

Biblioteca profesorului de matematică

* 38 *

Culegere de probleme de matematică

Mihai COCUZ



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

**CULEGERE
DE PROBLEME
DE MATEMATICĂ**

COLECTIVUL DE CONDUCERE AL COLECȚIEI

Acad. CAIUS IACOB, Președintele Secției de științe
matematice a Academiei Republicii
Socialiste România

Acad. NICOLAE TEODORESCU, Președintele Societății
de matematică din Republica Socialistă
România

Conf. VALENTIN BOJU, Universitatea din Craiova

Prof. RADU MIRON, Universitatea „Al. I. Cuza” Iași,
coordonator

Prof. DAN PAPUC, Universitatea din Timișoara

Prof. IOAN PURDEA, Universitatea „Babeș-Bolyai”
Cluj-Napoca

Prof. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ, Institutul politehnic
București

ION SUCIU, cercetător principal II, Secția matematică
INCREST



Biblioteca
profesorului de matematică

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

de Mihai COCUZ

Ediție îngrijită de: Petru CARAMAN



EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București, 1984

COLLECTION OF PROBLEMS OF MATHEMATICS
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
R 79717, Calca Victoriei 125, Bucureşti

PREFAȚĂ

Eminentul profesor Mihai Cocuz, autorul culegerii de față, a fost unul din studenții străluciți ai Facultăților de matematică din Iași și Cluj-Napoca. În ultimii ani a funcționat ca profesor de matematică la licee de reputație cum ar fi Liceul Internat din Iași și altele. Trăsăturile principale ale caracterului său au fost un patriotism autentic, mergînd pînă la sacrificiu și o cinste exemplară. Activitatea de profesor o înțelegea ca pe o operă de apostolat. La cercurile sale de matematică participau elevii de la liceul respectiv, cît și de la alte licee. Culegerea de față este formată din problemele care au făcut obiectul acestor cercuri. Ele sînt de nivel de olimpiadă („probleme ascuțite” cum obișnuia să le numească prof. M. Cocuz pe cele mai dificile) și proveneau din „Gazeta Matematică”, precum și din alte surse, pe care n-am reușit să le identificăm (deținem de la autor că enunțurile unora din ele au fost luate din reviste străine, multe însă fiind originale). Ele aparțin analizei, algebrei, trigonometriei și geometriei. În urma morții sale subite, tocmai cînd cariera sa didactică era la apogeu, prin fiica mea, Sânziana Caraman, care se poate mîndri că i-a fost elevă, am ajuns în posesia acestui material prețios și consultîndu-mă în prealabil cu colegii prof. dr. doc. Radu Miron, prof. dr. Viorel Barbu și prof. dr. Nicolae Gheorghiu, s-a ajuns la concluzia că munca de calitate a excepționalului profesor M. Cocuz trebuie să fie valorificată în beneficiul tuturor profesorilor de matematică din țară și ca atare a fost încredințată Editurii Academiei pentru colecția „Biblioteca profesorului de matematică”.

Soluțiile date de Mihai Cocuz sînt elegante și ingenioase, iar metodele de rezolvare originale. Unele probleme sînt urmate de generalizări. Mai menționăm și existența a numeroase figuri (majoritatea, cum era și natural, la capitolul de geometrie) și care au scopul să ajute la urmărirea rezolvării. Toate soluțiile au fost verificate de mine, iar la cîteva dintre ele, la care figura numai rezultatul (sau erau date numai indicații), le-am dat o rezolvare completă. În general, am căutat să păstrez pe cît posibil stilul concis al autorului, utilizînd pe o scară largă semnul implicației („ \Rightarrow ”). Am considerat că elevii, care vor folosi această culegere, sînt familiari cu materia expusă în manualele lor; totuși, mai multe paragrafe au fost precedate de o serie de considerații (cu un anumit caracter teoretic) mai rar întîlnite (aparținînd de asemenea prof. M. Cocuz) și prezentînd în mod unitar și elegant cîte un întreg ciclu de rezultate ca de exemplu referitoare la șirurile recurente, la rezolvarea grafică a ecuațiilor și sistemelor de ecuații, la o întregă clasă de inegalități (dintre care o bună parte sînt deduse din inegalitatea lui Jensen pentru funcții convexe sau pentru funcții concave), la principiul lui Dirichlet, altele referitoare la teorema lui Euler pentru poliedre, sau la dreapta lui Euler într-un tetraedru, sau încă la folosirea calculului vectorial pentru rezolvarea problemelor de geometrie în plan și spațiu, sau a numerelor complexe pentru cele de geometrie plană. Și aceste părți sînt prevăzute cu figuri ilustrative și cu explicarea semnificației unor notații. Introducerea acestor părți a fost făcută la sugestia colegului dr. Mircea Martin (referent din partea ICMAT-ului pentru această culegere), căruia îi mulțumesc și pe această cale pentru diferitele sugestii.

Referitor la aspectul tehnic al cărții, dorim să atragem atenția că enunțul la o serie de probleme este precedat de un număr variabil de asteriscuri, care (după cum am aflat de la autor) este proporțional cu gradul de dificultate al problemei respective. Împărțirea pe capitole și paragrafe îmi aparține și are uneori un anumit grad de arbitraritate, o aceeași problemă avînd aderențe cu mai multe capitole în același timp (așa sînt unele probleme de geometrie rezolvate trigonometric). Ar mai fi de menționat că, în general, problemele sînt independente unele de altele; în cele cîteva cazuri cînd rezolvarea unor probleme se bazează de exemplu pe o relație stabilită cu ocazia unei alte probleme, se specifică

acest lucru, iar faptul că problema ce conține relația folosită se găsește înainte sau după problema în care această relație se aplică, nu are nici o importanță, dată fiind independența lor.

Considerăm că această culegere de 563 de probleme trebuie să fie nelipsită din biblioteca oricărui profesor de matematică, cât și dintr-a elevilor care intenționează să urmeze o facultate de profil matematic. Ea se va dovedi deosebit de prețioasă pentru cercurile de matematică, precum și pentru pregătirea în vederea diferitelor faze la olimpiadele de matematică (multe probleme din culegere au fost date la olimpiadele din diferite țări), cât și a examenului de admitere în învățământul superior la facultățile de matematică, fizică sau facultățile institutului politehnic și, de asemenea, la examenele de treaptă.

PETRU CARAMAN

Institutul de matematică
Universitatea „Al. I. Cuza” Iași

Capitolul I.

ANALIZĂ

§. 1. NOTAȚII GENERALE

Vom nota mulțimea numerelor naturale $1, 2, \dots$ prin N^* , mulțimea întregilor nenegativi (≥ 0) prin N , adică $N = N^* \cup \{0\}$ și mulțimea întregilor prin Z . Semnul „ \Rightarrow ” se citește „implică”, iar semnul „ \Leftrightarrow ” înseamnă „este echivalent cu”. Semnul „ \in ” se citește „aparține lui”, iar cuantificatorul „ \forall ” se scrie în loc de „pentru orice”, așa de ex. „ $\forall n \in N$ ” este tot una cu „pentru orice n aparținând lui N ”. Șirurile vor fi notate prin $\{x_n\}$, iar prin $\overline{\text{marg}}\{x_n\}$ și $\underline{\text{marg}}\{x_n\}$, înțelegem marginea superioară, respectiv marginea inferioară a șirului $\{x_n\}$. R reprezintă axa reală.

§ 2. ȘIRURI

Înainte de a da problemele și exercițiile din acest paragraf, vom face câteva considerații teoretice legate de unele din aceste probleme.

Mulțimi mărginite și marginile unei mulțimi. Vom considera cazul cînd mulțimile aparțin axei reale, deși raționamentele rămîn valabile într-un cadru mai general.

Dacă A este o mulțime de pe axa reală, atunci un *majorant* pentru A este un număr M cu proprietatea că $x \leq M, \forall x \in A$, iar un *minorant* pentru A este un număr m cu proprietatea că $x \geq m, \forall x \in A$. Aceste două numere nu sînt unice. *Marginea inferioară* l a unei mulțimi A este cel mai mare minorant, adică $l = \underline{\text{marg}} A = \inf_{x \in A} x$, iar *marginea superioară* L a unei mulțimi A este cel mai mic majorant, adică $L = \overline{\text{marg}} A = \sup_{x \in A} x$. O mulțime,

care admite un majorant (minorant) se numește *majorată* (*minorată*). O mulțime majorată și minorată este *mărginită*.

Teoremă. *Orice mulțime nevidă majorată (minorată) are margine superioară (inferioară).*

Vom face demonstrația numai pentru cazul mulțimii majorate, deoarece același raționament rămâne valabil și-n cazul celei minorate.

Fie A o mulțime nevidă ($A \neq \emptyset$) majorată. Atunci există cel puțin un punct a , care să nu fie majorant și un majorant b . Evident, există cel puțin un punct $x \in A$, așa fel încît $a < x \leq b$, așa că $b - a = d > 0$. În continuare, să arătăm că există un punct $a_1 > a$, nemajorant și $b_1 \leq b$, majorant, așa fel încît $b_1 - a_1 = \frac{d}{2}$.

Într-adevăr, există un număr $a_1 > a$ și nemajorant, căci a fiind nemajorant, există cel puțin un punct $x_0 \in A$, $x_0 > a$ și n-avem decît să luăm $a_1 = \frac{a + x_0}{2}$. Dacă $a_1 + \frac{d}{2} \leq b$ și-i majorant, atunci

perechea căutată va fi $\left(a_1, a_1 + \frac{d}{2}\right)$. În cazul contrar, perechea căutată va fi $\left(b - \frac{d}{2}, b\right)$ căci $b - \frac{d}{2}$ nu va fi majorant, întrucît sau $a_1 + \frac{d}{2} > b$ și atunci $b - \frac{d}{2} < a_1$, care nu era majorant și deci

a fortiori $b - \frac{d}{2}$ nu va fi majorant, sau $a_1 + \frac{d}{2}$ nu era majorant, dar $+ \frac{d}{2} > b - \frac{d}{2} = \frac{a + b}{2} = a + \frac{d}{2}$ și deci nici $b - \frac{d}{2}$ nu va fi majorant. Și acum, aplicăm principiul inducției.

Să amintim în ce constă *principiul inducției*. Acesta afirmă că, fiind dat un șir $\{x_n\}$, dacă o proprietate este adevărată pentru x_1 și, presupunînd că ar fi adevărată pentru un x_n oarecare, ea rezultă adevărată pentru x_{n+1} , atunci ea este adevărată pentru toți termenii șirului $\{x_n\}$.

Așadar, presupunînd că am găsit o pereche (a_{n-1}, b_{n-1}) , unde a_{n-1} nu-i majorant, iar b_{n-1} este majorant, și $b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{d}{2^{n-1}}$, atunci, raționînd exact ca-n cazul perechii (a, b) , obținem o pereche (a_n, b_n) cu a_n nemajorant, b_n majorant și $b_n - a_n = \frac{d}{2^n}$; așa că, în

virtutea principiului inducției, vom obține două șiruri $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ cu următoarele proprietăți :

$$1^\circ a_1 \leq a_2 \leq \dots a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1;$$

$$2^\circ b_n - a_n = \frac{d}{2^n} (n = 1, 2, \dots);$$

3° nici un a_n nu-i majorant și fiecare b_n este un majorant.

Dar se știe că un șir de intervale închise conținute unele într-altele $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ și de lungime tinzând la 0 au singur punct comun L . (Mai general: „Un șir descendent de mulțimi compacte și de diametre tinzând la 0 au un singur punct comun”). Să arătăm că L e tocmai marginea superioară.

I. L este un majorant. Evident, $a \leq a_1 \leq \dots L \dots \leq b_1 \leq b$. Să presupunem, prin absurd, că ar exista $x_0 \in A$ așa fel încît $x_0 > L$.

Atunci, putem alege un n astfel ca $\frac{d}{2^n} < x_0 - L \Rightarrow b_n - a_n < x_0 - L \Rightarrow b_n < a_n - L + x_0 \Rightarrow b_n < x_0$ deoarece $a_n \leq L$ și deci $a_n - L \leq 0$. Dar $b_n < x_0$ este absurd căci b_n este majorant. Absurditatea obținută arată că ipoteza inițială că L n-ar fi un majorant este greșită, așa că în virtutea principiului terțului exclus (din cadrul logicii bivalente) rezultă că afirmația „ L este un majorant” este adevărată. Metoda de demonstrație folosită mai sus se cheamă *metoda prin reducere la absurd*.

II. L este cel mai mic majorant. Vom demonstra și această afirmație tot prin metoda reducerii la absurd. Vom presupune, așadar, prin absurd, c-ar exista un majorant $L' < L$. Dar atunci, putem alege un număr $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $\frac{d}{2^n} < L - L' \Rightarrow b_n - a_n < L - L' \Rightarrow -a_n < L - b_n - L' \Rightarrow -a_n < -L'$, căci $L - b_n \leq 0$. Dar atunci $L' < a_n$, ceea ce-i absurd, căci a_n nu-i majorant conform proprietății 3° de mai sus. Absurditatea obținută stabilește că L este cel mai mic majorant, adică marginea superioară a mulțimii A . Printr-un raționament asemănător se arată că A are o margine inferioară.

Șiruri recurente. Un șir $\{u_n\}$ este *recurent* dacă-i definit de u_0 și $u_n = f(u_{n-1})$, unde f este o funcție continuă pe un interval $[a, b]$. Atragem atenția că un astfel de șir este definit numai dacă toate numerele u_n aparțin intervalului $[a, b]$.

Teoremă. Fie $\{u_n\}$ un șir recurent.

1° Dacă funcția f este crescătoare, atunci șirul $\{u_n\}$ este monoton și limita sa rezultă din $u = f(u)$.

2° Dacă funcția f este descrescătoare, atunci $\{u_{2n}\}$ și $\{u_{2n+1}\}$ vor fi șiruri monotone și convergente.

Înainte de a trece la demonstrația teoremei, să amintim că o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare dacă $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ și este descrescătoare dacă $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

1° Pentru a demonstra primul punct, vom aplica metoda inducției. Fie $u_1 \geq u_0$. Presupunem $u_{n-1} \geq u_{n-2}$. Deoarece f este crescătoare, $u_{n-2} \leq u_{n-1} \Rightarrow u_{n-1} = f(u_{n-2}) \leq f(u_{n-1}) = u_n$, deci $u_{n-1} \leq u_n$ și prin urmare $\{u_n\}$ este monoton crescător (fig. 1). Cum $a \leq u_0 \leq u_n \leq b$, el este și mărginit superior, așa că este convergent. Deoarece f este continuă, atunci $f(u_n)$ are limita $f(u)$ egală cu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}$, deci limita rezultă din $u = f(u)$.

$n \rightarrow \infty$

Dacă $u_1 \leq u_0$, fie $u_{n-1} \leq u_{n-2}$; f fiind crescătoare $\Rightarrow f(u_{n-1}) \leq f(u_{n-2}) \Rightarrow u_n \leq u_{n-1}$, deci șirul este monoton descrescător (fig. 2). Cum este și mărginit, el este convergent, prin urmare $f(u_n) \rightarrow f(u)$, $u_{n+1} \rightarrow u = f(u)$.

2° Din faptul că f este descrescătoare, rezultă că $(f \circ f)(x) = f[f(x)]$ este crescătoare. Într-adevăr, $x' \leq x \Rightarrow y' = f(x') \geq f(x) = y \Rightarrow f[y] = f[f(x')] \leq f[f(x)] \Rightarrow (f \circ f)(x') \leq (f \circ f)(x)$. Și acum, rezulta-

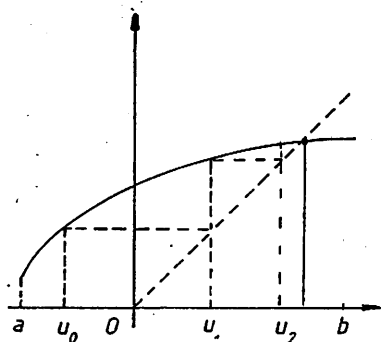


Fig. 1.

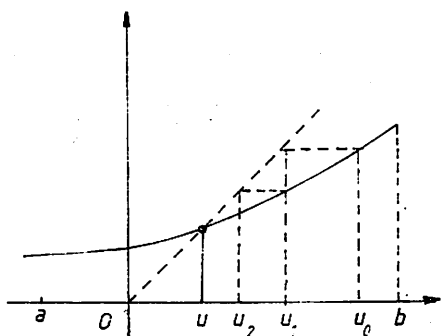


Fig. 2.

tul de la punctul precedent se aplică funcției $f \circ f$. Notind $u'_0 = u_0$, $u'_n = (f \circ f)(u'_{n-1}) = u_{2n}$, $u''_0 = u_0$, $u''_n = (f \circ f)(u''_{n-1}) = u_{2n+1}$ și, raționind prin inducție (ca la cazul 1°), deducem că ambele șiruri sînt monotone și mărginite, deci converg. Dacă unul crește, celălalt descreește: $u_{2n} > u_{2n-2} \Rightarrow u_{2n+1} = f(u_{2n}) \leq f(u_{2n-2}) = u_{2n-1}$ (fig. 3). Ca să fie convergent, șirul $\{u_n\}$, trebuie să avem egalitatea limitelor u' și u'' .

Aplicații. A. $u_0 = 0, u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2}$.

$u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2} \in (0, 1), f(u) = \frac{u + 1}{u + 2} = 1 - \frac{1}{u + 2} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} > u_0 \Rightarrow$ șirul este monoton crescător și converge la valoarea u dată de ecuația $u^2 + u - 1 = 0$ (fig. 4).

B. $v_0 = 0, v_n = \cos v_{n-1}$.

$v_0 = 0, v_n = \cos v_{n-1} \Rightarrow 0 \leq v_n \leq 1$ (fig. 5), $\begin{cases} v' = \cos v'' \\ v'' = \cos v' \end{cases} \Rightarrow v'' - v' = \cos v' - \cos v''; v'' - v'$ este imposibil, căci dacă $v'' - v' \neq 0$, atunci, $|\cos v' - \cos v''| < |v' - v''|$, după cum rezultă din $|\cos v' - \cos v''| = \left| 2 \sin \frac{v' + v''}{2} \sin \frac{v'' - v'}{2} \right| \leq 2 \frac{|v'' - v'|}{2} = |v'' - v'|$ și deci $|v'' - v'| = |\cos v' - \cos v''| < |v' - v''|$, ceea ce-i absurd. Așadar $v' = v'' = v$ așa că șirul $\{v_n\}$ converge la valoarea v dată de ecuația $v = \cos v$.

C. $w_0 = \frac{1}{2}, w_n = (1 - w_{n-1})^2$.

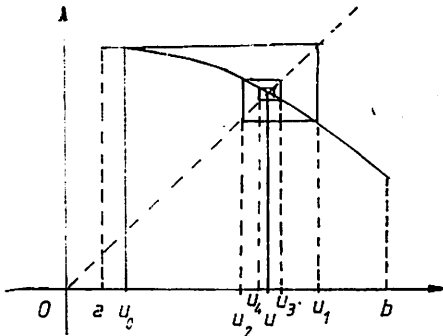


Fig. 3.

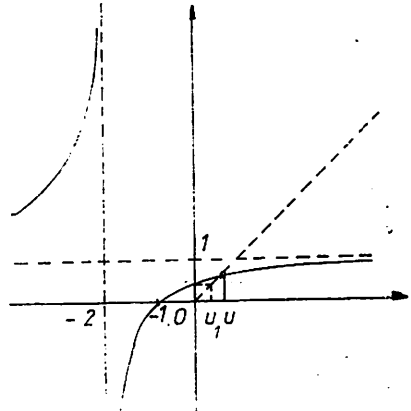


Fig. 4. →

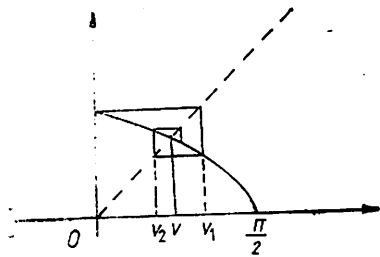


Fig. 5.

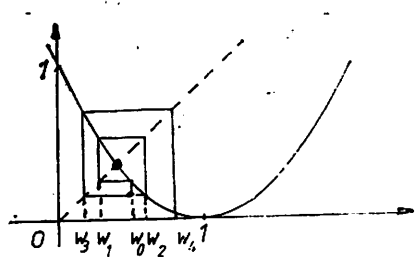


Fig. 6.

Funcția f este de forma $f(x) = (1 - x)^2$. Constatăm că $w_2 = \frac{9}{16}$ și deducem că

w_{2n} crește și $\frac{9}{16} < w' \leq 1$, unde cu „prim” am notat termenii de indice par (fig. 6).

De asemenea, $w_1 = \frac{1}{4}$, $w_3 = \frac{49}{256}$ și deducem că w''_{2n+1} descrește și $0 \leq w'' < \frac{1}{2}$, unde prin „secund”, am notat termenii de indice impar. Așadar, $w' \neq w''$ și deci șirul $\{w_n\}$ nu converge. Pe de altă parte,

$$\begin{cases} w' = (1 - w'')^2 \Rightarrow w' - w'' = (1 - w'' - 1 + w')(2 - w' - w'') \Rightarrow w' - w'' = \\ = (w' - w'')(2 - w' - w'') \Rightarrow (w' - w'')(w' + w'' - 1) = 0. \end{cases}$$

Cum $w' \neq w''$, rezultă $w' + w'' = 1$. De aici, înlocuind $w'' = 1 - w'$ în relația $w' = (1 - w'')^2 \Rightarrow w' = (1 - 1 + w')^2 \Rightarrow w' = w'^2 \Rightarrow w'(1 - w') = 0$, cum însă $\frac{9}{16} < w' \leq 1$ și deci nu putem avea $w' = 0$, rezultă $w' = 1$, iar $w' + w'' = 1 \Rightarrow w'' = 0$.

Teorema lui Stolz. În vederea stabilirii teoremei lui Stolz, să demonstrăm mai întâi următoarea

Lemă. $A < \frac{a_i}{b_i} < B, b_i > 0 (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow A < \frac{\sum_i a_i}{\sum_i b_i} < B.$

Într-adevăr, $A < \frac{a_i}{b_i} < B (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow Ab_i < a_i < Bb_i (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow A \sum_i b_i < \sum_i a_i < B \sum_i b_i \Rightarrow A < \frac{\sum_i a_i}{\sum_i b_i} < B.$

Teorema lui Stolz. Dacă $y_n \rightarrow +\infty$ și $y_{n+1} > y_n$ cel puțin începînd cu un n suficient de mare, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$ dacă limita din dreapta există (finită sau infinită).

Să presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lambda$ este finit. În acest caz,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ există } N = N(\varepsilon) \text{ așa fel încît } \forall n \in N, \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall n > N, \text{ avem că}$$

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2},$$

.....

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde, în virtutea lemei precedente, $\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - \lambda &= \frac{x_n - \lambda y_n}{y_n} = \frac{x_n + x_N - x_N + \lambda y_N - \lambda y_n - \lambda y_n}{y_n} = \\ &= \frac{x_n - \lambda y_N}{y_n} + \frac{(x_n - x_N + \lambda y_N - \lambda y_n)(y_n - y_N)}{y_n(y_n - y_N)} = \\ &= \frac{x_n - \lambda y_N}{y_n} \left(1 - \frac{y_N}{y_n} \right) \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - \lambda \right), \end{aligned}$$

avem că $\left| \frac{x_n}{y_n} - \lambda \right| \leq \left| \frac{x_n - \lambda y_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - \lambda \right|$, unde $\frac{x_n - \lambda y_N}{y_n} \rightarrow 0$, așa că, $\forall n > N'$, avem că $\left| \frac{x_n - \lambda y_N}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ și deci, pentru $n > \max(N, N')$ avem că $\left| \frac{x_n}{y_n} - \lambda \right| < \varepsilon$ și deci $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \lambda$.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow$ pentru un n suficient de mare,

$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} \Rightarrow$ atunci cînd $y_n \rightarrow +\infty$, vom avea și $x_n \rightarrow +\infty$, șirul $\{x_n\}$ fiind crescător. Dar atunci, referindu-ne la șirul $\frac{y_n}{x_n}$, vom avea (în virtutea primei părți a demonstrației),

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, cu alte cuvinte și-n acest caz, relația lui Stolz este verificată.

Aplicații ale teoremei lui Stolz.

1° $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{n-1}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty$ pentru $a > 1$.

2° $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\log_a n - \log_a (n-1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \frac{n}{n-1} = \log_a 1 = 0$.

3° Dacă $a_n \rightarrow \lambda (\leq \infty)$, atunci și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lambda$. Într-adevăr, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$.

4° $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Într-adevăr, $\log \sqrt[n]{n} = \frac{1}{n} \log n$, care, în virtutea lui 2° are limita 0, de unde deducem că $\sqrt[n]{n}$ are limita 1.

5° $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6° $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

7° $x_n - x_{n-1} \rightarrow \lambda \Rightarrow \frac{x_n}{n} \rightarrow \lambda$.

Într-adevăr, fie, pentru $n \geq 2$, $d_n = x_n - x_{n-1}$, atunci, în virtutea teoremei lui Stolz, vom avea

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_1 + \dots + d_n}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_n - x_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \end{aligned}$$

8° $x_n \rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \rightarrow \lambda$.

Fie $p_n = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$. Atunci, $\log p_n = \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n}$.

Dar, $\log x_n \rightarrow \log \lambda$ și deci $\log p_n \rightarrow \log \lambda \Rightarrow p_n \rightarrow \lambda$.

$$9^\circ \frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \rightarrow \lambda.$$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \lambda &\Rightarrow \log x_{n+1} - \log x_n \rightarrow \log \lambda \Rightarrow \frac{\log x_n}{n} \rightarrow \log \lambda \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log \sqrt[n]{x_n} \rightarrow \log \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \rightarrow \lambda. \end{aligned}$$

Limite importante. I. $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{e^{x_n}}{x_n} \rightarrow +\infty.$

$$e^x \geq x \Rightarrow \frac{e^{x_n}}{x_n} = \frac{(e^{\frac{x_n}{2}})^2}{(x_n^{\frac{1}{2}})^2} = \left(\frac{e^{\frac{x_n}{2}}}{x_n^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \geq \left(\frac{\frac{x_n}{2}}{\sqrt{x_n}}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2 = \frac{1}{4} x_n \rightarrow \infty.$$

Dar, avind în vedere că pentru orice bază $a \geq 2$, avem că $a^x > x$, rezultă că vom avea, în general $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n}}{x_n} = +\infty.$

II. $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\log x_n}{x_n} \rightarrow 0.$

$$\begin{aligned} e^x \geq x \geq 1 &\Rightarrow x \geq \log x \Rightarrow \frac{\log x_n}{x_n} = \frac{\log(\sqrt{x_n})^2}{x_n} = \\ &= 2 \frac{\log \sqrt{x_n}}{x_n} \leq 2 \frac{\sqrt{x_n}}{x_n} = \frac{2}{\sqrt{x_n}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

III. $x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n e^{x_n} \rightarrow 0.$ Notind $x_n = -y_n$, obținem $x_n e^{x_n} = \frac{-y_n}{e^{y_n}} \rightarrow 0$, în virtutea cazului I.

IV. $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \log x_n \rightarrow 0.$ Se notează $y_n = \frac{1}{x_n}$ și se aplică II.

$$\begin{aligned} \text{V. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} &= 0, \quad \frac{\log x}{x^\alpha} = \frac{\log(x^{\frac{\alpha}{2}})^2}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\log x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} = \\ &= \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow 0. \quad \text{În particular, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log x_n}{x_n^\alpha} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{VI. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ pentru } \alpha > 0. \quad \frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{(e^{\frac{x}{2\alpha}})^{2\alpha}}{(x^{\frac{1}{2}})^{2\alpha}} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2\alpha}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^{2\alpha} \triangleright$$

$$> \left(\frac{x}{2\alpha} \right)^{2\alpha} = \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{2\alpha} \cdot x^\alpha \rightarrow +\infty. \text{ În particular, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x^n}}{x_n^\alpha} = +\infty.$$

$$\text{VII. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \text{ pentru } a > 0. \quad \frac{a^x}{x} = \frac{e^{x \log a}}{x} = \frac{e^{x \log a}}{x \log a} \cdot \log a \rightarrow +\infty, \text{ în virtutea cazului VI cu } \alpha = 1. \text{ În}$$

$$\text{particular } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x^n}}{x_n} = +\infty.$$

Inegalitatea mediilor prin inducție completă

$$\text{(I)} \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \text{ cu } a_k \geq 0 \text{ (} k = 1, \dots, n \text{)}.$$

Cazul $n = 1$ este evident. Și acum, să presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $n = k - 1$. Notăm $\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} = a$,

$x_1 = a_1 - a, \dots, x_n = a_n - a \Rightarrow x_1 + \dots + x_k = 0$. Dacă $a_1 = \dots = a_k \Rightarrow$ (I) (cu $n = k$) și avem egalitate. Dacă a_1, \dots, a_k nu sînt toate egale, atunci $a > 0$ și deci, printre x_1, \dots, x_k , se găsește cel puțin unul pozitiv și altul negativ, de ex. $x_1 > 0, x_2 < 0$. Atunci,

$$\text{(II)} \quad a_1 a_2 = (a + x_1)(a + x_2) = a^2 + a(x_1 + x_2) + x_1 x_2 < a(a + x_1 + x_2).$$

Conform supoziției (pentru $n = k - 1$),

$$\begin{aligned} \sqrt[k-1]{(a + x_1 + x_2) a_3 \dots a_k} &\leq \frac{(a + x_1 + x_2) + a_3 + \dots + a_k}{k - 1} = \\ &= \frac{a + x_1 + x_2 + (a + x_3) + \dots + (a + x_k)}{k - 1} = a \end{aligned}$$

sau

$$\text{(III)} \quad (a + x_1 + x_2) a_3 \dots a_k \leq a^{k-1}.$$

Din (II) și (III), obținem

$$a_1 \dots a_k < a(a + x_1 + x_2)a_3 \dots a_k \leq a \cdot a^{k-1} = a^k \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \leq a = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

și deci (I) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Inegalitatea lui Bernoulli. $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$, unde $\alpha > -1$ ($\alpha \neq 0$) și $n = 2, 3, \dots$

Aplicații ale inegalității lui Bernoulli

Consecința 1. $b > 0, b \neq 1 \Rightarrow \left(\frac{1 + nb}{n + 1}\right)^{n+1} > b^n.$

$$\left(\frac{1 + nb}{n + 1}\right)^{n+1} = \left(b + \frac{1 - b}{n + 1}\right)^{n+1} = b^{n+1} \left[1 + \frac{1 - b}{b(n + 1)}\right]^{n+1} > \\ > b^{n+1} \left[1 + \frac{(1 - b)(n + 1)}{b(n + 1)}\right] = b^{n+1} \left(1 + \frac{1 - b}{b}\right) = b^n.$$

Consecința 2. Șirurile $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ și $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ sînt crescătoare.

În virtutea consecinței precedente, $\left(\frac{1 + nb}{n + 1}\right)^{n+1} > b^n$ și notînd $b = 1 + \frac{1}{n}$, $\left(\frac{1 + n + 1}{n + 1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

De asemenea, notînd $b = 1 - \frac{1}{n}$, $\left(\frac{1 + n - 1}{n + 1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n + 1}\right)^{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$

Teoremă. Șirurile $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ și $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ au aceeași limită.

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \text{ crescător} \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \text{ descrescător}$$

(și cu termeni pozitivi) \Rightarrow converge la un număr, fie acesta e . Dar, pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{-n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} \cdot \frac{n}{n+1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = e. \end{aligned}$$

Consecință. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton crescător și convergent la $e \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$,
iar $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ monoton descrescător și convergent la $e \Rightarrow e <$
 $< \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Teoremă. $|r| < 1$, r rațional $\Rightarrow 1 + r \leq e^r \leq \frac{1}{1-r}$.

Notînd $r = \frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$, consecința precedentă \Rightarrow
 $\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{np}{q}} < e^{\frac{p}{q}} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{np}{q}}$. Punînd $n = 2q$, obținem $\left(1 + \frac{1}{2q}\right)^{2p} < e^{\frac{p}{q}} < \left(1 - \frac{1}{2q}\right)^{-2p}$. Dar, în virtutea inegalității lui Bernoulli, $1 + \frac{p}{q} < \left(1 + \frac{1}{2q}\right)^{2p} < e^{\frac{p}{q}}$ și deci $1+r \leq e^r$ cu $0 \leq r < 1$.

Tot din inegalitatea lui Bernoulli, deducem că $1 - \frac{p}{q} < \left(1 - \frac{1}{2q}\right)^{2p} < e^{-\frac{p}{q}}$, deci $1+r \leq e^r$ cu $|r| < 1$. De aici, rezultă că, pentru

$|r| < 1$, $e^{-r} \leq \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1-(-r)}$ și prin urmare (din simetria domeniului de definiție al lui r în raport cu 0), $e^r \leq \frac{1}{1-r}$.

Teoremă. Pe mulțimea numerelor raționale, funcția e^r este crescătoare: $r_1 < r_2 \Rightarrow 1 < 1+r_2-r_1 < e^{r_2-r_1} \Rightarrow e^{r_2} > e^{r_1}$.

Dezvoltarea în serie a exponențialei. Se știe că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Considerăm $x > 0$ și fie $S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Să arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = e^x$. Din formula binomului obținem

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + n \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k} + \dots + \left(\frac{x}{n}\right)^n = \\ &1 + x + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} x^2 + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} x^k + \\ &+ \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Avind în vedere că $\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1$, rezultă că

$$(IV) \quad T_n(x) < S_n(x).$$

și lăsind la o parte câțiva termeni din expresia lui $T_n(x)$, obținem că

$$\begin{aligned} T_n(x) &> 1 + x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x^2}{2!} + \dots + \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Pentru k constant și $n \rightarrow \infty$, rezultă că $e^x > S_k(x)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, adică șirul $S_k(x)$ este crescător și mărginit superior, și deci $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) =$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \leq e^x. \text{ Pe de altă parte însă, din}$$

inegalitatea (IV) (prin trecere la limită), deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \geq e^x$ și prin urmare

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

PROBLEME

* * *

1. Șirul $\{x_n\}$ este dat de $x_0 = 1$, $x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + 1}$. Să se arate că

$$x_n < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Soluție. Aplicăm principiul inducției complete. $n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} < 1$. Fie $x_k < \frac{1}{k}$; $x_{k+1} = 1 - \frac{1}{x_k + 1} < 1 - \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1}$, deci

$$x_{k+1} < \frac{1}{k+1}, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

* * * * *

2. Să se arate că dacă $x_0 = 5$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$, atunci $45 < x_{1000} < 45,4$ (Propusă de Iugoslavia).

Soluție. $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}$; $\{x_n\}$ fiind crescător $\Rightarrow x_n^2 + 2 <$
 $< x_{n+1}^2 < x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}$.

Dar $x_n^2 + 2 < x_{n+1}^2 \Rightarrow$

$$x_0^2 + 2 < x_1^2$$

$$x_1^2 + 2 < x_2^2$$

.....

$$\frac{x_{999}^2 + 2 < x_{1000}^2}{2 \cdot 1000 + x_0^2 < x_{1000}^2}$$

$$\Rightarrow x_{1000}^2 > 2025 \Rightarrow x_{1000} > 45.$$

De asemenea, $x_{n+1}^2 < x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_1^2} \Rightarrow x_1^2 < x_0^2 + 2 + \frac{1}{x_1^2}$

$$x_2^2 < x_1^2 + 2 + \frac{1}{x_1^2}$$

.....

$$\underline{x_{1000}^2 < x_{999}^2 + 2 + \frac{1}{x_1^2}}$$

$$x_{1000}^2 < x_0^2 + 2 \cdot 1000 + 1000 \cdot \frac{1}{x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1000} < 25 + 2 \cdot 1000 + 1000 \left(\frac{5}{26}\right)^2 = 2062 \cdot 14 \Leftrightarrow x_{1000} < 45,4 \cdot \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45 < x_{1000} < 45,4.$$

* * * * *

3. Se dă șirul $\{a_n\}$ astfel: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$. Să se arate că: 1° $a_{100} > 14, 2^\circ a_{100} < 18$. (A IX-a Olimpiadă Internațională de matematică — U.R.S.S. 1968).

Soluție. $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} > a_{n-1}^2 + 2 > a_{n-2}^2 + 2.2 > \dots > a_1^2 + 2(n-1)$. Deci $a_n^2 > 2n - 1 \Rightarrow a_n > \sqrt{2n-1} \Rightarrow a_{100} > \sqrt{199} > 14$. Pentru a doua inegalitate, demonstrăm analog: $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \leq a_{n-1}^2 + 3$ (termenii sînt supraunitari) $\Rightarrow a_n^2 \leq a_{n-1}^2 + 3 \leq a_{n-2}^2 + 3.2 \leq \dots \leq a_1^2 + 3(n-1) \leq 3n - 2 \Rightarrow a_n \leq \sqrt{3n-2} \Rightarrow a_{100} \leq \sqrt{298} < \sqrt{324} = 18$.

* * * * *

4. Să se arate că șirul $a_n = (2n)^{2^n} - 1$ nu conține puteri naturale cu exponentul mai mare ca 1.

Soluție. $a_n = [(2n)^n - 1][(2n)^n + 1]$. Numerele $(2n)^n - 1$ și $(2n)^n + 1$ sînt prime între ele ca fiind impare consecutive. Dacă $a_n = b^k$, $k \geq 2 \Rightarrow b$ nu poate să fie prim căci altminteri b^k nu s-ar descompune în produs de numere prime între ele. Deci $b_1 \cdot b_2 = b$ așa că

$$\begin{cases} (2n)^n + 1 = b_1^k, \\ (2n)^n - 1 = b_2^k \end{cases} \Rightarrow 2 = b_1^k - b_2^k \Rightarrow 2 = (b_1 - b_2)(b_1^{k-1} + b_1^{k-2}b_2 + \dots + b_2^{k-1}) \Rightarrow b_1 - b_2 = 2 \text{ și } b_1^{k-1} + b_1^{k-2}b_2 + \dots + b_2^{k-1} = 1, \text{ ceea ce este imposibil pentru } k \geq 1.$$

* * * * *

5. Numerele naturale x_1, x_2 sînt mai mici ca 10 000. Pornind de la acestea se construiește șirul $x_1, \dots, x_2, x_1, \dots$, unde $x_3 = |x_1 - x_2|$, $x_4 = \min(|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_1 - x_3|)$, $x_5 = \min(|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_1 - x_4|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_4|, |x_3 - x_4|)$ ș.a.m.d. (fiecare număr următor este cel mai mic dintre valorile absolute ale diferențelor termenilor precedenți). Să se arate că $x_{21} = 0$ (Cl. VIII-a, Olimpiadă U.R.S.S.).

Soluție. Punind x_1 și x_2 în ordine descrescătoare observăm că termenii șirului, începînd de la x_3 , vor descrește căci adăugarea de diferențe noi nu poate aduce decît micșorarea minimului. Mai mult, observăm că dacă am avea

$$x_k < x_{k+1} + x_{k+2} \Rightarrow x_{k+2} > x_k - x_{k+1} = |x_k - x_{k+1}|,$$

ceea ce este absurd, deci

$$x_k \geq x_{k+1} + x_{k+2}.$$

Să presupunem că am avea totuși

$$x_{21} \geq 1, x_{20} \geq 1, x_{19} \geq 2, x_{18} \geq 3, x_{17} \geq 5, x_{16} \geq 8, \dots$$

Ar rezulta că șirul $x_{21}, x_{20}, \dots, x_1$ e de forma 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 și deci $x_1 \geq x_2 + x_3 = 4181 + 6765 = 10946$, ceea ce este imposibil.

* * * * *

6. Se dau șirurile $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$:

$$x_0 = 1, x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$$

$$y_0 = 1, y_1 = 7, \quad y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1},$$

astfel încît primii șase termeni sînt:

$$\begin{cases} 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots \\ 1, 7, 17, 55, 161, 487, \dots \end{cases}$$

Să se demonstreze că în cele două șiruri nu există termeni egali în afară de x_0, x_1, y_0 . (S.U.A., 1973).

Soluție. Găsim, cu ajutorul ecuației caracteristice (a se vedea și discuția de la problema 20, în cazul unor rădăcini complexe), că $x_n = \frac{1}{3} [2^{n+1} + (-1)^n]$, $y_m = 2 \cdot 3^m - (-1)^m$, așa încît $x_{n+2} - x_n = \frac{1}{3} [2^{n+3} + (-1)^n - 2^{n+1} - (-1)^n] = \frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}(4 - 1) = 2^{n+1}$.

Pentru $n \geq 2$ avem că $x_{n+2} \equiv x_n \pmod{8}$ și prin urmare notînd cu $\hat{}$ clasele de resturi modul 8 cu privire la primul șir avem $\hat{1}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{5}, \hat{3}, \hat{5}, \dots$. De asemenea, avem $y_{m+2} - y_m = 2 \cdot 3^{m+2} - (-1)^m - 2 \cdot 3^m + (-1)^m = 2 \cdot 3^m \cdot 8$ și prin urmare pentru $m \geq 0$ avem că $y_{m+2} \equiv y_m \pmod{8}$ și prin urmare vom avea $\hat{1}, \hat{7}, \hat{1}, \hat{7}, \hat{1}, \hat{7}, \dots$. Cum șirurile sînt crescătoare, în același șir nu găsim termeni egali, dar nici în șiruri diferite în afară de x_0, x_1, y_0 .

* * * * *

7. Fie a_1, a_2, a_3, \dots , un șir de numere naturale oarecare astfel încât $a_k < a_{k+1} (k \geq 1)$. Să se arate că există o infinitate de termeni a_m ai acestui șir care se pot reprezenta sub forma $a_m \equiv x a_p + y a_q$, unde $x, y > 0$ — naturale și $p \neq q$ (a XVII-a Olimpiadă Internațională de matematică, Anglia, 7 puncte).

Soluție. Considerăm termenul $a_2 \geq 2$ (căci a_1 este cel puțin 1)

și mulțimea claselor de resturi modulo a_2 , adică $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{a_2 - 1}$. În cel puțin una din aceste două clase există o infinitate de termeni ai șirului nostru (în caz contrar șirul ar conține un număr finit de termeni) diferiți. Fie această clasă A_r și numerele sale $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_i}, \dots$, $k_1 \geq 1, k_1 \neq 2$. Acestea sînt tocmai numerele căutate y_m căci

$$\begin{cases} a_{k_i} = p_{k_i} a_2 + r \\ a_{k_1} = p_{k_1} a_2 + r \Rightarrow a_{k_i} - a_{k_1} = (p_{k_i} - p_{k_1}) a_2 \Rightarrow a_{k_i} = a_{k_1} + (p_{k_i} - p_{k_1}) a_2 \\ p_{k_i} > p_{k_1} \end{cases}$$

și prin urmare avem că $x = 1, y = p_{k_i} - p_{k_1} > 0$. Dacă am avea $a_1 = 1$, atunci luînd doi termeni oarecare a_m, a_n , am putea scrie

$$a_m = (a_m - a_n) \cdot 1 + a_n, \text{ adică } x = a_m - a_n > 0,$$

$$y = 1, \text{ adică } a_m = x a_1 + a_n.$$

8. Dacă șirul de numere reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface relația de recurență $a_{n+1} = \frac{(a_n + a_{n-1})(1 - a_n a_{n-1})}{(1 + a_n^2)(1 + a_{n-1}^2)}, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci șirul este mărginit (Gazeta Matematică 3, 1976, Problema nr. 16011).

Soluție. Fie $a_{n+1} = k$ și $a_{n-1} = x$; relația devine

$$k(1 + a_n^2)(1 + x^2) = (a_n + x)(1 - x a_n) \Rightarrow$$

$$k(1 + x^2) + k a_n^2(1 + x^2) = a_n - x a_n^2 + x - x^2 a_n \Rightarrow$$

$$a_n^2(k x^2 + x + k) + a_n(x^2 - 1) + k x^2 - x + k = 0.$$

Cum $\alpha_n \in \mathbb{R}$, avem $\Delta \geq 0$ și deci

$$(x^2 - 1)^2 - 4[k(x^2 + 1) + x][k(x^2 + 1) - x] \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 1)^2 - 4k^2(x^2 + 1)^2 + 4x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 - 4k^2x^4 - 8k^2x^2 - 4k^2 + 4x^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^4(1 - 4k^2) + 2x^2(1 - 4k^2) + 1 - 4k^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$(1 - 4k^2)(x^2 + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - 4k^2 \geq 0 \Rightarrow k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

* * * * *

9. Fiind date șirurile $L_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $K_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, să se afle un minorant pentru L_n și un majorant pentru K_n .

Soluție. $L_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k \text{ ori}} = \frac{k}{2},$

deci pentru $n = 2^k$, $L_n > \frac{k}{2}$. Fie $S_n = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \dots +$

$$+ \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}; \text{ dar}$$

$$\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)} \text{ așa că } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2^2} +$$

$$+ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{n^2} < 1.$$

* * * *

10. Se dă șirul $a_n = 6^{\frac{1}{2}} 7^{\frac{1}{2^2}} \dots n^{\frac{1}{n-1}}$. Să se determine N începînd de la care $a_n > \frac{48}{7}$. Să se cerceteze monotonia și să se demonstreze că $a_n < 7$.

Soluție. Cu ajutorul calculului logaritmic se vede că $a_9 < \frac{48}{7}$ și $a_{10} > \frac{48}{7}$, prin urmare $N = 9$.

Deoarece $a_{n+1} = a_n \cdot (n+1)^{\frac{1}{n-4}}$ și $\sqrt[n-4]{n+1} > 1$, rezultă că $a_{n+1} > a_n$, deci șirul este monoton crescător. Avem că

$$a_n = \sqrt{6\sqrt{7\sqrt{8\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}}$$

și

$$a_n < \sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{n+1}}} < \sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{1+n(n+2)}}}.$$

Dar după formula lui Ramamugian (care se va demonstra la exercițiul 166 de la §15, cap. II) avem că

$$7 = \sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + \dots + (n-1)\sqrt{1+n(n+2)}}}$$

și prin urmare $a_n < 7$ și cum pentru $n > 9$ avem că $a_n > \frac{48}{7}$ rezultă

că șirul este convergent și are limita cuprinsă între $6\frac{6}{7}$ și 7.

* * * *

11. Considerăm un șir crescător $\{U_n\}$ și un șir descrescător $\{V_n\}$ și în plus $U_n \leq V_n, \forall n$. Să se arate că U_n și V_n converg și că $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$. Dacă în afară de aceasta $V_n - U_n$ are limita zero, atunci ambele șiruri au aceeași limită. Să se aplice rezultatele șirurilor U_n și V_n definite de U_0, V_0 și formulele $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}, V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$.

Soluție. Din ipoteză rezultă că $U_0 \leq U_n \leq V_n \leq V_0$ și prin urmare U_n, V_n converg fiind monotone și mărginite. Avem de asemenea $U_n \leq U \leq V \leq V_n \Rightarrow 0 \leq V - U < V_n - U_n$ și deci $V - U = 0$ dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_n - U_n) = 0$.

În sfârșit,

$$V_n^2 - U_n^2 = \left(\frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} \right)^2 - U_{n-1} V_{n-1} = \left(\frac{U_{n-1} - V_{n-1}}{2} \right)^2 \geq 0.$$

Cum U_n și V_n sînt pozitive, $V_n^2 - U_n^2 \geq 0 \Rightarrow V_n \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \geq U_n \Rightarrow U_n$ -crescător, $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq V_n \Rightarrow V_n$ -des-crescător și în plus $U_n \leq V_n \Rightarrow U_n$ și V_n sînt convergente. Din $U_n \leq U_{n+1} \leq V_{n+1} \leq V_n$, deducem că $0 \leq V_{n+1} - U_{n+1} \leq V_{n+1} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2}$, de unde, prin inducție, deducem că $0 \leq V_n - U_n \leq \frac{V_0 - U_0}{2^n} \rightarrow 0$. Rezultă că U_n și V_n au aceeași limită care se numește *media aritmetico-geometrică* a numerelor U_0 și V_0 .

* * * *

12. Se definește șirul : $U_0 = 2, U_1 = \frac{5}{2}, U_{n+1} = U_n(U_n^2 - 2) - U_1, n \geq 1$. Să se arate că pentru $n \geq 1, [U_n] = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$, unde $[x]$ este cel mai mare întreg ce nu depășește pe x . (Olimpiadă Anglia, 7 puncte).

Soluție. $U_0 = 2 = 1 + 1 = 2^{\frac{2^0 - (-1)^0}{3}} + 2^{-\frac{2^0 - (-1)^0}{3}},$

$$U_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^1 - (-1)^1}{3}} + 2^{-\frac{2^1 - (-1)^1}{3}},$$

$$U_2 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2^{\frac{2^2 - (-1)^2}{3}} + 2^{-\frac{2^2 - (-1)^2}{3}},$$

$$U_3 = \frac{65}{8} = 8 + \frac{1}{8} = 2^{\frac{2^3 - (-1)^3}{3}} + 2^{-\frac{2^3 - (-1)^3}{3}};$$

deducem că $U_n = 2 \frac{2^n - (-1)^n}{3} + 2 \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ și aplicăm inducția spre a arăta valabilitatea formulei, de unde rezultă imediat afirmația.

* * * * *

13. Se dau șirurile $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ astfel: $1 < a_1 < b_1$, $a_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$, $b_n = \frac{b_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 1}$ ($n \geq 2$). Pentru care valori a_1 și b_1 ambele șiruri converg?

Soluție. Calculînd șirurile găsim că $a_1 = a_6$, $b_1 = b_6$, deci sînt șiruri periodice. Vor converge pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$, $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$ și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1$.

Fie $a_n = x$ și $b_n = y$; va trebui deci să avem: $x = \frac{y}{x}$,

$$y = \frac{y - 1}{x - 1} \text{ sau } x^2 = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Leftrightarrow x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ dar } x > 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ și } y = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

* * * * *

14. Să se arate că șirul $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}}$ este convergent.

Soluție. Avem că

$$\sqrt{n + \sqrt{n + 1}} > \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n - 1 + \sqrt{n + \sqrt{n + 1}}} > \sqrt{n - 1 + \sqrt{n}}$$

și găsim după n pași că

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n + \sqrt{n + 1}}}} > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}},$$

adică $a_{n+1} > a_n$ și prin urmare șirul este monoton crescător.

Ținând seama că $\sqrt{x} < \frac{1+x}{2}$ ($x > 0$) și $x \neq 1$), avem că

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} &< \frac{1+1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}}{2} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}} < 1 + \frac{1}{2} \frac{1+2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}{2} = \\ &= 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}} < \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{1+3 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{n}}}{2} = \\ &= \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{4 + \sqrt{5 + \dots + \sqrt{n}}} < \dots \leq \\ &< \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{i+1}{2^i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i}. \end{aligned}$$

Dar $\frac{i}{2^i} < \left(\frac{3}{4}\right)^i$ căci (prin inducție) $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ și

$$\begin{aligned} \frac{i}{2^i} < \left(\frac{3}{4}\right)^i &\Rightarrow i < \left(\frac{3}{2}\right)^i \Rightarrow i+1 < \left(\frac{3}{2}\right)^i + 1 = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{i+1} + 1 < \left(\frac{3}{2}\right)^{i+1} \end{aligned}$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} a_n &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} < 1 + 3 = 4, \end{aligned}$$

deci șirul este convergent.

*

15. Fie $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(b + a_n^2)$, $0 \leq b \leq 1$. Să se stabilească convergența și limita șirului.

Soluție. $a_2 = \frac{1}{2}b > 0$, $a_2 > a_1$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n^2 - a_{n-1}^2) \Rightarrow [a_n > a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} > a_n].$$

Și deci șirul $\{a_n\}$ este monoton crescător conform principiului inducției complete. Pe de altă parte,

$$a_1 < 1, a_k < 1 \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{2}(b + a_k^2) < \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

și deci șirul $\{a_n\}$ este mărginit de 1. Dar un șir monoton crescător și mărginit superior este convergent. Să notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. Atunci trecînd la limită în relația de recurență ce definește șirul, obținem :

$$x = \frac{1}{2}(b + x^2) \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1 - b}.$$

* * * *

16. Fie șirul $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \in (0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Să se arate că șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = b$, $x_n = \lambda_n a + (1 - \lambda_n)x_{n-1}$, $a < b$ este convergent.

b) Să se arate că dacă $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(Gazeta Matematică 9, 1976, Problema nr. 16082).

Soluție. Avem că $x_1 = \lambda_1 a + (1 - \lambda_1)x_0 = \lambda_1 a + (1 - \lambda_1)b \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 - a = \lambda_1 a - a + (1 - \lambda_1)b \Rightarrow x_1 - a = (1 - \lambda_1)(b - a) \geq 0$$

$\Rightarrow x_1 \geq a$. Din $0 < \lambda_n \leq 1$ rezultă că $0 < \frac{x_n - x_{n-1}}{a - x_{n-1}} \leq 1$. A doua

$$\text{inegalitate ne dă } \frac{x_n - x_{n-1}}{a - x_{n-1}} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x_n - a}{a - x_{n-1}} \leq 0 \Rightarrow \frac{a - x_n}{a - x_{n-1}} \geq 0.$$

Presupunînd că $a - x_{n-1} < 0$, adică $x_{n-1} > a$, rezultă că $a - x_n < 0 \Rightarrow x_n > a$ și cum $x_1 \geq a$, conform principiului inducției complete,

rezultă că $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > a$, deci șirul este mărginit inferior de numărul a . Din inegalitatea $\frac{x_n - x_{n-1}}{a - x_{n-1}} > 0$, cum $a - x_{n-1} < 0$ rezultă că $x_n - x_{n-1} < 0 \Rightarrow x_n < x_{n-1}$, adică șirul este și monoton descrescător și prin urmare convergent.

b) Din $x_n = \lambda_n a + (1 - \lambda_n)x_{n-1}$ rezultă că $x_n - a = \lambda_n a - a + (1 - \lambda_n)x_{n-1}$. Notînd $x_n - a = y_n$ rezultă că $y_n = a(\lambda_n - 1) + (1 - \lambda_n)x_{n-1}$ adică $y_n = (1 - \lambda_n)y_{n-1}$. Dacă șirul λ_n este crescător, mărginit fiind, este convergent la $\lambda_0 \in (0, 1]$. Trecînd la limită pentru $\lambda_0 \neq 1$, avem $y = (1 - \lambda_0)y \Rightarrow \lambda_0 y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ iar pentru $\lambda_0 = 1$ obținem $y = 0 \cdot y = 0$ și prin urmare de asemenea $x_n \rightarrow a$.

17. Să se calculeze limitele șirurilor cu termenii generali :

$$a) \quad a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \cos^2 \frac{k}{n} ; \quad b) \quad b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \sin^2 \frac{k}{n}$$

(Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16120).

Soluție. Considerăm $f(x) = e^x \cos^2 x$ și intervalul $[0, 1]$ cu diviziunea $x_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, \dots, n$). Avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x \cos^2 x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) (x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{x_k} \cos^2 \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} \cos^2 \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

Integrînd prin părți

$$\begin{aligned} \int_0^x e^x \cos^2 x \, dx &= \int_0^x \cos^2 x \, d(e^x) = e^x \cos^2 x - 1 + 2 \int_0^x e^x \sin x \cos x \, dx = \\ &= -1 + e^x \cos^2 x + \int_0^x \sin 2x \, d(e^x) = -1 + e^x \cos^2 x + e^x \sin 2x - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^x 2 \cos 2x e^x dx &= -1 + e^x \cos^2 x + e^x \sin 2x - 2 \int_0^x (2 \cos^2 x - 1) \times \\
&\times e^x dx = e^x (\cos^2 x + \sin 2x + 2) - 3 - 4 \int_0^x e^x \cos^2 x dx \Rightarrow 5 \int_0^x e^x \cos^2 x dx = \\
&= e^x (\cos^2 x + \sin 2x + 2) - 3
\end{aligned}$$

și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{5} [e^x (\cos^2 x + \sin 2x + 2) - 3]_{x=1} = \frac{1}{5} [e(\cos^2 1 + \sin 2 + 2) - 3].$$

Analog obținem :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \sin^2 x dx &= \int_0^1 (e^x - e^x \cos^2 x) dx = e - 1 - \int_0^1 e^x \cos^2 x dx = \\
&= e - 1 - \frac{1}{5} [e(\cos^2 1 + \sin 2 + 2) - 3] = -\frac{2}{5} - e(\cos^2 1 + \\
&\quad + \sin 2 - 4) \cdot \frac{1}{5};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x \sin^2 x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) (x_k - x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{k/n} \sin^2 \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{k/n} \sin^2 \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \\
&= -\frac{2}{5} - e(\cos^2 1 + \sin 2 + 1) \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

18. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1}}{a_n^2}$, unde $\{a_n\}$ este o progresie aritmetică (Gazeta Matematică 11, 1976, Problema nr. 16172).

Soluție.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)r][a_1 + kr] = na_1^2 + a_1 r \sum_{k=1}^n (2k-1) + \\ &+ r^2 \sum_{k=1}^n (k^2 - k) = na_1^2 + a_1 r \left[2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \right] + \\ &+ r^2 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right]; \\ a_n^3 &= [a_1 + (n-1)r]^3 = (n-1)^3 r^3 + \dots \end{aligned}$$

Limita va fi raportul coeficienților dominanți, adică $\frac{2r^2/6}{r^3} = \frac{1}{3r}$.

19. *Să se arate că :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Soluție : Pentru aflarea acestei limite ne vom folosi de identitatea lui Catalan :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} &= \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

care se obține din identitatea :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} &= \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

scăzând din ambii membri $-2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$. Deci problema se reduce la calcularea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

Soluția I. Prin integrare se obține un rezultat imediat: Considerăm funcția $f(x) = \frac{1}{1+x}$ continuă pe intervalul $[0,1]$. Fiind continuă pe $[0,1]$, f este și integrabilă și deci considerând diviziunile echidistante $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ cu puncte intermediare de forma $\xi_k = \frac{k}{n}$, vom avea

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k+1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln(1+x) = \ln 2,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Soluția II. Considerăm șirul $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$. Funcției $f(x) = \ln x$ îi aplicăm formula lui Lagrange pe intervalul

$[k, k + 1]$:

$$\ln(k + 1) - \ln k = \frac{1}{C}, C \in [k, k + 1] \Rightarrow \frac{1}{C} \in \left[\frac{1}{k + 1}, \frac{1}{k} \right] \Rightarrow$$

$$(1) \quad \frac{1}{k + 1} < \ln(k + 1) - \ln(k) < \frac{1}{k} \quad (n = 1, 2, \dots, n - 1) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 2 - \ln 1 < 1 \\ \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2} \\ \dots \dots \dots \\ \ln n - \ln(n - 1) < \frac{1}{n - 1} \\ \hline \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n - 1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Deci a_n este format din termeni pozitivi. Din inegalitatea (1) rezultă că $\ln \frac{n + 1}{n} > \frac{1}{n + 1}$ și prin urmare

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n + 1} - \ln(n + 1) - 1 - \\ & - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln n = \frac{1}{n + 1} - \ln \frac{n + 1}{n} = \frac{1}{n + 1} - \\ & - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

și deci șirul $\{a_n\}$ este descrescător mărginit inferior adică $\{a_n\}$ este convergent.

Fie $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$. Dar

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} -$$

$$- \ln 2n + \ln 2n - 1 - \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2n \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n + \ln 2n - \ln n \right) \right] = \\ &= C - C + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n}{n} = \ln 2. \end{aligned}$$

20. Dacă șirul $\{a_n\}$ verifică relația de recurență $a_{n+3} = \frac{1}{3}(a_{n+2} + a_{n+1} + a_n)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 3a_3)$.

(Olimpiada Internațională din 1968).

Înainte de a ne apuca de rezolvarea propriu-zisă a exercițiului, vom face câteva considerații generale referitoare la relațiile de recurență. Să presupunem așadar că un șir $\{u_n\}$ verifică de exemplu o relație de recurență de forma $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$. Atunci, acestei relații de recurență îi corespunde ecuația caracteristică $ax^2 + bx + c = 0$. Dacă are rădăcinile de forma $\rho(\cos x + i \sin x)$ și $\rho(\cos x - i \sin x)$. În baza relațiilor dintre rădăcini și coeficienți, vom avea $2\rho \cos x = -\frac{b}{a}$, $\rho^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \rho b = -2\rho^2 a \cos x =$

$= -2\frac{c}{a} a \cos x = -2c \cos x$. După cum se știe, expresia termenului general

va fi $u_n = A_1[\rho^n(\cos nx + i \sin nx)] + A_2[\rho^n(\cos nx - i \sin nx)] = \rho^n(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx)$, $C_1 = A_1 + A_2$, $C_2 = i(A_1 - A_2)$. Așadar, înlocuind pe u_n în relația de recurență și ținând seama de relațiile

dintre rădăcinile și coeficienții ecuației caracteristice, relația de recurență este verificată, după cum se vede :

$$\begin{aligned}
 & \rho^{n+2} a [C_1 \cos(n+2)x + C_2 \sin(n+2)x] + \rho^{n+1} b [C_1 \cos(n+1)x + \\
 & \quad + C_2 \sin(n+1)x] + \rho^n c [C_1 \cos nx + C_2 \sin nx] = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow c [C_1 \cos(n+2)x + C_2 \sin(n+2)x] - 2c \cos x [C_1 \cos(n+1)x + \\
 & \quad + C_2 \sin(n+1)x] + c [C_1 \cos nx + C_2 \sin nx] = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow C_1 [\cos(n+2)x - 2\cos x \cos(n+1)x + \cos nx] + \\
 & \quad + C_2 [\sin(n+2)x - 2\sin(n+1)x \cos x + \sin nx] = 0,
 \end{aligned}$$

care se vede că-i verificată.

Soluția exercițiului. În cazul relației de recurență din enunțul exercițiului, ecuația caracteristică ce-i corespunde este $3x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_{2,3} = -\frac{1}{3} \pm i \frac{\sqrt{2}}{3}$, sau sub formă trigonometrică : $x_{2,3} = \rho(\cos x \pm i \sin x)$, așa că $\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}, \rho \cos x = -\frac{1}{3}, \rho \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}, \cos 2x = 2\frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}, \cos 3x = 4\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + 3\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \sin 3x = 3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 4\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, așa că vom avea

$$(1) \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \\ \cos 2x = -\frac{1}{3}, \sin 2x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \\ \cos 3x = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \end{cases}$$

și deci $a_n = C_1 + \frac{1}{3^{\frac{n}{3}}}(C_2 \cos nx + C_3 \sin nx) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C_1$. Dar,

ținând seama de (1), rezultă

$$C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} C_2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} C_3 \right) = a_1, \quad C_1 - \frac{1}{3} C_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} C_3 = a_1,$$

$$C_1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} C_2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} C_3 \right) = a_2, \text{ sau } C_1 - \frac{1}{9} C_2 - \frac{2\sqrt{2}}{9} C_3 = a_2,$$

$$C_1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{5}{3\sqrt{3}} C_2 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} C_3 \right) = a_3, \quad C_1 + \frac{5}{27} C_2 + \frac{\sqrt{2}}{27} C_3 = a_3,$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2 + 3a_3), \text{ ceea ce dovedește afirmația.}$$

* * * * *

Soluția a II-a. Trebuie să ne convingem că șirul este convergent căci considerind de ex. șirul 1, 2, 1, 2, ... avem că $a_n + a_{n+1} = 3$, ceea ce nu ne permite să conchidem că $3 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n +$

$\neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$. (Aceasta pentru metoda de rezolvare, care urmează).

1° Considerăm termenii u_{3k-2} , u_{3k-1} , u_{3k} pe care-i notăm respectiv cu a_k , b_k , c_k , așa fel încît $a_k \leq b_k \leq c_k$, adică $a_k = \min(u_{3k-2}, u_{3k-1}, u_{3k})$ și $c_k = \max(u_{3k-2}, u_{3k-1}, u_{3k})$. Cum media aritmetică este cuprinsă între cel mai mic și cel mai mare termen, avem că $a_k \leq u_{3k+1} = \frac{1}{3}(u_{3k-2} + u_{3k-1} + u_{3k}) \leq c_k$ așa încît șirurile $\{a_k\}$ și $\{c_k\}$ sînt mărginite căci sînt numere cuprinse între a_1 și c_1 . Dar mai mult, se observă că și

$$a_k \leq u_{3k+2} = \frac{1}{3}(u_{3k-1} + u_{3k} + u_{3k+1}) \leq c_k,$$

$$a_k \leq u_{3k+3} = \frac{1}{3}(u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}) \leq c_k,$$

căci, de fiecare dată, se înlocuiește un termen din medie cu un altul cel puțin egal cu minimumul și cel mult egal cu maximum. Dar aunci, din inegalitățile precedente, deducem că $a_k \leq a_{k+1} \leq c_{k+1} \leq c_k$ și, în general, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq \dots \leq c_k \leq \dots \leq c_2 \leq c_1$, și deci $[a_1, c_1] \supset [a_2, c_2] \supset \dots \supset [a_k, c_k] \supset \dots$.

2°. Fie $r_k = c_k - a_k$. Să dovedim prin inducție matematică faptul că $r_k \leq \left(\frac{7}{27}\right)^{k-1} \cdot r_1$. Pentru $k = 1$ avem $r_1 \leq \left(\frac{7}{27}\right)^0 r_1$ ade-vărată.

Fie $r_m \leq \left(\frac{7}{27}\right)^{m-1} \cdot r_1$. Avem

$$\begin{cases} u_{3m+1} = \frac{1}{3} u_{3m-2} + \frac{1}{3} u_{3m-1} + \frac{1}{3} u_{3m} \\ u_{3m+2} = \frac{1}{9} u_{3m-2} + \frac{4}{9} u_{3m-1} + \frac{4}{9} u_{3m} \\ u_{3m+3} = \frac{4}{27} u_{3m-2} + \frac{7}{27} u_{3m-1} + \frac{16}{27} u_{3m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |u_{3m+3} - u_{3m+2}| &= \left| \frac{4}{27} (u_{3m} - u_{3m-1}) + \frac{1}{27} (u_{3m-2} - u_{3m-1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{4}{27} r_m + \frac{1}{27} r_m < \frac{7}{27} r_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_{3m+3} - u_{3m+1}| &= \left| -\frac{5}{27} u_{3m-2} - \frac{2}{27} u_{3m-1} + \frac{7}{27} u_{3m} \right| = \\ &= \left| \frac{5}{27} (u_{3m} - u_{3m-2}) + \frac{2}{27} (u_{3m} - u_{3m-1}) \right| \leq \frac{5}{27} r_m + \frac{2}{27} r_m = \frac{7}{27} r_m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_{3m+2} - u_{3m+1}| &= \left| -\frac{2}{9} u_{3m-2} + \frac{1}{9} u_{3m-1} + \frac{1}{9} u_{3m} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{9} (u_{3m} - u_{3m-2}) + \frac{1}{9} (u_{3m-1} - u_{3m-2}) \right| \leq \frac{1}{9} r_m + \\ &+ \frac{1}{9} r_m \leq \frac{2}{9} r_m < \frac{7}{27} r_m. \end{aligned}$$

Vom avea deci $r_{m+1} = c_{m+1} - a_{m+1} \leq \frac{7}{27} r_m \leq \left(\frac{7}{27}\right)^m r_1$. Deoarece $r_k \rightarrow 0$ rezultă conform „teoremei cleștelui” că șirurile $\{a_n\}$ și $\{c_n\}$ sînt convergente la aceeași limită, prin urmare șirul u_n este convergent.

3° Din $3u_{n+3} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$ adunînd ambilor membri $u_{n+1} + 2u_{n+2}$ găsim că :

$$u_{n+1} + 2u_{n+2} + 3u_{n+3} = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2}$$

și analog

$$\begin{cases} u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2} = u_{n-1} + 2u_n + 3u_{n+1} \\ \dots \\ u_2 + 2u_3 + 3u_4 = u_1 + 2u_2 + 3u_3 \end{cases}$$

și prin urmare,

$$u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 \text{ și prin urmare}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 6 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \\ &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 \text{ și prin urmare } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{6} (u_1 + 2u_2 + 3u_3). \end{aligned}$$

21. Dacă șirul $\{u_n\}$ verifică relația de recurență $u_{n+p} = \frac{1}{p} (u_n + \dots + u_{n+p-1})$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{1 + \dots + p} (u_1 + 2u_2 + \dots + pu_p)$.

Această problemă reprezintă o generalizare a celei precedente și o vom rezolva prin metoda de la soluția a doua.

1° Notăm cu $m_k = \min (u_{pk-p+1}, u_{pk-p+2}, \dots, u_{pk-1}, u_{pk})$, $M_k = \max (u_{pk-p+1}, u_{pk-p+2}, \dots, u_{pk-1}, u_{pk})$ și observăm că șirurile $\{m_k\}$, $\{M_k\}$ sînt mărginite fiind cuprinse între m_1 și M_1 .

2° Fie $r_k = M_k - m_k$. Să dovedim, prin inducție, inegalitatea $r_k \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1} r_1$. Pentru $k=1$, ea este evident satisfăcută căci $r_1 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^0 r_1$. Și acum, să presupunem că $r_k \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1} r_1$ ($k=1, \dots, m$) și să arătăm că, în acest caz, vom avea și $r_{m+1} \leq$

$\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^m r_1$. În virtutea relației de recurență, vom avea

$$(1) \quad u_{mp+1} = \frac{1}{p} (u_{mp-p+1} + u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp-1} + u_{mp}),$$

$$u_{mp+2} = \frac{1}{p} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp} + u_{mp+1}) = \frac{1}{p} u_{mp+1} + \frac{1}{p} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) \Rightarrow$$

$$(2) \quad u_{mp+2} = \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+1} + \dots + u_{mp}) + \frac{1}{p} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}),$$

$$u_{mp+3} = \frac{1}{p} (u_{mp-p+3} + \dots + u_{mp} + u_{mp+1} + u_{mp+2}) =$$

$$= \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\right) (u_{mp-p+1} + \dots + u_{mp}) +$$

$$+ \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) + \Rightarrow$$

$$+ \frac{1}{p} (u_{mp-p+3} + \dots + u_{mp})$$

$$u_{mp+3} = \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1\right) (u_{mp-p+1} + \dots + u_{mp}) +$$

$$+ \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) +$$

$$+ \frac{1}{p} (u_{mp-p+3} + \dots + u_{mp}),$$

Am văzut că această relație are loc pentru $k = 1, 2, 3, 4$, atunci, presupunind că are loc pentru $m = 1, 2, 3, 4, \dots, k$, să arătăm că ea va avea loc și pentru $m = k + 1$. Dar, în virtutea relațiilor de recurență și, ținând seama că de ex. $1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$,

vom avea

$$\begin{aligned}
 u_{mp+k+1} &= \frac{1}{p} (u_{mp-p+k+1} + \dots + u_{mp} + u_{mp+1} + \dots + u_{mp+k}) \Rightarrow \\
 u_{mp+k+1} &= \left\{ \frac{1}{p^3} \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-2} + \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} + \dots + 1 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{p^2} \{ (u_{mp-p+1} + \dots + u_{mp}) + \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{p^3} \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} + \dots + 1 \right] + \frac{1}{p^2} \} (u_{mp-p+k-2} + \dots + u_{mp}) + \right. \right. \\
 &\quad \dots \dots \dots \Rightarrow \\
 &\quad \left. \left[\frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} \right] (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) + \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} \right) (u_{mp-p+k-1} + \dots + u_{mp}) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+k} + \dots + u_{mp}) + \right. \\
 &\quad \left. \dots \frac{1}{p} (u_{mp-p+k+1} + \dots + u_{mp}) \right. \\
 u_{mp+k+1} &= \left[\frac{1}{p^3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-1} - 1}{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p^2} \right] (u_{mp-p+1} + \dots + u_{mp}) + \\
 &\quad \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{p^3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{p} + 1\right)^{k-2} - 1}{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p^2} \right] (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) +$$

..... ⇒

$$\left[\frac{1}{p^3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{p} + 1\right)^{2-1}}{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p^2} \right] (u_{mp-p+k-2} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1\right) (u_{mp-p+k-1} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p^2} (u_{mp-p+k} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p} (u_{mp-p+k+1} + \dots + u_{mp})$$

$$u_{mp+k+1} = \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1\right)^{k-1} (u_{mp-p+1} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1\right)^{k-2} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1\right)^2 (u_{mp-p+k-2} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1\right) (u_{mp-p+k-1} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p^2} (u_{mp-p+k} + \dots + u_{mp}) +$$

$$\frac{1}{p} (u_{mp-p+k+1} + \dots + u_{mp})$$

și cu aceasta, expresia (3) a lui $u_{m p+k}$ ($k = 1, \dots, p$) este demonstrată. În continuare, să arătăm că $|u_{m p+k} - u_{m p+k-1}| < \frac{p-1}{p} r_m, \forall k, k \in [1, p]$

Vom începe prin a stabili că $|u_{m p+k+1} - u_{m p+k}| < \frac{1}{p} r_m \forall k \in [1, p-1]$.

Vom recurge și-n acest caz la metoda inducției matematice. Să verificăm în primul rînd că

$$|u_{m p+2} - u_{m p+1}| < \frac{1}{p} r_m.$$

Într-adevăr, din (1) și (2), rezultă că

$$\begin{aligned} |u_{m p+2} - u_{m p+1}| &= \left| \frac{1}{p^2} (u_{m p-p+1} + \dots + u_{m p}) - \frac{1}{p} u_{m p-p+1} \right| = \\ &= \frac{1}{p^2} |u_{m p-p+1} + \dots + u_{m p} - p u_{m p-p+1}| \leq \frac{1}{p^2} (|u_{m p-p+2} - u_{m p-p+1}| + \dots + \\ &+ \dots + |u_{m p} - u_{m p-p+1}|) \leq \frac{p-1}{p^2} r_m < \frac{1}{p} r_m. \end{aligned}$$

Facem observația că numărul termenilor cu semnul „+” și avînd coeficientul $\frac{1}{p^2}$ este egal cu numărul termenilor cu „-” și cu același coeficient căci $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2}$. Și acum, să considerăm diferența $|u_{m p+k-1} - u_{m p+k}|$, unde $u_{m p+k-1}$ și $u_{m p+k}$ au expresii de forma (3).

$$\begin{aligned} |u_{m p+k} - u_{m p+k-1}| &= \left| \frac{1}{p^2} \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-2} - \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} \right] (u_{m p-p+1} + \dots \right. \\ &\dots + u_{m p}) + \frac{1}{p^2} \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} - \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-4} \right] (u_{m p-p+2} + \dots \\ &\dots + u_{m p}) + \dots + \frac{1}{p^3} (u_{m p-p+k-2} + \dots + u_{m p}) + \frac{1}{p^2} (u_{m p-p+k-1} + \dots \\ &\dots + u_{m p}) - \frac{1}{p} u_{m p-p+k} \Big| = \left| \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} (u_{m p-p+1} + \dots + u_{m p}) \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-4} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) + \dots + \frac{1}{p^3} (u_{mp-p+k-2} + \dots \\ \dots + u_{mp}) + \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+k-1} + \dots + u_{mp}) - \frac{1}{p} u_{mp-p+k} \Big|.$$

Și acum, să presupunem că numărul termenilor cu „+” și coeficientul $\frac{1}{p^k}$ este egal cu cel cu „-” și același coeficient. Așadar, vom avea :

$$(4) \quad \frac{1}{p^2} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} p + \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-4} (p-1) + \dots + \\ + \frac{p-k+3}{p^3} + \frac{p-k+2}{p^2} = \frac{p^{k-1}}{p^k} \left(= \frac{1}{p} \right)$$

Și să arătăm că, în cazul diferenței $|u_{mp+k+1} - u_{mp+k}|$, numărul termenilor cu „+” și coeficientul $\frac{1}{p^{k+1}}$ este p^k . Într-adevăr, ținând seama că u_{mp+k+1} și u_{mp+k} au expresii de forma (3), vom avea

$$|u_{mp+k+1} - u_{mp+k}| = \left| \frac{1}{p^2} \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-1} - \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-2} \right] (u_{mp-p+1} + \dots \\ \dots + u_{mp}) + \frac{1}{p^2} \left[\left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-2} - \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} \right] (u_{mp-p+2} + \dots \\ \dots + u_{mp}) + \dots + \frac{1}{p^3} (u_{mp-p+k-1} + \dots + u_{mp}) + \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+k} + \dots \\ \dots + u_{mp}) - \frac{1}{p} u_{mp-p+k+1} \right| = \left| \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-2} (u_{mp-p+1} + \dots \\ \dots + u_{mp}) + \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} (u_{mp-p+2} + \dots + u_{mp}) + \dots \\ + \frac{1}{p^3} (u_{mp-p+k-1} + \dots + u_{mp}) + \frac{1}{p^2} (u_{mp-p+k} + \dots + u_{mp}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{p} u_{mp-p+k+1} \right|,$$

aşa că, ținând seama de (4), numărul termenilor cu „+” și coeficientul $\frac{1}{p^{k+1}}$ va fi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-2} p + \\ & + \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} (p-1) + \dots + \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) (p-k+3) + \\ & + \frac{p-k+2}{p^3} + \frac{p-k+1}{p^2} = \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \left[\frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-3} p + \right. \\ & + \left. \frac{1}{p^3} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^{k-4} (p-1) + \dots + \frac{p-k+3}{p^3} \right] + \frac{p-k+2}{p^2} + \\ & + \frac{p-k+1}{p^2} = \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \left(\frac{1}{p} - \frac{p-k+2}{p^2} \right) + \frac{p-k+2}{p^3} + \\ & + \frac{p-k+1}{p^2} = \frac{1}{p} = \frac{p^k}{p^{k+1}}. \end{aligned}$$

Așadar, în virtutea principiului inducției matematice, pentru orice k ($2 \leq k \leq p$), numărul termenilor cu „+” și coeficientul $\frac{1}{p^k}$ care intervin în expresia lui $|u_{mp+k} - u_{mp+k-1}|$ va fi p^{k-1} . Prin urmare, vom avea

$$|u_{mp+k} - u_{mp+k-1}| \leq \frac{p^{k-1}}{p^k} r_m = \frac{1}{p} r_m (k = 2, \dots, p).$$

De aici, deducem că pentru orice pereche (k, n) , unde $1 \leq k < n \leq p$, și care deci se poate scrie de forma $(k, k+q)$, vom avea

$$\begin{aligned} & |u_{mp+k+q} - u_{mp+k}| \leq |u_{mp+k+q} - u_{mp+k+q-1}| + \dots + |u_{mp+k+1} - u_{mp+k}| \leq \\ & \leq \frac{q}{p} r_m \leq \frac{p-1}{p} r_m \Rightarrow r_{m+1} \leq \frac{p-1}{p} r_m. \end{aligned}$$

Cum însă, în virtutea principiului inducției, presupusesem că $r_m \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^{m-1} r_1$, rezultă că $r_{m+1} \leq \left(\frac{p-1}{p} \right)^m r_1$ și deci relația

$r_k \leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{k-1} r_1$ are loc pentru orice $k = 1, 2, \dots \Rightarrow r_k \rightarrow 0$
 pentru $k \rightarrow \infty$.

În continuare, observăm că

$$m_k \leq u_{kp+1} = \frac{1}{p} (u_{kp-p+1} + \dots + u_{kp}) \leq M_k \Rightarrow$$

$$m_k \leq u_{kp+q} = \frac{1}{p} (u_{kp-p+q} + \dots + u_{kp+q-1}) \leq M_k \quad (q = 2, \dots, p),$$

căci de fiecare dată se înlocuiește un termen din medie cu un altul cel puțin egal cu minimumul și cel mult egal cu maximumul; dar atunci, $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq M_2 \leq M_1$ și deci $[m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \dots$ cu $r_k = M_k - m_k \rightarrow 0$, așa că intersecția $\bigcap_{k=1}^{\infty} [m_k, M_k]$ se va reduce la un punct (așa-numita „teoremă a cleștelui”), de unde conchidem că șirurile $\{m_k\}$ și $\{M_k\}$ converg la aceeași limită implicind și convergența șirului $\{u_k\}$ la această limită.

3° Din $pu_{k+p} = u_k + \dots + u_{k+p-1}$, adunind ambilor membrii $u_{k+1} + 2u_{k+2} + \dots + (p-1)u_{k+p-1}$, găsim că $u_{k+1} + \dots + pu_{k+p} = u_k + \dots + pu_{k+p-1}$ și, în mod analog,

$$u_k + \dots + pu_{k+p-1} = u_{k-1} + 2u_k + \dots + pu_{k+p-2},$$

$$u_{k-1} + 2u_k + \dots + pu_{k+p-2} = u_{k-2} + 2u_{k-1} + \dots + pu_{k+p-3},$$

.....

$$u_3 + 2u_4 + \dots + pu_{p+2} = u_2 + 2u_3 + \dots + pu_{p+1},$$

$$u_2 + 2u_3 + \dots + pu_{p+1} = u_1 + 2u_2 + \dots + pu_p,$$

$$u_{2k} + \dots + pu_{k+p-1} = u_1 + \dots + pu_p.$$

și prin urmare, șirul $\{u_n\}$ fiind convergent,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_k + \dots + pu_{k+p-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k + \dots + p \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k+p-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k + \dots$$

$$\dots + p \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = (1 + \dots + p) \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u_1 + \dots + pu_p \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} u_k =$$

$$= \frac{u_1 + \dots + pu_p}{1 + \dots + p}.$$

22. Să se afle limita șirului cu termenul general dat de relația

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{1 + bx_n}, \text{ cu } a, b \in Z, a > 0 \text{ (Gazeta Matematică 11, 1976,}$$

Problema nr. 16171).

Soluție. Discuție. Căutăm a determina termenul general al șirului

$$x_{n+1} = \frac{ax_n}{1 + bx_n} \Rightarrow bx_{n+1} = \frac{a(bx_n + 1) - a}{1 + bx_n} = a - \frac{a}{1 + bx_n} \Rightarrow$$

$$1 + bx_{n+1} = 1 + a - \frac{a}{1 + bx_n}; \quad a \frac{1 + bx_{n+1}}{a} = 1 + a - \frac{a}{1 + bx_n};$$

$$\frac{1 + bx_n}{a} = t_n \Rightarrow at_{n+1} = 1 + a - \frac{1}{t_n}; \quad a(t_{n+1} - 1) = \frac{t_n - 1}{t_n} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t_1 - 1) = \frac{t_0 - 1}{t_0}, \\ a(t_2 - 1) = \frac{t_1 - 1}{t_1}, \\ a(t_3 - 1) = \frac{t_2 - 1}{t_2}, \\ \dots \\ a(t_{n-1} - 1) = \frac{t_{n-2} - 1}{t_{n-2}}, \\ a(t_n - 1) = \frac{t_{n-1} - 1}{t_{n-1}} \end{array} \right. \Rightarrow a^n (t_n - 1) = \frac{t_0 - 1}{t_0 t_1 t_2 \dots t_{n-1}}.$$

$$z_{n-1} = a^{n-1} t_0 t_1 \dots t_{n-1},$$

$$a^n t_0 t_1 \dots t_n - a \cdot a^{n-1} t_0 t_1 \dots t_{n-1} = t_0 - 1 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_n - a z_{n-1} = t_0 - 1 \\ z_{n+1} - a z_n = t_0 - 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$z_{n+1} - z_n = a(z_n - z_{n-1}) \Rightarrow z_n - z_{n-1} = a^{n-1}(z_1 - z_0) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 - z_0 = (z_1 - z_0) \\ z_2 - z_1 = a(z_1 - z_0) \Rightarrow z_n = z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow \\ \dots \dots \dots \\ z_n - z_{n-1} = a^{n-1}(z_1 - z_0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^n t_0 t_1 \dots t_n = z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^n - 1}{a - 1} \\ a^{n-1} t_0 t_1 \dots t_{n-1} = z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$t_n = \frac{1}{a} \cdot \frac{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^n - 1}{a - 1}}{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}} \Rightarrow 1 + b x_n = \frac{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^n - 1}{a - 1}}{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b x_n = \frac{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^n - 1}{a - 1}}{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}} - 1 \Rightarrow b x_n = \frac{z_1 - z_0}{a - 1} \frac{(a^n - 1 - a^{n-1} + 1)}{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{a^{n-1}}{b} \cdot \frac{z_1 - z_0}{z_0 + (z_1 - z_0) \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}}$$

Dacă se dau x_0, a, b , atunci

$$x_1 = \frac{a x_0}{1 + b x_0},$$

$$t_0 = \frac{1 + b x_0}{a}, t_1 = \frac{1 + b x_1}{a} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a b x_0}{1 + b x_0} \right) = \frac{1 + b(1 + a) x_0}{a(1 + b x_0)},$$

$$z_0 = t_0 = \frac{1 + b x_0}{a}; \quad z_1 = a t_0 \cdot t_1 = a \frac{1 + b x_0}{a} \cdot \frac{(1 + b(1 + a) x_0)}{a(1 + b x_0)} \Rightarrow$$

$$z_1 = \frac{1 + b(1+a)x_0}{a} \Rightarrow z_1 - z_0 = \frac{1 + b(1+a)x_0}{a} - \frac{1 + bx_0}{a} =$$

$$= \frac{bx_0(1+a-1)}{a} = bx_0.$$

Rezultă că

$$x_n = \frac{a^{n-1}}{b} \cdot \frac{bx_0}{\frac{1 + bx_0}{a} + bx_0 \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}} = \frac{a^{n-1} x_0}{\frac{a-1 + abx_0 - bx_0 + a^n bx_0 - abx_0}{a(a-1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{a^n(a-1)x_0}{a^n bx_0 + a - (1 + bx_0)}.$$

Dacă $a = 1$, refăcînd calculele se obține $x_n = \frac{x_0}{1 + bn x_0}$, care evident că verifică relația.

Discuție. 1°. Dacă $a = 1$, atunci șirul este convergent și are limita zero, dacă $x_0 \neq 0$. Dacă $a = 1$, $x_0 = 0$, se obține șirul constant $x_n = 0$.

2°. Dacă $0 < a < 1$, avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3°. Dacă $a > 1$, avem că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a-1}{b}$, $x_0 \neq 0$.

Relație de recurență mai generală: $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + \beta}{\gamma x_n + \delta}$.

Punem $x_n = \frac{y_n}{z_n}$ și avem: $\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{\alpha y_n + \beta z_n}{\gamma y_n + \delta z_n}$.

Rezolvăm sistemul:

$$(1) \quad \begin{cases} y_{n+1} = \alpha y_n + \beta z_n, \\ z_{n+1} = \gamma y_n + \delta z_n, \end{cases}$$

adică $\beta z_{n+1} = y_{n+2} - \alpha y_{n+1}$, de unde

$$y_{n+2} - \alpha y_{n+1} = \beta \gamma y_n + \delta (y_{n+1} - \alpha y_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{n+2} - (\alpha + \delta) y_{n+1} - (\beta \gamma - \alpha \delta) y_n = 0$$

cu ecuația caracteristică $t^2 - (\alpha + \delta)t + \alpha \delta - \beta \gamma = 0$, care se rezolvă și se obține $y_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n$. Dacă $\beta = 0$, $\delta = 1$, ecuația caracteris-

tică va fi $t^2 - (\alpha + 1)t + \alpha = 0$ cu $t_1 = \alpha, t_2 = 1$ și deci $y_n = C_1\alpha^n + C_2$. Dacă $y_0 = x_0, z_0 = 1$, avem că

$$x_1 = \frac{y_1}{z_1} = \frac{\alpha y_0 + \beta z_0}{\gamma y_0 + \delta z_0} = \frac{\alpha y_0}{\gamma y_0 + z_0} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha y_0 = \alpha x_0, \\ z_1 = \gamma x_0 + 1 \end{cases}$$

$$\text{iar } \begin{cases} y_0 = C_1 + C_2 \\ y_1 = C_1\alpha + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ C_1\alpha + C_2 = \alpha x_0 \end{cases} \Rightarrow C_1(\alpha - 1) = x_0(\alpha - 1) \Rightarrow \alpha \neq 1,$$

$C_1 = x_0, C_2 = 0$ și prin urmare $y_n = x_0\alpha^n$. Ținând seama de (1),

$$\begin{cases} z_{n+1} = \gamma x_0 \alpha^n + z_n, \\ z_{n+2} = \gamma x_0 \alpha^{n+1} + z_{n+1} \end{cases} \Rightarrow z_{n+1} - z_n = \gamma x_0 \alpha^n \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z_1 - z_0 = \gamma x_0 \\ z_2 - z_1 = \gamma x_0 \alpha \\ \vdots \\ z_n - z_{n-1} = \gamma x_0 \alpha^{n-1} \end{cases} \Rightarrow z_n = z_0 + \gamma x_0 \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \Rightarrow$$

$$z_n = 1 + \gamma x_0 \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \text{ și prin urmare } x_n = \frac{\alpha^n x_0}{1 + \gamma x_0 \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{\alpha^n(\alpha - 1)x_0}{\gamma\alpha^n x_0 + \alpha - (1 + \gamma x_0)}$$

$$\text{Dacă } \alpha = 1 \text{ rezultă că } x_n = \frac{x_0}{1 + \gamma n x_0}.$$

$$\text{Exemple. 1. } x_n = \frac{x_{n-1}}{2x_{n-1} + 1} \Rightarrow x_n = \frac{x_0}{1 + 2x_0 n} \Rightarrow \frac{x_0}{1 + 2x_0 n} =$$

$$= \frac{x_0}{1 + 2x_0(n-1)} \Rightarrow \frac{x_0}{1 + 2nx_0} = \frac{x_0}{1 + 2x_0 n - 2x_0 + 2x_0} \text{ este}$$

$$= \frac{1 + 2 \frac{x_0}{1 + 2x_0(n-1)}}{1 + 2 \frac{x_0}{1 + 2x_0(n-1)}} \text{ ,}$$

adevărat.

2. $x_n = \frac{x_{n-1} + 1}{x_{n-1} + 3}$, $x_n = \frac{y_n}{z_n} \Rightarrow \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{y_n + z_n}{y_n + 3z_n} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = y_n + 3z_n \end{cases} \Rightarrow$
 $y_{n+2} - y_{n+1} = y_n + 3y_{n+1} - 3y_n \Rightarrow y_{n+2} - 4y_{n+1} + 2y_n = 0$, cu ecuația
 caracteristică $t^2 - 4t + 2 = 0$ și soluția generală $y_n = (2 + \sqrt{2})^n C_1 +$
 $\rightarrow (2 - \sqrt{2})^n C_2$, de unde pentru $n = 1, 2$, obținem

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ (2 + \sqrt{2})C_1 + (2 - \sqrt{2})C_2 = 1 + x_0 \end{cases} \Rightarrow C_1(2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}) =$$

$$= 1 + x_0 - 2x_0 + \sqrt{2}x_0 \Rightarrow C_1 = x_0 + \frac{1 - (\sqrt{2} + 1)x_0}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}x_0 + 1 - x_0}{2\sqrt{2}}.$$

Deducem în mod analog pentru C_2 .

$$2\sqrt{2}C_2 = -1 + (\sqrt{2} + 1)x_0 \Rightarrow C_2 = \frac{-1 + (\sqrt{2} + 1)x_0}{2\sqrt{2}},$$

$$C_1 = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)x_0}{2\sqrt{2}},$$

$$y_n = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)x_0}{2\sqrt{2}} (2 + \sqrt{2})^n + \frac{-1 + (\sqrt{2} + 1)x_0}{2\sqrt{2}} (2 - \sqrt{2})^n.$$

* * *

23. Se consideră șirul de numere reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin
 relația de recurență $a_{n+1}a_n + a_{n+1} = a_n - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$,
 unde $a_0 \in \{-1, 0, 1\}$. Să se stabilească dacă șirul are limită sau nu.
 Dacă $a_{1976} = 40$, care este șirul? (Gazeta Matematică 11, 1976,
 Problema nr. 16081).

Soluție. $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$, și notînd $a_n = \operatorname{tg} \varphi_n \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi_{n+1} =$
 $= \operatorname{tg} \left(\varphi_n - \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{\pi}{4}$, care este o progresie aritmetică
 și prin urmare $\varphi_n = \varphi_0 - \frac{\pi n}{4}$, adică $a_n = \operatorname{tg} \left(\varphi_0 - \frac{\pi n}{4} \right)$, astfel
 încît șirul va fi periodic cu perioada 4, termenii fiind $\operatorname{tg} \varphi_0, \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 - 1}{\operatorname{tg} \varphi_0 + 1},$
 $-\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0}, \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 + 1}{1 - \operatorname{tg} \varphi_0}, \operatorname{tg} \varphi_0, \dots$. Deci șirul nu are limită, iar $a_{1976} =$

$$= \operatorname{tg}(\varphi_0 - 494\pi) = \operatorname{tg} \varphi_0 = 40 \text{ și prin urmare șirul va fi } 40, \frac{39}{41}, \\ -\frac{1}{40}, -\frac{41}{39}, 40, \dots$$

24. Fie $\{a_n\}$ dat prin relația de recurență: $a_n = a_{n-1} + n$ cu $a_1 = 1$.

a) Să se calculeze $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

b) Să se arate că șirul cu termenul general $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ este convergent. (Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16112).

Soluție. $a_k = a_{k-1} + k$ și $a_1 = 1$, așa că vom avea:

$$a_2 = a_1 + 2,$$

$$a_3 = a_2 + 3,$$

.....

$$a_{k-1} = a_{k-2} + k - 1$$

$$\frac{a_k = a_{k-1} + k}{a_k = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}} \Rightarrow \frac{1}{a_k} = \frac{2}{k(k+1)} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \Leftrightarrow (k+1)A + kB = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k = -1 \Rightarrow -B = 2 \Rightarrow B = -2 \\ k = 0 \Rightarrow A = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a_k} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1} \right) \Rightarrow$$

$$k = 1: \quad \frac{2}{1} - \frac{2}{2}$$

$$k = 2: \quad \frac{2}{2} - \frac{2}{3}$$

$$k = 3: \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$$

.....

$$k = n - 1: \quad \frac{2}{n - 1} - \frac{2}{n}$$

$$k = n: \quad \frac{2}{n} - \frac{2}{n + 1}$$

$$S = 2 - \frac{2}{n + 1} = \frac{2n}{n + 1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{2n}{n + 1}.$$

$$b) \quad b_n = \frac{2n}{n + 1}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2n + 2}{n + 2} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{2n + 2}{n + 2} - \frac{2n}{n + 1} = \\ &= \frac{2}{(n + 1)(n + 2)} > 0 \Rightarrow b_{n+1} - b_n > 0 \Rightarrow b_{n+1} > b_n \Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mono-} \\ &\text{ton crescător. } \underline{\text{marg}} \quad b_n = b_1 = 1, \quad \overline{\text{marg}} \quad b_n = 2 \left(b_n = 2 - \frac{2}{n + 1} \right), \\ &(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mărginit. Deci } \{b_n\} \text{ este convergent, iar } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2. \end{aligned}$$

* * * * *

25. Fie $\{a_i\}$ progresie aritmetică cu rația $0 < d < 2a_1$. Să se arate că $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^k} < \frac{1}{(k-1)d \left(a_1 + \frac{d}{2} \right)^{k-1}}$.

Soluție. Considerăm diferența

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\left(a_i - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\left(a_i + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} = \frac{\left(a_i + \frac{d}{2}\right)^{k-1} - \left(a_i - \frac{d}{2}\right)^{k-1}}{\left(a_i^2 - \frac{d^2}{4}\right)^{k-1}} > \\
 & > \frac{2 \left[C_{k-1}^1 a_i^{k-2} \frac{d}{2} + C_{k-1}^3 a_i^{k-4} \left(\frac{d}{2}\right)^3 + \dots \right]}{a_i^{2k-2}} > \frac{2(k-1) a_i^{k-2} \cdot \frac{d}{2}}{a_i^{2k-2}} = \\
 & = \frac{d(k-1)}{a_i^k} \Rightarrow \frac{1}{a_i^k} < \frac{1}{d(k-1)} \left[\frac{1}{\left(a_i - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\left(a_i + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} \right] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^k} < \frac{1}{d(k-1)} \left[\frac{1}{\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\left(a_1 + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} + \frac{1}{\left(a_2 - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\left(a_2 + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} + \dots + \frac{1}{\left(a_{n-1} - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\left(a_{n-1} + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\left(a_n - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\left(a_n + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} \right] = \frac{1}{d(k-1)} \left[\frac{1}{\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)^{k-1}} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\left(a_n + \frac{d}{2}\right)^{k-1}} \right] < \frac{1}{(k-1)d \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1}} \cdot \\
 & \text{adică } \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^k} < \frac{1}{(k-1)d \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Cazuri particulare :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 2; \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^3} < \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

* * * * *
* * * * *

26. Cu numărul natural k se efectuează operațiile :

1° se descompune în factorii primi $k = p_1 p_2 \dots p_n$;

2° se calculează suma $p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1$. Cu numărul astfel obținut se efectuează aceleași operații ș.a.m.d.

Să se arate că șirul de numere astfel obținut este periodic.

Soluție : Dacă $a, b \geq 2 \Rightarrow a + b \leq ab$. În adevăr, $b \geq 2 \Rightarrow 2b \geq b + 2 \Rightarrow 2(b - 1) \geq b \Rightarrow \frac{b}{b - 1} \leq 2$. Dar $a \geq 2 \Rightarrow a \geq \frac{b}{b - 1} \Rightarrow ab - a \geq b \Rightarrow ab \geq a + b$.

$k = p_1 p_2 \dots p_n \Rightarrow f(k) = p_1 + p_2 + \dots + p_n + 1 \leq p_1 p_2 \dots p_n + 1 = k + 1$ deci $f(k) \leq k + 1$ (după o operație). Pe lângă aceasta dacă k este par, $k > 7$, $f(k) = 2 + p_2 + \dots + p_n + 1 = 3 + p_2 + \dots + p_n \leq 3 + p_2 \dots p_n = 3 + \frac{k}{2} = k - \left(\frac{k}{2} - 3\right) < k$,

ceea ce înseamnă că, după două operații pentru orice număr $k \geq 7$, este adevărată inegalitatea $f(f(k)) \leq k$, adică șirul considerat ia valori din $[1, k + 1]$, deci ia cel puțin de două ori aceeași valoare și din acest moment este periodic. Cum însă $f(6) = 2 + 3 + 1 = 6$, rezultă (făcînd calculele și pentru cazurile $k = 1, 2, 3, 4, 5$) că orice număr natural, după cel mult 5 operații devine periodic.

* * *

27. Să se arate că dacă o progresie geometrică formată din numere naturale diferite are mai mult de doi termeni, atunci suma ei nu este o putere a lui 3.

Soluție : $a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = 3^k \Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 3^l$. Cum $q \neq 3p$, putem avea

1°. $q = 3m + 1 \Rightarrow n : 3$ (adică n se divide cu 3) $\Rightarrow n = 3p \Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{3p-1} = (1 + q + q^2)(1 + q^3 + q^6 + \dots + q^{3p-3}) = 3^l \Rightarrow 1 + q + q^2 = 3^r \Rightarrow 1 + 3m + 1 + 9m^2 + 6m + 1 = 3^r \Rightarrow$

$3m^2 + 3m + 1 = 3^{r-1} \Rightarrow r = 1 \Rightarrow q = 1$: imposibil.

2°. $q = 3m - 1$; din $1 + q + \dots + q^{n-1} = 3^l \Rightarrow n - \text{par} \Rightarrow \Rightarrow n = 2p \Rightarrow (1 + q + q^2 + \dots + q^{2p-1}) = (1 + q)(1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2p-2}) = 3^l \Rightarrow 1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2p-2} = 3^r$ progresie geometrică cu rația $q^2 = 3m' + 1$ și $p = 3p'$, ceea ce este imposibil după cum rezultă raționind ca în cazul 1°.

* * * * *

28. Să se găsească cel mai mic termen întreg al unei progresii geometrice descrescătoare $\{a_n\}$ în care primii n termeni sînt numere naturale iar a_{n+1} nu este număr întreg.

Soluție: Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ progresia căutată. $q = \frac{a_2}{a_1} \in Q_+$, dar nu întreg și $q = \frac{r}{s}$ — ireductibilă. (Am notat cu Q_+ mulțimea numerelor raționale pozitive). Deoarece $a_n = a_1 \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \Rightarrow a_1 : s^{n-1}$, deci cel mai mic termen întreg al progresiei va fi $a_1 q^{n-1}$.

* * *

29. Fie $a \neq -1$, $x_1 = \frac{a-1}{a+1}$, $x_2 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$, $x_3 = \frac{x_2-1}{x_2+1}$, ... să se afle a , dacă $x_{1970} = 3$.

Soluție.

$$x_1 = \frac{a-1}{a+1}, \quad x_2 = \frac{\frac{a-1}{a+1} - 1}{\frac{a-1}{a+1} + 1} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}, \quad x_3 = \frac{-\frac{1}{a} - 1}{-\frac{1}{a} + 1} = \frac{-\frac{1+a}{a}}{\frac{-1+a}{a}} = \frac{-1-a}{-1+a} = \frac{1+a}{1-a},$$

$$x_4 = \frac{\frac{1+a}{1-a} - 1}{\frac{1+a}{1-a} + 1} = \frac{2a}{2} = a \text{ șirul este periodic cu perioada 4.}$$

$$1970 = 4 \cdot 492 + 2. \quad x_2 = 3 \Rightarrow -\frac{1}{a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

* * * * *

30. Se dau trei numere a, b, c și cu ele se formează numerele $a + b, b + c, c + a$ apoi din nou se formează alte trei numere în acelaș fel ș.a.m.d. Să se afle numerele formate a 427-a oară.

Soluție. Fie $s = a + b + c$,

$$1^\circ s - a, s - b, s - c,$$

$$2^\circ s + a, s + b, s + c,$$

$$3^\circ 3s - a, 3s - b, 3s - c,$$

$$4^\circ 5s + a, 5s + b, 5s + c,$$

$$5^\circ 11s - a, 11s - b, 11s - c,$$

.....

$$n^\circ a_n s + (-1)^n a, a_n s + (-1)^n b, a_n s + (-1)^n c,$$

$$(n+1)^\circ a_{n+1} s + (-1)^{n+1} a, a_{n+1} s + (-1)^{n+1} b, a_{n+1} s + (-1)^{n+1} c,$$

unde $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$ și deci

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + (-1)^{n-1} = 2a_{n-1} - (-1)^n = 2[2a_{n-2} + (-1)^{n-2}] - \\ &- (-1)^n = 2^2 a_{n-2} + 2(-1)^n - (-1)^n = 2^2 a_{n-2} - [(-1)2 + 1](-1)^n = \\ &= 2^3 a_{n-3} - [(-1)^2 2^2 + (-1)2 + 1](-1)^n = \\ &= \dots = 2^n a_0 - [(-1)^{n-1} 2^{n-1} + (-1)^{n-2} 2^{n-2} + \dots + 1](-1)^n, \end{aligned}$$

dar $a_0 = 0$ și $1 + \dots + (-1)^{n-1} 2^{n-1} = \frac{1 - (-1)^n 2^n}{1 + 2}$, așa că $a_n =$

$$= \frac{1 - (-1)^n 2^n}{3} (-1)^n = \frac{1}{3} [2^n - (-1)^n], \text{ și în particular } a_{427} =$$

$= \frac{1}{3} (2^{427} - 1)$, iar cele 3 numere obținute la a 427-a operație vor

$$\text{fi } \frac{1}{3} (2^{427} - 1)(a + b + c) - a, \frac{1}{3} (2^{427} - 1)(a + b + c) - b, \frac{1}{3} (2^{427} - 1)(a + b + c) - c.$$

§ 3. FUNCȚII

1. FUNCȚII INVERSABILE, SURJECTIVE

* * * * *

31. Care dintre funcțiile $f(x) = x^4 - ax^3 - 3$, $g(x) = x^5 - 2x^3 + ax$ poate fi inversabilă? Care poate fi aplicație surjectivă?

Soluție. Funcțiile date sînt continue. Ca să fie o funcție continuă inversabilă trebuie să fie și monotonă. Ca să fie monotonă trebuie ca derivata să păstreze semn constant. Or :

$f'(x) = 4x^3 - 3ax^2 = x^2(4x - 3a)$ are rădăcini reale pentru orice a și schimbă deci semnul.

$g'(x) = 5x^4 - 6x^2 + a$. Ca să nu aibă rădăcini trebuie ca $9 - 5a < 0 \Rightarrow a > \frac{9}{5}$ și prin urmare dacă $a \geq \frac{9}{5}$, $g'(x)$ și nu schimbă semnul, deci g este monotonă și prin urmare inversabilă.

Funcția $g(x)$ este nemărginită superior și inferior și prin urmare pentru $a \geq \frac{9}{5}$ reprezintă o aplicație a lui R pe R . Pentru $a < \frac{9}{5}$, $g'(x)$ are rădăcini simple și ca atare nu este inversabilă

*

32. Să se găsească funcțiile f satisfăcînd ecuația : $f\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = \frac{x^4 + 1}{x^2}$,

Soluție. Cum $\left|\frac{x}{x^2 + 1}\right| = \left|\frac{1}{x + \frac{1}{x}}\right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ este domeniul de variație al variabilei

$$t = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = t \Rightarrow \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} = t^2$$

$$\Rightarrow 1 = 2t^2 + t^2 \frac{x^4 + 1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} = \frac{1 - 2t^2}{t^2} = \frac{1}{t^2} - 2 \Rightarrow$$

$f(x) = \frac{1}{x^2} - 2$, deci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 2 & \text{dacă } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(x) & \text{dacă } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

φ arbitrar.

* * *

33. Să se exprime printr-o formulă funcția $y = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x > 0. \\ 0 & \text{pentru } x < 0. \end{cases}$

Soluție. $y = \frac{x + \sqrt{x^2}}{2x}$.

2. RELAȚII FUNCȚIONALE

Înainte de a da câteva probleme, să începem cu un exemplu clasic: funcția aditivă.

O funcție aditivă se caracterizează prin aceea că verifică relația funcțională $\Phi(x_1 + x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2)$ pentru orice pereche de puncte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Un exemplu de funcție aditivă este funcția liniară și omogenă $f(x) = ax$.

Teoremă. Dacă o funcție aditivă este mărginită superior măcar pe un interval oricât de mic, atunci ea este identică cu funcția liniară și omogenă.

Din proprietatea de aditivitate deducem că

$$\Phi(x_1 + x_2 + x_3) = \Phi(x_1 + x_2) + \Phi(x_3) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3)$$

și, aplicând principiul inducției, obținem, în general,

$$\Phi(x_1 + \dots + x_n) = \Phi(x_1) + \dots + \Phi(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(nx) = n\Phi(x), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x.$$

Notînd $x = \frac{m}{n}y$, relația precedentă $\Rightarrow \Phi(my) = n\Phi\left(\frac{m}{n}y\right) \Rightarrow m\Phi(y) =$

$= n\Phi\left(\frac{m}{n}y\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{m}{n}y\right) = \frac{m}{n}\Phi(y)$. Deci proprietatea de aditivi-

tate $\Rightarrow \Phi(\alpha x) = \alpha\Phi(x)$, $\forall \alpha = \frac{m}{n}$ (rațional). Consecință: $\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(1)$.

De asemenea, $\Phi(x) = \Phi(x + 0) = \Phi(x) + \Phi(0) \Rightarrow \Phi(0) = 0$.

În continuare, $0 = \Phi(0) = \Phi(x - x) = \Phi(x) + \Phi(-x) \Rightarrow \Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, adică Φ este impară.

Fie β rațional negativ, atunci, $\Phi(\beta) = -\Phi(-\beta) = \beta\Phi(1)$. Deci, formula $\Phi(\alpha) = \alpha\Phi(1)$ are loc și pentru α rațional negativ.

Hamel a dat un exemplu de funcție aditivă diferită de funcția liniară, dar care este nemărginită pe orice interval, oricât de mic.

Să considerăm o funcție aditivă mărginită superior măcar pe un interval, de ex. Φ mărginită superior pe $(p, p + s)$ $s > 0$.

1° Φ va fi mărginită superior pe $(0, s)$. Într-adevăr, fie $p < p + x < p + s$, $x \in (0, s)$.

$$\Phi(p + x) < M \Rightarrow \Phi(p) + \Phi(x) < M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(x) < M - \Phi(p), \forall x \in (0, s).$$

2° Considerăm funcția $G(x) = \Phi(x) - \frac{\Phi(s)}{s}x$. Atunci, $G(x) <$

$< M - \Phi(p) + |\Phi(s)|$ deci $G(x)$ este mărginită pe $(0, s)$.

3° Funcția G este aditivă căci

$$\begin{aligned} G(x + y) &= \Phi(x + y) - \frac{\Phi(s)}{s}(x + y) = \\ &= \Phi(x) - \frac{\Phi(s)}{s}x + \Phi(y) - \frac{\Phi(s)}{s}y \Rightarrow G(x + y) = G(x) + G(y), \end{aligned}$$

deci $G(x + s) = G(x) + G(s)$. Dar $G(s) = 0$, deci G este periodică cu perioada s și prin urmare, $G(x) < M - \Phi(p) + |\Phi(s)|$, $\forall x \in R$.

4° Orice valoare a funcției G este nulă! Fie $0 < x_0 < s$; să presupunem, prin absurd, că $G(x_0) \neq 0$. Dar, în baza aditivității, $G(\alpha x_0) = \alpha G(x_0)$. Putem lua pe α astfel încît $\alpha G(x_0) > M' = M - \Phi(p) + |\Phi(s)|$ și prin urmare $G(\alpha x_0) > M'$, în contradicție cu faptul că $G(x) < M'$, $\forall x \in R$. Prin urmare $G(x_0) = 0$, $\forall x_0 \in (0, s)$. Cum perioada este s , rezultă că $G(x) = 0$, $\forall x \in R$. Prin urmare $\Phi(x) = \frac{\Phi(s)}{s}x = ax$, unde $a = \frac{\Phi(s)}{s}$ și aceasta $\forall x \in R$. Cu aceasta, teorema este demonstrată.

* * * * *

34. Să se afle funcția care verifică relația $mf\left(\frac{a+x}{c+x}\right) + nf\left(\frac{a-x}{c-x}\right) = kx$. (Problemă de concurs).

Soluție.

$$\begin{array}{l} mf\left(\frac{a+x}{c+x}\right) + nf\left(\frac{a-x}{c-x}\right) = kx \\ nf\left(\frac{a+x}{c+x}\right) + mf\left(\frac{a-x}{c-x}\right) = -kx \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} m \\ -n \end{array} \right.$$

$$(m^2 - n^2)f\left(\frac{a+x}{c+x}\right) = kx(m+n) \Rightarrow f\left(\frac{a+x}{c+x}\right) = \frac{kx}{m-n} \text{ și notînd}$$

$$\frac{a+x}{c+x} = t \Rightarrow x = \frac{ct-a}{1-t} \Rightarrow f(t) = \frac{k}{m-n} \cdot \frac{ct-a}{1-t} \Rightarrow$$

$$f(x) = \frac{k(cx-a)}{(m-n)(1-x)}.$$

* * * * *

35. Să se afle toate funcțiile f definite pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și care satisfac ecuația $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$. Să se arate că numai două sînt continue.

Soluție. $y = x \Rightarrow 2xf(x) = 2xf^2(x)$; $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = f^2(x)$ adică $f(x) = 0$ sau $f(x) = 1$. Fie $f(a) = 0$ pentru $x = a$, $a \neq 0$. Din ecuația dată rezultă $af(y) + yf(a) = (a+y)f(a)f(y)$ sau $af(y) = 0$, $\forall y \Rightarrow f(x) \equiv 0$. Fie $f(a) = 1$ pentru $x = a \neq 0$. Rezultă că $af(y) + y = af(y) + yf(y)$ sau $y = yf(y)$, pentru $y \neq 0$ avem $f(y) = 1$ iar pentru $y = 0$, $f(0) = C$, orice număr.

Soluțiile ecuației funcționale sînt deci :

$$1^\circ f(x) \equiv 0$$

$$2^\circ f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0, \\ C & x = 0 \text{ unde } C \text{ este oarecare.} \end{cases}$$

Funcțiile continue sînt $\begin{cases} f(x) \equiv 0, \\ f(x) \equiv 1. \end{cases}$

* * * * *

36. Fie o mulțimea \mathcal{G} de funcții $f(x) = ax + b$. Dacă

1° $f, g \in \mathcal{G} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{G}$ (\mathcal{G} închisă față de superpoziții),

2° $f^{-1} \in \mathcal{G}$, unde $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$,

3° $\forall f \in \mathcal{G}, \exists x_f, f(x_f) = x_f$ (Fiecare dreaptă intersectează prima bisectoare),

să se arate că există $k \in \mathbb{R}$ încît $f(k) = k$, $\forall f \in \mathcal{G}$ (Olimpiadă Polonia 1973, 6 puncte).

Punctul care intervine în condiția 3° îl vom numi punct fix. Trebuie să arătăm că toate funcțiile au același punct fix. Pentru funcția $f(x) = ax + b$, dacă $a = 1$, punctul fix este dat doar pentru $b = 0$. Adică: $f \in \mathcal{G}$ și $a = 1 \Rightarrow b = 0$. Pentru funcția $f(x) = x$ toate punctele sînt fixe. Asta înseamnă că ea are un punct fix comun cu toate funcțiile din \mathcal{G} . Deci dacă \mathcal{G} constă dintr-o funcție sau din două funcții, din care una este x , atunci afirmația este evidentă (deși al doilea caz nu poate avea loc din cauza condiției 2°). Prin urmare putem considera că în \mathcal{G} intră cel puțin două funcții liniare diferite de funcția x .

Fie aceste funcții $f_1 = a_1x + b_1$, $f_2 = a_2x + b_2$ ($a_1, a_2 \neq 0, 1$).

Punctele fixe ale acestei funcții sînt $x_{f_1} = \frac{b_1}{1 - a_1}$, $x_{f_2} = \frac{b_2}{1 - a_2}$.

Conform condițiilor 1°, 2°, $g = f_1 \circ f_2 \in \mathcal{G}$, $h = f_2 \circ f_1 \in \mathcal{G}$, $g \circ h^{-1} \in \mathcal{G}$, $g(x) = a_1(a_2x + b_2) + b_1$, $h(x) = a_2(a_1x + b_1) + b_2$, $h^{-1}(x) = \frac{x - a_2b_1 - b_2}{a_1a_2}$, $g \circ h^{-1} = a_1a_2 \frac{x - a_2b_1 - b_2}{a_1a_2} + a_1b_2 + b_1 = x - a_2b_1 - b_2 + a_1b_2 + b_1 = x + [(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2)]$. Cum $g \circ h^{-1} \in \mathcal{G}$ și coeficientul pe lângă x este 1 rezultă că

$$a_1b_2 + b_1 = a_2b_1 + b_2 \Rightarrow b_2(1 - a_1) = b_1(1 - a_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_1}{1 - a_1} = \frac{b_2}{1 - a_2} \Rightarrow x_{f_1} = x_{f_2}.$$

Cum aceasta este adevărat pentru două funcții oarecare din \mathcal{G} , rezultă că pentru orice f există un punct comun K încît $f(K) = K$.

* * * * *

37. Fie f, g funcții reale definite pe axu reală și satisfăcînd condiția $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y)$, $\forall x, \forall y$. Să se arate că dacă $f(x) \neq 0$ și dacă $|f(x)| \leq K$, $\forall x$, atunci $g(y) \leq 1$, $\forall y$.

Soluție. Margine superioară a unei mulțimi este cel mai mic majorant:

$$M = \overline{\text{marg}} A \text{ dacă } \begin{cases} 1^\circ \forall x \in A \Rightarrow x < M, \\ \text{și} \\ 2^\circ \forall M' < M \Rightarrow \exists x_0, x_0 > M'. \end{cases}$$

Fie M marginea superioară a valorilor funcției $|f(x)|$, $M \neq 0$. Conform ipotezei,

$$|2f(x)g(y)| = |f(x - y) + f(x + y)| \leq |f(x - y)| + |f(x + y)| \leq 2M,$$

adică $|f(x)g(y)| \leq M, \forall x, \forall y$. Fie ca $g(y_0) > 1 \Rightarrow \forall x, |f(x)| \leq \frac{M}{g(y_0)} < M$ adică numărul $\frac{M}{g(y_0)}$, strict mai mic decât M , este majorant pentru mulțimea valorilor funcției $|f(x)|$, ceea ce contrazice definiția marginii superioare. Prin urmare nu există y_0 pentru care $g(y_0) > 1$ și deci $\forall y, g(y) \leq 1$.

* * * * *

38. Funcția f este definită pe $R - \{0,1\}$. Pentru $\forall x$ avem că $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$. Să se afle toate aceste funcții f .

Soluție. În egalitatea $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$ facem substituția $x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ și obținem :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right) &= \frac{1}{1-x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{1-x}{-x}\right) = \\ &= \frac{1}{1-x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Facem acum $x \rightarrow 1 - \frac{1}{x}$ și avem :

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-1+\frac{1}{x}}\right) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Din sistemul :

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}, \\ f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \end{cases}$$

obținem că

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{1-x} + 1 - \frac{1}{x}\right),$$

de unde

$$f(x) + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \left(x + 1 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\right),$$

sau

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + 1 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} - \frac{2}{1-x}\right),$$

sau

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right).$$

39. Să se stabilească paritatea funcției $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln 1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_-(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \end{aligned}$$

deci este funcție impară.

3. FUNCȚII MONOTONE

40. Se consideră funcția definită pe \mathbb{R} cu valori reale :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

a) Să se arate că f este crescătoare pe $[0, \infty]$ și descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

b) Să se stabilească mulțimea valorilor funcției $f(x)$ când $x \in [-1, 1]$.

c) Să se calculeze limita funcției $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ când $x \rightarrow \pm \infty$.

d) Să se cerceteze monotonia funcției $g(x)$ (Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16110).

Soluție. a) Punem $y = f(x)$ sub o altă formă:

$$y^2 = 2x^2 + 4 + 2\sqrt{(x^2 + 2)^2 - 4x^2}; y = \sqrt{2}(\sqrt{x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4}}).$$

$x^2 + 2, x^4 + 4$ —descrescătoare pe $(-\infty, 0] \Rightarrow \sqrt{x^4 + 4}$ —descrescătoare pe $(-\infty, 0] \Rightarrow x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4}$ —descrescătoare pe $(-\infty, 0] \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2 + \sqrt{x^4 + 4}}$ —descrescătoare pe $(-\infty, 0]$. La fel se vede că $f(x)$ este crescătoare pe $[0, \infty]$.

b) Ținând seama de a) avem: $f(-1) = 1 + \sqrt{5}$, $f(0) = 2\sqrt{2}$, $f(1) = \sqrt{5} + 1$; mulțimea valorilor pe $[-1, 1]$ este $[2\sqrt{2}, 1 + \sqrt{5}]$.

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{4}{2} = -2.$$

d) Spre a ne da seama de monotonia funcției $g(x)$ reprezentăm grafic funcțiile

$$p(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 1}, q(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}, r(x) = -\sqrt{(x-1)^2 + 1}.$$

$$\frac{x}{g(x)} \left| \begin{array}{ccccccc} -\infty & -1 & 0 & 1 & \infty \\ -2 & \nearrow 1 & -\sqrt{5} & \nearrow 0 & \nearrow \sqrt{5} & -1 & \nearrow 2 \end{array} \right. \text{ (fig. 7)}$$

Urmărind viteza de creștere se vede că funcția $g(x)$ este strict crescătoare (s-a evitat folosirea derivatei) (fig. 7).

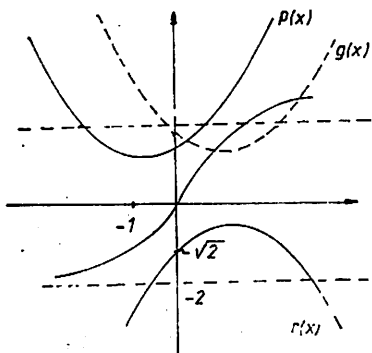


Fig. 7.

4. FUNCȚII PERIODICE

* * * * *

41. Ce se poate spune despre o funcție derivabilă $f(x)$ dacă derivata ei este periodică?

Soluție. $f'(x)$ — periodică $\Rightarrow \exists T > 0$,
 $f'(x + T) = f'(x) \Rightarrow f(x + T) - f(x) = b$.

Fie $g(x) = f(x) - \frac{b}{T}x \Rightarrow g(x + T) -$
 $- g(x) = f(x + T) - \frac{b}{T}(x + T) - f(x) +$

$+\frac{b}{T}x = b - \frac{bx}{T} - b + \frac{b}{T}x = 0 \Rightarrow g(x + T) = g(x) \Rightarrow g(x)$ perio-
 dică cu perioada $T \Rightarrow f(x) = g(x) + \frac{b}{T}x = g(x) + Kx$.

5. PROBLEME DE MAXIMUM ȘI MINIMUM

42. Să se afle maximul expresiei

$$y = \frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Soluție. $y \leq \frac{\sum a_i^2 \cdot \sum x_i^2}{\sum x_i^2} = \sum a_i^2$, deci $y_{\max} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$.

43. Să se afle cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției
 $u = \sum_{i=1}^n xy_i$, dacă se știe că $\sum x_i^2 < a^2$, $\sum y_i^2 \leq b^2$; $a, b > 0$.

Soluție. Avem $\sum x_i y_i \leq \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2} \leq \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = ab$,

$(\sum x_i y_i)^2 \leq \sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2 = a^2 b^2 \Rightarrow -ab \leq \sum x_i y_i \leq ab$.

44. 1° Se știe că dacă $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos \alpha > \cos \beta$.
 Avem inegalitatea $\alpha + \cos \alpha < \beta + \cos \beta$?

Soluție. $f(x) = x + \cos x$, $f'(x) = 1 - \sin x > 0 \Rightarrow f(x)$ crește, deci $\alpha + \cos \alpha < \beta + \cos \beta$, $\forall \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

45. Fie $p, q > 0$, $p < q$. Avem inegalitatea $p^2 + \frac{1}{p^2} < q^2 + \frac{1}{q^2}$?

Soluție. Avem $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^4 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ și

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	- 0 +	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘ 2 ↗	∞

$p < q$; $p, q \in (0, 1) \Rightarrow p^2 + \frac{1}{p^2} > q^2 + \frac{1}{q^2}$, iar pentru $p, q \in (1, \infty)$, $p^2 + \frac{1}{p^2} < q^2 + \frac{1}{q^2}$.

46. Fie $p, q > 0$, $p < q$; avem $p^2 + \frac{1}{p^3} < q^2 + \frac{1}{q^3}$?

Soluție. Avem $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$, $f'(x) = 2x - \frac{3}{x^4} = \frac{1}{x^4}(2x^5 - 3) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ și

x	0	$\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$	∞
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	↘ $\frac{5}{2} \sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ ↗	∞

$p < q$, $p, q \in \left(0, \sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)$, avem că $p^2 + \frac{1}{p^3} > q^2 + \frac{1}{q^3}$, iar pentru

$p < q$; $p, q \in \left(\sqrt[5]{\frac{3}{2}}, \infty\right)$, avem că $p^2 + \frac{1}{p^3} < q^2 + \frac{1}{q^3}$.

* * *

47. Să se afle cea mai mică valoare a funcției $y = ax^m + \frac{b}{x^n}$ ($x > 0$, $a, b > 0$, m, n , naturale).

Soluție. $y = n \frac{ax^m}{n} + m \frac{b}{mx^n} \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\left(\frac{ax^m}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{mx^n}\right)^m} \Rightarrow$
 $\Rightarrow y \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\frac{a^n b^m}{n^n m^m}}$.

Egalitate pentru $\frac{ax^m}{n} = \frac{b}{mx^n} \Rightarrow x = \sqrt[m+n]{\frac{nb}{ma}}$.

*

48. Să se afle cea mai mică valoare a funcției $f(x, y) = y/x$ în mulțimea punctelor (x, y) satisfăcând ecuația $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 1$.

Soluție. $x > 2$ sau $y > 2$ este imposibil $\Rightarrow x \leq 2, y \leq 2$;

$x < 1$ sau $y < 1$ este imposibil $\Rightarrow 1 \geq x, 1 \geq y$;

$\Rightarrow x \in [1, 2], y \in [1, 2]$.

$f(x, y)$ are cea mai mică valoare $1/2$ atinsă pentru $x = 2, y = 1$.

* * *

49. Pentru ce valori ale lui x, y , $f(x, y) = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$ are minim și maxim?

Soluție. $f(x, y) = 1 + \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{(x - 2y)^2}{x^2 + y^2} - 1 \Rightarrow$

$f_{\min} = -1$ pentru $x = 2y$.

$f(x, y) = 4 - \frac{(y + 2x)^2}{x^2 + y^2} \Rightarrow f_{\max} = 4$ pentru $y = -2x$.

* * * *

50. Să se afle cea mai mică valoare a funcției $y = \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} + \frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$.

Soluție. Din inegalitatea mediilor rezultă :

$$y \geq 2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 2.$$

Pentru $x = 0$ avem $y = 2$.

* * * * *

51. Să se afle cea mai mică valoare a funcției

$$f(x) = \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)^n + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)^n.$$

Soluție. Avem că $\left(\frac{a+b}{2} \right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$ și deci

$$a^n + b^n \geq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)^n + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)^n \geq 2 \left(\frac{\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}}{2} \right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)^n + \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)^n \geq 2 \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x} \right)^n =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{2}{\sin^2 2x} \right)^n.$$

Pentru $\sin 2x = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow f_{\min}(x) = 2 \cdot 3^n$.

52. Să se afle maximul expresiei $y = a \sin x + b \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + c \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$ pentru $a, b, c > 0$, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ și $a = b - c$.

Soluție. Din inegalitatea lui Cauchy rezultă

$$a \sin x + b \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + c \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right)}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2x \right)}{2}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\frac{3 - \cos 2x - 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2}},$$

unde valoarea $\sqrt{\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2}}$ este atinsă pentru x verificând condițiile:

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right)} = \frac{c}{\sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)}.$$

Aceste condiții sînt echivalente cu

$$\begin{cases} b \sin x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{a}{2} \sin x, \\ c \sin x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{a}{2} \sin x, \end{cases}$$

de unde prin adunare și scădere membru cu membru se obține

$$\begin{cases} (b - c) \sin x = a \sin x, \\ (b + c) \sin x = a\sqrt{3} \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - c = a, \\ \operatorname{tg} x = \frac{a\sqrt{3}}{b + c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{(b - c)\sqrt{3}}{b + c} \leq \sqrt{3}.$$

Observație. În cazul cînd se renunță la condițiile $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ și $a = b - c$, se procedează în modul următor :

$$\begin{aligned} y &= a \sin x + b \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + c \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \\ &= a \sin x + b \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) + c \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = \\ &= \left(a + \frac{b-c}{2} \right) \sin x + \frac{b+c}{2} \sqrt{3} \cos x \end{aligned}$$

și aplicînd inegalitatea lui Cauchy $y = \left(a + \frac{b-c}{2} \right) \sin x + \frac{b+c}{2} \sqrt{3} \cos x$.

$$\sqrt{3} \cos x \leq \sqrt{\left(a + \frac{b-c}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{b+c}{2} \right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc},$$

maximul fiind atins pentru

$$\frac{a + \frac{b-c}{2}}{\sin x} = \frac{\frac{b+c}{2} \sqrt{3}}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2a + b - c}{\sqrt{3}(b+c)}$$

Punînd condiția ca acest maximum să coincidă cu cel din problemă obținem condiția $a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc = 0 \Rightarrow [a - (b - c)]^2 = 0 \Rightarrow a = b - c$ din enunțul problemei.

53. Să se afle maximul expresiei $z = a \sin(x + y) + b \sin(x - y) + c \sqrt{\cos 2x \cos 2y}$, $a, b, c > 0$.

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } z &= a \sin(x + y) + b \sin(x - y) + c \sqrt{\cos 2x \cos 2y} \leq \\ &\leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + \cos 2x \cos 2y} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\frac{1 - \cos^2(x + y)}{2} + \frac{1 - \cos^2(x - y)}{2} + \cos 2x \cos 2y} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{1 - \cos 2x \cos 2y + \cos 2x \cos 2y} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Maximul este atins pentru x, y verificând condițiile

$$\frac{a}{\sin(x+y)} = \frac{b}{\sin(x-y)} = \frac{c}{\sqrt{\cos 2x \cos 2y}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Observație. Dacă am încerca să restrângem mulțimea de definiție a lui x și y , de exemplu la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, atunci din șirul precedent de ecuații care implică de exemplu relația $0 < \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = \frac{a+b}{a-b}$, ar rezulta condiția suplimentară $a \geq b$.

54. Să se afle maximul și minimul funcției $y = \frac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$.

Soluție. Notînd $x = \operatorname{tg} \varphi$ cu $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, funcția de mai sus devine

$$\begin{aligned} y &= \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = \cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi, \end{aligned}$$

și, după cum se vede ușor, maximul este 1 și se obține pentru $\varphi = 0$ și $\varphi \rightarrow \pm \pi/2$, iar minimul este $1/2$ și se obține pentru $\varphi = \pm \pi/4$.

55. Să se afle extremele funcției $y = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

Soluție. Procedînd ca-n exercițiul precedent, notăm $x = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, iar funcția din enunț devine $y = (\sin \varphi + \cos \varphi)^2 = 1 + \sin 2\varphi$, maximul va fi 2 pentru $\varphi = \pi/4$, iar minimul 0 pentru $\varphi = -\pi/4$.

56. Să se găsească cea mai mică valoare a funcției $y = \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\sin x \cos x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 2x} \Rightarrow y = 1 \nrightarrow$
 $\frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 1 + \frac{2}{\sin 2x} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} \geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} =$
 $= 3 + 2\sqrt{2}$. Avem egalitate pentru $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică
 $\sin 2x = 1, x = \pi/4$.

* * * * *

57. Să se găsească minimul și maximul funcției $f(x, y, z, t) =$
 $= \frac{ax^2 + by^2}{ax + by} + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt}$, cu condițiile $\begin{cases} x + z = 1, \\ y + t = 1, \\ x, y, z, t \geq 0, \\ a, b > 0. \end{cases}$

Soluție.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= 1 + \left(\frac{ax^2 + by^2}{ax + by} - 1 \right) + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt} = \\ &= 1 + \frac{ax(x-1) + by(y-1)}{ax + by} + \frac{az^2 + bt^2}{az + bt} = \\ &= 1 + \frac{(axz - byt)(az + bt) + (ax + by)(az^2 + bt^2)}{(ax + by)(az + bt)} = \\ &= 1 + \frac{-a^2x^2z^2 - abxzt - abyzt - b^2yt^2 + a^2xz^2 + abxt^2 + abyz^2 + b^2yt^2}{(ax + by)(az + bt)} = \\ &= 1 + \frac{abxt(t-z) + abyz(z-t)}{(ax + by)(az + bt)} = 1 + \frac{ab(t-z)(xt - yz)}{(ax + by)(az + bt)} = \\ &= 1 + \frac{ab(t-z)(t - tz + tz - z)}{(ax + by)(az + bt)} = 1 + \frac{ab(t-z)^2}{(ax + by)(az + bt)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_{\min} = 1, \quad t = z. \end{aligned}$$

$$\text{Din } \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq x \\ y^2 \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 \leq ax \\ by^2 \leq by \end{cases} \Rightarrow ax^2 + by^2 \leq ax + by \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z \leq 1 \\ t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 \leq z \\ t^2 \leq t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az^2 \leq az \\ bt^2 \leq bt \end{cases} \Rightarrow az^2 + bt^2 \leq az + bt \Rightarrow$$

$(x, y, b, t) \leq 1 + 1 = 2$ cu egalitate pentru $x = t = 1$ și $y = z = 0$.

58. Notând $\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}$, $m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n k C_{2n}^{2k}$, să se arate că funcția

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n (k - x)^2 C_{2n}^{2k} \text{ își atinge minimumul în punctul } x = m = n/2.$$

$$\text{Soluție. } f(x) = x^2 - 2mx + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n k^2 C_{2n}^{2k},$$

$$f'(x) = 2(x - m) = 0 \Rightarrow x = m.$$

Să arătăm că $m = n/2$. Dar această condiție, înlocuind pe m și N prin expresiile lor, se poate scrie astfel

$$\frac{\sum_{k=0}^n k C_{2n}^{2k}}{\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}} = \frac{n}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^n (n - 2k) C_{2n}^{2k} = 0.$$

Dar $\sum_{k=0}^n (n - 2k) C_{2n}^{2k} = n C_{2n}^0 + (n - 2) C_{2n}^2 + (n - 4) C_{2n}^4 + \dots - (n - 4) C_{2n}^{2n-4} - (n - 2) C_{2n}^{2n-2} - n C_{2n}^{2n} = 0$ căci $C_{2n}^{2n} = C_{2n}^0$, $C_{2n}^{2n-2} = C_{2n}^2$, $C_{2n}^{2n-4} = C_{2n}^4, \dots$. Din anularea derivatei rezultă că în $x = m$ avem un extremum. Pentru a ne convinge că-i vorba de un minim (și nu de un maximum), vom arăta că de exemplu $f(m) < f(0)$. Într-adevăr

$$f(m) = -m^2 + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n k^2 C_{2n}^{2k} < \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n k^2 C_{2n}^{2k} = f(0).$$

* * * * *

59. Să se găsească valoarea minimă a expresiei $a^2 + b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și pentru care $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ are cel puțin o rădăcină reală. (Olimpiada 1973 : Suedia, 8 puncte).

Soluția 1. $x \neq 0 \Rightarrow |x + 1/x| \geq 2$; $x + 1/x$ fiind impară, este suficient să o dovedim pentru $x > 0$, dar $x + 1/x \geq 2 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x \geq 0$, care este adevărată. Fie ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$. Deoarece $x = 0$ nu este soluție putem scrie:

$$x^2 + ax + b + a/x + 1/x^2 = 0 \Rightarrow (x + 1/x)^2 + a(x + 1/x) + b - 2 = 0.$$

Pentru $x_0 \neq 0$ fixat, mulțimea perechilor (a, b) pentru care ecuația inițială are rădăcina x_0 este dată de ecuația liniară $y_0^2 + ay_0 + b - 2 = 0$, unde $y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$, $a^2 + b^2$ este distanța originii de punctul (a, b) , (fig. 8):

$$\frac{a}{2 - y_0^2} + \frac{b}{2 - y_0^2} - 1 = 0.$$

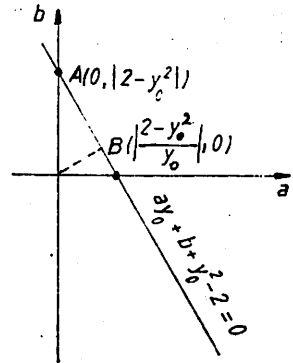


Fig. 8.

Minimul expresiei $a^2 + b^2$ va fi:

$$d = \frac{|2 - y_0^2| \left| \frac{2 - y_0^2}{y_0} \right|}{\sqrt{\frac{(2 - y_0^2)^2}{y_0^2} + (2 - y_0^2)^2}} = \frac{\frac{2 - y_0^2}{y_0}}{\frac{\sqrt{1 + y_0^2}}{|y_0|}} = \frac{2 - y_0^2}{\sqrt{1 + y_0^2}} \Rightarrow$$

$$\min(a^2 + b^2) = \frac{(2 - y_0^2)^2}{1 + y_0^2}.$$

Cum $y_0^2 = \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2 \geq 4$, $y_0^2 \geq 4$, deci trebuie să găsim

$$\min_{y_0^2 > 4} \frac{(y_0^2 - 2)^2}{1 + y_0^2} = \min_{t > 4} \frac{t^2 - 4t + 4}{t + 1} = \min_{t > 4} \left(t - 5 + \frac{9}{1 + t}\right).$$

Fie $f(t) = t - 5 + \frac{9}{1 + t} \Rightarrow f(t_2) - f(t_1) = t_2 - 5 + \frac{9}{1 + t_2} - t_1 + 5 - \frac{9}{1 + t_1} =$

$$= t_2 - t_1 + \frac{9(t_1 - t_2)}{(1 + t_1)(1 + t_2)} = (t_2 - t_1) \left[1 - \frac{9}{(1 + t_1)(1 + t_2)}\right] > 0$$

pentru $t_2 > t_1 \geq 4$ deci $f(t_2) > f(t_1)$ adică $f(t)$ este crescătoare și deci pentru $t = 4$ are cea mai mică valoare, așa că $\min(a^2 + b^2) =$

$$= \frac{(4-2)^2}{1+4} = \frac{4}{5}. \text{ Această valoare este atinsă căci } y_0^2 = 4 \Rightarrow y_0 = \pm 2 \Rightarrow x_0 = \pm 1 \text{ este rădăcină dacă } \pm 2a + b + 2 = 0, \text{ deci cînd } a = \mp \frac{4}{5}, b = \frac{-2}{5}.$$

Soluția 2. Se știe că $x^4 + 1 \geq 2x^2$ și $x^4 + 1 \geq x^3 + x$. Fie ca ecuația să aibă $x > 0$ rădăcină, adică $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, $x^4 - |a|x^3 - |b|x^2 - |a|x + 1 \leq x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ sau $|a|x^3 + |b|x^2 + |a|x \geq x^4 + 1 \Rightarrow x^4 + 1 \leq |a|x^3 + |b|x^2 + |a|x \leq |a|(x^4 + 1) + |b|\frac{x^4 + 1}{2} = \left(|a| + \frac{|b|}{2}\right)(x^4 + 1) \Rightarrow |a| + \frac{|b|}{2} \geq 1$ sau $|b| \geq 2 - 2|a| \Rightarrow a^2 + b^2 \geq a^2 + (2 - 2|a|)^2 = 5a^2 - 8|a| + 4 = 5\left(|a| - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$. Dacă ecuația inițială are rădăcina negativă x , atunci $-x$ este rădăcină pozitivă a ecuației $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$ și aplicîndu-i cele de mai sus găsim și în acest caz $a^2 + b^2 \geq 4/5$; cazul $x = 0$ este imposibil. Dacă valoarea $4/5$ este atinsă, aceasta este valoarea minimă. Dar pentru ca valoarea $4/5$ să fie atinsă trebuie să avem egalitate în toate inegalitățile de mai sus, adică: $x^4 + 1 = 2x^2$ și $x^4 + 1 = x^3 + x$, care implică $x = 1$ și de asemenea $5(|a| - 4/5)^2 + 4/5 = 4/5$ și $|b| = 2 - 2|a|$, care implică $a = \pm(4/5)$ și $b = \pm(2/5)$; se constată că pentru aceste valori ale lui x, a, b și ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ este verificată.

6. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

60. Se dă funcția $f(x) = \max(2x - 5, x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$ și se cere:

a) Să se arate că este bijectivă utilizîndu-se graficul.

b) Să se construiască graficul funcției $f^{-1}(x)$.

c) Să se determine $S(x) = f(x) + f^{-1}(x)$.

(Gazeta Matematică, 3, 1976, Problema nr. 15757).

Soluție. Avem că $x - 2 = y$ și $x = 0 \Rightarrow y = -2$, iar $y = 0 \Rightarrow x = 2$.

Punctul de intersecție al celor două drepte este dat de ecuația $2x - 5 = x - 2$ (fig. 9), de unde $x = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(3, 1)$.

$2x - 5 = y$ și $y = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/2$, iar $x = 0 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{pentru } x \leq 3, \\ 2x - 5 & \text{pentru } x > 3. \end{cases}$$

Funcția este injectivă căci $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, sau nici o paralelă la Ox nu intersectează graficul în două puncte.

Funcția este surjectivă căci oricare ar fi $y_0 \in R$, există x_0 încît $f(x_0) = y_0$; pe grafic se vede că orice paralelă la Ox intersec-tează graficul.

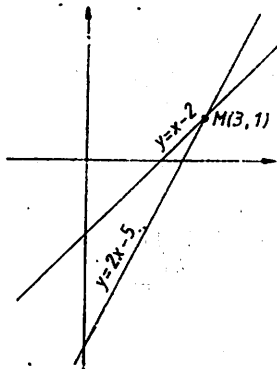


Fig. 9.

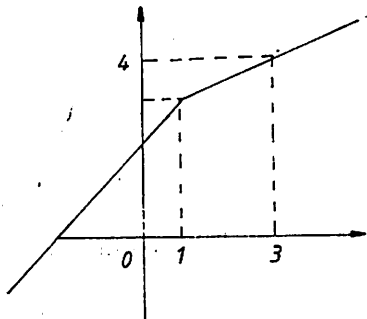


Fig. 10.

$$\begin{aligned} \text{b) } y = x - 2 &\Rightarrow x = 2 + y \Rightarrow y = 2 + x, \\ y = 2x - 5 &\Rightarrow x = \frac{y + 5}{2} \Rightarrow y = \frac{x + 5}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{pentru } x \leq 1, \\ \frac{x + 5}{2} & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

și obținem graficul din figura 10.

$$\text{c) } f(x) + f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 2 + 2 + x = 2x & \text{pentru } x \leq 1, \\ x - 2 + \frac{x + 5}{2} = \frac{3x + 1}{2} & \text{pentru } 1 < x \leq 3, \\ 2x - 5 + \frac{x + 5}{2} = \frac{5x - 5}{2} & \text{pentru } x > 3. \end{cases}$$

* * * * *

61. Să se construiască graficul funcției $y = ax^2 + b|x| + c$ dacă $a > 0$, $\Delta > 0$, $c > 0$, $b < 0$.

Soluție. 1° $\Delta > 0$ are deci rădăcini reale,
 2° $a > 0$ concavitătea orientată în sus,
 3° $c/a > 0$, $-b/a > 0$ ambele rădăcini sînt pozitive,
 4° $y = ax^2 + b|x| + c$ este pară, deci simetrică față de Oy , și obținem graficul din figura 11.

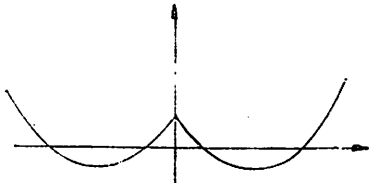


Fig. 11.

62. Fie funcția $f(x) = \min(x^2 + ax + b; cx + d)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Să se determine a, b, c, d și să se traseze graficul funcției f știindu-se că $f(-2) = f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 4$

(Gazeta Matematică, 11, 1976, Problema nr. 16184).

Soluție. Avem $\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2} \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^2 + (a + c)x + b + d - |x^2 + (a - c)x + b - d|}{2}$$

Sistemul este

$$4 - 2a - 2c + b + d - |4 - 2a + 2c + b - d| = 2,$$

$$1 - a - c + b + d - |1 - a + c + b - d| = 2,$$

$$b + d - |b - d| = 4$$

$$1 + a + c + b + d - |1 + a - c + b - d| = 8,$$

care devine:

$$\begin{array}{l|l} 1 & b = 2, d \geq 2 \text{ sau } d = 2, b \geq 2 \\ 3 & a + b = 3 \text{ sau } c + d = 4 \\ 5 & 2a - b = 3 \text{ sau } d - 2c = 1 \\ 7 & a = b \text{ sau } d - c = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array}$$

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \Rightarrow b = 2, a = 1, b = -1 \text{ imposibil,}$$

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 7 \Rightarrow b = 2, a = 1, a = 2, \text{ imposibil,}$$

$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \Rightarrow b = 2, a = 1, b = -1 \text{ imposibil,}$$

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 8 \Rightarrow b = 2, a = 1, c = 0, d = 1 < 2 \text{ imposibil,}$$

$$1 \ 4 \ 5 \ 7 \Rightarrow b = 2, a = \frac{5}{2}, a = 2 \text{ imposibil.}$$

$$\text{I } 1 \ 4 \ 6 \ 7 \Rightarrow b = 2, a = 2, c = 1, d = 3,$$

$$\text{II } 1 \ 4 \ 5 \ 8 \Rightarrow b = 2, a = \frac{5}{2}, d = \frac{5}{2}, c = \frac{3}{2},$$

$$1 \ 4 \ 6 \ 8 \Rightarrow b = 2, c = 0, d = 1, d = 4 \text{ imposibil,}$$

$$2 \ 3 \ 5 \ 7 \Rightarrow a = 3, b = 3, a = 0 \text{ imposibil,}$$

$$2 \ 3 \ 6 \ 7 \Rightarrow d = 2, c = \frac{1}{2}, a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2} < 2 \text{ imposibil,}$$

$$2 \ 3 \ 5 \ 8 \Rightarrow d = 2, c = 1, a = 2, b = 1 < 2 \text{ imposibil,}$$

$$2 \ 3 \ 6 \ 8 \Rightarrow d = 2, c = \frac{1}{2}, c = 1, \text{ imposibil,}$$

$$\text{III } 2 \ 4 \ 5 \ 7 \Rightarrow d = 2, c = 2, a = 3, b = 3,$$

$$2 \ 4 \ 6 \ 7 \Rightarrow d = 2, c = 2, d = 5, \text{ imposibil,}$$

$$2 \ 4 \ 5 \ 8 \Rightarrow d = 2, c = 2, d = 3, \text{ imposibil,}$$

$$2 \ 4 \ 6 \ 8 \Rightarrow d = 2, c = 2, d = 3, \text{ imposibil.}$$

$$\text{I } \boxed{f(x) = \min(x^2 + 2x + 2; x + 3)} \quad (\text{fig. 12}).$$

$$\text{II } f(x) = \min\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 2; \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) - \text{nu verifică,}$$

$$\text{III } f(x) = \min(x^2 + 3x + 3; 2x + 2) - \text{nu verifică.}$$

* * * * *

63. Graficul funcției $y = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ($n > 1$) intersectează dreapta $y = a$ în punctele A_1, A_2, \dots, A_n , iar dreapta $y = b$ în punctele B_1, \dots, B_n (fig. 13). Dreptele $A_i B_i$ formează cu axa absciselor unghiurile α_i . Să se arate că $\sum_{i=1}^n \text{ctg } \alpha_i = 0$. (Problemă de concurs).

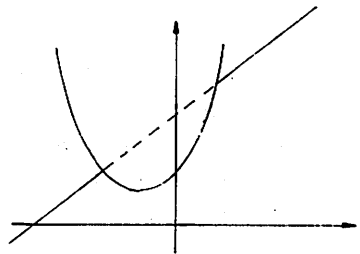


Fig. 12.

Soluție. Abscisele punctelor de intersecție A_i și B_i — respectiv x_i, x'_i — sînt rădăcinile ecuațiilor $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n - a = 0$ și $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n - b = 0$. Vom avea că $\operatorname{tg} \alpha_i = m_{A_i B_i} =$

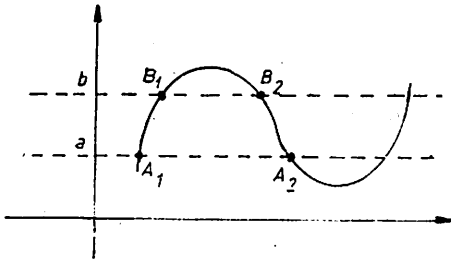


Fig. 13.

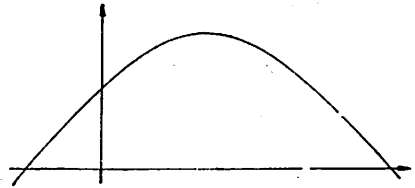


Fig. 14.

$$= \frac{b-a}{x'_i - x_i} \text{ și deci } \sum_{i=1}^n \operatorname{ctg} \alpha_i = \sum_{i=1}^n \frac{x'_i - x_i}{b-a} = \frac{1}{b-a} [(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n) - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)] = \frac{1}{b-a} (-a_1 + a_1) = 0$$

* * * *

64. Se dă graficul din figura 14 al funcției $y = ax^2 + bx + c$. Ce semne au numerele a, b, c ?

Soluție. Conform reprezentării grafice $x = 0 \Rightarrow y = c > 0$. Concavitatea curbei fiind îndreptată în jos, vom avea $y'' = a < 0$. Pe de altă parte, $y' = 2ax + b$ și deci punctul de maximum (unde se anulează derivata) este dat de $x = -b/2a > 0$, de unde $b > 0$.

* * * * *

65. Graficul funcției $y = f(x)$ este supus următoarelor transformări:

- 1° Translație pe direcția lui OX spre stînga cu 3 unități,
- 2° Simetrie față de axa ordonatelor,
- 3° Simetrie față de origine,
- 4° Se lasă la o parte partea de la stînga axei Oy .

Să se afle expresia funcției care dă noul grafic.

Soluție. $f_1(x) = f(x + 3), f_2(x) = f_1(-x), f_3(x) = -f_2(-x), f_4(x) = -f_3[(\sqrt{x})^2] \Rightarrow f_1(x) = f(x + 3), f_2(x) = f(-x - 3), f_3(x) = -f(x + 3), f_4(x) = -f[(\sqrt{x})^2 + 3]$.

* * * *

66. Să se reprezinte grafic funcția $x \rightarrow f(x) =$ distanța de la punctul de abscisă x la cel mai apropiat punct de abscisă întreagă pozitivă (ambele puncte fiind luate pe axa x -lor) și să se precizeze legea de corespondență.

Soluție.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dacă} & x \leq 1, \\ x - 1 & \text{dacă} & 1 < x \leq \frac{2}{3}, \\ 2 - x & \text{dacă} & \frac{3}{2} < x \leq 2, \\ x - 2 & \text{dacă} & 2 < x \leq \frac{5}{2}, \\ 3 - x & \text{dacă} & \frac{5}{2} < x \leq 3, \\ \dots & \dots & \dots \\ x - k & \text{dacă} & k < x \leq \frac{2k + 1}{2}, \\ k + 1 - x & \text{dacă} & \frac{2k + 1}{2} < x \leq k + 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dacă} & -\infty < x \leq 1, \\ x - k & \text{dacă} & k < x \leq k + 1/2, k \in \mathbb{N}, \\ k + 1 - x & \text{dacă} & k + 1/2 < x \leq k + 1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

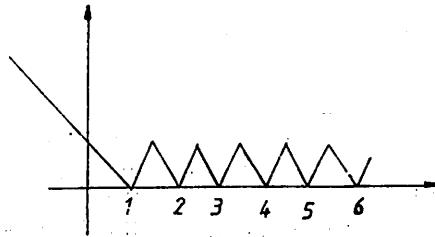


Fig. 15.

* * * * *

67. Se dă funcția $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{pentru } x \leq 0, \\ 3 - x & \text{pentru } x > 0. \end{cases}$

Să se afle funcția $f[f(x)]$ și să se construiască graficul.

Soluție. $f(x)$ se mai poate scrie și sub forma $f(x) = 3 - |x|$ și deci $f[f(x)] = g(x) = 3 - |3 - |x||$, adică

$$g(x) = f[f(x)] = \begin{cases} x + 6 & \text{pentru } x \leq -3, \\ -x & \text{pentru } -3 < x \leq 0, \\ x & \text{pentru } 0 < x \leq 3, \\ -x + 6 & \text{pentru } x > 3. \end{cases}$$

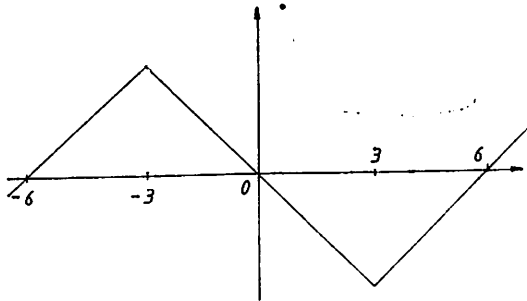


Fig. 16.

Graficul este format din câteva segmente de dreaptă și două semidrepte adică așa ca în figura 16.

7. PROBLEME DE CALCUL INTEGRAL

68. Să se găsească primitivele F și G astfel încât

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pentru } -2 < x < 1, \\ 2 & \text{,, } x = 1, \\ -4x + 6 & \text{,, } 1 < x < 3 \end{cases}$$

și $1^\circ F(1) = 4$, $2^\circ G(2) = 3$.

Soluție. $F(x)$ derivabilă $\Rightarrow F(x)$ — continuă.

$$1^\circ F(x) = \begin{cases} x^2 + a, & -2 < x < 1, \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + a) = 1 + a = 4 \Rightarrow a = 3, \\ 4, & x = 1 \\ -2x^2 + 6x + b, & 1 < x < 3, \lim_{x \rightarrow 1} (-2x^2 + 6x + b) = 4 + \\ & + b = 4 \Rightarrow b = 0, \end{cases}$$

$$\text{deci } F(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & -2 < x < 1, \\ 4, & x = 1, \\ -2x^2 + 6x, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

$$2^\circ G(2) = F(2) + C \Rightarrow 3 = 4 + C \Rightarrow C = -1; \text{ cum } G(x) = F(x) + C,$$

$$\text{avem c\aa } G(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 < x < 1, \\ 3, & x = 1, \\ -2x^2 + 6x - 1, & 1 < x < 3. \end{cases}$$

69. Are primitiv\aa func\ia

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & -2 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ -4x + 6, & 1 < x < 3? \end{cases}$$

Solu\ie. g este discontinu\aa in $x = 1$, deci nu poate fi derivata unei func\ii, deci nu are primitiv\aa.

Ar trebui s\aa avem $F'(1) = 2 \neq g(1) = 0$.

70. Este primitiv\aa func\ia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0? \end{cases}$$

$$\text{Solu\ie. } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \text{ Avem c\aa } F(x) = \begin{cases} -x + a, & x < 0, \\ b, & x = 0, \\ x + c, & x > 0. \end{cases}$$

Cum F trebuie s\aa fie continu\aa, vom avea $a = b = c$ \u0219i deci

$$F(x) = \begin{cases} -x + a, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ x + a, & x > 0. \end{cases}$$

dar aceast\aa func\ie nu este deci derivabil\aa in $x = 0$ \u0219i prin urmare nu poate fi primitiv\aa, deci $f(x)$ nu are primitiv\aa. Cum putem lua

$$a = 0, F(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & x > 0 \end{cases} \text{ e nederivabil\aa.}$$

71. S\aa se calculeze $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3} \pm \sqrt{4x+5}}$ (Gazeta Matematic\aa 10, 1976, Problema nr. 16121).

Soluție. Considerăm $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3+\sqrt{4x+5}}}$. Trebuie să

avem $4x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{4}$. Se vede că pentru $x \in \left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$

integrala are sens. Aplicind identitatea $\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C = \sqrt{A^2 - B}$, găsim $C = \sqrt{4x^2 + 12x + 9 - 4x - 5} =$

$$= 2|x+1| \text{ și } \sqrt{2x+3+\sqrt{4x+5}} = \sqrt{\frac{4x+5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}, x \in \left[-\frac{5}{4}, \infty\right).$$

Integrala devine deci $\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4x+5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sqrt{4x+5} + 1}$.

Notind $4x+5 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t dt$ și prin urmare

$$I = \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{2}t dt}{t+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} [t - \ln(t+1)] + C = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sqrt{4x+5} - \ln(1 + \sqrt{4x+5})] + C.$$

Considerind $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-\sqrt{4x+5}}}$ găsim că

$$\sqrt{2x+3-\sqrt{4x+5}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{4x+5}{2}}, & x \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right], \\ \sqrt{\frac{4x+5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}, & x \in (-1, \infty). \end{cases}$$

Procedind analog găsim în cazul $x \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right]$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-\sqrt{4x+5}}} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{1-\sqrt{4x+5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{t dt}{1-t} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{t-1+1}{t-1} dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} [t + \ln(t-1)] + C = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{4x+5} +$$

$$+ \ln|\sqrt{4x+5}-1|) + C,$$

iar în cazul $x \in (-1, \infty)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{4x+5}} = \sqrt{2} \int \frac{dx}{\sqrt{4x+5}-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{4x+5} + \ln|\sqrt{4x+5}-1|) + C.$$

* * * *

72. Să se demonstreze egalitatea :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

Soluție. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \Rightarrow$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{k!} + \dots \text{ și integrând șirul}$$

de puteri avem :

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = x \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \Big|_0^1 + \dots + \frac{x^k}{k \cdot k!} \Big|_0^1 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{k \cdot k!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}$$

Avem pe de altă parte :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k} \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{k} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=2}^m \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \right] \blacklozenge$$

$$+ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1)(m+2)\dots(m+k)} \Big] =$$

$$= \frac{1}{k} \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{m(m+1)(m+2)\dots(m+k)} \right] = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k!}$$

și prin urmare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!}.$$

* * * * *

73. Să se arate că $\frac{n(1 + \sqrt{n})}{2} \leq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \leq$

$$\leq \frac{4n\sqrt{n} + 3\sqrt{n} - 1}{6}.$$

Soluție. Construim trapezele pe $y = \sqrt{x}$ (fig. 17) \Rightarrow

$$\frac{(1 + \sqrt{n})}{2} (n - 1) \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{n})(n - 1) \leq -1 + 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}) - \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\frac{(1 + \sqrt{n})n}{2} \leq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} = S.$$

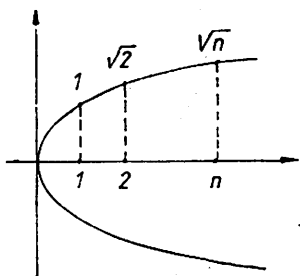


Fig. 17.

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{2} \leq \int_1^n \sqrt{x} dx = \int_1^n x^{1/2} dx =$$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_1^n = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^n = \frac{2}{3} n \sqrt{n} - \frac{2}{3}.$$

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{2}{3} n \sqrt{n} - \frac{2}{3} = \frac{4n\sqrt{n} + 3\sqrt{n} - 1}{6}.$$

Capitolul II

ALGEBRĂ

§ 1. NUMERE PRIME

* * * *

1. Pentru ce numere naturale k , numărul $k^{3k-1} + k + 1$ este prim?

Soluție.

$$\begin{aligned}
 k^{3k-1} + k + 1 &= k^{3k-1} - k^2 + k^2 + k + 1 = k^2(k^{3k-3} - 1) + k^2 + \\
 + k + 1 &= k^2[(k^3)^{k-1} - 1] + k^2 + k + 1 = k^2(k^3 - 1) [(k^3)^{k-2} \diamond \\
 &+ (k^3)^{k-3} + \dots + k^3 + 1] + k^2 + k + 1.
 \end{aligned}$$

Deci pentru $k > 1$, numărul este compus. Pentru $k = 1$ obținem 3 care este prim.

* *

2. Să se arate că numerele $\begin{cases} 2^{17} + 2^5 - 1, \\ 2^{12} - 2^5 - 1, \\ 2^{13} - 2^4 + 1 \end{cases}$ sînt numere compuse. (Exercițiu de concurs).

Soluție.

$$2^{17} + 2^5 - 1 = (2^6 - 1)(2^{11} + 2^5 + 1),$$

$$2^{12} - 2^5 - 1 = (2^4 + 1)(2^8 - 2^4 - 1),$$

$$2^{13} - 2^4 + 1 = (2^4 + 1)(2^9 - 2^5 + 1).$$

* * * * *

3. Să se arate că între n și $n!$ există cel puțin un număr prim.

Soluție. Considerăm numărul $n! - 1$ și p — prim un divizor al său. Avem că $p > n$, căci dacă $p < n \Rightarrow \begin{cases} p \mid n! \\ p \mid n! - 1 \end{cases} \Rightarrow p \mid 1$; dar $p < n!$,

deci propoziția este dovedită.

Notăție. „ $p \mid n$ ” înseamnă „ p este un divizor al lui n ”.

* * * * *

4. Să se arate că există o infinitate de numere de forma $2^n - 3$ prime între ele două câte două.

Soluție. Fie $a_1 = 2^{n_1} - 3$,

$$a_2 = 2^{n_2} - 3,$$

.....

$$a_k = 2^{n_k} - 3,$$

unde $2 = n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Considerăm numărul $l = a_1 a_2 \dots a_k$. Printre cele $l + 1$ numere $2^0, 2^1, \dots, 2^l$ există cel puțin două care împărțite la l dau același rest, fie acestea $2^r, 2^s$, unde $r > s$. Aceasta înseamnă că există un număr p în așa fel încît $pl = 2^r - 2^s = 2^s(2^{r-s} - 1)$. Deoarece l este impar rezultă că l nu divide pe 2^s și prin urmare divide pe $2^{r-s} - 1$, prin urmare există q astfel încît $ql = 2^{r-s} - 1$. Numărul $4ql + 1 = 4(2^{r-s} - 1) + 1 = 2^{r-s+2} - 3$ este prim cu l și deci cu fiecare din a_1, a_2, \dots, a_k și mai mare ca acestea fiind mai mare decît l , deci poate fi luat drept a_{k+1} . Prin urmare găsim k numere căutate il putem determina și pe al $(k + 1)$ -lea ceea ce arată că sînt o infinitate.

* * *

5. Să se găsească numărul prim „ p ”, știind că $p^2 - 2, 2p^2 - 1, 3p^2 + 4$ sînt de asemenea prime.

Soluție. Se observă că din primele numere prime, 3 și 7 verifică relațiile date. Să arătăm că sînt singurele soluții.

t fiind un număr natural, numărul p poate fi scris sub forma: $7t, 7t \pm 1, 7t \pm 2, 7t \pm 3$. Pentru $t > 1, p \neq 7t$ (p fiind prim).

Pentru $p = 7t \pm 1$, înlocuind în relația $3p^2 + 4 \Rightarrow 3 \cdot 49t^2 \pm 3 \cdot 14t + 3 + 4 : 7$ deci $p \neq 7t \pm 1$.

Pentru $p = 7t \pm 2$, relația $2p^2 - 1$ devine $2 \cdot 49t^2 \pm 2 \cdot 28t + 8 - 1 : 7$, deci $p \neq 7t \pm 2$.

Pentru $p = 7t \pm 3$ relația $p^2 - 2$ devine $49t^2 \pm 42t + 9 - 2 : 7$, deci $p \neq 7t \pm 3$.

Deci $p \in \{3, 7\}$:

Notafie. „ $p:q$ ” se citește „ p se divide prin q ”.

* * * * *

6. Fie numerele a și m prime între ele. Să se arate că se găsește un număr natural k încît ka împărțit la m să dea restul 1. Reciproca este adevărată?

Soluție. 1) Considerăm resturile împărțirii la m ca fiind $0, 1, 2, \dots, m-1$. Și fie $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$; cum a și m sînt prime între ele înseamnă că ka nu se divide la m și deci aparține claselor de resturi $\hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{m-1}$. Fie că pentru nici un k , ka nu face parte din clasa de resturi $\hat{1}$. Cum însă sînt $m-1$ numere de forma ka și avem clasele de resturi $\hat{2}, \hat{3}, \dots, \widehat{m-1}$, înseamnă că pentru $k_1 < k_2$, $k_1 a \equiv k_2 a \pmod{m} \Rightarrow k_2 a - k_1 a = (k_2 - k_1)a$ se divide cu m . Dar $0 < k_2 - k_1 < m$, adică $k_2 - k_1$ nu se divide cu m , și cum nici a nu se divide cu m , s-a ajuns la o contradicție. Prin urmare există un $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ așa încît ka împărțit la m să dea restul 1.

2) Știm că $ka = lm + 1$, unde $1 \leq k \leq m-1$.

Fie $d|a$ și $d|m \Rightarrow d|ka - lm = 1 \Rightarrow d = 1$, adică a și m sînt prime între ele.

În concluzie, condiția necesară și suficientă ca numerele a și m să fie prime între ele este ca să existe k și l așa încît $ka - lm = 1$, unde $1 \leq k \leq m-1$.

* *

7. Să se demonstreze că pentru polinomul $P_{(n)} = a_{1968}n^{1968} + \dots + a_1n + a_0$ cu coeficienți numere naturale, există numere naturale n_0 așa încît $P_{(n_0)}$ să nu fie numere prime.

Soluție. O soluție imediată este n_0 de forma „ pa_0^h ” cu $P_{(pa_0^h)} : a_0$.

Fie polinomul scris astfel :

$$P_{(n)} = a_{1968}(n^{1968} - p) + \dots + a_1(n - p) + a_0(1 - p) + p(a_{1968} +$$

$$+ \dots + a_1 + a_0) = (n - p) Q_{(n)} + p(a_{1968} + \dots + a_1) + a_0.$$

Luînd pe $n_0 = pA + a_0$ ($A = a_{1968} + \dots + a_1$), $A \neq 1$, obținem că $P_{(n_0)} = (pA + a_0) [Q_{(pA+a_0+p)} + 1]$ și deci $P_{(n_0)} : (pA + a_0)$.

* * * * *

8. Să se rezolve în numere prime ecuația $a^b + 1 = c$.

Soluție. Deoarece 1 nu-i considerat număr prim, $a^b \geq 2^2 \Rightarrow c \geq 5$.
Arătăm că $a = 2 = b$, $c = 5$ este singura soluție.

$a > 2 \Rightarrow a$ impar prim $\Rightarrow a^b - \text{impar} \Rightarrow c$ par $\Rightarrow c = 2$, contradicție $c \geq 5$. Dacă $a = 2$ și $b > 2$, $c = 2^b + 1 = (2 + 1)(2^{b-1} - 2^{b-2} + \dots + 2 + 1) = 3n$, absurd căci $c \geq 5$ este prim.

* *

9. Să se demonstreze că dacă \overline{abc} este prim, atunci $b^2 - 4ac$ nu este pătrat perfect, unde \overline{abc} înseamnă $100a + 10b + c$.

Soluție. Fie $b^2 - 4ac = d^2$, $d < b$ (evident).

$4a \cdot \overline{abc} = 400 a^2 + 40 ab + 4 ac = 400 a^2 + 40 ab + b^2 - d^2 = (20a + b)^2 - d^2 = (20a + b - d)(20a + b + d) \Rightarrow \overline{abc}$ divide fie pe $20a + b + d$ fie pe $20a + b - d$. Presupunind că \overline{abc} divide pe $20a + b - d$ ar însemna că $100a + 10b + c - 20a - b + d < 0 \Rightarrow 80a + 9b + c + d < 0$ ceea ce este fals ($a, b, c, d > 0$).

Deci \overline{abc} ar trebui să dividă pe $20a + b + c$. Adică, $80a + 8b + c + b - d < 0$. Dar în ipoteza că $d < b$ am ajuns la o absurditate căci $80a + 8b + c + b - d > 0$ (evident).

Deci $b^2 - 4ac \neq d^2$.

* * *

10. Să se arate că dacă $p(p > 3)$ și $10p + 1$ sînt prime, atunci $5p + 1$ se divide cu 6.

Soluție. Avem $p = 3k + 1$, căci $p = 3k - 1 \Rightarrow 10p + 1 = 30k - 9$ neprim, și atunci $5p + 1 = 5(3k + 1) + 1 = 15k + 6$, unde k va trebui să fie par căci altminteri $p = 3k + 1$ ar fi par și deci neprim.

§ 2. DIVIZIBILITATE

În acest paragraf „ $m:n$ ” va însemna „ m se divide prin n ”, iar „ $m \equiv n \pmod{p}$ ” adică „ m e congruent cu n modulo p ” va însemna că există un întreg k așa fel încît m se scrie de forma $m = kp + n$.

11. Cîți divizori are numărul 36? Care este suma acestor divizori?

Soluție. $36 = 2^2 \cdot 3^2$. 2 poate intra cu exponenții 0, 1, 2 în total $(2 + 1)$ ori. La fel 3, de $2 + 1$ ori. În total $(2 + 1)(2 + 1) = 9$ divizori.

Considerăm produsul: $(1 + 2 + 2^2)(1 + 3 + 3^2)$. Desfăcând parantezele, termenii sînt tocmai divizorii, deci vom avea $\frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = \frac{7 \cdot 26}{2} = 91$. În adevăr, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 sînt cei 9 divizori, iar $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 + 36 = 91$.

* * * * *

12. Să se arate că $88\dots 8$ (din 1974 cifre) se divide cu 13.

Soluție. $1001 : 13 \Rightarrow 111 \cdot 111 : 13$, iar $1974 = 329 \times 6$.

13. Cîți divizori are numărul $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$? Care este suma lor?

Soluție. $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$. Considerăm produsul $(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_n + p_n^2 + \dots + p_n^{\alpha_n})$, $S(d) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}$.

* * * * *

14. Să se arate că $2^9 + 2^{99}$ se divide cu 100.

Soluție. $2^9 + 2^{99} = (2^3 + 2^{33})(2^6 - 2^3 \cdot 2^{33} + 2^{66}) = (2 + 2^{11})(4 - 2 \cdot 2^{11} + 2^{22})m = 4 \cdot (1 + 2^{10}) \cdot n = 4 \cdot 1025 \cdot n = 4100 \cdot n$.

* * *

15. Să se arate că $2^{105} + 3^{105}$ este divizibil cu 5, 35, 275, 2315.

Soluție. $2^{105} + 3^{105} = (2^3)^{35} + (3^3)^{35} = 8^{35} + 27^{35} = (8 + 27)(8^{34} - 8^{33} \cdot 27 + \dots + 27^{34}) = 35(8^{34} - 8^{33} \cdot 27 + \dots + 27^{34})$.

$2^{105} + 3^{105} = (2^5)^{21} + (3^5)^{21} = 32^{21} + 243^{21} = (32 + 243)(32^{20} - 32^{19} \cdot 243 + \dots + 243^{20}) = 275(32^{20} - 32^{19} \cdot 243 + \dots + 243^{20})$.

$2^{105} + 3^{105} = (2^7)^{15} + (3^7)^{15} = 128^{15} + 2187^{15} = (128 + 2187)(124^{14} - 128^{13} \cdot 2187 + \dots + 2187^{14}) = 2315(128^{14} - 128^{13} \cdot 2187 + \dots + 2187^{14})$.

16. Să se arate că numărul $989^{987} + 987^{989}$ este divizibil prin 1976. (Gazeta Matematică 3, 1976, Problema nr. 15756).

$$\begin{aligned}
\text{Soluție. } 989^{987} + 987^{989} &= 989^{987} + 987^{987} - 987^{987} + 987^{989} = \\
&= (989 + 987)989^{987} - 989^{987} 987 + 987^{987} + 987^{987} (987^2 - 1) = \\
&= M 1976 - 987 (989^{987} - 987^{987}) + 988 \cdot 986 \cdot 987^{987} = \\
&= M 1976 - 987 (989^2 - 987^2) \sum_{n=1}^{493} 989^n 987^{n-493} + \\
&+ 1976 \cdot 493 \cdot 987^{987} = \\
&= M 1976 + 987 \cdot 2 \cdot 1976 \sum_{n=1}^{493} 989^n 987^{n-493} = M 1976,
\end{aligned}$$

unde prin M am notat un factor întreg pozitiv neprecizat.

17. Să se afle cel mai mic număr k astfel încât $N = 19^{23} \cdot 23^{19} + k$ să fie divizibil cu 40, unde k este număr natural. (Gazeta Matematică 3, 1976, Problema nr. 15745).

Soluție. $19^{23} \cdot 23^{19} + k \div 40$. Notind cu M_{40} un multiplu de 40 nespecificat, vom avea:

$$\begin{aligned}
19^{23} \cdot 23^{19} + k &= (19 \cdot 23)^{19} \cdot 19^4 + k = (M_{40} - 3)^{19} \cdot (M_{40} + 1)^2 + k = \\
&= (M_{40} - 3^{19}) (M_{40} + 1) + k = \\
&= [M_{40} - (3^4)^4 \cdot 3^3] (M_{40} + 1) + k = \\
&= [M_{40} - 27 (M_{40} + 1)^4] (M_{40} + 1) + k = \\
&= [M_{40} - 27(M_{40} + 1)] (M_{40} + 1) + k = \\
&= (M_{40} + 13) (M_{40} + 1) + k = \\
&= M_{40} + 13 + k \Rightarrow 13 + k \div 40 \Rightarrow k = 27.
\end{aligned}$$

* *

18. Să se afle citul și restul împărțirii numărului $15! + 200$ la 182.

Soluție. Se observă că $182 = 13 \cdot 14$, așa că

$$\frac{15! + 200}{182} = \frac{15!}{13 \cdot 14} + \frac{200}{182} = 12! \cdot 15 + 1 + \frac{18}{182}$$

Deci citul este $12! \cdot 15 + 1$, iar restul 18.

* * * * *

19. Să se demonstreze că din cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 nu se pot forma două numere de câte șapte cifre, diferite (în fiecare număr fiecare cifră intră o singură dată) astfel încât unul să se dividă cu celălalt.

Soluție. Fiecare asemenea număr dă restul 1 la împărțirea cu 9, deci $9m + 1 = \alpha(9n + 1) \Rightarrow \alpha - 1$ este divizibil prin 9 cu $1 \leq \alpha < 7 \Rightarrow \alpha = 1$, adică numerele sînt egale.

* * * * *

20. Se pot scrie cifrele 1, 2, 3, ..., 9 pe un arc într-o astfel de ordine încît suma oricăror două numere vecine să nu se dividă nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7? (Problemă de concurs).

Soluție. Pe un tabel (fig. 18) notăm cu + posibilitatea de a fi alături și cu - de a nu fi alături, ceea ce ne conduce la figura 19

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	/	-	+	-	-	-	+	-	-
2	-	/	-	-	-	+	-	-	+
3	+	-	/	-	+	-	-	+	-
4	-	-	-	/	-	-	+	-	+
5	-	-	+	-	/	+	-	+	-
6	-	+	-	-	+	/	+	-	-
7	+	-	-	+	-	+	/	-	+
8	-	-	+	-	+	-	-	/	+
9	-	+	-	+	-	-	+	+	/

Fig. 18.

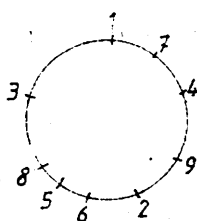


Fig. 19.

* * * * *

21. Se dau numerele 1, 2, 3, ..., 1000. Să se afle cel mai mare număr m , cu proprietatea că ștergînd oricare „ m ” numere din cele 1000 de numere, printre cele $1000 - m$ numere rămase există două astfel încît unul să-l dividă pe celălalt.

Soluție. Dacă $m \geq 500$, atunci stergind de exemplu numerele de la 1 la 500, printre numerele rămase de la 501 la 1000, nu există nici o pereche de numere care să poată fi divizibilă unul cu celălalt, căci raportul lor este mai mic decât 2.

Notăm că $m = 499$ are această proprietate. Să dovedim că printre oricare 501 numere de la 1 la 1000 există unul care să-l dividă pe altul.

Pe fiecare din cele 501 numere îl punem în corespondență cu cel mai mare divisor impar al său, deci numărului $2^k(2l+1)$ facem să-i corespundă $2l+1$. Numere împere pereche mai mici ca 1000 există 500, deci la două din cele 501 numere le va corespunde același număr impar. Din cele două numere în mod obligatoriu unul se va obține din celălalt prin înmulțirea cu o putere a lui 2.

22. Să se arate că dacă numărul impar $x0y0z$ atînce 500 $z - 50y + 5x$ are, (Gazeta Matematică 8, 1976, Problema 5596).

Soluție. $x0y0z \Leftrightarrow x0y0z = Kxz \Leftrightarrow x10^4 + y10^2 + z = \frac{Kxz}{10^2} \Leftrightarrow 10^2x + 10^2y + 10^2z = Kxz \Leftrightarrow 10^2x + 10^2y + 10^2z = Kxz$
 $\frac{10^2x + 10^2y + 10^2z}{Kxz} = 1 \Leftrightarrow \frac{10^2x}{Kxz} + \frac{10^2y}{Kxz} + \frac{10^2z}{Kxz} = 1 \Leftrightarrow \frac{10^2}{Kz} + \frac{10^2y}{Kxz} + \frac{10^2}{Kx} = 1$
 (evident, deoarece $K = 2p + 1$) și deci

$$= \frac{10^3 + 1 - 2p - 1}{2} = \frac{1000 - 2p}{2} = 500 - p \text{ (adică un număr întreg).}$$

23. Să se arate că numărul 5040 pentru orice număr natural.

Soluție: Observăm că $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Vom arăta pe rind că numărul $N = K[K^2(K^2 - 7)^2 - 36]$ se divide cu fiecare din factorii.

Fie $K = 2p$. Atunci $K[K^2(K^2 - 7)^2 - 36] = 2^3 p [p^2(4p^2 - 7)^2 - 9]$. Dacă p este par, evident N se divide prin 2^4 , iar dacă p este impar, atunci paranteza pătrată este pară ca diferență de 2 numere impare și deci N se divide și-n acest caz cu 2^4 .

Fie $K = 2p + 1 \Rightarrow N = (2p + 1) \{(2p + 1)^2 [(2p + 1)^2 - 7]^2 - 9\} = (2p + 1) \{(2p + 1)^2 (4p^2 + 4p + 1 - 7)^2 - 9\} = (2p + 1) \{(2p + 1)^2 (4p^2 + 4p - 6)^2 - 9\} = (2p + 1) \{2^2(2p^2 + 2p - 3)^2 - 9\} = (2p + 1) 2^2 \{(4p^2 + 4p + 1)(4p^2 + 12p^2 - 8p - 9)\}$. Evident, paranteza pătrată este divizibilă cu 4 așa că N se divide cu 2^4 .

Dacă $K \equiv 3p \pmod{5}$, evident $N \equiv 3 \pmod{5}$.
 Dacă $K \equiv 3p + 1 \pmod{5}$, $N \equiv (3p + 1)^2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow N \equiv 4 \pmod{5}$.
 Dacă $K \equiv 3p + 2 \pmod{5}$, $N \equiv (3p + 2)^2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow N \equiv 4 \pmod{5}$.
 Dacă $K \equiv 3p + 3 \pmod{5}$, $N \equiv (3p + 3)^2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow N \equiv 4 \pmod{5}$.
 Dacă $K \equiv 3p + 4 \pmod{5}$, $N \equiv (3p + 4)^2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow N \equiv 1 \pmod{5}$.
 Dacă $K \equiv 3p + 5 \pmod{5}$, $N \equiv (3p + 5)^2 \equiv 0 \pmod{5}$.

Dacă $K \equiv 5p \pmod{7}$, $N \equiv 5^2 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow N \equiv 4 \pmod{7}$.
 Dacă $K \equiv 5p + 1 \pmod{7}$, $N \equiv (5p + 1)^2 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow N \equiv 1 \pmod{7}$.
 Dacă $K \equiv 5p + 2 \pmod{7}$, $N \equiv (5p + 2)^2 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow N \equiv 4 \pmod{7}$.
 Dacă $K \equiv 5p + 3 \pmod{7}$, $N \equiv (5p + 3)^2 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow N \equiv 2 \pmod{7}$.
 Dacă $K \equiv 5p + 4 \pmod{7}$, $N \equiv (5p + 4)^2 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow N \equiv 4 \pmod{7}$.
 Dacă $K \equiv 5p + 5 \pmod{7}$, $N \equiv (5p + 5)^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow N \equiv 0 \pmod{7}$.

* * * *

24. Să se afle numerele x, y , astfel încât cel mai mare divizor comun al numerelor $3x + 2y$ și $2x + 3y$ să fie 8.

Soluție. Notind cu (m, n) cel mai mare divizor comun al lui m și n , vom avea
 $(2x + 3y, 3x + 2y) = (2x + 3y, x - y) = (x + 4y, x - y) = (x - y, 5y)$

Dacă $x - y \equiv 5n$, atunci $(x - y, 5y) = (5n, y) = (n, y)$, deci x, y trebuie ales astfel $x - y \equiv 5n$ și $(x, y) = 8$.

* * * * *

25. Printre 12 numere naturale consecutive cel puțin unul din ele este mai mic decât suma divizorilor săi (se consideră divizorii mai mici decât numărul).

Soluție. Printre 12 numere consecutive cel puțin unul se divide cu 12, fie acesta $12(m)$. Avem evident:
 $12m < 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + m + 2m + 3m + 4m + 6m + \dots$

26. Se utilizează sistemul zecimal de numerație. Fie A suma cifrelor numărului 4444^{4444} și fie B suma cifrelor lui A . Să se afle suma cifrelor numărului B . (Olimpiada XVII-a, U.R.S.S., 6 puncte).

Soluție. Deoarece $4444^{4444} < 10000^{4444}$ avem că numărul cifrelor numărului 4444^{4444} este mai mică decât $: 4444 \cdot 4 + 1 = 17777 < 20000$ așadar $A < 9 \cdot 20000 = 180000$ și prin urmare $B < 1 + 8 + 9 + 9 + 9 + 9$, deci $B < 45$. Notind cu C suma cifrelor lui B avem că $C < 4 + 9 = 13$.

Se știe că suma cifrelor dă prin împărțire la 9 același rest ca și numărul, de unde $4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C \pmod{9}$.

Pe de altă parte,

$$4444 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod{9} \Rightarrow$$

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{3 \cdot 1481} \cdot 7 \equiv (-8)^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{9}.$$

Prin urmare $C \equiv 7 \pmod{9}$. Cum $C < 13$ rezultă că $C = 7$.

* * * *

27. Fie a, b, c numere întregi și $a + b + c \equiv 6$. Să se arate că $a^5 + b^3 + c$ de asemenea se divide cu 6 (Problemă de baraj).

Soluție. Considerăm clasele de resturi modul 6 și puterile lor succesive:

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	2	4	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	1	5	1	5

Observăm că puterile 3 și 5 dau același rest împărțite la 6 ca și numerele, deci $a^5 + b^3 + c$ face parte din aceeași clasă cu $a + b + c$, deci $a^5 + b^3 + c \equiv 6$.

28. Notăm cu $Q(x)$ suma cifrelor lui x . Fie $n > 0$ un număr divizibil cu 9 având mai puțin de 10 miliarde de cifre. Să se arate că $Q(Q(Q(n))) = 9$. (Gazeta Matematică 12, 1976, Problema nr. 16323).

Soluție. n are mai puțin decât 10^{10} cifre, deci $Q(n) < 9 \cdot 10^{10}$

$$Q(n) < 90\,000\,000\,000 < 99\,999\,999\,999.$$

$$Q(Q(n)) < 11 \cdot 9 = 99 \Rightarrow Q(Q(Q(n))) < 18.$$

deci $n = 9\mu \Rightarrow Q(n) = 9\mu_1 \Rightarrow Q(Q(n)) = 9\mu_2 \Rightarrow Q(Q(Q(n))) = 9\mu_3$

$$\begin{cases} Q(Q(Q(n))) = 9\mu_3 \\ Q(Q(Q(n))) < 18 \end{cases} \Rightarrow Q(Q(Q(n))) = 9.$$

* *

29. Din trei cifre diferite și nenule s-au format toate numerele de câte trei cifre diferite și s-a observat că suma celor două mai mari este 1444. Care sînt cele trei cifre?

Soluție. Fie $a > b > c$. Cele mai mari abc , acb au suma

$$100a + 10b + c + 100a + 10c + b = 1444 \Rightarrow$$

$$11(b + c) - 44 = 200(7 - a) \Rightarrow 7 - a \mid 11 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow$$

$$b + c = 4 \Rightarrow b = 3, c = 1.$$

* * *

30. Să se afle astfel de numere x_1, x_2, \dots, x_{173} , încît $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{173}^2 \equiv 5$ iar $x_1 x_2 \dots x_{173}$ nu se divide cu 5.

Soluție. x_1, x_2, \dots, x_{173} sînt de forma $5m \pm 1, 5m \pm 2$, iar $(5m \pm 1)^2 \equiv 5n + 1$, $(5m \pm 2)^2 \equiv 5n - 1$. Vor fi K numere de forma $5m \pm 1$ și $173 - K$ de forma $5m \pm 2$.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{173}^2 = 5M + K + 5N - (173 - K) =$$

$$= 5(M + N) - (173 - 2K) \Rightarrow 2K - 3 \equiv 5 \Rightarrow K = 5l + 4 \quad (0 \leq l \leq 33).$$

$5l + 4$ numere de forma $5m \pm 1$, restul de forma $5m \pm 2$.

* * * *

31. Se dau 40 numere oarecare, nici unul nu se divide cu 5. Să se arate că suma puterilor 40 a acestor numere se divide cu 5. (Problemă de baraj).

Soluție. Puterea a patra a oricărui număr care nu se divide cu 5 dă restul 1 prin împărțirea cu 5, deci și puterea a 40-a.

n	n^2	n^3	n^4
1	1	1	1
2	4	3	1
3	4	2	1
4	1	4	1

Cum sînt 40 numere, deci 40 de 1, rezultă cã suma se divide cu 5.

32. Sã se demonstreze cã orice *număr natural nedepășind pe* $n!$ *se poate reprezenta ca o sumă de cel mult* n *termeni diferiți și divizori ai lui* $n!$ (Olimpiada 1968, U.R.S.S.).

Soluție. Pentru $n! = 3! = 6$ avem cã $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$,

$$4 = 1 + 3, 5 = 2 + 3, 6 = 1 + 2 + 3$$

Fie $a \leq (n+1)!$. Împărțim la $n+1$ ne dă $a = (n+1)d + r$ unde $d \leq n!$, $0 \leq r < n+1$. Cum $d \leq n! \Rightarrow d = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ diferiți și divizori ai lui $n!$ și prin urmare $a = (n+1)d_1 + (n+1)d_2 + \dots + (n+1)d_n + r$ care sînt numere diferite și divizori ai lui $(n+1)!$ cãci $r < n+1$.

33. Se dau $2n$ cifre $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$. Numărul A format de $a_1 a_2 \dots a_n$ este de două ori cît numărul B format de $a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{2n}$. Suma primelor n cifre este egală cu suma ultimelor n cifre. Sã se arate cã suma tuturor cifrelor se divide cît 9. (Problema de concurs).

Soluție. A și B dau același rest la împărțirea cu 9 (cf. rezolvarea problemei 26):

$$B = M \cdot 9 + r, \\ A = M \cdot 9 + r, \quad * * * *$$

Iar A se mai poate scrie și sub forma $A = M \cdot 9 + 2r$, unde M este un factor întreg neprecizat, așa cã $r = M \cdot 9$, $r < 9 \Rightarrow r = 0$ deci A și B se divid cu 9, adică suma cifrelor se divide cu 9.

34. Dacă a, b, c, d sînt întregi nedivizibili cu 5, atunci expresia $E = a^4 + 2b^4 + 3c^4 + 4d^4$ este divizibilă cu 5. (Gazeta Matematică, 3, 1976, Problema nr. 15746).

Soluție. Dacă a, b, c, d sînt întregi nedivizibili cu 5 atunci ei pot fi numai de forma $M \cdot 5 \pm 1$ și $M \cdot 5 \pm 2$, iar $(M \cdot 5 \pm 1)^4 = M \cdot 5 + 1$, $(M \cdot 5 \pm 2)^4 = M \cdot 5 + 16 = M \cdot 5 + 1$ și expresia devine,

$$a^4 + 2b^4 + 3c^4 + 4d^4 = (M \cdot 5 + 1) + 2(M \cdot 5 + 1) + 3(M \cdot 5 + 1) + 4(M \cdot 5 + 1) = M \cdot 5.$$

35. Să se arate că $2a^3 - 3a^2b + 2b^3 \equiv 0 \pmod{5}$ dacă $a \equiv b \pmod{5}$.
 Soluție. Fie $b \neq 0$; avem că $2a^3 - 3a^2b + 2b^3 \equiv 0 \pmod{5}$. Există b^{-1} și

deci $2(ab^{-1})^3 - 3(ab^{-1})^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ sau $2x^3 - 3x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$. Dar ecuația nu are rădăcini în Z și prin urmare $b \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{5}$, deci a și b se divid cu 5, unde $x \equiv 0 \pmod{5}$ înseamnă $x \equiv 0 \pmod{5}$.

* * * *

36. Să se arate că $3^{2n} + 2n \equiv 3 \pmod{4}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluție. Să notăm $P_n = 3^{2n} + 2n + 3$. Atunci, aplicind principiul inducției complete, vom avea că $P_1 = 3^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 14 \equiv 2 \pmod{4}$.
 enișdo mov, amiq el el-ubruvuba

$$P_1 = 3 + 2 + 3 = 8$$

$$P_{n+1} = 3^{2(n+1)} + 2(n+1) + 3 = 3^2(3^{2n} + 2n + 3) + 4n - 9 + 2n + 3 = 3(3^{2n} + 2n + 3) - 4n - 4 = 3P_n - 4n - 4$$

* * * *

37. Să se arate că $n^{2k+2} + (n+1)^{2k+1} \equiv n^{2k+1} + (n+1)^{2k+2} \pmod{2k+3}$.

Soluție. Demonstrație prin inducție. $k=0$ evident.

$$n^{2k+3} + (n+1)^{2k+3} = n[n^{2k+2} + (n+1)^{2k+1}] + (n^2 + n + 1)(n+1)^{2k+1}$$

Sau altă rezolvare: Fie α_i soluția ecuației $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2k+3} \Rightarrow \alpha_i^2 = -\alpha_i - 1$, $\alpha_i + 1 = -\alpha_i^2$. Se vede că α_i sînt rădăcinile polinomului $x^{2k+2} + (x+1)^{2k+1}$ căci $\alpha_i^{2k+2} + (\alpha_i + 1)^{2k+1} = \alpha_i^{2k+2} - \alpha_i^{2k+2} = 0$.

* * * *

38. Să se demonstreze că $(a+b)^{2k} + a^{2k} + b^{2k} \equiv a^2 + ab + b^2 \pmod{3}$ dacă k este natural nedivizibil cu 3.

Soluție. Fie a rădăcina $\neq 1$ a ecuației $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Considerăm funcția $f(x) = (1+x)^{2k} + x^{2k} + 1$. $f(a) = 0$ și $f(b) = 0$ deoarece $a^2 + a + 1 \equiv 0$ și $b^2 + b + 1 \equiv 0$. Prin urmare, $f(x)$ se divide cu $(x-a)(x-b) = x^2 + x + 1$. Punind $x = 1$ obținem afirmația respectivă.

39. Să se arate că dacă numerele $N_k = \overline{a_{k1} a_{k2} \dots a_{kn}}$ ($k = 1, \dots, n$) scrise în baza 10 se divid prin $d \in \mathbb{N}$, atunci determinantul $\Delta = |a_{ij}|$ ($i, j = 1, \dots, n$) se divide prin d . (Gazeta Matematică 11, 1976 Problema nr. 16169).

Soluție. Fie

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Înmulțind coloanele respectiv cu $10^{n-1}, 10^{n-2}, \dots, 10^0$ și adunându-le la prima, vom obține:

$$\begin{aligned} \Delta \cdot 10^{n-1+n-2+\dots+1} &= \begin{vmatrix} N_1 & 10^{n-2} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ N_2 & 10^{n-3} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n & 10^{n-2} a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= 10^{n-2+n-3+\dots+1} \begin{vmatrix} N_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ N_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Și, prin urmare,

$$\Delta = \frac{1}{10^{n-1}} \begin{vmatrix} N_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ N_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

În cazul cînd d nu conține factorul 10, determinantul se divide prin d avînd elementele primei coloane divizibile prin d . Dacă însă d se divide prin 10, atunci prin ipoteză toate numerele N_k , ($k = 1, \dots, n$) se divid prin 10 și deci ultimele lor cifre $a_{kn} = 0$ ($k = 1, \dots, n$) ceea ce implică $\Delta = 0$ și deci și-n acest caz Δ este divizibil cu d (fiind divizibil cu orice număr).

* * * * *

40. α) Fie $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Să se arate că dacă $a^m \nmid 1$,

$$a^n \nmid 1 \Rightarrow m \mid n.$$

β) Fie $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ și prim cu b . Să se arate că dacă

$$b^m \mid a^n + b^n \Rightarrow m \mid n.$$

Vom stabili numai cazul β) căci cazul α) se obține pentru $b = 1$.

Soluție. Fie $m = qn + r$ și $d_k = a^{m-nk} + (-1)^k b^{m-nk}$ ($k = 0, 1, 2,$

$$\dots, q) \Rightarrow d_0 = a^m + b^m \mid (a^n + b^n),$$

$$d_{k+1} = a^{m-nk-n} - (-1)^k b^{m-nk-n} \mid a^n \Rightarrow$$

$$d_k - a^n d_{k+1} = (-1)^k b^{m-nk-n} (a^n + b^n) \Rightarrow$$

$$d_k \mid (a^n + b^n) \Rightarrow d_{k+1} \mid (a^n + b^n) \Rightarrow d_q \mid (a^n + b^n).$$

$$d_q = a^r + (-1)^q b^r \mid (a^n + b^n) \text{ dar}$$

$$\mid a^r + (-1)^q b^r \mid \leq a^r + b^r < a^n + b^n$$

$$a^r + (-1)^q b^r = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow m \mid n.$$

* * * * *

41. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există un număr format din cifrele 1 și 2 care să se dividă cu 2^n .

Soluție. Inducție. $n = 1 \Rightarrow 2 \mid 2^1$.

Să presupunem că A are n cifre 1, 2 și se divide cu $2^n \Rightarrow A = 2^n \cdot B$.

$$\overline{1A} = 10^n + A = 10^n + 2^n \cdot B = 2^n(5^n + B).$$

$$\overline{2A} = 2 \cdot 10^n + A = 2 \cdot 10^n + 2^n \cdot B = 2^n(2 \cdot 5^n + B).$$

Dar, dintre $5^n + B$, $2 \cdot 5^n + B$ unul se divide cu 2, prin urmare se găsește un număr format din 1, 2 care se divide cu 2^{n+1} .

* * * * *

42. Să se demonstreze că pentru orice număr impar a există un b astfel încât $2^b - 1$ să se dividă cu a .

Soluție. Considerăm numerele $2^0 - 1, 2^1 - 1, \dots, 2^a - 1$ în număr de $a + 1$. Două din acestea împărțite la a dau același rest,

fie aceste \$2^m - 1, 2^k - 1; m > k; m, k \le a\$. Diferența lor \$2^m - 1 - (2^k - 1) = 2^m - 2^k = 2^k(2^{m-k} - 1)\$. Cum \$a - \text{impar}\$ nu poate divide \$2^k\$ care are numai divizori pari (\$a\$ numai impari), rezultă că \$2^{m-k} - 1 \equiv 1 \pmod{a}\$, deci \$m - k \equiv 0 \pmod{a}\$. \$\dots\$

43. Să se arate că \$\frac{(2m)! (2n)!}{m! n! (m+n)!}\$ este un număr natural.

Soluție. Fie \$p\$ un număr prim, iar \$k\$ un număr natural așa fel încît \$p^{k+1} > 2m, p^{k+1} > 2n\$. Atunci \$p^{k+1} > m + n\$. Pe de altă parte \$(2m)!\$ se mai poate scrie și sub forma

$$(2m)! = 1 \dots p \dots (2p-1)p \dots (p^2-1)p \dots (p^k-1)p \dots (2p-1)p \dots \dots 2p^2 \dots (p^k-1)p \dots p^k + \dots (p^k-1)p \dots + 2m \dots$$

de unde deducem că \$(2m)!\$ conține numărul prim \$p\$ cel mult la

puterea \$q = \left[\frac{2m}{p} \right] + \left[\frac{2m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{2m}{p^k} \right]\$, căci \$\left[\frac{2m}{p^k} \right]\$ reprezintă

de câte ori a intrat în \$(2m)!\$ numărul prim \$p\$ (fiind numărat o singură dată, indiferent la ce putere s-a găsit), apoi \$\left[\frac{2m}{p^2} \right]\$ reprezintă de câte ori a intrat \$p\$ la o putere cel puțin egală cu 2 (se vede că-n felul acesta, fiecare \$p\$ din această categorie este numărat a 2-a oară) și așa mai departe pînă la \$\left[\frac{2m}{p^k} \right]\$ reprezentînd de câte ori a intrat \$p\$ la o putere egală cu \$k\$ (în felul acesta diferenții factori ai lui \$p^k\$ sînt numărați a \$k\$-a oară). Așadar, puterea cea mai mare la care se găsește \$p\$ în numărul \$(2m)! (2n)!\$ este

$$s = \left[\frac{2m}{p} \right] + \left[\frac{2m}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{2m}{p^k} \right] + \left[\frac{2n}{p} \right] + \dots + \left[\frac{2n}{p^k} \right] + \dots$$

și cum \$p^{k+1} > m + n\$, rezultă că \$s \ge \log_p(m+n) + 1\$, deci \$p^s > m+n\$, ceea ce înseamnă că \$p^s\$ este divizibil de \$(m+n)!\$, deci \$\frac{(2m)! (2n)!}{m! n! (m+n)!}\$ este un număr natural.

iar în numărul $m!n!$ (m, n), este

$$t = \left[\frac{m}{p} \right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k} \right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k} \right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k} \right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k} \right] + \dots$$

unde $a^b = \frac{m}{p^k}$, rezultă că exponentul numărului prim p care împarte la numărul este cel puțin egal cu $\frac{m}{p^k}$ și cum p era un număr prim arbitrar, rezultă că fracția va fi un număr natural.

Cum $[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x + y]$, aplicând această inegalitate găsim că la numărător exponentul numărului prim p este cel puțin egal cu exponentul de la numitor și cum p era un număr prim arbitrar, rezultă că fracția va fi un număr natural.

Soluție. Numerele care se divid cu p sunt în număr de $\left[\frac{n}{p} \right]$.

$$44. \text{ Se arată că } \left[\frac{n}{p} \right] - \frac{\prod_{k=1}^n (nm_k)!}{\prod_{k=1}^n (m_k)!} \text{ este un număr natural.}$$

Dacă n este un număr de 0 , rezultă că dacă p este un număr prim, iar q un număr natural așa că $p > nm_k (k=1, \dots, n)$, atunci dacă descompunem numărătorul într-un produs de factori primi care să fie scriși o singură dată și la puterea cea mai mare, exponentul lui p va fi $s = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nm_k}{p^i} \right]$.

Soluție. Răzînd ca-n problema nr. 43, rezultă că dacă p este un număr prim, iar q un număr natural așa că $p > nm_k (k=1, \dots, n)$, atunci dacă descompunem numărătorul într-un produs de factori primi care să fie scriși o singură dată și la puterea cea mai mare, exponentul lui p va fi $s = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{nm_k}{p^i} \right]$.

Exponentul lui p din numitor este $t = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{p^i} \right]$. Dacă $p > nm_k$, atunci $\left[\frac{nm_k}{p^i} \right] = \sum_{j=1}^i \left[\frac{m_k}{p^j} \right]$. Astfel $s = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i \left[\frac{m_k}{p^j} \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{p^j} \right] \cdot j = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{p^j} \right] \cdot j$.

$$s - t = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{p^j} \right] \cdot j - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{p^i} \right] = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{p^j} \right] \cdot (j - 1)$$

Avem că $j - 1 < \frac{m_k}{p^j}$ pentru orice $j \geq 1$ și $m_k < p^j$. Astfel $\left[\frac{m_k}{p^j} \right] \cdot (j - 1) < \left[\frac{m_k}{p^j} \right] \cdot \frac{m_k}{p^j} < 1$. Deci $s - t < n$. Deoarece $s - t$ este un număr natural, rezultă că $s - t = 0$.

Cum însă, în virtutea problemei precedente,

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{nm_k}{p^i} \right] \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \left[\frac{m_p}{p^i} \right] + \left[\sum_{i=1}^n \frac{m_k}{p^i} \right] \quad (i = 1, \dots, q)$$

(unde $\frac{m_k}{p^i} = a_p$), rezultă că exponentul numărului prim p care intervine în descompunerea de mai sus în factori primi ai număratorului este cel puțin egal cu exponentul corespunzător al lui p de la numitor, dar p fiind un număr prim arbitrar rezultă că fracția va fi un număr natural.

* * * * *

45. Din numere de la 1 pînă la n se formează produse din h (fixat) factori. Cîte din aceste produse se divid cu un număr prim $p \leq n$ -prim?

Soluție. Numerele care se divid cu p sînt în număr de $\left[\frac{n}{p} \right]$,

iar cele care nu se divid cu p sînt $n - \left[\frac{n}{p} \right]$. Numărul produselor care nu se divid cu p va fi $C_{n - \left[\frac{n}{p} \right]}^h$, iar cele care se divid cu p

vor fi în număr de $C_n^h - C_{n - \left[\frac{n}{p} \right]}^h$. Dacă $n - \left[\frac{n}{p} \right] < k \leq n$, atunci obținem chiar C_n^k .

* * * * *

46. Să se arate că suma pătratelor a cinci numere consecutive nu poate fi pătrat perfect.

Soluție. $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$. Pentru ca $5(n^2 + 2)$ să fie un pătrat perfect trebuie ca $n^2 + 2$ să fie divizibil cu 5, ceea ce nu se poate deoarece $n^2 + 2$ este congruent cu 1, 2, 3 (mod 5).

* * * * *

47. Numerele 11111, 11112, ..., 99999 așezate într-o ordine oarecare formează un număr de 444445 cifre. De ce? Să se arate că numărul astfel obținut nu poate fi o putere a lui 2. (Problemă de concurs).

Soluție. Se obțin $(99999 - 11110)5 = 88889 \cdot 5 = 444445$ cifre. Avem că $10^5 \cdot a = (99999 + 1) \cdot a = m \cdot 11111 + a$, adică înmulțind

un număr cu 10^5 restul împărțirii cu 11111 nu se schimbă. Numărul nostru va fi $a_{p_1} + 10^5 a_{p_2} + (10^5)^2 a_{p_3} + \dots + (10^5)^{n-1} a_{p_n}$ și restul împărțirii acestui număr la 11111 va fi $a_{p_1} + a_{p_2} + \dots + a_{p_n} = 11111 + 111112 + \dots + 99999$ care împărțit la 11111 dă restul zero. Astfel numărul format se divide la 11111 or nici o putere a lui 2 nu se divide cu acest număr.

§ 3. SISTEME DE NUMERAȚIE

* * * * *

48. Să se găsească sistemele de numerație $a, b, c \leq 10$ în care avem relația $111_{(a)} \cdot 111_{(b)} = 111_{(c)}$

Soluție. 1° Dacă $a \geq 4$ sau $b \geq 4$, atunci $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1) \geq 7 \cdot 21 = 147 \geq 111_{10}$, deci nu pot avea $a \geq 4$ sau $b \geq 4$.
 $(2,2) \Rightarrow c^2 + c + 1 = 49 \Rightarrow c^2 + c - 48 = 0$ nu are soluții naturale

$$\begin{cases} (2,3) \\ (3,2) \end{cases} \Rightarrow c^2 + c + 1 = 7 \cdot 13 \Rightarrow c = 9 \Rightarrow \begin{cases} (2, 3, 9), \\ (3, 2, 9). \end{cases}$$

$$(3,3) \Rightarrow c^2 + c + 1 = 169 > 111 \text{ imposibil.}$$

§ 4. FRACTII ZECIMALE

* * * * *

49. Să se calculeze $\frac{1}{1,0 \dots 01}$ cu 200 zecimale după virgulă.

Soluție. Notăm $0,00 \dots 01 = a$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} &= \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - a \frac{1+a-a}{1+a} = 1 - a + a^2 \frac{1+a-a}{1+a} = \\ &= 1 - a + a^2 - \frac{a^3}{1+a} \Rightarrow \frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - \frac{a^3}{1+a} = 1 - \\ &- \frac{1}{10^{100}} + \frac{1}{10^{200}} - \frac{a^3}{1+a} = \underbrace{0,999 \dots 9}_{100 \text{ de } 9} \underbrace{00 \dots 01}_{99 \text{ de } 0} - \frac{a^3}{1+a}. \text{ Avem că} \end{aligned}$$

$$\frac{a^3}{1+a} < a^3 = \frac{1}{10^{300}} \text{ și de aceea } \frac{1}{1+a} \text{ cu } 200 \text{ zecimale se scrie } \underbrace{0,9 \dots 9}_{100 \text{ de } 9} \underbrace{0 \dots 0}_{100 \text{ de } 0}.$$

50. Calculați $\sqrt{0,99\dots 9}$ cu 100 zecimale după virgulă.

Soluție. $0,99\dots 9 < 1$ deci rădăcina pătrată este subunitară dar mai mare decât numărul, prin urmare $0,99\dots 9 < \sqrt{0,99\dots 9} < 1$

deci răspunsul este $0,99\dots 9$.

51. Să se arate că pentru orice număr natural n suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ se exprimă ca un număr periodic mixt.

Soluție. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)}$

Să arătăm mai întâi că suma de mai sus este de forma

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{p}{2q}$$

cu p, q primi între ei. Într-adevăr, dacă n este impar, atunci numărătorul este impar, iar numitorul par. Dacă $n = 2m$, atunci

$$\frac{3n^2 + 6n + 2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2(6m^2 + 6m + 1)}{4m(2m+1)(m+1)} = \frac{6m^2 + 6m + 1}{2m(m+1)(2m+1)} = \frac{p}{2q}$$

Evident, $\frac{p}{2q}$ se poate scrie ca o fracție zecimală periodică. Să arătăm că-i o fracție zecimală periodică mixtă, adică are și o parte neperiodică. Demonstrația o vom face prin reducere la absurd. Să presupunem prin absurd că n-ar exista o astfel de parte neperiodică.

Atunci numărul nostru $N = \frac{p}{2q}$ s-ar scrie sub forma

$$N = \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{p+1}} + \dots + \frac{1}{10^{p+k}} + \frac{1}{10^{p+k}} \cdot \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{p+k}} \cdot \frac{1}{10^{p+k}} + \dots = \frac{1}{10^p} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) + \frac{1}{10^{p+k}} \left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{p+1}} + \dots \right)$$

unde numitorul $10^p - 1$ este un număr impar, așa că N nu poate fi de forma $\frac{p}{2q}$.

* * * *

§ 5. PARTEA ÎNTREAGĂ ȘI CEA ZECIMALĂ

52. Să se afle partea întreagă din $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3$.

Soluție. $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow a^3 = 6 + 6a$ deci a satisface ecuația $x^3 - 6x - 6 = 0$ și este singura rădăcină pozitivă. Conform problemei 171 de mai jos, $a < \sqrt[3]{24}$.

$$f(x) = x^3 - 6x - 6,$$

$$f(\sqrt[3]{23}) = 23 - 6\sqrt[3]{23} - 6 = 17 - 6\sqrt[3]{23} < 0 \text{ deci } a > \sqrt[3]{23}.$$

prin urmare $\sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{24} \Rightarrow 23 < (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 < 24$ deci partea întreagă este 23.

* * * *

53. Să se arate $[\log_2 x] - \log_2 [x] = [\log_2 [x]] - [\log_2 [x]]$

Soluție. Fie $x = 2^k \cdot \frac{2^\alpha}{(1+\alpha)C}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha < 1$, $\dots + \frac{1}{2^{\alpha-1}(1+\alpha)C} + \frac{2^k}{(1+\alpha)C} \leq x = 2^{k+\alpha} \Rightarrow k \leq \log_2 [x] \leq \log_2 x = k + \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}$

$$\log_2 [x] = k, \quad [\log_2 x] = k;$$

$$\log_2 x - \log_2 [x] = k + \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} - k = \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} \Rightarrow [\log_2 x] - \log_2 [x] = 0,$$

$$[\log_2 x] - [\log_2 [x]] = k - k = 0 \Rightarrow$$

$$= \left[\dots + \frac{1}{(1+[\log_2 x] - \log_2 [x])C} \right] = \left[[\log_2 x] - [\log_2 [x]] + \frac{1}{2^{\alpha-1}(1+\alpha)C} \right] = 0$$

* * * *

54. Să se afle suma $\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{2m}{n} \right\} + \left\{ \frac{3m}{n} \right\} + \dots + \left\{ (n-1) \frac{m}{n} \right\}$,

unde m, n sînt prime între ele și $\{a\}$, partea fracționară a lui a .

Soluție. Avem că $\{m\} = 0$. $1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow k \frac{m}{n}$ — fracție \Rightarrow

$$\left\{ k \frac{m}{n} \right\} + \left\{ (n-k) \frac{m}{n} \right\} = 1 \text{ căci } k \frac{m}{n} + (n-k) \frac{m}{n} = m.$$

$$S = \left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{2m}{n} \right\} + \dots + \left\{ (n-1) \frac{m}{n} \right\}$$

$$S = \left\{ (n-1) \frac{m}{n} \right\} + \left\{ (n-2) \frac{m}{n} \right\} + \dots + \left\{ \frac{m}{n} \right\}$$

$$2S = n-1 \Rightarrow \boxed{S = \frac{n-1}{2}} \text{ (nu depinde de } m).$$

De exemplu : $\left\{ \frac{3}{5} \right\} + \left\{ \frac{6}{5} \right\} + \left\{ \frac{9}{5} \right\} + \left\{ \frac{12}{5} \right\} = 0,6 + 0,2 + 0,8 + 0,4 = 2.$

§ 6. NUMERE IRAȚIONALE

* * * * *

55. Să se arate că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ este irațional.

Soluție. Fie $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2^2}} + \frac{1}{2^{3^2}} + \dots + \frac{1}{2^{n^2}} + \dots = \frac{a}{b} \mid b \cdot 2^{n^2} (a, b \in \mathbb{N}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \cdot 2^{n^2} - b(2^{(n+1)^2 - n^2} + 2^{n^2 - 2^2} + \dots + 1) = b \left[\frac{1}{2^{(n+1)^2 - n^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{(n+2)^2 - n^2}} + \dots \right]; \frac{1}{2^{(n+k)^2 - n^2}} \leq \frac{1}{2^{k(2n+1)}}. \text{ Dar, având în vedere ca}$$

$$\frac{1}{a^p} + \frac{1}{a^{p+1}} + \dots = x \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{a^{p+1}} + \frac{1}{a^{p+2}} + \dots \Rightarrow x - \frac{x}{a} = \frac{1}{a^p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \left(1 - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a^p} \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{a^p}}{1 - \frac{1}{a}}, \text{ rezultă că}$$

$$b \left[\frac{1}{2^{(n+1)^2 - n^2}} + \frac{1}{2^{(n+2)^2 - n^2}} + \dots \right] \leq b \left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2(2n+1)}} + \dots \right] =$$

$$= b \frac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{2^{2n+1}}} = \frac{b}{2^{2n+1} - 1}.$$

Cum această fracție pentru n suficient de mare este subunitară rezultă că egalitatea este imposibilă.

56. Să se arate că $\sqrt{2}$ este irațional.

Soluție. $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$; $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = 2x_1, x > x_1, \Rightarrow$

$$4x_1^2 = 2y^2 \Rightarrow y^2 = 2x_1^2 \Rightarrow y = 2y_1, y > y_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1^2 = 2y_1^2.$$

$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow (x_1, y_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x > x_1 > \dots > 0 \\ y > y_1 > \dots > 0 \end{cases} \Rightarrow$ un șir descrescător de numere naturale este infinit, absurd!

* * * * *

57. Să se afle primele 100 zecimale după virgulă în scrierea zecimală a numărului $(5 + \sqrt{26})^{101}$.

Soluție. Cu ajutorul formulei lui Newton ne convingem ușor că dacă $(\sqrt{26} + 5)^{101} = A + B\sqrt{26} \Rightarrow (\sqrt{26} - 5)^{101} = -A + B\sqrt{26}$ și de aceea $(\sqrt{26} + 5)^{101} - (\sqrt{26} - 5)^{101} \in \mathbb{Z}$. De asemenea $(\sqrt{26} - 5)^{101} < 0, 1^{101} < \frac{1}{10^{100}}$, astfel încît primele 100 zecimale ale numărului $(\sqrt{26} - 5)^{101}$ sînt zerouri și de asemenea pentru numărul $(\sqrt{26} + 5)^{101}$.

§ 7. ALTE CAPITOLE DE TEORIA NUMERELOR

* *

58. Se știe că $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ și $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$. Cu ce cifră se termină $1 + 2 + \dots + n$ dacă $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ se termină cu cifra 1?

Soluție: $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ se termină în 1 $\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$ se termină în 1 sau 9. Dacă $\frac{n(n+1)}{2}$ se termină în 9 $\Rightarrow n(n+1)$ se termină în 8. Dar două numere consecutive înmulțite se pot termina în : 0, 2, 6. Rezultă că $\frac{n(n+1)}{2}$ se termină în 1.

59. Să se arate că numărul 1 se poate scrie ca o sumă de n fracții cu numărătorul 1, adică sub forma $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

Soluție. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}}$.

60. Se dau 17 numere naturale a_1, a_2, \dots, a_{17} și se știe că $a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_{17}^2$. Să se demonstreze că $a_1 = a_2 = \dots = a_{17}$.

Soluție. Fie că două numere sînt diferite și le-am ordonat, așa încît cel mai mare din ele să fie pe primul loc și celălalt pe locul doi. $a_1 > a_2 \Rightarrow a_2 < a_3 < a_4 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{16} < a_{17} \Rightarrow a_{17} > a_1 \Rightarrow a_1 < a_2$, ceea ce reprezintă o contradicție. Analog pentru cazul $a_1 < a_2$: $a_1 < a_2 \Rightarrow a_2 > a_3 > a_4 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_{16} > a_{17} \Rightarrow a_{17} < a_1 \Rightarrow a_1 > a_2$.

Rezultă prin urmare că nu putem avea, decît $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{17}$.

61. Pentru ce valori ale lui n numărul $n - 2$ este o serie cu un număr de n - 2 cifre?

Soluție. $n \geq 10 \Rightarrow n^{n-2} \geq 10^{n-2}$ care are n - 1 cifre. Așadar $n < 10$. Făcînd calculele, se constată, că, toate numerele naturale de la 3 la 9 sînt soluții ale problemei, căci $3^1 = 3, 4^2 = 16, 5^3 = 125, 6^4 = 1296, 7^5 = 16807, 8^6 = 262144$ și $9^7 = 4782969$.

62. Toate numerele naturale de la 1 la 1 000 000 sînt scrise unul după altul. Ce cifră se va găsi pe locul 1972.

Soluție. Sînt 9 numere cu o cifră și 90 de numere cu 2 cifre. Deci pînă la primul număr cu trei cifre vor fi ocupate $9 + 90 = 99 = 189$ locuri. Rămîn $1972 - 189 = 1783$ locuri. Deoarece $1783 = 594 + 1$, pe locul 1972 se va găsi prima cifră al celui de-al 595-lea număr de 3 cifre. Al 595-lea număr de 3 cifre fiind 694, cifra căutată este 6.

63. Cu un număr natural se fac operațiile:

- A: se adaugă la urmă cifra 4
- B: se adaugă la urmă cifra 0,

numărul se termină în 9? Trebuie mărit de 16 ori! Oricare ar fi cifra anterioară lui 9, penultima cifră din $16N$ este pară căci $16N = 16(10a + 9) = 160a + 144$. Dacă nu este 8, această penultimă cifră, atunci după A' și nu mai mult de două operații C' ajungem la cifra 4 și deci îl putem micșora cel puțin de 10 ori, obținându-se deci din N cel mult $\frac{16N \cdot 4}{100} = \frac{16}{25}N < N$. Dacă $16N$ se termină

în 84, oricare ar fi cifra anterioară obținem: $16N = \dots 84 \xrightarrow{A'} 10b + 8 \xrightarrow{C'} \xrightarrow{C'} \xrightarrow{C'} 80b + 64 \xrightarrow{A'} 8b + 6$, deci un număr care se termină în cifră cu soț. Dacă această cifră nu este 8, atunci, după nu mai mult de 2 operații C' , obținem un număr cu 4 la urmă și deci după aplicarea operației A' , obținem $\frac{16 \cdot 8 \cdot 4}{1000}N < N$. Dacă și această cifră

este 8, atunci după 3 operații C' obținem un număr cu cifră penultimă pară, iar după A' și nu mai mult de 3 operații C' și A' sau B' se obține un număr cel mult egal cu $\frac{16 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{10000}N = \frac{8192}{10000}N < N$, deci problema este deplin rezolvată.

Observație. Problema se rezolvă mai simplu dacă dovedim că din orice număr par se poate obține cu operațiile A' , B' , C' un număr par mai mic. Or:

$$10K \rightarrow K \rightarrow 2K$$

$$10K + 2 \rightarrow 20K + 4 \rightarrow 2K$$

$$10K + 4 \rightarrow K \rightarrow 2K$$

$$10K + 6 \rightarrow 20K + 10 + 2 \rightarrow 40K + 20 + 4 \rightarrow 4K + 2$$

$$10K + 8 \rightarrow 20K + 10 + 6 \rightarrow 40K + 30 + 2 \rightarrow 80K + 60 +$$

$$+ 4 \rightarrow 8K + 6$$

Dacă numărul este impar, aceasta se vede din tabelul precedent.

* * * * *

64. Să se arate că un număr din nouă cifre — toate cifrele mai puțin 0 — și care se termină în 5 nu poate fi pătrat perfect.

Soluție. Fie $D = A^2$; D se termină în 5 $\Rightarrow A = 10a + 5 \Rightarrow D = 100a^2 + 100a + 25 \Rightarrow D = 100a(a + 1) + 25$. A treia cifră va

putea fi, așa cum rezultă din următorul tablou :

0.1	1.2	2.3	3.4	4.5	5.6	6.7	7.8	8.9	9.0
0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

una din cifrele 0, 2, 6. Cum 0, 2 nu pot fi, rezultă că este 6 și deci $D = 1000B + 625 \Rightarrow D:125$. Cum este pătrat perfect înseamnă că $D:5^4 \Rightarrow B:5$ și prin urmare B se termină în 0 sau 5, dar nici una din cifre nu convin.

65. Fibonacci, matematician din Pisa, a rezolvat următoarea problemă în 1225, „Să se găsească un număr întreg, sau o fracție la al cărei pătrat putem adăuna sau scădea 5 obținând tot un pătrat”.

Problema se înțelege astfel : or adunăm 5, or scădem 5 dintr-un pătrat să obținem tot un pătrat al unui număr rațional.

B. A. Korgyensztij scrie în cartea sa despre această problemă : „Din păcate nu s-a menționat ce anume a stat la baza rezolvării date de Fibonacci, dar soluția a fost găsită”.

Cartea ne îndeamnă spre o rezolvare geometrică, și iată ce scrie la sfârșit : „Soluția algebrică în cel mai bun caz ne conduce la o ecuație de gradul patru”.

În continuare, vom da o soluție algebrică.

Soluție. Fie $x, y, z \in Q$ și

$$(1) \quad x^2 + 5 = y^2,$$

$$(2) \quad x^2 - 5 = z^2;$$

din cele două egalități obținem

$$(3) \quad z^2 + 10 = y^2.$$

Dacă $y, z \in Q$, atunci și diferența lor este rațională. Să notăm cu r această diferență

$$(4) \quad y = z + r.$$

Înlocuind pe y în (3) obținem $10 = 2rz + r^2$ și de aici

$$(5) \quad z = \frac{10 - r^2}{2r},$$

†

iar (4) și (5) $\Rightarrow y = \frac{100 + r^2}{2r}$; înlocuind pe y în (1) $\Rightarrow 100 + r^2 = 2ry$

$= \frac{100 + r^2}{4r^2}$ e în membrul drept; numitorul este un pătrat. Pentru

ca și numărătorul să fie pătrat perfect trebuie ca $100 + r^2 = s^2$, $s \in \mathbb{Q}$.

Fie $s = r^2 + t$, unde $t \in \mathbb{Q}$, $100 = 2r^2t + t^2$ și

unele din cifrele 0, 2, 4, 6, 8, 10 nu pot fi rezultate dintr-o adunare de două pătrate perfecte înscrisuri ca $D = 1000B + 625 = D_1^2 + D_2^2$ și prin urmare B se termină în 0 sau 5, dar nici una din cifre nu convine.

Aici avem la numărător o diferență pitagorică, care este un pătrat perfect dacă $r = 0$ și $t = 8$. Din cele două posibilități rămâne valabilă $t = 8$, pentru că și numitorul să fie pătrat perfect. Așadar

$$\frac{100}{16} = \frac{64}{16} + \frac{36}{16} \Rightarrow \frac{100}{16} = \left(\frac{8}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

și $y = \frac{100 + 36}{2 \cdot 4} = \frac{136}{8} = 17$. B. A. Korgolentz scrie în cartea sa "Leçons de géométrie" (Paris, 1922) că această problemă a fost găsită de Hippocrate, dar soluția a fost găsită de

Cartea ne îndrumă spre o rezoluție geometrică și o rezoluție algebrică. Soluția algebrică este cea mai simplă și se demonstrează că nici o putere a lui 2 nu se termină în patru cifre egale. Să se găsească o putere a lui 2 care se termină în 3 cifre egale. (Problema 16 a lui Baraj).

66. Să se demonstreze că nici o putere a lui 2 nu se termină în patru cifre egale. Să se găsească o putere a lui 2 care se termină în 3 cifre egale. (Problema 16 a lui Baraj).

Soluție. O putere a lui 2 se termină în 2, 4, 8, 6. Presupunem că se termină în patru cifre de același fel și scriem cifrele puterilor anterioare de care sîntem siguri:

$$\begin{array}{r} *1 \\ *11 \\ *111 \\ 2222 \end{array} ; \begin{array}{r} *1 \\ *11 \\ *222 \\ 4444 \end{array} = \begin{array}{r} *1 \\ *333 \\ *666 \\ 016666 \end{array} ; \begin{array}{r} *1 \\ *22 \\ *444 \\ 8888 \end{array} \quad (2)$$

imposibil, imposibil, imposibil, imposibil

Căutăm o putere care să se termine în trei cifre de același fel:

$$\begin{array}{r} *1 \\ *11 \\ 222 \end{array} ; \begin{array}{r} *2 \\ *22 \\ 444 \end{array} ; \begin{array}{r} *4 \\ *44 \\ 666 \end{array} ; \begin{array}{r} *8 \\ *88 \\ 888 \end{array} \quad (4)$$

imposibil, imposibil, imposibil, posibil

Cifra $\boxed{*}$ nu poate fi 2 căci puterea anterioară s-ar termina în 1, deci trebuie să fie 7. Scriem ultimele 2 cifre ale puterilor succesive până găsim ultimele cifre 72:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72.

Avem nevoie și de cifra a treia. Cum 72 (după cum se vede) corespunde lui 2^{17} îl calculăm pe acesta și găsim $2^{17} = 131072$. Să raționăm ca mai sus pentru a vedea dacă 2^{17} poate fi soluția problemei:

	*3		
	*86	*36	
	072	472	
	444	944	
	888	888	

imposibil imposibil posibil

Așadar grupul ultimelor 3 cifre trebuie să fie 472 și nu 972. Să continuăm să scriem ultimele 2 cifre ale puterilor succesive ale lui 2 începând cu 2^{17} :

72, 44, 88, 76, 52, 04, 08.

După cum se observă, 2^{17} are ultimele 3 cifre 072 și deci $2^{19} = 2^{17} \cdot 4$ are ultimele 3 cifre 288, pe când după 52, care corespunde lui $2^{17} \cdot 2^2 = 2^{19}$, ultimele 2 cifre încep să se repete în aceeași ordine și anume, dacă $2^m = 2^{m+20}$ cu $1 < m \leq 20$, atunci 2^m și 2^{m+20} au ultimele 2 cifre aceleași numere naturale și în aceeași ordine. Așadar, cea mai mică putere a lui 2, care să fie soluție a problemei (adică să aibă ultimele 3 cifre 888) ar putea fi $2^{19+20} = 2^{39}$. Într-adevăr, $2^{34} = 2^{17} \cdot 2^{17}$ au ultimele 3 cifre date de 072; $072 = 5184$, iar $2^{39} = 3^{34} \cdot 2^5$ are ultimele 3 cifre date de $184 \times 32 = 5888$. Așadar 2^{39} este soluția problemei.

Facem observația că 2^{39} ar putea să nu fie singura putere a lui 2 soluție a problemei. Dacă mai sînt și altele, acestea trebuie să fie de forma 2^{20m+19} .

67. Să se arate că printre numerele n , $n+1$, $n+2$, $n+3$ și $n+4$ se află puterea patru a unei număr natural.

Soluție. Dacă $n = m^4$ este evident. Dacă $m^4 < n < (m+1)^4$ $\Rightarrow n \geq m^4 + 1$ și $n^3 + n^2 + n + 2 \geq (m^4 + 1)^3 + (m^4 + 1)^2 + (m^4 + 1) + 2$ și $n^3 + n^2 + n + 2 - (m+1)^4 \geq (m^4 + 1)^3 + (m^4 + 1)^2 + (m^4 + 1) + 2 - (m+1)^4 \geq 0$ deoarece pentru $m = 1$ avem egalitate, iar pentru $m \geq 2$ avem deja $(m^4 + 1)^3 \geq (m+1)^4$ de unde rezultă că $m^4 < n < (m+1)^4 \leq n^3 + n^2 + n + 2$, c.c.t.d.

* * * * *

68. Să se găsească cel mai mare număr natural x pentru care $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ este pătrat perfect.

Soluție. $N = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^{27}(1 + 4^{973} + 4^{x-27}) =$

$$4^{27} (1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2 \cdot 1945 + 2x - 54 - 2 \cdot 1945}) =$$

$$4^{27} (1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2(1945+k)}),$$

unde $k = x - 1972$. Pentru $k = 0$, N este pătrat perfect, iar pentru $k > 0$, N nu este pătrat perfect căci numărul $1 + 2 \cdot 2^{1945} + 2^{2(1945+k)}$ este cuprins între pătratele perfecte a două numere consecutive 2^{1945+k} și $1 + 2^{1945+k}$. Așadar $x = 1972$.

* * * * *

69. Printre primele 10000 numere, câte se termină în 1 și sînt de forma $8^m + 5^n$?

Soluție. 5^n se termină în 5, deci 8^m trebuie să se termine în 6; $8^1 = 8, 8^2 = 64, 8^3 = 512, 8^4 = 4096, 8^5 > 10000$. Rezultă că $m = 4$. Așadar, $5^n < 10000 - 4096 = 5904$ așa că puterile lui 5 admisibile vor fi 5, 25, 125, 625, 3125, deoarece $15904 > 5904$, deci sînt 5 numere corespunzînd lui $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

* * * * *

70. Se poate ca produsul a) a trei numere consecutive b) a patru numere consecutive să fie o putere naturală (pătrat, cub etc.)? (Olimpiada internațională XVIII).

Soluție. a) Fie $k(k+1)(k+2) = u^n, u > 1$. Numărul $k+1$ este prim cu k și $k+2$ deci, $k+1 = m^n, k(k+2) = k^2 + 2k = l^n$ (rezultă din unicitatea descompunerii canonice). Așadar $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 = m^{2n}$, adică $m^{2n} - 1 = l^n \Rightarrow m^{2n} - l^n = 1$, ceea ce-i imposibil, deoarece $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \neq 1$.

b) $k(k+1)(k+2)(k+3) = u^n$. Construim cîte două numere fiecare din ele trebuind să fie puterea n -a și ajungem la o contradicție. Considerăm $n = 2, n \geq 3$.

I. $n = 2 \cdot (k^2 + 3k) (k^2 + 3k + 2) = u^2$. Notăm $k^2 + 3k + 1 = y$ și avem $(y-1)(y+1) = u^2 \Rightarrow y^2 - 1 = u^2$, imposibilă pentru numerele naturale u și y .

II. $n \geq 3$. Observăm că fie numărul $k + 1$, fie $k + 2$ este prim cu toate celelalte.

1) Fie $k + 1$ prim cu k , $k + 2$, $k + 3$. Avem :

$k + 1 = m^n$, $k(k + 2)(k + 3) = l^n \Rightarrow k = m^n - 1$, $k + 2 = m^n + 1$,
 $k + 3 = m^n + 2$ și $(m^n - 1)(m^n + 1)(m^n + 2) = m^{3n} + 2m^{2n} -$
 $- m^n - 2 = l^n$. Deoarece $m \geq 2$ și $n \geq 3$, avem că $2m^{2n} - m^n - 2 >$
 > 0 adică $l^n > (m^3)^n$ sau $l > m^3$. Pe de altă parte, $(m^3 + 1)^n >$
 $> m^{3n} + nm^{3n-3} > m^{3n} + 2m^{2n} > m^{3n} + 2m^{2n} - m^n - 2 = l^n$ adică
 $l < m^3 + 1$. Ar trebui să avem deci $m^3 < l < m^3 + 1$, ceea ce-i
 imposibil.

2) Dacă $k + 2$ este prim cu k , $k + 1$, $k + 3$, atunci $k + 2 = m^n$,
 $k(k + 1)(k + 3) = l^n \Rightarrow (m^n - 2)(m^n - 1)(m^3 + 1) = l^n \Rightarrow l^n = m^{3n} -$
 $- 2m^{2n} - m^n + 2 < m^{3n}$ deoarece $2m^{2n} + m^n - 2 > 0$. Să com-
 parăm acum l și $m^3 - 1$. Observăm că: $m^3 > 4 \Rightarrow m^{3n-3} >$
 $> 4m^{3n-6}$ și $3n - 6 \geq n$, deoarece $n \geq 3$. Rezultă că $m^{3n-3} \geq$
 $\geq 3m^{3n-6} + m^n$. Calculăm diferența dintre $(m^3)^n$ și $(m^3 - 1)^n$; $(m^3)^n -$
 $- (m^3 - 1)^n = m^{3n-3} + m^{3n-6}(m^3 - 1) + m^{3n-9}(m^6 - 2m^3 + 1) +$
 $+ \dots + (m^3 - 1)^{n-1} > 3m^{3n-3} - 3m^{3n-6} > 2m^{3n-3} + m^n > 2m^{2n} + m^n - 2 =$
 $= (m^3)^n - l^n$. Rezultă că $(m^3 - 1)^n < l^n$ adică $m^3 - 1 < l < m^3$ ceea
 ce-i imposibil.

* * * * *

71. Să se arate că există o infinitate de numere naturale care nu se pot scrie ca sumă de trei pătrate. (Olimpiadă Suedia).

Soluție. Fie un număr de forma $8k + 7 = x$ și $a^2 + b^2 + c^2 =$
 $= 8k + 7$.

Se disting cazurile :

caz I. a, b, c numere pare $\Rightarrow x$ par (fals).

caz II. $a = 2m, b = 2n, c = 2p + 1 \Rightarrow x = 4m^2 + 4n^2 + 4p^2 +$
 $+ 4p + 1 = 4(m^2 + n^2 + p^2 + p) + 1 \Rightarrow x$ de forma $8k + 1$ sau
 $8k + 5$ (fals).

caz III. $a = 2m, b = 2n + 1, c = 2p + 1 \Rightarrow x$ - par (fals).

caz IV. $a = 2m + 1, b = 2n + 1, c = 2p + 1 \Rightarrow x = (2m +$
 $+ 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2p + 1)^2 = 4m(m + 1) + 4n(n + 1) + 4p(p +$
 $+ 1) + 3 = 8k + 3$ (fals). Deci, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $8k + 7$ nu poate
 fi scris ca sumă de trei pătrate.

* * * * *

72. Să se afle toate numerele naturale n și k astfel încât n^n să aibă k cifre și k^k să aibă n cifre.

Soluție. Fie $n > k \Rightarrow n^n > k^k > k^k$. Însă n^n are k cifre și deci
 trebuie să fie mai mic decât k^k care are n cifre. Analog nu putem

avea $n < k$ și de aceea $n = k$. Rămâne de văzut cind n^n are n cifre. Observăm că $n \geq 10$ imposibil, căci $n^n \geq 10^n$ iar 10^n are $n + 1$ cifre. Dacă $n < 10$, atunci $n^n < 10^n$ și de aceea n^n nu are mai mult de n cifre. Ne convingem că sînt posibile $n = 1, n = 8$ și $n = 9$.

$1^1 = 1$ are 1 cifră; $8^8 = 16.777.216$ are 8 cifre; $9^9 = 387.420.491$ are 9 cifre.

$2^2 = 4$ are 1 cifră; $3^3 = 27$ are 2 cifre; $4^4 = 256$ are 3 cifre; $5^5 = 3125$ are 4 cifre; $6^6 = 46656$ are 5 cifre; $7^7 = 823543$ are 7 cifre; $10^3 = 1000$ are 4 cifre.

$6^6 < 4^3 \cdot 10^3 = 64 \cdot 10^3 < 10^5$.
 $5^5 = 3125; 4^4 = 256; 3^3 = 27; 2^2 = 4; 1^1 = 1$.

Să se determine că suma $1 + 2 + \dots + n$ **nu este număr întreg**.

Soluție. Fie $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Dacă fracțiile se aduc la același numitor, toți numărătorii vor fi amplificați cu numere pare în afară de cel al fracției $-\frac{1}{2^k}$, deci la numărător avem un număr impar, iar la numitor un număr par, deci nu va putea fi număr întreg.

74. Să se determine cel mai mare număr care este produsul unor numere naturale a căror sumă este 1976. (Problemă dată la a XVIII-a Olimpiadă internațională : S.U.A., 6 puncte).

Soluție. Fie ca produsul maxim să se realizeze pentru a_1, a_2, \dots, a_n și $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1976$, acesta va fi deci $a_1 a_2 \dots a_n$.

Se observă că :

- 1° Nu avem numărul 1 printre numerele a_i căci $1 \cdot a_i < 1 + a_i$ și deci adunîndu-l la oricare termen, produsul se poate mări.
- 2° Nu avem numere mai mari sau egale cu 5 căci pentru $a_i \geq 5 \Rightarrow a_i < 3(a_i - 3) \Rightarrow a_i \geq 4$ și fără să modificăm suma am putea mări produsul.

3° Termenii cu valoarea patru îi putem înlocui prin $2 + 2$ căci produsul nu se schimbă.

4° Putem presupune că avem numai factori de 2 și de 3.

5° Factorii egali cu 2 nu pot fi mai mulți decît 3 căci înlocuind 3 factori egali cu 2 prin factori egali cu 3, produsul se mărește căci $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$, suma rămînînd aceeași.

Cum $1976 = 3 \cdot 658 + 2$ înseamnă că produsul maxim va fi
 1976 = 3 · 658 + 2

* * * * *

Se. să numărăm $A = \frac{n^2 + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$ și $m, n \geq 2$

să se arate că există k natural așa fel încît $A = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$.

Soluție. Notînd $\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2} = x$ și $\frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2} = \frac{1}{x}$ avem $x + \frac{1}{x} = n$ și $x - \frac{1}{x} = \sqrt{n^2 - 4}$.
 Din $x + \frac{1}{x} = n$ rezultă $x^2 - nx + 1 = 0$. Dacă $x = x^m$ și $\frac{1}{x} = x^{-m}$ avem $x^{2m} - nx^{m+1} + x = 0$.
 Dacă $x = x^m$ și $\frac{1}{x} = x^{-m}$ avem $x^{2m} - nx^{m+1} + x = 0$.

Deci x verifică ecuația $x^2 - nx + 1 = 0$. Avem că $x^m + \frac{1}{x^m} = n^m - 2$.

Din $(x^m + \frac{1}{x^m})(x + \frac{1}{x}) = x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}} + x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}$

presupunînd că $x^m + \frac{1}{x^m} = k - 2$ și $x + \frac{1}{x} = n$ rezultă $(k - 2)n = k - 2 + \frac{1}{x^{m+1}} + \frac{1}{x^{m-1}}$.

$\frac{1}{x^{m+1}} + \frac{1}{x^{m-1}} \in \mathbb{N}$. Avem deci că $x^m + \frac{1}{x^m} = k - 2$ întreg, $x^m \geq 1$. Prin urmare

$$A = x^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

§ 8. ANALIZĂ COMBINATORIE

176. O gospodină are 3 găini, 4 rațe și 2 găște. În câte moduri poate pleca la țîrg cu păsări înet să ducă de fiecare fel?

Soluție. Găinile le poate duce în $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - 1 = 7$ moduri.

Rațele le poate duce în $C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 - 1 = 15$ moduri.

Găștele le poate duce în $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 2^2 - 1 = 3$ moduri.

Deci le poate duce în $(2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^2 - 1) = 7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ moduri.

77. La o serată școlară participă 12 fete și 15 băieți. În câte moduri se pot forma 4 perechi de dansatori?

Soluție. Fetele se pot grupa câte 4 în C_{12}^4 . Băieții se vor putea considera în grupuri ordonate de câte 4: A_{15}^4 , deci vom avea $C_{12}^4 \cdot A_{15}^4 = 16216200$ moduri.

78. În câte moduri se pot împărți $m + n + p$ obiecte în trei grupe astfel încât în prima să fie m obiecte, în a doua n și în a treia p obiecte?

Soluție. $p(m, n, p) = C_{m+n+p}^m \cdot C_{n+p}^n \cdot C_p^p = \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$.

79. Pe o poliță se află $m + n$ cărți, m legate în negru și n legate în roșu. În câte moduri putem așeza cărțile astfel încât cele legate în negru să ocupe primele m locuri? Dar astfel încât toate cărțile legate în negru să stea alături?

Soluție. În primul caz avem $m!n!$. În al doilea caz trebuie să le punem printre cele n cărți legate în roșu adică în $m!n!(n+1) = m!(n+1)!$ moduri.

80. În câte moduri putem forma o echipă din 15 oameni? (Într-o echipă pot intra 1, 2, ..., 15 oameni) Dar din n oameni?

Soluție. $2^{15} - 1 = 32767$. Pentru $n: 2^n - 1$.

* * * * *

81. Să se arate că $S = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m C_n^k \Rightarrow S = n \cdot 2^{n-1}$.

Soluție. $S = \sum_{m=0}^{n-1} (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m) = C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2) + \dots + (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1}) = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}) - [C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-2)C_n^{n-2} + (n-1)C_n^{n-1}]$,
de unde ținând seama că $C_n^k = C_n^{n-k}$, rezultă

$$S = n(2^n - 1) - (S - n) \Rightarrow S = n \cdot 2^{n-1}.$$

* * * * *

82. Să se demonstreze că dacă m și n sînt numere naturale și $1 \leq m < n$ atunci $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^m C_n^k = 0$.

Soluție. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ și
deci notînd $k = j + 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k k^m C_n^k &= n \sum_{k=1}^n (-1)^k k^{m-1} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} (j+1)^{m-1} C_{n-1}^j = \\ &= -n \sum_{j=0}^{n-1} \left[(-1)^j \cdot \left(\sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l j^l \right) \cdot C_{n-1}^j \right] = \\ &= -n \sum_{l=0}^{m-1} \left[C_m^l \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j j^l C_{n-1}^j \right) \right]. \end{aligned}$$

Cum se verifică pentru $n = 2, 3, 4$, presupunînd că pentru $n - 1$ paranteza pătrată este zero, ea este zero și pentru orice n .

§ 9. PRINCIPIUL LUI DIRICHLET

Principiul lui Dirichlet afirmă că dacă se așează $n + 1$ obiecte în n compartimente, atunci măcar într-un compartiment se vor afla cel puțin două obiecte.

Începem acest paragraf cu cîteva considerații teoretice legate de principiul lui Dirichlet.

Lemă. *Dacă Q este un număr prim cu 10, există un număr de forma $10^m - 1$ (format din m cifre de 9) care să se dividă cu Q .*

Aplicăm principiul lui Dirichlet. Împărțind numerele 9, 99, 999, ... la Q , la un moment dat, restul se va repeta. Diferența celor două numere — de forma $10^p - 1 - (10^n - 1) = 10^p - 10^n = 10^n(10^p - 1)$ cu $p > n$ — se divide cu Q și lăsînd la o parte zero-urile (adică un factor de forma 10^n), obținem numărul căutat, și cu aceasta, lema este demonstrată.

Lema precedentă ne va permite să rezolvăm următoarea problemă:

Suma cifrelor unui număr în urma înmulțirii cu 8 se poate micșora (de ex. 75 are suma cifrelor 12, iar $8 \times 75 = 600$ are suma cifrelor 6). Notînd cu $S(n)$ suma cifrelor numărului n , să se arate că $\frac{S(8N)}{S(N)} \geq \frac{1}{8}$, adică suma cifrelor unui număr oarecare în urma înmulțirii cu 8 nu se poate micșora mai mult de opt ori. Pentru ce număr natural k există un astfel de număr pozitiv c_k , încît

$\frac{S(kN)}{S(N)} \geq c_k \neq 1$ Să se arate că pentru anumite numere k nu există un astfel de c_k corespunzător.

Observăm mai întâi că $S(8 \times 125) = 1$.

Si acum, să demonstrăm următoarele proprietăți ale lui $S(N)$:

- 1° $S(A + B) \leq S(A) + S(B)$;
- 2° $S(A_1 + \dots + A_n) \leq S(A_1) + \dots + S(A_n)$;
- 3° $S(nA) \leq nS(A)$;
- 4° $S(AB) \leq S(A)S(B)$.

1° Presupunind că numerele sînt scrise unul sub altul, ori de cite ori suma cifrelor de pe o coloană este cel puțin egală cu 10, suma cifrelor lui $A + B$ se micșorează cu 9. De ex. dacă $A = 8$, $B = 7 \Rightarrow A + B = 15$, iar $S(A) + S(B) = 8 + 7 = S(A + B) + 9 =$

$= S(15) + 9 = 6 + 9 = 15$.

2° Se arată prin inducție.

3° Este un caz particular al proprietății precedente ($A_1 = \dots = A_n = A$).

4° Dacă A , scris în baza 10, este de forma $A = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, atunci, în virtutea proprietăților 2° și 3°, vom avea

$$S(A) = S(a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0) \leq S(a_n \cdot 10^n) + \dots + S(a_1 \cdot 10) + S(a_0) =$$

$$= a_n \cdot S(10^n) + \dots + a_1 \cdot S(10) + a_0 \cdot S(1) = a_n \cdot n + \dots + a_1 + a_0 =$$

$$= a_n S(a_n) + \dots + a_1 S(a_1) + a_0 S(a_0) \leq a_n S(B) + \dots + a_1 S(B) + a_0 S(B) =$$

$$= (a_n + \dots + a_1 + a_0) S(B) = S(A) S(B).$$

Si acum, cu ajutorul proprietăților 1-4, să arătăm că

$$\frac{S(8N)}{S(N)} \geq 1. \text{ Într-adevăr, } S(N) = S(1000N) = S(8 \times 125N) \leq$$

$$S(N) + 8 \text{ (în baza 10)}. \text{ Într-adevăr, } S(8N) \leq 8S(N), \text{ de unde } \frac{S(8N)}{S(N)} \geq 1.$$

În continuare, să considerăm un număr k de forma $k = 2^{2^m}$.

Avem evident, pentru $N = 2^{2^m}$, $S(2^{2^m} \cdot N) = S(10^{2^m} \cdot N) = 1$. Ori-

care ar fi N , avem că $S(N) = S(10^{2^m} \cdot N) = S(2^{2^m} \cdot 2^{2^m} N) \leq$

$$\leq S(2^{2^m}) S(kN) = S(kN), \text{ de unde } \frac{S(kN)}{S(N)} \geq c_k, \text{ unde } c_k = \frac{1}{S(2^{2^m})}.$$

Si acum, să arătăm că pentru numere de forma $k = Q \cdot 2^{2^m}$, unde Q este prim cu 10, raportul poate fi făcut mai mic decît orice $\epsilon > 0$.

Într-adevăr, în virtutea lemei precedente, $10^m - 1 = Q \cdot B$. Numărul

35. Să se demonstreze că din 100 de oameni luați la întâmplare cel puțin doi au același număr de cunoștințe printre ceilalți. La fel pentru „n” oameni.

Soluție. O persoană poate să aibă cel mult 99 de cunoștințe. Presupunem că există o persoană care nu are nici o cunoștință. În acest caz rezultă că nu există nici o persoană cu 99 de cunoștințe.

Numărul de cunoștințe posibile este $|0| |1| |2| \dots |97| |98|$

Sînt 99 de căsuțe și 100 de persoane. Conform principiului lui Dirichlet rezultă că există cel puțin două persoane cu același număr de cunoștințe.

Presupunînd că toate persoanele au cel puțin o cunoștință, atunci

numărul de cunoștințe posibile este $1| 2| 3| \dots | 98| 99|$

Deci tot 99 de căsuțe și 100 de persoane, problema reducîndu-se la cazul precedent.

* * *

36. Pe o linie sînt scrise 5 numere. Să se arate că fie unul din ele se divide la 5, fie suma cîtorva așezate succesiv se divide la 5.

Soluție. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;$

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Dacă $a_1 \div 5$ problema este demonstrată. Dacă nu, din 5 numere cel puțin două de ex. a_1, a_2 , dau același rest la împărțirea cu 5; să zicem p ($1 \leq p \leq 4$); să observăm că numerele $p, 5 - p$, respectiv $2p, 5 - 2p$ sînt congruente (mod 5). Dacă de ex. a_3 este congruent cu $5 - p$ sau cu $5 - 2p$, atunci $a_1 + a_3$, respectiv $a_1 + a_2 + a_3$, vor fi divizibile cu 5. Dacă nu, atunci a_3, a_4, a_5 vor fi congruente cu p sau $2p$ și atunci, evident, suma celor 5 numere, sau a unora din ele convenabil alese va fi divizibilă cu 5.

* * * * *

37. Într-un cub cu latura 1 sînt 2001 muște. Să se arate că cel puțin 3 sînt într-o sferă de rază $1/11$.

Soluție. Considerînd cubul împărțit în o mie de cuburi cu latura $1/10$, cel puțin într-un cub sînt trei muște. Raza sferei circum-

scrise cubului de latură $1/10$ este $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{100}}$. Or, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{100}} < \frac{1}{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{100} < \frac{4}{121} \Rightarrow 363 < 400.$$

* * * * *

88. Într-un cerc unele arce, a căror lungime totală este mai mică decât jumătatea circumferinței, sînt vopsite în negru. Să se arate că există un diametru ale cărui capete nu sînt vopsite.

Soluție. Observăm că circumferința se poate obține ca reuniunea tuturor perechilor de puncte simetrice în raport cu centrul cercului. Și acum, să vopsim în albastru perechile de puncte simetrice, care sînt ambele nevopsite în negru. Cum suma lungimilor arcelor vopsite în negru este mai mică decât jumătatea circumferinței, rezultă că reuniunea perechilor de puncte, dintre care cel puțin unul este vopsit în negru, nu acoperă circumferința și deci există cel puțin o pereche de puncte simetrice vopsite în albastru.

* * * * *

89. Se dă un șir 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... în care fiecare termen începînd cu al treilea este suma celor doi precedenți. Printre primele 100 000 000 numere din acest șir, există un număr care să se termine în 4 zerouri?

Soluție. Considerăm șirul resturilor împărțirii la 10 000; notăm restul de pe locul n cu a_n . Există 10 000 resturi și $10\,000^2 = 100\,000\,000$ perechi de resturi. Dacă grupăm resturile $a_1, a_2, \dots, a_{100000000}$ în perechi succesive $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots$, atunci conform principiului lui Dirichlet, două asemenea perechi sînt egale: $a_k = a_m, a_{k+1} = a_{m+1}, k < m < 100000002$, avem că $a_{k-1} = a_{m-1}, a_{k-2} = a_{m-2} \Rightarrow a_2 = 1 = a_{m-k+2} \Rightarrow a_1 = 1 = a_{m-k+1} \Rightarrow a_{m-k} = 0$.

§ 10. VALORI NUMERICE ALE UNOR EXPRESII

* * * * *

90. Cu ce este egală expresia $a^{31} - 74a^{30} + 74a^{29} - \dots + 74a^{17} - 74a^{16} + 73a^{15} + 15$ pentru $a = 73$?

Soluție. Punem $74 = a + 1$

$$\begin{aligned} a^{31} - (a + 1)a^{30} + (a + 1)a^{29} - \dots + (a + 1)a^{17} - (a + 1)a^{16} + \\ + a \cdot a^{15} + 15 = a^{31} - a^{31} - a^{30} + a^{30} + a^{29} - \dots + a^{18} + a^{17} - \\ - a^{17} - a^{16} + a^{16} + 15 = 15. \end{aligned}$$

91. Să se simplifice fracția

$$\frac{2x^2 - 2y^2 + 3xy + 6x + 12y}{6x^2 + y^2 - 5xy + 18x - 6y}$$

și să se calculeze valoarea ei pentru $x = -2, y = 2$ (Gazeta Matematică, 2, 1976, Problema nr. 15649).

Soluție.

$$2x^2 - 2y^2 + 3xy + 6x + 12y = 2x^2 + x(3y + 6) + 12y - 2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3y - 6 \pm \sqrt{(3y + 6)^2 - 8(12y - 2y^2)}}{4} =$$

$$= \frac{-3y - 6 \pm \sqrt{25y^2 + 36 - 60y}}{4} = \frac{-3y - 6 \pm (5y - 6)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2y \\ x_2 = \frac{y-6}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 + 3xy + 6x + 12y = 2(x + 2y) \left(x - \frac{y-6}{2} \right) =$$

$$= (x + 2y)(2x - y + 6).$$

$$6x^2 + y^2 - 5xy + 18x - 6y = 6x^2 - x(5y - 18) - 6y + y^2 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{5y - 18 \pm \sqrt{(5y - 18)^2 - 24(y^2 - 6y)}}{12} = \frac{5y - 18 \pm (y - 18)}{12} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6y - 36}{12} = \frac{y - 6}{2} \\ x_2 = \frac{4y}{12} = \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow 6x^2 + y^2 - 5xy + 18x - 6y =$$

$$= 6 \left(x - \frac{y-6}{2} \right) \left(x - \frac{y}{3} \right) = 2 \cdot 3 \left(\frac{2x - y + 6}{2} \right) \left(\frac{3x - y}{3} \right) =$$

$$= (2x - y + 6)(3x - y).$$

$$\frac{2x^2 - 2y^2 + 3xy + 6x + 12y}{6x^2 + y^2 - 5xy + 18x - 6y} = \frac{(2x - y + 6)(x + 2y)}{(2x - y + 6)(3x - y)} = \frac{x + 2y}{3x - y}.$$

Pentru $x = -2$ și $y = 2$, $\frac{x + 2y}{3x - y} = -\frac{1}{4}$.

§ 11. **SCRIEREA UNEI EXPRESII ALGEBRICE
SUB FORMA CEA MAI SIMPLĂ**

92. Să se extragă rădăcina și să se simplifice dacă-i posibil

$$E = \frac{x + \sqrt{x^2 + \sqrt{(x+1)^2 - 4x}}}{1 - 2x - 3x^2}.$$

Soluție. În cazul $x \geq 1$,

$$E = \frac{x + |x| + \sqrt{(x-1)^2}}{(x+1)(-3x+1)} = \frac{x + |x| + |x-1|}{(x+1)(-3x+1)} =$$

$$= \frac{3x-1}{(x+1)(-3x+1)} = \frac{-1}{x+1},$$

în cazul $0 \leq x < 1$,

$$E = \frac{2x+1-x}{(x+1)(-3x+1)} = \frac{1}{-3x+1},$$

iar în cazul $x < 0$,

$$E = \frac{1-x}{(x+1)(-3x+1)} \quad (\text{simplificarea nu se poate face}).$$

* * *

93. Să se calculeze :

$$E = \sqrt{\underbrace{44 \dots 4}_{2n \text{ ori}} + \underbrace{11 \dots 1}_{1+n \text{ ori}} - \underbrace{66 \dots 6}_{n \text{ ori}}}.$$

Soluție :

$$\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ ori}} = a, \quad 4 \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{2n \text{ ori}} = 4 \cdot (10^n + 1)a = 4(9a + 2)a = 36a^2 + 8a$$

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n+1 \text{ ori}} = 10^n + a = 9a + 1 + a = 10a + 1,$$

$$E = \sqrt{36a^2 + 8a + 10a + 1 - 6a} = \sqrt{36a^2 + 12a + 1} =$$

$$= 6a + 1 = \underbrace{6 \dots 6}_{n-1 \text{ ori}} 7.$$

§ 12. MATRICI ȘI DETERMINANȚI

94. Fie matricea pătratică de ordinul al doilea : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Să se verifice că matricea A satisface egalitatea :

$$A^2 - 4A + 5E = 0, \text{ unde } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Să se arate că A^n , cu $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 2$, se poate scrie astfel :

$$A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot E.$$

3) Să se arate că $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ și $b_{n+1} = -5a_n$.

4) Să se calculeze A^3, A^4, A^5, A^6 .

5) Observînd că A^{-1} există, cu ajutorul relației 1) să se deducă A^{-1} (Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16108).

Soluție. 1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$

$$4A = 4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},$$

$$5E = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$$2) A^2 = 4A - 5E \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 4, \\ b_2 = -5; \end{cases}$$

$$A^3 = 4A^2 - 5AE = 4A^2 - 5A = 4(4A - 5E) - 5A =$$

$$= 11A - 20E \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 11, \\ b_3 = -20. \end{cases}$$

Fie $A^{n-1} = a_{n-1}A + b_{n-1}E \Rightarrow$

$$A^n = a_{n-1}A^2 + b_{n-1}A = a_{n-1}(4A - 5E) + b_{n-1}A \Rightarrow$$

$$A^n = A(4a_{n-1} + b_{n-1}) - 5a_{n-1}E \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = -5a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n, \\ b_{n+1} = -5a_n. \end{cases}$$

3) A fost demonstrat mai sus.

$$4) \begin{cases} a_0 = 1, \\ b_0 = 0, \end{cases} \begin{cases} a_1 = 4, \\ b_1 = -5, \end{cases} \begin{cases} a_2 = 11, \\ b_2 = -20, \end{cases} \begin{cases} a_3 = 24, \\ b_3 = -55, \end{cases} \begin{cases} a_4 = 41, \\ b_4 = -120; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = 44, \\ b_5 = -205; \end{cases} \text{ folosim c\^a } A^n = A(4a_{n-1} + b_{n-1}) - 5a_{n-1}E \Rightarrow$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (16 - 5) - 20 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 11 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 \\ 11 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (44 - 20) - 55 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ 24 & 48 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 55 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix},$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (96 - 55) - 120 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & -41 \\ 41 & 82 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38 & -41 \\ 41 & -38 \end{pmatrix}.$$

.....

$$5) \quad A^{-1} = ? \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2 = 4A - 5E \mid A^{-1} \Rightarrow A = 4E - 5A^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5A^{-1} = 4E - A \Rightarrow A^{-1} = \frac{4E - A}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Verificare } A^{-1} \cdot A = E, \text{ c\^aci } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

95. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix} \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ și } abc \neq 0,$$

(Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16111.)

Soluție.

$$\begin{aligned} \Delta &= abc \begin{vmatrix} \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & ab & bc \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & a(b-c) & c(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \\ b & -(b-c) & -(b-a) \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} a(b-c) & c(b-a) \\ -(b-c) & -(b-a) \end{vmatrix} = -(b-c)(b-a) \begin{vmatrix} a & c \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

§ 13. POLINOAME

96. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — diferite și P — polinom cu coeficienți întregi. Să se arate că nu pot avea loc simultan egalitățile: $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ (Gazeta Matematică 4, 1977, Problema nr. 16625, Olimpiada S.U.A.)

Soluție. Se știe că $P(a) - P(b) \mid (a - b)$.

$$\left. \begin{aligned} P(a) - P(b) &= b - c \Rightarrow a - b \mid b - c \\ P(b) - P(c) &= c - a \Rightarrow b - c \mid c - a \\ P(c) - P(a) &= a - b \Rightarrow c - a \mid a - b \end{aligned} \right\} \Rightarrow |a - b| = |c - a|.$$

Rezultă că $|a - b| = |c - a| = |b - c|$. Fie $a > b > c$. Rezultă că $a - b = a - c \Rightarrow b - c \Rightarrow$ imposibil.

97. Să se arate că $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Să căutăm condiția suficientă ca $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ să ia valori întregi.

Soluție. $y = 6a \frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b \frac{x(x-1)}{2} + (a+b+c)x + d.$

Condiție suficientă: $6a, 2b, a+b+c, d$ să fie întregi.
 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 1$ satisfac condițiile suficiente pentru
 ca $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{Z}.$

98. Fie $P_1(x) = x^2 - 2, P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$ ($k = 2, 3, \dots$).
 Să se arate că pentru orice număr natural n toate rădăcinile ecuației
 $P_n(x) = x$ sînt reale și diferite. (Problemă dată la a XVIII-a Olimpiadă Internațională, Finlanda).

Soluție. Se poate face substituția $x = 2\cos \alpha$ sau $x = y + \frac{1}{y}$.
 Punînd $x = 2 \cos \alpha$, avem $P_1(x) = 4 \cos^2 \alpha - 2 = 2 \cos 2\alpha, P_2(x) =$
 $= 2 \cos 2^2 \alpha, \dots, P_n(x) = 2 \cos 2^n \alpha$ și prin urmare ecuația revine la

$$2 \cos 2^n \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\cos 2^n \alpha - \cos \alpha = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{2^n \alpha + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha - 2^n \alpha}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(2^n + 1)}{2} = k\pi \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2k\pi}{2^n + 1}}, \quad \frac{\alpha(2^n - 1)}{2} = l\pi \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2l\pi}{2^n - 1}}$$

$$x_1 = 2 \cos \frac{2k\pi}{2^n + 1}, \quad k = 1, \dots, 2^{n-1},$$

$$x_2 = 2 \cos \frac{2l\pi}{2^n - 1}, \quad l = 0, 1, 3, \dots, 2^{n-1} - 1.$$

Argumentele sînt cuprinse între 0 și π , or, pe acest interval, cosinusul descrește, deci rădăcinile din fiecare serie sînt diferite. Considerînd seriile diferite, fie că

$$2 \cos \frac{2k\pi}{2^n + 1} = 2 \cos \frac{2l\pi}{2^n - 1} \Rightarrow \frac{2k\pi}{2^n + 1} = \frac{2l\pi}{2^n - 1} \Rightarrow k(2^n - 1) = l(2^n + 1).$$

Numerele $2^n + 1, 2^n - 1$ au diferența 2 , deci nu pot avea ca divizor decît pe ± 2 ; cum sînt impare, rezultă că sînt prime între ele. Rezultă că k se divide cu $2^n + 1$ și l cu $2^n - 1$ ceea ce contrazice

alegerea numerelor k și l . Am găsit deci 2^n rădăcini diferite, or $P_n(n) - x$ are tocmai gradul $2^n - 1$ - cum se poate stabili.

99. Considerăm polinoamele $P:R \rightarrow R$ și $Q:R \rightarrow R$ cu toate rădăcinile reale. Dacă

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \alpha_i} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{x - \beta_j}, \quad \forall x \in R, \quad x \neq \alpha_i, \quad x \neq \beta_j,$$

unde prin $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ și $\beta_j (j = 1, \dots, m)$ am notat rădăcinile polinoamelor date, să se demonstreze că polinoamele P și Q au același grad și aceleași rădăcini (Gazeta Matematică, 10, 1976, Problema nr. 16119).

Soluție. Fie $P(x) = a_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$,

$$P'(x) = \frac{P(x)}{x - \alpha_1} + \frac{P(x)}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{P(x)}{x - \alpha_n},$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - \alpha_1} + \frac{1}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{1}{x - \alpha_n} \Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{1}{x - \alpha_j} = \frac{P'(x)}{P(x)}.$$

Raționînd în mod analog, obținem

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{x - \beta_j} = \frac{Q'(x)}{Q(x)} \Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{Q'(x)}{Q(x)} \Rightarrow [\ln P(x)]' =$$

$$= [\ln Q(x)]' \Rightarrow \ln |P(x)| = \ln |Q(x)| + \log C \Rightarrow \ln |P(x)| =$$

$$= \ln |CQ(x)| \Rightarrow |P(x)| = |CQ(x)| \Rightarrow P(x) = CQ(x) \Rightarrow P, Q$$

același grad și aceleași rădăcini.

100. Să se arate că nu există nici un polinom $P(x)$, care să verifice relația $(x - a)P(x + r) = (x - a + 3r)P(x)$; $a, r \in R$ pentru orice r . (Gazeta Matematică, 10, 1976, Problema nr. 16117).

Soluție. Ecuația precedentă se mai poate scrie și sub forma

$$(x - a)[P(x + r) - P(x)] = 3rP(x) \Rightarrow \frac{P(x + r) - P(x)}{r} = \frac{3P(x)}{x - a}.$$

Relația este adevărată și când $r \rightarrow 0$, adică

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{P(x+r) - P(x)}{r} = 3 \frac{P(x)}{x-a} \Rightarrow$$

$$P'(x) = \frac{3P(x)}{x-a} \Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{3}{x-a} \Rightarrow$$

$$[\ln |P(x)|]' = [3 \ln |x-a| + \ln C]' \Rightarrow \ln |P(x)| = 3 \ln |x-a| + \ln C \Rightarrow \ln |P(x)| = \ln (|x-a|^3 C).$$

Constanta putînd-o lua oricum, renunțăm la modul

$$P(x) = C(x-a)^3.$$

$$x = a \Rightarrow P(a) = 0$$

Înlocuind $P(x)$ și $a = 0$ în relația din enunț obținem $x|C(x+r)^3 = (x+r)Cx^3 \Rightarrow (x+r)^2 = x^2 \Rightarrow x^2 \Rightarrow C + 2xr + r^2 = x^2 \Rightarrow r(2x + r) = 0$ care evident nu-i satisfăcută oricare ar fi $r \in \mathbb{R}$.

* * * * *

101. Un polinom $P(x)$ cu coeficienți întregi, pentru anumite valori întregi ale lui x ia valorile 1,2,3. Să se arate că există o singură valoare întreagă a lui x pentru care acest polinom este egal cu 5.

Soluție. Fie

$$\begin{cases} P(a_1) = 1 \\ P(a_2) = 2 \Rightarrow P(a_3) - P(a_2) : (a_3 - a_2) \Rightarrow 1 : (a_3 - a_2) \Rightarrow a_3 = a_2 \pm 1; \\ P(a_3) = 3 \end{cases}$$

$$P(a_2) - P(a_1) = 1 : (a_2 - a_1) \Rightarrow a_1 = a_2 \pm 1;$$

$$P(a_3) - P(a_1) = 2 : (a_3 - a_1) \Rightarrow$$

$$(1) \quad a_3 = a_1 \pm 2$$

sau
(2)

$$a_3 = a_1 \pm 1.$$

Fie

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + 1 \\ a_1 = a_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = a_1 + 2 \text{ verifică și (1).}$$

$$\begin{cases} a_3 = a_2 - 1 \\ a_1 = a_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = a_1 - 2 \text{ verifică și (1).}$$

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + 1 \\ a_1 = a_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_3 \text{ imposibil.}$$

$$\begin{cases} a_3 = a_2 - 1 \\ a_1 = a_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_3 \text{ imposibil.}$$

Pe de altă parte, din (2) deducem

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 1 \\ a_2 = a_1 - 1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = a_2 + 2 \text{ imposibil,}$$

sau

$$\begin{cases} a_3 = a_1 - 1 \\ a_2 = a_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow a_3 = a_2 - 2 \text{ imposibil.}$$

Rezultă că avem

$$(3) \quad \begin{cases} a_1 = a_2 - 1, \\ a_3 = a_2 + 1, \end{cases}$$

sau

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = a_2 + 1, \\ a_3 = a_2 - 1. \end{cases}$$

$$P(x_0) = 5 \Rightarrow \begin{cases} P(x_0) - P(a_1) = 4 \Rightarrow (x_0 - a_1) \mid 4, \\ P(x_0) - P(a_2) = 3 \Rightarrow (x_0 - a_2) \mid 3, \\ P(x_0) - P(a_3) = 2 \Rightarrow (x_0 - a_3) \mid 2. \end{cases}$$

$$(x_0 - a_3) \mid 2 \Rightarrow x_0 = a_3 \pm 2.$$

- $x_0 = a_3 + 2$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 3 \Leftrightarrow x_0 = a_1 + 4$ verifică.
 $x_0 = a_3 + 2$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 1 \Rightarrow x_0 = a_1$ imposibil.
 $x_0 = a_3 - 2$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 1 \Rightarrow x_0 = a_1$ imposibil.
 $x_0 = a_3 - 2$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 3 \Leftrightarrow x_0 = a_1 - 4$ verifică.
 $x_0 = a_3 + 1$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 2$ imposibil.
 $x_0 = a_3 + 1$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2$ imposibil.
 $x_0 = a_3 - 1$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2$ imposibil.
 $x_0 = a_3 - 1$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 2$ imposibil.
 $x_0 = a_2 + 3$ și (3) verifică.
 $x_0 = a_2 + 3$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_3 + 4$ imposibil.
 $x_0 = a_2 - 3$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_3 - 4$ imposibil.
 $x_0 = a_2 - 3$ verifică.
 $x_0 = a_2 + 1$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_3$ imposibil.
 $x_0 = a_2 + 1$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_1$ imposibil.
 $x_0 = a_1 + 4$ și (3) verifică.
 $x_0 = a_1 + 4$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 5$ imposibil.
 $x_0 = a_1 - 4$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 5$ imposibil.
 $x_0 = a_1 - 4$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 3$ verifică.
 $x_0 = a_1 + 2$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 1 \Rightarrow x_0 = a_3$ imposibil.
 $x_0 = a_1 + 2$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 2$ imposibil.
 $x_0 = a_1 - 2$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 3 \Rightarrow x_0 = a_3 - 4$ imposibil.
 $x_0 = a_1 - 2$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 1 \Rightarrow x_0 = a_3$ imposibil.
 $x_0 = a_1 + 1$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2$ imposibil.
 $x_0 = a_1 + 1$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2 + 2$ imposibil.
 $x_0 = a_1 - 1$ și (3) $\Rightarrow x_0 = a_2 - 2$ imposibil.
 $x_0 = a_1 - 1$ și (4) $\Rightarrow x_0 = a_2$ imposibil.

În concluzie, sau a_1, a_2, a_3 sînt 3 numere consecutive crescătoare, adică verifică (3), și atunci unica soluție este $x_0 = a_1 + 4 = a_2 + 3 = a_3 + 2$, sau sînt 3 numere consecutive descrescătoare, adică verifică (4) și atunci unica soluție este $x_0 = a_1 - 4 = a_2 - 3 = a_3 - 2$.

* * * * *

102. Să se afle toate polinoamele P de două variabile cu proprietățile :

1° P -omogen de grad n în x, y adică pentru orice

$$t, x, y \in \mathbb{R}, P(tx, ty) = t^n P(x, y).$$

2° $P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0$,

3° $P(1, 0) = 1$ (Olimpiada XVII, Anglia, 8 puncte).

Soluție.

$$a = b = c = y \Rightarrow P(2y, y) = 0 \Rightarrow P(x, y) : x - 2y.$$

$$\begin{aligned} a = b = x, c = -2x &\Rightarrow P(2x, -2x) + P(-x, x) + \\ &+ P(-x, x) = 0 \Rightarrow 2^n P(x, -x) + 2P(-x, x) = 0. \end{aligned}$$

$$a = x, b = -x, c = 0 \Rightarrow P(0, 0) + P(-x, x) + P(x, -x) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Dar } P(0, 0) = 0 &\Rightarrow P(-x, x) = -P(x, -x) \Rightarrow (2^n - 2)P(x, -x) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(x, -x) = 0 \quad (n > 1) \Rightarrow P(x, y) : (x + y) \quad (n > 1). \end{aligned}$$

Fie $P_1(x, y) = \frac{P(x, y)}{x + y}$ — de grad $n - 1$ în x, y -omogen, deoarece

$$P_1(tx, ty) = \frac{t^n P(x, y)}{t(x + y)} = t^{n-1} P_1(x, y) \text{ -omogen de grad } n-1 ;$$

$$\begin{aligned} P_1(a + b, c) + P_1(b + c, a) + P_1(c + a, b) &= \\ = \frac{P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b)}{a + b + c} &= 0 \end{aligned}$$

pentru $a + b + c \neq 0$. Pentru $a + b + c = 0$ rezultă din continuitatea polinomului : $P_1(1, 0) = \frac{P(1, 0)}{1 + 0} = 1$. Rezultă că $P(x, y) =$

$= P_1(x, y)(x + y) = P_2(x, y)(x + y)^2 = \dots = P_{n-1}(x, y)(x + y)^{n-1}$
 și prin urmare

$$P(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}.$$

* * * *
 * * * * * * * * * * * *

103. Să se determine un polinom $P(x)$ care să satisfacă condiția $P(x^2 - 2x) = [P(x - 2)]^2$.

Soluție. Fie polinomul $P(x)$ de grad n , $n \geq 1$. Cazul $n = 0$ este satisfăcut de constantele 0 și 1.

Fie $x - 1 = y \Rightarrow P(y^2 - 1) = [P(y - 1)]^2$. Notăm $P(y - 1) = q(y)$ și obținem $P(y^2 - 1) = q(y^2)$ și prin urmare condiția devine $q(y^2) = [q(y)]^2$. Fie $q(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$, iar indicele coeficientului diferit de zero de gradul (> 0) cel mai mic al lui y să fie $k < n$, deci $a_k \neq 0$. Vom avea așadar,

$$q(y^2) = a_0 y^{2n} + \dots + a_k y^{2(n-k)} + a_n$$

și

$$[q(y)]^2 = a_0^2 y^{2n} + \dots + 2a_k a_n y^{n-k} + a_n^2.$$

Dar pentru $k < n$ avem că $2(n - k) > n - k$, ceea ce este imposibil, prin urmare $a_n = 0$ și $q(y)$ este de forma

$$q(y) = y^{n-k} \cdot r(y).$$

Dar $r(y)$ nu poate fi un polinom de grad nenul și cu termen liber nenul care să satisfacă la condiția $r(y^2) = [r(y)]^2$, după cum am văzut mai sus; prin urmare $q(y) = a_0 y^n$. Condiția $q(y^2) = [q(y)]^2 \Rightarrow a_0 y^{2n} = a_0^2 y^{2n} \Rightarrow a_0 = 1$ și prin urmare $q(y) = y^n$ adică $P(y - 1) = y^n$ sau $P(x) = (x + 1)^n$.

* *

104. Să se afle valoarea polinomului

$$x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \dots - 12x^2 + 12x - 1$$

pentru $x = 11$.

Soluție. $x = 11 \Rightarrow x + 1 = 12$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{17} - (x + 1)x^{16} + (x + 1)x^{15} - (x + 1)x^{14} + \dots - \\ &- (x + 1)x^2 + (x + 1)x - 1 = x^{17} - x^{17} - x^{16} + x^{16} + x^{15} - \\ &- x^{15} - x^{14} + \dots + x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - 1 = x - 1 = 10. \end{aligned}$$

* * * * *

105. $P(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi. În trei puncte diferite de abscisă întreagă are valoarea 2. Să se arate că în nici un punct de abscisă întreagă nu are valoarea 3.

Soluție.

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$P(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n,$$

$$P(x) - P(y) = (x - y) Q(x, y) \Rightarrow x - y \mid P(x) - P(y);$$

$$P(x) - P(y) : (x - y).$$

$$\begin{cases} P(a) = 2, \\ P(b) = 2, \\ P(c) = 2. \end{cases} \text{ Fie că } P(d) = 3 \Rightarrow \begin{cases} P(d) - P(a) = 1 \Rightarrow d - a \mid 1 \\ P(d) - P(b) = 1 \Rightarrow d - b \mid 1 \Rightarrow \\ P(d) - P(c) = 1 \Rightarrow d - c \mid 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d - a = \pm 1 \\ d - b = \pm 1 \\ d - c = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - a = 1 \\ d - b = -1 \end{cases} \Rightarrow d - c = 1 \text{ sau } d - c = -1;$$

imposibil căci ar implica $a = c$ sau $b = c$. Același raționament și pentru celelalte cazuri.

* * * * *

106. Să se arate că dacă $A = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2) \cdot (p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0$, atunci trinoamele $f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1$, $f_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2$ au rădăcini reale care se separă (între două ale unuia, există una a celuilalt).

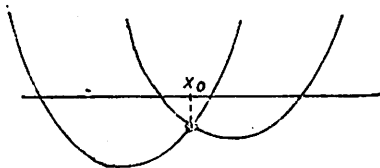


Fig. 20.

Soluție. Din condiție rezultă $p_1 \neq p_2 \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$ are soluție unică $x_0 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$, iar punctul respectiv (x_0, y_0) se află sub axa Ox , căci $y_0 = \frac{A}{(p_2 - p_1)^2} < 0$ deci graficele sînt cele din figura 20.

* *

107. 1° Să se arate că dacă $P(x)$ este polinom cu coeficienți întregi care ia valoarea 1 pentru trei argumente întregi, atunci $P(x)$ nu are nici o rădăcină întreagă. (Problemă de baraj).

Soluție. Se știe că $P(b) - P(a) = (b - a)$. Fie $P(c_1) = P(c_2) = P(c_3) = 1$ și $P(a) = 0$. Rezultă că $P(c_1) - P(a) = P(c_2) - P(a) = P(c_3) - P(a) = 1$ și prin urmare 1 se divide cu $c_1 - a$, $c_2 - a$, $c_3 - a$ care sînt numere diferite, ceea ce este absurd.

* * * *

108. Să notăm cu $f(q)$ rădăcina pozitivă a ecuației $x^3 + px - q = 0$, $q > 0$, p -fixat. Să se arate că $f(q)$ este crescătoare.

Soluție. $a = f(q), b = f(r) \Rightarrow \begin{cases} a^3 + pa - q = 0, \\ b^3 + pb - r = 0. \end{cases}$

Fie $q < r \Rightarrow a^3 - b^3 + p(a - b) = q - r < 0 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + p) < 0$.

Dar $a^2 + ab + b^2 + p > a^2 + p = \frac{a^3 + ap}{a} = \frac{q}{a} > 0 \Rightarrow a < b$.

* * * * *

109. Un polinom $P(x)$ are proprietatea că pentru un număr real a oarecare $P(x) = P(a - x)$. Să se arate că polinomul se poate reprezenta sub forma unui polinom în $(x - \frac{a}{2})^2$ (Problemă de concurs).

Soluție. Introducem o nouă variabilă $y = x - \frac{a}{2} \Rightarrow x = y + \frac{a}{2}$ și prin urmare $P(y + \frac{a}{2}) = P(\frac{a}{2} - y)$. Se vede că $y = \frac{a}{2}$ este axă de simetrie. Fie

$$P\left(\frac{a}{2} + y\right) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots + b_ny^n.$$

Atunci

$$P\left(\frac{a}{2} - y\right) = b_0 - b_1y + b_2y^2 - b_3y^3 + \dots + b_n(-1)^ny^n$$

și, scăzînd cele două ecuații membru cu membru, obținem $b_1y + b_3y^3 + \dots = 0$. Rezultă că $P\left(\frac{a}{2} + y\right) = b_0 + b_2y^2 + b_4y^4 + \dots$, deci $P\left(\frac{a}{2} + y\right)$ se reprezintă ca polinom în y^2 deci în $(x - \frac{a}{2})^2$. De

exemplu : $P(x) = x^5 + (1 - x)^5$, $P(x) = P(1 - x)$ și avem că $P(x) = 5y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{16}$, unde $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

§ 14. ECUAȚII

Înainte de a trece la rezolvarea algebrică a ecuațiilor, să ilustrăm prin câteva exemple metoda grafică de rezolvare a lor.

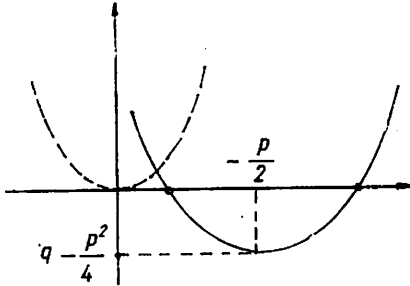


Fig. 21.

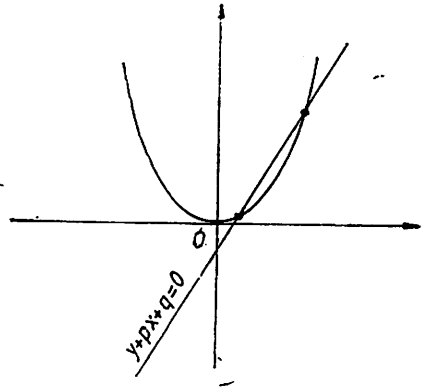


Fig. 22. →

Rezolvarea grafică a unor ecuații algebrice de gradul al doilea.

1° $x^2 + px + q = 0$.

Construim graficul funcției $y = x^2 + px + q$. Se poate folosi șablonul parabolei $y = x^2$ și punind $y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ deplasăm parabola așa fel încât vârful ei să cadă în punctul $\left(-\frac{p}{2}, q - \frac{p^2}{4}\right)$ (fig. 21).

2°
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y + px + q = 0. \end{cases}$$

3°
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + px + q = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Sistemul precedent se mai poate scrie și sub forma

$$\begin{cases} \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2, \\ y = 0 \end{cases}$$

și apoi, construim cercul cu centrul $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ și de rază $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Soluția este dată de intersecția cercului cu axa x -lor.

$$4^\circ \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + px + sy + q = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Să se determine s așa fel încît cercul dat de prima ecuație să treacă prin punctul $A(0,1)$.

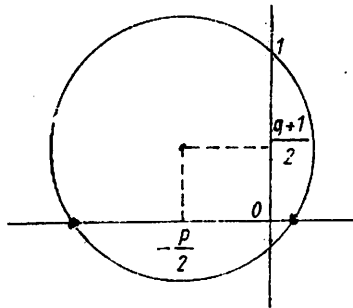


Fig. 23.

Înlocuind $x = 0, y = 1$ în prima ecuație, obținem $1 + s + q = 0$
 $\Rightarrow s = -q - 1$ și apoi construim cercul cu centrul $\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$
 și de rază $R = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + 1}{2}}$ avînd ecuația $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left[\sqrt{\frac{p^2 + q^2 + 1}{2}}\right]^2$. Soluția este dată de punctele de intersecție a cercului cu axa x -lor (fig. 23).

PROBLEME

* * * *

110. Să se rezolve ecuația : $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.*Soluție.* Mulțimea de definiție este dată de condițiile

$$x \geq \frac{1}{4} \text{ și } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Dacă $x > \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{4x-1} > 1$ — imposibil $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ singura soluție.

* * * *

111. Să se rezolve ecuația,

$$\sqrt{\frac{1}{3} - x} + x - 1 = \sqrt{x - \frac{1}{4}} + \sqrt{x - \frac{1}{6}}$$

Soluție. Mulțimea de definiție este dată de condițiile

$$x \leq \frac{1}{3} \text{ și } x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3} - x} + x - 1 \leq \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + x - 1 = \sqrt{\frac{1}{12}} + x - 1 <$$

$$< \sqrt{\frac{1}{12}} + \frac{1}{3} - 1 < 0,$$

deci membrul întii nu poate avea soluție și prin urmare nici ecuația.

112. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} - 2 = 0.$$

(Gazeta Matematică 2, 1976, Problema nr. 15618).

Soluție. Evident $x = 0$ nu-i soluție așa că putem presupune $x \neq 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})^2}{1+x^2-1+x^2} - 2 = 0 &\Leftrightarrow \frac{2 + 2\sqrt{1-x^4}}{2x^2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^4} = 2x^2 - 1 &\Leftrightarrow 1 - x^4 = (2x^2 - 1)^2 \quad (\text{deoarece } x \neq 0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - x^4 = 4x^4 + 1 - 4x^2 &\Leftrightarrow 5x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

113. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x + [x]} + \sqrt{x - \sqrt{x}} = 1$.

Soluție. Evident $x \neq 0$. Apoi $x > 0$, căci altminteri \sqrt{x} ar fi imaginar. De asemenea $x \geq 1$, deoarece altfel $x - \sqrt{x} < 0$ și deci $\sqrt{x - \sqrt{x}}$ ar rezulta imaginar. Dar $x \geq 1$ implică $\sqrt{x + [x]} \geq \sqrt{2} > 1$, așa că un astfel de x nu poate fi soluție.

În concluzie ecuația din enunț nu admite nici o soluție reală.

* *

114. Să se rezolve ecuația $27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$.

Soluție. Se aduce la forma $\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$ prin împărțirea ambilor membri cu 8^x . Apoi se notează $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ și se obține $y^3 + y - 2 = 0 \Rightarrow y^3 - 1 + y - 1 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0$. O soluție este $y = 1$, iar celelalte 2 sînt $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$. Așadar, singura soluție reală este $y = 1$, care dă $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

* * * *

115. Să se rezolve ecuația: $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$.

Soluție. O scriem sub forma $x^6 - (a^2 + 1)x^2 + a = 0$, unde $a = \sqrt{6}$. Rezolvăm în raport cu a ecuația $a^2x^2 - a + x^2 - x^6 = 0$:

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x^4 + 4x^6}}{2x^2} = \frac{1 \pm (2x^4 - 1)}{2x^2} = \begin{cases} x^2, \\ \frac{1 - x^4}{x^2}; \end{cases}$$

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{6}; \frac{1}{x^2} - x^2 = a \Rightarrow x^4 + ax^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}}}{\sqrt[4]{2}}.$$

* * * *

116. Se dă $x^2 - 3x + 1 = 0$. Să se afle $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.

Soluție.

$$(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 3 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{5};$$

$$(\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2})^2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 2\sqrt[4]{x_1x_2} = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

* * * *

117. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0.$$

Soluție. $x = 1$ este soluție. Dacă

$$x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} < 1, \sqrt{x-1} > 0$$

și deci membrul întii este numai pozitiv $\Rightarrow x = 1$ soluție unică.

* * * *

118. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x + 3}$.

Soluție. $x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{(x^2 + x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x + 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 1 + x + \frac{1}{x}} = 2 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$. Dar $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ și cum
primul membru nu poate fi negativ rezultă $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x = 1$,
 $x = -1$, din care numai $x = -1$ este soluție.

* *

119. Să se arate că ecuația $x^3 + x^2 + x = 1$ nu are mai mult
de o rădăcină reală și că rădăcina reală satisface la $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soluție. Funcția $f(x) = x^3 + x^2 + x$ pentru $x \geq 0$ este strict
crescătoare și nu poate avea rădăcini în afară de $x = 0$. Pentru $x < 0$,
 $f(x) = x(x^2 + x + 1)$ este negativă și nu poate avea rădăcină.
Rezultă că $x^3 + x^2 + x = 1$ are o singură rădăcină. Pe de altă
parte, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} > 1$,
deci $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

* * * *

120. Să se arate că pentru $q > 0$ ecuația $x^3 + px - q = 0$ are
numai o rădăcină pozitivă.

Soluție. $f(x) = x^3 + px - q$. Deoarece $f(x) > 0$ pentru x sufi-
cient de mare și $f(0) = -q < 0$, rezultă că $f(x)$ are cel puțin o rădă-
cină pozitivă (Ne bazăm pe continuitatea funcției $f(x)$.)

Dacă $p > 0$, $f(x)$ este monoton crescătoare și deci nu poate
avea mai mult de o rădăcină pozitivă.

Dacă $p < 0$ funcția $f(x) + q = x^3 + px$ are exact o rădăcină
strict pozitivă și una zero, iar prin deplasarea graficului în jos cu
 $q > 0$ unități, rădăcina zero nu mai apare (fig. 24).

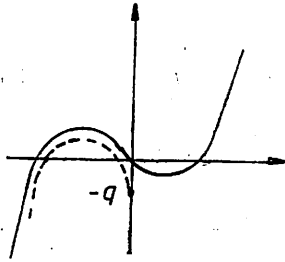


Fig. 24.

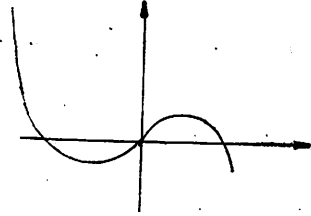


Fig. 25.

* * *

121. Să se rezolve ecuația $2x^2 + [x] = x^4$.

Soluție. $[x] = x^4 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow [x] + 1 = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow [x] \geq -1 \Rightarrow x \geq -1$. Pentru $x \geq 2$ avem

$$\begin{cases} 2x^2 \leq x^3 \\ [x] \leq x. \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + [x] \leq x^3 + x < 2x^3 \leq x^4$$

și deci soluție pentru $x \geq 2$ nu avem.

$$\begin{aligned} x \in [-1, 0) \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow 2x^2 - 1 = x^4 \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}. \end{aligned}$$

$$x \in [0, 1) \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow 2x^2 = x^4 \Rightarrow \boxed{x = 0}.$$

$$\begin{aligned} x \in [1, 2) \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

*

122. Să se rezolve ecuația: $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$.

Soluție.

$$\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x = t \Rightarrow \begin{cases} x = 3^t \\ 1 + \sqrt{x} = 2^t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 3^{t/2} \Rightarrow$$

$$1 + 3^{t/2} = 2^t \Rightarrow 1 + (\sqrt{3})^t = 2^t \Rightarrow (1/2)^t + (\sqrt{3}/2)^t = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \Rightarrow \sin^t \frac{\pi}{6} + \cos^t \frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{t = 2}.$$

* * * * *

123. Fie p —natural $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$. Să se arate că dacă p este prim, ecuația are exact trei soluții în N , iar dacă p este compus numărul soluțiilor este mai mare ca 3.

Soluție. 1° p -prim :

$$\frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p}.$$

Avem trei soluții.

2° p -compus :

$$p = \frac{1}{ab} \Rightarrow \frac{1}{(a+1)b} + \frac{1}{ab(a+1)} = \frac{1}{ab} \quad \forall a, b \in N.$$

Fie p -prim ; să arătăm că alte soluții nu mai sînt.

$$\begin{cases} x = p + q \\ y = p + r \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+r} = \frac{1}{p} \Rightarrow p^2 + pr + p^2 + pq =$$

$$= p^2 + pq + pr + rq \Rightarrow p^2 = rq \Rightarrow (r, q) : (1, p^2), (p, p), (p^2, 1),$$

deci alte soluții nu mai sînt.

* * *

124. Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{7}{2}a^2$ nu are soluții raționale dacă $a \in Z - \{0\}$.

Soluție. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 7a^2 \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 7q^2$, (m, n, p, q —prime între ele)

q -par $\begin{cases} m \text{ par, } n, p \text{—impere membrul al doilea se divide cu } 4 \\ \text{dar membrul intii nu se divide cu } 4. \\ n, n, p \text{—pare—imposibil, căci } m, n, p, q \text{ n-ar mai fi prime} \\ \text{intre ele.} \end{cases}$

q -impar $\Rightarrow q^2$ împărțit la 8 dă restul 1, deci în membrul doi obținem restul 7.

m^2, n^2, p^2 împărțite la 8 furnizează resturile 0, 1, 4, dar suma unor asemenea trei numere nu poate da 7, deci ecuația $m^2 + n^2 + p^2 = 7q^2$ este imposibilă în numere întregi.

* * * *

125. Trinomul $f(x) = ax^2 + bx + c$ este astfel încât ecuația $f(x) = x$ nu are rădăcini reale. Să se arate că ecuația $f(f(x)) = x$ de asemenea nu are rădăcini reale.

Soluție. 1° $f(x) > x, \forall x \Rightarrow f(x) - x$ are semn constant $\Rightarrow \forall x_0, f(x_0) > x_0$. Considerind $x = f(x_0)$ avem $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, deci $f(f(x)) = x$ nu are soluție.

2° $f(x) < x, \forall x$. Fie $x_0, f(x_0) < x_0$. Luând $x = f(x_0)$ avem $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$ deci de asemenea $f(f(x))$ nu are rădăcini reale.

* * * *

126. Se știe că $a + b + c < 0$ și că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are rădăcini reale. Să se determine ce semn are numărul c . (Problema de baraj).

Soluție. $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow ac > \frac{b^2}{4}$. Să determinăm semnul lui $c(a + b + c)$: $c(a + b + c) = ac + bc + c^2 > \frac{b^4}{4} + bc^2 + c^2 = \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 \geq 0$. Cum $a + b + c < 0$ rezultă că $c < 0$.

* * *

127. Pentru ce valori ale lui a și b , ecuația

$$\sqrt[3]{(ax + b)^2} + \sqrt[3]{(ax - b)^2} + \sqrt[3]{a^2x^2 - b^2} = \sqrt[3]{b}$$

are soluție unică?

Soluție. Membrul stâng este „par” deci soluție unică înseamnă $x = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{-b^2} = \sqrt[3]{b} \Rightarrow b^2 = b \Rightarrow b = 0, b = 1$ și $a \in \mathbb{R}$.

128. Să se rezolve ecuația $x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{2n-2}x^2 - 2nx + 1 = 0$ știind că are toate rădăcinile pozitive. (Gazeta Matematică, 11, 1976, Problema nr. 16173).

Soluție. Avem că $x_1x_2 \dots x_{2n} = 1$ și $x_1x_2 \dots x_{2n-1} + \dots + x_2x_3 \dots \dots x_{2n} = 2n$ sau $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{2n}} = 2n$. Dar conform inegalității lui Cauchy $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{2n}} \geq 2n \sqrt[2n]{\frac{1}{x_1x_2 \dots x_{2n}}} = 2n$, semnul

egal avînd loc atunci cînd numerele sînt egale adică $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \dots = \frac{1}{x_{2n}} = 1$ și prin urmare $x_i = 1 (i = 1, \dots, 2n)$.

* * * * *

129. Să se rezolve în numere raționale :

$$1^\circ a^2 + b^2 = a + b$$

$$2^\circ a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$$

$$3^\circ \sum x_i = \sum x_i^2.$$

Formulare geometrică pentru primul. Există triunghiuri dreptunghice în care pătratul ipotenuzei = suma catetelor ?

Soluție. $1^\circ a^2 + b^2 = a + b ; a = bm (m \text{ rațional}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b^2(1 + m^2) = b(1 + m) \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1 + m}{1 + m^2}, \\ a = \frac{m(1 + m)}{1 + m^2}. \end{cases}$$

$$2^\circ \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c, \\ a = cm, (m, n \text{ raționale}) \\ b = cn, \end{cases} \Rightarrow c^2(1 + m^2 + n^2) = c(1 + m + n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1 + m + n}{1 + m^2 + n^2}, \\ b = \frac{n(1 + m + n)}{1 + m^2 + n^2}, \\ a = \frac{m(1 + m + n)}{1 + m^2 + n^2}. \end{cases}$$

$$3^\circ \sum_{i=0}^{n-1} x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2.$$

$$x_i = m_i x_0, m_i \text{ ra\u0219ionale, } m_0 = 1 \Rightarrow x_0^2 \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 = x_0 \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i}{\sum_{i=0}^{n-1} m_i^2},$$

$$x_i = \frac{m_i \sum_{k=0}^{n-1} m_k}{\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; m_0 = 1).$$

130. S\u0103 se determine toate perechile (x, y) de numere naturale, care verific\u0103 ecua\u021bia $x^5 - xy^2 + y^2 - 1 = 0$ (Gazeta Matematic\u0103 1, 1977, Problema nr. 16 400, - Olimpiad\u0103 Austria, 1977).

Solu\u021bie. Ecua\u021bia dat\u0103 este echivalent\u0103 cu $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2) = 0$, de unde se vede c\u0103 o familie de solu\u021bii este $x = 1, y = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dac\u0103 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2 = 0$, atunci avem $4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2) = 0$ sau $(2x^2 + x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 = 4y^2$, de unde $4y^2 > (2x^2 + x)^2$.

Pe de alt\u0103 parte avem

$$4y^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (2x^2 + x + 2)^2 - 5x^2;$$

deci $4y^2 < (2x^2 + x + 2)^2$.

Rezult\u0103 c\u0103 $2x^2 + x < 2y < 2x^2 + x + 2$, ceea ce spune c\u0103 $2x^3 + x, 2y, 2x^2 + x + 2$ s\u00b0nt numere naturale consecutive, deci $2y = 2x^2 + x + 1$, adic\u0103 $4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 4y^2 = (2x^2 + x + 1)^2$.

De aici, dup\u0103 efectuarea calculului, rezult\u0103 $x^2 - 2x - 3 = 0$, cu r\u0103d\u0103cinile $x_1 = -1, x_2 = 3$. Cum ne intereseaz\u0103 numai solu\u021biile numere naturale, avem $x = 3$, c\u0103reia ii corespunde $y = 11$.

131. S\u0103 se arate c\u0103 ecua\u021bia $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1$ nu are solu\u021bii numere naturale.

Solu\u021bie. Se consider\u0103

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

și:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz).$$

Acestea implică

$$1 = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)[(x + y + z)^2 - (xy + xz + yz)] \Rightarrow$$

$$x + y + z = (x + y + z)^2 - (xy + xz + yz) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 1, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Așadar ecuația din enunț nu are soluții numere naturale, deoarece 0 nu face parte dintre acestea.

132. Să se arate că ecuația $7(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$ nu are soluții numere întregi.

Soluție. Dacă $z = 7k + n$ ($n = 0, 1, \dots, 6$), atunci $z^2 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7}$. Dacă $z \neq 7k$, $t \neq 7m$, nu există nici o posibilitate de asociere a lui $z = 7k + n$ și a lui $t = 7m + p$ așa fel încât $z^2 + t^2$ să fie congruent cu 0 ($\pmod{7}$). Așadar, singura posibilitate ar fi eventual $z = 7z_1$, $t = 7t_1$, care ar implica

$$7(x^2 + y^2) = 7^2(z_1^2 + t_1^2) \Rightarrow x^2 + y^2 = 7(z_1^2 + t_1^2) \text{ cu } z > z_1, t > t_1$$

și, raționind ca mai sus, s-ar obține două șiruri infinite de numere naturale

$$z > z_1 > z_2 > \dots > 0,$$

$$t > t_1 > t_2 > \dots > 0,$$

ceea ce-i imposibil.

133. Este aplicabilă metoda din problema precedentă ecuației $5(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$?

Soluție. Nu-i aplicabilă, deoarece dacă $z = 5k + n$ ($n = 1, 2, 3, 4$), resturile lui $z^2 \pmod{5}$ sînt 1 și 4 și atunci dacă, de exemplu, $z = 5k + 1$, $t = 5m + 2$, vom avea

$$5(x^2 + y^2) = 5(5k^2 + 5m^2 + 2k + 2n + 1).$$

și atunci, luând de exemplu $k = 1, n = 0, x = y = 2$, ea va fi satisfăcută, și deci $x = y = 2, z = 6, t = 2$ verifică ecuația de la început.

* *

134. Să se demonstreze că ecuația $x^3 = 2 + 3y^2$ nu are soluții în numere întregi.

Soluție. Evident $x > 0$, iar $y \neq 0$; de asemenea $x \neq 3k$. Se vede că $x \neq 3k + 1$ căci altminteri am avea

$$x^3 = (3k + 1)^3 = 3n + 1 = 2 + 3y^2,$$

adică $3(n - y^2) = 1$, relație imposibilă pentru $n, y \in \mathbb{Z}$. Așadar, singura posibilitate ar fi $x = 3k + 2$. Dar atunci, am avea

$$\begin{aligned} x^3 &= (3k + 2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 6 + 2 = \\ &= 3(9k^3 + 18k^2 + 12k + 2) + 2 = 2 + 3y^2, \end{aligned}$$

de unde

$$9k^3 + 18k^2 + 12k + 2 = 3m + 2 = y^2.$$

Evident $y \neq 3p, y \neq 3p + 1$. Dar nu putem avea nici $y = 3p + 2$, căci

$$y^2 = (3p + 2)^2 = 3q + 4 = 3(q + 1) + 1 = 3m + 2.$$

135. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^2 - y^2 + 2x + 4y = 515$. (Gazeta Matematică 8, 1976, Problema nr. 15995).

Soluția I-a. Ecuația precedentă se mai poate scrie și sub forma

$$(x + 1)^2 - 1 - (y - 2)^2 + 4 = 515 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1 + y - 2)(x + 1 - y + 2) = 512 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + y - 1)(x - y + 3) = 512 \Rightarrow (x + y - 1)(x - y + 3) = 2^9.$$

Evident, nu putem avea $\begin{cases} x = 2m, \\ y = 2n, \end{cases}$ nici $\begin{cases} x = 2m + 1, \\ y = 2n + 1. \end{cases}$ Din cazurile posibile, să ne ocupăm mai întâi de

$$\text{I. } \begin{cases} x = 2m + 1 \\ y = 2n \end{cases} \Rightarrow 2^2(m + n)(m - n + 2) = 2^9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m + n)(m - n + 2) = 2^7.$$

$$\begin{aligned} \text{I}_1. \text{ Fie } \begin{cases} m = 2p + 1 \\ n = 2q + 1 \end{cases} &\Rightarrow 2^2(p + q + 1)(p - q + 1) = 2^7 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (p + q + 1)(p - q + 1) = 2^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I}_{1A}. \text{ Fie } \begin{cases} p = 2k + 1 \\ q = 2l \end{cases} &\Rightarrow 2^2(k + l + 1)(k - l + 1) = 2^5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (k + l + 1)(k - l + 1) = 2^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I}_{1Aa}. \begin{cases} k = 2r \\ l = 2s + 1 \end{cases} &\Rightarrow 2^2(r + s + 1)(r - s) = 2^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (r + s + 1)(r - s) = 2 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23, \\ y = 10. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I}_{1Ab}. \begin{cases} k = 2r + 1 \\ l = 2s \end{cases} &\Rightarrow 2^2(r + s + 1)(r - s + 1) = 2^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (r + s + 1)(r - s + 1) = 2 \end{aligned}$$

imposibil deoarece în membrul întâi cei doi factori sînt sau ambii impari sau ambii pari.

$$\begin{aligned} \text{I}_{1B}. \begin{cases} p = 2k, \\ q = 2l + 1 \end{cases} &\Rightarrow 2^2(k + l + 1)(k - l) = 2^5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (k + l + 1)(k - l) = 2^3. \end{aligned}$$

$$\text{I}_{1Ba} \begin{cases} k = 2r, \\ l = 2s + 1 \end{cases} \Rightarrow (r + s + 1)(2r - 2s - 1) = 2^2,$$

iar factorul al doilea din membrul întâi implică

$$\begin{aligned} r = s + 1 &\Rightarrow 2(s + 1) = 2^2 \Rightarrow s + 1 = 2 \Rightarrow s = 1 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2m + 1 = 2(2p + 1) + 1 = 2(2 \cdot 2^3 + 1) + 1 \\ y = 2n = 2(2q + 1) = 2\{2[2(2 + 1) + 1] + 1\} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 35, \\ y = 30. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{I}_1\text{Bb. } \begin{cases} k = 2r + 1 \\ l = 2s \end{cases} \Rightarrow 2^2(r + s + 1)(r - s + 1) = 2^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow (r + s + 1)(r + s - 1) = 2 \Rightarrow$$

imposibil.

$$\text{I}_2 \begin{cases} m = 2p \\ n = 2q \end{cases} \Rightarrow (p + q)(p - q + 1) = 2^5.$$

$$\text{I}_2\text{A. } \begin{cases} p = 2k \\ q = 2l + 1 \end{cases} \Rightarrow 2(2k + 2l + 1)(k - l) = 2^5 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2k + 2l + 1)(k - l) = 2^4 \Rightarrow$$

imposibil căci primul factor din membrul întâi este impar > 1 afară de cazul $k = l = 0$.

$$\text{I}_2\text{B. } \begin{cases} p = 2k \\ q = 2l \end{cases} \Rightarrow (k + l)(2k - 2l + 1) = 2^4,$$

iar factorul al doilea din membrul întâi implică $k = l$ și deci

$$\begin{cases} k = 2^3 \\ l = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2m + 1 = 4p + 1 = 8k + 1 = 65 \\ y = 2n = 4q = 8l = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 65, \\ y = 64. \end{cases}$$

$$\text{I}_2\text{C } \begin{cases} p = 2k + 1 \\ q = 2l + 1 \end{cases} \Rightarrow (k + l + 1)(2k - 2l + 1) = 2^4 \Rightarrow$$

imposibil căci al doilea factor este impar > 1 , afară de cazul $k = l = 0$.

$$\text{II. } \begin{cases} x = 2m \\ y = 2n + 1 \end{cases} \Rightarrow (m + n)(m - n + 1) = 2^7.$$

$$\text{II}_1. \begin{cases} m = 2p \\ n = 2q \end{cases} \Rightarrow (p + q)(2p - 2q + 1) = 2^6,$$

iar factorul al doilea din membrul întâi implică $p = q$ și deci

$$\begin{cases} p = 2^5 \\ q = 2^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^7 \\ y = 2^7 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 128, \\ y = 129. \end{cases}$$

$$\text{II}_2. \begin{cases} m = 2p + 1 \\ n = 2q + 1 \end{cases} \Rightarrow (p + q + 1)(2p - 2q + 1) = 2^6 \Rightarrow$$

imposibil, căci factorul al doilea din membrul întâi implică $p = q$, ceea ce ar face primul factor impar > 1 .

$$\text{II}_3. \begin{cases} m = 2p \\ n = 2q + 1 \end{cases} \Rightarrow (2p + 2q + 1)(p - q) = 2^6 \Rightarrow$$

imposibil căci primul factor din membrul întâi implică $p = q = 0$ (căci altminteri ar fi impar > 1).

$$\text{II}_4. \begin{cases} m = 2p + 1 \\ n = 2q \end{cases} \Rightarrow (2p + 2q + 1)(p - q + 1) = 2^6 \Rightarrow$$

imposibil din același motiv ca la cazul precedent.

Așadar soluțiile întregi ale ecuației din enunț sînt :

$$\begin{cases} x = 23, \\ y = 10, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 35, \\ y = 30, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 65, \\ y = 64 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = 128, \\ y = 129. \end{cases}$$

Soluția a II-a. Considerăm ecuația scrisă sub forma $(x + y - 1) \cdot (x - y + 3) = 2^9$, și trecem în revistă diferitele valori pe care le pot avea cei doi factori, adică perechi de puteri ale lui 2 cu suma exponenților egală cu 9.

$$\text{I} \begin{cases} x - y + 3 = 1, \\ x + y - 1 = 2^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2^9 - 1 \\ 2y = 2^9 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^8 - \frac{1}{2}, \\ y = 2^8 + 1 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

imposibil căci $x, y \in \mathbb{N}$.

$$\text{II} \begin{cases} x - y + 3 = 2 \\ x + y - 1 = 2^8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 2^8 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2^8 \\ 2y = 2^8 + 2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2^7 \\ y = 2^7 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 128, \\ y = 129. \end{cases}$$

$$\text{III} \begin{cases} x - y + 3 = 2^2 \\ x + y - 1 = 2^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2^7 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2^7 + 2 \\ 2y = 2^7 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2^6 + 1 \\ y = 2^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 65, \\ y = 64. \end{cases}$$

$$\text{IV } \begin{cases} x - y + 3 = 2^3 \\ x + y - 1 = 2^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2^3 - 3 \\ x + y = 2^6 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2^6 + 2^3 - 2 \\ 2y = 2^6 - 2^3 + 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^5 + 2^2 - 1 \\ y = 2^5 - 2^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35, \\ y = 30. \end{cases}$$

$$\text{V } \begin{cases} x - y + 3 = 2^4 \\ x + y - 1 = 2^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2^4 - 3 \\ x + y = 2^5 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2^5 + 2^4 - 2 \\ 2y = 2^5 - 2^4 + 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2^4 + 2^3 - 1 \\ y = 2^4 - 2^3 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23, \\ y = 10. \end{cases}$$

$$\text{VI } \begin{cases} x - y + 3 = 2^5 \\ x + y - 1 = 2^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2^5 - 3 \\ x + y = 2^4 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2^5 + 2^4 - 2 \\ 2y = 2^4 - 2^5 + 2^2 \end{cases} \Rightarrow y = 2^3 - 2^4 + 2 = -6 < 0$$

imposibil, căci $y \in N$.

Din același motiv sînt imposibile și cazurile

$$\text{VII } \begin{cases} x - y + 3 = 2^6, \\ x + y - 1 = 2^3, \end{cases} \quad \text{VIII } \begin{cases} x - y + 3 = 2^7, \\ x + y - 1 = 2^2, \end{cases}$$

$$\text{IX } \begin{cases} x - y + 3 = 2^8, \\ x + y - 1 = 2, \end{cases} \quad \text{X } \begin{cases} x - y + 3 = 2^9, \\ x + y - 1 = 1. \end{cases}$$

* * * *

136. Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 = 1971$ nu are soluții numere întregi.

Ecuația precedentă se mai poate scrie și $x^2 + y^2 = 4 \times 492 + 3$. Evident $(4k + 2)^2$ este de forma $4m$, iar $(4k + 1)^2$ și $(4k + 3)^2$ de forma $4m + 1$, așa că membrul doi fiind de forma $4m + 3$, ecuația nu poate avea soluții numere întregi.

137. Să se arate că ecuația $y^2 - 3x^2 = 1976$ nu are soluții întregi.

Soluție. Să facem tabelele resturilor lui x^2 , $3x^2$ și $y^2 \pmod{19}$:

x	x^2 (mod 19)	$3x^2$ (mod 19)	y	y^2 (mod 19)
1	1	3	1	1
2	4	12	2	4
3	9	8	3	9
4	16	10	4	16
5	6	18	5	6
6	17	13	6	17
7	11	14	7	11
8	7	2	8	7
9	5	15	9	5

Am calculat numai resturile numerelor de la 1 la 9 deoarece $(19m + k)^2 \equiv (19m - k)^2 \equiv (19m + 19 - k)^2 \equiv k^2 \pmod{19}$. Și acum privind tabelele constatăm că nici unul din resturile lui $3x^2 \pmod{19}$ nu-i egal cu vreun rest al lui $x^2 \pmod{19}$ în așa fel ca diferența lor să fie congruentă cu 0 $\pmod{19}$, căci $1976 = 2^3 \cdot 13 \cdot 19$ și deci $1976 \equiv 0 \pmod{19}$.

* * *

138. Să se arate că ecuația $3x^2 - 4xy + 2y^2 - 21x + 12y - 3 = 0$ nu are soluții întregi.

Soluție. Scriem ecuația $3x(x - 1) - 4xy + 2y^2 - 18x + 12y = -3$. Membrul întii se divide cu 2, deci nu are soluții întregi.

* * * *

139. Să se rezolve în numere întregi ecuația $x^2 + y^3 + 7z = 3$.

Soluție. x și y se pot scrie de forma $x = 7k + p$, $y = 7m + n$ cu $k, p, m, n \in \mathbb{Z}$. Fără a restringe generalitatea, putem presupune $kp, mn \geq 0$ (adică numerele întregi k și p de același semn la fel m și n). Observăm de asemenea că nu putem avea $x \equiv y \equiv 0$, căci 3 nu-i divizibil cu 7.

În continuare, constatăm că x^2, y^3 se pot scrie de forma $x^2 = 7a + p^2$ și $y^3 = 7b + n^3$, cu $a \geq 0$ și $b \in \mathbb{Z}$, și deci $x^2 \equiv 1, x^2 \equiv 2, x^2 \equiv 4 \pmod{7}$, iar $y^3 \equiv 1, y^3 \equiv 6 \pmod{7}$. De aici rezultă că nici cazurile $x \equiv 0, y \neq 0$ și $x \neq 0, y \equiv 0 \pmod{7}$ nu-s posibile deoarece 1, 2 sau 4 și nici 1 sau 6 nu-s congruente cu 3 $\pmod{7}$.

În schimb, însă, dacă luăm pe x, y de una din formele

$$\begin{cases} x = 7k + 3, \\ y = 7m + 1, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 3, \\ y = 7m + 2, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 3, \\ y = 7m + 4, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 4, \\ y = 7m + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7k + 4, \\ y = 7m + 2, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 4, \\ y = 7m + 4, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 2, \\ y = 7m - 1, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 2, \\ y = 7m - 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7k + 2, \\ y = 7m - 4, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 5, \\ y = 7m - 1, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 5, \\ y = 7m - 2, \end{cases} \begin{cases} x = 7k + 5, \\ y = 7m - 4, \end{cases}$$

atunci membrul întâi va fi congruent cu 3 (mod 7) ca și membrul doi. Așadar soluțiile ecuației din enunț vor fi date de una din perechile (x, y) de mai sus cu z corespunzător. Așa de exemplu în cazul primei perechi, vom avea $7z = 3 - (7k + 3)^2 - (7m + 1)^3 = -7(7k^2 + 6k + 1 + 49m^3 + 21m^2 + 3m)$, de unde $z = -(7k^2 + 6k + 1 + 49m^3 + 21m^2 + 3m)$ și deci

$$\begin{cases} x = 7k + 3, \\ y = 7m + 1, \\ z = -(7k^2 + 6k + 1 + 49m^3 + 21m^2 + 3m). \end{cases}$$

* * * *

140. Să se afle două numere naturale astfel încât suma pătratelor lor să fie 16000 (se cer toate soluțiile).

Soluție. Dacă notăm cu x și y numerele cerute, atunci ele trebuie să verifice condiția

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 16000.$$

Să considerăm x, y de forma $x = 4x_1 + p, y = 4y_1 + n$, cu x_1, y_1, p, n întregi nenegativi și $0 \leq p, n < 4$. Dar atunci $p^2 + n^2$ va avea valorile $0^2 + 0^2 = 0, 0^2 + 1^2 = 1, 0^2 + 2^2 = 4 \equiv 0 \pmod{4}, 0^2 + 3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}, 1^2 + 1^2 = 2, 1^2 + 2^2 = 5 \equiv 1 \pmod{4}, 1^2 + 3^2 = 10 \equiv 2 \pmod{4}, 2^2 + 2^2 = 8 \equiv 0 \pmod{4}, 2^2 + 3^2 = 13 \equiv 1 \pmod{4}, 3^2 + 3^2 = 18 \equiv 2 \pmod{4}$. Cum membrul doi al ecuației (1) este congruent cu 0 (mod 4), putem avea $p = n = 0; p = 0, n = 2; p = 2, n = 0$ sau $p = n = 2$. Dar în cazul $p = 0,$

$n = 2$ sau $p = 2$, $n = 0$, am avea $4^2x_1^2 + 4^2y_1^2 + 4^2y_1 + 4 = 16000$, sau $4^2x_1^2 + 4^2x_1 + 4^2y_1^2 + 4 = 16000$ ceea ce nu se poate deoarece atât membrii doi cît și primii 3 termeni din membrii întii sînt congruenți cu 0 (mod 16) pe cînd termenul al 4-lea din membrii întii ai celor două ecuații sînt congruenți cu 4 (mod 16).

Dar nici cazul $p = n = 2$ nu-i posibil, deoarece am avea

$$4^2x_1^2 + 4^2x_1 + 4^2y_1^2 + 4^2y_1 + 8 = 16000$$

și deci membrul întii ar fi congruent cu 8 (mod 16), pe cînd membrul doi ar fi congruent cu 0 (mod 16).

Așadar trebuie să avem $p = n = 0$ și deci $x = 4x_1$, $y = 4y_1$, așa că, după simplificarea prin 16, ecuația (1) devine

$$(2) \quad x_1^2 + y_1^2 = 1000.$$

Luînd $x_1 = 2x_2 + k$, $y_1 = 2y_2 + m$ cu k, m întregi ($0 \leq k, m < 2$) se constată că nu putem avea $k = 0, m = 1$, $k = 1, m = 0$ sau $k = m = 1$, deoarece membrul întii ar fi congruent respectiv cu 1, 1 sau 2 (mod 4) pe cînd membrul doi este congruent cu 0 (mod 4). Așadar $k = m = 0$. După simplificare prin 4 ecuația (2) devine

$$(3) \quad x_2^2 + y_2^2 = 250.$$

Să scriem $x_2 = 4x_3 + a$, $y_2 = 4y_3 + b$ cu a, b întregi ($0 \leq a, b < 4$). Ținînd seama că ecuația (3) se mai poate scrie și sub forma

$$(4) \quad x_2^2 + y_2^2 = 4.62 + 2.$$

Raționînd ca pentru ecuația (1) deducem că singurele cazuri posibile sînt cu $a = b = 1$; $a = 1, b = 3$; $a = 3, b = 1$ și $a = b = 3$, căci numai în aceste cazuri $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$, ca și membrul doi. Așadar să considerăm mai întii

$$\begin{cases} x_2 = 4x_3 + 1, \\ y_2 = 4y_3 + 1. \end{cases}$$

Atunci, cu această substituție ecuația (4) devine

$$\begin{aligned} 4(4x_3^2 + 2x_3) + 4(4y_3^2 + 2y_3) + 2 &= 4.62 + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(x_3^2 + y_3^2) + 2(x_3 + y_3) &= 62 \Rightarrow 2(x_3^2 + y_3^2) + x_3 + y_3 = 31. \end{aligned}$$

De aici deducem că din x_3, y_3 unul este par, iar celălalt impar și că $0 \leq x_3, y_3 \leq 3$. Se verifică faptul că din toate combinațiile posibile ale valorilor 0, 1, 2, 3, singura ce corespunde ecuației precedente este perechea $x_3 = 2, y_3 = 3$ și simetric $x_3 = 3, y_3 = 2$, care ne conduc la perechile de soluții

$$(5) \quad \begin{cases} x = 4x_1 = 8x_2 = 8(4x_3 + 1) = 72, \\ y = 4y_1 = 8y_2 = 8(4y_3 + 1) = 104. \end{cases}$$

și simetric

$$(6) \quad \begin{cases} x = 104, \\ y = 72. \end{cases}$$

În cazul $a = 1, b = 3$, vom avea

$$\begin{aligned} 4(4x_3^2 + 2x_3) + 4(4y_3^2 + 6y_3) + 4 \cdot 2 + 2 &= 4 \cdot 62 + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_3(2x_3 + 1) + y_3(2y_3 + 3) &= 30. \end{aligned}$$

Deducem că x_3, y_3 trebuie să fie sau ambele pare sau ambele impare, căci membrul doi este par. Totuși, x_3, y_3 nu pot fi ambele pare deoarece aceasta ar implica membrul întâi $\equiv 0 \pmod{4}$ membrul doi fiind $\equiv 2 \pmod{4}$. Din cele patru valori posibile (0, 1, 2, 3), singura pereche ce verifică ecuația precedentă este $x_3 = 1, y_3 = 3$ și simetrica ei $x_3 = 3, y_3 = 1$ și deci, printr-un calcul asemănător ca pentru perechile precedente de soluții obținem

$$(7) \quad \begin{cases} x = 40, & \begin{cases} x = 120, \\ y = 40. \end{cases} \\ y = 120, \end{cases}$$

Nu mai rămâne decît să analizăm și ultima eventuală posibilitate: $a = b = 3$. Aceasta ne-ar conduce la

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2[2(x_3^2 + y_3^2) + 3(x_3 + y_3)] + 4 \cdot 4 + 2 &= 4 \cdot 62 + 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(x_3^2 + y_3^2) + 3(x_3 + y_3) + 2 &= 31. \end{aligned}$$

Deducem că din x_3, y_3 unul este par, iar celălalt impar, dar făcînd calculele, se constată că nici una din perechile de numere din valorile 0, 1, 2, 3 nu verifică ecuația precedentă. În concluzie, soluțiile ecuației (1) sînt date de (5), (6) și (7).

* * * * *

141. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^6 + y^6 - z^6 = 1972$.

Soluție. Scriem tabloul restului împărțirii puterilor lui a la 7.

$a \backslash \text{exp}$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	1	2	4	1
3	3	2	6	4	5	1
4	4	2	1	4	2	1
5	5	4	6	2	3	1
6	6	1	6	1	6	1

Nu avem nevoie să continuăm tabelul pentru valori ale lui $a > 6$, deoarece el se repetă căci $7 = 7 + 0$, $8 = 7 + 1$, $9 = 7 + 2$ etc. și deci clasele de resturi ale diferitelor puteri sînt aceleași ca pentru 0, 1, 2 etc.

Restul împărțirii la 7 a unui număr de forma $x^6 + y^6 - z^6$ poate fi 0, 6, 1, 2, iar nu 5 cît este restul împărțirii lui 1972 la 7, deci ecuația nu are soluții.

* * * * *

142. Să se arate că ecuația $3x^2 - y^2 = 5z$ nu are soluții numere întregi.

Soluție. Dacă scriem pe x și y de forma $x = 5k + 1$, $y = 5n + 1$ sau $x = 5k + 4$, $y = 5n + 4$, vom avea x^2, y^2 de forma $x^2 = 5p + 1$ și $y^2 = 5m + 1$, iar dacă $x = 5k + 2$, $y = 5n + 2$ sau $x = 5k + 3$, $y = 5n + 3$, va rezulta $x^2 = 5p + 4$, $y^2 = 5q + 4$. Dar atunci $3x^2 \equiv 3 \pmod{5}$ în primul caz și $3x^2 \equiv 2 \pmod{5}$ în cazul al doilea, așa că singurele cazuri posibile (pentru $x \neq 5k$, $y \neq 5n$) sînt $3x^2 - y^2 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \pmod{5}$, $3x^2 - y^2 \equiv 3 + 4 \equiv 2 \pmod{5}$, $3x^2 - y^2 \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod{5}$ și $3x^2 - y^2 \equiv 2 + 4 \equiv 1 \pmod{5}$; pe cînd membrul doi este congruent cu 0 (mod 5). Evident nu putem avea nici cazurile $x = 5k$, $y \neq 5n$ sau $x \neq 5k$, $y = 5n$.

Să considerăm cazul $z = 0$, adică $3x^2 - y^2 = 1$. Dacă $y = 3a + 1$ sau $y = 3a + 2$ rezultă y^2 de formă $y^2 = 3b + 1$ cu a întreg și b întreg nenegativ și deci $3x^2 - y^2 \equiv 2 \pmod{3}$ pe cînd membrul doi este congruent cu 1 (mod 3). Așadar $z \geq 1$ ($z < 0$ fiind imposibil cu x, y întregi).

Rămâne prin urmare cazul $x = 5k, y = 5n$. Dar atunci membrul întâi este divizibil cu 5^2 așa că $z \geq 2$. Simplificând prin 5^2 obținem

$$3k^2 - n^2 = 5^t,$$

unde $t = z - 2$, iar $x > k, y > n, z > t$, adică am obținut aceeași ecuație din enunț. Notînd $k = x_1, n = y_1, t = z_1$ și repetînd raționamentul la nesfîrșit, vom obține șirurile infinite $x > x_1 > \dots > 0, y > y_1 > \dots > 0, z > z_1 > \dots > 0$, ceea ce-i imposibil, și cu aceasta afirmația din enunț e demonstrată.

* * *

143. Să se rezolve în numere naturale, unde $n \geq 1$ este natural, ecuația

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} + x^n + y^n + z^n = x^{n+2} + y^{n+2} + z^{n+2} + x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1}.$$

Soluție. $x^{n+3} - x^{n+2} - x^{n+1} + x^n = x^n(x^3 - x^2 - x + 1) = x^n(x-1)^2(x+1)$ deci $x^n(x-1)^2(x+1) + y^n(y-1)^2(y+1) + z^n(z-1)^2(z+1) = 0, x = y = z = 1$. Soluțiile vor fi: $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0)$.

* * *

144. Care este cea mai simplă ecuație admițînd toate soluțiile exercițiului precedent?

Soluție. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$, căci $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) = 0$.

* * * * *

145. Să se arate că egalitatea $1153^{60} + 211^{60} = 27027 \cdot 100^x + 2$ nu are loc pentru nici un $x \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Se consideră resturile modulo 17 și se ajunge la $(-3)(-2)^x + 2 \equiv 0 \pmod{17}$ și se iau pe rînd valorile lui x (ciclul se închide după 8).

146. Să se arate că ecuația $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$ nu are soluții numere naturale.

Soluție. Membrul doi se divide cu 3. Dar se constată că aceasta nu se obține dacă $z = 3z_1 + 1, t = 3t_1$ sau $z = 3z_1 + 2, t = 3t_1$ sau $z = 3z_1 + 1, t = 3t_1 + 1$ sau $z = 3z_1 + 2, t = 3t_1 + 1$ și situațiile corespunzătoare schimbînd pe z cu t . Așadar trebuie să avem $z = 3z_1,$

$t = 3t_1 \Rightarrow 6(x^2 + y^2) = 9(z_1^2 + t_1^2) \Rightarrow$ Membrul întii se divide cu 9 \Rightarrow
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 3x_1 \\ y = 3y_1 \end{cases} \Rightarrow 6(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 + t_1^2 \Rightarrow (x, y, z, t)$ soluție $\Rightarrow (x_1, y_1, z_1, t_1)$
 soluție și obținem $x > x_1 > x_2 > \dots > 0$, care-i un șir descrescător
 infinit de numere naturale, ceea ce-i imposibil.

* * * *

147. Să se arate că ecuația $x^3 + y^3 - 3xy = 2$ nu are soluții întregi.

Soluție. $\begin{cases} x = 2m + 1, y = 2n + 1 \\ x = 2m + 1, y = 2n \end{cases}$ imposibil $\Rightarrow x = 2m, y =$
 $= 2n \Rightarrow 8m^3 + 8n^3 - 12mn = 2 \Rightarrow 2[2(m^3 + n^3) - 3mn] = 1$ imposibil, deci nu avem nici o soluție.

148. Să se arate că ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ nu are soluții numere naturale.

Soluție. Membrul întii se divide cu 2 \Rightarrow

1° x par y, z impare — imposibil căci membrul doi s-ar divide cu 4 și membrul întii numai cu 2.

2° $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1 + 1$ este imposibil căci membrul întii ar fi impar pe cînd membrul doi ar fi par.

3° $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4x_1y_1z_1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 8x_1y_1z_1 \Rightarrow x > x_1 > x_2 > \dots > x_k > x_{k+1} > \dots > 0$ șir infinit — imposibil.

149. Să se rezolve ecuația $7x + 11y = 9$ în numere întregi.

Soluție. Fie $x = x_0 - 11t, y = y_0 + 7t$. Scriem clasele de resturi (mod 11) din care fac parte multiplii succesivi ai lui 7:

7, 3, 10, 6, 2, 9, 5, 1; $8 \cdot 7 = 56 \Rightarrow 8 \cdot 7 = 1 + 5 \cdot 11$, deci

$$8 \cdot 7 - 5 \cdot 11 = 1 \mid 9 \Rightarrow 72 \cdot 7 - 45 \cdot 11 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 72 \\ y_0 = -45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 72 - 11t, y = -45 + 7t,$$

Pornind de la restul 3 sau 9 se mai găsesc și soluțiile $x = 6 - 11t, y = -3 + 7t$.

* * *

150. Să se rezolve în numere întregi ecuația: $\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2y-2} + \sqrt[4]{4z-3} = 10$.

Soluție :

$$\begin{cases} 2x - 1 = (2m - 1)^2 \\ 2y - 2 = 8t^3 \\ 4z - 3 = (2n - 1)^4 \end{cases} \Rightarrow 2m - 1 + 2t + 2n - 1 = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m + n + t = 6 \Rightarrow m = 6 - n - t \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(11 - 2n - 2t)^2 + 1}{2}, \\ y = 4t^3 + 1, \\ z = \frac{(2n - 1)^4 + 3}{4}. \end{cases}$$

* * * * *

151. Să se rezolve în numere naturale ecuația $5^x = 1 + 2^y$.

Soluție. $x = 2n \Rightarrow 5^{2n} - 1 = 2^y \Rightarrow (5^2 - 1)(5^{2n-2} + 5^{2n-4} + \dots + 5^2 + 1) = 2^y$. Dar $5^2 - 1 = 24:3$, ceea ce-i imposibil deoarece 2^y nu-i divizibil cu 3. $x = 2n + 1 \Rightarrow 5^{2n+1} - 1 = 2^y \Rightarrow (5 - 1)(5^{2n} + 5^{2n-1} + \dots + 5 + 1) = 2^y \Rightarrow$ sumă de numere impare în număr impar \Rightarrow impar $\Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = 1, y = 2$.

* * *

152. Să se arate ecuația $2^x + 7^y = 19^z$ nu are soluție numere naturale.

Soluție.

$$2 \equiv (-1) \pmod{3}$$

$$2^x \equiv (-1)^x \pmod{3}$$

$$7^y \equiv 1 \pmod{3}, 19^z \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^x + 7^y \equiv 1 + (-1)^x \pmod{3} \not\equiv 1 \pmod{3}.$$

* * * * *

153. Să se afle toate soluțiile în numere naturale ale ecuației $n^x + n^y = n^z$.

Soluție. $n = 1$ - imposibil $\Rightarrow n \geq 2$ și $z > \max(x, y)$. Fie $x < y < z \Rightarrow n^{z-x} - n^{y-x} = 1$. Dacă $y > x \Rightarrow 1: n$ imposibil $\Rightarrow y = x \Rightarrow n^{z-x} = 2 \Rightarrow n = 2, z - x = 1$, deci soluțiile sînt: $n = 2, x = y, z = x + 1$.

* * * * *

154. Pentru ce n ecuația $nx! + ny! = z!$, are soluție unică în numere naturale?

Soluție. $n(n-1)! + nn! = (n+1)!$ și deci soluțiile sînt :

$$(n-1, n, n+1), (n, n-1, n+1)$$

$n = 1:$ $x! + y! = z!$. Avem că $x < z, y < z$.

$x < y \Rightarrow x! = z! - y!$. Cum $z > x, z > y$, membrul doi este divizibil cu $y!$, iar membrul întii nu $\Rightarrow x = y$. Deci $2x! = z! \Rightarrow z \geq x + 1 \Rightarrow z! \geq (x+1)x! \Rightarrow 2x! \geq (x+1)x! \Rightarrow 2 \geq x + 1$.

Așadar soluția unică pentru $n = 1$ este $x = 1, y = 1, z = 2$. Evident, $(n-1, n, n+1)$ și $(n, n-1, n+1)$ nu mai sînt soluții în cazul $n = 1$, deoarece $n-1 = 0$ nu-i număr natural.

155. $x^x + y^y + z^z = t^t, x, y, z, t \in \mathbb{N}$ nu are soluții numere naturale.

Soluție. $0 < x \leq y \leq z \Rightarrow t > z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \Rightarrow x = y = 1 \Rightarrow t^t \neq 3 \\ z = 2 \Rightarrow t \geq 3 \Rightarrow 3^3 > 3 \cdot 2^2 \geq x^x + y^y + z^z. \\ z \geq 3 \Rightarrow t^t \geq (z+1)^{z+1} > z^{z+1} = z \cdot z^z \geq 3 \cdot z^z \geq x^x + y^y + z^z. \end{cases}$$

156. Să se rezolve în numere prime ecuația: $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{x^2 - 1}] = y$, unde cu $[a]$ am notat partea întregă a lui a .

Soluție. Remarcăm că

$$[\sqrt{n^2}] = [\sqrt{n^2 + 1}] = \dots = [\sqrt{n^2 + 2n}] = n,$$

adică

$$[\sqrt{n^2}] + [\sqrt{n^2 + 1}] + \dots + [\sqrt{n^2 + 2n}] = n(2n + 1)$$

și ecuația devine

$$\begin{aligned} & \{[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]\} + \{[\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{8}]\} + \dots + \\ & + \{[\sqrt{(x-1)^2}] + \dots + [\sqrt{x^2 - 1}]\} = \sum_{n=1}^{x-1} n(2n + 1) = 2 \sum_{n=1}^{x-1} n^2 + \\ & + \sum_{n=1}^{x-1} n = \frac{(x-1)x(2x-1)}{3} + \frac{(x-1)x}{2} = \frac{x(4x^2 - 3x - 1)}{6}. \end{aligned}$$

Trebuie rezolvată în numere prime ecuația

$$\frac{x(4x^2 - 3x - 1)}{6} = y \Rightarrow x(4x^2 - 3x - 1) = 6y.$$

Evident, x trebuie să fie un divizor al lui 6 sau al lui y (în acest caz, evident $x = y$).

$$x = 2 \Rightarrow 2(16 - 6 - 1) = 6y \Rightarrow y = 3 \Rightarrow (2, 3),$$

$$x = 3 \Rightarrow 3(36 - 9 - 1) = 6y \Rightarrow y = 13 \Rightarrow (3, 13),$$

$$x = y \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 6 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 11}{8} \begin{cases} 7 \\ 4 \\ -1 \end{cases}$$

Așadar, singurele soluții sînt $(2, 3)$ și $(3, 13)$.

* * * *

157. Pentru ce valori naturale ale lui „ a ” ecuația $ax^3 + xy - 61a = 0$ are soluție unică în numere naturale?

Soluție. $xy = a(61 - x^3) > 0$ ($x = 1, 2, 3$).

$$a = 6k \Rightarrow xy = 6k(61 - x^3) \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 60.6k, \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 53.3k, \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 34.2k. \end{cases}$$

$$a = 6k \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 60(6k \pm 1). \end{cases}$$

$$a = 6k \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 60(6k + 2), \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = 53(3k \pm 1), \end{cases}$$

$$a = 6k + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 60(6k + 3), \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 34(2k + 1), \end{cases}$$

Soluție unică pentru $6k \pm 1$.

* * * * *

158. Numărul $z = x + iy$ este complex nepozitiv (adică $y \neq 0$, $y = 0$, $x \leq 0$), atunci și numai atunci cînd există numere strict pozitive a_0, \dots, a_n așa fel încît

$$(1) \quad a_n z^n + \dots + a_0 = 0.$$

Soluție. Într-adevăr, să presupunem că un număr complex z verifică ecuația (1), atunci evident, $z = x + iy$ nu poate fi strict pozitiv ($y = 0$, $x > 0$).

Dar și reciproc, fie $z = x + iy$ un număr complex cu $y \neq 0$. Un astfel de număr se poate scrie și sub formă trigonometrică $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ cu $r > 0$ și $\theta \in (0, 2\pi)$. Fie $n > 0$ un număr natural așa fel încît $\sin[(p-1)\theta] \sin \theta > 0$ și $\sin p\theta \sin \theta < 0$ pentru cel puțin un număr natural p , $2 \leq p \leq n$. Atunci, folosind formula lui Moivre, vom avea

$$a_n \rho^n + \dots + a_0 = a_n \rho^n \cos n \theta + \dots + a_0 + i(a_n \rho^n \sin n \theta + \dots + a_1 \rho \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n \rho^n \cos n \theta + \dots + a_0 = 0 \\ a_n \rho^{n-1} \sin n \theta + \dots + a_1 \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_n \rho^n \cos n \theta + a_{n-1} \rho^{n-1} \cos(n-1)\theta = -a_{n-2} \rho^{n-2} \cos(n-2)\theta - \dots \\ \dots - a_{n-p} \rho^{n-p} \cos(n-p)\theta - \dots - a_0, \\ a_n \rho^{n-1} \sin n \theta + a_{n-1} \rho^{n-1} \sin(n-1)\theta = -a_{n-2} \rho^{n-3} \sin(n-2)\theta - \dots \\ \dots - a_{n-p} \rho^{n-p-1} \sin(n-p)\theta - \dots - a_1 \sin \theta. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{-a_{n-2}}{\rho^2} \frac{\begin{vmatrix} \cos(n-2)\theta & \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-2)\theta & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos n\theta & \cos(n-1)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}} - \dots - \\ \dots - \frac{a_{n-p}}{\rho^p} \frac{\begin{vmatrix} \cos(n-p)\theta & \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-p)\theta & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos n\theta & \cos(n-1)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}} - \dots - \\ \dots - \frac{a_0}{\rho^n} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(n-1)\theta \\ 0 & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos n\theta & \cos(n-1)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}}, \\ a_{n-1} = \frac{-a_{n-2}}{\rho} \frac{\begin{vmatrix} \cos n\theta & \cos(n-2)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n-2)\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos n\theta & \cos(n-1)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n-1)\theta \end{vmatrix}} - \dots - \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots - \frac{a_{n-p}}{\rho^{p-1}} \frac{\left| \begin{array}{cc} \cos n \theta & \cos (n-p) \theta \\ \sin n \theta & \sin (n-p) \theta \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \cos n \theta & \cos (n-1) \theta \\ \sin n \theta & \sin (n-1) \theta \end{array} \right|} \dots \\ \dots - \frac{a_0}{\rho^{n-1}} \frac{\left| \begin{array}{cc} \cos n \theta & 1 \\ \sin n \theta & 0 \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \cos n \theta & \cos (n-1) \theta \\ \sin n \theta & \sin (n-1) \theta \end{array} \right|} \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{a_{n-2}}{\rho^2} + \dots + \frac{a_{n-p}}{\rho^p} \frac{\sin (p-1) \theta}{\sin \theta} + \dots + \frac{a_0}{\rho^n} \frac{\sin (n-1) \theta}{\sin \theta}, \\ a_{n-1} = -\frac{a_{n-2}}{\rho} \frac{\sin 2 \theta}{\sin \theta} - \dots - \frac{a_{n-p}}{\rho^{p-1}} \frac{\sin p \theta}{\sin \theta} - \dots - \frac{a_0}{\rho^{n-1}} \frac{\sin n \theta}{\sin \theta}. \end{array} \right.$$

Dar atunci, din condițiile de mai sus pe care le verifică p , rezultă că $\frac{a_{n-p}}{\rho^p} \frac{\sin (p-1) \theta}{\sin \theta} > 0$ și $-\frac{a_{n-p}}{\rho^{p-1}} \frac{\sin p \theta}{\sin \theta} > 0$ și deci, pentru $a_{n-2}, \dots, a_{n-p+1}, a_{n-p-1}, \dots, a_0 > 0$ dați, dacă $a_{n-p} > 0$ este suficient de mare, a_{n-1} și a_n vor fi de asemenea strict pozitive și în așa fel încît (1) să fie verificată.

În cazul $y = 0$, $x \leq 0$, vom avea ecuația (1) de forma $a_1 x + a_0 = 0$ cu $-\frac{a_0}{a_1} = x$.

159. Să se determine numerele reale a, b, c, d pentru care $\max(a, b+c+d) = \max(b, a+c+d) = \max(c, a+b+d) = \max(d, a+b+c) = 1$ (Gazeta Matematică II, 1976, Problema nr. 16211, Problemă de baraj, Brașov, 1976).

Soluție. Deoarece $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, avem că

$$\begin{aligned} a+b+c+d+|b+c+d-a| &= a+b+c+d+|a+c+d-b|= \\ &= a+b+c+d+|a+b-c+d|=a+b+c+d+ \\ &|a+b+c-d|=2, \end{aligned}$$

care ne dă :

$$a + b + c + d + |b + c + d - a| = 2,$$

$$|b + c + d - a| = |a + c + d - b| \Rightarrow a = b \text{ sau } c = -d,$$

$$|b + c + d - a| = |a + b + d - c| \Rightarrow a = c \text{ sau } b = -d,$$

$$|b + c + d - a| = |a + b + c - d| \Rightarrow a = d \text{ sau } b = -c.$$

Obținem, în cazul $a = b = c = d$,

$$4a + |2a| = 2 \Rightarrow 2a + |a| = 1,$$

care dă $\boxed{a = b = c = d = \frac{1}{3}}$ și $a = 1$ care nu verifică.

Dacă $a = b = -c = -d$, avem că

$$a + a - a - a + |a - a - a - a| = 2 \Rightarrow 2|a| = 2 \Rightarrow |a| = 1$$

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = -1, \\ c = 1, \\ d = 1, \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \\ c = -1, \\ d = -1. \end{cases}$$

Datorită simetriei obținem deci și soluțiile

$$(1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1),$$

$$(-1, 1, 1, -1), (-1, 1, -1, 1), (-1, -1, 1, 1),$$

adică în total 7 soluții.

160. Să se calculeze $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - x_k}$, unde $x_k (k = 1, \dots, n)$ sînt rădăcinile $\neq 1$ ale ecuației $x^{n+1} - 1 = 0$. (Gazeta Matematică, Problema nr. 16145).

Soluție. Fie $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$; atunci

$$P'(x) = \frac{P(x)}{x - x_1} + \frac{P(x)}{x - x_2} + \dots + \frac{P(x)}{x - x_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \dots + \frac{1}{x-x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x-x_i}.$$

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

$$p(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x-1} = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-x_k} &= \frac{\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'}{\frac{x^{n+1}-1}{x-1}} = \frac{x-1}{x^{n+1}-1} \cdot \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)(x^{n+1}-1)}. \end{aligned}$$

Pentru a calcula expresia pentru $x=1$, aplicind de două ori regula lui Hospital,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-x_k} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1}}{x^{n+1}-1 + (n+1)x^n(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} n(n+1) \frac{nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}}{(n+1)x^n + (n+1)^2 x^n - n(n+1)x^{n-1}} = \\ &= n(n+1) \frac{1}{(n+1)(1+n+1-n)} = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Concluzie importantă:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1} = 0. \text{ (Se poate demonstra și direct).}$$

Într-adevăr, cele $n+1$ rădăcini ale unității se pot scrie și sub forma trigonometrică $x_k = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}$ ($k=1, 2, \dots, n$) și atunci, deducem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \omega_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \cos \frac{2k\pi}{n+1} - i \sin \frac{2k\pi}{n+1}} = \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} - 2i \sin \frac{k\pi}{n+1} \cos \frac{k\pi}{n+1}} = \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \sin \frac{k\pi}{n+1} \left(\sin \frac{k\pi}{n+1} - i \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)} = \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1} + i \cos \frac{k\pi}{n+1}}{2 \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(1 + i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1} \right) = \frac{n}{2} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1}
\end{aligned}$$

și deci

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n+1} = 0.$$

161. Să se simetrizeze ecuația $(x - a)^4 + (x - b)^4 = c$.

$$\text{Soluție. } y = x - \frac{a+b}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - a = y + \frac{a+b}{2} - a = y + \frac{b-a}{2}, \\ x - b = y + \frac{a+b}{2} - b = y + \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

și se obține ecuația bipătrată $\left(y - \frac{a-b}{2}\right)^4 + \left(y + \frac{a-b}{2}\right)^4 = c$.

162. Să se determine valorile parametrului a pentru care ecuația $x^2 - ax + pa = 0$ are rădăcinile întregi știind că p este un număr prim. (Gazeta Matematică 8, 1976, Problema nr. 15998).

Soluție. Fie α, β rădăcinile întregi

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = pa \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta = p(\alpha + \beta) \Rightarrow p \mid \alpha \Rightarrow \alpha = p\alpha',$$

unde am notat cu α acea rădăcină care se divide cu p . Dar atunci,

$$p\alpha'\beta = p(p\alpha' + \beta) \Rightarrow \alpha'\beta = p\alpha' + \beta \Rightarrow \alpha' \mid \beta \Rightarrow \beta = \alpha'\beta' \Rightarrow$$

$$\alpha'^2\beta' = p\alpha' + \alpha'\beta' \Rightarrow \alpha'\beta' = p + \beta' \Rightarrow p = \beta'(\alpha' - 1) \Rightarrow$$

$$1^\circ p = \beta', \alpha' - 1 = 1, \alpha = 2p, \beta = 2p, a = p\alpha' + \alpha'\beta' = \alpha'(p + \beta') \Rightarrow$$

$$1^\circ a = 2(p + p) = 4p,$$

$$2^\circ p = -\beta', \alpha' - 1 = -1 \Rightarrow 2^\circ a = 0,$$

$$3^\circ p = \alpha' - 1, \beta' = 1, \alpha = p(1 + p), \beta = 1 + p \Rightarrow 3^\circ a = (p + 1)^2,$$

$$4^\circ p = 1 - \alpha', \beta' = -1, \alpha = p(1 - p), \beta = -(1 - p) \Rightarrow 4^\circ a = -(1 - p)^2.$$

§ 15. IDENTITĂȚI

* * *

163. Să se arate că $\max\{|x + y - 2z|, |x - y|\} = |x - z| + |y - z|$.

Soluție. Se pune $x - z = a, y - z = b$.

* * * * *

164. Să se arate că dacă $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$, atunci

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

(Problemă de baraj).

Soluție. Înmulțind ambii membri cu $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$,
obținem :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b-c} \left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) + \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{b}{c-a} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b} \right) + \\ + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{c}{a-b} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = 0, \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{a}{b-c} \cdot \frac{c-b}{(c-a)(a-b)} + \\ + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{a-c}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b-a}{(b-c)(c-a)} = 0, \end{aligned}$$

care este evidentă, căci $ac - ab + ab - bc + bc - ac = 0$.

* * * * *

165. Să se demonstreze că pentru $M > N$,

$$S(M, N) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N |i - k| = \frac{1}{3}(N-1)N(N+1) + \frac{1}{2}MN(M-N).$$

Soluție. Demonstrăm prin inducție, mai întâi după M pentru $N = 1$. În cazul $M = 2$ avem $S(2, 1) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^1 |i - k| = \sum_{i=1}^2 |i - 1| = |1 - 1| + |2 - 1| = 1$, or, membrul drept, pentru $M = 2$, $N = 1$, devine de asemenea 1.

Să presupunem relația advăratată pentru $M(N = 1)$ și să arătăm că rezultă adevăratată pentru $M + 1$

$$\begin{aligned} S(M+1, 1) &= \sum_{i=1}^{M+1} |i - 1| = \sum_{i=1}^M |i - 1| + M = S(M, 1) + M = \\ &= \frac{1}{2} M(M-1) + M = \frac{1}{2} M(M-1+2) = \frac{1}{2} M(M+1). \end{aligned}$$

Și acum vom aplica inducția după $N < M$ pentru M fix. Am verificat-o deci în cazul $N = 1$ (M fix). Să presupunem că-i adevărată pentru $N - 1$ ($< M - 1$) și să arătăm că rezultă adevărată pentru N

$$\begin{aligned}
 S(M, N) &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N |i - k| = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{N-1} |i - k| + \sum_{i=1}^M |i - N| = \\
 &= S(M, N - 1) + \frac{N(N - 1)}{2} + \frac{(M - N)(M - N + 1)}{2} = \\
 &= \frac{1}{3}(N - 2)(N - 1)N + \frac{1}{2}M(N - 1)(M - N + 1) + N(N - 1) + \\
 &+ \frac{M^2}{2} - \frac{M(N - 1)}{2} - \frac{MN}{2} = \frac{1}{3}N(N - 1)(N - 2 + 3) + \\
 &+ \frac{1}{2}MN(M - N) - \frac{1}{2}M(M - N) + \frac{1}{2}M(N - 1) + \frac{M^2}{2} - \\
 &- \frac{M(N - 1)}{2} - \frac{MN}{2} = \frac{1}{3}(N - 1)N(N + 1) + \frac{1}{2}MN(M - N)
 \end{aligned}$$

și deci relația este adevărată pentru orice M și $N < M$.

* * *

166. Să se demonstreze formula lui Ramamudjan

$$p + 1 = \sqrt{1 + p \sqrt{1 + (p + 1) \sqrt{1 + \dots + (p + r) \sqrt{1 + (p + r + 1) (p + r + 3)}}}}$$

Soluție. Pornim de la $p + r + 1 + 2 = p + r + 3$, înmulțind ambii membri cu $p + r + 1$ și adunând 1, obținem

$$(p + r + 1)^2 + 2(p + r + 1) + 1 = 1 + (p + r + 1)(p + r + 3) \Rightarrow$$

$$(p + r + 2)^2 = 1 + (p + r + 1)(p + r + 3) \Rightarrow$$

$$p + r + 2 = \sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)}.$$

Înmulțind ambii membri cu $p + r$ și adunând 1, rezultă

$$(p + r)^2 + 2(p + r) + 1 = 1 + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)} \Rightarrow$$

$$(p + r + 1)^2 = 1 + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)} \Rightarrow$$

$$p + r + 1 = \sqrt{1 + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)}} \Rightarrow$$

$$(p + r - 1)^2 + 2(p + r - 1) + 1 =$$

$$= 1 + (p + r - 1)\sqrt{1 + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)}} \Rightarrow$$

$$p + r = \sqrt{1 + (p + r - 1)\sqrt{1 + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)}}} \Rightarrow$$

$$p + 2 = \sqrt{1 + (p + 1)\sqrt{1 + (p + 2)\sqrt{1 + \dots + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)}}}} \Rightarrow$$

$$p + 1 = \sqrt{1 + p\sqrt{1 + (p + 1)\sqrt{1 + \dots + (p + r)\sqrt{1 + (p + r + 1)(p + r + 3)}}}}.$$

Exemple :

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + 5.7}}}}$$

$$7 = \sqrt{1 + 6\sqrt{1 + 7\sqrt{1 + 8\sqrt{1 + 9\sqrt{1 + 10\sqrt{1 + 11.13}}}}}}$$

167. Să se arate că dacă $a + b + c = 0$, atunci și

$$\sum \frac{bc - a^2}{bc + 2a^2} = 0 \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ dar nu toate trei nule.}$$

(Gazeta Matematică, 1976, Problema nr. 15748).

Soluție. Precizăm că-n acest caz \sum înseamnă suma celor trei permutări circulare.

$$\begin{aligned} a + b + c = 0 &\Rightarrow a = -(b + c) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow a^2 - bc = \\ &= b^2 + c^2 + bc. \end{aligned}$$

Iar

$$\begin{aligned}bc + 2a^2 &= bc + 2b^2 + 2c^2 + 4bc = 2b^2 + 2c^2 + 5bc = \\&= 2(b + 2c) \left(b + \frac{c}{2} \right) = (b + 2c)(2b + c),\end{aligned}$$

unde am ținut seama că

$$b = \frac{-5c \pm \sqrt{25c^2 - 16c^2}}{4} = \frac{-5c \pm 3c}{4} \begin{cases} -2c, \\ -\frac{c}{2}. \end{cases}$$

Dar atunci

$$\begin{aligned}- \sum \frac{bc - a^2}{bc + 2a^2} &= \sum \frac{b^2 + bc + c^2}{(b + 2c)(2b + c)} = \sum \frac{b^2 + bc + c^2}{(c - a)(b - a)} = \\&= \frac{b^2 + bc + c^2}{(c - a)(b - a)} + \frac{c^2 + ca + a^2}{(a - b)(c - b)} + \frac{a^2 + ab + b^2}{(b - c)(a - c)} = \\&= \frac{c^3 - b^3 + a^3 - c^3 + b^3 - a^3}{(a - b)(b - c)(c - a)} = 0.\end{aligned}$$

Așadar, dacă a, b, c sînt diferiți, $\sum \frac{bc - a^2}{bc + 2a^2} = 0$.

Rămîne să considerăm cazul cînd două din cele trei numere sînt egale. Deoarece relația este simetrică în a, b, c este suficient să considerăm de exemplu numai cazul $a \neq b = c$. Atunci, $a + b + c = 0 \Rightarrow a = 2b$, și, ținînd seama de cele de mai sus, obținem

$$\begin{aligned}\sum \frac{bc - a^2}{bc + 2a^2} &= - \frac{b^2 + bc + c^2}{(c - a)(a - b)} - \frac{c^3 - a^3 + a^3 - b^3}{(a - b)(b - c)(c - a)} = \\&= - \frac{b^2 + bc + c^2}{(c - a)(a - b)} - \frac{c^3 - b^3}{(a - b)(b - c)(c - a)} = \\&= - \frac{b^2 + bc + c^2}{(a - b)(c - a)} + \frac{b^2 + bc + c^2}{(a - b)(c - a)} = 0.\end{aligned}$$

* * * *

$$168. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \\ &+ \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}\right) - \\ &- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}. \end{aligned}$$

§ 16. INEGALITĂȚI

Și în acest paragraf, vom face o serie de considerații preliminare.

Unele metode de calcul fără tabele și de rezolvare a inegalităților

Intervin unele dificultăți când este vorba de rezolvarea unor probleme de forma: Să se compare $\log_3 4$ și $\log_7 10$. Pentru a da un răspuns la o astfel de problemă, de exemplu, în cazul mai general al comparării lui $\log_a M$ cu $\log_b N$, se caută un întreg k astfel încît $\log_a M < k < \log_b N$. Mai interesant este atunci când avem $k - 1 < \log_a M < k$ și $k - 1 < \log_b N < k$. În acest caz, va trebui să alegem un astfel de n încît între $n \log_a M$ și $n \log_b N$, să existe un număr întreg p . Să ilustrăm acest procedeu pe exemplul de mai sus:

$1 < \log_3 4 < 2,$	$1 < \log_7 10 < 2,$	$7^1 = 7,$	$4^1 = 4,$
$2 < 2 \log_3 4 < 3,$	$2 < 2 \log_7 10 < 3,$	$7^2 = 49,$	$4^2 = 16,$
$3 < 3 \log_3 4 < 4,$	$3 < 3 \log_7 10 < 4,$	$7^3 = 343,$	$4^3 = 64,$
$5 < 4 \log_3 4 < 6,$	$4 < 4 \log_7 10 < 5$	$7^4 = 2401,$	$4^4 = 256,$
		$7^5 = 16807,$	$4^5 = 1024.$

$$\Rightarrow \log_7 10 < \frac{5}{4} < \log_3 4.$$

Să mai dăm un exemplu. Să comparăm $\log_3 7$ și $\log_7 27$:

$$\begin{array}{lll} 1 < \log_3 7 < 2, & 1 < \log_7 27 < 2, & 27^1 = 27, \\ 3 < 2 \log_3 7 < 4, & 3 < 2 \log_7 27 < 4, & 27^2 = 729, \\ 5 < 3 \log_3 7 < 6, & 5 < 3 \log_7 27 < 6, & 27^3 = 19\,683, \\ 7 < 4 \log_3 7 < 8, & 6 < 4 \log_7 27 < 7, & 27^4 = 531\,441. \end{array}$$

$$\Rightarrow 4 \log_7 27 < 7 < 4 \log_3 7 \Rightarrow \log_7 27 < \frac{7}{4} < \log_3 7.$$

Teoremă. Dacă $\log_a M \neq \log_b N$, atunci există un $n \in \mathbb{N}^*$ așa fel încît între $n \log_a M$ și $n \log_b N$ să existe un număr întreg.

Fie $\alpha = \log_a M$, $\beta = \log_b N$, $\alpha > \beta$ (cazul $\alpha < \beta$ se tratează în mod analog). Cum $\alpha - \beta > 0$, există un astfel de n încît $\frac{1}{n} < \alpha - \beta$,

adică $n\alpha - n\beta > 1$. Dar asta înseamnă că $n \log_a M$ și $n \log_b N$ diferă prin mai mult de o unitate și ca atare, există un număr întreg între ele.

Principiul care se degajă din cele de mai sus poate fi formulat astfel: Pentru a obține o relație de mărime între α și β , se caută un număr γ astfel încît $\alpha < \gamma < \beta$ sau un număr n așa fel încît

$$n\alpha < p < n\beta, \text{ adică } \alpha < \frac{p}{n} < \beta.$$

INEGALITĂȚI IMPORTANTE

Observații preliminare. Cantitățile care vor fi considerate în inegalitățile ce urmează vor fi strict pozitive.

1° $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$. Va fi demonstrată mai târziu în acest paragraf într-o formă mai generală (de ex. aplicația 15° a inegalității lui Jensen).

2° $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$. Este o consecință directă a inegalității precedente, unde rolul lui a , b , c este jucat de această dată de produsele ab , bc , ca .

3° $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$. Rezultă din înmulțirea membru cu membru a primelor două inegalități.

4° $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$. Se obține din inegalitatea precedentă dacă scădem din fiecare membru cantitatea abc și se ține seama de identitatea $(a + b)(b + c)(c + a) =$

$$= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc.$$

$$5° \ 8abc \leq (a + b)(b + c)(c + a) \leq \frac{8}{27}(a + b + c)^3.$$

Inegalitatea 1° aplicată cantităților $a + b, b + c, c + a \Rightarrow (b + c) \diamond$

$\diamond (c + a) + (a + b) \geq 3\sqrt[3]{(b + c)(c + a)(a + b)} \Rightarrow 8(a + b + c)^3 \geq 27(b + c)(c + a)(a + b) \Rightarrow 5^\circ$ ținând seama și de inegalitatea 4°.

6° $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$. Decurge din 3° prin împărțirea ambilor membri prin abc .

$$7^\circ \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}.$$

Dacă, în inegalitatea 6°, înlocuim cantitățile a, b, c respectiv prin $b + c, c + a, a + b$, obținem

$$(b + c + c + a + a + b) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) \geq 9 \Rightarrow$$

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) \geq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{c}{a + b} + 1 + \frac{a}{b + c} + 1 + \frac{b}{c + a} \geq \frac{9}{2} \Rightarrow 7^\circ.$$

$$8^\circ \frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq 6.$$

$$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} = \frac{a + b + c}{c} - 1 + \frac{a + b + c}{a} -$$

$$- 1 + \frac{a + b + c}{b} - 1 = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3 \geq 9 - 3 = 6 \Rightarrow 8^\circ.$$

$$9^\circ (x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

$$x_1 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_n}} \Rightarrow 9^\circ$$

10° $\frac{a + b}{c + d} + \frac{b + c}{d + a} + \frac{c + d}{a + b} + \frac{d + a}{b + c} \geq 4$, cu semnul = pentru $a = b = c = d$.

Fig

$$\begin{cases} x_1 = a + b, \\ x_2 = b + c, \\ x_3 = c + d, \\ x_4 = d + a. \end{cases}$$

$$9^\circ \Rightarrow 2(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+d} + \frac{1}{d+a} \right) \geq 16 \Rightarrow$$

$$4 + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} \geq 8 \Rightarrow 10^\circ.$$

$$11^\circ \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}.$$

Notind in 9°

$$\begin{cases} x_1 = a + b + c, \\ x_2 = b + c + d, \\ x_3 = c + d + a, \\ x_4 = d + a + b, \end{cases} \Rightarrow$$

$$3(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} \right) \geq 16 \Rightarrow$$

$$4 + \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{16}{3} \Rightarrow 11^\circ.$$

$$12^\circ \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d} \geq 12.$$

$$\frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d} =$$

$$= (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) - 4 \geq 16 - 4 = 12 \Rightarrow 12^\circ.$$

I. $a_1 \leq a_2, a_2 \leq a_3, \dots, a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow a_1 \leq a_n$. Dacă avem cel puțin o inegalitate strictă $a_i < a_{i+1}$, atunci $a_1 < a_n$.

II. $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Dacă avem cel puțin o inegalitate strictă $a_i < b_i$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n < b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

III. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, unde $a, b > 0$, căci $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$, care împărțită prin ab ne dă inegalitatea dorită. În cazul $b = 1$, avem $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Aplicații.

$$a) \sqrt{ac} + \sqrt{bc} - \sqrt{ab} \leq \frac{a + b + c}{2}.$$

Notînd a cu $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și b cu \sqrt{c} , în inegalitatea III obținem :

$$2 \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \leq a + b + 2\sqrt{ab} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{ac} + \sqrt{bc} - \sqrt{ab} \leq \frac{a + b + c}{2}.$$

$$b) a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases} \begin{cases} c \\ a \\ b \end{cases} \Rightarrow c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) \geq 6abc.$$

$$c) \sqrt{n^n} \leq n!$$

Pornind de la $(n - k)(k - 1) \geq 0 \Rightarrow n(k - 1) - k^2 + k \geq 0 \Rightarrow n \leq k(n - k + 1)$ cu egalitatea pentru $k = 1$ sau $k = n$. Și acum, scriind

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot [2(n - 1)] \cdot [3(n - 2)] \dots [k(n - k + 1)] \dots (n \cdot 1) \geq$$

$$\geq n^n \Rightarrow n! \geq \sqrt{n^n}.$$

ALTE INEGALITĂȚI

$$(1) \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad \forall x_1, x_2 \Rightarrow$$

$$(2) \quad \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{m} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{m}\right).$$

Într-adevăr, din inegalitatea (1) și presupunind

$$(3) \quad \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^k}) + f(x_{2^k+1}) + \dots + f(x_{2^{k+2}})}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} + \frac{f(x_{2^k+1}) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[2f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} + x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \right] =$$

$$= f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right).$$

Așadar, în virtutea principiului inducției, (3) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Și acum, dacă $2^k < m < 2^{k+1}$, atunci luăm $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots$

$\dots = x_{2^{k+1}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}$ și, ținând seama de inegalitatea (3), vom avea

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_m) + (2^{k+1} - m)f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}\right)}{2^{k+1}} \leq$$

$$\leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m + (2^{k+1} - m) \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}}{2^{k+1}}\right) \Rightarrow$$

$$f(x_1) + \dots + f(x_m) + (2^{k+1} - m) f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \leq$$

$$\leq 2^{k+1} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \Rightarrow f(x_1) + \dots + f(x_m) \leq m f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right),$$

care implică (2).

Aplicație. $\sqrt[m]{x_1 \dots x_m} \leq \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}.$

Să notăm $f(x) = \log(1+x)$ și să arătăm că (1) e verificată. Într-adevăr,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \log\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{2}\right), \text{ iar } \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{\log(1+x_1) + \log(1+x_2)}{2} =$$

$$= \log \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)}. \text{ Dar, } \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ căci } (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 -$$

$$- 2x_1 x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \geq 4x_1 x_2 \Rightarrow x_1 x_2 \leq \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \Rightarrow x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2,$$

$$\text{așa că } \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} \leq \frac{1+x_1+1+x_2}{2} = 1 + \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \log \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} \leq$$

$$\leq \log\left(1 + \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \Rightarrow (1). \text{ Dar atunci, aplicind inegalitatea (2), obținem}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[m]{(1+x_1) \dots (1+x_m)} &= \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m)}{m} \leq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) = \\ &= \log\left(1 + \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \end{aligned}$$

și, notînd $1 + x_i = t_i$ ($i = 1, \dots, n$) $\Rightarrow \sqrt[t_1 \dots t_m]{} \leq \frac{t_1 + \dots + t_m}{m}.$

$$(4) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Rightarrow$$

$$(5) \quad f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m)}{m}.$$

Raționind prin inducție — ca în cazul implicației (1) \Rightarrow (2) — ținând seama de (4) și presupunind că are loc inegalitatea

$$\begin{aligned}
 (6) \quad f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) &\leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} \Rightarrow \\
 f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) \leq \\
 &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\frac{x_{2^k+1} + \dots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2} \leq \\
 &\leq \frac{\frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^k})}{2^k} + \frac{f(x_{2^k+1}) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^k}}{2} = \\
 &= \frac{f(x_1) + \dots + f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}
 \end{aligned}$$

și deci inegalitatea (6) are loc pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. În sfârșit, dacă $2^k < m < 2^{k+1}$, atunci luând

$$\begin{aligned}
 x_{m+1} = \dots = x_{2^{k+1}} &= \frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \Rightarrow \\
 f\left[\frac{x_1 + \dots + x_m + (2^{k+1} - m) \frac{x_1 + \dots + x_m}{m}}{2^{k+1}}\right] &\leq \\
 \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m) + (2^{k+1} - m) f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right)}{2^{k+1}} &\Rightarrow \\
 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) &\leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_m)}{2^{k+1}} + \\
 + \left(\frac{2^{k+1} - m}{2^{k+1}}\right) f\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) &\Rightarrow (5).
 \end{aligned}$$

Aplicație. $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^k \leq \frac{x_1^k + \dots + x_n^k}{n}$.

Să notăm $f(x) = x^k$ și să arătăm mai întâi că

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k \leq \frac{x_1^k + x_2^k}{2}.$$

Vom aplica și de data aceasta metoda inducției. Inegalitatea este evident verificată pentru $k = 1$. Și acum, presupunind că este îndeplinită pentru k , să arătăm că ea va avea loc și pentru $k + 1$. Într-adevăr,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{x_1^k + x_2^k}{2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{x_1^{k+1} + x_2^{k+1}}{2} \Rightarrow$$

$$x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + x_1 x_2^k + x_2 x_1^k \leq 2x_1^{k+1} + 2x_2^{k+1} \Rightarrow x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - x_1^k x_2 - x_1 x_2^k \geq 0 \Rightarrow$$

$$x_1^k(x_1 - x_2) + x_2^k(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^k - x_2^k) \geq 0,$$

care-i evident adevărată indiferent dacă $x_1 \leq x_2$ sau $x_1 \geq x_2$. Dar atunci, aplicind inegalitatea (5) cu $m = n$, obținem inegalitatea dorită.

INEGALITATEA LUI JENSEN

În vederea stabilirii inegalității lui Jensen, vom introduce mai întâi noțiunea de funcție convexă (fig. 26). Fie $x_1 < x < x_2$ așa fel

încît $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = k$, de unde $x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k} = p_1 x_1 + p_2 x_2$ cu $p_1 = \frac{1}{k + 1}$, $p_2 = \frac{k}{k + 1}$ și deci $p_1 + p_2 = 1$. Dacă AB este un

segment paralel cu bazele (în trapezul din fig. 26), atunci se știe de la geometrie că

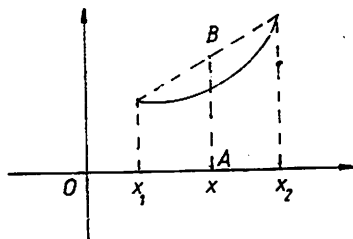


Fig. 26.

$$\frac{AB - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{p_2 x_2 - p_2 x_1}{x_2 - x_1} = p_2 \Rightarrow$$

$$AB = f(x_1) + p_2 f(x_2) - p_2 f(x_1) = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

O funcție $f: [a, b] \rightarrow R$ va fi *convexă* dacă $f(x) \leq AB$, adică dacă

$$(7) f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2), \quad p_1 + p_2 = 1 \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Teoremă. Dacă $f: [a, b] \rightarrow R$ este convexă și $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ cu $p_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$), atunci

$$(8) \quad f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i).$$

Inegalitatea (8) se numește *inegalitatea lui Jensen*.

Demonstrație. Pentru $n = 2$, avem (7) ca urmare a convexității lui f . Din nou făcînd apel la principiul inducției, vom presupune că (8) are loc pentru toate numerele naturale $\leq n - 1$. De asemenea, observăm că

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^n p_i x_i = p_1 x_1 + (1 - p_1) \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} x_i,$$

iar $\sum_{i=1}^n p_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=2}^n p_i = 1 - p_1$ și deci $\sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} = 1$. Să notăm

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} x_i. \text{ Atunci, } f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) = f\left[p_1 x_1 + (1 - p_1) \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} x_i\right] = \\ &= f[p_1 x_1 + (1 - p_1) y_1] \leq p_1 f(x_1) + (1 - p_1) f(y_1). \end{aligned}$$

Dar $f(y_1) = f\left(\sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} x_i\right) \leq \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} f(x_i)$ și deci

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) &\leq p_1 f(x_1) + (1 - p_1) \sum_{i=2}^n \frac{p_i}{1 - p_1} f(x_i) = p_1 f(x_1) + \\ &+ \sum_{i=2}^n p_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \end{aligned}$$

CITEVA APLICAȚII ALE INEGALITĂȚII LUI JENSEN

$$1^\circ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^\alpha \leq n^{\alpha-1} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha, \quad \alpha > 1, x \geq 0.$$

Considerăm funcția $f(x) = x^\alpha$. Primele sale două derivate succesive vor fi $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Pentru $x > 0$, $f''(x) > 0$ și deci (după cum se știe din analiză) f este convexă.

Și acum, fie $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ în inegalitatea lui Jensen (care are loc în virtutea teoremei precedente), ceea ce ne dă :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha. \end{aligned}$$

$$2^\circ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha > \sum_{i=1}^n x_i^\alpha, \quad \alpha > 1, x_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Vom face demonstrația prin inducție completă. Să arătăm că inegalitatea are loc pentru $n = 2$. Să considerăm funcția $\varphi(t) = (x_1 + t)^\alpha - t^\alpha$, $t > 0 \Rightarrow \varphi'(t) = \alpha[(x_1 + t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}] > 0 \Rightarrow \varphi$ e strict crescătoare \Rightarrow

$$\varphi(x_2) = (x_1 + x_2)^\alpha - x_2^\alpha > x_1^\alpha = \varphi(0) \text{ pentru } x_2 > 0 \Rightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha = \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_n\right]^\alpha > \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^\alpha + x_n^\alpha.$$

Cum, pentru $n - 1$, inegalitatea este presupusă adevărată, vom avea

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha > \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^\alpha + x_n^\alpha > \sum_{i=1}^{n-1} x_i^\alpha + x_n^\alpha = \sum_{i=1}^n x_i^\alpha.$$

3° $f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexă, $p_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) \Rightarrow

$$(9) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Fig. $q_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$; cu q_i în loc de p_i ($i = 1, \dots, n$) din inegalitatea lui

Jensen, deducem

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right) = f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right) = f\left(\sum_{i=1}^n q_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n q_i f(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Această inegalitate generează o seamă de inegalități cunoscute:

4° *Inegalitatea lui Cauchy-Hölder*

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Fig. $f(x) = x^k$, $x > 0$, $k > 1 \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$, așa că f e convexă și prin urmare (9) \Rightarrow

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right)^k \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^k}{\sum_{i=1}^n p_i} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^k \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^{k-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^k\right).$$

Punind $p_i = \frac{b_i^{\frac{k}{k-1}}}{b_i^{\frac{k}{k-1}}}$, $x_i = \frac{a_i}{b_i^{\frac{k}{k-1}}}$ și deci $p_i x_i = a_i b_i$, avem

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^k \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{k}{k-1}}\right)^{k-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{a_i^k}{b_i^{\frac{k}{k-1}}}\right) \Rightarrow (10).$$

$$5^\circ \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^m \leq n^{m-1} \sum_{i=1}^n a_i^m.$$

Se obține din (10) pentru $b_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) și $k = m$.

$$6^\circ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \leq \frac{C_n^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

În inegalitatea precedentă, luăm $m = 2$ și obținem $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Dar

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2(x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq \\ &\leq n \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2(x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n) \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n-1) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 &\geq 2n(x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n) \Rightarrow x_1 x_2 + \dots + x_{n-1} x_n \leq \\ &\leq \frac{n(n-1)}{2n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

inegalitatea 6° , unde $C_n = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$7^\circ x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \leq \frac{C_n^3}{n^3} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3.$$

Luând $m = 3$ în inegalitatea 5° , obținem $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 \leq n^2 \sum_{i=1}^n x_i^3$.

Dar

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 - 6(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) - 3(x_1^2 x_2 + \dots + x_{n-1}^2 x_n) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 - 6(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 \leq$$

$$\leq n^2 \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 - 6(x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 (n^2-1) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 &\leq 6n^2(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) \Rightarrow \\
 x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &\leq \frac{n^2-1}{6n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 = \\
 &= \frac{n(n^2-1)}{6n^3} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3 < \frac{1}{n^3} \left[\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^3 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^3.
 \end{aligned}$$

8° *Inegalitatea lui Cauchy*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ cu } a_i, b_i > 0 \ (i = 1, \dots, n).$$

Aceasta se obține luind în inegalitatea lui Cauchy-Hölder $k = 2$.

9° *Inegalitatea lui Minkowski*

$$(11) \quad \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right]^{1/k} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^k \right)^{1/k}.$$

Într-adevăr,

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k = \sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{k-1}$$

și aplicînd inegalitatea lui Cauchy-Hölder,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{k-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{1/k} \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(k-1) \frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{1/k} \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right]^{\frac{k-1}{k}},
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{k-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^k \right)^{1/k} \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^{(k-1) \frac{k}{k-1}} \right]^{\frac{k-1}{k}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{i=1}^n b_i^k \right)^{1/k} \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right]^{\frac{k-1}{k}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \leq \\
 &\leq \left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^k \right]^{\frac{k-1}{k}} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{1/k} + \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^{1/k} \right] \Rightarrow (11).
 \end{aligned}$$

10° Inegalitatea lui Mac Laurin

$$(12) \quad \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i \right)^k \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^k \right).$$

În inegalitatea (9) se ia funcția convexă $f(x) = x^k$ cu $k > 1$, $x > 0$, și se obține

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right)^k \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^k}{\sum_{i=1}^n p_i} \Rightarrow (12).$$

Dacă $p_i = b_i^{\frac{k}{k-1}}$, $x_i = \frac{a_i}{b_i^{\frac{k}{k-1}}}$, ($i = 1, \dots, n$), inegalitatea devine

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^k \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{k}{k-1}} \right)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right), \text{ care nu-i altceva decît inegalitatea lui Cauchy-Hölder.}$$

INEGALITATEA LUI JENSEN PENTRU FUNCȚII CONCAVE

Fie $x_1 < x < x_2$ așa fel încît $\frac{x-x_1}{x_2-x}$

$$= k \Rightarrow x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} = p_1 x_1 + p_2 x_2, \text{ unde}$$

$$p_1 = \frac{1}{k+1}, p_2 = \frac{k}{k+1} \text{ și } p_1 + p_2 = 1.$$

Dacă \overline{AB} este un segment paralel cu bazele trapezului din figura 27 atunci

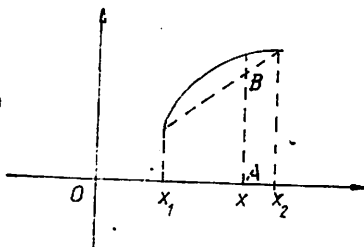


Fig. 27.

(raționind ca în cazul stabilirii inegalității lui Jensen relativ la funcțiile convexe), vom avea

$$AB = p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

O funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ va fi *concavă* dacă $f(x) \geq AB$, adică dacă

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \geq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2), \quad p_1 + p_2 = 1 \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Raționind exact ca-n cazul stabilirii inegalității lui Jensen pentru funcțiile convexe, obținem următoarea

Teoremă. Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este concavă și $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ cu $p_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$), atunci

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n p_i f(x_i).$$

Aceasta este *inegalitatea lui Jensen pentru funcțiile concave*
 11° $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ concavă, $p_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) \Rightarrow

$$(13) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Se raționează ca la 3° (în cazul funcțiilor convexe).

$$12^\circ \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)^k \geq \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i^k\right), \quad x_i > 0, k \in (0, 1) \quad (i=1, \dots, n).$$

Această inegalitate se obține din cea precedentă pentru $f(x) = x^k$, deoarece aceasta este o funcție concavă căci $f'(x) = kx^{k-1}$, iar $f''(x) = k(k-1)x^{k-2} < 0$ pentru $x > 0$.

$$13^\circ \sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}}$$

Într-adevăr, funcția $f(x) = \log x$ pentru $x > 0$ are derivatele $f'(x) = \frac{1}{x}$ și $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ așa că este concavă și deci verifică inegalitatea lui Jensen pentru funcțiile concave, notată de noi cu (13). Așadar,

$$\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n p_i \log x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i^{p_i}}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\log \prod_{i=1}^n x_i^{p_i}}{\sum_{i=1}^n p_i} \Rightarrow$$

$$\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \geq \log \left[\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i}} \right] \Rightarrow 13^\circ,$$

unde $\prod_{i=1}^n x_i = x_1 x_2 \dots x_n$.

14° $\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, cu $a_i > 0$, $\alpha_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) și $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

Inegalitatea de la punctul precedent se mai poate scrie și

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \geq \sum_{i=1}^n p_i \prod_{i=1}^n x_i^{\frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}},$$

iar dacă luăm $p_i = x_i = a_i$, ea devine $\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}}$ și,

$$\begin{aligned} \text{notînd } \alpha_i &= \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \text{ avem că } \prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \Rightarrow 14^\circ. \end{aligned}$$

$$15^\circ \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{a_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \text{ cu } a_i > 0.$$

Se obține luind în inegalitatea de la nr. 14° $\alpha_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

PROBLEME

169. Fără a extrage rădăcina pătrată, să se arate că

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} < 3$$

(Problemă de concurs. Gazeta Matematică 2, 1977 Problema nr. 5795).

Soluție. Avem că $\frac{2}{9} < \frac{1}{4}$, $\frac{6}{25} < \frac{1}{4}$, $\frac{12}{49} < \frac{1}{4}$, $\frac{20}{81} < \frac{1}{4}$,
 $\frac{30}{121} < \frac{1}{4}$, $\frac{42}{169} < \frac{1}{4}$, și extrăgând radicalul $\sqrt{2} < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{5} < \frac{1}{2}$,
 $\frac{\sqrt{12}}{7} < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{30}}{11} < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{42}}{13} < \frac{1}{2}$ și adunând $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} +$
 $\frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} < \frac{6}{2} = 3.$

* * * *

170. Să se arate că $\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}$.

Soluție. Arătăm că $\sqrt[7]{17} < \frac{3}{2} < \log_{17} 71$.

Într-adevăr, $17 < \frac{3^7}{2^7} \Rightarrow 17 \cdot 128 < 729 \cdot 3 \Rightarrow 2176 < 2187$; iar
 $17^{\frac{3}{2}} < 71 \Rightarrow 17^3 < 71^2 \Rightarrow 4913 < 5041.$

* * * * *

171. Este adevărată afirmația $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{24}$?

Soluție.

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x^3 = 6 + 6x > 24 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > 3 \Rightarrow \\ + 6 \Leftarrow 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) > 27 \Rightarrow \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} > \frac{7}{2}.$$

Cum $\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[3]{4} > \frac{7}{4} \Rightarrow 4 > \frac{343}{64}$ — fals, deci este falsă și afirmația inițială.

* * *

172. Dacă $a, b, c > 0$ și $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{5}{3}$, atunci $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} -$
 $-\frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$

Soluție.

$$(a + b - c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{3} + \\ \Leftarrow 2(ab - ac - bc) \geq 0 \Rightarrow ab - ac - bc \geq -\frac{5}{6} \Rightarrow ac + bc - ab \leq \\ \leq \frac{5}{6} < 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

* * * *

173. Să se demonstreze inegalitatea :

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{999999}{1000000} < \frac{1}{1000}.$$

Soluție.

$$A^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{999999^2}{1000000^2} < \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \cdots \\ \cdots \frac{999999^2}{1000000^2-1} = \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{7^2}{7 \cdot 9} \cdot \frac{9^2}{9 \cdot 11} \cdots \\ \cdots \frac{999999^2}{999999 \cdot 1000001} = \frac{1}{1000001} < \frac{1}{1000000} \Rightarrow A < \frac{1}{1000}.$$

* * *

174. Să se arate că dacă $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, $a_i \geq 0$, $b_i > 0$, atunci $\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1$.

Soluție.

$$(a_i - b_i)^2 \geq 0 \Rightarrow a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2 \geq 0, b_i > 0 \Rightarrow \frac{a_i^2}{b_i} \geq 2a_i - b_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq 2 \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = 2 - 1 = 1.$$

* * * * *

175. Să se verifice inegalitatea: $9^n + 10^n < 11^n$.

Soluție. Scriind $\left(\frac{9}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{11}\right)^n < 1$ observăm că $f(n) = \left(\frac{9}{11}\right)^n$, $g(n) = \left(\frac{10}{11}\right)^n$ sînt funcții descrescătoare. Dacă vom avea inegalitatea adevărată pentru n_0 , va rezulta adevărată pentru orice $n > n_0$. Făcînd calculele găsim:

$$\frac{9}{11} + \frac{10}{11} = \frac{19}{11} > 1; \frac{81}{121} + \frac{100}{121} = \frac{181}{121} > 1; \frac{729}{1331} + \frac{1000}{1331} > 1;$$

$$\frac{6561}{14641} + \frac{10000}{14641} > 1; \frac{59049}{161051} + \frac{100000}{161051} < 1.$$

deci inegalitatea este adevărată pentru $n \geq 5$.

* * * * *

176. Să se demonstreze $\sqrt{kl} + \sqrt{mn} \leq \sqrt{(k+n)(m+l)}$ ($k, l, m, n \geq 0$).

Soluție. Se pune $n = kt$, $l = mp \Rightarrow \sqrt{p} + \sqrt{t} \leq \sqrt{(1+t)(1+p)}$.

* * *

177. Să se arate că $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Soluție. Deoarece $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ pentru $k < n$, atunci $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\diamond \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

* * * *

178. $(a + b)^n < 2^n(a^n + b^n)$ sau $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < a^n + b^n$.

Soluție. Fie $0 \leq a \leq b$. Notăm $x = \frac{a}{b} \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^n < 2^n\left(\frac{x^n}{b^n} + 1\right)$ adică $(x+1)^n < 2^n(x^n + 1)$. Cum $x \leq 1$, avem că $(1+x)^n < < 2^n < 2^n + 2^n x^n = 2^n(1+x^n)$ și deci $(1+x)^n < 2^n(1+x^n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+x}{2}\right)^n < 1+x^n.$$

* * *

179. $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}$.

Soluție.

$$\frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) (\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n) \leq$$

$$\leq x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \dots + x_n \log x_n \Rightarrow$$

$$n(x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \dots + x_n \log x_n) -$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) (\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2) (\log x_1 - \log x_2) + (x_1 - x_3) (\log x_1 - \log x_3) +$$

$$+ \dots + (x_1 - x_n) (\log x_1 - \log x_n) + (x_2 - x_3) (\log x_2 - \log x_3) +$$

$$+ \dots + (x_2 - x_n) (\log x_2 - \log x_n) + \dots + (x_{n-1} - x_n) (\log x_{n-1} - \log x_n) \geq 0.$$

Din $x_i < x_j \Rightarrow \frac{x_i}{x_j} < 1$ adică $x_i - x_j < 0 \Rightarrow \log x_i - \log x_j < 0$

și prin urmare fiecare produs $(x_i - x_j) (\log x_i - \log x_j)$ avînd semnul plus, întreaga sumă este pozitivă.

*

180. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

Soluție. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae > 0$ și

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 > 0 \text{ evident.}$$

* * * * *

181. Să se demonstreze inegalitatea :

$$a, b, c > 0, a > c, b > c \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

Soluție. Se pune

$$a = (1 + \alpha)c, b = (1 + \beta)c \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq \sqrt{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \leq \alpha + \beta + \alpha\beta + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha\beta} - 1)^2 \geq 0.$$

182. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Dacă $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$. Egalitate avem numai pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Soluție. Demonstrație prin inducție. În cazul $n = 1$ rezultă $a_1 = 1$ și deci afirmația este adevărată.

Fie $n > 1$. Presupunem inegalitatea adevărată pentru toate numerele mai mici ca n .

Fie n numere a_1, a_2, \dots, a_n încît $a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

Dacă pentru orice i avem $a_i = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$ și propoziția este adevărată. Dacă nu sînt toate egale cu 1, atunci există cel puțin unul mai mic ca 1 și unul mai mare ca 1.

Fie $a_1 < 1, a_2 > 1$. Conform principiului inducției, pentru $n - 1$, inegalitatea este adevărată, deci

$$(a_1 a_2) a_3 a_4 \dots a_n = 1 \Rightarrow a_1 a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n \geq n - 1.$$

Vom avea prin urmare

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = [(a_1 a_2) + a_3 + a_4 + \dots + a_n] + a_1 + a_2 - a_1 a_2 \geq$$

$$\geq n - 1 + (a_2 - 1)(1 - a_1) + 1 \geq n$$

căci $(a_2 - 1)(1 - a_1) \geq 0$.

Exemplu : $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$

* * * *

183. Să se arate că $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$

Soluție. Pentru $n = 1$ este adevărat.

$$n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + x, \quad x > 0 \Rightarrow$$

$$n = (1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \dots + x^n >$$

$$> 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^2; \quad x^2 < \frac{2}{n} \Rightarrow x < \sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

* * * * *

184. Pentru ce numere naturale $n > 1$ inegalitatea $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) x_n$ este adevărată pentru $\forall x_1, x_2, \dots, x_n.$

Soluție.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 1, \quad x_n = 2 \Rightarrow n - 1 + 4 \geq (n - 1) 2 \Rightarrow n \leq 5$$

$$x_n^2 - x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq 0 \Rightarrow$$

$$4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^2.$$

Dar inegalitatea lui Cauchy

$$(n - 1) \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^2 \text{ în cazul } n - 1 \leq 4 \text{ implică}$$

$$4 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^2, \text{ deci } n = 2, 3, 4, 5 \text{ adică}$$

$$a^2 + b^2 \geq ab, \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b)c, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b + c)d,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq (a + b + c + d)e.$$

* * *

185. Să se arate că dacă $a_1 < a_2 < a_3$ și $b_1 < b_2 < b_3$, atunci $a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 < a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Soluție.

$$a_1 - a_3 < 0, b_2 - b_1 > 0, a_2 - a_3 < 0, b_3 - b_2 > 0 \Rightarrow$$

$$(a_1 - a_3)(b_2 - b_1) + (a_2 - a_3)(b_3 - b_2) < 0 \Rightarrow$$

$$a_1 b_2 - a_1 b_1 - a_3 b_2 - a_3 b_1 - a_2 b_3 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_3 b_2 < 0 \Rightarrow$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 < a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

186. Să se demonstreze că $23^{21} < 21^{23}$ și că $555^{553} < 553^{555}$.

Soluție.

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n+1} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n}.$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} < 1 \text{ pentru } n = 3 \Rightarrow \frac{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}{n} < 1 \text{ pentru orice } n \geq 3 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n \Rightarrow (n+1)^n < n^{n+1}, n \geq 3 \Rightarrow \sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n+2]{n+2} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow (n+2)^n < n^{n+2} \Rightarrow 23^{21} < 21^{23}, 555^{553} < 553^{555}.$$

187. Să se arate că dacă m e natural și $c \geq 1$, atunci $\sqrt[m]{c+1} + \sqrt[m]{c-1} < 2\sqrt[m]{c}$.

Soluție. Punem inegalitatea sub forma: $\sqrt[m]{c+1} - \sqrt[m]{c} < \sqrt[m]{c} - \sqrt[m]{c-1}$. Dar

$$1 = (\sqrt[m]{c+1})^m - (\sqrt[m]{c})^m = (\sqrt[m]{c+1} - \sqrt[m]{c}) [\sqrt[m]{(c+1)^{m-1}} + \sqrt[m]{(c+1)^{m-2}}c + \dots + \sqrt[m]{c^{m-1}}],$$

$$1 = (\sqrt[m]{c})^m - (\sqrt[m]{c-1})^m = (\sqrt[m]{c} - \sqrt[m]{c-1}) [\sqrt[m]{c^{m-1}} + \sqrt[m]{c^{m-2}(c-1)} + \dots + \sqrt[m]{(c-1)^{m-1}}].$$

Cum parantezele din membrul doi de pe locul doi sint in relație evidentă, avem

$$\frac{1}{\sqrt[m]{c+1} - \sqrt[m]{c}} > \frac{1}{\sqrt[m]{c} - \sqrt[m]{c-1}} \Rightarrow \frac{\sqrt[m]{c+1} - \sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{c} - \sqrt[m]{c-1}} < 1$$

și astfel inegalitatea propusă devine evidentă.

188. Dacă $a, b, c > 0$, atunci ele verifică inegalitatea

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$$

(Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16107).

Soluție. În inegalitatea lui Schwartz $\sum x_i^2 \cdot \sum y_i^2 \geq (\sum x_i y_i)^2$, notind

$$\begin{cases} x_1^2 = a^3, \\ x_2^2 = b^3, \\ x_3^2 = c^3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1^2 = a, \\ y_2^2 = b, \\ y_3^2 = c, \end{cases}$$

obținem $(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{b^3} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{c^3} \cdot \sqrt{c})^2$, adică $(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$.

Observație: Generalizarea este imediată:

$$(a^{2m+1} + b^{2m+1} + c^{2m+1})(a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1}) \geq (a^{m+n} + b^{m+n} + c^{m+n})^2,$$

sau

$$\sum a_i^{2m+1} \cdot \sum a_i^{2n-1} \geq (\sum a_i^{m+n})^2.$$

* * * *

189. Să se arate că $\frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} \cdot \frac{3^3 + 1}{3^3 - 1} \dots \frac{n^3 + 1}{n^3 - 1} < \frac{3}{2}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \frac{2+1}{2-1} \cdot \frac{3+1}{3-1} \dots \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{2^2-2+1}{2^2+2+1} \cdot \frac{3^2-3+1}{3^2+3+1} \dots \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} &= \\ = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3}{n^2+n+1} &< \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

190. Să se arate că $\log_2 5 > \log_2 32$ fără a folosi fracțiile zecimale.

Soluție. $\log_2 5 > 5 \log_5 2 \Leftrightarrow \log_2 5 > \frac{5}{\log_2 5} \Leftrightarrow \log_2 5 > 5$. Dar

$$\begin{aligned} 81 > 80 &\Rightarrow \frac{81}{16} > 5 \Rightarrow \frac{9}{4} > \sqrt{5}. \text{ Este suficient să arătăm că } \log_2 5 > \\ &\Rightarrow \frac{9}{4} > 5 > 2^{7/4} \Rightarrow 5^4 > 2^9 \Rightarrow 625 > 512 \text{ ceea ce este adevărat.} \end{aligned}$$

* *

191. Să se arate că $8x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 12xz - 5yz > 0$ dacă $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

Soluție. $2 \left(2x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}z \right)^2 + \frac{1}{2}(y - 2z)^2 + \frac{9}{2}z^2 > 0$.

192. Să se demonstreze inegalitatea: $\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}$.

Soluție. Fie

$$\log_{17} 71 = x \Rightarrow 17^x = 71 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow 17 \cdot 17^{\frac{1}{y}} = 71 \Rightarrow$$

$$17^{\frac{1}{y}} = \frac{71}{17} \Rightarrow \left(\frac{71}{17} \right)^y = 17 \Rightarrow \left(4 + \frac{3}{17} \right)^y = 17.$$

$$y = 2 \Rightarrow 16 + \frac{24}{17} + \frac{9}{289} > 17 \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{t}}, t > 1.$$

$$\sqrt[7]{17} = m \Rightarrow m^7 = 17 \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{p} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{p}\right)^7 = 17;$$

$$p = 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{128} = 17,08 \Rightarrow p > 2.$$

Așadar,

$$\log_{17} 71 = x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} > 1 + \frac{1}{p} = \sqrt[7]{17}.$$

193. Pentru $n \geq 5$ avem că $2^n > n^2$.

Soluție. Vom demonstra această inegalitate prin metoda inducției. Fie $n = 5 \Rightarrow 32 > 25$. Să presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $k + 4$, adică $2^{k+4} > (k + 4)^2 = k^2 + 8k + 16$. Avem că $2^{k+5} = 2 \cdot 2^{k+4} > 2(k^2 + 8k + 16) = 2k^2 + 16k + 32$. Dar $2k^2 + 16k + 32 > k^2 + 10k + 25$, deci este adevărată pentru orice k și prin urmare pentru orice $n \geq 5$.

194. $2^n > n^3$ pentru $n \geq 10$.

Soluție. Pentru $n = 10$ avem $1024 > 1000$, deci este adevărată. Să presupunem că este adevărată pentru $k + 9$, $k \in \mathbb{N}$, adică $2^{k+9} > (k + 9)^3$. Pentru $k + 10$ avem: $2^{k+10} = 2 \cdot 2^{k+9} > 2(k + 9)^3$. Dar $2(k + 9)^3 > (k + 10)^3$, căci $2k^3 + 54k^2 + 486k + 1458 > k^3 + 30k^2 + 300k + 1000$, sau $k^3 + 24k^2 + 186k + 458 > 0$ deci este adevărată pentru orice n .

195. Să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, n > 1.$$

Soluție. $n = 2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 > 2$ adevărată. Fie adevărată pentru $k + 1$, adică $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$.

Obținem :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} &> \sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \\ &= \frac{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{k+2} + 1}{\sqrt{k+2}} > \frac{k+1+1}{\sqrt{k+2}} = \sqrt{k+2}. \end{aligned}$$

* * * * *

196. Să se arate că dacă $n \geq 3$, atunci $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ (Olimpiadă Polonia).

Soluție. $\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \leq 1$. Transformăm membrul întii :

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{n^{n+1}}{n^{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}}$$

Dar

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

Înlocuind suma $\frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} < 1$ cu 1 și fiecare termen care urmează cu unitatea, obținem că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ pentru $n \geq 3$ și prin urmare

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} < \sqrt[n+1]{n \cdot \frac{1}{n}} = 1.$$

* * * * *

197. Fie x_i pozitive subunitare. Știind că $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ ($k = 1, 2, \dots$), să se arate că $\forall n, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$ (Olimpiadă, Ungaria).

Soluție. $x_k^2 = x_k - x_{k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k^2 = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots +$
 $+ x_n - x_{n+1} = x_1 - x_{n+1} < x_1 < 1.$

* * * * *

198. Să se demonstreze inegalitatea: $\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}.$

Soluție. Considerăm $\sqrt[7]{17}$ și $\log_{17} 71.$ Deoarece $1 < \sqrt[7]{17} < 2$ să vedem poziția sa față de $3/2.$

Oare $\sqrt[7]{17} < \frac{3}{2}$? $2^7 \cdot 17 < 3^7 \Rightarrow 2176 < 2187.$ Da!

Oare $\frac{3}{2} < \log_{17} 71$? $71 > 17^{3/2} \Rightarrow 71^2 > 17^3 \Rightarrow 5041 > 4913.$ Da!

Rezultă că $\sqrt[7]{17} < \log_{17} 71$ căci $3/2$ se află între ele.
 Pentru altă soluție a se vedea problema 192.

* * * *

199. Să se arate că $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$ unde
 $a, b, c > 0.$

Soluție.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1 + \frac{a+b+c}{c+a} - 1 +$$

$$+ \frac{a+b+c}{a+b} - 1 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3.$$

$$(b+c) + (c+a) + (b+a) \geq 3 \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)};$$

$$a+b+c \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)};$$

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} =$$

$$= \frac{(a+b)(c+a) + (b+c)(a+b) + (c+a)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq$$

$$\geq \frac{3 \sqrt[3]{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Rezultă că

$$3 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq$$

$$\geq \frac{3}{2} \cdot \frac{3 \sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

* * * * *

200. Să se arate că

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S_n - a_i} \geq \frac{n}{n-1}, \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Soluție
$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S_n - a_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{S_n}{S_n - a_i} - 1 \right) = S_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_n - a_i} - n.$$

Dar,

$$\frac{(n-1)S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (S_n - a_i)}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)} \Rightarrow S_n \geq \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)},$$

iar

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{S_n - a_i} = \frac{(S_n - a_2) \dots (S_n - a_n) + \dots + (S_n - a_1) \dots (S_n - a_{n-1})}{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)} \geq$$

$$\geq n \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)^{n-1}}}{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)}.$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{S_n - a_i} &= S_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{S_n - a_i} - n \geq \\ &\geq \frac{n^2}{n-1} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)^{n-1}}}{\prod_{i=1}^n (S_n - a_i)} - n = \frac{n^2}{n-1} - n = \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

201. Să se demonstreze inegalitatea $\log_{x-1} \frac{x^2 + y^2}{x-1} > \log_x 2y$, unde $x > 2, y > 0$.

Soluție. $\log_{x-1}(x^2 + y^2) - 1 > \log_x 2y \Rightarrow \log_{x-1}(x^2 + y^2) > \log_x 2xy$. Dar, avînd în vedere că $\log_{x-1} N > \log_x N$, rezultă $\log_{x-1}(x^2 + y^2) > \log_x(x^2 + y^2) \geq \log_x 2xy$, deoarece $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

* * * * *

202. Fie a, b și n numere naturale supraunitare. Numerele a și b sînt baze de numerație, iar numerele A_n, B_n au aceeași reprezentare $x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$, $x_n > 0, x_{n-1} > 0, x_i \geq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$), A_n în baza a și B_n în baza b . Numerele obținute după ștergerea primei cifre x_n le notăm A_{n-1}, B_{n-1} . Să se demonstreze că $a > b$ atunci și numai atunci cînd $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$ (Olimpiadă Polonia).

Soluție.

$$\begin{aligned} &\frac{x_{n-1} a^{n-1} + x_{n-2} a^{n-2} + \dots + x_1 a + x_0}{x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0} < \\ &< \frac{x_{n-1} b^{n-1} + x_{n-2} b^{n-2} + \dots + x_1 b + x_0}{x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \dots + x_1 b + x_0} \Rightarrow \\ &1 - \frac{x_{n-1} a^{n-1} + x_{n-2} a^{n-2} + \dots + x_1 a + x_0}{x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0} > \\ &1 - \frac{x_{n-1} b^{n-1} + x_{n-2} b^{n-2} + \dots + x_1 b + x_0}{x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \dots + x_1 b + x_0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_n a^n}{x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_1 a + x_0} > \\
> \frac{x_n b^n}{x_n b^n + x_{n-1} b^{n-1} + \dots + x_1 b + x_0} & \Rightarrow x_n + \frac{x_{n-1}}{a} + \frac{x_{n-2}}{a^2} + \dots + \\
& + \frac{x_1}{a^{n-1}} + \frac{x_0}{a^n} < x_n + \frac{x_{n-1}}{b} + \frac{x_{n-2}}{b^2} + \dots + \frac{x_1}{b^{n-1}} + \frac{x_0}{b^n} \Rightarrow \\
& x_{n-1} \frac{b-a}{ab} + x_{n-2} \frac{b^2-a^2}{a^2 b^2} + \dots + x_1 \frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{a^{n-1} b^{n-1}} + \\
& + x_0 \frac{b^n-a^n}{a^n b^n} < 0 \Rightarrow b-a < 0 \Rightarrow a > b.
\end{aligned}$$

Drumul invers duce la stabilirea echivalenței.

203. Să se arate că nu există patru numere reale a, b, c, d care satisfac simultan relațiile:

$$a + b < 0, \quad a + b + c + d > 0, \quad ab + ac + ad + bc + bd + cd > 0$$

sau $ab + cd + (a+b)(c+d) > 0$ și $ab - cd \geq 0$ (Gazeta Matematică 4, 1977, Problema nr. 16564).

Soluție. Să notăm

$$\begin{cases} a + b = m, \\ ab = n, \\ c + d = p, \\ cd = q, \end{cases} \quad \begin{cases} m = -\alpha^2, \alpha \neq 0, \\ p = \alpha^2 + \beta^2, \beta \neq 0, \\ n + q > \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2), \\ n - q \geq 0. \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{cases} n + q = \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2 \Rightarrow 2q + \delta^2 = \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2 \\ n = q + \delta^2, \delta \geq 0 \end{cases}$$

$$q = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2 - \delta^2}{2}; \quad n = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2 + \delta^2}{2}.$$

Să vedem dacă putem găsi numere a și b :

$$\begin{cases} a + b = \alpha^2 \\ ab = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) + \gamma^2 + \delta^2}{2} \Rightarrow z^2 - (a + b)z + ab = 0 \end{cases}$$

cu condiția $(a + b)^2 - 4ab > 0$, care implică

$$\alpha^4 - 2\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\gamma^2 - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow$$

$$-\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\gamma^2 - 2\delta^2 > 0 - \text{imposibil.}$$

* * *

204. Să se demonstreze inegalitatea :

$$a^{2^n} + b^{2^n} + n \geq (ab)^{2^{n-1}} + (ab)^{2^{n-2}} + \dots + ab + a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Raționament prin inducție :

$$n = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Rightarrow$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b \Rightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

este evident verificată. Presupunind inegalitatea verificată pentru $n = k$, avem

$$\begin{aligned} a^{2^{k+1}} + b^{2^{k+1}} + k + 1 &= (a^{2^k})^2 + (b^{2^k})^2 + 1 + k \geq \\ &\geq (ab)^{2^k} + a^{2^k} + b^{2^k} + k > (ab)^{2^k} + (ab)^{2^{k-1}} + \dots + ab + a + b, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

* * *

205. Să se arate că dacă $(a - 1)(b - 1) \geq 0$, atunci

$$(ab)^{2^{n-1}} + 2^n \geq 2^{n-1}(a + b) + 1.$$

Soluție. Raționament prin inducție :

$$n = 1 \Rightarrow ab + 2 \geq a + b + 1 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) \geq 0,$$

care-i verificată-n virtutea ipotezei. Presupunind inegalitatea adevărată pentru $n = k$ deducem :

$$((ab)^{2^{k-1}} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (ab)^{2^k} - 2(ab)^{2^{k-1}} + 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} (ab)^{2^k} &\geq 2(ab)^{2^{k-1}} - 1 \geq 2 [2^{k-1}(a+b) + 1 - 2^k] - 1 = \\ &= 2^k(a+b) + 1 - 2^{k+1}. \end{aligned}$$

* * * *

206. Să se demonstreze că $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} &\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{x - xy^2 + y - x^2y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \\ &= \frac{x(1-y^2) + y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Notind $a_1 = \frac{2x}{1+x^2}$, $a_2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $b_1 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $b_2 = \frac{2y}{1+y^2}$ și aplicind inegalitatea lui Cauchy în cazul $x, y \geq 0$, vom obține

$$\begin{aligned} &\frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y}{1+y^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2y}{1+y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} \sqrt{\frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^2} + \frac{4y^2}{(1+y^2)^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

În cazul $x, y \leq 0$, vom avea

$$\begin{aligned} &\frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y}{1+y^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{-2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{-2y}{1+y^2} \right), \end{aligned}$$

cum însă, în virtutea inegalității lui Cauchy

$$\frac{-2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{-2y}{1+y^2} \leq 1,$$

prin înmulțirea cu $-\frac{1}{2}$, rezultă

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{y}{1+y^2} = \\ & = -\frac{1}{2} \left(\frac{-2x}{1+x^2} \cdot \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{-2y}{1+y^2} \right) \geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

* * * * *

207. Numerele reale a, b, c sînt astfel încît pentru $\forall x \in [-1, 1]$ avem $|ax^2 + bx + c| \leq 1$. Să se arate că avem și inegalitatea $|cx^2 + bx + a| \leq 3$.

Soluție. Presupunem $a > 0, b > 0$ ceea ce se poate obține fie schimbînd semnul sub modul fie făcînd transformarea $x \rightarrow -x$. Făcînd în inegalitatea dată $x = 1, -1, 0$, avem: $|a + b + c| \leq 1, |a - b + c| \leq 1, |c| \leq 1$, de unde

$$-1 \leq a + b + c \leq 1 \Rightarrow -1 - c \leq a + b \leq 1 - c \Rightarrow$$

$$-2 \leq a + b \leq 2 \Rightarrow |a + b| \leq 2;$$

$$-1 \leq a - b + c \leq 1 \Rightarrow -1 - c \leq a - b \leq$$

$$\leq 1 - c \Rightarrow -2 \leq a - b \leq 2 \Rightarrow |a - b| \leq 2.$$

Fie

$$c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq cx^2 \leq c \\ -b \leq bx \leq b \end{cases} \Rightarrow$$

$$-2 \leq a - b \leq cx^2 + bx + a \leq a + b + c \leq 3$$

Fie

$$c \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} c \leq cx^2 \leq 0 \\ -b \leq bx \leq b \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3 \leq a + c - b \leq cx^2 + bx + a \leq a + b \leq 2,$$

de unde rezultă

$$|cx^2 + bx + a| \leq 3.$$

* * * * *

208. Să se arate că $\forall n > 1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Soluție. (Ghelfand). Să notăm $p_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n}$. Atunci,

$$p_n^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \dots \frac{(2n-1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \dots \frac{(2n-1)^2}{(2n-2)2n} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Deoarece $\frac{(2k-1)^2}{(2k-2) \cdot 2k} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2 - 1} > 1$ rezultă

$$p_n^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \Rightarrow p_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2 - 1}{(2k)^2} < 1$$

și deci

$$p_n^2 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \dots \frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2n}$$

și deci

$$p_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

* * *

209. Dacă $a, b \geq 0$, atunci $[2a] + [2b] \geq [a] + [b] + [a+b]$.

Soluție. Fie

$$\begin{cases} a = [a] + \alpha, \alpha \in [0, 1) \\ b = [b] + \beta, \beta \in [0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [2a] + [2b] = 2[a] + 2[b] + [2\alpha] + [2\beta], \\ [a+b] = [a] + [b] + [\alpha + \beta]. \end{cases}$$

1°. Dacă $\alpha + \beta \in [0,1)$, atunci avem inegalitatea

$$2[a] + 2[b] + [2\alpha] + [2\beta] \geq 2[a] + 2[b] - \text{evident,}$$

2°. Dacă $\alpha + \beta \in [1, 2)$, atunci cel puțin α sau β satisface la $2x \geq 1 \Rightarrow$

$$[2\alpha] + [2\beta] = 2[\alpha] + 2[\beta] + 1,$$

$$[a + b] = [a] + [b] + [\alpha + \beta] = [a] + [b] + 1,$$

ceea ce demonstrează pe deplin afirmația.

210. Să se arate că afirmația: „Pentru orice $a_i \in R$ este îndeplinită inegalitatea

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) +$$

$$(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) +$$

$$(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0''$$

este adevărată pentru $n = 2, 3, 5$ și neadevărată pentru orice alt $n \geq 2$.

Soluție. În cazul $n = 2$, avem evident $a_1 - a_2 + a_2 - a_1 = 0$. În cazul $n = 3$, fie $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, ceea ce nu restringe generalitatea deoarece expresia din membrul întâi e simetrică în (a_1, a_2, a_3) . Și atunci, deoarece $a_m - a_n \geq 0$ pentru $m \leq n$, vom avea

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) =$$

$$= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_3)(a_1 - a_3 + a_2 - a_1) =$$

$$= (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_3)^2 \geq 0.$$

Pentru $n = 4$, inegalitatea din enunț nu se verifică pentru orice $a_i \in R$ ($i = 1, 2, 3, 4$), după cum rezultă de exemplu pentru $a_1 = 0, a_2 = a_3 = a_4 = 1$. Pentru $n = 5$, luând (ca-n cazul $n = 3$) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$ și ținând seama că $a_m - a_n \geq 0, a_m - a_p \geq a_n - a_p$

și $a_p - a_n \geq a_p - a_m$ pentru $m \leq n$, rezultă

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) + \\ & + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) + (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ & + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) + \\ & + (a_1 - a_2)[(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) - (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)] + \\ & + (a_4 - a_5)[(a_1 - a_5)(a_2 - a_5)(a_3 - a_5) - (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)] \geq 0. \end{aligned}$$

În oricare din cazurile $n > 5$ se poate construi cîte un contraexemplu de forma : $a_1 = \dots = a_{n-4} = 0$, $a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$.

211. Dacă $x, y, z, t \in (0, \infty)$ să se demonstreze că

$$S = \frac{x+y}{y+z+t} + \frac{y+z}{z+t+x} + \frac{z+t}{t+x+y} + \frac{t+x}{x+y+z} \geq \frac{8}{3}.$$

(Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16113.)

Soluție. Din $\sum (a_i x - b_i)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \sum a_i^2 - 2x \sum a_i b_i + \sum b_i^2 \geq 0$; discriminantul fiind nepozitiv avem că $(\sum a_i b_i)^2 - \sum a_i^2 \sum b_i^2 \leq 0$, de unde inegalitatea lui Schwartz :

$$\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq (\sum a_i b_i)^2.$$

Fie

$$a_1^2 = \frac{x+y}{y+z+t}, \quad a_2^2 = \frac{y+z}{z+t+x}, \quad a_3^2 = \frac{z+t}{t+x+y}, \quad a_4^2 = \frac{t+x}{x+y+z}$$

și

$$b_1^2 = (x+y)(y+z+t); \quad b_2^2 = (y+z)(z+t+x),$$

$$b_3^2 = (z+t)(t+x+y), \quad b_4^2 = (t+x)(z+x+y).$$

Aplicînd inegalitatea avem :

$$\begin{aligned} S \cdot [& (x+y)(y+z+t) + (y+z)(z+t+x) + (z+t)(t+x+y) + \\ & + (t+x)(z+x+y)] \geq [(x+y) + (y+z) + (z+t) + (t+x)]^2 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} S \cdot (xy + xz + xt + y^2 + yz + yt + yz + yt + yx + z^2 + tz + zx + \\ + xt + xz + zy + t^2 + tx + ty + tz + tx + ty + xz + x^2 + xy) \geq \\ \geq 4(x + y + z + t)^2 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} S \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xy + 4xz + 3xt + 3yz + 4ty + 3tz) \geq \\ \geq 4(x + y + z + t)^2. \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} 3(x + y + z + t)^2 \geq \\ \geq 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xy + 4xz + 3tx + 3yz + 4ty + 3tz) \end{aligned}$$

căci

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xz - 2ty \geq 0 \text{ sau } (x - z)^2 + (y - t)^2 \geq 0$$

și prin urmare

$$\begin{aligned} S \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xy + 4xz + 3xt + 3yz + 4ty + 3tz) \geq \\ \geq \frac{8}{3}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 3xy + 4xz + 3tx + 3yz + 4ty + 3tz) \end{aligned}$$

$$\text{adică } S \geq \frac{8}{3}.$$

212. Fie r rațional nenegativ. Să se determine numerele întregi a, b, c, d, e, f , astfel încît pentru orice r să fie îndeplinită condiția

$$\left| \frac{ar^2 + br + c}{dr^2 + er + f} - \sqrt[3]{2} \right| < |r - \sqrt[3]{2}|.$$

Soluție. Condiția fiind îndeplinită pentru $\forall r \in R^+$, fie $\{r_n\}$ un șir de numere raționale pozitive ce converge la $\sqrt[3]{2}$ și care verifică inegalitatea

$$\left| \frac{ar_n^2 + br_n + c}{dr_n^2 + er_n + f} - \sqrt[3]{2} \right| < |r_n - \sqrt[3]{2}|.$$

Trecind la limită în inegalități apare și posibilitatea de egal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{ar_n^2 + br_n + c}{dr_n^2 + er_n + f} - \sqrt[3]{2} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |r_n - \sqrt[3]{2}| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{a(\sqrt[3]{2})^2 - b\sqrt[3]{2} + c - d(\sqrt[3]{2})^3 - e(\sqrt[3]{2})^2 - f\sqrt[3]{2}}{d(\sqrt[3]{2})^2 + e\sqrt[3]{2} + f} \right| \leq 0.$$

Primul membru, fiind un modul, este ≥ 0 , așa că

$$a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 2d + e\sqrt[3]{4} + f\sqrt[3]{2} \Rightarrow \begin{cases} c = 2d, \\ a = e, \\ b = f. \end{cases}$$

Inegalitatea devine

$$\left| \frac{ar^2 + br + 2d - d\sqrt[3]{2}r^2 - ar\sqrt[3]{2} - b\sqrt[3]{2}}{dr^2 + ar + b} \right| < |r - \sqrt[3]{2}| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{ar(r - \sqrt[3]{2}) + b(r - \sqrt[3]{2}) - \sqrt[3]{2}d(r^2 - \sqrt[3]{4})}{dr^2 + ar + b} \right| < |r - \sqrt[3]{2}| \Rightarrow$$

$$(1) \quad \left| \frac{ar + b - \sqrt[3]{2}d(r + \sqrt[3]{2})}{dr^2 + ar + b} \right| < 1.$$

$$r = 0 \Rightarrow \left| 1 - \sqrt[3]{4} \frac{d}{b} \right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{4} \frac{d}{b} < 1 \\ \sqrt[3]{4} \frac{d}{b} - 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d}{b} > 0 \\ \frac{d}{b} < \sqrt[3]{2} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{b}{d} > \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Notînd $\frac{a}{d} = \alpha$, (1) se mai poate scrie și astfel

$$\left| 1 - \frac{r^2 + \sqrt[3]{2}r + \sqrt[3]{4}}{r^2 + \alpha r + \beta} \right| < 1 \Rightarrow \begin{cases} r^2 + \alpha r + \beta > 0 \\ \frac{r^2 + \sqrt[3]{2}r + \sqrt[3]{4}}{r^2 + \alpha r + \beta} < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha > -2\sqrt[3]{\beta} > -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \\ r^2 + (2\alpha - \sqrt[3]{2})r + 2\beta - \sqrt[3]{4} > 0. \end{cases}$$

Dar rădăcinile ecuației $r^2 + (2\alpha - \sqrt[3]{2})r + 2\beta - \sqrt[3]{4} = 0$ fiind

$$r_{1,2} = \frac{-(2\alpha - \sqrt[3]{2}) \pm \sqrt{(2\alpha - \sqrt[3]{2})^2 - 4(2\beta - \sqrt[3]{4})}}{2},$$

pentru ca membrul întii să fie > 0 pentru $r \geq 0$ este suficient ca

$2\alpha - \sqrt[3]{2} > 0$ și deci $\alpha > \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, sau $(2\alpha - \sqrt[3]{2})^2 < 4(2\beta - \sqrt[3]{4}) \Rightarrow |2\alpha - \sqrt[3]{2}| < 2\sqrt[3]{2\beta - \sqrt[3]{4}}$. După cum se poate verifica ușor, avem, de exemplu, următoarele soluții :

$a = e = 0$, $b = d = f = -1$, sau $a = c = e = 2$, $b = d = f = 1$,

sau

$a = e = 0$, $b = d = f = -1$, $c = -2$, sau $a = c = e = -2$,

$b = d = f = -1$.

213.

$y = a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, $a > 0$, $b > 0$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \sum a_i b_i &\leq \sqrt{\sum a_i^2} \cdot \sqrt{\sum b_i^2} \Rightarrow a \sin x + b \cos x \leq \\ &\leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ deci } a \sin x + b \cos x \leq \\ &\leq \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Egalitate pentru } \frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

* *

214. Să se arate că $\sum_{i=0}^{n-k} C_n^i C_n^{i+k} = C_{2n}^{n+k}$.

Soluție. Din identitatea $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, deducem

$$\left(\sum_{i=0}^n C_n^i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n C_n^j x^j \right) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k,$$

iar identitatea din enunț rezultă din identificarea coeficienților lui x^{n-k} din cei doi membri, căci $C_n^i C_n^{i+k} x^i x^{n-i-k} = C_n^i C_n^{i+k} x^{n-k}$, iar $C_{2n}^{n+k} x^{2n-(n+k)} = C_{2n}^{n+k} x^{n-k}$.

* * *

215. Să se arate că

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c},$$

unde $a, b, c \in (1, \infty)$ sau $a, b, c \in (0, 1)$.

Soluție. Se aplică inegalitatea mediei: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Să considerăm mai întâi cazul $a, b, c \in (1, \infty)$. Vom avea

$$\begin{aligned} \frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} &\geq 6 \sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \\ 18 \sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{a+b+b+c+c+a}} &= \frac{9}{a+b+c} \sqrt[3]{\log_b a \log_c b \log_a c} = \end{aligned}$$

$= \frac{9}{a+b+c}$, căci $\log_b a \log_c b \log_a c = 1$. Într-adevăr, să notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c b$, $z = \log_a c \Rightarrow a = b^x$, $b = c^y$, $c = a^z \Rightarrow a = c^{xz} = a^{xz}$, de unde logaritmiind în baza a , obținem $xyz=1$, adică $\log_b a \log_c b \log_a c = 1$.
 Dacă, $a, b, c \in (0, 1)$ să notăm $a = \frac{1}{a_1}$, $b = \frac{1}{b_1}$, $c = \frac{1}{c_1}$, iar $a_1, b_1, c_1 \in (1, \infty)$. Dar atunci $\log_b a = \log_{\frac{1}{b_1}} \frac{1}{a_1} = x \Rightarrow \frac{1}{a_1} = \left(\frac{1}{b_1}\right)^x \Rightarrow a_1 = b_1^x \Rightarrow x = \log_{b_1} a_1 > 0$, așa că $\log_b a, \log_c b, \log_a c > 0$ și-n acest caz.

216. Să se rezolve inegalitatea $\frac{3 \ln_a x + 6}{\ln_a^2 x + 2} > 1$.

Soluție. Inegalitatea precedentă se mai poate scrie și $3 \log_a x + 6 > \log_a^2 x + 2$, deoarece evident $\log_a^2 x + 2 > 0$. De aici deducem $\log_a^2 x - 3 \log_a x - 4 < 0$ sau, notînd $\log_a x = y$, $y^2 - 3y - 4 < 0$. Cum rădăcinile ecuației $y^2 - 3y - 4 = 0$ sînt $\begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = -1, \end{cases}$ rezultă că $y^2 - 3y - 4 < 0$ pentru $-1 < y < 4$, de unde $-1 < \log_a x < 4$. Dar $\log_a x = 4 \Rightarrow x = a^4$, $\log_a x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$, așa că $a^4 < x < \frac{1}{a}$ în cazul $0 < a < 1$ și $\frac{1}{a} < x < a^4$ în cazul $a > 1$.

217. Să se arate că $x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 \geq 0$.

Soluție.

$$\begin{aligned}
 x^6 + x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 + x + 1 &= x^6 - 2x^3 + \\
 + 1 + 4x^2(x^2 - 2x + 1) + x(x^4 - 2x^2 + 1) &= (x^3 - 1)^2 + 4x^2(x-1)^2 + \\
 + x(x^2 - 1)^2 &= (x-1)^2[(x^2 + x + 1)^2 + 4x^2 + x(x+1)^2].
 \end{aligned}$$

Cum $(x-1)^2 \geq 0$, rămîne să arătăm că și al doilea factor ≥ 0 . Acesta $e > 0$ evident pentru $x \geq 0$. Să vedem ce se-ntîmplă în cazul $x < 0$. Vom avea

$$(x^2 + x + 1)^2 + 4x^2 + x(x + 1)^2 \geq (x^2 + 2x + 1)(x^2 + x + 1) + 4x^2 + x(x + 1)^2 = (x + 1)^2(x^2 + x + 1 + x) + 4x^2 = (x + 1)^4 + 4x^2 > 0,$$

și cu această inegalitatea e demonstrată.

Se constată-n plus că valoarea 0 este obținută numai pentru $x = 1$.

218. Dacă $a, b, c > 0$, să se arate că

$$a^2(2b + c) + b^2(2c + a) + c^2(2a + b) - abc \geq (a + b)(b + c)(c + a)$$

(Gazeta Matematică 8, 1976, Problema nr. 15987).

Soluție. Făcînd calculele obținem: $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$.
Din inegalitatea lui Cauchy avem:

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \Rightarrow 3abc \leq a^2b + b^2c + c^2a.$$

* * * * *

219. Fie numerele reale x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Dacă $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ și $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, iar z_1, z_2, \dots, z_n reprezintă numerele y_1, y_2, \dots, y_n într-o ordine oarecare să se arate că

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

(A XVII-a Olimpiadă Internațională, Cehoslovacia, 6 puncte).

Soluția 1. Conform ipotezei avem că $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$ și prin urmare obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i z_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n z_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i z_i, \end{aligned}$$

adică $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \geq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_p z_p + \dots + x_q z_q + \dots + x_n z_n$.

Să presupunem că în membrul doi avem $p < q$ și $z_p < z_q$. Cum $x_p > x_q$ avem că $(x_p - x_q)(z_p - z_q) < 0$ sau $x_p z_p + x_q z_q < x_p z_q + x_q z_p$ sau $x_p z_q + x_q z_p > x_p z_p + x_q z_q$. Prin urmare dacă considerind doi termeni oarecare $x_p z_p, x_q z_q$ din care $z_p < z_q$, atunci cînd restabilim ordinea, membrul respectiv se mărește. Cum în $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ ordinea este deplin stabilită, înseamnă că această sumă este cea mai mare posibilă.

Soluția 2. Inegalitatea se reduce la $\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Aplicăm inducția. Pentru $n = 1$ este evidentă. Fie adevărată pentru $n = k$. Dacă $z_1 = y_1$, atunci conform inducției $\sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i \leq \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$ și adăugînd ambilor membri $x_1 y_1$ obținem inegalitatea cerută. Fie $z_1 = y_m$, $m \neq 1$ și $y_1 = z_l$, $l \neq 1$. Cum $x_1 \geq x_l$ și $y_1 \geq y_m$, atunci $(x_1 - x_l)(y_1 - y_m) \geq 0 \Rightarrow x_1 y_1 + x_l y_m \geq x_l y_m + x_1 y_1$. Dacă în suma $\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i$ termenii $x_1 z_1 = x_1 y_m$ și $x_l z_l = x_l y_1$ se schimbă cu termenii $x_l y_1$ și $x_1 y_m$, atunci suma nu se micșorează. Noua sumă o putem reprezenta sub forma $x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i$, unde, pentru $i \geq 2$, avem că

$$z'_i = \begin{cases} z_i & \text{dacă } i \neq l, \\ y_m & \text{dacă } i = l. \end{cases}$$

De aici se vede că $z'_2, z'_3, \dots, z'_{k+1}$ este o permutare a numerelor y_2, y_3, \dots, y_{k+1} . De aceea conform inducției $\sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i \leq \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$ și deci

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i \leq x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i,$$

și inegalitatea e adevărată pentru orice n .

220. Să se arate că dacă a, b, c, d, x, y sînt numere pozitive, $a + b = c + d$ și $\sqrt{a^2 + x} + \sqrt{b^2 + x} = \sqrt{c^2 + y} + \sqrt{d^2 + y}$, atunci $x \geq y$ pentru $ab \geq cd$, iar $x \leq y$ pentru $|a - b| \geq |c - d|$. (Gazeta Matematică 10, 1976, Problema nr. 16099).

Soluție. Căutăm să scoatem pe y din această relație

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + y} + \sqrt{d^2 + y} &= \sqrt{a^2 + x} + \sqrt{b^2 + x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{c^2 - d^2}{\sqrt{c^2 + y} - \sqrt{d^2 + y}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{b^2 + x}} \end{aligned}$$

sau, ținând seama că $a + b = c + d$,

$$\sqrt{c^2 + y} - \sqrt{d^2 + y} = \frac{c-d}{a-b} \sqrt{a^2 + x} - \frac{c-d}{a-b} \sqrt{b^2 + x}.$$

Adunând cele două relații :

$$2\sqrt{c^2 + y} = \frac{a-b+c-d}{a-b} \sqrt{a^2 + x} + \frac{a-b-c+d}{a-b} \sqrt{b^2 + x}.$$

Eliminând pe d :

$$\begin{aligned} a-b+c-d &= a-b+c+c-a-b = 2(c-b), \quad a-b-c+d = \\ &= a-b-c+a+b-c = 2(a-c), \end{aligned}$$

$$\sqrt{c^2 + y} = \frac{c-b}{a-b} \sqrt{a^2 + x} + \frac{a-c}{a-b} \sqrt{b^2 + x} \Rightarrow$$

$$y(a-b)^2 = a^2(c-b)^2 + b^2(a-c)^2 - c^2(a-b)^2 + x[(c-b)^2 + (a-c)^2] +$$

$$\begin{aligned} 2(a-c)(c-b)\sqrt{a^2 + x}\sqrt{b^2 + x} &\Rightarrow y(a-b)^2 - x(a-b)^2 = \\ &= 2ab(a-c)(b-c) + 2x(c-b)(c-a) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2(c-a)(c-b)\sqrt{a^2 + x}\sqrt{b^2 + x} &\Rightarrow (y-x)(a-b)^2 = \\ &= 2(c-a)(c-b)(x+ab - \sqrt{a^2 + x}\sqrt{b^2 + x}). \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} 2ab \leq a^2 + b^2 &\Rightarrow 2abx \leq a^2x + b^2x \Rightarrow x^2 + 2abx + a^2b^2 \leq \\ &\leq x^2 + a^2b^2 + a^2x + b^2x \Rightarrow (x+ab)^2 \leq (a^2+x)(b^2+x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+ab \leq \sqrt{a^2+x}\sqrt{b^2+x} \end{aligned}$$

și prin urmare

$$x+ab - \sqrt{a^2+x}\sqrt{b^2+x} \leq 0.$$

Cum

$$\begin{aligned} ab \geq cd &\Leftrightarrow ab \geq c(a+b-c) \Leftrightarrow c^2 - c(a+b) + ab \geq 0 \Leftrightarrow \\ &(c-a)(c-b) \geq 0 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} |a - b| \geq |c - d| &\Rightarrow (a - b)^2 \geq (c - d)^2 \Rightarrow (a - b)^2 \geq \\ &(c + c - a - b)^2 \Rightarrow (a - b - 2c + a + b)(a - b + \\ &+ 2c - a - b) \geq 0 \Rightarrow 2(a - c)2(c - b) \geq 0 \end{aligned}$$

sau $(c - a)(c - b) \leq 0$, rezultă că dacă

$$ab \geq cd \Rightarrow y - x \leq 0 \Rightarrow x \geq y,$$

iar dacă

$$|a - b| \geq |c - d| \Rightarrow |y - x| \geq 0 \Rightarrow x \leq y.$$

*

221. Să se arate că $4x + 2y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

Soluție. Graficul funcției $y = -2x + \frac{1}{2}$ este o dreaptă Δ ,

iar $x^2 + y^2 = \frac{1}{20}$ reprezintă o circumferință cu centrul în origine tangentă la această dreaptă (fig. 28).

Într-adevăr, aria triunghiului OAB este $\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{1}{16}$, ipotenuza $\overline{AB} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{5} \text{ și deci înălțimea}$$

$$\overline{OI} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = R. \text{ Cum}$$

dreapta este tangentă și deci exterioară cercului C , inegalitatea din enunț este satisfăcută.

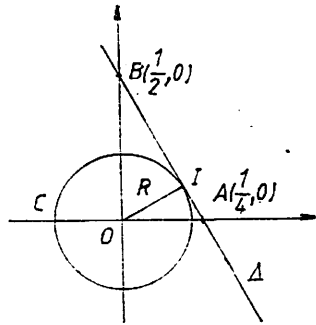


Fig. 28.

222. Să se dovedească inegalitatea Cauchy:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{x_i}, \quad a_i, b_i, x_i > 0.$$

Soluție. $(\sum m_i n_i)^2 \leq \sum m_i^2 \sum n_i^2$. Punem $m_i = \sqrt{a_i x_i}$, $n_i = \sqrt{\frac{b_i}{x_i}}$ și obținem: $(\sum \sqrt{a_i b_i})^2 \leq \sum a_i x_i \cdot \sum \frac{b_i}{x_i}$.

223. Să se dovedească $\sum x_i y_i \cdot \sum \frac{x_i}{y_i} \geq (\sum x_i)^2$.

Soluție. În $\sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2 \geq (\sum a_i b_i)^2$, punem $a_i = \sqrt{x_i y_i}$, $b_i = \sqrt{\frac{x_i}{y_i}}$ și căpătăm $\sum x_i y_i \cdot \sum \frac{x_i}{y_i} \geq (\sum x_i)^2$.

224. Să se rezolve inegalitatea: $x + \frac{1}{x-1} < -\frac{1}{2}$.

(Gazeta Matematică 2, 1976, Problema nr. 156305).

Soluție. Vom avea

$$x + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + x - 1 + 2}{2(x-1)} < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2 - x + 1}{2(x-1)} < 0.$$

Dar ecuația $2x^2 - x + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ rădăcinile fiind complexe. Semnul este dat de $x - 1$ deoarece $2x^2 - x + 1 > 0$ întotdeauna.

Dar $x - 1 < 0$, cînd $x < 1$. Deci soluția inegalității este $x < 1$.

225. Să se arate că dacă $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ și $a:b = c:d$, atunci

1. $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$
2. $|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$
3. $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \geq \sqrt{c^2 + d^2}$
4. $\sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2}$

În ce cazuri are loc semnul egal. (Gazeta Matematică, 3, 1976, Problema nr. 15753).

Soluție.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \\
 & = (a + c)^2 + (b + d)^2 \Rightarrow 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = 2ac + 2bd \Rightarrow \\
 & \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = ac + bd \Rightarrow (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \\
 & = (ac + bd)^2 \Rightarrow \text{dar } ad = bc \Rightarrow a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 = \\
 & \quad a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \Leftrightarrow b^2c^2 + a^2d^2 = 2abcd
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Rightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \Rightarrow \\
 & - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = -2ac - 2bd \Rightarrow \\
 & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2.
 \end{aligned}$$

Aceeași situație ca-n primul caz.

$$\begin{aligned}
 3. \quad & \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \geq \sqrt{c^2 + d^2} \\
 & \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \geq \sqrt{c^2 + d^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \\
 (a - c)^2 + (b - d)^2 & \geq c^2 + d^2 + a^2 + b^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Rightarrow \\
 -2ac - 2bd & \geq -2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Rightarrow (ac + bd)^2 \leq \\
 & \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \text{ la fel ca la primul punct.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \\
 & \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow \\
 (a - c)^2 + (b - d)^2 & \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Rightarrow \\
 -2ac - 2bd & \geq -2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Rightarrow \\
 ac + bd & \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Rightarrow \\
 (ac + bd)^2 & \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \text{ idem ca la primul punct.}
 \end{aligned}$$

$$226. \text{ Să se arate că } \left| \frac{x(1-x^2)(x^4-6x^2+1)}{(1+x^2)^4} \right| \leq \frac{1}{8} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Gazeta Matematică, 3, 1976, Problema nr. 15760).

Soluție. Să notăm $x = \operatorname{tg} \alpha$. Atunci

$$1 - x^2 = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$(x^4 - 6x^2 + 1) = (x^2 - 1)^2 - 4x^2 = (x^2 - 1 - 2x)(x^2 - 1 + 2x) =$$

$$= (\operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha - 1)(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1 + 2\operatorname{tg} \alpha) =$$

$$= \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1 - 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1 + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \left(\frac{-\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} - 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \left(\frac{-\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^4 \alpha} - 4 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha}{\cos^4 \alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\cos^4 \alpha},$$

$$1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\left| \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} \right| \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \left| \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha \cdot 1} \right| \leq \frac{1}{8}$$

$$|\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha| \leq \frac{1}{8} \Rightarrow |2\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$|\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |\sin 4\alpha \cos 4\alpha| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |\sin 8\alpha| \leq 1.$$

* * * * *

227. Se dau n numere pozitive a_1, a_2, \dots, a_n astfel încît $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Să se arate că

$$(1 \diamond a_1) (1 \diamond a_2) \dots (1 \diamond a_n) \geq 2^n.$$

Soluție

$$\begin{aligned} (1 \diamond a_1) (1 \diamond a_2) \dots (1 \diamond a_n) &= a_1 \dots a_n \left(1 \diamond \frac{1}{a_1}\right) \dots \left(1 \diamond \frac{1}{a_n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \Rightarrow [(1 \diamond a_1) \dots (1 \diamond a_n)]^2 = \\ &= \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) (1 + a_1) \dots \left(1 \diamond \frac{1}{a_n}\right) (1 \diamond a_n) = \left(2 \diamond a_1 \diamond \frac{1}{a_1}\right) \dots \\ &\dots \left(2 + a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \underbrace{2^2 \dots 2^2}_{n \text{ ori}} = 2^{2n} \text{ deci } (1 \diamond a_1) (1 \diamond a_2) \dots (1 \diamond a_n) \geq 2^n. \end{aligned}$$

* * *

228. Să se arate că dacă $a, b, c > 0$, atunci $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c$.

Soluție. Pornim de la inegalitatea $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geq 1$, care se mai poate scrie $x^x y^{-y} \geq y^x y^{-y}$ sau $x^x y^y \geq x^y y^x$ și vom obține

$$\begin{cases} a^a b^b \geq a^b b^a, \\ a^a c^c \geq a^c c^a \Rightarrow a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geq a^{b-b} b^{c-c} a^{a-a} c^{-b} \Rightarrow a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geq (abc)^{a-b-c}, \\ b^b c^c \geq b^c c^b, \end{cases}$$

$$\text{sau } a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \text{ sau } (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \leq a^a b^b c^c.$$

* * * * *

229. Fie $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Să se arate că

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots \diamond \frac{x_{n-1}}{x_n} \diamond \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} \diamond \frac{x_3}{x_2} \diamond \dots \diamond \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}.$$

Soluție. Pentru $n = 2$, avem $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$ — evident.

Pentru $n = 3$,

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} - \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_3}{x_2} - \frac{x_1}{x_3} &= \frac{x_3 - x_2}{x_1} + \frac{x_1 - x_3}{x_2} + \frac{x_2 - x_1}{x_3} = \\ &= \frac{x_2 x_3 (x_3 - x_2) + x_3 x_1 (x_1 - x_3) + x_1 x_2 (x_2 - x_1)}{x_1 x_2 x_3} = \\ &= \frac{x_2 x_3 (x_3 - x_2) + x_3 x_1 (x_1 - x_3) + x_2 - x_2 + x_1 x_2 (x_2 - x_1)}{x_1 x_2 x_3} = \\ &= \frac{x_3 (x_3 - x_2) (x_2 - x_1) + x_1 (x_1 - x_2) (x_3 - x_2)}{x_1 x_2 x_3} = \\ &= \frac{(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}{x_1 x_2 x_3} \geq 0, \text{ adevărată.} \end{aligned}$$

Să presupunem că inegalitatea din enunț este adevărată pentru $n - 1$, adică

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_1} \geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_1}{x_{n-1}}.$$

Considerăm numerele x_1, x_{n-1}, x_n și cum pentru trei termeni este adevărată

$$\frac{x_1}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq \frac{x_{n-1}}{x_1} + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n},$$

adunînd cele două relații avem :

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_1} + \frac{x_1}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} &\geq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_1}{x_{n-1}} + \\ &+ \frac{x_1}{x_{n-1}} + \frac{x_{n-1}}{x_1} + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}, \end{aligned}$$

ceea ce arată că este adevărată și pentru n .

* * * * *

230. Dacă numerele reale x_1, x_2, \dots, x_n satisfac relațiile $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > 0$, atunci

$$\frac{(x_3 + x_4 + \dots + x_n)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \dashv \frac{(x_1 + x_4 + \dots + x_n)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} \dashv \dots$$

$$\dashv \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} \dashv$$

$$\dashv \frac{(x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1})(x_n - x_1)}{x_n \dashv x_1} \geq 0.$$

(Gazeta Matematică 11, 1976, Problema nr. 16187).

Soluție. Scriem întâi sub altă formă inegalitatea. Fie $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Avem

$$\frac{(S_n - x_1 - x_2)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{(S_n - x_2 - x_3)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \dots +$$

$$\dashv \frac{(S_n - x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} \dashv \frac{(S_n - x_n - x_1)(x_n - x_1)}{x_n + x_1} \geq 0.$$

sau

$$\frac{S_n(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - (x_1 - x_2) + \frac{S_n(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} - (x_2 - x_3) + \dots \dashv$$

$$\dashv \frac{S_n(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} - (x_{n-1} - x_n) \dashv \frac{S_n(x_n - x_1)}{x_n + x_1} - (x_n - x_1) \geq 0,$$

care, după reduceri și renunțarea la factorul esențial pozitiv S_n , devine:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \geq 0.$$

Pentru $n = 2$ este banală: $\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \dashv \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} \geq 0$ avem egalitate.

Pentru $n = 3$:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \diamond \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \diamond \frac{x_3 - x_1}{x_3 + x_1} \geq 0 \Rightarrow \\ & (x_1 - x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) \diamond (x_2 - x_3)(x_1 + x_2)(x_3 + x_1) \diamond \\ & \diamond (x_3 - x_1)(x_1 + x_2)(x_3 + x_1) = (x_1 - x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) \diamond \\ & \diamond (x_2 - x_3)(x_1 + x_2)(x_3 + x_1) \diamond (x_3 - x_1)(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = \\ & = (x_1 - x_2)(x_3 + x_1)(x_2 + x_3 - x_1 - x_2) + \\ & \diamond (x_3 - x_1)(x_1 + x_2)(x_2 + x_3 - x_3 - x_1) = \\ & = (x_1 - x_2)(x_3 + x_1)(x_3 - x_1) \diamond (x_3 - x_1)(x_1 + x_2)(x_2 - x_1) = \\ & = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(-x_3 - x_1 + x_1 + x_2) = \\ & = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \geq 0. \end{aligned}$$

Fie adevărată pentru $n - 1$:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \diamond \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \diamond \dots \diamond \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2} + x_{n-1}} \diamond \frac{x_{n-1} - x_1}{x_{n-1} + x_1} \geq 0.$$

Fiind adevărată pentru x_1, x_{n-1}, x_n , avem

$$\frac{x_1 - x_{n-1}}{x_1 + x_{n-1}} \diamond \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} \diamond \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \geq 0,$$

pe care adunînd-o cu inegalitatea precedentă obținem :

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \diamond \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \diamond \dots \diamond \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \geq 0,$$

deci este adevărată pentru orice n .

231. Să se arate că $\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i y_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i}$, $x_i, y_i > 0$.

Soluție. În $\sum a_i b_i \leq \sqrt{\sum a_i^2} \cdot \sqrt{\sum b_i^2}$ punem $\begin{cases} a_i = \sqrt{x_i} \\ b_i = \sqrt{y_i} \end{cases}$ și deci

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i y_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i}.$$

* * *

232. Să se demonstreze că

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2), \quad a, b, c > 0.$$

Soluție. $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq$
 $\geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$

Plecînd de la $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 2ab + 2bc + 2ca &\leq 2(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \\ (a + b + c)^2 &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

233. Să se demonstreze inegalitatea :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \\ \text{cu } a &\geq b \geq c \geq 0. \end{aligned}$$

Soluție.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - ac^2 - a^2c = \\ = a(a - b)^2 + b(a - b)^2 - c(a - b)^2 + 2a^2b - ab^2 - a^2b + \\ + 2ab^2 - 2abc + c^3 + 3abc - a^2b - ab^2 - bc^2 - ac^2 \geq 0 \Rightarrow \\ (a - b)^2 (a + b - c) + abc - bc^2 - ac^2 + c^3 \geq 0. \end{aligned}$$

Rezultă în final $(a - b)^2 (a + b - c) + c(c - a)(c - b) \geq 0$, care-i evident verificată.

*

234. Să se arate că

$$\begin{cases} a_1 < a_2 < a_3 \\ b_1 < b_2 < b_3 \end{cases} \Rightarrow a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 < a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Soluție.

$$\begin{cases} a_1 - a_3 < 0, \\ b_2 - b_1 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 - a_3 < 0 \\ b_3 - b_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (a_1 - a_3)(b_2 - b_1) + (a_2 - a_3)(b_3 - b_2) < 0$$

și desfășcând parantezele obținem tocmai inegalitatea din enunț.

* * * *

235. Care dintre numerele $\underbrace{2^2}_{n+1 \text{ ori}}$, $\underbrace{3^3}_n$ și dintre numerele $\underbrace{3^3}_{n+1 \text{ ori}}$, $\underbrace{4^4}_n$, este mai mare?

Soluție. Se aplică inducția. În cazul $n=2$ avem $2^2=16 < 27=3^3$.

Să presupunem că $\underbrace{2^2}_n < \underbrace{3^3}_{n-1}$. Dar atunci

$$\underbrace{3^3}_n > \underbrace{3^3}_n > \underbrace{2^2}_{n+1}$$

Și acum, să arătăm, prin inducție, că $\underbrace{3^3}_{n+1} > \underbrace{4^4}_n$. Să notăm

$x_{n+1} = \underbrace{3^3}_{n+1 \text{ ori}}$ și $y_n = \underbrace{4^4}_n$ și să arătăm prin inducție că $x_{n+1} > 2y_n$.

Într-adevăr, ea este verificată în cazul $n=1$, căci $3^3 > 8$. Și acum să presupunem că-i verificată în cazul $n-1$, adică $x_n > 2y_{n-1}$. Atunci, vom avea

$$x_{n+1} = 3^n > 3^{2y_{n-1}} = (3^2)^{y_{n-1}} > (2.4)^{y_{n-1}} = 2^{y_{n-1}} \cdot 4^{y_{n-1}} > 2 \cdot 4^{y_{n-1}} = 2y_n.$$

Deci $x_{n+1} > 2y_n$ pentru orice n natural, dar $x_{n+1} > 2y_n > y_n \forall n \in \mathbb{N}$, și cu aceasta inegalitatea cerută este și ea demonstrată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

* * * * *

236. Să se arate că pentru $n > 999000$ este adevărată inegalitatea $1,001^n > 1000$.

Soluții. 1° Conform inegalității lui Bernoulli :

$$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^n > 1 + \frac{n}{1000}; \quad 1 + \frac{n}{1000} > 1000 \Rightarrow$$

$$n > 1000000 - 1000 = 999000.$$

$$2^\circ \quad 1,001 - 1 = 0,001 \mid 1,001 \Rightarrow$$

$$1,001^2 - 1,001 = 0,001001 > 0,001 \Rightarrow$$

$$1,001^3 - 1,001^2 > 0,001 \Rightarrow$$

$$1,001^4 - 1,001^3 > 0,001 \Rightarrow$$

$$\frac{1,001^n - 1,001^{n-1} > 0,001}{\hline}$$

$$1,001^n - 1 > 0,001 n, \text{ unde}$$

$$n > 999000 \Rightarrow$$

$$1,001^n - 1 > 999 \Rightarrow$$

$$1,001^n > 1000.$$

* * * * *

237. Să se arate că x_i - pozitive $\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1)$.

Soluție. La o permutare circulară expresia nu se schimbă și putem lua pe cel mai mare x cu orice indice. Fie $x_2 \geq x_i$. Atunci

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_1x_5 + 2x_2x_3 \rightarrow \\ & + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_4 + 2x_3x_5 + 2x_4x_5 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - \\ & - 4x_3x_4 - 4x_4x_5 - 4x_5x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_1x_2 \rightarrow \\ & + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_1x_5 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 - 2x_3x_4 + \\ & + 2x_3x_5 - 2x_4x_5 \geq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2 + 2x_4(x_1 \rightarrow \\ & + x_2 - x_3) + 2x_5(x_2 + x_3 - x_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Cum $x_2 > x_3$, $x_2 > x_1$ rezultă toți termenii pozitivi.

*

232. Să se dovedească inegalitatea

$$2 \sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}} \leq a^2 + b^2; \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Soluția întâi.

$$2 \sqrt[a+b]{\underbrace{a^2 \cdot a^2 \dots a^2}_{b \text{ ori}} \cdot \underbrace{b^2 \cdot b^2 \dots b^2}_{a \text{ ori}}} \leq 2 \frac{ba^2 + ab^2}{a + b} = 2ab \leq a^2 + b^2$$

Soluția a doua. Lemă: $a > 0, b > 0, (a/b)^{a-b} \geq 1$.

$$a \geq b \Rightarrow a/b \geq 1 \Rightarrow (a/b)^{a-b} \geq 1,$$

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1, a - b < 0 \Rightarrow (a/b)^{a-b} \geq 1.$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab = 2 \sqrt[a+b]{a^{a+b}b^{a+b}} = 2 \sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}(a/b)^{a-b}} \geq 2 \sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}}.$$

În a doua soluție $a > 0, b > 0$, dar nu neapărat naturale.

* * * * *

239. Să se arate că dacă x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt pozitive atunci

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) = 4p.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ & = (2x_1 + 2x_3 + 2x_5)(2x_2 + 2x_4) = 4p + 4x_1x_4 + 4x_5(x_2 - x_1) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4p + 4x_5(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 = \\ & = 4(x_2 + x_3 + x_5)(x_1 + x_4) \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq \\ & \geq 4p + 4x_3(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Inegalitatea cerută rezultă din una din ultimele două, după cum $x_2 \geq x_1$ sau $x_1 \geq x_2$.

Pentru altă metodă de rezolvare, a se vedea problema nr. 236.

* * *

240. Dacă, $a, b, c > 0$, $a > c, b > c$, atunci $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.
(Exercițiu de concurs).

Soluție. $a - c = \alpha c, b - c = \beta c \Rightarrow$ inegalitatea devine $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq \sqrt{(1 + \alpha)(1 + \beta)}$, care se demonstrează ușor.

241. Dacă $a_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, p$), atunci

$$\sum_{k=1}^p [pa_k] \geq (p-1) \sum_{k=1}^p [a_k] + \left[\sum_{k=1}^p a_k \right].$$

Soluție. Fie $a_k = [a_k] + \alpha_k$ ($k = 1, \dots, p$).

Să presupunem că $\sum_{k=1}^p \alpha_k \in [m, m+1)$ ($0 \leq m \leq p-1$). Deoarece

media aritmetică a celor p numere este $\geq \frac{m}{p}$, rezultă că cel puțin

un $\alpha_k \geq \frac{m}{p}$, ceea ce implică $p\alpha_k \geq m$ și deci membrul întâi va da

$$\sum_{k=1}^p [pa_k] = \sum_{k=1}^p p[a_k] + \sum_{k=1}^p [p\alpha_k] \geq p \sum_{k=1}^p [a_k] + m.$$

Dar, ținând seama de ipoteza făcută mai sus, pentru membrul doi vom avea

$$(p-1) \sum_{k=1}^p [a_k] + \left[\sum_{k=1}^p a_k \right] = p \sum_{k=1}^p [a_k] + \left[\sum_{k=1}^p \alpha_k \right] = p \sum_{k=1}^p [a_k] + m,$$

ceea ce implică inegalitatea din enunț în cazul $\sum_{k=1}^p \alpha_k \in [m, m+1)$.

Cum însă acest rezultat este valabil oricare ar fi $m = 0, 1, \dots, p-1$ (ceea ce epuizează toate posibilitățile), inegalitatea din enunț este demonstrată fără vreo ipoteză restrictivă suplimentară.

* * *

242. Să se arate că $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$.

Soluție.

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2000} \cdot 1000 = \frac{1}{2}.$$

* * * *

243. Să se arate că $\frac{1}{1001} - \frac{1}{1002} - \dots - \frac{1}{2000} > \frac{5}{8}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} &= \left(\frac{1}{1001} + \dots + \frac{1}{1250} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{1251} + \dots + \frac{1}{1500} \right) + \left(\frac{1}{1501} + \dots + \frac{1}{1750} \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{1751} + \dots + \frac{1}{2000} \right) > \frac{250}{1250} + \frac{250}{1500} + \frac{250}{1750} + \frac{250}{2000} = \\ &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{8} = \frac{107}{210} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

* * * * *

244. Care din numerele 31^{11} sau 17^{14} este mai mare?

Soluție. Avem că $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$.

* * * *

245. Dacă $x_i > 0$ și $\sum_{i=1}^n x_i = p$ - natural, atunci

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[p]{x_i + 1} \leq n + 1.$$

Soluție.

$$\sqrt[p]{(x_i + 1) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{p-1}} \leq \frac{x_i + p}{p} \text{ sau } \sqrt[p]{x_i + 1} < \frac{x_i}{p} + 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[p]{x_i + 1} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} + n \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sqrt[p]{x_i + 1} \leq n + 1.$$

Consecință:

246. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^2} = 0.$

* * *

247. Să se afle soluțiile întregi ale inegalității $x - 1 < \log_6(x + 3)$.

Soluție. Avem $x > -3 \Rightarrow x + 3 > 6^{x-1}$.

Dacă presupunem k soluție a inegalității $x + 3 > 6^{x-1}$, atunci $6^{k-1} < k + 3$ și $6^k = 6 \cdot 6^{k-1} < 6(k + 3)$ deci orice număr mai mare sau egal cu 2 nu este soluție, deci soluțiile sînt $-2, -1, 0, 1$; după cum rezultă și comparînd graficele funcțiilor $\eta = \log_6 \xi$ și $\eta = \xi - 4$, unde $\xi = x + 3$, $\eta = x - 1$ (fig. 29).

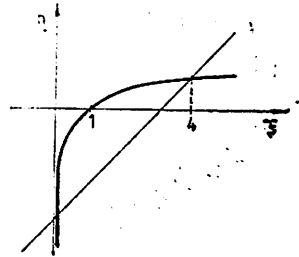


Fig. 29.

§ 17. MAXIME ȘI MINIME

248. Să se afle cea mai mică valoare a sumei

$$S = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} 3S &= \left(\frac{3a}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{3a} \right) + \left(\frac{3b}{c+d+a} + \frac{c+d+a}{3b} \right) + \\ &+ \left(\frac{3c}{d+a+b} + \frac{d+a+b}{3c} \right) + \left(\frac{3d}{a+b+c} + \frac{a+b+c}{3d} \right) + \\ &+ \frac{8}{3} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} \right) = \\ &= \left(\frac{3a}{b+c+d} + \frac{b+c+d}{3a} \right) + \left(\frac{3b}{c+d+a} + \frac{c+d+a}{3b} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{3c}{d + a + b} + \frac{d + a + b}{3c} \right) + \left(\frac{3d}{a + b + c} + \frac{a + b + c}{3d} \right) + \\
& + \frac{8}{3} \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) + \left(\frac{d}{a} + \frac{a}{d} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b} \right) \right] \geq
\end{aligned}$$

$$\geq 4.2 + \frac{8}{3} \cdot 6.2 = 8 + 32 = 40 \Rightarrow a = b = c = d \Rightarrow \text{semnul egal} \Rightarrow$$

$$\boxed{S \geq \frac{40}{3}}$$

* * * * *

249. Din cifrele 0, 1, 2, ..., 9 să se formeze cinci numere de câte două cifre fiecare cifră luată o singură dată încât produsul lor să fie maxim.

Soluție. Sintem siguri că în fiecare număr cifra mai mică ocupă locul unităților. Să arătăm că cifra zero urmează după 9. În adevăr,

$$(90 + a)(10b + 0) < 90(10b + a) \Rightarrow$$

$900b + 10ab < 900b + 90a$; $b < 9$ — adevărat deci unul din numere este 90.

Cifra 1 urmează după opt căci:

$$(80 + a)(10b + 1) < 81(10b + a) \Rightarrow$$

$$800b + 10ab + 80 + a < 810b + 81a \Rightarrow$$

$$10ab + 80 < 80a + 10b \Rightarrow$$

$$ab + 8 < 8a + b$$

$b(a - 1) < 8(a - 1)$, dar $b < 8$, deci este adevărat.

Raționind la fel în continuare, se găsește că numerele vor fi 90, 81, 72, 63, 54.

* * * * *

250. Care este maximul produsului numerelor naturale a căror sumă este egală cu un număr dat n ?

Soluție. Fie $m + s + p + \dots = n$.

1°. Nu trebuie să luăm numere mai mari ca 4 căci dacă am avea $m > 4 \Rightarrow 2m > 4 + m \Rightarrow 2(m - 2) > m$, deci am înlocui numărul m prin 2 și $m - 2$ și am putea mări produsul.

2°. Putem considera că nu avem numere egale cu 4 căci înlocuind pe 4 cu $2 + 2$ maximul rămâne același.

3°. Putem considera că nu avem mai mult de 2 numere egale cu 2 căci înlocuind 3 numere egale cu 2 prin 2 numere egale cu 3 obținem $3 \cdot 3 = 9 > 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, deci am putea mări produsul. Deci cel mult două numere sînt egale cu 2.

4°. Nu avem numere egale cu 1, cel puțin de am avea măcar unul, asociindu-l cu un q oarecare, deoarece $1 + q > 1 \cdot q$, putem mări produsul. Fie

$$n = 3k \Rightarrow \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k \text{ ori}} \text{ și maximul este } 3^k$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k-1 \text{ ori}}, 2 \text{ și maximul este } 4 \cdot 3^{k-1}$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{k \text{ ori}}, 2, \text{ și maximul este } 3^k \cdot 2$$

* * *

251. În care din punctele $x_1 = \log_5 4$, $x_2 = \log_5 6$ funcția $y = x + \frac{1}{x}$ are cea mai mare valoare?

Soluție. Evident, $x_1 = \log_5 4 < \log_5 5 = 1 < \log_5 6 = x_2$. Pe de altă parte,

$$x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 = \left(\frac{\log_5 4 + \log_5 6}{2} \right)^2 = \left(\frac{\log_5 24}{2} \right)^2 < \left(\frac{\log_5 5^2}{2} \right)^2 = 1,$$

de unde deducem $\frac{1}{x_1 x_2} > 1$, așa că

$$x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow x_2 - x_1 < \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \Rightarrow x_2 - x_1 < \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \Rightarrow$$

$$x_2 + \frac{1}{x_2} < x_1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

* * *

252. Să se afle cea mai mică valoare a expresiei $ax^n + \frac{b}{x^m}$, $x > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. (Problema de baraj).

Soluție. $ax^n + \frac{b}{x^m} = \underbrace{\frac{a}{m}x^n + \frac{a}{m}x^n + \dots + \frac{a}{m}x^n}_{m \text{ ori}} + \underbrace{\frac{b}{nx^m} + \frac{b}{nx^m} + \dots + \frac{b}{nx^m}}_{n \text{ ori}} \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\left(\frac{a}{m}x^n\right)^m \cdot \left(\frac{b}{nx^m}\right)^n} =$

$$= (m+n) \sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}, \text{ deci } ax^n + \frac{b}{x^m} \geq (m+n) \sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}.$$

* * * *

253. Dacă suma $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ este constantă, $x_i > 0$, atunci $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{N}$ este maxim cînd $\frac{x_1}{k_1} = \frac{x_2}{k_2} = \dots = \frac{x_n}{k_n}$.

Soluție.

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1} \frac{x_1}{k_1} \dots \frac{x_1}{k_1}}_{k_1 \text{ ori}} \cdot \underbrace{\frac{x_2}{k_2} \dots \frac{x_2}{k_2}}_{k_2 \text{ ori}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{x_n}{k_n} \dots \frac{x_n}{k_n}}_{k_n \text{ ori}} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \right)^{k_1 + k_2 + \dots + k_n}$$

și produsul va fi maxim cînd $\frac{x_1}{k_1} = \frac{x_2}{k_2} = \dots = \frac{x_n}{k_n}$.

* * * *

254. Să se afle minimul expresiei $2x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}}$.

Soluție. Să notăm $x = z^2$. Atunci, $2z^6 + \frac{3}{z} \geq 7 \sqrt[7]{\frac{2 \cdot 3^6}{1 \cdot 6^6}} =$

$$= 7 \sqrt[7]{\frac{1}{2^5}} = \frac{7}{\sqrt[7]{32}}.$$

Minim pentru $2z^6 = \frac{3}{6z}$, $z = \sqrt[7]{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{2}{7}}$, de unde $x = 2^{-\frac{4}{7}}$.

* * * * *

255. 1°. Fie $x, y > 0$ și $s = \min \left\{ x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \right\}$. Să se afle cea mai mare valoare a lui s și pentru care x, y are loc.

2°. Suma numerelor pozitive x_1, x_2, \dots, x_n este 1. Fie

$$s = \max \left\{ \frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n} \right\}.$$

Să se afle cea mai mică valoare a lui s și pentru care valori x_1, x_2, \dots, x_n are loc.

Soluție. 1°

$$\begin{cases} x \geq s, \\ y + \frac{1}{x} \geq s, \\ \frac{1}{y} \geq s. \end{cases}$$

$$x \geq s \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{s} \Rightarrow -\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{s},$$

$$y \geq s - \frac{1}{x} \geq s - \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{s}{s^2 - 1} \Rightarrow s \leq \frac{1}{y} \leq \frac{s}{s^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 \leq 2 \Rightarrow s \leq \sqrt{2} \Rightarrow \max s = \sqrt{2} \text{ are loc pentru } x = \sqrt{2}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2°. Așadar avem de calculat

$$\min \max \left\{ \frac{x_1}{1 + x_1}, \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n} \right\} = \min s.$$

Notăm

$$1 + x_1 \dots + x_k = y_k, z_k = \frac{x_k}{y_k} \Rightarrow 1 - z_k = 1 - \frac{x_k}{y_k} = \frac{y_{k-1}}{y_k} \Rightarrow 1 - z_k = \frac{y_{k-1}}{y_k}, y_0 = 1, y_n = 2.$$

Deoarece $z_k \leq s \Rightarrow -z_k \geq -s, 1 - z_k \geq 1 - s \Rightarrow \frac{y_{k-1}}{y_k} \geq 1 - s.$

Înmulțim toate inegalitățile: $\frac{y_0}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y_2} \dots \frac{y_{n-1}}{y_n} \geq (1 - s)^n \Rightarrow$

$\frac{1}{2} \geq (1 - s)^n \Rightarrow 2^{-\frac{1}{n}} \geq 1 - s \Rightarrow s \geq 1 - 2^{-\frac{1}{n}}$ deci $\min s = 1 - 2^{-\frac{1}{n}}$ și

este atinsă atunci când $\frac{y_{k-1}}{y_k} = 1 - s = 2^{-\frac{1}{n}}, \forall k$, căci $\frac{1}{y_k} = (1 - s)^k \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_k^{-1} = (1 - s)^k \Rightarrow y_k = (1 - s)^{-k} = 2^{\frac{k}{n}} \Rightarrow z_k = 1 - \frac{2^{\frac{k-1}{n}}}{2^{\frac{k}{n}}} =$$

$$= 1 - 2^{\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}} = 1 - 2^{-\frac{1}{n}} \Rightarrow x_k = 2^{\frac{k}{n}}(1 - 2^{-\frac{1}{n}}), (k = 1, \dots, n).$$

§ 18. SISTEME DE ECUAȚII ȘI DE INECUAȚII

1. SISTEME DE ECUAȚII

* *

256. Să se rezolve sistemul de ecuații: $\begin{cases} y = a - bx^2, \\ x = a - by^2. \end{cases}$

Soluție. $\begin{cases} y = a - bx^2 \\ x = a - by^2 \end{cases} \Rightarrow y - x = b(y^2 - x^2) \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = a - bx^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$bx^2 + x - a = 0, \text{ sau } \begin{cases} x + y = \frac{1}{b} \\ y = a - bx^2 \end{cases} \Rightarrow bx + ab - b^2x^2 = 1 \Rightarrow b^2x^2 - bx + 1 - ab = 0.$$

* * * * *

257. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 + 13z^2 = 12xy + 4xz + 6yz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 288. \end{cases}$$

Soluție. Prima ecuație se scrie

$$(3x - 2y)^2 + (y - 3z)^2 + (x - 2z)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases} \Rightarrow 8z^3 + 27z^3 + z^3 = 288; z^3 = \frac{288}{36} = \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow$$

$x = 4, y = 6, z = 2.$

* * * * *

258. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xz + yu = 7, \\ xz^2 + yu^2 = 11, \\ xz^3 + yu^3 = 19. \end{cases}$$

Soluție. Amplificând a doua și a treia ecuație cu $z + u$ și scăzându-le respectiv dintr-a treia și a patra, obținem :

$$\begin{cases} 7(z + u) - 5zu = 11 \\ 11(z + u) - 7zu = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + u = 3, \\ z - u = 2. \end{cases}$$

* * * * *

259. Știind că sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15, \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$$

are soluții reale satisfăcând inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 < 10$ să se găsească $x^5 + y^5 + z^5$ pentru aceste soluții. (R.D.G.)

Soluție. Fie

$$\begin{cases} P_1 = x + y + z = 3, \\ P_2 = xy + yz + zx, \\ P_3 = xyz, \end{cases} \begin{cases} S_1 = x + y + z = 3 = P_1 \\ S_2 = P_1^2 - 2P_2 < 10 \\ S_3 = P_1^3 - 3P_1P_2 + 3P_3 = 15 \\ S_4 = P_1^4 - 4P_1^2P_2 + 4P_1P_3 + 2P_2^2 = 35, \\ S_5 = P_1^5 - 5P_1^3P_2 + 5P_1^2P_3 + 5P_1P_2^2 - 5P_2P_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P_1 = 3, \\ 9 - 2P_2 < 10, \\ 81 - 36P_2 + 12P_3 + 2P_2^2 = 35 \\ 27 - 9P_2 + 3P_3 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2P_2^2 - 36P_2 + 12P_3 = -46 \\ 3P_2 - P_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_2^2 - 18P_2 + 18P_3 - 24 = -23 \Rightarrow P_2^2 = 1.$$

Așadar,

$$P_1 = 3; P_2 > -\frac{1}{2}, P_2^2 = 1 \Rightarrow P_2 = 1 \Rightarrow P_3 = -1 \Rightarrow$$

$$x^5 + y^5 + z^5 = 243 - 5 \cdot 27 - 5 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 5 = 243 - 135 - 45 + 15 + 5 = 83.$$

* * *

260. Să se rezolve sistemul în R :

$$\begin{cases} x^3y = 9, \\ 3x + y = 6. \end{cases}$$

Soluție. Se vede că $x > 0$, $y > 0$. Conform inegalității mediilor $\sqrt[4]{x^2y} \leq \frac{3x+y}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{3} \leq \frac{3}{2}$ fals. Deci sistemul nu are soluție în R .

261. Să se rezolve sistemul

$$(1) \quad \begin{cases} (x_1 + x_2 + x_3)x_4 = a, \\ (x_1 + x_2 + x_4)x_3 = a, \\ (x_1 + x_3 + x_4)x_2 = a, \\ (x_2 + x_3 + x_4)x_1 = a. \end{cases}$$

(Gazeta Matematică, 11, 1976, Problema nr. 16209, Problemă de baraj, Braşov, 1976).

Soluție. Adunând ecuațiile și simplificând obținem :

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 2a \Rightarrow$$

$$x_4(x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2a \Rightarrow \underbrace{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a,}_{(I)}$$

$$x_3(x_1 + x_2 + x_4) + x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 = 2a \Rightarrow x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 = a,$$

$$x_2(x_1 + x_3 + x_4) + x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 = 2a \Rightarrow x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 = a,$$

$$x_1(x_2 + x_3 + x_4) + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 2a \Rightarrow \underbrace{x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a,}_{(II)}$$

Scăzând din ecuația (I) ultima din sistemul (1) obținem

$$(2) \quad x_1x_4 = x_2x_3,$$

iar scăzând din a doua ecuație a sistemului (1) ecuația (II) rezultă

$$(3) \quad x_1x_3 = x_2x_4.$$

Din ecuațiile (2) și (3) obținem $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ sau $x_1 = -x_2$ și de asemenea $x_3 = x_4$ sau $x_3 = -x_4$ (se vede că $x_i \neq 0$ dacă $a \neq 0$).

Datorită simetriei deducem $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \sqrt{\frac{a}{3}}$ sau $x_1 = x_2 = -x_3 = -x_4 = -\sqrt{\frac{a}{3}}$.

262. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} ax^2 - bxy - cy + a = 0, \\ by^2 - axy - cx + b = 0. \end{cases}$$

Soluția 1.

$$\begin{cases} x(ax - by) - cy + a = 0, \\ -y(ax - by) - cx + b = 0. \end{cases}$$

Notind $ax - by = z$, sistemul devine

$$\begin{cases} xz - cy + a = 0 \\ -yz - cx + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = \frac{xz + a}{c} \Rightarrow -\frac{xz^2 + az}{c} - cx + b = 0 \Rightarrow z^2x + az + c^2x - bc = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{bc - az}{c^2 + z^2} \Rightarrow y = \frac{\frac{bcz - az^2}{c^2 + z^2} + a}{c} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-az^2 + bcz + ac^2 + az^2}{c(c^2 + z^2)} = \frac{bz + ac}{c^2 + z^2}.$$

$$ax - by = z \Rightarrow \frac{abc - a^2z^2 - b^2z - abc}{c^2 + z^2} = z \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{c}, \\ y = \frac{a}{c}, \end{cases} \text{ sau}$$

$$z^2 + a^2z + b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + c^2)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4bc - 2a[-a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + c^2)}]}{4c^2 + [-a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + c^2)}]^2},$$

$$y = \frac{4ac + 2b[-a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + c^2)}]}{4c^2 + [-a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + c^2)}]^2}.$$

Soluția 2. Sistemul trebuie considerat omogen în a, b, c ; îl scriem sub forma:

$$\begin{cases} a(x^2 + 1) - bxy = cy \\ -axy + b(y^2 + 1) = cx \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} cy & -xy \\ cx & y^2 + 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 + 1 & -xy \\ -xy & y^2 + 1 \end{vmatrix}} = cy, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} x^2 + 1 & cy \\ -xy & cx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 + 1 & -xy \\ -xy & y^2 + 1 \end{vmatrix}} = cx \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{b}{c}, \\ y = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

* * * *

263. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \\ xy = z^2 \end{cases}$$

(Problemă pentru concurs : Ungaria).

Soluție.

$$\begin{cases} (x + y)^2 = b^2 + z^2 \\ x + y = a - z \end{cases} \Rightarrow (a - z)^2 = b^2 + z^2 \Rightarrow a^2 - 2az + z^2 = b^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x + y = a - \frac{a^2 - b^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2}{2a} \\ xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2} - \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 - b^2}{a} \right) \left(\frac{a^2 + b^2}{2a} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2 - b^2}{a} \right) = \frac{a^2 + b^2 - 2a^2 + 2b^2}{2a} \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2a^2 - 2b^2}{2a} = \\ &= \frac{3b^2 - a^2}{2a} \cdot \frac{3a^2 - b^2}{2a} = \frac{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}{4a^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}, \quad y = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \\ &\quad \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a}, \quad z = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \end{aligned}$$

Rădăcinile sînt reale pentru $\frac{1}{\sqrt{3}} < \left| \frac{a}{b} \right| < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{3}} < |a| < |b| \sqrt{3}$.

* * * *

264. Într-o cameră sînt oameni, cîini și muște, în total 10. În ce număr se află viețile dacă picioarele sînt în număr de 46?
(Problemă de baraj).

Soluție.

$$\begin{cases} x + y + z = 10, \\ 2x + 4y + 6z = 46 \end{cases}$$

și deci avem sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 23 \end{cases} \Rightarrow y + 2z = 13 \Rightarrow y + z \leq 10$$

asa că perechile (y, z) pot fi următoarele: $(7,3)$, $(1,6)$, $(3,5)$, $(5,4)$ și prin urmare $(0, 7, 3)$, $(3, 1, 6)$, $(2, 3, 5)$, $(1, 5, 4)$.

* *

265. Să se rezolve sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} y = a - bx^2, \\ x = a - by^2. \end{cases}$$

Soluție. Scăzînd cele două ecuații membru cu membru, obținem

$$(1) \quad y - x = b(y^2 - x^2),$$

care, ținînd seama de sistemul inițial, implică

$$\begin{cases} y = x \\ y = a - bx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ bx^2 + x - a = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4ab}}{2b}.$$

În ipoteza $y \neq x$, din ecuația (1), simplificînd prin $y - x$, deducem $b(x + y) = 1$ și deci, în virtutea sistemului inițial,

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{b} \\ y = a - bx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{b}, \\ bx + ab - b^2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{b}, \\ b^2x^2 - bx + 1 - ab = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{4ab - 3}}{2b}, \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{4ab - 3}}{2b}. \end{cases}$$

* * * * *

266. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2 + x + 1)y^2z^2, \\ y^2(x+z)^2 = (4y^2 + y + 1)x^2z^2, \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2 + z + 1)x^2y^2. \end{cases}$$

Soluție. Avem evident în primul rind următoarele sisteme de soluții :

$$\begin{cases} x = y = 0, \\ z \text{ arbitrar,} \end{cases} \quad \begin{cases} x = z = 0, \\ y \text{ arbitrar,} \end{cases} \quad \begin{cases} y = z = 0, \\ x \text{ arbitrar.} \end{cases}$$

Rezultă de asemenea că dacă x, y sau $z = 0$, atunci numai decît și una din celelalte două trebuie să se anuleze. În continuare, vom presupune $x, y, z \neq 0$. Atunci, împărțind ecuațiile sistemului prin $x^2y^2z^2$, obținem

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 3 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 4 \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 5 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 12.$$

Notînd $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = t$, ecuația precedentă devine $t^2 - t - 12 = 0$,

care are rădăcinile $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$, adică $\begin{cases} t_1 = 4, \\ t_2 = -3. \end{cases}$

Dar atunci, din ecuația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$, deducem $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 -$

$-\frac{1}{x}$ și prima ecuație a sistemului implică

$$\left(4 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 3,$$

care, notînd $\frac{1}{x} = u$, devine de forma

$$(4 - u)^2 = u + u^2 + 3 \Rightarrow 16 - 8u + u^2 = u + u^2 + 3 \Rightarrow u = \frac{13}{9} \Rightarrow$$

$$x = \frac{9}{13}.$$

A doua ecuație a sistemului devine

$$\left(4 - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 4,$$

sau, notînd $\frac{1}{y} = v$,

$$(4 - v)^2 = v + v^2 + 4 \Rightarrow v = \frac{1}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{4}.$$

A treia ecuație se scrie

$$\left(4 - \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + 5,$$

sau, în notația $\frac{1}{z} = w$,

$$(4 - w)^2 = w + w^2 + 5 \Rightarrow w = \frac{1}{z} = \frac{11}{9} \Rightarrow z = \frac{9}{11},$$

Așadar un sistem de soluții este și următorul

$$\begin{cases} x = \frac{9}{13}, \\ y = \frac{3}{4}, \\ z = \frac{9}{11}. \end{cases}$$

Raționind ca mai sus și cu aceleași notații, în cazul $t_2 = -3$, obținem

$$(-3 - u)^2 = u + u^2 + 3 \Rightarrow 9 + 6u + u^2 = u + u^2 + 3 \Rightarrow$$

$$u = -\frac{6}{5} \Rightarrow x = -\frac{5}{6},$$

$$(-3 - v)^2 = v + v^2 + 4 \Rightarrow 9 + 6v + v^2 = v + v^2 + 4 \Rightarrow$$

$$v = -\frac{5}{6} \Rightarrow y = -1,$$

$$(-3 - w)^2 = w + w^2 + 5 \Rightarrow 9 + 6w + w^2 = w + w^2 + 5 \Rightarrow$$

$$w = -\frac{4}{5} \Rightarrow z = -\frac{5}{4}.$$

Așadar, mai avem și sistemul de soluții

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{6}, \\ y = -1, \\ z = -\frac{5}{4}. \end{cases}$$

267. Să se elimine x și y din ecuațiile

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^2 + y^2 = b, \\ x^3 + y^3 = c. \end{cases}$$

Soluție. Se folosește $(x + y)^3 = 3(x + y)(x^2 + y^2) - 2(x^3 + y^3)$.

268. Să se elimine a , b , c din sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a + b + c = 1. \end{cases}$$

Soluție. Se pune $\frac{x}{a} = \lambda$, se ajunge la $xy + yz + zx = 0$.

* * * *

269. Să se afle cîte soluții reale are sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$$

unde a, b sînt numere reale. (Exercițiu de concurs).

Soluție. Punînd

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases} \Rightarrow xy = \frac{u^2 - v^2}{4},$$

sistemul devine

$$\begin{cases} u^2 - \frac{u^2 - v^2}{4} = a \\ uv = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u^2 + v^2 = 4a, \\ uv = b. \end{cases}$$

1° Dacă $a < 0$ nu avem soluții reale,

2° Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$ incompatibil,

3° Dacă $a = 0$ și $b = 0$ numai soluția $(0, 0)$.

4° Fie $a > 0$.

Punem $\begin{cases} \sqrt{3}u = w \\ v = v \end{cases}$ și obținem sistemul $\begin{cases} w^2 + v^2 = 4a, \\ w^2 v^2 = 3b^2. \end{cases}$

Există soluții reale numai dacă $16a^2 - 12b^2 \geq 0 \Rightarrow 3b^2 \leq 4a^2 \Rightarrow -2a \leq \sqrt{3}b \leq 2a$, și anume

$$w^2, v^2 = +2a \pm \sqrt{4a^2 - 3b^2} \Rightarrow w^2 = 2a + \sqrt{4a^2 - 3b^2}, \quad v^2 = 2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2} \Rightarrow w = \pm \sqrt{2a + \sqrt{4a^2 - 3b^2}}, \quad v = \pm \sqrt{2a - \sqrt{4a^2 - 3b^2}}.$$

Avem deci patru soluții. Dacă avem semnul egal în $-2a \leq b\sqrt{3} \leq 2a$ atunci soluțiile se reduc la două.

* * * *

271. Știind că m, n, p sînt numere diferite legate de a, b, c, d ($a \neq 0, d \neq 0$) prin relațiile :

$$\begin{cases} am^3 + bm^2 + cm + d = 0, \\ an^3 + bn^2 + cn + d = 0, \\ ap^3 + bp^2 + cp + d = 0, \end{cases}$$

să se calculeze suma $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$.

Soluție. m, n, p sînt rădăcinile ecuației $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$.

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3}{t_1t_2t_3} = \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}} = -\frac{c}{d}.$$

* * *

272. Să se rezolve inegalitatea : $x[x] \geq 4^{\lceil \log_2 x \rceil}$.

Soluție. $x \in (0, 1) \Rightarrow x[x] = 0, 4^{\lceil \log_2 x \rceil} > 0$ imposibil.

$$x \geq 1 \Rightarrow x = 2^k \cdot 2^\alpha, \alpha \in [0, 1) \Rightarrow$$

$$2^k \leq [x] \leq x = 2^{k+\alpha} \Rightarrow$$

$$k \leq \log_2 [x] \leq \log_2 x = k + \alpha \Rightarrow [\log_2 x] = k \Rightarrow$$

$$\log_2 x + \log_2 [x] \geq k + \alpha + k \Rightarrow x[x] \geq 2^{2k} = 2^{2[\log_2 x]} = 4^{\lceil \log_2 x \rceil}$$

adică

$$x[x] \geq 4^{\lceil \log_2 x \rceil}.$$

2. SISTEME DE INECUAȚII

273. Să se determine punctele din plan, care verifică următorul sistem de inecuații :

$$\begin{cases} y > 2^x - 1, \\ y < 2, \\ x > -1. \end{cases}$$

Soluție. Fie $f(x) = 2^x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2^x \log 2 > 0$, iar tabelul de variație a funcției f și a derivatei sale va fi:

x	-1	0	∞
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow 0$	$\nearrow \infty$
$f'(x)$	+	+	+

Mulțimea de puncte solicitată este dată de figura 30.

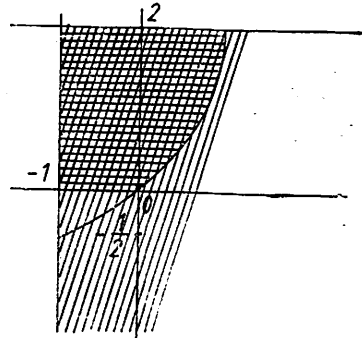


Fig. 30.

* * * * *

274. Să se afle soluțiile sistemului de inegalități

$$(1) \begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0, \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0, \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0, \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0, \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_6^2 - x_2x_4) \leq 0. \end{cases}$$

Soluție. Se vede că $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a$ este soluție. Deoarece permutând circular x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sistemul nu se schimbă, putem presupune că $x_1 \geq x_i$ ($i = 1, 5$). Vom avea deci $\begin{cases} x_1^2 - x_3x_5 \geq 0, \\ x_1^2 - x_2x_4 \geq 0 \end{cases}$ și prin urmare $\begin{cases} x_2^2 - x_3x_5 \leq 0, \\ x_3^2 - x_2x_4 \leq 0. \end{cases}$ De aici rezultă că nici x_2 nici x_5

nu pot fi elemente maximale printre x_2, x_3, x_4, x_5 . Într-adevăr, în cazul $x_1 \geq x_2 \geq x_k$ ($k = 3, 4, 5$), $x_2^2 - x_3x_5 \leq 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = x_5 \geq x_4$, care ținând seama de $x_3^2 - x_2x_4 \leq 0$, ar da $x_4 = x_5$, și deci $x_1 \geq x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, iar inecuația a doua din sistemul (1) ar implica $x_1^2 - x_2x_4 \leq 0 \Rightarrow x_2 = x_4 = x_5$. În celălalt caz, $x_1 \geq x_5 \geq x_k$ ($k = 2, 3, 4$), $x_5^2 - x_2x_4 \leq 0 \Rightarrow x_2 = x_4 = x_5$, iar $x_2^2 - x_3x_5 \leq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, iar a doua inecuație din (1) ar da $x_1^2 - x_2x_4 \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Să presupunem, așadar, $x_1 \geq x_3 \geq x_k$ ($k = 2, 4, 5$) și deci $x_1x_3 \geq x_4^2$, $x_1x_3 \geq x_5^2$. Dar atunci, inecuația a patra din (1) ar da $x_1x_3 = x_4^2 = x_5^2 \Rightarrow x_1 = x_3 = x_4 = x_5$, iar inecuația a treia din (1), ar implica $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

În sfârșit, în cazul $x_1 \geq x_4 \geq x_k$ ($k = 2, 3, 5$), ar rezulta $x_1x_4 \geq x_2^2$, $x_1x_4 \geq x_3^2$, iar inecuația a doua din (1) ar da $x_1x_4 = x_2^2 =$

$= x_3^2 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, iar din inecuația a cincea a sistemului (1), am deduce $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

* * * * *

275. Fie a_1, a_2, \dots, a_n pozitive și $0 < q < 1$. Să se afle b_1, b_2, \dots, b_n așa fel încît

$$1^\circ. a_k < b_k, k = 1, 2, \dots, n,$$

$$2^\circ. q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}, k = 1, \dots, n-1,$$

$$3^\circ. b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

(Olimpiadă : Suedia, 8 puncte).

Soluție. Putem lua drept b_k :

$$b_k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + \dots + a_n q^{n-k}$$

Condiția 1° este verificată.

$1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2 - 1) + \dots + a_n q^{n-k-1}(q^2 - 1) < 0$
și analog $qb_{k+1} - b_k < 0$, deci este îndeplinită condiția 2°. În sfârșit

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_n &= a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \dots + a_n q^{n-1} + a_1 q + \\ &+ a_2 q + a_3 q^2 + \dots + a_n q^{n-2} + \dots + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + \dots, \\ \dots + a_n &< (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (1 + 2q + 2q^2 + \dots + 2q^{n-1}) \leq \\ &\leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \frac{1+q}{1-q}, \end{aligned}$$

deci este îndeplinită și condiția 3°.

§ 19. LOGICĂ MATEMATICĂ

276. Maria, Lena, Jeny și Katy cîntă la cîte un instrument diferit (violoncel, pian, chitară și vioară); de asemenea cunosc limbă străină diferite (engleză, franceză, germană, spaniolă) și numai una.

Se știe :

- 1° *Cea care cântă la chitară vorbește spaniola.*
- 2° *Lena nu cântă nici la vioară nici la violoncel și nu știe englezește.*
- 3° *Maria nu cântă nici la vioară, nici la violoncel și nu știe engleza.*
- 4° *Cea care știe germana nu cântă la violoncel.*
- 5° *Jeny știe franceza și nu cântă la vioară.*

La ce instrument și ce limbă străină știe fiecare. (Două soluții).

Maria nu cântă nici la vioară, nici la violoncel și nu știe englezește, dar nici franțuzește (pentru că Jeny știe franțuzește). Lena la fel ca Maria.

Jeny știe franceza și cântă la violoncel, deoarece Maria și Lena (împreună) cântă la chitară și pian și vorbesc germana și spaniola.

Katy știe englezește și cântă la vioară, deoarece celelalte 3 (împreună) vorbesc celelalte limbi și cântă la celelalte instrumente. Singurele nedeterminări care rămân sînt referitoare la Maria și Lena :

I. Dacă Maria cântă la chitară, atunci (conform ipotezei) ea va vorbi spaniola, iar Lena va vorbi germana și va cînta la pian.

II. Dacă Maria cântă la pian, ea va vorbi germana, iar Lena va vorbi spaniola și va cînta la chitară.

Capitolul III

TRIGONOMETRIE

§ 1. INEGALITĂȚI

Începem acest paragraf cu deducerea unor inegalități trigonometrice utile.

INEGALITĂȚI TRIGONOMETRICE ÎNTR-UN TRIUNGHI

$$1^\circ \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Se știe că } \sin A + \sin B + \sin C &= \sin A + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \\ &= \sin A + 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}. \end{aligned}$$

Presupunind A constant, cum $\cos \frac{A}{2} \geq 0$, vom avea maximum pentru $B = C$. Analog, $A = B$, deci maximum va fi obținut pentru triunghiul echilateral și prin urmare $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$2^\circ \sin A \sin B \sin C \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La începutul paragrafului relativ la inegalități de la capitolul de probleme de algebră, sau la aplicația 15° a inegalității lui Jensen, s-a arătat că media geometrică este cel mult egală cu cea aritmetică.

În particular, vom avea: $\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \leq \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2^\circ$.

$$3^\circ \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \sin^2 A + (\sin B + \sin C)^2 - 2 \sin B \sin C = \\ &= \sin^2 A + 4 \sin^2 \frac{B+C}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} + \cos(B+C) - \cos(B-C) = \\ &= \sin^2 A + 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B-C}{2} - \cos A - 2 \cos^2 \frac{B-C}{2} + 1 = \\ &= 1 + \sin^2 A - \cos A + 2 \cos^2 \frac{B-C}{2} \left(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = \\ &= 1 + \sin^2 A - \cos A + 2 \cos A \cos^2 \frac{B-C}{2}. \end{aligned}$$

Maximul va fi pentru un A dat, atunci cînd $B = C$ și analog pentru $A = B$, deci cînd triunghiul va fi echilateral, așa că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 3 \sin^2 60^\circ = \frac{9}{4}$.

$$4^\circ 1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \cos A + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \\ &= \cos A + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \text{ are maxim pentru } B=C \text{ și prin urmare} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Pe de altă parte însă,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \\ (2) \quad &= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right) = \\ &= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

4° Cum $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 0$, și, ținând seama și de (1), $\Rightarrow 4^\circ$.

5° $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$. Rezultă din (2) și (1).

6° $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, căci, ținând seama de 1° ;

$$4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$7^\circ \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

Din (1) și inegalitatea dintre media geometrică și cea aritmetică, rezultă $\sqrt[3]{\cos A \cos B \cos C} \leq \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 7^\circ$.

$$8^\circ \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \sqrt{3}.$$

Din inegalitatea $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ (un caz particular al inegalității lui Cauchy) deducem că

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} &\leq \sqrt{3 \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right)} = \\ &= \sqrt{3 \left(\frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} (3 - \cos A - \cos B - \cos C)} \leq \sqrt{\frac{3}{2} (3 - 1)} = \sqrt{3} \Rightarrow 8^\circ. \end{aligned}$$

$$9^\circ abc \leq (b + c - a)(a - b + c)(a + b - c).$$

$$(b - c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 \Rightarrow a^2 \geq (a - b + c)(a + b - c),$$

$$(c - a)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq b^2 - (c - a)^2 \Rightarrow b^2 \geq (b - c + a)(b + c - a),$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 \Rightarrow c^2 \geq (c - a + b)(c + a - b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq (a - b + c)^2 (a + b - c)^2 (c + a - b)^2 \Rightarrow 9^\circ.$$

$$10^\circ \quad 4 \sin A \sin B \sin C \leq \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Notind $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ și $R = \frac{abc}{4S}$, unde S este aria
 triunghiului, $9^\circ \Rightarrow abc \geq 2(p-a)2(p-b)2(p-c) \Rightarrow pabc \geq 8p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow p4RS \geq 8S^2 \Rightarrow R(\sin A + \sin B + \sin C)4R \geq$
 $\geq 8 \frac{ab \sin C}{2} = 4 \sin C 4R^2 \sin A \sin B \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \geq$

$$\geq 4 \sin A \sin B \sin C.,$$

care, ținând seama și de 1° , $\Rightarrow 10^\circ$.

$$11^\circ \quad \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}.$$

Din 3° , rezultă $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 3 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \geq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

$$12^\circ \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}. \quad \text{Ținând seama de } 4^\circ,$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(3 - \cos A - \cos B - \cos C) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

$$13^\circ \quad \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 3 - \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}\right) \geq 3 - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}.$$

PROBLEME

* * * * *

1. Să se demonstreze inegalitatea

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha}\right) > 1, \quad \forall x, \alpha \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}\right).$$

Soluție.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} < \sin \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sin \alpha} < 2 \\ \frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\cos \alpha} < 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} < \frac{\pi}{2} \sin x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq \frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} < \frac{\pi}{2} \cos x < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

și prin urmare ambele tangente sînt pozitive. Dacă $x < \alpha$, atunci

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} \right) \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} \right) > 1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha} \right).$$

Dacă $x = \alpha$, atunci

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} \right) = 2 > 1.$$

Dacă $x > \alpha$, atunci

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} \right) \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} \right) > 1 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha} \right).$$

* * *

2. Să se arate că pentru $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3} \leq \beta < \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{2}{\cos \alpha + \cos \beta} - 1 \leq \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right)}.$$

Soluție

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \in \left(0, \frac{1}{2} \right] \\ \cos \beta \in \left(0, \frac{1}{2} \right] \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \cos \alpha \Rightarrow \cos \beta \in (0, 1] \\ b = \cos \alpha \cos \beta \in \left(0, \frac{1}{4} \right] \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\frac{2}{a} - 1 \leq \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)}{b}}; \quad \frac{2 - a}{a} \leq \sqrt{\frac{1 - a + b}{b}} \Rightarrow$$

$$\frac{(2 - a)^2}{a^2} \leq \frac{1 - a + b}{b} \Rightarrow (a - 1)(a^2 - 4b) \leq 0 \text{ căci}$$

$$a^2 - 4b = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 - 4 \cos \alpha \cos \beta = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 \geq 0$$

și $a - 1 \leq 0$.

* * *

$$3. E = \cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leq \frac{3}{2} \quad (A + B + C = 180^\circ)$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție } E &= 2 \cos(A + B) \cos(A - B) + 1 - 2 \cos^2(A + B) = \\ &= -2[\cos^2(A + B) - \cos(A + B) \cos(A - B)] + 1 = -2 \left[\cos^2(A + B) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cos(A - B) \right]^2 + \frac{1}{2} \cos^2(A - B) + 1 \leq \frac{1}{2} + 1. \end{aligned}$$

Rezultă că $E \leq \frac{3}{2}$. Egalitate pentru

$$\cos(A - B) = \pm 1;$$

$$\cos(A + B) = \frac{1}{2} \cos(A - B)$$

adică $A = B \Rightarrow \cos 2A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2A = 60^\circ \Rightarrow A = 30^\circ; B = 30^\circ; C = 120^\circ$.

* * * *

4. Să se arate că pentru α -ascuțit avem :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin^n \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos^n \alpha}\right) (1 + 2^{n/2})^2$$

Soluție. Știm că

$$a^n + b^n \geq 2(ab)^{n/2} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin^n \alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos^n \alpha}\right) = 1 + \frac{1}{\sin^n \alpha} \diamond$$

$$\begin{aligned} \diamond \frac{1}{\cos^n \alpha} + \frac{1}{\sin^n \alpha \cos^n \alpha} &\geq 1 + 2 \cdot \frac{1}{(\sin \alpha \cos \alpha)^{n/2}} + \frac{1}{\sin^n \alpha \cos^n \alpha} = \\ &= \left[1 + \frac{1}{(\sin \alpha \cos \alpha)^{n/2}}\right]^2 = \left[1 + \frac{2^{n/2}}{(\sin 2\alpha)^{n/2}}\right]^2 \geq (1 + 2^{n/2})^2 \end{aligned}$$

* * * * *

5. Dacă x, y, z sînt unghiuri ascuțite ale unui triunghi, să se arate că

$$\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n z \geq 3\sqrt[3]{3^n}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} - \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \\ &= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y \cos(x+y)} \cdot [\cos(x+y) - \cos x \cos y] = \\ &= \frac{\sin z}{-\cos x \cos y \cos z} (-\sin x \sin y) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z, \end{aligned}$$

deci

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z &\geq \sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} \Rightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \geq \\ &\geq \sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} \Rightarrow \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^3 y \operatorname{tg}^3 z \geq 3^3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \geq \sqrt{3^3} \Rightarrow \operatorname{tg}^n x \operatorname{tg}^n y \operatorname{tg}^n z \geq \sqrt{3^{3n}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n z \geq \sqrt[3]{\operatorname{tg}^n x \operatorname{tg}^n y \operatorname{tg}^n z} \geq \sqrt[6]{3^{3n}} = 3\sqrt{3^n}.$$

* * * * *

6. Să se arate fără tabele că $\operatorname{tg} 11^\circ < 0,2$.

Soluție. Fie α așa încît $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$. Atunci :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{0,4}{1 - 0,04} = \frac{40}{96} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} > 1 = \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow 4\alpha > 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha > 11^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 11^\circ < \operatorname{tg} \alpha = 0,2 \Rightarrow \operatorname{tg} 11^\circ < 0,2.$$

* * * * *

7. Să se demonstreze inegalitatea

$$(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n)^2 \leq n^2.$$

Soluție. Din inegalitatea lui Cauchy $(\sum a_i b_i)^2 \leq \sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2$, obținem :

$$\left. \begin{aligned} (\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 &\leq n(\sin^2 \alpha_1 + \dots + \sin^2 \alpha_n) \\ (\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n)^2 &\leq n(\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_n) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n)^2 \leq n^2.$$

* * * * *

8. Să se demonstreze că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 9/4$.
Ce devine inegalitatea dacă se înlocuiesc unghiurile cu laturile?
Soluție.

$$\frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{9}{2} \leq \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \Rightarrow 2 \cos^2 A - 1 +$$

$$+ 2 \cos(B + C) \cos(B - C) \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow 4 \cos^2 A -$$

$$- 4 \cos A \cos(B - C) - 2 \geq -3 \Rightarrow [2 \cos A - \cos(B - C)]^2 -$$

$$- \cos^2(B - C) + 1 \geq 0 \Rightarrow [2 \cos A - \cos(B - C)]^2 + \sin^2(B - C) \geq 0$$

evident. Avem egalitate pentru $B = C$ și $\cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow$ triunghiul echilateral. Cu laturi, inegalitatea devine :

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

* * *

9. Să se arate că $7^7 \sin^4 \alpha \cos^{10} \alpha \leq 12500$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție. Aplicînd faptul că media geometrică este cel mult egală cu cea aritmetică, obținem

$$\begin{aligned} 7^7 \sin^4 \alpha \cos^{10} \alpha &= 7^7 \cdot \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2}\right)^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{5}\right)^5 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \leq \\ &\leq 7^7 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \frac{\left(2 \frac{\sin^2 \alpha}{2} + 5 \frac{\cos^2 \alpha}{5}\right)^7}{7^7} = 2^2 \cdot 5^5 = 12500. \end{aligned}$$

Egalitate pentru $\frac{\sin^2 \alpha}{2} = \frac{\cos^2 \alpha}{5} \Rightarrow \alpha = \arctg \sqrt{2/5}$.

* *

10. Să se arate că $\sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha < 2$.

Soluție.

$$\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \leq \sqrt{2}, \\ \sin \alpha \cos \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2.$$

*

11. Dacă $x, y > 0$ și $x + y \leq \frac{\pi}{2}$ să se arate că $(\cos x)^{\sin y} + (\cos y)^{\sin x} > 1$ (Gazeta Matematică 4, 1977, Problema nr. 16624).

Soluție. Din $x + y \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{2} - y \Leftrightarrow \sin x \leq \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ deci $\sin x \leq \cos y \Rightarrow \sin^2 x \leq \cos^2 y \Rightarrow -\sin^2 x \geq -\cos^2 y$.

Avem că :

$$\begin{aligned} & (\cos x)^{\sin y} + (\cos x)^{\sin x} - \sin^2 x - \cos^2 x / (\cos x)^{\sin y} \rightarrow \\ & + (\cos y)^{\sin x} - \cos^2 y - \cos^2 x = (\cos x)^{\sin y} [1 - (\cos x)^{2-\sin y}] \rightarrow \\ & + (\cos y)^{\sin x} [1 - (\cos y)^{2-\sin x}] > 0 \end{aligned}$$

și prin urmare

$$(\cos x)^{\sin y} + (\cos y)^{\sin x} > \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

12. Să se verifice inegalitatea

$$\left(\sin^{2n} x + \frac{1}{\sin^{2n} x} \right) \left(\cos^{2n} x + \frac{1}{\cos^{2n} x} \right) \geq \left(2^n + \frac{1}{2^n} \right)^2.$$

(Gazeta Matematică 9, 1976, Problema nr. 16077).

Soluție.

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin^{2n} x + \sin^{-2n} x)(\cos^{2n} x + \cos^{-2n} x) \Rightarrow \\ f'(x) &= (2n \sin^{2n-1} x \cos x - 2n \sin^{-2n-1} \cos x)(\cos^{2n} x + \cos^{-2n} x) \rightarrow \\ & + (-2n \cos^{2n-1} x \sin x + 2n \cos^{-2n-1} x \sin x)(\sin^{2n} x + \sin^{-2n} x) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\sin^{2n-1} x - \frac{1}{\sin^{2n+1} x} \right) \left(\cos^{2n+1} x + \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \right) - \\ & - \left(\sin^{2n+1} x + \frac{1}{\sin^{2n-1} x} \right) \left(\cos^{2n-1} x - \frac{1}{\cos^{2n+1} x} \right) = 0 \\ & \frac{(\sin^{4n} x - 1)(\cos^{4n} x + 1)}{\sin^{2n+1} x \cos^{2n-1} x} = \frac{(\sin^{4n} x + 1)(\cos^{4n} x - 1)}{\sin^{2n-1} x \cos^{2n+1} x} \Rightarrow \\ & \frac{(\sin^{4n} x - 1)(\cos^{4n} x + 1)}{\sin^2 x} = \frac{(\sin^{4n} x + 1)(\cos^{4n} x - 1)}{\cos^2 x} \Rightarrow \\ & \frac{\sin^{4n} x - 1}{\sin^2 x (\sin^{4n} x + 1)} = \frac{\cos^{4n} x - 1}{\cos^2 x (\cos^{4n} x + 1)}; \end{aligned}$$

să notăm,

$$\begin{cases} \sin^2 x = t, & t \in [0, 1], \\ \cos^2 x = 1 - t, \end{cases}$$

$$y = \frac{t^{2n} - 1}{t(t^{2n} + 1)} \Rightarrow y' = \frac{2nt^{2n-1}(t^{2n+1} + t) - [(2n+1)t^{2n} + 1](t^{2n} - 1)}{t^2(t^{2n} + 1)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2nt^{4n} + 2nt^{2n} - 2nt^{4n} - t^{4n} - t^{2n} + 2nt^{2n} + t^{2n} + 1}{t^2(t^{2n} + 1)^2} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{t^{4n} - 4nt^{2n} - 1}{t^2(t^{2n} + 1)^2}; \quad y' = 0 \Rightarrow t^{2n} = 2n \pm \sqrt{4n^2 + 1} \Rightarrow$$

$$t^{2n} = 2n + \sqrt{4n^2 + 1} \Rightarrow t = \sqrt[2n]{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}$$

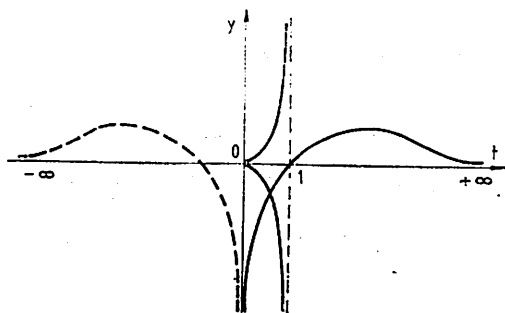


Fig. 31.

Facem reprezentarea grafică a lui $y(t)$:

t	0	$\sqrt{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}$	$+\infty$
y'	+	0	0
y	$-\infty$	\nearrow	\searrow 0

Reprezentarea grafică a lui $y_1 = \frac{(1-t)^{2n} - 1}{(1-t)[(1-t)^{2n} + 1]}$ se obține din cea a lui y înlocuind pe t în $-t$ și apoi efectuând o translație de o unitate (fig. 31). Aceasta revine la a lua curba simetrică cu axa y -ilor și apoi a o deplasa cu o unitate spre dreapta. Dat fiind că $f'(x) = y(t) - y_1(t)$, din grafic rezultă că în punctul x_0 în care

$f'(x) = 0$ și care corespunde punctului t_0 în care $y(t) = y_1(t)$, este un punct de minimum pentru $f(x)$, căci $y(t) - y_1(t) < 0$ pentru $0 < t < t_0$ și $y(t) - y_1(t) > 0$ pentru $t_0 < t \leq 1$. Acest punct t_0 este dat de condiția evidentă $t = 1 - t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \cos x = \frac{1}{2}$. Dar $f(x_0) = \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

* * * * *

13. Dacă pentru orice x avem că $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \geq -1$, atunci numerele a_1, a_2, \dots, a_n satisfac inegalitatea: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$. Să se dovedească această afirmație pentru $n = 2, n = 3$ și $\forall n$.

Soluție. Pentru $n = 2$, avem că $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x \geq -1$. Facem $x = \frac{2\pi}{3}$: $a_1 \cos \frac{2\pi}{3} + a_2 \cos \frac{4\pi}{3} \geq -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 \geq -1 \Rightarrow a_1 + a_2 \leq 2$. Pentru $n = 3$, facem $x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 \cdot 0 - a_2 + a_3 \cdot 0 \geq -1 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \geq -1 \Rightarrow -a_1 - a_2 - a_3 \geq -3 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 \leq 3. \\ a_1 \cdot 0 - a_2 + a_3 \cdot 0 \geq -1 \end{cases}$$

Pentru cazul general, să stabilim în prealabil următoarea

Lemă. Dacă $\varphi = \frac{2k\pi}{n+1}$, atunci $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi = -1$.

Fie date punctele O și A_0 . Rotim pe OA_0 în jurul lui O succesiv cu $\varphi = \frac{2K\pi}{n+1}$ obținând A_1, A_2, \dots . Deoarece $(n+1)\varphi = 2K\pi$ punctul

A_{n+1} coincide cu A_0 . Suma vectorilor $\overline{OA_0}, \overline{OA_1}, \dots, \overline{OA_n}$ este nulă căci rotind pe fiecare cu φ și suma trebuie să se rotească cu φ , dar pe de altă parte rămâne aceeași, căci $A_0 \rightarrow A_1, A_1 \rightarrow A_2, \dots, A_n \rightarrow A_0$. Presupunind că $\overline{OA_0}$ are proiecția 1 pe AO , $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n}$ va avea proiecția -1 și prin urmare $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = -1$. Demonstrăm afirmația pentru n . Fie x_1 și $x_n = ix_1$.

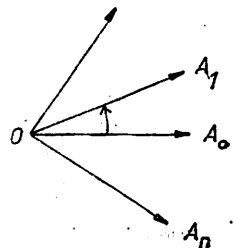


Fig. 32.

Avem adevărate inegalitățile

$$\begin{aligned} a_1 \cos x_1 + a_2 \cos 2x_1 + \dots + a_n \cos nx_1 &\geq -1, \\ a_1 \cos x_2 + a_2 \cos 2x_2 + \dots + a_n \cos nx_2 &\geq -1, \\ \dots &\dots \\ a_1 \cos x_n + a_2 \cos 2x_n + \dots + a_n \cos nx_n &\geq -1. \end{aligned}$$

Dar $kx_1 = kx_1 = lkx_1 = lx_k$ și deci :

$$\begin{aligned} a_1 \cos x_1 + a_2 \cos x_2 + a_3 \cos x_3 + \dots + a_n \cos x_n &\geq -1, \\ a_1 \cos 2x_1 + a_2 \cos 2x_2 + a_3 \cos 2x_3 + \dots + a_n \cos 2x_n &\geq -1, \\ a_1 \cos 3x_1 + a_2 \cos 3x_2 + a_3 \cos 3x_3 + \dots + a_n \cos 3x_n &\geq -1, \\ \dots &\dots \\ a_1 \cos nx_1 + a_2 \cos nx_2 + a_3 \cos nx_3 + \dots + a_n \cos nx_n &\geq -1. \end{aligned}$$

Punind $x_1 = \frac{2\pi}{n+1}$, pe baza formulei stabilite ajungem la $-a_1 - a_2 \dots$
 $\dots - a_n \geq -n \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n$

§ 2. IDENTITĂȚI

* * * * *

14. Să se arate că pentru orice $n > 1$ este adevărată identitatea
 $\sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin \left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin \left[x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right] = C_n \sin nx$,
 unde C_n este un număr depinzând de n și să se determine apoi C_n .
 Soluție. Vom stabili în prealabil următoarea

Lemă. $\sin nx = \sin x A_n(\cos x)$, unde $A_n(x)$ este polinom de gradul $n - 1$ cu primul coeficient 2^{n-1} ; $\cos nx = B_n(\cos x)$, unde $B_n(x)$ e polinom de grad n cu primul coeficient 2^{n-1} .

Etapa verificării : $\begin{cases} \sin x = \sin x; \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \\ \cos x = \cos x; \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1. \end{cases}$

Inducție. Să presupunem că lema-i adevărată pentru $n = k$.
 Atunci $\sin(k+1)x = \sin x \cos kx + \cos x \sin kx = \sin x B_k(\cos x) +$
 $+ \cos x \sin x A_k(\cos x) = \sin x [B_k(\cos x) + \cos x A_k(\cos x)],$
 $\cos(k+1)x = \cos x \cos kx - \sin x \sin kx = \cos x \cdot B_k(\cos x) -$
 $\sin^2 x A_k(\cos x) = \cos x B_k(\cos x) + (\cos^2 x - 1) A_k(\cos x).$

Rezultă că $A_{k+1}(x) = B_k(x) + xA_k(x)$ și $B_{k+1}(x) = xB_k(x) + (x^2 - 1)A_k(x)$, care sînt polinoame cu primii coeficienți $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$. Lema este demonstrată.

$$\text{Fie } f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left(x + \frac{n-1}{n}\pi\right).$$

Grupăm termenii de forma $\sin\left(x + \frac{\pi i}{n}\right)$ și $\sin\left[x + \frac{\pi(n-i)}{n}\right]$, $0 < i < n/2$. Dacă n este par, atunci în produs rămîne încă termenul

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x. \text{ Transformînd produsele}$$

$$\begin{aligned} \text{obținem } \sin\left(x + \frac{\pi i}{n}\right) \sin\left[x + \frac{\pi(n-i)}{n}\right] &= \frac{1}{2} \left[-\cos(2x + \pi) + \right. \\ &+ \left. \cos\left(\frac{2\pi i}{n} - \pi\right) \right] = \frac{1}{2} \left(\cos 2x - \cos \frac{2\pi i}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(2 \cos^2 x - \right. \\ &\left. - \cos \frac{2\pi i}{n} \right) = \cos^2 x - d_i, \text{ unde } d_i \text{ este anumită constantă. Astfel} \end{aligned}$$

$f(x) = D_n(\cos x)$, unde $D_n(x)$ este un polinom de gradul $n - 1$ cu primul coeficient 1. Rămîne de demonstrat că $A_n(x) = 2^{n-1} D_n(x)$ (în particular va rezulta că constanta C_n din enunț va fi $\frac{1}{2^{n-1}}$).

Folosim teorema care spune că polinomul de gradul k are nu mai mult de k rădăcini distincte.

Considerăm polinomul $F(x) = A_n(x) - 2^{n-1} D_n(x)$. Gradul său este mai mic decît $n - 1$ întrucît coeficienții pe lingă x^{n-1} în polinoamele $A_n(x)$ și $2^{n-1} D_n(x)$ sînt egali. Asta înseamnă că ori $F(x)$ este identic nul ori $F(x)$ are mai pușin de $n - 1$ rădăcini.

Considerăm punctele $x_1 = -\frac{\pi}{n}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{n}$, \dots , $x_{n-1} = -\frac{\pi(n-1)}{n}$ și fie $t_i = \cos x_i$. Este evident că $f(x_i) = 0$ și de aceea

$D_n(t_i) = 0$; în afară de aceasta $\sin(nx_i) = 0$ și $\sin x_i \neq 0$, ceea ce înseamnă $A_n(\cos x_i) = A_n(t_i) = 0$. Observăm că toate rădăcinile t_i sînt distincte întrucît $\cos x$ crește pe segmentul $[-\pi, 0]$. Astfel polinomul $F(x)$ se anulează în $n - 1$ puncte t_1, t_2, \dots, t_{n-1} și asta înseamnă că $F(x)$ este identic nul. Prin urmare $A_n = 2^{n-1} D_n$, adică $\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \dots \sin\left[x + \frac{\pi(n-1)}{n}\right] = \frac{1}{2^{n-1}} \sin nx$.

Să demonstrăm acum că un polinom de gradul k nu are mai mult de k rădăcini.

Pentru $k = 1$ — evident. Fie afirmația adevărată pentru l și fie $P(t) = a_l t^l + a_{l-1} t^{l-1} + \dots + a_1 t + a_0$ un polinom de gradul l ($a_l \neq 0$).

Fie α o rădăcină a polinomului P (dacă P nu are rădăcini afirmația este dovedită).

$P(\alpha) = a_l \alpha^l + \dots + a_0 = 0$. De aceea $P(t) = P(t) - P(\alpha) = a_l(t^l - \alpha^l) + a_{l-1}(t^{l-1} - \alpha^{l-1}) + \dots + a_1(t - \alpha)$. Se arată cu ușurință că $t^l - \alpha^l = (t - \alpha)(t^{l-1} + \alpha t^{l-2} + \dots + \alpha^{l-1})$. De aceea $P(t) = (t - \alpha)[a_l(t^{l-1} + \dots + \alpha^{l-1}) + a_{l-1}(t^{l-2} + \dots + \alpha^{l-2}) + \dots + a_1] = (t - \alpha)H(t)$, unde $H(t)$ este un polinom de gradul $l - 1$.

Conform ipotezei $H(t)$ nu are mai mult de $l - 1$ rădăcini. Asta înseamnă că P nu are mai mult de l rădăcini (α și rădăcinile polinomului $H(t)$).

* * * * *

15. Să se arate că

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 40^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 9 \operatorname{tg} 9 \alpha.$$

Soluție. Vom stabili mai întâi câteva identități preliminare. Vom începe cu :

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3 \operatorname{tg} 3 \alpha.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} (2) \quad \operatorname{tg} 3 \alpha &= \frac{\sin 3 \alpha}{\cos 3 \alpha} = \frac{\sin 2 \alpha \cos \alpha + \cos 2 \alpha \sin \alpha}{\cos 2 \alpha \cos \alpha - \sin 2 \alpha \sin \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha}{(2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha}{4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha} = \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \frac{3 - 4 \sin^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha - 3} = \operatorname{tg} \alpha \frac{4 \cos^2 \alpha - 1}{4 \cos^2 \alpha - 3}, \end{aligned}$$

iar

$$\operatorname{tg} \alpha \diamond \operatorname{tg}(\alpha \diamond 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) - \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \diamond \frac{\sin 2\alpha}{\cos(\alpha \diamond 60^\circ) \cos(\alpha - 60^\circ)} = \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha} \right) =$$

(3)

$$= \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha + 8 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos^2 \alpha - 3 + 3 \cos^2 \alpha + 8 \cos^2 \alpha}{4 \cos^2 \alpha - 3} = 3 \operatorname{tg} \alpha \frac{4 \cos^2 \alpha - 1}{4 \cos^2 \alpha - 3},$$

asa că, din (2) și (3) deducem (1). Și acum înlocuind pe α cu $\alpha \diamond 20$ și cu $\alpha + 40$, obținem respectiv

$$(4) \operatorname{tg}(\alpha \diamond 20^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 80^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 140^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha \diamond 60^\circ),$$

$$(5) \operatorname{tg}(\alpha \diamond 40^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 100^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = 3 \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ).$$

Adunând ecuațiile (1), (4) și (5) membru cu membru, rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 20^\circ) + \dots + \operatorname{tg}(\alpha + 160^\circ) = \\ 3[\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}(3\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ)],$$

care, înlocuind în (1) pe α cu 3α , implică

$$3[\operatorname{tg} 3\alpha \diamond \operatorname{tg}(3\alpha \diamond 60^\circ) + \operatorname{tg}(3\alpha + 120^\circ)] = 3(3 \operatorname{tg} 9\alpha) = 9 \operatorname{tg} 9\alpha.$$

* * *

16. Fie $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos \alpha \neq 0$. Dacă $\sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ atunci $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

Soluție. $\sin \beta = \sin(\alpha + \beta - \alpha) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

17. Să se arate că

$$E = \sin x \sin(x + 5^\circ) \sin(x + 10^\circ) \dots \sin(x + 175^\circ) = \frac{\sin 36x}{2^{35}}.$$

(Gazeta Matematică 3, 1977, Problema nr. 16537, Din Matematica v școle 5, 1976).

Soluție. Scriem expresia din membrul întâi astfel :

$$E = \sin x \sin(x + 5^\circ) \sin(x + 10^\circ) \dots \sin(x + 85^\circ) \sin(x + 90^\circ) \sin(x + 95^\circ) \dots \sin(x + 175^\circ),$$

dar

$$\sin(x + 90^\circ + k \cdot 5^\circ) = \cos(90^\circ - x - 90^\circ - k \cdot 5^\circ) = \cos(x + k \cdot 5^\circ)$$

așa că

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \frac{1}{2} \sin(2x + 10^\circ) \cdot \frac{1}{2} \sin(2x + 20^\circ) \dots \frac{1}{2} \sin(2x + 170^\circ) = \\ &= \frac{1}{2^{18}} \sin 2x \sin(2x + 10^\circ) \sin(2x + 20^\circ) \dots \sin(2x + 170^\circ) = \\ &= \frac{1}{2^{18}} \sin 2x \sin(2x + 10^\circ) \sin(2x + 20^\circ) \dots \sin(2x + 90^\circ) \sin(2x + 100^\circ) \dots \sin(2x + 170^\circ), \end{aligned}$$

dar

$$\begin{aligned} \sin(2x + 90^\circ + k \cdot 10^\circ) &= \cos(90^\circ - 2x - 90^\circ - k \cdot 10^\circ) = \\ &= \cos(2x + k \cdot 10^\circ), \end{aligned}$$

și deci

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2^{18}} \left[\frac{1}{2} \sin 4x \cdot \frac{1}{2} \sin(4x + 20^\circ) \cdot \frac{1}{2} \sin(4x + 40^\circ) \dots \frac{1}{2} \sin(4x + 160^\circ) \right] = \\ &= \frac{1}{2^{18}} \cdot \frac{1}{2^9} \sin 4x \sin(4x + 20^\circ) \dots \sin(4x + 80^\circ) \sin(4x + 100^\circ) \dots \\ &\dots \sin(4x + 160^\circ) = \frac{1}{2^{27}} \sin 4x \sin(4x + 20^\circ) \sin(4x + 40^\circ) \sin(4x + 60^\circ) \cdot \\ &\sin(4x + 80^\circ) [-\sin(4x - 80^\circ)] [-\sin(4x - 60^\circ)] [-\sin(4x - 40^\circ)] [-\sin(4x - 20^\circ)] = \\ &= \frac{1}{2^{27}} \sin 4x \sin(4x + 20^\circ) \sin(4x + 40^\circ) \sin(4x + 60^\circ) \sin(4x + 80^\circ) \cdot \\ &\sin(4x - 80^\circ) \sin(4x - 60^\circ) \sin(4x - 40^\circ) \sin(4x - 20^\circ) = \\ &= \frac{1}{2^{27}} \sin 4x \frac{1}{2} (\cos 40^\circ - \cos 8x) \cdot \frac{1}{2} (\cos 80^\circ - \cos 8x) \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos 8x) \cdot \frac{1}{2} (\cos 160^\circ - \cos 8x) = \\
& \frac{1}{2^{31}} \sin 4x (\cos 40^\circ - \cos 8x) (\cos 80^\circ - \cos 8x) (\cos 120^\circ - \\
& -\cos 8x) (\cos 160^\circ - \cos 8x) = \mp \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} \mp \cos 8x \right) (\cos 8x - \\
& -\cos 4x) (\cos 8x - \cos 80^\circ) (\cos 8x - \cos 160^\circ) = \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} \mp \right. \\
& \quad \left. \diamond \cos 8x \right) [\cos^3 8x - (\cos 40^\circ \mp \cos 80^\circ \mp \cos 160^\circ) \cos^2 8x \mp \\
& \quad \diamond (\cos 40^\circ \cos 80^\circ \mp \cos 80^\circ \cos 160^\circ \mp \cos 40^\circ \cos 160^\circ) \cos 8x - \\
& \quad - \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ] = \\
& \quad \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} \mp \cos 8x \right) \left[\cos^2 8x - \right. \\
& - (\cos 40^\circ - \cos 20^\circ \mp \cos 80^\circ) \cos^2 8x \mp \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ \mp \\
& \quad \diamond \cos 240^\circ \mp \cos 80^\circ \mp \cos 200^\circ \mp \cos 120^\circ) \cos 8x - \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} (\cos 200^\circ + \cos 120^\circ) \cos 80^\circ \right] = \\
& = \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} \mp \cos 8x \right) \left[\cos^3 8x - (-2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ \mp \right. \\
& \quad \diamond \sin 10^\circ) \cos^2 8x + \frac{1}{2} (-1 + \cos 40^\circ - \cos 60^\circ + \cos 80^\circ - \\
& \quad \left. - \cos 20^\circ) \cos 8x + \frac{1}{2} \left(\cos 20^\circ + \frac{1}{2} \right) \cos 80^\circ \right] = \\
& = \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} \mp \cos 8x \right) \left[\cos^3 8x - (-\sin 10^\circ \mp \sin 10^\circ) \cos^2 8x \mp \right. \\
& \quad \left. \diamond \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2} + 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ \right) \cos 8x + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 80^\circ + \frac{1}{4} \cos 80^\circ \right] = \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} + \cos 8x \right) \cos^3 8x + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ \right) \cos 8x + \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 100^\circ + \frac{1}{2} \cos 60^\circ \right) + \frac{1}{4} \cos 80^\circ \Big] = \\
& = \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} + \cos 8x \right) \left(\cos^3 8x - \frac{3}{4} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 80^\circ + \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cos 80^\circ \right) = \frac{1}{2^{31}} \sin 4x \left(\frac{1}{2} + \cos 8x \right) \left(\cos^3 8x - \frac{3}{4} \cos 8x + \frac{1}{8} \right) = \\
& = \frac{1}{2^{35}} \sin 4x (1 + 2 \cos 8x) (8 \cos^3 8x - 6 \cos 8x + 1) = \\
& = \frac{1}{2^{35}} \sin 4x (1 + 2 \cos 8x) [3 - 2(1 - \cos 8x) (1 + 2 \cos 8x)^2] = \\
& = \frac{1}{2^{35}} \sin 4x (1 + 2 - 4 \sin^2 4x) [3 - 2(1 - 1 + 2 \sin^2 4x) (1 + 2 - 4 \sin^2 4x)^2] = \\
& = \frac{1}{2^{35}} \sin 4x (3 - 4 \sin^2 4x) [3 - 4 \sin^2 4x (3 - 4 \sin^2 4x)^2] = \\
& = \frac{1}{2^{35}} (3 \sin 4x - 4 \sin^3 4x) [3 - 4(3 \sin 4x - 4 \sin^3 4x)^2] = \\
& = \frac{1}{2^{35}} [3(3 \sin 4x - 4 \sin^3 4x) - 4(3 \sin 4x - 4 \sin^3 4x)^3] = \\
& = \frac{1}{2^{35}} [3 \sin 4x (3 - 4 \sin^2 4x) - 4 \sin^3 4x (3 - 4 \sin^2 4x)^3] = \\
& = \frac{1}{2^{35}} (3 \sin 12x - 4 \sin^3 12x) = \frac{1}{2^{35}} \sin 12x (3 - 4 \sin^2 12x) = \\
& = \frac{1}{2^{35}} \sin 36x.
\end{aligned}$$

Pentru obținerea ultimelor 3 expresii s-a folosit formula trigonometrică $\sin 3x = \sin x(3 - 4 \sin^2 x)$.

§ 3. ECUAȚII

* * * * *

18. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{\sin 3x \cos (60^\circ - 4x) + 1}{\sin (60^\circ - 7x) - \cos (30+x) + m} = 0.$$

(Problemă pentru concurs : România).

Soluție. :

$$1^\circ \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos(60^\circ - 4x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ & | 4 \\ 60^\circ - 4x = 180^\circ + t \cdot 360^\circ & | 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$180^\circ = 360^\circ + 4k \cdot 360^\circ + 540^\circ + 3t \cdot 360^\circ \Rightarrow 1 = 2 + 8k + 3 + 6t \Rightarrow$$

$$8k + 6t = -4 \Rightarrow 4k + 3t = -2 \Rightarrow k_0 = -2, t_0 = 2 - k = -2 +$$

$$+ 3s, t = 2 - 4s.$$

$$x = 30^\circ + k \cdot 120^\circ; x = 30^\circ + (-2 + 3s) \cdot 120^\circ = 30^\circ - 240^\circ + s \cdot 360^\circ =$$

$$= -210^\circ + s \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 150^\circ + s \cdot 360^\circ. \text{ Vedem că } m \neq 2.$$

$$2^\circ. \sin 3x = -1 \text{ și } \cos (60^\circ - 4x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ & | 4 \\ 60^\circ - 4x = t \cdot 360^\circ & | 3 \end{cases}$$

$$180^\circ = -360^\circ + 4k \cdot 360^\circ + 3t \cdot 360^\circ; 1 = -2 + 8k + 6t; 8k + 6t = 3$$

împosibil.

*

19. Să se rezolve ecuația

$$(3 \sin x + \sqrt{3} \cos x + 5y)^2 = 37(1 + y^2).$$

Soluție. Se vede că $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = t,$

unde, evident,

$$-1 \leq \frac{t}{2\sqrt{3}} \leq 1 \Rightarrow -2\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{3} \Rightarrow t^2 \leq 12 \Rightarrow t^2 - 12 \leq 0.$$

Făcînd substituția corespunzătoare în ecuația din enunț, obținem

$$(t + 5y)^2 = 37(1 + y^2) \Rightarrow 12y^2 - 10ty \pm (37 - t^2) = 0.$$

Pentru ca această ecuație să aibă rădăcini reale trebuie ca $\Delta = 25t^2 - 12(37 - t^2) \geq 0$, dar constatăm că $\Delta = 25t^2 - 12 \cdot 37 \pm 12t^2 = 37(t^2 - 12) \leq 0$, așa că ecuația în y va avea rădăcini reale numai pentru $t^2 = 12$ și deci $t = \pm \sqrt{12} \Rightarrow t = \pm 2\sqrt{3}$. Înlocuind aceste valori ale lui t în ecuația în y obținem

$$12y^2 \pm 20\sqrt{3}y + 25 = 0 \Rightarrow y = \frac{\pm 10\sqrt{3}}{12} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{6},$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{t}{2\sqrt{3}} = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \pm k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{Așadar } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ y = \pm \frac{5\sqrt{3}}{6}. \end{cases}$$

* * * *

20. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg}(x + 15^\circ) \operatorname{tg}(x + 75^\circ) \operatorname{tg}(x + 135^\circ) = -\sqrt{3}.$$

Soluție. Pentru $x + 75^\circ = \alpha$ ecuația devine: $\operatorname{tg} 3\alpha = \sqrt{3}$.

21. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x} = \sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos 4x} + \sqrt{\cos 5x},$$

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]$$

(Gazeta Matematică 8, 1976, Problema nr. 15999).

Soluție. $(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos 5x}) + (\sqrt{\sin 2x} - \sqrt{\cos 4x}) + (\sqrt{\sin 3x} -$

$$- \sqrt{\cos 3x}) = 0 \Rightarrow \frac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos 5x}} +$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)}{\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 4x}} + \frac{\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{\sqrt{\sin 3x} + \sqrt{\cos 3x}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos 5x}} + \frac{2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 4x}} +$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\sin 3x} + \sqrt{\cos 3x}} = 0 \Rightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$3x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \text{ radiani} \Rightarrow x = 15^\circ.$$

Verificare: $\sqrt{\sin 15^\circ} + \sqrt{\sin 30^\circ} + \sqrt{\sin 45^\circ} = \sqrt{\cos 45^\circ} + \sqrt{\cos 60^\circ} + \sqrt{\cos 75^\circ}$.
Aceasta este singura soluție căci, dacă împărțim membrul întâi prin $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, obținem:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos 5x}} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 4x}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

* *

22. Să se arate că dacă α, β sînt ascuțite și $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$, atunci $\beta \leq 30^\circ + \alpha$.

$$\text{Soluție. } \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha}$$

Dar $\operatorname{ctg} \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha \geq 2\sqrt{3}$ (cum se vede de exemplu anulînd derivata lui $\operatorname{ctg} \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha$).

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \beta - \alpha \leq 30^\circ \text{ sau } \beta \leq 30^\circ + \alpha.$$

* * * *

23. Să se rezolve ecuația: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right]\right) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Soluție. } \frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right] = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \left[\frac{\pi}{6x}\right] = 2k\pi \in \mathbb{Z}.$$

În membrul întii avem număr întreg, iar în al doilea un număr irațional în afară de cazul $k=0$. Rezultă că $\left[\frac{\pi}{6x}\right] = 0 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6x} < 1 \Rightarrow x > \frac{\pi}{6}$.

Cazul

$$\frac{\pi}{6} + \left[\frac{\pi}{6x}\right] = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \left[\frac{\pi}{6x}\right] = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

este imposibil căci un număr întreg nu poate fi egal cu un număr irațional.

* * *

24. Să se arate că dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ este rădăcină a ecuației

$$2(x^2 + x) \sin 2x + (2x + 2 - x^3) \cos 2x = x^3 + 2x + 2,$$

atunci $|\alpha| < 1$. (Problemă de baraj).

Soluție. Transformăm ecuația astfel:

$$4(x^2 + x) \sin x \cos x + (2x + 2 - x^3) \cos^2 x - (2x + 2 - x^3) \sin^2 x - x^3 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$4x(x+1) \sin x \cos x + 2x(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) -$$

$$\begin{aligned}
& -x^3(\cos^2 x - \sin^2 x + 1) + 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \\
& -2x^3 \cos^2 x + 4x(x+1) \sin x \cos x - 4x \sin^2 x + 2 - 4 \sin^2 x - 2 = 0 \Rightarrow \\
& x^3 \cos^2 x - 2x(x+1) \sin x \cos x + 2(x+1) \sin^2 x = 0 \mid : x \Rightarrow \\
& x^2 \cos^2 x - 2x^2(x+1) \sin x \cos x + 2x(x+1) \sin^2 x = 0 \Rightarrow \\
& [x^2 \cos x - (x+1) \sin x]^2 - \\
& - (x+1)^2 \sin^2 x + 2x(x+1) \sin^2 x = 0 \Rightarrow \\
& [x^2 \cos x - (x+1) \sin x]^2 + (x-1)(x+1) \sin^2 x = 0.
\end{aligned}$$

Dacă $(\alpha - 1)(\alpha + 1) > 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 0$, $\alpha^2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$. Trebuie să avem deci $(\alpha - 1)(\alpha + 1) \leq 0 \Rightarrow \alpha \in (-1, 1)$. Se vede că $-1, 1$ nu sînt rădăcini.

§ 4. SISTEME DE ECUAȚII

* * * * *

25. Se știe că

$$\operatorname{ctg} \alpha = 2 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = 2 + \sqrt{a},$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$ și nu se divid cu 4, iar \sqrt{a}, \sqrt{bc} — iraționale. Să se afle unghiul α .

Soluție. Se știe că $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha)^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha \Rightarrow$

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = 1 + 4 + a + 4\sqrt{a} \Rightarrow$$

$$b + c - 5 = a + 2(2\sqrt{a} - \sqrt{bc}) \Rightarrow \begin{cases} bc = 4a, \\ b + c = a + 5. \end{cases}$$

Eliminăm pe \sqrt{a} :

$$bc = (b + c - 5)4 \Rightarrow (b - 4)(4 - c) = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 6, \\ c = 2, \end{cases} \begin{cases} b = 2, \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow \operatorname{ctg} 2\alpha = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{1 - 7 + 4\sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{2(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$4\alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0, \operatorname{ctg} 2\alpha > 0 \Rightarrow$$

$$k = 4m \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{24} + m\pi}.$$

* * * * *

26. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \sin^2 y = \sin z, \\ \sin^2 z = \sin x, \end{cases}$$

unde $x, y, z \in [0, \pi]$.

Soluție. Adunând cele trei ecuații membru cu membru și trecând totul în membrul întâi obținem

$$\sin^2 x - \sin y + \sin^2 y - \sin z + \sin^2 z - \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x(\sin x - 1) + \sin y(\sin y - 1) + \sin z(\sin z - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x(1 - \sin x) + \sin y(1 - \sin y) + \sin z(1 - \sin z) = 0.$$

Întrucît $x, y, z \in [0, \pi]$, cei trei termeni sînt ≥ 0 și deci ca suma lor să fie 0 trebuie ca fiecare să se anuleze. Din anularea primului termen obținem

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x = \pi,$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Raționînd la fel pentru y și z , găsim următoarele soluții:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pi, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pi, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = \pi, \end{cases} \begin{cases} x = \pi, \\ y = \pi, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pi, \\ y = 0, \\ z = \pi, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pi, \\ z = \pi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi/2, \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pi/2, \\ y = 0, \\ z = \pi, \end{cases} \begin{cases} x = \pi/2, \\ y = \pi, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pi/2, \\ y = \pi, \\ z = \pi, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pi/2, \\ z = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi, \\ y = \pi/2, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pi, \\ y = \pi/2, \\ z = \pi, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = \pi/2, \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = \pi, \\ z = \pi/2, \end{cases} \begin{cases} x = \pi, \\ y = \pi, \\ z = \pi/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi/2, \\ y = \pi/2, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} x = \pi/2, \\ y = \pi/2, \\ z = \pi, \end{cases} \begin{cases} x = \pi/2, \\ y = \pi/2, \\ z = \pi/2. \end{cases}$$

* * * *

27. Să se arate că dacă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a \sin^2(x + y) + b \sin^2(x - y) = 2, \\ a \operatorname{tg}^2(x + y) + b \operatorname{tg}^2(x - y) = 2, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{a - b}{a + b} \end{cases}$$

are soluții, atunci $(a^2 - b^2)^2 + 4ab = 0$.

Soluție. Să considerăm mai întâi sistemul format de primele două ecuații ca un sistem în necunoscutele a, b și să-l rezolvăm prin regula lui Kramer :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & \sin^2(x - y) \\ 2 & \frac{\sin^2(x - y)}{\cos^2(x - y)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin^2(x + y) & \sin^2(x - y) \\ \cos^2(x + y) & \cos^2(x - y) \end{vmatrix}} = \frac{2}{\sin^2(x + y)} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\cos^2(x - y)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{2 \sin^2(x - y)}{\sin^2(x + y)} \frac{\cos^2(x + y)}{\cos^2(x + y) - \cos^2(x - y)} = \\ &= - \frac{2 \sin^2(x - y) \cos^2(x + y)}{\sin^2(x + y) \sin 2x \sin 2y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\begin{vmatrix} \sin^2(x+y) & 2 \\ \sin^2(x+y) & 2 \\ \cos^2(x+y) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin^2(x+y) & \sin^2(x-y) \\ \sin^2(x+y) & \sin^2(x-y) \\ \cos^2(x+y) & \cos^2(x-y) \end{vmatrix}} = \frac{2}{\begin{vmatrix} \sin^2(x-y) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos^2(x+y) & \cos^2(x-y) & 1 \end{vmatrix}} = \\
 &= \frac{-2 \sin^2(x+y) \cos^2(x-y)}{\sin^2(x-y) [\cos^2(x+y) - \cos^2(x-y)]} = \frac{2 \sin^2(x+y) \cos^2(x-y)}{\sin^2(x-y) \sin 2x \sin 2y}.
 \end{aligned}$$

Din a treia ecuație a sistemului inițial obținem

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} &= \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow (a+b) \sin x \sin y - (a-b) \cos x \cos y = 0 \Rightarrow \\
 &-a \cos(x+y) + b \cos(x-y) = 0.
 \end{aligned}$$

Dar $a = 0$ ar implica $\cos(x-y) = 0$, iar din primele două ecuații ale sistemului $\cos(x-y) = 1$, ceea ce-i imposibil, $a = b = 0$ nu se poate, rezultă $a \neq 0$ și deci

$$\frac{b}{a} = \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}.$$

Pe de altă parte, înlocuind pe a și b (obținuți mai sus) în această relație, rezultă

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{2 \sin^2(x+y) \cos^2(x-y)}{\sin 2(x-y) \sin 2x \sin 2y} &= - \frac{\sin 4(x+y) \cos^2(x-y)}{\sin 4(x-y) \cos^2(x+y)} = \frac{b}{a} = \\
 &= \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)}.
 \end{aligned}$$

Dar $(a^2 - b^2)^2 + 4ab = 0$ se mai poate pune și sub forma

$$a^2 \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]^2 + 4 \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4 \sin^4(x-y) \cos^4(x+y)}{\sin^4(x+y) \sin^2 2x \sin^2 2y} \left[1 - \frac{\cos^2(x+y)}{\cos^2(x-y)} \right]^2 = 4 \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} \Rightarrow \\
& - \frac{\sin^4(x-y) \cos^4(x+y)}{\sin^4(x+y) \sin^2 2x \sin^2 2y} \cdot \frac{\sin^2 2x \sin^2 2y}{\cos^4(x-y)} = \frac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} \Rightarrow \\
& - \frac{\sin^4(x-y) \cos^3(x+y)}{\sin^4(x+y) \cos^3(x-y)} = 1 \Rightarrow - \frac{\sin^4(x-y) \cos^2(x+y)}{\sin^4(x+y) \cos^2(x-y)} = \\
& \qquad \qquad \qquad = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}
\end{aligned}$$

care-i verificată în virtutea relației (1).

§ 5. FUNCȚII TRIGONOMETRICE

28. Să se afle maximul expresiei

$$\begin{aligned}
u &= a \sin x + b \sin y + c \sin z + d \sin t + \\
&+ e \sqrt{2 \cos(x+y) \cos(y+z) \cos(z+x)},
\end{aligned}$$

unde $a, b, c, d, e > 0$, $x + y + z + t = 2\pi$.

Soluție. Aplicând inegalitatea lui Cauchy, obținem

$$\begin{aligned}
u &= a \sin x + b \sin y + c \sin z + d \sin t + \\
&+ e \sqrt{2 \cos(x+y) \cos(y+z) \cos(z+x)} \leq \\
&\leq \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + \sin^2 t + 2 \cos(x+y) \cos(y+z) \cos(z+x)} \cdot \\
&\quad \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}.
\end{aligned}$$

Dar

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + \sin^2 t + 2 \cos(x+y) \cos(y+z) \cos(z+x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} + \frac{1 - \cos 2z}{2} + \frac{1 - \cos 2t}{2} + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = 2 - \cos(x + y) \cos(x - y) + \\
&+ \cos(z + t) \cos(z - t) + 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = \\
&= 2 - \cos(x + y) \cos(x - y) + \cos(x + y) \cos(z - t) + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = 2 - \cos(x + y) [\cos(x - y) + \\
&+ \cos(z - t)] + 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = \\
&= 2 - 2 \cos(x + y) \cos \frac{x + z - (y + t)}{2} \cos \frac{x + t - (y + z)}{2} + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = \\
&= 2 - 2 \cos(x + y) \cos \frac{y + t - (x + z)}{2} \cos \frac{x + t - (y + z)}{2} + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = \\
&= 2 - 2 \cos(x + y) \cos \left[\pi - \frac{y + t - (x + z)}{2} \right] \cos \left[\pi - \frac{x + t - (y + z)}{2} \right] + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = \\
&= 2 - 2 \cos(x + y) \cos \frac{2\pi - (y + t) + (x + z)}{2} \cos \frac{2\pi - (x + t) + (y + z)}{2} + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(y + z) \cos(x + z) = \\
&= 2 - 2 \cos(x + y) \cos(x + z) \cos(y + z) + \\
&+ 2 \cos(x + y) \cos(x + z) \cos(y + z) = 2,
\end{aligned}$$

aşa că $u \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}$ și deci $u_{\max} = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}$.

* * * * *

29. Să se găsească mulțimea valorilor funcției

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z, \text{ unde } x + y + z = \pi.$$

(Problemă de concurs : R.D.G.).

Soluție. Avem evident că $(|r| - 1/2)^2 \geq 0$ adică $r^2 - |r| + 1/4 \geq 0$. Considerând $|s| \leq 1$ avem că $r^2 - |rs| + 1/4 \geq 0$ și cu atât mai mult $r^2 + rs + 1/4 \geq 0$. Făcând pe $r = \cos(x + y)$ și $s = \cos(x - y)$ avem că :

$$\cos^2(x + y) + \cos(x + y) \cos(x - y) + 1/4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$2\cos^2(x + y) + 2 \cos(x + y) \cos(x - y) + 1/2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$1 + \cos 2(x + y) + \cos 2x + \cos 2y + 1/2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$-\cos 2(x + y) - \cos 2x - \cos 2y \leq 3/2 \Rightarrow$$

$$1 - \cos 2(x + y) + 1 - \cos 2x + 1 - \cos 2y \leq 9/2 \Rightarrow$$

$$2 \sin^2(x + y) + 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 y \leq 9/2 \Rightarrow$$

$$\sin^2(x + y) + \sin^2 x + \sin^2 y \leq 9/4 \text{ sau}$$

$$0 \leq \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \leq 9/4 \text{ căci } \sin(x + y) = \sin z.$$

* * *

30. Să se calculeze

$$\sin 1^\circ \left(\frac{1}{\sin 1^\circ \sin 2^\circ} + \frac{1}{\sin 2^\circ \sin 3^\circ} + \dots + \frac{1}{\sin 89^\circ \sin 90^\circ} \right).$$

(Problemă de baraj).

$$\begin{aligned} \text{Soluție.} \quad \frac{\cos kx}{\sin kx} - \frac{\cos(k+1)x}{\sin(k+1)x} &= \frac{\sin(k+1-k)x}{\sin kx \sin(k+1)x} = \\ &= \frac{\sin x}{\sin kx \sin(k+1)x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{89} \frac{\sin 1^\circ}{\sin k^\circ \sin(k+1)^\circ} = \sum_{k=1}^{89} \text{ctg} k^\circ - \text{ctg}(k+1)^\circ = \text{ctg} 1^\circ - \text{ctg} 90^\circ = \text{ctg} 1^\circ.$$

* * *

31. Avem $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = m$. Să se afle $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)$

Soluție.
$$m = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \Rightarrow$$

$$2m - 2 = 2\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{2(m - 1)}{2} = m - 1.$$

32. Să se afle maximul expresiei :

$$u = a \cos x + b \cos y + c \cos z + d\sqrt{2 \cos x \cos y \cos z},$$

$a, b, c, d > 0$, x, y, z — \ast ascuțite în triunghi.

Soluție. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z =$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} + \frac{1 + \cos 2z}{2} + 2 \cos x \cos y \cos z =$$

$$= \frac{3}{2} + \cos(x + y) \cos(x - y) - 2 \cos x \cos y \cos z(x + y) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cos 2z = \frac{3}{2} + \cos(x + y)(\cos x \cos y + \sin x \sin y -$$

$$- 2 \cos x \cos y) + \frac{1}{2} \cos 2z = \frac{3}{2} - \cos^2(x + y) + \frac{1}{2} (2 \cos^2 z - 1) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

și deci, ținând seama de inegalitatea lui Cauchy $u \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, rezultă $u_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

33. Să se calculeze expresia :

$$A = \left[\frac{(x^2 + a^2)^{-1/4} + (x^2 - a^2)^{-1/4}}{(x^2 + a^2)^{-1/4} - (x^2 - a^2)^{-1/4}} \right]^{-3}$$

pentru $x = a \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn} \right)^{1/2}$; $a < 0$, $n > m > 0$.

Soluție.

Avem $x < 0$. Expresia are sens pentru $x^2 > a^2$. Avem așa ceva?

$$a^2 \frac{m^2 + n^2}{2mn} > a^2 \Rightarrow (m - n)^2 > 0. \text{ Da!}$$

$$\text{Punem } x = a \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + a^2 = a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} \\ x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - a^2 = -a^2 \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$A = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi}}} - \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{a^2 \cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{a^2 \cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}}}} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{-\frac{a^2 \cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}} + \sqrt[4]{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi}} - 2 \sqrt[4]{\frac{a^4 \cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi}}}{\sqrt[4]{-\frac{a^2 \cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi}} - \sqrt[4]{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi}}} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt[4]{-\cos 2\varphi} - \sqrt[4]{-\cos 2\varphi} - 1}{1 - \sqrt[4]{-\cos 2\varphi}} \right)^3 = \frac{(\sqrt{n^2 - m^2} - n)^3}{m^3}.$$

34. Să se afle maximul expresiei

$$a \sin x + b \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + c \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right), \quad a, b, c \geq 0, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$$

Soluție. $a \sin x + b \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + c \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \leq$

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right)} = \\ & = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x \right)}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} + 2x \right)}{2}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{3 - \cos 2x - 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos 2x} = \sqrt{\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2}}. \end{aligned}$$

35. Să se afle maximul expresiei :

$$f(x, y) = a \sin(x + y) + b \sin(x - y) + c \sqrt{\cos 2x \cos 2y}, \quad \text{unde}$$

$$a, b, c > 0, \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right].$$

Soluție. $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) + \cos 2x \cos 2y =$

$$= \frac{1 - \cos 2(x + y)}{2} + \frac{1 - \cos 2(x - y)}{2} + \cos 2x \cos 2y = 1 -$$

$$- \cos 2x \cos 2y + \cos 2x \cos 2y = 1 \text{ și deci } f(x, y)_{\max} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Capitolul IV GEOMETRIE

În cadrul acestui capitol am ales ca mod de clasificare a a problemelor trecerea de la particular la general, ca de exemplu probleme referitoare la triunghiuri, patrulatere, poligoane.

A. GEOMETRIA PE O AXĂ

* * * * *
* * * * *

1. Pe o axă se dau 50 segmente. Să se arate că este adevărată cel puțin una din propozițiile:

- există 8 segmente care au cel puțin un punct comun;
- există 8 segmente astfel încât două oarecare dintre ele să nu aibă nici un punct comun.

Soluție. Din cele 50 segmente $[a_i, b_i]$ alegem pe acela cu limita superioară mai mică; fie acesta $[a_1, b_1]$. Dacă există mai multe astfel de segmente, luăm la întâmplare unul dintre ele (de exemplu cu cel mai mic a_i). În cazul că există cel puțin 8 numere a_i — inclusiv a_1 — încît $a_i \leq b_1$, atunci punctul b_1 aparține la cel puțin 8 segmente și atunci este adevărată propoziția a). În caz contrar, înălțurăm din sistemul de segmente pe acelea pentru care $a_i \leq b_1$ și obținem cel puțin $50 - 7 = 43$ segmente $[a_i, b_i]$ în care $a_i > b_1$.

Din sistemul de cel puțin 43 segmente alegem în mod analog segmentul $[a_2, b_2]$ cu marginea superioară cea mai mică. Atunci b_2 aparține la cel puțin 8 segmente, ori există nu mai puțin de $50 - 2 \cdot 7 = 36$ segmente $[a_i, b_i]$ în care $a_i > b_2$. Repetînd acest raționament de 7 ori, fie că ajungem la un moment dat să avem 8 segmente cu un punct comun — deci adevărată propoziția a), ori alegem 8 segmente: $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \dots, [a_7, b_7]$ și (cel puțin $50 - 7 \cdot 7 = 1$) $[a_8, b_8]$ care nu se intersectează între ele și deci este adevărată propoziția b).

A. GEOMETRIE PLANĂ

și. TRIUNGIUL

1. TRIUNGIUL ECHILATERAL

* * * * *

2. În triunghiul ABC se consideră $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$ medianele din A și C . Știind că $\widehat{BAA'} = \widehat{BCC'} = 30^\circ$ să se arate că triunghiul este echilateral.

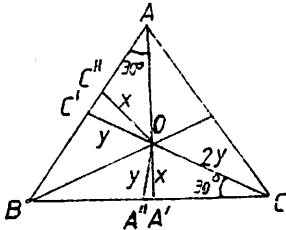


Fig. 33.

Soluție. Fie $\begin{cases} \overline{AO} = 2x \\ \overline{CO} = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{OA'} = x, \\ \overline{OC'} = y. \end{cases}$

Ducem din O perpendicularele OA'' , OC'' , pe \overline{BC} și \overline{AB} . Avem că $\overline{OA''} = y$, $\overline{OC''} = x$. Dar $x \geq y$ (din $\triangle OA'A''$) $y \geq x$ (din $\triangle OC'C''$) $\Rightarrow x = y$. Medianele fiind și înălțimi, triunghiul este isoscel, iar $\widehat{B} = 60^\circ$ și deci este echilateral.

Altă soluție. $\triangle ABA' \sim \triangle CBC'$ și ariile lor sînt egale \Rightarrow triunghiurile sînt egale $\Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel $\Rightarrow \triangle ABC$ este echilateral.

* * * * *

3. Să se demonstreze că pentru ca un triunghi ABC să fie echilateral este necesar și suficient ca să avem :

$$\frac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \frac{1}{(m_a + m_c - m_b)^2} + \frac{1}{(m_b + m_c - m_a)^2} = \frac{9R^2}{4S^2}$$

(unde S este aria lui ABC și R raza cercului circumscris. Cum se modifică relația dacă triunghiul nu este echilateral?)

Soluție. Necesitatea. \triangle echilateral $\Rightarrow m_a = m_b = m_c = \frac{3R}{2}$ și se verifică.

Suficiența. Din inegalitatea dintre media armonică și cea geometrică rezultă :

$$A = \frac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \frac{1}{(m_a + m_c - m_b)^2} + \frac{1}{(m_b + m_c - m_a)^2} \geq \frac{3}{\sqrt{(m_a + m_b - m_c)^2 (m_a + m_c - m_b)^2 + (m_b + m_c - m_a)^2}}$$

Cum $(a+b-c)(b+c-a)(a-b+c) \leq abc$ (a se vedea observația de la problema 29 din acest capitol) și medianele pot fi laturile unui triunghi avem că $(m_a + m_b - m_c)(m_a - m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a) \leq m_a m_b m_c$ și deci

$$A \geq \frac{3}{\sqrt[3]{m_a^2 m_b^2 m_c^2}} \cdot \text{Dar, ținînd seama de raționamentul de la problema 46,}$$

$$\sqrt[3]{m_a m_b m_c} \leq \frac{m_a + m_b + m_c}{3} \leq \frac{1}{3} \sqrt{3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)} = \sqrt{\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}} \leq \frac{3R}{2}, \text{ adică } \sqrt[3]{m_a^2 m_b^2 m_c^2} \leq \frac{9R^2}{4} \text{ și deci } \frac{3}{\sqrt[3]{m_a^2 m_b^2 m_c^2}} \geq$$

$$\geq \frac{3}{9R^2} = \frac{4}{3R^2}. \text{ Egalitate avem doar cînd } m_a = m_b = m_c, \text{ adică}$$

$$\frac{4}{3R^2} = \frac{4}{4S^2}.$$

atunci cînd triunghiul este echilateral, în care caz $\frac{4}{3R^2} = \frac{9R^2}{4S^2}$. Dacă triunghiul nu este echilateral avem că

$$\frac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \frac{1}{(m_a - m_b + m_c)^2} + \frac{1}{(m_b + m_c - m_a)^2} > \frac{4}{3R^2}.$$

* * * * *

4. *Dat fiind un triunghi echilateral și un punct interior, să se exprime latura triunghiului cu ajutorul distanțelor u, v, w ale punctului interior la vîrfuri (Problemă de concurs R.D.G.).*

Soluție. Rotim punctul P în jurul lui B cu 60° și obținem $P', \triangle BAP' = \triangle BCP$.

Fie $\angle P'PA = \alpha$;

$$\cos \alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv} \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{u^2 + v^2 - w^2}{2uv} \right)^2} \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2uv} \sqrt{2(u^2 v^2 + v^2 w^2 + w^2 u^2) - u^4 - v^4 - w^4} \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2uv} \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)},$$

$$\cos \widehat{APB} = \cos (\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha,$$

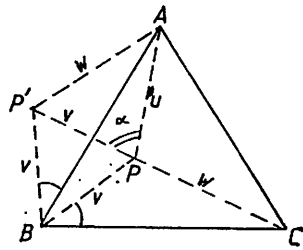


Fig. 34.

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= u^2 + v^2 - 2uv \cos(\alpha + 60^\circ) = u^2 + v^2 - 2uv \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) = u^2 + v^2 - uv \cos \alpha + uv \sqrt{3} \sin \alpha \Rightarrow AB^2 = \\
 &= u^2 + v^2 - \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)} \Rightarrow \\
 AB &= \sqrt{\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)}}.
 \end{aligned}$$

5. Să se afle mulțimea punctelor M din planul triunghiului echilateral ABC care satisfac relația $MA^2 = MB^2 + MC^2$ (Gazeta Matematică 3, 1977, Problema nr. 16531).

Soluție vectorială. Fie O simetricul lui A față de BC . Avem că $\vec{OB} = \vec{a}$, $\vec{OC} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{OA} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

$$\begin{aligned}
 \vec{MA}^2 &= \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 \Rightarrow [\vec{MO} + (2\vec{a} - \vec{b})]^2 = (\vec{MO} + \vec{a})^2 + \\
 &\quad + (\vec{MO} + \vec{a} - \vec{b})^2 \Rightarrow (\vec{MO} + 2\vec{a} - \vec{b})^2 - \\
 &\quad - (\vec{MO} + \vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{MO} + \vec{a})^2 \Rightarrow \\
 (2\vec{MO} + 3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a}) &= \vec{MO}^2 + 2\vec{MO} \cdot \vec{a} + \vec{a}^2 \Rightarrow \\
 2\vec{MO} \cdot \vec{a} + 3\vec{a}^2 - 2\vec{a}^2 &= \vec{MO}^2 + \\
 &\quad + 2\vec{MO} \cdot \vec{a} + \vec{a}^2
 \end{aligned}$$

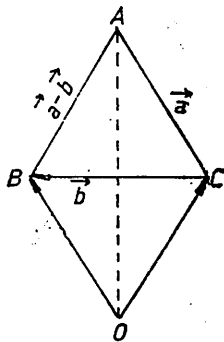


Fig. 35.

sau $\vec{MO}^2 = \vec{a}^2 \Rightarrow M$ se află pe cercul de rază a cu centrul în O .

Soluție sintetică. Evident distanțele MA , MB , MC formează laturile unui triunghi dreptunghic, fie acesta $M'MC$ cu ipotenuza $MM' = MA$.

Trebuie să avem $60^\circ - \alpha + 60^\circ - \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 30^\circ$ adică din punctul M segmentul BC se vede sub un unghi de 30° ceea ce înseamnă că M se află pe arcul capabil de unghiul de 30° . Centrul se află cu ușurință. Dacă vom considera punctul în exterior găsim arcul capabil de unghiul 150° , deci arcul este tot cercul.

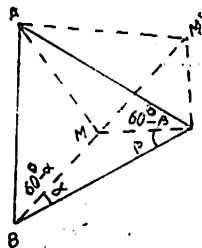


Fig. 36.

* * * * *

6. O mulțime finită de puncte din plan are proprietatea că pentru oricare două puncte există un al treilea cu care să formeze un triunghi echilateral. Câte puncte poate avea mulțimea?

Soluție. Considerăm distanțele dintre puncte și fie punctele A și B care se găsesc la cea mai mare distanță d (sau 2 dintre acestea). Prin ipoteză, există un al treilea punct C . Un al patrulea punct P neputând fi la distanță mai mare de d , înseamnă că acesta se va găsi în triunghiul curbiliniu obținut prin ducerea cercurilor de rază d cu centrele în A , B , C (fig. 37).

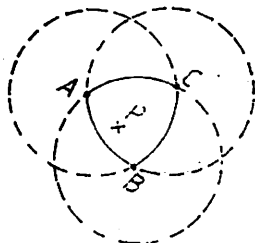


Fig. 37.

Să presupunem că există un alt punct P în acest triunghi curbiliniu. Trebuind să existe și punctele Q sau R care se obțin prin rotirea cu 60° a segmentului AP într-un sens sau în celălalt, acestea nu pot fi decât în petalele obținute rotind arcele AB și AC , căci numai acestea rămân în triunghiul curbiliniu în urma rotirii cu 60° într-un sens sau altul. Deducem analog că punctul P trebuie să se găsească în petalele cu centrul în B și C . Dar punctele comune acestor mulțimi nu sînt decât punctele A , B , C ; deci mulțimea are numai trei puncte (fig. 38).

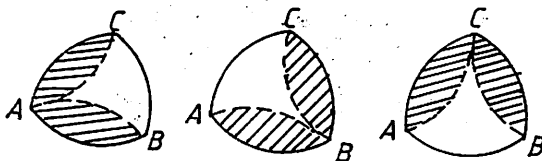


Fig. 38.

În loc de *număr finit* se poate considera o mulțime mărginită de puncte, rezultatul fiind același. Faptul că petalele au numai aceste puncte comune se demonstrează cu ușurință.

* * *

7. Există triunghiuri în care laturile și unghiurile să formeze două progresii aritmetice?

Soluție.

$$\begin{aligned} \begin{cases} a - m, a, a + m \\ \alpha - \varphi, \alpha, \alpha + \varphi \end{cases} &\Rightarrow \frac{a - m}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a + m}{\sin(\alpha + \varphi)} = \\ &= \frac{m}{\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)} = \frac{m}{\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha} \Rightarrow \sin(\alpha - \varphi) + \\ &+ \sin(\alpha + \varphi) = 2 \sin \alpha \Rightarrow 2 \sin \alpha \cos \varphi = \\ &= 2 \sin \alpha \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow m = 0 \end{aligned}$$

deci numai triunghiul echilateral.

2. TRIUNGHIUL ISOSCEL

* * * * *

8. Într-un triunghi isoscel unghiul de la vârful C este de 100° . Se duce din vârful A o dreaptă ce face cu AB un unghi de 30° iar din B o dreaptă ce face cu BA unghi de 20° , drepte ce se întâlnesc în M — interior triunghiului. Să se afle unghiurile ACM și BCM . (fig. 39).

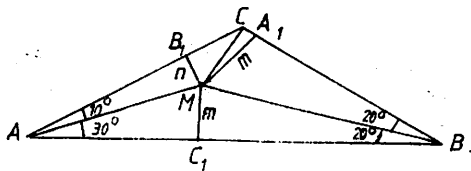


Fig. 39.

Soluție.

$$\begin{cases} CM = \frac{n}{\sin x} = \frac{m}{\sin(100^\circ - x)} \\ AM = \frac{n}{\sin 10^\circ} = \frac{m}{\sin 30^\circ} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin x}{\sin(100^\circ - x)} = \frac{\sin 10^\circ}{1/2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin 10^\circ \sin(100^\circ - x) \Rightarrow \\ \sin x &= \cos(90^\circ - x) - \cos(110^\circ - x) \Rightarrow \\ \cos(110^\circ - x) &= 0 \Rightarrow 110^\circ - x = 90^\circ \\ x &= 20^\circ \end{aligned}$$

$$\widehat{ACM} = 20^\circ, \widehat{BCM} = 80^\circ.$$

9. Să se stabilească valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului de 18° rezolvind un triunghi isoscel în care se cunosc unghiul de 36° făcut de laturile egale și latura opusă acestui unghi (Gazeta Matematică 8, 1976, Problema nr. 15991).

Soluție. Prelungim AC cu baza $BC = a$.

$$AC = BC'' = x \Rightarrow CC'' = x - a \Rightarrow$$

$$\triangle CC'C'' \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x-a}{a} \Rightarrow$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0; x = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1) \Rightarrow \sin 18^\circ =$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} (\sqrt{5} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \Rightarrow$$

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}}{x} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

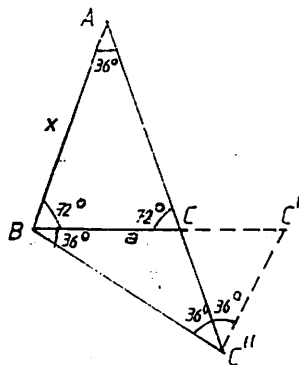


Fig. 40.

3. TRIUNGIUL DREPTUNGHIU

10. Să se demonstreze că laturile oricărui triunghi dreptunghiuc cu ipotenuza a satisfac relația :

$$bc(2a + c) \leq a(a^2 + b^2)$$

(Gazeta Matematică 12, 1976, Problema nr. 16235.)

Soluție. Fie $a = p^2 + q^2$, $b = p^2 - q^2$, $c = 2pq$, $p, q \in R_+$, $p > q$ atunci

$$\begin{aligned} 2pq(p^2 - q^2)(2p^2 + 2q^2 + 2pq) &\leq (p^2 + q^2)[(p^2 + q^2)^2 + (p^2 - q^2)^2] \Rightarrow \\ 2pq(p + q)(p^2 + pq + q^2)(p - q) &\leq (p^2 + q^2)(p^4 + q^4) \Rightarrow \\ 2pq(p + q)(p^3 - q^3) &\leq (p^2 + q^2)(p^4 + q^4) \Rightarrow \\ p^6 + p^4q^2 + p^2q^4 + q^6 - 2p^5q + 2p^2q^4 - 2p^4q^2 + 2pq^5 &\geq 0 \Rightarrow \\ p^6 - 2p^5q - p^4q^2 + 3p^2q^4 + 2pq^5 + q^6 &> 0 \Rightarrow \\ (p^3 - p^2q - pq^2 - q^3)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

care este evidentă.

* *

11. Să se demonstreze teorema bisectoarei folosind numai asemănarea triunghiurilor dreptunghice.

Soluție. Din asemănarea $\triangle ABB'$ cu $\triangle ACC'$ și $\triangle BB'D$ cu $\triangle CC'D$, rezultă

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{DC}.$$

* * * *

12. Să se arate că cel puțin una din laturile unui triunghi pitagoric se divide cu 5.

Soluție. Fie $x^2 + y^2 = z^2$. Atunci

$$x^2 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$x^2 \equiv 4 \pmod{5}.$$

$$x^2 \equiv 1 \pmod{5}, y^2 \equiv 1 \pmod{5}, z^2 \equiv 2 \pmod{5} - \text{imposibil},$$

$$x^2 \equiv 4 \pmod{5}, y^2 \equiv 4 \pmod{5}, z^2 \equiv 3 \pmod{5} - \text{imposibil}.$$

În celelalte cazuri obținem afirmația.

* * * *

13. Cite triunghiuri dreptunghice ale căror laturi sînt numere întregi au o catetă egală cu 15? (Problema de baraj).

Soluție. Se rezolvă în numere naturale ecuația $x^2 - y^2 = 225$ în felul următor : Din ecuația precedentă rezultă $(x - y)(x + y) = 3^2 \cdot 5^2$. Să presupunem :

$$\begin{aligned}x - y = 1 &\Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow x + y = 2y + 1 = \\ &= 225 \Rightarrow y = 112, x = 113.\end{aligned}$$

$$x - y = 3 \Rightarrow x + y = 2y + 3 = 3 \cdot 5^2 = 75 \Rightarrow y = 36, x = 39$$

$$x - y = 5 \Rightarrow x + y = 2y + 5 = 3^2 \cdot 5 = 45 \Rightarrow y = 20, x = 25,$$

$$x - y = 9 \Rightarrow x + y = 2y + 9 = 5^2 = 25 \Rightarrow y = 8, x = 17.$$

* * * * *

14. Să se arate că o condiție necesară și suficientă ca un triunghi să fie dreptunghic este $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$, unde α, β, γ sînt unghiurile triunghiului (Olimpiadă R.D.G.).

Soluție.

$$2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos 2\gamma + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \cos^2 \gamma &= 0 \Rightarrow 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \\ + 2 \cos^2(\alpha + \beta) &= 0 \Rightarrow 2 \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta &= 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ \text{ sau } \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ.\end{aligned}$$

Reciproc. Fie $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 +$
 $+ 2 \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) = -1$ căci $\beta + \gamma = 90^\circ$.

4. TRIUNGHIIUL OARECARE

15. În planul unui triunghi oarecare ABC , în exteriorul acestui triunghi se construiesc triunghiurile ABR, BCP, CAQ astfel ca $\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ, \widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^\circ, \widehat{ABR} = \widehat{RAB} = 15^\circ$. Să

se demonstreze că $\widehat{QRP} = 90^\circ$, $QR = RP$ (Problemă dată la a XVIII-a Olimpiadă Internațională, Suedia).

Soluție. Fie $\widehat{RRB'} = 90^\circ$, $RR = RB'$ (fig. 42) $\Rightarrow \triangle B'RA$ este echilateral, $\widehat{B'AQ} = \widehat{BAC}$. În $\triangle ACQ$ și $\triangle ABR$ teorema sinu-

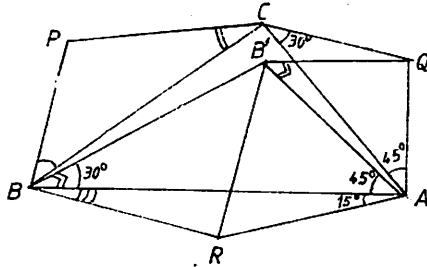


Fig. 42.

surilor dă

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{1}{2 \cos 15^\circ} \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{AR}{AB}$$

$$\frac{AR}{AB} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{2 \cos 15^\circ}$$

$$\triangle ACQ \sim \triangle ABR \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow \frac{AQ}{AB'} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow$$

$$\triangle AB'Q \sim \triangle ABC \Rightarrow \widehat{AB'Q} = \widehat{CBA} \Rightarrow \widehat{RBP} = \widehat{RB'Q}.$$

$$\triangle BCP \sim \triangle ACQ \Rightarrow \begin{cases} \frac{BC}{BP} = \frac{AC}{AQ} \\ \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{B'Q} \end{cases} \Rightarrow BP = B'Q$$

Prin rotirea cu 90° în jurul vârfului R , a $\triangle RBP$ acesta se suprapune peste $\triangle RB'Q$ deci $PR = RQ$ și $\widehat{PRQ} = 90^\circ$.

* * * *

16. Într-o țară sînt mai multe orașe astfel încît distanța dintre oricare două orașe este diferită de aceea dintre oricare alte două orașe. Într-o dimineață din fiecare oraș pleacă cîte un avion către orașul cel mai apropiat. Se poate ca într-un oraș să aterizeze mai mult de 5 avioane? (Probleme de baraj).

Soluție. Nu! Să presupunem că într-un oraș P ar ateriza 6 avioane venite din A_1, A_2, \dots, A_6 . (fig. 43). Cum $A_1A_2 > A_1P$; $A_1A_2 > A_2P$ rezultă că $\widehat{A_1PA_2} > 60^\circ$.

La fel $\widehat{A_2PA_3} > 60^\circ$ etc. și deci

$\sum_{i=1}^6 \widehat{A_iPA_{i+1}} > 360$, cu alte cuvinte am obține că suma unghiurilor în jurul unui punct este mai mare de 360° , ceea ce este imposibil.

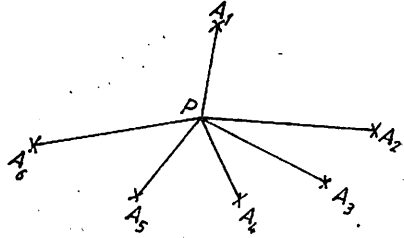


Fig. 43.

* * * *

17. Fie A, B, C unghiurile unui triunghi. Să se arate că

- 1) $A^2 + B^2 + C^2 \geq \frac{\pi^2}{3}$,
- 2) $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A \leq \frac{\pi^2}{3}$.

Soluție. Fie $a + b + c = m$; avem din $\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq$$

$$\leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{m^2}{3} \text{ și deci } A^2 + B^2 + C^2 \geq \frac{\pi^2}{3}.$$

$$\text{Pe de altă parte, } m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca \leq \frac{m^2}{3} \text{ și deci } AB + BC + CA \geq \frac{\pi^2}{3}.$$

* * * *

18. Se dă un triunghi ABC în care $AC = 3, BC = 4, \hat{C} = 120^\circ$. Să se afle distanța de la vârful C pînă la punctul M care împarte latura AB în raportul $1/3$, începînd din A (fig. 44).

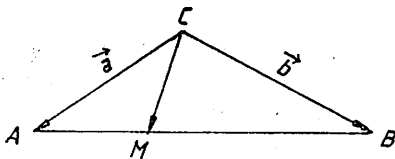


Fig. 44.

Soluție.

$$\begin{aligned} 3\vec{AM} &= \vec{MB} \Rightarrow -3\vec{a} + 3\vec{CM} = \\ &= (-\vec{CM} + \vec{b}) \Rightarrow 4\vec{CM} = 3\vec{a} + \\ &+ \vec{b} \Rightarrow \vec{CM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \Rightarrow \vec{CM}^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{16} \cdot 9 + \frac{1}{16} \cdot 16 - 2 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{16} + 1 - \frac{9}{4} = \frac{61}{16}$$

* * * * *

19. Să se demonstreze că dacă dreapta l este în planul triunghiului ABC și nu trece prin nici un vîrf, atunci ea nu poate intersecta toate laturile triunghiului (fig. 45).

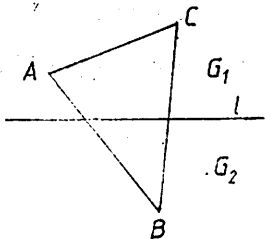


Fig. 45.

Soluție. Dreapta împarte planul în două regiuni, fie G_1 și G_2 , pe care le presupunem deschise neconținînd punctele dreptei l . Vîrfurile sînt în număr de trei și prin urmare nu pot fi decît două într-o parte și unul în cealaltă parte. Prin urmare dreapta nu taie decît segmentele care unesc puncte din regiuni diferite și deci taie numai două laturi.

* * * * *

20. Se dă un triunghi. Să se găsească mulțimea punctelor din care suma unghiurilor sub care se văd laturile triunghiului este un unghi dat α .

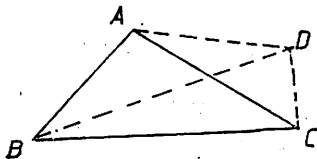


Fig. 46.

Soluție.

$$\begin{aligned} \widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{ADC} &= 2\widehat{ADC} = \\ &= \alpha \Rightarrow \widehat{ADC} = \alpha/2. \end{aligned}$$

Avem deci trei arce capabile de $\frac{\alpha}{2}$ referitoare la laturile triunghiului (exterioare). Dacă $\alpha = \hat{A}$, atunci din arc face parte și A , la fel B și C .

* * *

21. Laturile unui triunghi ABC sînt $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0 \\ x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0 \end{cases}$$

are soluție numere întregi numai $x = y = z = 0$.

Soluție. $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{4}$.

$$\cos A = \frac{3 + 4 - 2}{2 \cdot 2 \sqrt{3}} = \frac{5 \sqrt{3}}{12}, \quad \cos B = \frac{6 - 3}{2 \cdot 2 \sqrt{2}} = \frac{3 \sqrt{2}}{8},$$

$$\cos C = \frac{5 - 4}{2 \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12},$$

$$\cos A = \frac{5 \sqrt{2}}{4 \sqrt{6}}, \quad \cos B = \frac{3 \sqrt{3}}{4 \sqrt{6}}, \quad \cos C = \frac{2}{4 \sqrt{6}},$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2R}, \quad \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2R}, \quad \sin C = \frac{2}{2R}.$$

Atunci, înlocuim valorile lui $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ în sistem și obținem

$$\begin{cases} x \sqrt{2} + y \sqrt{3} + 2z = 0 \\ 5 \sqrt{2}x + 3 \sqrt{3}y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2xy \sqrt{6} = 4z^2 - 2x^2 - 3y^2 \Rightarrow$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \text{ sau } y = 0 \begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

* * * *

22. a) Să se demonstreze că avînd în plan o mulțime finită de puncte cu proprietatea că oricare trei din ele sînt vîrfurile unui triunghi obtuzunghi nedegenerat, acestei mulțimi i se mai poate adăuga un punct, mulțimea obținută păstrîndu-și proprietatea.

b) Este adevărată afirmația pentru o mulțime infinită de puncte în plan?

Soluție. Avînd mulțimea dată se consideră (fig. 47) benzile atașate fiecărui segment (în număr finit) și un punct care nu aparține reuniunii acestor benzi satisfăcînd condiția.

În cazul mulțimii infinite afirmația nu mai este în general valabilă căci această reuniune poate fi tot planul. De ex. : Conside-

rînd un semiarc, minus o extremitate a arcului (fig. 48), constatăm că nu mai putem adăuga nici un punct, deoarece se pot forma triunghiuri ascuțitunghice sau sînt coliniare.

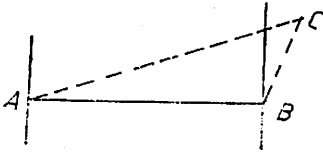


Fig. 47.

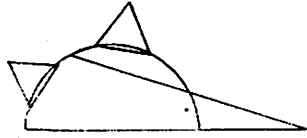


Fig. 48.

* * * *

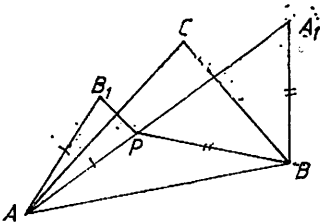


Fig. 49.

23. Fie P un punct din planul triunghiului ABC . Se consideră simetricele sale B_1 față de AC și A_1 față de BC . Să se afle locul lui P astfel încît $AB_1 = BA_1$.

Soluție. P se află pe mediatoarea laturii AB , căci $\triangle APB$ (fig. 49) este isoscel cu $AP = PB$.

* * * *

24. Interior triunghiului ABC se iau punctele P și Q astfel încît AP și AQ fac unghiuri egale cu bisectoarea din A iar segmentele BP și BQ fac unghiuri egale cu bisectoarea unghiului B . Să se arate că segmentele CP și CQ fac unghiuri egale cu bisectoarea unghiului C (fig. 50).

Soluție.

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin B}{\sin(A - \alpha)}; \quad \frac{BP}{CP} = \frac{\sin(C - \gamma_1)}{\sin(B - \beta)}; \quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1}$$

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{\sin(B - \beta)}{\sin \alpha}; \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta}; \quad \frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin(A - \alpha)}{\sin(C - \gamma_2)}$$

\Rightarrow

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AQ}{BQ} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CQ}{AQ} =$$

$$= \frac{\sin \beta \sin(C - \gamma_1) \sin \alpha \sin(B - \beta) \sin \gamma_2 \sin(A - \alpha)}{\sin(A - \alpha) \sin(B - \beta) \sin \gamma_1 \sin \alpha \sin \beta \sin(C - \gamma_2)} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{\sin(C - \gamma_1) \sin \gamma_2}{\sin(C - \gamma_2) \sin \gamma_1} \Rightarrow$$

$$(\sin C \cos \gamma_1 - \cos C \sin \gamma_1) \sin \gamma_2 =$$

$$= (\sin C \cos \gamma_2 - \cos C \sin \gamma_2) \sin \gamma_1 \Rightarrow$$

$$\sin C (\sin \gamma_2 \cos \gamma_1 - \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) +$$

$$+ \cos C (\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 - \sin \gamma_2 \sin \gamma_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin C \sin(\gamma_2 - \gamma_1) = 0 \text{ dar } \sin C \neq$$

$$\neq 0 \text{ și } -\pi < \gamma_2 - \gamma_1 < \pi \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2.$$

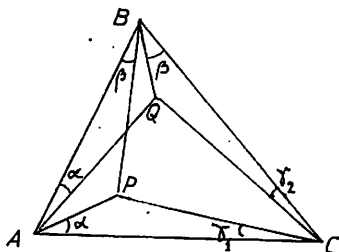


Fig. 50.

* * * * *

25. Într-un plan se dau patru drepte a, b, c, d cîte două neparalele și oricare trei neconcurente. Dacă dreapta a este paralelă cu o mediană a triunghiului format de b, c, d să se arate că dreapta b este paralelă cu o mediană a triunghiului format de a, c, d .

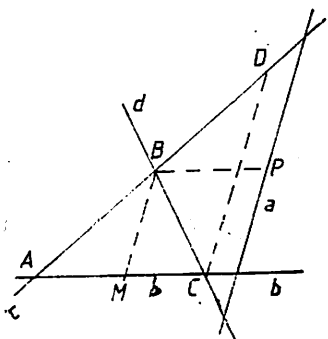


Fig. 51.

Soluție. Ducem prin C paralela CD la mediana BM . În $\triangle ACD$, BM este linie mijlocie, deci $AB = BD$. Paralela prin B la b este mediană în $\triangle BDC$ căci este linie mijlocie în $\triangle ADC$. Prelungirea ei BP va fi linie mijlocie în \triangle format de a, c, d pe baza asemănării.

26. În triunghiul ABC se consideră antiparalela MN la latura BC ($M \in AB$, $N \in AC$). Perpendicularele în M și N pe AB , respectiv AC , intersectează dreptele AC și AB în P respectiv în Q . Să se arate că: a) AD, MP, NQ sînt concurente (D piciorul înălțimii din A);

b) AI trece prin mijlocul lui BC ($I = BP \cap CQ$) (fig. 52). (Gazeta Matematică 3, 1977, Problema nr. 16410).

Soluție. a) $\triangle AMP \sim \triangle ANQ \Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AP}{AQ} \Rightarrow QP$ antiparalelă cu MN ; dar MN antiparalelă cu BC și deci $QP \parallel BC$. Dacă notăm $S = QN \cap MP$, AS este înălțime în $\triangle AQP$, QS , PS fiind înălțimi. Rezultă că $AS \perp QP$ și deci $AS \perp BC$, înălțimea din A trece prin S .

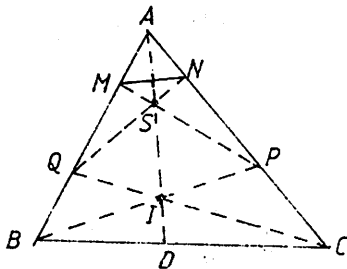


Fig. 52.

b) Fie $D = AI \cap BC$; conform teoremei lui Menelaos rezultă în $\triangle BQC$ (transversala AID) că

$$\frac{AB}{AQ} \cdot \frac{IQ}{IC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1,$$

și în $\triangle AQC$ (transversala BIP) că

$$\frac{IC}{IQ} \cdot \frac{BQ}{BA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1.$$

Înmulțind relațiile precedente :

$$\frac{AB}{AQ} \cdot \frac{IQ}{IC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{IC}{IQ} \cdot \frac{BQ}{BA} \cdot \frac{PA}{PC} = 1. \quad \text{Dar } \frac{PA}{PC} = \frac{QA}{QB} \quad \text{și deci}$$

$$\frac{AB}{AQ} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{BQ}{BA} \cdot \frac{QA}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{DC}{DB} = -1 \Rightarrow D \text{ este mijlocul lui } BC, \text{ deci } AI \text{ este mediană în } ABC.$$

* * * * *

27. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi să se arate că $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+c}$.

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+b}$ pot fi de asemenea laturile unui triunghi. (Problemă dată la Olimpiadă).

Soluție. Din $a+b > c, b+c > a, c+a > b$ rezultă $\frac{1}{a+c} > \frac{1}{a+b+a+b}$.

$\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+a+b}$, pe care adunindu-le obținem $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}$.

$+ \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b}$, apoi

$$\frac{1}{a+c} > \frac{1}{b+c+b+c}, \frac{1}{a+b} > \frac{1}{b+c+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{b+c}$$

$$\frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+c+a+c}, \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+c+a+c} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+c}$, ceea ce înseamnă că triunghiul poate fi construit.

* * * * *

28. Se dau punctele A, B, C astfel încât pentru orice punct M din plan să fie adevărat faptul că AM este mai mic decât cel puțin unul din segmentele BM și CM . Să se demonstreze că punctul A aparține segmentului BC . (Problemă de baraj).

Soluție: Presupunem prin reducere la absurd că:

1° A este pe dreapta BC , exterior segmentului. Luind M astfel încât BC să fie interior segmentului AM , avem că $AM > BM$, $AM > CM$, ceea ce contrazice ipoteza.

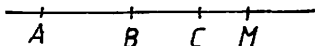


Fig. 53.

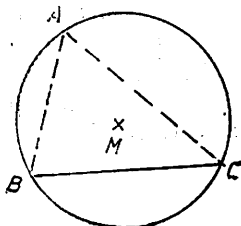


Fig. 54.

2° Fie A exterior dreptei BC . Se formează triunghiul ABC și considerând M în centrul cercului circumscris, avem că $AM = BM = CM$ ceea ce de asemenea contrazice ipoteza. Se observă că A poate fi oricare din punctele segmentului BC cu excepția extremităților BC (locul geometric cerut este segmentul deschis BC).

*

29. Fie a, b, c laturile unui triunghi. Să se arate că:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Soluție. $b + c - a = x, c + a - b = y, a + b - c = z \Rightarrow a =$
 $= \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} =$
 $= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right] \geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2) = 3.$

Observație. $R = \frac{abc}{4}, r = \frac{S}{p}, S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$
 $p = \frac{a+b+c}{2}.$ Notăm $p-a = \frac{x}{2}, p-b = \frac{y}{2}, p-c = \frac{z}{2} \Rightarrow$

$$\frac{R}{2r} = \frac{abc p}{8S^2} = \frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} =$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \right) \right] \geq \frac{1}{4} (1+3) = 1 \Rightarrow R \geq 2r.$$

30. Pe o latură a unui triunghi să se găsească un punct egal depărtat de celelalte două laturi.

Soluție. În cazul triunghiului ascuțitunghic sau dreptunghic (fig. 55 a, b) acesta este piciorul bisectoarei. În cazul unui triunghi obtuzunghic (fig. 55 c) se ridică o perpendiculară din vârful A ab

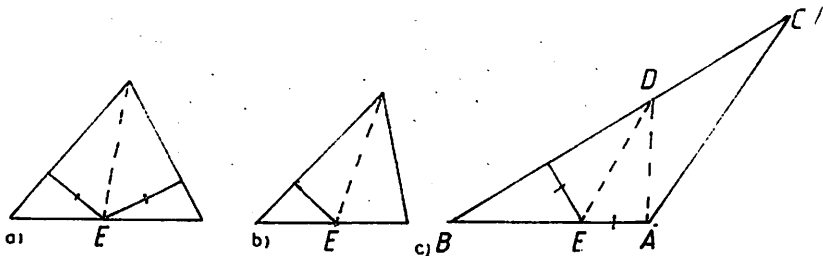


Fig. 55.

unghiului obtuz, iar din D se duce bisectoarea DE a lui ADB . Punctul căutat este E .

31. Să se construiască un triunghi cunoscând baza, un unghi alăturat și diferența celorlalte două laturi.

Soluție. Sînt două soluții. I. În cazul cînd latura mai mare este cea care face cu baza unghiul dat, se ia diferența pe această latură și apoi se construiește triunghiul isoscel din figura 56.

II. În celălalt caz se ia diferența pe prelungirea aceleiași laturi și se construiește triunghiul isoscel din figura 57.

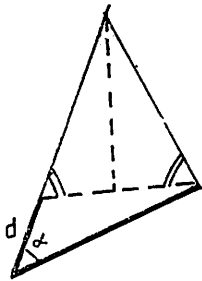


Fig. 56.

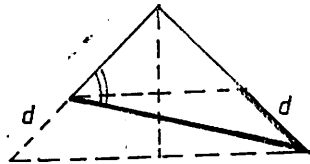


Fig. 57.

32. Prin vîrfurile A al unui triunghi ABC să se ducă o dreaptă astfel încît suma distanțelor vîrfurilor B și C la această dreaptă să fie maximă.

Soluție. Dacă \widehat{BAC} este ascuțit (fig. 58), $BB' + CC' = 2MA' \leq 2MA \Rightarrow B'C' \perp MA$. Dacă $A = 90^\circ$ avem și înălțimea (fig. 59). Dacă $A > 90^\circ$ avem numai înălțimea.

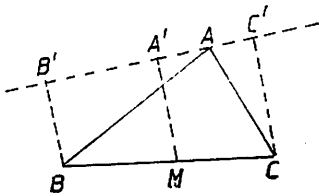


Fig. 58.

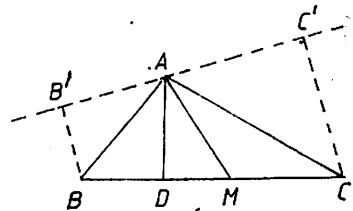


Fig. 59.

33. Dacă laturile unui triunghi satisfac relația $a^n + b^n = c^n$, ce se poate spune despre triunghi?

Soluție. Evident

$$\begin{cases} a < c \\ b < c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{n-2} < c^{n-2} \\ b^{n-2} < c^{n-2} \end{cases} \Rightarrow a^n + b^n < a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 c^{n-2} \Rightarrow c^n < a^2 c^{n-2} + b^2 c^{n-2} \\ + b^2 c^{n-2} \Rightarrow a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0 \Rightarrow C < 90^\circ.$$

* * * * *

34. În ce caz, din egalitatea $\alpha a^2 = \beta b^2 + \gamma c^2$, rezultă $\alpha m_a^2 = \beta m_b^2 + \gamma m_c^2$, unde a, b, c sînt laturile unui triunghi, iar m_a, m_b, m_c medianele sale? (cl. VIII-a).

Soluție. Raționînd ca la punctul 4^c al problemei 47, obținem

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \end{cases}$$

Și acum dacă presupunem adevărată relația $\alpha m_a^2 = \beta m_b^2 + \gamma m_c^2$, vom avea:

$$\frac{\alpha(b^2 + c^2)}{2} - \frac{\alpha a^2}{4} = \frac{\beta(a^2 + c^2)}{2} - \frac{\beta b^2}{4} + \frac{\gamma(a^2 + b^2)}{2} - \frac{\gamma c^2}{4},$$

care, ținînd seama de relația $\alpha a^2 = \beta b^2 + \gamma c^2$, devine

$$\begin{cases} \alpha(b^2 + c^2) = \beta(a^2 + c^2) + \gamma(a^2 + b^2) \\ \alpha a^2 = \beta b^2 + \gamma c^2 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) =$$

$$= \beta(a^2 + b^2 + c^2) + \gamma(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma.$$

Așadar relația $\alpha a^2 = \beta b^2 + \gamma c^2$, unde $\alpha = \beta + \gamma$ implică $\alpha m_a^2 = \beta m_b^2 + \gamma m_c^2$, căci pornind de la relația $\alpha = \beta + \gamma$ și urmărind întreg raționamentul în ordine inversă, rezultă că

$$\alpha a^2 = \beta b^2 + \gamma c^2 \Rightarrow \alpha m_a^2 = \beta m_b^2 + \gamma m_c^2.$$

35. Se dă segmentul AB . Să se afle în plan mulțimea punctelor C astfel încît în triunghiul ABC mediana din A să fie egală cu înălțimea din B .

Soluție. Se prelungeste mediana AD , cu $DE = AD$. Se duce $AK \parallel BF \perp AC$ (vezi fig. 60). $\triangle ACD$ este egal cu $\triangle BDE$ ($CD = DB$, $AD = DE$, $\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$) $\Rightarrow AC \parallel EB$. Se prelungeste EB pînă întîlnește paralela la BF . Paralelogramul format are $\widehat{AFB} = 90^\circ$ și deci este

un dreptunghi, iar $\triangle AEK$ e dreptunghic. Cum $AK = BF = AD = DE$, rezultă că $\sin E = \frac{AK}{AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{E} = 30^\circ$ și deci locul geometric al punctelor E este dat de arcu de cerc din punctele căruia segmentul AB e văzut sub un unghi de 30° . Și acum, fiind

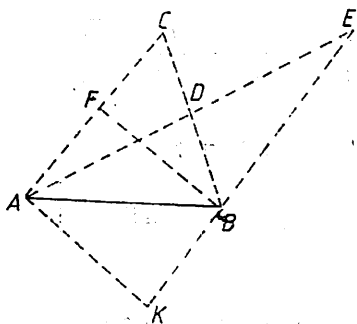


Fig. 60.

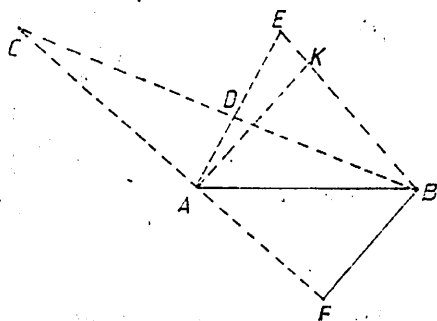


Fig. 61.

dat un punct E aparținând arcuului menționat, punctul C corespunzător se obține-n felul următor: Se unește E cu A , se ia D la jumătatea lui AE , se construiește segmentul BD și se prelungeste cu $DC = BD$.

Raționind în mod analog relativ la figura 61 se constată că pe lângă punctele C , corespunzând punctelor E din care AB se vede sub un unghi de 30° , mai fac parte din mulțimea căutată și punctele C corespunzând punctelor E din care AB e văzut sub un unghi de 150° . Așadar locul geometric al punctelor E e constituit dintr-o circumferință reprezentind ansamblul punctelor (situare de ambele părți ale lui AB) sub care acest segment e văzut sub un unghi de 30° sau de 150° , iar mulțimea punctelor C sînt corespunzătoarele lor.

* * * * *

36. La laturile triunghiului ABC se duc paralele formînd triunghiul MNP și șase triunghiuri. Să se arate că $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6} = \sqrt{S'} + \sqrt{S''}$, unde S' este aria triunghiului ABC , iar S'' cea a lui MNP .

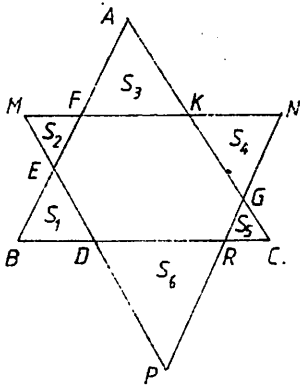


Fig. 62.

Soluție.

$$\frac{\sqrt{S''}}{\sqrt{S_1}} = \frac{MP}{DE} = \frac{ME}{DE} + 1 + \frac{DP}{DE} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} + \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}} + \frac{\sqrt{S_6}}{\sqrt{S_1}} \Rightarrow \sqrt{S''} = \sqrt{S_2} + \sqrt{S_1} + \sqrt{S_6};$$

$$\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S_4}} = \frac{AC}{KQ} = \frac{AK}{KQ} + \frac{KQ}{KQ} + \frac{QC}{KQ} = \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S_4}} + \frac{\sqrt{S_4}}{\sqrt{S_4}} + \frac{\sqrt{S_5}}{\sqrt{S_4}} \Rightarrow \sqrt{S'} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} \Rightarrow$$

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4} + \sqrt{S_5} + \sqrt{S_6} = \sqrt{S'} + \sqrt{S''}.$$

* * * * *

37. a, b, c fiind laturi de triunghi să se stabilească inegalitatea :

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3. \text{ Generalizare :}$$

$$+ \frac{x_1}{x_2+x_3+\dots+x_4-x_1} + \frac{x_2}{x_3+x_4+\dots+x_n+x_1-x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1+\dots+x_{n-2}-x_{n-1}} + \frac{x_n}{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}-x_n} \geq \frac{n}{n-2}.$$

Soluție.

$$b+c-a=x$$

$$c+a-b=y \Rightarrow a+b+c=x+y+z, \quad a=\frac{y+z}{2}, \quad b=\frac{z+x}{2},$$

$$a+b-c=z$$

$$c = \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2) = 3.$$

Generalizarea se demonstrează în mod asemănător.

38. Fie perechile (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) . Să se arate că există triunghi cu laturile

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2}, \\ b &= \sqrt{(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2}, \\ c &= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}. \end{aligned}$$

Soluție. Trebuie să avem $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, dar fiecare inegalitate este echivalentă cu inegalitatea lui Cauchy căci $2ab > c^2 - a^2 - b^2 \Rightarrow 2\sqrt{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2} \cdot \sqrt{(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2} \geq (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - (a_2 - a_3)^2 - (b_2 - b_3)^2 - (a_3 - a_1)^2 - (b_3 - b_1)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 - a_3^2 - a_3^2 + 2a_2a_3 - b_3^2 - b_3^2 + 2b_2b_3 - a_3^2 - a_1^2 + 2a_1a_3 - b_3^2 - b_1^2 + 2b_1b_3 = 2[(a_3 - a_1)(a_2 - a_3) + (b_3 - b_1)(b_2 - b_3)]$ și prin simplificare cu 2 obținem inegalitatea lui Cauchy.

39. 1°. Dacă punctul M se află pe dreapta AB , iar O este un punct oarecare din spațiu nesituat pe dreaptă, atunci avem :

$$\overrightarrow{OM} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}, \text{ unde } l + m = 1.$$

2°. Dacă punctul M aparține planului determinat de punctele necoliniare A, B, C , iar O este exterior acestui plan, atunci

$$\overrightarrow{OM} = n\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC}, \text{ unde } m + p + q = 1.$$

1°. *Soluție vectorială* (fig. 63). Din relațiile de compunere a vectorilor, deducem : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{BM}$ și, înlocuind acești vectori în relația inițială, obținem :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= l(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + m(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{BM}) \Rightarrow \\ \overrightarrow{OM}(l + m - 1) + l\overrightarrow{MA} - m\overrightarrow{BM} &= 0, \end{aligned}$$

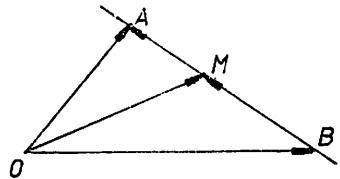


Fig. 63.

unde $l\overrightarrow{MA} - m\overrightarrow{BM}$ reprezintă un vector de pe dreapta AB . Dar suma a doi vectori necoliniari este zero dacă și numai dacă cei doi vectori sînt nuli. Așadar $\overrightarrow{OM}(l + m - 1) = 0$, de unde conchidem că $l + m = 1$.

Soluție geometrică (fig. 64). Ducem $MA_1 \parallel OB$ și $MB_1 \parallel OA \Rightarrow \triangle AA_1M \sim \triangle ABO$ și $\triangle BB_1M \sim \triangle ABO \Rightarrow \frac{AA_1}{AO} = \frac{A_1M}{OB} = \frac{AM}{AB}$,

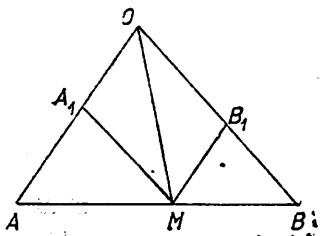


Fig. 64.

$$\begin{aligned} \frac{BB_1}{BO} &= \frac{B_1M}{OA} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow \frac{AA_1}{OA - AA_1} = \\ &= \frac{AM}{BM}, \quad \frac{BB_1}{BB_1} = \frac{BM}{AB - BM} \Rightarrow \\ \frac{AA_1}{OA_1} &= \frac{AM}{MB}, \quad \frac{BB_1}{OB_1} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow \\ \frac{OA_1}{OA} &= \frac{MB}{AB}, \quad \frac{OB_1}{OB} = \frac{AM}{AB}. \end{aligned}$$

Dar $\vec{OM} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = \frac{OA_1}{OA} \vec{OA} + \frac{OB_1}{OB} \vec{OB} = l\vec{OA} + m\vec{OB} \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = l, \frac{OB_1}{OB} = m$ și-n virtutea relațiilor precedente:

$$l = \frac{OA_1}{OA} = \frac{MB}{AB}, \quad m = \frac{OB_1}{OB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow 1 + m = \frac{AM + MB}{AB}.$$

2°. $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA}, \vec{OB} = \vec{OM} + \vec{MB}, \vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC}$ (fig. 65) iar $\vec{OM} = n\vec{OA} + p\vec{OB} + q\vec{OC} \Rightarrow \vec{OM} = n(\vec{OM} + \vec{MA}) + p(\vec{OM} + \vec{MB}) + q(\vec{OM} + \vec{MC}) \Rightarrow \vec{OM}(n + p + q - 1) + n\vec{MA} + p\vec{MB} + q\vec{MC} = \vec{0}$. Cum însă $n\vec{MA} + p\vec{MB} + q\vec{MC}$ este un vector în planul determinat de A, B, C și deci nu poate fi coliniar cu \vec{OM} , faptul că suma vectorilor $\vec{OM}(n + p + q - 1)$ și $n\vec{MA} + p\vec{MB} + q\vec{MC}$ e zero implică $n + p + q = 1$.

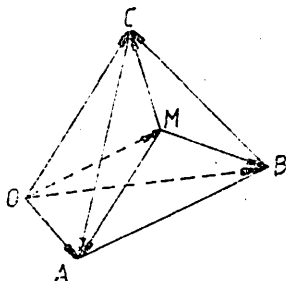


Fig. 65.

* * *

40. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, iar $S^2 = \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c) \cdot$

$\cdot (a - b + c)(-a + b + c)$, să se arate că $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$.

Soluție. $16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \Rightarrow d = a^4 + b^4 + c^4 - 16S^2 = 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$.

* * * *

41. Într-un triunghi ABC , $a^2 + b^2 = kc^2 \Rightarrow k > \frac{1}{2}$.

Soluție. $c < a + b$, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow k = \frac{a^2 + b^2}{c^2} >$
 $> \frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{2(a^2 + b^2)} = \frac{1}{2}$.

* * * * *

42. În plan se dau dreapta l și două puncte P și Q de aceeași parte. Să se afle pe dreapta l un punct M așa fel încât distanța între picioarele înălțimilor triunghiului PQM duse din P și Q să fie minimă.

Soluție. Observăm că picioarele înălțimilor se află pe cercul de diametru PQ .

1°. Dacă dreapta taie cercul, unul din puncte este cel căutat, iar distanța este zero.

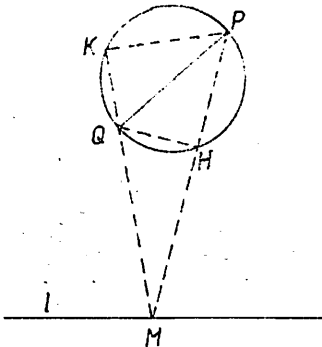


Fig. 66.

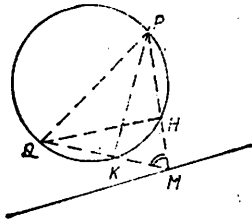


Fig. 67.

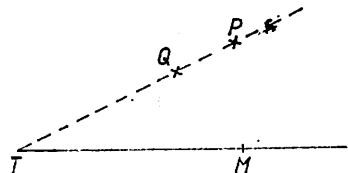


Fig. 68.

2°. Cercul de diametru PQ este exterior dreptei. Cel puțin o înălțime cade în interiorul unei laturi. Prin urmare $\widehat{KPM} = 90^\circ - \widehat{PMQ}$. Asta înseamnă că HK va fi minim când \widehat{PMQ} este maxim și aceasta se întâmplă de exemplu atunci când dreapta este tangentă

cercului de diametru PQ . Dacă acest cerc nu-i tangent la dreapta

l , atunci \widehat{PMQ} va fi maxim dacă M e punctul de tangență al unui cerc avînd PQ drept coardă. Deci problema se reduce la a construi un cerc care să treacă prin două puncte și să fie tangent dreptei date. M fiind punctul de tangență vom avea $MT^2 = TP \cdot TQ \Rightarrow \Rightarrow MT = \sqrt{TP \cdot TQ}$, ceea ce revine la construirea mediei geometrice a două segmente.

* * *

43. Să se afle unghiurile triunghiului dacă $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

Soluție. $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \sin C \Rightarrow (a - b)^2 = 2ab(\sin C - 1) \Rightarrow (a - b)^2 + 2ab(1 - \sin C) = 0 \Rightarrow a = b$, $\sin C = 1 \Rightarrow C = 90^\circ, A = B = 45^\circ$.

44. Se prelungesc laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC cu segmentele $CA' = b + c, AB' = c + a, BC' = a + b$. Fie S aria triunghiului ABC și S_1, S_2, S_3 ariile triunghiului $CA'B', AB'C', BC'A'$. Dacă mărimile laturilor triunghiului ABC sînt numere naturale diferite prime între ele, atunci cel puțin două din rapoartele $\frac{S_1}{S}$,

$\frac{S_2}{S}, \frac{S_3}{S}$ nu sînt numere naturale. (Gazeta Matematică 8, 1976, Problema, nr. 15994).

Soluție.

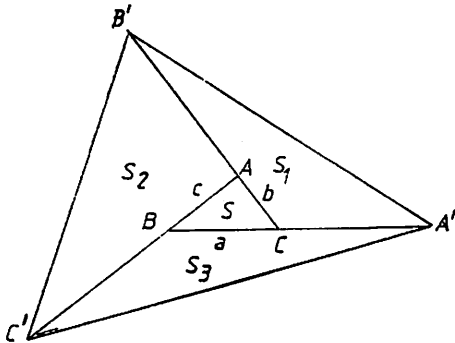


Fig. 69.

$$S_1 = \frac{(b+c)(b+c+a) \sin C}{2},$$

$$S = \frac{ab \sin C}{2},$$

$$S_2 = \frac{(c+a)(c+a+b) \sin A}{2},$$

$$S = \frac{bc \sin A}{2},$$

$$S_3 = \frac{(a+b)(a+b+c) \sin B}{2}, \quad S = \frac{ac \sin B}{2},$$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{(b+c)(b+c+a)}{ab}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{(c+a)(c+a+b)}{bc},$$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ca}.$$

Fie $a < b < c$ și să presupunem că am avea

$$\frac{S_2}{S} \in N \Rightarrow \begin{cases} b | c+a, \\ c | a+b, \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} c+a = bm, & m > 1 \\ a+b = cn, & n > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} bm - c = a \\ b - cn = -a \end{cases} \Rightarrow b(1+m) = c(1+n) \Rightarrow \begin{cases} b | 1+n \\ c | 1+m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1+n = \beta b \\ 1+m = \gamma c \end{cases} \Rightarrow b\gamma c = c\beta b \Rightarrow \beta = \gamma \text{ și deci: } b = \frac{1+n}{\beta}, \quad c = \frac{1+m}{\beta},$$

$$a = \frac{m+mn-1-m}{\beta} \Rightarrow a = \frac{mn-1}{\beta}.$$

Trebuie să avem $a < b < c \Rightarrow mn-1 < 1+n < 1+m \Rightarrow m < \frac{2+n}{n}$

adică $1 < m < 1 + \frac{2}{n}$. Pentru $n \geq 2$ imposibil.

$$\text{Fie } \frac{S_1}{S} \in N \Rightarrow \begin{cases} b | c+a \\ a | b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+a = bm \\ b+c = an \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bm-a=c \\ b-an=-c \end{cases} \Rightarrow$$

$$b(1+m) = a(1+n) \Rightarrow \begin{cases} 1+n = \beta b \\ 1+m = \alpha a \end{cases} \Rightarrow b\alpha a = a\beta b \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$$

$$a = \frac{1+m}{\alpha}, \quad b = \frac{1+n}{\alpha}, \quad c = \frac{m+mn-1-m}{\alpha} = \frac{mn-1}{\alpha}.$$

$b-a < c < a+b \Rightarrow n-m < mn-1 < m+n+2$ iar $a < b < c \Rightarrow$

$$1+m < 1+n < mn-1 \Rightarrow 1 < m < n < 1 + \frac{4}{m-1} \Rightarrow$$

$\begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$; deci este posibil. Fie

$$\frac{S_3}{S} \in N \Rightarrow \begin{cases} c | a+b \\ a | b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = mc, & m > 1 \\ b+c = na, & n > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} mc - a = b \\ c - na = -b \end{cases} \Rightarrow c(1 + m) = a(1 + n) \Rightarrow \begin{cases} 1 + m = \alpha a \\ 1 + n = \gamma c \end{cases} \Rightarrow$$

$$c\alpha a = a\gamma c \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow a = \frac{1 + m}{\alpha}, c = \frac{1 + n}{\alpha},$$

$$b = \frac{m + mn - 1 - m}{\alpha} \Rightarrow b = \frac{mn - 1}{\alpha},$$

$$a < b < c \Rightarrow 1 + m < mn - 1 < 1 + n \Rightarrow m < \frac{n + 2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \Rightarrow$$

$1 < m < 1 + \frac{2}{n}$ este imposibilă pentru $n \geq 2$.

Cum două rapoarte nu pot fi numere naturale, rezultă că cel mult unul poate fi natural și prin urmare cel puțin două nu sînt numere naturale.

* * * *

45. Dacă $a, b, c; l_a, l_b, l_c$ sînt laturile și respectiv bisectoarele corespunzătoare ale unui triunghi, să se demonstreze că

$$\frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} \leq \frac{p^2}{2S}, \text{ unde } \begin{cases} p - \text{semiperimetru} \\ S - \text{aria} \end{cases}$$

(problemă de baraj).

Soluție. Inegalitatea devine $h_a l_a + h_b l_b + h_c l_c \leq p^2$. Cum $l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}$, iar $b+c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}}$ rezultă că

$$l_a \leq \frac{2}{2\sqrt{bc}} \sqrt{bc p(p-a)} = \sqrt{p(p-a)}; \text{ iar } h_a \leq l_a.$$

$$l_b \leq \frac{2}{2\sqrt{ac}} \sqrt{ac p(p-b)} = \sqrt{p(p-b)}; h_b \leq l_b, \text{ avem că}$$

$$l_c \leq \frac{2}{2\sqrt{ab}} \sqrt{ab p(p-c)} = \sqrt{p(p-c)}; h_c \leq l_c \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} h_a l_a + h_b l_b + h_c l_c &\leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \leq p(p-a) + p(p-b) + p(p-c) = \\ &= p(3p - 2p) = p^2. \end{aligned}$$

Egalitate avem cînd înălțimile sînt egale cu bisectoarele adică în triunghiul echilateral.

* * * * *

46. Să se demonstreze că $\frac{9R}{m_a + m_b + m_c} > 2$.

Soluție. Raționînd ca la punctul 4° al problemei 47, obținem :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{4} \end{array} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dar $a^2 + b^2 + c^2 < 9R^2$ și deci

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 < \frac{27}{4} R^2. \text{ Dar } (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) < \\ < \frac{81}{4} R^2 \Rightarrow m_a + m_b + m_c < \frac{9}{2} R \Rightarrow \frac{9R}{m_a + m_b + m_c} > 2.$$

* * * * *

47. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, iar m_a, m_b, m_c medianele corespunzătoare, atunci

$$1^\circ \quad m_b \perp m_c \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 5,$$

$$2^\circ \quad \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 5 \Rightarrow m_b \perp m_c,$$

$$3^\circ \quad b \perp c \Rightarrow \frac{m_b^2 + m_c^2}{m_a^2} = 5,$$

$$4^\circ \quad \frac{m_b^2 + m_c^2}{m_a^2} = 5 \Rightarrow b \perp c.$$

(clasa VIII-a).

Soluție. 1° Avind în vedere că medianele se intersectează la $\frac{2}{3}$ de vîrf și la $\frac{1}{3}$ de bază, vom avea următoarele relații :

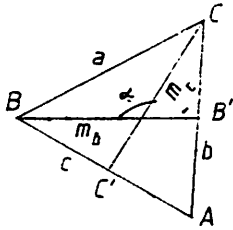


Fig. 70.

$$\begin{aligned} \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) &= a^2, \quad \frac{4}{9}m_b^2 + \frac{m_c^2}{9} = \frac{c^2}{4}, \\ \frac{4}{9}m_c^2 + \frac{m_b^2}{9} &= \frac{b^2}{4} \Rightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) + \frac{m_b^2 + m_c^2}{9} = \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + \frac{a^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4}(b^2 + c^2) \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad a^2 &= \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) - \frac{8}{9}m_b m_c \cos \alpha, \quad \frac{b^2}{4} = \frac{4}{9}m_b^2 + \frac{m_c^2}{9} \Rightarrow \\ &+ \frac{4}{9}m_b m_c \cos \alpha, \quad \frac{c^2}{4} = \frac{4}{9}m_c^2 + \frac{m_b^2}{9} + \frac{4}{9}m_b m_c \cos \alpha \Rightarrow 5a^2 - (b^2 + c^2) = \\ &= \frac{20}{9}(m_b^2 + m_c^2) - \frac{40}{9}m_b m_c \cos \alpha - \frac{20}{9}(m_b^2 + m_c^2) - 32m_b m_c \cos \alpha \Rightarrow \\ &- 8m_b m_c \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow m_b \perp m_c. \end{aligned}$$

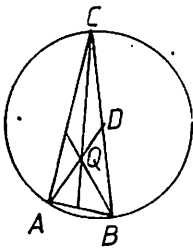


Fig. 71.

$$\begin{aligned} 3^\circ. \quad a^2 &= b^2 + c^2 = 4m_a^2, \quad m_b^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}, \\ m_c^2 &= b^2 + \frac{c^2}{4} \Rightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{4}(b^2 + c^2) = \\ &= \frac{5a^2}{4} = 5m_a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ. \quad m_a^2 &= c^2 + \frac{a^2}{4} - ac \cos B = b^2 + \frac{a^2}{4} - \\ &- ba \cos C \Rightarrow 2m_a^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2}{2} - a(c \cos B + b^2 \cos C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

$$m_b^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} - ab \cos C = c^2 + \frac{b^2}{4} - bc \cos A \Rightarrow$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} \Rightarrow m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

$$m_c^2 = a^2 + \frac{c^2}{4} - ac \cos B = b^2 + \frac{a^2}{4} - bc \cos A \Rightarrow$$

$$2m_c^2 = a^2 + b^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{2} \Rightarrow m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Dar

$$\begin{aligned} 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 &\Rightarrow \frac{5(b^2 + c^2)}{2} - \frac{5a^2}{4} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow \\ + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} &\Rightarrow \frac{9a^2}{4} = \frac{9(b^2 + c^2)}{4} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2, \text{ adică } b \perp c. \end{aligned}$$

§ 2. PATRULATERE

1. ROMB

* * * * *

48. Într-un patrulater convex triunghiurile formate de punctul de intersecție al diagonalelor cu vîrfurile au același perimetru. Să se arate că patrulaterul este romb.

Soluție. Fie $AO = a$, $OD = d$, $OC = c$, $OB = b$ și $a > c$. Presupunem că $b \leq d$. Luăm M pe AO , cu $MO = c$ și N pe OD cu $ON = b$. Triunghiul MON are același perimetru cu BOC și același cu AOD — imposibil, căci MON este interior lui AOD . Rezultă că $a = c$. La fel se arată că $b = d \Rightarrow ABCD$ -paralelogram. Se deduce cu ușurință că este romb din faptul că dacă în $\triangle AOD$ și în $\triangle COD$, $a = c$, d este comună și cele două perimetre sînt egale, atunci și $AD = DC$.

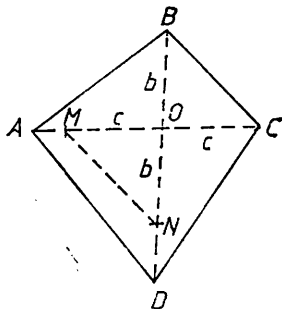
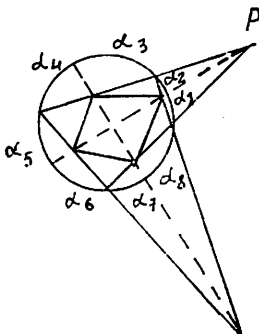


Fig. 72.

* * * * *

49. Să se demonstreze că cele patru puncte în care bisectoarele unghiurilor formate de laturile opuse ale unui patrulater inscrip-tibil taie laturile sale formează un romb (Exercițiu de concurs).



Soluție.
$$\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_5 = -\alpha_1 + \alpha_6 \\ \alpha_4 - \alpha_7 = \alpha_3 - \alpha_8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_6 \\ \alpha_4 + \alpha_8 = \alpha_3 + \alpha_7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_8 &= \\ &= \alpha_2 + \alpha_6 + \alpha_3 + \alpha_7 = 180^\circ. \end{aligned}$$

Fig. 73.

Deci bisectoarele sînt perpendiculare. În patrulaterul format diagonalele se înjumătățesc și cum sînt și perpendiculare, rezultă că este romb.

2. PARALELOGRAM

50. Bisectoarea unuia din unghiurile unui paralelogram intersec-tează una din laturile sale care intersec-tează una din laturile un-ghiului determinînd segmente de 4 și 5 cm. Să se afle perimetrul paralelogramului.

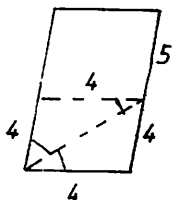


Fig. 74.

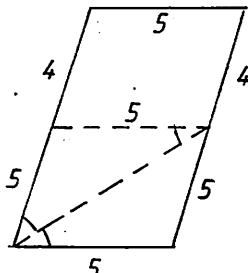


Fig. 75.

Soluție. 26 și 28 cm (după cum rezultă din fig. 74 și 75).

* * *

51. Să se construiască un paralelogram cunoscînd un vîrf și mijloacele laturilor neconcurente în vîrfurile respective. (Problemă de baraj).

Soluție. Mijlocul segmentului MN împarte diagonala AC în raportul $3:1$, deci unim C cu mijlocul lui MN și prelungim cu $1/3$ din segmentul ce unește pe A cu mijlocul lui MN . Apoi unim C cu M și N și ducem din A paralele la CM și CN pînă la intersecția prelungirilor acestora.

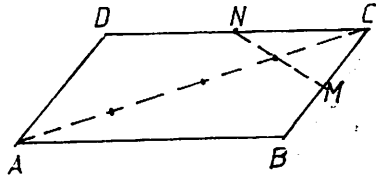


Fig. 76.

3. TRAPEZ

*

52. Într-un trapez $ABCD$ cu bazele $AB = c$, $CD = a$ se știe că $AD = d$, $BC = b$, $AC = e$, $BD = f$. Să se arate că $\frac{e^2 - f^2}{b^2 - d^2} = \frac{a + c}{a - c}$.

Soluție.

$$\begin{cases} \vec{e} = \vec{a} + \vec{d} \\ \vec{f} = \vec{a} + \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^2 = a^2 + d^2 + 2\vec{a}\vec{d} \\ f^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$e^2 - f^2 = d^2 - b^2 + 2\vec{a}(\vec{d} - \vec{b}) \Rightarrow$$

$$\frac{e^2 - f^2}{b^2 - d^2} = -1 - \frac{2\vec{a}(\vec{b} - \vec{d})}{b^2 - d^2} =$$

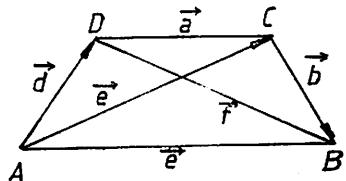


Fig. 77.

$$= -1 - \frac{2\vec{a}}{\vec{b} + \vec{d}} = -1 - \frac{2\vec{a}}{\vec{c} - \vec{a}} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{\vec{a} - \vec{c}} = \frac{a + c}{a - c}.$$

* * * * *

53. Se dă un trapez $ABCD$, $BC \parallel AD$. Pe CD este luat un punct K , pe AB punctul L așa încât $AK \parallel CL$. Să se arate că $DL \parallel BK$ (DL este paralel cu BK). (Problemă de Olimpiadă : Olanda).

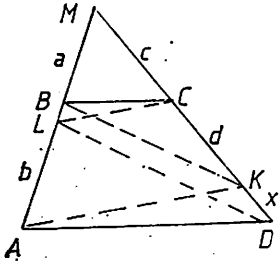


Fig. 78.

Soluție. Notăm AB cu b , CD cu d și cu M punctul de intersecție a prelungirii lui AB și CD . Atunci,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{c}{d-x} = \frac{ML}{a+b-ML} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{d-x+c} = \frac{ML}{a+b} \Rightarrow$$

$$ML = \frac{c(a+b)}{c+d-x} = \frac{c\left(a + \frac{ad}{c}\right)}{c+d-x} = \frac{a(c+d)}{c+d-x} \Rightarrow \frac{a}{ML} =$$

$$= \frac{c+d-x}{c+d} \Rightarrow BK \parallel DL.$$

* * * * *

54. În trapezul $ABCD$ ($BC \parallel AD$) se dau : $AD = 57$, $BC = 33$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, E, F mijloacele laturilor BC și AD respectiv. Aria trapezului este 180 m^2 , AE și BF se intersectează în M , iar ED și FO în N . Să se afle aria patrulaterului $FMEN$. Care din datele problemei se poate lăsa la o parte astfel ca răspunsul să fie același?

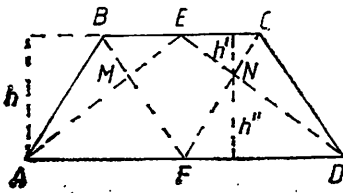


Fig. 79.

Soluție. $h = \frac{2S}{a+b}$, $h' + h'' = h$,

$$\frac{h'}{h''} = \frac{b}{a}, \quad \frac{h'}{h} = \frac{b}{a+b},$$

$$\frac{h'}{h''} = \frac{a+b}{a} \Rightarrow h' = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{2S}{a+b} =$$

$$= \frac{2bS}{(a+b)^2}; \quad h'' = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{2S}{a+b} = \frac{2aS}{(a+b)^2}$$

$$S_{FND} = S_{AMP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2aS}{(a+b)^2} = \frac{a^2S}{2(a+b)^2}$$

$$S_{FHEN} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2S}{a+b} - \frac{a^2S}{(a+b)^2} = \frac{aS}{(a+b)^2} (a+b-a) =$$

$$= \frac{abS}{(a+b)^2} = \frac{57 \cdot 33 \cdot 180}{90^2} = \frac{9 \cdot 11 \cdot 2}{10} = 41,8. \quad \text{Se poate renunța}$$

la $\sphericalangle \widehat{BAD}$.

4. PATRULATERE OARECARE

* * * * *

55. Într-un patrulater convex se unesc succesiv mijloacele laturilor. Care este raportul dintre aria patrulaterului astfel format și cel inițial?

$$\begin{aligned} \text{Soluție.} \quad \frac{1}{4} &= \frac{S_{FBG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{EDH}}{S_{ACD}} = \\ &= \frac{S_{AEF}}{S_{ABD}} = \frac{S_{CGH}}{S_{BCD}} = \end{aligned}$$

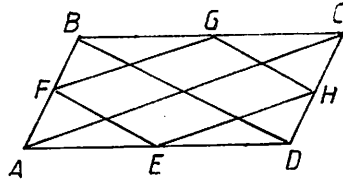


Fig. 80.

$$= \frac{S_{FBC} + S_{EDH} + S_{AEF} + S_{CGH}}{S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{BCD}} = \frac{S_{FBG} + S_{EDH} + S_{AEF} + S_{CGH}}{2S_{ABCD}} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{FBG} + S_{EDH} + S_{AEF} + S_{CGH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{ABCD} - (S_{FBG} + S_{EDH} + S_{AEF} + S_{CGH})}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

* * * * *

56. Să se arate că suma inverselor pătratelor diagonalelor unui patrulater înscrisibil e cel mult egală cu un sfert din suma pătratelor inverselor laturilor. Este oare adevărată afirmația și-n cazul unui patrulater neînscrisibil.

Soluție. Notînd cu a, b, c, d laturile patrulaterului și cu d_1, d_2 cele două diagonale, au loc următoarele relații ale lui Ptolemeu :

$$d_1 d_2 = ac + bd, \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{ad + cb}{ab + cd} \Rightarrow$$

$$d_1^2 = \frac{(ad + cb)(ac + bd)}{ab + cd}, \quad d_2^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + cb} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} = \frac{ab + cd}{(ad + cb)(ac + bd)} + \frac{ad + cb}{(ab + cd)(ac + bd)} =$$

$$= \frac{1}{(ac + bd)} \left(\frac{ab + cd}{ad + cb} + \frac{ad + cb}{ab + cd} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2c^2 + c^2d^2 + 4abcd}} \left(\frac{ab + cd}{\sqrt{a^2d^2 + c^2b^2 + 4abcd}} + \right.$$

$$\left. + \frac{ad + cb}{\sqrt{a^2b^2 + c^2d^2 + 4abcd}} \right) \leq \frac{1}{2\sqrt{abcd}} \left(\frac{ab + cd}{2\sqrt{abcd}} + \frac{ad + cb}{2\sqrt{abcd}} \right) =$$

$$= \frac{1}{4abcd} (ab + cd + ad + ab) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ad} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ad} \right)$$

și aplicînd relațiile de forma $\frac{1}{ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$, obținem

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{cd} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ad} \right) \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} + \frac{1}{a^2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{d^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \leq$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right).$$

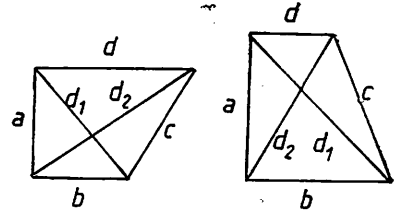


Fig. 81.

În cele ce urmează vom arăta printr-un exemplu că dacă un patrulater nu-i inscriptibil afirmația din enunț poate să nu mai fie adevărată. Într-adevăr, fie $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$, $d = 2$ și deci $d_1 = \sqrt{2}$, $d_2 = \sqrt{5}$ (fig. 81).

Atunci

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} > \frac{11}{16} = \frac{1}{4} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right). \end{aligned}$$

Facem însă observația că există patrulatere neinscriptibile pentru care să fie totuși adevărată inegalitatea din enunț, așa după cum rezultă din următorul exemplu (fig. 81): $a = b = 2$, $c = \sqrt{5}$, $d = 1$, $d_1 = \sqrt{8}$, $d_2 = \sqrt{5}$. Într-adevăr, în acest caz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{13}{40} < \frac{17}{40} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right). \end{aligned}$$

* * * *

57. Dacă într-un patrulater convex nici o diagonală nu este înjumătățită de punctul de intersecție al diagonalelor, atunci nu există un astfel de punct O încît $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{DOA}$.

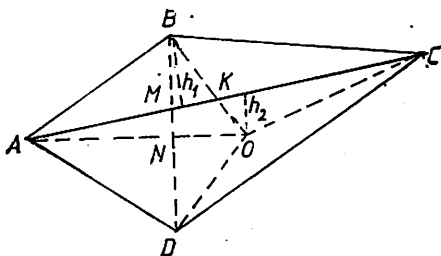


Fig. 82.

Soluție. Să presupunem c-ar exista un asemenea punct O în care

$$S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{DOA},$$

$$\begin{cases} S_{OBA} = \frac{1}{2} AK(h_1 + h_2) \\ S_{OBC} = \frac{1}{2} CK(h_1 + h_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = KC$$

Analog se arată că N este mijlocul diagonalei BD . Conform ipotezei

$$S_{OBA} \neq S_{OAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD},$$

$$\begin{cases} S_{KBA} = \frac{1}{2} S_{ABOD} \\ S_{KAD} = \frac{1}{2} S_{ADOC} \end{cases} \Rightarrow S_{KBA} + S_{KAD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow$$

$$S_{OBA} + S_{OAD} = S_{KBA} + S_{KAD} \Rightarrow K \text{ și } O \text{ coincid} \Rightarrow$$

M, N coincid, N este punctul de intersecție al diagonalelor \Rightarrow contrazice ipoteza

* * * *

58. Într-un plan se dau cinci puncte, oricare trei necoliniare. Să se arate că există patru puncte care formează un patrulater convex. (Problemă pentru concurs : Polonia).

Soluție. Fie triunghiul ABC care conține numărul cel mai mare de puncte.

1° În regiunile II (unghiuri) nu putem avea nici un punct căci am avea un triunghi care ar conține un număr mai mare de puncte.

2° Dacă într-o regiune III se află un punct, atunci se poate forma patrulater convex.

3° Dacă în regiunea I se află două puncte, atunci dreapta corespunzătoare intersectează două laturi (principiul lui Dirichlet)

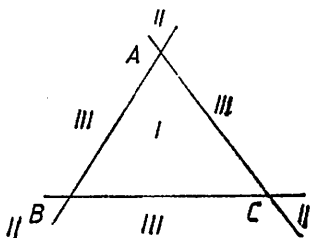


Fig. 83.

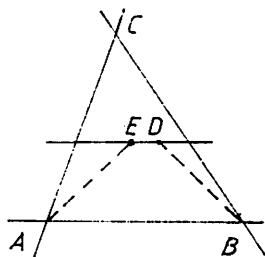


Fig. 84.

—nu poate trece prin nici un vîrf—deci se poate forma patrulaterul convex $ABDE$.

* * * * *

59. Într-un patrulater oricare două laturi opuse nu sînt paralele și oricare două laturi alăturate nu sînt perpendiculare. Triunghiurile formate prin ducerea diagonalelor au ariile exprimate în numere întregi. Se poate ca produsul celor patru arii să fie un număr care să se termine în 1970? Dar în 1971? (Problemă de baraj).

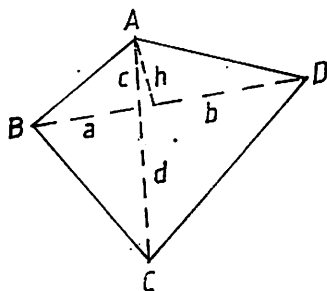


Fig. 85.

Soluție. Conform figurii, cele patru arii vor fi $z_1 = \frac{ah}{2}$, $z_2 = \frac{bh}{2}$, $z_3 = \frac{ahd}{2c}$, $z_4 = \frac{bhd}{2c}$ și deci avem că $z_1 z_4 = z_2 z_3$

și prin urmare produsul $z_1 z_2 z_3 z_4$ este pătrat perfect. În ce se poate termina un pătrat perfect? Pentru $(100x + 10a + b)^2$, ultimele două cifre sînt date de $b^2 + 20ab$. Dînd valori lui b și a obținem

a/b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	01	04	09	16	25	36	49	64	81
1	21	44	69	76	25	56	89	24	61
2	41	84	29	56	25	76	29	84	41
3	61	24	89	36	25	96	69	44	21
4	81	64	49	96	25	16	09	04	01

În interiorul tabelului se găsesc ultimele două cifre ale lui $b^2 + 20ab$ pentru valorile corespunzătoare ale lui a și b . Nu găsim 70 și 71, deci răspunsul este negativ.

* * *

60. Se dă patrulaterul convex $ABCD$ în care $B = 90^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 8$, $AD = DC$, $AB + BC = 2AD$. Să se calculeze $AD + DC$. Obținem un număr mai mic ca 10? Diagonala AC este mai mare ca 10? (Problemă de baraj).

Soluție. Fie $AD = 2x$, $MA = x$, $MD = x\sqrt{3}$, $CN = |4x - 8 - x\sqrt{3}|$.
 $CD^2 = ND^2 + CN^2 \Rightarrow 4x^2 = (8 - x)^2 + (4x - 8 - x\sqrt{3})^2$

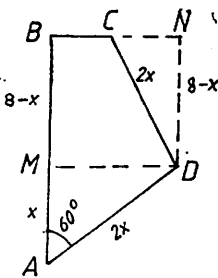


Fig. 36.

$$4x^2 = 64 - 16x + x^2 + 16x^2 + 64 + 3x^2 -$$

$$- 64x - 8x^2\sqrt{3} + 16x\sqrt{3} \Rightarrow x^2(16 - 8\sqrt{3}) +$$

$$+ x(16\sqrt{3} - 80) + 128 = 0 \Rightarrow x^2(2 - \sqrt{3}) +$$

$$+ x(2\sqrt{3} - 10) + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x(2\sqrt{3}) +$$

$$+ 3 - 10 - 5\sqrt{3} + 16(2 + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = x^2 - 2x(3\sqrt{3} + 7) + 16(2 + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 7 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 + 42\sqrt{3} + 49 - 32 - 16\sqrt{3}} =$$

$$= 7 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}; \text{ deci}$$

$$AD + DC = 4(7 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}).$$

$$\text{Cum } \begin{cases} 8 - x > 0 \Rightarrow x < 8, \\ 4x - 8 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

luind semnul $+$ avem $x > 8$, și deci $x_0 = 7 + 3\sqrt{3} - \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}$.

$$4x_0 > 10 \Rightarrow x_0 > \frac{5}{2} ?$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - 5(3\sqrt{3} + 7) + 16(2 + \sqrt{3}) = \frac{25}{4} - 15\sqrt{3} - 35 + 32 +$$

$$+ 16\sqrt{3} = \sqrt{3} + \frac{13}{4} > 0, \text{ de unde rezultă că } \frac{5}{2} < x_0 \text{ și deci}$$

$$4x_0 > 10.$$

$$AC > 10 \Rightarrow 64 + (4x - 8)^2 > 100 \Rightarrow 4x - 8 > 6 \Rightarrow x_0 > \frac{7}{2};$$

$$\text{dar } f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4} - 21\sqrt{3} - 49 + 32 + 16\sqrt{3} = \frac{49 - 68}{4} - 5\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$$

$$x_0 < \frac{7}{2} \Rightarrow AC < 10.$$

* * * *

61. Să se demonstreze că dintre patrulaterele cu laturile a, b, c, d aria cea mai mare o are cel inscriptibil.

Soluție. $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B =$

$$c^2 + d^2 - 2cd \cos D \Rightarrow 2(ab \cos B - cd \cos D) =$$

$$= a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \Rightarrow 4S^2 = (ab \sin B +$$

$$+ cd \sin D)^2 = a^2b^2 \sin^2 B + c^2d^2 \sin^2 D +$$

$$+ 2ab cd \sin B \sin D = a^2b^2 + c^2d^2 -$$

$$- a^2b^2 \cos^2 B - c^2d^2 \cos^2 D + 2abcd \sin B \sin D =$$

$$= a^2b^2 + c^2d^2 - (ab \cos B - cd \cos D)^2 -$$

$$- 2abcd \cos B \cos D + 2abcd \sin B \sin D = a^2b^2 + c^2d^2 -$$

$$- (ab \cos B - cd \cos D)^2 - 2abcd \cos(B + D).$$

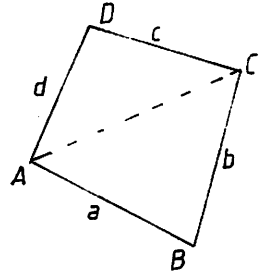


Fig. 87.

$ab \cos B - cd \cos D$ nu depinde de unghiuri. $B + D = 180^\circ$ - inscriptibil implică $4S^2$ maxim, așa că $4S^2$ se determină din această condiție.

* * * * *

62. Într-un poligon convex câte laturi pot fi egale cu cea mai mare dintre diagonale? Două, una sau nici una?

Soluție. Primul este cazul unui poligon convex în care cele două laturi și diagonala egală cu ele pornesc toate trei din același vîrf ca-n cazul figurii 88. Facem observația că cele două laturi egale cu diagonala trebuie să fie adiacente. Într-adevăr, să presupunem că nu ar fi așa, adică am avea un poligon convex cu două laturi $AB = DC$ ca-n figura 89. Atunci am avea $AB + CD < AE + EB + EC + DE = AC + DB \Rightarrow 2AB =$

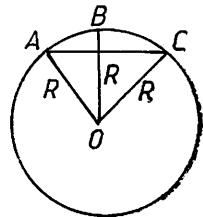


Fig. 88.

$= AB + CD \leq AC + DB \leq 2 \max(AC, DB) \leq 2d$, unde prin d am notat diagonală cea mai mare și deci $AB < d$, contrar ipotezei.

Faptul că nu pot fi trei laturi egale cu d , rezultă din observația că din cele trei laturi, cel puțin două ar fi neadiacente, afară de cazul triunghiului în care nu există diagonală.

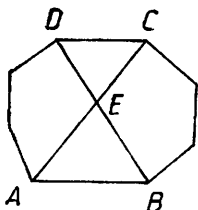


Fig. 89.

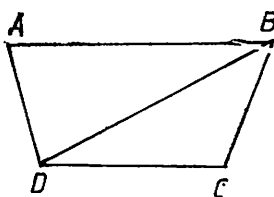


Fig. 90.

Pentru un exemplu de poligon cu o singură latură egală cu diagonală cea mai mare vezi fig. 90, iar cazul când nu există nici o astfel de latură este banal.

* * *

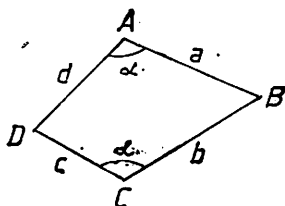


Fig. 91.

63. Să se afle aria unui patrulater cu laturile a, b, c, d dacă două din unghiurile opuse sînt egale.

Soluție. $\downarrow BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha =$
 $= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(bc - ad)}$

Se află $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha =$

$$= \frac{1}{2(ad - bc)} \sqrt{(a + b + c + d)(a + b - c - d)(a - b - c + d)(b - c - a + d)}$$

și

$S = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin \alpha$. Dacă $ad - bc = 0$ se obține paralelogramul sau deltoidul, ori aceste patrulatere nu au „rigiditate”, deci aria nu poate fi determinată de laturi.

* * * *

64. Aria unui patrulater oarecare S este 32 cm^2 , iar suma a două laturi opuse și a unei diagonale este 16 cm . Să se arate toate

valorile pe care le poate lua lungimea celeilalte diagonale. (Problemă dată la a XVIII-a Olimpiadă internațională : Cehoslovacia).

$$\text{Soluție. (1) } S = \frac{1}{2} ab \sin \varphi + \frac{1}{2} bc \sin \psi \leq \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc \Rightarrow$$

$$32 \leq \frac{1}{2} b(a + c) \Rightarrow 32 \leq \frac{1}{2} (16 - b) b \Rightarrow$$

$$32 \leq -\frac{1}{2} b^2 + 8b = -\frac{1}{2} (b - 8)^2 + 32 \leq 32 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} (b - 8)^2 + 32 = 32 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a + c = 8.$$

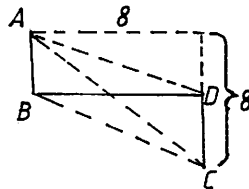
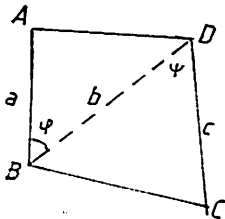


Fig. 92.

Rezultă de aici și ținând seama de (1) că $AB \perp BD$ și $DC \perp BD$. Din figura 92, deducem că $AC = 8\sqrt{2}$.

§ 3 POLIGOANE

• • • • •

65. Într-un pentagon $ABCD$ ariile triunghiurilor ABC , BCD , CDE , DEA , EAB , sînt egale cu unitatea. Să se arate că ariile pentagoanelor cu această proprietate sînt egale și să se arate că există o infinitate de asemenea pentagoane. (Olimpiadă S.U.A., 1973).

Soluție. $S_{ABF} = S_{CFD} \Rightarrow S_{BDA} = S_{CAD} \Rightarrow BC \parallel AD$ și analog despre celelalte laturi și diagonalele corespunzătoare. Patrulaterul $AFDE$ este paralelogram și deci $S_{AFD} = 1$. Din triunghiurile respective avem : $\frac{S_2}{S_1} = \frac{AF}{FC} = \frac{1}{S_2}$. Cum $S_1 + S_2 = 1$, avem că $\frac{1}{S_2} = \frac{1 + S_2}{1} \Rightarrow S_2^2 + S_2 - 1 = 0 \Rightarrow S_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ și deci $S = 2 + 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$.

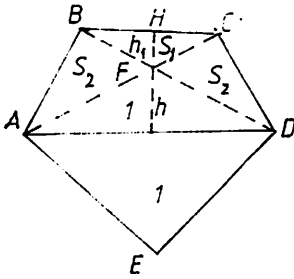


Fig. 93.

Din asemănarea triunghiurilor BCF și

$$ADF \text{ și ținând seama că } S_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \text{ deducem } \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Construim paralelogramul $AFDE$ de arie 2 și pe înălțimea h (vezi fig. 93), luăm $h_1 = h \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ și ducem paralela la AD prin H .

Paralele din vîrfurile D și A la AE și DE dau punctele B, C
Rezultă o infinitate de pentoagoane.

* * * * *

66. Într-un octogon toate unghiurile sînt egale și lungimile laturilor numere naturale. Să se demonstreze că laturile opuse sînt egale între ele. (Problemă de concurs : U.R.S.S.).

Soluție. Un unghi este egal cu $\frac{(8-2)180^\circ}{8} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$, deci un

unghi exterior are 45° , ceea ce înseamnă că a_1, a_3, a_5, a_7 sînt pe laturile unui dreptunghi. Avem egalitatea laturilor opuse, căci

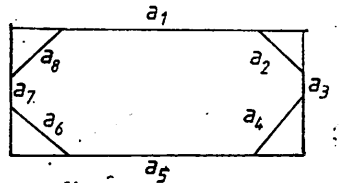


Fig. 94.

$$a_1 + \frac{a_2\sqrt{2}}{2} + a_8\frac{\sqrt{2}}{2} = a_4\frac{\sqrt{2}}{2} + a_5 + a_6\frac{\sqrt{2}}{2}$$

adică

$(a_1 - a_5)\sqrt{2} = a_4 + a_6 - a_2 - a_8$ sau $a_1 = a_5$ pentru $a_k \in N$ și analog $a_2 = a_6, a_3 = a_7, a_4 = a_8$.

* * * * *

67. Într-un poligon convex cu 1000 laturi se consideră 500 puncte așa fel încît oricare 3 din cele 1500 să fie necoliniare. Se formează triunghiuri astfel încît să nu mai apară alte puncte de intersecție între laturi. Cîte triunghiuri se formează?

Soluție. $x = 1000 + 1000 - 2 = 1998$ (A se vedea și problema nr. 75).

* * * *

68. Fie în planul unui poligon convex un punct O , astfel ca orice dreaptă dusă prin el să împartă poligonul în două părți echivalente. Să se arate că O este centrul de simetrie pentru poligon. (Problemă de baraj).

Soluție. Punctul O nu poate fi în afara poligonului căci există drepte care trec printr-un vîrf care evident nu realizează condiția. Nu poate fi nici pe contur căci latura respectivă nu realizează condiția. Rezultă că O este în interior.

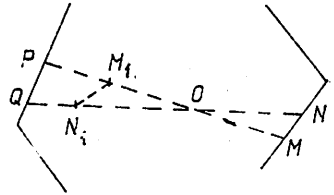


Fig. 95.

Fie P un punct oarecare pe contur. PO mai intersectează odată conturul în M . Fie $OP > OM$. Fie M_1 simetricul lui M . Considerăm un alt punct N pe aceeași latură cu M și simetricul N_1 al lui N . Considerăm NO care intersectează conturul în Q . Rezultă că $S_{OMN} = S_{OM_1N_1} = S_{OPQ}$ ceea ce este absurd $\Rightarrow OP = OM \Rightarrow O$ centru de simetrie.

* * * *

69. Să se ducă paralele laturilor unui triunghi în așa fel încît să se obțină un hexagon cu laturile egale.

Soluție.

$$\frac{AC_1}{c} = \frac{x}{a} \Rightarrow AC_1 = \frac{cx}{a},$$

$$\frac{C_2B}{c} = \frac{x}{b} \Rightarrow C_2B = \frac{cx}{b} \Rightarrow x + \frac{cx}{a} +$$

$$+ \frac{cx}{b} = c \Rightarrow x = \frac{abc}{ab + bc + ca}, AC_1 =$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \frac{abc}{ab + bc + ca} = \frac{bc^2}{ab + bc + ca}$$

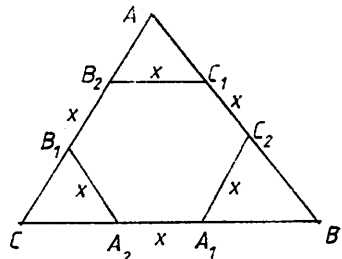


Fig. 96.

* * * * *

70. Fiecare vîrf al unui poligon regulat cu 13 laturi se vopsește în alb sau negru. Să se arate că există trei vîrfuri de aceeași culoare care să formeze un triunghi isoscel.

Soluție. Deoarece 13 este un număr impar există două vîrfuri vecine de aceeași culoare albă de exemplu. Considerăm o numerotare a vîrfurilor în același sens în care respectivele vîrfuri albe să aibă numerele 2, 3. Considerînd vîrfurile cu numărul 9 vom putea forma un triunghi isoscel astfel : dacă 1,4 sînt negre atunci ori 2,3 ori 1,4 formează cu 9 triunghi isoscel după cum 9 este alb sau respectiv negru. Dacă 1,4 au culori diferite, atunci ori 1, 2, 3 ori 2, 3,4 formează triunghi isoscel.

* * * * *

71. Într-un poligon regulat cu n laturi ($n \geq 5$) diferența dintre diagonala mare și cea mică este egală cu latura. Să se afle numărul laturilor aceluia poligon. (Olimpiadă U.R.S.S).

Soluție. Din figurile 97, 98 și 99 se vede că $D < d + 1$ și deci nu putem avea $D - d = 1$ în cazul unui pentagon, hexagon sau heptagon (în cazul unui pentagon avem chiar $D_5 = d_5$). Să arătăm că aceasta nu se poate întîmpla nici în cazul unui octogon (fig. 100). Într-adevăr, $AC = BD = d_8$, și BD este paralelă cu $AE = D_8 = 2r$ (r raza cercului circumscris). Dar atunci, $D_8 - d_8 = AE - BD = AB' + D'E = 2AB' = l_8 = AB$, ceea ce ar implica, în triunghiul

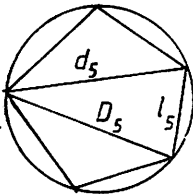


Fig. 97.

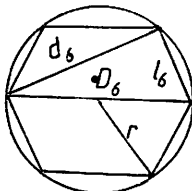


Fig. 98.

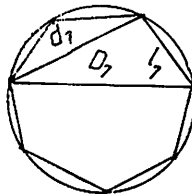


Fig. 99.

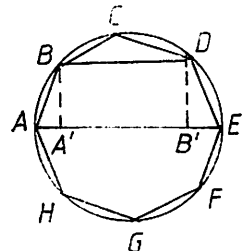


Fig. 100.

dreptunghic ABB' , $\widehat{BAB'} = 60^\circ$. Dar din simetria octogonului în raport cu diametrul $D_8 = 2r = AE$, rezultă că

$$\widehat{BAB'} = \frac{1}{2} \widehat{BAH} = \frac{1}{2} \frac{8 \cdot \pi - 2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} > \frac{\pi}{3}, \text{ așa că } l_8 = AB > 2AB' = D_8 - d_8.$$

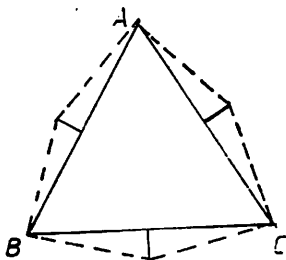


Fig. 102.

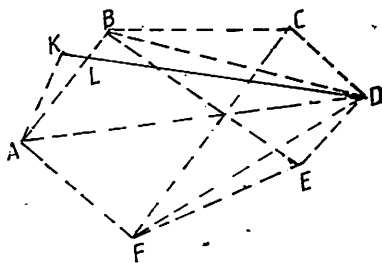


Fig. 103.

nu este mai mic decît 30° , fie acesta \widehat{ADB} . Construim triunghiul AKD așa încît $\widehat{ADK} = 30^\circ$ și $\widehat{KAD} = 60^\circ$, A și B fiind în regiuni diferite față de KD . Fie L intersecția dreptei KD sau prelungirii ei cu AB . Avem că $AB \geq AL \geq AK \frac{AD}{2} > 1$. Răspunsul este : DA.

* * * * *

73. Se poate împărți un triunghi echilateral într-un milion de poligoane convexe așa încît orice dreaptă să nu taie mai mult de 40 din acestea ?

Soluție. Da, se poate. Considerînd un poligon cu $3 \cdot 2^k$ laturi de ex. : B_1, \dots, B_6 , se formează ca-n figura 104, $3 \cdot 2^k$ triunghiuri și orice dreaptă nu taie mai mult de două din triunghiurile $C_1B_1C_2, \dots, C_{11}C_6C_{12}$. Pornim de la $\triangle A_1A_2A_3$ și formăm triunghiuri de rang 1 : $\triangle B_1A_1B_2$, $\triangle B_3A_2B_4$ și $\triangle B_5A_3B_6$, vom avea $1 + 3$ poligoane. Apoi formăm triunghiuri de rang 2. Vor rezulta în total :

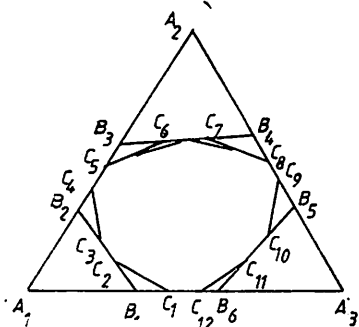


Fig. 104.

Mai formăm triunghiuri de rang 3 și obținem : $1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2$ poligoane. Dacă formăm în general triunghiuri de rang k , atunci numărul total al poligoanelor va fi $1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{k-1} = 1 + 3(2^k - 1)$.

O dreaptă poate tăia poligonul din centru ($3 \cdot 2^k$ laturi) și cel mult două din triunghiurile de fiecare rang. Ca să

fie cel mult 40 vom avea $1 + 2 \cdot k < 40 \Rightarrow k = 19$, deci trebuie să repetăm operația de 19 ori. Obținem mai mult de 1 000 000 de poligoane convexe? $1 + 3(2^{19} - 1) > 2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 > 1000^2$.

* * * * *

74. Să se demonstreze că în orice poligon sînt cel puțin două laturi al căror raport este ≥ 1 și < 2 .

Soluție. Presupunem că asemenea laturi nu există. Să le așezăm în ordinea lor crescătoare: $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n > 0$. Rezultă că $r_1 \geq 2r_2$, $r_2 \geq 2r_3, \dots, r_{n-1} \geq 2r_n$. Adunînd aceste inegalități obținem că $r_1 \geq r_2 + r_3 + \dots + 2r_n > r_2 + r_3 + \dots + r_n$ ceea ce este absurd căci r_1, r_2, \dots, r_n sînt laturile unui poligon.

75. Într-un poligon convex cu n vîrfuri se consideră p puncte interioare astfel încît oricare trei din cele $n + p$ puncte să nu fie coliniare. Se formează triunghiuri astfel încît cele $n + p$ puncte date să fie vîrfuri și alte puncte de intersecție între laturi să nu mai apară. Cîte asemenea triunghiuri se formează? Cîte laturi avem?

Soluție. Fie x numărul triunghiurilor. Să calculăm unghiurile:

$$x \cdot 180^\circ = (n - 2)180^\circ + p \cdot 360^\circ \Rightarrow x = n + 2p - 2.$$

Cîte laturi avem? Notînd cu m numărul laturilor rezultă (formula lui Euler, § 5): $n + p - m + x + 1 = 2 \Rightarrow n + p + n + 2p - 2 + 1 - 2 = m \Rightarrow m = 2n + 3p - 3$.

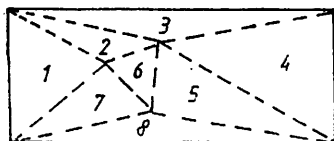


Fig. 105.

☞ (Vezi figura 105 în cazul particular $n = 4, p = 3$).

§ 4. CERCUL

* * *

76. Se dă un patrulater $ABCD$. Cercurile înscrise în $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$ ating diagonala AC în P și Q , iar cercurile înscrise în $\triangle ABD$ și $\triangle BCD$ ating diagonala BD în M și N . Să se arate că $PQ = MN$.

Soluție. Din figura 106 rezultă

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z + x = c \end{cases} \Rightarrow x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$$

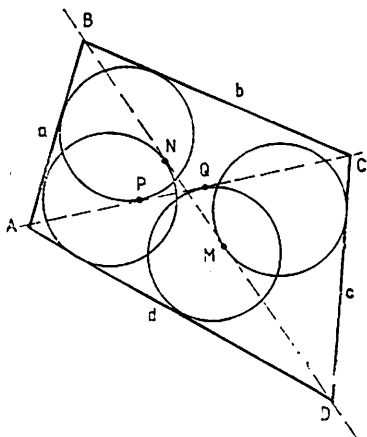


Fig. 106.

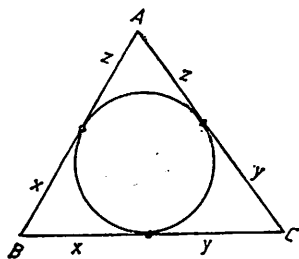


Fig. 107.

$$(1) \quad z = \frac{b + c - a}{2}$$

de unde (în conformitate cu fig. 107). $z \rightarrow AP$, $a \rightarrow b$, $b \rightarrow AC$, $0 \rightarrow a$ respectiv $z \rightarrow AQ$, $a \rightarrow c$, $b \rightarrow AC$, $c \rightarrow d$, obținem

$$\left\{ \begin{array}{l} AP = \frac{a + AC - b}{2} \\ \Rightarrow AQ - AP = \frac{d - c - a + b}{2} = \frac{b + d - (a + c)}{2} \\ AQ = \frac{AC + d - c}{2} \end{array} \right.$$

În mod asemănător, din (1), cu notațiile $z = DM$, $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow BD$, respectiv $z \rightarrow DN$, $a \rightarrow a$, $b \rightarrow d$, $c \rightarrow BD$ rezultă

$$\left\{ \begin{array}{l} DM = \frac{c + BD - b}{2} \\ \Rightarrow DN - DM = \frac{d - a - c + b}{2} = \frac{b + d - (a + c)}{2} \\ DN = \frac{d + BD - a}{2} \end{array} \right.$$

* * * * *

77. Dacă R este raza cercului circumscris și r a celui înscris, atunci $R \geq 2r$.

Soluție. Fie $p - a = \frac{x}{2}$, $p - b = \frac{y}{2}$, $p - c = \frac{z}{2}$. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{R}{2r} &= \frac{abc}{8S^2} = \frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} = \\ &= \frac{1}{y} \left[1 + \left(\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \right) \right] \geq \frac{1}{4} (1+3) = 1. \end{aligned}$$

78. Prin vârful A al triunghiului ABC trece o dreaptă oarecare Δ . Fie P și N respectiv proiecția lui B și C pe dreapta Δ și M mijlocul laturii BC .

a) Să se arate că dreapta AM nu poate fi tangentă cercului circumscris triunghiului MNP indiferent care ar fi poziția dreptei Δ .

b) Să se stabilească relația $AM^2 - PM^2 = AP \cdot AN$.

(Gazeta matematică 1, 1977, Problema nr. 16342).

Soluție. Fie

$ON = b \sin x$, $AP = c \cos(A - x)$, $AN = b \cos x$, $BP = c \sin(A - x)$,

$$PC^2 = b^2 + c^2 \cos^2(A - x) - 2bc \cos(A - x) \cos x.$$

Aplicăm relația lui Stewart în triunghiul BPC :

$$\frac{BP^2}{\frac{a^2}{2}} - \frac{MP^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{PC^2}{\frac{a^2}{2}} = 1 \Rightarrow 2c^2 \sin^2(A - x) + 2b^2 +$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 \cos^2(A - x) - 4bc \cos x \cos(A - x)$$

$$- 4MP^2 = a^2 \Rightarrow 4MP^2 = 2b^2 + 2c^2 -$$

$$- a^2 - 4bc \cos x \cos(A - x) \Rightarrow$$

$$4MP^2 = 4 \left[\frac{1}{2} (b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} \right] -$$

$$- 4bc \cos x \cos(A - x) \Rightarrow$$

$$MP^2 = AM^2 - AN \cdot AP \Rightarrow AM^2 =$$

$MP^2 + AN \cdot AP$, deci al doilea punct b) este demonstrat.

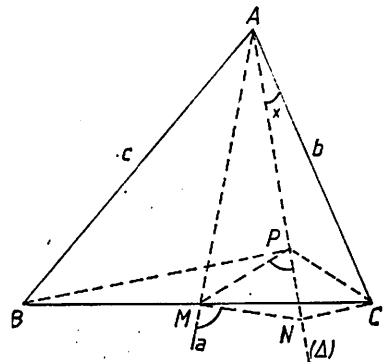


Fig. 108.

a) Se poate răspunde acum și la punctul a) și anume: condiția necesară și suficientă ca $AM^2 = AN \cdot AP$ — în care caz AM este tangentă la cercul MNP , conform puterii punctului — este că $MP^2 = 0$.

* * * * *

79. Să se arate că dacă laturile a, b, c ale unui triunghi formează o progresie aritmetică, atunci centrul cercului înscris, vârful B al triunghiului și mijloacele laturilor ce formează acest unghi sînt conciclice. Este oare adevărată și reciproca?

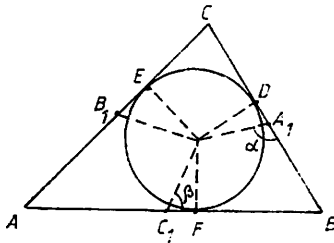


Fig. 109

Soluție. Fie D, E, F punctele de tangentă ale cercului înscris cu laturile triunghiului (fig. 109). Întrucît $BD = BF, FA = AE, CE = CD$ (ca tangente dintr-un punct exterior cercului, rezultă că dacă vom nota $BD = BF = x$, iar laturile triunghiului cu a, b, c , atunci $AE = AF = c - x, CE = CD = a - x \Rightarrow AB + BC + CA = a + b + c = AF + FB + BD + DC + CE + EA = c - x + x + x + a - x + a - x + a + c - x = 2(a + c - x) \Rightarrow 2x = a + c - b \Rightarrow$

$x = \frac{a + c - b}{2} = p - b$, unde am notat $p = \frac{a + b + c}{2}$. Notînd cu A_1, B_1, C_1 respectiv mijloacele laturilor BC, AC și AB , vom avea

$$\begin{aligned} A_1D &= \frac{a}{2} - (a - x) = \frac{a}{2} - (a - p + b) = p - b - \frac{a}{2} = \\ &= \frac{a + b + c}{2} - b - \frac{a}{2} = \frac{c - b}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{ctg} z = -\frac{A_1D}{r} = -\frac{c - b}{2r} = \frac{b - c}{2r}$$

iar

$$C_1F = \frac{c}{2} - x = \frac{c}{2} - \frac{a + c - b}{2} = \frac{b - a}{2} \Rightarrow$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{C_1 F}{r} = \frac{b-a}{2r} \Rightarrow$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{b-c}{2r} + \frac{b-a}{2r} = \frac{2b - (a+c)}{2r}.$$

Dar laturile a, b, c sînt în progresie aritmetică, adică $b = a + d$, $c = b + d = a + 2d$, așa că $2b = 2(a + d) = a + (a + 2d) = a + c$ și deci $2b - (a + c) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 0 \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$ și deci patrulaterul BA_1OC_1 este inscripabil, iar vîrfurile sale B, A_1, O, C_1 conciclice.

Reciproca este de asemenea adevărată. Într-adevăr, $\alpha + \beta = 180^\circ$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{2b - (a+c)}{2r} \Rightarrow$$

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow b - a = \frac{a+c}{2} - a = \frac{c-a}{2},$$

$$\text{iar } c - b = c - \frac{a+c}{2} = \frac{c-a}{2} \Rightarrow b - a = c - b.$$

Și acum, dacă notăm $b - a = c - b = d$, vom avea $b = a + d$, $c = b + d = a + 2d$, adică a, b, c sînt în progresie aritmetică.

* * * *

80. Se prelungesc medianele AA_1, BB_1, CC_1 ale unui triunghi pînă intersectează cercul circumscris în A_2, B_2, C_2 . Să se arate că

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{9}{4}.$$

$$\text{Soluție. } AA_1^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4}, \quad A_1A \cdot A_1A_2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

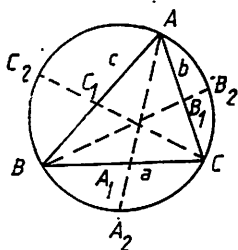


Fig. 110.

$$\begin{aligned}
 \triangle A_1 \cdot \triangle A_2 &= (AA_1 + A_1A_2)AA_1 = AA_1^2 \diamond \\
 + \triangle A_1A_2 \cdot \triangle A_1 &= \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) \diamond \\
 + c^2 &\Rightarrow \frac{AA_1^2}{AA_1 \cdot AA_2} + \frac{BB_1^2}{BB_1 \cdot BB_2} + \frac{CC_1^2}{CC_1 \cdot CC_2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4}}{\frac{1}{2}(b + c^2)} + \frac{\frac{1}{2}(c^2 + a^2) - \frac{b^2}{4}}{\frac{1}{2}(c^2 + a^2)} + \frac{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{c^2}{4}}{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} =$$

$$= 3 - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right).$$

Cum însă $\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2[a^2(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)^2 +$

$$+ b^2(b^2 + c^2)(a^2 + b^2) + c^2(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)] \geq$$

$$\geq 3(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)(b^2 + c^2) \Leftrightarrow (a^3 - ab^2)^2 + (a^3 - ac^2)^2 \diamond$$

$$+ (b^3 - ba^2)^2 + (b^3 - bc^2)^2 + (c^3 - ca^2)^2 + 2a^2b^2c^2 \geq 0$$

și cum $3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, rezultă inegalitatea cerută.

81. Înălțimile BD și CE ale triunghiului ascuțitunghio ABC se intersectează în H . Se duce perpendiculara CF pe tangenta în B la cercul O circumscris triunghiului ABC și se notează cu G al doilea punct de intersecție al cercului O cu CF . a) Să se demonstreze că patrulaterul $BEDF$ este trapez isoscel. b) Cum trebuie să fie triunghiul ABC astfel ca punctele A , H și G să fie coliniare? (Gazeta Matematică 7, 1977, Problema nr. 16407).

Soluție. a) Punctele B, E, D, C, F sînt pe cercul cu diametrul BC (fig. 111).

În $BDCE$ — inscriptibil $\widehat{BCD} = \widehat{BED}$, iar $\widehat{TBA} = \widehat{BCA}$ (subintind arcul \widehat{BA}) deci $FD \parallel BE$. În cerc două paralele determină un trapez isoscel.

b) Să presupunem că perpendiculara din A pe BC este tocmai AG (fig. 112). Atunci trebuie să avem $\widehat{AC} + \widehat{BG} = 180^\circ$ și deci

$\widehat{ABC} + \widehat{BCG} = 90^\circ$. Deci $\widehat{BCG} = 90^\circ - B$, iar $90^\circ - B + A = 90^\circ \Rightarrow A = B$.

* * * * *

82. Să se arate că dat fiind un triunghi echilateral și M un punct al cercului circumscris, unul din segmentele MA, MB, MC este egal cu suma celorlalte două. (Problemă de baraj).

Soluția I. Rotim triunghiul AMB cu 60° în jurul lui $A(B \rightarrow C)$. Sau: deducem AK care face 60° cu AM . $\triangle AMB = \triangle AKC \Rightarrow \triangle AMK$ — echilateral, dar $KC = MB$ și deci $MC = AM + MB$.

Soluția II. În virtutea teoremei lui Ptolemeu, $MC \cdot AB = MB \cdot AC + MA \cdot BC \Rightarrow MC \cdot AB = MB \cdot AB + MA \cdot AB$, de unde $MC = MA + MB$.

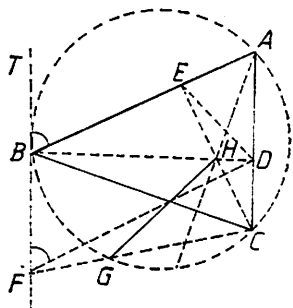


Fig. 111.

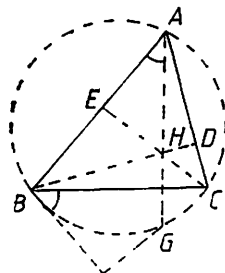


Fig. 112.

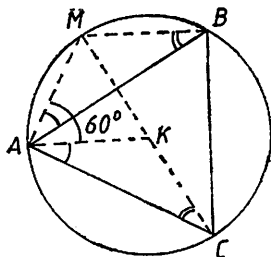


Fig. 113.

* * * *

83. Să presupunem că centrele a trei cercuri de rază r sînt așezate în vîrfurile unui triunghi echilateral, C_0, C_1, C_2 , iar cercul circumscris acestuia are raza a și centrul O . Să se arate că ducînd tangentele la C_0, C_1, C_2 dintr-un punct M al cercului de rază $r + a = R$ cu centrul O , una din ele este egală cu suma celorlalte două. (Problemă de baraj).

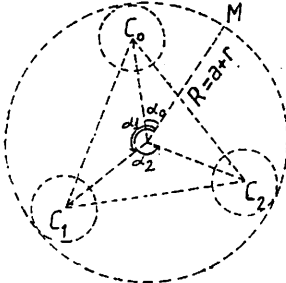


Fig. 114.

Soluție. Fie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ unghiurile pe care le face OM cu OC_k ($k = 0, 1, 2$), atunci $\alpha_k = \alpha_0 + k120^\circ$, iar $MC_k^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha_k$, căci $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$, deci formula este adevărată și pentru $\alpha > \pi$. $MC_k^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha_k - (R - a)^2 = 2Ra (1 - \cos \alpha_k)$ și prin urmare tangentele sînt egale cu $\sqrt{2Ra} \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\alpha_k}{2} = 2\sqrt{Ra} \sin \frac{\alpha_k}{2}$. Rămîne

să dovedim că $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$, ceea ce este evident. În cazul particular în care $r = 0$, se obține problema precedentă.

* * *

84. În triunghiul ABC sînt duse bisectoarele AD și BE ce se intersectează în O . Se știe că segmentul OE are lungimea l , iar vîrfurile C este pe cercul ce trece prin punctele E, D, O . Să se afle laturile și unghiurile triunghiului EDO .

Soluție. Din moment ce punctele C, D, O, E sînt conciclice, rezultă că :

$$\begin{aligned} \widehat{CDO} + \widehat{CEO} &= 180^\circ, \quad \widehat{DOE} + \widehat{C} = 180^\circ, \\ \widehat{CDO} &= 180^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \widehat{C}, \quad \widehat{CEO} = 180^\circ - \\ &- \frac{\widehat{B}}{2} - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ, \quad \widehat{DOE} = 120^\circ, \quad \widehat{EDO} = \\ &= \widehat{DEO} = \frac{\widehat{C}}{2} = 30^\circ, \quad DO = OE = l, \quad DE = l\sqrt{3}. \end{aligned}$$

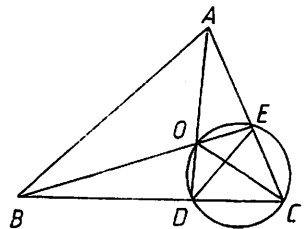


Fig. 115.

* * *

85. Mediana CD a unui triunghi ABC în care $AC > BC$ este tangentă cercurilor înscrise în triunghiurile ACD și BCD în E și F . Să se arate că $2EF = AC - BC$.

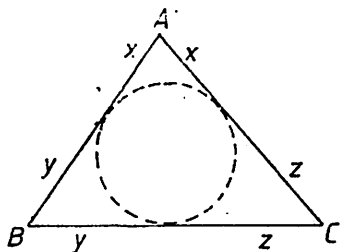


Fig. 116.

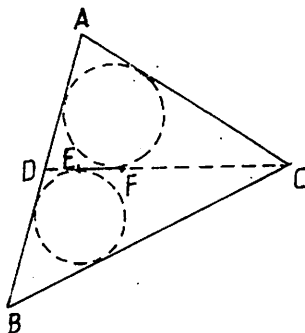


Fig. 117.

Soluție. $2EF = 2DF - 2DE = (DC + DB - BC) -$
 $-(DC + DA - AC) = DC + DB - BC = DC - DA + AC =$
 $= AC - BC$

* * * * *

86. Pe înălțimea AD a unui triunghi dreptunghic ($A = 90^\circ$) ca diametru se construiește un cerc care taie catetele AB, AC în K, M . Segmentul KM intersectează înălțimea AD în L . Știind că $AL^2 = AK \cdot AM$, să se afle unghiurile triunghiului ABC .

Soluție. AD, KM — diametre \Rightarrow se întilnesc cu L — centrul cercului $\Rightarrow AKDM$ — dreptunghi. Fie $AP \perp KM$.

$$AL^2 = AK \cdot AM = 2S = KM \cdot AP =$$

$$= 2AL \cdot AP \Rightarrow AL = 2AP \Rightarrow \widehat{PLA} = 30^\circ$$

$$\widehat{C} = \widehat{BAD} = \widehat{AKM} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 15^\circ.$$

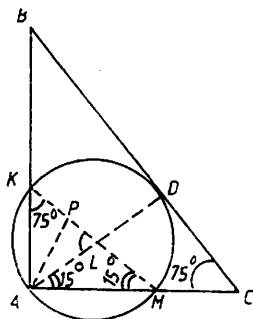


Fig. 118.

* * * * *

87. În triunghiul ABC unghiul \widehat{C} este obtuz. Pe latura AB se iau punctele E, H , iar pe laturile AC și BC punctele K și M . Dacă $AH = AC, EB = CB, AE = AK, BH = BM$, să se arate că punctele E, H, K, M se află pe un cerc.

Soluție.

$$\begin{cases} CKEH - \text{trapez isoscel,} \\ CEHM - \text{trapez isoscel} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow E, H, M, C, K$ pe cercul circumscris triunghiului C, E, H .

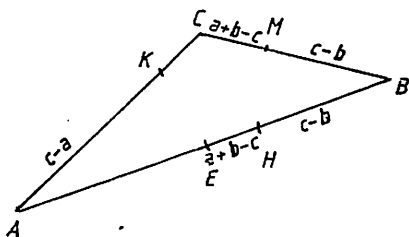


Fig. 119.

* * * * *

88. Fie triunghiul ABC și M — punct interior segmentului AB . Fie r_1, r_2, r razele cercurilor înscrise în triunghiurile AMC, BMC, ABC și ρ_1, ρ_2, ρ razele cercurilor interioare unghiului ACB și exînscrie față de triunghiurile AMC, BMC, ABC respectiv. Să se arate că $\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}$. (Olimpiadă Polonia).

Soluție. Avem că $\frac{r}{\rho} = \frac{p-c}{p} =$

$$= \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \text{ unde } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ și}$$

$$\text{prin urmare } \frac{r_1}{\rho_1} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{\widehat{CMA}}{2},$$

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{\widehat{CMB}}{2},$$

și notînd $\widehat{CMA} = \alpha$,

$$\frac{r_1}{\rho_1} \cdot \frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{r}{\rho}.$$

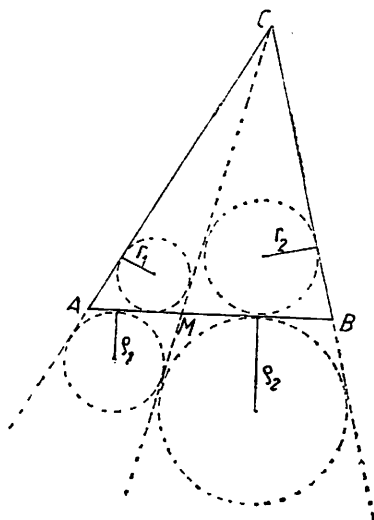


Fig. 120.

* * * *

89. Se dă un pătrat de latură 1. Să se arate că oricare ar fi numărul N , se pot construi cercuri egale, care să nu se intersecteze și interioare pătratului, astfel încât suma lungimilor să fie mai mare ca N și suma ariilor mai mică decât $\frac{1}{N^2}$. (Problemă de concurs).

Soluție. Fie x raza unui astfel de cerc, iar y numărul lor. Atunci, vom avea inegalitățile

$$\begin{cases} 2\pi xy > N, \\ \pi x^2 y < \frac{1}{N^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\pi^2 x^2 y^2 > N^2 \\ \pi x^2 y < \frac{1}{N^2} \end{cases} \Rightarrow 4\pi y = \frac{4\pi^2 x^2 y^2}{\pi x^2 y} > N^4 \Rightarrow y > \frac{N^4}{4\pi}.$$

Cum y trebuie să fie întreg oricare ar fi N , trebuie să avem $y = N^4 > \frac{N^4}{4\pi}$, așa că

$$2\pi xy > N \Rightarrow x > \frac{N}{2\pi y} = \frac{N}{2\pi N^4} = \frac{1}{2\pi N^3}.$$

Fie de exemplu $x = \frac{1}{2N^3}$. Să arătăm că perechea de valori $x = \frac{1}{2N^3}$, $y = N^2$ verifică toate condițiile impuse de problemă. Într-adevăr, sistemul

$$\begin{cases} 2\pi xy > N, \\ \pi x^2 y < \frac{1}{N^2} \end{cases}$$

este verificat căci $2\pi xy = \frac{2\pi N^4}{2N^3} = \pi N > N$, iar $\pi x^2 y = \frac{\pi N^4}{4N^6} = \frac{\pi}{4N^2} < \frac{1}{N^2}$. Rămîne să mai arătăm că cele N^4 cercuri disjuncte de rază

$\frac{1}{2N^3}$ încap în pătratul de latură 1. Dar cele N^4 cercuri se pot așeza în N^2 linii de câte N^2 cercuri fiecare, [iar lungimea unei linii de cercuri tangente două câte două și cu centrele coliniare va fi de $N^2 \cdot \frac{2}{2N^3} = \frac{1}{N} \leq 1$. Același lucru rezultă și pentru cele N^2 cercuri dintr-o coloană, și deci ele încap în pătrat.

* * * * *

90. În interiorul unui pătrat de latură 1 se consideră $2n^2 + 1$ puncte. Să se arate că există un cerc de rază $1/n$ care conține trei din aceste puncte.

Soluție. Ducând paralele la laturi echidistante cu distanța $1/n$ se obțin n^2 pătrate cu latura $1/n$. Există un pătrat care conține în interior sau pe contur cel puțin trei puncte căci altminteri considerând în fiecare pătrat câte două puncte, numărul lor total ar fi de $2n^2$. Ducând un cerc cu raza $1/n$ cu centrul în centrul pătratului se obține cercul căutat (căci diagonala pătratului este $\frac{\sqrt{2}}{n}$ și $\frac{1}{n} > \frac{\sqrt{2}}{2n}$).

91. În pătratul $ABCD$ fie M și N mijloacele laturilor AB și BC , iar $P = DM \cap AN$. Să se arate că: Punctele D, P, N, C sînt conciclice și $CP = CB$ (Gazeta Matematică 8, 1976, Problema nr. 15993).

Soluție. $\triangle AMP \sim \triangle ANB \Rightarrow DM \perp AN \Rightarrow DPNC$ - inscriptibil.

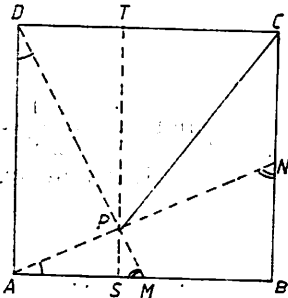


Fig. 121.

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AP}{AB} = \frac{MP}{NB} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{AP}{a} = \frac{MP}{\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow AP = \frac{a}{\sqrt{5}}, \quad MP = \frac{a}{2\sqrt{5}}$$

$$PS = \frac{AP \cdot PM}{AM} = \frac{\frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{5}}}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{5} \Rightarrow TP = \frac{4a}{5}$$

$$AS = \frac{AP^2}{AM} = \frac{\frac{a^2}{5}}{\frac{a}{2}} = \frac{2a}{5} \Rightarrow TC = \frac{3a}{5} \Rightarrow PC = \sqrt{TP^2 + TC^2} =$$

$$= a \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = a.$$

* * * *

92. În interiorul unui pătrat de latură 1 sînt niște cercuri cu suma circumferințelor egală cu 10. Să se arate că există o dreaptă care intersectează cel puțin 4 din aceste cercuri.

Soluție. Să presupunem că o asemenea dreaptă nu există. Aceasta înseamnă că fiecare punct de pe latura AB este acoperit de cel mult trei proiecții de puncte ale circumferințelor, ceea ce înseamnă că suma diametrelor nu depășește pe 3 și prin urmare suma lungimilor cercurilor nu depășește 3π . Dar $10 > 3\pi$, ceea ce ne conduce la o absurditate.

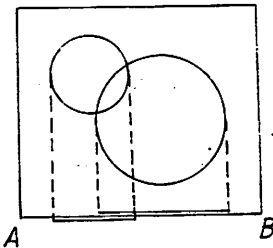


Fig. 122.

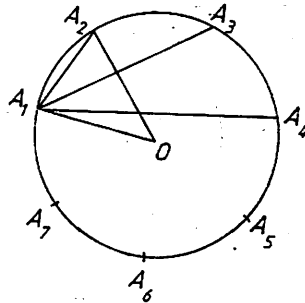


Fig. 123.

* * * *

93. Într-un cerc de rază 1 este înscris un heptagon regulat $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Să se arate că pătratele corzilor A_1A_2 , A_1A_3 , A_1A_4 , satisface ecuația $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$.

Soluție. După cum se știe, unghiurile la centru sub care sînt văzute din O laturile heptagonului regulat înscris într-un cerc de centru O sînt egale cu $\frac{2\pi}{7}$. Așa că din triunghiurile isoscele OA_1A_2 ,

OA_1A_3 și OA_1A_4 (fig. 123), rezultă că $A_1A_2 = 2 \sin \frac{\pi}{7}$, $A_1A_3 = 2 \sin \frac{2\pi}{7}$,

$A_1A_4 = 2 \sin \frac{3\pi}{7}$. Notăm $x_1 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{7}$, $x_2 = 4 \sin^2 \frac{2\pi}{7}$, $x_3 =$

$= 4 \sin^2 \frac{3\pi}{7}$. Pentru a arăta că x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$, este suficient să stabilim, pe baza relațiilor dintre rădăcini și coeficienți, că

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 7, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 14, \quad x_1x_2x_3 = 7.$$

Să verificăm mai întâi identitatea

$$(2) \quad \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Într-adevăr, înmulțind ambii membri cu $\sin \frac{\pi}{7}$ și ținând seama de formula $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$, obținem în cazul relației (2),

$$\begin{aligned} 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= -\sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow \\ \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) + \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \left(-\frac{3\pi}{7} \right) + \sin \pi + \sin \left(-\frac{5\pi}{7} \right) &= \\ = -\sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} &= -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Așadar (2) este adevărată.

Și acum, folosind formula $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, din (2) rezultă

$$1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{7} + 1 - 2\sin^2 \frac{2\pi}{7} + 1 - 2\sin^2 \frac{3\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$4 \left(\sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7} \right) = 7$$

și cu aceasta, prima relație (1) e demonstrată.

Pentru a stabili și a doua relație (1), observăm că

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 49 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 49,$$

asa că-i suficient să arătăm că

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 21 \Rightarrow 16 \left(\sin^4 \frac{\pi}{7} + \sin^4 \frac{2\pi}{7} + \sin^4 \frac{3\pi}{7} \right) = 21 \Rightarrow$$

$$4 \left[\left(2\sin^2 \frac{\pi}{7} \right)^2 + \left(2\sin^2 \frac{2\pi}{7} \right)^2 + \left(2\sin^2 \frac{3\pi}{7} \right)^2 \right] = 21 \Rightarrow$$

$$4 \left[\left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7} \right)^2 + \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7} \right)^2 \right] = 21 \Rightarrow$$

$$4 \left[3 - 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} + \cos^2 \frac{6\pi}{7} \right] = 21$$

și ținând seama de (2), $4 \left(3 + 1 + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} + \cos^2 \frac{6\pi}{7} \right) = 21$, care, în virtutea formulei $2 \cos^2 \alpha = \cos 2\alpha + 1$, implică

$$2 \left(\cos \frac{4\pi}{7} + 1 + \cos \frac{8\pi}{7} + 1 + \cos \frac{12\pi}{7} + 1 \right) = 5 \Rightarrow$$

$$2 \left(\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} + \cos \frac{12\pi}{7} \right) = -1 \Rightarrow$$

$$\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2},$$

$$\left(\text{deoarece } \cos \frac{8\pi}{7} = \cos \frac{6\pi}{7}, \cos \frac{12\pi}{7} = \cos \frac{2\pi}{7} \right)$$

și relația-i verificată-n virtutea lui (2).

În sfârșit, pentru a dovedi și a treia relație (1) observăm că

$$343 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \cdot (x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 294 - 3x_1x_2x_3,$$

dar

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 4^3 \sin^6 \frac{\pi}{7} + 4^3 \sin^6 \frac{2\pi}{7} + 4^3 \sin^6 \frac{3\pi}{7} = \\ &= 2^3 \left[\left(2 \sin^2 \frac{\pi}{7} \right)^3 + \left(2 \sin^2 \frac{2\pi}{7} \right)^3 + \left(2 \sin^2 \frac{3\pi}{7} \right)^3 \right] = \\ &= 8 \left[\left(1 - \cos \frac{2\pi}{7} \right)^3 + \left(1 - \cos \frac{4\pi}{7} \right)^3 + \left(1 - \cos \frac{6\pi}{7} \right)^3 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \left[- \left(\cos^3 \frac{2\pi}{7} + \cos^3 \frac{4\pi}{7} + \cos^3 \frac{6\pi}{7} \right) + 3 \left(\cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{4\pi}{7} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos^2 \frac{6\pi}{7} \right) - 3 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) + 3 \right] = \\
&\quad - 8 \left(\cos^3 \frac{2\pi}{7} + \cos^3 \frac{4\pi}{7} + \cos^3 \frac{6\pi}{7} \right) + 24 + 30 + 12 = \\
&= -4 \left[\cos \frac{2\pi}{7} \left(2 \cos^2 \frac{2\pi}{7} \right) + \cos \frac{4\pi}{7} \left(2 \cos^2 \frac{4\pi}{7} \right) + \cos \frac{6\pi}{7} \left(2 \cos^2 \frac{6\pi}{7} \right) \right] + \\
&\quad + 66 = -4 \left[\cos \frac{2\pi}{7} \left(\cos \frac{4\pi}{7} + 1 \right) + \cos \frac{4\pi}{7} \left(\cos \frac{8\pi}{7} + 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \cos \frac{6\pi}{7} \left(\cos \frac{12\pi}{7} + 1 \right) \right] + 66 = -2 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \right. \\
&\quad \left. + \cos \frac{12\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{18\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) + 68 = \\
&\quad = -4 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) + 68 = 70,
\end{aligned}$$

aşa că

$$\begin{aligned}
343 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 294 - 3x_1x_2x_3 &\Rightarrow 343 = 70 + 294 - 3x_1x_2x_3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow 3x_1x_2x_3 = 21 \Rightarrow x_1x_2x_3 = 7
\end{aligned}$$

și cu aceasta și a treia relație (1) a fost verificată și deci, pe baza relațiilor dintre rădăcini și coeficienți, rezultă că x_1, x_2, x_3 sînt soluțiile ecuației $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$.

* * *

94. Într-un cerc este înscris un poligon convex cu șapte laturi. Se știe că trei dintre unghiuri sînt egale cu 120° . Să se arate că două dintre laturile poligonului sînt egale.

Soluție. Să arătăm mai întii că cel puțin două din unghiurile poligonului egale cu 120° trebuie să fie consecutive. Într-adevăr, dacă cele trei unghiuri n-ar fi consecutive (ca de exemplu în fig. 124),

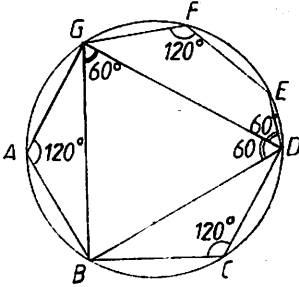


Fig. 124.

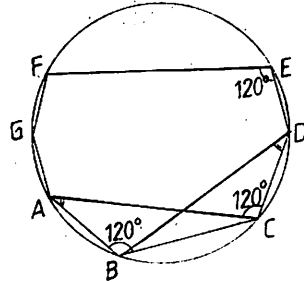


Fig. 125.

atunci unghiurile $\widehat{EDG} = \widehat{GDB} = \widehat{DGB} = 60^\circ$ ca fiind unghiuri opuse la unghiuri de 120° respectiv în patrulaterele înscrisibile $EDGF$, $GDBA$, $BCDG$. Dar aceasta implică faptul că arcele $\widehat{EFG} = \widehat{GAB} = \widehat{BCD} = 120^\circ$ și deci $\widehat{EFG} + \widehat{GAB} + \widehat{BCD} = 360^\circ$, ceea ce contrazice faptul că suma celor trei arce reprezintă circumferința minus arcul \widehat{ED} . Deci, cel puțin două unghiuri de 120° trebuie să fie consecutive.

Să considerăm așadar acest caz (fig. 125). Să arătăm că cele două triunghiuri ABC și BCD sînt egale. Într-adevăr, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = 120^\circ$, $BC = BC$, iar $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ ca unghiuri înscrise în cerc sprijinindu-se pe același arc \widehat{BC} . Deci $\triangle ABC = \triangle BCD$ așa că $AB = CD$ ca opunîndu-se la unghiurile egale $\widehat{ACB} = \widehat{DBC}$.

* * *

95. Dacă A_1, A_2, A_3, A_4 sînt conciclice, atunci $A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_4A_1 = A_2A_4 \cdot A_1A_3$. (Problema lui Claudius Ptolemeu (sec. II e.n.))

Soluție. Stabilim mai întâi că

$$(1) \quad z_2 - z_1 = |z_2 - z_1| e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} i.$$

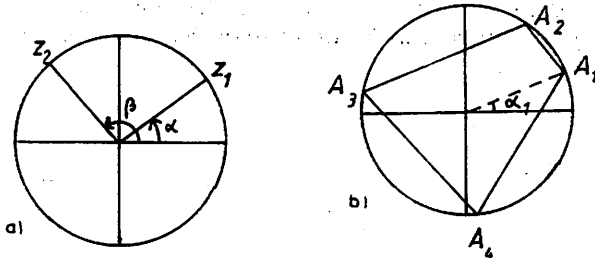


Fig. 126.

Intr-adevăr (vezi prima figură 126),

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= R e^{i\beta} - R e^{i\alpha} = R(e^{i\beta} - e^{i\alpha}) \Rightarrow \frac{z_2 - z_1}{i e^{i \frac{\beta + \alpha}{2}}} = \frac{R}{i} (e^{i \frac{\beta - \alpha}{2}} - e^{-i \frac{\beta - \alpha}{2}}) = \\ &= 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2} > 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = 2R \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \end{aligned}$$

ceea ce implică (1).

Și acum, fie $A_k(R e^{i\alpha_k})$, atunci

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \cdot A_3 A_4 + A_2 A_3 \cdot A_4 A_1 &= |z_2 - z_1| \cdot |z_4 - z_3| + \\ + |z_3 - z_2| \cdot |z_1 - z_4| &= \frac{z_2 - z_1}{i e^{i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}} \cdot \frac{z_4 - z_3}{i e^{i \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}}} + \frac{z_3 - z_2}{i e^{i \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}}} \cdot \frac{z_4 - z_1}{i e^{i \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}}} = \\ &= \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3) + (z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}{i^2 e^{i \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}} = \\ &= \frac{z_2 z_4 - z_2 z_3 - z_1 z_4 + z_1 z_3 + z_3 z_4 - z_3 z_1 + z_1 z_2 - z_2 z_4}{- e^{i \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}} = \\ &= \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{- e^{i \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}} = |z_4 - z_2| \cdot |z_3 - z_1| = A_2 A_4 \cdot A_1 A_3. \end{aligned}$$

96. Prin centrul unui poligon regulat se duce o dreaptă și se calculează suma S a pătratelor distanțelor vîrfulilor la dreaptă. Depinde această sumă de dreaptă?

Soluție. Fie $\varphi = \frac{2\pi}{n}$,

$$S = R^2\{\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha + \varphi) + \sin^2(\alpha + 2\varphi) + \dots + \sin^2[\alpha + (n-1)\varphi]\} \Rightarrow$$

$$S = \frac{R^2}{2}(n - \{\cos 2\alpha + \cos(2\alpha +$$

$$+ 2\varphi) + \dots + \cos[2\alpha + 2(n-1)\varphi]\}.$$

Considerăm

$$P = e^{2i\alpha} + e^{i(2\alpha + 2\varphi)} + \dots +$$

$$+ e^{i[2\alpha + 2(n-1)\varphi]} = e^{2i\alpha} \frac{1 - e^{2ni\varphi}}{1 - e^{2i\varphi}}.$$

Dar $2n\varphi = 2n \frac{2\pi}{n} = 4\pi$, $e^{4i\pi} = 1$ și deci $P = 0 = 0 + 0i \Rightarrow \cos 2\alpha +$

$$+ \cos(2\alpha + 2\varphi) + \dots + \cos[2\alpha + 2(n-1)\varphi] = 0 \text{ și deci } S = \frac{R^2 n}{2}.$$

* * *

97. În interiorul unui cerc de rază R se construiește o stea curbilinie alcătuită din arcele a n cercuri tangente două câte două, avînd aceeași rază r și cu centrul pe cercul dat. Să se găsească valorile lui n pentru care perimetrul acestei stele este egal cu lungimea cercului.

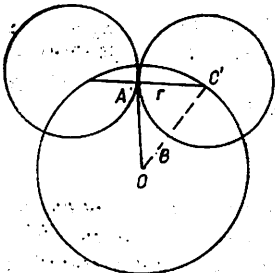


Fig. 128.

Soluție. $r = R \sin \frac{\pi}{n}$, iar \widehat{AB} are $\frac{\pi}{2} -$

$$- \frac{\pi}{n} = \frac{\pi(n-2)}{2n} \text{ radiani și lungimea lui este}$$

$$\text{de } \frac{\pi r(n-2)}{2n}. \text{ Trebuie să avem}$$

$$2\pi R = 2n \cdot \frac{\pi r(n-2)}{2n} \Rightarrow 2R = r(n-2) =$$

$$= R(n-2) \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{n} = \frac{2}{n-2} \left(\frac{\pi}{n} \text{ ascuțit} \right) \Rightarrow$$

$$\cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n-2} \right)^2} = \frac{\sqrt{n^2 - 4n}}{n-2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\sqrt{n^2 - 4n}}.$$

$$\text{Cum } \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{2}{n-2} < \frac{\pi}{n} < \frac{2}{\sqrt{n^2 - 4n}} \Rightarrow \frac{2\pi}{\pi - 2} < n < \frac{4\pi^2}{\pi^2 - 4} \Rightarrow 5 < n < 7 \Rightarrow n = 6.$$

* * * *

98. Într-o arenă de rază 10 m un leu aleargă parcurgînd 30 km. Să se arate că suma unghiurilor cu care se rotește nu este mai mică de 2998 radiani.

Soluție. Rotim arena cu α_1 (fig. 129) așa fel încît x_2 să fie în prelungire cu x_1 , cu α_2 ca x_3 să fie în prelungire cu x_2 ș.a.m.d. Atunci $AA_k = 30\,000$ m. Prin această rotire centrul cercului parcurge

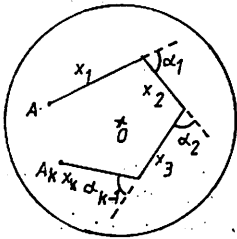


Fig. 129.

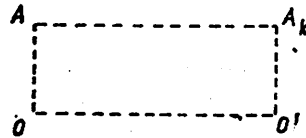


Fig. 130.

cel mult $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}) \cdot 10$ m (fig. 130) $\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}) \cdot 10 \geq OO'$. Cum $OA < 10$, $O'A_k < 10 \Rightarrow AO' > 30\,000 - 10 \Rightarrow OO' > AO' - 10 > 29980 \Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}) \cdot 10 \geq 29980 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} \geq 2998$ radiani.

* * * * *

99. Să se demonstreze că N puncte în plan pot fi totdeauna acoperite de un număr determinat de cercuri disjuncte cu suma diametrelor mai mică decît N și distanța dintre ele mai mare decît 1 (distanța a două cercuri este distanța punctelor celor mai apropiate).

Soluție. Ne sprijinim pe lema : dacă două cercuri cu diametrele d_1, d_2 se intersectează, atunci pot fi acoperite de un cerc cu diametrul cel mult $d_1 + d_2$.

Construim cu centrul în fiecare din cele N puncte câte un cerc cu raza $a > \frac{1}{2}$. Dacă printre acestea sînt cer-

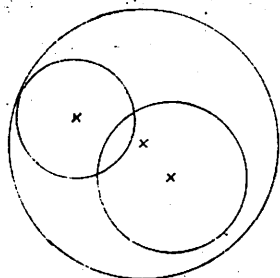


Fig. 131.

curi care se intersectează, atunci oricare două cercuri le înlocuim cu un cerc care le acoperă, folosind lema enunțată. Dacă găsim din nou două cercuri care se intersectează aplicăm iarăși lema și așa mai departe. În acest mod sau se obține un sistem de cercuri care 1) acoperă toate punctele date cu cercurile de rază a cu centrele în aceste puncte și 2) au suma diametrelor cel mult $N \cdot 2a$ sau dacă printre acestea sînt cercuri ce se intersectează, atunci aplicăm lema și construim un nou sistem alcătuit din mai puține cercuri care satisfac condițiile 1) și 2) și în continuare pînă obținem un sistem de K cercuri două câte două exterioare.

Micșorăm acum razele acestor cercuri păstrînd centrele cu mărimea b , $b > \frac{1}{2}$ și $b < a$. Atunci sistemul obținut de K cercuri,

1) conține toate punctele, 2) are suma diametrelor cel mult $N \cdot 2a - K \cdot 2b \leq N \cdot 2a - 2b$, 3) fiecare se află la o distanță de oricare altul de cel puțin $2b$. Dacă se iau a și b astfel ca $\frac{1}{2} < b < a$, $2Na - 2b < N$, atunci toate cerințele sînt satisfăcute. De pildă putem lua chiar de la început $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$ și $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4N}$.

* * * * *

100. Într-un plan se dau $n > 3$ puncte, oricare trei necoliniare. Există un cerc trecînd prin cel puțin trei puncte și care să nu conțină pe nici unul din celelalte?

Soluție. Fie A, B cele mai apropiate două puncte — sau două din acelea care se află la cea mai mică distanță. Fie al treilea punct C astfel încît unghiul ACB să fie cel mai mare. Cercul prin ABC este cercul căutat. În adevăr :

1°) C este ascuțit căci dacă ar fi obtuz am avea $AB > BC$ și $AB > AC$ și AB nu ar fi distanța cea mai mică.

2°) Dacă M ar fi pe segmentul AC sau CB am avea $\widehat{AMB} > \widehat{ACB}$ contrar alegerii.

3°) Dacă M ar fi în același segment cu C am avea $\widehat{AMB} > \widehat{ACB}$ — imposibil.

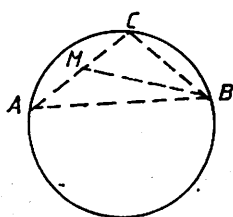


Fig. 132.

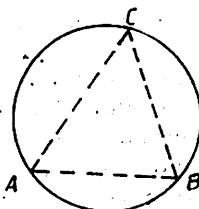


Fig. 133.

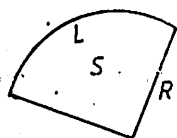


Fig. 134.

4°) Dacă M ar fi în celălalt segment, \widehat{AMB} ar fi obtuz ceea ce este de asemenea imposibil căci cel mai mare unghi am văzut că este ascuțit.

* * *

101. Dintre sectoarele circulare cu același perimetru P să se afle sectorul de arie maximă.

Soluție. $P = 2R + L, S = \frac{LR}{2} \Rightarrow 4S = 2R \cdot L \leq \left(\frac{2R + L}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{P^2}{4} \Rightarrow S \leq \frac{P^2}{16}; \quad \begin{cases} 2R \cdot L = \frac{P^2}{4} \\ 2R + L = P \end{cases} \Rightarrow 2R = L = \frac{P}{2} \Rightarrow$$

$$R = \frac{P}{4}, L = \frac{P}{2}$$

* * * *

102. Într-un cerc dat să se afle cea mai mică coardă ce trece printr-un punct A — interior.

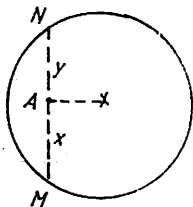


Fig. 135.

Soluție. $xy = (R - a)(R + a)$, $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2(R - a)(R + a)$.
Egalitate pentru $x = y$ deci $x = y = \sqrt{R^2 - a^2}$.

* * * * *

103. Într-un cerc se duc două coarde AB și CD ce se taie în M . Prin mijlocul S al coardei BD se duce dreapta SM ce taie coarda AC în K .

Să se arate că $\frac{AK}{KC} = \frac{AM^2}{CM^2}$.

Soluție. Fie $\frac{AK}{KC} = x \Rightarrow \vec{AK} = x\vec{KC} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -\vec{MA} + \vec{MK} &= x(-\vec{MK} + \vec{MC}) \Rightarrow \vec{MK} = \\ &= \frac{\vec{MA} + x\vec{MC}}{1+x} \Rightarrow \vec{MK} = \frac{1}{1+x}\vec{MA} + \frac{x}{1+x}\vec{MC}. \end{aligned}$$

\vec{MK} și \vec{MS} sint coliniare și deci $\vec{MK} =$
 $= l \cdot \vec{MS} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MD})$. Exprimăm pe \vec{MB} , \vec{MD} prin \vec{MA} și \vec{MC} .

$$\text{Avem că } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MC} \cdot \vec{MD} = k \Rightarrow \frac{\vec{MB}}{\vec{MA}} = \frac{k}{MA^2}, \frac{\vec{MD}}{\vec{MC}} = \frac{k}{MC^2} \Rightarrow$$

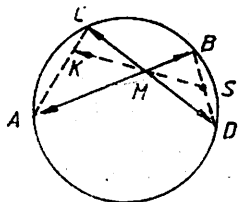


Fig. 136.

$$\begin{aligned} \vec{MB} &= -\frac{k}{MA^2} \vec{MA}, \quad \vec{MD} = -\frac{k}{MC^2} \cdot \vec{MC} \quad \text{și deci } MK = \\ &= -\frac{lk}{2} \left(\frac{\vec{MA}}{MA^2} + \frac{\vec{MC}}{MC^2} \right) \text{ conform unicității descompunerii de unde:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x} = -\frac{lk}{2MA^2} \\ \frac{x}{1+x} = -\frac{lk}{2MC^2} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{lk}{2MC^2} \cdot \left(-\frac{2MA^2}{lk} \right) = \frac{MA^2}{MC^2}$$

* * * * *

104. Pe o masă se află 50 ceasuri care merg bine. Să se arate că există cel puțin un moment când suma distanțelor de la centrul mesei pînă la extremitățile minutarelor este mai mare ca suma distanțelor de la centrul mesei la centrele ceasurilor. (Olimpiadă U.R.S.S.).

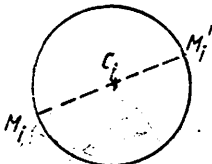


Fig. 137.

Soluție. Fie O centrul mesei, C_i centrele ceasurilor și M_i poziția extremităților minutarului la un moment dat „ t ” și M_i' poziția peste 30 minute. Avem că $\vec{OC}_i = \frac{1}{2}(\vec{OM}_i + \vec{OM}_i')$ și prin urmare $|\vec{OC}_i| \leq \frac{1}{2}(|\vec{OM}_i| + |\vec{OM}_i'|)$.

Sumind obținem $\Sigma |\vec{OC}_i| \leq \frac{1}{2}(\Sigma |\vec{OM}_i| + \Sigma |\vec{OM}_i'|)$. Mă-

car una din inegalitățile $\Sigma |\vec{OC}_i| \leq \Sigma |\vec{OM}_i|$ sau $\Sigma |\vec{OC}_i| \leq \Sigma |\vec{OM}_i'|$ este adevărată. (Media aritmetică este mai mică decît unul din termeni), deci există un moment cînd suma distanțelor la extremitățile minutarelor nu este mai mică decît suma distanțelor la centrele ceasurilor. Dacă avem semnul egal, atunci vom avea semnul egal în toate inegalitățile ceea ce va însemna că O, C_i, M_i sînt

coliniare și în acest caz vom considera momentele $t + 1$ și $t + 31$ minute.

* * * *

105. Este posibil să se așeze, pe circumferința unui cerc de rază unitate, 1975 puncte așa fel încât distanțele, în linie dreaptă, între oricare două dintre ele să fie numere raționale? Demonstrație! (Olimpiada XVII-a : U.R.S.S., 6 puncte).

Soluție. Triunghiurile dreptunghice cu ipotenuza 2 și catetele raționale satisfac condițiile. Într-adevăr, fie C_1, C_2 două puncte cu AC_1, BC_1 și AC_2, BC_2 raționale. Din triunghiurile dreptunghice ABC_1 și ABC_2 (vezi fig. 138), deducem că

$$\frac{AC_1}{2} = \sin \alpha, \quad \frac{BC_1}{2} = \cos \alpha, \quad \frac{BC_2}{2} = \sin \beta, \\ \frac{AC_2}{2} = \cos \beta$$

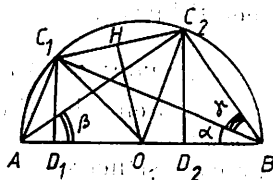


Fig. 138.

sînt de asemenea raționale. Să notăm $\widehat{C_1BC_2} = \gamma$. Evident, $\widehat{C_1OC_2} = 2\gamma$ și deci $\widehat{C_1OH} = \gamma$, unde OH este înălțime în triunghiul C_1OC_2 . Dar, din faptul că $\gamma = (90^\circ - \beta) - \alpha$, rezultă că și

$$\sin \gamma = \sin [(90^\circ - \beta) - \alpha] = \sin (90^\circ - \beta) \cos \alpha - \sin \alpha \cos (90^\circ - \beta) = \\ = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

este rațional, așa că și

$$C_1C_2 = 2C_1H = 2OC_1 \sin \gamma = 2 \sin \gamma$$

e rațional. Cum însă numărul triunghiurilor dreptunghice cu ipotenuza = 2 este măsurabil, conchidem că și numărul punctelor C_1, C_2, \dots , care să fie unul de altul la o distanță rațională este numărabil și deci *a fortiori* putem găsi 1975 astfel de puncte.

* * * * *

106. Trei cercuri egale sînt dispuse ca în figura 139. Să se arate că $\widehat{AB} + \widehat{DC} + \widehat{EF} = 180^\circ$ (Olimpiada : U.R.S.S.).

Soluție. Așezăm vectorii cu originea într-un singur punct.

$$\widehat{(\vec{x}, -\vec{z})} + \widehat{(\vec{y}, -\vec{x})} + \widehat{(\vec{z}, -\vec{y})} = \widehat{(\vec{y}, -\vec{y})} = 180^\circ.$$

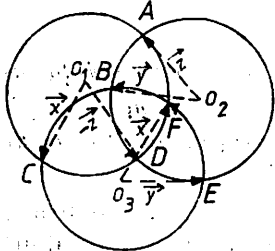


Fig. 139.

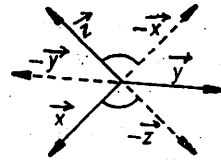


Fig. 140.

Același lucru dacă cercurile trec printr-un singur punct.

§5. TEOREMA LUI EULER

Teorema lui Euler are următorul enunț. Fie în plan m puncte și n arce care nu se intersectează, fiecare arc unind două puncte oarecare și netrecând prin celelalte $n - 2$ puncte. Dacă aceste arce împart planul în l regiuni și dacă dintr-un punct se poate ajunge la oricare altul de-a lungul arcelor, atunci

$$m - n + l = 2.$$

Exemple:

1° $1 - 0 + 1 = 2$ (fig. 141).

3° $2 - 2 + 2 = 2$ (fig. 143).

A •

Fig. 141.

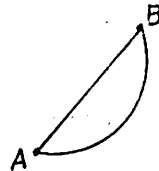


Fig. 143.

2° $1 - 1 + 2 = 2$ (fig. 142).

4° $2 - 1 + 1 = 2$ (fig. 144).

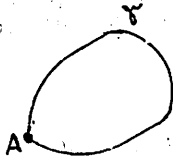


Fig. 142.



Fig. 144.

$5^\circ 3 - 2 + 1 = 2$ (fig. 145). $8^\circ 5 - 6 + 3 = 2$ (fig. 148).

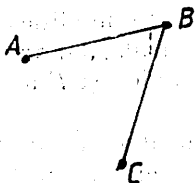


Fig. 145.

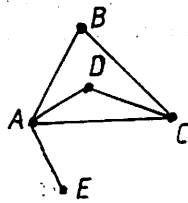


Fig. 148.

$6^\circ 3 - 3 + 2 = 2$ (fig. 146).

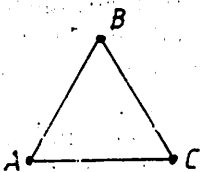


Fig. 146.

$9^\circ 5 - 6 + 3 = 2$ (fig. 149).

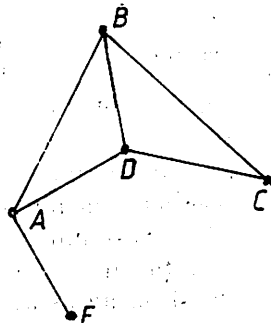


Fig. 149.

$7^\circ 5 - 7 + 4 = 2$ (fig. 147).

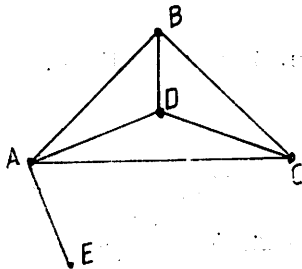


Fig. 147.

$10^\circ 4 - 6 + 4 = 2$ (fig. 150).

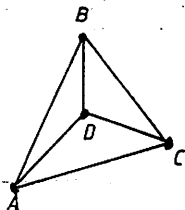


Fig. 150.

DEMONSTRAREA TEOREMEI LUI EULER ÎN CAZUL POLIEDRELOR

Amintim mai întâi că un *poliedru* este un corp solid cu fețe plane, iar un *poliedru simplu* (fără „găuri”) se caracterizează prin aceea că poate fi deformat în mod continuu pînă ajunge o sferă.

Demonstrația o vom face în mai multe etape :

I. Îndepărtăm o față și deformăm suprafața așa fel încît să o așternem în plan. Evident, în felul acesta, se modifică lungimile laturilor, unghiurile, ariile, dar numărul V al vîrfurilor, M al muchiilor și F al fețelor rămîne același.

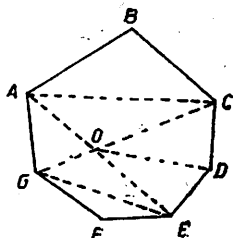


Fig. 151.

II. Triangulăm, ducînd diagonale. Cu fiecare diagonală, M crește cu 1, F crește cu 1, iar V rămîne același, așa că $V - M + F$ nu se schimbă. Obținem o rețea (vezi fig. 151).

III. Îndepărtăm triunghiuri de tipul ABC (V scade cu 1, M scade cu 2, F scade cu 1) și de tipul COD (V rămîne neschimbat, M scade cu 1, F scade cu 1) și constatăm

că prin aceste operații numărul dat de expresia $V - M + F$ nu se modifică.

IV. Îndepărtînd succesiv triunghiuri aparținînd celor două tipuri specificate la punctul precedent, obținem în final un triunghi, căruia îi corespunde $V - M + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Și acum, adăugînd fața înlăturată la început (punctul I), rezultă că $V - M + F = 2$, și cu aceasta, formula lui Euler pentru poliedre simple a fost demonstrată.

Exemple. 11° În cazul poliedrului dat de figura 152, $V - M + F = 10 - 19 + 11 = 2$.

12° În cazul poliedrului dat de figura 153, $V - M + F = 14 - 21 + 9 = 2$.

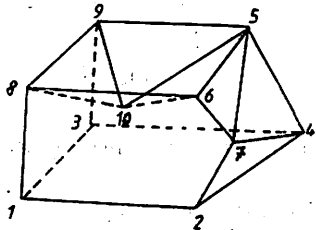


Fig. 152.

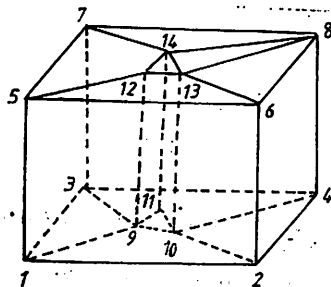


Fig. 153.

APLICAȚIE A TEOREMEI LUI EULER

Să aflăm cu ajutorul formulei lui Euler cîte poliedre regulate există. Amintim că *un poliedru regulat este un poliedru simplu*, care are ca fețe poligoane regulate cu același număr de laturi. Dacă notăm cu n numărul laturilor unei fețe și cu r numărul muchiilor ce se întîlesc în fiecare vîrf, vom avea $nF = 2M$ și $rV = 2M$. Dar atunci, din formula lui Euler deducem că $\frac{2M}{r} - M + \frac{2M}{n} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{M}. \text{ Evident, } n \geq 3, r \geq 3, \text{ dar nu putem avea}$$

simultan $n > 3$ și $r > 3$, căci atunci $\frac{1}{r} + \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$. Așadar, sau

$$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{6} + \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{M} \Rightarrow r = 3, 4, 5; \text{ sau } r = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{M} \Rightarrow n = 3, 4, 5. \text{ Deci în total}$$

vor putea exista doar cinci poliedre regulate.

PROBLEME

107. *Se pot uni 10 orașe prin drumuri care nu se întretaie astfel încît din fiecare oraș să plece 5 drumuri, mergînd spre 5 orașe diferite?*

Soluție. Vom avea $\frac{10 \cdot 5}{2} = 25$ drumuri. După formula lui Euler, $10 - 25 + l = 2 \Rightarrow l = 17$, adică, vor fi 17 regiuni. Cum fiecare regiune este determinată de cel puțin 3 drumuri (căci 2 orașe nu sînt unite prin 2 drumuri), rezultă că am avea cel puțin $\frac{17 \cdot 3}{2} = 25,5$ drumuri, ceea ce arată că problema este imposibilă, adică răspunsul la întrebare este negativ.

* * * *

108. *Trei vecini certați au trei fîntîni comune. Se pot oare duce drumuri care să nu se întretaie de la fiecare vecin la fiecare fîntînă?*

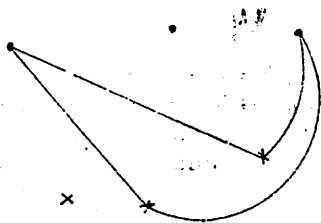


Fig. 154.

Soluție. Avem 6 puncte, 9 arce și regiunile vor fi date de formula lui Euler $6 - 9 + l = 2 \Rightarrow l = 5$ (fig. 154). Fiecare regiune este determinată de cel puțin 4 arce, căci nici un drum nu există între case și fântini, deci vor trebui să fie cel puțin $\frac{5 \cdot 4}{12} = 10$ drumuri, or noi avem doar 9 drumuri, deci problema este imposibilă.

§ 6. PROBLEME ÎN PLAN REZOLVATE VECTORIAL

Vom începe și acest paragraf cu câteva considerații de calcul vectorial, urmate apoi de o expunere referitoare la un subiect înrudit: folosirea numerelor complexe în geometrie.

Amintim mai întâi că două figuri plane se numesc *direct egale* dacă ele pot fi făcute să coincidă fără a le deforma și fără a le scoate din planul lor.

Fiind date două segmente egale $AB = A'B'$, o *deplasare* se numește o transformare punctuală a planului cu proprietatea că fiecărui punct M al planului, îi face să-i corespundă un punct M' astfel încât triunghiul $A'B'M'$ să fie direct egal cu ABM . Distanțele, paralelismul și ordinea punctelor pe dreaptă sînt invariante la deplasări. Deplasările sînt formate din translații și rotații. Să arătăm câteva proprietăți ale deplasărilor.

1° *Adunarea vectorilor este invariantă la o deplasare.* Fie $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Prin deplasare $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$, $\vec{AB} \rightarrow \vec{A'B'}$, $\vec{BC} \rightarrow \vec{B'C'}$, $\vec{CA} \rightarrow \vec{C'A'}$. Dar oricare ar fi A' , B' , C' din plan, este adevărată relația vectorială $\vec{A'B'} + \vec{B'C'} = \vec{A'C'}$, deci adunarea este invariantă la deplasări.

2° *Înmulțirea unui vector cu un scalar este invariantă la o deplasare.* Fie $k\vec{AB} = \vec{AC}$ (fig. 155). Prin deplasare $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$,

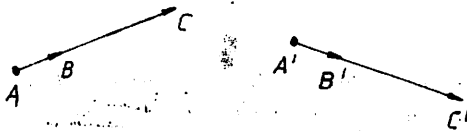


Fig. 155.

$C \rightarrow C'$, dar

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= |\vec{A'B'}| \quad k|\vec{AB}| = k|\vec{A'B'}| \Rightarrow k|\vec{A'B'}| = k|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = \\ &|\vec{A'C'}| \quad |\vec{AC}| = |\vec{A'C'}| \\ &= |\vec{A'C'}| \Rightarrow k|\vec{A'B'}| = |\vec{A'C'}| \Rightarrow k\vec{A'B'} = \vec{A'C'}, \end{aligned}$$

căci deplasarea păstrează ordinea punctelor pe dreaptă.

3° *Produsul scalar a doi vectori este invariant la deplasări.*

Fie $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = |\vec{AB}| |\vec{CD}| \cos \alpha$. În urma deplasării $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, $C \rightarrow C'$, $D \rightarrow D'$ și $|\vec{AB}| = |\vec{A'B'}|$, $|\vec{CD}| = |\vec{C'D'}|$.

Rămine să mai arătăm că unghiul $\alpha = (\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{A'B'}, \vec{C'D'})$.

Invarianța unghiurilor la translație este evidentă deoarece un vector este paralel cu vectorul obținut din acesta printr-o translație. Și acum, să arătăm că unghiurile sînt invariante și la rotații. Să presupunem mai întîi că centrul de rotație ar fi în punctul de intersecție al celor doi vectori \vec{AB} și \vec{CD} sau al prelungirilor acestora (fig. 156) și că rotația efectuată este de un unghi β , pe care, fără a restrînge generalitatea, îl putem presupune ascuțit.

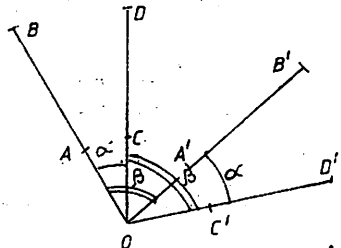


Fig. 156.

Fie așadar unghiul $\alpha = \widehat{BOD}$. În urma rotației, $\vec{OB} \rightarrow \vec{OB'}$ și $\vec{OD} \rightarrow \vec{OD'}$. După cum se vede și din figură, unghiul $\widehat{BOD'} = \alpha + \beta$, cum însă $\widehat{BOB'} = \beta$, rezultă că $\widehat{B'OD'} = \widehat{BOD'} - \widehat{BOB'} = \alpha + \beta - \beta = \alpha$.

În sfîrșit, să ne debarasăm și de ipoteza suplimentară că centrul de rotație este la intersecția celor doi vectori sau a prelungirii lor. Pentru aceasta este suficient să arătăm că prin rotirea unui vector de un unghi β , se obține același vector, indiferent de centrul de rotație (cînd spunem „același vector” înțelegem pînă la un paralelism). Pentru aceasta este de ajuns să arătăm că vectorul inițial a și cel rîtit a' fac un unghi α (fig. 157). Fie

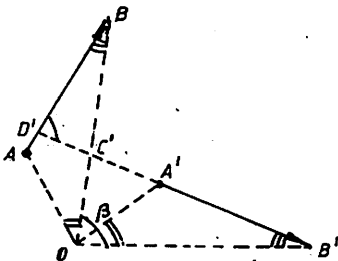


Fig. 157.

O centrul de rotație și $a = \overrightarrow{AB}$ vectorul considerat. În urma rotației, $\overrightarrow{OA} \rightarrow \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} \rightarrow \overrightarrow{OB'}$ și deci triunghiul OAB se suprapune peste triunghiul $OA'B'$. Și acum, prelungind latura $A'B'$, aceasta va intersecta latura OB în C' și latura AB în D' . Triunghiurile $BC'D'$ și $OB'C'$ sînt asemenea căci au $\sphericalangle D'BC' = \sphericalangle C'B'O$ ca făcînd parte din triunghiurile egale OAB și $OA'B'$, iar $\sphericalangle BC'D' = \sphericalangle OC'B'$ ca opuse la vîrf, așa că rezultă $\sphericalangle BD'C' = \sphericalangle B'OC' = \beta$, ceea ce trebuia demonstrat. Dar atunci, rezultă că și pentru produsul scalar de la început, vom avea $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos \alpha = |\overrightarrow{A'B'}| |\overrightarrow{C'D'}| \cos \alpha = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

APLICAȚIA NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE

Fie $M(x, y)$ un punct din plan de coordonate (x, y) ; atunci numărul complex $z = x + iy$ se numește afixul punctului M . De asemenea, modulul vectorului \overrightarrow{OM} va fi $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho = |z|$, iar unghiului u făcut de vectorul \overrightarrow{OM} cu axa x -lor îi corespunde $u = \arctg \frac{y}{x} = \arg z$. Vom avea $\begin{cases} x = \rho \cos u, \\ y = \rho \sin u, \end{cases}$ ceea ce ne permite

să scriem numărul complex z sub formă trigonometrică $z = \rho(\cos u + i \sin u) = \rho e^{iu}$. Și acum citeva proprietăți elementare:

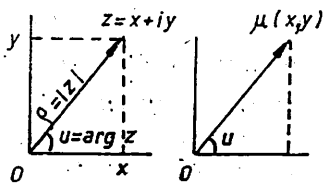


Fig. 158.

$$z = \sum_k k_k z_k = \begin{cases} x = \sum_k k_k x_k \\ y = \sum_k k_k y_k \end{cases} \Rightarrow \left| \sum_k z_k \right| \leq$$

$$\leq \sum_k |z_k|. \text{ Apoi, } \left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|, \text{ căci } \left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \left| \prod_{k=1}^n \rho_k e^{iu_k} \right| =$$

$$= \left| e^{i \sum_{k=1}^n u_k} \prod_{k=1}^n \rho_k \right| = \left| e^{i \sum_{k=1}^n u_k} \right| \prod_{k=1}^n \rho_k = \prod_{k=1}^n \rho_k = \prod_{k=1}^n |z_k|.$$

De asemenea, $\arg \Pi z_k = \sum \arg z_k$; $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$; $\bar{z} = x - iy$, $z\bar{z} = \rho^2$.

Rotirea de un unghi α a unui punct din plan. Știm că $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(u_1 + u_2) + i \sin(u_1 + u_2)]$ așa că dacă, în particular, $z = \rho(\cos u + i \sin u)$, iar $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, atunci $z' = z z_1 = \rho[\cos(u + \alpha) + i \sin(u + \alpha)] = z e^{i\alpha}$.

Transcrierea relațiilor vectoriale.

$$\overrightarrow{OM} = k_1 \overrightarrow{OM_1} + k_2 \overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow z = k_1 z_1 + k_2 z_2.$$

$$\text{Mijlocul segmentului } \overline{M_1 M_2}: z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

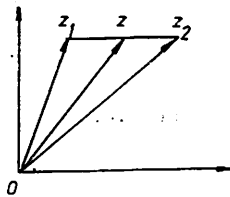


Fig. 159.

(fig. 159).

$$\frac{MM_1}{MM_2} = k \Leftrightarrow \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = k \Rightarrow z = \frac{z_1 - k z_2}{1 - k} =$$

= afișul punctului care împarte segmentul $\overline{M_1 M_2}$ în raportul k .

Coliniaritate. M colinar cu M_1 și $M_2 \Leftrightarrow z = k_1 z_1 + k_2 z_2$,

$$k_1 + k_2 = 1 \text{ (fig. 160). În particular, } z = \frac{z_1 - k z_2}{1 - k} = z_1 \frac{1}{1 - k} - z_2 \frac{k}{1 - k}.$$

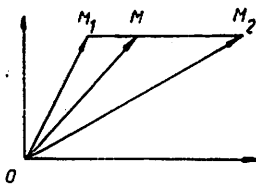


Fig. 160.

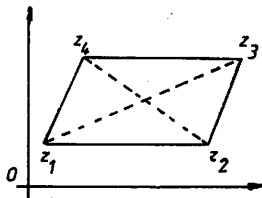


Fig. 161.

Paralelogram (fig. 161). $\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2} \Rightarrow z_1 + z_3 = z_2 + z_4$

Triunghiuri cu același centru de greutate. $z_1 + z_2 + z_3 = z'_1 + z'_2 + z'_3$.

Distanța. $M_1 M_2 = |z_2 - z_1|$.

Ecuția cercului. $|z - a| = \rho$.

Unghiul (fig. 162). $\ast M_2OM_1 = \arg z_2 - \arg z_1$. $\ast M_3M_2M_1 =$
 $= \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ (fig. 163).

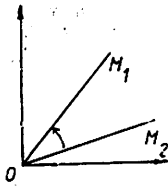


Fig. 162.

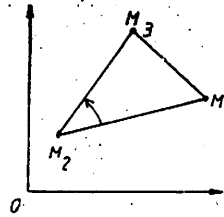


Fig. 163.

De aici, coliniaritatea punctelor $M_1, M_2, M_3 \Leftrightarrow \arg \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = 0$ sau π
 $\Rightarrow \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ real.

Perpendicularitate (fig. 164). $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{M_3M_4} \Leftrightarrow \arg(z_2 - z_1) -$
 $-\arg(z_3 - z_4) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ pur imaginar

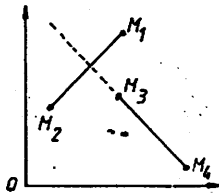


Fig. 164.

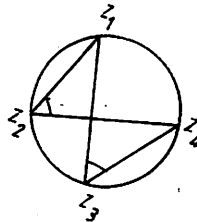


Fig. 165.

Patru puncte conciclice (fig. 165). $\arg \frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \arg \left(\frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} \right) = 0 \Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ real. Cantitatea
 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_4 - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ se numește raport anarmonic.

Așadar, dacă patru puncte sînt conciclice, raportul anarmonic al afixelor este real.

Triunghiuri asemenea. $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle A'_1A'_2A'_3 \Leftrightarrow \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{a'_2 - a'_1}{a'_3 - a'_1} \Leftrightarrow$ egalitatea între moduli și argumente sau încă

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Triunghi echilateral. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 = 0 \Leftrightarrow (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3)(a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon + a_3) = 0$, unde 1, ε , ε^2 sînt cele trei rădăcini cubice ale unității.

Cîteva proprietăți ale argumentului unui număr complex. Facem observația că fiind dat un număr complex z sub formă trigonometrică: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, argumentul φ ce-i corespunde se notează $\text{Arg} z$; în cazul particular în care $0 \leq \varphi < 2\pi$, argumentul se notează $\varphi = \arg z$, așa că $\text{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

Avînd în vedere că $-z = -x - iy = \rho[\cos(\varphi + \pi) + i \sin(\varphi + \pi)]$, vom avea $\text{Arg}(-z) = \text{Arg} z + (2k+1)\pi$, iar $0 \leq \arg z < \pi \Rightarrow \arg(-z) = \arg z + \pi$ și $\pi \leq \arg z < 2\pi \Rightarrow \arg(-z) = \arg z - \pi$. De asemenea, deoarece $\bar{z} = \rho[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = \rho[\cos(2\pi - \varphi) + i \sin(2\pi - \varphi)] \Rightarrow \arg \bar{z} = 2\pi - \arg z$.

Vectori coliniari. Dacă a, b reprezintă afixele unor vectori coliniari

$$\arg a = \arg b \Leftrightarrow |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow |a - b| = ||a| - |b||,$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a| |b| = a\bar{b} = \bar{a}b, \\ \frac{|a|}{|b|} = \frac{a}{b}, \end{cases}$$

$$\arg a - \arg b = \pm \pi \Leftrightarrow |a + b| = ||a| - |b|| \Leftrightarrow |a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |a| |b| = -a\bar{b} = -\bar{a}b, \\ \frac{|a|}{|b|} = -\frac{a}{b}. \end{cases}$$

Mai amintim că, în general, $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + 2k\pi$,
 $\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2 + 2k\pi$.

Teoremă. Dacă a, b, c, d sînt afixele punctelor conciclice A, B, C, D , originea axelor de coordonate fiind situată în centrul cercului respectiv atunei

$$(1) \quad ab = cd \Leftrightarrow AB \parallel CD,$$

$$(2) \quad ab + cd = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD.$$

Într-adevăr, ducînd medianele din O în triunghiurile isoscele AOB și COD , acestea vor fi și bisectoare și înălțimi în triunghiurile respective. În vederea stabilirii relației (1), să presupunem mai întîi că are loc relația $ab = cd$. Notînd cu M și N mijloacele laturilor \overline{AB} , respectiv \overline{CD} , acestea vor avea afixele $\frac{a+b}{2}$, respectiv $\frac{c+d}{2}$.

Și acum, pentru a stabili paralelismul segmentelor AB și CD , este suficient să arătăm că MO și ON sînt în prelungire, adică $\sphericalangle MON = \pi$, ceea ce revine la a verifica relația $\arg \frac{a+b}{2} - \arg \frac{c+d}{2} = \pm \pi$, sau OM și ON se suprapun (parțial) adică verifică relația $\arg \frac{a+b}{2} = \arg \frac{c+d}{2}$. În primul

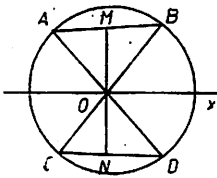


Fig. 166.

caz, și pentru poziția axelor de coordonate din figura 166 vom avea

$$\begin{aligned} \arg \frac{c+d}{2} - \arg \frac{a+b}{2} &= \arg c + \frac{\arg d - \arg c}{2} - \arg b - \\ &\quad - \frac{\arg a - \arg b}{2} = \arg \frac{c}{b} + \frac{\arg \frac{d}{c} - \arg \frac{a}{b}}{2} = \\ &= \arg \frac{c}{b} + \frac{\arg \frac{bd}{ac}}{2} = \arg \frac{c}{b} + \frac{\arg \left(\frac{b}{c}\right)^2}{2} = \arg \frac{c}{b} + \\ &\quad + \arg \frac{b}{c} = \arg \frac{c}{b} + \pi - \arg \frac{c}{b} = \pi. \end{aligned}$$

În cazul $\star MON = 0$, pentru poziția axelor de coordonate din figura 167 vom avea

$$\begin{aligned} \arg \frac{c+d}{2} - \arg \frac{a+b}{2} &= \arg d + \frac{\arg \frac{c}{d}}{2} - \arg b - \\ & - \frac{\arg \frac{a}{b}}{2} = -\arg \frac{b}{d} + \frac{\arg \frac{bc}{ad}}{2} = -\arg \frac{b}{d} + \\ & + \frac{\arg \left(\frac{b}{d}\right)^2}{2} = -\arg \frac{b}{d} + \arg \frac{b}{d} = 0. \end{aligned}$$

Atragem atenția că și în cazurile cînd axele de coordonate nu au față de punctele A, B, C, D pozițiile din figurile 166 și 167 demonstrațiile au loc în mod analog.

Pentru a stabili implicația inversă să presupunem așadar că $AB \parallel CD$. Dar atunci, în cazul figurii 166, raționînd ca mai sus, vom avea

$$\begin{aligned} \pi &= \arg \frac{c+d}{2} - \arg \frac{a+d}{2} = \arg \frac{c}{b} + \\ & + \frac{\arg \frac{bd}{ac}}{2} = \pi - \arg \frac{b}{c} + \frac{1}{2} \arg \frac{b}{c} + \frac{1}{2} \arg \frac{d}{a} = \pi + \\ & + \frac{1}{2} \arg \frac{cd}{ab} \Rightarrow \arg \frac{cd}{ab} = 0 \Rightarrow \frac{cd}{ab} = k \text{ real pozitiv,} \end{aligned}$$

dar, cele patru puncte fiind conciclice, vor avea același modul, ceea ce implică $\left| \frac{cd}{ab} \right| = 1 = k \Rightarrow \frac{ab}{cd} = 1$. În cazul figurii 167; rațio-

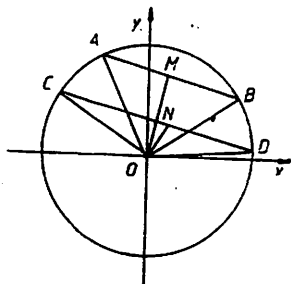


Fig. 167.

nind ca mai sus obținem

$$0 = \arg \frac{c+d}{2} - \arg \frac{a+b}{2} = -\arg \frac{b}{d} + \frac{1}{2} \arg \frac{bc}{ad} = -\arg \frac{b}{d} + \frac{1}{2} \arg \frac{b}{d} + \frac{1}{2} \arg \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \arg \frac{cd}{ab} \Rightarrow \frac{cd}{ab} = k \text{ real pozitiv și, raționind ca în cazul precedent, rezultă } ab = cd.$$

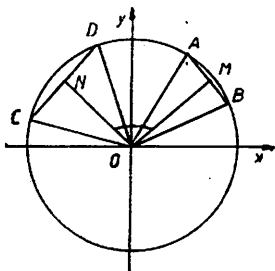


Fig. 168.

Și acum, să stabilim relația (2). Făcând și în acest caz o construcție similară cazului precedent, vom considera triunghiurile isoscele AOB și COD și medianele corespunzătoare \vec{OM} și \vec{ON} , punctele M și N avind afixele $\frac{a+b}{2}$ și $\frac{c+d}{2}$ (fig. 168). Raționind ca mai sus, vom avea

$$\begin{aligned} \arg \frac{c+d}{2} - \arg \frac{a+b}{2} &= \arg d + \\ &+ \frac{1}{2} (\arg c - \arg d) - \arg b - \frac{1}{2} (\arg a - \arg b) = \\ &= \frac{1}{2} (\arg c + \arg d - \arg a - \arg b) = \frac{1}{2} \arg \frac{cd}{ab} = \\ &= \frac{1}{2} \arg (-1) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

ceea ce stabilește ortogonalitatea lui \vec{AB} față de \vec{CD} .

Pentru a stabili implicația inversă, să presupunem că $\vec{AB} \perp \vec{CD}$. Dar atunci, raționind ca mai sus, rezultă că

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \arg \frac{c+d}{2} - \arg \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \arg \frac{cd}{ab} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi - \arg \left(-\frac{cd}{ab} \right) \right] \Rightarrow \arg \left(-\frac{cd}{ab} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{cd}{ab} = k \text{ real pozitiv, dar } \left| \frac{cd}{ab} \right| = 1 \Rightarrow -\frac{cd}{ab} = 1 \Rightarrow ab + cd = 0. \end{aligned}$$

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN PROBLEME
LEGATE DE POLIGOANE REGULATE

Avem $z^n - 1 = 0 \Rightarrow z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ și $z_k = z_1^k$ ($k = 1, \dots, n$), punctele corespunzătoare A_0, A_1, \dots, A_{n-1} fiind vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate. Dacă z este o rădăcină a ecuației $z^n = 1$, atunci $1 = z^k \bar{z}^k \Rightarrow \bar{z}^k = \frac{1}{z^k} = \frac{z^n}{z^k} = z^{n-k}$. Dacă $n = 2k \Rightarrow z^k = -1$ și vîrfurile poligonului regulat sînt $1, z, \dots, z^{k-1}, -1, -z, \dots, -z^{k-1}$, iar $\bar{z}^m = \frac{1}{z^m} = -z^{k-m}$.

CALCULUL LATURILOR ȘI LUNGIMILOR DIAGONALELOR

$$\begin{aligned} \overline{A_0 A_k^2} &= |z_k - 1|^2 = (z_k - 1)(\bar{z}_k - 1) = 2 - (z_k + \bar{z}_k) = \\ &= 2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

z_k satisface ecuația $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$, care, în cazul n impar devine $\bar{z} + \bar{z}^2 + \dots + \bar{z}^{\frac{n-1}{2}} + z^{\frac{n-1}{2}} + \dots + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow \Rightarrow (\bar{z}^{\frac{n-1}{2}} + z^{\frac{n-1}{2}}) + \dots + (\bar{z}^2 + z^2) + (\bar{z} + z) + 1 = 0$. Notînd $z + \bar{z} = u \Rightarrow z^2 + \bar{z}^2 = u^2 - 2$, $z^3 + \bar{z}^3 = u^3 - 3u$. În cazul n par, $n = 2m$, $z^n - 1 = (z^m - 1)(z^m + 1) = 0$, primul factor dînd rădăcinile corespunzătoare vîrfurilor pare, iar al doilea factor pe cele corespunzătoare vîrfurilor impare.

Exemple. I. $n = 3$, z_k fiind o rădăcină a lui $z^3 - 1 = 0$, vom avea $z_k^2 + z_k + 1 = 0$

$$\Rightarrow \bar{z}_k + \bar{z}_k + 1 = 0 \Rightarrow \bar{z}_k + z_k = -1 \Rightarrow \overline{A_0 A_k^2} = 2 - 2\cos \frac{2k\pi}{3} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 3 \Rightarrow A_0 A_k = \sqrt{3}.$$

II. $n = 4$, z_k fiind rădăcină a lui $z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z_k^3 + z_k^2 + z_k + 1 = 0 \Rightarrow \bar{z}_k + \bar{z}^2 + z_k + 1 = 0$; de asemenea, $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$. Dacă z_k este o rădăcină a ecuației $z^2 - 1 = 0$, atunci $\bar{z}_k = z_k$, iar dacă-i o rădăcină a ecuației $z^2 + 1 = 0$,

$$\Rightarrow 0, \text{ atunci } z = -\frac{1}{z} - \bar{z}. \text{ Rezultă că } \overline{A_0 A_1^2} = (z_1 - 1)(\bar{z}_1 - 1) = (z_1 - 1)(-z_1 - 1) = 1 - z_1^2 =$$

$$= 1 - i^2 = 2 \Rightarrow A_0 A_1 = \sqrt{2}.$$

APLICAȚII

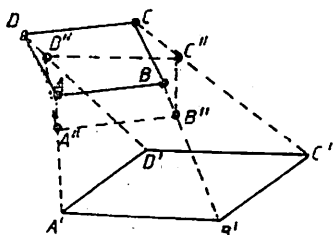


Fig. 169.

1° Considerăm paralelogramele $ABCD$, $A'B'C'D'$, (fig. 169). Punctele care împart AA' , BB' , CC' , DD' în același raport sînt vîrfurile unui paralelogram.

Conform observației relativă la paralelograme făcută mai sus (în cadrul transcrierii relațiilor vectoriale), $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ și $z_1' + z_3' = z_2' + z_4'$. Ținînd seama de expresia afixului punctului

care împarte un segment într-un raport dat (din același paragraf),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A''A}{A''A'} = k \\ \frac{B''B}{B''B'} = k \\ \frac{C''C}{C''C'} = k \\ \frac{D''D}{D''D'} = k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1' = \frac{z_1 - kz_1'}{1 - k} \\ z_2' = \frac{z_2 - kz_2'}{1 - k} \\ z_3' = \frac{z_3 - kz_3'}{1 - k} \\ z_4' = \frac{z_4 - kz_4'}{1 - k} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1' + z_3' &= \frac{z_1 - kz_1'}{1 - k} + \frac{z_3 - kz_3'}{1 - k} = \frac{z_2 + z_4 - k(z_2' + z_4')}{1 - k} = \\ &= \frac{z_2 - kz_2'}{1 - k} + \frac{z_4 - kz_4'}{1 - k} = z_2' + z_4', \end{aligned}$$

deci $A''B''C''D''$ este de asemenea un paralelogram.

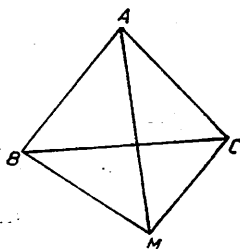


Fig. 170.

2° Inegalitatea lui Ptolemeu. A , B , C , M fiind 4 puncte în plan, avem relația

$$\overline{AM} \cdot \overline{BC} \leq \overline{BM} \cdot \overline{CA} + \overline{CM} \cdot \overline{AB}.$$

Pornim de la identitatea $(z - a)(b - c) + (z - b)(c - a) + (z - c)(a - b) = 0$, de unde $(z - a)(b - c) = (b - z)(c - a) + (c - z)(a - b) \Rightarrow |z - a| \cdot |b - c| \leq |z - b| \cdot |c - a| + |z - c| \cdot |a - b| \Rightarrow 2^\circ$ (fig. 170).

3° **Teorema lui Pompei.** *Cu distanțele unui punct la vîrfurile unui triunghi echilateral, putem forma un triunghi.*

Avem că $|a - b| = |b - c| = |c - a|$ și deci inegalitatea lui Ptolemeu :

$$|z - a| \cdot |b - c| \leq |z - b| \cdot |c - a| + |z - c| \cdot |a - b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z - a| \leq |z - b| + |z - c| \Rightarrow 3^\circ.$$

4° *Cu distanțele unui punct la vîrfurile unui paralelogram, se poate construi un patrulater.*

$ABCD$ fiind un paralelogram (din cele de mai sus),

$$a + c = b + d \Rightarrow a - b + c - d = 0 \Rightarrow$$

$$(a - z) + (z - b) + (c - z) + (z - d) = 0 \Rightarrow$$

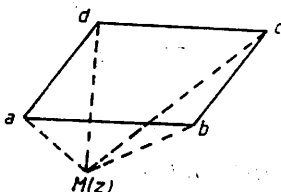


Fig. 171.

$\vec{AM} + \vec{MB} + \vec{CM} + \vec{MD} = 0$, deci cu lungimile $\vec{MA} = |a - z|$, $\vec{MB} = |z - b|$, $\vec{MC} = |c - z|$, $\vec{MD} = |z - d|$ putem forma un contur poligonal închis (fig. 171).

5° **Teoremă.** *Cu distanțele unui punct la vîrfurile unui hexagon ABCDEF format din două triunghiuri ABC și DEF cu același centru de greutate, putem forma un contur poligonal închis (fig. 172).*

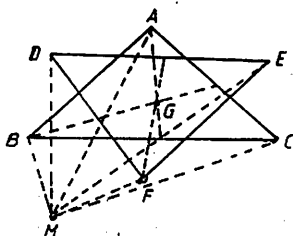


Fig. 172.

În virtutea relației $a + b + c = d + e + f$ din cazul triunghiurilor cu același centru de greutate amintită mai sus (transcrierea relațiilor vectoriale) $\Rightarrow a - d + b - e + c - f = 0 \Rightarrow a - z + z - d + b - z + z - e + c - z + z - f = 0$ și deci cu distanțele MA, MD, MB, ME, MC și MF , putem forma un contur poligonal închis.

6° **Teoremă (T. Angheluță).** *Cu distanțele unui punct la vîrfurile unui poligon regulat putem să formăm un poligon.*

Luind ca origine a axelor de coordonate centrul cercului circumscris poligonului și ca axă a x -lor, dreapta ce trece prin centru și printr-un vîrf, vîrfurilor poligonului le vor corespunde rădăcinile

unității date de ecuația $z^n - 1 = 0$ cu proprietățile $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2 - 2\sum_{p < q} z_p z_q = 0$. Pe de altă parte

din relațiile dintre rădăcini și coeficienți (relațiile lui Viète), deoarece $n \geq 3$, vom avea $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0 \Rightarrow (z_1 + z_2 + \dots + z_n)z - (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2) = 0 \Rightarrow z_1(z - z_1) + z_2(z - z_2) + \dots + z_n(z - z_n) = 0$, unde $|z_k| = 1$ ($k = 1, \dots, n$), și deci modulul unui termen este mai mic decât suma modulelor celorlalți termeni și prin urmare putem forma un contur poligonal închis (fig. 173).

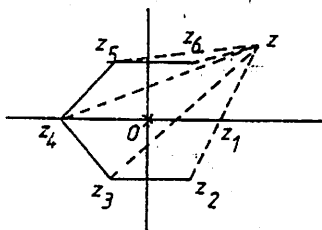


Fig. 173.

7° Teoremă. Fiind dat un triunghi ABC , putem găsi un punct M în planul unui triunghi echilateral UVW , astfel încât distanțele MU , MV , MW să fie egale cu laturile triunghiului ABC (fig. 174).

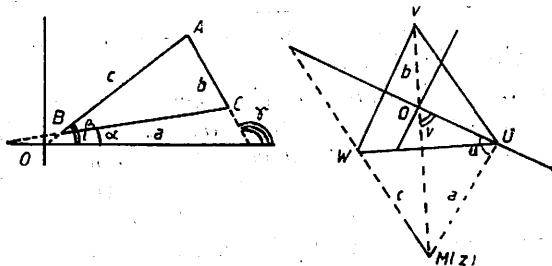


Fig. 174.

Fie O centrul triunghiului echilateral și OU axa reală; fie de asemenea α, β, γ unghiurile laturilor triunghiului ABC cu axa reală. Conturul ABC fiind închis, avem că

$$(3) \quad a(\cos \alpha + i \sin \alpha) + b(\cos \beta + i \sin \beta) + c(\cos \gamma + i \sin \gamma) = 0$$

Fie $M = M(z)$ și u, v, w unghiurile cu axa reală OU ale lui \overrightarrow{MU} ,

\overrightarrow{MV} și \overrightarrow{MW} . Avem că

$$\begin{cases} z = r + a(\cos u + i \sin u) \\ z = r\varepsilon + b(\cos v + i \sin v) \Rightarrow \\ z = r\varepsilon^2 + c(\cos w + i \sin w) \end{cases}$$

$\Rightarrow a(\cos u + i \sin u) + \varepsilon b(\cos v + i \sin v) + \varepsilon^2 c(\cos w + i \sin w) + r(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon) = z(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \Rightarrow a(\cos u + i \sin u) + \varepsilon b(\cos v + i \sin v) + \varepsilon^2 c(\cos w + i \sin w) = 0$ și conform relației (3), putem

lua $u = \alpha$, $v + \frac{2\pi}{3} = \beta$, $w + \frac{4\pi}{3} = \gamma$, deci $u = \alpha$, $v = \beta - \frac{2\pi}{3}$,

$$w = \gamma - \frac{4\pi}{3}.$$

PROBLEME

* * * *

109. Pe laturile CA și CB ale unui triunghi se iau punctele P și Q care împart laturile în raportul λ și μ . Să se găsească raportul în care segmentul PQ împarte mediana \overline{CM} (fig. 175).

Soluție. $\overline{CP} = \lambda \vec{a}$, $\overline{CQ} = \mu \vec{b}$,
 $\overline{CS} = \sigma \overline{CM}$, unde $S = \overline{CM} \cap \overline{PQ}$.

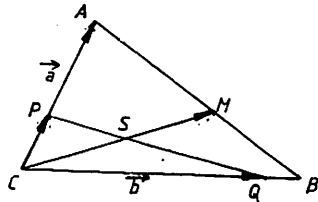


Fig. 175.

$$\begin{aligned} \overline{CQ} + \overline{QS} &= \sigma \overline{CM} \Rightarrow \mu \vec{b} + m \overline{QP} = \\ &= \sigma \overline{CM} \Rightarrow \mu \vec{b} + m(-\mu \vec{b} + \lambda \vec{a}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma}{2} (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} m\lambda = \frac{\sigma}{2} \\ \mu - \mu m = \frac{\sigma}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\lambda} = \frac{\mu - \frac{\sigma}{2}}{\mu} \Rightarrow$$

$$\mu\sigma = 2\lambda\mu - \lambda\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right).$$

* * *

110. Să se demonstreze că medianele pot fi laturile unui triunghi.
 Soluție. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ (fig. 176).

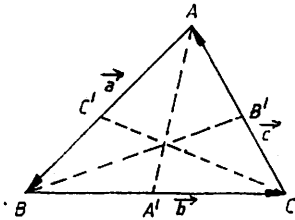


Fig. 176.

$$\begin{aligned} \vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} &= \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \vec{b} + \\ &+ \frac{1}{2} \vec{c} + \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{a} = \frac{3}{2} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0. \end{aligned}$$

* * * * *

111. În plan se dau vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ a căror sumă este 0. Să se arate că

- 1° $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|,$
- 2° $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{b} + \vec{a}| + |\vec{c} + \vec{a}| + |\vec{d} + \vec{a}|,$
- 3° $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c} + \vec{b}| + |\vec{d} + \vec{b}|,$
- 4° $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{c}| + |\vec{b} + \vec{c}| + |\vec{d} + \vec{c}|.$

Soluție. Se poate arăta că cei patru vectori pot fi așezați așa ca să formeze două triunghiuri (ca-n fig. 177). (Aceste triunghiuri pot fi eventual degenerate în două segmente de dreaptă). Evident,

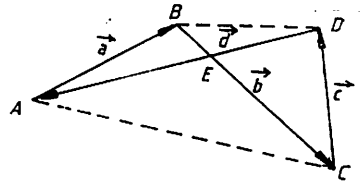


Fig. 177.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= -\vec{d}, \\ DB &\leq DE + EB, \\ CA &\leq EA + CE, \end{aligned}$$

și sumând membru cu membru

$$|\vec{d} + \vec{a}| + |\vec{c} + \vec{d}| \leq |\vec{d}| + |\vec{b}|,$$

cum însă

$$|\vec{b} + \vec{d}| = |-\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{c}|,$$

sumând, membru cu membru, rezultă

$$|\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}|.$$

Raționând ca-n cazul 1°, vom avea

- 2° $|\vec{d} + \vec{a}| + |\vec{b} + \vec{a}| + |\vec{c} + \vec{a}| \leq |\vec{d}| + |\vec{b}| + |\vec{a}| + |\vec{c}|,$
- 3° $|\vec{b} + \vec{a}| + |\vec{c} + \vec{b}| + |\vec{d} + \vec{b}| \leq |\vec{d}| + |\vec{b}| + |\vec{a}| + |\vec{c}|,$
- 4° $|\vec{b} + \vec{c}| + |\vec{d} + \vec{c}| + |\vec{a} + \vec{c}| \leq |\vec{d}| + |\vec{b}| + |\vec{a}| + |\vec{c}|.$

* * * * *

112. Trei vîrfuri ale unui paralelogram se proiectează pe o dreaptă ce trece prin al patrulea și nu în același plan. Să se arate că distanțele celor trei vîrfuri la dreaptă pot fi laturile unui triunghi.

Soluție. Fie $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{D_1C_1} = \vec{m}$,
 $\overrightarrow{B_1D_1} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = -\vec{b} +$
 $\oplus \vec{m}$, $\overrightarrow{DD_1} = -\vec{a} + \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{C_1C} = -$
 $-\vec{m} - \vec{n} - \vec{m} + \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1} +$
 $+ \overrightarrow{C_1C} = 0$.

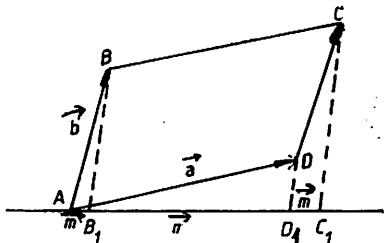


Fig. 178.

§ 7. PROBLEME DE GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN

* * * * *

113. Fie în plan două puncte $A(m, n)$, $B(p, q)$ și $C(x, y)$ un punct oarecare. Să se arate că suma ariilor triunghiurilor orientate ABC și ABD este constantă, dacă D este simetricul lui C față de origine.

Soluție.

$$S_{ABC} + S_{ABD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ p & q & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ p & q & 1 \\ -x & -y & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ p & q & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} m & n & 1 \\ p & q & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2S_{ABO} = \text{constant.}$$

* * * * *

114. Se dă familia de curbe $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. În punctele de abscisă a se duc tangentele la curbele familiei. Să se arate că șirul absciselor punctelor de intersecție ale tangentelor cu axa absciselor, este mărginit, monoton și are limita a .

Soluție. $x_n = a \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \leq -1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq 2$, $n \geq 1$, $1 -$
 $-\frac{1}{n} < 1$ deci $x_n \leq 2a$ ($n \in \mathbb{Z} - \{0\}$).

* * * * *

115. Fie parabola $y = x^2 + mx + n$. Să se arate că dacă m și n sînt parametri și parabola intersectează axele, atunci cercul determinat de punctele de intersecție cu axele trece printr-un punct fix.

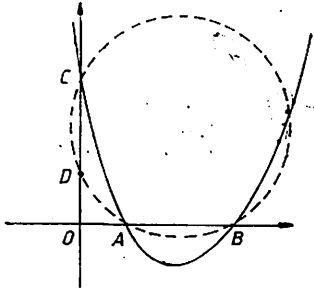


Fig. 179.

Soluție. $OA \cdot OB = OC \cdot OD \Rightarrow x_1 x_2 = OD \cdot y_c$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + mx + n = 0$ așa că $x_1 x_2 = -n$ și deci $n = OD \cdot n \Rightarrow OD = 1$. Deci $D(0, 1)$ este fix.

116. Să se găsească distanța de la dreapta $x - y = 1$ la parabola $y = x^2$.

Soluție. Amintim că distanța dintre parabolă și dreaptă înseamnă cea mai scurtă dintre distanțele de la punctele parabolei la dreaptă. Și acum, să scriem

ecuația tangentei la parabolă într-un punct al acesteia, ecuație ce se obține prin polarizarea ecuației parabolei, adică

$$\frac{1}{2}(y + y_0) - x x_0 = 0 \Rightarrow y - 2x_0 x + y_0 = 0.$$

Și acum, punind condiția ca această dreaptă să fie paralelă cu dreapta $y - x + 1 = 0$ (ceea ce revine la proporționalitatea coeficienților termenilor în x și y), obținem $x_0 = \frac{1}{2}$. Cum însă punctul (x_0, y_0)

se află pe parabolă, rezultă $y_0 = x_0^2 = \frac{1}{4}$. Așadar, dreapta va fi

$y - x + \frac{1}{4} = 0$, punctul de tangență fiind $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Evident,

acesta este și punctul parabolei cel mai apropiat de dreaptă, așa că distanța de la dreaptă la parabolă revine la distanța de la punctul

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ la dreaptă, iar această distanță este dată de

$$d = \frac{y_0 - x_0 + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Înainte de a încheia subcapitolul problemelor de geometrie plană, să dăm câteva tipuri de probleme rezolvate numai cu ajutorul compasului.

1° *Dublarea segmentului.* Se dă segmentul AB (fig. 180). Să se construiască segmentul AC cu mijlocul în B .

Se duc cercurile C_A și C_B (cu centrele în A , respectiv B) de rază AB . Apoi se duce cercul C_D de rază DE . Se verifică imediat că DE este latura triunghiului echilateral înscris în cercul C_B așa că $DE = EC = CD$, ceea ce implică A, B, C coliniare și $AB = BC$.

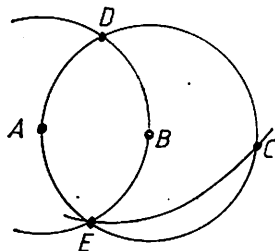


Fig. 180.

2° *Multiplicarea segmentului.* Se dă AB . Să se construiască AC de n ori cât AB și care să conțină punctul B . Se repetă construcția de mai sus de n ori.

3° *Simetricul unui punct față de o dreaptă.* Se dă dreapta AB și punctul C . Să se construiască simetricul lui C față de AB (fig. 181).

Din A și B se duc cercuri de raze, respectiv AC și BC .

4° Să se determine dacă un punct O este pe o dreaptă sau nu. Se face construcția de mai sus. Dacă se obține un singur punct de intersecție, atunci acesta este pe AB .

5° Să se determine punctele de intersecție ale unui cerc cu o dreaptă AB (fig. 182).

Aflăm simetricul O' al centrului C al cercului din enunțul problemei și cu centrul în O' , ducem un al doilea cerc de aceeași rază ca și primul. Fie A, B egal depărtate de C și O' . Prin urmare A, B, D, E sînt pe o dreaptă perpendiculară pe CC' și care trece prin mijlocul lui.

6° Să se afle un punct pe o dreaptă AB (fig. 183).

Din punctele simetrice O și O' , se duc cercuri egale.

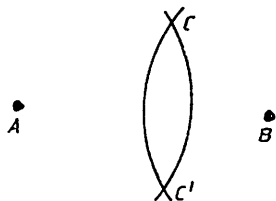


Fig. 181.

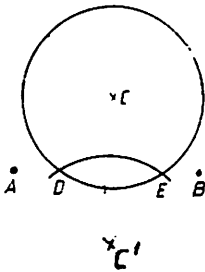


Fig. 182.

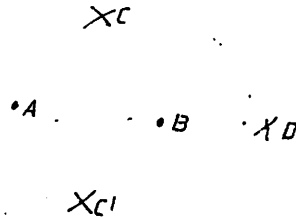


Fig. 183.

7° Pe un segment AB se dă un punct C . Pe segmentul \overline{DE} să se găsească un punct F așa fel încît $\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{DE}$ (Împărțirea în părți proporționale) (fig. 184).

Mărind de un număr suficient de mare de ori atit segmentul AB cît și AC obținem că $\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}$: Putem deci considera că

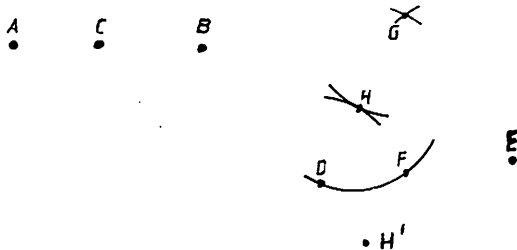


Fig. 184.

punctele A, B sînt suficient de îndepărtate. Din D și E ca centre, se duc arce de rază AB și se obține punctul G . Din D și G se duc arce de rază AC și CB . Se obține H . Se duce cercul de rază HD cu centrul în H și se află punctele de intersecție cu \overline{DE} . F este punctul căutat, căci $\triangle DFH$ și $\triangle DEG$ sînt isoscele cu un unghi la

bază egal, deci sînt asemenea. Prin urmare $\frac{DF}{DE} = \frac{DH}{DG} = \frac{AC}{AB}$.

8° Să se împartă un segment în două părți egale.

Fie dat segmentul DE . Luăm un segment oarecare și-l dublăm; fie C mijlocul segmentului astfel obținut. Apoi, repetăm construcția de la nr. 7°. Putem dubla chiar segmentul dat.

C. GEOMETRIA ÎN SPAȚIU

§ 1. PIRAMIDA

1. PIRAMIDA TRIUNGHILARĂ

* * * * *

117. Două puncte P și Q sînt interioare unui tetraedru regulat $ABCD$. Să se demonstreze că $\sphericalangle PAQ < 60^\circ$ (Olimpiadă S.U.A., 1973).

Soluție. $\sphericalangle PAQ < \sphericalangle NAM$ (fig. 185). Trebuie să dovedim că $\sphericalangle NAM \leq 60^\circ$, ceea ce revine la a demonstra că $MN \leq MA$ și

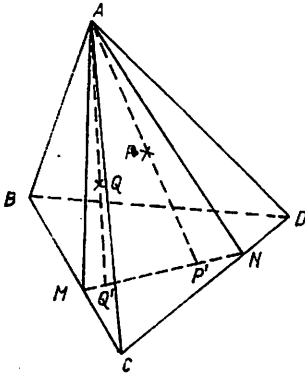


Fig. 185.

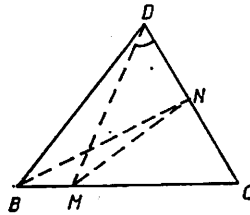


Fig. 186.

$MN \leq NA$. $\triangle DNM$: $\sphericalangle MDN \leq 60^\circ \leq \sphericalangle MND \Rightarrow MN \leq DM = AM$, deci $MN \leq AM$ (fig. 186), căci latura mai mică se opune unghiului mai mic. $\triangle BMN$: $\sphericalangle MBN \leq 60^\circ \leq \sphericalangle BMN \Rightarrow MN \leq BN = AN \Rightarrow MN \leq AN$. Într-un triunghi oarecare celei mai mici laturi i se opune un unghi mai mic, cel mult egal cu 60° și prin urmare $\sphericalangle MAN \leq 60^\circ$. Cum $\sphericalangle PAQ < \sphericalangle MAN$ (strict) rezultă că $\sphericalangle PAQ < 60^\circ$.

* * * * *

118. Să presupunem că un tetraedru verifică una din următoarele proprietăți:

1. toate fețele sînt echivalente,
2. muchiile opuse sînt egale,

8 \Rightarrow 7: Fie poligonul $AFCEBD$ obținut prin desfășurarea tetraedrului (fig. 188) și fie O, O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, ABD, BCE, ACF . Să notăm razele

acestor cercuri egale cu R și de asemenea $\widehat{OAD} = \alpha, \widehat{OBD} = \beta,$

$\widehat{OBA} = \gamma, \widehat{O_1BC} = \alpha_1, \widehat{O_1CA} = \beta_1, \widehat{ABO_1} = \gamma_1$, cit și cele egale cu ele. Ținând seama de faptul că suma unghiurilor unui triunghi este π și $\gamma_1 = \gamma, \alpha_2 = \alpha, \beta_3 = \beta, \beta_1 = \beta_2, \gamma_2 = \gamma_3, \alpha_1 = \alpha_3$ vom avea:

$$\text{În } \triangle ABC, 2\alpha + 2\beta + 2\gamma_2 = \pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{În } \triangle ABD, 2\alpha_1 + 2\beta_1 + 2\gamma_1 = \pi \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1.$$

$$\text{În } \triangle BCE, 2\beta_2 + 2\gamma_2 + 2\alpha_2 = \pi \Rightarrow \beta_2 + \gamma_2 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta + \gamma = \beta_2 + \gamma_2.$$

$$\text{În } \triangle ACF, 2\alpha_3 + 2\gamma_3 + 2\beta_3 = \pi \Rightarrow \alpha_3 + \gamma_3 + \beta_3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \gamma = \alpha_3 + \gamma_3.$$

Sumând membru cu membru relațiile $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1, \beta + \gamma = \beta_2 + \gamma_2, \alpha + \gamma = \alpha_3 + \gamma_3 \Rightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma) = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_2 + \alpha_3 + \gamma_3 = 2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2) = 2(\alpha + \beta + \gamma_2) \Rightarrow \gamma_2 = \gamma \Rightarrow \beta_2 = \beta$ și la fel $\alpha_3 = \alpha, \gamma_3 = \gamma \Rightarrow \alpha_1 + \gamma_1 + \gamma + \beta + \beta_2 + \alpha_3 = \pi, \beta_1 + \gamma_1 + \gamma + \alpha +$

$+ \alpha_2 + \beta_2 = \pi, \gamma_2 + \alpha_2 + \alpha + \beta + \beta_1 = \pi$, adică unghiurile $\widehat{DAF} = \widehat{DBE} = \widehat{ECF} = 180^\circ$ și deci hexagonul $ADBECF$ nu-i altceva decît trunghiul DEF , în care AB, BC și CA sînt linii mijlocii.

6 \Rightarrow 7: În desfășurarea tetraedrului $SABC$ (vezi fig. 187), unghiurile hexagonului $ADBECF$ în vîrfurile A, B, C nu sînt altceva decît suma unghiurilor plane ale fețelor triunghiulare ale tetraedrului avînd vîrfurile respectiv în A, B, C . Cum însă aceste sume sînt prin ipoteză fiecare egale cu 180° rezultă ca-n cazul precedent că hexagonul $ADBECF$ nu-i altceva decît trunghiul DEF în care AB, BC și CA sînt linii mijlocii.

7 \Rightarrow 6: Din figura 188, rezultă evident că $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBE} = \widehat{ECB} + \widehat{BCA} + \widehat{ACF} = 180^\circ$ (toate aceste unghiuri fiind de aceeași parte a cîte unei laturi).

Pe de altă parte punctele A, B, C se unesc în punctul S (virful tetraedrului), iar $\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ$, ca fiind suma unghiurilor unui triunghi.

7 \Rightarrow 2: Evident (fig. 187), căci AD și AF se vor identifica cu muchia SA opusă muchiei BC , iar $BC = AD = AF = a$, la fel

DB și BE vor da $SB = b$ opusă lui $AC = b$ și EC, CF vor corespunde lui $SC = c$ opusă lui $AB = c$.

2 \Rightarrow 3: Muchiile opuse fiind egale (vezi de exemplu fig. 187), toate fețele vor fi triunghiuri egale.

3 \Rightarrow 1: Evident.

1 \Rightarrow 9: Să presupunem că paralelipipedul $AFSQECDB$ este oblic (cu fețele paralelograme). Evident $\triangle BCD = \triangle BCE$ (fig. 189). Dacă de exemplu fața $CFSD$ sau $DSGB$ n-ar fi dreptunghiuri, atunci proiecțiile ortogonale ale lui S și A pe planul de bază n-ar mai cădea

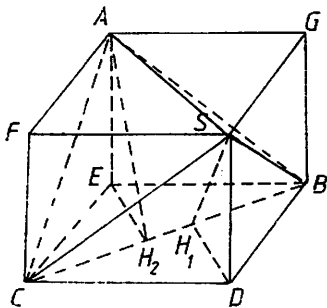


Fig. 189.

în D și E , iar triunghiul SCB s-ar proiecta de exemplu într-un triunghi conținând pe BCD și $\triangle ABC$ într-unul conținut în $\triangle BCE$ sau invers. Cum însă $\triangle BCD = \triangle BCE$, rezultă că cele două triunghiuri menționate mai sus și obținute prin proiecție ortogonală pe planul de bază nu vor fi egale (decît în cazul cînd toate fețele laterale ale paralelipipedului ar fi dreptunghiuri). Dar $\triangle SBC$ fiind echivalent cu $\triangle ABC$, iar baza BC fiind comună rezultă că și înălțimea SH_1 este egală cu înălțimea AH_2 . Dar AS este paralelă cu planul de bază, așa că $SD = AE$ și deci triunghiurile dreptunghice SDH_1 și AEH_2 sînt egale $\Rightarrow DH_1 = EH_2$, iar din teorema celor trei perpendiculare deducem că $DH_1, EH_2 \perp BC$, adică sînt înălțimi în triunghiurile BCD și BCE , de unde conchidem că cele două triunghiuri sînt echivalente, contrazicînd constatarea făcută mai sus că unul din ele ar fi conținut într-unul din triunghiurile în care diagonala BC descompune paralelogramul $CEBD$, iar celălalt triunghi l-ar conține pe cel rămas, contradicția obținută implică faptul că fețele laterale ale paralelipipedului (reprezentînd în același timp și proiecțiile ortogonale ale tetraedrului pe planele respective) sînt dreptunghiuri. Pentru a demonstra și faptul că și proiecția tetraedrului pe planul de bază cit și pe cel paralel cu el sînt dreptunghiuri, n-avem decît să considerăm pentru moment ca plan de bază planul uneia din fețele laterale ale paralelipipedului și să raționăm ca mai sus.

9 ⇒ 7 : Din figura 189 observăm că $ABDF$ e un dreptunghi așa că $AB = FD$; cum însă, prin ipoteză, $CFSD$ este un dreptunghi el are diagonalele egale, așa că $CS = FD = AB$, dar CS și AB sînt muchii opuse-n tetraedrul $SABC$. La fel se arată și despre celelalte muchii opuse că-s egale, ceea ce ne permite să conchidem că prin desfășurarea tetraedrului se obține un triunghi ca-n figura 187, în care AB , BC și CA sînt linii mijlocii.

*

119. Într-un tetraedru muchiile opuse sînt egale respectiv cu a , b , c . Să se afle volumul, poziția centrului sferei circumscrise și raza ei.

Soluție. Evident (fig. 190),

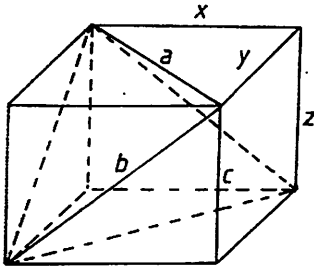


Fig. 190.

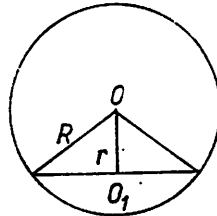


Fig. 191.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = ab \cos C \\ y^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = ac \cos B \\ z^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = bc \cos A \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= xyz - 4 \cdot \frac{xyz}{6} = \frac{xyz}{3} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{8}} = \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} = \frac{1}{3} abc \sqrt{\cos A \cos B \cos C}. \end{aligned}$$

Poziția centrului sferei circumscrise se găsește la intersecția perpendicularelor ridicate din centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ce constituie fețele tetraedrului. Notînd cu R raza și cu O centrul sferei circumscrise tetraedrului, iar cu O_1 centrul cercului circumscris uneia din fețele triunghiulare ale tetraedrului, constatăm mai întîi că cele 4 triunghiuri constituind fețele tetraedrului sînt egale (avînd laturile a, b, c) așa că și razele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri vor fi egale; să notăm valoarea lor comună cu r . De aici rezultă că și distanțele de la O la fețele tetraedrului vor fi egale și anume de exemplu $OO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$. În continuare, notînd cu S aria unei astfel de fețe triunghiulare avem

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{ab \sin C}{2} \\ S = \frac{ac \sin B}{2} \\ S = \frac{bc \sin A}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S^2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2 C}{4} \\ S^2 = \frac{a^2 c^2 \sin^2 B}{4} \\ S^2 = \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{4} \end{array} \right. \Rightarrow 4S^2(a^2 + b^2 + c^2) =$$

$$= a^2 b^2 c^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \Rightarrow S^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{4(a^2 + b^2 + c^2)},$$

iar volumul tetraedrului $V = 4 \cdot \frac{S \cdot OO_1}{3}$. Pe de altă parte $r^2 =$

$$= \frac{a^2}{4 \sin^2 A} = \frac{b^2}{4 \sin^2 B} = \frac{c^2}{4 \sin^2 C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}. \text{ Din}$$

cele ce preced, rezultă $R^2 = OO_1^2 + r^2 = \frac{9V^2}{16S^2} + r^2 =$

$$= \frac{a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C (a^2 + b^2 + c^2)}{4a^2 b^2 c^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} =$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(1 + \cos A \cos B \cos C)}{4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}, \text{ deoarece}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) \Leftrightarrow 2 - \cos^2 A - \cos^2 B +$$

$$+ (\sin A \cos B + \sin B \cos A)^2 = 2 - 2 \cos A \cos B (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \Leftrightarrow$$

$$- \cos^2 A (1 - \sin^2 B) - \cos^2 B (1 - \sin^2 A) + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B =$$

$$= -2 \cos^2 A \cos^2 B + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B. \text{ Așadar } R =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

* * * * *

120. În tetraedrul $ABCD$ avem că $DB \perp DC$, iar piciorul perpendicularei dusă din D pe planul triunghiului ABC coincide cu ortocentrul triunghiului. Să se arate că $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$. Pentru care tetraedre are loc egalitatea? (Olimpiadă Bulgaria).

Soluție. $DO \perp$ planul ABC , $OB' \perp AC \Rightarrow DB' \perp AC \Rightarrow AC \perp$ planul $BDB' \Rightarrow BD \perp AC$.

$DO \perp$ planul ABC , $OC' \perp AB \Rightarrow DC' \perp AB \Rightarrow AB \perp$ planul $DCC' \Rightarrow DC \perp AB$.

$DO \perp$ planul ABC , $OA' \perp BC \Rightarrow DA' \perp BC \Rightarrow BC \perp$ planul $DAA' \Rightarrow DA \perp BC$.
Rezultă că muchiile opuse sînt perpendiculare.

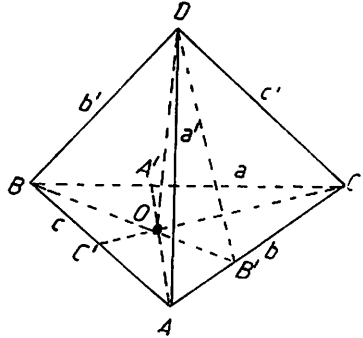


Fig. 192.

$$\left. \begin{cases} BD \perp DC \Rightarrow BD \perp \text{planul } ADC \Rightarrow BD \perp AD \\ BD \perp AC \\ DC \perp BD \Rightarrow DC \perp \text{planul } ABD \Rightarrow DC \perp AD \\ DC \perp AB \end{cases} \right\} \Rightarrow AD, BD, CD \text{ sînt}$$

perpendiculare. Avem că $a^2 = b'^2 + c'^2 = c^2 - a'^2 + b^2 - a'^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2a'^2 = b^2 + c^2 - a^2$. Analog $\Rightarrow \begin{cases} 2b'^2 = c^2 + a^2 - b^2, \\ 2c'^2 = a^2 + b^2 - c^2. \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + a'^2 = a^2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ b^2 + b'^2 = b^2 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow \\ c^2 + c'^2 = c^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 6(a'^2 + b'^2 + c'^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Avem că

$$(1) \quad \begin{cases} (c - a)^2 \geq 0 \\ (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow \\ (c - b)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ și prin urmare $6(a'^2 + b'^2 + c'^2) \geq (a + b + c)^2$ adică $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$. Ca să avem egalitate trebuie ca tetraedrul să aibă baza un triunghi echilateral (pentru a avea egalitate în sistemul (1)).

* * * * *

121. În tetraedrul $ABCD$ din două vîrfuri se duc perpendiculare pe fețele opuse ce se intersectează în O . Să se arate că perpendicularele duse din O pe celelalte două fețe intersectează fețele în ortocentrele lor.

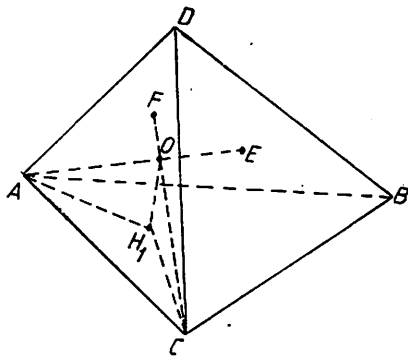


Fig. 193.

Soluție.

$$\begin{cases} \vec{AO} \perp BCD \Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \\ \vec{OH_1} \perp ABC \Rightarrow \vec{OH_1} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{BC} + \vec{OH_1} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \\ \underline{\underline{(\vec{AO} + \vec{OH_1}) \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow \vec{AH_1} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow}} \\ \vec{AH_1} \perp \vec{BC}; \\ \vec{CO} \perp ABD \Rightarrow \vec{CO} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{OH_1} \perp ABC &\Rightarrow \vec{OH_1} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \\ \vec{CO} \cdot \vec{AB} + \vec{OH_1} \cdot \vec{AB} &= 0 \Rightarrow (\vec{CO} + \vec{OH_1}) \cdot \\ \cdot \vec{AB} &= 0 \Rightarrow \vec{CH_1} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \vec{CH_1} \perp \vec{AB} \Rightarrow \\ H_1 &\text{ este ortocentrul triunghiului } ABC; \\ \text{analog pentru } H_2 &\in ADC. \end{aligned}$$

* * * * *

122. Să se demonstreze teorema celor trei perpendiculare cu ajutorul teoremei lui Pitagora.

Soluție. Luăm $BM = BN \Rightarrow OM = ON \Rightarrow AM = AN \Rightarrow AB \perp b$.

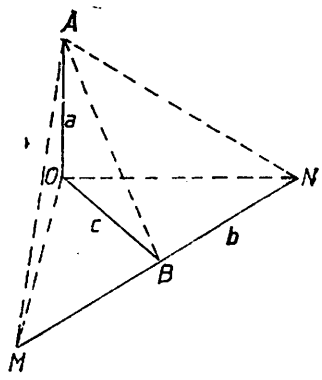


Fig. 191.

2. PIRAMIDĂ PĂTRATĂ

* * *

123. Dintr-un pătrat de latură a se alcătuieste o piramidă pătratică regulată astfel încât vîrfurile pătratului să coincidă cu vîrfurile piramidei. Să se afle latura pătratului de bază astfel încît volumul piramidei să fie maxim.

Soluție. $V = \frac{1}{3} x^2 h,$

$$h = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

$$V = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{\frac{a^2}{2} - 2ax};$$

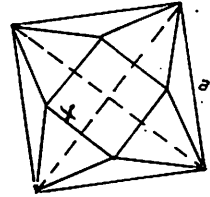


Fig. 195.

iar volumul maxim se obține pentru $x = \frac{\sqrt{2} a}{5}$.

§ 2. CUBUL

* * * *

124. Să se afle distanța de la o diagonală a cubului la o diagonală a feței ce se încrucișează cu ea.

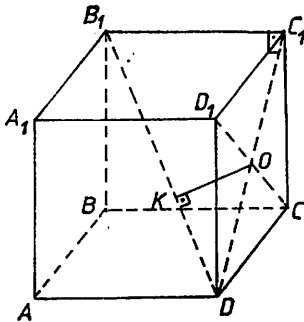


Fig. 196.

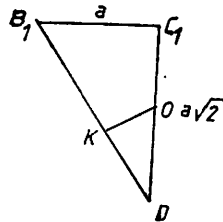


Fig. 197.

Soluție. C_1D — proiecția lui B_1D pe planul DD_1C_1C ,

$$\begin{cases} D_1C \perp DC_1 \\ B_1C_1 \perp D_1C \end{cases} \Rightarrow D_1C \perp DB_1$$

$$\begin{cases} D_1C \perp DC_1 \\ D_1C \perp DB_1 \end{cases} \Rightarrow D_1C \perp \text{planul } (B_1 C_1 D).$$

Din O ducem perpendiculara pe B_1D și aceasta este perpendiculara comună, căci D_1O este perpendiculară pe orice dreaptă din planul DB_1C_1 .

$$\frac{DO}{DB_1} = \frac{OK}{B_1C_1}; \quad \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{OK}{a} \Rightarrow$$

$$OK = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

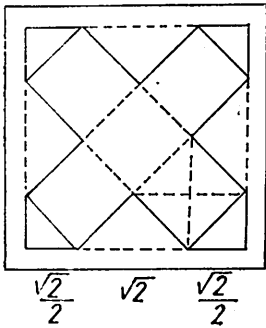


Fig. 198.

* * * * *

125. Se poate înveli un cub cu latura 1, cu o bucată de hîrtie pătratică cu latura 3? (Problemă de baraj).

Soluție. Se poate, așa cum se arată și în figura 198. Latura pătratului în care au fost dispuse fețele este $2\sqrt{2} < 3$, deci se poate înveli cubul, așezînd baza în pătratul din mijloc.

3. PRISMA

* * * * *

126. Într-o prismă triunghiulară toate muchiile sînt egale cu a iar o muchie laterală face cu muchiile bazei concurente unghiuri egale cu α . Să se afle distanța de la această muchie la muchia opusă.

Soluție. BM -bisectoare în $\triangle BDC$ isoscel.

$$DC \perp BM, DC \perp AO \Rightarrow DC \perp AB.$$

Fie $MP \perp AB$

$$\begin{cases} AB \perp PM \\ AB \perp DC \end{cases} \Rightarrow AB \perp PD \Rightarrow$$

$$PD = a \sin \alpha$$

$$PM^2 = a^2 \sin^2 \alpha - \frac{a^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2}{4} (4 \sin^2 \alpha - 1) =$$

$$= \frac{a^2}{4} (3 - 4 \cos^2 \alpha) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{-\cos^3 \alpha}{\cos \alpha}$$

$$PM = \frac{a}{2} \sqrt{-\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha}} \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right).$$

4. PARALELIPEDUL

* * *

127. Să se demonstreze că suma pătratelor tuturor diagonalelor unui paralelipiped este egală cu suma pătratelor tuturor muchiilor.

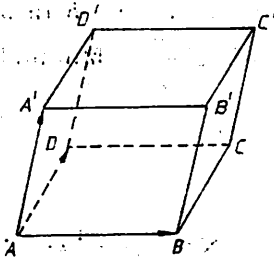


Fig. 200.

Soluție. $\overline{AC}' = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$

$$\overline{BD}' = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a},$$

$$\overline{CA}' = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$

$$\overline{DB}' = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c},$$

$$\overline{AC}'^2 + \overline{BD}'^2 + \overline{CA}'^2 + \overline{DA}'^2 =$$

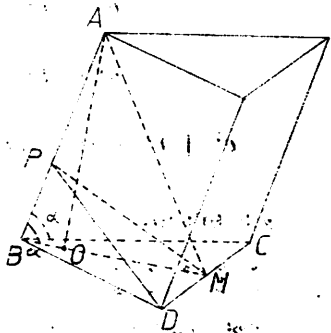


Fig. 199.

$$\begin{aligned}
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{ab} + 2\vec{ca} + 2\vec{bc} + \\
&\quad a^2 + b^2 + c^2 - 2\vec{ab} - 2\vec{ca} + 2\vec{bc} + \\
&\quad a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{ab} - 2\vec{ca} - 2\vec{bc} \\
&a^2 + b^2 + c^2 - 2\vec{ab} + 2\vec{ca} - 2\vec{bc} = 4(a^2 + b^2 + c^2).
\end{aligned}$$

§ 5. SFERA

* * * * *

128. *Dat fiind tetraedrul ABCD se construiesc sfere cu diametrele AB, AC, AD. Să se demonstreze că aceste sfere acoperă tetraedrul (învelesc) (Olimpiada din 1968 în U.R.S.S.).*

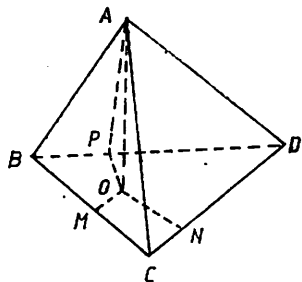


Fig. 201.

Soluție. Fie AO perpendiculara din A pe BCD și din O perpendicularele pe BC , CD , BD . Piramidele $ABMOP$, ... acoperă tetraedrul și fiecare este conținută în sfera de diametru AB etc. deoarece o sferă conține toate cercurile având drept diametru, diametrul sferei.

129. *Să se afle raportul între volumul V_c al conului și V_s al sferei înscrisă într-o piramidă triunghiulară dreaptă, cât și minimul acestui raport.*

Soluție. Dacă α este unghiul de la baza conului, iar R -raza sferei, atunci $V_c = \frac{\pi R^3}{3} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{V_s}{4} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}$. Minimul funcției $y = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2}$ se află din transformarea :

$$y = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow V_c \geq 2V_s.$$

* * * * *

130. Într-un tetraedru este înscrisă o sferă de rază r . Planele tangente paralele cu fețele determină 4 tetraedre, iar sferetele înscrise au razele r_1, r_2, r_3, r_4 . Să se arate că $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2r$.

Soluție. $r = \frac{3V}{S}$. Din asemănarea tetraedrelor (fig. 202) avem

că

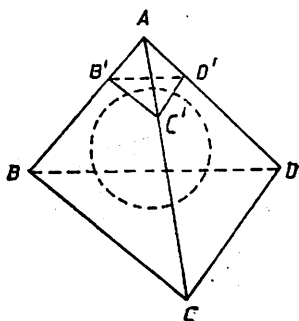


Fig. 202.

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h - 2r}{h} \Rightarrow r_1 = r \left(1 - 2 \frac{r}{h} \right) \Rightarrow$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = r \left[4 - 2 \cdot r \left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D} \right) \right] =$$

$$\frac{h_A \cdot S_A}{3} = V \Rightarrow \frac{1}{h_A} = \frac{S_A}{3V} =$$

$$= \frac{3V}{S} \left[4 - 2 \cdot \frac{3V}{S} \left(\frac{S_A}{3V} + \frac{S_B}{3V} + \frac{S_C}{3V} + \frac{S_D}{3V} \right) \right] =$$

$$= \frac{3V}{S} \left(4 - \frac{2}{S} \cdot S \right) = 2 \cdot \frac{3V}{S} = 2r.$$

* * * * *

131. Pe un plan se așează trei sfere și deasupra lor a patra sferă. Să se afle distanța de la punctul superior al celei de-a patra sfere la plan.

Soluție. Centrele celor patru sfere formează un tetraedru regulat cu latura $2R$. Înălțimea va fi egală cu $\sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = 2R \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2R}{3} \sqrt{6}$ și distanța căutată va fi

$$2R + \frac{2R}{3} \sqrt{6} = \frac{2R}{3} (3 + \sqrt{6}).$$

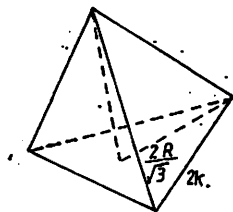


Fig. 203.

* * * * *

132. Se dă o sferă de rază 1. Pe ea sînt așezate cercurile egale $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ de rază r ($n \geq 3$). Cercul γ_0 este tangent tuturor cercurilor $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, iar $(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_2, \gamma_3), \dots, (\gamma_n, \gamma_1)$ sînt tangente două cîte două. Pentru care „ n ” este posibil aceasta? Să se afle raza cercurilor.

Soluție. Fie A_i polul cercului γ_i adică polul calotei sferice cu frontiera γ_i (fig. 204). Considerînd două cercuri tangente, punctul de tangență se află în planul determinat de poli și centrul sferei, iar distanța dintre poli este egală cu $2r$. Considerînd piramida formată de poli (fig. 205), aceasta este o piramidă cu fețele laterale triunghiuri

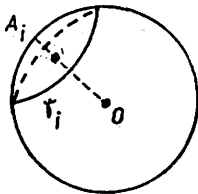


Fig. 204.

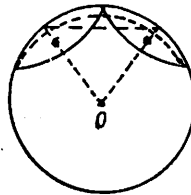


Fig. 205.

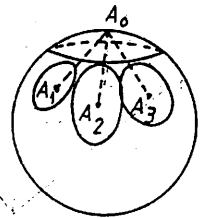


Fig. 206.

echilaterale de latură $2r$, iar baza poligon regulat cu n laturi. Suma unghiurilor plane de la vîrf este mai mică de 360° , deci $60^\circ \cdot n < 360^\circ$ de unde rezultă că $n = 2, 3, 4, 5$.

$$\Delta A_0 A_1 M \Rightarrow h^2 = 4r^2 - A_1 M^2 = 4r^2 - \frac{r^2}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 2r \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$$

Considerînd triunghiul dreptunghic $A_0 A_1 A'_0$ (A'_0 fiind punctul diametral opus lui A_0 pe sfera unitate de centru O), avem că $A_0 A_1^2 = h^2 \cdot 2 \Rightarrow 4r^2 = 2h \Rightarrow$

$$h = 2r^2 \text{ și prin urmare } r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$$

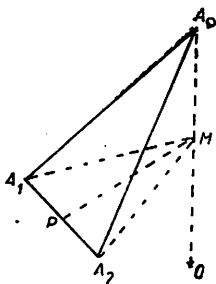


Fig. 207.

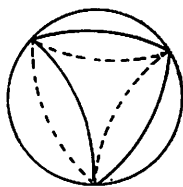


Fig. 208.

Problema are sens și pentru $n = 2$ (fig. 208).

$$n = 2, \quad r = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$n = 3, \quad r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$n = 4, \quad r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$n = 5, \quad r = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

133. Într-o sferă de rază R este înscris cilindrul de cea mai mare arie totală. Care este raza și înălțimea sa?

Soluție. $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2, \quad h^2 + 4r^2 =$

$$= 4R^2 \Rightarrow S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h) \Rightarrow$$

$$S_t = 2\pi(r^2 + rh) \Rightarrow S_t = 2\pi(r^2 + r\sqrt{4R^2 - 4r^2}) \Rightarrow$$

$$S_t'(r) = 2r + \sqrt{4R^2 - 4r^2} - \frac{4r^2}{\sqrt{4R^2 - 4r^2}} = 0$$

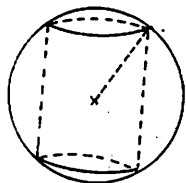


Fig. 209.

$$\Rightarrow 2r \nrightarrow \frac{4R^2 - 8r^2}{4R^2 - 4r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$r \nrightarrow \frac{R^2 - 2r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{R^4 - 4R^2r^2 + 4r^4}{R^2 - r^2} \Rightarrow 5r^4 - 5R^2r^2 + R^4 =$$

$$= 0 \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{5r^2 \pm \sqrt{25R^4 - 20R^4}}{10} = \frac{5R^2 \pm R^2\sqrt{5}}{10} = \frac{R^2(5 \pm \sqrt{5})}{10} \Rightarrow$$

$$r = R \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}} ; h = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}} \Rightarrow$$

$$S_s = 2\pi(r^2 + rh) = 2\pi \left(R^2 \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} \nrightarrow 2R^2 \frac{\sqrt{25 - 5}}{10} \right) =$$

$$= \frac{\pi R^2}{5} (5 \pm \sqrt{5} + 4\sqrt{5}) \Rightarrow$$

$$(S_s)_{\max} = \frac{\pi R^2}{5} (5 \nrightarrow 5\sqrt{5}) = \pi R^2 (1 \nrightarrow \sqrt{5}).$$

De aici deducem că-n expresiile de mai sus pentru r și h trebuie să luăm semnul superior, adică vom avea :

$$r = R \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} , \quad h = 2R \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} .$$

* * * * *

134. Trei sfere sînt tangente între ele și unui plan în vîrfurile unui triunghi. Date fiind laturile a, b, c , ale triunghiului ABC să se afle razele acestor sfere.

Soluție. $(r_1 + r_2)^2 = (r_2 - r_1)^2 \Leftrightarrow c^2 \Rightarrow 4r_1r_2 = c^2 \Rightarrow r_1r_2 = \frac{c^2}{4}$

și analog $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_2r_3 = \frac{a^2}{4} \\ r_3r_1 = \frac{b^2}{4} \end{array} \right. \Rightarrow$

$(r_1r_2r_3)^2 = \frac{(abc)^2}{64} \Rightarrow r_1r_2r_3 = \frac{abc}{8}$

$\Rightarrow r_3 = \frac{abc}{8} \cdot \frac{4}{c^2} = \frac{ab}{2c}$

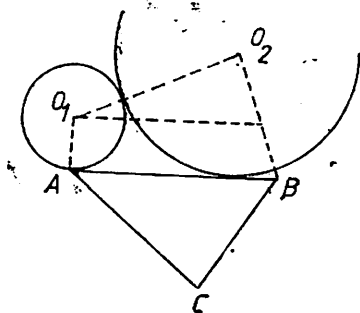


Fig. 210.

Procedind în același mod și pentru r_1r_2 obținem :

$r_1 = \frac{bc}{2a}, \quad r_2 = \frac{ca}{2b}, \quad r_3 = \frac{ab}{2c}$

* * * * *

135. Pe un plan sînt așezate patru sfere de rază R tangente, fiecare tangență la alte două. Deasupra lor se așează încă o sferă. Să se afle distanța de la punctul superior al celei de-a cincea sferă la plan.

Soluție. Centrele celor patru sfere de pe plan formează un pătrat, iar cu cel de-al cincelea centru o piramidă patrulateră regulată cu muchiile egale cu $2R$ (fig. 211). Înălțimea va fi egală cu $\sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$ și prin urmare distanța va fi $2R + R\sqrt{2} = R(2 + \sqrt{2})$.

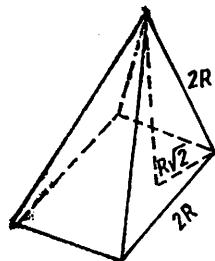


Fig. 211.

§ 6. PROBLEME ÎN SPAȚIU REZOLVATE VECTORIAL

Înainte de a trece la problemele din acest paragraf, vom stabili teorema lui Euler pentru un tetraedru. Dar mai înainte câteva considerații preliminare în plan și spațiu.

1° Dacă punctul M aparține dreptei AB , O fiind un punct oarecare al spațiului avem : $\vec{OM} = l\vec{OA} + m\vec{OB}$, unde $l + m = 1$.

2° Dacă M aparține planului determinat de A, B, C necoliniare, atunci $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$, unde $m + n + p = 1$.

3° Vectorul de poziție al punctului ce împarte pe \overline{AB} în raportul k (fig. 212).

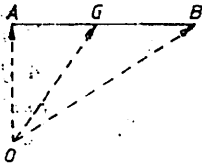


Fig. 212.

$$\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GB}} = k \Rightarrow \overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} =$$

$$= k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) \Rightarrow \overrightarrow{OG} (1 + k) =$$

$$= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1 + k}$$

4° Medianele sînt concurente. Fie $\overline{BD} = \overline{DC}$ și $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GD}} = \frac{2}{1}$ (fig. 213):

$$\text{Avem c\^a } \overrightarrow{PD} = \frac{\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{2}; \quad \overrightarrow{PG} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PD}}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PD} \Rightarrow$$

$$3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}). \text{ Dacă am fi con-}$$

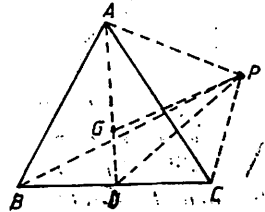


Fig. 213.

siderat G pentru altă mediană, am fi găsit aceeași expresie, deci toate medianele trec prin G .

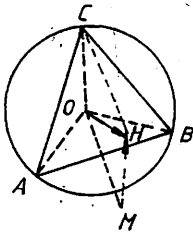


Fig. 214.

5° Înălțimile sînt concurente și $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris (fig. 214).

Fie M simetricul lui O față de AB . Avem că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Construim punctul H pentru care $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}$. Avem că $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Să arătăm că H este ortocentru.

Prin construcție \overrightarrow{CH} și \overrightarrow{OM} sînt paralele și prin urmare $\overrightarrow{CH} \perp \overline{AB}$, deci H se află pe perpendicula

din C pe AB . Dacă repetăm construcția, găsim de asemenea punctul H dar va fi pe altă înălțime, deci înălțimile sînt concurente.

6° **Teorema lui Euler.** Centrul O al cercului circumscris, centrul de greutate (centroid) G și ortocentrul H al unui triunghi oarecare sînt pe aceeași dreaptă, iar G împarte segmentul \overline{OH} în raportul 1 : 2, adică $\frac{\overline{OG}}{\overline{GH}} = \frac{1}{2}$.

Avem că

$$\begin{cases} \overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \\ 3\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \end{cases} \Rightarrow \overline{OH} = 3\overline{OG} \Rightarrow O, G, H \text{ coliniare.}$$

$$\overline{GH} = \overline{OH} - \overline{OG} = 3\overline{OG} - \overline{OG} = 2\overline{OG} \Rightarrow \frac{\overline{OG}}{\overline{GH}} = \frac{1}{2}.$$

Mediană într-un tetraedru este segmentul ce unește un vîrf cu centrul de greutate al feței opuse.

7° **Teoremă.** Medianele unui tetraedru sînt concurente și se întîlnesc într-un punct G care împarte pe fiecare din ele într-un raport egal cu $\frac{3}{1}$ începînd de la vîrf, adică $4\overline{PG} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ (fig. 215).

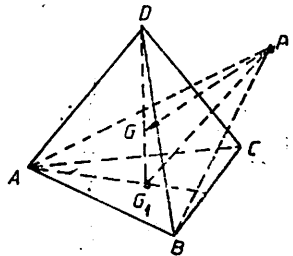


Fig. 215.

Fie G_1 centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul G care împarte pe \overline{DG}_1 în raportul 3 : 1. Rezultatele de la 3° și

4° $\Rightarrow 3\overline{PG}_1 = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ și $\overline{PG} = \frac{\overline{PD} + 3\overline{PG}_1}{4} \Rightarrow 4\overline{PG} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$. Dacă am considera punctul G' situat pe altă mediană, am obține același rezultat, deci $G' \equiv G$, ceea ce demonstrează că medianele tetraedrului sînt concurente.

8° **Înălțimile tetraedrului** nu sînt concurente (în general), nici măcar două. Căutăm acele tetraedre în care înălțimile sînt concurente.

Să presupunem că înălțimile din C și D sînt concurente în

$$H \Rightarrow \begin{cases} \overline{CH}_1 \perp \overline{AB} \\ \overline{DH}_2 \perp \overline{AB} \end{cases} \Rightarrow \overline{AB} \text{ este perpendicular pe planul } CDH \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CD}$. La fel se demonstrează că dacă alte două înălțimi sînt concurente, avem $\overline{AO} \perp \overline{BD}$ și $\overline{BO} \perp \overline{AD}$. Prin urmare: *dacă înălțimile unui tetraedru sînt concurente, atunci muchiile opuse sînt perpendiculare.*

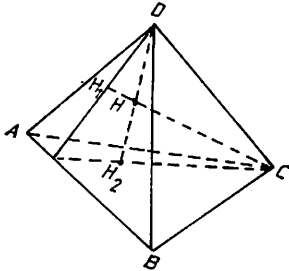


Fig. 216.

Un tetraedru în care înălțimile sînt concurente se numește *ortocentric*.

9° Teoremă. *Dacă înălțimile unui tetraedru sînt concurente, iar H este intersecția lor, atunci $\overline{OH} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$, unde O (este) centrul sferei circumscrise (fig. 217).*

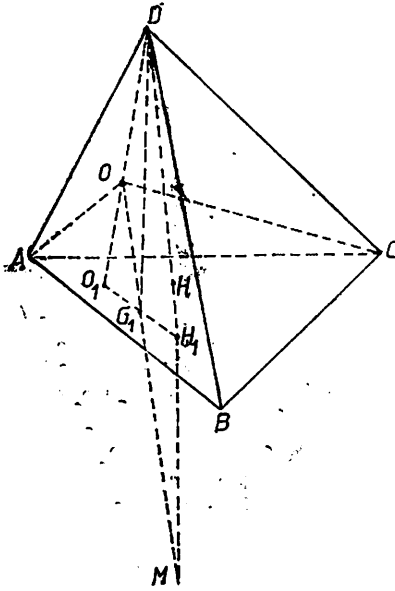


Fig. 217.

Fie \overline{DG}_1 mediana din D și \overline{DH}_1 înălțimea din același vîrf.

Am văzut că \overline{AB} este perpendiculară pe \overline{ODH} , deci și pe \overline{CH} , care este în acest plan; prin urmare și \overline{CH}_1 este perpendiculară pe \overline{AB} ; deci \overline{CH}_1 este înălțime. Se deduce în definitiv că H_1 este ortocentrul triunghiului ABC . Centrul cercului circumscris triunghiului ABC , și anume O_1 , este pe $\overline{G_1H_1}$ (dreapta lui Euler) (în virtutea teoremei lui Euler din plan, de la nr. 6°), iar O, centrul sferei circumscrise, se proiectează în O_1 pe planul ABC . Construim punctul H dat de relația

$$(1) \quad \overline{OH} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}).$$

Fie $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. Conform teoremei de la punctul 4°, $\overline{OG}_1 = \frac{1}{3} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, de unde rezultă că $\overline{OM} = 3\overline{OG}_1$ sau

că $\overline{G_1M} = 2\overline{OG_1}$. Cum O_1, G_1, H_1 sînt pe dreapta lui Euler, avem că $\overline{H_1G_1} = 2\overline{G_1O_1}$ și prin urmare $\overline{H_1M} = \overline{H_1G_1} + \overline{G_1M} = 2\overline{G_1O_1} + 2\overline{OG_1} = 2\overline{OO_1}$. Rezultă că $\overline{H_1M}$ și $\overline{OO_1}$ sînt paralele și cum $\overline{OO_1}$ este perpendiculară pe ABC , urmează că și $\overline{H_1M}$ este perpendiculară pe ABC . Deci punctul M se află pe dreapta $\overline{DH_1}$. Fie acum $\overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{OD}) = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$, de unde rezultă că H este mijlocul segmentului \overline{DM} , adică H este situat pe înălțimea $\overline{DH_1}$ a tetraedrului.

Analog se construiește $\overline{ON} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OD}$ și punctul H : $\overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{ON} + \overline{OC})$ și se deduce că H este pe înălțimea din C și așa mai departe. Deci înălțimile sînt concurente în H dat de (1)

10° Teorema lui Euler pentru tetraedru. Într-un tetraedru ortocentric O, G și H sînt coliniare, iar O și H sînt simetrice față de G

Avem că

$$\begin{cases} \overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) \\ \overline{OG} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}) \end{cases} \Rightarrow OH = 2OG \Rightarrow OG = GH.$$

PROBLEME

* * * * *

136. Se dă un punct O pe o dreaptă l și $\overline{OP_1}, \overline{OP_2}, \dots, \overline{OP_n}$ vectori unitari astfel încît P_1, P_2, \dots, P_n sînt într-un plan în care se află și dreapta l , de aceeași parte a ei. Să se arate că dacă n este

impar, atunci $|\overline{OP}_1 + \overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_n| \geq 1$, unde $|\overline{OM}|$ e lungimea vectorului \overline{OM} (Olimpiada pe 1973: Cehoslovacia, 6 puncte).

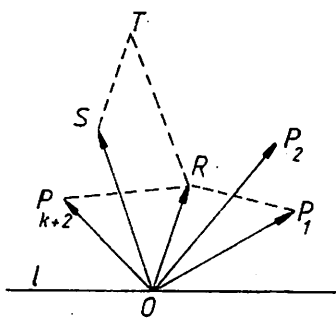


Fig. 218.

Soluție. $n = 1 \Rightarrow |\overline{OP}_1| \geq 1$ evident (fig. 218). Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n = k$. Trecem de la $n = k$ la $n = k + 2$. Numerotăm vectorii în ordinea unghiurilor pe care le fac cu l . Arătăm că $|\overline{OP}_1 + \overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_k + \overline{OP}_{k+1} + \overline{OP}_{k+2}| \geq \geq |\overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_k + \overline{OP}_{k+1}|$. Dacă $\overline{OP}_1, \overline{OP}_{k+2}$ sînt pe dreaptă se anulează și avem egalitate. Presupunem că cel puțin unul nu e pe dreaptă. \overline{OP}_1 și \overline{OP}_{k+2} formează un romb, suma lor \overline{OR}

fiind diagonala, $\widehat{P_1OR}, \widehat{ROP}_{k+2} < \frac{\pi}{2}$. Fie $\overline{OS} = \overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_{k+1}$.

Conform numerotării, \overline{OS} este în interiorul $\ast \widehat{P_1OR}$ sau $a \ast \widehat{ROP}_{k+2}$ și deci $\ast \widehat{ROS}$ — ascuțit. Notăm $\overline{OP}_1 + \overline{OP}_{k+2} = \overline{OR}$. Suma $\overline{OS} + \overline{OR}$ se reprezintă prin diagonala \overline{OT} . \widehat{OST} este obtuz căci \overline{OT} este latura cea mai mare, adică $|\overline{OT}| > |\overline{OS}|$. Dar $|\overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_k + \overline{OP}_{k+2}| \geq 1$ conform ipotezei, deci $|\overline{OP}_1 + \overline{OP}_2 + \dots + \overline{OP}_{k+2}| \geq \geq 1$ și deci proprietatea este dovedită pentru orice n impar.

* * * *

137. Să se demonstreze că dacă bisectoarele a două unghiuri plane ale unui triedru sînt perpendiculare, atunci bisectoarea celui de-al treilea unghi plan este perpendiculară pe primele două bisectoare.

Soluție. Direcțiile bisectoarelor sînt date de $\vec{l}_1 + \vec{l}_2, \vec{l}_2 + \vec{l}_3, \vec{l}_3 + \vec{l}_1$.

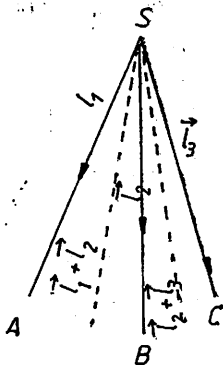


Fig. 219.

$$(\bar{l}_1 + \bar{l}_2)(\bar{l}_2 + \bar{l}_3) = 0 \Rightarrow \bar{l}_1\bar{l}_2 + \bar{l}_2\bar{l}_3 + \bar{l}_1\bar{l}_3 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(\bar{l}_1 + \bar{l}_2)(\bar{l}_3 + \bar{l}_1) = 1 + \bar{l}_1\bar{l}_3 + \bar{l}_2\bar{l}_3 + \bar{l}_2\bar{l}_1 = 0$$

și la fel

$$(\bar{l}_2 + \bar{l}_3)(\bar{l}_3 + \bar{l}_1) = 0.$$

* * * * *

138. Fie α, β, γ unghiurile plane ale unui triedru. Să se găsească relațiile dintre ele dacă bisectoarele lor fac unghiuri egale.

Soluție. Fie $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ trei versori (vectori unitari) fiecare perpendicular pe câte o față a triedrului. Evident, unghiurile plane ale triedrului sînt egale cu unghiurile formate de normalele la planele corespunzătoare, căci, în cazul unui unghi diedru, perechea de normale și laturile unghiului plan, pot fi considerate toate-n același plan și cu o extremitate comună, iar cele două unghiuri au laturile respectiv perpendiculare. Pe de altă parte, produsele scalare ale acestor vectori normali ne dă :

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = \cos \alpha, \bar{e}_1\bar{e}_3 = \cos \beta, \bar{e}_1\bar{e}_2 = \cos \gamma.$$

Dar bisectoarea unghiului format de 2 vectori de aceeași lungime și cu aceeași origine este dată de suma lor așa că bisectoarele unghiurilor formate de vectorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vor fi date de vectorii : $\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_3 + \bar{e}_1$ și $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$. Dacă unghiurile formate de acești vectori sînt egale și cosinusurile lor vor fi egale și deci, din produsele scalare ale vectorilor unitari respectivi, vom avea

$$\frac{\bar{e}_1 + \bar{e}_2}{|\bar{e}_1 + \bar{e}_2|} \cdot \frac{\bar{e}_1 + \bar{e}_3}{|\bar{e}_1 + \bar{e}_3|} = \frac{\bar{e}_1 + \bar{e}_2}{|\bar{e}_1 + \bar{e}_2|} \cdot \frac{\bar{e}_2 + \bar{e}_3}{|\bar{e}_2 + \bar{e}_3|} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3}{|\bar{e}_1 + \bar{e}_3|} = \frac{1 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3}{|\bar{e}_2 + \bar{e}_3|} \Rightarrow$$

$$|\vec{e}_1 + \vec{e}_3| = |\vec{e}_2 + \vec{e}_3| \Rightarrow 2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 2 + 2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \Rightarrow \cos \beta = \cos \alpha.$$

$$\frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 + \vec{e}_2|} \cdot \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_3}{|\vec{e}_2 + \vec{e}_3|} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_3}{|\vec{e}_1 + \vec{e}_3|} \cdot \frac{\vec{e}_2 + \vec{e}_3}{|\vec{e}_2 + \vec{e}_3|} \Rightarrow$$

$$\frac{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}{|\vec{e}_1 + \vec{e}_2|} = \frac{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}{|\vec{e}_2 + \vec{e}_3|} \Rightarrow$$

$$|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = |\vec{e}_2 + \vec{e}_3| \Rightarrow 2 + 2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 2 + 2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

* * * * *

139. Din O sînt duse patru semidrepte OA_1, OA_2, OA_3, OB . Să se afle $\sphericalangle BOA_3$ dacă $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_1OA_3} = 60^\circ, \widehat{A_2OA_3} = 90^\circ, \widehat{BOA_2} = \widehat{BOA_1} = 60^\circ$.

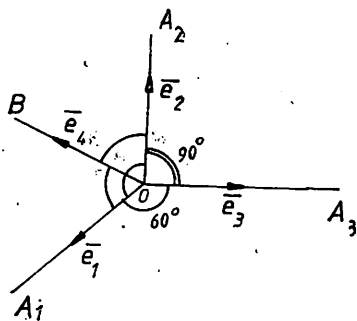


Fig. 220.

obținem sistemul

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta + (\cos x) \gamma, \\ \frac{1}{2} = \alpha + \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \gamma, \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \alpha + \beta, \\ \cos x = \frac{1}{2} \alpha + \gamma, \end{cases}$$

Soluție. Considerăm vectorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$. Atunci $\vec{e}_4 = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$. Înmulțind această relație succesiv cu $\vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ și \vec{e}_3 și ținînd seama de valorile produselor scalare $\vec{e}_4 \cdot \vec{e}_4, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_4, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_4, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2, \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3, \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3$

unde am notat $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 = \cos x$. Din ultimele trei ecuații, aplicând regula lui Cramer, obținem

$$\alpha = \frac{1}{2} - \cos x, \quad \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos x, \quad \gamma = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cos x,$$

care introduse-n prima ecuație a sistemului ne dau

$$1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{2} \cos^2 x \Rightarrow$$

$$12 \cos^2 x - 4 \cos x - 5 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{12} =$$

$$= \frac{2 \pm 8}{12} \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{BOA}_3 = x = 120', \text{ sau } x = \arccos \frac{5}{6}.$$

140. Se dau vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ precum și vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ definiți astfel :

$$\vec{u} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) - \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}), \quad \vec{v} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

$$\vec{w} = \vec{c}(\vec{b} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Să se arate că dacă $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ formează un triunghi, atunci și vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formează un triunghi asemenea cu primul. (Gazeta Matematică 11, 1976, Problema nr. 16185).

Soluție. Prin adunare se constată că $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Să arătăm proporționalitatea.

Stabilim că :

$$2 \cos A \cos B \cos C = \cos A [\cos (B + C) + \cos (B - C)] =$$

$$= -\cos^2 A - \cos (B + C) \cos (B - C) = -\cos^2 A -$$

$$-\frac{1}{2} (\cos^2 B + \cos^2 C) = -\cos^2 A - \frac{1}{2} (2 \cos^2 B - 1 + 2 \cos^2 C -$$

$$- 1) = -\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 1,$$

deci, ...
 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C, A + B + C = \pi.$

Avem că

$$u^2 = a^2 b^2 c^2 \cos^2 A - 2a^2 b^2 c^2 \cos A \cos B \cos C + a^2 b^2 c^2 \cos^2 B \Rightarrow$$

$$u^2 = a^2 b^2 c^2 (\cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B),$$

$$v^2 = a^2 b^2 c^2 (\cos^2 B - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 C),$$

$$w^2 = a^2 b^2 c^2 (\cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A).$$

Și acum pentru ca cele două triunghiuri să fie asemenea trebuie ca laturile să fie proporționale, ceea ce se poate realiza în $3! = 6$ moduri diferite.

I. Să presupunem mai întâi că $\frac{u^2}{c^2} = \frac{v^2}{a^2} = \frac{w^2}{b^2}$, ceea ce revine la :

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B}{\sin^2 C} = \\ & = \frac{\cos^2 B - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 C}{\sin^2 A} = \\ & = \frac{\cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A}{\sin^2 B}. \end{aligned}$$

Să verificăm egalitatea primelor două rapoarte în ipoteza $\hat{A} = \hat{C}$; aceasta revine la :

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 A - \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\cos^2 C - \cos^2 A}{\sin^2 A - \sin^2 C} = \\ & = \frac{1 - \sin^2 C - 1 + \sin^2 A}{\sin^2 A - \sin^2 C} = 1, \end{aligned}$$

sau

$$\cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B = 1 - \cos^2 C,$$

adică

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

care nu este adevărată. Cum același raționament se aplică și-n cazul $\hat{A} \neq \hat{B}$ sau $\hat{B} \neq \hat{C}$ rezultă că u, v, w nu-s proporționali cu a, b, c decât dacă $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, adică tringhiul ABC este echilateral (ceea ce-i un caz trivial).

II. Să presupunem c-am avea $\frac{u^2}{a^2} = \frac{v^2}{b^2} = \frac{w^2}{c^2}$. Dar atunci,

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B}{\sin^2 A} = \\ & = \frac{\cos^2 B - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 C}{\sin^2 B} = \\ & = \frac{\cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A}{\sin^2 C}, \end{aligned}$$

de unde, dacă $\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C}$,

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 C - \cos^2 A}{\sin^2 B - \sin^2 A} = \\ & = \frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\sin^2 C - \sin^2 B} \Rightarrow \frac{\cos^2 C - \cos^2 A}{\cos^2 A - \cos^2 B} = \frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\cos^2 B - \cos^2 C} \Rightarrow \\ & (\cos^2 B - \cos^2 C)(\cos^2 C - \cos^2 A) = (\cos^2 A - \cos^2 B)^2 \Rightarrow \\ & \cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C = \cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C \Rightarrow \\ & (\cos^2 A - \cos^2 B)^2 + (\cos^2 A - \cos^2 C)^2 + (\cos^2 B - \cos^2 C)^2 = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}, \end{aligned}$$

contrar ipotezei.

Se raționează la fel și-n cazul $\hat{B} \neq \hat{A} \neq \hat{C}$. Cum însă \hat{C} nu poate fi diferit nici de \hat{B} nici de \hat{A} , ar rezulta $\hat{A} = \hat{C} = \hat{B}$, ceea ce ar contrazice ipoteza $\hat{A} \neq \hat{B}$, așadar u, v, w nu pot fi proporționali nici cu a, b, c decît în cazul $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$, adică a unui triunghi echilateral (adică cazul trivial).

III. Considerăm cazul $\frac{u}{b} = \frac{v}{c} = \frac{w}{a}$, atunci în ipoteza $\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C}$, raționînd ca-n cazul precedent,

$$\frac{\cos^2 C - \cos^2 A}{\cos^2 B - \cos^2 C} = \frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\cos^2 C - \cos^2 A} \Rightarrow (\cos^2 A - \cos^2 B)^2 +$$

$$+ (\cos^2 A - \cos^2 C)^2 + (\cos^2 B - \cos^2 C)^2 = 0 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C},$$

contrar ipotezei.

IV. Să presupunem $\frac{u}{c} = \frac{v}{b} = \frac{w}{a}$, atunci, în ipoteza $\hat{A} \neq \hat{B}$ și raționînd ca-n cazul I, vom avea

$$\frac{\cos^2 A - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 B}{1 - \cos^2 C} = \frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{\sin^2 A - \sin^2 B}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \cos^2 B}{-(\cos^2 A - \cos^2 B)} = -1 \Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C =$$

$$= -1 + 2 \cos A \cos B \cos C,$$

dar

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

și adunîndu-le membru cu membru, obținem $2(\cos^2 A + \cos^2 B) = 0 \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, contrar ipotezei.

V. Fie $\frac{u}{a} = \frac{v}{c} = \frac{w}{b}$, atunci, în ipoteza $\hat{A} \neq \hat{B}$, și raționînd

ca-n cazul precedent, rezultă

$$\frac{\cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A}{1 - \cos^2 B} = \frac{\cos^2 C - \cos^2 A}{\sin^2 C - \sin^2 A} = -1$$

$$\Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 C = 0 \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ.$$

VI. Și în sfârșit cazul $\frac{u}{b} = \frac{v}{a} = \frac{w}{c}$; atunci, în ipoteza $\hat{B} \neq \hat{C}$ și prin același raționament ca-n cazul precedent,

$$\frac{\cos^2 B - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 C}{1 - \cos^2 A} = \frac{\cos^2 C - \cos^2 B}{\sin^2 C - \sin^2 B} = -1$$

$$\Rightarrow \cos^2 B + \cos^2 C = 0 \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 90^\circ,$$

contrar ipotezei.

Așadar problema din Gazeta Matematică este eronat pusă.

* * * * *

141. Într-un tetraedru muchiile opuse sînt perpendiculare. Să se demonstreze că unghiurile plane ale fiecărui triedru sînt de același nume. Cîte fețe ascuțitunghice are un asemenea tetraedru?

Soluție.

$$\begin{cases} \overline{DA} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{DB} \cdot \overline{CA} = 0 \\ \overline{DC} \cdot \overline{AB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0 \\ \vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = s. \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} \end{cases}$$

Dacă $s > 0$, atunci unghiurile plane ale triedrului D sînt ascuțite, dacă $s = 0$

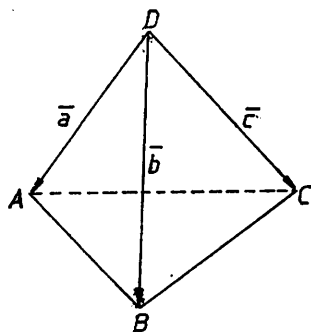


Fig. 221.

sînt drepte, dacă $s < 0$ sînt obtuze. Pentru două virfuri cărora le corespund s_1  i s_2 nu putem avea s_1  i s_2 negative sau zero deci, dacă $s_1 \leq 0$, atunci fețele din virful respectiv sînt obtuzunghice, iar cealaltă este ascu itunghic ; dacă $s_1 > 0$, atunci  i $s_2 > 0$ şi deci toate fețele sînt ascu itunghice.

* * * *

142. Să se construiască  i să se afle distanța între două muchii necoplanare într-un octaedru regulat cu muchia a .

Soluție.

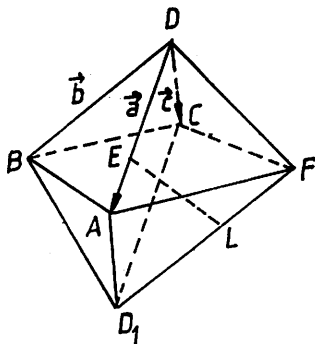


Fig. 222

$$\overline{EA} = l\vec{a}, \quad \overline{FL} = m\vec{b}, \quad \overline{EL} \perp \overline{DA},$$

$$\overline{EL} \perp \overline{FD}_1;$$

$$EL = l\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} + m\vec{b} \Rightarrow$$

$$la^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + m\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$l\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + b^2(m - 1) = 0;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2},$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{a^2}{2}, \quad b^2 = a^2, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = 0.$$

Din cele ce preced deducem :

$$\begin{cases} la^2 + (m - 1)\frac{a^2}{2} = 0 \\ l\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + (m - 1)a^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2l + m = 1 \\ l + 2m = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3l = -1 \Rightarrow l = \frac{1}{3}, \quad m = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{EL} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EL^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 + a^2 - \frac{4^2}{9} \cdot \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EL^2 = \frac{5}{9}a^2 + \frac{7}{9}a^2 - \frac{6}{9}a^2 = \frac{6}{9}a^2 \Rightarrow EL = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

* * * *

143. Fie $ABCD$, $ABEF$ două fețe ale unui cub. Punctele N și M se află pe segmentele AC și FB și $\angle ANM = \angle FMN = 1^\circ$. Să se arate că MN este paralel cu una din fețele cubului. 2°. Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor MN . 3° Să se afle unghiurile ascuțite făcute de MN cu diagonalele AC și FB . 4° Să se afle cea mai mică valoare a lui MN și unghiurile pe care le face în acest caz cu diagonalele AC și FB . 5°. Să se arate că MN nu poate să fie perpendiculara comună a lui AC și FB .

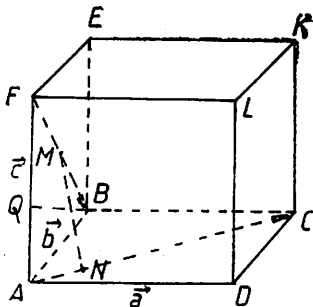


Fig 223.

Soluție. 1° Fie: $\vec{FM} = \vec{MB} = l(\vec{b} - \vec{c})$,

$\vec{AN} = \vec{NC} = l(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{MN} = -\vec{FM} -$

$$\begin{aligned} -\vec{c} + \vec{AN} &= -l(\vec{b} - \vec{c}) - \vec{c} + l(\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= -\vec{c} + l(\vec{a} + \vec{b} - \vec{b} + \vec{c}) = l\vec{a} + (l-1)\vec{c} \Rightarrow \\ &\Rightarrow MN \parallel ADLF. \end{aligned}$$

2°. $\vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{c} + l(\vec{b} - \vec{c}) + \frac{l}{2}\vec{a} + \frac{l-1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}l(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \vec{QP}$ - paralel cu vectorul construit $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ deci (Q-fix) se află pe un segment care unește Q cu mijlocul lui BC.

$$\begin{aligned} 3^\circ. \cos(\vec{MN}, \vec{AC}) &= \frac{[l\vec{a} + (l-1)\vec{c}](\vec{a} + \vec{b})}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}} = \frac{l}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow *(\vec{MN}, \vec{AC}) &= \arccos \frac{l}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}}, \quad *(\vec{MN}, \vec{FB}) = \\ &= \arccos \frac{[l\vec{a} + (l-1)\vec{c}](\vec{b} - \vec{c})}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}} = \arccos \frac{1-l}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}}. \end{aligned}$$

4°. $MN^2 = l^2 + (l-1)^2 = f(l)$, $f'(l) = 2(2l-1) = 0 \Rightarrow$
 $l = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \geq \frac{1}{2}$. În cazul lui MN minim $*(\vec{MN}, \vec{AC}) =$

$$= \arccos \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \text{ și } *(\vec{MN}, \vec{FB}) = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ.$$

$$5^\circ. \cos(\vec{MN}, \vec{AC}) = \frac{l}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}} = 0 \Rightarrow l = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{MN}, \vec{FB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ iar } \cos(\vec{MN}, \vec{FB}) = \frac{1-l}{\sqrt{2}\sqrt{l^2 + (l-1)^2}} = 0 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{MN}, \vec{AC}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ și deci } \vec{MN} \text{ nu poate fi perpendicular}$$

simultan pe \vec{AC} și \vec{FB} .

* * * *

144. Să se găsească relația între unghiurile plane ale unui triedru dacă bisectoarele lor fac între ele unghiuri egale.

Soluție. Fie $OA = OB = OC = 1$, $\cos(l_1, l_2) = \frac{\vec{OL} \cdot \vec{OM}}{|\vec{OL}| |\vec{OM}|} =$

$$= \frac{\frac{1}{4}(\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OC} + \vec{OA})}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \alpha + \cos \gamma + 1 + \cos \beta}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}.$$

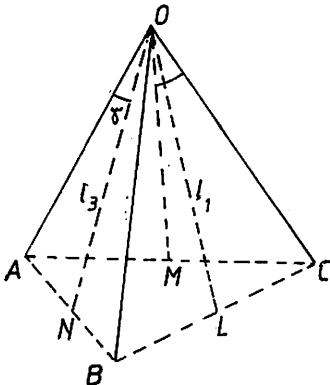


Fig. 224.

Analog obținem :

$$\frac{\cos \alpha + \cos \gamma + \cos \beta + 1}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1}{4 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1}{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Dacă $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1 = 0$ bisectoarele sînt perpen-

diculare. Dacă $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1 \neq 0 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} =$
 $= \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma.$

*

145. Se dă un cub $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. În ce raport împarte segmentul $B_1 C_1$ planul ce trece prin A și prin centrele fețelor $A_1 B_1 C_1 D_1$ și $BB_1 C_1 C$?

Soluție. A, P, M, Q coplanare \Rightarrow

$$\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AQ} + n\overrightarrow{AP} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1M} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ})m +$$

$$\Leftrightarrow n(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P}) \Rightarrow$$

$$\vec{a} + \vec{c} + \lambda \vec{b} = m\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) +$$

$$\Leftrightarrow n\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m + \frac{1}{2}n = 1 \\ \frac{m}{2} + n = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3m}{2} + \frac{3n}{2} = 2 \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = \lambda \Rightarrow$$

$$A = \frac{2}{3}, \begin{cases} B_1M = \frac{2}{3} B_1C_1 \\ MC_1 = \frac{1}{3} B_1C_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{B_1M}{MC_1} = \frac{2}{1}.$$

*

146. Pe muchiile $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}$ ale unui tetraedru $DABC$ se iau respectiv punctele L, N, F așa încât $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB},$

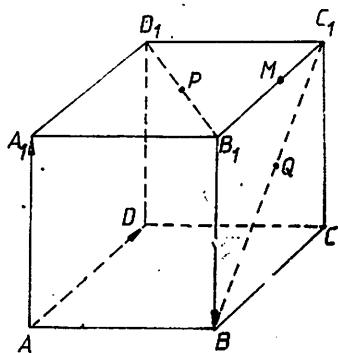


Fig. 225.

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$. În ce raport planul ce trece prin punctele LN împarte muchia BC ?

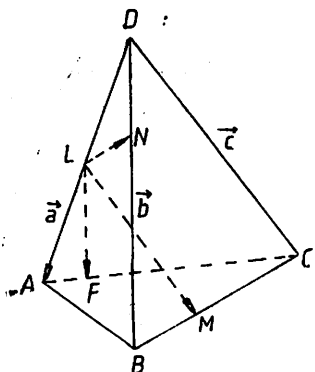


Fig. 226.

Soluție. $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2} \vec{a}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3} \vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4} (-\vec{a} + \vec{c})$, L, N, M, F coplanare.
 $\overrightarrow{LM} = m \overrightarrow{LN} + n \overrightarrow{LF}$.
 Atunci

$$\frac{1}{2} \vec{a} - \vec{a} + \vec{b} + \lambda(-\vec{b} + \vec{c}) = m \left(-\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \right) + n \left(\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{c} - \frac{1}{4} \vec{a} \right),$$

de unde

$$\begin{cases} -\frac{m}{2} + \frac{n}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{3} = 1 - \lambda \\ \frac{n}{4} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - n = 2 \\ 6 - 6\lambda - 4\lambda = 2 \Rightarrow BM = \frac{2}{5} BC, MC = \frac{3}{5} BC, \frac{BM}{MC} = \frac{2}{3} \\ \lambda = \frac{2}{5} \end{cases}$$

* * * * *

147. Un patrulater strâmb are toate laturile egale. Să se arate că: 1° unghiurile opuse sînt egale. 2° unghiurile între laturile opuse sînt egale. 3° $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 1$.

Soluție. 1°. Din egalitatea $\triangle ABC, \triangle ADC \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$,

$$\triangle ABD = \triangle BCD \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}.$$

2° $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \vec{AB} - \vec{DC} = \vec{AD} - \vec{BC}$ și luând pătratul
 scalar avem

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\vec{AB}, \vec{DC}) &= \\ = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(\vec{AD}, \vec{BC}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(\vec{AB}, \vec{DC}) = \cos(\vec{AD}, \vec{BC}). \end{aligned}$$

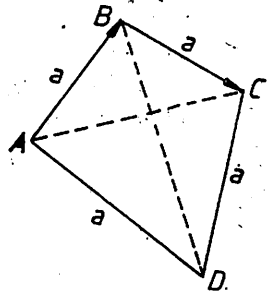


Fig. 227.

$$\begin{aligned} 3^\circ. \cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos(\vec{AB}, \vec{DC}) &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{a^2} + \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{a^2} + \\ + \frac{\vec{AB} \cdot \vec{DC}}{a^2} &= \frac{1}{a^2} \vec{AB}(\vec{AD} + \vec{DC} - \vec{BC}) = \frac{1}{a^2} \vec{AB} \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) = \\ = \frac{1}{a^2} \cdot \vec{AB}^2 &= \frac{a^2}{a^2} = 1. \end{aligned}$$

* * * * *

148. În tetraedrul ABCD se știe că $\vec{AB}^2 + \vec{CB}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2$.

Să se arate că \vec{AD} și \vec{BC} sînt perpendiculare (fig. 229).

Soluție. $\vec{AB}^2 + \vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{BD}^2 \Rightarrow$

$$\vec{AB}^2 - \vec{AC}^2 = \vec{BD}^2 - \vec{CD}^2 \Rightarrow$$

$$(\vec{AB} - \vec{AC})(\vec{AB} + \vec{AC}) =$$

$$= (\vec{BD} - \vec{CD})(\vec{BD} + \vec{CD}) \Rightarrow$$

$$\vec{CB}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{BC}(\vec{BD} + \vec{CD}) \Rightarrow$$

$$\vec{CB}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BD} + \vec{CD}) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{CB}(\vec{AD} + \vec{AD}) = 0 \Rightarrow 2\vec{CB} \cdot \vec{AD} = 0,$$

$$\text{deci } \vec{CB} \perp \vec{AD}.$$

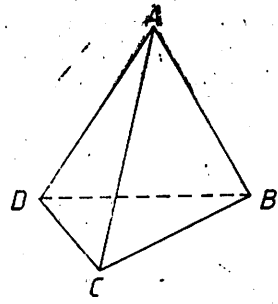


Fig. 229.

* * * * *

149. În piramida $DABC$ fața ACD este un triunghi echilateral cu latura $3\sqrt{2}$, fața ABC este triunghi dreptunghic isoscel ($\hat{C} = 90^\circ$), iar muchia \overline{BD} este 3 (fig. 230). Să se afle volumul.

Soluție. Fie \overrightarrow{DK} înălțimea în triunghiul ADC . Atunci, $\overline{DK} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$. Fie de asemenea unghiul $\angle(\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{CB}) = \varphi$ și \overline{KO} perpendiculara pe AC în planul triunghiului ABC . Deoarece $\overrightarrow{KO} \parallel \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KD}$, $\Rightarrow \overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CK}^2 + \overline{KD}^2 - 2\overline{CB} \cdot \overline{KD} \cos \varphi \Rightarrow 9 = 18 + \frac{9 \cdot 2}{4} + \frac{9 \cdot 6}{4} -$

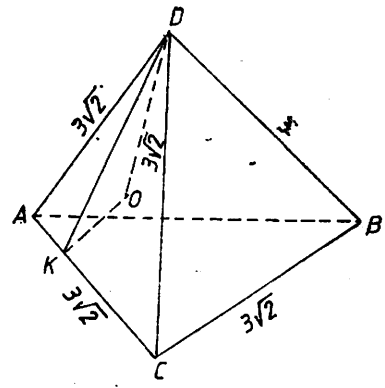


Fig. 230.

$$-2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} \cos \varphi \Rightarrow 9 \sqrt{12} \cos \varphi = 18 + 18 - 9 \Rightarrow 9 \cdot 2\sqrt{3} \cos \varphi = 27 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ \Rightarrow DO = \frac{1}{2} \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{4} \cdot S_{ACB} = \frac{1}{2} (3\sqrt{2})^2 = 9 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{3\sqrt{6}}{4} = \frac{9\sqrt{6}}{4}.$$

* * * * *

150. Proiecțiile unui corp pe două plane P_1, P_2 sînt cercuri. Să se arate că aceste cercuri au razele egale (Olimpiadă U.R.S.S., 1971).

Soluție. Fie diametrul $d_1 = A_1B_1 \parallel d \equiv P_1P_2$ al cercului din planul P_1 . Ducem planele a, b prin A_1 și B_1 perpendiculare pe d , deci pe P_1 și P_2 . Punctul A al corpului care se proiectează în A_1 și proiecția A_2 se găsesc în planul a . De asemenea, B_1, B și B_2 în b . Avem că $d_1 \leq A_2B_2 \leq d$. Absolut la fel se arată că $d_2 \leq A_1B_1 \leq d_1$. Din cele două inegalități anterioare rezultă $d_1 = d_2$.

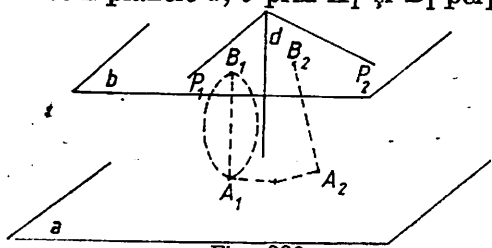


Fig. 228.

ÎN CADRUL COLECȚIEI
„BIBLIOTECA PROFESORULUI DE MATEMATICĂ”
au mai apărut :

1. *Bazele raționamentului geometric* de D. Brânzei, E. Onofraș, S. Anița și Gh. Ișvoranu, 1983.
2. *Fundamentele aritmeticii și geometriei* de Radu Miron și Dan Brânzei 1983.

TABLA DE MATERII

PREFAȚĂ	5
CAP. I. ANALIZA	9
§1. Notații generale	9
§2. Șiruri	9
§3. Funcții	61
1. Funcții inversabile, surjective	61
2. Relații funcționale	63
3. Funcții monotone	68
4. Funcții periodice	70
5. Probleme de maximum și minimum	70
6. Reprezentarea grafică a funcțiilor	80
7. Probleme de calcul integral	86
 CAP. II. ALGEBRĂ	 91
§1. Numere prime	91
§2. Divizibilitate	94
§3. Sisteme de numerație	109
§4. Frații zecimale	109
§5. Partea întreagă și cea zecimală	111
§6. Numere iraționale	112
§7. Alte capitole de teoria numerelor	113
§8. Analiză combinatorică	123
§9. Principiul lui Dirichlet	125
§10. Valori numerice ale unor expresii	129
§11. Scrierea unei expresii algebrice sub forma cea mai simplă	130
§12. Matrici și determinanți	131
§13. Polinoame	134
§14. Ecuații	144
§15. Identități	176
§16. Inegalități	181
§17. Maxime și minime	241

§18. Sisteme de ecuații și inecuații	246
1. " " " "	246
2. " " inecuații	258
§19. Logică matematică	260
CAP. III. TRIGONOMETRIE	262
§1. Inegalități	262
§2. Identități	274
§3. Ecuații	281
§4. Sisteme de ecuații	285
§5. Funcții trigonometrice	289
CAP. IV. GEOMETRIE	295
A. GEOMETRIE PE O AXĂ	295
B. GEOMETRIE PLANĂ	296
§1. Triunghiul	296
1. " echilateral	296
2. " isoscel	300
3. " dreptunghic	302
4. " oarecare	303
§2. Patrulater	325
1. Romb	325
2. Paralelogram	326
3. Trapez	327
4. Patrulater oarecare	329
§3. Poligoane	337
§4. Cercul	343
§5. Teorema lui Euler	368
§6. Probleme în plan rezolvate vectorial	372
§7. " de geometrie analitică în plan	387
C. GEOMETRIA ÎN SPAȚIU	391
§1. Piramida	391
1. " triunghiulară	391
2. " pătrată	399
§2. Cubul	399
§3. Prisma	400
§4. Paralelipipedul	401
§5. Sfera	402
§6. Probleme în spațiu rezolvate vectorial	407
§7. Alte probleme de geometrie în spațiu	428

EDITURA DE TIPOGRAFIE
"G. P. CAROL DAVID" BUCUREȘTI
BULEVARDUL MĂGURELEI, 10
TELEFONUL 210.100

Redactor: Petre Mocanu
Tehnoredactor: Silvia Decolețian
Bun de tipar: 27.IV.1984. Format 16/61 x 86.
Coli de tipar: 27. C.Z. pentru biblioteci mari
și mici: 51(076) = 59.

Redactor: Petre Mocanu
Tehnoredactor: Silvia Decolețian

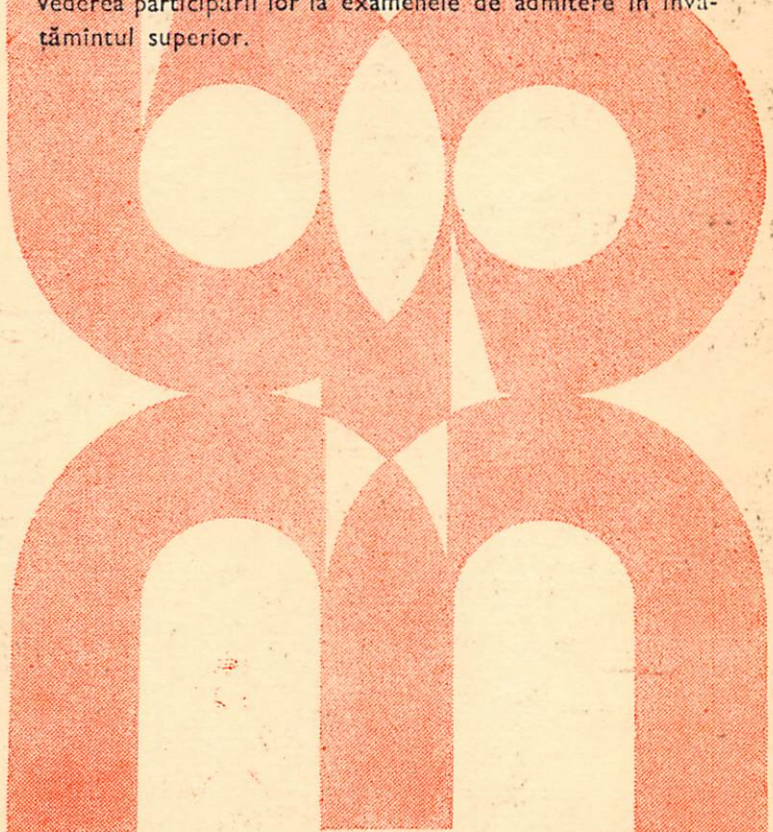
Bun de tipar: 27.IV.1984. Format 16/61 x 86.
Coli de tipar: 27. C.Z. pentru biblioteci mari
și mici: 51(076) = 59.



I. P. Informația c. 553
str. Brezoianu nr. 23-25,
București

Această carte constituie cel de-al treilea volum publicat în cadrul colecției: BIBLIOTECA PROFESORULUI DE MATEMATICĂ.

Volumul conține aproximativ 536 de probleme de matematică rezolvate care acoperă o arie largă de preocupări și anume: 73 de probleme de analiză, 276 de probleme de algebră, 36 de probleme de trigonometrie și 155 de probleme de geometrie. Soluțiile problemelor sînt originale, elegante și ingenioase, atestînd înalta pregătire profesională a eminentului profesor de matematică de liceu ieșean: Mihai Cocuz. Prin conținutul ei cartea trebuie să devină un auxiliar prețios pentru profesorii de liceu din toată țara în organizarea cercurilor de matematică cu elevii. De asemenea cartea este utilă elevilor din ultimele clase de liceu atît în pregătirea lor pentru olimpiadele de matematică dar mai ales în vederea participării lor la examenele de admitere în învățămîntul superior.



Lei 21,50