Алгебра

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Алгебра

7 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

*Рекомендовано
Министерством
образования и науки
Российской
Федерации*

18-е издание

Москва
«Просвещение»
2011

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин

Учебник подготовлен под научным руководством академика
А. Н. Тихонова

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/509 от 23.10.2008) и Российской академии образования (№ 01-194/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения

выделение основного материала

текст, который важно знать и полезно помнить

▶ ◁ решение задачи

● ○ обоснование утверждения или вывод формулы

обязательные задачи

дополнительные задачи

трудные задачи

№ занимательные задачи

Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреж-
А45 дений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.] — 18-е изд. — М. : Просвещение, 2011. — 224 с. : ил. — ISBN 978-5-09-025169-3.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-025169-3

I

глава

Алгебраические выражения

§ 1 Числовые выражения

Задача 1 Из коробки, содержащей 100 карандашей, отложили 32 карандаша, а остальные поделили поровну между семнадцатью учениками. Сколько карандашей получил каждый ученик?

► После того как из коробки взяли 32 карандаша, в ней осталось (100 – 32) карандашей. Чтобы узнать, сколько карандашей получил каждый ученик, нужно найти значение выражения $\frac{100-32}{17}$.

В результате получим 4.

Ответ Каждый ученик получил 4 карандаша. ◁

При решении задачи использовалась запись $\frac{100-32}{17}$ (черта дроби заменяет знак деления), состоящая из чисел, соединенных знаками арифметических действий.

Напомним, что такие записи называют *числовыми выражениями*. Приведем еще примеры числовых выражений:

$$2\cdot3+7;\quad 10:2-3;\quad \frac{4\cdot0{,}5+3}{5};\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}.$$

Если в числовом выражении выполнить указанные действия, то получится число, которое называют *значением* этого *числового выражения* или, короче, значением выражения.

Например, значением выражения $\frac{100-32}{17}$ является число 4; значением выражения $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ является число $\frac{1}{6}$.

Числовое выражение может состоять из одного числа. Иногда в числовом выражении, кроме чисел и знаков действий, используются скобки. Например, в выражении

$$(2{,}5+3{,}5)\cdot 2{,}1$$

содержатся скобки.

Вычислив значение этого выражения, получим число 12,6.

Поэтому можно записать:

$$(2{,}5+3{,}5)\cdot 2{,}1=12{,}6.$$

Слева и справа от знака «=» стоят числовые выражения.

Два числовых выражения, соединенные знаком «=», образуют *числовое равенство.*

Если значения левой и правой частей числового равенства совпадают, то равенство называют *верным*.

Например, $\frac{15+1}{2}=7+1$ — верное равенство, так как значения его левой части и правой части совпадают и равны 8.

Задача 2 Найти значения выражений

$$6+12\cdot 3 \text{ и } (6+12)\cdot 3.$$

▶ Используя известный порядок действий, получаем такие результаты:

$$6+12\cdot 3=6+36=42,$$
$$(6+12)\cdot 3=18\cdot 3=54. \triangleleft$$

Этот пример напоминает, что скобки могут влиять на результат выполнения действий.

Известно, что:

сложение и вычитание называют *действиями первой ступени*;

умножение и деление — *действиями второй ступени*;

возведение в квадрат и куб — *действиями третьей ступени.*

При нахождении значения числового выражения принят следующий *порядок выполнения действий:*

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны. Например:

$$3\cdot 5^2\cdot 4-5\cdot 4+7=3\cdot 25\cdot 4-5\cdot 4+7=$$
$$=300-20+7=287.$$

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; выполнение действий над числами в скобках и вне их производится в порядке, указанном в п. 1. Например:

$$(2^3\cdot 4-7)\cdot 6-(3+2\cdot 4)=(8\cdot 4-7)\cdot 6-(3+2\cdot 4)=$$
$$=(32-7)\cdot 6-(3+8)=25\cdot 6-11=150-11=139.$$

3) Если вычисляется значение дроби, то сначала выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе, а затем первый результат делится на второй. Например:

$$\frac{2\cdot 3^3+6\cdot 5}{3+5^2}=\frac{2\cdot 27+6\cdot 5}{3+25}=\frac{54+30}{3+25}=\frac{84}{28}=3.$$

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняют действия во внутренних скобках. Например:

$$2\cdot(8-(5^2-4))=2\cdot(8-(25-4))=$$
$$=2\cdot(8-21)=2\cdot(-13)=-26.$$

Задача 3 Вычислить $\dfrac{5{,}2+3{,}9\cdot 2-(14{,}7+5{,}3):4}{3{,}5+1{,}5\cdot 5}$.

▶ Выполним вычисления, используя правила о порядке действий:

1) $14{,}7+5{,}3=20$; 2) $3{,}9\cdot 2=7{,}8$; 3) $20:4=5$;
4) $5{,}2+7{,}8-5=8$; 5) $1{,}5\cdot 5=7{,}5$;
6) $3{,}5-7{,}5=-4$; 7) $8:(-4)=-2$. ◁

Упражнения

1 Вычислить:

1) $75-3{,}75$; 2) $0{,}48\cdot25$; 3) $\frac{2}{3}-2$;

4) $\frac{4}{7}:8$; 5) $5\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}$; 6) $1\frac{1}{7}:\frac{1}{14}$;

7) $-18:(-4{,}5)$; 8) $(-10{,}5)\cdot0{,}4$.

2 Записать в виде числового выражения:

1) произведение суммы и разности чисел 13 и 17;

2) удвоенное произведение чисел $\frac{1}{3}$ и 2,7.

3 Записать в виде числового равенства и проверить, верно ли оно:

1) сумма чисел $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ равна разности чисел $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{15}$;

2) произведение чисел 40 и 0,03 равно частному от деления числа 6 на число 5;

3) удвоенная разность чисел 10 и –2 в три раза больше суммы этих же чисел;

4) утроенная сумма чисел 2 и 6 в два раза больше произведения этих же чисел.

4 В кассе кинотеатра продано 154 билета по 25 р. и 76 билетов по 30 р. Сколько денег получено за все билеты?

5 Указать порядок выполнения действий и вычислить:

1) $1{,}7\cdot3^2+\frac{2}{3}\cdot12-15$; 2) $27{,}7-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot100+6{,}4:0{,}8$;

3) $48\cdot0{,}05-\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot54+1{,}7$; 4) $(2{,}5)^2+15\cdot\frac{2}{3}-0{,}24:0{,}6$.

6 Найти значение числового выражения:

1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{13}-\frac{1}{2}\right)$;

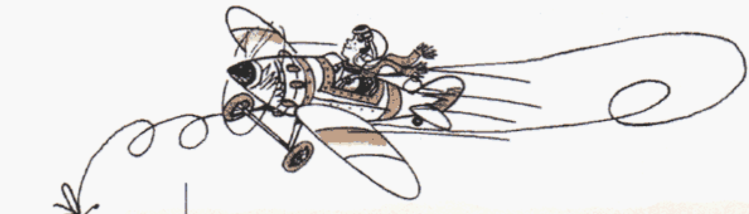
3) $4\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\left(1\frac{7}{9}-\frac{4}{9}\right)$; 4) $5\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$;

5) $\left(3\frac{1}{3}\cdot3^2-17\right):13-0{,}07$; 6) $1-\left(75\cdot\frac{1}{3}-2{,}67\cdot3^2\right)$.

7 Выполнить действия:

1) $\frac{0{,}3\cdot5^2-15}{3{,}5+2^2}$; 2) $\frac{4{,}2:6-3\frac{1}{3}\cdot0{,}3}{7{,}5:0{,}5}$;

3) $13\frac{1}{3}\cdot(18{,}1-(3^2+6{,}1))$; 4) $((7{,}8:0{,}3-3^3)+3{,}1):0{,}7$.



№ 1

ЗАПИСАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ, ЗНАЧЕНИЕ КОТОРОГО РАВНО 100, С ПОМОЩЬЮ ТОЛЬКО ЧЕТЫРЕХ ЦИФР 9 И ЗНАКОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ.

8 Записать в виде равенства и проверить, верно ли оно:

1) 20% от числа 240 равны 62;

2) число 18 составляет 3% от числа 600;

3) произведение чисел $15\frac{2}{5}$ и 5 составляет 11% от числа 700;

4) четвертая часть числа 18 равна 5% от числа 90;

5) число 111:3 равно 10% от числа 370;

6) 650% от числа 12 равны 77.

9 Не выполняя действий, объяснить, почему равенство является неверным:

1) $18{,}07-23{,}2\cdot 5=78{,}93$;
2) $0{,}48\cdot 17=81{,}6$;

3) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=1\frac{1}{21}$;
4) $\frac{3}{7}\cdot(-0{,}49)=2{,}1$;

5) $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot(-0{,}3)=\frac{12}{13}$;
6) $\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{5}\cdot 1{,}1=\frac{13}{14}$.

10 Чтобы успеть к отходу поезда, группа туристов должна пройти 22 км до станции за 6,5 ч. Туристы решили двигаться в следующем режиме: сначала идти со скоростью 4 км/ч, делая через каждые 1,5 ч пятнадцатиминутный привал, а по прошествии $5\frac{1}{4}$ ч снизить скорость до 3 км/ч и идти без привалов. Успеют ли они прибыть на станцию до отхода поезда?

§ 2 Алгебраические выражения

Задача 1 Задумайте какое-нибудь число, умножьте его на 3, к полученному результату прибавьте 6, найденную сумму разделите на 3 и вычтите задуманное число. Какое число получилось?

Пусть задумано число 8. Выполним все действия в том порядке, как это указано в условии:

1) $8 \cdot 3 = 24$; 2) $24 + 6 = 30$;
3) $30 : 3 = 10$; 4) $10 - 8 = 2$.

Получилось число 2. Это решение можно записать в виде числового выражения $(8 \cdot 3 + 6) : 3 - 8$, значение которого равно 2.
Если бы было задумано число 5, то получилось бы числовое выражение $(5 \cdot 3 + 6) : 3 - 5$, значение которого также равно 2.
Возникает догадка о том, что, какое бы число мы ни задумали, в результате получится число 2. Проверим это. Обозначим задуманное число буквой a и запишем действия в том порядке, как указано в условии:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a.$$

Используя известные свойства арифметических действий, упростим это выражение:

$$(a \cdot 3 + 6) : 3 - a = a + 2 - a = 2. \triangleleft$$

При решении задачи было получено выражение $(a \cdot 3 + 6) : 3 - a$, которое записано с помощью буквы a, обозначающей любое число, чисел 3 и 6, знаков действий и скобок.
Это пример *алгебраического выражения.* Приведем еще примеры алгебраических выражений:

$$2 \cdot (m + n), \ 3 \cdot a + 2 \cdot a \cdot b - 7,$$
$$(a + b) \cdot (a - b), \ \frac{x + y}{a}.$$

Для сокращения записи знак умножения (точка) часто опускается. Например, вместо $2 \cdot a + 3 \cdot (x-y) \cdot (x+y)$ пишут

$$2a+3(x-y)(x+y).$$

Если вместо каждой буквы, входящей в алгебраическое выражение, подставить некоторое числовое значение и выполнить действия, то полученное в результате число называют *значением алгебраического выражения.*

Например, значение алгебраического выражения $3a+2b-7$ при $a=2,\ b=3$ равно 5, так как

$$3 \cdot 2+2 \cdot 3-7=5;$$

значение этого же алгебраического выражения при $a=1,\ b=0$ равно -4, так как $3 \cdot 1+2 \cdot 0-7=-4$.

Значение алгебраического выражения

$$(a \cdot 3+6):3-a$$

равно 2 при любом значении a.

Задача 2 Найти значение алгебраического выражения

$$\frac{(3a+7)b}{a-b} \text{ при } a=10,\ b=5.$$

▶ $\frac{(3 \cdot 10+7) \cdot 5}{10-5}=\frac{37 \cdot 5}{5}=37.$ ◁

Упражнения

11 Записать:

1) удвоенную сумму чисел 5 и m;

2) половину разности чисел c и d;

3) сумму числа 12 и произведения чисел a и b;

4) частное от деления суммы чисел n и m на число 17.

12 Найти значение алгебраического выражения:

1) $3a-2b$ при $a=\frac{1}{3},\ b=1;\quad a=0{,}01,\ b=\frac{1}{4};$

2) $2a+3b$ при $a=3,\ b=-2;\quad a=-1{,}4,\ b=-3{,}1;$

3) $0{,}25a-4c^2$ при $a=4,\ c=3;\quad a=0{,}1,\ c=\frac{1}{2};$

4) $2a^2-\frac{1}{3}b$ при $a=2,\ b=9;\quad a=\frac{1}{4},\ b=2{,}4.$

13 Сколько минут: 1) в 7 ч 30 с; 2) в m часах; 3) в p секундах; 4) в m часах, l минутах и p секундах?

14 Найти значение выражения:

1) $\dfrac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$ при $b=\frac{2}{3}$, $c=6$, $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$;

2) $\dfrac{3(x-y)}{2p+q}-1$ при $x=8{,}31$, $y=2{,}29$, $p=2{,}01$, $q=2$.

15 Записать:

1) 66% от суммы чисел a и 4,02;

2) 33% от частного чисел x и 0,27.

16 Найти значение алгебраического выражения:

1) $\dfrac{\frac{1}{2}a+0{,}4:b-4{,}4}{3{,}5a-4b+8{,}2}$ при $a=1$, $b=2$; $a=0$, $b=1$;

2) $\dfrac{ab+\frac{1}{4}(a+b)}{6a-b+3}$ при $a=1$, $b=-1$; $a=-2$, $b=1$.

17 Может ли при каком-либо значении a равняться нулю значение алгебраического выражения:

1) $a+999\,999$; 2) $\dfrac{3}{a-5}$; 3) $\dfrac{a-1}{47+5}$; 4) a^2+1?

18 Число содержит 4 сотни, b десятков и c единиц. При каких значениях b и c данное число кратно тридцати?

§ 3 Алгебраические равенства. Формулы

При решении многих практических задач часто для обозначения чисел используются буквы.

Например, если a и b — длины сторон прямоугольника, измеренные одной и той же единицей длины (например, в сантиметрах), то ab — его площадь, $2(a+b)$ — его периметр. Обозначим площадь прямоугольника буквой S, а периметр буквой P, тогда получим формулы $S=ab$, $P=2(a+b)$. Если длины сторон измерены в сантиметрах, то S — число квадратных сантиметров, а P — число сантиметров. Буквами обозначают также неизвестные числа в уравнениях.

Например, в уравнении $x+12{,}3=95{,}1$ неизвестное число обозначено буквой x, а в уравнении $2y+3=7$ буквой y. С помощью букв удобно записывать свойства арифметических действий. Например:

$$a-(b+c)=(a-b)-c=a-b-c, \qquad (1)$$

$$(a+b):c=a:c+b:c. \qquad (2)$$

В алгебре одна и та же буква может принимать различные числовые значения. Так, в равенстве (1) a, b, c — любые числа; в равенстве (2) a и b — любые числа, а c — любое число, кроме нуля.

С помощью букв можно записать *формулы четного и нечетного натуральных чисел*. Если a — четное число, то оно делится на 2 и его записывают так:

$$\boldsymbol{a=2n},$$

где n — натуральное число.

Если b — нечетное число, то при делении его на 2 остаток равен 1 и его записывают так:

$$\boldsymbol{b=2n+1},$$

где n — натуральное число или нуль.

Можно формулу нечетного числа записать так:

$\boldsymbol{b=2k-1}$, где k — натуральное число.

Использование букв позволяет записать ход решения многих задач одного и того же типа.

Задача 1 Садовый участок имел форму прямоугольника, длина которого равна a километрам, ширина — b километрам. После осушения болота площадь участка увеличилась на 0,88 км^2. Какой стала площадь садового участка? Провести вычисления для: 1) $a=2{,}2$ и $b=0{,}8$; 2) $a=1{,}4$ и $b=4{,}3$.

▶ До осушения болота площадь сада была равна ab км^2, после осушения она стала равна

$$(ab+0{,}88)\ \text{км}^2.$$

1) При $a=2{,}2$ и $b=0{,}8$ получаем

$$2{,}2\cdot 0{,}8+0{,}88=2{,}64.$$

2) При $a=1{,}4$ и $b=4{,}3$ получаем

$$1{,}4\cdot 4{,}3+0{,}88=6{,}9. \ ◁$$

Задача 2 Турист вышел из поселка и направился в город. Пройдя 6 км, он сел в автобус и за t часов доехал до города.

1) Найти расстояние s (в км) между поселком и городом, если автобус двигался со скоростью v (в км/ч).

2) Из полученной формулы выразить t через s и v.

▶ 1) За t часов турист проехал на автобусе vt километров. Поэтому расстояние между поселком и городом выражается формулой $s = 6 + vt$.

2) Из формулы $s = 6 + vt$ находим $vt = s - 6$. Так как $v \neq 0$, то $t = \frac{s-6}{v}$. ◁

Условимся в дальнейшем при делении на алгебраическое выражение считать, что его значение не равно 0, так как деление на 0 невозможно.

Упражнения

19 Куплено 6 папок по x рублей и 3 пачки бумаги по y рублей. Написать формулу стоимости p всей покупки.

20 В магазин привезли 15 ящиков слив, по a килограммов в каждом, и 20 ящиков яблок, по b килограммов в каждом. Написать формулу массы m привезенного товара.

21 На машину погрузили a мешков пшеницы, по l килограммов в каждом, и c мешков овса, по n килограммов в каждом. Написать формулу массы m зерна, которую погрузили на машину.

22 В кинотеатре m рядов, по n мест в каждом, и еще k откидных мест. Сколько всего мест в кинотеатре? Составить выражение для решения задачи и провести вычисления при $m = 30$, $n = 25$, $k = 60$.

23 Сколько времени проводит ученик в школе в тот день, когда у него a уроков, b перемен по 15 мин и c перемен по 10 мин? Составить формулу для решения этой задачи.

24 Указать, какие числовые значения могут принимать буквы a и b в алгебраических выражениях:

1) $\frac{a-b}{2}$;   2) $\frac{a-2}{b}$;   3) $\frac{b}{a-2}$;   4) $\frac{2}{a-b}$.

25 Верно ли утверждение:

1) сумма двух любых нечетных чисел делится на 2;

2) сумма двух любых четных чисел делится на 4?

Известный французский математик XVI в. Франсуа Виет (1540—1603) считается основоположником введения в алгебру буквенной символики.

26 Группа геологов, продвигаясь по своему маршруту, ехала верхом на лошадях 3 ч 10 мин со скоростью c километров в час, затем плыла на плоту 1 ч 40 мин по реке, скорость течения которой a километров в час, и, наконец, шла пешком 2 ч 30 мин со скоростью b километров в час. Написать формулу пути, который преодолели геологи, обозначив длину маршрута (в км) буквой s. Вычислить длину маршрута, если $a = 3{,}3$ км/ч, $b = 5{,}7$ км/ч, $c = 10{,}5$ км/ч.

27 Автобус преодолевает путь s километров за t часов. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы тот же путь преодолеть на 1 ч быстрее автобуса?

28 Верно ли утверждение:

1) произведение двух любых четных чисел делится на 4;

2) одно из двух последовательных четных чисел делится на 4?

29 1) Из формулы $C = 2\pi R$ выразить R через C и π.

2) Из формулы $V = \frac{m}{\rho}$ выразить:

а) ρ через m и V;

б) m через V и ρ.

3) Из формулы $s = vt + l$ выразить:

а) l через s, v и t;

б) v через s, t и l;

в) t через s, v и l.

30 Три отряда сажали деревья. Первый отряд посадил a деревьев, второй — 80% того, что посадил первый, а третий — на 5 деревьев больше второго. Сколько деревьев посадили три отряда?

31 Турист вышел из пункта A и прошел 7 км за $1\frac{3}{4}$ ч, затем сделал привал на 15 мин, после чего прошел оставшиеся 10,5 км за 3 ч. На каком расстоянии от пункта A находился турист через a часов, где $2 < a < 5$?

§ 4 Свойства арифметических действий

Для того чтобы успешно изучать алгебру, нужно хорошо знать свойства арифметических действий. Напомним, что арифметическими действиями называют действия сложения, вычитания, умножения и деления. Словесные формулировки свойств действий над числами будем коротко записывать в виде формул. Основные свойства действий обычно называют законами, используя которые, можно обосновать и другие свойства действий.

1. Сложение и умножение.

Напомним законы сложения и умножения.

1. *Переместительный:*

$$a+b=b+a, \quad ab=ba.$$

2. *Сочетательный:*

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc).$$

3. *Распределительный:*

$$a(b+c)=ab+ac.$$

В этих равенствах a, b, c — любые числа. Например,

$$1{,}2+3{,}5=3{,}5+1{,}2; \qquad \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{4};$$

$$(-8)\cdot(125+7)=(-8)\cdot 125+(-8)\cdot 7.$$

С помощью перечисленных законов можно получить другие свойства этих действий. Например:

$$a+b+c+d=a+(b+c+d),$$
$$(abc)d=(ab)(cd),$$
$$(a+b+c)d=ad+bd+cd.$$

Задача 1 Вычислить $75+37+25+13$.

▶ Вычисления можно провести, следуя указанному порядку действий: сложить 75 и 37, к результату прибавить 25 и к последнему результату прибавить 13. Однако вычисления можно упростить, если воспользоваться свойствами сложения:

$$75+37+25+13=(75+25)+(37+13)=$$
$$=100+50=150. \triangleleft$$

Этот пример показывает, что с помощью свойств действий можно проводить вычисления наиболее простым (рациональным) способом. Свойства действий применяются также для выполнения преобразований алгебраических выражений с целью их упрощения.

Задача 2 Упростить выражение $3(2a+4b)+5(7a+b)$.

▶ $3(2a+4b)+5(7a+b)=3\cdot 2a+3\cdot 4b+5\cdot 7a+5\cdot b=$
$=6a+12b+35a+5b=(6a+35a)+(12b+5b)=$
$=(6+35)a+(12+5)b=41a+17b.$ ◁

В ходе решения этой задачи получилось выражение $6a+12b+35a+5b$. В этом выражении слагаемые $6a$ и $35a$ подобны, так как они отличаются друг от друга только коэффициентами. Слагаемые $12b$ и $5b$ также подобны. Поэтому и можно было записать вместо выражения $6a+12b+35a+5b$ выражение $41a+17b$, т. е. привести подобные слагаемые. Записи преобразований можно делать краткими, выполняя промежуточные вычисления устно. Например:

$$6(3x+4)+2(x+1)=18x+24+2x+2=20x+26.$$

2. Вычитание.

Задача 3 На пути из Москвы в Санкт-Петербург расположен город Тверь. Расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом равно 650 км, а между Москвой и Тверью — 167 км. Найти расстояние между Тверью и Санкт-Петербургом.

▶ Пусть расстояние между Тверью и Санкт-Петербургом x километров. Тогда

$$167+x=650, \text{ откуда } x=650-167=483.$$

Ответ 483 км. ◁

Из равенства $167+x=650$ число x находится с помощью действия вычитания, которое называют обратным к действию сложения. *Вычитание можно заменить сложением с противоположным числом:*

$$a-b=a+(-b).$$

Поэтому свойства вычитания можно обосновать свойствами сложения. Например:

$123-(23+39)=123-23-39=61,$ | $a-(b+c)=a-b-c,$
$123-(83-77)=123-83+77=117,$ | $a-(b-c)=a-b+c.$

Задача 4 Найти значение выражения $4(3x-5y)+6(x-y)$ при $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{13}$.

▶ Сначала упростим данное выражение:

$$4(3x-5y)+6(x-y)=12x-20y+6x-6y=$$
$$=18x-26y.$$

При $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{13}$ получаем

$$18\cdot\frac{1}{2}-26\cdot\frac{1}{13}=9-2=7.\ \triangleleft$$

Таким образом, использование свойств действий позволяет предварительно упростить алгебраическое выражение, а затем вычислить его значение более рациональным способом.

3. Деление.

Задача 5 Площадь прямоугольника равна 380 см^2, одна из его сторон равна 95 см. Найти другую сторону прямоугольника.

▶ Из формулы $S=ab$ находим $b=\frac{S}{a}$. Так как

$$S=380,\ a=95,\ \text{то}\ b=\frac{380}{95}=4.$$

Ответ 4 см. ◁

Из равенства $ab=S$ число b находится с помощью действия деления, которое называют обратным к действию умножения.

Деление можно заменить умножением на число, обратное делителю: $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$.

Поэтому свойства деления можно вывести из свойств умножения.

Задача 6 Доказать равенство $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, где $c \neq 0$.

▶ Заменяя деление умножением, получаем:

$$\frac{a+b}{c}=(a+b)\cdot\frac{1}{c}.$$

Применяя распределительный закон, находим:

$$(a+b)\cdot\frac{1}{c}=a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{c}.$$

Заменяя умножение делением, получаем:

$$a\cdot\frac{1}{c}+b\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.\ \triangleleft$$

Упражнения

32 Найти значение числового выражения, используя законы и свойства арифметических действий:

1) $29\cdot0{,}45+0{,}45\cdot11$; 2) $(51{,}8+44{,}3+48{,}2-24{,}3)\cdot\frac{1}{3}$;

3) $4{,}07-5{,}49+8{,}93-1{,}51$;

4) $-11{,}401-23{,}17+4{,}401-10{,}83$.

33 Привести подобные слагаемые:

1) $4a+2b+a-b$; 2) $x-2y-3x+5y$;

3) $0{,}1c-0{,}3+d-c-2{,}1d$; 4) $8{,}7-2m+n-\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n$.

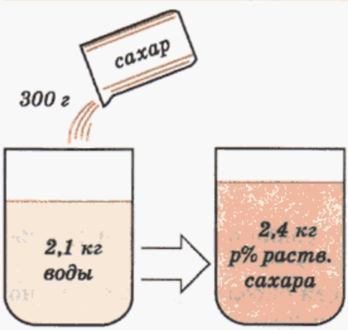
34 Привести подобные слагаемые:

1) $2{,}3a-0{,}7a+3{,}6a-1$; 2) $0{,}48b+3+0{,}52b-3{,}7b$;

3) $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}a-\frac{5}{6}a+2$; 4) $\frac{5}{6}y-\frac{1}{3}b-\frac{1}{6}y+\frac{2}{3}b-3$;

5) $2{,}1m+n-3{,}2m+2n+1{,}1m-n$;

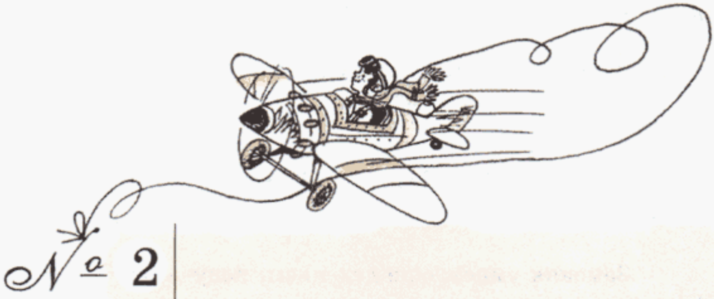
6) $5{,}7p-2{,}7q+0{,}3p+0{,}8q+1{,}9q-p$.



Процентное содержание сахара в растворе (см. рисунок) находим так:

$$p\%=\frac{0{,}3}{2{,}4}\cdot100\%=12{,}5\%$$

Каково процентное содержание сахара в растворе, полученном добавлением 400 г сахара в 3,6 кг воды?



№ 2

СКОЛЬКО ТРЕУГОЛЬНИКОВ, КВАДРАТОВ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ НА ЭТОМ РИСУНКЕ?

35 Упростить выражение:

1) $3(2x+1)+5(1+3x)$; 2) $4(2+x)-3(1+x)$;
3) $10(n+m)-4(2m+7n)$; 4) $11(5c+d)+3(d+c)$.

36 Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $5(3x-7)+2(1-x)$ при $x=\frac{1}{26}$;
2) $7(10-x)+3(2x-1)$ при $x=-0{,}048$;
3) $\frac{1}{3}(6x-3)+\frac{2}{5}(5x-15)$ при $x=3{,}01$;
4) $0{,}01(2{,}2x-0{,}1)+0{,}1(x-100)$ при $x=-10$.

37 Используя свойства арифметических действий, вычислить:

1) $\frac{1}{7}(0{,}14+2{,}1-3{,}5)$; 2) $\frac{1}{12}(4{,}8-0{,}24-1{,}2)$;
3) $\left(18\frac{6}{7}+21\frac{3}{4}\right):3$; 4) $\left(15\frac{5}{7}+20\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{1}{5}$.

38 Упростить выражение:

1) $1{,}2a-(0{,}2a+b)$; 2) $0{,}7x-(2y-0{,}7x)$;
3) $0{,}1(x-2y)+0{,}2(x+y)$; 4) $\frac{2}{3}(m-3n)+\frac{1}{3}(n-2m)$;
5) $8(a+3b)-9(a+b)$; 6) $3(c+d)-7(d+2c)$.

39 Доказать, что:

1) удвоенная сумма чисел $3a$ и $7b$ равна одной трети суммы чисел $18a$ и $42b$;
2) число, противоположное разности чисел $0{,}2y$ и $0{,}3x$, равно одной десятой разности чисел $3x$ и $2y$.

40 Сколько десятичных знаков после запятой содержит:
1) сумма чисел 0,048 и 3,17;
2) разность чисел 2,0017 и 5,01;
3) $\frac{1}{10}$ суммы чисел 44,95 и 0,045;
4) $\frac{1}{100}$ разности чисел 1048 и 945?

41 Три отряда собирали макулатуру. Первый отряд собрал 80% того, что собрал второй отряд, а третий отряд собрал 50% того, что собрали первые два отряда. Какой отряд собрал больше макулатуры?

§ 5 Правила раскрытия скобок

1. Алгебраическая сумма.

Задача 1 В двадцатиэтажном здании движется лифт. С восьмого этажа он передвинулся на 6 этажей вниз, затем на 12 этажей вверх, на 4 этажа вниз, на 7 этажей вверх, на 13 этажей вниз. На каком этаже находится лифт?

▶ Чтобы найти, на каком этаже находится лифт, нужно вычислить значение числового выражения $8-6+12-4+7-13$. Это значение равно 4.

Ответ Лифт находится на четвертом этаже. ◁

Выражение $8-6+12-4+7-13$ называют *алгебраической суммой*. Такое название объясняется тем, что это выражение можно записать в виде суммы

$$8+(-6)+12+(-4)+7+(-13).$$

Приведем еще примеры алгебраических сумм:

$$3-(-7)+(-2),\ 2a-7b+c-d,$$
$$a+(-b)-(-c).$$

Алгебраическая сумма — это запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «—».

Заменяя вычитание сложением, алгебраическую сумму $a+(-b)-(-c)$ можно записать по-другому:

$$a+(-b)-(-c)=a+(-b)+c.$$

Обычно алгебраические суммы вида $3-(-7)+$ $+(-2)$, $a+(-b)-(-c)$ записывают короче так:

$$3-(-7)+(-2)=3+7-2;$$
$$a+(-b)-(-c)=a-b+c.$$

В алгебраической сумме $3+7-2$ слагаемыми являются числа 3, 7 и -2, так как

$$3+7-2=3+7+(-2);$$

в алгебраической сумме $a-b+c$ слагаемыми являются a, $-b$, c, так как

$$a-b+c=a+(-b)+c;$$

в алгебраической сумме $2a-7b-c$ слагаемыми являются $2a$, $-7b$, $-c$.

2. Раскрытие скобок и заключение в скобки.

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «+», основывается на следующих свойствах сложения:

$$a+(b+c)=a+b+c,$$
$$a+(b-c)=a+b-c.$$

Эти равенства позволяют сформулировать *первое правило раскрытия скобок.*

Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то знак «+» перед скобками и скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы.

Например:
1) $14+(7-13+2)=14+7-13+2;$
2) $a+(b+c-d)=a+b+c-d;$
3) $(a-b)+c=a-b+c.$

Преобразование выражений, содержащих скобки, перед которыми стоит знак «—», основывается на следующих свойствах вычитания:

$$b-(-a)=b+a,$$
$$a-(b+c)=a-b-c,$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

Из этих равенств следует *второе правило раскрытия скобок.*

Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то знак «–» перед скобками и скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный.

Например:
1) $14-(7-13+2)=14-7+13-2$;
2) $a-(b+c-d)=a-b-c+d$;
3) $-(a-b)+c=-a+b+c$.

Задача 2 Раскрыть скобки и упростить выражение

$$3x+(5-(8x+3)).$$

▶ $3x+(5-(8x+3))=3x+5-(8x+3)=3x+5-8x-3=$
$=2-5x$. ◁

Иногда полезно заключить несколько слагаемых в скобки.
Например:
1) $108-137+37=108-(137-37)=108-100=8$;
2) $a+b-c+d=a+(b-c+d)$.

Если перед скобками ставится знак «+», то знаки всех слагаемых, заключаемых в скобки, сохраняются.

3) $a-b-c+d=a-(b+c-d)$.

Если перед скобками ставится знак «—», то знаки всех слагаемых, заключаемых в скобки, меняются на противоположные.

Упражнения

42 Вычислить, используя свойства арифметических действий:
1) $4{,}385+(0{,}407+5{,}615)$; 2) $7\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{18}-3\frac{7}{8}\right)$;
3) $0{,}213-(5{,}8+3{,}413)$; 4) $10\frac{4}{17}-\left(3\frac{4}{9}-1\frac{13}{17}\right)$.

Раскрыть скобки (**43—44**).

43 1) $a+(2b-3c)$; 2) $a-(2b-3c)$;
3) $a-(2b+3c)$; 4) $-(a-2b+3c)$.

44 1) $a+(b-(c-d))$; 2) $a-(b-(c-d))$;
3) $a-((b-c)-d)$; 4) $a-(b+(c-(d-k)))$.

45 Раскрыть скобки и упростить:
1) $3a-(a+2b)$; 2) $5x-(2y-3x)$;
3) $3m-(5m-(2m-1))$; 4) $4a+(2a-(3a+2))$.

46 Заключить в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «+»:
1) $a+2b+m-c$; 2) $a-2b+m+c$;
3) $a-m-3c+4d$; 4) $a-m+3b^2-2a^3$.

47 Заключить в скобки все слагаемые, начиная с числа m или $(-m)$, поставив перед скобками знак «−»:
1) $2a+3b+m-c$; 2) $2a+b+m+3c$;
3) $c-m-2a^2+3b^2$; 4) $a-m+3b^2-2a^3$.

48 Упростить:
1) $(5a-2b)-(3b-5a)$; 2) $(6a-b)-(2a+3b)$;
3) $7x+3y-(-3x+3y)$; 4) $8x-(3x-2y)-5y$.

49 Найти числовое значение выражения, предварительно упростив его:
1) $(2c+5d)-(c+4d)$ при $c=0{,}4$, $d=0{,}6$;
2) $(3a-4b)-(2a-3b)$ при $a=0{,}12$, $b=1{,}28$;
3) $(7x+8y)-(5x-2y)$ при $x=-\frac{3}{4}$, $y=0{,}025$;
4) $(5c-6b)-(3c-5b)$ при $c=-0{,}25$, $b=2\frac{1}{2}$.

50 Пусть m и n — натуральные числа. Доказать, что:
1) разность чисел $8m-n$ и $5m-4n$ делится на 3;
2) сумма числа $5m-3n$ и числа, противоположного числу $m-7n$, делится на 4.

51 Доказать, что при любых значениях a значение выражения

$$2(3a-5)-(7-(5-6a))$$

отрицательно.

52 В трехзначном числе содержится a сотен, b десятков и c единиц.

1) Составить и упростить сумму данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке.

2) Составить разность данного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке. Доказать, что полученная разность делится на 9 и на 11.

Упражнения к главе I

53 Вычислить значение числового выражения:

1) $\dfrac{\left(2{,}4-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 0{,}6}{\left(\dfrac{3}{8}+0{,}25\right)\cdot 0{,}4}+\dfrac{7}{6-5\dfrac{13}{20}}+1{,}04;$

2) $\dfrac{\left(3{,}25-\dfrac{3}{4}\right)\cdot 6{,}25}{(2-0{,}75):\dfrac{4}{5}}+\dfrac{\left(5{,}5-3\dfrac{3}{4}\right):5}{(2-0{,}8)\cdot\dfrac{3}{4}}.$

54 Записать:
1) удвоенную разность чисел a и b;
2) удвоенное произведение чисел m и n;
3) частное от деления суммы чисел n и m на их разность;
4) произведение суммы чисел a и b и их разности.

55 Искусственный спутник Земли движется со скоростью 8000 м/с. За какое время он пройдет путь, равный 48 000 км; 1 440 000 км?

56 Реактивный самолет расходует a литров горючего на 1000 км пути.
1) Сколько литров горючего расходуется на 3000; 8000; 500; s километров пути?
2) Какой путь пролетел самолет, если он расходовал горючего $5a$; $0{,}1a$ литров?

57 Для охлаждения доменной печи через ее стенки ежеминутно пропускается 26 кубометров воды. Сколько кубометров воды проходит через стенки доменной печи за одни сутки? за пять суток? за m суток?

58 Упростить выражение и найти его числовое значение:
1) $0{,}5(a-2b)-(3b+1{,}5a)$ при $a=0{,}48$, $b=0{,}03$;
2) $\left(\dfrac{1}{3}a+b\right)-\dfrac{2}{3}(a-1{,}5b)$ при $a=3$, $b=-3$.

59 Расход электроэнергии за сутки при работе холодильника равен 1,9 кВт·ч (киловатт-час), а при работе телевизора — 1 кВт·ч (из расчета работы телевизора в среднем 4 ч за сутки). Сколько стоит электроэнергия, потребленная обоими приборами за 30 суток, если 1 кВт·ч стоит 1 р. 30 к.?

60 Не вычисляя, объяснить, почему:

1) произведение чисел 2,004 и 1,745 больше 3;
2) произведение чисел 1,2438 и 0,8 меньше 2.

61 Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$ при $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+l)\cdot 2p}{p-l}+\frac{1}{3}$ при $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

62 Сторона квадрата равна a единиц. Найти периметр и площадь прямоугольника, у которого ширина меньше стороны этого квадрата на те же 4 единицы, а длина больше стороны квадрата на 8 единиц.

63 Вклад в банк составил 500 р. Через год сберегательный банк начисляет вкладчику 15% от суммы вклада. Сколько денег будет на счету через год?

Проверь себя!

1 Вычислить:

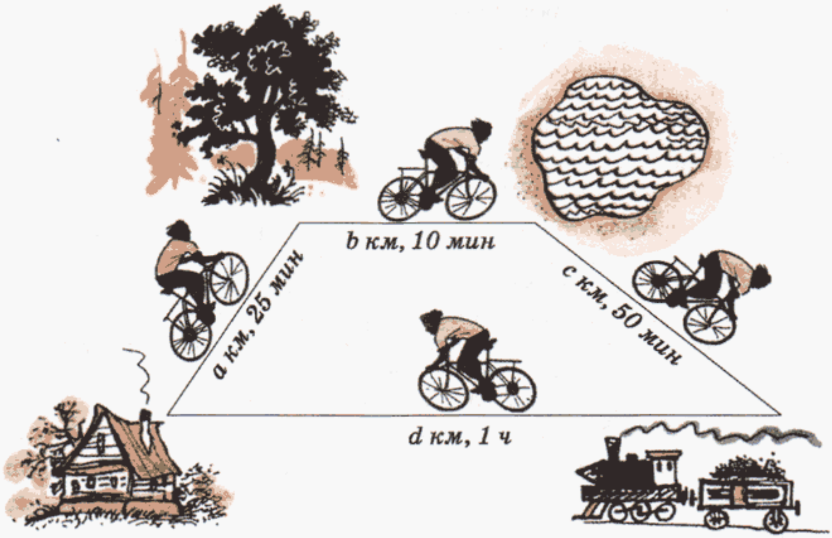
а) $(17{,}2\cdot 4{,}01+4{,}01\cdot 32{,}8):1\frac{2}{3}$;

б) $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2\frac{2}{3}-25\cdot 0{,}03\cdot 4$.

2 Упростить выражение $3(2y-x)-2(y-3x)$ и найти его числовое значение при $x=-\frac{2}{9}$, $y=0{,}25$.

3 Для туристского лагеря купили 10 мячей и 5 ракеток. Один мяч стоит a рублей, а одна ракетка — b рублей. Написать выражение стоимости всей покупки.

64 Турист 3 км пути прошел пешком и проехал на автобусе t ч со скоростью 40 км/ч. Написать формулу пути s, проделанного туристом. Из этой формулы выразить t через s.



Формула средней скорости движения велосипедиста (в км/ч):

$$v_{\text{ср.}} = \frac{a+b+c+d}{\frac{25}{60}+\frac{10}{60}+\frac{50}{60}+1} = \frac{a+b+c+d}{2\frac{5}{12}}$$

65 При увеличении скорости движения автомобиля вдвое его тормозной путь увеличивается в 4 раза. При скорости 30 км/ч тормозной путь «Запорожца» равен 7,2 м, а грузового автомобиля — 9,5 м. Найти тормозной путь этих автомобилей при скорости 60 км/ч.

66 Записать в виде алгебраического выражения:
1) сумму двух последовательных натуральных чисел, меньшее из которых равно n;
2) произведение двух последовательных натуральных чисел, большее из которых равно m;
3) сумму трех последовательных четных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2k$;
4) произведение трех последовательных нечетных натуральных чисел, меньшее из которых равно $2p+1$.

67 Туристы проплыли на плоту 6 ч со скоростью v км/ч. Затем они прошли по берегу 15 км. Написать формулу пути s, который преодолели туристы. Выразить из этой формулы v через s.

68 Верно ли утверждение:
1) если разность двух натуральных чисел — четное число, то их сумма также число четное;
2) если разность двух натуральных чисел — нечетное число, то их сумма также число нечетное?

69 Доказать, что сумма трех последовательных натуральных чисел делится на 3.

70 Велосипедист выехал из города в село, расстояние между которыми s километров, со скоростью v километров в час. Преодолев 3 км пути, он сделал остановку. Записать формулу для нахождения времени, необходимого на преодоление оставшейся части пути. Успеет ли велосипедист после остановки доехать до села за 2,5 ч, если $s = 36$, $v = 12$?

71 Сколько монет по 2 р. и 5 р. нужно взять, чтобы набрать 23 р.?

72 В магазин привезли n метров ткани по 6 р. за метр и m метров ткани по 5 р. за метр — всего на сумму 510 р. Сколько метров ткани по 5 р. и по 6 р. привезли в магазин (n и m — натуральные числа), если $n > 45$, $m > 40$?

73 Сумма цифр двузначного числа меньше 10. Доказать, что результат умножения такого числа на 11 получится, если между цифрами этого числа вставить их сумму. Например, $53 \cdot 11 = 583$.

II
глава

Уравнения с одним неизвестным

§ 6 Уравнение и его корни

Задача 1 Конверт с новогодней открыткой стоит 17 р. Конверт дешевле открытки на 5 р. Найти стоимость открытки.

▶ Пусть открытка стоит x р., тогда конверт стоит $(x-5)$ р. По условию задачи $x+(x-5)=17$, откуда $2x-5=17$, $2x=22$, $x=11$.

Ответ 11 р. ◁

В равенстве $x+(x-5)=17$ буква x обозначает неизвестное число, или, короче, *неизвестное.*

Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется *уравнением.*
Выражение, стоящее слева от знака равенства, называется *левой частью уравнения*, а выражение, стоящее справа от знака равенства, — *правой частью уравнения.* Каждое слагаемое левой или правой части уравнения называется *членом уравнения.*

В уравнении $2x-5=17$ левая часть $2x-5$, правая часть 17. При $x=11$ левая часть этого уравнения равна 17, так как $2\cdot 11-5=17$; правая часть также равна 17. Итак, при $x=11$ это уравнение обращается в верное числовое равенство $2 \cdot 11 - 5 = 17$. Число 11 называют *корнем* данного *уравнения*.

Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 1 является корнем уравнения

$$2x + 3 = 5,$$

так как $2 \cdot 1 + 3 = 5$ — верное равенство.

Уравнение может иметь два корня, три корня и т. д. Например, уравнение $(x-1)(x-2) = 0$ имеет два корня: 1 и 2, так как при $x = 1$ и при $x = 2$ это уравнение обращается в верное равенство, а при других значениях x левая часть уравнения не равна нулю. Уравнение

$$(x-3)(x+4)(x-5) = 0$$

имеет три корня: 3, -4 и 5.

Уравнение может иметь бесконечно много корней. Например, уравнение $2(x-1) = 2x - 2$ имеет бесконечно много корней: любое значение x является корнем этого уравнения, так как при любом x левая часть уравнения равна правой части.

Уравнение может и не иметь корней. Например, уравнение $2x + 5 = 2x + 3$ не имеет корней, так как при любом значении x левая часть этого уравнения больше правой.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

В простейших случаях легко подобрать значение x, которое является корнем уравнения. Например, легко увидеть, что корень уравнения $2x + 1 = 3$ — число 1. Однако это не всегда так. Например, довольно трудно догадаться, что уравнение

$$\frac{x-6}{5} + \frac{4(x+3)}{2} - 1 = \frac{x-1}{2} + 3x - \frac{7x-1}{10}$$

обращается в верное равенство при $x = 7$. Поэтому важно научиться решать уравнения.

Решение многих практических задач сводится к решению уравнений, которые можно преобразовать в уравнение вида

$$ax = b, \qquad (1)$$

где a и b — заданные числа, x — неизвестное. Уравнение (1) называют *линейным уравнением.* Например, уравнения $3x=1$, $-2x=0$, $\frac{3}{5}x=-\frac{1}{2}$ являются линейными.

Упражнения

74 Записать в виде равенства:
1) число 34 на 18 больше числа x;
2) число 56 в x раз больше числа 14;
3) полусумма чисел x и 5 равна их произведению.

75 Какое из чисел 3; -2 является корнем уравнения:
1) $3x=-6$; 2) $x+3=6$;
3) $4x-4=x+5$; 4) $5x+10=2x+4$?

76 (Устно.) При каких значениях x уравнение обращается в верное равенство:
1) $x+5=-3$; 2) $2x-1=0$; 3) $\frac{x}{5}=\frac{6}{7}$; 4) $\frac{3}{8}=\frac{x}{2}$?

77 Есть ли среди чисел -1; $\frac{1}{2}$; 0 корень уравнения:
1) $4(x-1)=2x-3$; 2) $3(x+2)=4+2x$;
3) $7(x+1)-6x=10$; 4) $5(x+1)-4x=4$?

78 Составить уравнение, корнем которого является число:
1) 5; 2) 3; 3) 0; 4) -4.

79 Подобрать число a так, чтобы уравнение $4x-3=2x+a$ имело корень:
1) $x=1$; 2) $x=-1$; 3) $x=\frac{1}{2}$; 4) $x=0{,}3$.

80 Выяснить, имеет ли корни уравнение при заданном значении a:
1) $3x+a=3x+5$ при $a=1$; 2) $\frac{1}{2}x+3=\frac{1}{2}x+a$ при $a=4$.

Указать такое значение a, при котором данное уравнение имеет корни.

81 Записать данное утверждение в виде равенства и найти значение x, при котором равенство верно:
1) число x составляет 18% числа 75;
2) число 15 составляет 25% числа x.

82 Найти все значения x, при которых верно равенство:
1) $x(x-2)=0$; 2) $2x(1-x)=0$;
3) $x(x+3)(x-4)=0$; 4) $(3-x)(x+2)(x-1)=0$.

83 Найти все значения x, при которых верно равенство:
1) $|x|=0$; 2) $|x|=2$; 3) $|x|=\frac{1}{3}$; 4) $|x-1|=2$.

§ 7 Решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным

Решения уравнений с одним неизвестным, которые сводятся к линейным, основаны на свойствах верных равенств. Напомним эти свойства.

Словесная формулировка	Запись в общем виде	Пример
1. Если к обеим частям верного равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного равенства вычесть одно и то же число, то получится верное равенство.	Если $a=b$ и l — любое число, то $a+l=b+l$, $a-l=b-l$.	$7=7$, $7+2=7+2$, $7-2=7-2$.
2. Если обе части верного равенства умножить или разделить на одно и то же не равное нулю число, то получится верное равенство.	Если $a=b$ и $m\neq 0$, то $a\cdot m=b\cdot m$, $a:m=b:m$.	$27=27$, $27\cdot 3=27\cdot 3$, $27:3=27:3$.

Из первого свойства следует, что слагаемое можно переносить из одной части равенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

● Пусть $a=b+m$. Тогда, прибавив к обеим частям этого равенства $(-m)$, получим

$$a+(-m)=b+m+(-m);\ a-m=b. \ \circ$$

Для того чтобы обосновать известный из курса математики V—VI классов способ решения уравнений, проведем рассуждения на конкретном примере. При этом покажем, как применяются свойства равенств к решению уравнений.

Задача 1 Решить уравнение $9x - 23 = 5x - 11$.

▶ Предположим, что a — корень данного уравнения, т. е. a — такое число, при котором уравнение обращается в верное равенство. Имеем верное числовое равенство $9a - 23 = 5a - 11$. Воспользуемся свойствами верных равенств. Перенесем член $5a$ с противоположным знаком в левую часть, а член -23 в правую часть равенства с противоположным знаком. В результате также получится верное равенство

$$9a - 5a = 23 - 11.$$

Приведем подобные члены в обеих частях этого равенства, получим

$$4a = 12.$$

Разделив обе части последнего равенства на 4, найдем $a = 3$.

Итак, предположив, что уравнение имеет корень a, мы получили $a = 3$.

Таким образом, если данное уравнение имеет корень, то он может быть равен только числу 3. Проверим, является ли число 3 на самом деле корнем данного уравнения. Подставим $x = 3$ в левую и правую части исходного уравнения и проведем вычисления: $9 \cdot 3 - 23 = 4$, $5 \cdot 3 - 11 = 4$.

При $x = 3$ уравнение обратилось в верное равенство: $9 \cdot 3 - 23 = 5 \cdot 3 - 11$, следовательно, $x = 3$ — единственный корень уравнения. ◁

При решении этой задачи были использованы следующие *основные свойства уравнений:*

Свойство 1.
Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

Свойство 2.
Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Применяя эти свойства, уравнения, сводящиеся к линейным, обычно решают так:

1) переносят члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестного, в правую (свойство 1);
2) приводят подобные члены;
3) делят обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Задача 2 Решить уравнение

$$2(x+3)-3(x+2)=5-4(x+1).$$

▶ Упростим левую и правую части уравнения: выполним умножение и приведем подобные члены. Получим:

$$2x+6-3x-6=5-4x-4, \quad -x=-4x+1.$$

Следовательно, $3x=1$, откуда $x=\frac{1}{3}$.

Ответ $x=\frac{1}{3}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $\frac{5x}{2}-\frac{x-3}{3}=1+\frac{x-5}{6}$.

▶ Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на 6, получим

$$\frac{5x}{2}\cdot 6-\frac{x-3}{3}\cdot 6=1\cdot 6+\frac{x-5}{6}\cdot 6,$$
$$15x-2(x-3)=6+x-5.$$

Упростим обе части уравнения:

$$15x-2x+6=6+x-5, \quad 13x+6=x+1,$$

откуда $12x=-5$, $x=-\frac{5}{12}$.

Ответ $x=-\frac{5}{12}$. ◁

При решении уравнения с одним неизвестным (как, например, в задачах 2 и 3) переходят от данного уравнения к более простому, имеющему те же корни. Поэтому проверку полезно делать только для того, чтобы убедиться в правильности вычислений.

В рассмотренных примерах каждое уравнение имело один корень. Однако может оказаться, что уравнение с одним неизвестным не имеет корней или любое значение неизвестного является корнем уравнения. Приведем примеры таких уравнений.

Задача 4 Решить уравнение $2(x+1)-1=3-(1-2x)$.

▶ Упростим обе части уравнения:

$$2x+2-1=3-1+2x, \quad 2x+1=2+2x,$$

откуда

$$2x-2x=2-1, \quad 0\cdot x=1.$$

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0 \cdot x$ равна нулю при любом x, а значит, не равна 1.

Ответ Корней нет. ◁

Задача 5 Показать, что любое значение x является корнем уравнения $3(1-x)+2=5-3x$.

▶ Упростим уравнение:

$$3-3x+2=5-3x,$$
$$5-3x=5-3x.$$

Последнее равенство является верным при любом значении x. Следовательно, любое значение x является корнем уравнения. ◁

Упражнения

84 (Устно.) Решить уравнение:
1) $x+3=5$; 2) $x+8=11$;
3) $x-0{,}25=0{,}75$; 4) $x-1{,}3=2{,}7$.

85 (Устно.) Решить уравнение:
1) $-2x=10$; 2) $18x=-9$;
3) $10x=0$; 4) $15x=-15$.

Решить уравнение **(86—94)**.

86 1) $9x=\frac{2}{5}$; 2) $-3x=2\frac{1}{7}$; 3) $-\frac{1}{2}x=3$; 4) $\frac{3}{4}x=\frac{1}{2}$.

87 1) $0{,}3x=6$; 2) $1{,}3x=-1{,}69$; 3) $0{,}7x=49$; 4) $-10x=0{,}5$.

88 1) $25x-1=9$; 2) $7x+8=11$;
3) $3x-5=10-x$; 4) $4x+4=x+5$.

89 1) $5x+3(3x+7)=35$; 2) $8x-(7x+8)=9$;
3) $8y-9-(4y-5)=12y-(4+5y)$;
4) $4+8y+8=2y-(10+7y)+9$.

90 1) $5(x-3)-2(x-7)+7(2x+6)=7$;
2) $11(y-4)+10(5-3y)-3(4-3y)=-6$;
3) $5(8z-1)-7(4z+1)+8(7-4z)=9$;
4) $10(3x-2)-3(5x+2)+5(11-4x)=25$.

91 1) $\frac{11}{7}=\frac{2-x}{5}$; 2) $\frac{3x}{5}=\frac{6+x}{3}$;
3) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$; 4) $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=14$.

№ 3

— БАБУШКА, СКОЛЬКО ЛЕТ ТВОЕМУ ВНУКУ?
— ЕМУ СТОЛЬКО МЕСЯЦЕВ, СКОЛЬКО МНЕ ЛЕТ.
— А СКОЛЬКО ЖЕ ТЕБЕ ЛЕТ, БАБУШКА?
— НАМ ВМЕСТЕ С ВНУКОМ ШЕСТЬДЕСЯТ ПЯТЬ. А УЖ СКОЛЬКО ЛЕТ ВНУКУ — СОСЧИТАЙ САМ.

92 1) $0{,}71x + 1{,}98 = 0{,}37x - 1{,}76$;

2) $0{,}18y - 7{,}4 = 0{,}05y - 5{,}71$;

3) $5(5x - 1) - 2{,}7x + 0{,}2x = 6{,}5 - 0{,}5x$;

4) $0{,}36x - 0{,}6 = 0{,}3(0{,}4x - 1{,}2)$.

93 1) $\frac{x-4}{5} = 9 + \frac{2x+4}{9}$; 2) $2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = 0$;

3) $\frac{8-y}{6} + \frac{5-4y}{3} = \frac{y+6}{2}$; 4) $\frac{4x+7}{5} + \frac{3x-2}{2} - \frac{5x-2}{2} = 32$.

94 1) $\frac{4x-51}{3} - \frac{17-3x}{4} = \frac{x+5}{2}$; 2) $\frac{3x-7}{4} - \frac{9x+11}{8} = \frac{3-x}{2}$;

3) $\frac{9x-5}{2} - \frac{3+5x}{3} - \frac{8x-2}{4} = 2$; 4) $\frac{4x-3}{2} - \frac{5-2x}{3} = \frac{3x-4}{3}$.

95 Показать, что уравнение не имеет корней:

1) $28 - 20x = 2x + 25 - 16x - 12 - 6x$;

2) $25x - 17 = 4x - 5 - 13x + 14 + 34x$;

3) $\frac{x-1}{3} + \frac{5x+2}{12} = \frac{5+3x}{4}$; 4) $\frac{2x+1}{3} - \frac{7x+5}{15} = \frac{x-2}{5}$.

96 Показать, что любое значение x является корнем уравнения:

1) $10-4x+3=9x-2-6x+9-7x+6$;
2) $9x+4-5x=8+7x-9-3x+5$;
3) $6(1{,}2x-0{,}5)-1{,}3x=5{,}9x-3$;
4) $8(1{,}3x+0{,}25)-6{,}6x=3{,}8x+2$.

97 По тексту высказывания составить уравнение и решить его:

1) если число x уменьшить на 26%, то получится число 7,4;
2) если число x увеличить на 20%, то получится число 9,6;
3) произведение чисел $3\frac{1}{4}$ и x в 2 раза больше суммы чисел 1 и x;
4) сумма чисел $\frac{7}{12}$ и $2x$ в 3 раза меньше одной четвертой числа $25x$.

98 Решить уравнение, используя свойства пропорции:

1) $\frac{x}{1{,}5}=\frac{1{,}6}{0{,}3}$; 2) $\frac{0{,}07}{0{,}09}=\frac{x}{1{,}8}$; 3) $\frac{3x}{1{,}7}=\frac{0{,}21}{6{,}8}$; 4) $\frac{1{,}08}{7{,}6}=\frac{5x}{3{,}8}$.

99 Решить уравнение относительно x, если a и b — заданные числа, отличные от нуля:

1) $ax-3=b$; 2) $4+bx=a$; 3) $b=a(x-3)$;
4) $4=a-(bx-1)$; 5) $\frac{2x-a}{b}=3$; 6) $\frac{1-bx}{a}=1$.

100 Решить уравнение:

1) $|x|=2{,}5$; 2) $|x|=3$; 3) $2|x|=0{,}48$;
4) $5|x|=1{,}15$; 5) $|2x|=1{,}4$; 6) $|3x|=0{,}03$.

§ 8 Решение задач с помощью уравнений

Применение уравнений позволяет упростить решение многих задач. При этом решение задачи обычно состоит из трех этапов:
1) составление уравнения по условиям задачи;
2) решение уравнения;
3) проверка результата и запись ответа.

Рассмотрим задачу.

Задача Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки и должен вернуться обратно через 5 ч. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. На какое расстояние туристы могут отплыть от пристани, если перед возвращением они хотят пробыть на берегу 3 ч?

▶ 1) Пусть искомое расстояние x километров. Это расстояние вниз по течению теплоход проходит со скоростью $18+3=21$ км/ч и затрачивает $\frac{x}{21}$ ч. Возвращаться теплоход будет со скоростью $18-3=15$ км/ч и затратит на возвращение $\frac{x}{15}$ ч. На берегу туристы пробудут 3 ч. Следовательно, вся поездка займет $\left(\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3\right)$ ч, что по условию задачи равно 5 ч. Таким образом, мы получили для определения неизвестного расстояния x уравнение

$$\frac{x}{21}+\frac{x}{15}+3=5.$$

2) Перейдем теперь к решению уравнения

$$\frac{x}{21}+\frac{x}{15}=2.$$

Умножая обе части этого уравнения на 105 (наименьшее общее кратное чисел 21 и 15), получаем $5x+7x=210$, $12x=210$, откуда $x=17{,}5$.

Ответ 17,5 км. ◁

На первом этапе решения задачи (т. е. при составлении уравнения) необходимо было знать, что скорости теплохода и реки при движении по течению складываются, а при движении против течения вычитаются и что путь, деленный на скорость, есть время движения.

На втором этапе (т. е. при решении полученного уравнения) потребовалось применить изученные в предыдущем параграфе свойства уравнений. Наконец, для получения ответа нужно было возвратиться к условию задачи и использованному обозначению.

Чтобы проверить, правильно ли решена задача, следует, пользуясь условиями данной задачи, составить другую, в которой найденный результат становится известным, а какое-нибудь ранее из-

вестное данное нужно найти. Чтобы проверить решение задачи, можно составить, например, такую задачу:
Теплоход с туристами отправился от пристани вниз по течению реки, проплыл 17,5 км и после трехчасовой стоянки вернулся обратно. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость теплохода в стоячей воде 18 км/ч. Сколько времени длилась поездка?

Упражнения

101 Ученик задумал число. Если его умножить на 4, к произведению прибавить 8 и полученную сумму разделить на 2, то получится 10. Какое число задумал ученик?

102 1) Поезд имеет в своем составе цистерны, платформы и товарные вагоны. Цистерн на 4 меньше, чем платформ, и в 2 раза меньше, чем товарных вагонов. Сколько в составе поезда отдельно цистерн, платформ и товарных вагонов, если их общее число равно 68?

2) Три цеха изготовили 869 деталей. Второй цех изготовил деталей в 3 раза больше, чем первый, а третий — на 139 меньше, чем второй. Сколько деталей изготовил каждый цех отдельно?

103 В кассе лежит 98 монет по 1, 2, 5 р. Монет по 2 р. на 10 больше, чем монет по 1 р., а монет по 5 р. в 7 раз больше, чем монет по 2 р. Сколько в кассе монет по 1, 2, 5 р. в отдельности?

104 Найти три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 81.

105 Имеются четыре последовательных четных числа. Если удвоенную сумму крайних чисел уменьшить на 2, то получится 34. Найти эти числа.

106 1) Бригада лесорубов ежедневно перевыполняла норму по заготовке леса на 16 $м^3$, поэтому недельную норму (6 рабочих дней) она выполнила за 4 дня. Сколько кубометров леса заготовляла бригада в день?

2) В цехе поставили автомат, производительность которого была на 8 деталей в час выше производительности рабочего. После 2 ч работы автомат выполнил шестичасовую норму рабочего. Какова производительность автомата?

107 1) Матери 50 лет, дочери 28. Сколько лет тому назад дочь была в 2 раза моложе матери?

2) Отцу 40 лет, сыну 16. Через сколько лет отец будет в 2 раза старше сына?

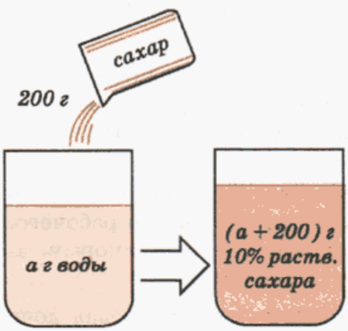
108 1) В первом мешке было 50 кг сахара, а во втором — 80 кг. Из второго мешка взяли сахара в 3 раза больше, чем из первого, и тогда в первом мешке сахара осталось вдвое больше, чем во втором. Сколько килограммов сахара взяли из каждого мешка?

2) В одном элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, на второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

109 1) Бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 27 деталей, бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но еще изготовила дополнительно 54 детали. Сколько деталей в день изготовляла бригада?

2) Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 15 дней. Но уже за 2 дня до срока завод не только выполнил план, но и выпустил сверх плана еще 6 машин, так как ежедневно выпускал по 2 машины сверх плана. Сколько машин должен был выпустить завод по плану?

110 1) Лодка шла против течения реки 4,5 ч и по течению 2,1 ч. Найти скорость лодки в стоячей воде, если она прошла всего 52,2 км, а скорость течения реки равна 3 км/ч.



10%-ный раствор сахара получили, когда добавили 200 г сахара в а г воды (см. рисунок). Найдем а:

$$\frac{200}{a+200}\cdot 100\% = 10\%$$

$$\frac{200}{a+200} = \frac{10}{100}$$

$$a = 1800 \text{ г}$$

В какое количество воды нужно добавить 200 г сахара, чтобы получить 15%-ный раствор?

№ 4

ВЗЯВ В РУКУ ТОЛЬКО ОДИН СТАКАН, СДЕЛАТЬ ТАК, ЧТОБЫ ПУСТЫЕ И ПОЛНЫЕ СТАКАНЫ НА ЭТОМ СТОЛЕ ЧЕРЕДОВАЛИСЬ.

2) Лодка шла по течению реки 2,4 ч и против течения 3,2 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути, пройденного против течения. Найти скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3,5 км/ч.

111 1) На школьных соревнованиях по плаванию один ученик проплыл некоторое расстояние по течению реки за 24 с и то же расстояние против течения за 40 с. Определить собственную скорость пловца, считая ее постоянной от начала и до конца заплыва, если скорость течения реки равна 0,25 м/с.

2) Расстояние между двумя пунктами катер прошел по течению за 3 ч 30 мин, а против течения за 6 ч 18 мин. Определить расстояние между этими пунктами, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

112 1) Из одного пункта вначале вышел пешеход, а через 1,5 ч после его выхода в том же направлении выехал велосипедист. На каком расстоянии от пункта отправления велосипедист догнал пешехода, если пешеход шел со скоростью 4,25 км/ч, а велосипедист ехал со скоростью 17 км/ч?

2) Два теплохода вышли одновременно из одного пункта и идут в одном направлении. Первый теплоход за каждые

1,5 ч проходит 37,5 км, а второй теплоход за каждые 2 ч проходит 45 км. Через сколько времени первый теплоход будет находиться от второго на расстоянии 10 км?

113 1) Кооператив продавал пальто и куртки. Куртка стоила на 1500 р. дешевле пальто. На сезонной распродаже цена на куртки была снижена на 20%, а на пальто — на 10%, и теперь одну куртку и одно пальто можно было купить за 6450 р. Сколько стоили куртка и пальто до сезонной распродажи?

2) Один рабочий в день выпускал на 50 деталей меньше другого. Когда выработка первого повысилась на 1% в день, а второго — на 2%, они стали вместе выпускать в день 254 детали. Сколько деталей в день выпускал каждый рабочий первоначально?

114 1) Туристы за первый час прошли 3 км. Если бы они продолжали двигаться с той же скоростью, то опоздали бы к месту сбора на 40 мин, поэтому они увеличили скорость на $\frac{1}{3}$ и пришли к месту сбора за 45 мин до назначенного срока. Какое расстояние прошли туристы до места сбора и за какое время?

2) Первый час автомобилист ехал со скоростью 50 км/ч и рассчитал, что если он и дальше будет ехать с той же скоростью, то опоздает в город на полчаса. Он увеличил скорость на 20% и прибыл в город вовремя. Какой путь проехал автомобилист и сколько времени он находился в пути?

115 1) Из двух пунктов, расстояние между которыми 340 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного на 5 км/ч больше скорости другого. Найти скорости поездов, если известно, что через 2 ч после начала движения расстояние между ними было 30 км.

2) Из городов A и B, расстояние между которыми 230 км, одновременно выехали навстречу друг другу два мотоциклиста. Через 3 ч после начала движения расстояние между ними было 20 км. Найти скорости мотоциклистов, если скорость одного на 10 км/ч меньше скорости другого.

Упражнения к главе II

Решить уравнение **(116—117)**.

116 1) $3y+5=4\left(9-\frac{y}{2}\right)$; 2) $8\left(11-\frac{3}{4}z\right)=16z-44$;

3) $3\left(5+\frac{x}{2}\right)=4+2x$; 4) $2\left(3-\frac{x}{3}\right)=5+x$.

117 1) $\frac{x-2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{x+7}{6}$; 2) $\frac{x-7}{6}=\frac{x+1}{2}-3$;

3) $\frac{2(3x-1)}{5}=4-\frac{x+2}{2}$;

4) $\frac{1}{2}-\frac{3x}{4}=\frac{2(3-x)}{5}$.

118 1) На одной ферме был сделан запас силоса 7 т 680 кг, а на второй — 9 т 600 кг. На первой ферме ежедневно расходуется 352 кг, а на второй — 480 кг силоса. Через сколько дней запасы силоса на обеих фермах станут равными?

2) На одну овощную базу было завезено 145 т 480 кг картофеля, а на вторую — 89 т 7 ц. С первой базы ежедневно вывозят в магазины по 4 т 40 кг картофеля, а со второй — по 2 т 550 кг. Через сколько дней на второй базе останется картофеля в 2 раза меньше, чем на первой?

119 1) Собранный виноград предполагалось уложить в ящики, по 9,2 кг в каждый. Вместо этих ящиков взяли другие, вмещающие по 13,2 кг каждый, и тогда потребовалось на 50 ящиков меньше. Сколько килограммов винограда было уложено?

2) Расстояние между станциями A и B пассажирский поезд проходит на 45 мин быстрее, чем товарный. Определить расстояние между этими станциями, если известно, что скорость движения пассажирского поезда равна 48 км/ч, а товарного — 36 км/ч.

120 Суммарная масса первого и второго советских искусственных спутников Земли составила 592,4 кг. Первый спутник был легче третьего на 1243,4 кг, второй — на 818,2 кг. Найти массу каждого из трех первых искусственных спутников Земли.

Проверь себя!

1 Проверить, есть ли среди чисел 1; 0; –4 корень уравнения $3(x-7)+4=7x-1$.

2 Решить уравнение:

а) $2x-3(x-1)=4+2(x-1)$;

б) $\frac{x}{3}+\frac{x+1}{4}=2$.

3 За 15 м ткани двух сортов заплатили 2840 р. 1 м ткани I сорта стоит 200 р., а 1 м ткани II сорта — 180 р. Сколько метров ткани каждого сорта было куплено?

121 При каком значении x значение выражения $3(x-1)-2(3-x)-1$ равно 1?

122 При каком значении x значения выражений $\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}$ и $\frac{x+1}{8}-3$ равны?

123 Подобрать число a такое, чтобы уравнение имело корни:

1) $5x-7=5x-a$;
2) $x-(2-x)=2x-a$;
3) $\frac{a}{2}-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}x-(x-8)$;
4) $\frac{x}{3}+\frac{a}{5}=(x+15)-\frac{2}{3}x$.

124 При каких значениях a уравнение $|x|=a$:

1) не имеет корней;
2) имеет только один корень?

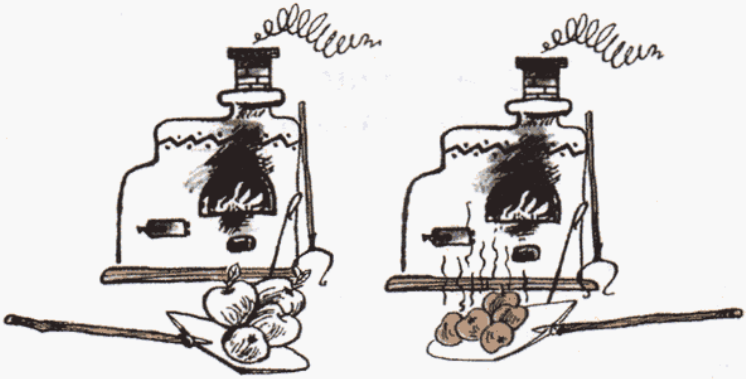
125 Решить уравнение, принимая за неизвестное x; выяснить, при каких значениях a это уравнение имеет корни:

1) $2x-3(x-a)=3+a$;
2) $a+6(x-1)=2a+x$;
3) $\frac{ax-2}{2}=\frac{3-ax}{4}$;
4) $\frac{5-ax}{3}=\frac{7-ax}{6}$;
5) $ax-3(1+x)=5$;
6) $7-ax=2(3+x)$.

126 Первый час туристы шли на станцию со скоростью 3,5 км/ч. После этого они рассчитали, что если и дальше будут идти с той же скоростью, то придут на час позже намеченного срока. Увеличив скорость на 1,5 км/ч, туристы прибыли на станцию на 30 мин раньше намеченного срока. Какой путь прошли туристы?

127 Расстояние между двумя поселками равно 9 км. Дорога имеет подъем, равнинный участок и спуск. Скорость пешехода на подъеме равна 4 км/ч, на равнинном участке 5 км/ч, а на спуске 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного поселка до другого и обратно за 3 ч 41 мин?

128 Яблоки при сушке теряют 84% своей массы. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы приготовить 16 кг сушеных?



а кг яблок *0,16 а кг яблок*

129 Кофе при обработке теряет 12% своей массы. Сколько килограммов свежего кофе надо взять, чтобы получить 4,4 кг кофе, готового к употреблению?

130 Решить с помощью микрокалькулятора уравнение:
1) $173x + 199{,}6 = 2517{,}8$; 2) $24{,}8x + 25{,}47 = 71{,}35$.

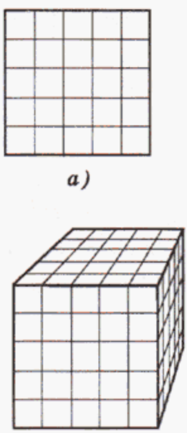
131 Решить уравнение:
1) $|2x - 1| = 3$; 2) $|1 - 5x| = 2$.

132 Поезд идет со скоростью 40 км/ч. По наблюдению машиниста встречный поезд, длина которого 75 м, проходит мимо него за 3 с. Какова скорость движения встречного поезда?

III
глава

Одночлены и многочлены

§ 9 Степень с натуральным показателем



а) б)

Рис. 1

Посмотрите на рисунок 1. Квадрат со стороной 5 единиц содержит $5 \cdot 5 = 25$ единичных квадратиков. Куб со стороной 5 единиц содержит $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ единичных кубиков.

Вы знаете, что произведение $5 \cdot 5$ обозначают 5^2 (читается: «Пять в квадрате»); произведение $5 \cdot 5 \cdot 5$ обозначают 5^3 (читается: «Пять в кубе»):

$$5 \cdot 5 = 5^2, \qquad 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3.$$

Аналогичные обозначения вводятся для произведения любого числа одинаковых множителей, например:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\ \text{раз}} = 3^5, \quad \underbrace{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{7}}_{9\ \text{раз}} = \left(\frac{1}{7}\right)^9,$$

Вообще $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}} = a^n$. Выражение a^n читается так: «Степень числа a с показателем n» — или коротко: «a в степени n».

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим **1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}.$$

Степенью числа a с показателем 1 называется само число a:

$$a^1 = a.$$

В выражении a^n число a называют *основанием степени*, число n называют *показателем степени*.

Например: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, здесь 3 — основание степени, 4 — показатель степени, 81 — значение степени 3^4. Отметим, что основание может быть любым числом, например:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32;$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125};$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81};$$

$$0{,}2^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008;$$

$$(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1;$$

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000.$$

Вычисление значения степени называют *действием возведения в степень.* Это — действие третьей ступени. Напомним, что при вычислении значения выражения, не содержащего скобки, сначала выполняют действия третьей ступени, затем второй (умножение и деление) и, наконец, первой (сложение и вычитание).

Задача Вычислить: $7 \cdot 2^4 - 5 \cdot 3^2$.

▶ $7 \cdot 2^4 - 5 \cdot 3^2 = 7 \cdot 16 - 5 \cdot 9 = 112 - 45 = 67.$ ◁

Запись чисел с помощью степени используется во многих случаях, например для записи натуральных чисел в виде суммы разрядных слагаемых: $3245 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Для записи больших чисел часто применяются степени числа 10. Так, расстояние от Земли до Солнца, примерно равное 150 млн км, записывают в виде $1{,}5 \cdot 10^8$ км; радиус земного шара, приближенно равный 6,37 млн м, — в виде

$6{,}37 \cdot 10^6$ м, а расстояние от Земли до ближайшей звезды (альфа Центавра) — в виде $4 \cdot 10^{13}$ км.

Каждое число, большее 10, можно записать в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число. Такая запись называется *стандартным видом числа*.

Например, $4578 = 4{,}578 \cdot 10^3$, $45{,}78 = 4{,}578 \cdot 10$, $103\,000 = 1{,}03 \cdot 10^5$.

С записью чисел в стандартном виде вы будете часто встречаться при изучении физики, химии, при вычислениях на микрокалькуляторе и т. д.

Упражнения

133 Вычислить площадь квадрата со стороной, равной:

1) 5 см; 2) $\frac{1}{2}$ м; 3) $3\frac{1}{4}$ км; 4) 2,7 дм.

134 Вычислить объем куба, длина ребра которого равна:

1) 2 м; 2) 3 дм; 3) $\frac{1}{5}$ км; 4) 0,4 м.

135 Записать произведение в виде степени:

1) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; 2) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

3) $x \cdot x \cdot x \cdot x$; 4) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$;

5) $(x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y)$; 6) $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$.

Упростить выражение, используя запись произведения в виде степени **(136—138)**.

136 1) $5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2$; 2) $6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;

3) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$; 4) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}3$.

137 1) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot a \cdot a \cdot a$; 2) $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 3 \cdot 3$;

3) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot (x-y) \cdot (x-y)$;

4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot (8a-b)(8a-b)(8a-b)$.

138 1) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{21 \text{ раз}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{12 \text{ раз}}$; 2) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{16 \text{ раз}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{31 \text{ раз}}$;

3) $\underbrace{7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{15 \text{ раз}}$; 4) $\underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{13 \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}$.

139 Упростить выражение:

1) $p \cdot p \cdot p + q \cdot q$; 2) $a \cdot a + b \cdot b \cdot b \cdot b$;

3) $a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a$; 4) $x \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot x$.

140 Записать в виде произведения одинаковых множителей:
1) 11^3; 2) $(-1{,}25)^4$; 3) $(2a)^5$; 4) $(a+b)^4$.

Вычислить **(141—145)**.

141 1) 2^3; 2) 3^2; 3) 10^4; 4) 5^3.

142 1) 1^5; 2) $(-1)^7$; 3) 0^{15}; 4) 0^5.

143 1) $(-5)^3$; 2) -5^3; 3) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$; 4) $-\left(2\frac{1}{4}\right)^2$.

144 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 3) $\left(1\frac{2}{7}\right)^2$; 4) $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$.

145 1) $2(-3)^2$; 2) $-5(-2)^3$; 3) $-\frac{1}{2}(-4)^2$; 4) $-\frac{2}{3}(-3)^2$.

146 Выполнить действия:
1) $12\cdot 10^2 - 5^3\cdot 10$; 2) $9^2\cdot 2+200\cdot(0{,}1)^2$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 27+(0{,}1)^5\cdot 50\,000$; 4) $10^3:40-\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 128$.

147 Записать в виде суммы разрядных слагаемых число:
1) 12 743; 2) 5 043 201; 3) 13 027 030; 4) 12 350 107.

148 Записать число, представленное суммой разрядных слагаемых:
1) $2\cdot 10^5+3\cdot 10^4+5\cdot 10^3+1\cdot 10^2+2\cdot 10+1$;
2) $3\cdot 10^6+5\cdot 10^5+3\cdot 10^4+2\cdot 10^3+3\cdot 10+7$;
3) $7\cdot 10^5+1\cdot 10^3+5\cdot 10^2+8$;
4) $1\cdot 10^5+1\cdot 10^3+1$.

149 Делится ли на 3; на 5 сумма:
1) $2\cdot 10^4+3\cdot 10^2+6$; 2) $4\cdot 10^5+3\cdot 10^4+2\cdot 10+5$;
3) $7\cdot 10^3+8\cdot 10^2$; 4) $5\cdot 10^4+3\cdot 10^3+10$?

150 Записать в стандартном виде число:
1) 249; 2) 781; 3) 84 340; 4) 80 005; 5) 3100,2; 6) 127,48.

151 Ребро куба равно k сантиметров. Записать формулы площади его поверхности S и объема V.

152 Записать:
1) квадрат числа m;
2) куб числа a;
3) квадрат суммы чисел c и 3;
4) сумму квадратов чисел c и 3.

153 Установить, какое из чисел больше:
1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ или $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; 2) 2^3 или 3^2;
3) $(-0{,}2)^3$ или $(-0{,}2)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ или $\left(\frac{1}{3}\right)^2$.

154 Является ли положительным числом корень уравнения:

1) $3x+(-0{,}1)^3=(-0{,}485)^4$;
2) $(-1{,}415)^2+2x=(-9{,}15)^3$;
3) $(-7{,}381)^3-(1-x)=(8{,}0485)^2$;
4) $(10{,}381)^3=(-0{,}012)^5-2x$?

155 Записать в стандартном виде:

1) число молекул газа в 1 см^3 при 0 °С и давлении 760 мм рт. ст., равное 27 000 000 000 000 000 000;

2) число километров,составляющих один парсек (единица длины, принятая в астрономии), если один парсек равен 30 800 000 000 000 км;

3) электронная вычислительная машина может произвести в 1 с 1 000 000 операций.

156 Поверхность земного шара составляет более 510 млн км^2, объем Земли свыше 1000 млрд км^3. Записать данные числа в стандартном виде.

157 В 1 л морской воды в среднем содержится 0,00001 мг золота. Сколько золота содержится в 1 км^3 морской воды?

158 Не производя вычислений, расположить числа:

1) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; $(-1{,}8)^2$; $\left(\frac{3}{7}\right)^3$ в порядке убывания;

2) $(-0{,}4)^3$; $(-1{,}5)^2$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$; $(-7)^3$ в порядке возрастания.

159 Какой цифрой оканчивается значение выражения:

1) $3^3+4^3+5^3$; 2) $3^3+10^3+18^3$;
3) $21^4+34^4+46^4$; 4) $15^5+26^5+39^5$?

§ 10 Свойства степени с натуральным показателем

Возведение в степень обладает несколькими важными свойствами.

Свойство 1.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются.

● По определению степени с натуральным показателем

$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2)}_{2\text{ раза}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{3\text{ раза}} =$	$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m\text{ раз}} \times$ $\times \underbrace{(a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a)}_{n\text{ раз}} =$

по сочетательному закону умножения

$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\text{ раз}} =$	$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\text{ раз}} =$

по определению степени с натуральным показателем

$= 2^5.$	$= a^{m+n}.$

Итак,

$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3}.$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$ ○

Свойство 2.

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}, \quad m > n, \quad a \neq 0.}$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются.

● Найдем

$2^5 : 2^3;$ $5 > 3.$	$a^m : a^n$, где $m > n,\ a \neq 0.$

По первому свойству степени

$2^{5-3} \cdot 2^3 = 2^5,$	$a^{m-n} \cdot a^n = a^m,$

по определению деления

$2^{5-3} = 2^5 : 2^3.$	$a^{m-n} = a^m : a^n.$

Итак,

$2^5 : 2^3 = 2^{5-3}.$	$a^m : a^n = a^{m-n},$ $m > n, a \neq 0.$ ○

Свойство 3.

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}.}$$

При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются.

По определению степени с натуральным показателем

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = \quad \Big| \quad (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} =$$

по первому свойству степени

$$= 2^{3+3} = \quad \Big| \quad = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} =$$

по определению умножения

$$= 2^{3\cdot 2}. \quad \Big| \quad = a^{mn}.$$

Итак, $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2}$. | $(a^m)^n = a^{mn}$.

Свойство 4.

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель.

По определению степени с натуральным показателем

$$(2\cdot 3)^3 = \underbrace{(2\cdot 3)(2\cdot 3)(2\cdot 3)}_{3 \text{ раза}} = \quad \Big| \quad (ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ раз}} =$$

по сочетательному и переместительному законам умножения

$$= \underbrace{(2\cdot 2\cdot 2)}_{3 \text{ раза}}\underbrace{(3\cdot 3\cdot 3)}_{3 \text{ раза}} = \quad \Big| \quad = \underbrace{(a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ раз}}\underbrace{(b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ раз}} =$$

по определению степени с натуральным показателем

$$= 2^3 \cdot 3^3. \quad \Big| \quad = a^n \cdot b^n.$$

Итак,

$(2\cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$. | $(ab)^n = a^n b^n$.

Свойство 5.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель.

По определению степени с натуральным показателем

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}_{3\text{ раза}} = \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ раз}} =$$

по правилу умножения дробей

$$= \frac{\overbrace{2\cdot2\cdot2}^{3\text{ раза}}}{\underbrace{3\cdot3\cdot3}_{3\text{ раза}}} = \qquad\qquad = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ раз}}} =$$

по определению степени с натуральным показателем

$$= \frac{2^3}{3^3}. \qquad\qquad = \frac{a^n}{b^n}.$$

Итак,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}. \qquad\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0.$$

Задача 1 Вычислить: $\dfrac{13^7\cdot5^3\cdot3^4}{13^6\cdot5\cdot3^4}$.

$$\frac{13^7\cdot5^3\cdot3^4}{13^6\cdot5\cdot3^4} = \frac{13^7}{13^6}\cdot\frac{5^3}{5}\cdot\frac{3^4}{3^4} = 13^{7-6}\cdot5^{3-1}\cdot1 =$$

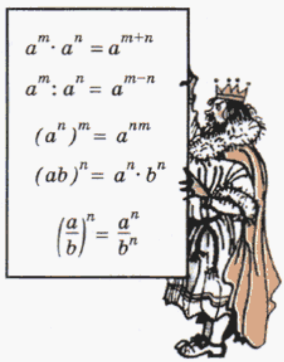
$= 13\cdot25 = 325.$

Задача 2 Скорость света равна $3\cdot10^8$ м/с, расстояние от Солнца до Земли равно $1{,}5\cdot10^{11}$ м. За какое время пройдет луч света расстояние от Солнца до Земли?

По формуле пути при равномерном движении $s = vt$ получаем $1{,}5\cdot10^{11} = 3\cdot10^8\,t$, откуда

$$t = \frac{1{,}5\cdot10^{11}}{3\cdot10^8} =$$

$$= 0{,}5\cdot10^3 = 500.$$



Ответ 500 с = 8 мин 20 с.

Упражнения

Записать произведение в виде степени **(160—162)**.

160 1) c^3c^2; 2) a^3a^4; 3) $\left(\frac{1}{2}a\right)^7\left(\frac{1}{2}a\right)$; 4) $(3b)(3b)^6$.

161 1) $2^3 2^2 2^4$; 2) $3^2 3^5 3^3$;
3) $(-5)^6(-5)^3(-5)^4$; 4) $(-6)^3(-6)^2(-6)^7$.

162 1) $(-2{,}5a)^3(-2{,}5a)^8$; 2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^5\left(-\frac{5x}{6}\right)^7$;
3) $(x-a)^7(x-a)^{10}$; 4) $(n+m)^{15}(n+m)^5$.

Записать в виде степени с основанием 2 **(163—164)**.

163 1) 32; 2) 128; 3) 1024; 4) 256; 5) $2^5\cdot 128$; 6) $32\cdot 64$.

164 1) $64:4$; 2) $32:2^3$; 3) $8:2^2$; 4) $256:32$; 5) $\frac{2^7}{2^5}$; 6) $\frac{2^{10}}{2}$.

Записать в виде степени с основанием 3 **(165—166)**.

165 1) 81; 2) 27; 3) 729; 4) 243; 5) $3^6\cdot 81$; 6) $243\cdot 27$.

166 1) $3^4:9$; 2) $27:3^2$; 3) $243:27$; 4) $81:9$; 5) $\frac{3^{15}}{3}$; 6) $\frac{3^8}{3^4}$.

Записать частное в виде степени **(167—168)**.

167 1) $\left(-\frac{9}{7}\right)^8:\left(-\frac{9}{7}\right)^5$; 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^{18}:\left(\frac{1}{17}\right)^{17}$;
3) $x^{21}:x^7$; 4) $d^{24}:d^{12}$.

168 1) $\left(\frac{3y}{4}\right)^6:\left(\frac{3y}{4}\right)^2$; 2) $(2a)^5:(2a)^3$;
3) $(a-b)^7:(a-b)^5$; 4) $(m+n)^{10}:(m+n)^5$.

Вычислить **(169—170)**.

169 1) $\frac{2\cdot 3^3}{3^2}$; 2) $\frac{2^3\cdot 3^2}{2^2\cdot 3}$; 3) $\frac{3^5\cdot 3^{10}}{3^6\cdot 3^7}$; 4) $\frac{5^8\cdot 5^7}{5^4\cdot 5^9}$.

170 1) $\frac{8\cdot 3^3}{2\cdot 3^2}$; 2) $\frac{11^3\cdot 4^2}{11^2\cdot 4}$; 3) $\frac{2^4\cdot 2^6\cdot 2^3}{2^5\cdot 2^7}$; 4) $\frac{3^6\cdot 3^3}{3^5\cdot 3\cdot 3}$.

171 Решить уравнение:
1) $x:3^2=3^3$; 2) $x:2^4=2^2$; 3) $x\cdot 2^6=2^8$;
4) $x\cdot 3^5=3^8$; 5) $5^5\cdot x=5^7$; 6) $4^6\cdot x=4^8$.

Записать в виде степени с основанием a **(172—173)**.

172 1) $(a^5)^6$; 2) $(a^8)^7$; 3) $(a^2)^5a^8$;
4) $a^5(a^2)^3$; 5) $a^7a^5(a^2)^4$; 6) $a^3(a^3)^3a^3$.

173 1) $(a^7)^5:(a^3)^4$; 2) $(a^6)^4:(a^3)^5$; 3) $\frac{(a^3)^5a^4}{a^{12}}$; 4) $\frac{a^8(a^4)^4}{(a^3)^4}$.

174 Найти значение выражения:

1) $\frac{(c^2)^3 c^8}{(c^3)^4}$ при $c=-3$; $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{d^3 d^5}{(d^2)^3}$ при $d=\frac{1}{4}$; -10.

175 Представить 2^{20} в виде степени с основанием:

1) 2^2; 2) 2^4; 3) 2^5; 4) 2^{10}.

Записать в виде степени с показателем 2 **(176—177)**.

176 1) 0,01; 2) $\frac{25}{36}$; 3) $1\frac{9}{16}$; 4) 0,0004.

177 1) a^4; 2) b^6; 3) c^{10}; 4) x^{20}.

Возвести в степень произведение **(178—181)**.

178 1) $(3\cdot5)^4$; 2) $(7\cdot6)^5$; 3) $(1{,}3\cdot8)^5$; 4) $(4\cdot\frac{1}{7})^3$.

179 1) $(ax)^7$; 2) $(6y)^6$; 3) $(2{,}5cd)^2$; 4) $(3nm)^3$.

180 1) $(xy^3)^2$; 2) $(a^2b)^3$; 3) $(2b^4)^5$; 4) $(0{,}1c^3)^2$.

181 1) $(10n^2m^3)^4$; 2) $(8a^4b^7)^3$; 3) $(-2{,}3a^3b^4)^2$; 4) $(-2nm^3)^4$.

182 (Устно.) Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если длину каждой его стороны увеличить в 2 раза; в 3 раза; в 10 раз?

183 (Устно.) Какую часть объема куба составляет куб, ребро которого составляет $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$ часть ребра первого куба?

184 Записать в виде степени произведения выражение:

1) $4^5\cdot x^5$; 2) $2^3\cdot a^3$; 3) $5^4\cdot7^4$; 4) $2^5\cdot3^5$;
5) $16a^2$; 6) $81k^2$; 7) $9^7n^7m^7$; 8) $15^3a^3b^3$.

Записать выражение в виде степени с показателем 2 **(185—186)**.

185 1) c^2d^{10}; 2) a^4b^6; 3) $25a^4$; 4) $81m^2$.

186 1) $a^4b^6c^2$; 2) $x^2y^4z^8$; 3) $49x^8y^6$; 4) $100c^8x^6$.

Вычислить **(187—189)**.

187 1) $(0{,}25)^7\cdot4^7$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{17}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{17}$;

3) $(-0{,}125)^{11}\cdot8^{11}$; 4) $(-0{,}2)^5\cdot5^5$.

188 1) $\frac{2^8\cdot3^8}{6^5}$; 2) $\frac{4^5\cdot3^5}{12^3}$; 3) $\frac{10^5}{2^5\cdot5^5}$; 4) $\frac{14^4}{2^3\cdot7^3}$.

189 1) $\frac{81\cdot27^3}{3^8}$; 2) $\frac{2^8\cdot(7^2)^4}{14^7}$; 3) $\frac{16^2\cdot3^5}{12^4}$; 4) $\frac{2^9\cdot(2^2)^5}{(2^5)^3}$.

Возвести в степень дробь **(190—192)**.

190 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{3}{a}\right)^2$; 4) $\left(\frac{b}{8}\right)^3$.

191 1) $\left(\frac{a}{2b}\right)^4$; 2) $\left(\frac{3b}{5c}\right)^4$; 3) $\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^7$; 4) $\left(\frac{5^2}{7^4}\right)^3$.

192 1) $\left(\frac{a+b}{3}\right)^3$; 2) $\left(\frac{7}{2+c}\right)^2$; 3) $\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^5$; 4) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^7$.

Записать в виде степени **(193—194).**

193 1) $\frac{3^7}{4^7}$; 2) $\frac{2^5}{5^5}$; 3) $\frac{m^3}{2^3}$; 4) $\frac{5^7}{a^7}$.

194 1) $\frac{(2a)^2}{(3b)^2}$; 2) $\frac{(4x)^4}{(3y)^4}$; 3) $\frac{1}{-8}$; 4) $\frac{-1}{27}$.

Пусть n, m, k — натуральные числа. Представить выражение в виде степени **(195—198).**

195 1) $4^n \cdot 4^5$; 2) $3^8 \cdot 3^n$; 3) $c^{28} \cdot c^n$; 4) $a^n \cdot a^{13}$.

196 1) $y^n \cdot y^m$; 2) $b^n \cdot b^k$; 3) $5^{4k} \cdot 5^4$; 4) $3^{3n} \cdot 3^{3m}$.

197 1) $2^{2n} : 2^n$; 2) $2^{3n} : 2^{2n}$; 3) $2^{4n+1} : 2^{2n}$; 4) $2^{4n+5} : 2^{n+2}$.

198 1) $3^{4n} : 3^{3n}$; 2) $3^{6n} : 3^{2n}$; 3) $3^{n+3} : 3^{n+1}$; 4) $3^{n+6} : 3^{n+2}$.

199 При каком значении n верно равенство:

1) $3^n = 9$; 2) $128 = 2^n$; 3) $(2^2)^n = 16$; 4) $(3^n)^2 = 81$?

Вычислить **(200—201).**

200 1) $\frac{6^{12} \cdot 4^{12}}{3^{12} \cdot 8^{12}}$; 2) $\frac{4^{10} \cdot 3^{10}}{2^{10} \cdot 6^{10}}$; 3) $\frac{15^4}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 25}$; 4) $\frac{4^{16}}{8^{10}}$.

201 1) $\left(\frac{35}{48}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3 \cdot \left(1\frac{3}{5}\right)^2$; 2) $\left(\frac{14}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot (2{,}5)^3$;

3) $\left(\frac{5^3}{6^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7$; 4) $\left(\frac{7^4}{15^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5$.

202 Найти шестую степень числа, если:

1) его квадрат равен 0,25; 400; $11\frac{1}{9}$;

2) его куб равен 0,008; 125; $3\frac{3}{8}$; $37\frac{1}{27}$.

203 1) Масса Земли равна $6 \cdot 10^{24}$ кг; масса Солнца — $2 \cdot 10^{30}$ кг. Во сколько раз масса Земли меньше массы Солнца?

2) Расстояние от Земли до звезды Сириус 83 000 000 000 000 км. Вычислить приближенно, сколько лет луч света идет от Земли до Сириуса.

204 Вычислить с помощью микрокалькулятора:

1) 3^{10}; 2) 5^9; 3) $(2{,}3)^4$; 4) $(1{,}3)^5$.

205 Какое из чисел больше:

1) 54^4 или 21^{12}; 2) 10^{20} или 20^{10};

3) 100^{20} или 9000^{10}; 4) 6^{20} или 3^{40}?

206 Вычислить:

1) $\frac{2^5 \cdot 5^{22} - 2 \cdot 5^{21}}{25^{10}}$; 2) $\frac{5 \cdot 2^{32} - 4 \cdot 2^{30}}{4^{16}}$;

3) $\frac{(4 \cdot 3^{22} + 7 \cdot 3^{21}) \cdot 57}{(19 \cdot 27^4)^2}$; 4) $\frac{5(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14})}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$.

§ 11 Одночлен. Стандартный вид одночлена

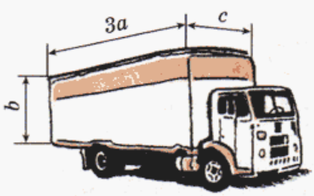


Рис. 2

При решении различных задач часто встречаются алгебраические выражения вида ab, $\frac{1}{2}xyz$, $3a^2b$. Например, вместимость рефрижератора, размеры которого указаны на рисунке 2, равна $3abc$. Выражение $3abc$ является произведением четырех множителей, из которых первый — число, а три следующих — буквы a, b, c.

Множители, записанные с помощью цифр, называются числовыми множителями, а множители, обозначенные буквами, — буквенными множителями. Произведение числовых и буквенных множителей называют *одночленом.*

Например, одночленами являются выражения

$$abc,\ (-4)a \cdot 3ab,\ \frac{1}{4}a(-0{,}3)bab.$$

Так как произведение равных множителей можно записать в виде степени с натуральным показателем, то степень числа и произведение степеней также называют одночленами.

Например, одночленами являются выражения

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2,\quad (-7)^3,\quad x^5,\quad 4a^2,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)a^2b.$$

Так как каждое число можно записать в виде произведения этого числа на единицу, то выражения вида a, 2, $\frac{3}{8}$ также считают одночленами.

Задача Найти значение одночлена $16ac(0{,}5)a(0{,}25)b$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=34$, $c=\frac{9}{17}$.

▶ Если подставить данные значения букв в одночлен, то придется вычислить произведение

$$16\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{17}\cdot0{,}5\cdot\frac{1}{3}\cdot0{,}25\cdot34.$$

Вычисления можно провести короче, если сначала упростить данный одночлен, используя переместительный и сочетательный законы умножения:

$$16ac(0{,}5)a(0{,}25)b=(16\cdot0{,}5\cdot0{,}25)(a\cdot a)bc=2a^2bc.$$

Теперь находим значение одночлена $2a^2bc$ при $a=\frac{1}{3}$, $b=34$, $c=\frac{9}{17}$:

$$2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot34\cdot\frac{9}{17}=\frac{2\cdot34\cdot9}{9\cdot17}=4.\ \triangleleft$$

При решении задачи данный одночлен был записан в более простом виде: $2a^2bc$. В этом одночлене содержится только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями. Такие одночлены называют *одночленами стандартного вида*.

Любой одночлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно перемножить все числовые множители и поставить их произведение на первое место. Затем произведения степеней с одинаковыми основаниями записать в виде степени.

Буквенные множители чаще всего располагают в алфавитном порядке, хотя это необязательно. Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют *коэффициентом* этого *одночлена*.

Например, коэффициент одночлена $2a$ равен 2, коэффициент одночлена $\frac{5}{6}ab^2$ равен $\frac{5}{6}$, коэффициент одночлена $(-7)a^2b^3c$ равен (-7). В последнем случае одночлен можно записать без скобок: $(-7)a^2b^3c=-7a^2b^3c$.

Коэффициент, равный 1, обычно не записывают, так как от умножения на единицу число не меняется. Например, $1 \cdot abc^2 = abc^2$, т. е. коэффициент одночлена abc^2 равен единице. Если коэффициент равен (−1), то и в этом случае единицу и скобки можно не писать, а оставить только знак «−». Например, $(-1)abc = -abc$, т. е. коэффициент одночлена $-abc$ равен −1.

Упражнения

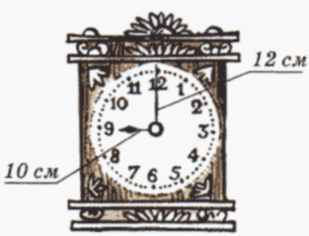
207 Записать в виде алгебраического выражения:
1) произведение куба числа m и числа p;
2) утроенное произведение квадрата числа a и числа b;
3) число секунд в t часах;
4) число сантиметров в n метрах.

208 Найти числовое значение одночлена:
1) $0{,}5b^2$ при $b=-4$; 2) $3abc$ при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$.

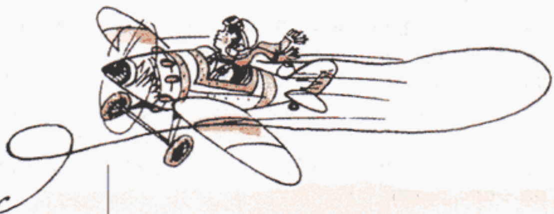
209 Среди одночленов $10{,}2a^2b^2c$; $-7{,}3ab^2c$; $17a^2bca$; $-2{,}6ab^2c^3$; $-m$; $3ab$; $-28a^2b^2c^2$; $3aabc$; $-2a\cdot\frac{1}{2}b$; $-m^4m$; $m\cdot 2$; $17a^2b^2c^2$ указать одночлены:
1) стандартного вида;
2) отличающиеся только коэффициентами.

210 Записать одночлен в стандартном виде:
1) $3m^4m$; 2) z^5z^5z; 3) $-ab\cdot 5$;
4) $(-m)(-m^3)$; 5) $5^2pq^2(-4)^2qp$; 6) $2^3qp^2(-3)^2pq$;
7) $-2{,}5m(-0{,}8)m^3n^4$; 8) $\frac{2}{3}xy^2\left(-\frac{2}{11}\right)xy$.

211 Записать одночлен в стандартном виде и найти его числовое значение:
1) $ac\cdot 12c$ при $a=-\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{6}$;
2) $\frac{1}{6}a\cdot 8b^2\cdot\frac{3}{4}ba^3$ при $a=-2$, $b=\frac{1}{2}$.



Какое расстояние пройдет за сутки:
а) конец часовой стрелки;
б) конец минутной стрелки?



№ 5

КАКОВА ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА ЗНАЧЕНИЯ СТЕПЕНИ:

846^{847}, 1987^{1987}, 1998^{1998}?

212 Длина окружности радиуса R выражается формулой $C = 2\pi R$; площадь круга радиуса R выражается формулой $S = \pi R^2$ ($\pi \approx 3{,}14$). С помощью микрокалькулятора вычислить:

1) C при $R = 37{,}5$; 2) S при $R = 1{,}3$;

3) R при $C = 122{,}46$; 4) S при $C = 16{,}4$.

§ 12 Умножение одночленов

Задача Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле $V = abc$, где a — длина, b — ширина и c — высота этого параллелепипеда. Каким будет объем нового параллелепипеда, если длину данного увеличить в 5 раз, ширину — в $2n$ раз, высоту — в $3n$ раз?

► Найдем измерения нового параллелепипеда: длина $5a$, ширина $2nb$, высота $3nc$. Его объем равен

$$V_1 = (5a) \cdot (2nb) \cdot (3nc). \triangleleft$$

Выражение $(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc)$ является произведением трех одночленов: $5a$, $2nb$, $3nc$. По свойствам умножения чисел можно записать следующее равенство:

$$(5a)\cdot(2nb)\cdot(3nc)=5a\cdot 2nb\cdot 3nc=$$
$$=(5\cdot 2\cdot 3)\cdot(annbc)=30n^2abc.$$

В результате умножения одночленов снова получается одночлен. Его можно упростить, записав в стандартном виде. Например:

$$(3a^2b^3c)\cdot(4ab^2)=3a^2b^3c\cdot 4ab^2=12a^3b^5c.$$

$$(3a^2\ b^3\ c)\cdot(4\,a\,b^2)=12\,a^3\ b^5\ c$$

Рассмотрим произведение двух или нескольких одинаковых одночленов, т. е. степень одночлена, например $(5a^3b^2c)^2$. Так как одночлен $5a^3b^2c$ является произведением множителей 5, a^3, b^2, c, то по свойству возведения произведения в степень имеем:

$$(5a^3b^2c)^2=5^2(a^3)^2(b^2)^2c^2=25a^6b^4c^2.$$

Точно так же

$$(2pq^2)^3=2^3p^3(q^2)^3=8p^3q^6.$$

В результате возведения одночлена в натуральную степень снова получается одночлен.

Упражнения

Выполнить умножение одночленов **(213—215)**.

213 1) $(2p)(-3c^2)$; 2) $(-5m^2)(-7n)$;

3) $(4a^2)(6a^3)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}b^3\right)(8b^2)$.

214 1) $(3a^2b^5c)(6a^3bc^2)$; 2) $(7a^5b^2c)(-3ab^4c)$;

3) $\left(\frac{2}{3}a^2b^3x\right)\left(\frac{3}{4}a^3bx^2\right)$; 4) $\left(-\frac{3}{2}a^3xy^3\right)\left(\frac{3}{4}ax^2y\right)$.

215 1) $\left(-\frac{1}{3}m^2\right)(-24n)(4nm)$; 2) $(-18n)\left(-\frac{1}{6}m^2\right)(-5nm)$;

3) $\left(\frac{1}{3}ay^3\right)\left(\frac{3}{4}x^2y\right)(0{,}2a^3x)$;

4) $(-13a^2bc)(-5ab^2c)(-0{,}4abc^3)$.

Возвести одночлен в степень (**216—218**).

216 1) $(2a)^3$; 2) $(5b)^2$; 3) $(3b^2)^4$; 4) $(2a^3)^2$.

217 1) $(-2a^2b)^3$; 2) $(-a^2bc)^5$; 3) $(-3x^3y)^2$; 4) $(-2x^2y^3)^4$.

218 1) $\left(\frac{1}{2}nm^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}n^2m^2\right)^4$; 3) $\left(-0{,}1a^3b^3\right)^3$; 4) $\left(0{,}4a^3b^2\right)^2$.

Выполнить действия (**219—220**).

219 1) $(-2a)^2(-3a)$; 2) $(-a)^3(2a)$;

3) $(-0{,}2bc^2)^2(20cx^2)$; 4) $(-0{,}1ab^2c)^2(100by^2)$.

220 1) $\left(-1\frac{3}{5}x^3y^2\right)\left(-\frac{1}{2}c^2x^2\right)^3$; 2) $\left(2\frac{1}{4}x^3y\right)\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2$;

3) $(-3bc^2)^3(2ab^2)^2$; 4) $(-2a^2b)^2(-a^2b^3)^3$;

5) $\left(\frac{5}{6}m^2n\right)^2(6mn^2)^2$; 6) $\left(\frac{3}{7}m^3n\right)^2(-7mn^2)^3$.

221 Выполнить умножение одночленов и найти значение полученного выражения:

1) $\frac{1}{3}a^2 \cdot 3a^2b$ при $a=-2$, $b=\frac{5}{7}$;

2) $\frac{2}{5}mn \cdot 10n^2$ при $m=0{,}8$, $n=4$.

222 Найти площадь прямоугольника со сторонами:

1) $\frac{1}{5}a$ и $10b$; 2) $\frac{3}{7}x$ и $14y$.

223 Найти объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами:

1) $0{,}25m$, $1\frac{1}{3}n$ и $6mn$; 2) $0{,}1a$, $2b^2$ и $5ab$.

224 Записать одночлен в виде квадрата другого одночлена:

1) $9a^2$; 2) $16x^4$; 3) $25a^2b^4$;

4) $81x^6y^2$; 5) $36x^{10}y^4$; 6) $1{,}21a^8b^4$.

225 Записать одночлен в виде куба другого одночлена:

1) $27a^3$; 2) $8b^6$; 3) $27a^3b^{12}$;

4) $8a^9b^6$; 5) $\frac{1}{125}x^9y^{12}$; 6) $-0{,}027x^3y^{15}$.

226 При каком значении n верно равенство:

1) $(2a)^n = 32a^5$; 2) $\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^n = -\frac{1}{27}x^6y^3$;

3) $(0{,}2y^2)^n \cdot 100 = 4y^4$; 4) $\left(3\frac{1}{3}m^4\right)^n \cdot 0{,}001 = \frac{1}{27}m^{12}$;

5) $(0{,}3ab^3)^n \cdot \frac{1}{0{,}09} = a^2b^6$; 6) $\left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^n = \frac{1}{64}b^{12}c^6$?

§ 13 Многочлены

В алгебре часто рассматриваются алгебраические выражения, представляющие собой сумму или разность одночленов.

Например, площадь закрашенной части фигуры, изображенной на рисунке 3, *а*, равна $\frac{1}{2}ac + b^2$, а площадь фигуры, изображенной на рисунке 3, *б*, равна $ab - c^2$. Выражение $\frac{1}{2}ac + b^2$ — сумма двух одночленов $\frac{1}{2}ac$ и b^2. Выражение $ab - c^2$ — разность двух одночленов ab и c^2 или сумма одночленов ab и $(-c^2)$.

Эти выражения являются алгебраическими суммами одночленов.

Такие выражения называют многочленами.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами этого многочлена.* Например, членами многочлена $5nm^2 - 3m^2k - 7nk^2 + 4nm$ являются одночлены $5nm^2$, $-3m^2k$, $-7nk^2$, $4nm$.

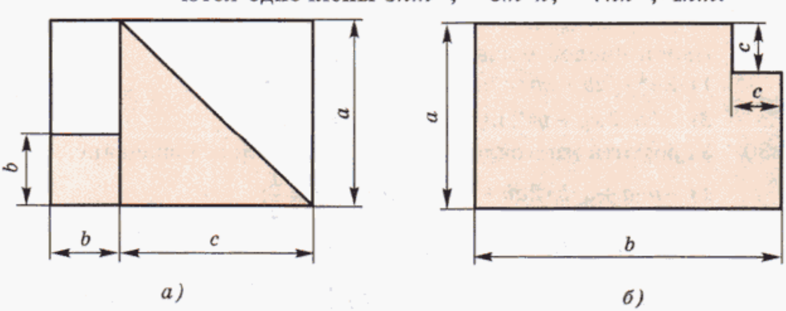


Рис. 3

Многочлен, состоящий из двух членов, называют двучленом; многочлен, состоящий из трех членов, называют трехчленом и т. д.
Примеры двучленов: $a^2 - b^2$, $5ac + 4c$.
Примеры трехчленов: $a + 2b - 3c$, $\frac{1}{2} - bc + 3ab$.

Одночлен считают многочленом, состоящим из одного члена.
Если некоторые члены многочлена записаны не в стандартном виде, то этот многочлен можно упростить, записав все его члены в стандартном виде.

Задача Упростить многочлен $2a \cdot 4b - 5abac + 9bc \cdot \frac{1}{3}c$.

▶ Запишем все члены данного многочлена в стандартном виде:

$$2a \cdot 4b = 8ab,\ -5abac = -5a^2bc,\ 9bc \cdot \frac{1}{3}c = 3bc^2.$$

Следовательно,

$$2a \cdot 4b - 5abac + 9bc \cdot \frac{1}{3}c = 8ab - 5a^2bc + 3bc^2. \quad ◁$$

Упражнения

227 Составить многочлен из одночленов:
1) $6x^2$, $7x$ и 9; 2) $2x^2$, $-11x$ и 3:
3) $-x^4$, x^3 и $-x$; 4) a^5, $-a^4$ и a;
5) $8a^3$, $4a^2b$, $-2ab^3$ и b^3; 6) $4a^3b$, $-2a^2b^2$, $-5ab^3$.

228 Упростить многочлен, записав каждый его член в стандартном виде:
1) $12a^2ba - 2abab^2 + 11aba$;
2) $2ab^2 \cdot 4ab - 3a^2 \cdot 8aba - 2abab^2$;
3) $1{,}5xy^2(-4)xyz - 4mnkm^2nk$;
4) $4cc^2c\left(-\frac{1}{4}\right)bc + 5xy^2xy^2$.

229 Найти числовое значение многочлена:
1) $2a^4 - ab + 2b^2$ при $a = -1$, $b = -0{,}5$;
2) $x^2 + 2xy + y^2$ при $x = 1{,}2$, $y = -1{,}2$.

230 Упростить многочлен и найти его числовое значение:
1) $-aba + a^2b \cdot 2ab + 4$ при $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$;
2) $b^2 \cdot 5ab - 5a \cdot 5a^2b$ при $a = \frac{1}{5}$, $b = -2$;
3) $x^2yxy - xy^2xy + xy$ при $x = -3$, $y = 2$;
4) $xy^2x^2y - xyxy$ при $x = -2$, $y = 3$.

231 При каком значении x значение многочлена $-0{,}2x \cdot 3x + 7x \cdot 1\frac{3}{7} + 0{,}1x^2 \cdot 6 - 2x$ равно 1?

232 Может ли значение многочлена:
1) $2ab + 3b^2 + 1$; 2) $a^2 - b^2$ —
быть числом отрицательным, если $a > 0$ и $b > 0$?

233 Может ли значение многочлена:
1) $b^2 - 4a^2$; 2) $ab - a^2b^2$ —
быть числом положительным, если $a > 0$, $b > 0$?

234 На учебно-опытном участке собрано 1410 кг фруктов, причем яблок собрано в 5 раз больше, чем груш, и на 350 кг больше, чем слив. Сколько килограммов каждого вида фруктов собрано на этом участке?

§ 14 Приведение подобных членов

Задача 1 Имеются две книги с одинаковым числом букв на каждой странице; на одной странице помещается n строк и в каждой строке m букв. В первой книге 300 страниц, во второй — 500. Сколько всего букв в двух книгах?

▶ 1-й способ.

Число букв на каждой странице равно mn. В первой книге $300nm$ букв, во второй — $500nm$ букв, в двух книгах

$$(300nm + 500nm) \text{ букв.}$$

2-й способ.

Число букв на каждой странице равно mn. Число страниц в двух книгах равно $300 + 500 = 800$. Поэтому число букв в них равно $800nm$. ◁

Разумеется, оба ответа верные, поэтому

$$300nm + 500nm = 800nm.$$

Однако при вычислениях второй ответ оказывается более удобным. Например, если $n = 40$, $m = 50$, то $nm = 2000$ и для вычисления выражения $300nm + 500nm$ нужно сделать еще три действия:

$$300 \cdot 2000 + 500 \cdot 2000 =$$
$$= 600\,000 + 1\,000\,000 = 1\,600\,000,$$

а для вычисления выражения $800nm$ нужно сделать всего одно действие:

$$800 \cdot 2000 = 1\,600\,000.$$

Именно поэтому важно уметь упрощать алгебраические выражения.

Двучлен $300nm + 500nm$ является суммой двух одночленов: $300nm$ и $500nm$. Эти одночлены отличаются друг от друга только коэффициентами. Такие *одночлены* называют *подобными*.

Например, одночлены abc и $-3abc$ подобны, одночлены $2pq^2$ и $5q^2p$ подобны, а одночлены a^2b и ab^2 не подобны.

Одинаковые одночлены также считают подобными. Например, одночлены $2a^2b$ и $2a^2b$ подобны.

Задача 2 Упростить многочлен

$$3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab.$$

▶ Выделим подобные одночлены. Одночлены $3ab$, $-ab$, $4ab$ подобны, подчеркнем их одной чертой. Подобные одночлены $-2bc$ и $3bc$ подчеркнем двумя чертами. Подобных одночлену $4ac$ нет, его подчеркивать не будем. Получим:

$$\underline{3ab} - \underline{\underline{2bc}} + 4ac - \underline{ab} + \underline{\underline{3bc}} + \underline{4ab}.$$

Переставим члены многочлена так, чтобы подобные члены стояли рядом, и заключим подобные члены в скобки. Получим:

$$(3ab - ab + 4ab) + (-2bc + 3bc) + 4ac.$$

Так как

$$3ab - ab + 4ab = (3 - 1 + 4)ab = 6ab,$$
$$-2bc + 3bc = (-2 + 3)bc = bc,$$

то

$$3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab =$$
$$= 6ab + bc + 4ac. \triangleleft$$

Такое упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, называют *приведением подобных членов*.

У многочлена $6ab + bc + 4ac$ каждый член записан в стандартном виде, и среди них нет подобных. Такой вид многочлена называют *стандартным*. Многочлен $3a^2b^2 - 2a^2b + a$ также записан в стандартном виде.

Любой многочлен можно записать в стандартном виде. Для этого нужно записать каждый член многочлена в стандартном виде и привести подобные члены.

Задача 3 Привести к стандартному виду многочлен
$$6ab \cdot \frac{1}{3}ac - 3aca - 8a^2 \cdot \frac{1}{2}b + 25a^2 \cdot \frac{1}{5}c + aba - a^2bc.$$

▶ $6ab \cdot \frac{1}{3}ac - 3aca - 8a^2 \cdot \frac{1}{2}b + 25a^2 \cdot \frac{1}{5}c + aba - a^2bc =$

$= \underline{2a^2bc} - \underline{\underline{3a^2c}} - \underline{\underline{\underline{4a^2b}}} + \underline{\underline{5a^2c}} + \underline{\underline{\underline{a^2b}}} - \underline{a^2bc} =$

$= a^2bc + 2a^2c - 3a^2b.$ ◁

Упражнения

Привести подобные члены **(235—236)**.

235 1) $\frac{3}{2}y^4 - \frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{32}y^4 - \frac{1}{4}y^4$;

2) $\frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b + \frac{1}{8}a^2b - \frac{3}{16}a^2b$.

236 1) $2m + q + q - 4m$; 2) $3a + 2b - b - a$;

3) $x^2 + 3y^2 + 4x^2 - y^2$; 4) $5a^2 - 4b^2 - 3a^2 + b^2$.

Привести многочлен к стандартному виду **(237—240)**.

237 1) $11x^2 + 4x - x^2 - 4x$; 2) $2y^2 - 3y + 2y - 2y^2$;

3) $0{,}3c^2 - 0{,}1c^2 - 0{,}5c^3$; 4) $1{,}2a^2 + 3{,}4a^2 - 0{,}8a^2$.

238 1) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y$;

2) $\frac{1}{5}a^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{4}{5}a^2 - \frac{3}{4}b^2$;

3) $2ab + 0{,}7b^2 - 5ab + 1{,}2b^2 + 8ab$;

4) $5xy - 3{,}5y^2 - 2xy + 1{,}3y^2 - xy$.

239 1) $2a^2b - 8b^2 + 5a^2b + 5c^2 - 3b^2 + 4c^2$;

2) $3xy^2 + 4x^3 - 5x^2y - 3x^3 + 4x^2y - 9xy^2$.

№ 6

ЧТОБЫ РАСПИЛИТЬ БРЕВНО НА ТРИ ЧАСТИ, ТРЕБУЕТСЯ 12 МИНУТ. СКОЛЬКО МИНУТ ПОТРЕБУЕТСЯ, ЧТОБЫ РАСПИЛИТЬ БРЕВНО НА 4 ЧАСТИ?

240 1) $2m \cdot 4n - 3a \cdot 2b - 0{,}2n \cdot 5m + b \cdot 5a - 5nm + 8ab$;

2) $13ab - 0{,}2xy - 2a \cdot 5b + 6x(0{,}2)y + a(-3)b$;

3) $2abc \cdot 5a + 1\frac{5}{7}a^2 \cdot \frac{7}{12}bc - \left(2\frac{2}{3}\right)ab\left(-\frac{3}{8}\right)a$;

4) $3nmk \cdot 4n - \frac{3}{8}nm\left(2\frac{2}{3}\right)nk + \frac{2}{9}n^2m\left(-4\frac{1}{2}\right)k$.

241 Найти значение многочлена:

1) $-0{,}08x + 73xy^3 + 27xy^2$ при $x = 4$ и $y = 0{,}2$;

2) $-2a^2b + 4b + 11a^2b$ при $a = -\frac{1}{3}$ и $b = 2\frac{3}{4}$.

242 Привести многочлен к стандартному виду и выяснить, при каких значениях x его значение равно 1:

1) $2x^2 - 3x - x^2 - 5 + 2x - x^2 + 10$;

2) $0{,}3x^3 - x^2 + x - x^3 + 3x^2 + 0{,}7x^3 - 2x^2 + 0{,}07$.

243 1) Для приготовления бронзы берется 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Сколько нужно взять каждого металла в отдельности, чтобы получить 400 кг бронзы?

2) План земельного участка имеет форму треугольника со сторонами 5 см, 4 см и 3 см. Какой выбран масштаб на этом плане, если периметр участка равен 60 м?

§ 15 Сложение и вычитание многочленов

Рассмотрим треугольник, размеры которого указаны на рисунке 4. Его периметр P равен сумме длин сторон: $P=(2a+3b)+(4a+b)+(2a+4b)$. Это выражение является суммой трех многочленов: $2a+3b$, $4a+b$, $2a+4b$.

Раскроем скобки:

$$P=2a+3b+4a+b+2a+4b.$$

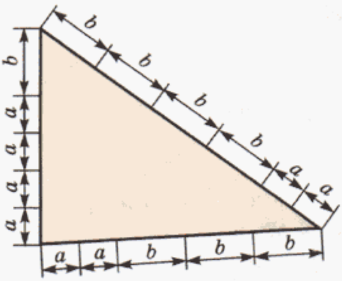


Рис. 4

Приведя подобные члены, получим: $P=8a+8b$.

Точно так же любую алгебраическую сумму многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида. Например:

$$(2n^2-m^2)-(n^2-m^2+3q^2)=$$
$$=2n^2-m^2-n^2+m^2-3q^2=n^2-3q^2;$$
$$(3ab-4bc)+(bc-ab)-(ac-3bc)=$$
$$=3ab-4bc+bc-ab-ac+3bc=$$
$$=2ab-ac.$$

В результате сложения и вычитания нескольких многочленов снова получается многочлен.

Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Иногда сумму или разность многочленов удобно находить «столбиком» (по аналогии со сложением и вычитанием чисел).

При этом подобные члены располагаются друг под другом, например:

$$\begin{array}{r} 5a^2b-4bc+3ac \\ +\quad 3bc-7ac \\ \hline 5a^2b-bc-4ac \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5abc-2ab+4ac-\ bc \\ -\quad 3abc-3ab-\ ac+3bc \\ \hline 2abc+\ ab+5ac-4bc \end{array}$$

Упражнения

Упростить алгебраическую сумму многочленов **(244—246)**.

244 1) $8a+(-3b+5a)$; 2) $5x-(2x-3y)$;

3) $(6a-2b)-(5a+3b)$; 4) $(4x+2)+(-x-1)$.

245 1) $\left(2\frac{3}{5}b-\frac{3}{4}b^2\right)+\left(\frac{1}{4}b^2-1\frac{3}{5}b\right)$;

2) $(0{,}1c-0{,}4c^2)-(0{,}1c-0{,}5c^2)$;

3) $(13x-11y+10z)-(-15x+10y-15z)$;

4) $(17a+12b-14c)-(11a-10b-14c)$.

246 1) $(7m^2-4mn-n^2)-(2m^2-mn+n^2)$;

2) $(5a^2-11ab+8b^2)+(-2b^2-7a^2+5ab)$;

3) $(-2x^3+xy^2)+(x^2y-1)+(x^2y-xy^2+3x^3)$;

4) $(3x^2+5xy+7x^2y)-(5xy+3x^2)-(7x^2y-3x^2)$.

247 Найти сумму и разность многочленов:

1) $0{,}1x^2+0{,}02y^2$ и $0{,}17x^2-0{,}08y^2$;

2) $0{,}1x^2-0{,}02y^2$ и $-0{,}17x^2+0{,}08y^2$;

3) $a^3-0{,}12b^3$ и $0{,}39a^3-b^3$;

4) $a^3+0{,}12b^3$ и $-0{,}39a^3+b^3$.

248 Найти разность многочленов «столбиком»:

1) $3a^2+8a-4$ и $3+8a-5a^2$;

2) b^3-3b^2+4b и $b+2b^2+b^3$.

249 Упростить выражение:

1) $P+Q$, если $P=5a^2+b$, $Q=-4a^2-b$;

2) $P-Q$, если $P=2p^2-3q^3$, $Q=2p^2-4q^3$;

3) $A+B+C$, если $A=a^2-b^2+ab$, $B=2a^2+3ab-5b^2$, $C=-4a^2+2ab-3b^2$;

4) $A-B+C$, если $A=2a^2-3ab+4b^2$, $B=3a^2+4ab-b^2$, $C=a^2+2ab+3b^2$.

250 Решить уравнение:

1) $(7x-9)+(2x-8)=1$; 2) $(12x+5)+(7-3x)=3$;

3) $(0{,}2x-7)-(6-0{,}1x)=2$; 4) $(1-5{,}1x)-(1{,}7x+5{,}4)=1$.

251 Доказать, что:

1) сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5;

2) сумма четырех последовательных нечетных чисел делится на 8.

252 Упростить:

1) $12{,}5x^2+y^2-(8x^2-5y^2-(-10x^2+(5{,}5x^2-6y^2)))$;

2) $0{,}6ab^2+(2a^3+b^3-(3ab^2-(a^3+2{,}4ab^2-b^3)))$.

253 В двузначном числе десятков втрое больше, чем единиц. Если от этого числа отнять число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 36. Найти число.

254 В двузначном числе десятков втрое больше, чем единиц. Если к этому числу прибавить число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 132. Найти число.

§ 16 Умножение многочлена на одночлен

На рисунке 5 указаны размеры дома, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Его объем равен произведению высоты и площади основания: $(a + 2b + c) \cdot (3ab)$. Это выражение является произведением многочлена $a + 2b + c$ и одночлена $3ab$. Применив распределительное свойство умножения, можно записать:

$$(a + 2b + c) \cdot (3ab) = a \cdot 3ab + \\ + 2b \cdot 3ab + c \cdot 3ab = \\ = 3a^2b + 6ab^2 + 3abc.$$

Рис. 5

Точно так же выполняется умножение любого многочлена на одночлен, например:

$$(2n^2m - 3nm^2)(-4nm) = \\ = (2n^2m)(-4nm) + (-3nm^2) \times \\ \times (-4nm) = -8n^3m^2 + 12n^2m^3;$$

$$(3a^2 - 4ab + 5c^2)(-5bc) = \\ = 3a^2(-5bc) - 4ab(-5bc) + \\ + 5c^2(-5bc) = -15a^2bc + \\ + 20ab^2c - 25bc^3.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на одночлен снова получится многочлен. Получившийся многочлен можно упростить, записав его в стандартном виде. Промежуточный результат можно не записывать, а сразу писать ответ, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$(-3ab+2a^2-4b^2)\left(-\frac{1}{2}ab\right)=\frac{3}{2}a^2b^2-a^3b+2ab^3.$$

$$(-3ab\;+2a^2\;-4b^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}ab\right)=\frac{3}{2}a^2b^2\;-a^3b\;+2ab^3$$

Умножение одночлена на многочлен производится по тому же правилу, так как при перестановке множителей произведение не меняется, например:

$$4pq(3p^2-q+2)=12p^3q-4pq^2+8pq.$$

Упражнения

Найти произведение многочлена и одночлена **(255—257)**.

255 1) $2(3a^2-4a+8)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)(m-n+p)$;

3) $(3a-5b+bc)(-3)$; 4) $(-5)(3x^3+7x^2-x)$.

256 1) $7ab(2a+3b)$; 2) $5a^2b(15b+3)$;

3) $12p^2q(q^2p-q^2)$; 4) $3xy^2(xy-2x^3)$.

257 1) $17a(5a+6b-3ab)$; 2) $8ab(2b-3ac+c^2)$;

3) $3x^2y(5x+6y+7z)$; 4) $xyz(x^2+2y^2+3z^2)$.

Упростить выражение **(258—259)**.

258 1) $6(2t-3n)-3(3t-2n)$; 2) $5(a-b)-4(2a-3b)$;

3) $-2(3x-2y)-5(2y-3x)$; 4) $7(4p+3)-6(5+7p)$.

259 1) $(x^2-1)\cdot 3x-(x^2-2)\cdot 2x$; 2) $(4a^2-3b)\cdot 2b-(3a^2-4b)\cdot 3b$.

260 Найти значение алгебраического выражения:

1) $7(4a+3b)-6(5a+7b)$ при $a=2,\ b=-3$;

2) $a(2b+1)-b(2a-1)$ при $a=10,\ b=-5$;

3) $3ab(4a^2-b^2)+4ab(b^2-3a^2)$ при $a=10,\ b=-5$;

4) $4a^2(5a-3b)-5a^2(4a+b)$ при $a=-2,\ b=-3$.

261 Решить уравнение:

1) $3(x-1)-2(3-7x)=2(x-2)$;

2) $10(1-2x)=5(2x-3)-3(11x-5)$;

3) $1{,}3(x-0{,}7)-0{,}12(x+10)-5x=-9{,}75$;

4) $2{,}5(0{,}2+x)-0{,}5(x-0{,}7)-0{,}2x=0{,}5$.

262 При каком значении x равны значения выражений:

1) $\frac{1}{2}(x-7)+1$ и $\frac{3(1-x)}{4}$;

2) $\frac{2}{5}(3-2x)$ и $\frac{3(1+3x)}{10}-\frac{4}{5}$?

263 Во второй день турист прошел путь, равный 90% того, что он прошел в первый день, и после небольшого отдыха прошел еще 2 км. В третий день он прошел путь, равный 40% того, что было пройдено за первые два дня. Какое расстояние проходил турист ежедневно, если за три дня он прошел 56 км?

§ 17 Умножение многочлена на многочлен

Задача Найти площадь поверхности стены, занятой шкафами, размеры которых указаны на рисунке 6.

▶ Поверхность стены, занятая шкафами, является прямоугольником со сторонами

$$2a+c+2a=4a+c \text{ и } a+b+a=2a+b.$$

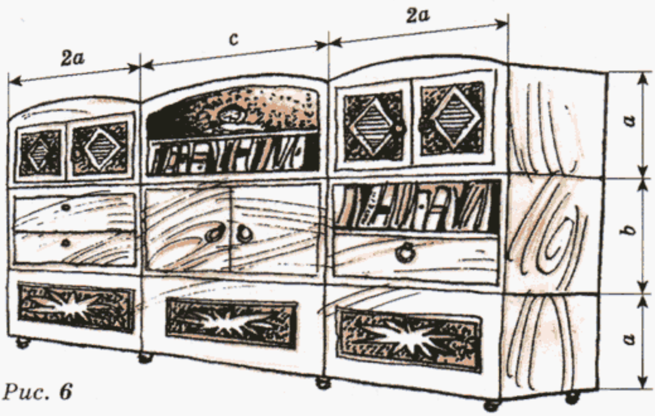


Рис. 6

Площадь этого прямоугольника равна

$$S=(4a+c)(2a+b). \triangleleft$$

Выражение $(4a+c)(2a+b)$ является произведением многочленов $4a+c$ и $2a+b$. Применяя распределительное свойство умножения чисел, можно записать:

$$S=(4a+c)(2a+b)=4a(2a+b)+c(2a+b).$$

Далее, так как

$$4a(2a+b)=8a^2+4ab \quad \text{и} \quad c(2a+b)=2ac+bc,$$

то $S=8a^2+4ab+2ac+bc$.

Таким образом, для нахождения произведения данных многочленов пришлось перемножить каждый член многочлена $4a+c$ на каждый член многочлена $2a+b$ и результаты сложить. Точно так же перемножаются любые два многочлена, например:

$$(7n-2m)(3n-5m)=7n\cdot 3n+7n\cdot(-5m)+$$
$$+(-2m)\cdot 3n+(-2m)\cdot(-5m)=21n^2-35nm-$$
$$-6mn+10m^2=21n^2-41nm+10m^2.$$

$$(\boxed{7n}-2m)(3n-5m)=\boxed{21n^2}\boxed{-35mn}-6mn+10m^2$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

В результате умножения многочлена на многочлен снова получается многочлен, который можно записать в стандартном виде. При этом промежуточные результаты можно не писать, выполняя умножение одночленов устно, например:

$$(2a-4b+3c)(5b-c)=$$
$$=10ab-2ac-20b^2+4bc+15bc-3c^2=$$
$$=10ab-2ac-20b^2+19bc-3c^2.$$

Умножение нескольких многочленов нужно делать поочередно, например:

$$(a+b)(a+2b)(a-3b)=(a^2+3ab+2b^2)(a-3b)=$$
$$=a^3-3a^2b+3a^2b-9ab^2+2ab^2-6b^3=$$
$$=a^3-7ab^2-6b^3.$$

Упражнения

Выполнить умножение многочленов **(264—268).**

264 1) $(a+2)(a+3)$; 2) $(z-1)(z+4)$;
3) $(m+6)(n-1)$; 4) $(b+4)(c+5)$.

265 1) $(c-4)(d-3)$; 2) $(a-10)(-a-2)$;
3) $(x+y)(x+1)$; 4) $(-p+q)(-1-q)$.

266 1) $(a^2+b)(a+b^2)$; 2) $(5x^2-6y^2)(6x^2-5y^2)$;
3) $(a^2+2b)(2a+b^2)$; 4) $(x^2+2x+1)(x+3)$.

267 1) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$; 2) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$;
3) $(5x+3y)(25x^2-15xy+9y^2)$;
4) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$.

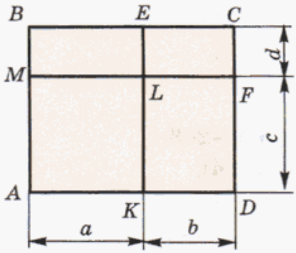
268 1) $(a-b)(a+b)(a-3b)$; 2) $(a+b)(a-b)(a+3b)$;
3) $(x+3)(2x-1)(3x+2)$; 3) $(x-2)(3x+1)(4x-3)$.

269 Найти значение алгебраического выражения, предварительно упростив его:
1) $(a-4)(a-2)-(a-1)(a-3)$ при $a=1\frac{3}{4}$;
2) $(m-5)(m-1)-(m+2)(m-3)$ при $m=-2\frac{3}{5}$;
3) $(x+1)(x+2)+(x+3)(x+4)$ при $x=-0{,}4$;
4) $(a-1)(a-2)+(a-3)(a-4)$ при $a=0{,}2$.

270 1) Показать, что при $x=2\frac{1}{7}$ значение выражения $(5x-1)(x+3)-(x-2)(5x-4)$ равно 49.
2) Показать, что при $a=-3{,}5$ значение выражения $(a+3)(9a-8)-(2+a)(9a-1)$ равно -29.

271 Вычислить значение выражения:
1) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$ при $n=-2\frac{1}{2}$;
2) $\left(n-\frac{1}{3}\right)\left(n^2+\frac{1}{3}n+\frac{1}{9}\right)$ при $n=\frac{7}{3}$.

272 Упростить выражение и выяснить, при каком значении x значение выражения равно a:
1) $(x+3)(x-3)+(4-x)x-3x$;
2) $x(1-2x)-(x-3)(x+3)+3x^2$;
3) $x^2(3-x)-(2-x^2)(x+1)-4x^2$;
4) $(x+2)(x+2)-x(5-x)-2x^2$.



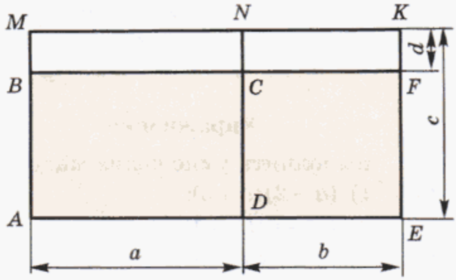


Рис. 7

273 1) Рассматривая площадь прямоугольника $ABCD$ (рис. 7, *а*), показать, что

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

2) Рассматривая площадь прямоугольника $ABFE$ (рис. 7, *б*), показать, что

$$(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd.$$

3) Рассматривая площадь прямоугольника $BFKM$ (рис. 7, *б*), показать, что

$$(a+b)d=(a+b)c-(a+b)(c-d).$$

274 Доказать, что если

$$a(b+1)+b(a+1)=(a+1)(b+1),$$

то $ab=1$.

275 Ширина прямоугольника на 15 м меньше его длины. Если ширину этого прямоугольника увеличить на 8 м, а длину уменьшить на 6 м, то площадь нового прямоугольника будет на 80 м^2 больше площади данного. Найти площадь данного прямоугольника.

276 Периметр прямоугольника 60 см. Если длину этого прямоугольника увеличить на 10 см, а ширину уменьшить на 6 см, то площадь нового прямоугольника будет на 32 см^2 меньше площади данного. Найти площадь данного прямоугольника.

277 Доказать равенство:

1) $(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(n^2-n-1)^2$;
2) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$
3) $(n-3)(n-2)(n-1)n+1=(n^2-3n+1)^2$;
4) $(n^2-2n+1)(n^2+2n+1)=(n^2-1)^2$.

§ 18 Деление одночлена и многочлена на одночлен

В предыдущих параграфах было показано, что в результате сложения, вычитания, умножения и возведения в натуральную степень нескольких одночленов и многочленов снова получается многочлен. В перечисленных действиях нет действия деления. Выражения, содержащие деление одночленов и многочленов, будут подробно рассмотрены в главе V. Иногда в результате такого деления также получается многочлен.

1. Деление одночлена на одночлен. Разделим одночлен $32a^3b^2$ на одночлен $4a^2$. По свойствам умножения и деления получаем:

$$(32a^3b^2):(4a^2)=(32:4)\cdot(a^3:a^2)\cdot b^2=8ab^2.$$

Точно так же делятся одночлены и в других случаях, например:

$$(4a^2b^3):(4a^2b^3)=1;$$
$$(66a^4b^2c):(22a^2b)=3a^2bc;$$
$$(9k^2n^2m^2):(-3kn^2m^2)=-3k.$$

2. Деление многочлена на одночлен. Разделим многочлен $2a^2b+4ab^2+8abc$ на одночлен $2ab$. По свойству деления суммы на число получаем:

$$(2a^2b+4ab^2+8abc):(2ab)=(2a^2b):(2ab)+$$
$$+(4ab^2):(2ab)+(8abc):(2ab)=a+2b+4c.$$

Точно так же делится многочлен на одночлен и в других случаях, например:

$$(9a^3b^2-3a^2b^3+a^2b^2):(3a^2b^2)=$$
$$=(9a^3b^2):(3a^2b^2)+(-3a^2b^3):(3a^2b^2)+$$
$$+(a^2b^2):(3a^2b^2)=3a-b+\frac{1}{3}.$$

Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

В рассмотренных примерах деления многочлена на одночлен в результате получался многочлен. В этих случаях говорят, что многочлен делится на одночлен. Однако деление многочлена на одночлен не всегда возможно. Например, многочлен $ab + ac$ не делится на одночлен ab.

При делении многочлена на одночлен предполагается, что буквы могут принимать такие значения, при которых делитель не равен нулю.

Упражнения

Выполнить деление **(278—284)**.

278 1) $b^5 : b^2$; 2) $y^{11} : y^7$; 3) $a^7 : a^7$; 4) $b^9 : b^9$.

279 1) $\frac{2}{5}x:(-2)$; 2) $-7m:\left(-\frac{7}{9}\right)$; 3) $-\frac{3}{4}a:\left(-\frac{8}{9}\right)$; 4) $\frac{16}{25}b:\frac{4}{5}$.

280 1) $5a:a$; 2) $8x:x$; 3) $5a:(-a)$; 4) $(-7y):(-y)$.

281 1) $(-6x):(2x)$; 2) $15z:(5z)$;
3) $(-6xy):(-3xy)$; 4) $12ab:(-4ab)$.

282 1) $8abc:(-4a)$; 2) $(-10pq):(6q)$;
3) $-6{,}4xy:(-4x)$; 4) $(-0{,}24abc):(-0{,}6ab)$.

283 1) $14a^5:(7a^2)$; 2) $(-42m^7):(-6m)$;
3) $-0{,}2a^{10}:(-a^{10})$; 4) $\left(-2\frac{1}{3}a^{17}\right):(-2a^{17})$.

284 1) $\frac{1}{3}m^3n^2p^2:\left(-\frac{2}{3}m^2n^2p^2\right)$; 2) $\left(-1\frac{1}{2}a^4b^3c^2\right):\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right)$;
3) $-1{,}7p^2q^2y^3:(28{,}9p^2y^3)$; 4) $-6a^3b^2c:(-2a^2bc)$.

285 Упростить выражение:
1) $(4a^3b^2)^3:(2a^2b)^2$; 2) $(9x^2y)^3:(3xy)^2$;
3) $(-abc^2)^5:(-a^2bc^3)^2$; 4) $(-x^2y^3z)^4:(xyz)$.

Выполнить деление **(286—289)**.

286 1) $(12a+6):3$; 2) $(10b-5):5$;
3) $(14m-8):(-2)$; 4) $(-6+3x):(-3)$.

287 1) $(5mn-6np):n$; 2) $(4a^2-3ab):a$;
3) $(x-xy):x$; 4) $(cd-d):(-d)$.

288 1) $(3a^3b-4ab^3):(5ab)$; 2) $(2c^5d^4+3c^4d^3):(-3c^4d^3)$;
3) $(-27k^4l^5+21k^3l^2):(-10k^3l^2)$;
4) $(-a^5b^3+3a^6b^2):(4a^4b^2)$.

№ 7

ВЛАДЕЛЕЦ НОВОГО АВТОМОБИЛЯ «ЖИГУЛИ» МЕНЯЕТ КОЛЕСА (ХОДОВЫЕ И ЗАПАСНОЕ) ПО СХЕМЕ, УКАЗАННОЙ НА РИСУНКЕ СТРЕЛКАМИ. ОКАЗАЛОСЬ, ЧТО ЧЕРЕЗ 30 000 КМ ПРОБЕГА ВСЕ КОЛЕСА ИЗНОСИЛИСЬ ОДИНАКОВО. СКОЛЬКО КИЛОМЕТРОВ ПРОБЕЖАЛО КАЖДОЕ КОЛЕСО?

289 1) $(6a-8b+10):2$; 2) $(8x+12y-16):(-4)$;
3) $(10a^2-12ab+8a):2a$; 4) $(2ab+6a^2b^2-4b):2b$.

Упростить выражение **(290—291)**.

290 1) $(6a^3-3a^2):a^2+(12a^2+9a):(3a)$;
2) $(8x^3-4x^2):(2x^2)-(4x^2-3x):x$;
3) $(7y^4+4y^2):y^2-(14y^3+6y):(2y)$;
4) $(10b^5+15b^3):(5b^2)-(b^4-b^2):b$.

291 1) $(3x^3-2x^2y):x^2-(2xy^2+x^2y):\left(\frac{1}{3}xy\right)$;
2) $(a^2b-3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right)+(6b^3-5ab^2):b^2$;
3) $(3a^3x-2ax^3):\left(\frac{1}{4}ax\right)-(a^4x^2-a^2x^4):\left(\frac{1}{8}a^2x^2\right)$;
4) $\left(\frac{2}{3}by^3+\frac{1}{3}b^2y^2\right):\left(\frac{3}{4}by^2\right)-(8b^3y-2b^2y^2):(2b^2y)$.

Найти значение алгебраического выражения **(292—293)**.

292 $(18a^4-27a^3):(9a^2)-10a^3:(5a)$ при $a=-8$.

293 $(3x^3+4x^2y):x^2-(10xy+15y^2):(5y)$ при $x=2$, $y=-5$.

Упражнения к главе III

Вычислить **(294—296)**.

294 1) $\frac{(-0,2)^4}{(0,1)^5}$; 2) $\frac{(0,3)^3}{(-0,1)^4}$; 3) $\frac{(3,2)^2}{(1,6)^2}$; 4) $\frac{(2,6)^2}{(1,3)^2}$.

295 1) $\frac{2^5 \cdot 2^3}{2^4}$; 2) $\frac{3^{11} \cdot 9}{3^{12}}$; 3) $\frac{3^4 \cdot 3^5}{3^8}$; 4) $\frac{2^6 \cdot 16}{2^3}$.

296 1) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{5^3}{3^2}$; 2) $\frac{7^5}{5^7} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$; 4) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^8$.

297 Верно ли равенство $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$?

298 Записать в виде степени с показателем 3:

1) $a^6 b^3$; 2) $-1000b^6$; 3) $x^{12} y^9 z^6$; 4) $-0,008 x^3 y^9$.

299 Выполнить умножение одночленов:

1) $(-0,4x^5 y^6 z^2)(-1,2 xyz^3)$; 2) $(-2,5n^4 m^5 k^2)(3nm^2 k^5)$;

3) $\left(-1\frac{1}{3} x^2 y^3 z\right)\left(-1\frac{1}{2} xy^2 z^3\right)$; 4) $\left(2\frac{1}{4} a^2 b^5 c^3\right)\left(-3\frac{1}{3} a^3 b^2 c^4\right)$.

300 Выполнить сложение и вычитание многочленов:

1) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right) - \left(\frac{5}{2}a - \frac{2}{3}b\right) + (a + b)$;

2) $(0,3a - 1,2b) + (a - b) - (1,3a - 0,2b)$;

3) $11p^3 - 2p^2 - (p^3 - p^2) + (-5p^2 - 3p^3)$;

4) $5x^2 + 5x^3 + (x^3 - x^2) - (-2x^3 + 4x^2)$.

301 Выполнить умножение многочлена на одночлен:

1) $\left(\frac{1}{2}a^3 b^2 - \frac{3}{4}ab^4\right)\frac{4}{3}a^3 b$; 2) $\left(\frac{2}{3}a^2 b^4 + \frac{1}{2}a^3 b\right)\frac{3}{2}ab^3$;

3) $\left(1\frac{4}{7}a^3 x^3 - 2\frac{3}{4}a^2 x^3 - 11ax^4\right)\left(-2\frac{6}{11}ax^6\right)$;

4) $\left(-2\frac{4}{9}b^6 y + 2\frac{1}{5}b^3 y^2 - 11by^5\right)\left(-2\frac{1}{22}b^4 y^5\right)$.

Выполнить умножение многочленов **(302—303)**.

302 1) $\left(\frac{1}{2}a + 3b\right)\left(\frac{1}{2}a - 3b\right)$; 2) $(0,3 - m)(m + 0,3)$;

3) $\left(\frac{1}{3}a - 2b\right)\left(\frac{1}{3}a + 2b\right)$; 4) $(0,2a + 0,5x)(0,2a - 0,5x)$.

303 1) $(5c-4y)(-8c-2x+6y)$;
2) $(4b-c)(-5b+3c-4y)$;
3) $(4x-3y+2z)(3x-3y)$;
4) $(3a-3b+4c)(3a-5b)$.

304 Упростить выражение:
1) $5x^3 : x-(2x)^2+x^4 : (2x^2)$;
2) $6x^4 : x-5x^5 : x^2+(2x)^3$;
3) $\left(3x^4+\frac{1}{3}x^2\right) : x-x^3 : (3x^2)+(3x)^3$;
4) $(12x^3-8x^2) : 4x-4x(3x+0{,}25)$.

Проверь себя!

1 Представить выражение в виде степени:
$$5^3 \cdot 5^2; \quad 3^8 : 3^6; \quad (2^3)^4; \quad 3^5 \cdot 2^5.$$

2 Упростить выражение $(3b+c^2-d)-(c^2-2d)$.

3 Выполнить действия:
$$(-0{,}25a^3b^2c)\cdot(5abc); \quad (7m^2-20mn-10m) : 10m.$$

4 Упростить выражение
$$2m(m-1)+(m-2)(m+2)+2m$$
и найти его числовое значение при $m=-0{,}25$.

305 Решить уравнение:
1) $(-2)^3 \cdot x+(0{,}4)^2=(-1)^9-(1-2x)$;
2) $(1{,}2)^2-(0{,}1)^2(20-200x)=(1{,}4)^2$.

306 Сколько процентов от числа 500 составляет четвертая степень числа 5?

307 Четвертая степень числа 0,2 составляет 64% числа a. Найти число a.

308 Пусть n — натуральное число. Записать выражение в виде степени:
1) $a^7 \cdot a^{2n} \cdot a^{3n-2}$; 2) $x^{n+2} \cdot x^8 \cdot x^{4n-1}$;
3) $\frac{a^{6n-4} \cdot a^{4n+1}}{a^{5n-2}}$; 4) $\frac{3^{4n+3} \cdot 3^{3n-2}}{3^{2n-1}}$.

309 При каком значении n верно равенство:
1) $(4^4)^n=4^{12}$; 2) $(5^n)^2=5^{14}$;
3) $2^{2n}=4^5$; 4) $3(3^2)^n=3^{11}$?

Старинные задачи (310—311)

310 — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?
— Вот сколько, — ответил философ. — Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три ученика.

311 — Хрóноса вестник, скажи, какая часть дня миновала?
— Дважды две трети того, что прошло, остается *.

312 В автобусе было n пассажиров. На первых двух остановках вышло по m человек на каждой остановке, а на третьей никто не вышел, но вошло несколько человек, после чего в автобусе стало k пассажиров. Сколько человек вошло в автобус на третьей остановке?

313 Решить уравнение:
1) $\frac{9-x}{10}=\frac{2x-3}{2}$; 2) $\frac{0{,}1-2x}{0{,}4}=\frac{2{,}5-10x}{12}$.

314 Упростить (n — натуральное число, $n>4$):
1) $(12\cdot5^{2n+1}-8\cdot5^{2n}+4\cdot5^{2n-1}):(4\cdot5^{2n-2})$;
2) $(36\cdot18^{n}-8\cdot2^{n-4}\cdot9^{n}-3^{n+1}\cdot6^{n+1}):18^{n-1}$.

315 Доказать, что если $2(a+1)(b+1)=(a+b)(a+b+2)$, то $a^2+b^2=2$.

316 Сумма вклада в сберегательный банк увеличивается каждый год на $p\%$. Доказать, что, вложив в банк a рублей, через три года вкладчик будет иметь на счету $a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ рублей.

317 Вычислить с помощью микрокалькулятора значение выражения $a\cdot(1{,}02)^n$ при $a=1000$ и $n=3$; 5; 10. Результат округлить до сотых.

---

* Хронос — бог времени в греческой мифологии. В Древней Греции день содержал 12 ч.

IV
глава

Разложение многочленов на множители

§ 19 Вынесение общего множителя за скобки

В главе III было показано, что в результате умножения многочленов получается многочлен. Часто приходится решать обратную задачу о представлении многочлена в виде произведения нескольких одночленов и многочленов, т. е. решать задачу о *разложении многочлена на множители*.

Задача 1 Найти числовое значение выражения $ab+ac-ad$ при $a=43$, $b=26$, $c=17$, $d=23$.

▶ Используя распределительное свойство умножения, данный многочлен можно представить в виде произведения одночлена и многочлена:

$$ab+ac-ad=a(b+c-d).$$

Теперь легко провести вычисления:

$$43(26+17-23)=43\cdot 20=860. \ \triangleleft$$

Разложить многочлен $ab+ac-ad$ на множители удалось потому, что все члены этого многочлена имеют общий множитель a. Применяя распределительное свойство умножения, этот множитель можно вынести за скобки.

Приведем другие примеры вынесения общего множителя за скобки:

1) $19a-38b=19\cdot a-19\cdot 2b=19(a-2b)$;

2) $3a^2b+4bc^3=b\cdot 3a^2+b\cdot 4c^3=b(3a^2+4c^3)$;
3) $6ab+3b-12bc=3b\cdot 2a+3b\cdot 1-3b\cdot 4c=$
$=3b(2a+1-4c)$.

Если все члены многочлена содержат общий множитель, то этот множитель можно вынести за скобки.

В скобках остается многочлен, полученный от деления данного многочлена на этот общий множитель.

Задача 2 Разложить на множители многочлен

$$28x^2y^4-21x^3y^2.$$

▶ Если коэффициенты членов многочлена — целые числа, то для нахождения общего множителя следует найти наибольший общий делитель модулей коэффициентов членов многочлена, а среди степеней с одинаковым основанием — степень с наименьшим показателем.

В многочлене $28x^2y^4-21x^3y^2$ число 7 — наибольший общий делитель чисел 28 и 21; x^2 и y^2 — степени с наименьшими показателями. Поэтому общим множителем членов многочлена является одночлен $7x^2y^2$. Вынося этот множитель за скобки, получаем:

$$28x^2y^4-21x^3y^2=7x^2y^2\cdot 4y^2-7x^2y^2\cdot 3x=$$
$$=7x^2y^2(4y^2-3x).$$

Здесь $4y^2$ и $-3x$ получаются делением членов данного многочлена на их общий множитель $7x^2y^2$. ◁

Итак, чтобы разложить многочлен на множители вынесением общего множителя за скобки, нужно:
1) найти этот общий множитель;
2) вынести его за скобки.

Правильность разложения многочлена на множители можно проверить умножением полученных множителей.

Иногда при разложении алгебраического выражения на множители за скобки выносят многочлен. Например:

$$a(2b+3)+b(2b+3)=(2b+3)(a+b).$$

В некоторых случаях полезно применить равенство

$$(a-b)=-(b-a).$$

Например:

$$(a-3)x-(3-a)y=(a-3)x+(a-3)y=$$
$$=(a-3)(x+y).$$

Упражнения

318 Применить распределительный закон умножения и вычислить:

1) $14\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{4}-4\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{4}$; 2) $24\cdot 2{,}73+41\cdot 2{,}73$.

Вынести за скобки общий множитель **(319—326)**.

319 1) $2m+2n$; 2) $3a-3x$; 3) $8-4x$; 4) $6a+12$.

320 1) $9a+12b+6$; 2) $21a-7b+42$;
3) $-10x+15y-75z$; 4) $9x-3y+15z$.

321 1) $ax-ay$; 2) $cd+bc$; 3) $xy+x$; 4) $x-xy$.

322 1) $9mn+9n$; 2) $3bd-3b$; 3) $11z-33yz$; 4) $6pk-3p$.

323 1) a^4+2a^2; 2) a^4-3a^3; 3) $a^4b^2+ab^3$; 4) $x^2y^3-x^3y^2$.

324 1) $9a^2b^2-12ab^3$; 2) $20x^3y^2+4x^2y$.

325 1) $4a^2b^2+36a^2b^3+6ab^4$; 2) $2x^2y^4-2x^4y^2+6x^3y^3$.

326 1) $ab-ac+a^2$; 2) $xy-x^2+xz$.
3) $6a^2-3a+12ba$; 4) $4b^2+8ab-12a^2b$.

327 Вычислить:

1) $137^2+137\cdot 63$ 2) $187^2-187\cdot 87$.
3) $0{,}7^3+0{,}7\cdot 9{,}51$; 4) $0{,}9^3-0{,}81\cdot 2{,}9$.

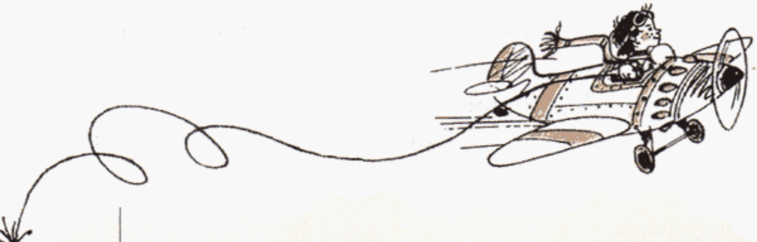
Разложить на множители **(328—335)**.

328 1) $a(m+n)+b(m+n)$; 2) $b(a+5)-c(a+5)$;
3) $a(b-5)-(b-5)$; 4) $(y-3)+b(y-3)$.

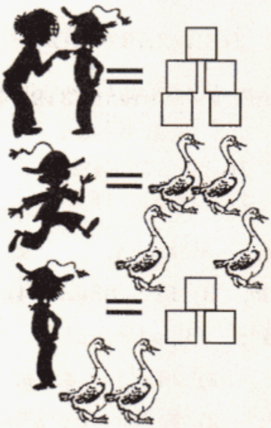
329 1) $2a(a-b)+3b(a-b)$; 2) $3n(m-3)+5m(m-3)$;
3) $5a(x+y)-4b(x+y)$; 4) $7a(c-d)-2b(c-d)$.

330 1) $a^2(x-y)+b^2(x-y)$; 2) $a^2(x+y)+b^3(x+y)$;
3) $a(x^2+y^2)-b(x^2+y^2)$; 4) $x(a^2+2b^2)+y(a^2+2b^2)$.

331 1) $c(a-b)+b(b-a)$; 2) $a(b-c)-c(c-b)$;
3) $(x-y)+b(y-x)$; 4) $2b(x-y)-(y-x)$.



№ 8



— ИНТЕРЕСНО, СКОЛЬКО МЫ ВМЕСТЕ С НЕЗНАЙКОЙ ВЕСИМ? ВМЕСТО ГИРЬ ИСПОЛЬЗУЕМ КУБИКИ... ПЯТЬ КУБИКОВ!

А ВО СКОЛЬКО РАЗ НЕЗНАЙКА ТЯЖЕЛЕЕ УТКИ?.. РОВНО В ЧЕТЫРЕ РАЗА!

А ЕСЛИ НЕЗНАЙКУ ВЗВЕСИТЬ ВМЕСТЕ С ДВУМЯ УТКАМИ, СКОЛЬКО ПОНАДОБИТСЯ КУБИКОВ?.. ТРИ КУБИКА.

ИНТЕРЕСНО, А СКОЛЬКО ПОНАДОБИТСЯ УТОК, ЧТОБЫ УРАВНОВЕСИТЬ МЕНЯ? — ДУМАЛ ЗНАЙКА.

332 1) $7(y-3)-a(3-y)$; 2) $6(a-2)+a(2-a)$;
3) $b^2(a-1)-c(1-a)$; 4) $a^2(m-2)+b(2-m)$.

333 1) $a(b-c)+d(b-c)-7(c-b)$;
2) $x(x-y)+y(y-x)-3(x-y)$;
3) $x(a-2)+y(2-a)+(2-a)$;
4) $a(b-3)+(3-b)-b(3-b)$.

334 Найти значение выражения:
1) $7(a-5)-b(5-a)$ при $a=2$, $b=3$;
2) $a(a-b)+b(b-a)$ при $a=6{,}3$, $b=2{,}3$;

3) $2x(x+y)-3y(x+y)+7(x+y)$ при $x=4,\ y=5$;
4) $x(y-x)-y(x-y)-4(y-x)$ при $x=3,\ y=-5$.

Разложить на множители (335—336).

335 1) $3(x+y)(x-y)-(x+y)^2$; 2) $5(a-b)^2-(a+b)(b-a)$;
3) $(x+y)^3-x(x+y)^2$; 4) $a(a-b)^2-(b-a)^3$.

336 1) $x^2(x-3)-x(x-3)^2$; 2) $a^3(2+a)+a^2(2+a)^2$;
3) $3m(n-m)^2-9m^2(m-n)$; 4) $15p^2(p+q)-5p(p+q)^2$.

337 Решить уравнение:
1) $x^2-2x=0$; 2) $3x+x^2=0$;
3) $5x^2+3x=0$; 4) $4x^2-7x=0$;
5) $x^2(x-2)-2x(x-2)^2=0$;
6) $3x(1-x)^2-x^2(1-x)=0$.

338 Доказать, что если при делении натурального числа на 225 остаток равен 150, то это натуральное число делится нацело на 75.

§ 20 Способ группировки

Задача 1 Разложить на множители многочлен

$$2a+bc+2b+ac.$$

▶ Все члены многочлена не имеют общего множителя. Однако этот многочлен можно разложить на множители, если сгруппировать попарно члены многочлена так:

$$2a+bc+2b+ac=(2a+2b)+(bc+ac)=$$
$$=2(a+b)+c(b+a)=(a+b)(2+c).\ \triangleleft$$

Выполненные преобразования основаны на применении переместительного, сочетательного и распределительного свойств сложения и умножения.

Рассмотрим другие примеры.

1) $3mx-my+3nx-ny=(3mx-my)+(3nx-ny)=$
$=m(3x-y)+n(3x-y)=(3x-y)(m+n)$.

2) $ab-ac-5b+5c=(ab-ac)-(5b-5c)=$
$=a(b-c)-5(b-c)=(b-c)(a-5).$

Иногда группировку членов многочлена можно проводить различными способами. Например, разложение многочлена $2am+2an-3bm-3bn$ на множители можно выполнить так:

1-й способ	2-й способ
$2am+2an-3bm-3bn=$ $=(2am+2an)-(3bm+3bn)=$ $=2a(m+n)-3b(m+n)=$ $=(m+n)(2a-3b).$	$2am+2an-3bm-3bn=$ $=(2am-3bm)+(2an-3bn)=$ $=m(2a-3b)+n(2a-3b)=$ $=(2a-3b)(m+n).$

Рассмотрим пример разложения на множители многочлена, состоящего из шести членов:

$$ax+bx-ay-by+az+bz=(ax+bx)-(ay+by)+$$
$$+(az+bz)=x(a+b)-y(a+b)+z(a+b)=$$
$$=(a+b)(x-y+z).$$

Здесь члены многочлена сгруппированы по два, но можно было их сгруппировать по три:

$$ax+bx-ay-by+az+bz=$$
$$=(ax-ay+az)+(bx-by+bz)=$$
$$=a(x-y+z)+b(x-y+z)=(x-y+z)(a+b).$$

Итак, способ группировки обычно применяют к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена.

Чтобы разложить многочлен на множители способом группировки, нужно:
1) объединить члены многочлена в такие группы, которые имеют общий множитель в виде многочлена;
2) вынести этот общий множитель за скобки.

Упражнения

Разложить на множители **(339—342)**.

339 1) $a+b+c(a+b)$; 2) $m-n+p(m-n)$;
3) $x+3a(x+y)+y$; 4) $x+2a(x-y)-y$.

340 1) $2m(m-n)+m-n$; 2) $4q(p-1)+p-1$;
3) $2m(m-n)+n-m$; 4) $4q(p-1)+1-p$.

341 1) $ac+bc-2ad-2bd$; 2) $ac-3bd+ad-3bc$;
3) $2bx-3ay-6by+ax$; 4) $5ay-3bx+ax-15by$.

342 1) $18a^2-27ab+14ac-21bc$;
2) $10x^2+10xy+5x+5y$;
3) $35ax+24xy-20ay-42x^2$;
4) $48xz^2+32xy^2-15yz^2-10y^3$.

Разложить многочлен на множители и результат проверить умножением **(343—344)**.

343 1) $16ab^2-5b^2c-10c^3+32ac^2$;
2) $6mnk^2+15m^2k-14n^3k-35mn^2$;
3) $-28ac+35c^2-10cx+8ax$;
4) $-24bx-15c^2+40bc+9cx$.

344 1) $xy^2-by^2-ax+ab+y^2-a$;
2) $ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$;
3) $a^2x^2-bx^2+a^2x-bx+a^2y-by$;
4) $ax^2-bx^2+ay-by-ax+bx$.

345 Найти значение выражения:
1) $5a^2-5ax-7a+7x$ при $x=-3$, $a=4$;
2) $m^2-mn-3m+3n$ при $m=0{,}5$, $n=0{,}25$;
3) $a^2+ab-5a-5b$ при $a=6{,}6$, $b=0{,}4$;
4) $a^2-ab-2a+2b$ при $a=\frac{7}{20}$, $b=0{,}15$.

346 Вычислить:
1) $139\cdot15+18\cdot139+15\cdot261+18\cdot261$;
2) $125\cdot48-31\cdot82-31\cdot43+125\cdot83$;
3) $14{,}7\cdot13-2\cdot14{,}7+13\cdot5{,}3-2\cdot5{,}3$;
4) $3\frac{1}{3}\cdot4\frac{1}{5}+4{,}2\cdot\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}\cdot2\frac{4}{5}+2{,}8\cdot\frac{2}{3}$.

347 Решить уравнение:
1) $(x^2-4x)+x-4=0$;
2) $(x^2+7x)-4x-28=0$;
3) $5x^2-10x+(x-2)=0$;
4) $3x^2+12x-(x+4)=0$.

348 Разделить разность многочленов x^3-3x^2 и $2x^2-6x$ на $x-2$.

Разложить многочлен на множители **(349—350)**.

349 1) x^2+3x+2; 2) x^2-5x+6;
3) x^2-7x-8; 4) $x^2+9x-10$.

350 1) a^3+2a^2-3; 2) x^3-7x+6;
3) a^4+2a^3+1; 4) $2a^4-a^2-1$.

§ 21

Формула разности квадратов

Умножим сумму двух чисел на их разность:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2,$$

т. е.

$$\mathbf{(a+b)(a-b)=a^2-b^2} \qquad (1)$$

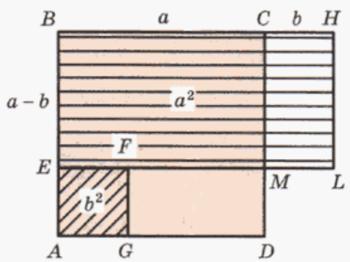
или

$$\mathbf{a^2-b^2=(a-b)(a+b).} \qquad (2)$$

Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел и их суммы.

В равенствах (1) и (2) a, b — любые числа или алгебраические выражения, например:

1) $(nm+3k)(nm-3k)=n^2m^2-9k^2$;
2) $4a^4b^2-25=(2a^2b-5)(2a^2b+5)$;
3) $(a+b)^2-16=(a+b-4)(a+b+4)$.



$S_{ABCD}=a^2$
$S_{AEFG}=b^2$
$S_{GFEBCD}=S_{EBHL}$
$S_{GFEBCD}=a^2-b^2$
$S_{EBHL}=(a-b)(a+b)$

Формулу (1) называют *формулой сокращенного умножения*. Она применяется для упрощения вычислений, например:

1) $63\cdot57=(60+3)(60-3)=3600-9=3591$;
2) $98\cdot102=(100-2)(100+2)=100^2-2^2=9996$.

Формулу (2) называют *формулой разности квадратов*. Она применяется при разложении многочленов на множители, например:

1) $a^2-9=(a-3)(a+3)$;

2) $4b^4 - 0{,}64c^2 = (2b^2)^2 - (0{,}8c)^2 =$
$= (2b^2 - 0{,}8c)(2b^2 + 0{,}8c);$
3) $(a-b)^2 - 1 = (a-b-1)(a-b+1);$
4) $(a+b)^2 - (a-c)^2 = (a+b-a+c)\,(a+b+a-c) =$
$= (b+c)(2a+b-c).$

Упражнения

351 Представить в виде квадрата одночлена:
1) $4a^2$; $9b^2$; $16c^2$; $0{,}04x^2$;
2) $\frac{1}{9}a^2b^2$; $0{,}25x^2y^2$; $0{,}16m^4$; $0{,}81n^6$;
3) $0{,}01a^4b^2$; $\frac{9}{16}x^2y^4$; $\frac{25}{49}x^6z^4$; $1\frac{9}{16}m^4n^6$.

Разложить на множители **(352—355)**.

352 1) $25x^2-9$; 2) $4a^2-9$; 3) $64y^2-36x^2$; 4) $81a^2-16b^2$.

353 1) $\frac{1}{9}y^2 - \frac{16}{25}x^2$; 2) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{16}b^2$;
3) $0{,}25a^2 - 0{,}49b^2$; 4) $0{,}09x^2 - 0{,}16y^2$.

354 1) $36x^2y^2-1$; 2) $81a^6-49b^4$; 3) x^2y^4-16; 4) $25a^2-9b^6$.

355 1) a^4-b^4; 2) a^4-b^8; 3) a^4-16; 4) b^4-81.

Выполнить умножение **(356—358)**.

356 1) $(2b+a)(2b-a)$; 2) $(c+3d)(c-3d)$;
3) $(y+6x)(6x-y)$; 4) $(3m-2n)(2n+3m)$.

357 1) $(c^2+d^2)(c^2-d^2)$; 2) $(a^2+b^3)(a^2-b^3)$;
3) $(x^4-y^3)(y^3+x^4)$; 4) $(m^3-n^3)(m^3+n^3)$.

358 1) $(3a^2+4b^3)(3a^2-4b^3)$; 2) $(2m^4-5n^2)(5n^2+2m^4)$;
3) $(0{,}2t^3+0{,}5p^4)(0{,}5p^4-0{,}2t^3)$;
4) $(1{,}2a^2-0{,}3b^2)(1{,}2a^2+0{,}3b^2)$.

Вычислить **(359—360)**.

359 1) $48\cdot52$; 2) $68\cdot72$; 3) $43\cdot37$; 4) $47\cdot53$;

360 1) $47\cdot33$; 2) $44\cdot36$; 3) $84\cdot76$; 4) $201\cdot199$.

Разложить на множители **(361—362)**.

361 1) $(a+b)^2-c^2$; 2) $(m-n)^2-k^2$;
3) $(a+2b)^2-9a^2$; 4) $(3x-y)^2-4y^2$.

362 1) $(a-b)^2-(a-c)^2$; 2) $(a+b)^2-(b+c)^2$;
3) $(2a+b)^2-(2b+a)^2$; 4) $(a+3b)^2-(3a+b)^2$.

363 Вычислить:
1) 47^2-37^2; 2) 54^2-44^2; 3) $50{,}7^2-50{,}6^2$;
4) $29{,}4^2-29{,}3^2$; 5) $\left(6\frac{2}{3}\right)^2-\left(5\frac{1}{3}\right)^2$; 6) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2-\left(4\frac{4}{9}\right)^2$.

364 Решить уравнение:

1) $(x-1)(x+1)=x^2-2(x-3)$;
2) $3(x+5)-x^2=(2-x)(2+x)$;
3) $(2x+3)(2x+3)-4(x-1)(x+1)=49$;
4) $(3x+1)(3x+1)-(3x-2)(2+3x)=17$.

365 Выполнить умножение:

1) $(3+x)(3-x)(9+x^2)$;
2) $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$;
3) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$;
4) $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$.

366 Вычислить:

1) $\dfrac{49^2-21^2}{57^2-15^2}$; 2) $\dfrac{63^2-27^2}{78^2-30^2}$; 3) $\dfrac{40{,}7^2-40{,}6^2}{32{,}3^2-5{,}2^2}$; 4) $\dfrac{51{,}3^2-11{,}3^2}{113{,}9^2-73{,}9^2}$.

367 Доказать, что модуль разности квадратов двух последовательных натуральных чисел есть нечетное число.

368 Доказать, что при любом натуральном n число $(7n+1)^2-(2n-4)^2$ делится на 15.

369 Разложить на множители:

1) $(a+b)^3-(a-b)^3-8b^3$;
2) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2-a^2$;
3) $(a^4+b^4)^2-(a^4-b^4)^2-a^2b^2$;
4) $9a^4-13a^2b^2+4b^4$.

§ 22 Квадрат суммы. Квадрат разности

Рассмотрим квадрат суммы двух чисел $(a+b)^2$. Пользуясь правилом умножения многочлена на многочлен, получаем:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=$$
$$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2, \text{ т. е.}$$

$$\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.} \qquad (1)$$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

Заметим, что формулу (1) можно получить, рассматривая площадь квадрата, изображенного на рисунке 8.

Рассмотрим теперь квадрат разности двух чисел:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=$$
$$=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2,$$

т. е.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \qquad (2)$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

В равенствах (1) и (2) a и b — любые числа или алгебраические выражения, например:

1) $(2m+3k)^2=(2m)^2+2\cdot 2m\cdot 3k+(3k)^2=$
$=4m^2+12mk+9k^2;$

2) $(5a^2-3)^2=(5a^2)^2-2\cdot 5a^2\cdot 3+3^2=$
$=25a^4-30a^2+9;$

3) $(-a-3b)^2=((-1)(a+3b))^2=$
$=(-1)^2(a+3b)^2=(a+3b)^2=a^2+2a\cdot 3b+(3b)^2=$
$=a^2+6ab+9b^2.$

Промежуточный результат можно не писать, производя необходимые вычисления устно. Например, можно сразу написать:

$$(5a^2-7b^2)^2=25a^4-70a^2b^2+49b^4.$$

Формулы квадрата суммы (1) и квадрата разности (2) называют также *формулами сокращенного умножения* и применяют в некоторых случаях для упрощения вычислений, например:

1) $99^2=(100-1)^2=10\,000-200+1=9801;$

2) $52^2=(50+2)^2=2500+200+4=2704.$

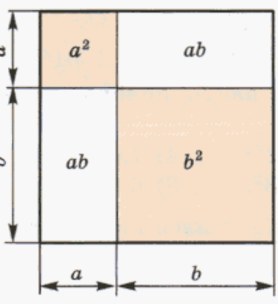


Рис. 8

Формула (1) применяется также для приближенных вычислений значений выражения $(1+a)^2$. Если модуль числа a мал по сравнению с 1 (например, $a=0{,}0032$ или $a=-0{,}0021$, то число a^2 тем более мало и поэтому равенство $(1+a)^2=1+2a+a^2$ можно заменить приближенным равенством $(1+a)^2\approx 1+2a$.

Например:

1) $(1{,}002)^2=(1+0{,}002)^2\approx 1+2\cdot 0{,}002=$
$=1{,}004$, т. е. $(1{,}002)^2\approx 1{,}004;$

2) $(0{,}997)^2=(1-0{,}003)^2\approx 1-2\cdot 0{,}003=$
$=0{,}994$, т. е. $(0{,}997)^2\approx 0{,}994.$

Формулы квадрата суммы и квадрата разности иногда применяются к разложению многочленов на множители, например:

1) $x^2+10x+25=x^2+2\cdot5\cdot x+5^2=(x+5)^2$;

2) $a^4-8a^2b^3+16b^6=(a^2)^2-2\cdot a^2\cdot4b^3+(4b^3)^2=$
$=(a^2-4b^3)^2$.

Задача Доказать формулу

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \qquad (3)$$

▶ $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$
$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+$
$+3ab^2+b^3$. ◁

Аналогично доказывается формула

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) называют *формулами куба суммы и куба разности*.

Упражнения

Представить квадрат двучлена в виде многочлена **(370—373)**.

370 1) $(c+d)^2$; 2) $(x-y)^2$; 3) $(2+x)^2$; 4) $(x+1)^2$.

371 1) $(q+2p)^2$; 2) $(3x+2y)^2$; 3) $(6a-4b)^2$; 4) $(5z-t)^2$.

372 1) $(0{,}2x+0{,}3y)^2$; 2) $(0{,}4b-0{,}5c)^2$;

3) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{4}a^3-\frac{4}{5}\right)^2$.

373 1) $(-4ab-5a^2)^2$; 2) $(-3b^2-2ab)^2$;

3) $(0{,}2x^2+5xy)^2$; 4) $(4xy+0{,}5y^2)^2$.

Выполнить действия, используя формулы сокращенного умножения **(374—375)**.

374 1) $(90-1)^2$; 2) $(40+1)^2$; 3) 101^2; 4) 98^2.

375 1) 72^2; 2) 57^2; 3) 997^2; 4) 1001^2.

376 Применяя формулу $(1+a^2)\approx1+2a$, найти приближенное значение числа:

1) $1{,}005^2$; 2) $1{,}004^2$; 3) $1{,}012^2$; 4) $1{,}011^2$;
5) $0{,}992^2$; 6) $0{,}994^2$; 7) $0{,}988^2$; 8) $0{,}989^2$.

Заменить x одночленом так, чтобы получился квадрат двучлена **(377—378)**.

377 1) a^2+4a+x; 2) $p^2-0{,}5p+x$;

3) $36a^2-x+49b^2$; 4) $a^2-6ab+x$.

378 1) m^4-3m^2+x; 2) a^2+ab+x;
3) $4a^2-5a+x$; 4) $x+6a+9a^2$.

Разложите на множители многочлен **(379—383)**.

379 1) $9a^2-6a+1$; 2) $1+2c+c^2$;
3) $36b^2+12b+1$; 4) $81-18x+x^2$.

380 1) $9x^2+24x+16$; 2) $100-60a+9a^2$;
3) $36m^2+12mn+n^2$; 4) $a^2+10ab+25b^2$.

381 1) $x^4+2x^2y+y^2$; 2) $p^4-2p^2q+q^2$;
3) $4c^4+12c^2d^3+9d^6$; 4) $25a^6+30a^3b+9b^2$.

382 1) a^4-8a^2+16; 2) b^4-18b^2+81;
3) $25a^4-10a^2b+b^2$; 4) $16-8a^2b^2+a^4b^4$.

383 1) $-a^2-2a-1$; 2) $-9+6b-b^2$;
3) $-2a^2+8ab-8b^2$; 4) $-12ab-3a^2-12b^2$.

384 Решить уравнение:
1) $16x^2-(4x-5)^2=15$; 2) $64x^2-(3-8x)^2=87$;
3) $-5x(x-3)+5(x-1)^2=-20$; 4) $(2x-3)^2-(2x+3)^2=12$.

385 Упростить выражение:
1) $(x-y)^2+(x+y)^2$; 2) $(x+y)^2-(x-y)^2$;
3) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$; 3) $(2a+b)^2+(2a-b)^2$.

386 Доказать, что:
1) $(a-b)^2=(b-a)^2$; 2) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;
3) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$; 4) $(a-b)^3=-(b-a)^3$;
5)* $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

387 Найти значение выражения:
1) $5m^2-10mn+5n^2$ при $m=142$, $n=42$;
2) $6m^2+12mn+6n^2$ при $m=56$, $n=44$;
3) $-36a^3+4a^2b-\frac{1}{9}ab^2$ при $a=4$, $b=48$;
4) $-64a^3-8a^2b-\frac{1}{4}ab^2$ при $a=-6$, $b=84$.

388 Вычислить:
1) $101^2-202\cdot81+81^2$; 2) $37^2+126\cdot37+63^2$;
3) $\dfrac{48^2+2\cdot48\cdot18+18^2}{48^2-18^2}$; 4) $\dfrac{85^2-17^2}{85^2+2\cdot85\cdot17+17^2}$.

389 Используя формулы куба суммы или куба разности двух чисел, выполнить действие:
1) $(x+2)^3$; 2) $(3-y)^3$; 3) $(2a-b)^3$; 4) $(3b+2a)^3$.

390 Разложить многочлен на множители:
1) $125+75a+15a^2+a^3$; 2) $m^3-12m^2+48m-64$;
3) $x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3$; 4) $c^6+3c^4d^2+3c^2d^4+d^6$.

391 Квадрат двузначного числа содержит нечетное число десятков. Найти цифру единиц этого двузначного числа.

§ 23 Применение нескольких способов разложения многочлена на множители

При разложении многочленов на множители иногда используется не один, а несколько способов. Приведем примеры.

1) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$.

Здесь было использовано два способа: вынесение общего множителя за скобки и применение формулы разности квадратов.

2) $(a^2+1)^2 - 4a^2 = ((a^2+1)-2a)((a^2+1)+2a) =$
$= (a^2+1-2a)(a^2+1+2a) = (a^2-2a+1)(a^2+2a+1) =$
$= (a-1)^2(a+1)^2$.

Здесь сначала использовалась формула разности квадратов, затем были применены формулы квадрата суммы и разности.

3) $4x^2 - y^2 + 4x + 2y = (4x^2 - y^2) + (4x + 2y) =$
$= (2x-y)(2x+y) + 2(2x+y) = (2x+y)(2x-y+2)$.

В этом примере используется способ группировки, формула разности квадратов и вынесение общего множителя за скобки.

Эти примеры показывают, что при разложении многочленов на множители полезно соблюдать следующий порядок:
1) вынести общий множитель за скобку (если он есть);
2) попробовать разложить многочлен на множители по формулам сокращенного умножения;
3) попытаться применить способ группировки (если предыдущие способы не привели к цели).

Задача Доказать равенство

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (1)$$

▶ Преобразуем правую часть равенства:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Правая часть равенства оказалась равной левой части, т. е. равенство (1) доказано. ◁

Аналогично доказывается равенство

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2). \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) называют *формулами суммы и разности кубов*. Иногда эти формулы применяются при разложении многочленов на множители. Например:

1) $27 + b^3 = (3+b)(9-3b+b^2)$;

2) $x^4 - 8xy^3 = x(x^3 - 8y^3) = x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$.

Упражнения

Разложить на множители **(392—396)**.

392 1) $2a^2 - 2$; 2) $3x^2 - 12$; 3) $9x^3 - 81x$;
4) $16x - 4x^3$; 5) $8 - 72x^6y^2$; 6) $32a^4b - 2a^2b$.

393 1) $2a^2 + 4ab + 2b^2$; 2) $2m^2 + 2n^2 - 4mn$;
3) $5x^2 + 10xy + 5y^2$; 4) $8p^2 - 16p + 8$;
5) $27a^2b^2 - 18ab + 3$; 6) $12m^5n + 24m^4n + 12m^3n$.

394 1) $(x^2+1)^2 - 4x^2$; 2) $(x^2+2x)^2 - 1$;
3) $4y^2 - (y-c)^2$; 4) $81 - (y^2+6y)^2$.

395 1) $(a^2+2ab+b^2) - c^2$; 2) $1 - (x^2 - 2xy + y^2)$;
3) $1 - a^2 - 2ab - b^2$; 4) $4 - x^2 - 2xy - y^2$.

396 1) $a^2 - b^2 + a + b$; 2) $a^2 - b^2 - a - b$;
3) $x - y - x^2 + y^2$; 4) $x^3 + x^2 - x - 1$;
5) $m^5 - m^3 + m^2 - 1$; 6) $x^4 - x^3 + x - 1$.

Вычислить **(397—398)**.

397 1) $\dfrac{53^2 - 27^2}{79^2 - 51^2}$; 2) $\dfrac{38^2 - 17^2}{47^2 - 19^2}$;
3) $\dfrac{49^2 - 2\cdot 49\cdot 29 + 29^2}{49^2 - 19^2}$; 4) $\dfrac{47^2 - 3^2}{27^2 + 2\cdot 27\cdot 13 + 13^2}$.

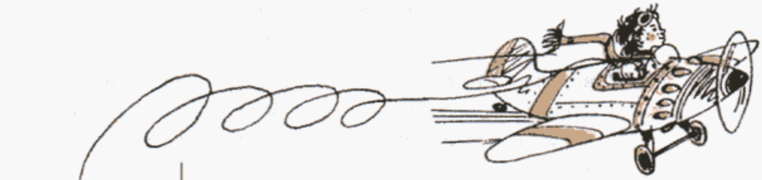
398 1) $19{,}7^2 - 8{,}3^2 + 28\cdot 8{,}6$; 2) $37\cdot 12{,}2 + 22{,}4^2 - 14{,}6^2$;
3) $38{,}8^2 + 83\cdot 15{,}4 - 44{,}2^2$; 4) $97\cdot 2{,}2 - 99{,}6^2 + 2{,}6^2$.

399 Доказать равенство:
1) $x^2 + 2x - y^2 + 2y = (x+y)(x-y+2)$;
2) $a^2 - 2b - a - 4b^2 = (a+2b)(a-2b-1)$.

400 Найти значение выражения:
1) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ при $x = 12{,}07$, $y = 2{,}07$;
2) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ при $a = 7{,}37$, $b = 2{,}63$.

401 Решить уравнение:
1) $2x^2 - 10x + x^2 - 25 = 0$; 2) $x^2 + 4x + 4 - 16x^2 = 0$;
3) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$;
4) $2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x = 0$.

№ 9



СЕЙЧАС НА ЧАСАХ 10.00. КАКОЕ ВРЕМЯ ПОКАЖУТ ЧАСЫ ЧЕРЕЗ 121036842 ЧАСА?

402 Доказать, что число $27^2 - 14^2$ делится на 13.

403 Доказать, что при любом целом n значение выражения $(7n-2)^2 - (2n-7)^2$ делится на 5; делится на 9.

404 Используя формулы суммы или разности кубов, упростить:
1) $(a-2)(a^2+2a+4)$;
2) $(b+x)(b^2-bx+x^2)$;
3) $(2a+3)(4a^2-6a+9)$;
4) $(a^2-1)(a^4+a^2+1)$.

405 Разложить на множители:
1) $27a^3-b^3$; 2) x^3y^3+64;
3) $8m^3+n^9$; 4) c^6-125d^3.

406 Доказать, что если каждое из двух натуральных чисел не делится на 3, то модуль разности квадратов этих чисел делится на 3.

407 Доказать, что модуль разности кубов двух последовательных натуральных чисел не делится на 3.

Упражнения к главе IV

Разложить на множители (408—411).

408 1) $6(a+b)+(a+b)^2$; 2) $4(x-y)+3(x-y)^2$;

3) $(a-b)+(b-a)^2$; 4) $(a-b)^2-(b-a)$.

409 1) $(c-3)^2-(c+3)(3-c)$; 2) $(a+2)^2-(a+2)(2-a)$;

3) $(-b-a)(a+b)+a^2+b^2$; 4) $(b-a)(-a-b)-3b^2$.

410 1) $2b(x-1)-3a(x-1)+c(x-1)$;

2) $c(p-q)-a(p-q)+b(p-q)$.

411 1) $8ax+16ay-3bx-6by$; 2) $14am-7an+8bm-4bn$;

3) $9a^2+6a+1-4b^2$; 4) $25a^2-4b^2+4b-1$.

412 Вычислить:

1) $287^2-287\cdot 48+239\cdot 713$; 2) $73{,}4^2+73{,}4\cdot 17{,}2-90{,}6\cdot 63{,}4$.

413 Упростить выражение и найти его числовое значение:

1) $\left(4c+\frac{1}{4}x\right)\left(4c-\frac{1}{4}x\right)+\left(4c-\frac{1}{4}x\right)^2$ при $c=\frac{1}{2}$, $x=2$;

2) $(0{,}1a-0{,}2b)^2+(0{,}1a-0{,}2b)(0{,}1a+0{,}2b)$ при $a=-50$, $b=-1\frac{2}{3}$.

Проверь себя!

1 Представить выражение в виде многочлена стандартного вида: $(a+3)^2+(a-3)(a+3)+6a$.

2 Разложить на множители:

$$xy-2y;\quad 16a^2-81;\quad 3x^2-6x^3;\quad x^2-10x+25;$$
$$3(x-1)+y(x-1);\quad 2a^2-4ab+2b^2.$$

3 Разложить на множители многочлен $a^2-3ab+3a-9b$ и найти его числовое значение при $a=1$, $b=-\frac{1}{3}$.

414 Доказать, что при любых значениях x и y верно равенство:

1) $(x+y)(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)^2$;

2) $(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)=x^4-16y^4$.

415 Разложить на множители многочлен:

1) $mn-kn-m^2+2mk-k^2$; 2) $c^2-2c+1-d^2-2de-e^2$.

416 Разложить на множители:

1) $(x^2-1)^2-(x^2+2)^2$; 2) $(5+x^2)^2-(7+x^2)^2$;
3) $(3x-1)^2-(5-2x)^2$; 4) $(7+5x)^2-(3x-2)^2$.

417 Решить уравнение:

1) $(3x-1)^2-(3x-2)^2=0$; 2) $(y-2)(y+3)-(y-2)^2=5$;
3) $(x+3)(y+7)-(x+4)^2=0$; 4) $(y+8)^2-(y+9)(y-5)=117$;
5) $(3x+2)(3x-2)-(3x-4)^2=28$.

418 Ширина прямоугольника меньше стороны квадрата на 12 м, а длина этого прямоугольника больше стороны того же квадрата на 12 м. Сравнить площади прямоугольника и квадрата.

419 Скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, а товарного — 40 км/ч. Найти расстояние между двумя пунктами, если пассажирский поезд проходит это расстояние на 2 ч быстрее, чем товарный.

420 Из города в поселок выехал мотоциклист со скоростью 60 км/ч. Через полчаса навстречу ему из поселка выехал другой мотоциклист со скоростью 50 км/ч. Сколько времени ехал второй мотоциклист до встречи с первым, если расстояние между поселком и городом равно 162 км?

421 С помощью микрокалькулятора найти значение выражения:

1) $a(3{,}478-b)-8(3{,}478-b)$ при $a=72$, $b=2{,}353$;
2) a^2b+ab^2-ab при $a=12{,}5$, $b=-4{,}4$.

422 Записать выражение в виде многочлена:

1) $(a+(b+c))(a-(b+c))$; 2) $(a^2-(b-c))(a^2+(b-c))$.

423 Вычислить:

1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)$ при $x=0{,}5$;
2) $x(x+2)(x-2)-(x-3)(x^2+3x+9)$ при $x=\frac{1}{4}$.

424 Решить уравнение:

1) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=26$;
2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x+4)(x-4)=21$;
3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)=23$;
4) $(4x+1)(16x^2-4x+1)-16x(4x^2-5)=17$.

425 1) Доказать, что если сумма трех последовательных натуральных чисел есть число нечетное, то их произведение делится на 24.

2) Доказать, что если сумма четырех натуральных чисел есть число нечетное, то их произведение — число четное.

426 Верно ли равенство $2b^5+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=$
$=(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$?

V
глава

Алгебраические дроби

§ 24 Алгебраическая дробь. Сокращение дробей

Задача 1 Скорость катера в стоячей воде равна a километрам в час, скорость течения реки равна b километрам в час. Во сколько раз скорость движения катера по течению реки больше скорости движения катера против течения?

▶ Скорость движения катера по течению реки равна $(a+b)$ километрам в час, скорость движения против течения равна $(a-b)$ километрам в час. Поэтому скорость движения катера по течению в $\frac{a+b}{a-b}$ раз больше скорости движения против течения. ◀

Выражение $\frac{a+b}{a-b}$ называют *алгебраической дробью.* Числитель этой дроби $a+b$, а ее знаменатель $a-b$. Приведем еще несколько примеров алгебраических дробей:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{2}{x+y};\quad \frac{a-b}{c};\quad \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

В алгебраической дроби числитель и знаменатель — алгебраические выражения. Если вместо букв, входящих в алгебраическую дробь, подставить некоторые числа, то после вычислений получится значение этой алгебраической дроби. Например, значение алгебраической дроби $\frac{a+b}{a-b}$ при $a=10$, $b=8$ равно $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$.

Условимся в дальнейшем всегда считать, что буквы, входящие в алгебраическую дробь, могут принимать лишь *допустимые значения*, т. е. такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Например, для дроби $\frac{a}{a(a-1)}$ допустимыми являются все значения a, кроме $a=0$ и $a=1$.

Так как в алгебраической дроби буквами обозначены некоторые числа, то для алгебраических дробей справедливы основное свойство дроби и правила выполнения действий с обыкновенными дробями.

Основное свойство дроби можно записать так:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{ma}}{\boldsymbol{mb}},$$

где $b\neq 0$, $m\neq 0$.

Это свойство означает, что при умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь, например:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)c}{bc}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель, входящий одновременно в числитель и знаменатель дроби, например:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c};\qquad \frac{(a+b)c}{(a+b)d}=\frac{c}{d}.$$

Приведем примеры дробей, для упрощения которых нужно сначала выделить общий множитель числителя и знаменателя.

Задача 2 Сократить дробь: 1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

▶ 1) Одночлены $12a^2b$ и $4ab^2$ имеют общий множитель $4ab$. Разделив числитель и знаменатель дроби на $4ab$, получим:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2}=\frac{3a}{b}.$$

2) Разложив числитель и знаменатель данной дроби на множители, получим:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}=\frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)}.$$

Сокращая эту дробь на $m+n$, получим:

$$\frac{(m-n)(m+n)}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m}. \triangleleft$$

Итак, для сокращения дроби нужно числитель и знаменатель разделить на их общий множитель, считая, что он не равен нулю.

Задача 3 Упростить дробь $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$.

$$\blacktriangleright\ \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}=\frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)}=\frac{-3}{a}=-\frac{3}{a}. \triangleleft$$

Упражнения

427 Записать алгебраическую дробь, числитель которой равен разности квадратов чисел a и b, а знаменатель — квадрату разности этих чисел.

428 Записать алгебраическую дробь, числитель которой равен сумме кубов чисел c и d, а знаменатель — удвоенному произведению этих чисел.

429 (Устно.) Найти значение алгебраической дроби:

1) $\frac{x}{4}$ при $x=2,\ x=-8,\ x=\frac{1}{2},\ x=4{,}24;$

2) $\frac{a}{5}$ при $a=25,\ a=-125,\ a=12{,}5,\ a=0;$

3) $\frac{18}{c-5}$ при $c=8,\ c=-13,\ c=5{,}3;$

4) $\frac{3+2b}{b}$ при $b=-3,\ b=5,\ b=0{,}3.$

430 Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

1) $\frac{3}{a}$; 2) $\frac{-4}{b}$; 3) $\frac{a-b}{a+2}$; 4) $\frac{a+5}{3-a}$.

431 1) Из формулы $p=2(a+b)$ найти a.

2) Из формулы $s=s_0+vt$ найти v.

432 Используя основное свойство дроби, заменить букву a алгебраическим или числовым выражением так, чтобы равенство было верным:

1) $\frac{8}{9}=\frac{a}{72}$; 2) $\frac{-3}{11}=-\frac{a}{33}$; 3) $\frac{x^2}{b}=\frac{a}{xb}$;

4) $-\frac{c}{b}=\frac{c^2}{a}$; 5) $\frac{-xy}{x^2z}=-\frac{y}{a}$; 6) $\frac{m^3n}{mn}=\frac{a}{4}$.

433 Показать, что данные две дроби равны:

1) $\frac{6}{7}$ и $\frac{18}{21}$; 2) $\frac{-3}{5}$ и $\frac{27}{-45}$; 3) $\frac{2}{3}$ и $\frac{2a}{3a}$; 4) $\frac{2a}{7b}$ и $\frac{2a^2b}{7ab^2}$.

Сократить дробь **(434—437)**.

434 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

435 1) $\frac{6ab}{-4a}$; 2) $\frac{-14c}{49c}$; 3) $\frac{-a^4b}{-ab^3}$; 4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$.

436 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m+n)}$;

4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

437 1) $\frac{3m(1-x)}{9m^2(x-1)^2}$; 2) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$;

3) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 4) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$.

Разложить на множители числитель и знаменатель дроби и сократить ее **(438—446)**.

438 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$;

4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

439 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$;

4) $\frac{5k+15f}{3f+k}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$; 6) $\frac{2m-4n}{16n-8m}$.

440 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$;

3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

441 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$.

442 1) $\frac{8-3a}{9a^2-64}$; 2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$;

4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

443 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$;

3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

444 1) $\frac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\frac{(m-n)^2}{n-m}$;

3) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\frac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

445 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$;

3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

446 1) $\frac{ax-ay+bx-by}{a+b}$; 2) $\frac{2a+2b+ax+bx}{2+x}$;

3) $\frac{2x^2-2xy-x+y}{4x^2-1}$; 4) $\frac{x^2-y^2}{3x-2x^2+3y-2xy}$.

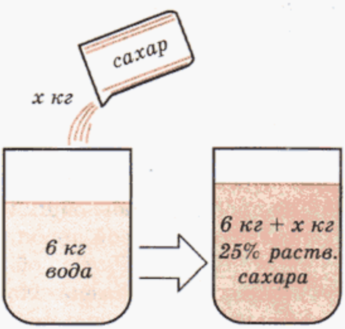
447 Упростить:

1) $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-ab}$;2) $\frac{2a^2-4a}{4a-8}$; 3) $\frac{2x^3y+2xy^3}{x^2+y^2}$; 4) $\frac{x^4y^2-x^2y^4}{x^2(x+y)}$.

Упростить выражение и найти его числовое значение **(448—449).**

448 1) $\frac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$ при $c=\frac{7}{9}$;

2) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$ при $x=-0{,}2,\ y=0{,}1$.



Для получения 25%-ного раствора сахара из 6 л воды нужно к 6 л воды добавить х кг сахара (см. рисунок). Найдем х:

$$\frac{x}{6+x}=\frac{25}{100}$$

$$4x=6+x$$

$$x=2\ (кг)$$

Сколько сахара нужно добавить к 8 л воды, чтобы получить 10%-ный раствор?

449 1) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$ при $a=0{,}2,\ b=0{,}4;$

2) $\dfrac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$ при $a=4{,}49,\ b=-5{,}1,\ c=0{,}68.$

450 Сократить дробь;

1) $\dfrac{|a|}{2a}$, если $a>0$; 2) $\dfrac{3a}{|a|}$, если $a<0$;

3) $\dfrac{-2a}{|a|}$, если $a<0$; 4) $\dfrac{|a|}{-3a}$, если $a>0$.

§ 25 Приведение дробей к общему знаменателю

Напомним, что при сложении обыкновенных дробей сначала приводят дроби к общему знаменателю. Общим знаменателем дробей является наименьшее общее кратное их знаменателей.

Так, для дробей $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$ общим знаменателем является число 100 — наименьшее общее кратное чисел 4, 25, 10.

Похожее преобразование приходится выполнять при сложении и вычитании алгебраических дробей, его также называют *приведением дробей к общему знаменателю.*

Задача 1 Привести алгебраические дроби $\dfrac{m}{3a^2b}$ и $\dfrac{n}{6ab^2}$ к общему знаменателю.

Общий знаменатель данных дробей должен делиться на знаменатель каждой из дробей. Чтобы общий знаменатель делился на знаменатель первой дроби, он должен содержать множитель $3a^2b$. Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби $6ab^2$. Таким образом, общий знаменатель должен делиться на 3 и 6, т. е. на 6, на a^2 и a, т. е. на a^2, на b и b^2, т. е. на b^2. Наиболее простым в данном случае общим знаменателем является одночлен $6a^2b^2$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей данных дробей, а каждая буква взята с наибольшим показателем из тех, с которыми она встречается в знаменателях. Разделив $6a^2b^2$ на знаменатель первой дроби $3a^2b$, получим $2b$ — дополнительный множитель, на который нужно умножить ее числитель и знаменатель. Дополнительный множитель второй дроби равен $6a^2b^2 : 6ab^2 = a$. Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель, приводим их к общему знаменателю:

$$\frac{m}{3a^2b} = \frac{2bm}{6a^2b^2}, \quad \frac{n}{6ab^2} = \frac{an}{6a^2b^2}. \triangleleft$$

Задача 2 Привести к общему знаменателю дроби

$$\frac{a}{x^2 - y^2}, \quad \frac{b}{2x^2 - 4xy + 2y^2}, \quad \frac{c}{3x^2 + 6xy + 3y^2}.$$

▶ Разложим на множители знаменатели дробей:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y);$$
$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y)^2;$$
$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x + y)^2.$$

Общий знаменатель должен делиться на знаменатель каждой из данных дробей. Так как он должен делиться на знаменатель первой дроби, то он должен содержать произведение $(x - y)(x + y)$. Далее, общий знаменатель должен делиться на знаменатель второй дроби, и поэтому он должен содержать множитель $2(x - y)^2$. Следовательно, к знаменателю первой дроби нужно дописать множитель $2(x - y)$, т. е. общий знаменатель должен содержать произведение $2(x - y)^2(x + y)$.

Для того чтобы общий знаменатель делился на знаменатель третьей дроби $3(x + y)^2$, нужно к полученному произведению дописать множитель $3(x + y)$. Следовательно, выражение $6(x - y)^2(x + y)^2$ является общим знаменателем трех дробей.

Для приведения дробей к общему знаменателю нужно их числители и знаменатели умножить на дополнительные множители, которые находятся делением общего знаменателя на знаменатель каждой из дробей; для данных дробей они соответственно равны $6(x-y)(x+y)$, $3(x+y)^2$, $2(x-y)^2$. Следовательно, данные дроби можно записать так:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}=\frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}. \triangleleft$$

Таким образом, для приведения алгебраических дробей к общему знаменателю нужно:
1) найти общий знаменатель данных дробей;
2) для каждой дроби найти дополнительный множитель;
3) умножить числитель каждой дроби на ее дополнительный множитель;
4) записать каждую дробь с найденным числителем и общим знаменателем.
Если в задании не указано, к какому общему знаменателю нужно привести дроби, то их приводят к простейшему общему знаменателю.

Упражнения

Привести дроби к общему знаменателю **(451—456)**.

451 1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{14}$; 3) $\frac{1}{3a}$ и $\frac{2}{a}$; 4) $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{2b}$.

452 1) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$; 2) $\frac{3b}{4a}$ и $\frac{a^2}{2b}$;
3) $\frac{b}{a}$, $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{c}{2ab}$; 4) $\frac{b}{3a}$, $\frac{3c}{2b}$ и $\frac{c}{6ab}$.

453 1) $\frac{1}{2p^2}$, $\frac{1}{6pk}$ и $\frac{1}{3k^2}$; 2) $\frac{1}{6b^2}$, $\frac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ и $\frac{3-a}{18ab^2}$;
3) $\frac{2a}{b^2}$, $\frac{4}{15a^2b}$ и $\frac{3}{20a^3b^4}$; 4) $\frac{7}{20x^4y}$, $\frac{31}{6xy^3}$ и $\frac{4}{3x^2y^4}$.

454 1) $\frac{1}{x-y}$ и $\frac{1}{x+y}$; 2) $\frac{7a}{3x-y}$ и $\frac{6b}{3x+y}$;
3) $\frac{5}{2x-2}$ и $\frac{3}{4x-4}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}$ и $\frac{x}{8x+8y}$.

455 1) $\frac{3b}{b-2}$ и $\frac{4}{b^2-4}$; 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ и $\frac{a}{x+3}$;
3) $\frac{1}{1-a}$, $\frac{2a}{1+a}$ и $\frac{a^2}{1-a^2}$; 4) $\frac{6x}{x-y}$, $\frac{7xy}{x+y}$ и $\frac{3}{x^2-y^2}$.

456 1) $\frac{m+n}{2m-2n}$ и $\frac{n^2+m^2}{m^2-n^2}$; 2) $\frac{a-b}{5a+5b}$ и $\frac{a^2+b}{a^2-b^2}$;

3) $\frac{7}{(x-y)^2}$ и $\frac{5}{x-y}$; 4) $\frac{5c}{(c-2)^2}$ и $\frac{6}{c-2}$.

457 Записать выражения в виде дробей с одинаковыми знаменателями:

1) a и $\frac{c}{b}$; 2) $3b$ и $\frac{7}{6a}$; 3) ab, $\frac{3c}{2b}$ и $\frac{a}{4b}$;

4) ab, $\frac{3}{4ab}$ и $\frac{2}{ab^2}$; 5) $a-b$, $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$; 6) $a+b$, $\frac{3}{ab}$ и $\frac{1}{a-b}$.

458 Привести к общему знаменателю:

1) $\frac{1}{a^2-4b^2}$, $\frac{1}{3a^2+6ab}$ и $\frac{1}{2ab-a^2}$;

2) $\frac{5}{4x-4}$, $\frac{4x}{1-x^2}$ и $\frac{1}{3x^2+3x}$;

3) $\frac{5x}{x^2-4}$, $\frac{3x+y}{x^2+4x+4}$ и $\frac{y-x}{x^2-4x+4}$;

4) $\frac{3a}{2a-3}$, $\frac{4a}{2a+3}$ и $\frac{5b}{4a^2c-9c}$.

459 Решить уравнение:

1) $\frac{(2x+1)(x+3)}{75}-\frac{(4-x)(4+x)}{25}=\frac{x(x+2)}{15}$;

2) $\frac{x(x-1)}{7}-\frac{2(x^2+1)}{28}=\frac{(x-1)(x+2)}{14}$;

3) $\frac{(2-x)(2+x)}{3}-\frac{x-x^2}{4}=\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{7x^2}{36}$;

4) $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{2x^2-3}{15}=\frac{(x-1)(x+1)}{3}$.

460 Привести дроби к общему знаменателю:

1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{a-3}{a^2+3a+9}$ и $\frac{1}{a-3}$;

2) $\frac{3}{x+2}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ и $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$;

3) $\frac{2m}{(m-n)^3}$, $\frac{2n}{(m-n)^2}$ и $\frac{1}{m^2-n^2}$;

4) $\frac{1}{k^3+3k^2+3k+1}$, $\frac{2}{k^2-1}$ и $\frac{3}{k^2+2k+1}$.

461 Пусть n — натуральное число. Найти общий знаменатель дробей:

1) $\frac{1}{x^{4n}-y^{4n}}$; $\frac{1}{x^{2n}-y^{2n}}$; $\frac{1}{x^n-y^n}$;

2) $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}$; $\frac{1}{a^n-b^n}$; $\frac{1}{a^n+b^n}$.

§ 26 Сложение и вычитание алгебраических дробей

Сложение и вычитание алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями выполняются по тем же правилам, что и сложение и вычитание обыкновенных дробей:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}, \quad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

Задача 1 Сложить дроби $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ и $\frac{a-2b}{a+b}$.

▶ $$\frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=$$
$$=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4(a-b)}{a+b}. \triangleleft$$

Задача 2 Найти разность дробей $\frac{a^2}{a+b}$ и $\frac{b^2}{a+b}$.

▶ $$\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b. \triangleleft$$

Для сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями нужно привести эти дроби к общему знаменателю и воспользоваться правилом сложения или вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Задача 3 Сложить дроби $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ и $\frac{1}{3ab^2}$.

▶ Общим знаменателем данных дробей является произведение $6a^3b^2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=$$
$$=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}. \triangleleft$$

Задача 4 Найти разность дробей $\frac{a}{3b^2c}$ и $\frac{c}{15ab^2}$.

▶ $$\frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}. \triangleleft$$

Задача 5 Сложить дроби $\frac{1}{x^2-x}$ и $\frac{3}{x^2-1}$.

▶ Разложим многочлены, стоящие в знаменателях дробей, на множители:

$$x^2-x=x(x-1), \quad x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Общим знаменателем данных дробей является произведение $x(x-1)(x+1)$. Приведя дроби к общему знаменателю, найдем:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=$$
$$=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}. \ \triangleleft$$

Таким образом, для сложения (или вычитания) алгебраических дробей с разными знаменателями нужно:
1) найти общий знаменатель дробей;
2) привести дроби к общему знаменателю;
3) сложить (или вычесть) полученные дроби;
4) упростить результат, если возможно.

Задача 6 Вычислить значение выражения

$$\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2} \quad \text{при } a=0{,}5.$$

▶ Данное выражение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$
$$=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$
$$=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, искомое значение равно

$$\frac{1}{0{,}5^2}=\frac{1}{0{,}25}=\frac{100}{25}=4. \ \triangleleft$$

Упражнения

Выполнить действия **(462—473).**

462 1) $\frac{c+d}{2a}+\frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2}+\frac{5a-2b}{3c^2}$;

3) $\frac{a+d}{2c}-\frac{a-b}{2c}$; 4) $\frac{10a-b}{a^3}-\frac{3a-b}{a^3}$.

463 1) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{b}-\frac{2}{5b}$; 3) $\frac{c}{15a}+\frac{d}{3}$; 4) $\frac{a}{4}-\frac{b}{12d}$.

464 1) $5-\frac{2}{b}+\frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c}+4-\frac{3}{c^2}$; 3) $d-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n}-k+\frac{m^2}{n^2}$.

465 1) $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^3}$; 2) $\frac{2a}{9b^4}-\frac{7c}{6a^3b}$;

3) $\frac{2}{3y^3}-\frac{1}{6x^2y}+\frac{5}{12xy^2}$; 4) $\frac{b}{c}+\frac{b}{c^2d}+\frac{b}{cd^2}$.

466 1) $\frac{2x}{3(a-b)}+\frac{x}{a-b}$; 2) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$;

3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$; 4) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5x}{2(y-3)}$.

467 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$; 2) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$;

3) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$; 4) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

468 1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{1}{1+b}$; 2) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$; 4) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

469 1) $\frac{y}{n-2}+\frac{z}{2-n}$; 2) $\frac{p+2q}{3p-q}-\frac{5q-2p}{q-3p}$;

3) $\frac{2m}{3-5n}-1+\frac{7n-4}{5n-3}$; 4) $4-\frac{3a}{5-2b}+\frac{5(a-10)}{2b-5}$.

470 1) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{16-x^2}$; 2) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$;

3) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$; 4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

471 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$; 2) $\frac{a}{(3a+1)^2}+\frac{4}{3a+1}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2}-\frac{5}{b-a}$; 4) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$.

472 1) $a+\frac{a}{a-1}$; 2) $b-\frac{b}{b-2}$; 3) $c+1-\frac{c^2}{c-1}$; 4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

473 1) $\frac{7a-1}{2a^2+6a}+\frac{5-3a}{a^2-9}$; 2) $\frac{6}{3x+3y}+\frac{8x}{4x^2-4y^2}$;

3) $\frac{3a-b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a^2-ab}$; 4) $\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}$;

5) $\frac{b-1}{(b+3)^2}-\frac{b}{b^2-9}$; 6) $\frac{a-3}{a^2-4}-\frac{a}{(a-2)^2}$.

474 Найти значение выражения:

1) $\frac{7}{a+b}+\frac{8}{a-b}-\frac{16b}{a^2-b^2}$ при $a=0{,}05$, $b=-0{,}04$;

2) $\frac{3}{a+3}-\frac{2}{3-a}-\frac{12}{a^2-9}$ при $a=-8$;

3) $\frac{6x}{x^2-y^2}-\frac{3}{x-y}-\frac{4}{x+y}$ при $x=\frac{3}{7}$, $y=-\frac{1}{21}$;

4) $\frac{18}{9-4a^2}-\frac{4}{2a+3}+\frac{3}{2a-3}$ при $a=-0{,}6$.

475 Упростить:

1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$;

2) $\frac{4+6x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$;

3) $\frac{2}{25-10a+a^2}-\frac{10}{a^2-25}$;

4) $\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

476 Решить уравнение:

1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-4}{3}=5$;

2) $2x+\frac{3x-1}{2}-\frac{5x-2}{3}=2$;

3) $\frac{8x+7}{6}-\frac{5x-2}{2}=3-\frac{3-2x}{4}$;

4) $\frac{4z}{3}-17+\frac{3z-17}{4}=\frac{z+5}{2}$.

477 Найти разность дробей:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$;

4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

478 Найти значение выражения:

1) $\frac{8a^2}{a^3-1}+\frac{a+1}{a^2+a+1}$ при $a=2$;

2) $\frac{3c^2-c+8}{c^3-1}-\frac{c-1}{c^2+c+1}+\frac{2}{1-c}$ при $c=1\frac{1}{2}$.

479 Упростить выражение, если n — натуральное число:

1) $\frac{1}{a^{2n}-b^{2n}}+\frac{1}{a^n+b^n}-\frac{1}{a^n-b^n}$;

2) $\frac{a^n+b^n}{a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}}+\frac{1}{a^n+b^n}-\frac{1}{a^n}$.

§ 27 Умножение и деление алгебраических дробей

Умножение и деление алгебраических дробей выполняются по тем же правилам, что и умножение и деление обыкновенных дробей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Задача 1 Найти произведение дробей $\frac{1}{2xy}$, $\frac{4x^2y^3}{5z}$ и $\frac{10z^2}{3x^3}$.

$$\frac{1}{2xy}\cdot\frac{4x^2y^3}{5z}\cdot\frac{10z^2}{3x^3}=\frac{1\cdot4x^2y^3\cdot10z^2}{2xy\cdot5z\cdot3x^3}=\frac{4y^2z}{3x^2}.$$

Задача 2 Умножить дроби $\frac{a-b}{a^2+ab}$ и $\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}$.

$$\frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)b(a+b)}{a(a+b)(a-b)^2}=\frac{b}{a(a-b)}.$$

Задача 3 Найти частное дробей $\frac{m+n}{9m^2n^3}$ и $\frac{m^2-n^2}{27mn^2}$.

$$\frac{m+n}{9m^2n^3}:\frac{m^2-n^2}{27mn^2}=\frac{(m+n)\cdot27mn^2}{9m^2n^3(m^2-n^2)}=\frac{(m+n)\cdot3}{mn(m-n)(m+n)}=$$
$$=\frac{3}{mn(m-n)}.$$

При возведении алгебраической дроби в степень используется формула

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Например: $\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2=\frac{16a^4}{b^2}$, $\left(\frac{a+b}{3c}\right)^3=\frac{(a+b)^3}{27c^3}$.

Упражнения

Выполнить умножение **(480—481)**.

480 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot39$.

481 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 3) $\frac{2a}{3b}\cdot 6c$; 4) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

482 Выполнить деление дробей:

1) $\frac{8}{17}:\frac{8}{17}$; 2) $\frac{a}{b}:\frac{a}{b}$; 3) $\frac{3a}{7b}:\frac{m}{n}$;

4) $\frac{c}{2d}:\frac{3a}{5b}$; 5) $\frac{2a}{3b}:\frac{a^2}{bc}$; 6) $\frac{5m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}$.

483 Выполнить деление:

1) $\frac{4}{13}:5$; 2) $\frac{a}{b}:c$; 3) $12:\frac{8}{9}$; 4) $a:\frac{b}{c}$.

Выполнить действия **(484—487)**.

484 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2\cdot\frac{14b^2}{25a^3}$; 2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3\cdot\frac{16b^3}{21a^4}$;

3) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2\cdot acd$; 4) $abc^2\cdot\left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

485 1) $\frac{8a^2b}{9c}\cdot\frac{36c^3}{5a^3b}$; 2) $\frac{7b^4}{9c^5y}:\frac{35b^4c}{18c^4y^2}$; 3) $\frac{16x^2y}{7z}:\frac{10xy^3}{21z^2}$;

4) $\frac{46d^3c}{15a}:\frac{23dc^2}{5a^3}$; 5) $\frac{18m^3n^5}{7k}:(9n^2)$; 6) $24k^2:\frac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

486 1) $\frac{7-x}{a+b}\cdot\frac{a-b}{7-x}$; 2) $\frac{x-y}{2a}\cdot\frac{4b}{x-y}$; 3) $\frac{c+d}{c-d}:\frac{c}{c-d}$;

4) $\frac{a-b}{2b}:\frac{a-b}{6b^2}$; 5) $\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}$; 6) $\frac{ab+b^2}{9}:\frac{b^2}{3a}$.

487 1) $\frac{1-a}{3b^2}\cdot\frac{b^3}{1-a^2}$; 2) $\frac{5m}{m^2-n^2}:\frac{15m^3}{m-n}$;

3) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)}:\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

488 Найти значение выражения:

1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}\cdot\frac{3a^2}{5b-5a}$ при $a=2{,}5$;

2) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{3x^2+3y^2}{10y-10x}$ при $x=\frac{5}{6}$, $y=\frac{2}{3}$;

3) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a+5}{9-a^2}$ при $a=1$;

4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np}:\frac{6m-6n}{n+p}$ при $m=-9$, $n=-3$.

489 Проверить, верно ли равенство:

1) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{a^4-b^4}=\frac{x-y}{x(a^2-b^2)}$; 2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab}:\frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}=\frac{1}{a^2-b^2}$

490 Упростить:

1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$; 2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$;

3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$; 4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

491 Решить уравнение:

1) $\frac{3(x-11)}{4}=\frac{3(x+1)}{5}-\frac{2(2x-5)}{11}$;

2) $\frac{2(5x+2)}{9}-1=\frac{4(33+2x)}{5}-\frac{5(1-11x)}{9}$;

3) $\frac{8(x+10)}{15}-24\frac{1}{2}=\frac{7x}{10}-\frac{2(11x-5)}{5}$;

4) $\frac{2(x-4)}{3}+\frac{3x+13}{8}=\frac{3(2x-3)}{5}-7$.

492 Решить уравнение относительно x, если $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$, $a\neq -b$:

1) $\frac{a+b}{x}=\frac{a^2-b^2}{a}$;

2) $\frac{x}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a^2-ab}$;

3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{b}=\frac{a^2-b^2}{x}$;

4) $\frac{ab^2-b^3}{a^3b-ab^3}=\frac{x}{a^2+2ab+b^2}$;

493 Упростить:

1) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\frac{8a-8b}{a^3+b^3}$;

2) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{7a+7b}$;

3) $\frac{n^3-m^3}{n^2-m^2}:\frac{n^2+nm+m^2}{n^2+2nm+m^2}$;

4) $\frac{m^2+2mn+n^2}{p^3+c^3}\cdot\frac{p+c}{2m+2n}$.

494 Доказать, что при всех допустимых значениях a, b, x и y (n — натуральное число) верно равенство:

1) $\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}+b^{2n}}\cdot\frac{a^{4n}-b^{4n}}{a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}}=(a^n+b^n)^2$;

2) $\frac{(x^n+y^n)^2}{x^{4n}-y^{4n}}:\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x^{2n}+y^{2n}}=\frac{1}{(x^n-y^n)^2}$.

§ 28 Совместные действия над алгебраическими дробями

Задача 1 Упростить выражение $\left(\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\frac{2a+2}{a+2}$.

► Выполним вычитание в скобках:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2(a-1)}-\frac{1}{2(a^2-1)}=$$

$$=\frac{(a+1)^2-1}{2(a^2-1)}=\frac{(a+1-1)(a+1+1)}{2(a^2-1)}=\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}.$$

Найдем произведение: $\dfrac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)} \cdot \dfrac{2a+2}{a+2} =$

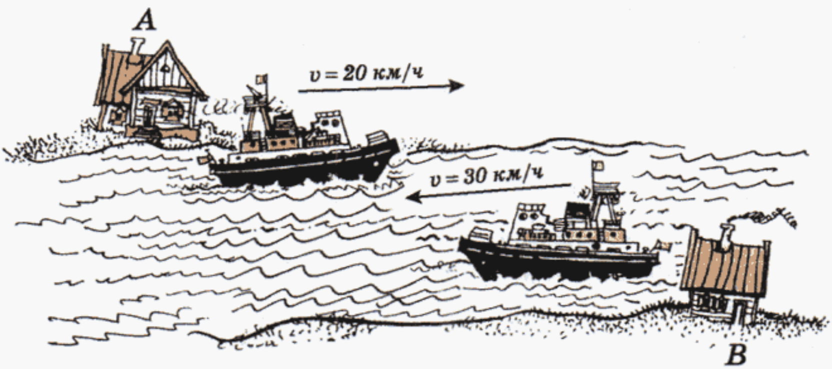
$= \dfrac{a(a+2) \cdot 2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)} = \dfrac{a}{a-1}$. ◁

Решение задачи 1 можно записать иначе:

▶ $\left(\dfrac{a+1}{2a-2} - \dfrac{1}{2a^2-2}\right) \cdot \dfrac{2a+2}{a+2} = \left(\dfrac{a+1}{2(a-1)} - \dfrac{1}{2(a^2-1)}\right) \times$

$\times \dfrac{2(a+1)}{a+2} = \dfrac{((a+1)^2-1) \cdot 2(a+1)}{2(a^2-1)(a+2)} = \dfrac{a(a+2)}{(a-1)(a+2)} =$

$= \dfrac{a}{a-1}$. ◁



Из пункта A в пункт B катер двигался со скоростью 20 км/ч, а на обратном пути из B в A — со скоростью 30 км/ч.
Какова средняя скорость катера на пути из A в B и обратно?

1) Время движения катера из A в B: $t_1 = \dfrac{s}{20}$, где s — расстояние от A до B.

2) Время движения катера из B в A: $t_2 = \dfrac{s}{30}$.

3) Время катера в пути: $\dfrac{s}{20} + \dfrac{s}{30} = \dfrac{s}{12}$.

4) Средняя скорость катера на пути из A в B и обратно:

$$v_{\text{ср}} = 2s : \frac{s}{12} = \frac{2 \cdot s \cdot 12}{s} = 24.$$

Ответ: $v_{\text{ср}} = 24$ *км/ч.*

Задача 2 Выполнить действия $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)$.

▶ Выполним действие в первой скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

Выполним действие во второй скобке:

$$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$$

Выполним деление:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)\cdot 2b}=\frac{2a}{a+b}.$$ ◁

Задача 3 Упростить выражение $\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)^2-1}{a+2}$.

▶ $$\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{(a+1)^2-1}{a+2}=\frac{2a}{a+1}-\frac{1}{a+1}\cdot\frac{a(a+2)}{a+2}=$$

$$=\frac{2a}{a+1}-\frac{a}{a+1}=\frac{a}{a+1}.$$ ◁

Упражнения

Выполнить действия (**495—501**).

495 1) $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\cdot\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$;

4) $\frac{ab}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 5) $1:\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

496 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$.

497 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$; 2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$.

498 1) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+11b}$; 2) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\cdot\frac{c}{18(2c+d)}$;

3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$; 4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

499 1) $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}\right)$; 2) $\frac{ab-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)$;

3) $\left(\frac{c+d}{c}-\frac{2c}{c-d}\right)\cdot\frac{d-c}{c^2+d^2}$; 4) $\left(\frac{2c}{c+d}+\frac{d-c}{c}\right)\cdot\frac{c+d}{c^2+d^2}$.

500 1) $\frac{a^2+2a+1}{b^2-4}\cdot\frac{b+2}{a+1}-\frac{a}{b+2}$; 2) $\frac{a^2-2a+1}{b-2}:\frac{a^2-1}{b^2-4}-\frac{2a-b}{a+1}$;

3) $\frac{m-1}{m+1}-\frac{m(1-m^2)}{n}\cdot\frac{n}{(m+1)^2}$; 4) $\frac{2n+4}{2-n}-\frac{mn+n^2}{4-4n+n^2}:\frac{m+n}{4-n^2}$.

501 1) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)$;

2) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$;

3) $\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x}{x+y}-\frac{x^2}{x^2-y^2}\right)$;

4) $\left(\frac{m^2}{m-n}+\frac{m^2n}{m^2-2mn+n^2}\right):\left(\frac{2m^2}{m^2-n^2}-\frac{m}{m+n}\right)$.

502 Найти значение выражения:

1) $x^2-\frac{x^3-4xy^2}{x^3-2x^2y+xy^2}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{x-2y}$ при $x=-5$, $y=-\frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{2}-\frac{3n^2-6n+3}{2n^2+2n+2}:\frac{n-1}{n^3+n^2+n}$ при $n=\frac{1}{3}$;

3) $\left(\frac{3}{a-b}-\frac{3a}{b^2-a^2}\right):\frac{6a+3b}{a^2+2ab+b^2}$ при $a=3\frac{1}{4}$, $b=-0{,}75$;

4) $\left(\frac{mn}{m^2-n^2}+\frac{n}{2n-2m}\right)\cdot\frac{m^2-n^2}{2n}$ при $m=6\frac{1}{2}$, $n=-1{,}5$.

503 Выполнить действия:

1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right)$;

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right)$;

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right)$;

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right)$.

504 Доказать, что если $x+\frac{1}{x}=a$, то $x^3+\frac{1}{x^3}=a(a^2-3)$.

505 Доказать, что если $-1<x<0$ или $0<x<1$, то значение выражения $\left(\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1}{4x}\right)$ отрицательно.

Упражнения к главе V

506 Решить уравнение:

1) $2x+\frac{6x-5}{7}=\frac{8x+7}{3}$; 2) $\frac{x+5}{24}-\frac{3x-8}{16}=1$;

3) $2x+1+\frac{2x-1}{6}=\frac{7x-13}{4}$; 4) $\frac{3(2x-2,5)}{5}-2x+2,5=\frac{2-x}{2}$.

507 Найти неизвестное число x из пропорции:

1) $\frac{a}{x}=\frac{2b}{3}$; 2) $\frac{4a}{3b}=\frac{2x}{a}$;

3) $\frac{x}{a+b}=\frac{a}{(a+b)^2}$; 4) $\frac{a+1}{a-1}=\frac{a^2-1}{ax}$.

508 Решить уравнение:

1) $\frac{(2x-1)^2}{8}-\frac{x(2x-3)}{4}=\frac{x-3}{2}$;

2) $\frac{(1-5x)^2}{48}-\frac{(2x-1)(2x+1)}{8}=\frac{x+0,25x^2}{12}$;

3) $\frac{0,03-x^2}{9}-\frac{(0,1+x)^2}{18}=\frac{(0,1-x)(0,1+x)}{6}$;

4) $\frac{(3x+4)^2}{36}+\frac{3x(1-x)}{18}=\frac{(x-4)(x+4)}{12}$.

509 Найти значение выражения:

1) $\frac{2x}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x+y}-\frac{y}{4x^2-y^2}$ при $x=0,37$, $y=-1,4$;

2) $\frac{x^2-1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+1\right)$ при $x=\frac{1}{2}$.

Выполнить действия (**510—512**).

510 1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-ab}$; 2) $\frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+2}{2b+2}-\frac{b+1}{b-1}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1}+\frac{3a+1}{3-9a}+\frac{3a-1}{6a+2}$; 4) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\frac{xy}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}$;

6) $a-2+\frac{4a}{2+a}-\frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

Проверь себя!

1 Найти допустимые значения букв, входящих в дробь:

$$\frac{a}{b};\quad \frac{3}{a-1};\quad \frac{a}{b+2}.$$

2 Выполнить действия:

$$4a+\frac{1-4a^2}{a};\quad \frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b};\quad \frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2};\quad \frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}.$$

3 Упростить выражение $\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}$ и найти его числовое значение при $x=2\frac{2}{3}$.

511 1) $\frac{64x^2y^2-1}{x^2-4}\cdot\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\cdot\frac{(x-2)^2}{8xy+1}$;

2) $\frac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\frac{x^2+4x+4}{(x^2+2)(x-2)}\cdot\frac{x^3-9x}{(x-6)(x+2)}$;

3) $\frac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\frac{am^2-2amn+an^2}{3m+3n}$;

4) $\frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\frac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$.

512 1) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\frac{b}{a^2+ab}+\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\frac{a^2-b^2}{4ab}$;

3) $\frac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\frac{ac}{a-c}\right)$;

4) $\frac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\frac{ac}{a+c}\right)$.

513 Масса куска льда объемом V м^3 равна p килограммам. Чему равна масса куска льда объемом V_1 м^3?

514 Автомобиль, двигаясь со скоростью v километров в час, прошел s километров. Какой путь пройдет за то же время мотоцикл, если его скорость равна u километрам в час?

515 Собственная скорость моторной лодки v километров в час, а скорость течения реки v_1 километров в час. Двигаясь по течению, лодка прошла s километров. Какое расстояние пройдет за это же время моторная лодка при движении против течения?

516 Бассейн наполняется одной трубой за a часов, другой — за b часов. За сколько часов наполнится бассейн, если одновременно открыть две трубы?

517 Две машинистки, работая вместе, напечатали рукопись за a часов. Одна из них могла бы выполнить эту работу за b часов. За какое время могла бы напечатать рукопись другая машинистка?

518 Сопротивление R участка цепи, состоящего из двух параллельно соединенных проводников с сопротивлениями R_1 и R_2, вычисляется по формуле $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$. Выразить из этой формулы:

1) R через R_1 и R_2;

2) R_1 через R и R_2.

519 Давление p бензина на дно цистерны равно 69 580 Па (паскалей), плотность ρ бензина равна 710 кг/м^3. С помощью микрокалькулятора найти высоту h цистерны с бензином, если $p=g\rho h$, где $g=9{,}8$.

520 Сократить дробь:

1) $\frac{2ab-b}{8a^3-1}$; 2) $\frac{27a^3+b^3}{3ab+b^2}$; 3) $\frac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

4) $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$; 5) $\frac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$.

521 Выполнить действия:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$; 4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

522 Доказать, что если

$$a+b\neq 0,\ b+c\neq 0,\ c+a\neq 0 \text{ и } a^3+b^3+c^3+abc=0,$$

то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$

VI
глава

Линейная функция и ее график

§ 29 Прямоугольная система координат на плоскости

Напомним, что две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины образуют *прямоугольную систему координат* на плоскости. Плоскость, на которой выбрана система координат, называют *координатной плоскостью.* Прямые углы, образуемые осями координат, называют *координатными углами (квадрантами)* и нумеруют так, как показано на рисунке 9, *а*.

Абсциссу и *ординату* точки M называют координатами точки M. Запись $M(x; y)$ означает, что точка M имеет абсциссу x и ординату y (рис. 9, *б*). Например, в записи $M(3; 5)$ число 3 — абсцисса, число 5 — ордината точки M.

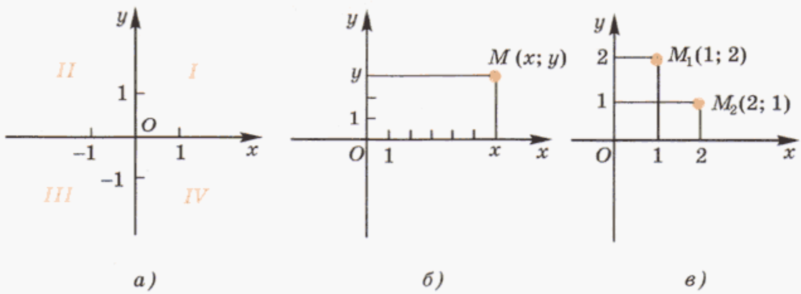


Рис. 9

Использование прямоугольной системы координат на плоскости связано с именем выдающегося французского математика XVII в. Рене Декарта (1596—1650).

В записи координат точек порядок чисел имеет существенное значение. Например, $M_1(1;\ 2)$ и $M_2(2;\ 1)$ — различные точки плоскости (рис. 9, *в*).

Если точка лежит на оси абсцисс, то ее ордината равна нулю. Например, точка A (рис. 10, *а*) имеет координаты (2; 0). Если точка лежит на оси ординат, то ее абсцисса равна нулю. Например, точка B (рис. 10, *а*) имеет координаты (0; −2). Начало координат имеет абсциссу и ординату, равные нулю: O (0; 0).

Задача Построить точку $M(-3;\ 2)$.

▶ На оси абсцисс отметим точку с координатой −3 и проведем через нее перпендикуляр к этой оси. На оси ординат отметим точку с координатой 2 и проведем через нее перпендикуляр к оси ординат. Точка пересечения этих перпендикуляров — искомая точка M (рис. 10, *б*). ◁

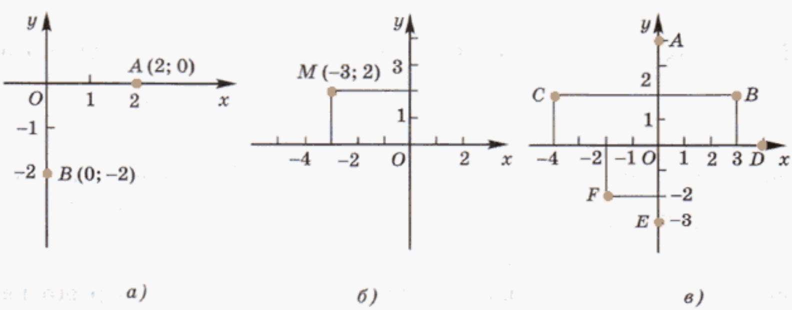


Рис. 10

Упражнения

523 Назвать абсциссу и ординату точки: (1; 0), (4; 0), (0; 2), (−6; 0), (0; −7), (0; 0).

524 Построить точки и указать, каким координатным углам они принадлежат:

1) $A\ (3;\ 4)$, $B\ (2;\ -5)$, $C\ (-2;\ 5)$, $E\ (-6;\ -2)$, $F\left(3;\ -\frac{1}{2}\right)$,

$K\ (3;\ 0)$, $M\ (0;\ -1{,}5)$, $N\left(\frac{5}{2};\ \frac{3}{2}\right)$;

2) $A\ (-1{,}5;\ 2{,}5)$, $B\ (-2{,}5;\ 1{,}5)$, $C\left(3\frac{1}{2};\ 1\right)$, $F\ (2;\ -2)$,

$K\ (-3{,}5;\ 3{,}5)$, $M\ (0;\ 2{,}5)$.

525 По рисунку 10, *в* найти координаты точек A, B, C, D, E, F.

526 Построить прямую, проходящую через точки:
1) $A\ (3;\ -2)$ и $B\ (-2;\ 2)$; 2) $M\ (2;\ 0)$ и $N\ (0;\ -2)$.

527 Построить отрезок по координатам его концов:
1) $A\ (3;\ 4)$, $B\ (-6;\ 5)$; 2) $M(0;\ -5)$, $N\ (4;\ 0)$.

528 Построить треугольник по координатам его вершин:
1) $K\ (-2;\ 2)$, $M\ (3;\ 2)$, $N\ (-1;\ 0)$;
2) $A\ (0;\ -1)$, $B\ (0;\ 5)$, $C\ (4;\ 0)$.

529 Построить прямоугольник по координатам его вершин: $A\ (-2;\ 0)$, $B\ (-2;\ 3)$, $C\ (0;\ 3)$, $O\ (0;\ 0)$.

530 Даны три вершины $A\ (1;\ 2)$, $B\ (4;\ 2)$, $C\ (4;\ 5)$ квадрата $ABCD$. Найти координаты точки D и построить квадрат.

531 Построить прямую, проходящую через точки $A\ (0;\ 5)$ и $B\ (-2;\ 5)$. Чему равны ординаты точек, лежащих на прямой AB?

532 Построить прямую, проходящую через точки $A\ (-2;\ 3)$ и $B\ (-2;\ -1)$. Чему равны абсциссы точек, лежащих на прямой AB?

533 Даны точки $A(5;\ 3)$, $B(-1;\ -2)$, $C(0;\ 4)$, $D(-2;\ 0)$, $E(-2;\ 3)$. Построить точки, симметричные им относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат. Определить координаты полученных точек.

534 На плоскости расположены точки $A(2;\ 7)$, $B\ (3;\ 4)$, $C\ (2;\ -7)$, $D\ (-3;\ 4)$, $E\ (-2;\ 7)$. Определить, какая пара точек симметрична относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

535 Квадрат со стороной 4 расположен так, что центр его находится в начале координат, а стороны параллельны осям координат. Найти координаты вершин квадрата.

§ 30 Функция

Задача 1 Поезд движется из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 120 км/ч. Какой путь пройдет поезд за t часов?

▶ Если обозначить искомый путь буквой s (в км), то ответ можно записать формулой

$$s = 120t. \quad \triangleleft \qquad (1)$$

При движении поезда путь s и время t изменяются. Поэтому их называют *переменными*.

Например, если $t = \frac{1}{2}$, то $s = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60$; если $t = 2$, то $s = 240$; если $t = 2{,}5$, то $s = 300$ и т. д.

Так как значения s зависят от значений t, то t называют *независимой переменной*, а s — *зависимой переменной* или *функцией*. Зависимость переменной s от переменной t называют *функциональной зависимостью*.

Для того чтобы подчеркнуть, что s зависит от t, пишут $s(t)$ (читается: «s от t»). Например,

$$s\left(\frac{1}{2}\right) = 60, \ s(2) = 240, \ s(2{,}5) = 300.$$

Таким образом, формула (1) устанавливает правило вычисления пути s по заданному значению времени t. В этой задаче время t положительно и не может быть больше времени движения поезда от Москвы до Санкт-Петербурга.

Задача 2 Поезд движется из Москвы в Санкт-Петербург со скоростью 120 км/ч. За какое время он пройдет путь, равный s километрам?

▶ Если обозначить искомое время буквой t (в часах), то ответ можно записать формулой

$$t = \frac{s}{120}. \quad \triangleleft \qquad (2)$$

Например, если $s = 180$, то $t = 1{,}5$; если $s = 300$, то $t = 2{,}5$. Таким образом, в этой задаче s является независимой переменной, а t — зависимой переменной, т. е. функцией $t(s)$. Например, $t(180)=1{,}5$; $t(300)=2{,}5$.

Формула (2) устанавливает правило вычисления времени по заданному значению пути s. Здесь s может принимать положительные значения, не большие чем расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга.

Обычно в математике независимая переменная обозначается буквой x, а зависимая переменная — буквой y. В этом случае пишут $y(x)$. Но такое обозначение не является обязательным.

Например, в задаче 1 путь s является функцией времени t; при этом пишут $s(t)=120t$. В задаче 2 время t является функцией пути s, и поэтому пишут $t(s)=\frac{s}{120}$.

Функция может быть задана различными способами.

1. Функция может быть задана формулой. Например, формула $y=2x$ показывает, как по данному значению x вычислить соответствующее значение функции y.

Задача 3 Функция задана формулой $y=x^2+x+1$. Найти $y(-2)$, $y(0)$ и $y(1)$.

▶ 1) Подставляя в эту формулу $x=-2$, получаем $y(-2)=(-2)^2+(-2)+1=4-2+1=3$,

2) $y(0)=0^2+0+1=1$;

3) $y(1)=1^2+1+1=3$.

Ответ $y(-2)=3,\ y(0)=1,\ y(1)=3.$ ◁

Задача 4 Функция задана формулой $y=-3x+5$. Найти значение x, при котором значение y равно -1.

▶ Подставляя в формулу вместо y число -1, получаем $-1=-3x+5$. Решая это уравнение, находим $3x=5+1$, $x=2$.

Ответ $x=2.$ ◁

Задачу 4 можно также решить, выразив из формулы $y=-3x+5$ переменную x через y, т. е. по формуле $x=\frac{5-y}{3}$ найти x при $y=-1$.

2. **Функция может быть задана таблицей**, например:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

Согласно этой таблице значению $x = 3$ соответствует $y = 9$, а значению $x = 5$ соответствует $y = 25$. Примеры табличного способа задания функции: таблица квадратов натуральных чисел, таблица кубов натуральных чисел, таблица прироста вклада в сберегательном банке в зависимости от суммы вклада.

3. **Функция может быть задана графиком.** Для того чтобы наглядно представить функциональную зависимость, используют специальные рисунки (чертежи), которые называют *графиками.* Графики функций широко применяются в практике. С помощью графика часто изображают, например, зависимость температуры от времени (рис. 11); железнодорожники пользуются графиками движения; экономисты графически изображают рост производительности труда. При построении графиков в научных исследованиях и в современном производстве используются самопишущие приборы и компьютеры.

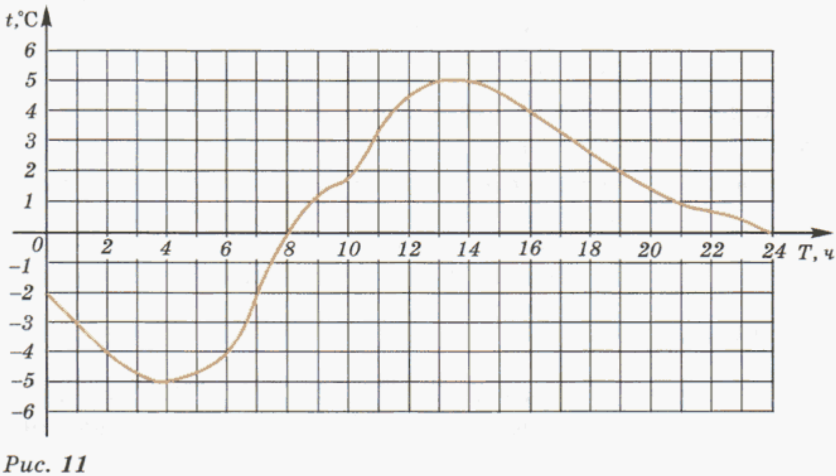


Рис. 11

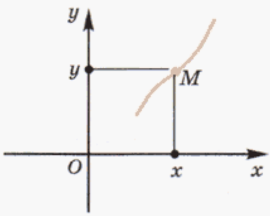


Рис. 12

Допустим, что на координатной плоскости изображен график некоторой функции $y(x)$ (рис. 12). Для того чтобы по заданному графику найти значение функции $y(x)$ при каком-то определенном значении x, проведем через точку оси абсцисс с координатой x перпендикуляр к этой оси и найдем точку M пересечения его с графиком данной функции. Ордината точки пересечения и даст соответствующее значение функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям независимой переменной, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Задача 1 Дана функция $y = x^2 + 2$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: 1) (1; 3); 2) (2; 2).

▶ 1) Найдем значение y при $x = 1$: $y(1) = 1^2 + 2 = 3$. Так как $y(1) = 3$, то точка (1; 3) принадлежит графику данной функции.
2) $y(2) = 2^2 + 2 = 6$. Точка графика с абсциссой $x = 2$ имеет ординату $y = 6$, поэтому точка (2; 2) не принадлежит графику данной функции. ◁

Упражнения

536 (Устно.) Прочитать следующие выражения, назвать независимую и зависимую переменную:
$s(t) = 120t$, $p(x) = 17{,}8x$, $C(R) = 2\pi R$, $m(V) = 7{,}8V$,
$y(x) = \frac{1}{7}x + 3$, $t(s) = \frac{s}{120}$, $x(y) = 7y - 21$, $f(x) = 2 - 5x^2$.

537 Вычислить значение y при x, равном -2; -1; 0; 1; 2:
1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -x - 3$; 4) $y = 20x + 4$.

538 Функция задана формулой $s = 60t$, где s — путь (в км) и t — время (в ч).
1) Определить $s(2)$, $s(3{,}5)$, $s(5)$.
2) Определить t, если $s = 240$.

539 Функция задана формулой $y = 2x - 1$.
1) Вычислить значение y при x, равном 10; $-4{,}5$; 15; -21.
2) Найти значение x, при котором значение y равно -19; 205; $-3\frac{1}{2}$.

540 Функция задана формулой $p(x)=\frac{1}{3}(2x+1)$.

1) Найти $p(3)$, $p(-12)$, $p(2{,}1)$.
2) Найти значение x, если $p(x)=0$, $p(x)=2{,}4$, $p(x)=-9$.

541 Функция задана формулой $f(x)=2-5x^2$. Верно ли равенство:

1) $f(-2)=-18$; 2) $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1\frac{4}{5}$; 3) $f(4)=78$; 4) $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$?

542 Функция задана формулой $y(x)=2x^2+5x$.

1) Найти $y(0)$, $y(-1)$, $y(2)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y\left(-\frac{3}{5}\right)$.

2) Верны ли равенства: $y(-3)=3$, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$, $y(1)=9$, $y(2)=-18$?

543 (Устно.) Следующая таблица выражает зависимость атмосферного давления p от высоты h над уровнем моря:

h, км	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20
p, мм рт. ст.	760,0	716,0	674,0	596,1	525,7	462,2	404,8	198,1	40,9

1) Назвать давление на высоте 1 км, 3 км, 5 км, 10 км.
2) На какой высоте над уровнем моря давление равно 760,0 мм рт. ст., 462,2 мм рт. ст., 40,9 мм рт. ст.?

544 (Устно.) Результаты измерений температуры воздуха за сутки даны в следующей таблице:

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °C	−1	1	−3	−4	$2\frac{1}{2}$	5	8	$10\frac{1}{2}$	11	9	6	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

1) Назвать температуру в 6 ч, 18 ч, 24 ч.
2) В какое время температура была равна +1 °C, −4 °C, 11 °C?

545 На рисунке 11 изображен график изменения температуры воздуха в течение суток.
1) По графику найти температуру воздуха в 2 ч, 6 ч, 12 ч, 18 ч.
2) В какое время суток температура воздуха была равна 0 °C, −4 °C, 1 °C, 3 °C?

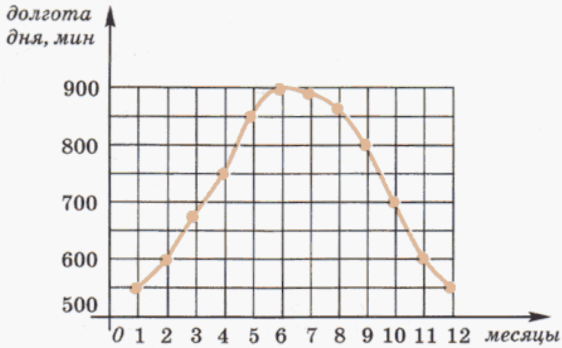


Рис. 13

3) В какое время суток температура была самой высокой? самой низкой?

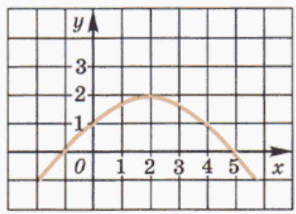
4) В какое время суток температура опускалась ниже 0 °C?

546 На рисунке 13 изображен график зависимости долготы дня от времени года. По оси ординат отложена долгота дня первого числа каждого месяца. По оси абсцисс — номер месяца.

1) В каком месяце долгота дня первого числа равна 600 мин, 750 мин, 850 мин?

2) В какое время года долгота первого дня месяца больше 700 мин, меньше 600 мин?

3) Какова долгота дня в первый день января, марта, мая, июля, октября?



а)

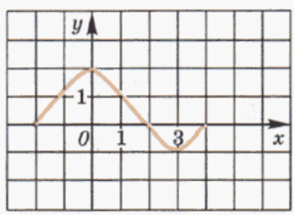
547 Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 14, *а*).

1) Найти $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(-1)$.

2) При каком значении x значение функции равно 1, 2, 0?

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.



б)

548 Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 14, *б*).

Рис. 14

№ 10

РОСКОШНО ЛИПА РАСЦВЕТАЛА.
ПОД НЕЙ ЧЕРВЯК ЗАВЕЛСЯ МАЛЫЙ
ДА ВВЕРХ ПОПОЛЗ ВО ВСЮ ОН МОЧЬ —
ЧЕТЫРЕ ЛОКТЯ ДЕЛАЛ В НОЧЬ,
НО ДНЕМ СОСЛЕПУ ПОЛЗ ОБРАТНО
ОН НА ДВА ЛОКТЯ АККУРАТНО.
ТРУДИЛСЯ НАШ ЧЕРВЯК ОТВАЖНЫЙ.
И ВОТ ИТОГ РАБОТЫ ВАЖНОЙ,
НАГРАДА ДЕВЯТИ НОЧЕЙ:
ОН НА ВЕРХУШКЕ ЛИПЫ СЕЙ.
— ТЕПЕРЬ, МОЙ ДРУГ, ПОВЕДАЙ ТЫ,
КАКОЙ ТА ЛИПА ВЫСОТЫ?

1) Найти $y(0)$, $y(-2)$, $y(1)$, $y(3)$.

2) При каком значении x значение функции равно 2, 0, −1, 1?

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.

549 Дана функция $y = x^2 - 5x + 6$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

1) (1; 2); 2) (−2; 0);
3) (−2; 20); 4) (3; 0).

550 Дана функция $y = x^3 - 1$. Выяснить, принадлежит ли графику этой функции точка с координатами:

1) (−1; 1); 2) (1; 0);
3) (3; 27); 4) (−2; 7).

551 Одна сторона прямоугольника равна x см, другая сторона на 3 см больше. Записать формулы периметра P и площади S этого прямоугольника.

1) Найти значение каждой из функций $P(x)$ и $S(x)$ при $x=5$, $x=2{,}1$.

2) При каком значении x периметр этого прямоугольника будет равен 38 см, 46 см?

552 Плотность гранита составляет 2600 кг/м^3. Выразить массу m как функцию от его объема V.

1) Найти значение m при $V=1{,}5$ м^3, $V=10$ м^3.

2) Каков должен быть объем гранита, чтобы его масса была 5,2 ц; 7,8 т?

553 Заполнить таблицу (перечертив ее в тетрадь):

1)

x				4	0	−2
$y=\frac{1}{2}x+3$	5	7	−13			

2)

x	−2	−1	0			
$y=-7x+1$				1	8	15

554 График функции $y(x)$ — ломаная $ABCDE$, где $A(-2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$, $C(5;\ 4)$, $D(9;\ 2)$, $E(13;\ -2)$.

1) Построить этот график.

2) Используя график, найти $y(-1)$, $y(0)$, $y(10)$.

3) При каком значении x значение функции $y(x)$ равно 3; −1; 0?

4) Указать три значения x, при которых функция принимает положительные значения, и три значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

555 График функции — ломаная $EFKLM$, где $E(-1;\ 1)$, $F(2;\ -2)$, $K(5;\ -2)$, $L(6;\ -3)$, $M(7;\ -6)$.

1) Построить этот график.

2) По графику найти натуральные значения x, при которых значение функции равно −2.

3) По графику найти натуральные значения x, при которых значение функции больше −2.

§ 31 Функция $y = kx$ и ее график

Найдем площадь прямоугольника, основание которого равно 3, а высота равна x. Если искомую площадь обозначить буквой y, то ответ можно записать формулой $y = 3x$.

Если основание прямоугольника равно k, то зависимость между высотой x и площадью y выразится формулой $y = kx$, где k и x — положительные числа. Если рассмотреть формулу $y = kx$, где k и x — произвольные числа, то каждое заданное значение k определяет некоторую функцию

$$y = kx. \qquad (1)$$

Построим график этой функции при $k = 2$, т. е. функции

$$y = 2x. \qquad (2)$$

По формуле (2) вычислим значения y для нескольких значений x. Возьмем, например, $x = 2$, получим $y = 4$. Если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 = 0$; если $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3) = -6$ и т. д. Построим точки с найденными координатами: $(2; 4)$, $(0; 0)$, $(-3; -6)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Приложив линейку, можно убедиться, что все построенные точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая и является графиком функции $y = 2x$ (рис. 15, *а*).

Можно показать, что графиком функции $y = kx$ при любом значении k является прямая, проходящая через начало координат.

Из курса геометрии известно, что через две точки проходит единственная прямая, поэтому для того чтобы построить график функции $y = kx$, достаточно построить две точки графика, а затем с помощью линейки провести через эти точки прямую. Так как начало координат принадлежит графику функции $y = kx$, то для построения этого графика достаточно найти еще одну точку.

Задача 1 Построить график функции $y = kx$ при:

1) $k = 1$; 2) $k = -1$; 3) $k = 0$.

▶ 1) Пусть $k = 1$, тогда $y = x$. Если $x = 1$, то $y = 1$. Поэтому точка $(1;\ 1)$ принадлежит графику. Для построения графика функции $y = x$ проведем прямую, проходящую через точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 1)$. Эта прямая делит первый и третий координатные углы пополам (рис. 15, *б*).

2) Пусть $k = -1$, тогда $y = -x$. Если $x = 1$, то $y = -1$. Поэтому точка $(1;\ -1)$ принадлежит графику. Прямая, проходящая через точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ -1)$, является графиком функции $y = -x$. Эта прямая делит второй и четвертый координатные углы пополам (рис. 15, *в*).

3) Пусть $k = 0$, тогда $y = 0$. Это означает, что ординаты всех точек графика равны нулю. Поэтому графиком этой функции является прямая, совпадающая с осью абсцисс. ◁

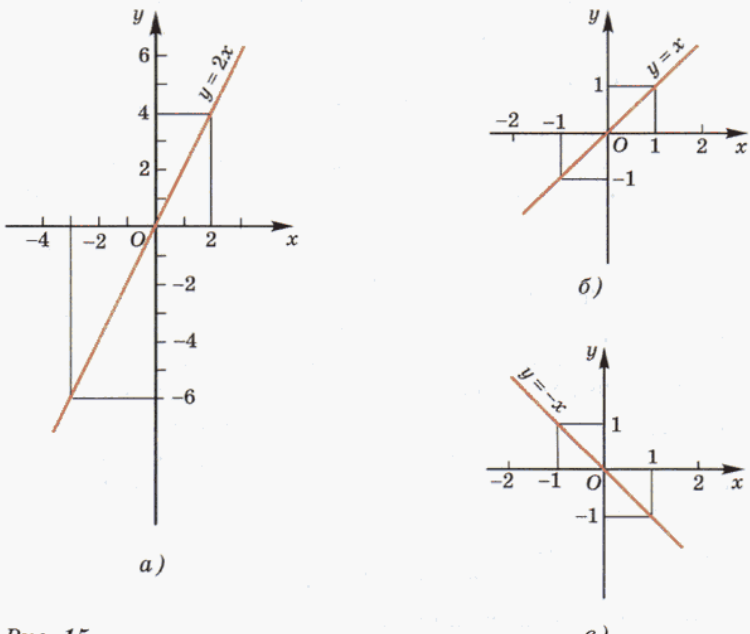


Рис. 15

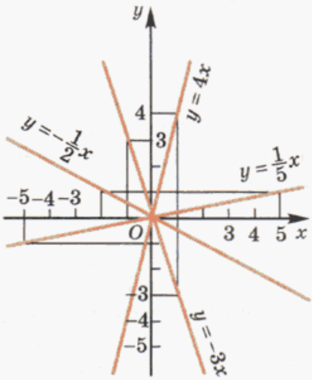


Рис. 16

На рисунке 16 изображены графики функций

$$y = 4x,\ y = \frac{1}{5}x,\ y = -\frac{1}{2}x,\ y = -3x.$$

Если значения x, положительны и $k > 0$, то зависимость между переменными x и y, выражаемую формулой $y = kx$, обычно называют *прямой пропорциональной зависимостью*, а число k — *коэффициентом пропорциональности*. Например, путь, пройденный телом при движении с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения. Масса газа постоянной плотности прямо пропорциональна его объему.

Если y прямо пропорционален x, то при увеличении значения x в несколько раз значение y увеличивается во столько же раз.

Часто встречается такая зависимость y от x, что при увеличении значения x в несколько раз значение y уменьшается во столько же раз. Эта зависимость называется *обратной пропорциональностью* и выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$.

Например, при равномерном движении скорость прохождения одного и того же участка пути обратно пропорциональна времени. Плотность вещества при постоянной массе обратно пропорциональна его объему.

Упражнения

556 Книга стоит 20 р. Выразить формулой зависимость между купленным числом n экземпляров этой книги и уплаченной суммой y, выраженной в рублях. Чему равно $y(6)$, $y(11)$?

557 Автомобиль «Волга» движется по шоссе со скоростью 80 км/ч. Записать формулу, выражающую зависимость длины пути s (в км) от времени движения t (в ч). Чему равно: $s(3)$, $s(5,4)$?

558 Построить график функции:
1) $y = 3x$; 2) $y = 5x$; 3) $y = -4x$; 4) $y = -0,8x$.

559 Построить график функции:
1) $y = 1,5x$; 2) $y = -2,5x$; 3) $y = -0,2x$.

560 Построить график функции:

1) $y=2\frac{1}{2}x$; 2) $y=\frac{1}{4}x$; 3) $y=0{,}6x$.

561 Построить график функции, заданной формулой $y=-1{,}5x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному 1; 0; 2; 3;

2) значение x, если значение y равно -3; 4,5; 6;

3) несколько целых значений x, при которых значения y положительны (отрицательны).

562 Построить график функции, заданной формулой $y=0{,}2x$. Найти по графику:

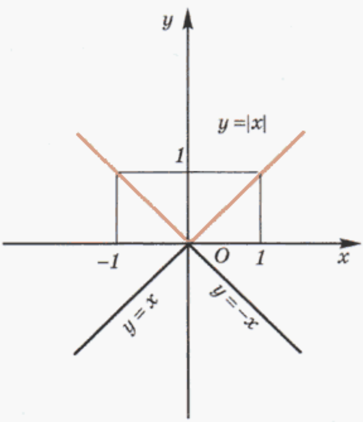
1) значение y, соответствующее значению x, равному -5; 0; 5;

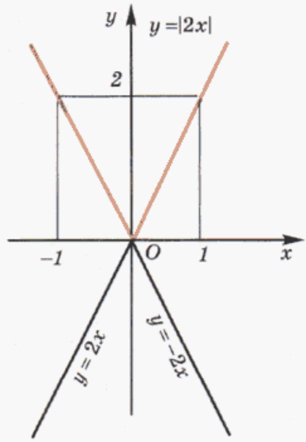
2) значение x, если значение функции равно -2; 0; 2;

3) несколько значений x, при которых значения y отрицательны (положительны).

563 Построить график функции и указать, внутри каких координатных углов расположен этот график:

1) $y=\frac{1}{3}x$; 2) $y=-\frac{1}{3}x$; 3) $y=4{,}5x$; 4) $y=-4{,}5x$.





$$|x|=\begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Постройте график функции $y=\left|\frac{1}{2}x\right|$

564 Какие из точек $A(5; -3)$, $B(-2; 4)$, $C(0; 0)$, $D(2; 1)$, $E(-5; 2,5)$ принадлежат графику функции, заданной формулой $y=\frac{1}{2}x$?

565 Прямая пропорциональная зависимость площади S прямоугольника от его ширины x представлена таблицей:

x, см	3,1	2,5	1,3	0,9	0,14		
$S(x)$, см					0,7	0,3	0,1

Устно найти по таблице коэффициент пропорциональности k и заполнить таблицу.

566 Масса m тела прямо пропорциональна его объему V. Устно найти коэффициент пропорциональности p из данной таблицы и заполнить таблицу:

V, см^3	11,2	10,5	9,3			
$m(V)$, г			3,1	7,2	0,63	0,45

567 Тело, двигаясь равномерно, прошло путь AB за 5 с. Двигаясь обратно, оно увеличило скорость и прошло путь BA за 2,5 с. Во сколько раз увеличилась скорость движения тела на обратном пути?

568 Для перевозки некоторого количества зерна автомашина, имеющая грузоподъемность 4 т, сделала 15 рейсов. Какую грузоподъемность должна иметь автомашина, чтобы такое же количество зерна перевезти за 12 рейсов?

569 Обратная пропорциональность $y=\frac{k}{x}$ представлена таблицей. Устно найти k и заполнить таблицу:

x	6	4,5	3	2,4				
y				0,6	1,8	1,5	0,6	0,1

570 По графику функции $y=kx$ определить знак коэффициента k: 1) рис. 17, *а*; 2) рис. 17, *б*.

571 Зависимость между переменными x и y выражена формулой $y=kx$. Определить k, если $y=-5$ при $x=2,5$.

572 Прямая OA проходит через начало координат и точку $A\left(\frac{1}{2}; 7\right)$. Графиком какой из следующих функций является эта прямая: $y=7x$, $y=-14x$, $y=14x$?

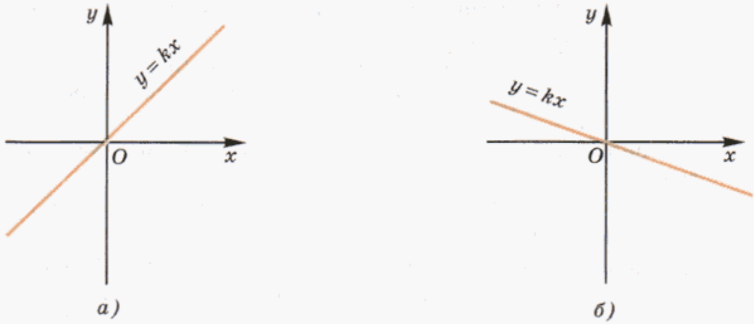


Рис. 17

573 Построить график функции $y = kx$, если известно, что ему принадлежит точка B: 1) $B(2; -3)$; 2) $B\left(3\frac{1}{3}; -2\right)$. График какой из этих функций проходит через точку $M(-10; 15)$?

574 Плот плывет по реке со скоростью 2 км/ч. Выразить путь s, пройденный плотом за x часов. Вычислить путь, пройденный плотом за 1 ч, 2,5 ч, 4 ч. Построив график зависимости пути плота от времени движения, найти по графику время, за которое плот пройдет 6 км.

575 Пешеход идет со скоростью 3 км/ч. Выразить путь s, пройденный пешеходом за t часов. Построить график пути в зависимости от времени. Найти по графику путь, пройденный пешеходом за 0,5 ч, 1 ч, 1 ч 30 мин.

576 На рисунке 18 изображены графики движения автомобиля и автобуса. Используя рисунок, ответить на вопросы:

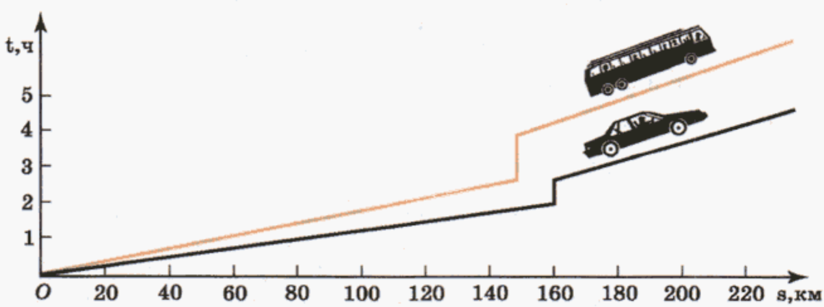


Рис. 18

1) Какой путь прошел за первые 3 ч автобус? автомобиль?
2) Какой была скорость до остановки?
3) Какой путь прошла каждая из автомашин до остановки?
4) Сколько времени двигался до остановки автобус? автомобиль?
5) Какой была продолжительность стоянки автобуса и автомобиля?
6) Какой стала скорость движения автобуса и автомобиля после остановки?

577 Двигаясь равномерно, автомобиль прошел путь в 120 км. Записать формулу зависимости времени движения t от его скорости v (в км/ч). Найти $t(60)$; $t(45)$; $t(50)$.

578 Двигаясь равномерно, велосипедист проехал 70 км. Записать формулу зависимости скорости велосипедиста v от времени t (в часах) нахождения его в пути. Найти $v(5)$; $v(7)$; $v(3{,}5)$.

§ 32 Линейная функция и ее график

Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.
Можно показать, что *графиком линейной функции* $y=kx+b$ является *прямая*. Так как прямая определяется двумя ее точками, то для построения графика функции $y=kx+b$ достаточно построить *две* точки этого графика.

Задача 1 Построить график функции $y=2x+5$.

▶ При $x=0$ значение функции $y=2x+5$ равно 5, т. е. точка (0; 5) принадлежит графику. Если $x=1$, то $y=2\cdot1+5=7$, т. е. точка (1; 7) также принадлежит графику. Построим точки (0; 5) и (1; 7) и проведем через них прямую. Эта прямая и является графиком функции $y=2x+5$ (рис. 19, a). ◁

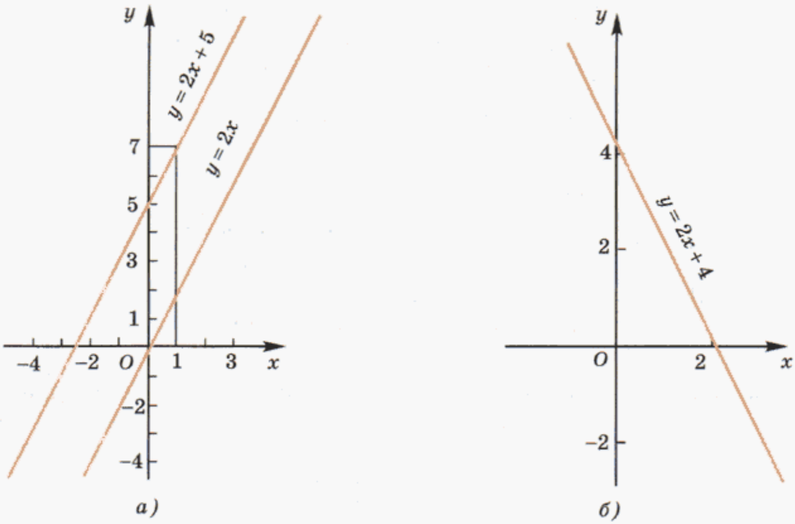


Рис. 19

Заметим, что каждая точка графика функции $y = 2x + 5$ имеет ординату, на 5 единиц большую, чем точка графика функции $y = 2x$ с той же абсциссой. Это означает, что каждая точка графика функции $y = 2x + 5$ получается сдвигом на 5 единиц вверх вдоль оси ординат соответствующей точки графика функции $y = 2x$.

График функции $y = kx + b$ получается сдвигом графика функции $y = kx$ на b единиц вдоль оси ординат. Графиками функций $y = kx$ и $y = kx + b$ являются параллельные прямые.

Отметим, что для построения графика линейной функции иногда удобно находить точки пересечения этого графика с осями координат.

Задача 2 Найти точки пересечения графика функции $y = -2x + 4$ с осями координат и построить график.

▶ Найдем точку пересечения графика с осью абсцисс. Ордината этой точки равна 0. Поэтому $-2x + 4 = 0$, откуда $x = 2$. Итак, точка пересечения графика с осью абсцисс имеет кординаты (2; 0). Найдем точку пересечения графика с осью ординат. Так как абсцисса этой точки равна 0, то $y = -2 \cdot 0 + 4 = 4$.

Итак, точка пересечения графика с осью ординат имеет координаты (0; 4). График функции $y=-2x+4$ изображен на рисунке 19, *б*. ◁

Задача 3 Построить график линейной функции

$$y=kx+b$$

при $k=0$, $b=2$.

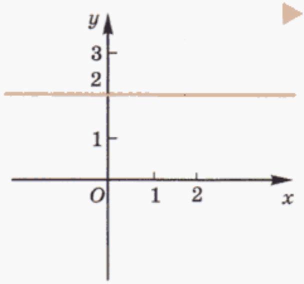


Рис. 20

▶ Если $k=0$ и $b=2$, то $y=2$. Ординаты всех точек графика равны 2, и поэтому графиком функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку (0; 2) (рис. 20). ◁

С помощью линейной функции описываются многие физические процессы. Например, при равноускоренном движении скорость является линейной функцией времени: $v(t)=v_0+at$.

Упражнения

579 (Устно.) Является ли линейной функция, заданная формулой:

1) $y=-x-2$; 2) $y=2x^2+3$; 3) $y=\frac{x}{3}$;

4) $y=250$; 5) $y=\frac{3}{x}+8$; 6) $y=-\frac{x}{5}+1$?

580 Дана линейная функция $y(x)=3x-1$.

1) Найти $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$.

2) Найти значение x, если $y(x)=-4$, $y(x)=8$, $y(x)=0$.

581 Построить график функции:

1) $y=2x+1$; 2) $y=-2x+1$; 3) $y=3x-4$;

4) $y=0{,}5x-1$; 5) $y=\frac{1}{4}x-2$; 6) $y=\frac{1}{2}x+2$.

582 Построить график функции, заданной формулой $y=2x+3$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -1; 2; 3; 5;

2) при каком значении x значение y равно 1; 4; 0; -1.

583 Построить график функции, заданной формулой $y=-2x-1$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному 2; -2; $-1\frac{1}{2}$;

2) при каком значении x значение y равно -5; 2; 6.

584 Линейная функция задана формулой $y = x + 2$. Принадлежат ли точки $M(0;\ 2)$, $N(1;\ 3)$, $A(-1;\ 1)$, $B(-4{,}7;\ -2{,}7)$, $C\left(-2\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ графику этой функции?

585 Не выполняя построения графика функции $y = 2x - \frac{1}{3}$, выяснить, проходит ли он через точку:

1) $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$; 2) $(1;\ -2)$; 3) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 4) $(2;\ 3)$.

586 1) Построить график функции $y = -0{,}5x - 2$ и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции положительны; отрицательны.

2) Построить график функции $y = -4x + 3$ и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции отрицательны; положительны.

587 Построить график функции, найдя точки пересечения его с осями координат:

1) $y = 2x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x - 1$; 3) $y = 4x + 8$;

4) $y = -3x + 6$; 5) $y = 2{,}5x + 5$; 6) $y = -6x - 2$.

588 Построить график функции:

1) $y = 7$; 2) $y = -3{,}5$; 3) $y = \frac{1}{4}$; 4) $y = 0$.

589 (Устно.) Как из графика функции $y = -2x$ можно получить графики функций $y = -2x + 3$ и $y = -2x - 3$?

590 (Устно.) Как из графика функции $y = \frac{1}{3}x$ можно получить графики функций $y = \frac{1}{3}x + 2$ и $y = \frac{1}{3}x - 2$?

591 1) На складе было 400 т угля. Ежедневно на склад привозили еще по 50 т. Выразить формулой зависимость количества угля p (в тоннах) от времени t (в днях).

2) На складе было 400 т угля. Ежедневно из этого запаса расходовалось по 50 т. Выразить формулой зависимость количества угля p (в тоннах), находящегося на складе, от времени t (в днях).

592 Турист проехал от города 10 км на автобусе, а затем продолжал движение в том же направлении пешком со скоростью 5 км/ч. На каком расстоянии y турист был от города через x часов ходьбы?

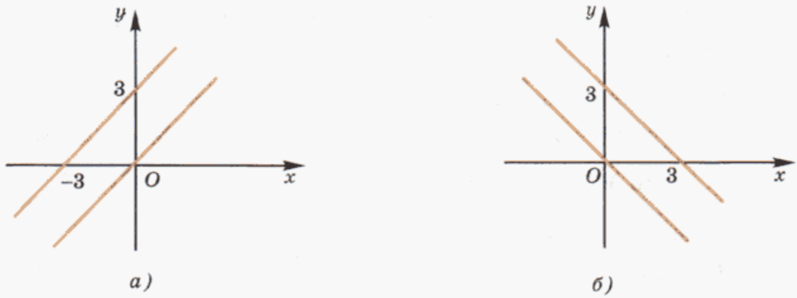


Рис. 21

593 На рисунке 21, *а*, *б* изображены пары параллельных прямых. Записать формулой функцию, график которой — прямая, проходящая через:

1) начало координат на рисунке 21, *а*;

2) точку с координатами (0; 3) на рисунке 21, *б*.

594 Найти значение b, если известно, что график функции $y=-3x+b$ проходит через точку:

1) $M(-2;\ 4)$; 2) $N(5;\ 2)$.

595 Найти значение k, если известно, что график функции $y=kx+2$ проходит через точку:

1) $P(-7;\ -12)$; 2) $C(3;\ -7)$.

596 Определить координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y=13-x$ и вычислить площадь прямоугольного треугольника, ограниченного этой прямой и координатными осями.

597 Найти координаты точки пересечения графиков функций:

1) $y=-2x+7$ и $y=0{,}5x-5{,}5$;

2) $y=4x$ и $y=-x+10$;

3) $y=1-2x$ и $y=x-5$.

598 Найти значения k и b, если известно, что график функции $y=kx+b$ проходит через точки (2; 10) и (−7; −10).

599 Прямые $y=0$, $y=3$, $x=0$, $x=2$ образуют прямоугольник. Принадлежит ли точка $\left(\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right)$ диагонали этого прямоугольника?

Упражнения к главе VI

600 1) Построить треугольник ABC по координатам его вершин

$$A(-3;\ 0),\ B(4;\ 5),\ C(0;\ -4).$$

Найти координаты точки пересечения стороны AB с осью Oy.
2) Построить треугольник DCE по координатам его вершин

$$D(-4;\ 0),\ C(0;\ -2),\ E(5;\ 3).$$

Найти координаты точки пересечения стороны CE с осью Ox.

601 Функция $y = y(x)$ задана графиком (рис. 22). Пользуясь этим графиком, найти:
1) $y(-2)$, $y(1)$, $y(3)$, $y(0)$;
2) значение x, при котором функция принимает значение, равное -1; 0; 3;
3) координаты точек пересечения графика с осями координат;
4) целые значения x, при которых функция положительна;
5) целые значения x, при которых функция отрицательна.

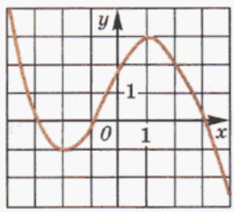


Рис. 22

602 Функция $y = kx$ задана таблицей. Найти коэффициент k, заполнить таблицу:

1)

x	-5	$-\frac{1}{2}$	0	3		
y				-12	16	$\frac{1}{4}$

2)

x	-8	-4	2	1			
y				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0

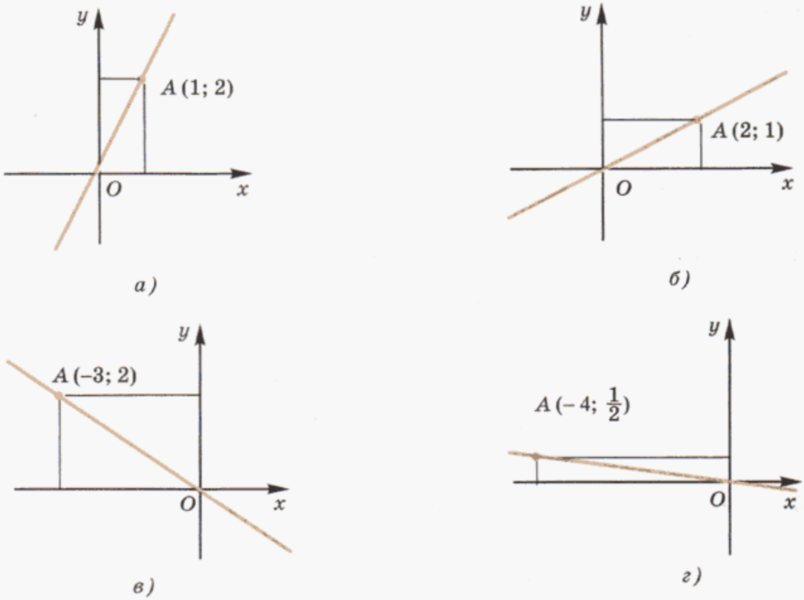


Рис. 23

603 1) Велосипедист движется со скоростью 10 км/ч. Записать формулу зависимости его пути s от времени движения t (в часах). Построить график этой зависимости на первых пяти километрах пути.

2) Плотность железа равна 7,8 г/см^3. Записать формулу зависимости массы m железа от его объема v (в см^3). Построить график этой зависимости.

604 Найти значение k, если график функции $y = kx$ проходит через точку:

1) $B(-30; 3)$; 2) $A(4; -80)$.

605 Записать формулой функцию, график которой — прямая, изображенная:

1) на рисунке 23, *а*; 2) на рисунке 23, *б*;
3) на рисунке 23, *в*; 4) на рисунке 23, *г*.

606 При начале нагревания вода в кипятильнике имела температуру 6 °C. При нагревании температура воды повышалась каждую минуту на 2 °C. Найти формулу, выражающую изменение температуры T воды в зависимости от времени t (в минутах) ее нагревания. Будет ли функция $T(t)$ линейной? Чему равны $T(20)$, $T(31)$? Через сколько минут после начала нагревания вода закипит?

607 Найти координаты точек пересечения графика с осями координат:

1) $y=-1{,}5x+3$; 2) $y=-2x+4$;
3) $y=1{,}5x-6$; 4) $y=0{,}8x-0{,}6$;
5) $y=-\frac{1}{4}x+2$; 6) $y=\frac{2}{3}x-5$.

Построить графики этих функций.

608 Построить график функции $y=kx+1$, если известно, что ему принадлежит точка:

1) $M(1;\ 3)$; 2) $M(2;\ -7)$.

Проверь себя!

1 Дана функция $y=5x-1$. Найти $y(0{,}2)$ и значение x, при котором значение функции равно 89.
Принадлежит ли точка $A(-11;\ 54)$ графику этой функции?

2 Построить график функции

$$y=2x;\quad y=x-2;\quad y=3;\quad y=3-4x.$$

609 Построить график функции $y=-3x+b$, если известно, что этот график проходит через точку:

1) $A(-2;\ 4)$; 2) $B(5;\ 2)$.

610 В одной системе координат построить графики функций:

1) $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=\frac{1}{2}x$; $y=-\frac{1}{2}x-3$;
2) $y=\frac{1}{4}x+1$; $y=-\frac{1}{4}x+1$; $y=-\frac{1}{4}x-1$;
3) $y=0$; $y=2$; $y=-1$.

611 Заполнить пропуски в тексте:

1) прямая $y=2x$ проходит через точку (...; 4);
2) прямая $y=3x-4$ отсекает на оси ординат от ее начала отрезок длиной ... ;
3) прямая $y=2x-6$ отсекает на оси абсцисс от ее начала отрезок длиной ... ;
4) среди прямых $y=x-7$, $y=5x+2$, $y=3x-7$, $y=x+4$, $y=-x-7$ параллельными являются ... .

612 Используя графики зависимостей массы m_1 воды и массы m_2 льда от объема V (рис. 24, *а*), ответить на вопросы:

1) Является ли функция $m_1(V)$ линейной?
2) Какой объем занимают лед и вода, если они имеют одинаковую массу, равную 500 г?

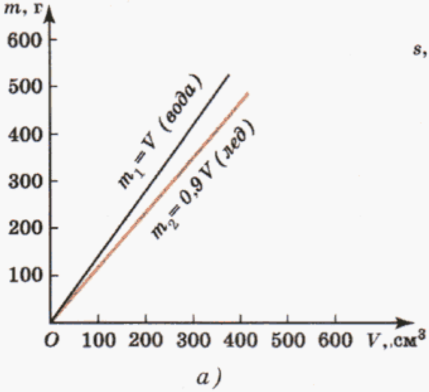


Рис. 24

613 На рисунке 24, *б* изображен график движения пешехода на прямолинейном участке пути из пункта B в пункт E. Используя этот график, ответить на вопросы:

1) На каком расстоянии от пункта E находится пункт B?
2) С какой средней скоростью двигался пешеход?
3) На каком расстоянии от пункта B он сделал привал?
4) Сколько времени длился привал?
5) Через какое время после привала пешеход прибыл в пункт E?

Записать формулой функцию $s(t)$ на участках графика BC, DE, CD.

614 Автомобили A_1 и A_2 выезжают одновременно навстречу друг другу. По заданным графикам движения автомобилей (рис. 25) найти:

1) время от начала движения автомобилей до их встречи;
2) путь, пройденный каждым из автомобилей до их встречи;
3) скорость движения каждого автомобиля.

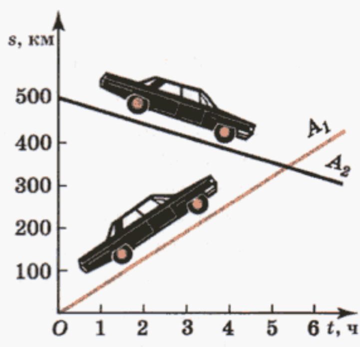


Рис. 25

VII
глава

Системы двух уравнений с двумя неизвестными

§ 33 Уравнения первой степени с двумя неизвестными. Системы уравнений

Задача 1 Проволока длиной 41 см разрезана на куски длиной по 13 см и 5 см. Сколько получилось кусков каждого вида?

▶ Введем обозначения:
x — число кусков по 13 см,
y — число кусков по 5 см.
По условию задачи выполняется равенство

$$13x + 5y = 41, \qquad (1)$$

в котором x и y — неизвестные целые неотрицательные числа. Из этого уравнения выразим x через y, получим $x = 3\frac{2}{13} - \frac{5}{13}y$.

Так как из числа $3\frac{2}{13}$ вычитается целое неотрицательное число, то x не может быть больше, чем $3\frac{2}{13}$, а так как x — целое неотрицательное число, то оно может быть только одним из чисел 0, 1, 2, 3. Теперь из уравнения (1) выразим y через x, получим $y = \frac{41-13x}{5}$.

Вычисляя по этой формуле значения y при $x = 0$, 1, 2, 3, замечаем, что только при $x = 2$ соответствующее значение y будет целым числом (равным 3).

Ответ 2 куска длиной 13 см и 3 куска длиной 5 см. ◁

Помимо найденных целочисленных значений x и y в задаче 1 уравнению (1) удовлетворяет не одна пара чисел. Например, пары $x_1 = 1$, $y_1 = 5\frac{3}{5}$ и $x_2 = -\frac{2}{13}$, $y_2 = 8\frac{3}{5}$ также обращают уравнение (1) в верное равенство.

Уравнение (1) является примером уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y называется уравнение вида

$$ax + by = c, \qquad (2)$$

в котором a, b, c — заданные числа, причем хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю, т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$.

В уравнении (2) числа a и b называют *коэффициентами* при неизвестных x и y соответственно, а число c — *свободным* членом.

При решении задачи 1 была найдена пара чисел $x = 2$, $y = 3$, при которых уравнение $13x + 5y = 41$ обращается в верное числовое равенство $13 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 41$. Эта пара чисел называется *решением* данного *уравнения*. Часто решение уравнения с двумя неизвестными записывается в виде пары чисел в круглых скобках. Например, вместо того, чтобы писать $x = 2$, $y = 3$, пишут $(2; 3)$. Важен порядок расположения чисел в скобках: на первом месте указывается значение x, а на втором — значение y. Поэтому записанные таким образом пары чисел называют *упорядоченными*.

Решением уравнения с двумя неизвестными x и y называется упорядоченная пара чисел $(x; y)$, при подстановке которых в это уравнение получается верное числовое равенство.

Задача 2 Записать все решения уравнения $3x - 4y = 12$.

▶ Если равенство $3x - 4y = 12$ является верным, то верными являются равенства $4y = 3x - 12$ и $y = \frac{3x-12}{4}$, а поэтому верно равенство $3x - 4 \cdot \frac{3x-12}{4} = 12$. Пары чисел $\left(x; \frac{3x-12}{4}\right)$, где x может принимать любое значение, являются решениями уравнения $3x - 4y = 12$.

Ответ $\left(x; \frac{3x-12}{4}\right)$, где x — любое число. ◁

При решении уравнения в задаче 2 найдены все решения — это пары чисел $\left(x; \frac{3x-12}{4}\right)$, где x — любое число. Их бесконечно много: задавая различные значения x, получаем соответствующие им значения y. Например, если $x = 0$, то $y = -3$, если $x = -1$, то $y = -3{,}75$.

Решениями уравнения $ax + by = c$, в случае когда $b \neq 0$, являются пары $\left(x; \frac{c-ax}{b}\right)$, где x — любое число.

Решениями уравнения $ax + 0 \cdot y = c$ с двумя неизвестными x и y, где $a \neq 0$, являются пары чисел $\left(\frac{c}{a}; y\right)$, где y — любое число.

Задача 3 Ученик задумал два числа и сказал, что сумма этих чисел равна 10, а их разность равна 4. Можно ли по этим данным узнать, какие числа задумал ученик?

▶ Обозначим первое искомое число буквой x, второе — буквой y.

По условию задачи

$$x + y = 10, \quad (1)$$
$$x - y = 4. \quad (2)$$

Если оба равенства (1) и (2) верные, то их можно сложить (т. е. сложить левые и правые части равенств).

Получим также верное равенство

$$(x + y) + (x - y) = 10 + 4,$$

откуда $2x = 14$, $x = 7$.

Теперь вычтем из равенства (1) равенство (2).

Получим $2y = 6$, $y = 3$.

Ответ Можно: 7 и 3. ◁

Так как в этих уравнениях неизвестные числа одни и те же, то эти уравнения рассматривают *совместно* и говорят, что они образуют *систему двух уравнений*, которую записывают так:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 4. \end{cases} \quad (3)$$

Фигурная скобка, стоящая слева, показывает, что нужно найти такую пару чисел $(x; y)$, которая обращает каждое уравнение в верное равенство. Система уравнений (3) — пример *системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.*

Рассмотрим еще один пример системы уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)=3x+2y, \\ 5x+3y=0. \end{cases} \tag{4}$$

Можно проверить, что два числа $x=3$ и $y=-5$ обращают каждое из уравнений системы (4) в верное равенство:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(3-5)=3\cdot 3+2\cdot(-5), \\ 5\cdot 3+3\cdot(-5)=0. \end{cases}$$

Пару чисел (3; –5) называют решением системы (4).

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными называют такую *пару чисел* x и y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Решить систему уравнений — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

В общем виде систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными записывают так:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, а x и y — неизвестные.

Например, в системе (3) $a_1=1$, $b_1=1$, $c_1=10$, $a_2=1$, $b_2=-1$, $c_2=4$.

Упражнения

615 Дано линейное уравнение с двумя неизвестными x и y. Выразить сначала x через y, а затем y через x:

1) $x+2y=5$; 2) $3x-y=-2$;
3) $5x-3y=6$; 4) $2x+7y=3$.

616 Записать все решения уравнения:

1) $3x+4y=8$; 2) $-x+3y=2$;

3) $1{,}5x-0{,}5y=3{,}5$; 4) $2x-3y=\frac{2}{3}$.

617 Найти все пары $(x;\, y)$ натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:

1) $5x+6y=28$; 2) $13x+4y=55$;

3) $3x+2y=13$; 4) $5x+7y=59$.

618 (Устно.) Проверить, что числа $x=4$, $y=3$ являются решением системы $\begin{cases} 2{,}5x-3y=1, \\ 5x-6y=2. \end{cases}$

619 Дана система уравнений $\begin{cases} 4x+3y=6, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

Из следующих пар чисел найти ту, которая является решением данной системы:

1) $x=0$, $y=2$; 2) $x=3$, $y=-2$.

620 Дана система уравнений $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=-1, \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=5. \end{cases}$

Из следующих пар чисел найти ту, которая является решением данной системы:

1) $x=10$, $y=0$; 2) $x=6$, $y=-6$.

621 Найти все пары $(x;\, y)$ натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:

1) $15y-8x=76$; 2) $9y-2x=20$;

3) $5y-3x=26$; 4) $4y-3x=20$.

622 Дана система уравнений $\begin{cases} x-3y=c_1, \\ 2x+4y=c_2. \end{cases}$

Известно, что пара чисел $x=5$, $y=2$ является ее решением. Найти c_1 и c_2.

623 Дана система уравнений $\begin{cases} ax-3y=11, \\ 11x+by=29. \end{cases}$

Известно, что пара чисел $x=1$, $y=-2$ является ее решением. Найти a и b.

624 Можно ли загрузить автомашину контейнерами грузоподъемностью 0,8 т и 0,9 т так, чтобы полностью использовать грузоподъемность автомашины, равную 10 т?

625 Детали упакованы в коробки двух видов: по 5 штук и по 8 штук. Всего упаковано 69 деталей. Сколько понадобилось коробок каждого вида?

§ 34 Способ подстановки

Задача 1 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4. \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что x и y — это такие числа, при которых оба равенства системы (1) являются верными, т. е. $(x; y)$ — решение системы (1). Перенесем $2x$ из левой части верного равенства $2x+y=4$ в правую часть; получим также верное равенство:

$$y=4-2x. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим первое уравнение системы (1):

$$x+2y=5. \quad (3)$$

Напомним, что по предположению x и y — такие числа, что равенство (3) является верным. Заменим в этом равенстве число y равным ему числом $4-2x$, т. е. подставим вместо y его значение $4-2x$. Получим $x+2(4-2x)=5$. Из этого равенства находим $x+8-4x=5$, $-3x=-3$, $x=1$. Подставляя $x=1$ в равенство (2), получаем $y=4-2\cdot1=2$.

Подведем итог проделанных рассуждений. Предположив, что система (1) имеет решение, мы получили, что $x=1$, $y=2$ и других решений нет.

Осталось убедиться, что эта пара чисел на самом деле является решением системы (1), т. е. осталось показать, что при $x=1$, $y=2$ оба уравнения системы становятся верными равенствами. Подставим найденные значения x и y в оба уравнения системы (1) и выполним вычисления:

$$\begin{cases} 1+2\cdot2=5, \\ 2\cdot1+2=4. \end{cases}$$

Оба равенства верные.

Система (1) имеет единственное решение: $x=1$, $y=2$. ◁

Рассмотренный способ решения системы (1) называется *способом подстановки*. Он заключается в следующем:

1) из одного уравнения системы (все равно из какого) выразить одно неизвестное через другое, например y через x;

2) полученное выражение подставить в другое уравнение системы, получится одно уравнение с одним неизвестным x;

3) решив это уравнение, найти значение x;

4) подставив найденное значение x в выражение для y, найти значение y.

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x-2y=16, \\ 5x+3y=-5. \end{cases}$

▶ 1) Из первого уравнения находим $-2y=16-3x$, $y=\frac{16-3x}{-2}$, т. е. $y=-8+\frac{3}{2}x$.

2) Подставляем $y=-8+\frac{3}{2}x$ во второе уравнение системы:

$$5x+3\left(-8+\frac{3}{2}x\right)=-5.$$

3) Решаем это уравнение:

$$5x-24+\frac{9}{2}x=-5,\ \frac{19}{2}x=19,\ x=2.$$

4) Подставляя $x=2$ в равенство $y=-8+\frac{3}{2}x$, находим: $y=-8+\frac{3}{2}\cdot2=-5$.

Ответ $x=2$, $y=-5$. ◁

Задача 3 Решить систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=2, \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=-3. \end{cases}$

Упростим уравнения системы:

$$\begin{cases} x+2y=12, \\ 2x-3y=-18. \end{cases} \qquad (4)$$

1) Из первого уравнения системы (4) находим:

$$x=12-2y.$$

2) Подставляем $x=12-2y$ во второе уравнение системы (4):

$$2(12-2y)-3y=-18.$$

3) Решаем это уравнение:

$$24-4y-3y=-18, \ \ 7y=42, \ \ y=6.$$

4) Подставляя $y=6$ в равенство $x=12-2y$, находим:

$$x=12-2\cdot 6=0.$$

Ответ (0; 6). ◁

Упражнения

626 В каждом из уравнений выразить одно неизвестное через другое:

1) $x+y=7$; 2) $x-y=10$; 3) $2x-y=5$;

4) $x+3y=11$; 5) $2x+3y=7$; 6) $5y-3x=3$.

Решить систему уравнений **(627—632)**.

627 1) $\begin{cases} x=2+y, \\ 3x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y=4, \\ x=3+2y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=11-2x, \\ 5x-4y=8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-2y=11, \\ y=2x-5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y=2-4x, \\ 8x=5-3y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-5y=8, \\ x=-y. \end{cases}$

628 1) $\begin{cases} x+5y=7, \\ 3x-2y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y=17, \\ x-2y=-13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+12y=11, \\ 5x-3y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=5, \\ 5x+2y=23; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x-2y=0, \\ 3x-2y=5; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x=5y, \\ -3x+8y=-13. \end{cases}$

629 1) $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5, \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{3}=0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{8}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{5x}{2}+\frac{y}{5}=-4, \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}=-3, \\ \frac{5x}{6}+\frac{7y}{8}=6. \end{cases}$

630 1) $\begin{cases} 3(x-y)+5x=2(3x-2), \\ 4x-2(x+y)=4-3y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2-5(0{,}2y-2x)=3(3x+2)+2y, \\ 4(x-2y)-(2x+y)=2-2(2x+y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10+5(x-5y)=6(x-4y), \\ 2x+3(y+5)=-5-2(y-2x); \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3(y-2x)-(5y+2)=5(1-x), \\ 7-6(x+y)=2(3-2x)+y. \end{cases}$

631 1) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8, \\ \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x+y}{9}-\frac{x-y}{3}=2, \\ \frac{2x-y}{6}-\frac{3x+2y}{3}=-20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{7x-2y}{2}+2x=6, \\ \frac{5y-8x}{3}-y=-2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}(2x-y)-1=y-2, \\ \frac{1}{4}(3x-7)=\frac{1}{5}(2y-3)+1. \end{cases}$

632 1) $\begin{cases} 2x+y-8=0, \\ 3x+4y-7=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-4y-2=0, \\ 5y-x-6=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{7y-x}{3}=-2, \\ \frac{x+14y}{3}=4{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{7x-y}{2}=-3, \\ \frac{-8x+5y}{2}=3{,}5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{y-3x}{2}=1-\frac{7x+3y}{5}, \\ \frac{x+5y}{3}=1+\frac{x+3y}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{2x-5y}{7}-1=\frac{2x+2y}{3}, \\ \frac{x-3y}{4}+2=\frac{7x-8y}{5}. \end{cases}$

§ 35 Способ сложения

Задача 1 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x-2y=27, \\ 5x+2y=33. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ Предположим, что x и y — это такие числа, при которых оба равенства системы (1) верны, т. е. $(x; y)$ — решение системы (1).
Сложим эти равенства. Тогда снова получим верное равенство, так как к равным числам прибавляются равные числа:

$$+\begin{array}{r} 7x-2y=27 \\ 5x+2y=33 \\ \hline 12x=60, \end{array}$$

откуда $x=5$.
Теперь подставим $x=5$ в одно из уравнений системы (1), например в первое: $7\cdot5-2y=27$. Из этого равенства находим $35-2y=27$, $-2y=-8$, $y=4$.
Итак, если система (1) имеет решение, то этим решением может быть только пара чисел: $x=5$, $y=4$.
Теперь нужно убедиться в том, что $x=5$, $y=4$ в самом деле являются решением системы (1):

$$\begin{cases} 7\cdot5-2\cdot4=27, \\ 5\cdot5+2\cdot4=33. \end{cases}$$

Оба равенства верные.

Ответ Система (1) имеет единственное решение: $x=5$, $y=4$. ◁

Рассмотренный способ решения системы уравнений называется *способом алгебраического сложения*, так как для исключения одного из неизвестных выполняется сложение или вычитание левых и правых частей уравнений системы.

Задача 2 Решить систему уравнений $\begin{cases} 5x+3y=29, \\ 5x-4y=8. \end{cases}$

▶ Вычтем из первого уравнения второе:

$$-\begin{array}{r} 5x+3y=29 \\ 5x-4y=8 \\ \hline 7y=21, \end{array}$$

откуда $y=3$. Подставим $y=3$ в первое уравнение системы: $5x+3\cdot3=29$. Решая это уравнение, находим $5x+9=29$, $5x=20$, $x=4$.

Ответ $x=4$, $y=3$. ◁

Из рассмотренных примеров видно, что способ алгебраического сложения оказывается удобным для решения системы в том случае, когда у обоих линейных уравнений коэффициенты при каком-нибудь неизвестном одинаковы или отличаются только знаком. Если это не так, то можно уравнять модули коэффициентов при каком-нибудь одном из неизвестных, умножая левую и правую части каждого уравнения на подходящие числа.

Задача 3 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x+2y=10, \\ 5x+3y=12. \end{cases}$

▶ Обе части первого уравнения системы умножим на 3, а второго — на 2 и вычтем из второго уравнения полученной системы первое:

$$\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 5x+3y=12 \end{cases}\left|\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}\right. \qquad -\begin{array}{r} 10x+6y=24 \\ 9x+6y=30 \\ \hline x=-6 \end{array}$$

Подставив найденное значение $x=-6$ в первое уравнение данной системы, получим $-18+2y=10$, $2y=28$, $y=14$.

Ответ $x=-6$, $y=14$. ◁

Итак, для решения системы линейных уравнений способом алгебраического сложения нужно:
1) уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных;
2) складывая или вычитая полученные уравнения, найти одно неизвестное;
3) подставляя найденное значение в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

Задача 4 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ x+2y=-2. \end{cases} \qquad (2)$$

1) Оставляя первое уравнение без изменений, умножим второе уравнение на 4:

$$\begin{cases} 4x-3y=14, \\ 4x+8y=-8. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Вычитая из второго уравнения системы (3) первое уравнение, находим $11y=-22$, откуда $y=-2$.
3) Подставляя $y=-2$ во второе уравнение системы (2), находим $x+2\cdot(-2)=-2$, откуда $x=2$.

Ответ $x=2,\ y=-2$. ◁

Упражнения

Способом алгебраического сложения решить систему уравнений **(633—640)**.

633 1) $\begin{cases} 2x+y=11, \\ 3x-y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-2y=6, \\ 7x+2y=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x+7y=40, \\ -4x+9y=24; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+3y=17, \\ 2y-x=13. \end{cases}$

634 1) $\begin{cases} 4x+3y=-15, \\ 5x+3y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-5y=1, \\ 4x-5y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+5y=3, \\ x+4y=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y-3x=6, \\ y-3x=9. \end{cases}$

635 1) $\begin{cases} 4x+3y=-4, \\ 6x+5y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-5y=-22, \\ 3x+2y=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x=9y, \\ 5x+3y=66; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+6y=0, \\ 3x+4y=4. \end{cases}$

636 1) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ \frac{x}{4}+\frac{2y}{3}=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=2, \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+\dfrac{x-y}{4}=11, \\ 3y-\dfrac{x+y}{3}=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-\dfrac{x-y}{5}=11, \\ 2y-\dfrac{x+y}{3}=11. \end{cases}$

637 1) $\begin{cases} x+5y-7=0, \\ x-3y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-3y-4=0, \\ 5x+3y+1=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 36x+33y+3=0, \\ 12x-13y+25=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y+17=0. \end{cases}$

638 1) $\begin{cases} 5(x+1)=2y+6, \\ 3(x-1)=3y-6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-3y=2(x-2), \\ 1-3x=3y-2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x-2)-3(y+3)=1, \\ 3(x+2)-2(x-y)=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7(2x+y)-5(3x+y)=6, \\ 3(x+2y)-2(x+3y)=-6. \end{cases}$

639 1) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-2}{3}=2, \\ \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{y+1}{3}=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2y}{3}=\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{3x}{2}+2y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2{,}5x-2y}{2}-2x=3, \\ \dfrac{3x-2y}{3}+4=3x. \end{cases}$

640 1) $\begin{cases} (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8), \\ (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1); \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1), \\ (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4); \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+4)(6-y)=(x+2)(9-y), \\ (2x-1)(12-5y)=2(5x-1)(2-y); \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x+7)(3-y)=(x+4)(4-y), \\ (x-2)(12-y)=(x-1)(9-y). \end{cases}$

§ 36 Графический способ решения систем уравнений

Геометрической иллюстрацией уравнения с двумя неизвестными служит его график на координатной плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$x - y = -1. \qquad (1)$$

Выразим из этого уравнения y через x:

$$y = x + 1. \qquad (2)$$

Уравнение (2) можно рассматривать как формулу, задающую функцию y от x. Поэтому графиком уравнения (2) является прямая. Так как уравнения (1) и (2) выражают одну и ту же зависимость между x и y, то графиком уравнения (1) является эта же прямая.

Для построения прямой достаточно найти какие-нибудь две точки. Например, из уравнения (2) находим: если $x = 0$, то $y = 1$; если $x = -1$, то $y = 0$. Таким образом, графиком уравнения (1) является прямая, проходящая через точки (0; 1) и (–1; 0) (рис. 26, *а*).

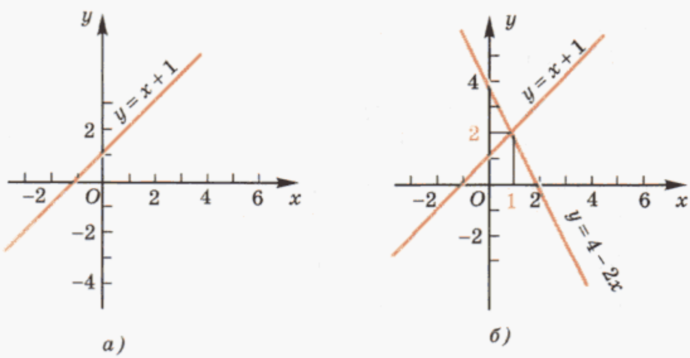


Рис. ***26***

Можно показать, что графиком любого уравнения вида $ax+by=c$ является прямая, если хотя бы одно из чисел a или b не равно нулю.

В той же координатной плоскости, на которой построен график уравнения (1), построим график уравнения

$$2x+y=4. \qquad (3)$$

Из этого уравнения находим: если $x=0$, то $y=4$; если $y=0$, то $x=2$. Следовательно, графиком уравнения (3) является прямая, проходящая через точки (0; 4) и (2; 0) (рис. 26, *б*).

Найдем координаты точки пересечения построенных прямых, не используя графики. Так как координаты $(x;\ y)$ этой точки удовлетворяют уравнениям (1) и (3), т. е. обращают эти уравнения в верные числовые равенства, то пара чисел $(x;\ y)$ должна быть решением системы

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=1$, $y=2$.

Итак, прямые $x-y=-1$ и $2x+y=4$ пересекаются в точке (1; 2).

Координаты точки пересечения прямых $x-y=-1$ и $2x+y=4$ можно было найти с помощью графика (рис. 26, *б*). В этом случае говорят, что система

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

решена графически. Для этого нужно:

1) построить графики каждого из уравнений системы;

2) найти координаты точки пересечения построенных прямых (если они пересекаются).

Однако при графическом способе решения системы уравнений обычно получается приближенное решение. Решение системы уравнений способом подстановки или способом сложения дает точные значения координат точки пересечения.

Задача 1 Найти координаты точки пересечения прямых

$$7x-6y=0 \quad \text{и} \quad 21x+2y=10.$$

▶ Решим систему $\begin{cases} 7x-6y=0, \\ 21x+2y=10. \end{cases} \Big| 3$

$$+\begin{array}{r} 7x-6y=0 \\ 63x+6y=30 \\ \hline 70x=30, \; x=\frac{3}{7}. \end{array}$$

$$7\cdot\frac{3}{7}-6y=0, \; y=\frac{1}{2}.$$

Ответ $\left(\frac{3}{7}; \frac{1}{2}\right)$. ◁

На плоскости возможны три случая взаимного расположения двух прямых — графиков уравнений системы.
1) Прямые пересекаются, т. е. имеют одну общую точку. Тогда система уравнений имеет единственное решение (рис. 26, *б*).
2) Прямые параллельны, т. е. не имеют общих точек. Тогда система уравнений не имеет решений.
3) Прямые совпадают. Тогда система уравнений имеет бесконечно много решений.

Приведем примеры к двум последним случаям.

Задача 2 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y=6, \\ 2x+4y=8. \end{cases} \qquad (4)$$

▶ Умножим первое уравнение системы (4) на 2:

$$\begin{cases} 2x+4y=12, \\ 2x+4y=8. \end{cases}$$

Левые части уравнений этой системы равны при любых значениях x и y, а правые части не равны. Следовательно, нет таких значений x и y, которые обращают оба уравнения системы в верные равенства.

Ответ Решений нет. ◁

Геометрически это означает, что графики уравнений системы (4) — параллельные прямые (рис. 27, *а*).

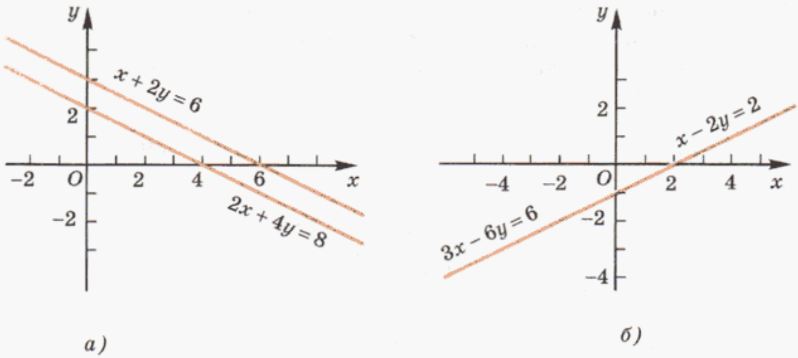


Рис. 27

Задача 3 Показать, что прямые

$$x-2y=2 \quad \text{и} \quad 3x-6y=6$$

совпадают.

▶ Так как уравнение $3x-6y=6$ получается из уравнения $x-2y=2$ умножением его обеих частей на 3, то эти уравнения выражают одну и ту же зависимость между x и y. Следовательно, графиками этих уравнений является одна и та же прямая (рис. 27, *б*). ◁

Это означает, что система

$$\begin{cases} x-2y=2, \\ 3x-6y=6 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений: координаты любой точки прямой $x-2y=2$ являются решением данной системы.

Упражнения

641 Найти координаты точек пересечения прямых с осями координат:

1) $x-y+5=0$; 2) $3x-y+3=0$;
3) $2x+y=1$; 4) $5x+2y=12$.

642 Построить график уравнения:

1) $y=3x+5$; 2) $3x+y=1$;
3) $2y+7x=-4$; 4) $4y-7x-12=0$;
5) $2y-6=0$; 6) $5x+10=0$.

643 Построить графики уравнений $y=2x+1$ и $x+y=1$. Найти координаты точки их пересечения. Проверить, обращают ли координаты точки пересечения графиков каждое из уравнений в верное равенство.

Решить графически систему уравнений **(644—646)**.

644 1) $\begin{cases} y=4x, \\ y-x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-3x, \\ y-x=-4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=2x, \\ x-y=-3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=3x, \\ 4x-y=3. \end{cases}$

645 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ 2x-y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

646 1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=2, \\ x+2y=-6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ y-x=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x+3y=6, \\ 2x+y=4. \end{cases}$

647 Показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} y=3x, \\ 6x-2y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ 2x=1-2y. \end{cases}$

648 Показать, что система уравнений имеет бесконечно много решений:

1) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ 2x-2y=6. \end{cases}$

649 Показать графически, что система уравнений имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x-y=13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-2y=1. \end{cases}$

650 Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются координаты точки пересечения графика уравнения $4x+y=7$ с осью Ox.

651 Привести пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, решением которой являются координаты точки пересечения графика уравнения $5x-7y=1$ с осью Ox.

652 Составить такое линейное уравнение с двумя неизвестными, чтобы оно вместе с уравнением $-x-y=4$ образовало систему:

1) имеющую единственное решение;
2) имеющую бесконечно много решений;
3) не имеющую решений.

§ 37 Решение задач с помощью систем уравнений

Задача 1 Расстояние между двумя пристанями на реке равно 60 км. Это расстояние катер проходит по течению реки за 2 ч, а против течения за 3 ч. Найти собственную скорость движения катера и скорость реки.

▶ 1) Введем обозначения:
x км/ч — скорость движения катера в стоячей воде;
y км/ч — скорость течения реки.
Тогда $(x+y)$ км/ч — скорость катера при движении по течению реки;
$2(x+y)$ км — путь, который прошел катер по течению реки за 2 ч.
По условию задачи это расстояние равно 60 км:

$$2(x+y)=60.$$

Далее, $(x-y)$ км/ч — скорость катера при движении против течения реки и $3(x-y)$ км — путь, который прошел катер против течения реки за 3 ч. По условию это расстояние также равно 60 км:

$$3(x-y)=60.$$

Так как в полученных уравнениях x и y обозначают одни и те же числа, то эти уравнения образуют систему

$$\begin{cases}2(x+y)=60,\\3(x-y)=60.\end{cases} \qquad (1)$$

2) Решим систему (1). Упростим каждое из уравнений системы (1), поделив первое уравнение на 2, а второе — на 3:

$$\begin{cases} x+y=30, \\ x-y=20. \end{cases} \qquad (2)$$

Складывая эти уравнения, находим $2x=50$, $x=25$. Вычитая из первого уравнения системы (2) второе уравнение, получаем

$$2y=10, \quad y=5.$$

3) Возвращаясь к условию задачи и использованным обозначениям, запишем ответ.

Ответ Скорость движения катера 25 км/ч, скорость течения реки 5 км/ч. ◁

Задача 2 Найти два числа, если удвоенная сумма этих чисел на 5 больше их разности, а утроенная сумма этих чисел на 8 больше их разности.

▶ 1) Составление системы уравнений.
Пусть x, y — искомые числа. Тогда по условию задачи имеем:

$$\begin{cases} 2(x+y)=(x-y)+5, \\ 3(x+y)=(x-y)+8. \end{cases} \qquad (3)$$

2) Решение системы.
Упростим уравнения системы (3):

$$\begin{cases} 2x+2y=x-y+5, \\ 3x+3y=x-y+8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y=5, \\ 2x+4y=8. \end{cases} \qquad (4)$$

Разделим обе части второго уравнения на 2 и вычтем полученное уравнение из первого:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} x+3y=5 \\ \underline{x+2y=4} \end{array} \\ y=1. \end{array}$$

Подставляя $y=1$ в первое уравнение системы (4), находим $x+3\cdot1=5$, $x=2$.

3) Так как x и y обозначают искомые числа, то можем записать ответ.

Ответ Искомые числа 2 и 1. ◁

Обычно задачу с помощью системы уравнений решают по следующей схеме:
1) вводят обозначения неизвестных и составляют систему уравнений;
2) решают систему уравнений;
3) возвращаясь к условию задачи и использованным обозначениям, записывают ответ.

Иногда после решения системы приходится провести еще некоторые рассуждения или вычисления. Приведем пример такой задачи.

Задача 3 Два карандаша и три тетради стоят 35 р., а три карандаша и две тетради стоят 40 р. Сколько стоят пять карандашей и шесть тетрадей?

▶ 1) Пусть x рублей — цена карандаша, y рублей — цена тетради.
По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} 2x+3y=35, \\ 3x+2y=40. \end{cases}$$

2) Вычтем из первого уравнения, умноженного на 3, второе, умноженное на 2:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 6x+9y=105 \\ 6x+4y=80 \end{array} \\ \hline 5y=25, \end{array}$$

откуда $y=5$. Подставляя $y=5$ в первое уравнение системы, находим $2x+3\cdot5=35$, $2x=20$, $x=10$.

3) Итак, $x=10$, $y=5$ — решение системы, т. е. карандаш стоит 10 р., тетрадь — 5 р., 5 карандашей и 6 тетрадей стоят

$$5\cdot10+6\cdot5=80 \text{ (р.)}.$$

Ответ 80 р. ◁

Упражнения

653 Ученик за 3 тетради и 2 карандаша уплатил 6 р. 60 к. Другой ученик за такие же 2 тетради и 2 карандаша уплатил 4 р. 60 к. Сколько стоила тетрадь и сколько стоил карандаш?

654 Из 14 м ткани можно сшить 4 мужских и 2 детских пальто. Сколько метров ткани необходимо для пошива одного мужского и одного детского пальто, если из 15 м той же ткани можно сшить 2 мужских и 6 детских пальто?

655 Две бригады собрали вместе 1456 ц ржи. Первая бригада собрала рожь с 46 га, а вторая бригада — с 35 га. Сколько центнеров собрала в среднем с 1 га каждая бригада в отдельности, если первая собрала с 1 га на 7 ц ржи больше, чем вторая?

656 На платформу были погружены дубовые и сосновые бревна, всего 300 бревен. Известно, что все дубовые бревна весили на 1 т меньше, чем все сосновые. Определить, сколько было дубовых и сосновых бревен отдельно, если каждое бревно из дуба весит 46 кг, а каждое сосновое бревно — 28 кг.

657 Двое рабочих изготовили вместе 1020 деталей. Первый рабочий работал 15 дней, а второй — 14 дней. Сколько деталей изготовлял каждый рабочий за один день, если первый рабочий за 3 дня изготовлял на 60 деталей больше, чем второй за 2 дня?

658 Два тракториста забороновали вместе 678 га пашни. Первый тракторист работал 8 дней, а второй — 11 дней. Сколько гектаров бороновал за один день каждый тракторист, если первый за 3 дня заборонoвал на 22 га меньше, чем второй за 4 дня?

659 Для 8 лошадей и 15 коров отпускали ежедневно 162 кг сена. Сколько сена ежедневно выдавали каждой лошади и каждой корове, если известно, что 5 лошадей получили сена на 3 кг больше, чем 7 коров?

660 Два мастера получили за работу 23400 р. Первый работал 15 дней, а второй — 14 дней. Сколько получал в день каждый из них, если известно, что первый мастер за 4 дня получил на 2200 р. больше, чем второй за 3 дня?

661 В двух баках содержалось 140 л воды. Когда из первого бака взяли 26 л воды, а из второго — 60 л, то в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке первоначально?

662 В одном бидоне на 5 л молока больше, чем в другом. Если из первого бидона перелить во второй 8 л молока, то во втором бидоне молока станет в 2 раза больше, чем останется в первом. Сколько литров молока в каждом бидоне?

663 Моторная лодка прошла путь по течению реки 12 км и обратно за 2,5 ч. В другой раз та же моторная лодка за 1 ч 20 мин прошла по течению реки 4 км, а против течения 8 км. Найти скорость моторной лодки в стоячей воде и скорость течения реки.

664 Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч поезда встретились. Если же первый поезд отправится на 4 ч 20 мин раньше второго, то встреча произойдет через 8 ч после отправления второго поезда. Сколько километров в час проходит каждый поезд?

665 Фермер собрал с двух участков 460 т клевера. На второй год на первом участке урожай увеличился на 15%, а на втором — на 10% и общий урожай клевера составил 516 т. Сколько тонн клевера было собрано с каждого участка в первый год?

666 В январе два цеха изготовили 1080 деталей. В феврале первый цех увеличил выпуск деталей на 15%, второй — на 12%, оба цеха изготовили 1224 детали. Сколько деталей изготовил в феврале каждый цех?

667 Сумма цифр двузначного числа равна 12. Число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, на 54 больше данного числа. Найти это число.

668 Сумма цифр двузначного числа равна 12, а разность числа единиц и числа десятков в этом числе в 12 раз меньше самого числа. Найти это число.

669 В три сосуда налита вода. Если половину воды из первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{3}$ часть воды, оказавшейся во втором сосуде, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{4}$ часть воды, оказавшейся в третьем сосуде, перелить в первый, то в каждом сосуде станет по 6 л. Сколько воды было в каждом сосуде до переливания?

670 Пристань A находится между пристанями B и C, причем пристань B находится ниже других по течению реки. Маршрут от A до B и от B до C теплоход проходит за 9 ч 20 мин, а маршрут от C до B и от B до A — за 9 ч. Скорость теплохода относительно воды равна 20 км/ч, а скорость течения реки равна 4 км/ч. Найти расстояние между пристанями A и C.

Упражнения к главе VII

Решить систему уравнений **(671—673)**.

671 1) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 6x-2y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+6y=4, \\ 2x-3y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+7y=2, \\ 5x+13y=12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+y=3, \\ 9x+2y=4. \end{cases}$

672 1) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=4, \\ 5(x+y)-7(x-y)=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=20, \\ 6(x-10y)-13(x-y)=52. \end{cases}$

673 1) $\begin{cases} 16x-27y=20, \\ 5x+18y=41{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 18x-21y=2, \\ 24x-15y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-4y)=x-y, \\ \frac{x}{2}+y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(x-y)=6(y+1), \\ \frac{x}{3}-1\frac{1}{3}=y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x-y}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x-y}{4}, \\ \frac{x-y}{2}=4{,}5+\frac{y-1}{3}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x+y}{5}-\frac{y-x}{2}=x+\frac{3}{20}, \\ \frac{x-y}{4}+\frac{x+y}{3}=y-7\frac{1}{24}. \end{cases}$

674 Показать, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 10x+5y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+8y=-1, \\ x+2\frac{2}{3}y=5. \end{cases}$

675 Показать, что система уравнений имеет бесконечно много решений:

1) $\begin{cases} x=5-y, \\ y=5-x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ y=\frac{13-2x}{3}. \end{cases}$

Проверь себя!

1 Проверить, является ли пара чисел $x=2$ и $y=1$ решением системы уравнений:

$$\begin{cases}2x-3y=1,\\5x+y=11.\end{cases}$$

2 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x+y=2,\\3x+4y=5;\end{cases} \qquad \begin{cases}3x+4y=-1,\\2x-5y=7.\end{cases}$$

3 Яблоки и груши упакованы в одинаковые ящики. Масса яблок в пяти ящиках и груш в трех ящиках вместе составляет 70 кг. В одном ящике груш и двух ящиках яблок содержится 26 кг. Сколько килограммов яблок и сколько килограммов груш содержится в одном ящике?

676 Подобрать такие значения a и c, чтобы система уравнений $\begin{cases}x+y=5,\\ax+3y=c\end{cases}$ имела: 1) единственное решение; 2) бесконечно много решений; 3) не имела решений.

677 1) В одни ящики положили по 10 кг яблок, в другие по 20 кг. Суммарная масса этих яблок составляет 110 кг. Сколько ящиков по 10 кг и сколько по 20 кг заполнено яблоками?
2) Проволока длиной 1 м 12 см разрезана на куски по 18 см и 24 см. Сколько кусков каждого вида получилось?

678 Отец старше дочери на 26 лет, а через 4 года будет старше ее в 3 раза. Сколько лет отцу и сколько дочери?

679 Турист выехал из города A и должен приехать в город B в назначенный срок. Если он будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает на 2 ч; если же он будет ехать со скоростью 50 км/ч, то приедет на час раньше срока. Определить расстояние между городами A и B и время, затраченное туристом на путь из города A в город B, если он прибыл в назначенный срок.

680 Для детской музыкальной школы решили приобрести 4 баяна и 3 аккордеона на сумму 132600 р. Спонсор оплатил 30% стоимости каждого аккордеона, и школе осталось заплатить 110100 р. Сколько денег заплатила школа за каждый баян и аккордеон?

681 Две бригады лесорубов заготовили в декабре 900 кубометров дров. В январе первая бригада заготовила на 15%, а вторая — на 12% больше, чем в декабре, и поэтому обе бригады вместе заготовили за это время 1020 кубометров дров. Сколько кубометров дров заготовила каждая бригада в январе?

682 Сад имеет форму прямоугольника. Если увеличить длину сада на 8 м, а ширину на 6 м, то площадь сада увеличится на 632 м^2. Если же длину сада уменьшить на 6 м, а ширину увеличить на 8 м, то площадь сада увеличится на 164 м^2. Определить длину и ширину сада.

683 Во всех строках некоторой страницы книги одинаковое число букв. Если на этой странице уменьшить число строк на 4, а число букв в строке на 5, то число букв на всей странице уменьшится на 360. Если же на странице увеличить число строк на 3, а число букв в строке на 2, то на странице поместится на 228 букв больше, чем было. Определить число строк и число букв в строке на этой странице книги.

684 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{2}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=35, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x}=27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=4, \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{15}{x-y}=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=3, \\ \dfrac{7}{x+y}-\dfrac{6}{x-y}=2. \end{cases}$

685 Антикварный магазин, купив две старинные вазы на общую сумму 36000 р., продал их, получив 25% прибыли. За сколько была продана каждая ваза, если наценка на первую вазу была 50%, а на вторую — 12,5%?

VIII
глава

Элементы комбинаторики

§ 38 Различные комбинации из трех элементов

В математике существует немало задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы, подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определенному правилу. Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся решением этих задач, называется *комбинаторикой.*

Нередко и в жизни возникают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнить и выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации. Например, при рассмотрении меню обеда в кафе человек мысленно составляет комбинации из различных первых, вторых и третьих блюд, после чего делает выбор согласно своему вкусу и совместимости продуктов.

Рассмотрим простейшие задачи, связанные с составлением различных комбинаций из трех элементов.

Задача 1 Три друга — Антон, Борис и Виктор — приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?

▶ По имеющимся двум билетам на матч могут пойти: 1) либо Антон и Борис; 2) либо Антон и Виктор; 3) либо Борис и Виктор.

Ответ 3 варианта. ◁

Задача 2 Три друга — Антон, Борис и Виктор — приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов (способов) занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты.

▶ Для удобства перечисления всех возможных вариантов рассаживания друзей на 1-е и 2-е места будем вместо полных имен мальчиков записывать лишь их первые буквы. При этом запись АБ будет означать, что на первом месте сидит Антон, а на втором — Борис. Способ составления комбинаций будет следующим: после записи каждой пары имен мальчиков, идущих на матч (по результатам решения задачи 1 таких пар 3), будем записывать новую пару, полученную перестановкой в ней букв (обозначающую результат пересаживания каждого мальчика со своего места на место друга):

$$АБ;\ БА;\ АВ;\ ВА;\ БВ;\ ВБ. \qquad (1)$$

Ответ 6 способов: АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ. ◁

Заметим, что пары мальчиков, составленные в задачах 1 и 2, существенно отличались друг от друга. В первой задаче нас не интересовал порядок рассаживания двух из трех мальчиков по местам, т. е. пары А и Б, Б и А считались одной и той же парой мальчиков, идущих на матч. Во второй же задаче пары АБ и БА были различными парами, так как нас интересовал и порядок рассаживания мальчиков на двух местах (поэтому в задаче 2 количество вариантов пар было в 2 раза больше, чем в первой).

* Говоря математическим языком, в задаче 1 были составлены всевозможные *сочетания* из трех элементов по два: пары элементов, выбранных из имеющихся трех элементов. Пары отличались друг от друга лишь составом элементов, а порядок расположения элементов в паре не учитывался. В задаче 2 из тех же трех элементов выбирались пары элементов и фиксировался их порядок расположения в паре, т. е. все составленные пары отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением в паре. В комбинаторике такие пары называют *размещениями* из трех элементов по два. *

Договоримся, что, если нужно представить комбинацию некоторых элементов, в которой **порядок** расположения элементов **не важен**, будем записывать (перечислять) эти элементы через запятую (например: А, Б и Б, А — одна и та же пара элементов). Если же **порядок** расположения элементов в комбинации **важен**, то в последовательной записи элементов отделять их друг от друга запятой не будем (например, АБ и БА — разные пары).

Задача 3 Антону, Борису и Виктору повезло, и они купили 3 билета на футбол на 1, 2 и 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами мальчики могут занять эти места?

▶ Число способов будет таким же, как и в задаче 2. Действительно, если к каждой паре мальчиков из записи (1), сидящих на 1-м и 2-м местах, посадить на 3-е место их друга, ранее не попавшего (по условию задачи 2) на матч, то будут составлены всевозможные варианты (обозначенные тройками букв) рассаживания мальчиков по трем местам:

$$\text{АБВ; БАВ; АВБ; ВАБ; БВА; ВБА.} \qquad (2)$$

Ответ 6 способами. ◁

* Говоря языком математики, в задаче 3 были составлены всевозможные *перестановки* из трех элементов — комбинации из трех элементов, отличающиеся друг от друга порядком расположения в них элементов. *

Задача 4 Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 при условии, что цифры в числе: 1) должны быть различными; 2) могут повторяться?

▶ 1) Способ составления трехзначных чисел из 3 различных цифр аналогичен способу записи (2) троек букв в задаче 3:

$$123,\ 213,\ 132,\ 312,\ 231,\ 321. \qquad (3)$$

Получили 6 чисел.

2) Перебор вариантов можно организовать следующим образом. Выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1 в порядке их возрастания; затем — начинающиеся с цифры 2; после чего — начинающиеся с цифры 3:

111	112	113	211	212	213	311	312	313
121	122	123	221	222	223	321	322	323
131	132	133	231	232	233	331	332	333

Получили 27 чисел.

Ответ 1) 6; 2) 27. ◁

Упражнения

686 (Устно.) Сколько подарочных наборов можно составить: 1) из одного предмета; 2) из двух предметов, если в наличии имеются одна ваза и одна ветка сирени?

687 (Устно.) Сколькими способами Петя и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?

688 Сколько различных по комплектации парфюмерных наборов из двух предметов можно составить, если в наличии имеются одинаковые флаконы одеколона и одинаковые куски мыла?

689 С помощью цифр 2 и 3 записать все возможные двузначные числа, в которых цифры: 1) должны быть разными; 2) могут повторяться.

690 Имеются помидоры (п), огурцы (о) и лук (л). Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый из них должны входить в равных долях 2 различных вида овощей? Записать все сочетания овощей в составляемых салатах.

691 Имеются 3 предмета: карандаш, тетрадь и линейка. Сколькими способами из этих канцелярских принадлежностей можно выбрать: 1) один предмет; 2) 3 предмета; 3) 2 предмета?

692 Боря идет на день рождения к одноклассникам, близнецам Алеше и Яше. Он хочет подарить каждому из них по мячу. В магазине остались для продажи только 3 мяча разных цветов: белый, черный и пятнистый. Сколькими способами, купив 2 мяча, Боря может сделать подарки братьям?

693 Ашот (А), Марат (М) и Сергей (С) могут занять 1, 2 и 3-е призовые места в соревнованиях. Перечислить все возможные последовательности из имен мальчиков, где порядковый номер в последовательности соответствует занятому мальчиком месту в соревнованиях. Подсчитать их количество.

694 В магазин поступила партия кепок трех цветов: белые (б), красные (к) и синие (с). Кира и Лена покупают себе по одной кепке. Сколько существует различных вариантов покупок для этих девочек? Перечислить их.

695 Записать все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 2, 3 и 4, если: 1) одинаковых цифр в числах не должно быть; 2) цифры в числах могут повторяться.

696 Перечислить все двузначные числа, в записи которых встречаются только цифры 0, 1 и 2, если: 1) одинаковых цифр в числах не должно быть; 2) цифры в числах могут повторяться.

697 Перечислить все трехзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 1 и 2.

698 Перечислить все трехзначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1 и 2, при условии, что: 1) все цифры в числах различны; 2) цифры в числах могут повторяться.

699 У жителей планеты ХО в алфавите три буквы: А, О, Х. Слова в языке состоят не более чем из трех букв (буква в слове может повторяться). Какое наибольшее количество слов может быть в словаре жителей этой планеты?

§ 39 Таблица вариантов и правило произведения

Для решения комбинаторных задач существуют различные средства, исключающие возможность «потери» какой-либо комбинации элементов. Для подсчета числа комбинаций из двух элементов таким средством является *таблица вариантов.*

Задача 1 Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры: 1) 1, 2 и 3; 2) 0, 1, 2 и 3. Подсчитать их количество N.

▶ Для подсчета образующихся чисел составим таблицы:

1-я цифра	2-я цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9$

1-я цифра	2-я цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12$

Ответ 1) $N = 9$; 2) $N = 12$. ◁

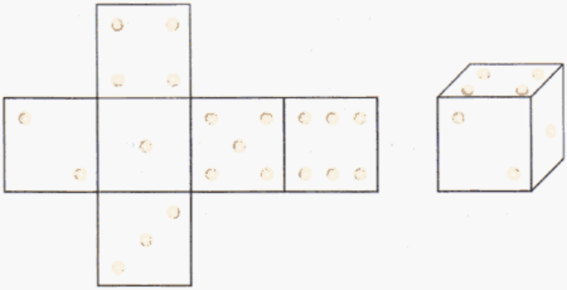


Рис. 28

Задача 2 Бросают две игральные кости (на рисунке 28 изображена игральная кость — кубик с отмеченными на его гранях очками, а также развертка этого кубика). Сколько различных пар очков может появиться на верхних гранях костей?

▶ С помощью составленной ниже таблицы пар выпавших очков можно утверждать, что число всевозможных пар равно $6 \cdot 6 = 36$.

Число очков на I кости	Число очков на II кости					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Ответ 36 пар. ◁

Для решения задач, аналогичных задачам 1 и 2, необязательно каждый раз составлять таблицу вариантов. Можно пользоваться следующим правилом, которое получило в комбинаторике название «Правило произведения»:

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Задача 3 Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

▶ Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада ($n = 3$). Оля может поступить аналогично ($m = 3$). Пару шоколадок для Кати и для Оли можно составить

$$n \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$$

различными способами.

Ответ 9 способов. ◁

Задача 4 Имеются три плитки шоколада различных видов. Катя и Оля по очереди выбирают себе по одной плитке. Сколько существует различных способов выбора шоколадок для Кати и Оли?

▶ Допустим, первой шоколадку выбирает Катя. У нее есть 3 возможности выбора плитки ($n = 3$). После этого Оля может выбрать одну из двух оставшихся плиток ($m = 2$). Тогда число способов выбора пары шоколадок для Кати и для Оли найдем так:

$$n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6.$$

Ответ 6 способов. ◁

Задача 5 Сколько существует различных двузначных кодов, составленных с помощью букв А, Б, В, Г и Д, если буквы в коде: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

▶ 1) Первой буквой в коде может быть любая из данных пяти букв ($n = 5$), второй — также любая из пяти ($m = 5$). Согласно правилу произведения число всевозможных пар букв (с возможным их повторением в паре) равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25.$$

2) Первой буквой в коде может быть любая из пяти данных букв ($n = 5$), а второй — любая из четырех, отличных от первой ($m = 4$). Согласно правилу произведения, число двузначных кодов с различными буквами будет равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Ответ 1) 25; 2) 20. ◁

Упражнения

700 Пользуясь таблицей вариантов, перечислить все двузначные числа, записанные с помощью цифр: 1) 3, 4, 5; 2) 7, 8, 9.

701 С помощью таблицы вариантов перечислить всевозможные двухбуквенные коды (буквы в коде могут повторяться), в которых используются буквы: 1) а, б, в; 2) x, y, z.

702 Пользуясь таблицей вариантов, перечислить все двузначные числа, в записи которых используются цифры 7, 8, 9, 0, и подсчитать количество этих чисел.

703 Составляя расписание уроков на понедельник для 7А класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым — либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?

704 Чтобы попасть из города A в город B, нужно по дороге доехать до реки, а затем переправиться на другой ее берег. До реки можно доехать на мотоцикле, на автобусе, на автомобиле или дойти пешком. Через реку можно переправиться либо вплавь, либо переплыть на лодке, либо — на пароме. Сколько существует различных способов добраться из города A в город B?

705 У Светланы 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Светланы?

706 На стол бросают 2 игральных тетраэдра (серый и белый), на гранях каждого из которых точками обозначены числа от 1 до 4 (рис. 29). Сколько различных пар чисел может появиться на гранях этих тетраэдров, соприкасающихся с поверхностью стола?

Рис. 29

707 В ларьке продается пять видов мороженого (не менее двух брикетов каждого вида). Оля и Таня покупают по одному брикету. Сколько существует вариантов такой покупки?

708 Мама решила сварить компот из фруктов двух видов. Сколько различных (по сочетанию видов фруктов) вариантов компотов может сварить мама, если у нее имеется 7 видов фруктов?

709 Из коробки, содержащей 8 мелков восьми различных цветов, Гена и Таня берут по одному мелку. Сколько существует различных вариантов такого выбора двух мелков?

710 Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

711 Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

§ 40 Подсчет вариантов с помощью графов

Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико. Однако уже при решении задачи 4 из § 38 таких комбинаций оказалось 27, и при переборе можно было упустить какую-нибудь из них. Нередко подсчет вариантов облегчают *графы*. Так называют геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют *вершинами*) и соединяющих их отрезков (называемых *ребрами* графа). При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей, чисел и т. п.), а с помощью ребер — определенные связи между этими элементами. Для удобства иллюстрации условия задачи с помощью графа его вершины-точки могут быть заменены, например, кругами или прямоугольниками, а ребра-отрезки — любыми линиями. Примеры различных графов приведены на рисунке 30. Генеалогическое древо, изображен-

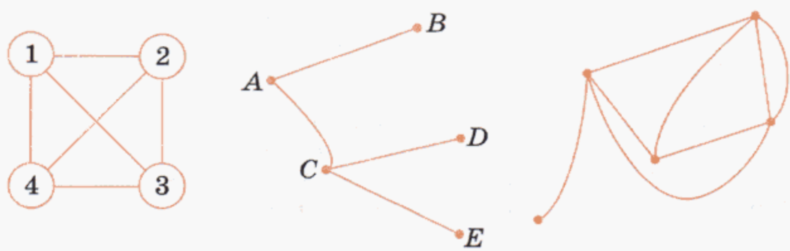


Рис. 30

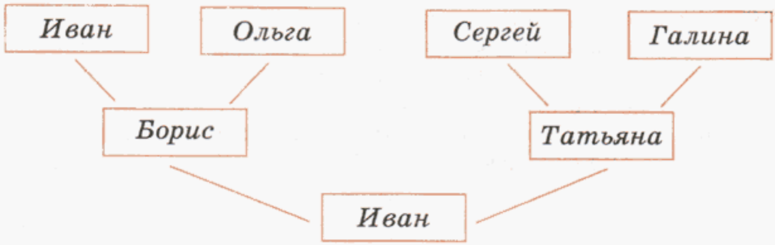


Рис. 31

ное на рисунке 31, также является примером графа.

1. Полный граф

Задача 1 Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

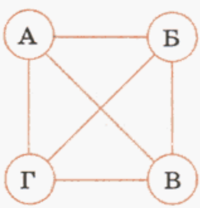


Рис. 32

▶ Решим задачу с помощью так называемого *полного графа* с четырьмя вершинами А, Б, В, Г (рис. 32), обозначенными по первым буквам имен каждого из 4 мальчиков. *В полном графе проводятся все возможные ребра.* В данном случае отрезки-ребра обозначают шахматные партии, сыгранные каждой парой мальчиков. Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и партий было сыграно 6.

Ответ 6 партий. ◁

Задача 2 Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причем каждый мальчик подарил каждому по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?

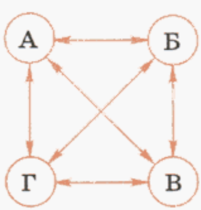


Рис. 33

▶ I способ. С помощью стрелок на ребрах полного графа с вершинами А, Б, В и Г (рис. 33) показан процесс обмена фотографиями. Очевидно, стрелок в 2 раза больше, чем ребер, т. е. $6 \cdot 2 = 12$. Столько же было подарено и фотографий.

II способ. Каждый из четырех мальчиков подарил друзьям 3 фотографии, следовательно, всего было роздано $3 \cdot 4 = 12$ фотографий.

Ответ 12 фотографий. ◁

Задача 3* Сколько различных пар элементов (N), отличающихся лишь составом, можно образовать из n имеющихся различных элементов ($n > 2$)?

▶ Решим задачу с помощью полного графа, имеющего n вершин. Каждое ребро этого графа определяет искомую пару элементов. Из каждой вершины выходят $(n - 1)$ ребер. Число $(n - 1) \cdot n$ в 2 раза больше, чем число ребер, так как при таком подсчете каждое ребро учитывается дважды. Следовательно, число искомых пар (ребер графа)

$$N = \frac{(n-1)n}{2}. \qquad (1)$$

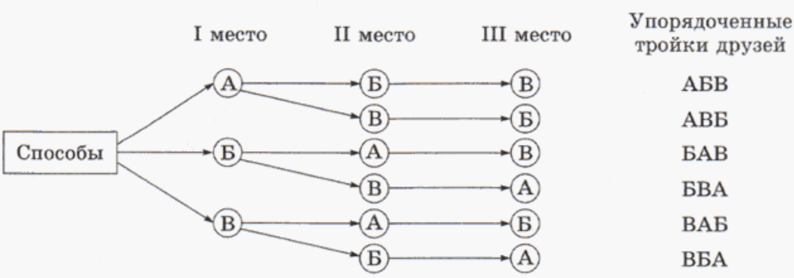
Ответ $N = \dfrac{(n-1)n}{2}$. ◁

2. Граф-дерево

В § 38 решалась задача о способах рассаживания троих друзей на трех местах во время футбольного матча. Рассмотрим составление всевозможных упорядоченных троек друзей с помощью графа, называемого *деревом* (за внешнее сходство с деревом).

Задача 4 Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?

▶ На 1-е место может сесть любой из троих друзей, на 2-е — любой из двоих оставшихся, а на 3-е — последний. Сказанное изобразим с помощью дерева, помещая в вершины графа первые буквы имен друзей А, Б и В:

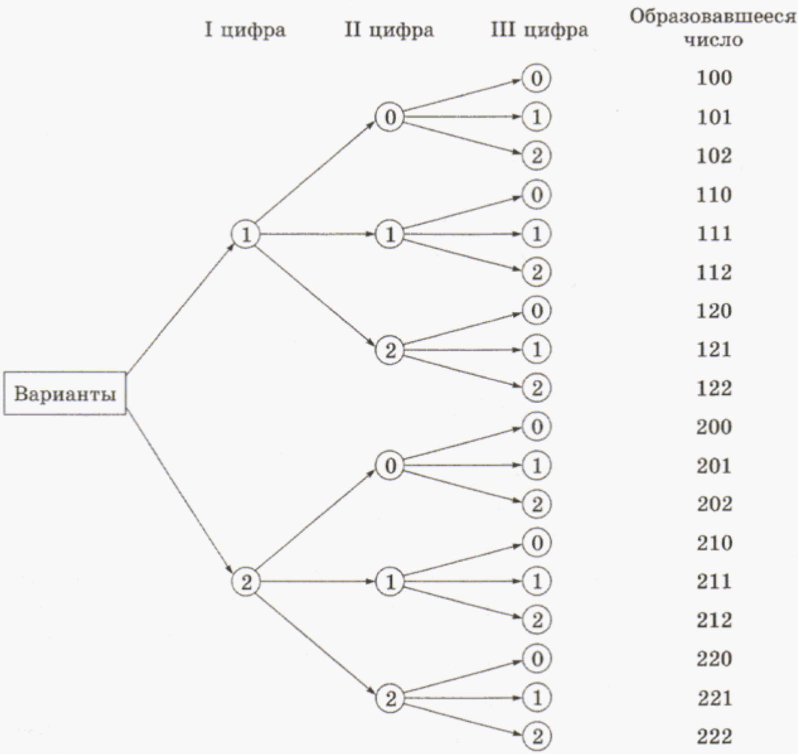


Итого: **6 способов**

Ответ 6. ◁

Задача 5 Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?

▶ Первой цифрой составляемого трехзначного числа может быть либо 1, либо 2. Второй цифрой может быть любая из трех данных цифр; третьей — также любая из цифр 0, 1, 2. Изобразим сказанное с помощью дерева:



Итого: **18 чисел**

Ответ 18 чисел. ◁

Ребра графа, являющегося деревом, иногда называют ветвями дерева, а само дерево — *деревом вариантов.* Вычерчивать дерево полезно, когда требуется з а п и с а т ь все существующие комбинации элементов.

Дерево вариантов дает наглядное представление о том, как применяется *правило произведения* для подсчета комбинаций из большего, чем 2, числа элементов. Действительно, например, в задаче 5, согласно правилу произведения, первые две цифры числа можно было записать шестью способами ($2 \cdot 3 = 6$). Третью цифру к уже двум имеющимся можно было, согласно правилу произведения, приписать $(2 \cdot 3) \cdot 3 = 18$ способами, т. е. существует $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ всевозможных трехзначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1 и 2.

Задача 6 В меню столовой предложены на выбор 3 первых, 5 вторых и 4 третьих блюда. Сколько различных вариантов обедов, состоящих из одного первого, одного второго и одного третьего блюда, можно составить из предложенного меню?

▶ Согласно правилу произведения таких обедов можно составить $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$.

Ответ 60 вариантов обедов. ◁

Упражнения

Упражнения **712—717** выполнить с помощью графов.

712 При встрече каждый из друзей пожал другому руку (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было: 1) трое; 2) четверо; 3) пятеро?

713 По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку каждому). Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали: 1) 3 человека; 2) 4 человека; 3) 5 человек?

714 Маше на день рождения подарили три букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было две вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.

715 В каждую из трех ваз: хрустальную (х), керамическую (к) и стеклянную (с) — пробуют поставить по одному из двух имеющихся букетов цветов: из роз (р) и гвоздик (г). Перечислить все возможные варианты установки в каждую вазу каждого букета.

716 Перечислить все возможные варианты обедов из трех блюд (одного первого, одного второго и одного третьего блюда), если в меню столовой имеются два первых блюда: щи (щ) и борщ (б); три вторых блюда: рыба (р), гуляш (г) и плов (п); два третьих: компот (к) и чай (ч).

717 Перечислить все возможные цветовые сочетания брюк, свитера и ботинок, если в гардеробе имеются брюки трех цветов: серые (с), бежевые (б) и зеленые (з); свитера двух расцветок:

песочный (п) и малиновый (м); ботинки двух цветов: черные (ч) и коричневые (к).

718 Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр: 1) 1 и 2; 2) 0 и 1?

719 Сколько различных трехзначных чисел, в записи которых цифры могут повторяться, можно записать с помощью цифр: 1) 1, 2, 3, 4; 2) 0, 1, 2, 3?

720 Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

721 Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 6, 7, 8, 9, 0 при условии, что цифры в числе: 1) могут повторяться; 2) должны быть различными?

722 Вася забыл вторую и последнюю цифры пятизначного номера телефона приятеля. Какое наибольшее число звонков предстоит сделать Васе, если он решил перепробовать комбинации всех забытых цифр, чтобы в результате дозвониться до приятеля?

723 Имеется 6 видов овощей. Решено приготовить салат из 3 видов. Сколько различных (по сочетанию видов овощей) вариантов салатов можно приготовить?

724 Сколько существует способов занять 1, 2 и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют: 1) 10 команд; 2) 11 команд?

725 При игре в крестики-нолики на поле размером 3×3 клетки неопытный первый игрок делает 1-й ход: ставит крестик в любую из клеток; вторым ходом второй неопытный игрок ставит нолик в любую из оставшихся свободных клеток, затем 3-м ходом первый игрок ставит крестик и т. д. Сколько существует вариантов заполненных клеток после: 1) двух ходов; 2) трех ходов; 3) четырех ходов?

726 Завуч составляет расписание уроков. В пятницу в 7А классе должно быть 5 уроков, причем обязательно один сдвоенный урок — алгебра. Сколько различных вариантов расписания уроков может составить завуч на пятницу, если 3 оставшихся урока он комбинирует из литературы, истории и физики?

727 Имеется 7 книг, причем две из них одинаковые, а остальные книги отличаются от этих двух и различны между собой. Сколькими способами можно расставить эти книги на книжной полке при условии, что одинаковые книги в любой последовательности должны стоять рядом?

728 Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин n, где: 1) $n = 12$; 2) $n = 37$?

729 Сколькими различными способами можно назначить двух ребят на дежурство по столовой, если в классе: 1) 24 учащихся; 2) 25 учащихся?

Упражнения к главе VIII

730 С помощью цифр 7, 8 и 9 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры: 1) должны быть разными; 2) могут повторяться.

731 С помощью цифр 7, 8 и 9 записать всевозможные трехзначные числа при условии, что цифры в числе должны быть различными.

732 Перечислить все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 8, 9 и 0, если: 1) одинаковых цифр в числах не должно быть; 2) цифры в числах могут повторяться.

733 1) У лесника 3 собаки: Астра (А), Вега (В) и Гриф (Г). На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.
2) Из трех стаканов сока — ананасового (а), брусничного (б) и виноградного (в) — Иван решил последовательно выпить два. Перечислить все варианты, которыми это можно сделать.

Проверь себя!

1 С помощью цифр 8 и 9 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры: а) должны быть разными; б) могут повторяться.

2 Перечислить все трехзначные числа, в записи которых встречаются только цифры 8 и 9.

3 Анна (А), Белла (Б) и Вера (В) купили билеты в кинотеатр на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Перечислить все возможные способы, которыми девочки могут занять свои места.

734 Сколькими способами могут быть заняты первое второе и третье места (по одному человеку на место) на соревнованиях, в которых участвуют: 1) 5 человек; 2) 6 человек.

735 Сколько существует способов выбрать троих ребят из четверых желающих дежурить по столовой?

Упражнения для повторения курса алгебры VII класса

736 Найти значение числового выражения:

1) $(-1{,}5+4-2{,}5)(-6)$; 2) $(2-3-7+7{,}9)^2$;

3) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right):(-1{,}6-3{,}3+5)$; 4) $(2-5+7-1)^2:(-3)^2-21$;

5) $\frac{0{,}25-1\frac{1}{5}}{-3\frac{4}{5}+1{,}9}+\frac{10-2{,}5}{\frac{1}{2}-0{,}75}$; 6) $\frac{(0{,}2)^2+0{,}96}{4{,}5}+\frac{1}{9}$.

737 Сумма двух чисел равна 30. Одно из чисел a. Записать удвоенное произведение этих чисел. Вычислить значение этого произведения при $a=-2$.

738 Составить выражение, показывающее, сколько единиц содержится в натуральном числе, состоящем из a сотен, b десятков и c единиц. Сколько единиц в числе, написанном теми же цифрами, но в обратном порядке?

739 Сколько граммов содержат a килограммов и c граммов? Ответ записать выражением.

740 Найти числовое значение алгебраического выражения:

1) $\frac{2a+b}{b-2a}$ при $a=-\frac{1}{2}$, $b=-3$; 2) $\frac{4a^2-1}{2a+1}$ при $a=\frac{1}{2}$.

Решить уравнение **(741—744)**.

741 1) $2(x-1)=3(2x-1)$; 2) $3(1-x)=4x-11$;

3) $3-5(x-1)=x-2$; 4) $3(x-2)-2(x-1)=17$.

742 1) $\frac{2x+1}{3}=6$; 2) $\frac{x-7}{2}=\frac{1}{4}$; 3) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}$; 4) $\frac{4}{3}x-1=\frac{x}{9}+\frac{1}{6}$.

743 1) $7-\frac{x}{2}=3+\frac{7x}{2}$; 2) $9-\frac{2x}{3}=7+\frac{x}{3}$;

3) $\frac{x+3}{2}=x-4$; 4) $2-3x=\frac{x-12}{2}$.

744 1) $\frac{6x+7}{7}+\frac{3+5x}{8}=3$; 2) $\frac{2x-4}{5}+\frac{2x-1}{3}=1$;

3) $5-\frac{2x-5}{3}=\frac{4x+2}{3}$; 4) $\frac{x-5}{5}=\frac{2x+1}{3}-7$.

745 В трех коробках находится 119 карандашей. В первой коробке на 4 карандаша больше, чем во второй, и на 3 карандаша меньше, чем в третьей. Сколько карандашей в каждой коробке?

746 Отцу 30 лет, а сыну 4 года. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

747 Катер прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 3 ч, а против течения за 4 ч. Каково расстояние между этими пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч?

748 Вертолет пролетел расстояние между двумя поселками при попутном ветре за 1,5 ч, а при встречном ветре за 2 ч. Каково расстояние между поселками, если скорость ветра оба раза была равна 10 км/ч?

749 Упростить:

1) $\frac{5^3\cdot5^4\cdot5}{(5^2)^3}$; 2) $\frac{7^7}{(7^5)^2}$; 3) $\frac{(b^3)^2b^3b}{(b^2)^4}-b^2$; 4) $\frac{(3b^2)^2\,9b^3}{3^4b^6}+b$;

5) $\left(\frac{1}{m}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2m^5$; 6) $\left(\left(\frac{1}{a}\right)^4\right)^3-\left(\frac{1}{a}\right)^{11}\cdot\frac{1}{a}$.

750 Найти произведение одночленов:

1) $-12a^4bc^2d\cdot5a^3d^4\cdot(-3b^3cd^2)$;

2) $49a^2bc^2\cdot\left(-\frac{2}{7}ab\right)\cdot\frac{1}{14}ac$;

3) $\left(-\frac{2}{3}a^4b^2c\right)\cdot\frac{15}{2}abc^3$; 4) $\left(-\frac{4}{3}m^5n^3\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}mn^3\right)$.

751 Возвести одночлен в степень:

1) $(-2ab^2)^3$; 2) $(-0{,}8ac^2)^2$;

3) $\left(-\frac{3}{5}abc^3\right)^3$; 4) $\left(-\frac{1}{2}ab^2c^3\right)^4$.

752 Упростить выражение:

1) $2a^2+2ab+3b^2-a^2-2b^2$;

2) $a^2+ab+b^2+(2a^2+3ab-2b^2)+(a^2+ab+2b^2)$;

3) $7a^2+2b^2-(6a^2+b^2)$; 4) $4a^2+2a+1-(1+2a-4a^2)$.

753 Выполнить умножение многочлена на одночлен:

1) $(a^2-ab+b^2)\cdot 3ab^3$; 2) $(2m^2-3mn+4n^2)\cdot \frac{1}{12}m^2n^2$;

3) $(6a^3-4ab^2+1)\cdot \frac{1}{2}ab$; 4) $(8m^3-7m^2n+1)\cdot \frac{1}{8}mn$.

754 Выполнить умножение многочленов:

1) $(a^2+3ab+b^2)(7a-5b)$; 2) $(3a^2-6ab^2+2b^2)(4ab-1)$;

3) $(a+3b-4c)(a-3b-4c)$; 4) $(m+n-2)(m-n+2)$;

5) $\left(\frac{1}{3}a^2b-\frac{2}{5}ab^2\right)(15a-30b)$; 6) $\left(\frac{1}{2}a^2+4a+1\right)(3a-1)$.

755 Найти значение выражения:

1) $12a^2b^3:(3ab^2)$ при $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{9}$;

2) $(-49m^3n^4):(7mn^4)$ при $m=\frac{1}{7},\ n=1$;

3) $(4a^3b+6a^2b):(2ab^2)$ при $a=-1,\ b=5$;

4) $(12a^4-24a^3+12a^3):(6a^2)$ при $a=\frac{1}{4}$.

Упростить **(756—757)**.

756 1) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$; 2) $(1-2b)(1+2b)(1+4b^2)$;

3) $(2ab^2+3)(3-2ab^2)+4a^2b^4$; 4) $\left(\frac{a}{2}-5\right)\left(5+\frac{a}{2}\right)+25$.

757 1) $(a+3)^2+(a-3)^2$; 2) $(4a+b)^2-(4a-b)^2$;

3) $\left(2-\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a^2}{b^2}$; 4) $(1-7b)^2-(1+7b)^2$.

758 Разложить на множители:

1) $a^4+6a^3+9a^2$; 2) $4+8b+4b^2$;

3) $(1-a)^2-4$; 4) $25-(2-3a)^2$.

759 Сократить дробь:

1) $\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}$; 2) $\frac{4-a^2}{a+2}$; 3) $\frac{4x^2-9}{2x^2+3x}$; 4) $\frac{3b^2-12b+12}{b^2-4}$.

Выполнить действия **(760—764)**.

760 1) $\frac{a-b}{ab}-\frac{a-c}{ac}$; 2) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab^2}+\frac{1}{a^2b}$;

3) $\frac{1}{14x^3}-\frac{1}{21x^2y}-\frac{1}{4xy^2}$; 4) $\frac{2}{3x^2y}+\frac{3}{5xy^2}-\frac{5}{4y^3}$.

761 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-1}{2a}-\frac{3a}{2}$; 2) $\frac{a^2-3b^2}{ab^3}+\frac{2}{ab}+\frac{ab+b^2}{a^2b^2}$;

3) $\frac{a^2+5a-4}{16-a^2}+\frac{2a}{8a+2a^2}$; 4) $\frac{b}{9}-\frac{4b}{6b-36}+\frac{2}{3}-\frac{4}{6-b}$.

762 1) $\frac{a}{a^2-1}-\frac{1}{1-a^2}$; 2) $\frac{3y}{4x^2-9y^2}+\frac{2x}{9y^2-4x^2}$;

3) $1+3a+\frac{9a^2}{1+3a}+\frac{1}{3a-1}+\frac{6a}{1-9a^2}$;

4) $\frac{m^2}{m^3-n^3}-\frac{mn}{n^3-m^3}+\frac{n^2}{m^3-n^3}$.

763 1) $\frac{x^2-y^2}{6xy}\cdot\frac{12x^2y}{x+y}$; 2) $\frac{8ab-8b^2}{a^2+ab}\cdot\frac{a^3-ab^2}{4b^3}$;

3) $\frac{a^2+4a}{a^2-16}:\frac{4a+16}{a^2-4a}$; 4) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}:\frac{10ab}{3a^2-3b^2}$.

764 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)}$; 2) $\frac{1-81b^2}{a^2b^2-4}\cdot\frac{ab+2}{1-9b}$;

3) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}$; 4) $\frac{2cd+4d^2}{12c-6d}:\frac{4c^2-16d^2}{16c^2-4d^2}$.

Выполнить действия **(765—766).**

765 1) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{a}{a+1}\right)$; 2) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{2a^2}{1-2a^2}\right)$;

3) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\left(1+\frac{a}{1-a}\right)$; 4) $\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\frac{a(b-a)}{1+ab}\right)$.

766 1) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}-\frac{4y^2}{x^2-y^2}\right)\cdot\frac{x+y}{2y}$;

2) $\left(\frac{1-b}{1+b}-\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+4b}{1-b^2}\right)\cdot(b^2+2b+1)$.

767 Тело движется равномерно со скоростью 4 км/ч.

1) Написать формулу, выражающую путь s этого тела за t часов.

2) Составить таблицу значений s при t, равном 0; 1; 2; 3; 4.

3) По данным таблицы построить график изменения пути данного тела в зависимости от изменения времени движения.

4) Найти по графику путь, пройденный телом за 1 ч 30 мин; за 3,5 ч.

5) Найти по графику, за какое время тело пройдет 10 км; 6 км.

6) Доказать, что отношение ординаты любой точки полученного графика к ее абсциссе равно 4.

768 Построить прямую:

1) $y=-3x+2$; 2) $y=3x-2$; 3) $y=\frac{1}{3}x+2$; 4) $y=-\frac{1}{3}x-2$;

5) $y=-2$; 6) $y=1$; 7) $x=-1$; 8) $x=3$.

769 Построить график функции $y=0,4x-8$ и по нему найти:
1) значение y, соответствующее значению x, равному -1; 0; 1; $2,5$;
2) при каком значении x значение y равно -8; -2; 0; $0,5$; $1,5$; 4.

770 Найти координаты точек пересечения прямой с осями координат:
1) $y=7x+4$; 2) $y=-7x+4$;
3) $y=3,5x-1$; 4) $y=-3,5x+1$.

771 Построить график уравнения:
1) $2y+3=0$; 2) $1-3x=0$; 3) $x+y-1=0$;
4) $2x+y=3$; 5) $3y-2x=9$; 6) $2x=y-1$.

772 Найти координаты точки пересечения прямых:
1) $y=4x-6$ и $y=3x-2$; 2) $y=3x-1$ и $y=-\frac{5}{3}x+\frac{8}{3}$.

Решить систему уравнений (**773—774**).

773 1) $\begin{cases} 2x-y=-6, \\ x+2y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-y-6=0, \\ 2x-3y+3=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=4, \\ 3x+y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y=4, \\ 3x+y+9=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x+7y=13, \\ 8x-3y=13; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-5y=6, \\ -8y=3x+7. \end{cases}$

774 1) $\begin{cases} \frac{x}{5}+\frac{y}{2}=5, \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{5}=0,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{5y}{4}=-3, \\ \frac{5x}{6}-\frac{7y}{8}=-1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+y=9, \\ \frac{x-y}{3}-x=-4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}, \\ x-y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

775 Решить графически систему уравнений:
1) $\begin{cases} 2x+5y=1, \\ y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+y=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 5x-2y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x-5y-7=0, \\ 2x-8y+2=0. \end{cases}$

776 В первом баке в 4 раза больше жидкости, чем во втором. Когда из первого бака перелили 10 л жидкости во второй, оказалось, что во втором баке стало в 1,5 раза больше жидкости, чем осталось в первом баке. Сколько жидкости было в каждом баке первоначально?

777 За две пары гольф и три пары носков уплатили 130 р. Сколько стоит пара гольф и пара носков, если 1 пара гольф и 4 пары носков стоят 140 р.?

778 Если к числителю некоторой дроби прибавить 3, а знаменатель оставить без изменения, то получится 1; если к знаменателю исходной дроби прибавить 2, не меняя ее числитель, то получится дробь, равная $\frac{1}{2}$. Найти исходную дробь.

779 Теплоход прошел по реке расстояние между двумя пристанями, равное 80 км, за 3 ч 20 мин по течению реки и за 5 ч против течения. Найти скорость течения реки и собственную скорость теплохода.

780 Решить уравнение:

1) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}-\frac{3x-7}{6}=0$; 2) $\frac{2x-3}{2}-\frac{3-4x}{4}-\frac{3-5x}{8}=0$;

3) $\frac{x+4}{5}-\frac{x+3}{3}=x-5-\frac{x-2}{2}$; 4) $\frac{5x}{6}-\frac{1-3x}{5}=x-\frac{x-7}{15}-1$.

781 Заводской цех должен был выполнить план по изготовлению однотипных деталей за 10 дней. Но уже за день до срока он не только выполнил задание, но и изготовил сверх плана 3 детали, так как ежедневно изготовлял сверх плана по 2 детали. Сколько деталей должен был изготовить заводской цех по плану?

782 Дана функция $y=kx+b$. При каких значениях k и b график функции проходит через точки (–1; 1) и (2; 3)?

783 Найти значение k, если известно, что график функции $y=kx-1$ проходит через точку (–3; 2).

784 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{9x-y}{7}+2y=3, \\ \frac{12x+5y}{3}-3x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{11x+3y}{9}-3x=-5, \\ \frac{14x-9y}{11}+5y=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x+5y}{2}+\frac{11x-2y}{8}=\frac{2x-4y+6}{5}, \\ \frac{2x-3y}{7}-\frac{y-2x}{5}=\frac{2(9x+7y)}{11}. \end{cases}$

785 За 5 м шерсти и 4 м шелка в магазине «Ткани» нужно заплатить 1600 р. При передаче остатков ткани в магазин по продаже мерного лоскута цену на шерсть снизили на 25%, на шелк — на 15%, и в этом магазине за 6 м шерсти и 5 м шелка нужно заплатить 1537 р. 50 к. Сколько стоит метр шерсти и метр шелка в магазине «Ткани»?

786 Сестра старше брата на 6 лет, а через год будет старше его в 2 раза. Сколько лет каждому из них?

787 Поезд прошел расстояние 63 км между двумя станциями за 1 ч 15 мин. Часть пути он шел под уклон со скоростью 42 км/ч, а остальную горизонтальную часть пути поезд шел со скоростью 56 км/ч. Сколько километров пути уложено под уклон?

788 Дано выражение $(x^2-9)^2-(x+3)^2$.

1) Разложить данное выражение на множители.

2) При каких значениях x значение данного выражения равно нулю?

3) Записать данное выражение в виде многочлена стандартного вида.

4) Найти числовое значение данного выражения при $x=-3$, $x=3$.

5) Сократить дробь $\dfrac{(x^2-9)^2-(x+3)^2}{(x+3)^2}$.

789 1) Разложить на множители каждое из выражений:
$A=(2x-3)^2-(x+2)^2$, $B=(2x^2-2x)-10x+10$.

2) При каких значениях x значение каждого выражения равно нулю?

3) Упростить дробь $\dfrac{A}{B}$. Вычислить значение этой дроби при $x=-\dfrac{1}{3}$, $x=-1$.

4) При каких значениях x значение этой дроби равно нулю?

790 1) При каких значениях k и b график функции $y=kx+b$ проходит через точки $(-1;\ 1)$, $(2;\ -3)$?

2) Проходит ли график функции $y=-2x-1$ через точку $(-3;\ 5)$? $(-1;\ 2)$?

3) Построить график функции $y=-2x-1$. Найти координаты точек пересечения графика с осями координат.

4) При каком значении x значение функции $y=-2x-1$ равно нулю?

5) Указать несколько целых значений x, при которых значения функции $y=-2x-1$ положительны (отрицательны).

6) Найти координаты точки пересечения графика функции $y=-2x-1$ с графиком функции $y=5$.

791 Команда рыболовецкого сейнера по плану должна была вылавливать 60 ц рыбы ежедневно. Перевыполняя план ежедневно на 5 ц, команда выполнила плановое задание на 3 дня раньше срока и, кроме того, выловила 20 ц рыбы сверх плана. Сколько рыбы должна была выловить команда сейнера по плану?

792 За 5 дней работы трактористы засеяли 500 га. Во 2-й день они засеяли на 25% больше, чем в 1-й, а в 3-й — на 20% больше, чем во 2-й. Последние два дня они засевали каждый день столько же, сколько во 2-й день. Сколько гектаров засеяли трактористы в 1-й день?

Упростить **(793—794).**

793 1) $(1-a)(1+a+a^2)+a^3$; 2) $(b+3)(b^2-3b+9)-27$;

3) $\left(\frac{1}{2}-c^2\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}c^2+c^4\right)+c^6$;

4) $\left(2a^2+\frac{1}{3}\right)\left(4a^4-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{27}$.

794 1) $(2a-b)^2-(2a-b)(2a+b)$; 2) $(1-a)^2(1+a)^2-(1-a^4)$;

3) $(2a+b)^2-9(a+b)^2$; 4) $(a-2b)^2-25(3a-b)^2$.

Разложить на множители **(795—797).**

795 1) $a^3b^6c^3-1$; 2) $8a^3b^3+125c^3$;

3) $(a-1)^2+2(a-1)+1$; 4) $(4a-1)^2+2(4a-1)+1$.

796 1) $4ab^2+15abc-4bcd-15c^2d$; 2) m^3-m^2+m-1;

3) $a^2+b^2-c^2+2ab$; 4) $1+2ab-a^2-b^2$;

5) $(a+3)^2-6(a+3)+9$; 6) $(m-1)(m^2-7m)+(m-1)(5m+1)$.

797 1) a^2-2a-3; 2) $b^2-7b+12$; 3) a^3+a^2-12;

4) x^3-7x+6; 5) $m^2-7m+10$; 6) m^2-m-2.

798 Выполнить действия **(798—800)**:

1) $\left(m^2+\frac{1}{m^2}+2\right):\left(m+\frac{1}{m}\right)-\frac{m^3}{m^2-1}$;

2) $\frac{x^2+y^2}{x}:\left(x^3+\frac{y^4}{x}+2xy^2\right)-\frac{1}{x^2y^2}$;

3) $\left(\frac{9m^2-3n^2}{4mn}+\frac{m-4n}{5n}\right):\left(\frac{2m+n}{3m}-\frac{5n^2-3m^2}{16m^2}\right)$.

799 1) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{a+4b}{2b}-\frac{6b}{4b-a}\right)\cdot\left(1-\frac{a^2-2ab+4b^2}{a^2-4b^2}\right)$;

3) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2-\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^2$.

800 1) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$;

2) $\left(\frac{2q}{p+2q}-\frac{4q^2}{p^2+4pq+4q^2}\right):\left(\frac{2q}{p^2-4q^2}+\frac{1}{2q-p}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a+\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right)$;

4) $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right)$.

801 Определить значение b, если через точку с координатами (3; 10) проходит график функции, заданной формулой:

1) $y=x+b$; 2) $y=3x+b$; 3) $y=-\frac{1}{3}x+b$; 4) $y=-\frac{1}{2}x+b$.

802 Задать формулой функцию, графиком которой является прямая, проходящая через точки A и B:

1) $A(-6;\ -3)$, $B(2;\ -3)$; 2) $A(-4;\ -4)$, $B(3;\ 3)$;
3) $A(2;\ 2)$, $B(0;\ 4)$; 4) $A(3;\ -8)$, $B(-5;\ 32)$.

803 Путь от фермы до города идет сначала горизонтально, а затем в гору. Фермер проехал на велосипеде горизонтальную часть пути со скоростью 10 км/ч, в гору шел пешком со скоростью 3 км/ч и прибыл в город через 1 ч 40 мин после выезда с фермы. Обратно он проехал путь под гору со скоростью 15 км/ч, а горизонтальную часть пути со скоростью 12 км/ч и прибыл на ферму через 58 мин после выезда из города. Сколько километров от фермы до города?

804 Велосипедист прибыл из пункта A в пункт B в назначенное время, двигаясь с определенной скоростью. Если бы он увеличил эту скорость на 3 км/ч, то прибыл бы к месту назначения на час раньше срока, а если бы он проезжал в час на 2 км меньше, чем в действительности, то он опоздал бы на час. Определить расстояние между A и B, скорость велосипедиста и время его движения.

805 Для содержания лошадей был сделан запас сена на некоторое время. Если бы лошадей было на две меньше, то этого запаса сена хватило бы еще на 10 дней; если бы лошадей было на две больше, то запаса сена не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей и на сколько дней был сделан запас сена?

806 Первая труба наполняет бассейн за половину того времени, за которое вторая труба наполняет $\frac{2}{3}$ этого бассейна. Вторая труба, работая отдельно, наполняет бассейн на 6 ч дольше, чем одна первая труба. Сколько времени наполняет бассейн каждая труба отдельно?

Старинные задачи

Задача Диофанта (III в., древнегреческий математик, автор трактата «Арифметика», в котором изложены и начала алгебры. Сочинения Диофанта послужили основой для исследований в теории чисел и уравнений)

807 Ослица и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Ослица жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. «Чего ты жалуешься? — ответил ей мул. — Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей». Сколько мешков несла ослица и сколько нес мул?

Индийская задача

808 Два лица имеют равные капиталы, причем каждый капитал состоит из известного числа вещей одинаковой ценности и известного числа монет. Как число вещей, так и суммы денег у каждого различны. Какова ценность вещи?

Задача Авиценны (980—1037 гг., среднеазиатский философ-естествоиспытатель, врач, математик, поэт)

809 Доказать, что если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1.

Задача из «Азбуки» Л. Н. Толстого

810 Пять братьев разделили после отца наследство поровну. В наследстве было три дома. Три дома нельзя было делить, их взяли старшие три брата. А меньшим за то выделили деньги. Каждый из старших заплатил по 800 рублей меньшим и тогда у всех пяти братьев денег стало поровну. Много ли стоили дома?

Старинные русские задачи

811 Мне теперь вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам теперь; а когда вам будет столько лет, сколько мне теперь, то нам будет обоим вместе 63 года. Сколько лет каждому?

812 У отца спросили, сколько лет его двум сыновьям. Отец ответил, что если к произведению чисел, означающих их года, прибавить сумму этих чисел, то будет 14. Сколько лет сыновьям?

813 Крестьянин менял зайцев на кур: брал за всяких двух зайцев по три курицы. Каждая курица снесла яйца — третью часть от числа всех куриц. Крестьянин, продавая яйца, брал за каждые 9 яиц по столько копеек, сколько каждая курица снесла яиц, и выручил 72 копейки. Сколько было кур и сколько зайцев?

Задачи для внеклассной работы

814 Доказать, что разность $16^{11}-2^{39}$ делится на 31.

815 Доказать, что сумма $333^{777}+777^{333}$ делится на 37.

816 Найти последнюю цифру числа: 1) 2^{187}; 2) 3^{115}; 3) 7^{158}.

817 Найти последнюю цифру числа:
1) $32^{365}+43^{241}$; 2) $27^{358}+53^{275}$.

818 Доказать, что число $32^{365}+43^{241}$ делится на 5.

819 Доказать, что число 132^2+576^3 делится на 12.

820 Доказать, что число $10^{23}+10^{19}-182$ делится на 18.

821 Доказать, что значение выражения n^3+11n делится на 6 при любом натуральном n.

822 Доказать, что при любом натуральном n:
1) значение выражения $n^3+3n^2+5n+105$ делится на 3;
2) значение выражения n^3+12n^2+23n делится на 6.

823 Доказать, что при любых натуральных m и n значение выражения $(3m+n+5)^5(5m+7n+2)^4$ делится на 16.

824 Пусть m и n такие натуральные числа, что значение выражения $7m+5n$ делится на 13. Доказать, что значение выражения $41m+46n$ также делится на 13.

825 Вычислить сумму

$$S=\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{99\cdot101}+\frac{1}{101\cdot103}.$$

826 Вычислить сумму

$$S = \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{96\cdot 98} + \frac{1}{98\cdot 100}.$$

827 Доказать, что ни при каких целых x и y равенство $x^2 - y^2 = 1990$ не является верным.

828 Найти все пары целых чисел x и y, при которых справедливо равенство:

1) $x^2 + 2x = y^2 + 6$; 2) $x^2 - 8 = y^2 + 4y$.

829 Найти все целые числа n, при которых дробь $\dfrac{n^5 + 3}{n^2 + 1}$ является целым числом.

830 Доказать, что при любых значениях x и y, не равных 0, значение выражения $x^2 - xy + \frac{2}{7}y^2$ положительно.

831 Упростить выражение
$(3^{16} + 1)(3^8 + 1)(3^4 + 1)(3^2 + 1)(3 + 1)$.

832 Доказать, что равенство $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$ является верным только при $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$.

833 Доказать, что равенство $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$ является верным только тогда, когда $x = y = z$.

834 Разложить на множители:

1) $a^3 + 2a^2 - 3$; 2) $a^3 + a^2 + 4$;
3) $a^5 + a + 1$; 4) $a^3 - 6a^2 - a + 30$.

835 Разложить на множители:

1) $a^4 + 2a^2 - 3$; 2) $a^4 + 4$;
3) $a^5 + a^2 - a - 1$; 4) $a^4 - a^3 - 5a^2 - a - 6$.

836 Пусть $x + y = a$, $xy = b$. Выразить через a и b сумму:

1) $x^2 + y^2$; 2) $x^3 + y^3$; 3) $x^4 + y^4$; 4) $x^5 + y^5$.

837 Доказать, что если x, y, z положительны, то равенство $x^3 + y^3 + x^3 = 3xyz$ является верным только тогда, когда $x = y = z$.

838 Сократить дробь:

1) $\dfrac{a^2 - a - 2}{a^2 - 2a - 3}$; 2) $\dfrac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 - a - 1}$;

3) $\dfrac{a^2 + ab - 6b^2}{a^2 - ab - 2b^2}$; 4) $\dfrac{2a^2 - ab - b^2}{2a^2 + 3ab + b^2}$.

839 В 13 ч в бассейн начали наливать воду из одной трубы для того, чтобы заполнить его к 16 ч следующего дня. Через некоторое время включили еще одну такую же трубу, так как потребовалось заполнить бассейн к 12 ч дня. Во сколько часов включили вторую трубу?

840 Электропоезд проехал мимо светофора за 5 с, а мимо платформы длиной 150 м — за 15 с. Каковы длина электропоезда и его скорость?

841 Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Спустя 1 ч 24 мин в том же направлении из A выехал велосипедист, и через час он был на расстоянии 1 км позади пешехода, а еще через час велосипедисту оставалось до B расстояние, вдвое меньшее, чем пешеходу. Найти скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что расстояние AB равно 27 км.

842 Из пункта A вышел пешеход, а из пункта B навстречу ему одновременно выехал велосипедист. После их встречи пешеход продолжал идти в B, а велосипедист повернул назад и тоже поехал в B. Известно, что пешеход прибыл в B на 2 ч позже велосипедиста, а скорость пешехода в 3 раза меньше скорости велосипедиста. Сколько времени прошло от начала движения до встречи пешехода и велосипедиста?

843 Пловец плывет против течения реки и встречает плывущую по течению реки пустую лодку. Продолжая плыть против течения еще t секунд после момента встречи, он затем поворачивает назад и догоняет лодку в s метрах от места встречи. Найти скорость течения реки.

844 В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{5}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 3%. Определить исходное процентное содержание соли.

845 Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км идет сначала в гору, затем по равнине и, наконец, под гору. Пешеход путь от A до B и обратно от B до A прошел за 6 ч. Скорость его ходьбы в гору была 3 км/ч, по равнине — 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Сколько километров составляет та часть дороги, которая идет по равнине?

846 Два автомобилиста проехали по 240 км. Первый половину всего пути делал остановки через каждые 4 км, а другую половину — через каждые 5 км. Второй четверть всего пути делал остановки через каждые 3 км, а оставшуюся часть — через каждые 6 км. Какой автомобилист сделал остановок больше?

847 Двое учащихся на одинаковую сумму денег купили тетради: тонкие по a рублей за тетрадь и толстые по b рублей за тетрадь. Первый из них половину своих денег истратил на тонкие тетради и половину — на толстые. Второй купил на свои деньги тех и других тетрадей поровну. Кто из них купил большее число тетрадей?

848 Два автобуса отправились одновременно из одного города в другой по одной и той же дороге. Первый двигался с постоянной скоростью 60 км/ч. Второй половину всего пути двигался со скоростью 50 км/ч, а остальную часть пути — со скоростью 70 км/ч. Какой из автобусов первым прибыл во второй город?

849 На соревнованиях два велосипедиста стартовали одновременно. Первый ехал всю дистанцию с постоянной скоростью. Второй первую половину дистанции ехал в полтора раза быстрее, а вторую — в два раза медленнее первого. Кто из них выиграл гонку?

850 На соревнованиях по спортивной ходьбе первый спортсмен прошел четверть всей дистанции со скоростью 12 км/ч, а остальную часть — со скоростью 8 км/ч. Второй спортсмен прошел половину дистанции со скоростью 10 км/ч, а остальную часть — со скоростью 9 км/ч. Кто из них был первым на финише?

851 Два пешехода прошли одинаковый путь. Первый половину всего пути шел со скоростью 5 км/ч, а оставшуюся часть пути — со скоростью 3 км/ч. Второй пешеход половину всего затраченного времени шел со скоростью 5 км/ч, а остальное время — со скоростью 3 км/ч. Кто из них быстрее прошел весь путь?

Краткое содержание курса алгебры VII класса

1. Алгебраические выражения

Числовое выражение образуется из чисел с помощью знаков действий и скобок.

Например, $1{,}2\cdot(-3)-9:(0{,}5+1{,}5)$ — числовое выражение.

Порядок выполнения действий.

Действия первой ступени — сложение и вычитание.

Действия второй ступени — умножение и деление.

Действия третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1).

3) Если вычисляется значение дробного выражения, то сначала выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе, а затем первый результат делится на второй.

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняются действия во внутренних скобках.

Алгебраическое выражение образуется из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок.

Примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n);\quad 3a+2ab-1;\quad (a-b)^2;\quad \frac{2x+y}{3}.$$

Числовое значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами.

Например, числовое значение выражения $3a+2ab-1$ при $a=2$ и $b=3$ равно $3\cdot2+2\cdot2\cdot3-1=17$, а при $a=-1$, $b=5$ равно

$$3\cdot(-1)+2\cdot(-1)\cdot5-1=-14.$$

Алгебраическая сумма — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «—».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки и знак «+» перед скобками можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы, например:

$$14+(7-23+21)=14+7-23+21,$$
$$a+(b-c-d)=a+b-c-d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки и знак «–» перед скобками можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный, например:

$$14-(7-23+21)=14-7+23-21,$$
$$a-(b-c-d)=a-b+c+d.$$

2. Уравнения с одним неизвестным

Уравнение — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Пример уравнения: $2x+3=3x+2$, где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 3 является корнем уравнения $x+1=7-x$, так как $3+1=7-3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Линейное уравнение — уравнение вида $ax=b$, где a и b — заданные числа, x — неизвестное.

Основные свойства уравнений.

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

3. Одночлены и многочлены

Степень числа a с натуральным показателем n, большим единицы, — произведение n множителей, равных a, т. е.

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}.$$

Например, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $m^5 = m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$.

В записи степени a^n число a — основание степени, n — показатель степени. Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Первая степень числа — само число: $a^1 = a$. Например, $3^1 = 3$, $\left(\frac{1}{13}\right)^1 = \frac{1}{13}$. *Квадрат числа* — степень этого числа с показателем 2. Например, 5^2 — квадрат числа 5. *Куб числа* — степень этого числа с показателем 3. Например, 4^3 — куб числа 4.

Основные свойства степени.

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

2) При делении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

3) При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели перемножаются:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

4) При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

5) При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Стандартный вид числа, большего 10, — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число.

Например, $358 = 3{,}58 \cdot 10^2$; $4084{,}5 = 4{,}0845 \cdot 10^3$.

Одночлен — произведение числовых и буквенных множителей. Примеры одночленов: $3ab$, $-2ab^2c^3$, a^2, a, $0{,}6xy5y^2$, $-t^4$.

Например, числовыми множителями одночлена

$$3a^2(0{,}4) \cdot b \cdot (-5)c^3$$

являются числа 3; 0,4; -5; а буквенными a^2, b, c^3.

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и результат поставить на первое место, затем произведения степеней с одинаковыми буквенными основаниями записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен -7, коэффициент одночлена a^2bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен -1.

Многочлен — алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Примеры многочленов: $4ab^2c^3$ — одночлен, $2ab-3bc$ — двучлен, $4ab+3ac-bc$ — трехчлен.

Члены многочлена — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2-3a^2c+7bc-4bc$ являются $2ab^2$, $-3a^2c$, $7bc$, $-4bc$.

Подобные члены — одночлены, которые после приведения к стандартному виду отличаются только коэффициентами, или одинаковые одночлены. Например, в многочлене $2ab-3ba+c^2b+c^2b$ подобными членами являются $2ab$ и $-3ba$; c^2b и c^2b.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом, например:

$$2ab-4bc+ac+3ab+bc=5ab-3bc+ac.$$

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами.

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены, например:

$$(2a^2b-3bc)+(a^2b+5bc)-(3a^2b-bc)=$$
$$=2a^2b-3bc+a^2b+5bc-3a^2b+bc=3bc.$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить. Например:

$$(2ab-3bc)(4ac)=(2ab)(4ac)+(-3bc)(4ac)=8a^2bc-12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например:

$$(5a-2b)(3a+4b)=(5a)(3a)+(5a)(4b)+$$
$$+(-2b)(3a)+(-2b)(4b)=15a^2+14ab-8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить. Например:

$$(4a^3b^2-12a^2b^3):(2ab)=$$
$$=(4a^3b^2):(2ab)+(-12a^2b^3):(2ab)=2a^2b-6ab^2.$$

4. Разложение многочленов на множители

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов. Например: $3ax + 6ay = 3a(x+2y)$.

При разложении многочлена на множители используются следующие способы.

1) Вынесение общего множителя за скобку. Например:

$$3ax + 6ay = 3a(x+2y).$$

2) Способ группировки. Например:

$$a^3 - 2a^2 - 2a + 4 = (a^3 - 2a^2) - (2a - 4) =$$
$$= a^2(a-2) - 2(a-2) = (a-2)(a^2 - 2)$$

или

$$a^3 - 2a^2 - 2a + 4 = (a^3 - 2a) - (2a^2 - 4) =$$
$$= a(a^2 - 2) - 2(a^2 - 2) = (a^2 - 2)(a - 2).$$

3) Применение формул сокращенного умножения. Например:

$$9x^2 - \frac{1}{16}y^2 = \left(3x - \frac{1}{4}y\right)\left(3x + \frac{1}{4}y\right),$$
$$27x^3 + 8y^6 = (3x + 2y^2)(9x^2 - 6xy^2 + 4y^4),$$
$$z^2 - 14z + 49 = (z-7)^2.$$

5. Алгебраические дроби

Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения.

Примеры алгебраических дробей: $\frac{a^2 + b}{c}$, $\frac{3x - 2y}{a+1}$.

Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение (отличное от нуля) получается равная ей дробь. Например:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2 - b^2}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя. Например:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей.

Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2, поэтому

$$\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{b}{a^2b^2}+\frac{a}{a^2b^2}=\frac{b+a}{a^2b^2}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей. Например:

$$\frac{2a}{3b}\cdot\frac{b^2}{4a}=\frac{2ab^2}{3b\cdot4a}=\frac{1}{6}b,$$

$$\frac{x^2-y^2}{2xy}:\frac{x+y}{4x}=\frac{(x^2-y^2)\cdot4x}{2xy(x+y)}=\frac{2(x-y)}{y}.$$

6. Линейная функция и ее график

Прямоугольная система координат на плоскости — две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины. Эти прямые называются осями координат: прямая, изображаемая горизонтально, — осью абсцисс, а прямая, изображаемая вертикально, — осью ординат.

Начало координат обозначается буквой O, ось абсцисс — Ox, ось ординат — Oy.

Координатная плоскость — плоскость, на которой выбрана система координат.

Функция. Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие по некоторому правилу число y, то говорят, что на этом множестве определена функция.

При этом x называют независимой переменной, а $y(x)$ — зависимой переменной, или функцией.

Линейная функция — функция вида $y=kx+b$, где k и b — заданные числа.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y(x))$.

Например, график функции $y(x)=2x+1$ — множество всех точек плоскости с координатами $(x;\ 2x+1)$.

График линейной функции $y=kx+b$ — прямая линия. При $b=0$ функция принимает вид: $y=kx$, ее график проходит через начало координат.

Прямая пропорциональная зависимость: $y = kx$, где $k > 0$, $x > 0$, k — коэффициент пропорциональности.

Например, в формуле $s = vt$ путь s прямо пропорционален времени t при постоянной скорости v.

Обратная пропорциональная зависимость: $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$, k — коэффициент обратной пропорциональности.

Например, в формуле $V = \frac{m}{\rho}$ объем газа V обратно пропорционален плотности ρ при постоянной массе m.

7. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Общий вид системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, x, y — неизвестные числа.

Решение системы — пара чисел x, y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Например, решением системы $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 5x + y = 7 \end{cases}$ является пара чисел $x = 1$, $y = 2$.

Решить систему — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

При решении систем уравнений применяются следующие способы.

1) Способ подстановки.

Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.

2) Способ алгебраического сложения.

Уравняв модули коэффициентов при одном из неизвестных, почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.

3) Графический способ.

В одной системе координат строят графики уравнений системы и по их взаимному расположению определяют число решений системы; находят координаты общих точек графиков (если они имеются).

8. Комбинаторика

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Например, с помощью трех букв a, b и c можно составить $3 \cdot 3 = 9$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы могут повторяться, и $3 \cdot 2 = 6$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы будут различными.

Ответы

2. 2) $2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2{,}7$. **3.** 2) $40\cdot 0{,}03=6:5$; 4) $3\cdot(2+6)=2\cdot(2\cdot 6)$. **4.** 6130 р. **5.** 2) 10,7; 4) 15,85. **6.** 2) $\frac{9}{56}$; 4) $4\frac{6}{7}$; 6) 0,03. **7.** 2) $-0{,}02$; 4) 3. **8.** 2), 4) Верно; 6) неверно. **10.** Не успеют. **11.** 2) $\frac{1}{2}(c-d)$; 4) $\frac{n+m}{17}$. **12.** 2) 0; $-12{,}1$; 4) 5; $-0{,}675$. **13.** 2) $60m$; 4) $60m+l+\frac{p}{60}$. **14.** 2) 2. **15.** 2) $0{,}33\cdot\frac{x}{0{,}27}$. **16.** 2) $-0{,}1$; $\frac{9}{40}$. **17.** 2) Не может; 4) не может. **18.** $b=2$, $c=0$, или $b=5$, $c=0$, или $b=8$, $c=0$. **19.** $p=6x+3y$. **20.** $m=15a+20b$. **21.** $m=al+cn$. **22.** 810. **23.** $45a+15b+10c$. **24.** 2) $b\neq 0$; 4) $a\neq b$. **25.** 2) Неверно. **26.** $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 км. **27.** $\frac{s}{t-1}$ км/ч. **28.** 2) Верно. **29.** 1) $R=\frac{C}{2\pi}$; 2) $\rho=\frac{m}{V}$; $m=V\rho$; 3) $l=s-vt$, $v=\frac{s-l}{l}$, $t=\frac{s-l}{v}$. **30.** $2{,}6a+5$. **31.** $(7+3{,}5(a-2))$ км. **32.** 2) 40; 4) -41. **33.** 2) $3y-2x$; 4) $8{,}7-2\frac{1}{3}m+1\frac{2}{3}n$. **34.** 2) $3-2{,}7b$; 4) $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}b-3$; 6) 5 р. **35.** 2) $x+5$; 4) $58c+14d$. **36.** 2) 67,048; 4) $-11{,}221$. **37.** 2) 0,28; 4) $7\frac{37}{112}$. **38.** 2) $1{,}4x-2y$; 4) $-1\frac{2}{3}n$; 6) $-11c-4d$. **40.** 2) 4; 4) 2. **41.** Второй. **42.** 2) $4\frac{13}{18}$; 4) $8\frac{5}{9}$. **43.** 2) $a-2b+3c$; 4) $-a+2b-3c$. **44.** 2) $a-b+c-d$; 4) $a-b-c+d-k$. **45.** 2) $8x-2y$; 4) $3a-2$. **46.** 2) $a-2b+(m+c)$; 4) $a+(-m+3b^2-2a^3)$. **47.** 2) $2a+b-(-m-3c)$; 4) $a-(m-3b^2+2a^3)$. **48.** 2) $4a-4b$; 4) $5x-3y$. **49.** 2) $-1{,}16$; 4) -3. **52.** 1) $101a+20b+101c$; 2) $99a-99c$. **53.** 2) $10\frac{7}{18}$.

54. 2) $2mn$; 4) $(a+b)(a-b)$. **55.** 1 ч 40 мин; 50 ч. **56.** 2) 5000 км; 100 км. **57.** 37 440 $м^3$; 187 200 $м^3$; $37\,440m$ $м^3$. **58.** 2) -7. **59.** 113 р. 10 к. **61.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **62.** $4a+8$ и $(a-4)(a+8)$. **63.** 575 р. **64.** $s=3+40t$, $t=\frac{s-3}{40}$. **65.** 28,8 м и 38 м. **66.** 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)(2p+3)(2p+5)$. **67.** $s=6v+15$, $v=\frac{s-15}{6}$. **68.** 2) Верно. **70.** $t=\frac{s-3}{v}$; не успеет. **71.** 4 и 3 или 9 и 1. **72.** $n=50$, $m=42$. **74.** 2) $56=14x$; 3) $\frac{x+5}{2}=5x$. **75.** 2) 3; 4) -2. **77.** 2) Нет; 4) -1. **79.** 2) $a=-5$; 4) $a=-2{,}4$. **80.** 2) Нет; $a=3$. **81.** 2) $x=60$. **82.** 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=1$; 3) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=4$; 4) $x_1=3$, $x_2=-2$, $x_3=1$. **83.** 1) $x=0$; 2) $x_1=2$, $x_2=-2$; 3) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{1}{3}$; 4) $x_1=3$, $x_2=-1$. **86.** 2) $x=-\frac{5}{7}$; 4) $x=\frac{2}{3}$. **87.** 2) $x=-1{,}3$; 4) $x=-0{,}05$. **88.** 2) $x=\frac{3}{7}$; 4) $x=\frac{1}{3}$. **89.** 2) $x=17$; 4) $y=-1$. **90.** 2) $y=0$; 4) $x=0{,}8$. **91.** 2) $x=7{,}5$; 4) $y=24$. **92.** 2) $y=13$; 4) $x=1$. **93.** 2) $x=13$; 4) $x=-153$. **94.** 2) $x=37$; 4) $x=1{,}1$. **97.** 2) $x=8$; 4) $x=7$. **98.** 2) $x=1{,}4$; 4) $x=0{,}108$. **99.** 2) $x=\frac{a-4}{b}$; 4) $x=\frac{a-3}{b}$; 6) $x=\frac{1-a}{b}$. **100.** 1) $x_{1,2}=\pm2{,}5$; 2) $x_{1,2}=\pm3$; 3) $x_{1,2}=\pm0{,}24$; 4) $x_{1,2}=\pm0{,}23$; 5) $x_{1,2}=\pm0{,}7$; 6) $x_{1,2}=\pm0{,}01$. **101.** 3. **102.** 1) 16; 20; 32; 2) 144; 432; 293. **103.** 2; 12; 84. **104.** 25; 27; 29. **105.** 6; 8; 10; 12. **106.** 1) 48 $м^3$; 2) 12 деталей в час. **107.** 1) 6 лет; 2) 8 лет. **108.** 1) 22 и 66 кг; 2) 2200 и 1100 т. **109.** 1) 72 детали; 2) 150 машин. **110.** 1) 9 км/ч; 2) 8 км/ч; **111.** 1) 1 м/с; 2) 37,8 км. **112.** 1) 8,5 км; 2) через 4 ч. **113.** 1) 3000 р. и 4500 р.; 2) 100 и 150 деталей. **114.** 1) 20 км; 5 ч 15 мин; 2) 200 км; 3,5 ч. **115.** 1) 75 км/ч, 80 км/ч или 90 км/ч, 95 км/ч; 2) 30 км/ч, 40 км/ч или $36\frac{2}{3}$ км/ч, $46\frac{2}{3}$ км/ч. **116.** 2) $z=6$; 4) $x=0{,}5$. **117.** 2) $x=4$; 4) $x=-2$. **118.** 1) 15 дней; 2) 32 дня. **119.** 1) 1518 кг; 2) 108 км. **120.** 83,6 кг; 508,8 кг; 1327 кг. **121.** $x=2{,}2$. **122.** $x=7$. **123.** 2) $a=2$; 4) $a=75$. **124.** 2) $a=0$. **125.** 1) $x=2a-3$, a — любое; 2) $x=\frac{a+6}{5}$, a — любое; 3) $x=\frac{7}{3a}$, $a\neq0$; 4) $x=\frac{3}{a}$, $a\neq0$; 5) $x=\frac{8}{a-3}$, $a\neq3$: 6) $x=\frac{1}{a+2}$, $a\neq-2$. **126.** 21 км. **127.** 4 км. **128.** 100 кг. **129.** 5 кг. **130.** 1) $x=13{,}4$; 2) $x=1{,}85$. **131.** 1) $x_1=2$, $x_2=-1$; 2) $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{1}{5}$. **132.** 50 км/ч. **133.** 2) $\frac{1}{4}$ $м^2$; 4) 7,29 $дм^2$. **134.** 2) 27 $дм^3$; 4) 0,064 $м^3$. **135.** 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 4) m^5; 6) $\left(\frac{m}{n}\right)^5$. **136.** 2) $6^2\cdot7^2\cdot3^3$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot(2{,}3)^2$. **137.** 2) $x^4\cdot3^2$; 4) $\left(\frac{a}{b}\right)^2(8a-b)^3$. **138.** 2) $5^{16}b^{31}$; 4) $6^{13}a^k$. **139.** 2) a^2+b^4; 4) $2x^3$. **140.** 2) $(-1{,}25)\cdot(-1{,}25)\times$ $\times(-1{,}25)\cdot(-1{,}25)$; 4) $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$. **141.** 2) 9; 4) 125. **142.** 2) -1; 4) 0. **143.** 2) -125; 4) $-5\frac{1}{16}$. **144.** 2) $\frac{9}{25}$; 4) $12\frac{19}{27}$. **145.** 2) 40; 4) -6. **146.** 2) 164; 4) 23. **147.** 2) $5\cdot10^6+4\cdot10^4+3\cdot10^3+2\cdot10^2+1$; 4) $1\cdot10^7+2\cdot10^6+3\cdot10^5+5\cdot10^4+1\cdot10^2+7$. **148.** 2) 3 532 037; 4) 101 001.

149. 2) Делится на 5, не делится на 3; 4) да. **150.** 2) $7{,}81\cdot10^2$; 4) $8{,}0005\cdot10^4$; 6) $1{,}2748\cdot10^2$. **151.** $S=6k^2$, $V=k^3$. **152.** 2) a^3; 4) c^2+3^2. **153.** 2) $3^2>2^3$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^3>\left(\frac{1}{2}\right)^2$. **154.** 2) Нет; 4) нет. **155.** 2) $3{,}08\cdot10^{13}$. **156.** $5{,}1\cdot10^8$; 10^{12}. **157.** 10 кг. **158.** 2) $(-7)^3$; $(-0{,}4)^3$; $\left(\frac{1}{7}\right)^3$; $(-1{,}5)^2$. **159.** 2) 9; 4) 0. **160.** 2) a^7; 4) $(3b)^7$. **161.** 2) 3^{10}; 4) $(-6)^{12}$. **162.** 2) $\left(-\frac{5x}{6}\right)^{12}$; 4) $(n+m)^{20}$. **163.** 2) 2^7; 4) 2^8; 6) 2^{11}. **164.** 2) 2^2; 4) 2^3; 6) 2^9. **165.** 2) 3^3; 4) 3^5; 6) 3^8. **166.** 2) 3^1; 4) 3^2; 6) 3^4. **167.** 2) $\left(\frac{1}{17}\right)^1$; 4) d^{12}. **168.** 2) $(2a)^2$; 4) $(m+n)^5$. **169.** 2) 6; 4) 25. **170.** 2) 44; 4) 9. **171.** 2) $x=64$; 4) $x=27$; 6) $x=16$. **172.** 2) a^{56}; 4) a^{11}; 6) a^{15}. **173.** 2) a^9; 4) a^{12} **174.** 2) $\frac{1}{16}$; 100. **175.** 2) $(2^4)^5$; 4) $(2^{10})^2$. **176.** 2) $\left(\frac{5}{6}\right)^2$; 4) $(0{,}02)^2$. **177.** 2) $(b^3)^2$; 4) $(x^{10})^2$. **178.** 2) $7^5\cdot6^5$; 4) $4^3\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^3$. **179.** 2) 6^6y^6; 4) $3^3n^3m^3$. **180.** 2) a^6b^3; 4) $(0{,}1)^2c^6$. **181.** 2) $8^3a^{12}b^{21}$; 4) $(-2)^4n^4m^{12}$. **184.** 2) $(2a)^3$; 4) $(2\cdot3)^5$; 6) $(9k)^2$; 8) $(15ab)^3$; **185.** 2) $(a^2b^3)^2$; 4) $(9m)^2$. **186.** 2) $(xy^2z^4)^2$; 4) $(10c^4x^3)^2$. **187.** 2) 1; 4) −1. **188.** 2) 144; 4) 14. **189.** 2) 14; 4) 16. **190.** 2) $\frac{25}{49}$; 4) $\frac{b^3}{512}$. **191.** 2) $\frac{81b^4}{625c^4}$; 4) $\frac{5^6}{7^{12}}$. **192.** 2) $\frac{49}{(2+c)^2}$; 4) $\frac{(a+b)^7}{(a-b)^7}$. **193.** 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^5$; 4) $\left(\frac{5}{a}\right)^7$. **194.** 2) $\left(\frac{4x}{3y}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$. **195.** 2) 3^{8+n}; 4) a^{n+13}. **196.** 2) b^{n+k}; 4) 3^{3n+3m}. **197.** 2) 2^n; 4) 2^{3n+3}. **198.** 2) 3^{4n}; 4) 3^4. **199.** 2) 7; 4) 2. **200.** 2) 1; 4) 4. **201.** 2) $\frac{2}{5}$; 4) $2\frac{1}{3}$. **202.** 2) 0,000064; 15 625; $\frac{729}{64}$; $\frac{1\,000\,000}{729}$. **203.** 2) ≈9 лет. **204.** 2) 1953125; 4) 3,71293. **205.** 1) $21^{12}>54^4$; 2) $10^{20}>20^{10}$; 3) $100^{20}>9000^{10}$; 4) $3^{40}>6^{20}$. **206.** 1) 790; 2) 4; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{7}$. **207.** 2) $3a^2b$; 4) $100n$. **208.** 2) 1. **210.** 2) z^{11}; 4) m^4; 6) $72p^3q^2$; 8) $-\frac{4}{33}x^2y^3$. **211.** 2) 2. **212.** 1) ≈236; 2) ≈5,31; 3) ≈19,5; 4) ≈21,4. **213.** 2) $35m^2n$; 4) $-4b^5$. **214.** 2) $-21a^6b^6c^2$; 4) $-\frac{9}{8}a^4x^3y^4$. **215.** 2) $-15n^2m^3$; 4) $-26a^4b^4c^5$. **216.** 2) $25b^2$; 4) $4a^6$. **217.** 2) $-a^{10}b^5c^5$; 4) $16x^8y^{12}$. **218.** 2) $\frac{1}{81}n^8m^8$; 4) $0{,}16a^6b^4$. **219.** 2) $-2a^4$; 4) $a^2b^5c^2y^2$. **220.** 2) x^5y^5; 4) $-4a^{10}b^{11}$; 6) $-63m^9n^8$. **221.** 2) 204,8. **222.** 2) $6xy$. **223.** 2) a^2b^3. **224.** 2) $(4x^2)^2$; 4) $(9x^3y)^2$; 6) $(1{,}1a^4b^2)^2$. **225.** 2) $(2b^2)^3$; 4) $(2a^3b^2)^3$; 6) $(-0{,}3xy^5)^3$. **226.** 2) $n=3$; 4) $n=3$; 6) $n=6$. **227.** 2) $2x^2-11x+3$; 4) a^5-a^4+a; 6) $4a^3b-2a^2b^2-5ab^3$. **228.** 2) $8a^2b^3-24a^4b-2a^2b^3$; 4) $-bc^5+5x^2y^4$. **229.** 2) 0. **230.** 2) −7,6;

4) -252. **231**. $x=\frac{1}{8}$. **232**. 2) Да. **233**. 2) Да. **234**. 800 кг, 160 кг, 450 кг. **235**. 2) $\frac{13}{16}a^2b$. **236**. 2) $2a+b$; 4) $2a^2-3b^2$. **237**. 2) $-y$; 4) $3{,}8a^2$. **238**. 2) a^2; 4) $2xy-2{,}2y^2$. **239**. 2) $x^3-x^2y-6xy^2$. **240**. 2) xy; 4) $10mn^2k$. **241**. 2) $13\frac{3}{4}$. **242**. 2) $x=0{,}93$. **243**. 1) 340; 40 и 20 кг; 2) 1:500. **244**. 2) $3x+3y$; 4) $3x+1$. **245**. 2) $0{,}1c^2$; 4) $6a+22b$. **246**. 2) $6b^2-6ab-2a^2$; 4) $3x^2$. **247**. 2) $-0{,}07x^2+0{,}06y^2$; $0{,}27x^2-0{,}1y^2$; 4) $0{,}61a^3+1{,}12b^3$; $1{,}39a^3-0{,}88b^3$. **248**. 2) $3b-5b^2$. **249**. 2) q^3; 4) $-5ab+8b^2$. **250**. 2) $x=-1$; 4) $x=-\frac{27}{34}$. **252**. 2) $3a^3$. **253**. 62. **254**. 93. **255**. 2) $-\frac{1}{3}m+\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}p$; 4) $-15x^3-35x^2+5x$. **256**. 2) $75a^2b^2+15a^2b$; 4) $3x^2y^3-6x^4y^2$. **257**. 2) $16ab^2-24a^2bc+8abc^2$; 4) $x^3yz+2xy^3z+3xyz^3$. **258**. 2) $7b-3a$; 4) $-14p-9$. **259**. 2) $6b^2-a^2b$. **260**. 2) 5; 4) 204. **261**. 2) $x=-3\frac{1}{3}$; 4) $x=-\frac{7}{36}$. **262**. 2) $x=1$. **263**. 20, 20 и 16 км. **264**. 2) z^2+3z-4; 4) $bc+5b+4c+20$. **265**. 2) $-a^2+8a+20$; 4) $p+pq-q-q^2$. **266**. 2) $30x^4-61x^2y^2+30y^4$; 4) x^3+5x^2+7x+3. **267**. 2) $27a^3-8b^3$; 4) $27a^3+8b^3$. **268**. 2) $a^3+3a^2b-ab^2-3b^3$; 4) $12x^3-29x^2+7x+6$. **269**. 2) 24; 4) 12,08. **271**. 2) $12\frac{2}{3}$. **272**. 2) $x=a-9$; 4) $x=4-a$. **275**. 76 м^2. **276**. 221 см^2. **278**. 2) y^4; 4) 1. **279**. 2) $9m$; 4) $\frac{4}{5}b$. **280**. 2) 8; 4) 7. **281**. 2) 3; 4) -3. **282**. 2) $-\frac{5}{3}p$; 4) $0{,}4c$. **283**. 2) $7m^6$; 4) $1\frac{1}{6}$. **284**. 2) $\frac{9}{4}ab^2$; 4) $3ab$. **285**. 2) $81x^4y$; 4) $x^7y^{11}z^3$. **286**. 2) $2b-1$; 4) $2-x$. **287**. 2) $4a-3b$; 4) $1-c$. **288**. 2) $-\frac{2}{3}cd-1$; 4) $-\frac{1}{4}ab+\frac{3}{4}a^2$. **289**. 2) $4-2x-3y$; 4) $a+3a^2b-2$. **290**. 2) 1; 4) b^3+4b. **291**. 2) $-3a$; 4) $\frac{17}{9}y-\frac{32}{9}b$. **292**. 24. **293**. -3. **294**. 2) 270; 4) 4. **295**. 2) 3; 4) 128. **296**. 2) $\frac{1}{35}$; 4) $1\frac{7}{9}$. **297**. Верно. **298**. 2) $(-10b^2)^3$; 4) $(-0{,}2xy^3)^3$. **299**. 2) $-7{,}5n^5m^7k^7$; 4) $-7{,}5a^5b^7c^7$. **300**. 2) $-2b$; 4) $8x^3$. **301**. 2) $a^3b^7+\frac{3}{4}a^4b^4$; 4) $5b^{10}y^6-$ $-4{,}5b^7y^7+22{,}5b^5y^{10}$. **302**. 2) $0{,}09-m^2$; 4) $0{,}04a^2-0{,}25x^2$. **303**. 2) $-20b^2+$ $17bc-16by-3c^2+4cy$; 4) $9a^2-24ab+15b^2+12ac-20bc$. **304**. 2) $9x^3$; 4) $-9x^2-3x$. **305**. 2) $x=0{,}36$. **306**. 125%. **307**. $\frac{1}{400}$. **308**. 2) x^{5n+9}; 4) 3^{5n+2}. **309**. 2) $n=7$; 4) $n=5$. **310**. 28 учеников. **311**. $5\frac{1}{7}$ ч. **312**. $k+2m-n$. **313**. 2) $x=0{,}01$. **314**. 1) 330; 2) 315. **317**. 1061,21; 1104,08; 1218,99. **318**. 2) 177,45. **319**. 2) $3(a-x)$; 4) $6(a+2)$. **320**. 2) $7(3a-b+6)$;

4) $3(3x-y+5z)$. **321.** 2) $c(d+b)$; 4) $x(1-y)$. **322.** 2) $3b(d-1)$; 4) $3p(2k-1)$. **323.** 2) $a^3(a-3)$; 4) $x^2y^2(y-x)$. **324.** $4x^2y(5xy+1)$. **325.** 2) $2x^2y^2(y^2-x^2+3xy)$. **326.** 2) $x(y-x+z)$; 4) $4b(b+2a-3a^2)$. **327.** 2) 18 700; 4) −1,62. **328.** 2) $(a+5)(b-c)$; 4) $(y-3)(1+b)$. **329.** 2) $(m-3)(3n+5m)$; 4) $(c-d)(7a-2b)$. **330.** 2) $(x+y)(a^2+b^3)$; 4) $(a^2+2b^2)(x+y)$. **331.** 2) $(b-c)(a+c)$; 4) $(x-y)(2b+1)$. **332.** 2) $(a-2)(6-a)$; 4) $(m-2)(a^2-b)$. **333.** 2) $(x-y)(x-y-3)$; 4) $(b-3)(a-1+b)$. **334.** 2) 16; 4) 48. **335.** 2) $2(a-b)(3a-2b)$; 4) $(a-b)^2(2a-b)$. **336.** 2) $2a^2(a+1)(a+2)$; 4) $5p(p+q)(2p-q)$. **337.** 1) $x_1=0$, $x_2=2$; 2) $x_1=0$, $x_2=-3$; 3) $x_1=0$, $x_2=-0{,}6$; 4) $x_1=0$, $x=1\frac{3}{4}$; 5) $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=4$; 6) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3}{4}$. **339.** 2) $(m-n)(1+p)$; 4) $(x-y)(1+2a)$. **340.** 2) $(p-1)(4q+1)$; 4) $(p-1)(4q-1)$. **341.** 2) $(c+d)(a-3b)$; 4) $(a-3b)(x+5y)$. **342.** 2) $5(x+y)(2x+1)$; 4) $(3z^2+2y^2)(16x-5y)$. **343.** 2) $(2nk+5m)\times(3mk-7n^2)$; 4) $(5c-3x)(8b-3c)$. **344.** $(y-x^2)(b+c-a)$; 4) $(a-b)\times(x^2+y-x)$. **345.** 2) −0,625; 4) −0,33. **346.** 2) 12 500; 4) 28. **347.** 1) $x_1=4$, $x_2=-1$; 2) $x_1=4$, $x_2=-7$; 3) $x_1=2$, $x_2=-0{,}2$; 4) $x_1=-4$, $x_2=\frac{1}{3}$. **348.** x^2-3x. **349.** 1) $(x+1)(x+2)$; 2) $(x-2)(x-3)$; 3) $(x+1)(x-8)$; 4) $(x-1)(x+10)$. **350.** 1) $(a-1)(a^2+3a+3)$; 2) $(x-1)(x+3)(x-2)$; 3) $(a+1)(a^3+a^2-a+1)$; 4) $(a-1)(a+1)(2a^2+1)$. **351.** 2) $\left(\frac{1}{3}ab\right)^2$; $(0{,}5xy)^2$; $(0{,}4m^2)^2$; $(0{,}9n^3)^2$. **352.** 2) $(2a-3)(2a+3)$; 4) $(9a-4b)(9a+4b)$. **353.** 2) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}b\right)$; 4) $(0{,}3x-0{,}4y)(0{,}3x+0{,}4y)$. **354.** 2) $(xy^2-4)(xy^2+4)$; 4) $(5a-3b^3)\times(5a+3b^3)$. **355.** 2) $(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4)$; 4) $(b-3)(b+3)(b^2+9)$. **356.** 2) c^2-9d^2; 4) $9m^2-4n^2$. **357.** 2) a^4-b^6; 4) m^6-n^6. **358.** 2) $4m^8-25n^4$; 4) $1{,}44a^4-0{,}09b^4$. **359.** 2) 4896; 4) 2491. **360.** 2) 1584; 4) 39 999. **361.** 2) $(m-n-k)(m-n+k)$; 4) $3(x-y)(3x+y)$. **362.** 2) $(a-c)(a+2b+c)$; 4) $8(b-a)(a+b)$. **363.** 2) 980; 4) 5,87; 6) $37\frac{1}{3}$. **364.** 2) $x=-3\frac{2}{3}$; 4) $x=2$. **365.** 2) $16x^4-y^4$; 4) $81a^4-16b^4$. **366.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{1}{3}$. **369.** 1) $6b(a-b)(a+b)$; 2) $a^2(2b-1)(2b+1)$; 3) $a^2b^2(2ab-1)(2ab+1)$; 4) $(3a^2-2b^2-ab)\times(3a^2-2b^2+ab)$. **370.** 2) $x^2-2xy+y^2$; 4) x^2+2x+1. **371.** 2) $9x^2+12xy+4y^2$; 4) $25z^2-10zt+t^2$. **372.** 2) $0{,}16b^2-0{,}4bc+0{,}25c^2$; 4) $\frac{1}{16}a^6-\frac{2}{5}a^3+\frac{16}{25}$. **373.** 2) $9b^4+12ab^3+4a^2b^2$; 4) $16x^2y^2+4xy^3+0{,}25y^4$. **374.** 2) 1681; 4) 9604. **375.** 2) 3249; 4) 1 002 001. **376.** 2) 1,008; 4) 1,022; 6) 0,988; 8) 0,978. **377.** 2) $x=\frac{1}{16}$; 4) $x=9b^2$. **378.** 2) $x=\frac{1}{4}b^2$; 4) $x=1$. **379.** 2) $(1+c)^2$; 4) $(9-x)^2$. **380.** 2) $(10-3a)^2$; 4) $(a+5b)^2$. **381.** 2) $(p^2-q)^2$; 4) $(5a^3+3b)^2$. **382.** 2) $(b-3)^2(b+3)^2$; 4) $(2-ab)^2(2+ab)^2$.

383. 2) $-(3-b)^2$; 4) $-3(a+2b)^2$. **384.** 2) $x=2$; 4) $x=-0{,}5$. **385.** 2) $4xy$; 4) $2(4a^2+b^2)$. **387.** 2) 60 000; 4) 216. **388.** 2) 10 000; 4) $\frac{2}{3}$. **389.** 1) $x^3+6x^2+12x+8$; 2) $27-27y+9y^2-y^3$; 3) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$; 4) $27b^3+54b^2a+36ba^2+8a^3$. **390.** 1) $(5+a)^3$; 2) $(m-4)^3$; 3) $(x^2-y)^3$; 4) $(c^2+d^2)^3$. **391.** 4 или 6. **392.** 2) $3(x-2)(x+2)$; 4) $4x(2-x)(2+x)$; 6) $2a^2b(4a-1)(4a+1)$. **393.** 2) $2(m-n)^2$; 4) $8(p-1)^2$; 6) $12m^3n(m+1)^2$. **394.** 2) $(x+1)^2(x^2+2x-1)$; 4) $(3+y)^2(9-y^2-6y)$. **395.** 2) $(1-x+y)\times$ $\times(1+x-y)$; 4) $(2-x-y)(2+x+y)$. **396.** 2) $(a+b)(a-b-1)$; 4) $(x+1)^2\times$ $\times(x-1)$; 6) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)$. **397.** 2) $\frac{5}{8}$; 4) $1\frac{3}{8}$. **398.** 2) 740; 4) -9700. **400.** 2) 474. **401.** 1) $x_1=5$, $x_2=-\frac{5}{3}$; 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{2}{5}$; 3) $x_1=1$, $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$. **404.** 1) a^3-8; 2) b^3+x^3; 3) $8a^3+27$; 4) a^6-1. **405.** 1) $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$; 2) $(xy+4)(x^2y^2-4xy+16)$; 3) $(2m+n^3)\times$ $\times(4m^2-2mn^3+n^6)$; 4) $(c^2-5d)(c^4+5c^2d+25d^2)$. **408.** 2) $(x-y)\times$ $\times(4+3x-3y)$; 4) $(b-a)(b-a-1)$. **409.** 2) $2a(a+2)$; 4) $(a-2b)(a+2b)$. **410.** 2) $(p-q)(c-a+b)$. **411.** 2) $(2m-n)(7a+4b)$; 4) $(5a-2b+1)\times$ $\times(5a+2b-1)$. **412.** 2) 906. **413.** 2) $46\frac{2}{3}$. **415.** 1) $(m-k)(n-m+k)$; 2) $(c-1-$ $-d-e)(c-1+d+e)$. **416.** 2) $-4(x^2+6)$; 4) $(2x+9)(8x+5)$. **417.** 2) $y=3$; 4) $y=\frac{2}{3}$; 5) $x=2$. **418.** Площадь прямоугольника меньше площади квадрата на 144 м². **419.** 240 км. **420.** 1 ч 12 мин. **421.** 2) $-390{,}5$. **422.** 1) a^2-b^2- $-2bc-c^2$; 2) $a^4-b^2+2bc-c^2$. **423.** 1) 5; 2) 26. **424.** 1) $x=2$; 2) $x=3$; 3) $x=2$; 4) $x=0{,}2$. **426.** Верно. **427.** $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$. **428.** $\frac{c^3+d^3}{2cd}$. **430.** 2) $b\neq0$; 4) $a\neq3$. **431.** 2) $v=\frac{s-s_0}{t}$. **432.** 2) $a=9$; 4) $a=-cb$; 6) $a=4m^2$. **434.** 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2. **435.** 2) $-\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$. **436.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **437.** 2) $\frac{2}{a(a-b)}$; 4) $\frac{1}{m-n}$. **438.** 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. **439.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) 5; 6) $-\frac{1}{4}$. **440.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. **441.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$. **442.** 2) $10-7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **443.** 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **444.** 2) $n-m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. **445.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **446.** 2) $a+b$; 4) $\frac{x-y}{3-2x}$. **447.** 2) $\frac{a}{2}$; 4) $y^2(x-y)$. **448.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **449.** 1) -25; 2) 0,5. **450.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) 2; 4) $-\frac{1}{3}$. **451.** 2) $\frac{10}{14}$, $\frac{3}{14}$; 4) $\frac{2a}{2b}$, $\frac{a}{2b}$. **452.** 2) $\frac{3b^2}{4ab}$, $\frac{2a^3}{4ab}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{c}{6ab}$; **453.** 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$, $\frac{a(3-a)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$, $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **454.** 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$, $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8(x+y)}$, $\frac{x}{8(x+y)}$. **455.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$, $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$, $\frac{3}{x^2-y^2}$.

456. 2) $\frac{(a-b)^2}{5(a^2-b^2)}$, $\frac{5(a^2+b)}{5(a^2-b^2)}$; 4) $\frac{5c}{(c-2)^2}$, $\frac{6(c-2)}{(c-2)^2}$. **457.** 2) $\frac{18ab}{6a}$, $\frac{7}{6a}$; 4) $\frac{4a^2b^3}{4ab^2}$, $\frac{3b}{4ab^2}$, $\frac{8}{4ab^2}$; 6) $\frac{ab(a^2-b^2)}{ab(a-b)}$, $\frac{3(a-b)}{ab(a-b)}$, $\frac{ab}{ab(a-b)}$. **458.** 2) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$, $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$; 4) $\frac{3ac(2a+3)}{c(4a^2-9)}$, $\frac{4ac(2a-3)}{c(4a^2-9)}$, $\frac{5b}{c(4a^2-9)}$. **459.** 2) $x=\frac{1}{3}$; 4) $x=1\frac{1}{6}$. **460.** 1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{(a-3)^2}{a^3-27}$, $\frac{a^2+3a+9}{a^3-27}$; 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$, $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$; 3) $\frac{2m(m+n)}{(m+n)(m-n)^3}$, $\frac{2n(m^2-n^2)}{(m+n)(m-n)^3}$, $\frac{(m-n)^2}{(m+n)(m-n)^3}$; 4) $\frac{k-1}{(k-1)(k+1)^3}$, $\frac{2(k+1)^2}{(k-1)(k+1)^3}$, $\frac{3(k^2-1)}{(k-1)(k+1)^3}$.
461. 1) $x^{4n}-y^{4n}$; 2) $a^{2n}-b^{2n}$. **462.** 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$. **463.** 2) $\frac{3}{5b}$; 4) $\frac{3ad-b}{12d}$. **464.** 2) $\frac{4c^2+2c-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **465.** 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{b(cd^2+d+c)}{c^2d^2}$. **466.** 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. **467.** 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. **468.** 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **469.** 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{2(4a+4b-35)}{2b-5}$. **470.** 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **471.** 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$; 4) $\frac{4+7m-7n}{(m-n)^2}$. **472.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **473.** 2) $\frac{2(2x-y)}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{a^2-a+1}{a(4a^2-1)}$; 6) $\frac{6-7a}{(a-2)(a^2-4)}$. **474.** 2) -1; 4) $-\frac{5}{9}$. **475.** 2) $\frac{2}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}$. **476.** 2) $x=1$; 4) $z=15$. **477.** 1) $\frac{2}{a^3-1}$; 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 3) $\frac{3ab}{a^3+b^3}$; 4) $\frac{6m}{27-m^3}$. **478.** 1) 5; 2) $1\frac{9}{19}$. **479.** 1) $\frac{1-2b^n}{a^{2n}-b^{2n}}$; 2) $\frac{a^n-b^n}{a^n(a^n+b^n)}$. **480.** 1) $\frac{4}{13}$; 2) 7,5. **481.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **483.** 2) $\frac{a}{bc}$; 4) $\frac{ac}{b}$. **484.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **485.** 2) $\frac{2y}{5c^2}$; 4) $\frac{2a^2d^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **486.** 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $\frac{a(a+b)}{3b}$. **487.** 1) $\frac{b}{3(1+a)}$; 2) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 4) $\frac{5}{3(a-b)}$. **488.** 2) $-2{,}25$; 4) -2. **489.** 2) Верно. **490.** 2) $b-3$; 4) $(a-1)(2a-1)$. **491.** 2) $x=-4$: 4) $x=49$. **492.** 1) $x=\frac{a}{a-b}$; 2) $x=b(a+b)$; 3) $x=\frac{b(a+b)}{a-b}$; 4) $x=\frac{b(a+b)}{a}$. **493.** 1) $\frac{1}{8}\times$ $\times(a^2-b^2)$; 2) $\frac{1}{7}(a^2-b^2)$; 3) $n+m$; 4) $\frac{m+n}{2(p^2-pc+c^2)}$. **495.** 2) $\frac{2}{3}(a+1)$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **496.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$. **497.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$. **498.** 2) $\frac{1}{6(c+d)}$;

4) $\frac{m+5}{m-2}$. **499.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **500.** 2) $\frac{ab-2}{a+1}$; 4) $n+2$. **501.** 2) $\frac{a^2+4}{4a}$; 4) $\frac{m^2}{m-n}$. **502.** 2) $1\frac{5}{6}$; 4) 2. **503.** 1); $\frac{d-c}{d}$; 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 3) $\frac{b(x-b)}{x+b}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **506.** 2) $x=-2$; 4) $x=0$. **507.** 2) $x=\frac{2a^2}{3b}$; 4) $x=\frac{(a-1)^2}{a}$. **508.** 2) $x=0{,}5$; 4) $x=-2\frac{2}{15}$. **509.** 2) 2,5. **510.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2+9nm-4m^2}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a(a+2)}$. **511.** 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1. **512.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **513.** $\frac{V_1 p}{V}$ кг. **514.** $\frac{us}{v}$ км. **515.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}s$ км. **516.** $\frac{ab}{a+b}$ ч. **517.** $\frac{ab}{b-a}$ ч. **518.** 2) $R_1=\frac{RR_2}{R_2-R}$. **519.** 10 м. **520.** 1) $\frac{b}{4a^2+2a+1}$; 2) $\frac{9a^2-3ab+b^2}{b}$; 3) $\frac{6-c}{6+c}$; 4) $\frac{5+7b}{5-7b}$; 5) $a+1$. **521.** 1) $\frac{2}{a^3-1}$; 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 3) $\frac{3ab}{a^3+b^3}$; 4) $\frac{6m}{27-m^3}$. **530.** $D(1; 5)$. **531.** 5. **532.** −2. **533.** а) (5; −3), (−1; 2), (0; −4), (−2; 0), (−2; −3); б) (−5; 3), (1; −2), (0; 4), (2; 0), (2; 3); в) (−5; −3), (1; 2), (0; −4), (2; 0), (2; −3). **535.** (2; 2), (−2; 2), (−2; −2), (2; −2). **537.** 2) 4; 2; 0; −2; −4; 4) −36; −16; 4; 24; 44. **538.** 2) $t=4$. **539.** 2) −9; 103; −1,25. **540.** 2) $x=-0{,}5$, $x=3{,}1$, $x=-14$. **541.** 2) Верно; 4) неверно. **542.** 2) $y(-3)=3$ верно, $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ верно, остальные неверны. **549.** 2) Нет; 4) да. **550.** 2) Да; 4) нет. **551.** $P=4x+6$, $S=x(x+3)$; 1) $P(5)=26$, $S(5)=40$; $P(2{,}1)=14{,}4$, $S(2{,}1)=10{,}71$; 2) $x=8$, $x=10$. **552.** $m(V)=2600V$; 1) 3900 кг, 2600 кг; 2) 0,2 м^3, 3 м^3. **556.** $y=20n$, $y(6)=120$, $y(11)=220$. **557.** $s=80t$, $s(3)=240$, $s(5{,}4)=432$. **564.** C, D. **567.** В 2 раза. **568.** 5 т. **571.** $k=-2$. **572.** $y=14x$. **580.** 2) $x=-1$, $x=3$, $x=\frac{1}{3}$. **585.** 2) Нет; 4) нет. **595.** 2) $k=-3$. **596.** (13; 0), (0; 13), 84,5. **597.** 2) (2; 8); 3) (2; −3). **598.** $k=2\frac{2}{9}$, $b=5\frac{5}{9}$. **599.** Нет. **604.** 2) −20. **607.** 2) (0; 4), (2; 0); 4) (0; −0,6), $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ (0; −5), (7,5; 0). **615.** 2) $x=\frac{y-2}{3}$, $y=3x+2$; 4) $x=\frac{3-7y}{2}$, $y=\frac{3-2x}{7}$. **616.** 2) $\left(x; \frac{2+x}{3}\right)$, где x — любое число. 4) $\left(x; \frac{6x+2}{9}\right)$, где x — любое число. **617.** 2) (3; 4); 4) (2; 7); (9; 2). **621.** (1; 2); (4; 2). **622.** $c_1=-1$, $c_2=18$. **623.** $a=5$, $b=-9$. **624.** 1) Можно. **625.** 1 и 8 или 9 и 3. **626.** 2) $x=10+y$, $y=x-10$; 4) $x=11-3y$, $y=\frac{11-x}{3}$; 6) $x=\frac{5y-3}{3}$, $y=\frac{3+3x}{5}$. **627.** 2) (1; −1); 4) $\left(-\frac{1}{3}; -5\frac{2}{3}\right)$; 6) (1; −1). **628.** 2) (−73; −30); 4) $\left(1\frac{2}{11}; 8\frac{6}{11}\right)$; 6) $\left(-7\frac{2}{9}; -4\frac{1}{3}\right)$. **629.** 2) (4,4; 2,4); 4) (3; 4). **630.** 2) (−2;−2); 4) (−17; 5). **631.** 2) (15; 12); 4) (5; 4). **632.** 2) $\left(3\frac{1}{11}; 1\frac{9}{11}\right)$; 4) $\left(-\frac{23}{27}; \frac{1}{27}\right)$; 6) (1; −1). **633.** 2) $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$;

4) (−1; 6). **634.** 2) (3; 1); 4) (−4; −3). **635.** 2) (2; 6); 4) (−12; 10). **636.** 2) (4; 4); 4) (2; 7). **637.** 2) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}\right)$; 4) (2; 5). **638.** 2) (−2; 3); 4) (−6; 0). **639.** 2) (5; 11); 4) (4; −6). **640.** 1) (3; 1); 2) (7; 5); 3) (2; 0); 4) (5; 0). **641.** 2) (0; 3), (−1; 0); 4) (0; 6), (2,4; 0). **644.** 2) (1; −3); 4) (3; 9). **645.** 2) (1; −1); 4) (3; 1). **646.** 2) (2; −4); 4) (3; −2). **653.** 2 р.; 0,3 р. **654.** 2,7 м, 1,6 м. **655.** 21 ц, 14 ц. **656.** 100 и 200. **657.** 40 и 30. **658.** 38 га, 34 га. **659.** 9 кг, 6 кг. **660.** 1000 р., 600 р. **661.** 62 л, 78 л. **662.** 19 л, 14 л. **663.** 10 км/ч, 2 км/ч. **664.** 30 км/ч, 35 км/ч. **665.** 200 т, 260 т. **666.** 552 и 672. **667.** 39. **668.** 48. **669.** 8 л, 5 л, 5 л. **670.** 16 км. **671.** 2) $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; 4) (2; −7). **672.** 2) (−88; 12). **673.** 1) $\left(3\frac{1}{2}; 1\frac{1}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; 3) $(-2a;\ a)$, где a — любое число; 4) нет решений; 5) (2,5; −3,5); 6) (−5; 4,5). **676.** 1) $a \neq 3$; 2) $a = 3$, $c = 15$; 3) $a = 3$, $c \neq 15$. **677.** 1) 1 и 5; 5 и 3; 3 и 4; 7 и 2; 9 и 1; 2) 5 и 3. **678.** 35 и 9 лет. **679.** 350 км, 8 ч. **680.** 14400 р., 17500 р. **681.** 460 $м^3$, 560 $м^3$. **682.** 52 м, 34 м. **683.** 36 строк, 50 букв. **684.** 1) (3; 4); 2) $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right)$; 3) (3; −2); 4) (17,6; −14,4). **685.** 18000 р., 27000 р. **686.** 1) Один; 2) один. **687.** Двумя. **688.** Три. **689.** 1) 23, 32; 2) 23, 32, 22, 33. **690.** Три: п, о; п, л; о, л. **691.** 1) Тремя; 2) одним; 3) тремя. **692.** Шестью. **693.** Шесть: АМС; АСМ; САМ; СМА; МАС; МСА. **694.** Девять: бб; кк; сс; бк, кб; бс; сб; кс; ск. **695.** 23, 32, 24, 42, 34, 43; 2) 23, 32, 24, 42, 34, 43, 22, 33, 44. **696.** 1) 10, 12, 20, 21; 2) 10, 12, 20, 21, 11, 22. **697.** 111, 112, 121, 122, 211, 221, 222. **698.** 1) 102, 120, 201, 210; 2) 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222. **699.** 39. **703.** 6. **704.** 12. **705.** 15. **706.** 16. **707.** 25. **708.** 42. **709.** 56. **710.** 1) 36; 2) 30. **711.** 1) 30; 2) 25. **712.** 1) 3; 2) 6; 3) 10. **713.** 1) 6; 2) 12; 3) 20. **714.** х, р; х, а; х, г; к, р; к, а; к, г. **715.** х, р; х, г; к, р; к, г; с, р; с, г. **718.** 1) 8; 2) 4. **719.** 1) 64; 2) 48. **720.** 1) 125; 2) 60. **721.** 1) 100; 2) 48. **722.** 100. **723.** 120. **724.** 1) 720; 2) 990. **725.** 1) 72; 2) 504; 3) 3024. **726.** 24. **727.** 720. **728.** 1) 66; 2) 666. **729.** 1) 276 способами; 2) 300 способами. **730.** 1) 78, 79, 87, 89, 97, 98; 2) 78, 79, 87, 89, 97, 98, 77, 88, 99. **731.** 789, 798, 879, 897, 978, 987. **732.** 1) 80, 89, 90, 98; 2) 80, 89, 90, 98, 88, 99. **733.** 1) А, В; А, Г; В, Г; 2) а, б; б, а; а, в; в, а; б, в; в, б. **734.** 1) 60-ю; 2) 120-ю. **735.** 4 (столько же, сколько способов выбрать одного из четверых). **736.** 2) 0,01; 4) −20; 6) $\frac{1}{3}$. **737.** −128. **738.** $100a + 10b + c$, $100c + 10b + a$. **739.** $1000a + c$. **740.** 2) 0. **741.** 2) $x = 2$; 4) $x = 21$. **742.** 2) $x = 7\frac{1}{2}$; 4) $x = \frac{21}{22}$. **743.** 2) $x = 2$; 4) $x = 2\frac{2}{7}$. **744.** 2) $x = 2$; 4) $x = 12\frac{1}{7}$. **745.** 40; 36; 43. **746.** 9 лет. **747.** 48 км. **748.** 120 км. **749.** 2) $\frac{1}{7^3}$; 4) $2b$; 6) 0. **750.** 2) $-a^4b^2c^3$; 4) m^6n^6. **751.** 2) $0{,}64a^2c^4$; 4) $\frac{1}{16}a^4b^8c^{12}$. **752.** 2) $4a^2 + 5ab + b^2$; 4) $8a^2$. **753.** 2) $\frac{1}{6}m^4n^2 - \frac{1}{4}m^3n^3 +$

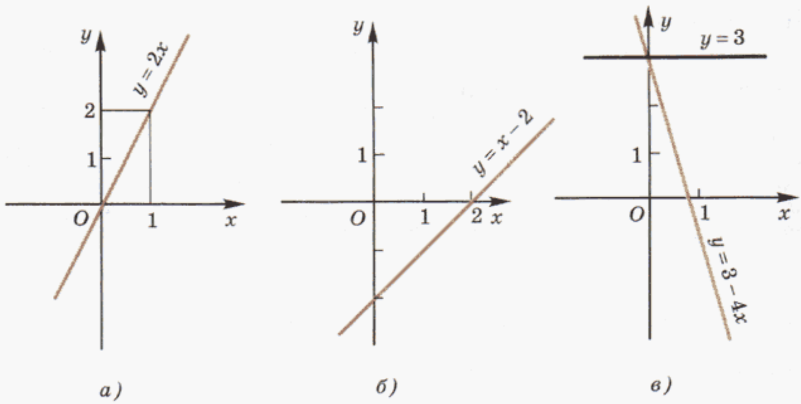


Рис. 34

$+\frac{1}{2}m^2n^4$; 4) $m^4n-\frac{7}{8}m^3n^2+\frac{1}{8}mn$. **754.** 2) $12a^3b-3a^2-24a^2b^3+6ab^2+$ $+8ab^3-2b^2$; 4) m^2-n^2+4n-4; 6) $1{,}5a^3+11{,}5a^2-a-1$. **755.** 2) $-\frac{1}{7}$; 4) $1\frac{1}{8}$. **756.** 2) $1-16b^4$; 4) $\frac{a^2}{4}$. **757.** 2) $16ab$; 4) $-28b$. **758.** 2) $4(1+b)^2$; 4) $3(1+a)(7-3a)$. **759.** 2) $2-a$; 4) $\frac{3(b-2)}{b+2}$. **760.** 2) $\frac{b^2+a+b}{a^2b^2}$; 4) $\frac{40y^2+36xy-75x^2}{60x^2y^3}$. **761.** 2) $\frac{a^3+b^3}{a^2b^3}$; 4) $\frac{b}{9}$. **762.** 2) $-\frac{1}{2x+3y}$; 4) $\frac{1}{m-n}$. **763.** 2) $\frac{2(a-b)^2}{b^2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **764.** 2) $\frac{1+9b}{ab-2}$; 4) $\frac{d(2c+d)}{3(c-2d)}$. **765.** 2) $\frac{1-2a^2}{(a+1)(1-2a)}$; 4) b. **766.** 2) $\frac{1+b}{1-b}$. **772.** 2) $\left(\frac{11}{14};\ 1\frac{5}{14}\right)$. **773.** 2) (3; 3); 4) (−1; −6); 6) $\left(\frac{1}{3};\ -1\right)$. **774.** 2) (3; 4); 4) $\left(\frac{7}{12};\ \frac{1}{12}\right)$. **775.** 2) (−2; 4); 4) (3; 1). **776.** 20 л, 5 л. **777.** 20 р., 30 р. **778.** $\frac{5}{8}$. **779.** 4 км/ч, 20 км/ч. **780.** 2) $x=1$; 4) $-\frac{2}{3}$. **781.** 150. **782.** $k=\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$. **784.** 2) (3; 1). **785.** 200 р., 150 р. **786.** 11 и 5 лет. **787.** 21 км. **788.** 2) $x_1=-3$, $x_2=2$, $x_3=4$; 4) 0; −36; 5) x^2-6x+8. **789.** 2) $A=0$ при $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{3}$; $B=0$ при $x_1=1$, $x_2=5$; 4) $x=\frac{1}{3}$. **790.** 2) Проходит через точку (−3; 5), не проходит через точку (−1; 2); 4) $x=-\frac{1}{2}$; 6) (−3, 5). **791.** 2580 ц. **792.** 80 га. **793.** 2) b^3; 4) $8a^6$. **794.** 2) $2a^2(a^2-1)$; 4) $(3b-14a)(16a-7b)$. **795.** 1) $(ab^2c-1)(a^2b^4c^2+ab^2c+1)$; 3) $(2ab+5c)\times$ $\times(4a^2b^2-10abc+25c^2)$; 3) a^2; 4) $16a^2$. **796.** 1) $(ab-cd)(4b+15c)$; 2) $(m-1)(m^2+1)$; 3) $(a+b-c)(a+b+c)$; 4) $(1-a+b)(1+a-b)$; 5) a^2; 6) $(m-1)^3$. **797.** 1) $(a+1)(a-3)$; 2) $(b-3)(b-4)$; 3) $(a-2)(a^2+3a+6)$;

4) $(x-1)(x-2)(x+3)$; 5) $(m-2)(m-5)$; 6) $(m+1)(m-2)$. **798.** 1) $\frac{1}{m(1-m^2)}$; 2) $\frac{x^2y^2-x^2-y^2}{x^2y^2(x^2+y^2)}$; 3) $\frac{12m}{5n}$; **799.** 1) $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$; 2) 1; 3) 1. **800.** 1) $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; 2) $\frac{2q(2q-p)}{p+2q}$; 3) $\frac{1}{2-3a}$; 4) $\frac{1}{2-p}$. **801.** 1) $b=7$; 2) $b=1$; 3) $b=11$; 4) $b=11{,}5$. **802.** 1) $y=-3$; 2) $y=x$; 3) $y=-x+4$; 4) $y=-5x+7$. **803.** 12 км. **804.** 60 км, 12 км/ч, 5 ч. **805.** 8 лошадей, 30 дней. **806.** 3 ч, 9 ч. **810.** 2400 р.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. 1) а) 120,3; б) $-3\frac{1}{6}$; 2) $4y+3x$, $\frac{1}{3}$; 3) $10a+5b$.

Глава II. 1) Да, $x=-4$; 2) $x=\frac{1}{3}$, б) $x=3$; 3) 7 м и 8 м.

Глава III. 1) 5^5, 3^2, 2^{12}, 6^5; 2) $3b+d$; 3) $-1{,}25a^4b^3c^2$; $0{,}7m-2n-1$; 4) $3m^2-4$, $-3{,}8125$.

Глава IV. 1) $2a^2+12a$; 2) $y(x-2)$; $(4a-9)(4a+9)$; $3x^2(1-2x)$; $(x-5)^2$; $(x-1)(3+y)$; $2(a-b)^2$; 3) $(a-3b)(a+3)$; 8.

Глава V. 1) $b\neq0$, $a\neq1$, $b\neq-2$; 2) $\frac{1}{a}$, $\frac{4ab}{a^2-b^2}$, 4, $\frac{a-b}{b}$; 3) $\frac{1}{x-3}$, -3.

Глава VI. 1) $y=0$; $x=18$; нет. 2) Рис. 34, *а*, *б*, *в*.

Глава VII. 1) Да; 2) $(3; -1)$; $(1; -1)$; 3) 8 кг яблок, 10 кг груш.

Глава VIII. 1) а) 89, 98; б) 88, 89, 98, 99; 2) 888, 889, 898, 899, 988, 989, 999; 3) АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА.

Ответы, указания и краткие решения к задачам для внеклассной работы

814. Показать, что $16^{11}=32\cdot2^{39}$. **815.** Показать, что данное число равно $9\cdot37\cdot333^{776}+21\cdot37\cdot777^{332}$. **816.** 1) Показать, что $2^{187}=8\cdot16^{46}$. Последняя цифра числа 16^{46} равна 6, так как при умножении чисел с последней цифрой 6 получается число также с последней цифрой 6. Поэтому последняя цифра данного числа равна 8. 2) Показать, что $3^{115}=27\cdot81^{28}$. Так как последняя цифра числа 81^{28} равна 1, то последняя цифра данного равна 7. 3) Показать, что $7^{158}=49\cdot2401^{39}$. Так как последняя цифра числа 2401^{39} равна 1, то последняя цифра данного равна 9. **817.** 1) 5. 2) Показать, что данное число равно $27^2\cdot(27^4)^{89}+53^3\cdot(53^4)^{68}$, последняя цифра чисел 27^4 и 53^4 равна 1, числа 27^2 — цифра 9, числа 53^3 — цифра 7. Поэтому последняя цифра данного числа равна 6. **818.** Показать, что данное число равно $32\cdot(32^4)^{91}+43\cdot(43^4)^{60}$. Так как последняя цифра числа 32^4 равна 6, то последняя цифра первого слагаемого равна 2, а так как последняя цифра числа 43^4 равна 1, то последняя цифра второго слагаемого равна 3. Следовательно, последняя цифра данного числа равна 5 и поэтому это число делится на 5. **819.** Показать, что каждое из чисел 132 и 576 делится на 12. **820.** Сначала показать, что данное число делится на 2. Затем показать, что если из степени числа 10 с натуральным показателем вычесть единицу, то получится число, все цифры которого равны 9. Далее записать данное число в виде $(10^{23}-1)+$

$+(10^{19}-1)-180$, поэтому оно делится на 9. **821.** Показать, что $n^3+11n=$ $=(n-1)n(n+1)+12n$ и произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6. **822.** 1) Показать, что $n^3+3n^2+5n+105=$ $=(n-1)n(n+1)+3(n^2+2n+35)$. 2) Показать, что $n^3+12n^2+23n=(n-1)\times$ $\times n(n+1)+12(n^2+2n)$. **823.** Если оба числа m и n четные или оба нечетные, то $5m+7n+2$ — четное число, и поэтому число $(5m+7n+2)^4$ делится на $2^4=16$. Если одно из чисел m, n четное, а другое нечетное, то $3m+n+5$ — четное число, и поэтому число $(3m+n+5)^5$ делится на $2^5=32$ и на 16. **824.** Показать, что $41m+46n=4(7m+5n)+13(m+2n)$.

825. Используя равенства $\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$, $\frac{1}{5\cdot7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$, ..., $\frac{1}{99\cdot101}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$, $\frac{1}{101\cdot103}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{103}\right)$, показать, что $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{103}\right)=\frac{50}{309}$.

826. Используя равенства $\frac{1}{2\cdot4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{4\cdot6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)$, ..., $\frac{1}{96\cdot98}=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{96}-\frac{1}{98}\right)$, $\frac{1}{98\cdot100}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)$, показать, что $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right)=0{,}245$.

827. Если оба числа x и y делятся на 2 или оба не делятся на 2, то числа $x-y$ и $x+y$ делятся на 2 и поэтому число $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ делится на 4, но число 1990 не делится на 4; если же одно из чисел x, y делится на 2, а другое не делится на 2, то оба числа $x-y$ и $x+y$ не делятся на 2 и поэтому число $(x-y)(x+y)$ также не делится на 2, но число 1990 делится на 2. **828.** 1) Показать, что данное равенство можно записать так: $(x+1+y)(x+1-y)=7$. Так как делителями числа 7 являются пары (1; 7) и (−1; −7), то задача сводится к нахождению целых решений четырех систем уравнений, решая которые найти искомые пары чисел: (3; 3), (3; −3), (−5; 3), (−5; −3). 2) Показать, что данное равенство можно записать в виде $(y+2+x)(y+2-x)=-4$. Так как делителями числа (−4) являются пары чисел (1; −4), (−1; 4), (2; −2) (в любом порядке), то задача сводится к нахождению целых решений шести систем уравнений, решая которые, найти искомые пары чисел: (2; −2), (−2; −2). **829.** Показать, что $\frac{n^5+3}{n^2+1}=n^3-n+\frac{n+3}{n^2+1}$. Осталось выяснить, при каких целых значениях n дробь $\frac{n+3}{n^2+1}$ является целым числом. Заметим, что при $n>2$ выполняется неравенство $n(n-1)>2$, откуда $n^2-n>2$, $n^2+1>n+3$, т. е. числитель дроби $\frac{n+3}{n^2+1}$ меньше знаменателя и поэтому эта дробь при $n>2$ не может быть целым числом. При $n<-3$ выполняется неравенство $(-n)(n+1)<4$, откуда $-n^2-n<4$, $n^2+n>-4$, $n^2+1>-n-3$, $n^2+1>|n+3|$, т. е. модуль числителя дроби $\frac{n+3}{n^2+1}$ меньше положительного знаменателя дроби и поэтому эта дробь не может быть целым числом. Вычисляя значения данной дроби при $x=-3$; ±2; ±1; 0, показать, что целые значения получаются при $n=-3$; -1; 0; 1; 2. **830.** Показать, что $x^2-xy+\frac{2}{7}y^2=$ $=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{1}{28}y^2$. **831.** Умножить и разделить данное выражение на $(3-1)$, затем 5 раз применить формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, получится

$\frac{3^{32}-1}{2}$. **832**. Показать, что $4x^2+9y^2-4x+6y+2=(2x-1)^2+(3y+1)^2$. **833**. Показать, что $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$. **834**. 1) $a^3+2a^2-3=(a^3-a^2)+(3a^2-3)=(a-1)(a^2+3a+3)$, 2) $a^3+a^2+4=(a^3+8)+(a^2-4)=(a+2)(a^2-a+2)$; 3) $a^5+a+1=(a^5+a^4+a^3)-(a^4+a^3+a^2)+(a^2+a+1)=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$; 4) $a^3-6a^2-a+30=(a^3+2a^2)-(8a^2+16a)+(15a+30)=(a+2)(a^2-8a+15)=(a+2)((a^2-3a)-(5a-15))=(a+2)(a-3)(a-5)$. **835**. 1) $a^4+2a^2-3=(a^4-a^2)+(3a^2-3)=(a-1)(a+1)(a^2+3)$; 2) $a^4+4=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$; 3)$a^5+a^2-a-1=(a^5-a^3)+(a^3-a)+(a^2-1)=(a+1)(a-1)(a^3+a+1)$; 4) $a^4-a^3-5a^2-a-6=(a^4+a^2)-(a^3+a)-(6a^2+6)=(a^2+1)(a^2-a-6)=(a^2+1)((a^2-3a)+(2a-6))=(a^2+1)(a-3)(a+2)$. **836**. 1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2b$; 2) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)=a^3-3ab$. 3) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(a^2-2b)^2-2b^2=a^4-4a^2b+2b^2$; 4) $x^5+y^5=(x^4+y^4)(x+y)-(x^3+y^3)xy=(a^4-4a^2b+2b^2)a-(a^3-3ab)b=a^5-5a^3b+5ab^2$. **837**. Доказать равенство $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$. **838**. 1) $\frac{a-2}{a-3}$; 2) $\frac{a-1}{a+1}$; 3) $\frac{a+3b}{a+b}$; 4) $\frac{a-b}{a+b}$. **839**. В 8 ч утра. **840**. 75 м, 15 м/с. **841**. 5 км/ч, 11 км/ч. **842**. 1 ч. **843**. $\frac{s}{2t}$ м/с. **844**. 2,7%. **845**. 4 км. **846**. Первый. **847**. Первый. **848**. Первый. **849**. Первый. **850**. Второй. **851**. Второй.

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава **V. Алгебраические дроби**

Глава **VI. Линейная функция и ее график**

Глава **VII. Системы двух уравнений с двумя неизвестными**

Глава **VIII. Элементы комбинаторики**

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Ткачева Мария Владимировна
Федорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *В. А. Андрианов, И. В. Гущин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *О. Е. Иванова*
Корректоры *Л. Ю. Румянцева, И. А. Смирнова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 15.12.10. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 11,57 + 0,42 форз. Доп. тираж 20 000 экз. Заказ № 31063.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru