

Lecția 14

PREGĂTIRE COMPLETĂ PENTRU BAC ÎN DOAR 15 LECTII

#unaltfeldeprofesordemate

**CLAR, FĂRĂ STRES,
CU REZULTATE
REALE!**

Glisează



Cum se utilizează în calcule factorialul

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$0! = 1$$

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

$\overline{a \ b \ c}$

$3! \rightarrow$ toate posibilitățile
cum pot fi aranjate
 $a \ bc \ cba$
 $a \ cb \ c \ ab \ bac \ bca$

Cum se aplică formulele de combinatorică

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42$$

$$\frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$$

$$P_n = n!$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

$$C_8^{25} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 8 = 56$$

descompun 8-2

$$C_{14}^3 = \frac{14!}{11! \cdot 3!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{11! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 13 \cdot 14 = 364$$

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$$

Reguli

$$C_4^1 = 4 \quad ; \quad C_{2025}^1 = 2025 \quad ; \quad C_{40}^1 = 40$$

$$C_{10}^{10} = 1 \quad ; \quad C_{20}^{20} = 1 \quad ; \quad C_{403}^{403} = 1$$

$0! = 1$

$$C_7^0 = 1 \quad ; \quad C_{204}^0 = 1 \quad ; \quad C_{2011}^0 = 1$$

$$C_8^7 = 8 \quad ; \quad C_{20}^{19} = 20 \quad ; \quad C_{303}^{303} = 304$$

$$(8-7) = 1$$

$$2+3 \quad C_5^2 = 10$$

$$C_4^1 = 4$$

$$C_4^3 = 4$$

De tip bile

$$1) P = \frac{m}{n} \quad \begin{array}{l} \text{nr. cazuri favorabile} \\ \text{nr. cazuri totale} \end{array}$$

$$2) n = C_{\text{Numărul de elemente extrase}}^{\text{numărul total de elemente}}$$

$$3) m =$$

Facem o schemă

$$4) \text{Înlocuim în formulă inițială}$$

și
sau

Exemplu

Într-o urnă sunt 7 bile albe și 3 bile negre. Din urnă se extrag la întâmplare concomitent 4 bile. Determinați probabilitatea că printre bilele extrase sunt cel puțin 2 bile negre.

7a 3n 4bile A = {sunt cel puțin 2 bile negre}

$$1) P = \frac{m}{n}$$

$$2) n = C_{10}^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210$$

$$3) m = C_3^2 \cdot C_7^2 + C_3^3 \cdot C_7^1 = 3 \cdot 21 + 1 \cdot 7 = 63 + 7 = 70$$

0000 col puțin 2 bile negre
 $C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 1 \cdot 2} = 21$

$$4) P = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

$$R/s: \frac{1}{3}$$

În cutia de bomboane Lapte de pasăre, 6 bomboane sunt cu umplutură de culoare albă, 6 – cu umplutura de culoare galbenă și 8 – cu umplutură de culoare cafenie. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare 2 bomboane din aceasta cutie să fie cu umplutura cafenie?

$$P = \frac{m}{n}$$

○ ○
c c

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{18! \cdot 1 \cdot 2} = 19 \cdot 10 = 190$$

$$m = C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

$$P = \frac{28}{190} = \frac{14}{95}$$

$$R/s: \frac{14}{95}$$

Într-un centru de tehnologii informaționale activează 4 programatori, 5 ingineri și 3 tester. În luna iulie 8 angajați ai centrului, luați aleator, vor beneficia de concediu. Determinați probabilitatea că în luna iulie în centru va rămâne să activeze cel puțin câte un specialist de fiecare profil.

4p
5i
3t

$$12 - 8 = 4$$

A = {să activeze cel puțin un sp. g}

$$n = C_{12}^8 = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{8! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \cdot 3 \cdot 11 = 495$$

$$m = C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2 + C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_4^3 \cdot C_5^1 \cdot C_3^0 =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 10 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 4 =$$

$$= 90 + 120 + 60 = 270$$

$$P = \frac{270}{495} = \frac{54}{99} = \frac{6}{11}$$

t i p p
t i p i
t i p t

Cu zar și monedă

Exemplu

Se aruncă 2 zaruri. Determinați probabilitatea că suma punctelor obținute va fi egală cu 7.

$$1) P = \frac{m}{n}$$

nr. aruncări

$$2) n = \text{nr. fețe}$$

$$3) m = \text{schema}$$

...

$$1) P = \frac{m}{n}$$

$$2) n = 6^2 = 36$$

$$3) m = 6$$

1 6
2 5
3 4
6 1
5 2
4 3

6 cazuri

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} //$$

Determinați probabilitatea evenimentului că la o aruncare a două zaruri pe ambele fețe vor apărea numere pătrate perfecte. (1, 4, 9, 16, 25)

$$n = 6^2 = 36 \quad 3p$$

$$m = 4$$

scriu cazurile: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 4 cazuri

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Se aruncă o monedă de 5 ori. Determinați probabilitatea că stema va cădea exact de 2 ori.

$$n = 2^5 = 32 \quad 3p.$$

$$m = C_5^2 = 10$$

2 ← nr. st
← nr. total

$$P = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

00000
+ + - - -

Se aruncă o monedă de 4 ori. Det. pr. că banul apare cel mult 2 ori.

$$n = 2^4 = 16$$

$$m = C_4^2 + C_4^1 + C_4^0 = 6 + 4 + 1 = 11$$

$$P = \frac{11}{16}$$

0000
+ + - -
+ - - -
- - - -

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$$

//

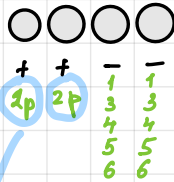
Cu zar și monedă

Exemplu

9. Un zar se aruncă de 4 ori. Determinați probabilitatea că fața cu numărul 2 va apărea de exact 2 ori.

$$n = 6^4 = 1296$$

$$m = C_4^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 6 = 150$$



câte fețe cu 2p sunt pe zar

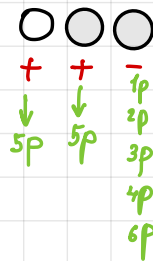
$$P = \frac{150}{1296} = \frac{25}{216}$$

Se aruncă concomitent 3 zaruri. Determinați probabilitatea ca fața cu 5 puncte să apară exact pe 2 zaruri.

Rezolvare:

$$n = 6^3 = 216$$

$$m = C_3^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$$



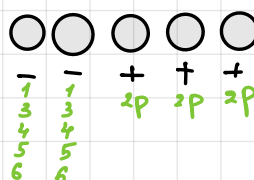
$$P = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

Se aruncă un zar până la apariția feței cu 2 puncte de 3 ori consecutiv. Determinați probabilitatea că zarul se va arunca de 5 ori.

Rezolvare:

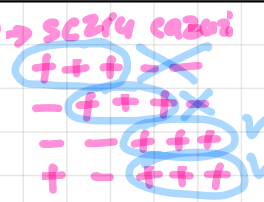
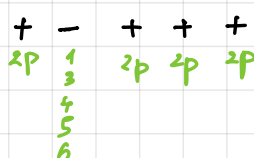
$$n = 6^5 = 7776$$

$$m = 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 25 + 5 = 30$$



nu fac combinații

$$P = \frac{30}{7776} = \frac{5}{1296}$$



Cu litere

Exemplu

Pe 10 fișe sunt scrise literele (M, A, T, ~~T~~, M, A, T, I, C, A). Fișele se amestecă, apoi se extrag consecutiv patru fișe. Determinați probabilitatea că fișele extrase formează (în ordinea extragerii) cuvântul „TEMA”.

$$n = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

nr. inițial
de fișe

$$m = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$P = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{20 \cdot 21} = \frac{1}{420}$$

m:
TEMA

Literele B, A, C, A, L, A, U, R, E, A, T sunt scrise fiecare pe fișe identice. Să se afle probabilitatea că extrăgând pe rând 5 litere, vom extrage cuvântul LACAT.

$$n = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$m = 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{4620}$$

Coduri

Cu literele a, b, c, d, e, f calculatorul generează un cod din 6 caractere distincte. Aflați probabilitatea că acest cod să înceapă cu o vocală.

nu se repetă

$$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$m = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

pentru m:



$$P = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3}$$

Cu ajutorul cifrelor 1, 2, 3, 4, 5, 6 se formează un cod de 5 cifre. Aflați probabilitatea că acest cod format conține nu mai puțin de 3 ori cifra 2.

@samsonvallentina

Rezolvare:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$n = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^5$$

$$m = \binom{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 + \binom{4}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 + \binom{5}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10 \cdot 25 + 5 \cdot 5 + 1 = 250 + 25 + 1 = 276$$

schema n:

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6

+ + + - -

+ + + + -

+ + + + +

"+" este cifra 2
"- " restul cifrelor din condiție

$$P(A) = \frac{276}{7776} = \frac{138}{3888} = \frac{69}{1944} = \frac{23}{648}$$

Cu numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5 calculatorul generează coduri numerice distincte din 6 cifre.

Care este probabilitatea ca alegând un cod din cele generate acesta să aibă primele două cifre pare?

numere

Cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6 se formează un număr de 5 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea că ultimele 2 cifre ale numărului format sunt impare.

$$n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$m = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$P = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{10}$$

schema p/n:

2	3	4	5	6
3	4	5	6	
4	5	6		
5	6			
6				

schema p/m:

2	3	4	5	6
3	4	5	6	
4	5	6		
5	6			
6				

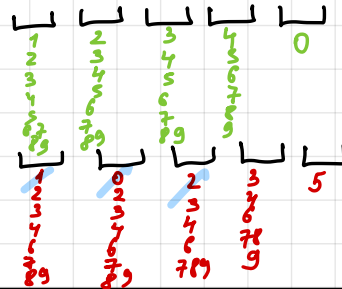
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Aflați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale distincte de cinci cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

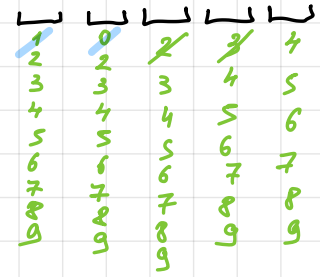
$$n = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

$$m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 (9 + 8) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 17$$

schema p/4 n:



schema p/4 n:



$$P = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 17}{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{17}{81}$$

Se consideră aleator un număr de patru cifre. Determinați probabilitatea că cifrele nu se repetă și că doar prima cifră și ultima cifră ale acestui număr sunt pare.

Rezolvare:

Condiționată (cu negații)

Exemplu

$$P(A) =$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

mi folosesc

$$P = \frac{m}{n}$$

Probabilitatea că într-o zi de iulie va ploua este egală cu $\frac{2}{5}$. Determinați probabilitatea că în două din primele trei zile din luna iulie va ploua.

$$P(A) = \frac{2}{5} \text{ - plouă } \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ nu plouă}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ + & + & - \\ + & - & + \\ - & + & + \end{array} \quad P = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12 \cdot 3}{125} = \frac{36}{125} //$$

În sesiunea de iarnă sunt planificate două examene, care pot fi organizate în două moduri: cu prezență fizică în sală sau în format online. Probabilitatea că primul examen va fi organizat cu prezență fizică în sală este egală cu $\frac{4}{5}$, iar probabilitatea că al doilea examen va fi organizat cu prezență fizică în sală este egală cu $\frac{3}{4}$. Determinați probabilitatea că cel puțin un examen va fi organizat cu prezență fizică în sală.

$$P(A) = \frac{4}{5} \text{ 1 fizic} \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \text{ 1 online}$$

$$P(B) = \frac{3}{4} \text{ 2 fizic} \quad P(\bar{B}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ 2 online}$$

<u>I</u>	<u>II</u>
+	-
-	+
+	+

$$P = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4}{20} + \frac{3}{20} + \frac{12}{20} = \frac{19}{20}$$

R/ă: $\frac{19}{20}$ "

Trei țințași efectuează câte o tragere în țință. Probabilitatea de atingere a țintei a primului țințaș este 0,7, celui de-al doilea țințaș - 0,5, iar celui de-al treilea - 0,6. Determinați probabilitatea că țința va fi atinsă exact de 2 ori.

Se aruncă simultan 4 zaruri. Determinați probabilitatea că produsul numerelor de puncte apărute este egal cu 15.

Rezolvare:

$$n = 6^4 = 1296$$

$$P = \frac{12}{1296} = \frac{1}{108}$$

$$m = 12$$

0000		1135	4531
3511	5311	1153	1513
3151	5131	1351	
3115	5113	1315	

Literele A, P, O, L, L, O sunt scrise câte una pe șase fișe identice. Patru fișe se extrag aleatoriu consecutiv. Determinați probabilitatea că, în ordinea extragerii, se obține cuvântul POLO.

Rezolvare:

$$n = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$m = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$$

$$P = \frac{4}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{90}$$

Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 se formează la întâmplare un număr de patru cifre.

Determinați probabilitatea că cifrele numărului format nu se repetă și primele trei cifre sunt impare.

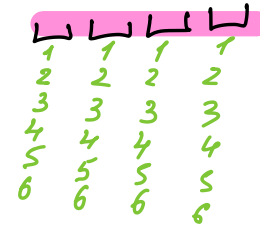
Rezolvare:

$$n = 6^4$$

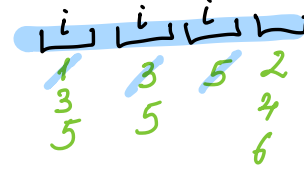
$$m = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$$

$$P =$$

schema p/4 n:



schema p/4 m



Într-un magazin activează secțiile A, B și C. Pe parcursul unei ore în magazin intră 7 persoane. Fiecare persoană poate intra aleator în una dintre secții. Determinați probabilitatea că 3 persoane intră în secția A, 2 persoane intră în secția B și 2 persoane intră în secția C.

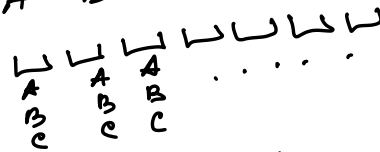
Rezolvare:

$$P = \frac{m}{n}$$

$$n = 3^7$$

$$m = C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2$$

schema p/4 n:



schema p/4 m:



BAC repetat 2023

3^7 sau 7^3

Șapte copii, printre care Ana și Maria, participă la un maraton. Copiii ajung la linia de finis în diferite momente de timp. Determinați probabilitatea că Ana va ajunge la linia de finis următoarea după Maria.

7 copii

BAC 2024

Rezolvare:

$$n = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$m = 6!$$



Un zar se aruncă de 5 ori. Determinați probabilitatea că doar la două aruncări va cădea un număr de puncte divizibil prin 3.

BAC repetat 2024

Rezolvare:

Cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6 se formează un număr de 5 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea că ultimele 2 cifre ale numărului format sunt impare.

Prebac 2021

Rezolvare:

Într-o clasă cu 22 de elevi sunt două fete gemene. Clasa se împarte în mod aleator în două subgrupuri cu același număr de elevi. Determinați probabilitatea că gemenele vor nimeri în aceeași subgrupă.

Prebac 2013

Rezolvare:

Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 se formează numere de cinci cifre. Determinați probabilitatea că cifrele unui număr format la întâmplare nu se repetă, iar suma ultimelor trei cifre este egală cu 13.

Rezolvare:

Probac 2024

La festivalul „În jurul lumii” fiecare dintre cele 8 clase ale unui liceu prezintă cultura și tradițiile unei țări, printre care Georgia, Spania și Brazilia. Prezentările sunt incluse în orar în mod aleatoriu. Determinați probabilitatea că prezentările pentru aceste trei țări vor nimeri în orar alături.

Rezolvare:

Probac 2025

Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se formează în mod aleatoriu un cod din 6 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea ca în acest cod să se conțină secvența 234.

Rezolvare:

Se aruncă concomitent patru zaruri. Determinați probabilitatea ca fața cu 5 puncte să apară pe cel puțin un zar.

Rezolvare:

O monedă de 25 de bani se aruncă de 6 ori. Care este probabilitatea ca stema de pe monedă să apară exact de 4 ori?

Rezolvare:

La un concurs de talente, dintre 6 actori, 5 cântăreți și un dansator, urmează să fie aleasă o echipă din 5 jurați. Care este probabilitatea ca în echipa formată să fie cel puțin un actor, un cântăreț și un dansator?

Rezolvare:

În timpul unei victorine televizate, participanților li se propune să aleagă aleatoriu întrebări din trei domenii: Artă, Istorie, Științe. Probabilitatea ca un participant să aleagă o întrebare din domeniul Arte este de 0,3, din Istorie – de 0,2, iar din Științe – 0,5. Care este probabilitatea ca în trei runde un participant să extragă întrebări doar din două domenii?

Rezolvare:

Se aruncă concomitent patru zaruri. Determinați probabilitatea ca fața cu 5 puncte să apară pe cel puțin un zar.

Rezolvare: