедренный треугольник, т. е. $AE = BE$. Так как $\angle ADC > \angle DCB$, то, рассматривая треугольник DEC, получаем, что $\angle ECD > \angle EDC$, значит, $ED > EC$. Тогда $AD = AE - ED < BE - EC = BC$.

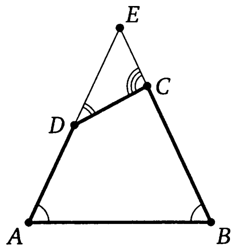


Рис. 14.7

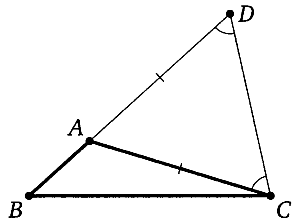


Рис. 14.8

▶ Отметим, что идея такого дополнительного построения ранее уже встречалась, например, в задаче 13.3. Возможно и другое дополнительное построение: через точку D провести прямую, параллельную AB, до пересечения с прямой BC в точке F. Тогда точка F лежит на отрезке BC, так как $\angle ADC > 180° - \angle A$.

Также отметим, что утверждение задачи останется верным и в случае, когда равные углы не острые. ◀

14.5. а) Проведём отрезок CD, тогда из условия задачи следует, что $\angle ADC = \angle ACD$ (см. рис. 14.8). Рассмотрим треугольник BCD: в нём $\angle BCD > \angle BDC$, поэтому $BD > BC$, что и требовалось.

б) Из доказанного в п. а) следует, что

$$AB + AC = AB + AD = BD > BC.$$

▶ Для того чтобы считать неравенство треугольника доказанным, достаточно сказать, что построение из условия задачи можно осуществить для любой стороны, либо оговорить, что BC — наибольшая сторона треугольника ABC. ◀

▶ Наличие п. а) напоминает об идее «спрямления», которая могла встречаться и ранее (см., например, Д.14, Д.88, Д.89 или соответствующие задачи на построение). ◀

14.6. ▶ Если дан угол 60°, то где-то хорошо бы найти угол 30°, но для этого потребуется дополнительное построение, реализующее идею «спрямления». ◀

На продолжении стороны AB за вершину A отметим точку D так, что $AD = AC$ (см. рис. 14.9). Тогда

$$\angle ADC = 0{,}5\angle BAC = 30°.$$

Из вершины B опустим перпендикуляр BE на прямую CD (точки E и C не совпадают, так как треугольник ABC не равносторонний).

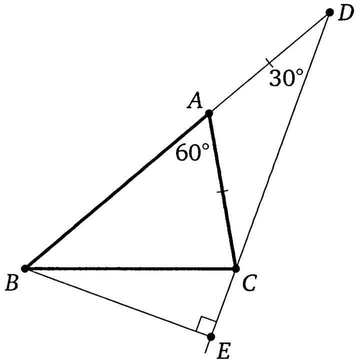


Рис. 14.9

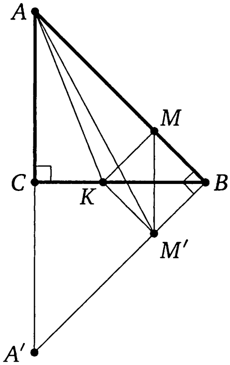


Рис. 14.10

Из прямоугольного треугольника BDE получаем, что $AB + AC = AD = 2BE$, а из прямоугольного треугольника BCE получаем, что $BE < BC$. Следовательно, $AB + AC < 2BC$, что и требовалось.

14.7. Отразим треугольник ABC относительно прямой BC и получим треугольник $A'BC$ (см. рис. 14.10). Тогда точка M', симметричная точке M относительно BC, принадлежит отрезку $A'B$. Кроме того, $\angle ABA' = 90°$. По неравенству треугольника $AK + KM = AK + KM' \geqslant AM'$, а из прямоугольного треугольника ABM' получаем, что $AM' > AB$ (гипотенуза больше катета). Следовательно, $AK + KM > AB$.

► Если школьники уже сталкивались с задачей Герона («Даны прямая m и точки A и B в одной полуплоскости относительно неё. Построить ломаную ACB наименьшей длины так, чтобы точка C принадлежала m»), то им проще будет найти идею решения. В ином случае можно подсказать идею использования симметрии.

Отметим также, что утверждение задачи обобщается для случая, когда $AC > BC$. ◄

14.8. Пусть в треугольнике ABC проведены биссектриса CK и медиана CM. Если $AC = BC$, то они совпадают, т. е. достигается равенство. Иначе, не умаляя общности, можно считать, что $AC > BC$ (см. рис. 14.11).

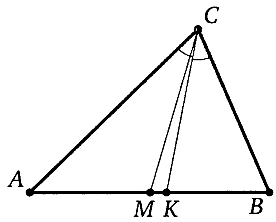


Рис. 14.11

Тогда из задачи 14.2 следует, что угол AKC тупой. Согласно комментарию к примеру 14.2 получаем, что $\angle BCM > \angle ACM$, поэтому точка M лежит на отрезке AK. Рассмотрим треугольник CKM: в нём $\angle CMK < \angle CKM$, следовательно, $CK < CM$, что и требовалось.

► Попутно доказано, что если $AC > BC$, то $AK > BK$. Используя пример 14.2, можно доказать и утверждение, обратное к этому.

Кроме того, учитывая, что высота, проведённая из той же вершины, не больше биссектрисы, можно сформулировать общее утверждение для высоты, биссектрисы и медианы треугольника, которые проведены из одной вершины: биссектриса не меньше высоты и не больше медианы. ◄

► Можно также использовать задачи Д149—Д160. ◄

Занятие 15
Геометрические места точек

Приоритетная цель этого занятия — повторить основные геометрические места точек на плоскости и научиться с их помощью решать задачи на поиск других геометрических мест точек. Отдельное внимание имеет смысл уделить двум возможным типам рассуждений при решении таких задач: доказательству взаимно обратных утверждений и построению цепочки равносильных утверждений. Некоторые задачи этого занятия дают возможность повторить свойства и признаки равнобедренного и прямоугольного треугольников и материал занятия 14, а другие позволяют при желании обоснованно ввести понятия описанной, вписанной и вневписанных окружностей для треугольника.

На этом занятии мы займёмся задачами на поиск *геометрических мест точек* на плоскости (в дальнейшем — *ГМТ*), обладающих теми или иными свойствами. Для начала вспомним, что такое ГМТ.

Определение. *Геометрическое место точек*, обладающих заданным свойством, — это фигура, состоящая из тех и только тех точек, для которых это свойство выполняется.

Поэтому, найдя искомое ГМТ — фигуру F, надо доказать два взаимно обратных утверждения.

1. Если точка принадлежит F, то она обладает указанным свойством.

2. Если точка обладает указанным свойством, то она принадлежит F.

► Полезно подчеркнуть, что в обоих пунктах речь идёт о любой точке. ◄

Отметим, что п. 2 иногда удобнее доказывать в другой формулировке: если точка не принадлежит F, то она указанным свойством не обладает. По сути, это доказательство п. 2 методом «от противного».

Отметим также, что в ряде случаев можно не доказывать два утверждения, а использовать цепочку равносильных утверждений.

Вспомним простейшие ГМТ на плоскости.

1. а) Геометрическим местом точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки, является окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию.

б) Геометрическим местом точек, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем заданного, является круг с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию.

Это фактически определения окружности и круга.

2. Геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек, является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему данные точки.

Это следует из свойства и признака равнобедренного треугольника (совпадения высоты и медианы, проведённых к основанию).

3. Геометрическим местом точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, являются две прямые, параллельные данной и находящиеся от неё на данном расстоянии.

Это следует из того, что расстоянием между параллельными прямыми является длина их общего перпендикуляра (с концам на этих прямых).

4. Геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых, является прямая, им параллельная и находящаяся между ними на расстоянии, равном половине расстояния между данными прямыми.

Это также следует из определения расстояния между параллельными прямыми.

► Эту прямую можно описать и по-другому: серединный перпендикуляр к любому общему перпендикуляру к данным прямым (с концами на них). ◄

5. Геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых, являются две перпендикулярные прямые, которые делят пополам каждый из четырёх образовавшихся углов.

Это следует из утверждения, доказанного в примере 6.1: *точка лежащая внутри угла, равноудалена от его сторон тогда и только тогда, когда она лежит на биссектрисе угла*. Кроме того, биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, а биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

При решении задач на поиск других ГМТ желательно научиться грамотно использовать уже известные ГМТ, а также стараться рационально проводить рассуждения, используя равносильность там, где это возможно. Кроме того, важно научиться делать правильные выводы из того, какая величина получается фиксированной. Рассмотрим это на простых примерах.

Пример 15.1. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек X, что $\angle XAB > \angle XBA$.

Решение. 1. Рассмотрим сначала только точки X, не лежащие на прямой AB. Тогда заданное свойство равносильно тому, что в треугольнике AXB выполняется неравенство $XB > XA$. Заметим, что геометрическим местом точек M, для которых $MB = MA$, является серединный перпендикуляр m к отрезку AB (см. утверждение 2). Прямая m разбивает плоскость на две полуплоскости (см. рис. 15.1).

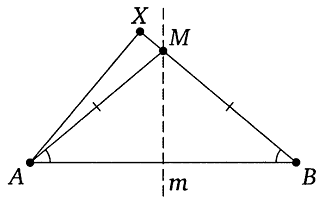


Рис. 15.1

Докажем, что искомыми являются те и только те точки X, которые лежат в той же полуплоскости, что и точка A. Действительно, нахождение точки X в этой полуплоскости равносильно тому, что отрезок BX пересекает m в некоторой точке M, поэтому $BX = BM + MX = AM + MX > AX$ (по неравенству треугольника).

► Вместо использования неравенства треугольника можно использовать равенство углов MAB и MBA, тогда нахождение точки X в указанной полуплоскости равносильно тому, что $\angle XAB > \angle XBA$, а это и требовалось изначально. ◄

2. Из точек, лежащих на прямой AB, искомому ГМТ принадлежат точки, лежащие в рассмотренной полуплоскости, но не принадлежащие отрезку AB. Действительно, только в этом случае требуемое неравенство выполняется, так как $\angle XAB = 180°$, а $\angle XBA = 0$.

Ответ: искомым ГМТ является полуплоскость относительно серединного перпендикуляра к AB, в которой лежит точка A, исключая её границу m и точки отрезка AB.

► Можно указать, что в этой задаче повторена конструкция задачи 14.5. ◄

Отметим, что отдельной особенностью многих задач на ГМТ является необходимость рассмотрения каких-нибудь «вырожденных» случаев, как и показано в этом примере.

Следующий пример иллюстрирует ещё один важный принцип: если задано несколько условий, то искомое ГМТ является *пересечением* ГМТ, соответствующих каждому из них.

► Если школьники не сталкивались ранее с идеей пересечения (например, при решении задач на построение), то полезно сначала предложить упражнение типа: «Найдите точку, равноудалённую от сторон данного угла и находящуюся на заданном расстоянии от данной точки». Кроме того, имеет смысл подчеркнуть, что такой подход отражает общематематическую идею «ослабления условия»: сначала отбрасываем одно условие, затем отбрасываем другое, что и позволяет прийти к решению. ◄

Пример 15.2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от трёх попарно пересекающихся прямых.

Решение. Пусть данные прямые попарно пересекаются в точках A, B и C (см. рис. 15.2). Для того чтобы найти искомое ГМТ, найдём сначала геометрическое место точек, равноудалённых от двух прямых, например от AB и BC, а затем найдём геометрическое место точек, равноудалённых от прямых AC и BC. Тогда пересечением этих двух ГМТ будут те и только те точки, которые равноудалены от всех трёх прямых.

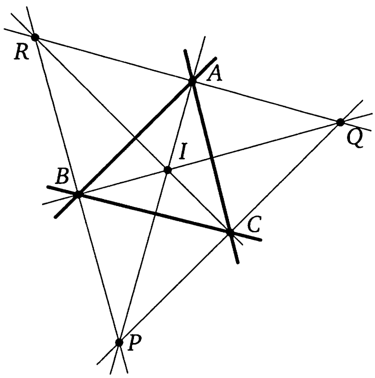


Рис. 15.2

Из утверждения 5 следует, что эти два ГМТ — это прямые, содержащие биссектрисы четырёх углов, образовавшихся при пересечении данных прямых в точках B и C соответственно. Следовательно, искомое ГМТ — пересечение двух указанных ГМТ.

Таким образом, *искомое ГМТ состоит из четырёх точек, обозначенных на рис.* 15.2 *буквами* P, Q, R *и* I. При этом так как эти точки равноудалены от прямых AB и AC, то они лежат на биссектрисах углов, образовавшихся при пересечении этих прямых в точке A.

Поясним отдельно, почему указанные ГМТ пересекаются в четырёх точках. Рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах B и C, лежащие внутри угла BAC. Они пересекаются в некоторой точке P, так как сумма половин внешних углов B и C меньше чем $180°$. Аналогичные рассуждения можно провести для других пар внешних углов, а также для биссектрис внутренних углов треугольника ABC.

► Из приведённых рассуждений также следует, что в любом треугольнике существует окружность, касающаяся всех его сторон (с центром I), которая называется *вписанной* в треугольник, и существуют три окружности, каждая из которых касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон (с центрами P, Q и R). Такие окружности называются *вневписанными*. ◄

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

15.1. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с основанием AB.

15.2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от трёх заданных точек.

15.3. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек X, что $AX \leqslant BX \leqslant CX \leqslant DX$.

15.4. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

15.5. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла C. По какой траектории движется середина этого отрезка?

15.6. Найдите геометрическое место точек C, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

15.7. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек C, что наибольшим в треугольнике ABC является: а) угол C; б) угол A.

15.8. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна длине заданного отрезка.

Ответы, решения, комментарии

15.1. Точка C является вершиной равнобедренного треугольника с основанием AB тогда и только тогда, когда она не лежит на отрезке AB и $CA = CB$. Следовательно, *искомое ГМТ — серединный перпендикуляр к AB за исключением середины этого отрезка.*

15.2. Пусть A, B и C — данные точки. Аналогично примеру 15.2 найдём сначала два геометрических места точек: равноудалённых от A и B и равноудалённых от B и C. Тогда искомое ГМТ будет их пересечением.

Из утверждения 2 следует, что этими двумя ГМТ будут серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC соответственно. Возможны два случая.

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Тогда указанные серединные перпендикуляры параллельны, поэтому *искомое ГМТ — пустое множество точек.*

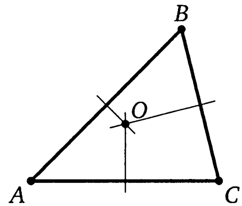


Рис. 15.3

2. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Тогда перпендикуляры к AB и к BC не могут быть параллельными (иначе прямые AB и BC совпадают), поэтому они пересекутся в некоторой точке O (см. рис. 15.3). Так как точка O лежит на серединном перпендикуляре к AB, то она равноудалена от A и B, а так как O лежит на серединном перпендикуляре к BC, то она равноудалена от B и C. Таким образом, точка O равноудалена от трёх данных точек, значит, она принадлежит искомому ГМТ.

Кроме того, так как точка O равноудалена от A и C, то она лежит на серединном перпендикуляре к AC. Из приведённых рассуждений следует, что других точек, удовлетворяющих условию, нет, т. е. *искомое ГМТ — точка пересечения* *трёх серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющим данные точки попарно.*

► Из приведённых рассуждений также следует, что для любого треугольника существует окружность, проходящая через его вершины, которая называется *описанной* около этого треугольника, и эта окружность единственная. ◄

15.3. Пусть квадрат $ABCD$ расположен на плоскости так, как показано на рис. 15.4. Тогда, точки, удовлетворяющие неравенству $AX \leqslant BX$, лежат в нижней полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к AB, а точки, удовлетворяющие неравенству $CX \leqslant DX$, — в верхней полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к CD (см. пример 15.1). Так как граница этих полуплоскостей одна и та же, то двум условиям одновременно удовлетворяет только она.

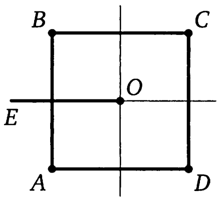


Рис. 15.4

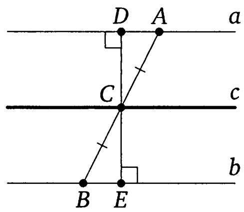


Рис. 15.5

Ещё одним условием является неравенство $BX \leqslant CX$. Ему удовлетворяют точки, лежащие в левой полуплоскости относительно общего серединного перпендикуляра к BC и AD. Указанные перпендикуляры пересекаются в центре O квадрата. Таким образом, *искомое ГМТ — луч OE с началом в центре квадрата, параллельный BC и AD.*

15.4. Пусть даны параллельные прямые a и b. Рассмотрим произвольный отрезок AB с концами на этих прямых и его середину C. Если он является общим перпендикуляром к a и b, то его середина равноудалена от них. Иначе опустим перпендикуляр CD на прямую a. Пусть прямая CD пересекает b в точке E, тогда $CE \perp b$ (см. рис. 15.5). Так как прямоугольные треугольники ACD и BCE равны (по гипотенузе и острому углу), то $CD = CE$. Таким образом, доказано, что если C — середина отрезка с концами на данных прямых, то C равноудалена от этих прямых.

В обратную сторону: пусть точка C равноудалена от прямых a и b. Тогда она является серединой общего перпендикуляра DE к прямым a и b (с концами на этих прямых, см. рис. 15.5). Таким образом, доказано, что если точка C равноудалена от данных прямых, то она является серединой отрезка с концами на них.

Следовательно, искомое геометрическое место середин совпадает с геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых (см. утверждение 4), т. е. *искомое ГМТ — прямая, параллельная данным, которая равноудалена от них.*

► Отметим, что каждая точка найденного ГМТ является серединой бесконечного множества отрезков с концами на данных прямых. ◄

15.5. Пусть AB — данный отрезок. При любом его указанном положении образуется прямоугольный треугольник ACB с фиксированной длиной гипотенузы (см. рис. 15.6). Пусть O — середина AB, тогда CO — медиана этого треугольника, значит, $CO = \frac{1}{2}AB$. Следовательно, при любом указанном положении отрезка AB точка O находится на одном и том же расстоянии от C. Кроме того, точка O меняет своё положение: «стартовав» с луча CA, «финиширует» на луче CB. Следовательно, *она движется по окружности с центром C и радиусом, равным половине длины данного отрезка* (см. утверждение 1).

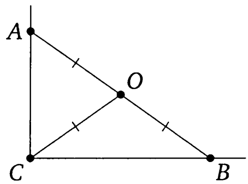


Рис. 15.6

► Отметим, что при такой постановке вопроса не требуется выяснять, является ли любая точка указанной окружности серединой AB или нет. При желании можно доказать, что геометрическое место середин данного отрезка — дуга указанной окружности, лежащая внутри данного угла. ◄

15.6. ► При необходимости можно заранее пояснить школьникам, что значит «отрезок виден из точки». ◄

Исключим из дальнейшего рассмотрения все точки прямой AB (если даже считать, что отрезок AB из них виден, то это возможно либо под углом $0°$, либо под углом $180°$). Тогда условие $\angle ACB = 90°$ равносильно тому, что треугольник ABC существует и является прямоугольным с гипотенузой AB. В свою очередь, это равносильно тому, что его медиана CM, проведённая к AB, равна половине AB (см. занятие 5). Тогда согласно утверждению 1 *искомым ГМТ является окружность с центром в точке M — середине AB и радиусом $0{,}5AB$, за исключением точек A и B* (см. рис. 15.7). Ответ можно сформулировать короче: *искомым ГМТ является окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B.*

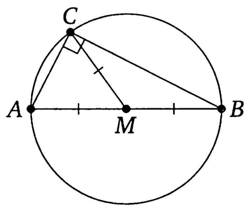


Рис. 15.7

► Если такое рассуждение учащимся провести трудно, то можно сначала доказать, что C лежит на указанной окружности, а затем показать, что для любой точки C этой окружности, отличной от A и B, $\angle ACB = 90°$. ◄

15.7. а) Угол C является наибольшим тогда и только тогда, когда AB — наибольшая сторона в треугольнике ABC, т. е. $AB > AC$ и $AB > BC$. Проведём окружность с центром A и радиусом AB, тогда все точки C, удовлетворяющие первому неравенству, лежат внутри этой окружности (см. рис. 15.8 *а*). Аналогично все точки, удовлетворяющие второму неравенству, лежат внутри окружности с центром B и радиусом AB. Следовательно, оба неравенства выполняются для тех и только тех точек, которые лежат в пересечении указанных областей. Учитывая, что для точек C, лежащих на прямой AB, треугольника не существует, получим, что *искомое ГМТ — общая часть внутренних точек двух кругов с центрами A и B и радиусом AB, за исключением точек отрезка AB.*

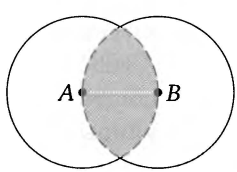


Рис. 15.8 *а*

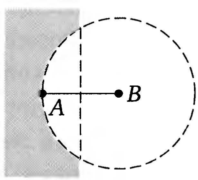


Рис. 15.8 *б*

б) Угол A является наибольшим тогда и только тогда, когда BC — наибольшая сторона в треугольнике ABC, т. е. $BC > AB$ и $BC > AC$. Проведём окружность с центром B и радиусом AB, тогда все точки C, удовлетворяющие первому неравенству, лежат вне этой окружности (см. рис. 15.8*б*). Проведём серединный перпендикуляр к AB, тогда все точки, удовлетворяющие второму неравенству, лежат в той же полуплоскости, что и точка A. Следовательно, оба неравенства выполняются для тех и только тех точек, которые лежат в пересечении указанных областей. Учитывая, что для точек C, лежащих на прямой AB, треугольника не существует, получим, что *искомое ГМТ — множество точек, лежащих вне круга с центром B и радиусом AB и в той же полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к AB, что и точка A, не включая границу этой полуплоскости.*

15.8. ▶ В случае затруднений можно предложить школьникам отметить точки D и F, удовлетворяющие условию, на сторонах данного угла и проверить точки отрезка DF. Это поможет прийти к идее «спрямления». ◀

Пусть дан угол ABC и отрезок длины a. Проведём прямую DE, параллельную BC, на расстоянии a от неё, где D — точка её пересечения с лучом BA, а E — внутренняя точка угла ABC (см. рис. 15.9). Тогда множество точек луча DE, за исключением начала, является геометрическим местом внутренних точек данного угла, удалённых от прямой BC на расстоянии a (см. утверждение 3).

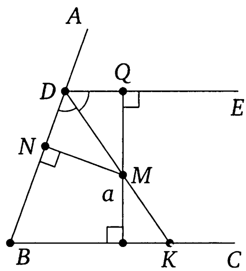


Рис. 15.9

Заметим, что точки искомого ГМТ должны лежать в полосе, образованной параллельными прямыми DE и BC. Так как ширина этой полосы равна искомой сумме, то сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри полосы, до её краёв также равна искомой сумме. Следовательно, точка M, лежащая внутри этой полосы, принадлежит данному ГМТ тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из неё на прямые DE и BD, равны, т. е. тогда и только тогда, когда она принадлежит биссектрисе угла BDE.

Следовательно, *искомое ГМТ — множество точек биссектрисы угла BDE, лежащих внутри данного угла ABC.*

▶ Отметим, что треугольник BDK, отсекаемый прямой DK от угла ABC, равнобедренный. Поэтому попутно доказан известный факт: сумма расстояний от точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведённой к боковой стороне (см. рис. 15.9). ◄

► Можно также использовать задачи Д161—Д168. ◄

Занятие 16
Применение геометрических мест точек

На этом занятии предлагаются задачи, для решения которых используются серединный перпендикуляр к отрезку и биссектриса угла в качестве геометрических мест точек. В отличие от задач занятия 15, в условиях задач не используется словосочетание ГМТ, но их решения опираются на утверждения 2 и 5, рассмотренные в начале занятия 15, разобранные в нём примеры и задачу 15.2. Какие-то из этих фактов, а также результат вычислений углов из примера 3.1, возможно, имеет смысл повторить в начале этого занятия. При обсуждении решений стоит также обратить особое внимание на точность и грамотность ссылок на соответствующие факты. При желании (и возможности) можно разбить это занятие на два, рассматривая серединный перпендикуляр и биссектрису по отдельности.

На этом занятии будут предложены задачи, для решения которых потребуется использовать некоторые ГМТ, рассмотренные на предыдущем занятии. В частности, в начале занятия 15 было обосновано, что *геометрическим местом точек, равноудалённых от двух данных точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB*, а по ходу решения задачи 15.3 было показано, что *геометрическим местом таких точек X, что $AX \leqslant BX$, является та полуплоскость, ограниченная серединным перпендикуляром к AB, в которой лежит точка A.*

Пример 16.1. Города A, B, C и D расположены так, что как город A, так и город B ближе к C, чем к D. Пешеход прошёл прямым путём из A в B. Докажите, что в любой момент он был ближе к C, чем к D.

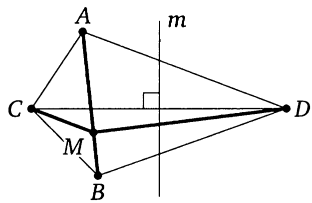


Рис. 16.1

Решение. Проведём серединный перпендикуляр m к отрезку CD (см. рис. 16.1). Так как $AC < AD$ и $BC < AD$, то точки A и B лежат в той полуплоскости с границей m, которая содержит точку C. Значит, любая точка M отрезка AB также лежит в этой полуплоскости. Следовательно, $MC < MD$, что и требовалось.

При решении многих задач используется, что *геометрическим местом точек, лежащих внутри угла и равноудалённых от сторон этого угла, является его биссектриса.* Это позволяет, найдя точку пересечения биссектрис двух углов треугольника (внутренних или внешних), сделать вывод о том, что эта точка принадлежит биссектрисе третьего угла (см. пример 15.2, при необходимости можно повторить со школьниками такое рассуждение, используя понятие ГМТ).

Рассмотрим теперь задачу, которая давно стала «классикой».

Пример 16.2. В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

► Прежде чем обсуждать решение, можно предложить учащимся попробовать вычислить угол $A_1B_1C_1$ «в лоб», чтобы они убедились, что это невозможно. ◄

Решение. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D, тогда $\angle DBC = 60^\circ$, т. е. луч BC — биссектриса угла DBB_1 (см. рис. 16.2). Так как AA_1 — биссектриса угла BAC, то A_1 — точка пересечения биссектрисы угла A и биссектрисы внешнего угла B треугольника ABB_1. Следовательно, точка A_1 лежит на биссектрисе внешнего угла B_1 этого треугольника. Таким образом, B_1A_1 — биссектриса угла BB_1C.

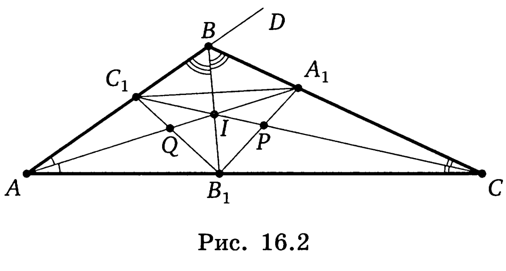


Рис. 16.2

Аналогично из того, что CC_1 — биссектриса внутреннего, а BA — биссектриса внешнего углов треугольника CBB_1, следует, что B_1C_1 — биссектриса угла BB_1A. Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

▶ Отметим, что с «продвинутыми» учащимися это и дальнейшие аналогичные рассуждения можно проводить, используя термин «центр вневписанной окружности».

Отметим также, что справедливо и обратное утверждение: если треугольник $A_1B_1C_1$ прямоугольный с прямым углом B_1, то $\angle ABC = 120°$. Рассмотренную конструкцию иногда называют треугольником Шебаршина (в честь автора первой публикации о нём).

Кроме того, в рассмотренной конструкции

$$\angle B_1C_1C = \angle B_1A_1A = 30°.$$

Действительно, угол B_1C_1C является углом между внутренней и внешней биссектрисами треугольника B_1BC. Согласно задаче 4.4 он равен половине угла CBB_1, который равен $60°$. Аналогично угол B_1A_1A равен половине угла ABB_1, который также равен $60°$. Возможны и другие способы вычисления этих углов, использующие, например, точки P и Q (см. рис. 16.2).◀

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

16.1. Точки A, B и C лежат на прямой m, а точки D и E на ней не лежат. Известно, что $AD = AE$ и $BD = BE$. Докажите, что $CD = CE$.

16.2. Серединный перпендикуляр m к стороне AB треугольника ABC разбивает его на две части с равными периметрами. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

16.3. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I, а биссектрисы углов CA_1B_1 и CB_1A_1 — в точке J. Докажите, что точки C, I и J лежат на одной прямой.

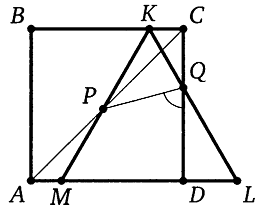
16.4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE — биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

16.5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что

$$AB = BC, \quad CD = DE \quad \text{и} \quad EF = FA.$$

Докажите, что биссектрисы углов B, D и F пересекаются в одной точке.

16.6. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.



16.7. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ и $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам AB, CD и EF пересекаются в одной точке.

16.8. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырёх точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом $45°$.

Ответы, решения, комментарии

16.1. Из условия задачи следует, что и точка A, и точка B лежат на серединном перпендикуляре к отрезку DE, поэтому прямая AB с ним совпадает (см. рис. 16.3). Так как точка C лежит на прямой AB, то $CD = CE$, что и требовалось.

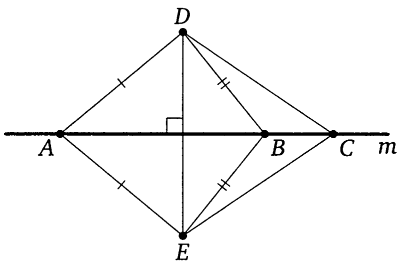


Рис. 16.3

► Также возможно рассуждение, основанное на том, что DAE и DBE — равнобедренные треугольники с общим основанием, поэтому их медианы, проведённые к DE, лежат на одной прямой и на ней же лежит точка C.

Кроме того, требуемое равенство можно получить, используя несколько раз равенства треугольников, но в таком рассуждении придётся рассматривать различные случаи взаимного расположения точек A, B и C. ◄

16.2. Докажем, что $AC = BC$. Пусть это не так, тогда без ограничения общности можно считать, что $BC < AC$. Значит, точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой m (см. пример 15.1), поэтому она пересекает сторону AC в некоторой точке K (см. рис. 16.4). Из условия задачи следует, что $BC + CK = AK$. Но отрезки AK и BK симметричны относительно m, поэтому $AK = BK$. Из треугольника BKC получаем, что $BK < BC + CK$, т. е. $AK < BC + CK$. Противоречие. Следовательно, $AC = BC$, что и требовалось.

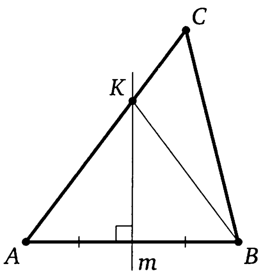


Рис. 16.4

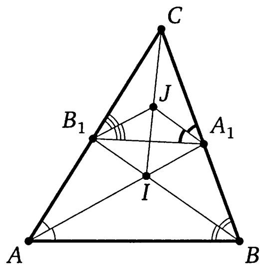


Рис. 16.5

16.3. Так как две биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I, то CI также биссектриса этого треугольника (см. рис. 16.5). Аналогично J — точка пересечения двух биссектрис треугольника A_1B_1C, поэтому CJ также биссектриса этого треугольника. Угол C у этих треугольников общий, поэтому CI и CJ — один и тот же луч, т. е. точки C, I и J лежат на одной прямой.

▶ Отметим, что утверждение останется верным, если вместо внутренних биссектрис одного или обоих треугольников ABC и A_1B_1C проводить их внешние биссектрисы.

Полезно также подчеркнуть, что во всех таких вариациях могут использоваться рассуждения, аналогичные тем, которые проводились в примере 15.2. ◀

16.4. Ответ: $120°$.

Рассмотрим треугольник ABD, в котором BE — биссектриса внутреннего угла, а DE — биссектриса внешнего угла ADC (см. рис. 16.6). Точка E их пересечения равноудалена от сторон внешнего угла DAF этого треугольника, поэтому AE — биссектриса угла DAF. Таким образом, $\angle FAE = \angle EAD = \angle DAB = 60°$, поэтому $\angle BAC = 120°$.

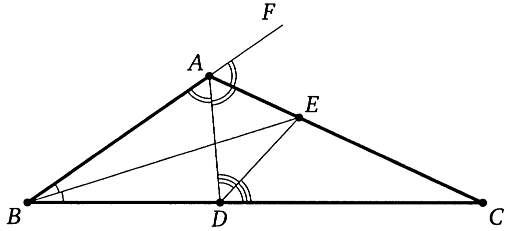


Рис. 16.6

► Полезно подчеркнуть связь между этой задачей и примером 16.2, так как возникла практически та же конструкция треугольника с углом 120°. Угол, с ним смежный, равен его половине, откуда и возникает идея использования внешней биссектрисы. ◄

16.5. Проведём отрезок AC и рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, тогда биссектриса угла ABC является серединным перпендикуляром к стороне AC (см. рис. 16.7). Аналогично биссектрисы углов CDE и EFA являются серединными перпендикулярами к отрезкам CE и EA соответственно. Таким образом, биссектрисы углов B, D и F данного шестиугольника являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника ACE, поэтому они пересекаются в одной точке (см. задачу 15.2).

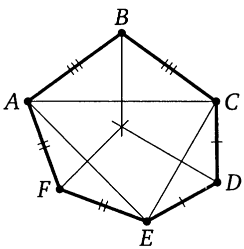


Рис. 16.7

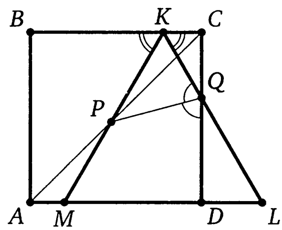


Рис. 16.8

16.6. Ответ: 75°.

Рассмотрим треугольник CKQ. Так как P лежит на диагонали квадрата, то CP — биссектриса угла KCQ. Кроме того, $\angle BKM = \angle KML = \angle MKL = 60°$ (см. рис. 16.8), откуда следует, что KP — биссектриса угла BKQ (внешнего угла для треугольника CKQ). Следовательно, QP — биссектриса внешнего угла KQD треугольника CKQ. Поскольку $\angle KQC = 90° - \angle CKQ = 30°$, то $\angle KQD = 150°$, а $\angle PQD = \angle PQK = 0{,}5\angle KQD = 75°$.

► Отметим, что наличие равностороннего треугольника в сочетании с прямой, параллельной его стороне, даёт возможность в очередной раз использовать биссектрису внешнего угла (см. также пример 16.2 и задачу 16.4). ◄

16.7. Продлим отрезки FA и CB до пересечения в точке K (см. рис. 16.9). Тогда $\angle KAB = \angle KBA$ (углы, смежные с равными), значит, треугольник AKB равнобедренный, поэтому серединный перпендикуляр к AB содержит биссектрису угла AKB.

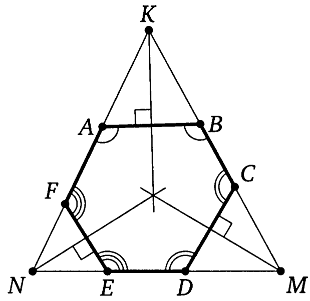


Рис. 16.9

Аналогичным образом получим равнобедренные треугольники CMD и ENF, тогда серединные перпендикуляры к CD и EF будут содержать биссектрисы углов CMD и ENF соответственно.

Так как биссектрисы треугольника KMN пересекаются в одной точке (см. пример 15.2), то и указанные серединные перпендикуляры также пересекаются в этой точке.

► В задачах 16.5 и 16.7 используется один и тот же приём, который А. В. Шаповалов назвал «подменой объекта». Его суть состоит в том, что в процессе решения один объект заменяется другим и это приводит к результату. В указанных задачах взаимозаменяемыми являются биссектрисы и серединные перпендикуляры. Отметим, что «спрямление», использованное при решении некоторых задач, также можно считать «подменой объекта». ◄

16.8. Пусть E, F, G и H — точки пересечения границ квадрата $ABCD$ и данной полосы (см. рис. 16.10). Так как сторона квадрата равна ширине полосы, то точка G равноудалена от прямых AB и EF. Следовательно, EG — биссектриса угла AEF. Аналогично FH — биссектриса угла CFE. Тогда точка O пересечения EG и FH является точкой пересечения внешних биссектрис треугольника EBF. Следовательно,

$\angle EOF = 90° - \frac{1}{2}\angle EBF = 45°$ (см. пример 3.1), что и требовалось.

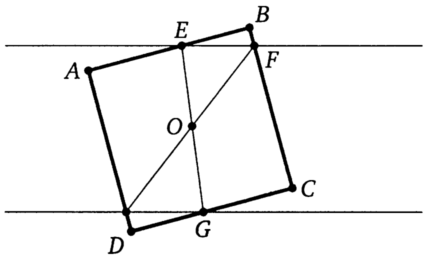


Рис. 16.10

► Отметим, что из доказанного также следует, что A лежит на диагонали BD данного квадрата. Действительно, точка O принадлежит биссектрисам углов EBF и GDH, которые делят пополам противоположные углы квадрата. ◄

► Можно также использовать задачи Д132, Д169–Д177. ◄

Дополнительные задачи

Д93. Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.

Д94. Вершину треугольника назовём «удачной», если биссектриса, исходящая из неё, равна одной из выходящих из неё же сторон. У треугольника есть две «удачные» вершины. Обязательно ли он равнобедренный?

Д95. Диагональ четырёхугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Докажите, что в этом четырёхугольнике есть хотя бы две параллельные стороны.

Д96. Каждая из двух прямых разбивает выпуклый четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Обязательно ли все стороны четырёхугольника равны между собой?

Д97. Про четырёхугольник известно, что существуют две прямые, каждая из которых разбивает его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Обязательно ли он является квадратом?

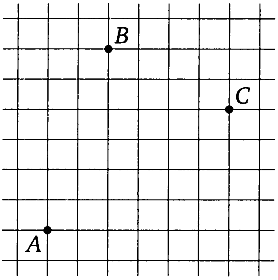
Д98*. Существуют ли четырёхугольник и три такие прямые, каждая из которых разделяет четырёхугольник на два равнобедренных треугольника?

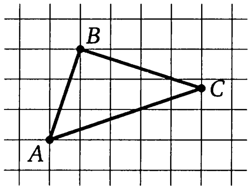
Д99*. Существует ли равнобедренный треугольник, который можно разбить на три треугольника так, чтобы из любых двух можно было опять сложить равнобедренный треугольник?

Д100. Треугольник, один из углов которого равен 40°, разрезали по его биссектрисам на шесть треугольников, среди которых есть прямоугольные. Какими могли быть остальные углы исходного треугольника?

Д101*. Можно ли равносторонний треугольник разрезать на пять равнобедренных треугольников, среди которых нет треугольников с одинаковым набором величин углов?

Д102. Постройте точку, равноудалённую от точек A, B и C (см. рисунок слева).

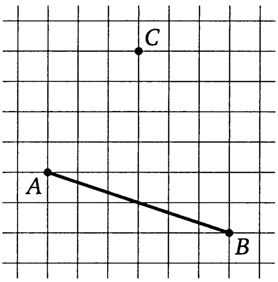


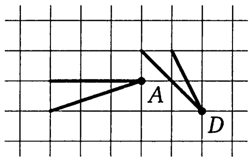


Д103. Постройте точку, равноудалённую от сторон треугольника ABC (см. рисунок справа, точка C не лежит на линиях сетки, но на сторонах AC и BC есть по одному узлу сетки).

Д104. На клетчатой бумаге постройте какой-нибудь треугольник, две медианы которого взаимно перпендикулярны.

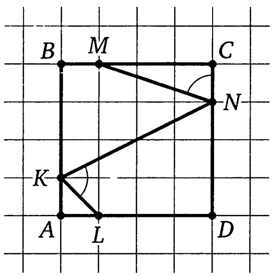
Д105. Постройте точку, симметричную точке C относительно прямой AB (см. рисунок слева).



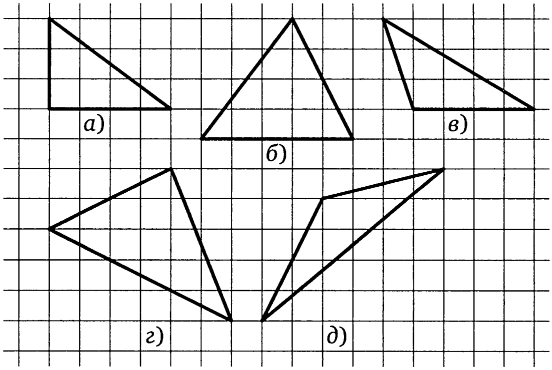


Д106. Докажите, что углы A и D равны (см. рисунок справа).

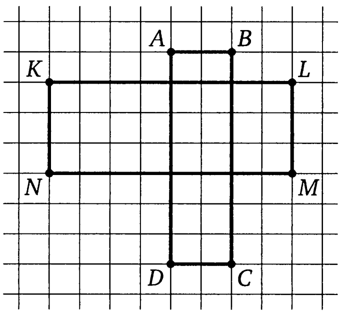
Д107. $ABCD$ — квадрат. Докажите, что равны углы CMN и MKL, отмеченные на рисунке.



Д108. Найдите площадь каждого из пяти треугольников (см. рис. *а—д*), если сторона клетки равна 1.

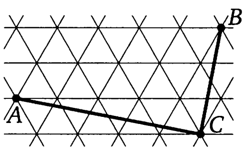


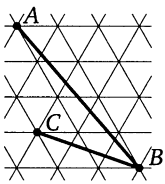
Д109. Даны прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ (см. рисунок). Докажите, что равны площади четырёхугольников $ALCN$ и $BMDK$.



Д110*. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого составляет $\frac{4}{5}$ клетки.

Д111. На сетке из равносторонних треугольников построен угол ACB (см. рисунок слева). Найдите его величину.





Д112. На сетке из равносторонних треугольников построен угол ABC (см. рисунок справа). Найдите его величину.

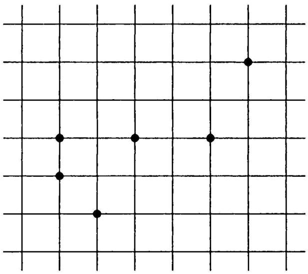
Д113. На клетчатой бумаге в узлах сетки отмечены шесть точек (см. рисунок слева). Проведите три прямые так, чтобы одновременно выполнялись три условия:

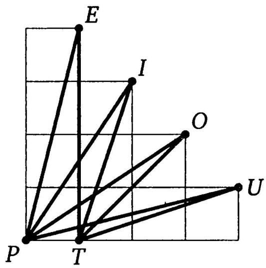
1) каждая отмеченная точка должна лежать хотя бы на одной из этих прямых;

2) на каждой прямой должны лежать хотя бы две отмеченные точки;

3) все три проведённые прямые должны пересекаться в одной точке (не обязательно отмеченной).

Объясните ответ.



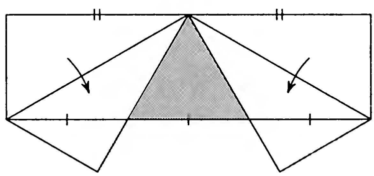


Д114. На клетчатой бумаге нарисованы углы PET, PIT, POT и PUT (см. рисунок справа). Найдите их сумму.

Д115. Существует ли многоугольник с попарно различными сторонами, из которого после одного перегибания получается квадрат?

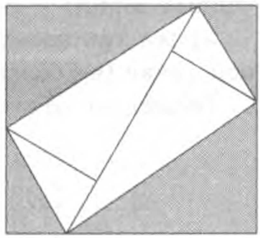
Д116. Бумажный прямоугольник согнули по диагонали, а затем, сложив ещё два раза, получили шестислойный треугольник. Найдите угол между стороной и диагональю исходного прямоугольника.

Д117. Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделённой на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник равносторонний.



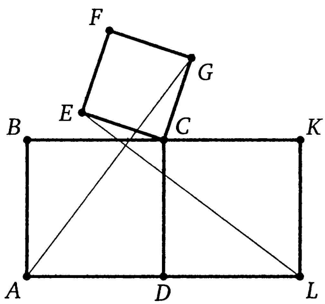
Д118. Из листа бумаги, одна сторона которого серая, а другая белая, Саша вырезал равнобедренный треугольник. Затем он перегнул его по биссектрисе угла при основании и склеил. Получился треугольник, состоящий из двух равнобедренных треугольников: белого и серого. Докажите, что после перегибания у него вновь получился равнобедренный треугольник.

Д119*. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, наложил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провёл диагональ, опустил на неё перпендикуляры из двух остальных вершин, после чего разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону так, что вместе с нижним прямоугольником они образовали ещё один прямоугольник (см. рисунок, отогнутые части закрашены). Каким образом по полученному прямоугольнику восстановить исходный, используя только циркуль и линейку?



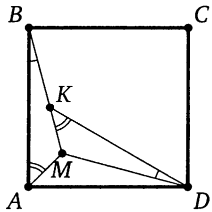
Д120. Прямоугольный лист бумаги согнули по диагонали. Может ли периметр полученного пятиугольника оказаться равным периметру исходного листа?

Д121. Квадраты $ABCD$, $CEFG$ и $CKLD$ расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что отрезки EL и GA равны и перпендикулярны.



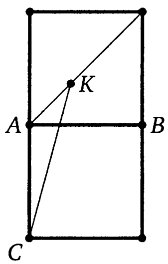
Д122. Внутри квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F так, что ABE и ADF — равносторонние треугольники. Докажите, что треугольник CEF также является равносторонним.

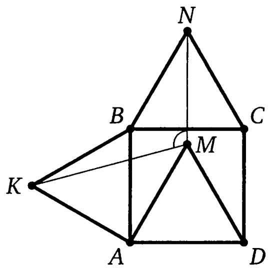
Д123. Равные треугольники AMB и KMD расположены внутри квадрата $ABCD$ так, как показано на рисунке справа. Найдите их углы.



Д124. Вне квадрата $ABCD$ со стороной 2 построены равнобедренные треугольники AKB и BMC, в которых AB и BC — основания. Найдите расстояние от вершины B до прямой KM, если $\angle AKB = \angle BMC = 45°$.

Д125. Два квадрата, изображённые на рисунке слева, имеют общую сторону AB. На диагонали одного из них отметили точку K, расстояние от которой до вершины C другого квадрата равно его диагонали. Найдите угол ACK.



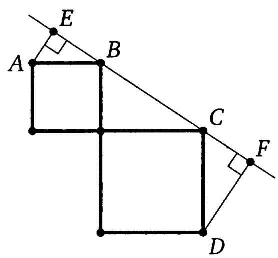


Д126. На сторонах квадрата $ABCD$ построены равносторонние треугольники AKB, BNC и AMD (см. рисунок справа). Найдите угол KMN.

Д127. Дан квадрат $ABCD$. На стороне AD внутрь квадрата построен равносторонний треугольник ADE. Диагональ AC пересекает сторону ED этого треугольника в точке F. Докажите, что $CE = CF$.

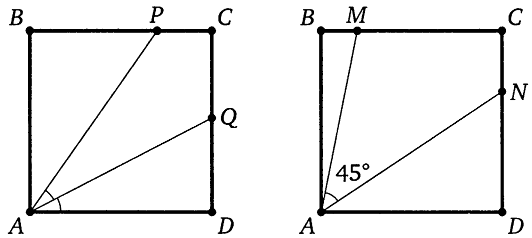
Д128. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно так, что лучи AM и AN делят угол BAD на три равные части. ME — высота треугольника MAN. Найдите угол EDN.

Д129. Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Из вершин A и D опущены перпендикуляры AE и DF на прямую BC. Докажите, что $AE + DF = BC$.



Д130. На стороне AB и на диагонали AC квадрата $ABCD$ со стороной 1 построены равносторонние треугольники ABE и ACF так, что точки E и F лежат вне квадрата в одной полуплоскости относительно прямой AB. Найдите длину отрезка EF.

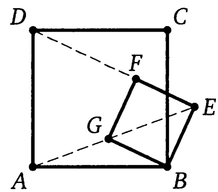
Д131. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что AQ — биссектриса угла PAD (см. рисунок слева). Докажите, что $AP = BP + DQ$.



Д132. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен $45°$ (см. рисунок справа). Докажите, что расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.

Д133. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 точка F — середина стороны BC, а E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на DF. Найдите длину отрезка BE.

Д134*. Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки A, G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D, F и E также лежат на одной прямой.



Д135. а) На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BMC. Отрезки AC и DM пересекаются в точке P. Докажите, что треугольник APM равнобедренный.

б) Три стороны четырёхугольника равны, а углы четырёхугольника, образованные этими сторонами, равны $90°$ и $150°$. Найдите два других угла этого четырёхугольника.

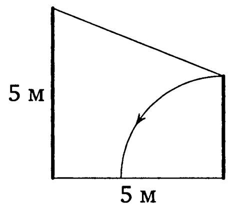
Д136. Две стороны треугольника равны 2 и 5. Какова может быть длина третьей стороны, если известно, что она целая?

Д137. Верно ли, что из любых десяти отрезков обязательно найдутся три, из которых можно составить треугольник?

Д138. Есть три палочки, из которых можно составить треугольник. От каждой отломили по куску так, что из этих кусков также можно составить треугольник. Обязательно ли из трёх оставшихся кусков можно составить треугольник?

Д139. Докажите, что любая диагональ четырёхугольника меньше половины его периметра.

Д140. У прямой дороги на расстоянии 5 метров стоят два столба. Высота более высокого столба тоже равна 5 метров. Между верхушками столбов натянут провод. Подул ветер, и маленький столб упал на дорогу в направлении высокого столба (см. рисунок). Что стало с проводом: он провисает, он снова натянут или он порвался?



Д141. Две стороны четырёхугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей делит его на два равнобедренных треугольника и имеет длину 2. Найдите периметр четырёхугольника.

Д142. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что

$$AB + BD \leqslant AC + CD.$$

Докажите, что $AB < AC$.

Д143. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC отмечена точка N. Докажите, что $AN + BN > AC + BC$.

Д144. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точку D, а на продолжении AC за вершину C — точку E, причём $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > AB + BC$.

Д145. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, $\angle AMD = 120°$. Докажите, что

$$AB + \frac{1}{2}BC + CD \geqslant AD.$$

Д146. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше, чем $2OC$.

Д147. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Докажите, что $2AC \geqslant AB + BC$.

Д148*. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх различных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

Д149. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

Д150. В треугольнике ABC угол A больше угла B. Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AB.

Д151. Одна сторона треугольника в три раза меньше суммы двух других. Докажите, что против этой стороны лежит наименьший угол треугольника.

Д152. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.

Д153. В треугольнике ABC проведена высота CD к наибольшей стороне. Известно, что угол A меньше угла B. Сравните: а) BD и AD; б) $AC + BD$ и $BC + AD$.

Д154. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $20°$. Докажите, что боковая сторона больше удвоенного основания, но меньше утроенного.

Д155. В равнобедренном треугольнике ABC на продолжении основания AC за точку C отмечена точка K. Через неё проведена прямая, пересекающая стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Сравните длины отрезков MK и MB.

Д156. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AD и высота BE. Докажите, что $\angle CED > 45°$.

Д157. Докажите, что в прямоугольном треугольнике катет, лежащий напротив угла, большего чем $30°$, больше половины гипотенузы.

Д158. Внутри треугольника ABC отмечена точка E так, что $AE = BE$. Биссектрисы углов EAC и EBC пересекаются в точке K. Докажите, что $KE < AE$.

Д159*. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ известно, что $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, но $\angle BAC > \angle B'A'C'$. Докажите, что $BC > B'C'$.

Д160*. В треугольнике ABC угол B равен $77°$. На стороне AC отмечена точка L так, что $\angle ABL = 7°$. Докажите, что $AC + 2AL > BC$.

Д161. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек X, что $\angle XAB \leqslant \alpha < 90°$, где значение α задано.

Д162. Найдите геометрическое место центров окружностей, имеющих данный радиус и проходящих через данную точку.

Д163. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек X, что $AX \leqslant BX \leqslant CX$.

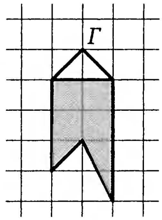
Д164*. Пусть O — центр равностороннего треугольника ABC. Найдите геометрическое место точек M, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведённая через точку M, имеет общую точку хотя бы с одним из двух отрезков: AB или CO.

Д165. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек X, что $AX + BX = AB$.

Д166. Точка O лежит на отрезке AB. Найдите геометрическое место точек M, не лежащих на прямой AB и таких, что $\angle MOB = 2\angle MAB$.

Д167. Найдите геометрическое место таких точек, из которых данный отрезок AB виден: а) под острым; б) под тупым углом.

Д168. В стене имеется маленькая дырка. У хозяина есть флажок формы, показанной на рисунке, Г — гвоздь, за который цепляется верёвка.



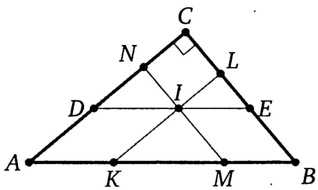
Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь так, чтобы флажок закрывал дырку.

Д169. Точка O — середина отрезка MK. Известно, что $AM < BM$ и $AK < BK$. Докажите, что $AO < BO$.

Д170. В равностороннем треугольнике ABC отмечена точка O так, что угол ABO больше $30°$. Докажите, что $AO > CO$.

Д171. $KLMN$ — выпуклый четырёхугольник, в котором равны углы K и L. Серединные перпендикуляры к сторонам KN и LM пересекаются на стороне KL. Докажите, что в данном четырёхугольнике равны диагонали.

Д172. Через точку I пересечения биссектрис прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) проведены отрезки DE, KL и MN, параллельные сторонам треугольника (см. рисунок). Докажите, что $KM = DN + EL$.



Д173. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AB = BC$, $AC = AD$. Прямая, проходящая через вершину B

и параллельная AC, пересекает прямую DC в точке M. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

Д174. На сторонах AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC выбраны точки K, M и N соответственно так, что угол MKB равен углу MNC, а угол KMB равен углу KNA. Докажите, что NB — биссектриса угла MNK.

Д175. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60°$, BL — биссектриса треугольника ABE. На отрезке BE отмечена точка F так, что $\angle DLF = \angle ALB$. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

Д176*. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны $15°$ и $30°$. Какой угол образует с этой стороной проведённая к ней медиана?

Д177. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке Q (точки Q и P различны). Прямая PQ проходит через середину стороны AB. Чему может быть равен угол DAB, если $\angle ABC = \alpha$?

Ответы, решения, комментарии

Д93. Ответ: 36°, 72°, 72° или $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{720^\circ}{7}$.

В тупоугольном треугольнике ACE угол ACE не может быть тупым, так как он является половиной угла C исходного треугольника. Пусть угол CAE тупой, тогда $\angle AEC = \angle ACE = \angle BCE$. Но это невозможно, так как угол AEC внешний для треугольника BCE, значит, $\angle AEC > \angle BCE$. Следовательно, тупым углом может быть только AEC. Пусть тогда $\angle CAE = \angle ACE = \angle BCE = \alpha$. Для треугольника BCD рассмотрим три случая.

1. Пусть $BC = BD$, тогда $\angle BDC = \angle BCD = 2\alpha$ (см. рис. 93 *а*). Так как угол BDC внешний для треугольника ABD, то

$$\angle ABD = \angle BDC - \angle BAD = 2\alpha - \alpha = \alpha,$$

поэтому $\angle ABC = 2\angle ABD = 2\alpha$. Значит,

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ; \quad \alpha = 36^\circ.$$

Таким образом, $\angle A = 36^\circ$, $\angle C = \angle B = 72^\circ$.

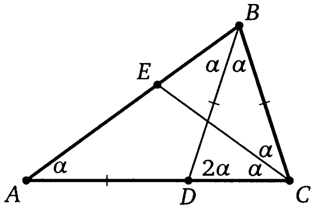


Рис. 93 *а*

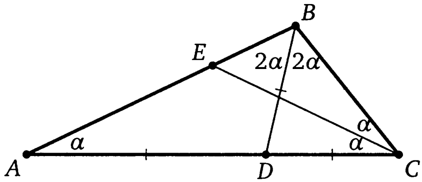


Рис. 93 *б*

2. Пусть $CD = BD$, тогда $\angle BCD = \angle CBD = \angle ABD = 2\alpha$ (см. рис. 93 *б*). Значит,

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ; \quad \alpha = \frac{180^\circ}{7}.$$

Таким образом,

$$\angle A = \frac{180^\circ}{7}, \quad \angle C = \frac{360^\circ}{7}, \quad \angle B = \frac{720^\circ}{7}.$$

3. Пусть $BC = CD$, тогда $\angle BDC = \angle CBD = \angle ABD$. Но этот случай невозможен, так как угол BDC внешний для треугольника ABD, значит, $\angle BDC > \angle ABD$.

Д94. Ответ. нет.

Рассмотрим треугольник ABC, углы A, B и C которого равны соответственно $\frac{360^\circ}{13}$, $\frac{1080^\circ}{13}$, $\frac{900^\circ}{13}$ (см. рис. 94). Проведём биссектрису AD этого треугольника и заметим, что

$$\angle ADB = \angle CAD + \angle C = \frac{180^\circ + 900^\circ}{13} = \frac{1080^\circ}{13} = \angle B,$$

поэтому треугольник BAD равнобедренный.

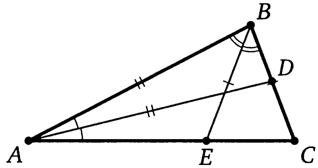


Рис. 94

Теперь проведём биссектрису BE. Из треугольника CBE аналогично получим

$$\angle BEC = \angle ABE + \angle A = \frac{540^\circ + 360^\circ}{13} = \frac{900^\circ}{13} = \angle C,$$

поэтому он также равнобедренный.

Таким образом, в треугольнике ABC вершины A и B «удачные», но треугольник равнобедренным не является.

► Пусть в треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Тогда возможны три случая, в которых вершины A и B «удачные»: 1) $AD=AB=BE$; 2) $AD=AC$ и $BE=BC$; 3) $AD=AB$ и $BE=BC$. Рассмотрев первые два варианта, можно доказать, что две «удачные» вершины могут быть в равнобедренных треугольниках с углами при основаниях 72° и $\frac{360^\circ}{7}$ соответственно, а третий вариант позволит построить контрпример. ◄

Д95. Пусть диагональ BD делит четырёхугольник $ABCD$ на равнобедренные прямоугольные треугольники ABD и BCD. Возможны три случая.

1. Пусть BD — общая гипотенуза (см. рис. 95 *а*). Тогда $ABCD$ — квадрат, его стороны попарно параллельны.

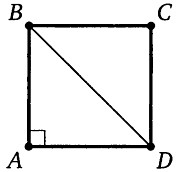


Рис. 95 *а*

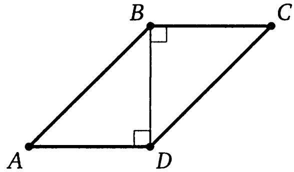


Рис. 95 *б*

2. Пусть BD — общий катет. Тогда либо $\angle ADB = \angle CBD = 90°$, т. е. $BC \parallel AD$ (см. рис. 95 *б*), либо $\angle ADB = \angle CDB = 90°$, т. е. точки A, C и D лежат на одной прямой (см. рис. 95 *в*). Во втором случае $ABCD$ не четырёхугольник.

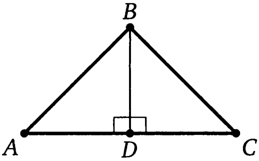


Рис. 95 *в*

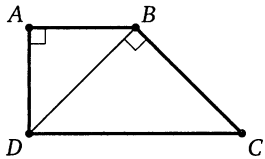


Рис. 95 *г*

3. Пусть BD — катет одного треугольника и гипотенуза другого (см. рис. 95 *г*). Тогда $\angle ADC = \angle ADB + \angle CDB = 90° = \angle DAB$, значит, $AB \parallel CD$.

► Отметим, что так как сумма углов четырёхугольника равна 360°, то в каждом из случаев можно вычислить углы четырёхугольника $ABCD$: 1) четыре угла по 90°; 2) два угла по 45° и два угла по 135°; 3) 45°, 135° и два угла по 90°. ◄

Д96. Ответ: не обязательно.

Приведём два возможных примера (см. рис. 96 *а*, *б*).

1. На рис. 96 *а* изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$ и $AD = BD = CD$.

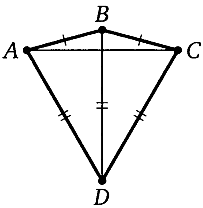


Рис. 96 *а*

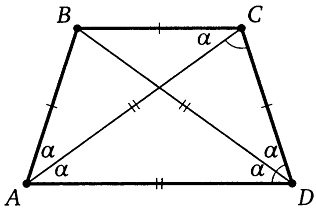


Рис. 96 *б*

► Четырёхугольник такого вида называется дельтоидом, он симметричен относительно BD, а его диагонали перпендикулярны. ◄

2. На рис. 96 *б* изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $AD \parallel BC$, $AD = BD = CD$ и $AC = BD$.

► Это равнобедренная трапеция. Введя обозначения так, как на рис. 64 *б*, и используя указанную параллельность и свойства углов равнобедренного треугольника, можно вычислить углы четырёхугольника $ABCD$: $\angle A = \angle D = 72°$, $\angle B = \angle C = 108°$. ◄

Д97. Ответ: не обязательно.

Рассмотрим невыпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором

$$\angle A = \angle B = \angle D = 45^\circ$$

(см. рис. 97). Тогда каждая из прямых BC и DC делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника.

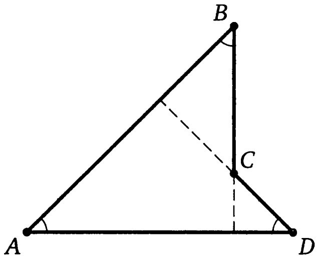


Рис. 97

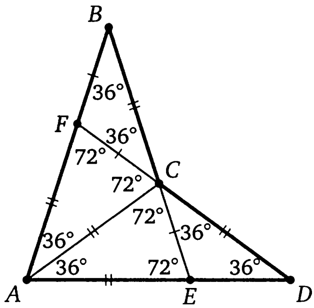


Рис. 98

Д98. Ответ: существуют.

Рассмотрим два равных равнобедренных треугольника ABE и ADF, у которых $\angle B = \angle D = 36^\circ$, и расположим их так, как показано на рис. 98. Пусть C — точка пересечения BE и DF, тогда невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ и тройка прямых AC, BE и DF удовлетворяют условию задачи.

Действительно, вычислив все углы, показанные на рисунке, получим, что каждая из прямых AC, BE и DF делит четырёхугольник $ABCD$ на два равнобедренных треугольника.

► Отметим, что приведённый пример единственный. ◄

Д99. Ответ: существует.

Рассмотрим, например, равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (см. рис. 99). На продолжении стороны BC отметим точку D так, что $BD = AB$, после чего на стороне BC отметим точку E так, что $CE = CD$. Тогда ABD — искомый треугольник, так как, выбрав любые два из треугольников ABE, ACE и ACD, можно сложить из них равнобедренный треугольник.

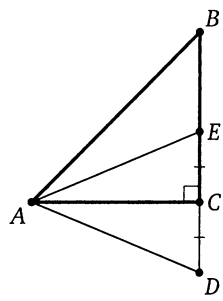


Рис. 99

Д100. Ответ: два угла по 70° или 40° и 100°.

Пусть ABC — данный треугольник с углом B, равным 40°; AK, BL и CM — его биссектрисы, пересекающиеся в точке O (см. рис. 100 *а*, *б*). Так как углы между биссектрисами AOB, BOC и COA тупые (см. следствие из примера 3.1), то углы с вершиной O в треугольниках разбиения являются острыми.

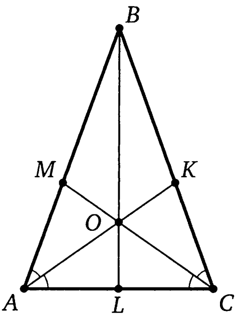


Рис. 100 *а*

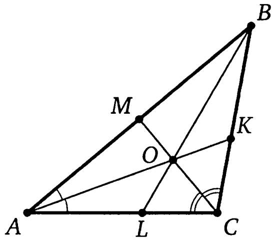


Рис. 100 *б*

Таким образом, прямыми могут быть только углы с вершинами в точках M, K или L.

Возможны два случая:

1) прямым является угол, например, при вершине L (см. рис. 100 *а*);

2) прямым является один из углов: либо при вершине K, либо при вершине M (см. рис. 100 *б*).

В первом случае биссектриса BL является высотой треугольника, т. е. треугольник ABC равнобедренный с основанием AC и его углы равны 40°; 70°; 70°.

Во втором случае треугольник ABC также равнобедренный, но с основанием AB (либо с основанием BC) и его углы равны 40°; 40°; 100°.

► Отметим, что так как треугольник ABC не является равносторонним, то только одна из биссектрис данного треугольника может быть перпендикулярна стороне. ◄

► Сравните с примером 4.2. ◄

Д101. Ответ: можно.

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отметим точку D так, что $\angle ABD = 20°$, а на отрезке BD — точку E так, что $\angle EAD = 40°$ (см. рис. 101). Тогда треугольники AEB

и ADE равнобедренные с углами при основаниях 20° и 40° соответственно.

В треугольнике BDC отметим центр O его описанной окружности. Углы этого треугольника равны 40°, 80° и 60°, он остроугольный, поэтому O лежит внутри треугольника. Вычислив центральные углы, получим, что треугольники COD, DOB и BOC равнобедренные с углами при основаниях 50°, 30° и 10° соответственно.

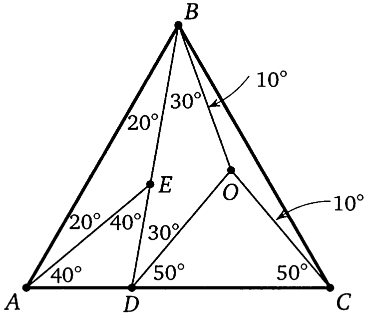


Рис. 101

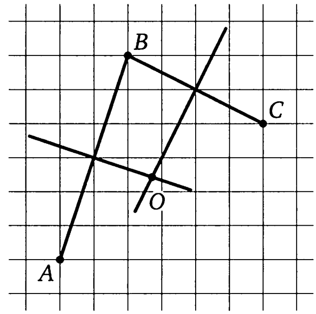


Рис. 102

Д102. Проведём отрезки AB и BC, найдём их середины и проведём к этим отрезкам серединные перпендикуляры (см. рис. 102). Точка O их пересечения — искомая.

Действительно, точки серединного перпендикуляра к AB равноудалены от точек A и B, а точки серединного перпендикуляра к BC равноудалены от точек B и C. Следовательно, точка O равноудалена от трёх данных точек.

► По сути построен центр O окружности, описанной около треугольника ABC. ◄

Д103. Совсем несложно построить биссектрису угла A: отметим узел K и соединим его отрезком с вершиной A. Луч AK является биссектрисой угла A, так как стороны этого угла симметричны относительно AK (см. рис. 103).

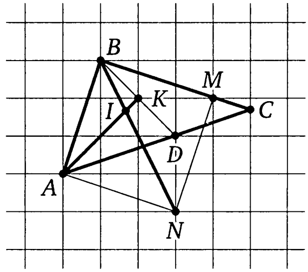


Рис. 103

Для того чтобы использовать похожую идею ещё раз, заметим, что угол ABC прямой. Тогда отметим на стороне BC точку M так, чтобы отрезки BM и BA были равны, после чего, используя также узел N, построим квадрат $ABMN$. Его диагональ BN является биссектрисой угла B.

Точка I пересечения AK и BN — искомая, так как точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от сторон угла (см. пример 6.1).

Д104. Ответ: см., например, рис. 104.

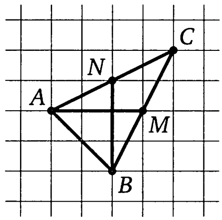


Рис. 104

AM и BN — взаимно перпендикулярные медианы треугольника ABC.

Д105. Ответ: точка D (см. рис. 105 *а*, *б*).

► Напомним, что точка D будет симметрична точке C относительно AB, если прямая AB — серединный перпендикуляр к отрезку CD. ◄

Построим прямую, перпендикулярную AB и проходящую через точку C, и отметим на ней узел D так, как показано на рис. 105 *а*, *б*. Докажем, что точка D — искомая.

Первый способ. Отметим на отрезке CD узлы E и F, а на отрезке AB — узел G (см. рис. 105 *а*). Так как $AEGF$ — квадрат, то точка пересечения AG и EF делит отрезок EF пополам, а $DF = CE$. Следовательно, AB — серединный перпендикуляр к отрезку CD.

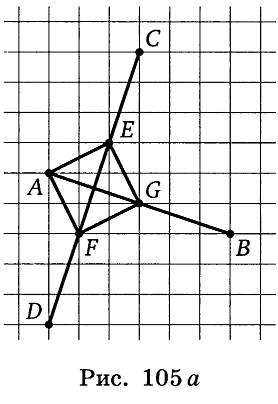


Рис. 105 *а*

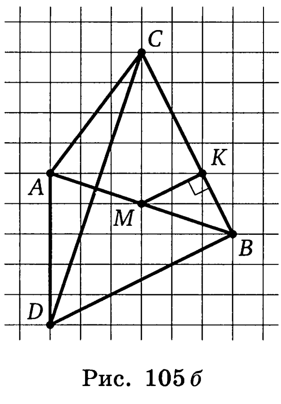


Рис. 105 *б*

Второй способ. Соединим точки C и D с концами отрезка AB и заметим, что $BC = BD$ и угол CBD прямой (см. рис. 105 *б*). Построив равнобедренный прямоугольный треугольник BKM, получим, что $\angle CBA = 45°$, а тогда и $\angle DBA = 45°$. Следовательно, прямая AB содержит биссектрису равнобедренного треугольника CBD, поэтому она содержит и его медиану. Таким образом, AB — серединный перпендикуляр к отрезку CD.

▶ Вместо свойства равнобедренного треугольника можно использовать равенство треугольников ABC и ABD (по двум сторонам и углу между ними). Тогда равны их высоты, проведённые к общей стороне AB. ◀

Д106. На стороне угла A, идущей не по линии сетки, отметим узел B и построим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB (см. рис. 106). Опустим перпендикуляр CH на другую сторону этого угла. Тогда $\angle BAH = \angle BAC - \angle HAC = 45° - \angle HAC$.

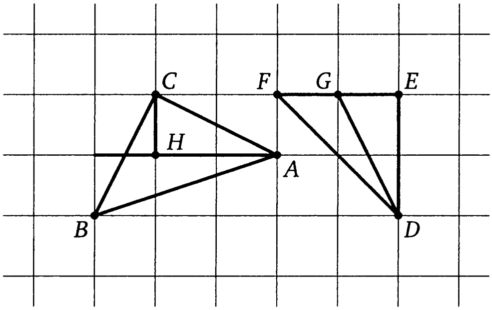


Рис. 106

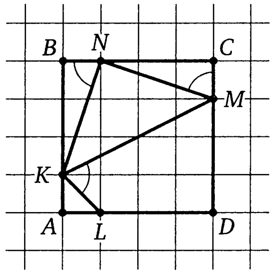


Рис. 107

Отметим узел E, как показано на рис. 106, и построим равнобедренный прямоугольный треугольник EFD с гипотенузой DF. Тогда

$$\angle FDG = \angle FDE - \angle EDG = 45° - \angle EDG.$$

Из равенства треугольников HAC и EDG следует, что $\angle HAC = \angle EDG$. Поэтому $\angle BAH = \angle FDG$, что и требовалось.

Д107. Проведём отрезок NK и заметим, что треугольник KNM равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle NMK = \angle NKM = 45°$ (см. рис. 107). Равнобедренным и прямоугольным является также треугольник AKL, поэтому $\angle AKL = 45°$. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как углы AKM и CMK внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей KM, то эти углы равны. Тогда

$$\angle CMN = \angle CMK - \angle NMK = \angle AKM - \angle AKL = \angle MKL,$$

что и требовалось.

Второй способ. Пусть $\angle CMN = \alpha$, тогда из равенства прямоугольных треугольников KBN и NCM следует, что $\angle BNK = \alpha$, значит, $\angle BKN = 90° - \alpha$ (см. рис. 107). Таким образом,

$$\angle MKL = 180° - (\angle BKN + \angle NKM + \angle AKL) = \alpha.$$

Д108. Ответ: а) 6; б) 10; в) 6; г) 12; д) 7.

Достроим каждый из данных треугольников (выделены цветом) до прямоугольника так, как показано на рис. 108. Воспользуемся тем, что диагональ прямоугольника разбивает его на два равных прямоугольных треугольника.

а) Искомая площадь равна $4 \cdot 3 : 2 = 6$.

б) Проведя высоту, разобьём данный треугольник на два прямоугольных. Тогда искомая площадь равна

$$(3 \cdot 4 + 2 \cdot 4) : 2 = 10.$$

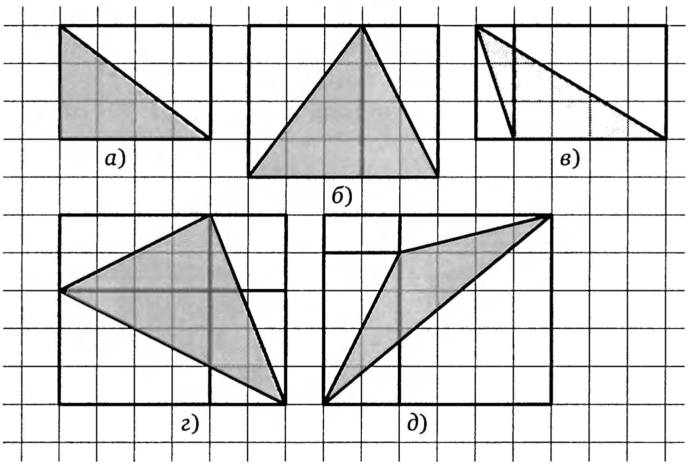


Рис. 108

в) Искомая площадь равна разности площадей прямоугольных треугольников с катетами 3 и 5 и катетами 3 и 1. Значит, она равна

$$(3 \cdot 5 - 3 \cdot 1) : 2 = 6.$$

г) Искомая площадь равна разности площади прямоугольника со сторонами 5 и 6 и суммы площадей трёх прямоугольных треугольников с катетами 3 и 6; 2 и 5; 2 и 4. Таким образом, она равна

$$6 \cdot 5 - (6 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2) : 2 = 12.$$

д) Искомая площадь равна разности площади прямоугольного треугольника с катетами 5 и 6 и суммы площадей прямоугольника со сторонами 1 и 2 и двух прямоугольных треугольников с катетами 2 и 4; 1 и 4. Таким образом, она равна

$$6 \cdot 5 : 2 - 2 \cdot 1 - (4 \cdot 2 + 4 \cdot 1) : 2 = 7.$$

Д109. Построим ещё один прямоугольник $PQRS$, как показано на рис. 109 *а*, *б*). Он состоит из белого прямоугольника внутри и прямоугольного «кольца». Это кольцо можно двумя способами разбить на прямоугольники так, чтобы стороны заданных четырёхугольников служили диагоналями вспомогательных прямоугольников. Так как любая диагональ прямоугольника делит его площадь пополам, то в обоих случаях стороны четырёхугольников делят пополам площадь кольца. Следовательно, площадь каждого четырёхугольника равна сумме половины площади кольца и площади внутреннего белого прямоугольника.

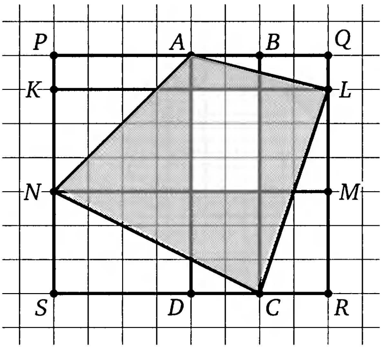


Рис. 109 *а*

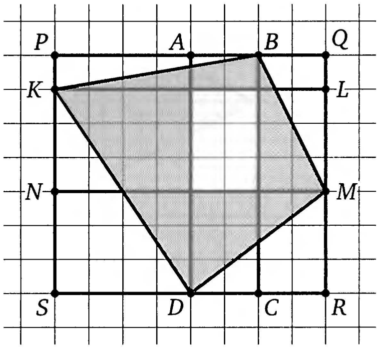


Рис. 109 *б*

► Эти же построения дают возможность вычислить площадь каждого четырёхугольника. Она равна $(56-6):2=25$ клеток. ◄

Д110. Выберем любой квадрат размера 2×2 и проведём по одной диагонали в каждом из четырёх прямоугольников размером 2×1 (см. рис. 110). Квадрат, образовавшийся в центре, — искомый. Действительно, достроим полученную фигуру до «креста» из пяти равных квадратов. Так как площади закрашенных треугольников попарно равны, то площадь «креста» равна площади квадрата 2×2, поэтому площадь любого из квадратов креста равна $\frac{4}{5}$ клетки.

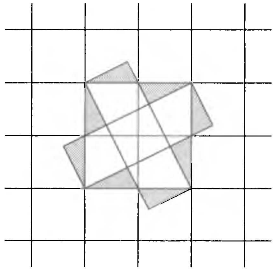


Рис. 110

Д111. Ответ: $90°$.

Первый способ. Продлив отрезок BC на его длину за точку C, получим точку D (см. рис. 111 *а*). Проведя отрезки AD и AB, заметим, что они равны, т. е. треугольник ABD равнобедренный. Так как AC — медиана этого треугольника, проведённая к его основанию, то AC — высота, т. е. $\angle ACB = 90°$.

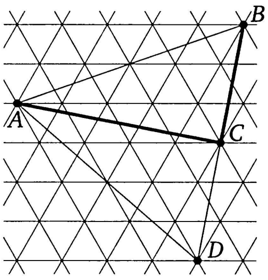


Рис. 111 *а*

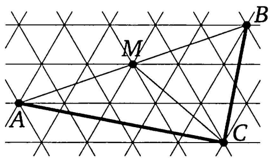


Рис. 111 *б*

Второй способ. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть M — середина AB, тогда CM — медиана этого треугольника (см. рис. 111 б). Заметим, что $AM = BM = CM$, т. е. медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник ABC прямоугольный: $\angle ACB = 90°$.

Д112. Ответ: $30°$.

Первый способ. Построим равносторонний треугольник ABD и проведём отрезок CD (см. рис. 112 *а*). Треугольники CAB, CBD и CDA равны (по трём сторонам), следовательно,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ABD = 30°.$$

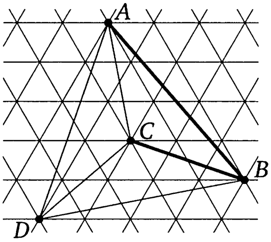


Рис. 112 *а*

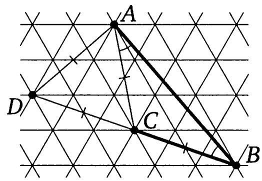


Рис. 112 *б*

Второй способ. Построим равносторонний треугольник ACD (см. рис. 112 *б*). Тогда в треугольнике ABD медиана AC равна половине стороны BD, значит, $\angle BAD = 90°$. Так как $\angle ADB = 60°$, то $\angle ABC = 30°$.

Д113. Ответ: см. рис. 113.

Чтобы убедиться, что все три прямые действительно проходят через указанную точку, рассмотрим «наклон» каждой из них. Верхняя прямая: пять клеток вправо и две вверх; следующая прямая: две клетки вправо и одна вверх; нижняя прямая: три клетки вправо и две вверх. После этого проведём вычисления, аналогичные решению задачи 10.3 а.

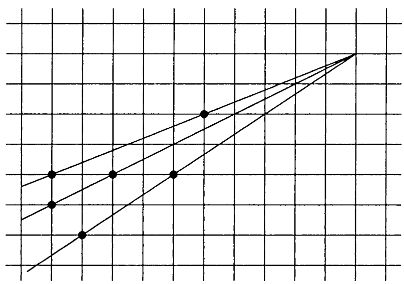


Рис. 113

► Приведённое решение единственное. ◄

Д114. Ответ: 45°.

Введём обозначения углов: $\angle PET = \alpha$, $\angle PIT = \beta$, $\angle POT = \gamma$, $\angle PUT = \varphi$ и отметим узлы сетки K, L и M (см. рис. 114). Углы EPK и PET накрест лежащие при параллельных прямых, поэтому $\angle EPK = \alpha$. Треугольники PEL и PUT равны (по трём сторонам), значит, $\angle EPL = \varphi$. Углы IPL и PIT накрест лежащие при параллельных прямых, поэтому $\angle IPL = \beta$. Углы MPO

и POT накрест лежащие при параллельных прямых, поэтому $\angle MPO = \gamma$, а угол MPI симметричен углу MPO относительно прямой PM, значит, $\angle MPI = \gamma$.

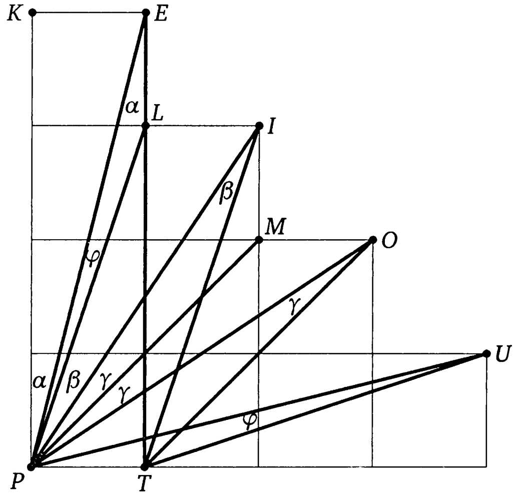


Рис. 114

Таким образом, искомая сумма $\alpha+\beta+\gamma+\varphi$ равна $\angle KPM = 45°$.

Д115. Ответ: существует.

Например, см. рис. 115. У этого пятиугольника нет равных сторон (линия сгиба обозначена пунктиром).

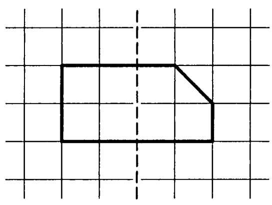


Рис. 115

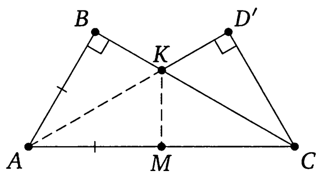


Рис. 116

Д116. Ответ: 30°.

Пусть $ABCD$ — исходный прямоугольник. Линии его последовательных сгибов: AC, MK и AK (см. рис. 116). Шестислойный треугольник — это, например, ABK.

Так как $AB = AM = CM$, то в прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен половине гипотенузы AC, поэтому $\angle ACB = 30^\circ$.

Д117. Введём обозначения так, как показано на рис. 117. Заметим, что треугольник $AB'O$ получился перегибанием из треугольника ABO, значит, эти треугольники равны. Следовательно, $\angle AOB = \angle AOB'$. Кроме того, из параллельности сторон AD и BC прямоугольника следует, что $\angle AOB = \angle KAO$. Таким образом, в треугольнике AOK углы AOK и KAO равны, значит, этот треугольник равнобедренный: $OK = AK$. Рассуждая аналогично, получим, что треугольник DOL также равнобедренный. Следовательно, $OK = OL = KL$, т. е. треугольник KOL равносторонний.

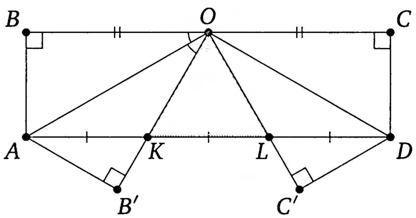


Рис. 117

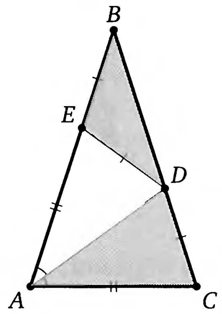


Рис. 118

Д118. Пусть вырезан серый равнобедренный треугольник ABC, который Саша перегнул по биссектрисе AD (см. рис. 118). По условию белый треугольник ADE и серый треугольник BED равнобедренные. Докажем, что основанием первого из них является DE, а второго — BD.

Действительно, в треугольнике ADC угол C больше угла A, значит, $AD > CD$. Так как $CD = ED$, то $AD > ED$. Кроме того, $AE \neq ED$ (иначе из равенства равнобедренных треугольников AED и ACD будет следовать параллельность AE и CD, что невозможно). Следовательно, $AD = AE$. Так как угол AED равен углу ACD, то этот угол острый, значит, угол BED тупой, поэтому BE и ED — равные боковые стороны треугольника BED.

Докажем теперь, что треугольник ABD равнобедренный. Пусть $\angle EAD = \angle CAD = \alpha$, тогда $\angle DEA = \angle DCA = 2\alpha$. Так как

DEA — внешний угол при вершине равнобедренного треугольника BED, то $\angle DBE = \angle BDE = \alpha$. Таким образом, в треугольнике ABD равны углы A и B, поэтому он равнобедренный: $BD = AD$.

► Отметим, что теперь несложно вычислить углы исходного треугольника. Действительно, так как $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, $\angle ABC = \alpha$, то $2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180$; $\alpha = 36°$. Следовательно, в исходном равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 36°, а углы при основании — по 72°. Такой треугольник замечателен ещё и тем, что основание D его биссектрисы делит боковую сторону BC в отношении, которое называется «золотым сечением». Действительно, у треугольников ABC и CAD равны соответствующие углы, поэтому эти треугольники подобны. Значит, $\frac{BC}{AD} = \frac{AC}{CD}$. Учитывая, что $AC = AD = BD$, получим $\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{BD}$. ◄

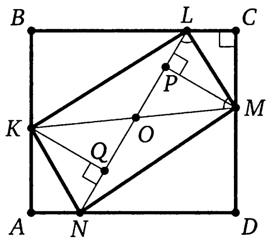


Рис. 119

Д119. Пусть $ABCD$ — полученный прямоугольник, $KLMN$ — исходный прямоугольник, P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершин M и K на диагональ LN (см. рис. 119). Тогда

$$BC = BL + LC = QL + LP = QL + QN = LN,$$

а $CD = CM + MD = 2MP$.

Теперь решение задачи сводится к построению середин K и M отрезков AB и CD соответственно, а L и N — точки пересечения окружности с диаметром KM со сторонами BC и AD соответственно (из четырёх точек пересечения выбирается пара точек, симметричных относительно центра O этой окружности).

Действительно, так как $\angle CLM = \angle OML = \angle MLO$, то треугольники MCL и MPL равны, значит, при перегибании по прямой ML они совместятся. Аналогично при перегибании по прямой MN совместятся треугольники MDN и MPN. Наконец, поскольку конструкция симметрична относительно точки O пересечения KM и LN, то при перегибании по прямым KL и KN треугольники BKL и AKN наложатся на треугольник NKL.

► Отметим, что существует два варианта расположения искомого прямоугольника внутри полученного (в зависимости от того, на какую диагональ опускались перпендикуляры). ◄

Д120. Ответ: не может.

Пусть прямоугольник $ABCD$ согнули по диагонали AC и получили пятиугольник $ABMD'C$ (см. рис. 120). Тогда периметр прямоугольника P_1 равен $2(AB+BC)$, а периметр пятиугольника P_2 равен $AB+BM+MD'+D'C+CA$.

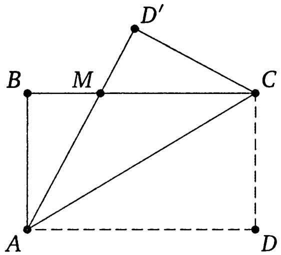


Рис. 120

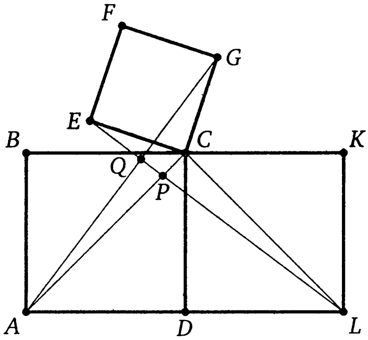


Рис. 121

Рассмотрим и преобразуем разность, учитывая, что $AD' = AD = BC$ и $D'C = DC = AB$:

$$P_1 - P_2 = (BC - BM) + (AD' - MD') - CA = CM + MA - CA > 0,$$

так как по неравенству треугольника $CM + MA > CA$. Таким образом, $P_1 > P_2$.

Д121. Проведём диагонали AC и CL квадратов $ABCD$ и $CKLD$ соответственно (см. рис. 121). Заметим, что

$$\angle ECL = \angle ECB + \angle BCD + \angle DCL = \angle ECB + 135^\circ$$

и

$$\angle GCA = \angle GCE + \angle ECB + \angle BCA = \angle ECB + 135^\circ.$$

Кроме того, $CE = CG$ и $CL = CA$. Следовательно, треугольники ECL и GCA равны (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $EL = GA$.

Пусть EL пересекает AC и AG в точках P и Q соответственно (см. рис. 121). Рассмотрим треугольники AQP и LCP: из доказанного равенства треугольников следует, что $\angle QAP = \angle CLP$, а вертикальные углы при вершине P равны, значит,

$$\angle AQP = \angle LCP = \angle LCD + \angle ACD = 90^\circ.$$

Таким образом, $EL \perp GA$.

► Имеет смысл обратить внимание школьников на то, что рассмотренная конструкция является некоторым усложнением конструкций примера 12.1 и задачи 12.1.

С «продвинутыми» учащимися можно также обсудить, что треугольник ECL получается из треугольника GCA с помощью поворота с центром C на $90°$ против часовой стрелки. Это даст возможность разом обосновать и равенство отрезков, и их перпендикулярность. ◄

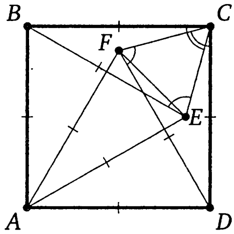


Рис. 122

Д122. Из условия задачи следует, что $DC = DF$ и

$$\angle CDF = 90° - \angle FDA = 30°$$

(см. рис. 122). Тогда

$$\angle DCF = \angle DFC = (180° - \angle CDF) : 2 = 75°,$$

значит, $\angle BCF = 90° - \angle DCF = 15°$. Аналогично, используя равнобедренный треугольник CBE, получим, что $\angle DCE = 15°$. Тогда $\angle FCE = 90° - (\angle BCF + \angle DCE) = 60°$.

Кроме того, равнобедренные треугольники CDF и BCE равны (по боковой стороне и углу при вершине), следовательно, $CF = CE$. Таким образом, CEF — равнобедренный треугольник с углом $60°$, т. е. он равносторонний.

► Полезно обратить внимание учащихся на то, что треугольники CED и CFB также равнобедренные и равные. Это можно получить как непосредственным счётом углов, так и из того, что точки E и F лежат на серединных перпендикулярах к соответствующим сторонам квадрата. Кроме того, важно подчеркнуть, что полученная картинка симметрична относительно диагонали AC и это не случайно: рассмотренная конструкция отличается от рассмотренной в задаче 12.2 только тем, что равносторонние треугольники построены не наружу, а внутрь. ◄

Д123. Ответ: $120°$; $45°$; $15°$.

Из условия задачи следует, что $AM = KM$ и $AD = AB = KD$ (см. рисунок в условии). Тогда треугольник AMD равен треугольнику KMD (по трём сторонам), поэтому он равен и треугольнику AMB. Следовательно, $\angle MAD = \angle MAB = 90° : 2 = 45°$, $\angle AMD = \angle AMB = \angle KMD = 360° : 3 = 120°$. Значит,

$$\angle ADM = \angle ABM = \angle KDM = 15°.$$

Д124. Ответ: 1.

Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую KM, тогда BH — искомое расстояние (см. рис. 124). В равных треугольниках AKB и BMC углы при основаниях равны по $(180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$, значит, $\angle KBM = 360° - 135° - 90° = 135°$. Так как треугольник KBM равнобедренный, то $\angle KBH = 0{,}5\angle KBM = 67{,}5° = \angle KBA$.

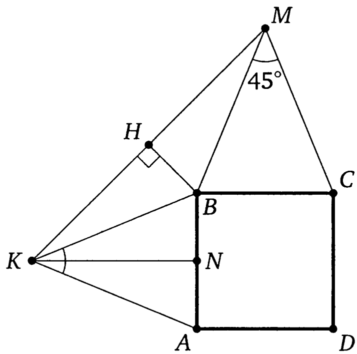


Рис. 124

Пусть KN — высота треугольника AKB, тогда прямоугольные треугольники KBH и KBN равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $BH = BN = 0{,}5AB = 1$.

► Сравните с задачей Д55. ◄

Д125. Ответ: 15°.

Первый способ. Построим ещё два квадрата с общей стороной AD так, как показано на рис. 125 *а*, и проведём отрезки CD и DK. Тогда полученная картинка симметрична относительно прямой AK, поэтому $CK = DK$.

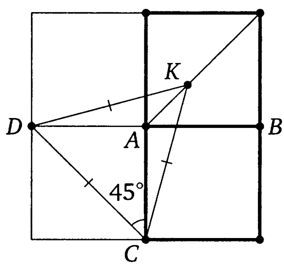


Рис. 125 *а*

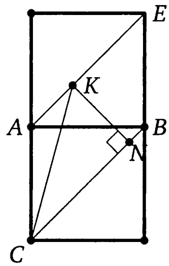


Рис. 125 *б*

Кроме того, расстояние между C и K равно диагонали квадрата, значит, треугольник CDK равносторонний, т. е. каждый его угол равен $60°$.

Так как ADC — равнобедренный прямоугольный треугольник, то $\angle ACD = 45°$. Следовательно, $\angle ACK = 60° - 45° = 15°$.

► Это решение удобно реализовать на клетчатой бумаге. ◄

Второй способ. Проведём диагональ BC нижнего квадрата, которая параллельна диагонали AE верхнего (см. рис. 125 *б*). Заметим, что расстояние между прямыми AE и BC равно половине диагонали квадрата, т. е. равно $0{,}5CK$. Тогда длина перпендикуляра KN к прямой BC также равна $0{,}5CK$. В прямоугольном треугольнике KCN катет KN равен половине гипотенузы CK, значит, $\angle KCN = 30°$. Следовательно, $\angle ACK = \angle ACN - \angle KCN = 15°$.

► Сравните с задачей 12.4. ◄

Д126. Ответ: $105°$.

Так как $NB = NC$ и $MA = MD$, то точки M и N лежат на общем серединном перпендикуляре к сторонам BC и AD, который является их осью симметрии (см. рисунок в условии). Значит, $\angle AMN = \angle DMN = (360° - \angle AMD) : 2 = 150°$. Так как $AK = AM$, то треугольник KAM равнобедренный. Кроме того, $\angle KAM = \angle KAB + \angle BAM = 60° + 30° = 90°$, т. е. треугольник KAM прямоугольный. Следовательно, $\angle KMA = 45°$. Тогда $\angle KMN = \angle AMN - \angle KMA = 105°$.

► Можно также использовать, что точки K, M и C лежат на одной прямой (см. задачу 12.6). ◄

Д127. Докажем, что $\angle CEF = \angle CFE$ (см. рис. 127), из чего будет следовать утверждение задачи. Действительно, треугольник AED равносторонний, поэтому $\angle ADE = 60°$, а $\angle CDE = 90° - 60° = 30°$. Так как $CD = AD = DE$, то треугольник EDC равнобедренный, следовательно, $\angle CED = \angle ECD = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

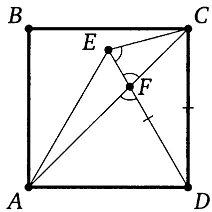


Рис. 127

Поскольку AC — диагональ квадрата, то $\angle CAD = 45°$, а значит, из треугольника AFD получаем $\angle AFD = 180° - (45° + 60°) = 75°$. Углы CFE и AFD вертикальные, следовательно, $\angle CFE = \angle AFD = 75°$.

► Отметим, что первая часть рассуждений уже встречалась в задаче 12.2. ◄

Д128. Ответ: 15°.

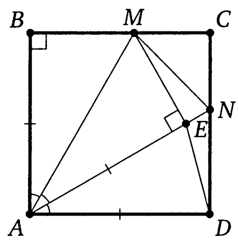


Рис. 128

Заметим, что прямоугольные треугольники MBA и MEA равны (по гипотенузе и острому углу, см. рис. 128). Следовательно, $AE = AB = AD$, т. е. треугольник DAE равнобедренный. Так как $\angle DAE = 30°$, то

$$\angle EDA = \angle DEA = (180° - \angle DAE) : 2 = 75°.$$

Значит, $\angle EDN = 90° - \angle EDA = 15°$.

Д129. Опустим перпендикуляр KN на BC из общей вершины K двух квадратов (см. рис. 129). Рассмотрим прямоугольные треугольники ABE и BKN: в них $AB = BK$ и

$$\angle ABE = 90° - \angle NBK = \angle BKN.$$

Значит, эти треугольники равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AE = BN$.

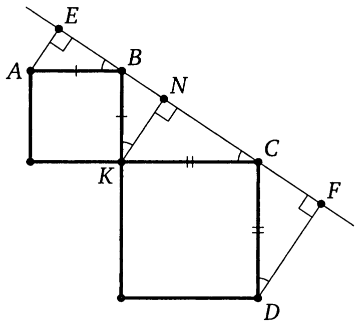


Рис. 129

Аналогично доказывается, что равны прямоугольные треугольники CDF и KCN, значит, $DF = CN$. Таким образом, $AE + DF = BN + CN = BC$.

Д130. Ответ: 1.

Докажем, что $\triangle AEF = \triangle ADC$ (см. рис. 130). Действительно, $AE = AD$, $AF = AC$ и

$$\angle EAF = \angle EAB - \angle FAB = 60° - \angle FAB = \\ = \angle CAF - \angle FAB = \angle CAB = \angle CAD.$$

Значит, треугольники AEF и ADC равны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $EF = DC = 1$.

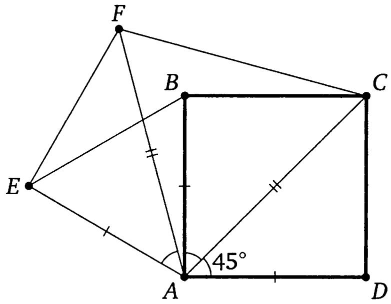


Рис. 130

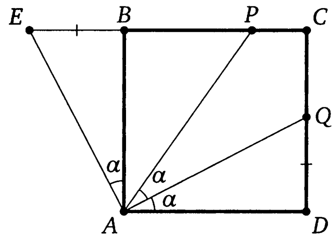


Рис. 131

▶ Так как $EF = 1 = AE$ и $\angle EAF = \angle CAD = 45°$, то треугольник AEF равнобедренный и прямоугольный. ◀

Д131. На продолжении стороны BC за вершину B отметим точку E так, что $BE = DQ$ (см. рис. 131). Тогда прямоугольные треугольники ABE и ADQ равны (по двум катетам), значит, $\angle BAE = \angle DAQ = \alpha$. Следовательно, $\angle PEA = 90° - \alpha$. Кроме того,

$$\angle PAE = \angle DAE - \angle PAD = (90° + \alpha) - 2\alpha = 90° - \alpha = \angle PEA.$$

Таким образом, треугольник PEA равнобедренный: $AP = PE = BP + BE = BP + DQ$, что и требовалось.

▶ Отметим, что треугольник ABE можно получить из треугольника ADQ поворотом с центром B на $90°$ против часовой стрелки. Аналогичное дополнительное построение использовалось при решении задачи 12.5. ◀

Д132. Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую MN, тогда AE — искомое расстояние. Далее можно рассуждать по-разному.

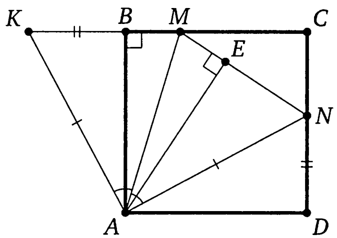


Рис. 132 *а*

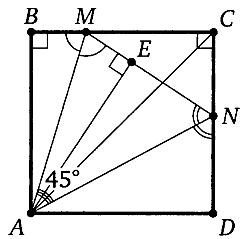


Рис. 132 *б*

Первый способ. На продолжении стороны BC за точку B отметим точку K так, что $BK = DN$ (см. рис. 132 *а*). Тогда прямоугольные треугольники ABK и ADN равны (по двум катетам). Следовательно, $AK = AN$ и $\angle BAK = \angle DAN$. Значит,

$$\angle MAK = \angle BAK + \angle MAB = \angle DAN + \angle MAB = \\ = 90° - \angle MAN = 45° = \angle MAN.$$

Таким образом, равны треугольники MAK и MAN (по двум сторонам и углу между ними). Тогда равны их соответствующие высоты, т. е. $AE = AB$, что и требовалось.

▸ При таком решении этой задачи используется дополнительное построение, аналогичное применяемому в задаче Д131, которое по сути является поворотом. ◂

Второй способ. Проведём диагональ CA, которая является биссектрисой угла BCD (см. рис. 132 *б*). Заметим, что

$$\angle MAN = 45° = 90° - 0{,}5\angle MCN,$$

т. е. $\angle MAN$ равен углу между внешними биссектрисами треугольника MCN. Кроме того, точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника, поэтому она и является точкой пересечения двух внешних и внутренней биссектрис. (Для любой другой точки X, лежащей на луче CA, угол MXN либо больше, чем $90° - 0{,}5\angle MCN$, либо меньше, что следует из теоремы о внешнем угле треугольника.) Следовательно, точка A равноудалена от прямых CB, CD и MN, значит, $AE = AB = AD$, что и требовалось.

▸ Это решение использует биссектрисы как ГМТ (см. занятие 16). ◂

Д133. Ответ: 1.

Продолжим отрезок DF до пересечения с прямой AB в точке K (см. рис. 133). Прямоугольные треугольники KBF и DCF равны (по катету и острому углу), значит, $KB = DC$. Таким образом, EB — медиана прямоугольного треугольника AEK, проведённая к гипотенузе, поэтому $BE = \frac{1}{2}AK = 1$.

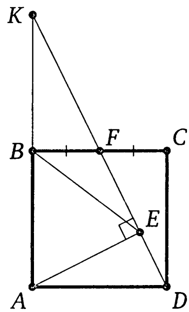


Рис. 133

Д134. *Первый способ.* Рассмотрим треугольники AGB и AGF (см. рис. 134 *а*): AG —

общая сторона, $GB = GF$ (равные стороны квадрата $BEFG$), $\angle AGB = \angle AGF = 135°$ (углы, смежные с углами BGE и FGE, которые равны по 45°). Следовательно, треугольники AGB и AGF равны (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $AB = AF = AD$, $\angle GAB = \angle GAF = \alpha$, $\angle GFA = 180° - \angle AGF - \angle GAF = 45° - \alpha$.

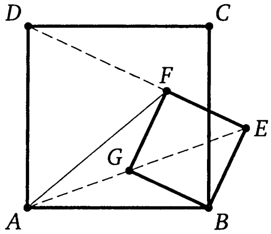


Рис. 134 *а*

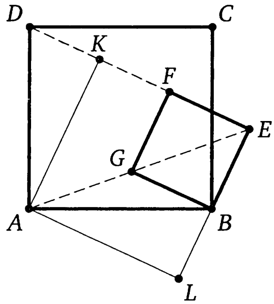


Рис. 134 *б*

Рассмотрим равнобедренный треугольник ADF. В нём

$$\angle DAF = 90° - 2\alpha, \quad \angle DFA = (90° + 2\alpha) : 2 = 45° + \alpha.$$

Таким образом,

$$\angle DFG = \angle GFA + \angle DFA = (45° - \alpha) + (45° + \alpha) = 90°,$$

тогда $\angle DFG + \angle EFG = 180°$, значит, точки D, F и E лежат на одной прямой.

Второй способ. Опустим перпендикуляры AK и AL на прямые EF и EB соответственно (см. рис. 134 *б*). Тогда достаточно доказать, что на одной прямой лежат точки D, K и F. Четырёхугольник $AKEL$ — квадрат, так как три его угла прямые, а диагональ EA — биссектриса угла E.

Треугольники DAK и BAL равны (по двум сторонам и углу между ними), так как $AD = AB$, $AK = AL$, $\angle DAK = 90° - \angle BAK = \angle BAL$. Значит, $\angle DKA = \angle BLA = 90°$, откуда и следует, что точки D, K и F лежат на одной прямой.

Третий способ. Так как $FE \parallel GB$, то достаточно доказать параллельность прямых DE и GB. На лучах BA и GA отметим точки L и K так, что $LA = AB$, $KA = AG$ (см. рис. 134 *в*). Тогда $\Delta ABG = \Delta ALK$ (по двум сторонам и углу между ними).

Так как $\angle ABC = \angle GBE = 90°$, то $\angle ABG = \angle CBE$, откуда с учётом того, что $AB = CB$ и $BG = BE$, следует равенство треугольников ABG и CBE.

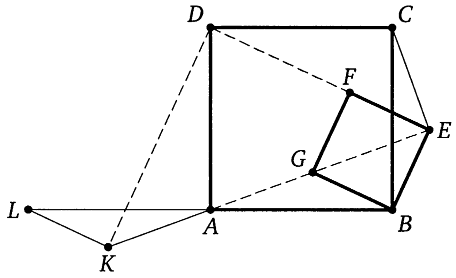


Рис. 134 *в*

Значит, $AK = AG = CE$ и

$$\angle DAK = 90° + \angle KAL = 90° + \angle BAG = 90° + \angle BCE = \angle DCE.$$

Учитывая, что $AD = CD$, получим, что $\Delta DAK = \Delta DCE$, значит, $DK = DE$. Из равенства углов CDE и ADK следует, что $\angle KDE = 90°$. Тогда треугольник EDK равнобедренный и прямоугольный, значит, $\angle DEG = 45° = \angle EGB$, т. е. $DE \parallel GB$.

Д135. а) Так как треугольник ABM равнобедренный и $\angle ABM = 90° + 60° = 150°$, то $\angle AMB = \angle BAM = 15°$ (см. рис. 135). Аналогично получим, что $\angle CMD = 15°$, тогда

$$\angle AMP = 60° - 2 \cdot 15° = 30°.$$

Кроме того,

$$\angle MAP = \angle BAC - \angle BAM = 45° - 15° = 30°.$$

Следовательно, $PM = PA$, что и требовалось.

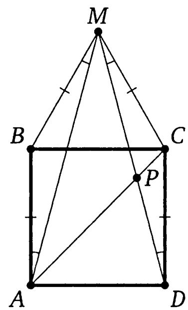


Рис. 135

б) **Ответ:** 45° и 75°.

Заметим, что четырёхугольник $ABMD$ удовлетворяет условию задачи, так как

$$AD = AB = BM, \quad \angle BAD = 90°, \quad \angle ABM = 150°$$

(см. рис. 135). Поэтому построив равносторонний треугольник BCM и квадрат $ABCD$, получим конструкцию из п. а). Используя вычисления из п. а), находим искомые углы: $\angle BMD = 45°$, $\angle ADM = 75°$.

Д136. Ответ: 4, 5 или 6.

Пусть x — длина третьей стороны, тогда $5 - 2 < x < 5 + 2$, т. е. $3 < x < 7$. В этом интервале находятся три целых числа, которые и указаны в ответе.

Д137. Ответ: нет.

Рассмотрим, например, отрезки с длинами $1, 2, 2^2, \ldots, 2^9$. Тогда каждое из этих чисел больше суммы двух любых чисел, меньших его, что противоречит неравенству треугольника.

Д138. Ответ: нет.

Пусть, например, каждая из имеющихся палочек имела длину 10 см. От двух из них отломим по 9 см, а от третьей — 1 см, тогда треугольник со сторонами 9 см, 9 см и 1 см существует, а из палочек 1 см, 1 см и 9 см составить треугольник нельзя, так как $1 + 1 < 9$.

Д139. Пусть AC — диагональ четырёхугольника $ABCD$. Тогда $AC < AB + BC$ и $AC < CD + DA$. Сложив почленно эти неравенства, получим, что $2AC < AB + BC + CD + DA = P_{ABCD}$. Следовательно, $AC < 0{,}5P_{ABCD}$.

Д140. Ответ: провод натянут.

Введём обозначения так, как показано на рис. 140, и проведём отрезок BC. Так как треугольник BAC прямоугольный и равнобедренный, то $\angle BCA = 45°$, а тогда и $\angle BCD = 45°$. Треугольники BCE и BCD равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BE = BD$.

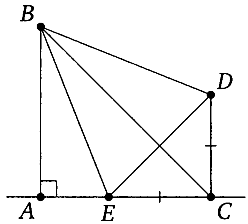


Рис. 140

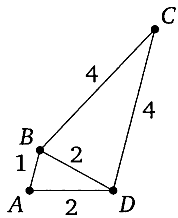


Рис. 141

В процессе падения провод также не мог порваться, так как $BD + DC > BC$.

Д141. Ответ: 11.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагональ $BD = 2$ делит его на два равнобедренных треугольника (см. рис. 141). Тогда стороны 1 и 4 не могут оказаться в одном треугольнике, так как $1+2<4$. Следовательно, в равнобедренном треугольнике со сторонами 2 и 1 третья сторона равна 2, а в треугольнике со сторонами 1 и 4 третья сторона равна 4 (иначе не будет выполняться неравенство треугольника). Таким образом, периметр четерёхугольник $ABCD$ равен $1+2+4+4=11$.

Д142. Используем неравенство $AB+CD<AC+BD$ (см. задачу 13.7). Сложив почленно это неравенство с данным, получим

$$2AB+BD+CD < 2AC+CD+BD.$$

Значит, $2AB<2AC$, т. е. $AB<AC$, что и требовалось.

Д143. Пусть точка B' симметрична точке B относительно биссектрисы CN внешнего угла, тогда B' лежит на стороне этого угла (см. рис. 143). Применяя в треугольнике $AB'N$ неравенство треугольника, получим

$$AN+BN = AN+B'N > AB' = AC+B'C = AC+BC,$$

что и требовалось.

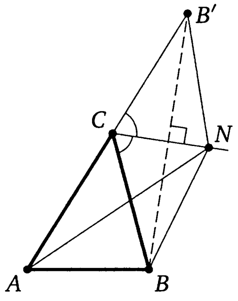


Рис. 143

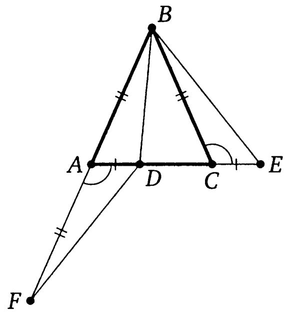


Рис. 144

► В этом решении опять сработала идея «спрямления», реализованная с помощью симметрии. ◄

Д144. На продолжении стороны AB за точку A отложим отрезок AF, равный AB (см. рис. 144). Тогда $\angle DAF=\angle ECB$ (углы, смежные с равными). Значит, треугольник ADF равен треугольнику CEB (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $DF=BE$.

Применяя в треугольнике BDF неравенство треугольника, получим $AB+BC=AB+AF=BF<BD+DF=BD+BE$, что и требовалось.

Д145. Пусть точка N симметрична точке B относительно прямой AM, а точка K симметрична точке C относительно прямой MD (см. рис. 145). Так как $\angle AMD = 120°$, то $\angle AMN + \angle DMK = \angle BMA + \angle CMD = 60°$. Кроме того, $MN = MB = MC = MK$.

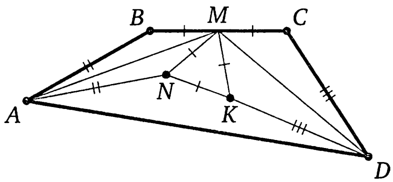


Рис. 145

Таким образом, треугольник MNK равносторонний, поэтому $NK = \frac{1}{2}BC$. Следовательно,

$$AB + \frac{1}{2}BC + CD = AN + NK + KD \geqslant AD,$$

что и требовалось. (Последнее неравенство выражает теорему о длине ломаной, которая является обобщением неравенства треугольника. Она выражает наглядно очевидный факт: «окольный путь длиннее прямого».)

Д146. Пусть точки D и E симметричны точке C относительно сторон данного угла (см. рис. 146). Так как $\angle AOD = \angle AOC$ и $\angle BOE = \angle BOC$, то $\angle DOE = 180°$, т. е. точки D, O и E лежат на одной прямой. Тогда, используя комментарий к задаче Д145, получим

$$P_{ABC} = CA + AB + BC = $$
$$= DA + AB + BE > DE = 2OC,$$

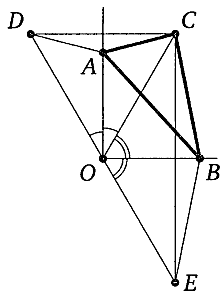


Рис. 146

что и требовалось.

Д147. Заметим, что если $AB = BC$, то треугольник ABC равносторонний и требуемое неравенство обращается в равенство.

Далее без ограничения общности будем считать, что $AB > BC$. На лучах BC и BA отметим точки D и E соответственно так, чтобы треугольники ABD и BCE были равносторонними, тогда $AE = CD$ (см. рис. 147).

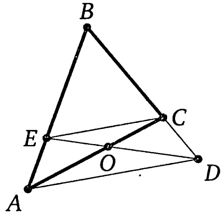


Рис. 147

Следовательно, равны треугольники AEC и DCE (по двум сторонам и углу между ними), значит, $AC = DE$.

Пусть O — точка пересечения отрезков AC и ED. Из треугольников AOD и COE получаем $AO + OD > AD$ и $OC + OE > CE$. Сложив эти неравенства почленно, получим $AO + OC + OD + OE > AD + CE$. Так как $AO + OC = AC = DE = OD + OE$, $AD = AB$, $CE = BC$, то $2AC > AB + BC$.

Таким образом, $2AC \geqslant AB + BC$, что и требовалось.

Д148. Пусть к, ж, з — длины самых коротких палочек соответствующего цвета, а К, Ж, З — самых длинных. По условию к + ж > З, ж + з > К, з + к > Ж. Сложив эти неравенства почленно, получим 2к + 2ж + 2з > К + Ж + З. Следовательно, удвоенная длина самой короткой палочки какого-то цвета будет больше длины самой длинной палочки этого же цвета. Тогда сумма длин каждых двух палочек этого цвета тем более будет больше длины любой палочки этого цвета, что и требовалось.

Д149. Пусть AA', BB' и CC' — высоты треугольника ABC. Тогда $AA' \leqslant AB$, $BB' \leqslant BC$, $CC' \leqslant CA$, причём хотя бы оно неравенство строгое, так как не более двух высот могут совпадать со сторонами. Следовательно,

$$AA' + BB' + CC' < AB + BC + CA = P_{ABC}.$$

Д150. Из условия задачи следует, что $BC > AC$. Поэтому $2BC > BC + AC > AB$, т. е. $BC > 0{,}5AB$.

Д151. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника и $3a = b + c$. Так как $c < a + b$, то $3a < b + (a + b)$, т. е. $a < b$. Аналогично, используя неравенство $b < a + c$, получаем, что $a < c$. Таким образом, a — наименьшая сторона треугольника, значит, против неё лежит наименьший угол.

Д152. Угол BDC внешний для треугольника ADB, поэтому

$$\angle BDC > \angle ABD = \angle CBD$$

(см. рис. 152). Следовательно, $CB > CD$. Аналогично угол ADB внешний для треугольника CDB, поэтому $AB > AD$.

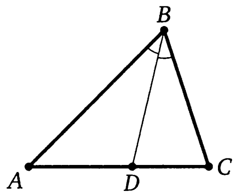


Рис. 152

Д153. Ответ: а) $BD < AD$; б) $AC + BD < BC + AD$.

Так как AB — наибольшая сторона треугольника, то угол C наибольший, поэтому $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$ острые и высота CD

лежит внутри треугольника (см. рис. 153 *а*, *б*). Так как $\alpha < \beta$, то $BC < AC$ и $\angle ACD > \angle BCD$.

а) Проведём биссектрису CL (см. рис. 153 *а*), тогда $AL > BL$ (см. комментарий к задаче 14.8). Так как $\angle BCD < \frac{1}{2}\angle ACB$, то точка D лежит на отрезке BL. Значит, $BD < BL < AL < AD$.

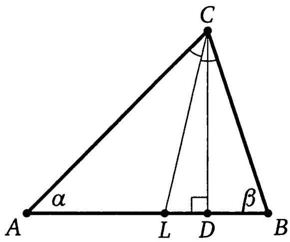


Рис. 153 *а*

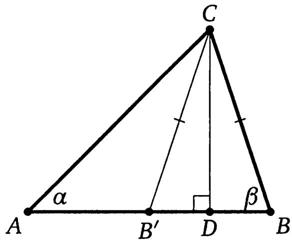


Рис. 153 *б*

б) Рассмотрим точку B', симметричную точке B относительно прямой CD (см. рис. 153 *б*), тогда $B'D = BD < AD$ (т. е. B' лежит на отрезке AD) и $B'C = BC$. Из треугольника $B'AC$ получим

$$AB' > AC - B'C \Leftrightarrow AD - BD > AC - BC \Leftrightarrow AC + BD < BC + AD.$$

Д154. Пусть в треугольнике ABC угол A равен $20°$ и $AB = AC$. Построим треугольники ABD и ACE, симметричные ABC относительно прямых AB и AC соответственно (см. рис. 154). Тогда $AD = AE$ и $\angle DAE = 60°$, т. е. треугольник DAE равносторонний.

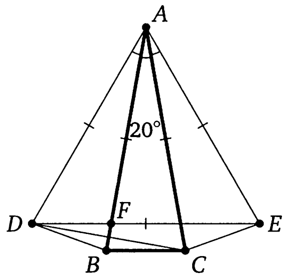


Рис. 154

1. Так как $BD + BC > DC$, а $DC + CE > DE = AB$, то $BD + BC + CE = 3BC > AB$.

2. Пусть AB и DE пересекаются в точке F. Так как $\angle FBD = 80°$, а $\angle FDB = \angle ADB - \angle ADE = 80° - 60° = 20°$, то $\angle BFD = 80°$. Значит, $BD = FD < 0{,}5DE$ (так как треугольник DAE равносторонний, а угол AFE острый, то F ближе к D, чем середина DE). Следовательно, $2BC = 2BD < DE = AB$.

Д155. Ответ: $MK > MB$.

Пусть $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$, $\angle NKC = \beta$ (см. рис. 155). Так как угол ACB внешний для треугольника CNK, то $\alpha > \beta$. В треугольнике BKM против большего угла лежит большая сторона, значит, $MK > MB$.

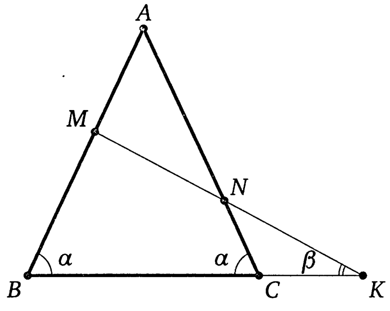


Рис. 155

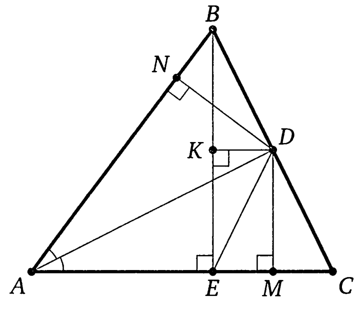


Рис. 156

Д156. Из точки D опустим перпендикуляры DM и DN на прямые AC и AB соответственно (см. рис. 156). Так как AD — биссектриса, то $DM = DN$, кроме того, оба перпендикуляра лежат внутри треугольника ABC, поскольку он остроугольный. Проведём также перпендикуляр DK к высоте BE, тогда $DK < DN$, так как DN длиннее наклонной к BE, проведённой из точки D. Следовательно, $DM = DN > DK = EM$, поэтому DM — больший катет в прямоугольном треугольнике DEM. Значит, $\angle CED > 45°$, что и требовалось.

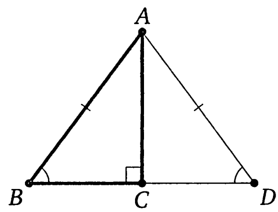


Рис. 157

Д157. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, в котором $\angle BAC > 30°$. Отразив этот треугольник относительно прямой AC, получим равнобедренный треугольник BAD, в котором высота AC является биссектрисой и медианой (см. рис. 157). Так как $\angle BAD = 2\angle BAC > 60°$, то $\angle ABD = \angle ADB < 60°$. Следовательно, $BD > AB$, поэтому $BC = 0{,}5BD > 0{,}5AB$, что и требовалось.

► Справедливо и обратное утверждение, которое можно доказать, используя тот же чертёж и похожие рассуждения. ◄

Д158. Введём обозначения углов так, как показано на рис. 158. Предположим, что $KE \geqslant AE = BE$, тогда $\angle AKE \leqslant \alpha$ и $\angle BKE \leqslant \beta$. Из треугольника AKB получаем

$$\angle AKE + \angle BKE + \alpha + \beta + 2\varphi = 180°,$$

тогда $2\alpha+2\beta+2\varphi \geqslant 180°$, что противоречит теореме о сумме углов для треугольника ABC. Следовательно, $KE < AE$, что и требовалось.

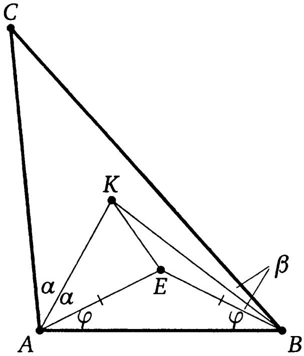


Рис. 158

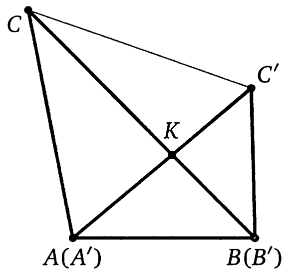


Рис. 159

Д159. Не умаляя общности, можно считать, что $AB \leqslant AC$. Совместим треугольники так, чтобы точка A' совпала с A, точка B' — с B, а точки C и C' оказались в одной полуплоскости относительно прямой AB (см. рис. 159).

Пусть K — точка пересечения прямых BC и AC'. Докажем, что в этом случае точка K лежит на отрезке AC'. Действительно, так как $AC \geqslant AB$, то, применяя неравенство треугольника к треугольнику ABC, получаем, что $\angle ABC \geqslant \angle BCA$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle AKC > \angle ABC$, значит, $\angle AKC > \angle ACK$. Тогда, применяя неравенство треугольника к треугольнику ACK, получаем, что $AC > AK$. Значит, $AK < AC'$, т. е. точка K лежит на отрезке AC'.

В равнобедренном треугольнике ACC' равны углы C и C'. Так как $\angle BC'C > \angle AC'C = \angle ACC' > \angle BCC'$, то, применяя неравенство треугольника к треугольнику BCC', получаем, что $BC > BC' = B'C'$, что и требовалось.

▶ Это решение придумано А. Шаповаловым. Доказанное утверждение иногда называют «леммой о пасти крокодила» (чем шире разинешь пасть, тем больше проглотишь). При дальнейшем изучении геометрии оно будет непосредственно следовать из теоремы косинусов. ◀

Д160. Пусть точка K симметрична L относительно прямой AB, а точка N симметрична A относительно прямой BK

(см. рис. 160). Тогда $NK = KA = AL$. Кроме того, $\angle NBK = \angle KBA = \angle ABL = 7°$, значит, $\angle NBC = 91°$.

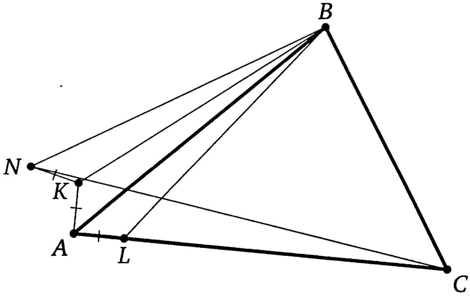


Рис. 160

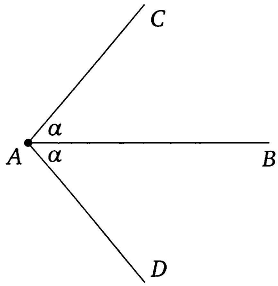


Рис. 161

Тогда угол NBC наибольший в треугольнике NBC, поэтому $BC < NC$. Но $NC < NK + KA + AC = AC + 2AL$, следовательно, $BC < AC + 2AL$, что и требовалось.

Д161. Прямая AB делит плоскость на две полуплоскости. Проведём в одной из них луч AC так, что $\angle CAB = \alpha$, тогда все точки на сторонах этого угла и точки, лежащие между ними, удовлетворяют данному неравенству (см. рис. 161). То же верно и для угла DAB, равного α, в другой полуплоскости.

Для других точек плоскости требуемое неравенство не выполняется, поэтому *искомое ГМТ — множество точек, лежащих на сторонах и между сторонами угла CAD, равного* 2α, *для которого луч AB — биссектриса.*

Д162. Пусть заданы точка A и число $R > 0$. Тогда точка C является искомым центром окружности в том и только том случае, если она находится от A на расстоянии R. Следовательно, *искомое ГМТ — окружность с центром A и радиусом R.*

Д163. Проведём серединные перпендикуляры DE и FG к сторонам AB и BC соответственно, и пусть O — точка их пересечения (см. рис. 163). Тогда неравенство $AX \leqslant BX$ выполняется в том и только том случае, если точка X лежит в той же полуплоскости с границей DE, что и точка A, а неравенство $BX \leqslant CX$ —

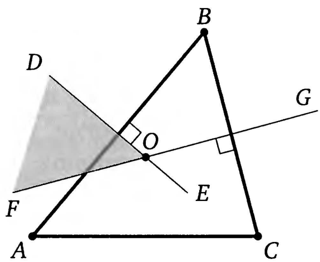


Рис. 163

в том и только том случае, если точка X лежит в той же полуплоскости с границей FG, что и точка B. Следовательно, оба неравенства выполняются в том и только том случае, если точка X лежит в пересечении этих полуплоскостей. Таким образом, *искомое ГМТ — множество всех точек угла* DOF.

▶ Сравните с задачами 15.2 и 15.3. ◀

Д164. ▶ Имеет смысл предварительно обсудить с учащимися факт, который формально не является ни аксиомой, ни теоремой: прямая, проходящая через точку, лежащую внутри треугольника, и не содержащая его вершину, пересекает две стороны треугольника. ◀

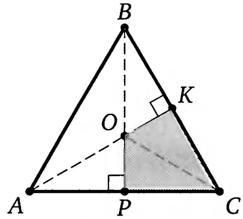


Рис. 164

Проведём высоты AK и BP треугольника ABC, которые пересекаются в точке O (см. рис. 164). Докажем, что *искомое ГМТ — объединение отрезка* AB *и четырёхугольника* $OKCP$.

Очевидно, что отрезки AB и CO принадлежат указанному ГМТ. Кроме того, если точка M принадлежит четырёхугольнику $OKCP$, то она лежит в одном из треугольников OCP или OCK. Если M лежит, например, в треугольнике OCP и прямая, проходящая через неё, не пересекает его сторону CO, то эта прямая пересекает стороны CP и PO. Значит, она пересекает сторону BP треугольника ABP, но не пересечёт сторону AP. Следовательно, эта прямая должна пересечь сторону AB. Для треугольника OCK рассуждения аналогичны.

Для любой точки, не принадлежащей указанной фигуре, несложно привести пример прямой, проходящей через неё и не пересекающей ни отрезок AB, ни отрезок CO. Для любой точки, не принадлежащей треугольнику ABC, найдётся, например, прямая, параллельная одной из его сторон и целиком лежащая вне треугольника. Для точек треугольника AOP (кроме отрезка OP) можно указать прямую, которая проходит также через внутреннюю точку отрезка OB. Такая прямая пересечёт стороны OA и OB треугольника AOB, поэтому не пересечёт сторону AB. Для точек треугольника BOP рассуждения аналогичны. Для точек треугольника AOB (исключая отрезок AB) достаточно указать прямую, параллельную AB.

▶ Отметим, что, разбираясь со всеми частями треугольника, можно постепенно прийти к ответу. ◀

Д165. Для любой точки X на отрезке AB это равенство выполняется. Если точка X лежит на прямой AB, но вне этого отрезка, то либо $XA > AB$, либо $XB > AB$. Если же точка X не принадлежит прямой AB, то $AX + BX > AB$.

Таким образом, *искомое ГМТ — отрезок AB*.

Д166. Рассмотрим какую-нибудь точку M, удовлетворяющую условию. Тогда MOB — внешний угол треугольника AOM, значит, $\angle AMO = \angle MAO$ (см. рис. 166). Следовательно, $OM = OA$, т. е. точка M лежит на окружности с центром O и радиусом OA.

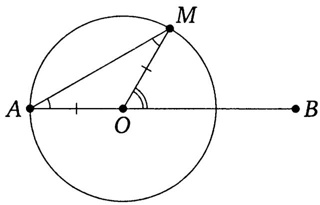


Рис. 166

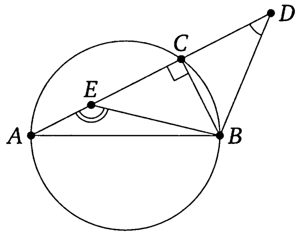


Рис. 167

Обратно, для любой точки M этой окружности, не лежащей на прямой AB, треугольник AOM равнобедренный с углом O при вершине, поэтому $\angle MOB = 2\angle MAB$.

Таким образом, *искомое ГМТ — окружность с центром O радиуса OA, исключая точку A и вторую точку пересечения окружности и прямой AB*.

► Отметим, что вторая точка пересечения окружности и прямой AB может оказаться как на отрезке AB, так и вне его. ◄

Д167. Воспользуемся результатом задачи 15.6 и рассмотрим геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом, т. е. окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B (см. рис. 167). Исключим из дальнейшего рассмотрения все точки прямой AB (см. соответствующий комментарий в задаче 15.6). Таким образом, осталось рассмотреть точки, не принадлежащие прямой AB и лежащие либо вне указанной окружности, либо внутри неё.

Рассмотрим произвольную точку D вне окружности. Хотя бы один из отрезков AD или BD пересекает окружность в некоторой точке C. Пусть для определённости это AD, тогда

$\angle ACB = 90°$. При этом угол ACB внешний для треугольника BCD, значит, $\angle ACB > \angle BDC$, поэтому $\angle ADB < 90°$. Проведя аналогичное рассуждение для произвольной точки E внутри окружности, получим, что $\angle AEB > \angle ACB = 90°$.

Так как в итоге рассмотрены все точки плоскости, то *искомое ГМТ — это множество точек, не лежащих на прямой AB и лежащих: а) вне окружности с диаметром AB; б) внутри окружности с диаметром AB.*

▶ Стоит отдельно ещё раз пояснить школьникам, почему в данном случае нет необходимости доказывать обратные утверждения. ◀

Д168. Ответ: см. рис. 168 (искомая фигура выделена цветом).

Пусть флажок, подвешенный в некоторой точке *Г*, закрывает дырку *Д*. Рассмотрим середину *О* отрезка *ГД*. Тогда фигура *Ф*, симметричная флажку относительно точки *О*, закрывает точку *Г*; и наоборот, если *Ф* закрывает точку *Г*, то фигура, ей симметричная относительно *О*, закрывает точку *Д* (см. рис. 168).

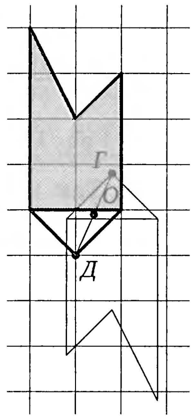


Рис. 168

Заметим теперь, что, хотя флажок двигается и при этом положение точек *Г* и *О* меняется, фигура *Ф* остаётся неизменной, так как она «подвешена вверх» от неподвижной точки *Д*! Точнее говоря, *Ф* получается подвешиванием флажка в точке *Д* с последующей симметрией относительно *Д*. Множество точек *Ф* (без верёвочки) и составляет искомое ГМТ.

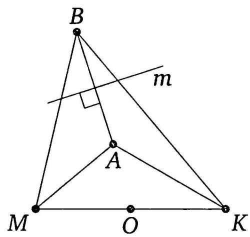


Рис. 169

Д169. Проведём серединный перпендикуляр m к отрезку AB, который делит плоскость на две полуплоскости (см. рис. 169). Из условия задачи следует, что точки M и K лежат в той же полуплоскости, что и точка A, поэтому в ней лежит и весь отрезок MK. Следовательно, в этой же полуплоскости лежит точка O. Тогда $AO < BO$, что и требовалось.

▶ Сравните с примером 16.1. ◀

Д170. Проведём биссектрису BD данного треугольника, тогда прямая BD — серединный перпендикуляр к стороне AC, который делит плоскость на две полуплоскости (см. рис. 170). Так как $\angle ABO > 30°$, то точка O лежит в той же полуплоскости, что и вершина C. Так как вершина A лежит в другой полуплоскости, то $AO > CO$.

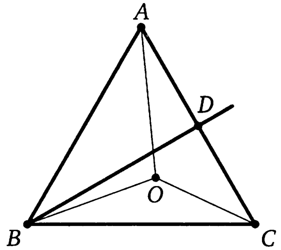


Рис. 170

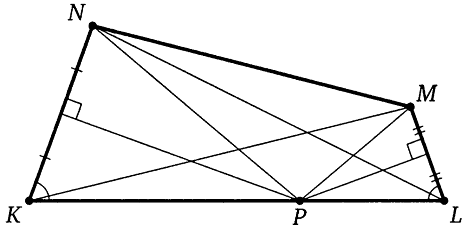


Рис. 171

Д171. Так как точка P пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам KN и LM равноудалена от концов каждого из этих отрезков, то треугольники KPN и LPM равнобедренные (см. рис. 171). В этих треугольниках равны углы при основаниях, поэтому равны и углы при вершине P.

Таким образом, $KP = NP$, $MP = LP$ и $\angle KPM = \angle NPL$ (углы, смежные с равными). Следовательно, треугольники KPM и NPL равны, значит, $KM = NL$, что и требовалось.

Д172. Из условия задачи следует, что $\angle IDN = \angle MKI$ и $\angle IEL = \angle IMK$ (см. рис. 172). Кроме того, $IN \perp AC$ и $IL \perp BC$. Проведём перпендикуляр IF к стороне AB. Тогда $IF = IN = IL$, так как точка I равноудалена от сторон треугольника ABC (см. пример 15.2).

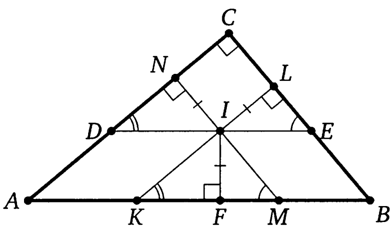


Рис. 172

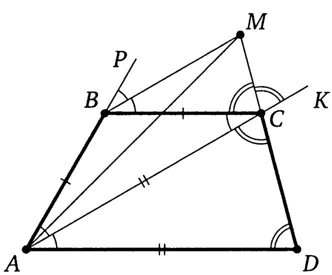


Рис. 173

Из равенства прямоугольных треугольников DNI и KFI (по катету и острому углу) получим, что $DN = KF$. Аналогично из равенства прямоугольных треугольников EIL и MIF следует, что $EL = MF$.

Таким образом, $KM = KF + MF = DN + EL$, что и требовалось.

Д173. Можно рассуждать по-разному (см. рис. 173).

Первый способ. Из условия задачи следует, что $\angle BMC = \angle ACD = \angle CDA = \angle BCM$. Значит, $BM = BC = AB$, следовательно, $\angle BAM = \angle BMA = \angle MAC$.

Второй способ. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку P, а на продолжении диагонали AC (за точку C) точку K. Тогда $\angle MCK = \angle ACD = \angle ADC = \angle BCM$, т. е. CM — биссектриса угла BCK. Так как AC — биссектриса угла BAD и $BM \parallel AC$, то BM — биссектриса угла PBC. Таким образом, M — точка пересечения двух биссектрис внешних углов треугольника ABC, следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

Д174. Пусть $\angle MKB = \angle MNC = \alpha$, $\angle KMB = \angle KNA = \beta$ (см. рис. 174). Так как каждый угол треугольника ABC равен $60°$, то из треугольника KMB получим, что $\alpha + \beta = 120°$, тогда из треугольников NKA и NMC получим, что $\angle NKA = \alpha$, $\angle NMC = \beta$.

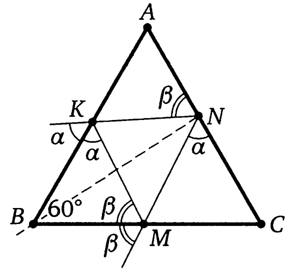


Рис. 174

Рассмотрим углы, вертикальные углам NKA и NMC, которые равны α и β соответственно. Заметим, что лучи KB и MB являются биссектрисами внешних углов треугольника KNM. Так как биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла при третьей вершине пересекаются в одной точке, то NB — биссектриса угла MNK.

Д175. Отметим на продолжениях отрезков BA и BE точки G и H соответственно. Пусть K — точка, симметричная F относительно прямой AD (см. рис. 175). Тогда из условия задачи следует, что K лежит на биссектрисе BL. Кроме того, $\angle AEK = 60°$ и $\angle AEH = 120°$, т. е. EK — биссектриса угла AEH. Таким образом, точка K является точкой пересечения внутренней и внешней биссектрис треугольника ABE, поэтому AK — биссектриса прямого угла DAG (другого внешнего угла). Следовательно, луч AF, симметричный лучу AK относительно прямой AD, является биссектрисой прямого угла DAB, т. е. точка F лежит на диагонали AC данного квадрата.

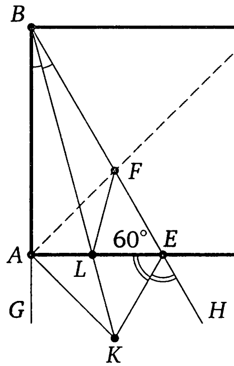


Рис. 175

Д176. Ответ: 45°.

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle A = 30°$, $\angle B = 15°$, CD — медиана (см. рис. 176). Построим угол CBF, равный 15°, и пусть E — точка пересечения прямых BF и AC. Тогда $\angle ABE = \angle BAE = 30°$, значит, $AE = BE$ и $ED \perp AB$. Кроме того,

$$\angle AEF = \angle AED = \angle BED = 60°,$$

следовательно, EA — биссектриса внешнего угла треугольника BDE. Так как BC — биссектриса угла B этого треугольника, то C — точка их пересечения. Тогда DC также биссектриса внешнего угла, т. е. $\angle CDA = 45°$.

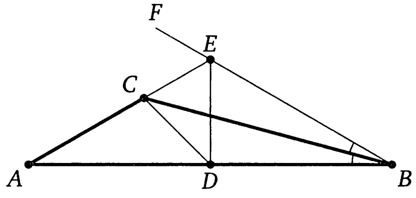


Рис. 176

Д177. Ответ: α или $180° - \alpha$.

Так как точка P принадлежит биссектрисе угла ABC, то она равноудалена от его сторон, т. е. от прямых BA и BC, на которых лежат стороны четырёхугольника $ABCD$. Точка P

лежит также и на биссектрисе угла DAB, поэтому она равноудалена от прямых AB и AD (см. рис. 177 *а*, *б*). Таким образом, точка P равноудалена от прямых AD и BC. Аналогично доказывается, что точка Q также равноудалена от прямых AD и BC. Пусть M — середина стороны AB.

Далее возможны два случая (очевидно, что они оба реализуются).

1. Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Тогда точки P и Q лежат на биссектрисе угла AEB (см. рис. 177 *а*). По условию прямая PQ проходит через точку M, поэтому отрезок EM является биссектрисой и медианой треугольника AEB, значит, этот треугольник равнобедренный, т. е. $\angle DAB = \angle ABC = \alpha$. (В случае, когда точка E лежит в другой полуплоскости относительно прямой AB, DAB и ABC — углы, смежные равным углам.)

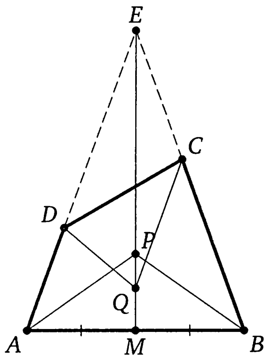


Рис. 177 *а*

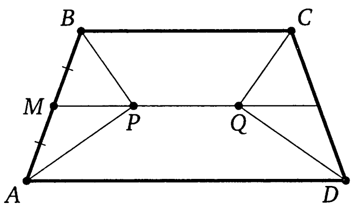


Рис. 177 *б*

2. Прямые AD и BC параллельны (см. рис. 177 *б*). Тогда $\angle DAB = 180° - \angle ABC = 180° - \alpha$.

▶ Отметим, что так как точки P и Q равноудалены от прямых AD и BC (по доказанному выше), то прямая PQ проходит через середины сторон AB и CD. ◀

▶ Поясним подробнее, зачем в решении фраза «Очевидно, что оба случая реализуются». Если это не очевидно, то надо отдельно объяснить, как они реализуются, приводить примеры. При переборе бывает, что какие-то случаи сводятся к противоречию. Если бы в этой задаче какой-то случай не реализовался, то и ответ был бы один вместо двух.◀

Раздаточный материал

Занятие 9

9.1. Два угла треугольника равны 100° и 60°. Покажите, как его разрезать на два равнобедренных треугольника.

9.2. Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?

9.3. Про треугольник, один из углов которого равен 120°, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

9.4. Треугольник ABC можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину C. Найдите углы треугольника ABC.

9.5. Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника.

9.6. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

9.7. Равносторонний треугольник разрезали на пять равнобедренных треугольников. Обязательно ли все углы получившихся треугольников измеряются целым числом градусов?

Занятие 10

10.1. Даны точки A, B и C в узлах сетки (см. рис. 1). Постройте: а) серединный перпендикуляр к отрезку AB; б) биссектрису угла BAC.

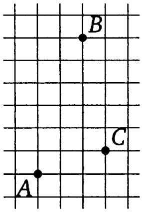


Рис. 1

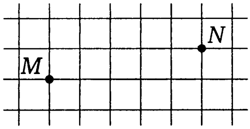


Рис. 2

10.2. Даны точки M и N в узлах сетки (см. рис. 2). Постройте квадрат, у которого данные точки являются: а) соседними; б) противоположными вершинами.

10.3. Даны точки: а) A, B, C и D; б) E, F, G и H (в узлах сетки, см. рис. 3 *а*, *б*). Покажите, что прямые AB и CD пересекаются в узле сетки, а точка пересечения прямых EF и GH не является узлом сетки.

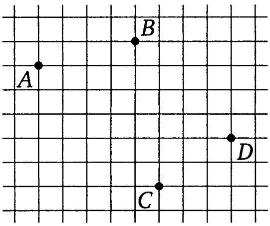


Рис. 3 *а*

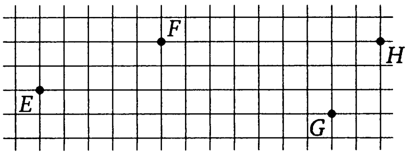


Рис. 3 *б*

10.4. Даны точки A, B, C и D в узлах сетки (см. рис. 4). Постройте: а) серединный перпендикуляр к отрезку AB; б) середину отрезка CD.

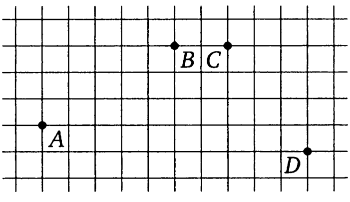


Рис. 4

10.5. Найдите: а) угол между прямыми AE и DQ (см. рис. 5 *а*); б) $\angle AKM$ (см. рис. 5 *б*).

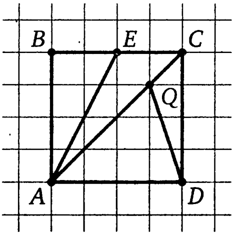


Рис. 5 *а*

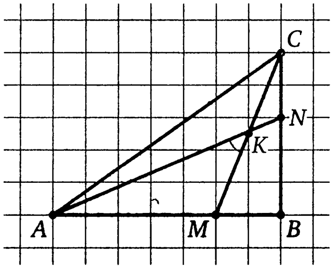


Рис. 5 *б*

10.6. Докажите, что углы MAN и BPM равны (см. рис. 6).

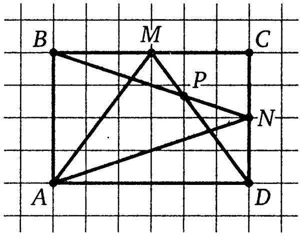


Рис. 6

10.7. а) Найдите сумму трёх углов, обозначенных на рис. 7 *а*.

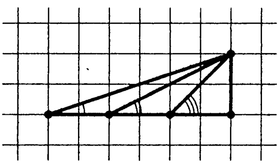


Рис. 7 *а*

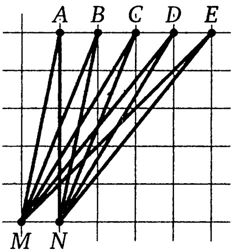


Рис. 7 *б*

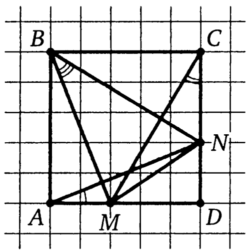


Рис. 8

б) Найдите сумму пяти углов: MAN, MBN, MCN, MDN и MEN (см. рис. 7 *б*).

10.8. От квадрата $ABCD$ «отрезали» прямоугольный треугольник MND (см. рис. 8). Найдите сумму трёх углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

Занятие 11

11.1. Верно ли, что из любого прямоугольного листа бумаги можно несколькими перегибаниями получить квадрат?

11.2. У листа бумаги только один ровный край. Лист согнули, а потом разогнули обратно. A — общая точка линии сгиба и ровного края (см. рис. 2). Постройте перпендикуляр к этой линии в точке A, используя только перегибание бумаги.

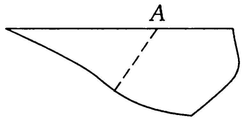


Рис. 2

11.3. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рис. 3). Докажите, что для каждого угла левого белого треугольника найдётся равный ему угол в правом белом треугольнике.

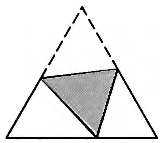


Рис. 3

11.4. Квадратный лист бумаги сначала сложили вдвое, а затем так, как показано на рис. 4. Чему равен отмеченный угол?

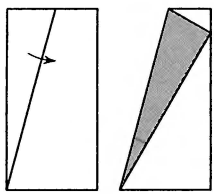


Рис. 4

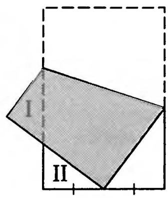


Рис. 5

11.5. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны (см. рис. 5). Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.

11.6. Бумажный прямоугольник $ABCD$ перегибается так, что точка C попадает в точку C' — середину стороны AD. Найдите отношение $DK : AB$, где K — точка линии сгиба на стороне CD.

11.7. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник MAN (см. рис. 7*а*, *б*). Найдите угол ANM.

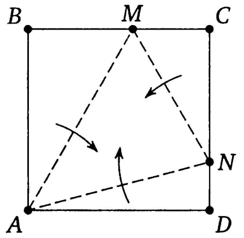


Рис. 7*а*

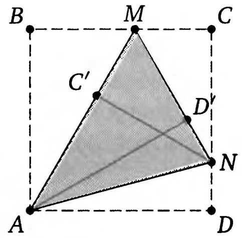


Рис. 7*б*

11.8. Барон Мюнхгаузен говорит, что перегнул некоторый бумажный треугольник по прямой, сделал ножницами прямой разрез, получил три части, согнутые разогнул — и все три оказались равными неравнобедренными треугольниками. Могут ли слова барона быть правдой?

Занятие 12

12.1. Квадраты $ABCD$ и $CEFG$ расположены так, как показано на рис. 1 *а*, *б*. Для каждого из случаев расположения докажите, что $DE=BG$ и $DE\perp BG$.

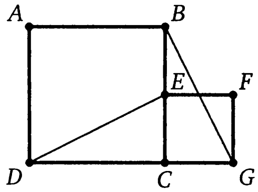


Рис. 1 *а*

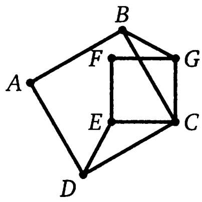


Рис. 1 *б*

12.2. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники AMB и AND. Докажите, что треугольник MCN также равносторонний.

12.3. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M так, что $\angle MBC = \angle MCB = 15^\circ$. Докажите, что треугольник AMD равносторонний.

12.4. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK=AC$. Найдите угол BKC.

12.5. В квадрате $ABCD$ на стороне CD отмечена точка K, а на продолжении стороны DA за точку A отмечена точка N. Докажите, что $\angle BKN=45^\circ$ тогда и только тогда, когда $AN=CK$.

12.6. $ABCD$ — квадрат. Треугольники AMD и AKB равносторонние (см. рис. 6). Докажите, что точки C, M и K лежат на одной прямой.

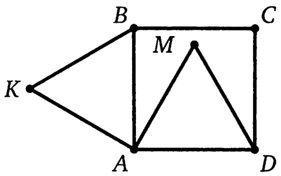


Рис. 6

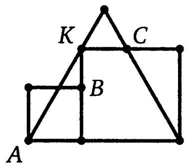


Рис. 7

12.7. Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рис. 7 (вершина K большого квадрата лежит на боковой стороне треугольника, а нижние стороны квадратов лежат на основании треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Занятие 13

13.1. Две стороны равнобедренного треугольника равны 5 и 10. Найдите его периметр.

13.2. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра.

13.3. Длины сторон треугольника — последовательные натуральные числа. Найдите их, если известно, что одна из медиан треугольника перпендикулярна одной из его биссектрис.

13.4. В четырёхугольнике $ABCD$ тупые углы B и C равны, $AB=3$, $CD=1$. Докажите, что $AD>2$.

13.5. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

13.6. Докажите, что любая сторона треугольника меньше половины его периметра.

13.7. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника: а) больше суммы его двух противолежащих сторон; б) больше полупериметра, но меньше периметра.

13.8. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Докажите, что $BK<2CK$.

Занятие 14

14.1. Существует ли прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна 10, а проведённая к ней высота равна 6?

14.2. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC>BC$. Докажите, что угол AKC тупой.

14.3. В треугольнике ABC с тупым углом C на сторонах AC и BC отмечены точки M и N. Докажите, что $MN<AB$.

14.4. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A=\angle B<90^\circ$, $\angle D>\angle C$. Сравните длины сторон AD и BC.

14.5. В треугольнике ABC на продолжении стороны AB за вершину A отмечена точка D так, что $AD=AC$. Докажите, что: а) $BD>BC$; б) сумма двух сторон треугольника больше третьей.

14.6. В треугольнике ABC, отличном от равностороннего, угол A равен 60°. Докажите, что $AB+AC<2BC$.

14.7. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с гипотенузой AB. На сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно, отличные от вершин. Докажите, что $AK+KM>AB$.

14.8. Докажите, что биссектриса треугольника не больше его медианы, проведённой из той же вершины.

Занятие 15

15.1. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место вершин C равнобедренных треугольников с основанием AB.

15.2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от трёх заданных точек.

15.3. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек X, что $AX \leqslant BX \leqslant CX \leqslant DX$.

15.4. Найдите геометрическое место середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

15.5. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла C. По какой траектории движется середина этого отрезка?

15.6. Найдите геометрическое место точек C, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

15.7. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место таких точек C, что наибольшим в треугольнике ABC является: а) угол C; б) угол A.

15.8. Найдите геометрическое место внутренних точек данного угла, сумма расстояний от которых до сторон этого угла равна длине заданного отрезка.

Занятие 16

16.1. Точки A, B и C лежат на прямой m, а точки D и E на ней не лежат. Известно, что $AD=AE$ и $BD=BE$. Докажите, что $CD=CE$.

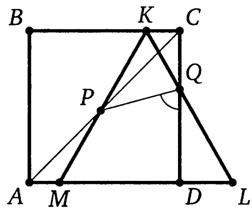
16.2. Серединный перпендикуляр m к стороне AB треугольника ABC разбивает его на две части с равными периметрами. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

16.3. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I, а биссектрисы углов CA_1B_1 и CB_1A_1 — в точке J. Докажите, что точки C, I и J лежат на одной прямой.

16.4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE — биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

16.5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $AB=BC$, $CD=DE$ и $EF=FA$. Докажите, что биссектрисы углов B, D и F пересекаются в одной точке.

16.6 Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.



16.7. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы тупые, $\angle A=\angle B$, $\angle C=\angle D$ и $\angle E=\angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам AB, CD и EF пересекаются в одной точке.

16.8. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырёх точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45°.

Авторы задач

Большинство использованных в книжке задач давно и заслуженно стали математическим фольклором или восходят к нему. Эти задачи вошли во многие задачники, учебные пособия, книжки и статьи (см. список использованной литературы), поэтому их часто публикуют без указания авторов. Однако это не повод умалчивать об авторах в тех случаях, когда они известны (в случаях, когда автор не один, его соавторы указаны в скобках).

Э. Акопян: Д115
Е. Бакаев: 12.4, Д111, Д123, Д124, Д134, Д140 (М. Раскин), Д158
С. Берлов: Д171
А. Блинков: 9.2, 9.4 (Д. Шноль), Д96, Д97, Д105, Д116, Д173 (Ю. Блинков)
Ю. Блинков: 16.6, Д173 (А. Блинков)
М. Волчкевич: 12.5, 14.7, Д125, Д135б, Д176
Т. Голенищева-Кутузова: Д119
Р. Гордин: Д104
М. Евдокимов: 12.7, Д130, Д135а
Л. Емельянов: Д138
Г. Жуков: Д148 (Н. Косинов)
А. Заславский: 9.5
Н. Косинов: Д148 (Г. Жуков)
А. Кулыгин: 11.3
А. Левин: Пр. 16.1
Н. Мартынова: 9.6 (П. Мартынов)
П. Мартынов: 9.6 (Н. Мартынова)
Н. Медведь: Д112
Н. Москвитин: Д127
М. Панов: Д101
А. Перепечко: Д98 (М. Прасолов)
А. Пешнин: Д120
М. Прасолов: Д98 (А. Перепечко)
В. Произволов: 10.5б, 10.6, 10.7, 10.8, 11.7 (А. Хачатурян), 16.8, Д106, Д110, Д114, Д132, Д175

Д. Прокопенко: 10.5а, 11.2
В. Протасов: 16.2
М. Раскин: Д113 (Д. Шноль), Д140 (Е. Бакаев)
В. Смирнов: Д103
А. Толпыго: Д151
А. Хачатурян: 11.5, 11.7 (В. Произволов), Д94
А. Шаповалов: 9.7, пример 11.2, 11.6, 11.8, Д99, Д117, Д118
И. Шарыгин: 13.5
А. Шень: Д168
Д. Шноль: пример 9.1, 9.1, 9.3, 9.4 (А. Блинков), 11.4, Д113 (М. Раскин)

Литература и веб-ресурсы

1. *Бакаев Е.В.* Комбинации квадратов // Квант. 2018. №7. С. 22—26.
2. *Блинков А.Д.* Геометрия на клетчатой бумаге // Квантик. 2015. № 9—11.
3. *Блинков А.Д.* Перегибая бумагу, получаем задачу // Квантик. 2016. №9. С. 18—22.
4. *Блинков А.Д.* Разобьём на равнобедренные // Квантик. 2018. №3. С. 18—22.
5. *Волчкевич М.А.* Уроки геометрии в задачах (7—8 классы). М.: МЦНМО, 2016.
6. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. Учебное пособие. М.: МЦНМО, 2004.
7. Задачи Математического праздника: `http://olympiads.mccme.ru/matprazdnik/prob.html`
8. Задачи Московской математической олимпиады: `http://olympiads.mccme.ru/mmo/books/index.htm`
9. Задачи Устной городской олимпиады для 7 классов: `http://olympiads.mccme.ru/ustn/`
10. Избранные задачи окружных олимпиад по математике в Москве / Сост. А. Д. Блинков. МЦНМО, 2015.
11. Материалы турниров математических боёв имени А. П. Савина: `http://tursavin.ru/problems.html`
12. Московские математические регаты. Ч. 1, 2 / Сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц. М.: МЦНМО, 2014.
13. *Оноприенко А.* Геометрия на клетчатой бумаге // Квант. 2018. №11. С. 27—30.
14. Проект «Задачи»: `www.problems.ru`
15. *Произволов В.В.* Задачи на вырост. М.: Бюро Квантум, 2003.
16. *Рукшин С.Е.* Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге (первые пятьдесят лет). Ростов на Дону: издательский центр «МарТ», 2000.
17. *Фомин Д.В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб.: Политехника, 1994.

Оглавление

В СЕРИИ «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ» ВЫШЛИ КНИГИ:

*22. **А. Д. Блинков.*** Геометрия для 7 класса, обычная и не очень

*21. **А. В. Шаповалов.*** Индукция без формальностей

*20. **И. В. Раскина, А. В. Шаповалов.*** Комбинаторика

*19. **А. И. Сгибнев.*** Геометрия на подвижных чертежах

*18. **А. Д. Блинков.*** Последовательности

*17. **Ю. А. Блинков, Е. С. Горская.*** Вписанные углы

*16. **К. А. Кноп.*** Азы теории чисел

*15. **А. Д. Блинков.*** Геометрия в негеометрических задачах

*14. **И. В. Раскина.*** Логика для всех: от пиратов до мудрецов

*13. **А. В. Шаповалов.*** Математические конструкции: от хижин к дворцам

*12. **А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц.*** Непрерывность

*11. **И. В. Раскина, Д. Э. Шноль.*** Логические задачи

*10. **А. А. Заславский, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов.*** Задачи о турнирах

*9. **А. В. Шаповалов.*** Как построить пример?

*8. **А. И. Сгибнев.*** Делимость и простые числа

*7. **А. Д. Блинков.*** Классические средние

*6. **Г. А. Мерзон, И. В. Ященко.*** Длина. Площадь. Объем

*5. **К. А. Кноп.*** Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам

*4. **А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков.*** Геометрические задачи на построение

*3. **П. В. Чулков.*** Арифметические задачи

*2. **В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина.*** Графы

*1. **Л. Э. Медников.*** Чётность

ISBN 978-5-4439-1583-8