

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

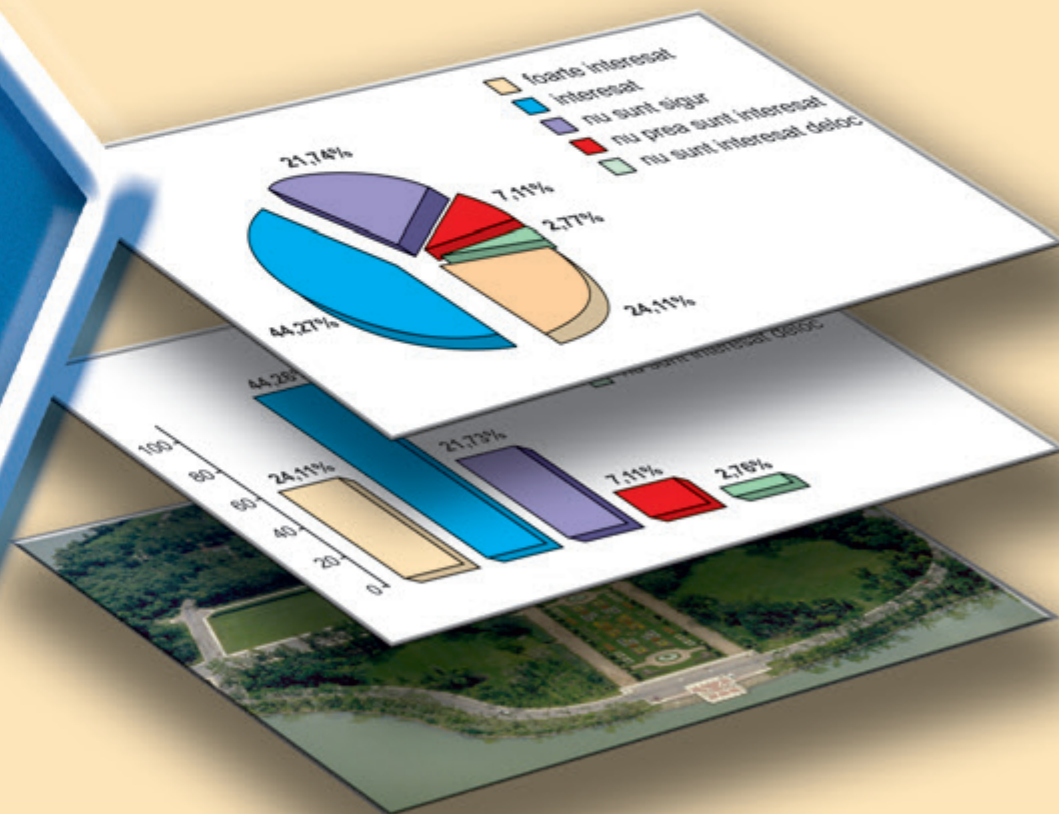
Mihaela Singer

Cristian Voica

MATEMATICĂ

Manual
pentru
clasa a **XI-a**

M5



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Mihaela Singer

Cristian Voica

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M5

Filiera teoretică

- profil umanist
specializarea științe sociale

Filiera vocațională

- profil militar MAI
specializarea științe sociale
- profil teologic



SIGMA

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Culturii nr. 4742 din 21.07.2006, în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252 din 13.02.2006.

Referenți: *asist. univ. dr.* Marius Vlădoiu
 lector dr. Mihai Sorin Stupariu

Redactor: Dana Florina Năstase
Tehnoredactor: Camelia Cristea
Coperta: Camelia Cristea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

SINGER, MIHAELA

Matematică M5 : manual pentru clasa a XI-a / Mihaela Singer, Cristian Voica. - București : Sigma, 2006

Bibliogr.

ISBN (10) 973-649-261-3 ; ISBN (13) 978-973-649-261-7

I. Voica, Cristian

51(075.35)

© 2006 – Editura SIGMA

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA.

Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

ISBN (10) 973-649-261-3

ISBN (13) 978-973-649-261-7

Editura SIGMA

Sediul central:

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169

Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70

e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:

Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35

Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:

080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)

e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Anticariat:

e-mail: comenzi_anticar@editurasigma.ro; web: www.anticar.ro

Introducere

Toate domeniile culturii se dezvoltă în strânsă interdependență cu matematica. Este un adevăr general acceptat de către comunitatea contemporană că „Orice știință este matematică sau susceptibilă de matematizare”. De aceea, am construit demersul didactic al acestui manual cu scop deopotrivă cultural și pragmatic, urmărind atât formarea de competențe specifice matematicii, cât și transferul de tehnici și metode dintr-un domeniu în altul.

Manualul se adresează elevilor din liceele cu specializarea *Științe sociale*, precum celor de la liceele *teologice*. De asemenea, întrucât conține numeroase aplicații practice interesante, manualul poate genera teme pentru opționale la oricare dintre specializările liceului.

Manualul este organizat pe unități de învățare. În cadrul fiecărei unități de învățare sunt derulate: secvența de familiarizare, evidențiată prin titlurile „**Ne amintim și explorăm**”, secvența de structurare, evidențiată prin titlul „**Analizăm și generalizăm**” și secvența de aplicare și transfer, evidențiată prin titlul „**Aplicăm și dezvoltăm**”.

Fiecare unitate de învățare începe cu un test preliminar de autoevaluare, ce sintetizează cunoștințele de bază necesare pentru parcurgerea unității respective.

În corpul fiecărei unități am evidențiat etapele demersului didactic prin expresiile: **Să observăm!, Să comparăm!, Să analizăm!, Să aplicăm!, Să demonstrăm!**.

Concluziile unei etape de raționament sau de observare, finalizate printr-o propoziție generală, sunt evidențiate cu ajutorul expresiei „**În general**” și sunt marcate prin chenar.

Pentru a facilita conexiunile între conținuturile cu caracter strict matematic din lecție și aplicațiile acestora, am grupat în benzile laterale ale paginilor manualului atenționări, *exemplificări* și *exerciții* necesare în fixarea noțiunilor prezentate.

Fiecare unitate de învățare se încheie cu o *scurtă lectură*, care raportează anumite elemente din corpul unității la evoluția lor istorică sau la conexiuni semnificative cu diferite domenii.

Demersul de construcție și dezvoltare a manualului a urmărit *formarea unor competențe* care să permită identificarea relațiilor între noțiunile matematice studiate, interpretarea datelor de diverse tipuri, utilizarea unor algoritmi și concepte matematice în situații diverse, exprimarea caracteristicilor matematice ale unei situații concrete și analiza de situații-problemă în scopul optimizării soluțiilor practice. De aceea, informația conținută în programa școlară a fost structurată și detaliată astfel încât acest deziderat să fie realizat cu succes.

Testele de evaluare de la sfârșitul fiecărei unități de învățare oferă modalități de verificare a nivelului la care s-au format competențele vizate.

Ne exprimăm speranța că manualul va oferi un instrument practic de învățare tuturor acelor care sunt dornici să înțeleagă, să explice și să acționeze eficient în lumea în care trăim.

Acest simbol marchează secvența avută în vedere în cadrul unității de învățare.

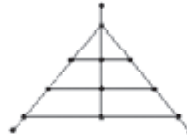


Observăm și explorăm!

Indică un enunț obținut prin extrapolarea unor exemple sau proprietăți particulare. Acest enunț poate fi o definiție sau o teoremă.

Să observăm!

Cele două grafuri de mai jos pot reprezenta planul aceluiași cartier, chiar dacă „străzile” nu au aceeași formă în cele două cazuri, ele unesc aceleași „intersecții”. Pentru orientarea în teren, oricare dintre cele două reprezentări este suficientă.

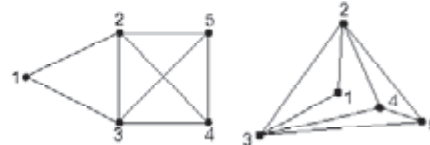


În general

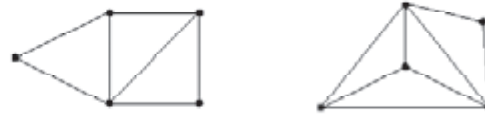
Două grafuri sunt **izomorfe** dacă au același număr de noduri și de muchii și dacă există o numerotare a nodurilor din cele două grafuri astfel încât două noduri sunt unite (prin o muchie) pe primul graf dacă și numai dacă și numai dacă două noduri corespunzătoare sunt unite și pe al doilea graf. În grafurile izomorfe, nodurile corespunzătoare au ordine egale.

Exemplu

1) Grafurile următoare sunt izomorfe.



2) Grafurile următoare nu sunt izomorfe.

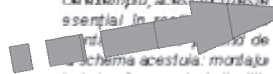


Comentariile și atenționările sunt marcate prin acest semn.



Este foarte important să putem determina dacă două grafuri sunt izomorfe sau nu. De exemplu, acest lucru este esențial în matematică și în științele naturii. Când deosebim două grafuri, trebuie să respectăm indicațiile schemei, dar poate fi poziționat altfel în spațiu.

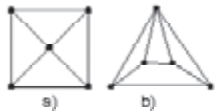
Exemplele au legătură cu conținuturile prezentate anterior.



Aplicațiile imediate sunt corelate cu explicațiile sau exemplele din corpul lecției, în dreptul cărora sunt situate.



Decide care dintre grafurile următoare sunt izomorfe.

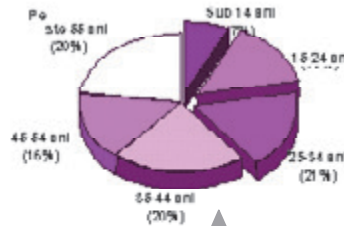


Cum folosim mediile în calculele statistice?

Să analizăm!

Pentru a orienta mai bine specificul publicației, conducerea unui ziar este interesată de vârsta medie a cititorilor săi. Directorul general al ziarului cunoaște numărul zilnic de cititori și localitățile în care se distribuie cele mai multe exemplare. El a pus aceste date la dispoziția unui institut specializat și a solicitat efectuarea unui sondaj pe un eșanșon reprezentativ de cititori.

Rezultatele sondajului sunt cele prezentate mai jos, în care se consideră că grupa de vârstă „sub 14 ani” are ca limită inferioară vârsta de 6 ani, iar grupa de vârstă „peste 65 ani” are ca limită superioară vârsta de 85 de ani (în afara intervalului de vârstă [6; 85], procentul de cititori fiind practic neglijabil).



Subtitlurile evidențiază etape ale demersului didactic.



Această expresie evidențiază tipul de activitate care urmează.



Reprezentare grafică care se referă la datele analizate.

Unitatea de învățare 1

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Interpretarea datelor

1. Studiază tabelul de mai jos, care prezintă câteva echipe de fotbal din divizia C și află care echipă are cele mai multe goluri marcate și care echipă are cea mai slabă apărare. Găsește echipa cu cele mai multe meciuri egale.

Loc	Echipa	Meciuri	Victorii	Egaluri	Înfrângeri	Goluri marcate	Goluri primite	Puncte
11.	CSM ENA Făgăraș	26	10	5	11	29	31	35p
12.	CS Predeal	26	7	7	12	23	26	28p
13.	Mantrax Bod	26	5	4	17	21	45	19p
14.	CS Târgu Secuiesc	26	2	2	22	11	56	8p

Împărțirea cu rest

2. Găsește câtul și restul în cazul în care deîmpărțitul d și împărțitorul i au valorile:
a) $d = 37; i = 5$ b) $d = 36; i = 12$ c) $d = 43; i = 8$
d) $d = 124; i = 14$ e) $d = 1211; i = 12$ f) $d = 2424; i = 101$.

Divizibilitate

3. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) 24 este divizibil prin 6 b) 24 îl divide pe 6
c) 249 este divizibil prin 9 d) -5 este un divizor al lui 5.
4. Scrie divizorii întregi pentru fiecare dintre numerele: 12, 16, 30 și 100.

Calcul numeric

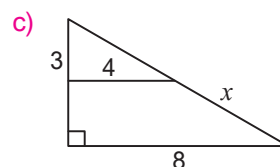
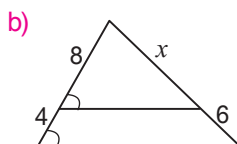
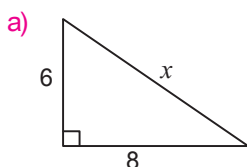
5. Efectuează:
a) $-24 + 22$ b) $(-4 + 3) \cdot (-2)$ c) $(-1 + 1) \cdot (3 - 1)$ d) $-1 + 1 \cdot 3 - 1$
e) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$ f) $\frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \frac{4}{3}$ g) $2,7 - 3,81 + 4,43$ h) $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right) + \frac{4}{5} : \left(1 - \frac{1}{3}\right)$.

Procente

6. Calculează:
a) cât reprezintă 30% din 120.
b) cât la sută din 640 reprezintă 160.
c) cât va costa un bilet de autobuz de 1,10 lei după o scumpire de 10%.
d) care este procentul de ieftinire al unei cărți care înainte costa 24 lei, iar după ieftinire are prețul de 21 de lei.

Calcul geometric

7. Determină lungimile segmentelor marcate cu x în figurile de mai jos.



Numere. Operații cu numere. Proprietăți

Operații cu numere în cotidian

Observăm și explorăm!

În diferite situații din viața de zi cu zi folosim, uneori fără să ne dăm seama de aceasta, proprietăți ale operațiilor cu numere.

Exemplul 1: Asociativitatea adunării

Andrei, Ionuț și Mihai vor să cumpere un cadou mamei. Andrei a economisit 6 lei, Ionuț 8 lei, iar Mihai are puși deoparte 7 lei.

Andrei a făcut următorul calcul: „Eu și Ionuț avem împreună 14 lei, dacă adăugăm cei 7 lei de la Mihai obținem 21 de lei.” Calculul făcut de Andrei a fost: $(6 + 8) + 7 = 21$. Ionuț în schimb a raționat astfel: „Andrei are 6 lei. Eu și Mihai avem împreună 15 lei, deci în total avem 21 de lei.” Calculul a fost: $6 + (8 + 7) = 21$.

Faptul că cei doi frați au obținut aceeași sumă se datorează asociativității adunării:

Oricare ar fi numerele a , b , c , avem: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Exemplul 2: Comutativitatea adunării

Doamna Vasiliu cumpără în fiecare dimineață o pâine și un litru de lapte. Comparând bonurile de casă din două zile diferite a observat că într-una din zile fusese înregistrată mai întâi pâinea, apoi laptele, iar în cealaltă zi produsele fuseseră înregistrate în ordinea inversă.

1.000 x	0,55	
FRANZELA PRIMĂVARA		0,55 A
1.000 x	3,66	
LAPTE LA BORDA UHT		3,66 A

SUBTOTAL		4,21

TOTAL		4,21
TVA A 19,00%		0,67

TOTAL LEI VECHI	42,100	
ACHITAT	5,00	
REST	0,79	
LEI VECHI	50,000	
POS:4 OP:9 TR:451		
VA MULTUMIM SI VA MAI AȘTEPTAM		

1.000 x	3,66	
LAPTE LA BORDA UHT		3,66 A
1.000 x	0,55	
FRANZELA PRIMĂVARA		0,55 A

SUBTOTAL		4,21

TOTAL		4,21
TVA A 19,00%		0,67

TOTAL LEI VECHI	42,100	
ACHITAT	5,00	
REST	0,79	
LEI VECHI	50,000	
POS:4 OP:9 TR:450		
VA MULTUMIM SI VA MAI AȘTEPTAM		

Faptul că suma obținută este aceeași se datorează comutativității adunării:

Pentru orice două numere a și b , avem: $a + b = b + a$.

Exemplul 3: Asociativitatea înmulțirii

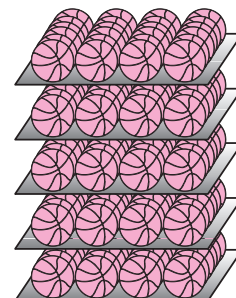
Într-un depozit sunt așezate mingi de baschet pe 5 rafturi suprapuse. Pe fiecare raft sunt 4 rânduri și pe fiecare rând sunt câte 6 mingi. Dorel a calculat numărul total de mingi astfel: pe un raft sunt de 4 ori câte 6 mingi, deci $4 \cdot 6 = 24$ de mingi. Cum în depozit sunt 5 rafturi, rezultă un total de $5 \cdot (4 \cdot 6) = 5 \cdot 24 = 120$ de mingi. Mircea a raționat în alt mod: pe 5 rafturi avem 4 rânduri, deci în total sunt $5 \cdot 4 = 20$ de rânduri. Cum fiecare rând are câte 6 mingi, în total sunt $(5 \cdot 4) \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120$ de mingi.

Cei doi băieți au obținut același număr datorită asociativității înmulțirii:

Oricare ar fi numerele a , b , c , avem: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

❶ De ce crezi că este utilizată denumirea de „asociativitate” pentru această proprietate a adunării?

❷ Ilustrează printr-un exemplu din cotidian comutativitatea înmulțirii.



③ Cum ar fi putut proceda cei doi soți dacă ar fi găsit în magazin mochetă cu lățimea de 5 m? Realizează o schiță!

▲ Citită de la dreapta spre stânga, proprietatea de distributivitate evidențiază scoaterea factorului comun.

Exemplul 4: Distributivitatea înmulțirii față de adunare

Holul din apartamentul familiei Popescu are o lungime de 6 m și o lățime de 2,5 m. Familia Popescu dorește să mocheteze holul. Deoarece nu au găsit în magazin o mochetă lungă de 6 m, ei s-au mulțumit să cumpere două bucăți cu lățimea de 2,5 și cu lungimile de 2 m, respectiv 4 m. Pentru a se stabili prețul, a trebuit calculată suprafața totală a mochetei cumpărate.

Domnul Popescu a calculat suprafața fiecărei bucăți și a adunat rezultatele:

$$2,5 \cdot 4 + 2,5 \cdot 2 = 10 + 5 = 15 \text{ (m}^2\text{)}$$

Doamna Popescu a ținut cont, în calculul făcut, că mochetele puse cap la cap vor acoperi întregul hol și a calculat în acest mod suprafața totală:

$$2,5 \cdot (4 + 2) = 2,5 \cdot 6 = 15 \text{ (m}^2\text{)}$$

Egalitatea rezultatelor obținute se datorează distributivității înmulțirii față de adunare:

$$\text{Pentru orice numere } a, b, c, \text{ avem: } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Să comparăm!

Proprietățile de asociativitate și comutativitate fac referire la o singură operație algebrică (adunare sau înmulțire).

Proprietatea de distributivitate „leagă” cele două operații cunoscute.

Exerciții și probleme

- Stabilește paritatea rezultatului unui exercițiu în care se fac numai adunări și scăderi, dacă numărul termenilor impari este:
a) 7; b) 20; c) 159; d) 264; e) 775; f) 1088.
- În exercițiul $30 \cdot 5 - 30 : 10 + 5$, adaugă paranteze pentru a obține rezultatele: a) 17; b) 142; c) 8; d) 210.
- Înlocuiește literele cu cifre astfel încât calculul să fie corect:
a)
$$\begin{array}{r} \overline{ab} \times \\ \quad \overline{cb} \\ \hline \overline{acc} \\ \quad \overline{ab} \\ \hline 1501 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \overline{abc8} \times \\ \quad \quad \quad 4 \\ \hline \overline{8cba} \end{array}$$
- Adaugă paranteze astfel încât $1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 : 7 = 1$.
- Efectuează: a) $(11 + 22 + 33 + \dots + 121) : 121$;
b) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 49 - 50 + 51$.
- Calculează în două moduri:
 $(2 + 4 + 6 + 8 + 10) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.
- Află numerele naturale mai mici decât 20 care împărțite la un număr de o cifră, dau restul 6.
- Un număr este cu 84 mai mare decât altul. Împărțind suma celor două numere la diferența lor, se obține câtul 15 și restul 14. Află cele două numere.
- Câtul împărțirii a două numere naturale este 3, iar restul 10. Adunând deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul, obținem 143. Care sunt cele două numere?
- Efectuează:
a) $(369 : 9 + 18 \cdot 3 - 456 : 6) \cdot 0$;
b) $(9 + 11 \cdot 11 : 11 + 220) \cdot 10$;
c) $25 \cdot (160 - 30 \cdot 5 - 8) - (24 + 321 : 321)$.
- Folosind metoda factorului comun, calculează:
a) $2 \cdot 149 + 2 \cdot 351$; b) $3 \cdot 213 + 3 \cdot 287$;
c) $7 \cdot 985 + 7 \cdot 15$; d) $5 \cdot 472 - 5 \cdot 72$;
e) $13 \cdot 133 - 13 \cdot 33$; f) $16 \cdot 379 - 16 \cdot 279$;
g) $2 \cdot 498 + 2 \cdot 373 - 2 \cdot 371$;
h) $6 \cdot 412 - 6 \cdot 327 + 6 \cdot 315$;
i) $9 \cdot 1\,029 - 9 \cdot 638 - 9 \cdot 391$.
- Calculează folosind metoda factorului comun:
 $15 \cdot 27 + 15 \cdot 23 + 15 \cdot 50$.
- Calculează în două moduri:
a) $28 \cdot 506 + 72 \cdot 506$; b) $21 : 7 + 56 : 7 + 63 : 7$.
- Folosind metoda factorului comun, calculează:
a) $107 \cdot 316 + 107 \cdot 684 - 107 \cdot 990$;
b) $(8 + 16 + 24 + 32 + 40) : 15$.
- Calculează în două moduri:
a) $(2 + 4 + 6 + 8) : (1 + 2 + 3 + 4)$;
b) $376 \cdot (673 \cdot 111 - 673 \cdot 11) : 673$.
- Se consideră numerele: $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 40$ și $b = 2 + 4 + 6 + \dots + 80$. Arată că $2 \cdot a - b = 0$.
- Știind că $a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 41$ și $5 \cdot a + 4 \cdot b + 3 \cdot c = 55$, determină $a + b + c$.
- Calculează și justifică rezultatul:
a) $2007 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010 - 2010 \cdot 2009 \cdot 2008 \cdot 2007$;
b) $2007 \cdot 2000 \cdot 1999 \cdot 1995 - 2000 \cdot 1995 \cdot 1999 \cdot 2007$;
c) $74 \cdot 46 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 42 \cdot 56 - 37 \cdot 46 \cdot 21 \cdot 72 \cdot 98 \cdot 56$.
- Calculează $12\,345\,679 \cdot 9$. Folosind rezultatul, determină numărul natural x astfel încât:
a) $12\,345\,679 \cdot x = 333\,333\,333$;
b) $12\,345\,679 \cdot x = 444\,444\,444$;
c) $12\,345\,679 \cdot x = 222\,222\,222$;
d) $12\,345\,679 \cdot x = 555\,555\,555$.

Mulțimi de numere și operații cu numere



Analizăm și înțelegem!

Să ne amintim!

Mulțimile de numere întâlnite în clasele anterioare sunt: mulțimea numerelor naturale (notată cu \mathbb{N}), mulțimea numerelor întregi (\mathbb{Z}), mulțimea numerelor raționale (\mathbb{Q}) și mulțimea numerelor reale (\mathbb{R}).

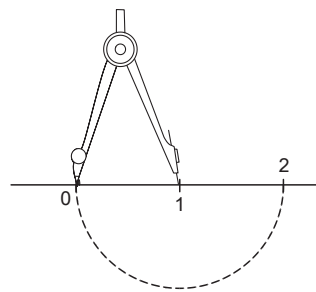
◆ Mulțimea numerelor naturale

Numererele naturale $0, 1, 2, 3, \dots$ sunt folosite în mod curent pentru a exprima de câte ori se repetă o anumită cantitate, câte obiecte avem ș.a.m.d.

Numererele naturale se reprezintă pe axa numerelor. Aceasta este o dreaptă pe care am fixat o origine, un sens și o unitate de măsură. Pe această axă, numerele naturale sunt așezate în ordine crescătoare în sensul pe care l-am ales, astfel încât 0 să corespundă originii. Pentru $n \geq 1$, numărul n este așezat față de $(n - 1)$ la distanța dată de unitatea de măsură fixată.

Putem reprezenta un număr natural pe axă fie cu ajutorul unei rigle gradate, fie cu o riglă negradată și cu un compas. În acest din urmă caz procedăm astfel:

- Potrivim compasul astfel încât deschiderea sa să coincidă cu unitatea de măsură.
- Așezăm compasul cu vârful în origine și, în sensul pe care l-am ales, construim numărul 1.
- Potrivind acum vârful compasului în punctul corespunzător lui 1, obținem numărul 2, într-un mod analog.
- Pas cu pas, construim numerele naturale la rând, până când ajungem la numărul dorit.



▲ Numerele naturale se reprezintă, de fapt, pe o semidreaptă.

❶ Reprezintă pe axă numărul 6. Poți face această reprezentare utilizând compasul numai de 3 ori? (Fără a folosi rigla gradată!)

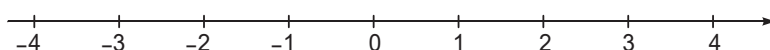
◆ Mulțimea numerelor întregi

Uneori, numerele naturale nu sunt suficiente pentru a descrie o anumită situație.

Să analizăm!

În campionatul de fotbal al Diviziei C, echipa „ASA Tg. Mureș” a marcat 42 de goluri și a primit 26, iar echipa „CS Predeal” a marcat 23 de goluri și a primit 26. Pentru a diferenția între cele două cazuri, spunem că prima echipă are golaveraj pozitiv, +16, iar cea de-a doua are golaveraj negativ, -3. Am folosit, pe lângă numerele naturale 42, 26, 23 și numărul negativ -3.

Numererele negative pot fi și ele reprezentate pe axă. Mai precis, ele sunt așezate astfel încât $-n$ și n să fie simetrice față de origine, pentru orice număr natural n .



Divizia C. Clasamentul final al seriei C8

Loc	Echipa	Meciuri	Victorii	Egaluri	Înfrângeri	Goluri marcate	Goluri primite	Puncte	Adevăr
1.	Forex Brașov	26	19	3	4	51	13	60p	+21
2.	ASA Tg. Mureș	26	15	5	6	42	26	50p	+11
3.	Mureșul Luduș	26	12	6	8	31	26	42p	+3
4.	Tractorul Brașov	26	12	4	10	39	31	40p	+1
5.	Chimica Târnăveni	26	11	7	8	34	26	40p	+1
6.	Avântul Reghin	26	12	3	11	27	24	39p	0
7.	Transkurier Sf. Gheorghe	26	10	8	8	25	20	38p	-1
8.	Mobila Sovata	26	10	7	9	31	37	37p	-2
9.	Gaz Metan Tg. Mureș	26	10	7	9	29	28	37p	-2
10.	Unirea Ungheni	26	11	4	11	34	38	37p	-2
11.	CSM ENA Făgăraș	26	10	5	11	29	31	35p	-4
12.	CS Predeal	26	7	7	12	23	26	28p	-11

❷ Explică semnificația numerelor negative din tabelul de mai jos.

❸ Marchează pe axă numărul -4, folosind o riglă negradată și un compas.

◆ Mulțimea numerelor raționale

Atunci când trebuie să lucrăm cu părți ale unui întreg, folosim numerele raționale. Acestea pot fi reprezentate în două moduri, pe care le descriem în continuare.

◆ Reprezentarea numerelor raționale ca fracții

Putem scrie numerele raționale sub formă de fracție de tipul $\frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

Să analizăm!

Un stadion are 25 000 de locuri, din care 5 000 la tribuna I, 10 000 la tribuna a II-a și 10 000 la peluză. Aceasta înseamnă că $\frac{1}{5}$ din locurile stadionului sunt cele de la tribuna I, $\frac{2}{5}$ sunt cele de la tribuna a II-a și tot $\frac{2}{5}$ din capacitatea stadionului este reprezentată de locurile de la peluză.

Administratorul stadionului a comunicat această informație, spunând că 40% din locuri sunt la tribuna a II-a: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$.

Să reținem!

Două fracții $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ (cu $m, n, p, q \in \mathbb{Z}, n \neq 0, q \neq 0$) sunt echivalente dacă $m \cdot q = n \cdot p$. Frațiile echivalente reprezintă același număr rațional. Două numere raționale sunt egale dacă sunt reprezentate prin fracții echivalente.

4 Găsește numerele raționale egale cu $\frac{3}{2}$, din șirul:

$$\frac{6}{4}, \frac{-12}{-8}, \frac{9}{4}, \frac{2}{3}.$$

5 Amplifică fracția $\frac{2}{3}$ cu 2, cu -1 și cu 4.

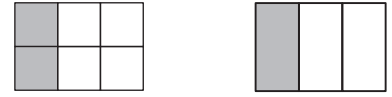
6 De ce sunt fracțiile $\frac{a \cdot m}{a \cdot n}$ și $\frac{m}{n}$ echivalente?

7 Simplifică fracția $\frac{-12}{18}$ prin 2, 3 și -6 !

8 Poți simplifica fracția $\frac{4}{5}$? De ce?

Exemplu

Fracțiile $\frac{2}{6}$ și $\frac{1}{3}$ sunt echivalente, așa cum se observă și pe desen.



Numerele $\frac{-2}{4}$ și $\frac{5}{-10}$ sunt egale, în timp ce numerele $\frac{-1}{-2}$ și $\frac{-1}{2}$ nu sunt egale.

◆ Cum obținem fracții echivalente?

Dacă înmulțim atât numărătorul, cât și numitorul fracției $\frac{m}{n}$ cu numărul întreg $a \neq 0$, obținem fracția $\frac{a \cdot m}{a \cdot n}$, care este echivalentă cu $\frac{m}{n}$. Spunem că am amplificat fracția $\frac{m}{n}$ cu a . Scriem aceasta $\frac{m}{n} \stackrel{a)}{=} \frac{am}{an}$.

Invers, să presupunem că $\frac{m}{n}$ este o fracție în care atât numărătorul, cât și numitorul sunt divizibile prin numărul întreg d , adică există m' și $n' \in \mathbb{Z}$, cu $m = d \cdot m'$ și $n = d \cdot n'$.

Fracțiile $\frac{m}{n}$ și $\frac{m'}{n'}$ sunt echivalente. În acest caz, am simplificat fracția $\frac{m}{n}$ prin d și scriem $\frac{m}{n} \stackrel{d)}{=} \frac{m'}{n'}$.

Exemplu

Să considerăm fracția $\frac{30}{348}$. 30 și 348 sunt divizibile prin 2, deci $\frac{30}{348} \stackrel{(2)}{=} \frac{15}{174}$. Mai departe, 15, și 174 sunt divizibile prin 3. Putem simplifica și avem $\frac{15}{174} \stackrel{(3)}{=} \frac{5}{58}$,

deci $\frac{30}{348} = \frac{5}{58}$. Această ultimă fracție nu mai poate fi simplificată (decât prin 1 sau -1), deoarece 5 nu este divizor al lui 58.

▲ O fracție care nu mai poate fi simplificată (decât prin ± 1) se numește ireductibilă.

În general

Pentru orice fracție $\frac{m}{n}$ găsim, după simplificări succesive, o fracție $\frac{m'}{n'}$ echivalentă cu $\frac{m}{n}$ și care nu mai poate fi simplificată (decât prin 1 sau -1).

Uneori, este utilă *scoaterea întregilor din fracție*. Aplicând teorema împărțirii cu rest, putem scrie numărătorul m sub forma $m = n \cdot q + r$, unde $q \in \mathbb{N}$ este câtul, iar $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ este restul împărțirii lui m la n . Obținem $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$.

Exemplu $\frac{40}{21} = 1\frac{19}{21}$; $\frac{-55}{-17} = \frac{55}{17} = 3\frac{4}{17}$; $\frac{-40}{21} = (-1) \cdot \frac{40}{21} = -\left(1 + \frac{19}{21}\right) = -1\frac{19}{21}$.

De asemenea, poate fi utilă *introducerea întregilor în fracție*.

Exemplu $2\frac{4}{11} = 2 + \frac{4}{11} = \frac{22}{11} + \frac{4}{11} = \frac{26}{11}$.

◇ Reprezentarea numerelor raționale sub formă zecimală

Putem scrie numerele raționale sub formă zecimală (cu virgulă). Întâlnim trei tipuri de astfel de scrieri:

- a) finite: 0,25; -1,752; 3,443;
- b) periodice simple: 1,(3); 2,(24); -6,(5);
- c) periodice mixte: 2,41(2); -3,12(3); 5,223(2).

Numerele zecimale sunt utile atunci când lucrăm cu unități de măsură și cu multipli și submultipli ai acestora.

Exemple

1 m = 0,1 dam = 0,01 hm = 0,001 km
1 ban = 0,01 lei.

◇ Cum trecem de la o formă de reprezentare la alta?

Întrucât folosind înmulțirea cu -1 putem schimba semnul unei fracții, în exemplele de transformări lucrăm cu fracții în care atât numărătorul cât și numitorul sunt pozitive.

Trecerea din formă fracționară în formă zecimală se face împărțind numărătorul fracției la numitorul acesteia.

Exemple

$$\frac{2}{25} = 0,08 \quad \begin{array}{r|l} 2 & 25 \\ \hline 0 & 0,08 \\ 20 & \\ \hline 0 & \\ 200 & \\ \hline 200 & \\ \hline \hline \end{array}$$

$$\frac{2}{3} = 0,(6) \quad \begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \hline 0 & 0,66\dots \\ 20 & \\ \hline 18 & \\ \hline 20 & \\ \hline 18 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\frac{31}{12} = 2,58(3) \quad \begin{array}{r|l} 31 & 12 \\ \hline 24 & 2,5833\dots \\ \hline =70 & \\ 60 & \\ \hline 100 & \\ \hline 96 & \\ \hline =40 & \\ 36 & \\ \hline =40 & \\ 36 & \\ \hline =4 & \end{array}$$

Observăm că deîmpărțitul 20, câtul 6 și restul 2 se repetă. Aceasta înseamnă că obținem perioada 6.

Observăm că deîmpărțitul 40, câtul 3 și restul 4 se repetă, ceea ce înseamnă că am obținut o fracție mixtă cu perioada 3.

Orice număr zecimal poate fi scris sub formă fracționară. Pentru cele trei tipuri de numere zecimale există trei algoritmi diferiți de transformare.

Exemplul 1: Numere zecimale cu scriere finită

$$1,254 = 1\frac{254}{1000} = \frac{1254}{1000} = \frac{627}{500}$$

9 Găsește fracții egale cu $\frac{20}{36}$ și $\frac{-48}{90}$ care nu mai pot fi simplificate.

10 Explică deosebirile dintre diferitele tipuri de numere zecimale.

▲ Orice număr întreg se poate scrie în formă zecimală dacă adăugăm după virgulă numai cifre de 0. De exemplu, $29 = 29,0 = 29,00$.

▲ Dacă la o fracție zecimală finită adăugăm zerouri după cifrele semnificative de după virgulă, atunci valoarea acesteia nu se schimbă. De exemplu: $3,413 = 3,41300$.

11 Scrie sub formă zecimală fracțiile:

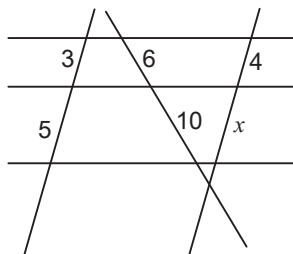
$\frac{27}{20}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{43}{15}$, $\frac{-17}{40}$, $\frac{8}{-7}$ și $\frac{-1}{14}$.

12 Verifică faptul că $\frac{627}{500}$ are forma zecimală 1,254.

13 Observă exemplele și formulează reguli de transformare.

14 Efectuează transformările inverse!

15 În figura de mai jos, dreptele orizontale sunt paralele. Compară rapoartele segmentelor determinate de aceste drepte pe cele trei secante, apoi calculează x .



16 Reprezintă pe axă numerele $2\frac{3}{4}$, $\frac{14}{5}$, $-\frac{8}{5}$.

Exemplul 2: Numere periodice simple

$$1) 2,(12) = 2\frac{12}{99} = \frac{210}{99} = \frac{70}{33};$$

$$2) 3,(4) = 3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}.$$

numărul format cu cifrele din perioadă
 o cifră în perioadă

Exemplul 3: Numere periodice mixte

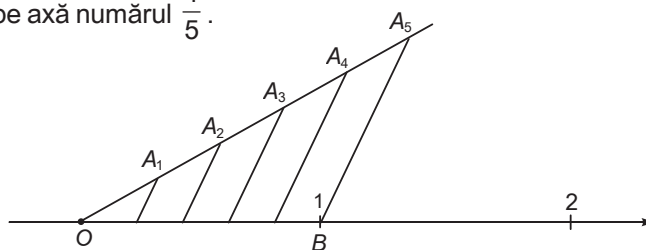
$$0,12(3) = \frac{123 - \overbrace{12}^{\text{numărul format cu cifrele din afara perioadei}}}{\underbrace{900}_{\text{o cifră în perioadă} \quad \text{2 cifre în afara perioadei}}} = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$$

◇ Cum reprezentăm numerele raționale pe axa numerelor?

Am văzut că numerele întregi pot fi reprezentate pe axa numerelor. Cum putem include și mulțimea numerelor raționale pe aceeași axă?

Să analizăm!

Vrem să reprezentăm pe axă numărul $\frac{1}{5}$.



Pentru aceasta, ducem prin O o semidreaptă distinctă de axa numerelor. Pe această semidreaptă, construim segmente de lungimi egale, pornind din O:

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5.$$

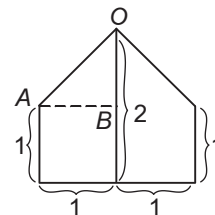
Unim A_5 cu punctul B, corespunzător lui 1. Ducem prin A_1, A_2, A_3 și A_4 paralele la dreapta A_5B . În acest fel, am împărțit segmentul OB, de lungime 1, în 5 segmente egale, de lungime $\frac{1}{5}$.

◆ Mulțimea numerelor reale

Anumite probleme concrete au condus la utilizarea unor numere care nu sunt raționale. A apărut în acest fel necesitatea introducerii unei mulțimi mai largi de numere, aceea a numerelor reale, notată cu \mathbb{R} .

Exemplul 1

Domnul Popescu vrea să își construiască în grădină o mică seră. Pentru construcția ei, va realiza întâi o structură metalică. În centru va așeza țărnuși verticali de 2 m, la margini țărnuși cu înălțimea de 1 m, iar lățimea serei va fi de 2 m. Domnul Popescu a realizat o schiță cu profilul serei pentru a calcula dimensiunea barelor oblice care urmează să sprijine acoperișul. A determinat mai întâi lungimea segmentului OB, care este $2 - 1 = 1$ (m) și pe cea a segmentului AB, egal cu jumătate din lățimea serei, de 1 m.



Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul OAB, a obținut: $OA^2 = OB^2 + AB^2$, deci $OA^2 = 2$.

Domnul Popescu și-a dat seama că, pentru a realiza traversa oblică are nevoie de o bară cu lungimea de $\sqrt{2}$ m. Utilizând calculatorul, a aflat că $\sqrt{2} \approx 1,4142$; domnul Popescu a decis să utilizeze o bară de 1,42 m pentru realizarea acoperișului serei.

Să demonstrăm!

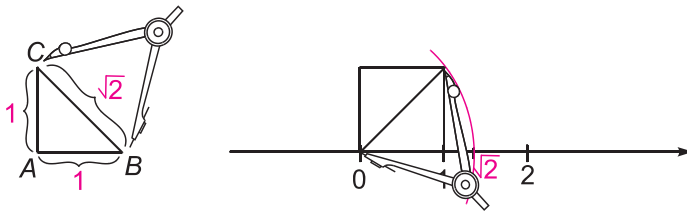
$\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Dacă, prin absurd, $\sqrt{2}$ ar fi număr rațional, el ar putea fi scris sub formă de fracție ireductibilă, adică $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, m și n prime între ele).

Prin ridicare la pătrat am obține $2 = \frac{m^2}{n^2}$, deci $m^2 = 2n^2$. Aceasta ar însemna că m este număr par, deci $m = 2l$, cu $l \in \mathbb{Z}$. Înlocuim m în egalitatea $m^2 = 2n^2$ și deducem $4l^2 = 2n^2$, așadar $n^2 = 2l^2$. Această relație ne conduce la concluzia că și n este număr par. Dar atunci fracția $\frac{m}{n}$ se poate simplifica cu 2, ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Numărul $\sqrt{2}$ este un număr irațional. El poate fi reprezentat pe axa numerelor cu rigla și compasul astfel:

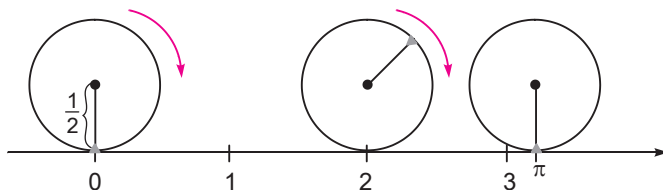
- construim un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) având catetele egale cu unitatea de măsură;
- pe axa numerelor măsurăm, cu ajutorul compasului, un segment cu unul din capete în origine și cu celălalt pe semidreapta pe care sunt situate numerele pozitive, astfel încât lungimea sa să fie egală cu lungimea ipotenuzei BC a triunghiului construit anterior.



Exemplul 2

Încă din Antichitate s-a observat că raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul acestuia nu depinde de cercul ales (fiind așadar același pentru toate cercurile considerate). Valoarea acestui raport a fost notată cu π . În calcule, folosim pentru π diverse aproximații. De obicei, aproximăm π cu 3,14.

Se știe că numărul π nu poate fi construit cu rigla și compasul pe axa numerelor. Singurul mod în care putem „vizualiza” numărul π pe axă este să „rostogolim” (fără frecare) un cerc de rază $\frac{1}{2}$.



Așezând cercul în origine și apoi rostogolindu-l în sensul ales pe axă, punctul care inițial se afla în origine, la încheierea unei rotații complete se va găsi în dreptul numărului π .

În general

Nu orice număr real poate fi reprezentat pe axă cu rigla și compasul. Totuși, fiecărui număr real îi corespunde un punct de pe axa numerelor și reciproc. Am „completat” în acest fel axa numerelor, obținând o corespondență între mulțimea \mathbb{R} și punctele unei drepte.

17 Demonstrează că $\sqrt{5}$ este număr irațional. Stabilește dacă $\sqrt{5}$ poate fi reprezentat pe axa numerelor cu rigla și compasul și, în caz afirmativ, explică modul de reprezentare!

▲ Pe site-ul <http://www.zenwerx.com/pi.php> pot fi vizualizate primele 4 milioane de cifre de după virgulă ale lui π .

18 De ce acest cerc trebuie să aibă raza $\frac{1}{2}$?

Să reținem!

În continuare, facem câteva precizări privind reprezentarea numerelor reale. Am văzut că pentru numerele raționale avem trei modalități de scriere în formă zecimală (finită, periodică simplă, periodică mixtă). Ceea ce caracterizează numerele iraționale este faptul că zecimalele de după virgulă nu se repetă periodic.

Spre exemplu, în cazul numărului $1,23(456)$, a treia, a șasea, a noua, ... cifră de după virgulă este 4; a patra, a șaptea, ... cifră este 5 ș.a.m.d. Datorită periodicității, știm exact ce cifră urmează în scrierea numărului rațional considerat.

În cazul unui număr irațional, chiar dacă știm regula de succesiune a cifrelor de după virgulă, numărul nu este periodic. Putem însă lucra cu aproximări zecimale ale unui astfel de număr. De asemenea, există diferite formule prin care se exprimă cu precizie numere reale. Câteva exemple de acest fel apar în lectura de la pagina 21.

19 Observă modul în care se succed zecimalele numărului $0,123456789101112\dots$. Este rațional acest număr?

20 Ce se poate spune despre segmentul OA când $a = 0$?

! Modulul oricărui număr real este un număr pozitiv sau 0.

! Vectorul \overline{AA} se numește vectorul nul și este notat cu $\vec{0}$.

21 Ce legătură există între modulul unui număr real a și lungimea vectorului \overline{OA} asociat pe axă?

22 Cum sunt sensurile vectorilor \overline{OA} și \overline{OB} dacă A îi corespunde unui număr pozitiv, iar B unui număr negativ?

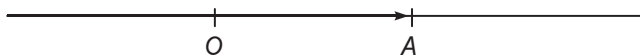
23 Găsește în figurile alăturate și alte perechi de vectori egali!

24 Construiește punctul Q în cazul în care $N = P$.

25 Completează demonstrația alăturată.
Reprezintă situația în care punctele M, N și P sunt coliniare. Se păstrează enunțul?

◆ Interpretarea operațiilor cu numere folosind operațiile cu vectori

Fiecărui număr real a îi corespunde un punct A de pe axă și reciproc.



Prin definiție, modulul numărului a este egal cu lungimea segmentului $[OA]$ și este notat cu $|a|$. Caracterizăm numărul a prin vectorul \overline{OA} .

Vom arăta în continuare ce legătură există între operațiile cu numere reale și operațiile cu vectori.

Să ne amintim!

◆ Vectori

Orice două puncte A, B (nu neapărat distincte) determină un vector, notat \overline{AB} . Punctul A se numește originea vectorului \overline{AB} , iar punctul B se numește vârful lui \overline{AB} .

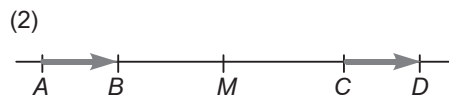
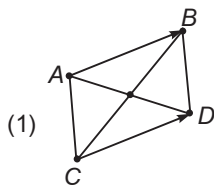


Fiecărui vector nenul îi asociem direcția, sensul și lungimea sa.

Doi vectori \overline{AB} și \overline{CD} sunt egali dacă mijlocul segmentului $[AD]$ coincide cu mijlocul segmentului $[BC]$.

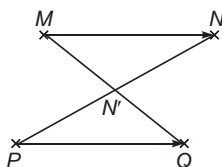
Exemple

În fiecare dintre desenele de mai jos sunt reprezentate puncte A, B, C, D pentru care avem $\overline{AB} = \overline{CD}$.



Să demonstrăm!

Pentru orice vector \overline{MN} și pentru orice punct P , există un unic punct Q astfel încât $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

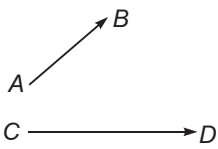


Punctul Q se obține astfel: se construiește mai întâi mijlocul N' al segmentului NP , iar punctul Q căutat este simetricul lui M față de N' ...

◇ Suma vectorilor

Să ne amintim!

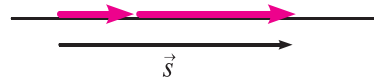
Suma a doi vectori se calculează cu regula paralelogramului sau cu regula triunghiului.



Fiind dați vectorii \overline{AB} și \overline{CD} , calculăm $\vec{s} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Regula paralelogramului: Transportăm unul din vectori cu originea în originea celuilalt. Suma vectorilor (\vec{s}) este diagonala (orientată) paralelogramului format.

Regula triunghiului: Transportăm unul din vectori cu originea în vârful celuilalt. Suma vectorilor (\vec{s}) este cea de-a treia latură (orientată) a triunghiului.

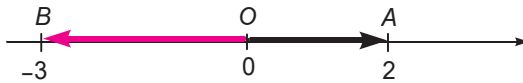


Fiind dați vectorii coliniari \overline{AB} și \overline{CD} , calculăm $\vec{s} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

Aplicăm regula triunghiului (se va obține un triunghi alungit!).

Să observăm!

Considerăm pe axa numerelor punctele A și B corespunzătoare numerelor 2 și -3 , precum și vectorii \overline{OA} și \overline{OB} .



Suma $2 + (-3)$ este egală cu -1 , iar suma vectorilor \overline{OA} și \overline{OB} este egală cu vectorul \overline{OC} , unde C este punctul asociat numărului -1 .



În general

Dacă a și b sunt numere reale, iar A și B sunt punctele corespunzătoare de pe axă, atunci numărului $a + b$ îi corespunde pe axă punctul C pentru care:

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$$

Să analizăm!

1) Dacă numerele a și b au același semn, punctele A și B sunt de aceeași parte a lui O . Numărul $a + b$ are același semn cu a și cu b , iar modulul lui $a + b$ este egal cu suma modulelor lui a și b .

$$|a + b| = |a| + |b|.$$



$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}.$$

26 Se poate aplica regula paralelogramului pentru suma a doi vectori coliniari?

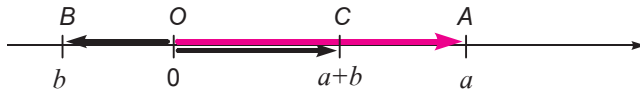
27 Reprezintă suma vectorilor din desen. (Cele două segmente orientate au aceeași lungime.)



28 Ilustrează printr-un desen adunarea a două numere negative alese de tine.

29 Explică ce se întâmplă în cazul în care $b = -a$.

30 Folosește operațiile cu vectori pentru a explica semnul sumei.



2) Dacă numerele a și b au semne contrare, punctele A și B sunt de o parte și de alta a lui O pe axa numerelor. Să presupunem că $b \neq -a$, adică A și B nu sunt simetrice față de O . În acest caz, semnul lui $a+b$ este egal cu semnul aceluia dintre numerele a și b , care are modulul mai mare. Această regulă poate fi explicată cu ușurință cu ajutorul adunării vectorilor:

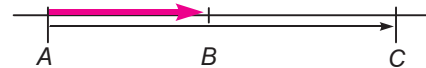
◆ Înmulțirea vectorilor cu scalari

Să ne amintim!

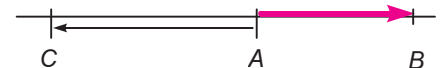
Produsul dintre un scalar λ și un vector \overline{AB} este egal cu vectorul \overline{AC} , obținut astfel:

1) Dacă $\overline{AB} = 0$, atunci $\overline{AC} = 0$.

2) Dacă $\overline{AB} \neq 0$, folosim următoarea regulă:



În cazul în care scalarul λ este pozitiv, punctul C se află pe dreapta AB , de aceeași parte a lui A ca și B și $AC = \lambda \cdot AB$.



În cazul în care scalarul λ este negativ, punctul C se află pe dreapta AB , astfel încât B și C să fie de o parte și de alta a lui A și $AC = |\lambda| \cdot AB = -\lambda \cdot AB$.

31 Explică ce se întâmplă în cazul în care scalarul λ este egal cu zero.

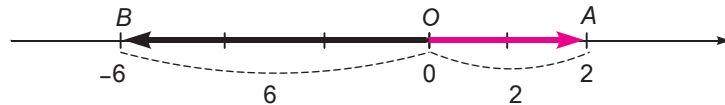
32 Fiind dat vectorul v , de mai jos, desenează vectorii $2 \cdot v$ și $-3 \cdot v$.



▲ Același rezultat se obține înmulțind scalarul 2 cu vectorul de poziție al numărului -3. Realizează un desen care să illustreze această afirmație.

Să observăm!

Considerăm pe axa numerelor punctul A corespunzător numărului 2 și vectorul asociat \overline{OA} . Produsul $(-3) \cdot 2$ este egal cu -6 . Pe de altă parte, înmulțind scalarul (-3) cu vectorul \overline{OA} se obține vectorul \overline{OB} , unde B este punctul asociat numărului -6 .



În general

Dacă λ și a sunt numere reale, iar A este punctul de pe axă corespunzător lui a , atunci numărului $\lambda \cdot a$ îi corespunde pe axă punctul B pentru care $\lambda \cdot \overline{OA} = \overline{OB}$.

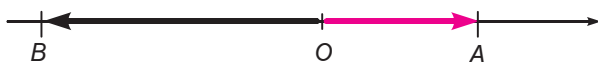
Să analizăm!

Interpretăm regula semnelor pe care o folosim la înmulțirea numerelor cu ajutorul înmulțirii vectorilor cu scalari.

1) Produsul dintre două numere pozitive este un număr pozitiv: „ $(+) \cdot (+) = (+)$ ”. Altfel spus, înmulțind cu un scalar pozitiv un vector al cărui sens coincide cu cel al axei numerelor, se obține un vector cu același sens, deci corespunzător unui număr pozitiv.



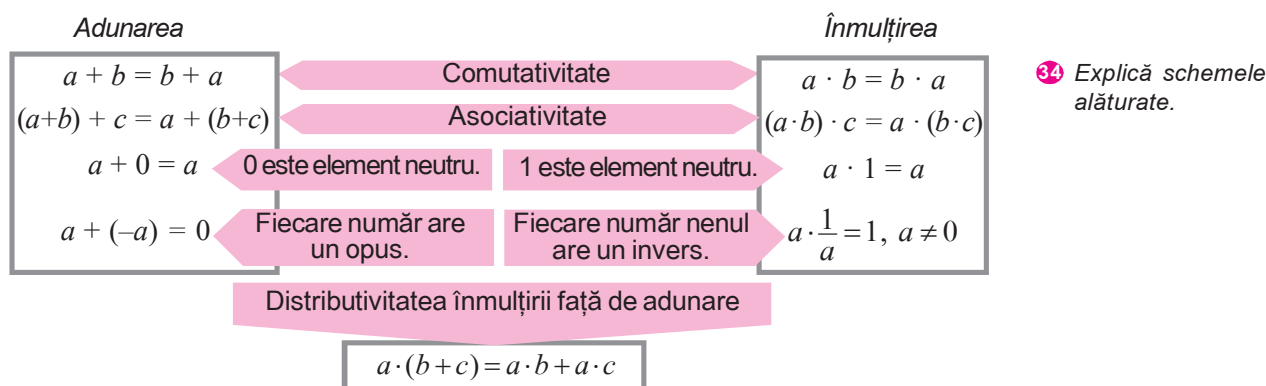
2) Produsul dintre un număr negativ și un număr pozitiv este un număr negativ: „ $(-) \cdot (+) = (-)$ ”. Altfel spus, înmulțind cu un scalar negativ un vector al cărui sens coincide cu cel al axei numerelor, se obține un vector având sens opus, deci corespunzător unui număr negativ.



33 Interpretează cu ajutorul înmulțirii cu scalari regulile „ $(+) \cdot (-) = (-)$ ” și „ $(-) \cdot (-) = (+)$ ”.

◆ Proprietățile operațiilor cu numere reale

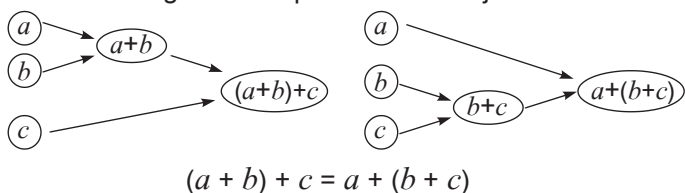
Următoarele proprietăți caracterizează operațiile cu numerele reale:



34 Explică schemele alăturate.

Exerciții și probleme

1. Putem interpreta asociativitatea adunării cu ajutorul unor diagrame de tipul celor de mai jos:



- a) Reprezintă în același mod, distributivitatea înmulțirii față de adunare.
b) Analizează diagrama și stabilește câte operații se efectuează pentru a calcula $a \cdot (b + c)$, respectiv $a \cdot b + a \cdot c$.

2. Reprezintă pe axă numerele:

$$3; -2; \frac{3}{4}; -\frac{1}{3}; \sqrt{3}; -\sqrt{5}.$$

3. Scrie în formă zecimală numerele raționale:

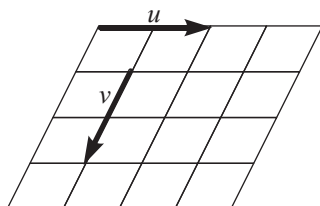
$$a) \frac{3}{8}; \quad b) \frac{41}{9}; \quad c) \frac{35}{18}.$$

4. Scrie în formă fracționară numerele zecimale:

$$a) 1,27; \quad b) 0,3(6); \quad c) 0,42; \quad d) 2,1(3).$$

5. Arată că numărul $\sqrt{3}$ nu este rațional.

6. Reprezintă vectorii $u + v$ și $u - v$, folosind desenul alăturat. Reprezintă apoi vectorii $2 \cdot u$, $2 \cdot v$ și $2 \cdot u + 2 \cdot v$.

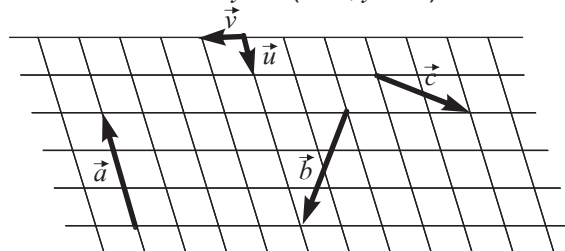


7. Interpretează următoarele calcule, folosind reprezentarea pe axă și vectori.

$$a) (-2) + (-3) = -5; \quad c) 2 \cdot (-3) = -6;$$

$$b) (-4) + 1 = -3; \quad d) (-5) \cdot (-2) = 10.$$

8. Exprimă vectorii \vec{a} , \vec{b} și \vec{c} din desenul alăturat sub forma $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ (cu $x, y \in \mathbb{R}$).



9. Calculează în două moduri:

$$a) (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2;$$

$$b) \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

10. a) Adrian i-a explicat Corinei regula semnelor astfel: Semnul „+” înseamnă „prieten”, iar semnul „-” înseamnă „dușman”. De aceea, regula „+ · + = +” se traduce prin „prietenul prietenului meu este prietenul meu”. Verifică această modalitate mnemotehnică pentru încă un caz.

b) La adunare, semnul este dat de termenul „cel mai tare”. Inventează o poveste despre această regulă!

11. Folosește asociativitatea adunării și explică modul de calcul al unei sume în care apar atât termeni pozitivi, cât și termeni negativi. Construiește un exemplu.

12. Calculează, utilizând eventual un minicalculator:
 $0,243 \cdot (-2,37); \quad -5,1234 + 2,81.$

Aplicații ale proprietăților operațiilor



Aplicăm și dezvoltăm!

▲ În contabilitate, semnele matematice „-” și „+” sunt înlocuite de cuvintele credit, respectiv debit.

❶ Care este bilanțul familiei Popescu după primul trimestru? Completează tabelul cu următoarele rezultate: totalul veniturilor; totalul cheltuielilor; bilanțul la finalul trimestrului.

Ce proprietăți ale adunării numerelor reale folosești pentru a verifica rezultatele?

◆ Calculul bugetului personal

Când calculăm bilanțul bugetului personal, asociem de obicei numere pozitive pentru venituri și numere negative pentru cheltuieli. În consecință, la calculul bilanțului trebuie să ținem cont de regula semnelor de la adunarea numerelor.

Exemplu

Familia Popescu a alcătuit un tabel cu veniturile și cheltuielile realizate în primele trei luni ale anului:

Luna	Venituri	Cheltuieli	Bilanț
ianuarie	2000	2100	-100
februarie	2150	2200	-50
martie	2150	2000	150

Astfel, în primele două luni cheltuielile au fost mai mari decât veniturile, înregistrându-se un bilanț negativ: membrii familiei au beneficiat de posibilitățile de creditare date de cardul de salarii. În cea de-a treia lună, situația s-a inversat, obținându-se un bilanț pozitiv.

◆ Formule de calcul prescurtat. Calcul rapid

Să ne amintim!

Pentru orice trei numere a, b, c , au loc egalitățile:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

❷ Observă desenele și interpretează cu ajutorul lor formulele de calcul rapid.

❸ Demonstrează algebric formulele de calcul rapid și stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere se folosesc.

Aceste formule pot fi utile în efectuarea mai rapidă a unor calcule. Spre exemplu, pentru a calcula pătratul unui număr, poate fi mai convenabil ca în locul calculului direct să scriem numărul dat ca sumă a două numere și apoi să folosim formula de dezvoltare de mai sus.

Exemple

$$1) (1001)^2 = (1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2 \cdot 1000 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$$

$$2) 99^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

$$3) 2006^2 - 2005^2 = (2006 + 2005)(2006 - 2005) = 4011.$$

◆ Rezolvări de inecuații

Regula semnelor folosită la înmulțire este utilă și în rezolvarea unor inecuații.

Exemplu

Să găsim mulțimea numerelor x care verifică inecuația $(x - 1)(x + 2) > 0$.

Pentru aceasta, realizăm un tabel în care scriem semnele celor doi factori, $x - 1$ și $x + 2$ și apoi stabilim semnul produsului:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+
$(x - 1)(x + 2)$	+	-	0	+

Din tabel, observăm că pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ expresia $(x - 1)(x + 2)$ este pozitivă, așadar mulțimea căutată este $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

◆ Operații efectuate folosind calculatorul de buzunar

Proprietățile operațiilor cu numere sunt utile, de exemplu, când vrem să efectuăm calcule folosind calculatorul de buzunar.

Exemplul 1

Efectuăm $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$.

Varianta 1. Începem prin a tasta primul termen, 3, pe care îl introducem în memoria calculatorului. După aceea calculăm $3 \cdot 5$, iar rezultatul 15 îl introducem în memoria calculatorului, el fiind adăugat la numărul deja existent în memorie, deci calculatorul „ține minte” numărul 18.

Procedăm analog și cu produsul $3 \cdot 7$, astfel că, în final, în memoria calculatorului se află suma dorită.

Succesiunea în care apăsăm tastele este următoarea:



Varianta 2. Observăm că în suma pe care vrem să o calculăm putem da numărul 3 factor comun, deci avem $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 3(1 + 5 + 7)$.

Efectuăm mai întâi suma $1 + 5 + 7$, iar apoi înmulțim cu 3; rezultatul este același, deoarece înmulțirea este comutativă.



Exemplul 2

Determinăm 3^{10} cu ajutorul unui calculator care nu are funcția de ridicare la putere.

Varianta 1. Înmulțim pe 3 succesiv de 10 ori: $3^{10} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ ori}}$.

Succesiunea în care apăsăm tastele este următoarea:



Varianta 2. Folosim următoarea relație:

$$3^{10} = 3^{8+2} = ((3^2)^2) \cdot 3^2.$$

Putem apăsa tastele în succesiunea următoare:



4 Amintește-ți și explică semnificația fiecărui element din tabel.

5 Rezolvă inecuațiile:
 $(x + 1)(x - 2) < 0$;
 $(1 - x)(3 + x) < 0$.

▲ În efectuarea calculelor am utilizat un calculator Casio FX-82SX.

Calculatoarele de buzunar de alt tip pot utiliza alte modalități de a aplica proprietățile operațiilor.

Întotdeauna când se folosește un astfel de calculator, trebuie cunoscut modul în care operează, pentru a evita rezultatele greșite. Este de asemenea important să estimezi ordinul de mărime al rezultatului, pentru a nu avea surprize atunci când algoritmul de programare al calculatorului este altul decât cel scontat.

6 Efectuează ridicarea la puterea a 10-a a lui 3 apăsând cât mai puține dintre tastele calculatorului.

▲ Pentru a calcula numărul 5^2 se apasă tastele în ordinea



Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să recunosc și să diferențiez mulțimi de numere
- ◆ să identific proprietăți ale operațiilor algebrice
- ◆ să compar proprietăți ale adunării și înmulțirii, în scopul identificării unor algoritmi
- ◆ să exprim proprietăți ale mulțimilor de numere
- ◆ să utilizez similarități între operații în deducerea de proprietăți?



Test de verificare

1. a) Propune trei exemple de numere raționale și două exemple de numere întregi.
b) Precizează dacă numărul $\sqrt[3]{8}$ este număr irațional.
2. Știm că înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare. Operația de ridicare la putere, adică operația descrisă prin $a * b = a^b$, se definește cu ajutorul înmulțirii. Este oare adevărat că și această operație este distributivă față de adunare?
3. Atunci când înmulțim un număr zecimal cu 10^n , $n \in \mathbb{N}$, mutăm virgula spre dreapta, cu n cifre. Folosește această proprietate pentru a justifica algoritmul de transformare a numărului zecimal $0,(12)$ în fracție.
4. Calculează suma: $((\dots(((-1) + 1) - 1)\dots) - 1)$, în care sunt 2007 paranteze deschise „(” și 2007 paranteze închise „)”.
5. La adunarea fracțiilor este nevoie să aducem termenii la același numitor. Explică de ce nu este necesar să facem acest lucru și când înmulțim fracții.

Lectură

De-a lungul timpului, matematicienii au fost interesați să găsească o valoare cât mai exactă pentru π și să decidă dacă acesta este un număr rațional sau nu.

Arhimede (sec. III î.H.) a determinat π cu trei zecimale exacte, stabilind că $3,141 < \pi < 3,142$. El a folosit metoda poligoanelor regulate înscrise și circumscrise unui cerc.

Aceași metodă a fost utilizată și de Ptolemeu (sec. II d.H.) și de al Kași (sec. XIV-XV), acesta din urmă determinând primele 17 zecimale ale lui π .

Perioada secolelor XVI-XVII a fost bogată în rezultate referitoare la π .

În 1593 Viète a dat pentru π formula de calcul ca produs infinit:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + a\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a + a\sqrt{a + a\sqrt{a}}} \cdot \dots \text{ (unde } a = \frac{1}{2} \text{)}.$$

John Wallis (1655) a exprimat π sub forma de produs infinit: $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \dots$, fiind prima dată când π este reprezentat cu ajutorul unui șir de numere raționale.

Alte formule care permit aproximarea lui π au fost date de Newton (1676): $\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{3}{2^7 \cdot 5} + \frac{5}{2^{10} \cdot 7} + \dots$

sau de Leibniz (1682): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

În 1768 Lambert a demonstrat faptul că π este un număr irațional, deci nu poate fi reprezentat sub formă de fracție $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Unitatea de învățare 2

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Calculează:
- | | | |
|-----------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $3 + 4 \cdot (-5)$ | b) $(3 + 6 + 8) \cdot 4$ | c) $4,85 + 2,59$ |
| d) $5,73 - 2,99$ | e) $(4,69 + 5,03) : 3$ | f) $6,12 - 0,3 \cdot 4,8$ |
| g) $25,2 : 0,25$ | h) $12,4 + 12,4 \cdot 9$ | i) $3,7 \cdot 3,14$ |

Exponențiale și logaritmi

2. Determină:
- | | | | | |
|---------------|--------------|----------------|------------------|-------------------------|
| a) $(-3)^3$ | b) 6^2 | c) $\log_3 27$ | d) $\log_2 0,25$ | e) $\log_6 \sqrt[3]{6}$ |
| f) $\lg 1000$ | g) 10^{-4} | h) $\lg(0,1)$ | i) $10^{\lg 4}$ | j) $\log_5 25$ |

Calcul procentual

3. Calculează:
- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) 30% din 90 m | b) 15% din 60 kg |
| c) 5% din 10% din 100 km | d) 75% din 25% dintr-un litru. |
4. Precizează:
- Care este diferența de preț la o scumpire cu 15% a unui produs care costă 54 lei?
 - Cât la sută reprezintă 70 m din 350 m?
 - Cu ce procent s-a mărit costul unui obiect al cărui preț s-a dublat?
 - Ce preț actual are o pereche de mănuși care costa 25 lei și a fost scumpită cu 10%, apoi ieftinită cu același procent?

Alege răspunsul corect!

Coordonate în plan

5. În desenul următor sunt reprezentate punctele de coordonate:
- $(2; 0)$ și $(0; 4)$
 - $(2; 2)$ și $(4; 4)$
 - $(0; 2)$ și $(4; 0)$
-
6. Punctul $A(2; -1)$ are reprezentarea grafică:
- -

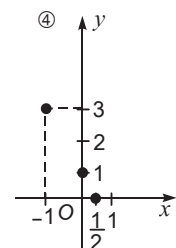
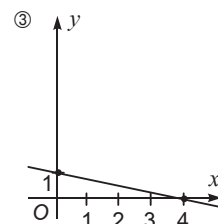
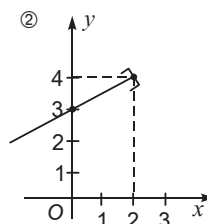
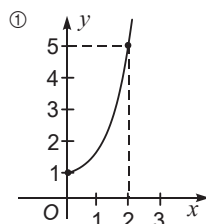
Calcul algebric

7. $(3x - 2)^3$ este egal cu:
- $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
 - $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
8. $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$ este egal cu:
- $x^3 + 27y^3$
 - $x^3 - 27y^3$
 - $x^3 - 27x^2y + 9xy^2 - 27y^3$

Funcții

9. Fiecare desen este reprezentarea geometrică a graficului uneia dintre funcțiile de mai jos. Asociază graficul cu funcția corespunzătoare.

- | | |
|---|--|
| a) $f: \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$ | b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 1 - \frac{1}{4}x$ |
| c) $h: (-\infty; 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x}{2} + 3$ | d) $t: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, t(x) = x^2 + 1$ |



Funcție și măsură – recapitulare

Măsurare, reprezentare, analiză de date

Ne amintim și explorăm!

◆ Cum caracterizăm numeric obiectele?

Numărul natural a apărut în mod firesc, pentru a caracteriza mulțimi finite de obiecte. Pentru a face reprezentări însă, lucrăm cu mulțimi continue și infinite (în sensul că sunt alcătuite dintr-o infinitate de puncte): segmente, curbe, suprafețe, corpuri. Caracterizarea numerică a acestora a condus, de-a lungul timpului, la apariția a diferite tipuri de numere, prin intermediul operației de *măsurare*. Când măsurăm o mărime oarecare, este nevoie de o unitate de măsură. Pentru măsurarea lungimii, oamenii au ales de-a lungul timpului diferite unități de măsură. Unele dintre acestea – pasul, cotul, nodul din navigație – se regăsesc, din motive practice, în diverse etape istorice. De exemplu, cotul este și astăzi, la unele populații, unitatea de măsură cea mai la îndemână în măsurarea țesăturilor.

Odată convenită o unitate de măsură, a măsura o mărime oarecare revine la a determina un raport: când spunem că o sală de clasă are lungimea de 5 metri, determinăm raportul între lungimea sălii și unitatea de măsură aleasă (în acest caz, metrul). Spunem că măsurarea se face *prin cuprindere*.

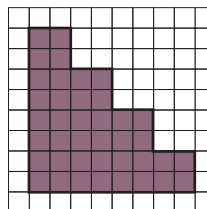
Măsurarea presupune deci două operații distincte: alegerea unei *unități de măsură* adecvate și *compararea* a ceea ce se dorește măsurat cu unitatea aleasă. În acest fel, asociem un număr mărimii date inițial.

Matematicienii antici au crezut multă vreme că orice două segmente sunt *comensurabile*, adică există o unitate de măsură bine aleasă care se cuprinde de un număr întreg de ori în ambele segmente. Teoria lor este de natură atomistă: ei credeau că orice obiect fizic se poate diviza doar până la „cărmizile” componente ale materiei, pe care le-au numit atomi.

În școala lui Pitagora, s-a descoperit cu uimire că există și mărimi incommensurabile. De exemplu, diagonala și latura unui pătrat nu pot avea o unitate de măsură comună. Acest fapt, care contrazicea întregul sistem filosofic de până atunci, a fost atât de surprinzător, încât pitagoricienii l-au ascuns vreme de câteva sute de ani! Ulterior, reconsiderarea acestui fapt a condus la formarea conștiinței că există și altfel de numere, în afara celor raționale, numere pe care anticii le-au denumit *iraționale*.

◆ Măsurarea

Măsurarea suprafețelor se aseamănă unui joc de puzzle: a măsura o suprafață presupune a afla de câte piese identice (unități de măsură) este nevoie pentru a acoperi suprafața respectivă. Fiecare poligon are o arie bine determinată. De exemplu, figura alăturată are aria de 40 de unități de măsură.



La fel, pentru a determina volumul unui corp, trebuie să vedem de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în acel corp. Fiecare poliedru are un volum bine determinat.

Spre deosebire de geometrie, măsurătorile statistice sunt doar estimative; pe de o parte, ele depind de percepția respondenților față de subiectul analizat, iar pe de altă parte sunt obținute prin extrapolare. Aceasta presupune înțelegerea tendinței de variație a unor funcții pentru care cunoaștem doar câteva date numerice.

▲ Numărul rațional a apărut ca raport al măsurilor a două mărimi de același fel.

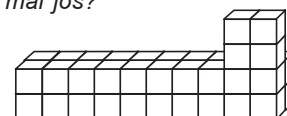


Pitagora

❶ Ce arie are figura colorată din desen?



❷ Ce volum are corpul de mai jos?



◆ Configurații geometrice utile în reprezentarea datelor

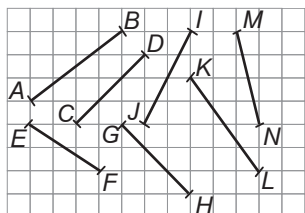
În Geometrie, reprezentarea datelor se face, de regulă, cu ajutorul unei figuri geometrice: pe o astfel de figură, marcăm segmente sau unghiuri congruente, precum și lungimi sau măsuri de unghiuri, pentru a transmite informația.

Există însă și situații în care o configurație geometrică „de fundal” conține în ea suficientă informație pentru ca reprezentarea prin desen să fie relevantă în rezolvarea problemelor.

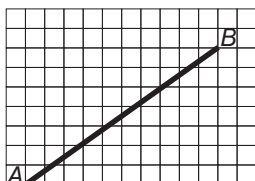
◆ Rețelele de pătrate

Foile din caietul de matematică oferă o configurație utilă pentru probleme diverse de matematică. Prezentăm câteva sugestii de utilizare a acestei configurații.

- ③ Identifică perechi de segmente congruente pe rețeaua de mai jos.

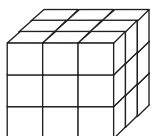


- ④ Fără a face măsurători, marchează mijlocul segmentului AB din figură. Explică modul de construcție.



- ⑤ Propune exerciții de reprezentare a unui desen la scara 2:1, folosind rețele de pătrate pentru ghidare.

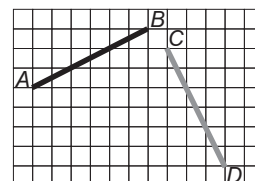
- ⑥ După ce se assemblează, cubul din figură se vopsește în roșu. Câte cubulețe vor avea 3, 2, 1 sau 0 fețe colorate în roșu?



Exemplul 1: Congruența unor segmente

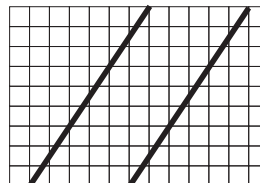
Folosind rețeaua de pătrate a caietului de matematică, putem desena ușor segmente congruente. Congruența poate fi validată prin măsurare și poate fi argumentată folosind cazurile de congruență a triunghiurilor.

Pe de altă parte, rețeaua de pătrate oferă o modalitate de „orientare” de tip vectorial: putem argumenta congruența unor segmente prin modul analog de construcție a acestora („mergem 6 pătrățele orizontal și 3 pătrățele vertical”).



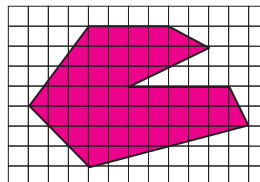
Exemplul 2: Paralelismul dreptelor

Putem înțelege mai bine relația de paralelism dacă dreptele sunt trasate pe această configurație, deoarece avem deja evidențiate două familii de drepte secante (și anume dreptele orizontale, respectiv verticale, ale rețelei).



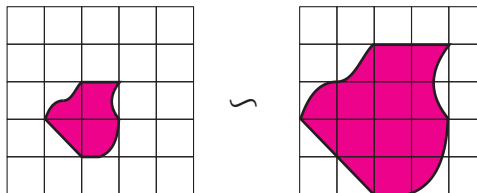
Exemplul 3: Calculul lungimilor și ariilor

Folosind rețeaua de pătrate, putem determina ușor ariile unor figuri geometrice, deoarece pătratul rețelei este chiar unitate de măsură.



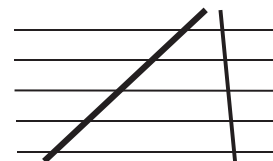
Exemplul 4: Înțelegerea relației de asemănare

Asemănarea figurilor geometrice poate fi gândită ca o copiere „la scară”.



◆ Caietul „dictando”

Liniatura din caietele „dictando” constituie o configurație geometrică utilă pentru problemele de paralelism: liniile caietului constituie o rețea de paralele echidistante. Folosind această configurație, putem justifica teorema paralelelor echidistante și proprietăți legate de unghiuri formate de drepte paralele cu o secantă.



◆ Cubul

Pe un cub se pot exemplifica teoremele de paralelism și de perpendicularitate, se pot evidenția teoremele de determinare a planului. Cubul oferă o configurație familiară și datorită faptului că putem „umple” spațiul folosind cuburi identice.

◆ Configurații utile în reprezentarea datelor statistice

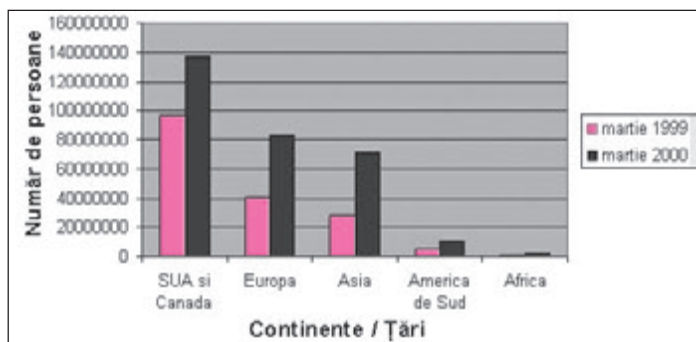
Viața cotidiană ne pune deseori în situația de a utiliza date diverse. Fie că este vorba despre prețuri, ore de transmitere a unor emisiuni TV, dobânzi bancare, informații privind numărul de persoane care au o anumită opțiune, suntem zilnic asaltați de informații conținând date numerice.

În cele mai multe cazuri, pentru a ne forma o părere realistă, trebuie să comparăm datele sau să înțelegem evoluția lor în timp. Astfel, informația: „Costa Rica are 4 milioane de locuitori” nu transmite nimic în sine; dacă știm însă că Bulgaria are 10 milioane de locuitori, putem compara Costa Rica (o țară îndepărtată, față de România) cu unii dintre vecinii noștri.

Putem compara mai ușor variația unor date dacă le reprezentăm astfel încât să evidențiem un anumit criteriu.

Exemplul 1: Accesul la internet

O revistă de specialitate a publicat graficul cu bare din imagine, privind accesul la internet.

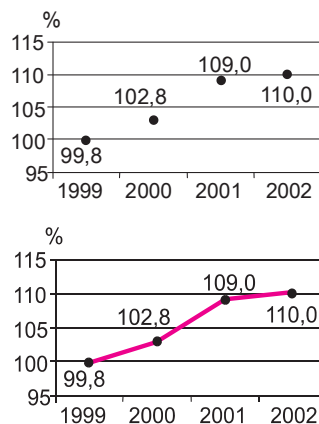


Reprezentarea de mai sus ne permite să identificăm rapid care continente au cea mai mare capacitate de acces la internet și în ce perioadă. În acest caz, pentru a compara efectivele de persoane care au acces la internet, comparăm de fapt înălțimile unor bare: aceste înălțimi exprimă modul cum variază pe Glob accesul la internet.

Exemplul 2: Variația volumului construcțiilor

Graficul alăturat redă variația volumului lucrărilor de construcții în anii 1999, 2000, 2001, 2002, în raport cu anul 1998, în România.

Observăm că, dacă unim punctele marcate, variația este mai evidentă. Se vede clar că pe perioada menționată este o creștere. Această creștere este mai accentuată în perioada 2000-2001 și mai lentă în perioada 2001-2002.



7 Cum a variat accesul la internet în perioada menționată, pentru fiecare grup de țări în parte?

8 Aproximează diferențele privind accesul la internet în 1999 și 2000 pentru fiecare două grupuri de țări. Câte comparații trebuie făcute?

9 Graficele alăturate redau variația volumului construcțiilor în raport cu anul 1998, luat ca an de referință.

a) Cum este volumul construcțiilor în 1999 față de 1998?

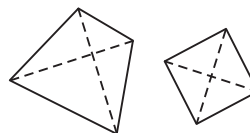
b) Cu cât a crescut volumul construcțiilor în 2001 față de 2000? Dar în 2002?

◆ Analogia

În vorbirea curentă, expresia „... este la fel cu...” are o semnificație bine determinată. Spre deosebire de aceasta, în matematică, „la fel” poate însemna mult mai mult.

Două triunghiuri „la fel” sunt asemenea. Dar faptul că două poligoane sunt „la fel” ar putea însemna că acestea au același număr de laturi, sau că au unele proprietăți comune. De exemplu, putem spune că patruleterele din figură sunt „la fel”, deoarece ele au diagonalele perpendiculare.

Aceeași caracterizare este valabilă pentru configurații din contexte diferite. De exemplu, triunghiul (din geometria plană) este „la fel” cu tetraedrul (din geometria în spațiu), din perspectiva *minimalității*: ambele au numărul minim posibil de vârfuri și laturi.



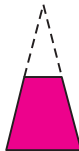
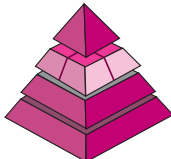
10 Găsește diferite analogii între triunghi și tetraedru.

Pentru a nu folosi exprimarea prea vagă „...este la fel cu...”, vom spune că două configurații sunt analoge dacă proprietăți ale uneia dintre ele se regăsesc în cealaltă configurație.

Exemplu. Să analizăm, de exemplu, analogia trapez isoscel – trunchi de piramidă regulată, evidențiată de tabelul comparativ de mai jos.

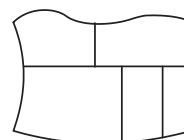
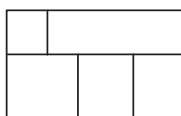
11 Care poate fi analogul în spațiu pentru linia mijlocie a unui trapez?

12 Compară prin analogie formulele privitoare la aria trapezului, respectiv aria laterală a trunchiului de piramidă.

În plan	În spațiu
Prin secționarea unui triunghi isoscel cu o dreaptă paralelă cu baza acestuia, se obține un trapez isoscel.	Prin secționarea unei piramide regulate cu un plan paralel cu baza acesteia, se obține un trunchi de piramidă regulată.
Laturile neoparalele ale unui trapez isoscel sunt congruente.	Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt congruente. Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă regulată sunt trapeze congruente.
	

Analogia este utilă în interpretarea proprietăților unor reprezentări schematice.

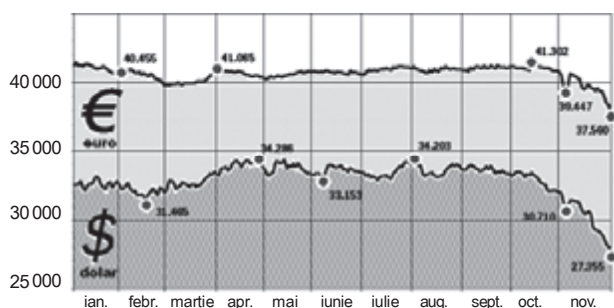
De exemplu, desenele alăturate reprezintă amândouă schema străzilor unui același cartier deși, din punct de vedere metric, ele nu păstrează aceleași dimensiuni.



O analiză a reprezentărilor grafice privind variația unor date presupune de asemenea realizarea de analogii și formularea unor generalizări. De aceea, înțelegerea unor fapte geometrice ne poate ajuta în analiza proprietăților unor funcții.

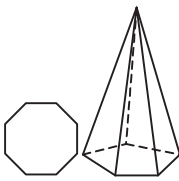
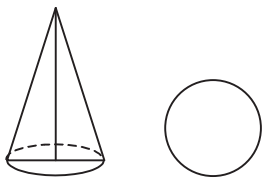
Exerciții și probleme

1. Diagrama de mai jos indică variația cursului euro și al dolarului în raport cu leul în 2004.



- În ce lună diferența între cele două cursuri este cea mai mare?
- În ce lună diferența între cele două cursuri este cea mai mică?
- În ce lună euro a avut cel mai mare curs?
- În ce lună dolarul a avut cel mai mic curs?
- Formulează și rezolvă alte probleme pe baza graficului dat.

2. Observă tabelul și completează ce lipsește:

Piramida	Conul
	
Baza piramidei este un poligon	Baza conului este un cerc.
Perimetrul bazei	... cercului
Apotema bazei	Raza ...
Apotema piramidei	... conului
Muchia piramidei	... conului
Aria laterală a piramidei regulate: $A_l = [?]$	Aria laterală a conului circular drept: $A_l = \frac{L_c \cdot G}{2} = [?]$

3. Evidențiază analogii între elementele trunchiului de piramidă și elementele trunchiului de con. Scrie astfel formulele de arie și volum ale trunchiului de con circular drept.

Funcții. Transformări geometrice

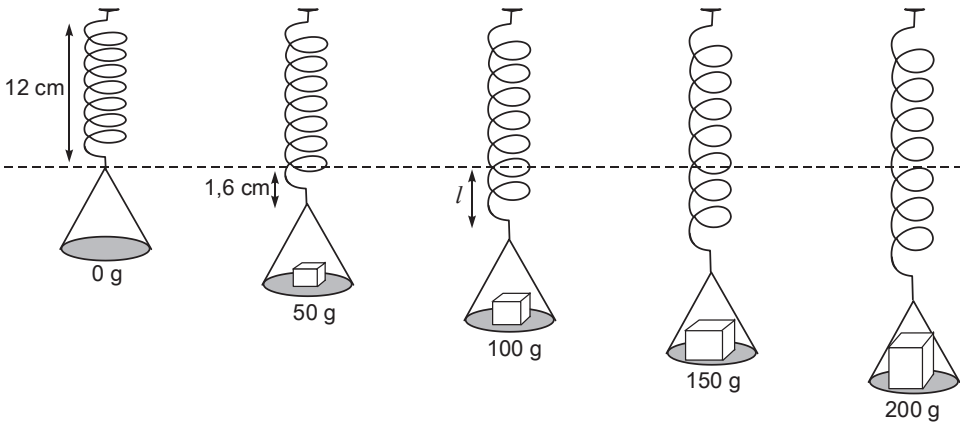


Analizăm și explorăm!

◆ Ce este o funcție?

Să observăm!

Resortul din imagine se alungește cu atât mai mult cu cât masa obiectului suspendat este mai mare. Fizicienii au constatat că, în condiții ideale, alungirea resortului este direct proporțională cu masa obiectului suspendat.



Pentru resortul din figură coeficientul de alungire este 0,032.
Notăm cu M mulțimea maselor obiectelor considerate și cu L mulțimea alungirilor posibile ale resortului.

Putem exprima dependența dintre alungirea resortului și masă printr-o funcție:

$$f: M \longrightarrow L$$

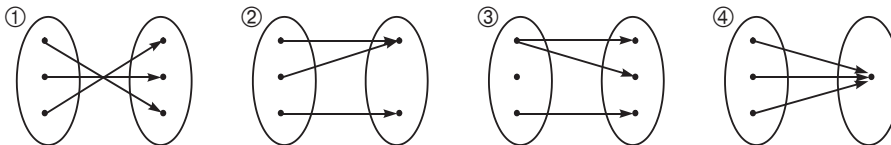
$$l = f(m) = 0,032 \cdot m$$

Să ne amintim!

Se numește funcție un triplet (f, A, B) , unde A este o mulțime „de plecare”, numită *domeniu*, B este o mulțime „de sosire”, numită *mulțimea de valori a funcției* și f este o lege de corespondență care face ca fiecărui element din A să-i corespundă un unic element din B .

Notăm $f: A \rightarrow B$, unde, pentru orice $x \in A$, există un unic element $y \in B$ astfel încât $f(x) = y$. O altă notație folosită este $x \mapsto f(x) = y$.

Exemple



Correspondențele 1, 2 și 4 sunt funcții, dar corespondența 3 nu reprezintă o funcție.

◆ Funcția de forma $x \mapsto ax + b$

Să notăm într-un tabel dependența lungimii resortului de masa obiectelor din exemplul anterior.

masa (în g)	50	100	150	200
lungimea (în cm)	13,6	15,2	16,8	18,4

1 Determină alungirea, apoi întinderea totală a resortului în fiecare caz.

Exemplifică o posibilă utilizare practică a unui astfel de resort.

2 Realizează un desen în care de resort este suspendat un obiect cu masa de 75 g. Păstrează proporțiile din imaginea alăturată.

⚠ Deși în teorie, alungirea resortului este proporțională cu masa obiectelor suspendate la capătul lui, peste anumite limite deformarea are o abatere de la această regulă. Explică limitele unui cântar care se bazează pe principiul resortului.

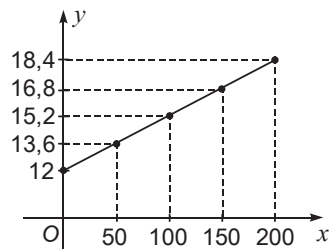
3 Explică de ce corespondența ③ nu reprezintă o funcție.

4 Cum s-au obținut datele din tabelul care exprimă variația lungimii în funcție de masă?

5 Folosește graficul pentru a determina lungimea resortului pentru o masă de 250 g.

Graficul alăturat corespunde tabelului de date anterior. Pe baza acestuia, putem descoperi lungimea resortului în cazul unei mase mai mari de 200 g.

Funcția reprezentată alăturat poate fi descrisă prin legea de corespondență $h(x) = 0,032x + 12$. Aceasta este o funcție „de gradul întâi”, iar graficul său este o dreaptă.



◆ Funcția pătratică și funcția radical

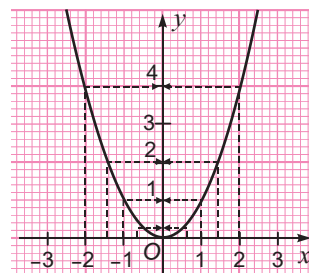
Funcția care asociază fiecărui număr real pătratul său se numește *funcție pătratică*.

Exemplu

Funcția $x \mapsto x^2$ este definită pe \mathbb{R} și ia valori în $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty)$.

x	x^2
-2	4
-1,5	2,25
-1	1
-0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4

Tabelul din stânga conduce la reprezentarea ilustrată în dreapta.



6 Completează tabelul:

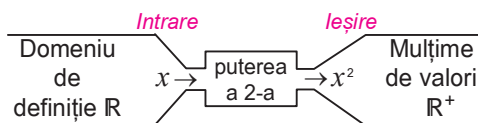
x	0,8	-1,6		
x^2			6,25	1,69

O funcție poate fi gândită ca o mașină de calcul care procesează numere.

Să comparăm!

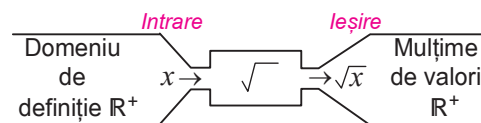
Funcția pătratică

$$x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$$

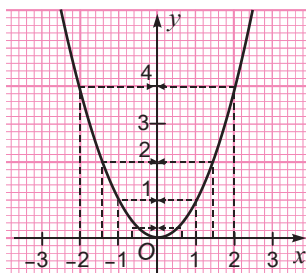


Funcția radical

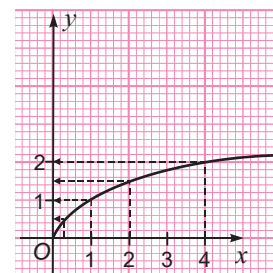
$$x \mapsto \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}^+$$



x	puterea a 2-a	x^2
0		0
0,5		0,25
1		1
1,414...		2
2		4
-0,5		0,25
-1		1
-1,414...		2
-2		4



x	√	\sqrt{x}
0		0
0,25		0,5
1		1
2		1,414...
4		2

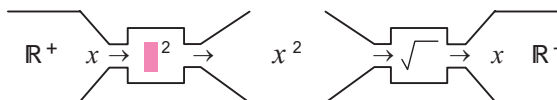


7 Completează tabelul:

x	9		1,44	
\sqrt{x}		1,6		1,9

Să observăm!

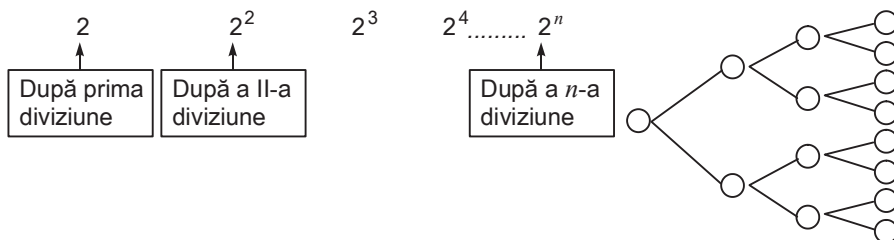
Considerăm funcția pătratică $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ și funcția radical $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Schema de mai jos exprimă faptul că aceste două funcții sunt inverse una alteia.



8 Explică schema alăturată.

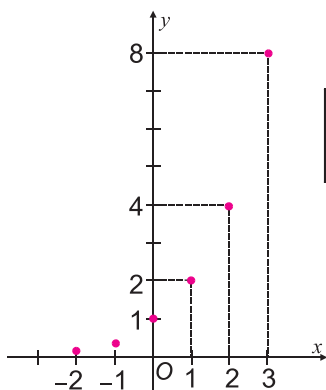
◆ Funcția exponențială și funcția logaritmică

O bacterie se înmulțește prin diviziune celulară.
Schema de mai jos sugerează derularea acestui proces.



Această variație corespunde funcției $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(n) = 2^n$.

Extindem funcția g cu aceeași lege de corespondență considerând ca domeniu de definiție mulțimea numerelor întregi. Obținem astfel funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$.



Putem deduce și alte proprietăți observând tabelul de valori și reprezentarea grafică ale funcției f .

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,25	0,5	1	2	4	8

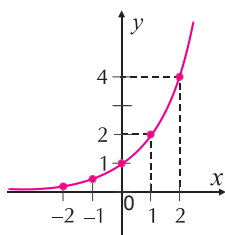
- f este o funcție crescătoare
- Pentru $x < 0, f(x) < 1$
- Pentru $x > 0, f(x) > 1$.

Putem trasa graficul unei funcții exponențiale definite pe \mathbb{R} folosind un tabel de valori și proprietatea de monotonie a acestei funcții.

Exemple

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția exponențială de bază 2, descrisă prin $f(x) = 2^x$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		0,25	0,5	1	2	4	

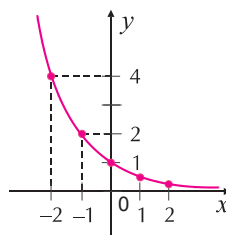


Observăm că:

- oricare ar fi $x, f(x) > 0$
- f este funcție crescătoare

Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția exponențială de bază 0,5, descrisă prin $g(x) = 0,5^x$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		4	2	1	0,5	0,25	



Observăm că:

- oricare ar fi $x, g(x) > 0$
- g este funcție descrescătoare

În general

Fie $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x$, funcția exponențială de bază a .
Atunci:

- $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- f este crescătoare dacă $a \in (1; +\infty)$ și descrescătoare dacă $a \in (0; 1)$.

9 Identifică diverse situații din fizică, chimie sau biologie exprimabile prin funcții exponențiale.

10 Alcătuieste un tabel de valori și precizează câteva proprietăți ale funcției $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = 0,5^n$.

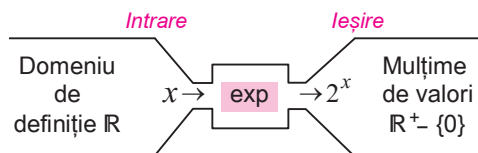
11 Reprezintă grafic funcțiile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3^x \text{ și}$$

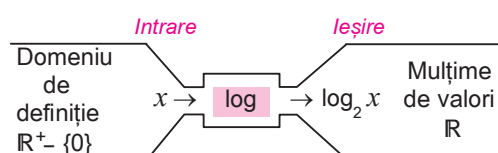
$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 0,4^x.$$

Să comparăm!

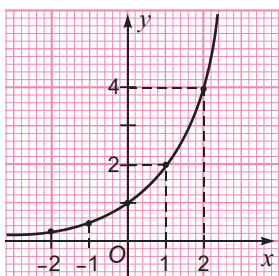
Funcția exponențială,
(de bază 2)
 $x \mapsto 2^x, x \in \mathbb{R}$



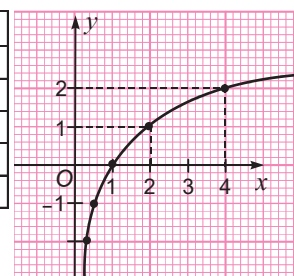
Funcția logaritmică,
(de bază 2)
 $x \mapsto \log_2 x, x \in (0; +\infty)$



x	2^x
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4



x	$\log_2 x$
0,25	-2
0,5	-1
1	0
2	1
4	2



12 Explică cu ajutorul unei scheme faptul cu funcțiile $x \mapsto 2^x$ și $x \mapsto \log_2 x$ sunt inverse una altele.

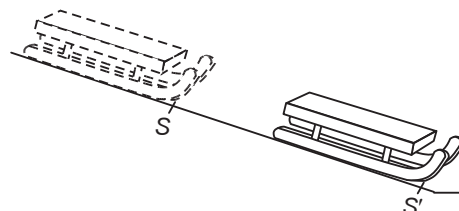
Funcția exponențială și funcția logaritmică de aceeași bază sunt inverse una altele.

◆ Ce legături există între transformări geometrice și funcții?

Să observăm!

O sanie alunecând pe zăpadă se deplasează din poziția S în poziția S' .

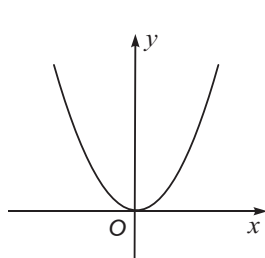
În limbaj matematic, spunem că ea a făcut o mișcare de translație de vector $\overrightarrow{SS'}$. Prin această translație, poziției inițiale S îi corespunde noua poziție S' .



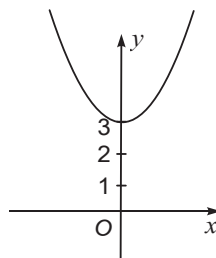
Să ne amintim!

O *translație* de vector \vec{a} asociază unei figuri geometrice \mathcal{F} o figură geometrică \mathcal{F}' , congruentă cu \mathcal{F} . Translația este o funcție care asociază fiecărui punct P al figurii \mathcal{F} un punct $P' \in \mathcal{F}'$ astfel încât $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$.

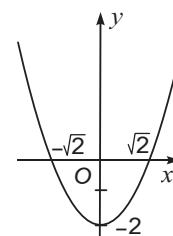
Putem folosi translația pentru a trasa graficul unor funcții. De exemplu, știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ are graficul de mai jos, putem reprezenta cu ușurință, prin translație, funcții precum $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3; h(x) = x^2 - 2$.



$$x \mapsto x^2$$



$$x \mapsto x^2 + 3$$

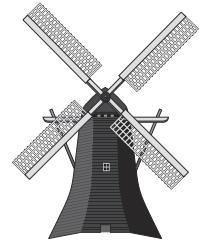


$$x \mapsto x^2 - 2$$

13 Explică modul în care au fost obținute graficele alăturate.

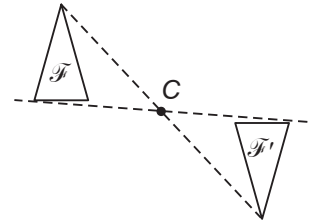
Să observăm!

Pentru a putea funcționa, o morișcă, elicea unui avion, paletele morilor de vânt au o proprietate comună: ele sunt echilibrat distribuite față de axul de prindere.



Să ne amintim!

- Două puncte se numesc *simetrice față de un punct* numit *centru* dacă sunt coliniare cu centrul și egal depărtate de acesta.
- O figură (sau un corp geometric) admite *centru de simetrie* dacă simetricul oricărui punct al său față de centru aparține figurii (sau corpului).
- Două figuri \mathcal{F} și \mathcal{F}' sunt *simetrice față de un punct C* dacă pentru orice punct $P \in \mathcal{F}$ există $P' \in \mathcal{F}'$ astfel încât $CP = CP'$, iar P , C și P' sunt coliniare. În acest caz, figura \mathcal{F}' este asociată figurii \mathcal{F} printr-o simetrie de centru C .



▲ Simetria centrală (simetria față de un punct) este o funcție care transformă o figură geometrică într-o figură congruentă cu ea însăși.

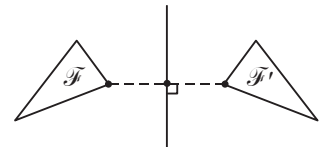
Să observăm!

Ca și simetria centrală, simetria axială este frecvent întâlnită în natură.



Să ne amintim!

- Două puncte se numesc *simetrice față de o dreaptă* dacă sunt situate pe o perpendiculară pe acea dreaptă și sunt egal depărtate de ea.
- O figură (sau un corp geometric) admite *axă de simetrie* dacă simetricul oricărui punct al său față de axă aparține figurii (corpului).
- Două figuri \mathcal{F} și \mathcal{F}' sunt *simetrice față de o dreaptă d* dacă distanța de la un punct oarecare al figurii \mathcal{F} la dreapta d este egală cu distanța de la d la punctul corespunzător al figurii \mathcal{F}' .



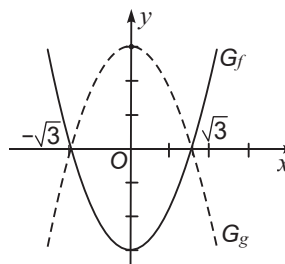
▲ Simetria axială (simetria față de o dreaptă) este o funcție care transformă o figură geometrică într-o figură congruentă cu ea însăși.

Proprietatea de simetrie ne ajută să trasăm rapid grafice de funcții sau să verificăm corectitudinea unora deja trasate.

Exemple

1) Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ și $g(x) = 3 - x^2$ au graficele simetrice față de axa Ox .

2) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$ are graficul simetric față de o dreaptă perpendiculară pe Ox , care trece prin punctul de abscisă 1.

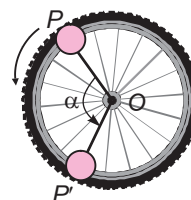


14 Trasează graficul funcției $x \mapsto |x - 1|$ și identifică axa de simetrie a acestuia.

Să observăm!

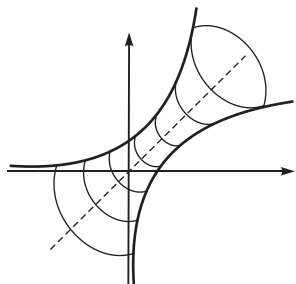
Când merge cu bicicleta, „ochiul de pisică” pus de Maria pe roată se deplasează, de exemplu, din poziția P în poziția P' .

În limbaj matematic, spunem că „ochiul de pisică” a executat o mișcare de rotație de centru O și unghi α . Prin această mișcare, poziției inițiale P îi corespunde noua poziție P' .



Să ne amintim!

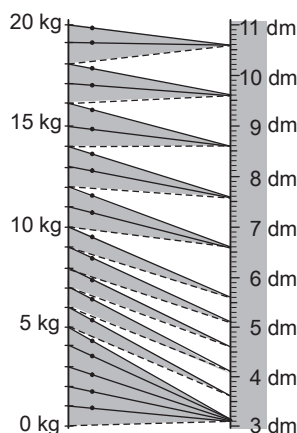
O rotație de centru O și unghi α în plan asociază unei figuri geometrice \mathcal{F} o figură geometrică \mathcal{F}' , congruentă cu \mathcal{F} . Rotația este o funcție care asociază unui punct $P \in \mathcal{F}$ punctul $P' \in \mathcal{F}'$ situat pe cercul de centru O și rază OP , astfel încât $m(\widehat{POP'}) = \alpha$.



Dacă rotim în spațiu cu 180° graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 2^x$, în jurul bisectoarei primului cadran, obținem graficul funcției $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_2 x$. Cele două grafice sunt simetrice față de bisectoarea primului cadran al sistemului de referință.

Exerciții și probleme

1. Păcală folosește pe post de cântar un resort ale cărui alungiri sunt reprezentate în figura alăturată. Poate fi această cântărire modelată printr-o funcție?



2. Care dintre tabelele de mai jos corespunde unei aplicații de forma $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$?

①

x	-1	0	1	3
y	-5	-3	1	3

②

x	-6	0	3	9
y	-7	5	11	17

③

x	10	6	2	0
y	2	0	-2	-3

3. Identifică dreapta corespunzătoare fiecărei ecuații.

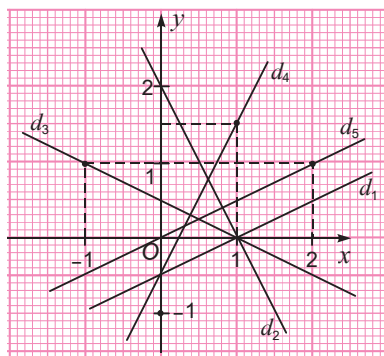
a) $y = 2,5x - 1$

b) $y = \frac{1}{2}x$

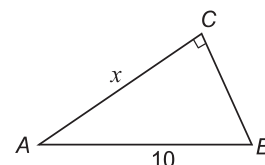
c) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

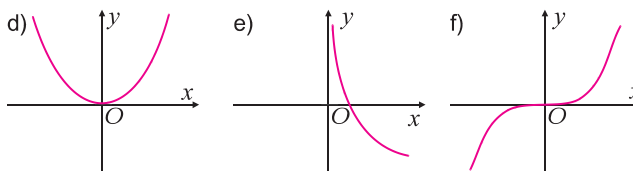
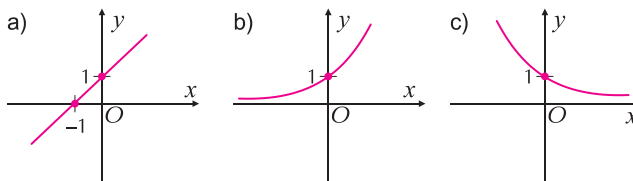
e) $y = -2x + 2$.



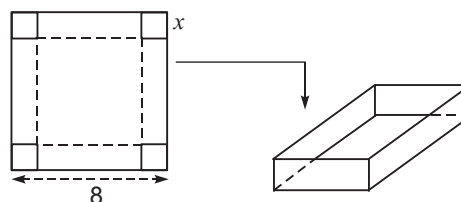
4. a) Ce valori poate avea x ?
b) Exprimă perimetrul $P(x)$ și aria $A(x)$ a triunghiului ABC în funcție de x .



5. Care dintre graficele de mai jos reprezintă o funcție:
a) exponențială; b) logaritmică; c) crescătoare;
d) pătratică; e) de forma $x \mapsto ax + b$?



6. Se decupează un pătrat cu latura de 8 dm. La fiecare colț al acestuia se taie un pătrat de latură x dm. Lipind colțurile rămase, se obține o cutie deschisă.
a) Exprimă în funcție de x măsura muchiei bazei cutiei, apoi volumul acesteia, $V(x)$.
b) Pentru ce valori a lui x , cutia are formă cubică?



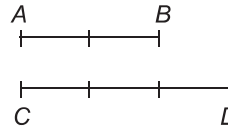
Rezolvarea problemelor: conexiuni între algebră și geometrie

Aplicăm și dezvoltăm!

Între algebră și geometrie nu există delimitări stricte: din contră, sunt multiple legături care își dovedesc importanța mai ales în rezolvarea problemelor. Astfel, reprezentările geometrice pot explica rezultate algebrice dificile, iar calculul algebric poate simplifica determinarea unor relații care implică lungimi, arii, volume.

Exemplul 1: Numerele iraționale

Numerele raționale au apărut din geometrie, ca rapoarte ale unor mărimi de același fel. Matematicienii antici gândeau, de exemplu, numărul $\frac{2}{3}$ ca raportul segmentelor AB și CD din desenul alăturat. Pentru aceste segmente există o unitate de măsură care se cuprinde de un număr întreg de ori în amândouă, adică segmentele AB și CD sunt comensurabile.



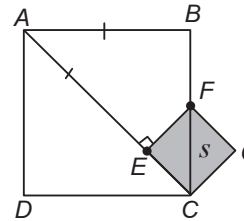
Să demonstrăm!

Latura și diagonala unui pătrat nu sunt comensurabile.
Altfel spus: $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Să presupunem prin absurd că există un segment s care se cuprinde în $[AB]$ și în $[AC]$ de un număr întreg de ori.

Fie $E \in AC$, $F \in BC$ astfel încât $[AE] = [AB]$ și $EF \perp AC$.
Atunci $EF = EC = AC - AB \dots$

Segmentul s se cuprinde de un număr întreg de ori în $[EC]$ și în $[CF] \dots$ Repetăm construcția cu pătratul $EFGC$; obținem pătrate din ce în ce mai mici, având proprietatea că segmentul s se cuprinde de un număr întreg de ori în laturile și diagonalele lor \dots . Obținem o contradicție \dots



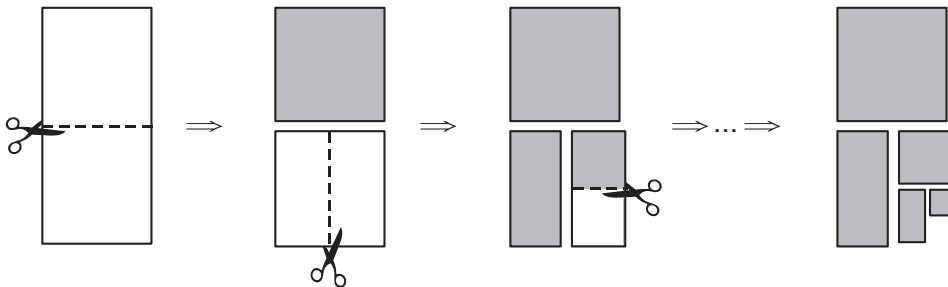
1 Completează demonstrația cu justificările necesare.

Exemplul 2: Justificarea geometrică a unor formule de calcul

• Vrem să demonstrăm egalitatea:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{2^{10}}.$$

Folosind o reprezentare geometrică, putem proceda astfel:



2 Exprimă și justifică analog suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$

Tăiem o foaie de hârtie în două părți egale și oprim una din aceste bucăți.

Înjumătățim una din cele două părți și oprim una din bucățile rămase.

Tăiem din nou bucata rămasă în două părți egale.

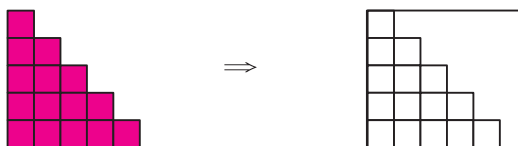
Continuăm la fel de 10 ori.

Egalitatea de mai sus exprimă faptul că suma ariilor bucăților de hârtie oprite este aria foii inițiale, din care scădem aria „piesei” lipsă.

• Vrem să demonstrăm egalitatea: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Folosind o reprezentare geometrică, putem demonstra această egalitate astfel:

3 Ce dimensiuni are dreptunghiul obținut pentru primii 10 termeni ai sumei?



Numărul de pătrățele din figură (egal cu aria figurii) este $1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Din două figuri identice formăm un dreptunghi 5×6 .

Prin analogie, procedăm la fel în cazul general.

Exemplul 3: Soluții algebrice ale unor probleme de geometrie

Vrem să calculăm aria unui triunghi cu laturile 6, 7, 8.

În lipsa unei formule de calcul, putem proceda astfel:

Construim $AD \perp BC$, $D \in BC$.

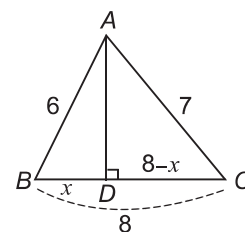
Fie $BD = x$, $DC = 8 - x$. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul ADB și în triunghiul ADC și obținem:

$$AD^2 = 36 - x^2$$

$$AD^2 = 49 - (8 - x)^2$$

$$\text{Deci } 36 - x^2 = 49 - (8 - x)^2 \Rightarrow 36 - x^2 = 49 - 64 + 16x - x^2 \Rightarrow 16x = 51 \Rightarrow x = \frac{51}{16}$$

Putem acum să calculăm înălțimea AD , apoi aria triunghiului.



4 Finalizează calculele și află aria triunghiului ABC.

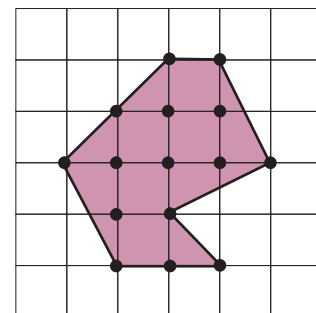
Exemplul 4: Calculul ariilor

Să considerăm poligonul din figură care are vârfurile în nodurile unei rețele de pătrate, de latură 1. Ne interesează aria acestui poligon. Desigur, putem descompune poligonul în figuri mai simple și putem aduna ariile acestora.

Există însă și o metodă „algebrică” de calcul:

Aria = $\frac{n}{2} + m - 1$, unde n = numărul de noduri de pe laturile poligonului, iar m = numărul de noduri din interiorul poligonului.

Astfel, aria poligonului din figură este egală cu $\frac{9}{2} + 6 - 1 = 9,5$.



5 Calculează aria poligonului desenat în figură, folosind descompuneri în triunghiuri și pătrate.

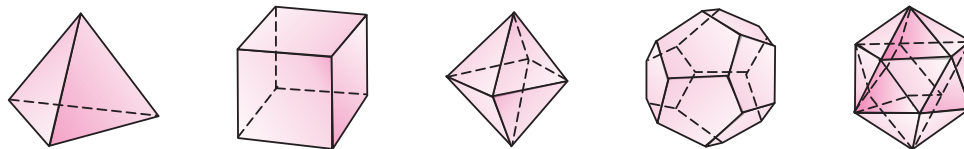
6 Desenează pe o rețea de pătrate și alte poligoane, de tipul celui din figură, și verifică formula de arie:

$$\text{Aria} = \frac{n}{2} + m - 1.$$

Exemplul 5: Poliedrele regulate

Un poliedru regulat are toate fețele poligoane regulate identice. Există numai 5 poliedre regulate.

7 Poliedrul este un corp geometric care are toate fețele poligoane.



Poliedrele regulate satisfac relațiile numerice menționate în tabelul de mai jos:

Nume	Nr. de muchii	Nr. de vârfuri	Nr. de fețe	Nr. de triunghiuri	Nr. de pătrate	Nr. de pentagoane
tetraedru	6	4	4	4		
cub	12	8	6		6	
octaedru	12	6	8	8		
dodecaedru	30	20	12			12
icosaedru	30	12	20	20		

7 Verifică, pentru fiecare poliedru regulat, relația lui Euler: $M = V + F - 2$, unde M este numărul muchiilor, V este numărul vârfurilor și F numărul de fețe.

Exerciții și probleme

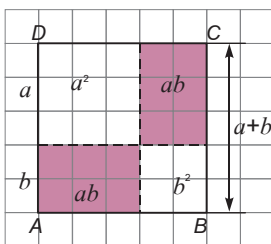
1. Demonstrează geometric formulele de calcul prescurtat:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

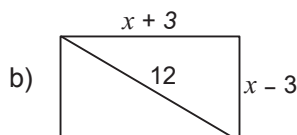
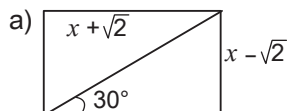
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Folosește desenul alăturat.



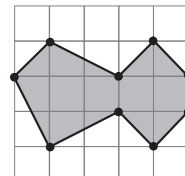
2. Află aria dreptunghiului cunoscând datele din figură, în care lungimile sunt date în centimetri.



3. Folosește reprezentările geometrice de mai jos pentru a exprima suma primelor n numere naturale impare, respectiv suma primelor n numere naturale pare.



4. Calculează aria poligonului alăturat, în funcție de latura de lungime l a rețelei de pătrate. Verifică rezultatul printr-o altă metodă de calcul.



Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific metode care conduc cât mai rapid la obținerea rezultatului
- ◆ să transpun probleme în reprezentări adecvate
- ◆ să utilizez algoritmi specifici pentru a rezolva probleme
- ◆ să utilizez analogii pentru a optimiza rezolvarea problemelor
- ◆ să extrag din diferite reprezentări informații semnificative pentru rezolvarea de probleme?

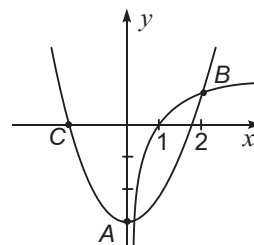
Test de verificare

1. Folosește proprietăți ale operațiilor cu numere reale pentru a efectua cât mai simplu $(\sqrt{5} + 2)^{100} \cdot (\sqrt{5} - 2)^{100}$
2. Tabelul următor redă dobânzile la câteva bănci la data de 10.01.2006. Care bancă este cea mai avantajoasă pentru depozit? Rezolvă problema apelând la o reprezentare potrivită.

Banca	1 lună	3 luni	6 luni	9 luni	12 luni
BCR	5	5,25	5,75	6,25	7
BRD	4	4,1	4,15	4,15	4,25
Bancpost	4,5	4,75	5	5,25	5,5
Raiffeisen Bank	4,5	4,75	5	5,25	5,25
Banca Piriac	3,5	5	5,5	6	6
Banca Transilvania	5	5,5	5,5	6	6,5

Sursa: www.Banii nostri.ro

3. Rezolvă ecuația în \mathbb{R} : $x^3 - 4x^2 + x = 0$.
4. Reprezintă grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = 2^x + 3$, apoi funcția $g: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \log_2 x - 3$.
5. Considerăm funcțiile $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 3$ ale căror reprezentări grafice sunt date de mai jos.
- a) Determină coordonatele punctelor A, B și C.
- b) Precizează numărul de soluții reale ale ecuației $\log_2 x = x^2 - 3$.
- c) Încadrează soluțiile ecuației de la b) între doi întregi consecutivi.



Unitatea de învățare 3

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități.

Calcul numeric

1. Efectuează:
- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) $2,3 + 1,75$ | e) $3,5 + 1,62$ |
| b) $4,15 - 2,91$ | f) $6,28 - 2,83$ |
| c) $3,1 \cdot 2,53$ | g) $1,5 \cdot 3,24$ |
| d) $2,(7) + 1,(2)$ | h) $3,(6) + 1,(3)$ |

Aproximări

2. Aproximează prin rotunjire la ordinul sutimilor:
- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) $4,318 + 2,754$ | e) $3,681 + 2,367$ |
| b) $29 : 7$ | f) $32 : 11$ |
| c) $35,8 : 11$ | g) $27,5 : 7$ |
| d) $\sqrt{5}$ | h) $\sqrt{6}$ |

Calcul procentual

3. Calculează:
- Cât reprezintă 20% din 145?
 - Cât la sută din 640 reprezintă 128?
 - Cât va costa un costum de 120 RON, după o scumpire cu 20%?
 - Care este procentul de ieftinire al unei cărți care înainte costa 6 lei, iar după ieftinire are prețul de 5,1 lei?

Regula de trei simplă

4. Rezolvă și argumentează:
- Dacă 4 m de mătase costă 58 lei, cât costă 7 m din același material?
 - Dacă aria unui sector de cerc, determinat de un unghi la centru cu măsura de 120° , este de 18 m^2 , ce arie are un sector al aceluiași cerc, determinat de un unghi la centru cu măsura de 40° ?
 - Dacă 4 automate identice îmbuteliază 600 / apă minerală în 20 de minute, în cât timp vor îmbutelia 5 automate aceeași cantitate de apă?
 - Dacă 180 de elevi au folosit 500 de coli de scris la un examen, câte coli se estimează că vor folosi 405 000 de elevi la un examen de același fel?

Reprezentări grafice

5. Reprezintă grafic într-un sistem de axe:
- punctele $A(-2; -1)$, $B(3; 0)$, $C(0; -4)$ și $D(-3; 3)$.
 - funcția $f: \{-2; -1; 0; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$
 - funcția $f: \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x$
 - funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.

Culegerea, clasificarea și reprezentarea datelor statistice

Surse de date statistice

Ne amintim și explorăm!

◆ Surse pentru obținerea de informații

O caracteristică a societății contemporane este nevoia de informare. Orice persoană, orice unitate economică, orice organizație folosește informații ce se pot obține în diverse moduri. Pentru a accesa mai ușor diferite informații s-au căutat moduri variate de catalogare: cărțile de telefon, atlasele, enciclopediile sunt exemple în acest sens.

Din ce în ce mai folosite sunt adresele web. Accesând o pagină pe Internet, se pot găsi rapid informații organizate pe baza unor criterii clare. Iată câteva exemple:

Adresa	Conținut
http://www.romanianvoice.com	Poezii și imagini românești
http://www.unilat.org/dtil/lenguainternet/ro/cultura	Locul limbilor și al culturilor latine
http://www.esouri.go.ro/	Eseuri, referate
http://www.thebans.com/eminescu/romvers.html	Poezii de Eminescu
http://www.bcub.ro/istorie/htm	Biblioteca de istorie
http://www.kappa.ro/guvern/istoria.html	Istoria românilor
http://www.nationalgeographic.com	National Geographic (engleză)
http://www.ecuadorspanish.com/en/ecuador/geography.html	Geography and Environments
http://www.bcu.ro/FILIALE/FIZICA.html	Biblioteca de fizică și chimie
http://www.edu.ro/proiecte/psih/main.htm	Enciclopedia de psihologie
http://www.ici.ro/romania/cultura/plastice.html	Arte plastice
http://www.art-links.md/art1.html	Arte plastice și arhitectură



Aceste surse de informații conțin date cunoscute și catalogate.

Există numeroase situații în care informațiile trebuie culese și organizate pentru a putea fi folosite cu ușurință.

Exemplul 1: Organizarea activităților comerciale

O editură intenționează să lanseze o colecție de cărți pe teme de cultură și civilizație. Pentru a estima succesul acestei inițiative, conducerea editurii are nevoie de informații privind preferințele cititorilor și ofertele de carte de pe piață în domeniul respectiv. De asemenea, editorul trebuie să dispună de informații care să permită stabilirea unor prețuri convenabile (un preț prea mic riscă să nu acopere cheltuielile, iar un preț prea mare poate împiedica vânzarea). Pentru a obține aceste informații, directorul a adresat un chestionar vizitatorilor unui târg de carte.

❶ Găsește și alte procedee de testare a preferințelor cititorilor de carte.



2) Observă datele și răspunde:

a) Câte persoane nu au cumpărat cărți în ultima lună?

b) Câte persoane au cumpărat 6 cărți în ultima lună?

3) Să notăm $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \dots, x_8 = 7$ și cu n_i numărul de persoane care au cumpărat x_i cărți în ultima lună. Determină n_1, n_2, \dots, n_8 .

! În matematică, estimarea comportării unei funcții pentru care nu se cunosc decât câteva valori particulare se numește **extrapolare**.

4) Imaginează și alte procedee de testare a preferințelor muzicale ale ascultătorilor.



5) Folosește un dicționar explicativ pentru a determina toate sensurile cuvântului „extrapolare“.

Iată răspunsurile înregistrate de la 100 de persoane la întrebarea: „Câte cărți ați cumpărat în ultima lună?“

1 0 2 5 7 1 3 3 3 1 7 4 2 4 3 3 1 6 2 2
4 2 1 3 2 4 3 1 3 2 0 4 3 1 3 3 5 2 4 5
1 3 3 2 7 2 0 2 3 4 1 2 6 2 0 7 3 2 3 1
3 2 0 3 3 0 4 3 0 3 2 4 2 4 3 5 1 3 0 3
2 3 2 3 1 3 7 2 2 3 1 7 3 2 1 5 2 0 4 6

Constatăm că, pentru a putea fi utilizate, aceste informații trebuie prelucrate și redade într-o formă mai sintetică.

Pe de altă parte, chestionarea a 100 de persoane nu oferă suficiente informații pentru a anticipa comportamentul întregii populații în raport cu aceasta problemă. Procedeele oferă însă informații orientative ce permit directorului editurii să ia decizii pertinente în privința dezvoltărilor ulterioare.

Exemplul 2: Conducerea activităților comerciale

Un studio de înregistrări vrea să lanseze pe piață câteva DVD-uri muzicale. Managerul studioului știe că dacă se fixează prețul unui DVD la o valoare prea mică, nu se acoperă cheltuielile de producție, iar dacă prețul este prea mare nu se vor face vânzări. De aceea, el are nevoie de informații despre impactul muzicii înregistrate de studio asupra posibililor cumpărători. Studioul a organizat câteva concerte și a inițiat un concurs cu premii, în colaborare cu postul local de radio. În acest fel a fost testată dorința publicului pentru achiziționarea DVD-urilor înregistrate în studio. Desigur, informațiile obținute sunt doar orientative; pentru a avea date mai exacte, ar trebui chestionați toți locuitorii orașului, ceea ce este extrem de costisitor și complicat. Totuși, firma își poate direcționa activitatea utilizând doar datele obținute.

◆ Sondaje statistice

În domeniile socio-economic și politic este adeseori necesar să fie cunoscută opinia populației asupra unor probleme de interes general. De aceea, în scopul lansării unor programe socio-economice adaptate situației reale ca, de exemplu: programe de protecție socială, programe privind dezvoltarea zonelor defavorizate, a meseriilor și a specializărilor deficitare, se fac periodic sondaje statistice. În acest caz, deși procesul de culegere a datelor nu implică întreaga populație, datele obținute sunt suficiente pentru conturarea unor politici la nivelul întregii populații.

Acest procedeu, de anticipare a comportamentului general al unui sistem, atunci când știm un număr suficient de cazuri particulare, se numește **extrapolare**.

Sondajele se aplică de obicei unui eșantion format din aproximativ 1 000 de persoane. Pentru a putea extinde rezultatele la întreaga populație, specialiștii stabilesc un **eșantion național reprezentativ**, asupra căruia sunt aplicate instrumentele de analiză (chestionare, discuții organizate pe grupuri, interviuri). Stabilirea eșantionului reprezentativ se face în funcție de criterii precum: vârstă, sex, nivel de pregătire profesională, zonă geografică, mediu social, mediu familial, nivel de cultură etc.

Pe baza datelor obținute de la un eșantion național reprezentativ, se pot estima răspunsurile ce ar putea să fie date de întreaga populație.

Astfel, dacă dintr-un eșantion reprezentativ de 1000 de persoane, 374 au afirmat că preferă să își facă cumpărăturile la un supermarket, putem estima, prin extrapolare, că 37,4% din populația României se aprovizionează de la supermarketuri.

Exemplu

În cadrul unui sondaj de opinie a fost adresată persoanelor intervievate întrebarea:

„Unde intenționați să vă petreceți vacanța?”

Rezultatele sondajului, așa cum au fost prezentate într-o revistă de specialitate, apar în tabelul alăturat.

Datele reliefează diferențe semnificative între mediul urban și mediul rural. Alături de alte studii, și acesta contribuie la întărirea ideii că este nevoie de politici consecutive de dezvoltare în mediul rural.

Locul	Populație mediu urban	Populație mediu rural
	%	%
La munte	24,3	10,5
La mare	0,6	0,6
La țară	69	1,2
În străinătate	2,9	1,2
Acasă	39,5	41,1
În stațiune	0,3	0,8
În altă parte	2,4	0,8
Nu voi avea vacanță	24,0	43,8

SURSA: MEMRB INTERNATIONAL RESEARCH & CONSULTANCY GROUP
Baza: 1 200 de persoane

6 Exprimă numeric date redate procentual în sondajul alăturat, pentru o populație de 20 milioane:

- Câte persoane din mediul rural intenționează să petreacă vacanța de iarnă: a) la munte; b) într-o stațiune de odihnă; c) acasă?

- Câte persoane intenționează să petreacă vacanța la mare sau la munte?

7 Formulează alte două întrebări folosind datele din tabelul alăturat.

Exerciții și probleme

Tabelul alăturat o parte a clasamentului final pe medalii de la Jocurile Olimpice de vară, Atena 2004.

- Cu câte medalii a obținut mai multe România decât: a) Ungaria; b) Grecia; c) Suedia?
- De câte ori este mai mare numărul total de medalii obținute de România față de cel obținut de: a) Brazilia; b) Norvegia; c) Grecia?
- Compară numărul de medalii de aur și numărul total de medalii obținute de România la Olimpiada de la Atena cu numărul celor obținute de celelalte țări de pe listă, folosind o raportare procentuală. Trece datele obținute într-un tabel.

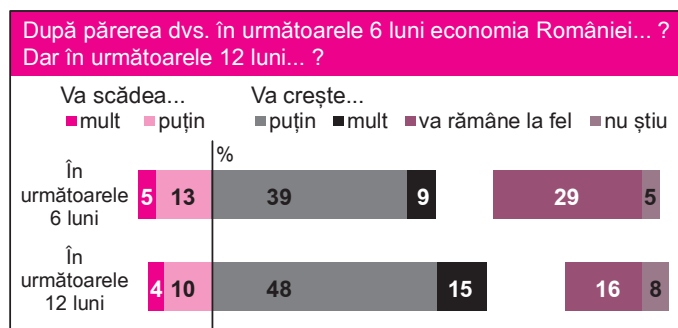
Loc clas.	Țara	Medalii		
		Aur	Argint	Bronz
10	Marea Britanie	9	9	12
11	Cuba	9	7	11
12	Ucraina	9	5	9
13	Ungaria	8	6	3
14	România	8	5	6
15	Grecia	6	6	4
16	Norvegia	5	0	1
17	Olanda	4	9	9
18	Brazilia	4	3	3
19	Suedia	4	1	2
20	Spania	3	11	5

Sursa: www.onlinegallery.ro/news_olimpiada_atena.html

- Tabelul alăturat indică numărul de turiști străini în câteva dintre cele mai vizitate țări din lume în anii 2004 și 2005. a) Cum variază numărul turiștilor în cele 5 țări în 2004 față de 2005: Este mai mare; este mai mic? Cu cât? De câte ori? b) Ce procent din turismul practicat în cele 5 țări în 2004 reprezintă turismul practicat în Franța? Dar în China? c) Aceeași întrebare de la b), pentru anul 2005.

	Franța	Spania	SUA	Italia	China
2004	75,6	47,9	50,9	41,2	31,2
2005	76,5	49,5	44,5	39,1	33,2

- În cadrul unui sondaj de opinie, realizat la cererea Agenției pentru Strategii Guvernamentale, pe un eșantion de 512 manageri de firme, au fost adresate întrebările reproduse în imaginea de mai jos.



- Observă modul de înregistrare a răspunsurilor și transpune datele procentuale într-un tabel.
- Completează într-un alt tabel numărul (aproximativ) de respondenți din fiecare categorie.



Analizăm și generalizăm!

◆ Termeni specifici analizei statistice a datelor

În viața cotidiană operăm cu foarte multe categorii de informații.

Unele informații sunt certe: ele sunt catalogate și pot fi accesate în diverse moduri. Astfel de informații sunt, de exemplu: codul poștal al străzilor, numerele abonaților unui serviciu telefonic, orele de plecare și de sosire a trenurilor, orarul magazinelor etc.

Alte informații sunt estimative; ele se obțin de exemplu prin extinderea rezultatelor unor sondaje de opinie și, de aceea, au o doză de nesiguranță și de hazard. Informațiile de acest tip se pot referi, de exemplu, la: preferințe față de o anumită activitate, nivelul veniturilor, gradul de pregătire profesională, dorința de a achiziționa anumite bunuri etc.

Astfel de date, culese în urma unor sondaje de opinie, sunt *date statistice*.

În studiile statistice următorii termeni specifici au o importanță deosebită:

- *populația statistică*: este mulțimea de indivizi (persoane) luată în considerare pentru efectuarea analizelor statistice;
- *eșantionul*: este o submulțime a populației statistice căreia i se aplică instrumentul de analiză (chestionar, interviu, dezbateri etc.);
- *eșantionul reprezentativ*: un eșantion selectat după o listă de criterii care permit extrapolarea rezultatelor;
- *caracteristica (variabila) statistică*: este un criteriu în funcție de care se cataloghează numeric anumite informații.

Exemplu: Studiul statistic referitor la dotarea cu bunuri de folosință îndelungată efectuat în 2001

- Populația statistică este populația României;
- Eșantionul este format din 4 649 de persoane (dintre care 2 103 din mediul rural și 2 546 din mediul urban).
- Variabilele statistice se referă la deținerea de frigider, televizoare color, casetofone, respectiv autoturisme.

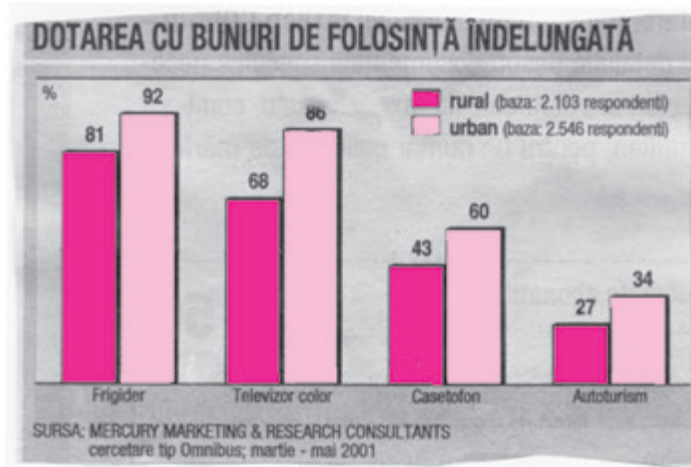
1 Observă datele redată în imaginea alăturată.

Menționează procentul celor care:

- dețin televizoare color în mediul rural;
- dețin autoturisme în mediul urban.

2 Știind că au răspuns 4 649 de persoane, care este numărul de respondenți care:

- dețin casetofone;
- dețin autoturisme?



◆ Cum se obțin informații referitoare la o populație statistică?

Un studiu statistic nu se poate desfășura la întâmplare. El necesită o activitate de pregătire, se concretizează prin obținerea de date și prelucrarea lor și se finalizează prin interpretarea rezultatelor. De aceea, în desfășurarea unui studiu statistic trebuie parcurse câteva etape. Exemplificăm aceste etape pentru studiul realizat în România, în decembrie 2001, de către o companie specializată, cu privire la locul unde preferă adolescenții să urmărească filmele.

<p>1. <i>Elaborarea instrumentelor de analiză:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - se identifică obiectivele cercetării; - se stabilește ce tip de instrument va fi aplicat; - se formulează, într-un limbaj accesibil și clar, întrebările ce vor fi adresate și se cataloghează categoriile de răspunsuri posibile. 	<ul style="list-style-type: none"> - Cum se poate optimiza distribuția de filme? - Chestionar - Unde preferați să urmăriți un film? Răspunsuri posibile: <i>La televizor / La cinema / Pe video / Pe CD / Rareori mă uit la filme.</i> 																						
<p>2. <i>Culegerea datelor:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - se identifică un eșantion reprezentativ, căruia i se aplică instrumentul elaborat. 	<ul style="list-style-type: none"> - Studiul a fost efectuat pe un eșantion de 940 de adolescenți, fete și băieți. 																						
<p>3. <i>Prelucrarea statistică a datelor:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - se centralizează în tabele răspunsurile primite; - pentru fiecare întrebare, se determină frecvența cu care se repetă un anumit răspuns. 	<ul style="list-style-type: none"> - De exemplu: Numărul celor care preferă să vadă filme la televizor este: <table border="1" data-bbox="751 1084 940 1171"> <tr> <td>Fete</td> <td>Băieți</td> </tr> <tr> <td>305</td> <td>295</td> </tr> </table> <div data-bbox="666 1185 1048 1544" style="background-color: #fce4ec; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <p align="center">UNDE PREFERĂ ADOLESCENȚII SĂ URMĂREASCĂ FILMELE</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Support</th> <th>Fete</th> <th>Băieți</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Televizor</td> <td>61%</td> <td>59%</td> </tr> <tr> <td>Cinema</td> <td>24%</td> <td>24%</td> </tr> <tr> <td>Video</td> <td>8%</td> <td>8%</td> </tr> <tr> <td>CD</td> <td>3%</td> <td>7%</td> </tr> <tr> <td>Rareori mă uit la filme</td> <td>4%</td> <td>2%</td> </tr> </tbody> </table> <p align="center">SURSA: LEO BURNETT&TARGET</p> </div>	Fete	Băieți	305	295	Support	Fete	Băieți	Televizor	61%	59%	Cinema	24%	24%	Video	8%	8%	CD	3%	7%	Rareori mă uit la filme	4%	2%
Fete	Băieți																						
305	295																						
Support	Fete	Băieți																					
Televizor	61%	59%																					
Cinema	24%	24%																					
Video	8%	8%																					
CD	3%	7%																					
Rareori mă uit la filme	4%	2%																					
<p>4. <i>Analiza și interpretarea rezultatelor:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - se reprezintă grafic datele obținute, într-o formă cât mai sugestivă; - se generalizează la întreaga populație rezultatele obținute; - se formulează concluzii. 	<ul style="list-style-type: none"> - Dintr-un total estimat de 1 500 000 de adolescenți, aproximativ 457 500 de fete și 442 500 de băieți preferă să vadă filmele la televizor. 																						

③ Corelează datele studiului alăturat pentru a determina câte fete, respectiv câți băieți au fost cuprinși în eșantionul ales.

④ Să presupunem că ești director de programe de televiziune. Ce decizii ai lua cunoscând rezultatele studiului, pentru a mări audiența?

◆ Cum se clasifică variabilele statistice?

Să comparăm!

În mod regulat cotidienele naționale comandă instituțiilor specializate sondaje de audiență pentru a măsura cota lor de piață. În cadrul unui astfel de studiu statistic au fost adresate câteva întrebări la care se poate răspunde prin marcarea unui semn distinctiv în spațiul corespunzător răspunsului ales. Trei dintre aceste întrebări au fost:

1) Pe care dintre cotidienele următoare le-ați menționa pe lista primelor trei preferințe:

Adevărul, Cotidianul, Evenimentul Zilei, Jurnalul Național, Libertatea, România Liberă, Ziuă?

2) Ce studii aveți?

elementare	medii	superioare

3) Ce vârstă aveți?

sub 15 ani	între 15 și 25 ani	între 25 și 35 ani	între 35 și 45 ani	între 45 și 55 ani	peste 55 ani

Cele trei întrebări sunt diferite atât prin conținutul lor, cât și prin natura răspunsurilor.

Astfel, prima întrebare vizează o opțiune subiectivă, cea de-a doua presupune încadrarea într-o categorie (din mai multe posibile), pe când cea de-a treia presupune încadrarea respondentului într-un interval de valori.

5 Formulează trei întrebări, analoge celor de mai sus, schimbând tematica acestora.

În general

Variabilele statistice au natură *cantitativă* sau *calitativă*, după cum pot fi sau nu exprimate printr-un număr.

Variabilele cantitative sunt *discrete* (adică pot lua doar valori izolate) sau *continue* (adică pot lua toate valorile dintr-un interval).

Exemplu

Notele de la o teză, numărul de frați și/sau surori ale unei persoane dintr-o populație statistică, numărul de spectatori la operă, sunt *variabile cantitative discrete*.

Înălțimea, greutatea, lungimea părului persoanelor din eșantion sunt *variabile cantitative continue*.

Luna de naștere, grupa sanguină, culoarea ochilor, intențiile de vot ale unei persoane dintr-o populație statistică sunt *variabile calitative*.

Variabilele calitative pot fi transformate în variabile cantitative prin atribuirea unui cod numeric. De exemplu, locul nașterii (care are natură calitativă) poate fi indicat prin codul poștal al localității respective (care are natură cantitativă).

În anumite situații, valorile luate de o variabilă discretă pot fi grupate în clase. De exemplu, aceasta se face în cazul tranșelor de vârstă.

6 Informează-te și răspunde!

Ce semnificație are codul numeric personal al unui cetățean român? De ce crezi că a fost nevoie de introducerea acestui cod?

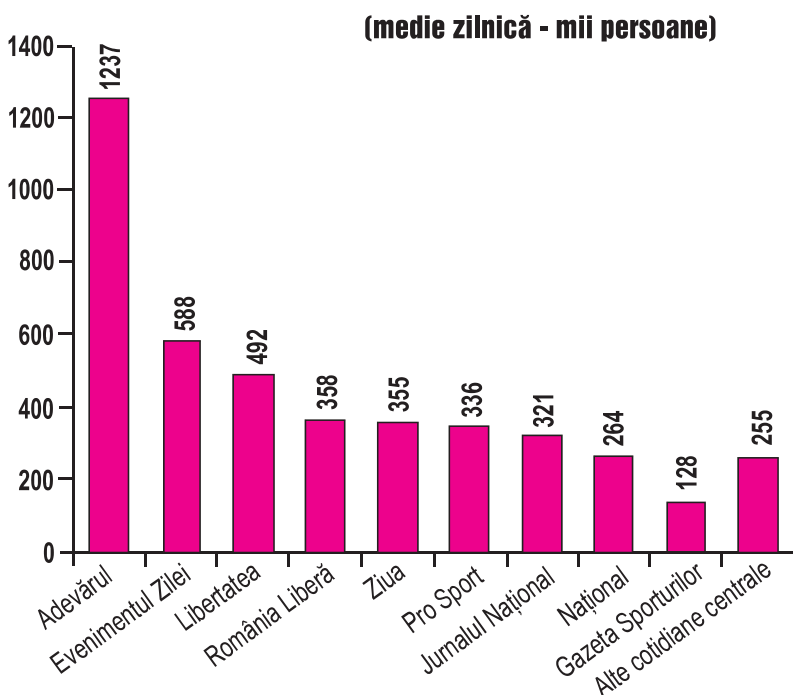
◆ Cum se pot organiza reprezentările grafice?

Să analizăm!

Reprezentările datelor statistice transmit într-o formă accesibilă și sintetică rezultatele unui studiu statistic. O reprezentare grafică adecvată ne permite să interpretăm rapid situația prezentată.

Există diverse tipuri de reprezentări grafice; alegerea uneia dintre ele depinde de natura datelor din situația concretă pe care o avem de reprezentat.

Exemplul 1: Audiența cotidianelor naționale în perioada 29 octombrie-25 noiembrie 2000



▲ Audiența reprezintă numărul mediu zilnic de persoane care au citit un articol din ziar în perioada menționată și se măsoară pe un eșantion reprezentativ pentru populația în vârstă de peste 6 ani.

7 Folosește datele sondajului prezentat pentru a răspunde la întrebarea:

Câți dintre cititorii citesc cotidiene cu specific sportiv?

Exprimă în procente acest număr.

Rezultatele sondajului sunt prezentate sub forma unui grafic cu bare. Această reprezentare permite analiza informațiilor studiului statistic, deoarece înălțimea benzilor, care indică frecvența, este proporțională cu numărul de cititori.

Să reținem!

Numărul de indivizi asociat fiecărei valori a variabilei se numește *efectiv*. Suma tuturor efectivelor este *efectivul total*.

Prin împărțirea efectivului unei variabile (caracteristici) la efectivul total, se obține *frecvența*. În cele mai multe cazuri, frecvența este exprimată procentual.

▲ Frecvența se exprimă prin valori subunitare, iar suma tuturor frecvențelor este 1.

Să aplicăm!

Pentru studiul prezentat în diagrama de mai sus:

- efectivul total este de 4.334.000 de cititori;
- efectivul variabilei „cititori ai Jurnalului Național” este de 321.000 de persoane;
- frecvența variabilei „cititori ai cotidianului Evenimentul Zilei” este de 13,57%.

În general

Reprezentările într-un sistem de axe evidențiază cel mai bine variația în timp a unor date numerice.

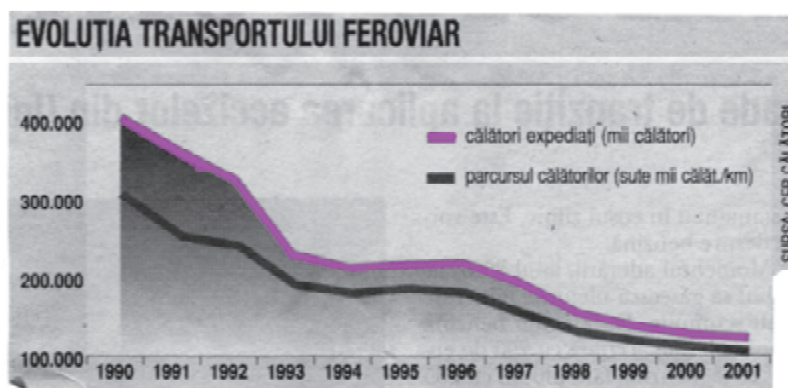
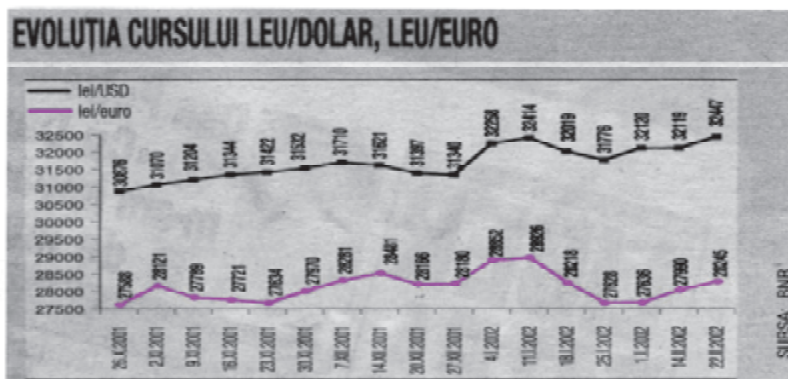
Exemplul 2: Reprezentarea evoluției în timp a unor date

De obicei, datele care evoluează în timp se reprezintă într-un sistem de axe în același fel în care se reprezintă grafic funcțiile numerice.

De exemplu, evoluția cursului monedei naționale și evoluția transportului feroviar se reprezintă grafic astfel:

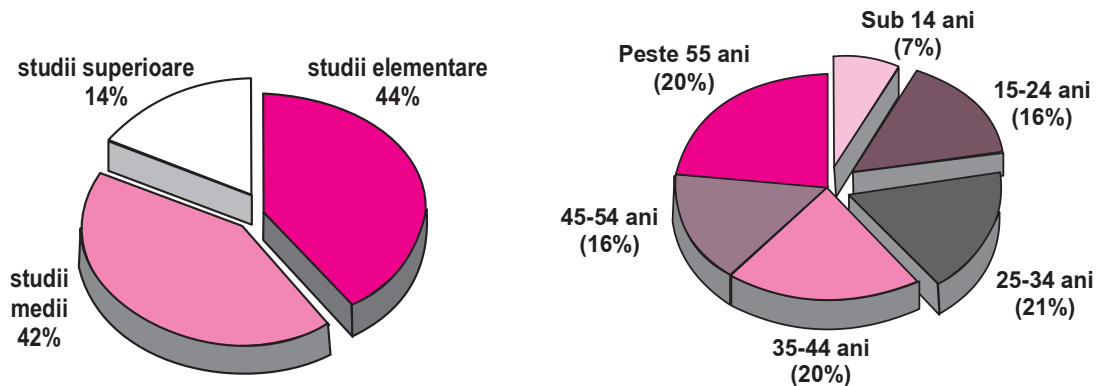
▲ În reprezentarea grafică a variației în timp a unei mărimi, ne interesează numai regiunea din plan în care are relevanță informația analizată.

De aceea, o astfel de reprezentare grafică este raportată unui reper a cărei origine nu are neapărat coordonatele (0;0).



Exemplul 3: Distribuția în funcție de vârstă sau de nivel de educație a cititorilor unui cotidian.

Pentru unul dintre cotidienele centrale au fost obținute date privitoare la nivelul de studii al cititorilor săi, respectiv vârsta cititorilor. Datele au fost reprezentate prin diagramele circulare de mai jos.



Informațiile din a doua diagramă circulară se pot reprezenta sub forma unui tabel de frecvențe, în care efectivul este repartizat în clase de vârstă cu amplitudinea de 10 ani.

▲ Amplitudinea unei clase este lungimea intervalului corespunzător clasei respective!

Vârsta cititorilor	sub 15 ani	între 15-25 ani	între 25-35 ani	între 35-45 ani	între 45-55 ani	peste 55 ani
frecvențe relative	7%	16%	21%	20%	16%	20%
frecvențe cumulate crescător	7%	23%	44%	64%	80%	100%

Prin calculul frecvențelor cumulate crescător putem evidenția, de exemplu, că 64% dintre cititori au vârsta până în 45 de ani și 23% au vârsta până în 25 de ani.

Putem estima procentul de cititori care au peste o anumită vârstă, calculând frecvențele cumulate descrescător.

8 Exprimă procentual numărul cititorilor ziarului care au vârsta peste 35 de ani.

În general

Pentru a calcula *frecvența cumulată crescător* se însumează frecvențele (procentuale sau numerice) ale efectivelor tuturor claselor anterioare. Frecvența cumulată crescător este utilă pentru a estima procentual datele mai mici decât o anumită valoare.

Datele obținute prin măsurarea unei variabile continue pot lua orice valori într-un interval considerat. Pentru a simplifica înregistrarea datelor, se împarte intervalul considerat în subintervale, numite *clase statistice*. În acest caz, după culegerea datelor, o informație particulară este selectată și înregistrată în clasa corespunzătoare.

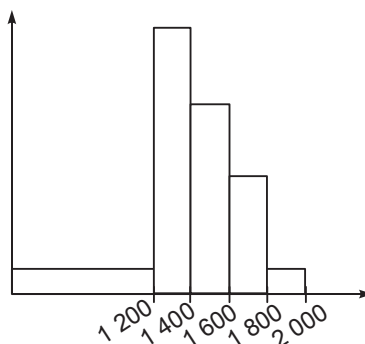
Exemplul 4: Reprezentarea valorilor unor variabile continue

Primăria unui oraș a făcut un studiu privind modernizarea traficului rutier. Pentru aceasta, serviciul specializat al primăriei a făcut o statistică a numărului de autoturisme, grupate după capacitatea cilindrică a acestora.

Clasele de repartiție după capacitatea cilindrică sunt: până la 1 200 cm³, între 1 201 și 1 400 cm³, între 1 401-1 600 cm³, între 1 601-1 800 cm³, între 1 801 și 2 000 cm³. Aceste clase au, cu excepția primeia, amplitudini egale cu 200 cm³.

În acest exemplu, variabila analizată (capacitatea cilindrică) este variabilă continuă. Pentru reprezentarea grafică a datelor analizate se poate alege o histogramă.

Capacitate cilindrică (cm ³)	Număr de autovehicule
până la 1200	12 410
1201 - 1400	65 140
1401 - 1600	41 217
1601 - 1800	18 490
1801 - 2000	3 148



▲ În cazul în care clasele de repartiție au amplitudini egale, înălțimile dreptunghiurilor din histogramă sunt proporționale cu efectivele.

Reprezentarea grafică din dreapta este o histogramă.

Pe axa orizontală sunt reprezentate clasele de repartiție după capacitatea cilindrică. Dreptunghiurile din desen transmit sintetic ideea că autovehiculele dintr-o clasă se distribuie omogen în clasa respectivă.

În general

Pentru o variabilă cantitativă continuă se utilizează ca reprezentare grafică *histograma*. Într-o histogramă, ariile dreptunghiurilor prin care se reprezintă datele sunt proporționale cu frecvența.

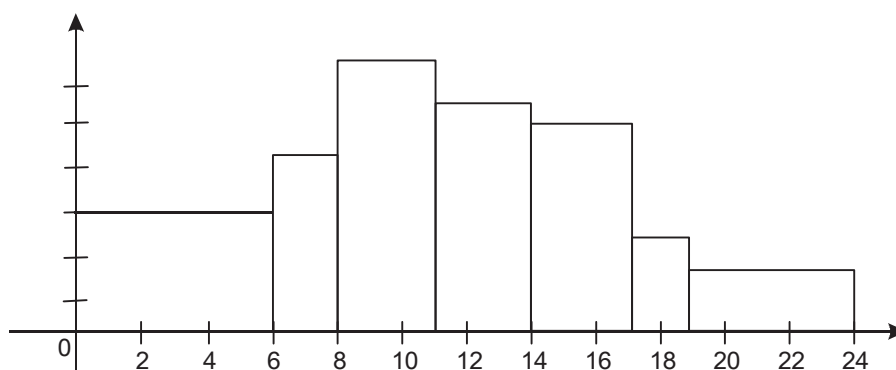
Să aplicăm!

9 Clasa $[11, 14)$ are amplitudinea 3. Au toate clasele aceeași amplitudine?

La un punct de trecere a frontierei s-a constatat următoarea frecvență de intrare în vamă a autovehiculelor în ziua de 11.04.06:

interval de timp	$[0, 6)$	$[6, 8)$	$[8, 11)$	$[11, 14)$	$[14, 17)$	$[17, 19)$	$[19, 24)$
nr. de vehicule	18	8	19	16	15	5	9

Histograma seriei statistice este reprezentată în figura următoare:



▲ Pe ordonată nu se consideră nici o unitate de măsură. Amplitudinea claselor este diferită.

10 Verifică dacă datele au fost corect reprezentate prin histogramă. Care este frecvența relativă a fiecărei variabile?

Aria fiecărui dreptunghi este proporțională cu efectivul clasei (numărul de vehicule din acel interval de timp).

În general

Variabilele statistice calitative și variabilele statistice cantitative discrete se pot reprezenta prin tabele, prin grafice cu bare (batoane, coloane), prin diagrame circulare sau prin dreptunghiuri comparative.

Variabilele statistice cantitative continue se pot reprezenta prin histograme.

Exerciții și probleme

1. Alina a folosit factura detaliată de telefon și a grupat convorbirile efectuate de ea în clase statistice, obținând tabelul următor:

Intervalul de durată (min.)	$[0; 2)$	$[2; 4)$	$[4; 6)$	$[6; 8)$	$[8; 10)$	$[10; 12]$
Număr de convorbiri	12	15	22	9	14	6

- Reprezintă aceste date printr-o histogramă.
- Regrupăm datele în clasele statistice $[0; 4)$, $[4; 8)$ și $[8; 12]$. Trasează histograma corespunzătoare noii situații pe aceeași figură, folosind un creion colorat.
- Compară cele două histograme. Formulează asemănări și deosebiri.

2. a) Completează tabelul următor, referitor la notele obținute la un concurs.

Nota	1	2	3	4	5	Total
Efectivul	30	50			40	200
Frecvența %			28%			

b) Reprezintă printr-o diagramă circulară datele din tabelul anterior.

3. În tabelul alăturat sunt prezentate dobânzile de referință pentru împrumuturi în lei, practicate de băncile comerciale între septembrie 2005 și aprilie 2006.

a) Asociază acestui tabel o reprezentare grafică cât mai sugestivă.

b) Domnul Popescu a împrumutat de la o bancă, în august 2005, 43000 RON. El achită lunar câte 1000 RON, la care se adaugă dobânda la suma rămasă. Înregistrează într-un tabel sumele totale plătite de domnul Popescu în fiecare lună, din septembrie până în aprilie.

Luna	Dobânda
aprilie 2006	8,50
martie 2006	8,47
februarie 2006	7,50
ianuarie 2006	7,50
decembrie 2005	7,50
noiembrie 2005	7,50
octombrie 2005	7,72
septembrie 2005	8,25

4. Pe site-ul Ministerului Telecomunicațiilor apare tabelul de mai jos, în care sunt trecute date privitoare la telefonია fixă din România, în câțiva din ultimii ani.

a) Reprezintă printr-o diagramă cu bare evoluția numărului de abonați.

b) Alege o modalitate adecvată de reprezentare a evoluției numărului total de convorbiri telefonice.

c) Exprimă frecvența convorbirilor automate, raportate la totalul de convorbiri.

d) Înlocuiește tabelul dat cu un tabel centralizator, în care apar frecvențele cumulate.

Municipiul București *)	Abonamente telefonice -la sfârșitul anului- (număr)	Convorbiri telefonice			
		Interurbane manuale (mii minute)	Automate (mii impulsuri)	Internaționale manuale (mii minute)	Internaționale automate (mii minute)
Anii 1990	583275	2861	2317690	793	...
1995	675440	3576	3340156	2149	41212
2000	775973	1210	6211068	765	46595
2001	783901	920	7770427	598	46400
2002	799444	2143	4684931	2756	42305
2003	810429	1018	3714177	2352	35691

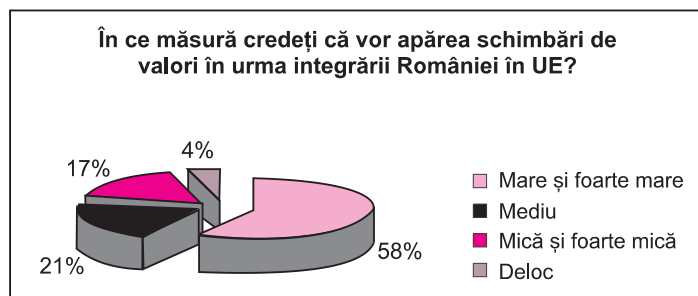
*) Județul Ilfov și municipiul București.

... = Lipsă date.

5. Pentru a studia impactul integrării României în UE, sociologii au aplicat un sondaj privind percepția populației asupra posibilelor schimbări de mentalitate. În figura alăturată apar rezultatele la întrebarea: „În ce măsură credeți că vor apărea schimbări de valori?”

a) Estimează câți dintre cei 20 000 000 de locuitori ai României cred că schimbările de valori vor fi mari și foarte mari.

b) Realizează un sondaj printre colegii tăi și înregistrează răspunsurile lor la această întrebare. Compară cu estimările făcute de specialiști.



6. Institutul Național de Statistică a dat publicității datele privind mișcarea naturală a populației în perioada 2000 - 2003 (în mii de persoane).
- Reprezintă printr-o diagramă cu bare datele privitoare la căsătorii.
 - Exprimă procentual decesele la o vârstă de sub 1 an, raportat la numărul total al deceselor. Care a fost anul cel mai rău, din această perspectivă?
 - Cum se calculează sporul natural al populației?
 - Describe evoluția populației în anii 2001 - 2003, considerând ca bază de referință populația României în 2000. Reprezintă adecvat această evoluție.

	2000	2001	2002	2003
Născuți-vii	234,5	220,4	210,5	212,5
Decese	255,8	259,6	269,7	266,6
Decese la o vârstă sub 1 an	4,4	4,1	3,6	3,5
Sporul natural	-21,3	-39,2	-59,2	-54,1
Căsătorii	135,8	129,9	129,0	134,0
Divorțuri	30,7	31,1	31,8	33,1

7. Un club sportiv a înregistrat înălțimile copiilor cuprinși în diverse activități ale clubului în tabelul următor:

Înălțimea	între 85 și și 95 cm	între 95 și 105 cm	între 105 și 115 cm	între 115 și 125 cm	între 125 și 135 cm	între 135 și 145 cm
Efectivul	34	27	149	213	53	18

- Reprezintă cu ajutorul unei histograme aceste date.
 - Distribuie copiii în clasele statistice: [85; 105); [105; 135); [135; 145] și realizează o nouă histogramă.
 - Identifică avantaje și dezavantaje ale utilizării unor clase statistice de lungimi diferite în analiza rezultatelor unui studiu clasic.
 - Precizează posibilele clase statistice pentru un studiu privind rezultatele de la Bacalaureat.
8. Exprimă procentual frecvența valorilor statistice din tabelul de mai jos.

VĂNZĂRI AUTOTURISME AUTOHTONE ÎN 2001 (9 LUNI)	
Dacia	30.451 unități
Daewoo	4.859 unități
Aro	334 unități
SURSA: APIA	

9. Pentru datele din tabelul alăturat, explică modul de calcul al cursului leu-dolar în raport cu dobânda efectivă acordată pentru depozitele bancare pe 6 luni.

Plasament	Nivel maxim (% pe an)	Dobânda efectivă după			Curs leu/dolar echivalent după:		
		1 lună	3 luni	6 luni	1 lună	3 luni	6 luni
		(%)	(%)	(%)			
Depozit bancar 1 lună	29	2,38	7,32	15,18	33.625	35.247	37.828
Depozit bancar 3 luni	31	2,55	7,64	15,87	33.679	35.352	38.055
Depozit bancar 6 luni	32	2,63	7,89	15,78	33.706	35.433	38.025
Certificate trezorerie 3 luni	29	2,38	7,15		33.625	35.190	
Certificate trezorerie 6 luni	30	2,47	7,40	14,79	33.652	35.271	37.701

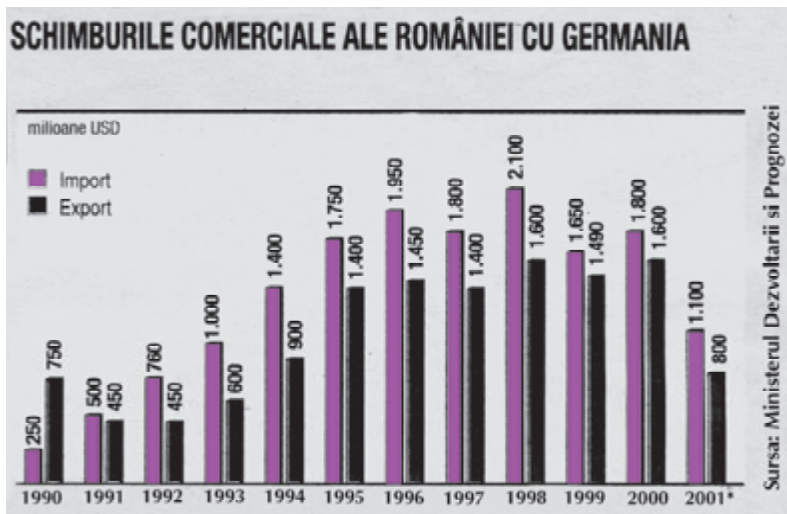
Utilizarea datelor statistice



Aplicăm și dezvoltăm!

◆ Legătura dintre reprezentarea grafică și tipul de interpretare

Pentru realizarea unui referat, Alexandra a trebuit să se informeze asupra evoluției în ultimii ani a schimburilor comerciale dintre România și Germania. Ea a găsit într-o revistă de specialitate reprezentarea grafică de mai jos:



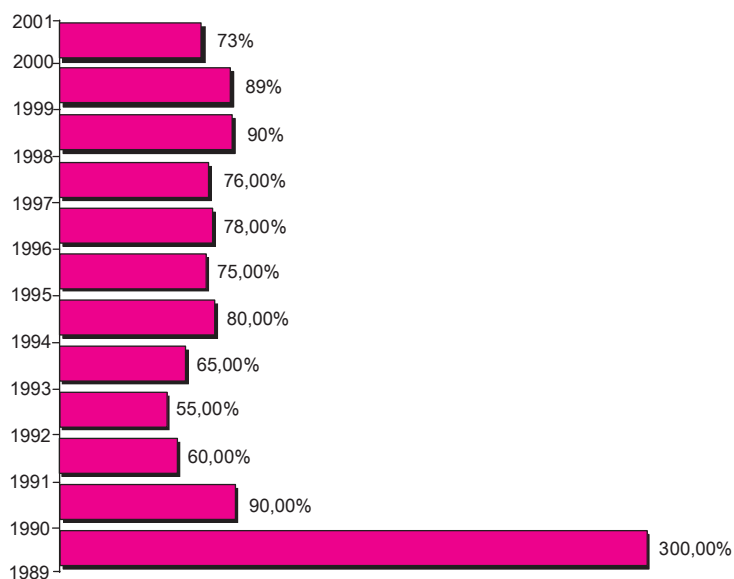
❶ În ce an a atins valoarea maximă volumul exporturilor produselor românești în Germania? Dar importurile?

❷ În ce an volumul importurilor a avut valoare minimă? Dar volumul exporturilor?

Pentru a interpreta datele obținute, Alexandra a utilizat și alte moduri de reprezentare grafică a acestora.

◆ Balanța schimburilor comerciale

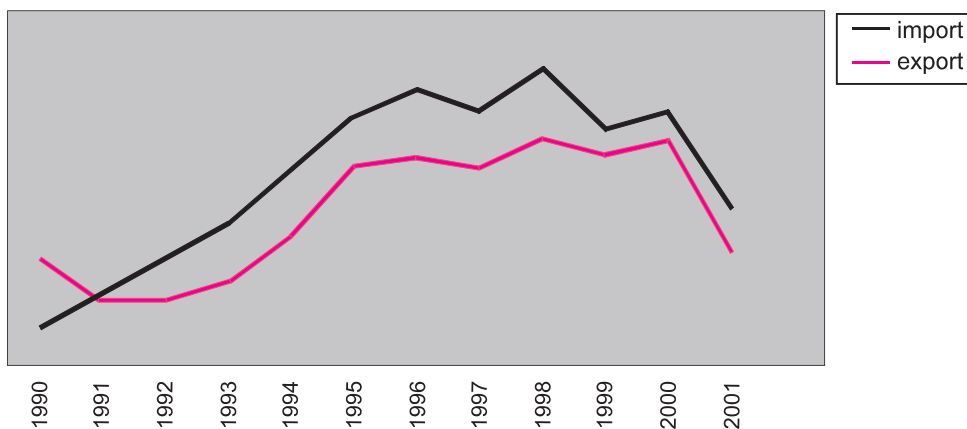
Alexandra a exprimat prin procente raportul dintre export și import pentru fiecare an în parte și a reprezentat această evoluție printr-un grafic cu benzi orizontale.



Ea a concluzionat că anii cei mai buni pentru comerțul României cu Germania, în perioada analizată, au fost, în afară de 1989 și 1991, anii 1999 și 2000.

Alexandra a reprezentat prin puncte volumul exporturilor și importurilor și a trasat graficele evoluției acestora.

Schimburile comerciale ale României cu Germania



◆ Relația import-export

③ Verifică toate calculele făcute de Alexandra.

Un indicativ al schimburilor comerciale din perioada analizată este raportul dintre volumul total al importurilor și cel al exporturilor.

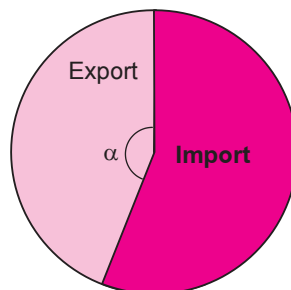
Folosind datele inițiale, Alexandra a calculat:

- valoarea exporturilor între 1990 și 2001: 12 890 milioane \$
- valoarea importurilor între 1990 și 2001: 16 060 milioane \$
- valoarea totală a schimburilor comerciale: 28 950 milioane \$.

Reprezentarea acestor date printr-o diagramă circulară este:

⚠ Determinarea unghiurilor la centru ale sectoarelor din diagrama circulară se face cu regula de trei simplă. Pentru exemplul dat:

$$\alpha^{\circ} = \frac{12890}{28950} \cdot 360^{\circ} .$$



④ Compară cele patru tipuri de reprezentări. Ce avantaje are fiecare? Dar dezavantaje?

Fiecare tip de reprezentare a scos în evidență anumite aspecte ale variabilei studiate. De aceea, în cadrul unui studiu statistic, este foarte important să alegem acel tip de reprezentare care evidențiază cel mai bine proprietățile semnificative.

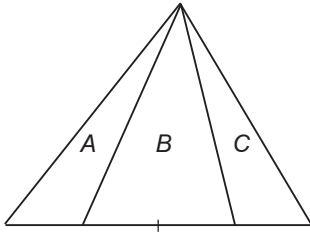
Exerciții și probleme

1. Datele unui studiu statistic privind oaspeții unui hotel din Mamaia sunt cuprinse în tabelul următor.

Turiști (țara de proveniență)	Franța	Germania	Italia	Austria
Efectiv	100	225	400	484

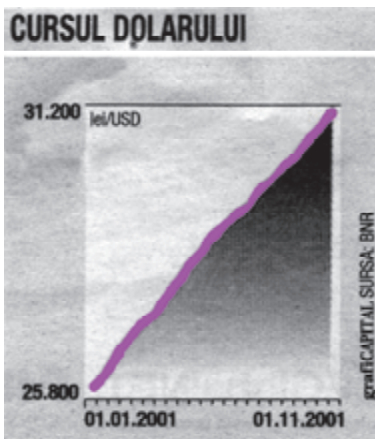
Valentin a reprezentat variabila „turiști din Franța” sub forma unui pătrat cu latura de 2 cm. Continuă reprezentarea, desenând pentru fiecare categorie pătrate cu aria proporțională cu efectivul.

2. În figură sunt reprezentate datele unui studiu statistic, astfel că ariile sunt proporționale cu efectivele.



Categoria A are efectivul 20.
Ce efective au celelalte categorii?

3. Care a fost variația procentuală a cursului dolarului între 1.01.2001 și 1.11.2001?



4. Situația vânzărilor de autoturisme românești în anul 2001 (Top 10) este dată în tabelul de mai jos.
- Descrie această informație statistică precizând: populația statistică, efectivele, variabilele.
 - Calculează frecvența vânzărilor, în procente, pentru fiecare model.
 - Reprezintă grafic aceste date sub forma unei diagrame circulare.
 - Prezintă structura pieței autoturismelor românești folosind altă reprezentare grafică.

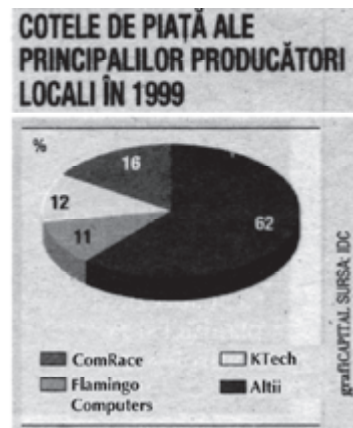
TOP 10 PE ANUL 2001 - AUTOTURISME NAȚIONALE
(inclusiv vehicule comerciale sub 3,5 tone)

Modelul	Bucăți vândute
Dacia SuperNova	22.186
Dacia Clasic	18.548
Dacia Pick-up	11.226
Daewoo Tico	3.226
Daewoo Matiz	1.328
Daewoo Cielo	1.201
Aro 24	822
Daewoo Nubira	705
Aro 32	479
Daewoo Leganza	172

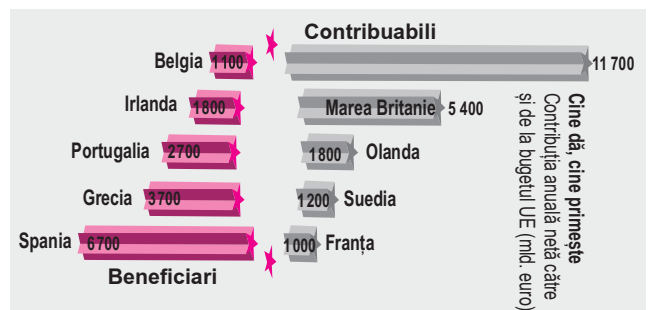
5. a) Ce companie comercială a avut cea mai mare desfacere pe piața calculatoarelor în 1999?



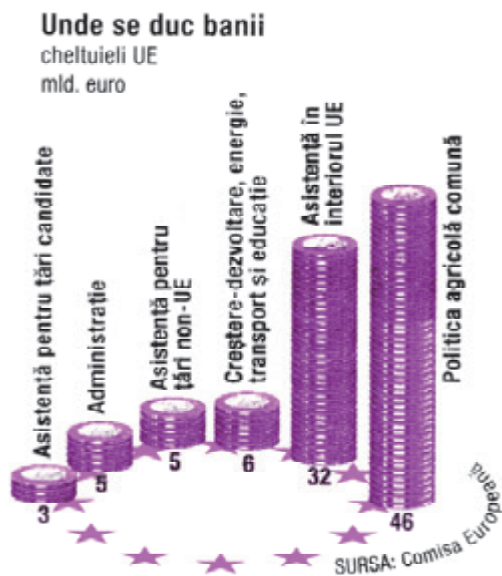
- b) Transpune în două tabele datele din cele două diagrame circulare.
c) Exprimă cu aproximație măsura unghiurilor la centru pentru fiecare diagramă circulară.



6. a) Compară sumele care reprezintă contribuția anuală a statelor UE către bugetul UE cu sumele de care beneficiază unele state. Exprimă procentual diferența dintre cele două sume.
b) Exprimă prin diagrame circulare situația statistică prezentată.



7. a) Analizează graficul de mai jos și stabilește totalul sumei cheltuite de statele UE.
 b) Stabilește ce parte din bani sunt alocați în diverse scopuri pentru țările non-UE.
 c) Compară sumele alocate pentru cheltuieli în interiorul UE cu sumele alocate pentru asistența unei țări candidate sau nonUE.
 d) Exprimă situația cheltuielilor în alt mod de reprezentare grafică. Argumentează alegerea făcută.



8. O anchetă statistică a analizat timpul pe care îl consumă pentru transportul zilnic cei 1 312 angajați ai unei întreprinderi. Rezultatele au fost grupate în clase cu amplitudine de 30 minute ca în tabloul de distribuție de mai jos.

Clasa	[0,30]	[30,60]	[60,90]	[90,120]	[120,150]	[150,180]	[180,210]
Efectiv	175	392	267	127	168	120	63

- a) Construiește histograma efectivelor, luând ca unitate de măsură:
 • 2 cm pentru fiecare interval de timp de 30 min pe abscisă;
 • 1 cm pentru fiecare grup de 50 de persoane pe ordonată.
 b) Calculează frecvența fiecărei clase și completează un tabel asemănător celui de mai sus.
 c) Cum putem alege lungimea corespunzătoare frecvenței de 100% pentru ca histograma frecvențelor și histograma efectivelor să fie identice?
 d) Pentru a eficientiza activitatea angajaților, conducerea întreprinderii a hotărât ca ora de începere a activității acestora să fie corelată cu timpul necesar pentru transport. De aceea, este nevoie de repartizarea rezultatelor în clasele statistice [0; 30] (timp scurt), [30; 90] (mediu), respectiv [90; 280] (lung). Reprezintă histograma corespunzătoare acestei repartiții.

9. Alcătuieste un referat privind datele despre consumul de înghețată, prezentate în tabelele de mai jos.

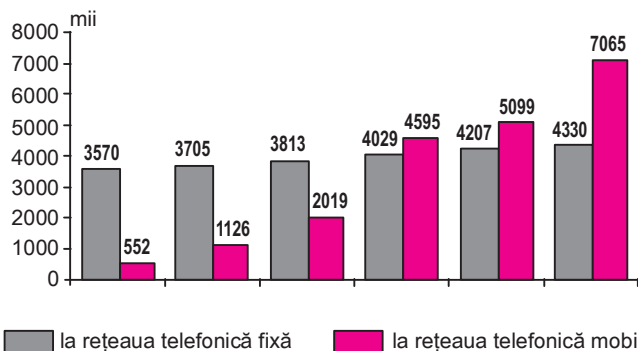
OCAZII DE CONSUM		CANTITĂȚI PREFERATE	
Ocazia	Ponderea (%)	Cantitatea	Ponderea (%)
Excursii	10	Mai puțin de 100 g (cornet, băț)	52
Vara	74	100-300 g (pahar sau cutie plastic)	13
Iarna	4	301-500 g (caserole, torturi)	16
Gustări	13	Mai mult de 500 g	7
Mic dejun	5	Nu știu	12
Prânz	12	SURSA: ALIANȚA PENTRU PROMOVAREA EDUCAȚIONALĂ A LAPTELUI	
Cină	6		

10. Alege patru dintre clasele din școala voastră. Cere fiecărui elev să spună câți frați sau/si surori are.
 a) Consemnează în tabelul următor frecvența absolută a răspunsurilor.

Nr. de frați/surori	0	1	2	3	4	5
Nr. de elevi						

- b) Care este cea mai frecventă situație întâlnită?
 c) Care este procentul de elevi care au mai mult de 2 frați?
 d) Care este procentul de elevi care au trei frați?
 e) Care este numărul de elevi care au mai mult de 3 frați?
 f) Care este numărul mediu de frați (exprimați valoarea cu o aproximație de o zecime).
 g) Reprezintă printr-o diagramă circulară repartiția din tabel.
 11. Diagrama de mai jos indică numărul abonamentelor telefonice din România.

NUMĂRUL ABONAMENTELOR TELEFONICE
 (la sfârșitul anului)



Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific metode de colectare a datelor
- ◆ să interpretez date organizate în tabele sau histograme
- ◆ să înregistrez date alegând tipul de reprezentare optim
- ◆ să transpun în limbaj matematic prin mijloace statistice, probleme practice
- ◆ să caracterizez situații reale prin interpretarea datelor?

Test de verificare

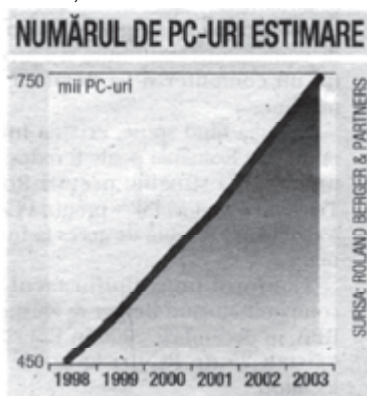
1. Indică o modalitate aplicabilă de a estima numărul muzeelor de artă din țară.
2. Tabelul de mai jos ilustrează prețurile și durata transportului de călători de la București către diferite destinații, în sistem feroviar și rutier.

Destinație	Transport feroviar		Transport rutier	
	Preț bilet tren (RON)	Durata călătoriei	Preț bilet (RON)	Durata călătoriei
Brașov	14,70	3h23'	10,00	3h
Caransebeș	24,80	7h33'	25,00	6h30'
Constanța	17,00	2h46'	15,00	3h30'
Cluj-Napoca	24,80	8h14'	20,00	8h30'

Care mijloc de transport este mai convenabil? De ce?

Care este costul mediu al unei ore de călătorie cu trenul, respectiv cu autobuzul?

3. Prețul de producere al computerelor pe plan mondial a scăzut în 2006 cu 34%, față de anul anterior, comparativ cu o diminuare de numai 17% în 2000 față de 1999. Reprezintă cât mai sugestiv aceste scăderi de prețuri.
4. a) Exprimă procentual variația numărului de PC-uri între 1998 și 2003.
b) Aproximează numărul de PC-uri vândute în România în anul 1999.
c) Dă o estimare pentru numărul de computere care au fost vândute în România în 2004.
5. Tabelul de mai jos prezintă valorile medii ale dolarului american, respectiv euro, raportate la moneda națională a României. Pentru a proiecta strategia de export a firmei sale de mobilă, domnul Popescu trebuie să analizeze evoluția raportului dolar - euro, între 2000 și 2005. Întocmește pentru domnul Popescu un raport în acest sens!



Anul	USD	EURO
2000	2,17	1,99
2001	2,90	2,60
2002	3,30	3,12
2003	3,32	3,75
2004	3,26	4,05
2005	2,91	3,62

Lectură

Pe teritoriul țării noastre, lucrarea lui Dimitrie Cantemir „*Descriptio Moldaviae*” (1716) poate fi considerată ca o primă lucrare de statistică. Ea a fost scrisă la cererea Academiei din Berlin și conține toate cunoștințele acumulate în domeniu la acea dată.

După D. Cantemir, printre cei care au avut ca preocupare principală statistica, s-a remarcat N. Șuțu cu lucrarea de referință „*Notații statistice asupra Moldovei*” (1849).

Statistica tratată ca un capitol al matematicii se studiază începând din 1835 la Academia Mihăileană și începând din 1850 în gimnaziile din Moldova.

Un moment important în dezvoltarea statisticii la noi în țară a fost înființarea la 12 iulie 1859, din ordinul domnitorului Al. I. Cuza, a Oficiului Central de Statistică Administrativă sub conducerea lui Dionisie Pop Marțian. Studiile efectuate sub egida Oficiului au permis domnitorului Al. I. Cuza să fundamenteze multe din reformele sale.

În 1936 a fost înființat în România Institutul Central de Statistică, care își continuă activitatea și astăzi.

Unitatea de învățare 4

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități.

Calcul numeric

1. Identifică propozițiile adevărate.

a) $4 + 4 \cdot (-7) = -32$

b) $(6 + 5 + 4) \cdot 0 = 19$

c) $6,25 + 2,31 = 8,56$

d) $7,53 - 4,54 = 3,09$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{11}$

f) $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

g) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

h) $\sqrt{9+16} = 7$

Calcul procentual

2. Care este noul preț al unui produs care:

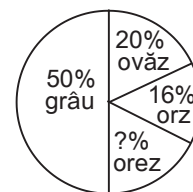
a) costă 25 RON și s-a ieftinit cu 10%?

b) costă 150 RON și s-a scumpit cu 3%?

c) costa 100 RON și s-a redus succesiv cu 5%, apoi cu 10%?

3. O suprafață agricolă de 500 ha a fost cultivată așa cum indică reprezentarea alăturată.

Care este aria suprafeței cultivate cu orez?



Calculul mediilor

Alege răspunsurile corecte!

4. Media aritmetică a numerelor 17, 22, 48 și 53 este:

a) 53;

b) 35;

c) 20.

5. Media ponderată a numerelor 8 și 36, cu ponderile 3, respectiv 2, este:

a) 19,2;

b) 15;

c) 12.

6. Media geometrică a numerelor 12 și 3 este:

a) 8;

b) 6;

c) $\frac{14}{3}$

Regula de trei simplă

7. a) La un drum de 200 km, o mașină consumă 12 l de benzină. Ce cantitate de benzină consumă la 350 km?

b) Un autobuz parcurge 70 km într-o zi. În câte ore parcurge 245 km, dacă merge cu aceeași viteză (medie)?

c) Un teren este arat în 7 ore folosind 2 tractoare. În cât timp poate fi arat un teren similar, dacă se folosesc 3 tractoare?

Reprezentări grafice

8. Reprezintă într-un sistem de axe:

a) punctele $A(2; 4)$, $B(2; -4)$, $C(-2; 4)$ și $D(2, -4)$

b) funcția $f: \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$

c) funcția $f: \{-1; 0; 1; 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 2$

d) funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

Interpretarea datelor statistice

Compararea datelor statistice

Ne amintim și explorăm!

◆ Utilitatea mediilor

Compararea datelor unor studii statistice se poate face în diverse feluri.

Uneori, pentru a reda sugestiv această comparare, este mai puțin importantă fiecare valoare în parte, în schimb are semnificație *media* valorilor.

Exemplul 1: Cursele de automobilism

La antrenamentele piloților de Formula 1 se înregistrează timpul de parcurgere al fiecărui tur. Fiecare dintre echipe este interesată să compare performanțele propriilor piloți cu cele ale adversarilor. Deoarece piloții parcurg un număr diferit de tururi, caracteristicile avute în vedere în momentul comparării sunt viteza maximă atinsă și *timpul mediu* de parcurgere al unui tur de pistă.



▲ La cursele de automobilism se ating în mod frecvent viteze de peste 200 km/h.

❶ Ce crezi că înseamnă afirmația: „Circuitul de la Monte Carlo este mai rapid decât cel de la Barcelona?”

Exemplul 2: Recensământul populației

În urma recensământului populației desfășurat între 18 și 27 martie 2002, s-au obținut date despre toți locuitorii României; prelucrarea datelor a fost făcută de către specialiștii de la Institutul Național de Statistică și Studii Economice. Datele obținute folosesc la definirea *gospodăriei medii*, prin precizarea numărului de persoane, a condițiilor de locuit, a tipului de venituri, a vârstei, a numărului de copii și a nivelului de educație. Precizarea caracteristicilor gospodăriei medii folosește nu doar în compararea parametrilor economici și sociali ai diverselor zone ale țării sau în compararea României cu alte țări; aceste caracteristici medii reprezintă și o bază pentru identificarea unor eșantioane reprezentative la nivel național.

• În anumite situații, pentru a compara date statistice, este necesar să utilizăm efectiv valorile unor parametri.

Exemplul 3: Compararea ponderilor unor ramuri industriale

Un studiu statistic comparativ analizează ponderea unor ramuri industriale față de întreaga producție industrială din România. Studiul se referă la anii 1995-2000. Datele obținute din acest studiu sunt reprezentate în continuare în mai multe moduri: sub forma unui tabel; sub forma unui grafic; sub forma unor diagrame circulare.

Reprezentarea datelor sub forma unui tabel

	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Industrie alimentară	15,9	16,3	17,1	16,1	18,2	13,9
Confecții	2,2	2,1	2,4	2,3	3,2	3,5
Chimie	7,5	8,7	7,8	7,2	5,8	5,8
Construcții metalice	4,4	2,8	3,0	2,5	3,1	2,7

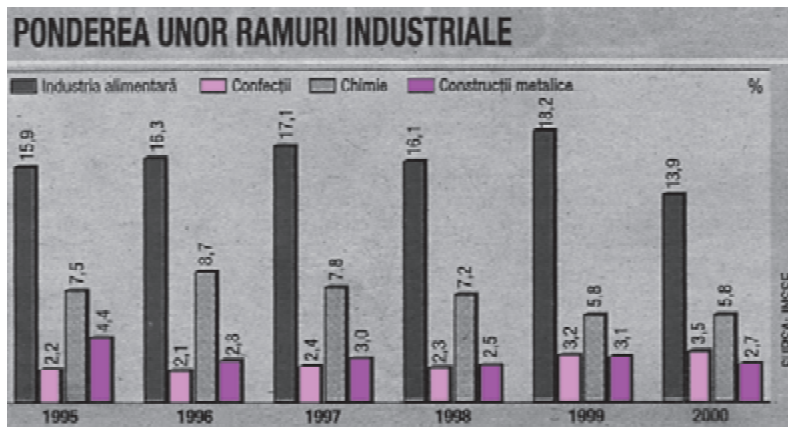
❷ Calculează ponderile celorlalte ramuri industriale, nelistate în tabel, față de întreaga producție industrială din România, în anii menționați.

❸ Calculează de câte ori este mai mare ponderea industriei chimice față de cea a construcțiilor metalice.

Folosind datele din tabelul anterior, obținem că ponderea industriei alimentare este, în medie, de 6,2 ori mai mare decât ponderea confecțiilor.

Reprezentarea datelor sub forma unui grafic cu bare

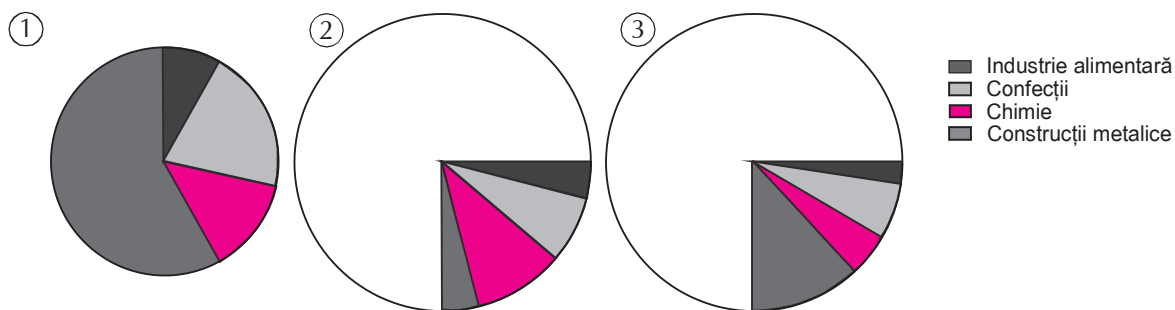
4 În ce ani industria alimentară a avut ponderea cea mai mare în raport cu celelalte trei ramuri reprezentate? Dar cea mai mică?



Valorile medii ale ponderilor ramurilor industriale analizate ne oferă o imagine globală asupra producției industriale din România la momentul respectiv. Folosind valorile medii, putem realiza o reprezentare sintetică sub forma unor diagrame circulare.

5 Care dintre diagramele circulare alăturate redau corect ponderea celor patru ramuri industriale în anul 2000?

Reprezentarea datelor sub forma unor diagrame circulare



6 Folosind datele din tabelul alăturat, completează un tabel cu două coloane în care să menționezi cele mai vizitate 10 site-uri din lume și numărul de vizitatori raportat la populația României. Poți folosi un calculator de buzunar pentru calcule.

Exemplul 4: Vizite pe Internet

Un studiu realizat de compania Jupiter Media Metrix evidențiază cele mai vizitate zece site-uri de internet în luna ianuarie 2002.

Pentru a compara situația din luna ianuarie cu aceea din lunile anterioare, autorii studiului au calculat media vizitatorilor pe internet: aceasta este de 45,08 milioane de vizitatori.

Deoarece în luna decembrie 2001 primele zece site-uri au fost vizitate în medie de 45,51 milioane de oameni, constatăm scăderea interesului populației pentru vizite pe internet, în această perioadă.

Site	Vizitatori (milioane)
AOL Time Warner Network	86,950
MSN Microsoft Sites	78,825
Yahoo	74,942
Terra Lycos	40,562
About/Primedia	34,972
Amazon Sites	30,105
eBay	28,859
Google Sites	26,912
InfoSpace	25,436
CNET Networks	23,232

SURSA: JUPITER MEDIA METRIX

◆ Tipuri de medii

Să ne amintim!

- Media aritmetică a numerelor x_1, x_2, \dots, x_n se calculează cu formula:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

- Media ponderată a numerelor x_1, x_2, \dots, x_n cu ponderile p_1, p_2, \dots, p_n se calculează cu formula:

$$m_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}.$$

Exemplu

Media ponderată a numerelor 13,5; 2,4 și 7,2 cu ponderile 3; 2 și 5 este:

$$m_p = \frac{13,5 \cdot 3 + 2,4 \cdot 2 + 7,2 \cdot 5}{3 + 2 + 5} = 8,43.$$

Să demonstrăm!

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ numere reale.

Notăm cu A și cu B mediile aritmetice ale numerelor x_1, \dots, x_n , respectiv y_1, y_2, \dots, y_m și cu M media aritmetică a celor $m + n$ numere date. Atunci M este media ponderată a numerelor A și B , cu ponderile n , respectiv m .

Fie $m_p = \frac{A \cdot n + B \cdot m}{n + m}$ media ponderată a numerelor A și B , cu ponderile n , respectiv m .

Deoarece $n \cdot A = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ și $m \cdot B = y_1 + y_2 + \dots + y_m$, deducem că

$$m_p = \frac{(x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_m)}{m + n} = M.$$

- Media geometrică a două numere reale pozitive x_1 și x_2 se calculează cu formula:

$$m_g = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Observăm că $(m_g)^2 = x_1 \cdot x_2$.

Exemplu

Media geometrică a numerelor 6 și 24 este

$$m_g = \sqrt{6 \cdot 24} = 12.$$

$$12^2 = 6 \cdot 24.$$

În general

Media geometrică a numerelor reale pozitive x_1, x_2, \dots, x_n este numărul real pozitiv notat m_g pentru care $(m_g)^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.

Media geometrică poate fi aproximată cu ajutorul logaritmilor zecimali.

Exemplu

Să aproximăm media geometrică a numerelor 15; 28 și 46.

Deoarece $(m_g)^3 = 15 \cdot 28 \cdot 46$, deducem că $\lg(m_g)^3 = \lg(15 \cdot 28 \cdot 46)$, deci

$$3\lg(m_g) = \lg 15 + \lg 28 + \lg 46.$$

Folosind o tabelă de logaritmi zecimali, obținem

$$\lg(m_g) \approx \frac{1,176 + 1,447 + 1,663}{3} = 1,429.$$

Utilizând din nou tabela de logaritmi, deducem că $m_g \approx 26,8$.

▲ Putem calcula rapid media aritmetică a numerelor 55; 51; 58 și 52 folosind calculatorul de buzunar.

Apăsăm tastele în succesiunea:

MODE | SHIFT | SAC | 55
DATA | 51 | DATA | 58 | DATA
52 | DATA | SHIFT | \bar{x}

Dacă este nevoie, putem afla numărul datelor înregistrate și suma acestora cu ajutorul tastelor:

SHIFT | n | , respectiv
SHIFT | $\sum x$.

▲ Putem calcula rapid media ponderată a numerelor 13,5; 2,4 și 7,2, cu ponderile 3; 2 și 5 apăsând tastele calculatorului de buzunar în ordinea:

13,5 | \times | 3 | = | M+ | 2,4 | \times | 2
= | M+ | 7,2 | \times | 5 | = | M+ | MR
÷ | [(... | 3 | + | 2 | + | 5 | (...)] | =

▲ Putem calcula media aritmetică a unor numere grupând convenabil numerele date și calculând mediile fiecărei grupe.

▲ Putem calcula media geometrică a mai multor numere cu un calculator de buzunar care are funcția științifică $x^{1/n}$. Pentru a calcula media geometrică a numerelor 15; 28 și 46 apăsăm tastele în succesiunea:

15 | \times | 28 | \times | 46 | =
SHIFT | $X^{1/n}$ | 3 | =

(3 este numărul de valori considerate)

⑦ Folosește calculatorul de buzunar pentru a calcula media geometrică a numerelor 12; 14; 20; 25 și 30.

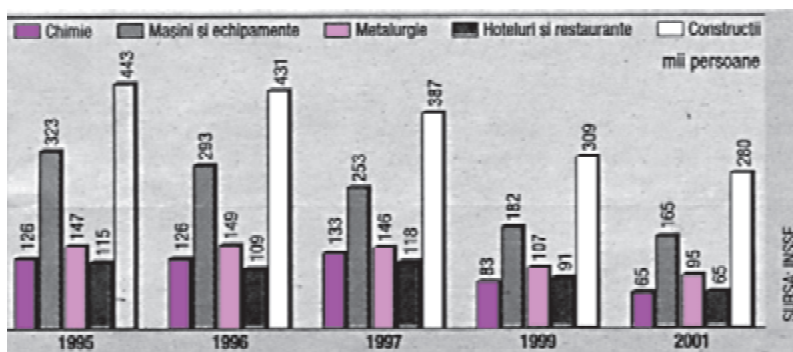
Exerciții și probleme

1. Două echipe de baschet au publicat următoarele tabele de valori medii:

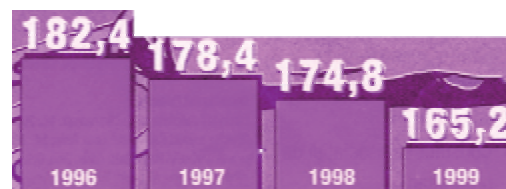
	Înălțime	Greutate	Puncte marcate pe meci	Aruncări ratate	Greșeli personale	Recuperări
L.A. Lakers	2,03	115	81,25	25,3	3,8	44,6
Utah	2,01	117,5	77,5	22,9	2,5	52,3

Observă datele referitoare la cele două echipe, apoi decide:

- Care dintre cele două echipe are o apărare mai bună?
 - Pentru care dintre echipe apar mai multe situații de a arunca la coș?
 - Analizează datele fizice ale echipelor și corelează aceste date cu situația recuperărilor, apoi cu situația rezultatelor echipelor.
2. Diagrama alăturată prezintă evoluția numărului de salariați în diferite ramuri industriale, în perioada 1995-2001.
- Ce procent reprezintă salariații din construcții, relativ la totalul angajaților din cele cinci ramuri, pentru anul 1996?
 - Reprezintă printr-o diagramă circulară situația anului 1996.
 - Calculează media numărului de salariați pentru fiecare dintre cele cinci ramuri industriale.



3. Un studiu statistic referitor la evoluția numărului de abonamente la telefonia fixă, efectuat în 2000, a constatat o scădere continuă a numărului de abonamente în perioada 1996-1999. Rezultatele studiului, prin raportare a numărului de abonamente la mia de locuitori, sunt redade mai jos sub forma unui grafic cu bare.
- Care este, în fiecare an, procentul de abonați la telefonia fixă, dintr-un total estimat de 15 milioane de adulți?
 - Formulează posibile explicații pentru procesul de scădere a numărului de abonamente la telefonia fixă.
 - Determină media numărului de abonamente din perioada analizată.
4. Folosește un calculator de buzunar sau o tablă de logaritmi pentru a aproxima:
- media geometrică a numerelor 16, 18, 20 și 25;
 - media aritmetică a numerelor 12, 27, 59;
 - media geometrică a numerelor 1, 2, 3, ..., 10.



5. Tabelul alăturat redă numărul de pasageri care s-au deplasat în perioada 1996-2000, cu diferite mijloace de transport.

- Calculează numărul mediu de pasageri în perioada 1996-2000, pentru fiecare tip de transport.
- Realizează o diagramă cât mai sugestivă, pentru a compara dinamica numărului de pasageri transportați, pentru fiecare categorie de transport, în cei cinci ani analizați.
- Calculează în două moduri media numărului de pasageri din transportul interurban și internațional, între 1996 și 2000.

Transportul de pasageri, pe moduri de transport

Transportul de pasageri, pe moduri de transport	1996	1997	1998	1999	2000
	date absolute				
Pasageri transportați (mii pers.)	22525	2785717	2446901	2390999	2404052
Transportul interurban și internațional de pasageri (mii pers.)	606113	569128	373992	324674	324895
- transport feroviar	212893	186615	146800	129339	117501
- transport rutier	389461	379444	224261	192633	205978
- transport fluvial	2399	2035	1923	1654	133
- transport aerian	1360	1034	1008	1048	1282

Sursa: ziarul infoSTAT, Bacău

Indicatori ai variabilelor cantitative



Analizăm și generalizăm!

◆ Un indicator de poziție: media

Exemplul 1: Cazul unei variabile discrete

Notele obținute de 25 de elevi ai clasei a XII-a la o lucrare sunt redată în tabelul de mai jos.

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv	1	0	2	5	8	6	2	1

Nota medie a clasei la această lucrare este:

$$m = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{1 + 0 + 2 + 5 + 8 + 6 + 2 + 1} = 7$$

Exemplul 2: Cazul unei variabile continue

Seria statistică următoare redă gruparea pe înălțime a 100 de băieți din clasele a XI-a.

Înălțime	Efectiv	Centrul fiecărei clase statistice
[155; 160)	8	157,5
[160; 165)	12	162,5
[165; 170)	15	167,5
[170; 175)	18	172,5
[175; 180)	21	177,5
[180; 185)	14	182,5
[185; 190)	10	187,5
[190; 195)	2	192,5

În acest caz, pentru a putea reduce calculul mediei la situația variabilelor discrete, ne raportăm la centrul fiecărei clase.

Obținem:

$$m = \frac{157,5 \cdot 8 + 162,5 \cdot 12 + 167,5 \cdot 15 + 172,5 \cdot 18 + 177,5 \cdot 21 + 182,5 \cdot 14 + 187,5 \cdot 10 + 192,5 \cdot 2}{8 + 12 + 15 + 18 + 21 + 14 + 10 + 2}$$

$$m = 173,7$$

◆ Cum folosim mediile în calculele statistice?

Exemplul 1

Datele din tabelul alăturat provin de la Ministerul Educației și Cercetării și se referă la populația școlară cuprinsă în licee sau facultăți, în perioada 2000-2004.

ÎNVĂȚĂMÂNT				
	2000/2001	2001/2002	2002/2003	2003/2004
Populația școlară (mii persoane)				
Total	4565	4554	4497	4473
în învățământul:				
liceal	688	711	741	759
superior	533	582	596	621

❶ Folosește calculatorul de buzunar pentru a calcula media aritmetică a numerelor 21,5; 32,7; 11,4 și 2,8.

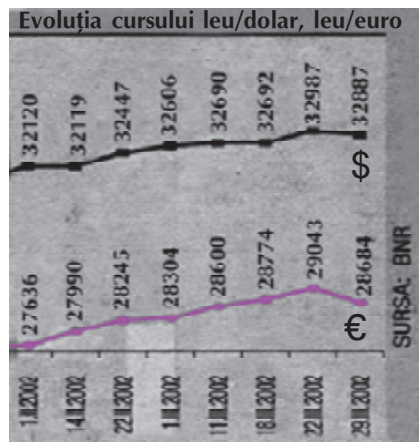
❷ Calculează media seriei statistice redată în tabelul de mai jos.

Masă	Efectiv
[40; 45)	12
[45; 50)	7
[50; 55)	11
[55; 60]	14

❸ Compară procentual numărul de elevi cu numărul de studenți din cei patru ani școlari. Formulează concluzii.

Calculând media acestor date, observăm că în învățământul liceal au fost cuprinși, în medie, 724.750 elevi, iar în învățământul superior – 583.000 de studenți. La o analiză superficială, am fi tentați să spunem că 80% dintre absolvenții de liceu urmează cursurile învățământului superior. Pentru aceasta, ar trebui însă să avem date și despre numărul de studenți din perioada 2004-2008 (atunci când toți elevii de liceu din perioada analizată ar putea deveni studenți).

Exemplul 2



4 Folosind graficul reprezentat, calculează valoarea medie a monedei naționale în raport cu dolarul american, pentru perioada 1.02-31.03.2002.

O întreprindere de mobilă și-a exportat produsele în lunile februarie și martie 2002 în mai multe țări din Comunitatea Europeană.

Pentru a putea face deconturile, contabilii firmei au folosit în calculele economice o valoare medie pentru cele două luni a monedei europene Euro, în raport cu moneda națională.

Ei au calculat această valoare pe baza graficului alăturat, alcătuit de Banca Națională. Deconturile au fost finalizate pentru valoarea medie de 28 409,5 lei pentru un euro.

Exemplul 3

Unul dintre premiile acordate în concursul „Cupa liceelor la baschet” se oferă echipei cu media de vârstă cea mai mică.

Vârstele elevilor din echipa liceului „D. Cantemir” sunt cele din tabelul de mai jos.

Vârsta (ani împliniți)	15	16	17	18	19
Numărul de jucători	1	4	6	2	1

5 Verifică corectitudinea calculului pentru media de vârstă a echipei de baschet. Cum se modifică această medie, dacă în echipă mai vine un jucător de 15 ani?

Media de vârstă a echipei liceului este de (aproximativ) 16 ani și 10 luni. Ea se obține ca medie ponderată a vârstelor jucătorilor, având ca ponderi numărul de jucători cu o vârstă dată.

◆ Un alt indicator de poziție: mediana

Pentru datele statistice x_1, x_2, \dots, x_n , putem defini *mediana*. Aceasta este un număr a cu proprietatea că există tot atâtea date mai mici decât a ca și cele mai mari decât a . Astfel:

- dacă n este impar avem $a = x_i$ și $\text{card} \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\} = \text{card} \{x_{i+1}, \dots, x_n\}$;
- dacă n este par, atunci mediana a este media aritmetică a elementelor din mijloc.

Exemplu

Punctajele celor 25 de elevi participanți la un concurs se distribuie crescător după cum urmează:

7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 9; 9; 10; 11; 11; 12; 12; 12; 12; 13; 13; 14; 14; 15

12 elevi
mediana
12 elevi

O metodă de căutare a mediane este utilizarea *efectivelor cumulate*:

Punctaje	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Efectiv	3	6	5	1	2	3	2	2	1
Efectiv cumulat	3	9	14	15	17	20	22	24	25

Al 13-lea punctaj este 9.

Efectiv total

Efectivul cumulat 14 indică faptul că există 14 punctaje inferioare sau egale cu 9. Deoarece mediana este punctajul cu numărul 13, deducem că mediana este 9.

Să comparăm!

Pentru exemplul dat, media notelor este $m = 10,04$,
Constatăm că, pentru acest exemplu, media și mediana nu sunt egale.

◆ Ce este mai semnificativă: media sau mediana?

Exemplu

Considerăm următoarele serii statistice de salarii, exprimate în RON:

Seria A: 500; 540; 600; 650; 700; 760; 850; 890; 900.

Seria B: 500; 540; 600; 650; 700; 760; 850; 890; 2700.

Seria A
Salariul median: 700 lei
Salariul mediu: 710 lei

Seria B
Salariul median: 700 lei
Salariul mediu: 910 lei

Observăm că ultimul salariu din seria B alterează în mod semnificativ media, în timp ce mediana rămâne neschimbată.

◆ Determinarea mediane printr-o metodă grafică

Pentru a determina mediana unei serii statistice prin metodă grafică, procedăm astfel:

- trasăm poligonul frecvențelor cumulate crescător (sau descrescător);
- mediana este abscisa punctului a cărui ordonată este 0,5 (sau 50%).

Exemplul 1

Conform rapoartelor de audiență efectuate de AUDIMAS, în luna august 2001, un număr al ziarului *Libertatea* a fost citit în medie de 491570 persoane. Sondajele de opinie realizate cu acest prilej au arătat că repartiția cititorilor pe grupe de vârstă se prezintă ca în tabelul următor:

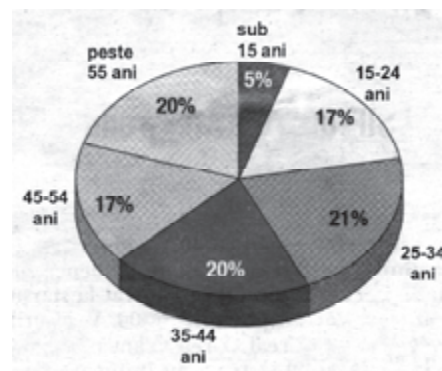
Vârsta x (în ani)	Sub 15 ani	[15; 25)	[25; 35)	[35; 45)	[45; 55)	[55; 80)
Frecvența	5%	17%	21%	20%	17%	20%

În acest tabel, pentru grupa de vârstă „sub 15 ani” considerăm ca limită inferioară vârsta de 7 ani, iar pentru grupa de vârstă „peste 55 de ani” considerăm ca limită superioară vârsta de 80 ani. (Peste această vârstă procentul de cititori este neglijabil.)

▲ În anumite domenii, cum ar fi prețuri, salarii, vârste, etc. utilizarea mediane în interpretarea datelor dă informații mai semnificative decât utilizarea mediei. Aceasta din urmă este interpretată de multe ori abuziv.

⑥ Explică în ce constă semnificația mediei și a mediane pentru exemplul alăturat.

▲ 58% din cititorii ziarului au vârsta cuprinsă între 15 și 44 de ani.



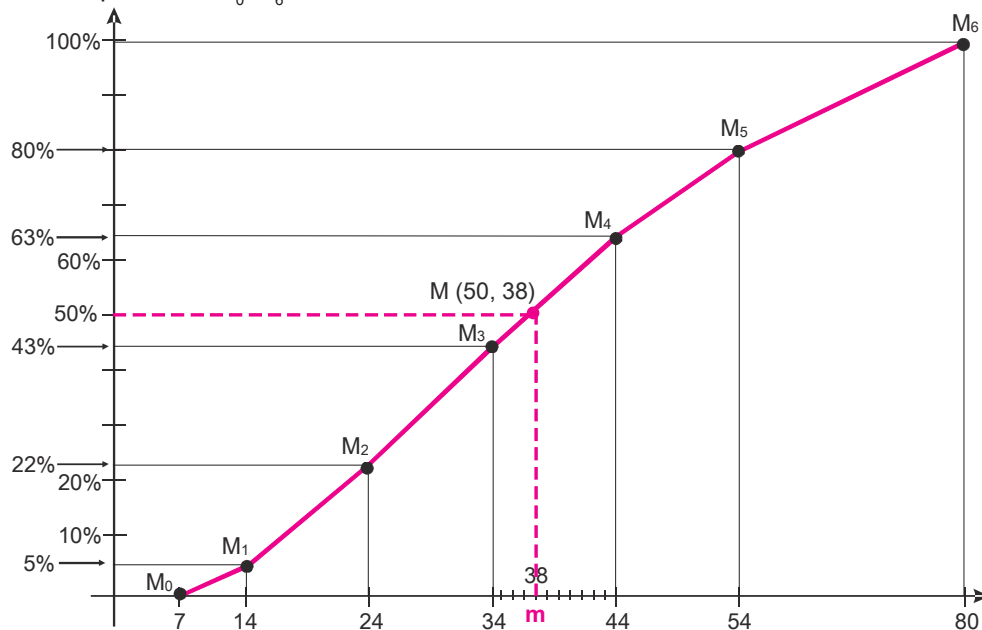
Pentru exemplul considerat, tabloul frecvențelor cumulate crescător este:

vârsta x	$7 \leq x \leq 14$	$14 < x \leq 24$	$24 < x \leq 34$	$34 < x \leq 44$	$44 < x \leq 54$	$54 < x \leq 80$
Frecvențe cumulate	$0 + 5 = 5$	$5 + 17 = 22$	$22 + 21 = 43$	$43 + 20 = 63$	$63 + 17 = 80$	$80 + 20 = 100$

▲ În studiile statistice se consideră ca vârstă numărul de ani împliniți. De exemplu, un adolescent de 14 ani și 11 luni este înregistrat în clasa statistică

$$7 \leq x \leq 14.$$

Poligonul frecvențelor cumulate crescător este dat de linia frântă obținută prin unirea punctelor M_0-M_6 .



Coordonatele acestor puncte sunt:

- abscisa - limita superioară de vârstă din fiecare clasă de vârstă;
- ordonata - frecvența cumulată crescător corespunzătoare acelei clase.

$M_0(7, 0)$; $M_1(14, 5)$, $M_2(24, 22)$, $M_3(34, 43)$; $M_4(44, 63)$; $M_5(54, 80)$; $M_6(80, 100)$

Mediana este abscisa punctului de pe grafic corespunzător frecvenței cumulate de 50%. Observăm că:

- Punctul $M(50, m)$ aparține segmentelor M_3M_4 .
- Mediana aparține intervalului $[34, 44]$.

Acest interval se numește *clasa mediană*.

- Din lectura grafică se deduce abscisa (aproximativă) a mediane $m \approx 38$.

Semnificația statistică: 50% dintre cititorii ziarului au mai puțin de 38 de ani.

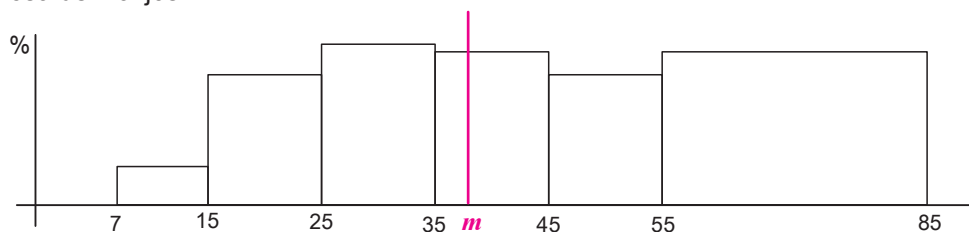
7 Din analiza poligonului frecvențelor cumulate crescător, se observă că 43% dintre cititori au vârsta mai mică sau egală cu 34 ani și 63% dintre aceștia au sub 45 de ani.

Ce procent de cititori au vârsta sub 24 de ani? Dar peste?

8 Cum au fost stabilite ariile dreptunghiurilor din histograma alăturată?

Exemplul 2

Pentru raportul de audiență analizat anterior, histograma corespunzătoare este cea de mai jos.



Ariile dreptunghiurilor plasate de o parte și de alta a dreptei verticale ce trece prin punctul de abscisă $m \approx 38$ sunt egale.

În general

- *Media* unor date statistice se obține calculând media aritmetică sau media ponderată.
- Media unor date grupate în clase statistice se obține prin *concentrarea* întregului efectiv al fiecărei clase în mijlocul intervalului corespunzător.
- Mediana unei serii statistice este acea valoare care împarte efectivul *în două părți de frecvențe egale*.
Mediana unor variabile statistice continue se poate determina grafic:
 - cu ajutorul *poligonului frecvențelor cumulate*: determinăm abscisa punctului cu ordonata 50%
 - cu ajutorul *histogramei*: determinăm dreapta verticală ce împarte suprafața în două părți de arii egale.

◆ Doi indicatori de dispersie: modulul și amplitudinea

Media și mediana dau informații semnificative asupra unei serii statistice. Totuși, acestea nu sunt suficiente pentru a descrie și compara seturi de date. Pentru a evidenția mai bine caracteristicile unor seturi de date, folosim, pe lângă indicatorii de poziție, și indicatori de dispersie.

Exemplu

Situația vânzărilor de mașini în România în primele zece luni ale anilor 2000 și respectiv, 2001 este prezentată în tabelul alăturat.

Aceste informații se pot organiza în tabele de efective, astfel:

Anul 2001

Marca (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv (n_i)	1208	545	252	233	176	165	128	128	108	91

Anul 2000

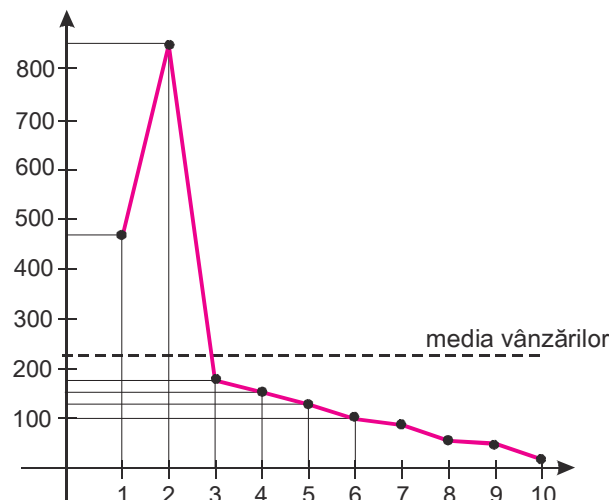
Marca (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv (n_i)	458	826	171	151	63	139	90	82	58	55

VÂNZĂRI CLASA MEDIE		
Marca	2001 (zece luni)	2000 (zece luni)
1. Volkswagen Pasat	1.208	458
2. Daewoo Nubira	545	826
3. Peugeot 406	252	171
4. Ford Mondeo	233	151
5. Mercedes clasa C	176	63
6. Opel Vectra	165	139
7. Renault Laguna	128	90
8. Volvo S40	128	82
9. Audi A4	108	58
10. BMW Seria 3	91	55

Reprezentarea grafică a dinamicii vânzărilor pentru cele 10 mărci de autoturisme se prezintă sub forma unui poligon statistic al frecvențelor.

Observăm că numărul de vânzări este repartizat neuniform pe cele 10 mărci.

Anul 2000



9 Verifică dacă media vânzărilor pentru cele zece mărci, în anul 2000, este de aproximativ 209 mașini.

10 Calculează media vânzărilor în anul 2001, pentru cele zece mărci de automobile.

11 Compară amplitudinile celor două serii statistice, reprezentând vânzările de maxim în 2000 și 2001. Amplitudinea unei serii statistice reprezintă diferența dintre valoarea maximă și cea minimă a variabilei.

12 Reprezintă grafic distribuția notelor celor doi elevi și interpretează grafic relația între medie și abaterea notelor față de medie.

13 Calculează abaterea medie liniară a notelor obținute la matematică, în semestrul trecut, de către voi înșivă. Compară cu colegul de bancă constanța în pregătire.

▲ Abaterea medie liniară măsoară gradul de împrăștiere a valorilor unor date statistice în jurul mediei.

▲ Metoda de calcul pentru abaterea medie liniară a unor date grupate în clase statistice presupune că în fiecare clasă, datele sunt repartizate uniform.

▲ Considerarea altor clase statistice, pentru aceleași date, poate conduce la valori diferite ale abaterii medii liniare. Valorile obținute sunt cu atât mai bune, cu cât clasele statistice au lungimi mai mici.

Diferența între cel mai vândut tip de mașină, Volkswagen, și cel mai puțin vândut tip, BMW, în 2000 este de 403. Aceasta reprezintă amplitudinea seriei statistice.

Media vânzărilor este de aproximativ 209 bucăți. Prin compararea efectivului vândut (pentru fiecare marcă) cu media vânzărilor anuale obținem un indicator de dispersie. Astfel, s-au vândut 458 bucăți de automobile Volkswagen Passat față de media de 209, adică cu 249 mai mult. Pentru această variabilă, modulul seriei statistice este 249.

În general

Amplitudinea unei serii statistice reprezintă diferența dintre valoarea maximă și cea minimă a variabilei.

Modulul se exprimă prin diferența dintre valoarea medie a efectivului și frecvența sa absolută.

◆ Un indicator de împrăștiere: abaterea medie liniară

Să analizăm!

Ioana și Dan au obținut la matematică aceeași medie: 8. În caracterizarea activității lor, profesorul de matematică a ținut cont de constanța notelor obținute de-a lungul întregului semestru.

Notele Ioanei: 8, 8, 7, 9.

Notele lui Dan: 10, 5, 10, 7.

Astfel, se observă că Ioana a fost mult mai echilibrată în pregătire, pe când Dan a avut fluctuații mari. „Constanța” sau „fluctuația” pregătirii se pot exprima prin intermediul abaterilor absolute ale notelor celor doi elevi, față de medie.

În situația analizată:

Notele Ioanei	8	8	7	9
Abaterea notelor față de medie	0	0	1	1

Notele lui Dan	10	5	10	7
Abaterea notelor față de medie	2	3	2	1

Media abaterilor notelor față de medie dă informații despre împrăștierea notelor în jurul mediei. Ea este notată de obicei cu τ (tau) și se numește abaterea medie liniară.

Pentru exemplele analizate:

$$\tau_1 = \frac{0+0+1+1}{4} = 0,5;$$

$$\tau_2 = \frac{2+3+2+1}{4} = 2$$

În general

Fie x_1, x_2, \dots, x_n valorile unei variabile statistice discrete și \bar{x} media acestor valori.

Abaterea medie liniară se calculează cu formula:

$$\tau = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Să aplicăm!

Pentru a calcula abaterea medie liniară a unor date grupate în clase statistice, concentrăm întreg efectivul unei clase statistice în mijlocul intervalului ce reprezintă clasa respectivă. De exemplu, pentru datele studiului privind greutatea elevilor unei clase, prezentate în tabelul de mai jos, obținem: $\bar{x} = 73$, $\tau = 8,8$.

Greutatea (în kg)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]
Efectivul	3	7	9	4	2

◆ Un alt indicator de împrăștiere: abaterea medie pătratică

Să reprezentăm rezultatele obținute de un grup de 20 de elevi la două teste succesive, prin trasarea poligoanelor efectivelor:

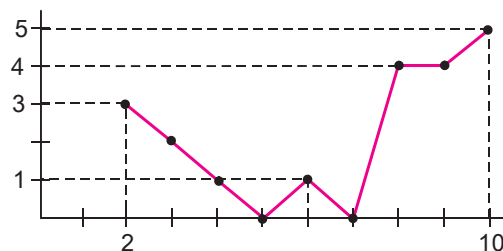
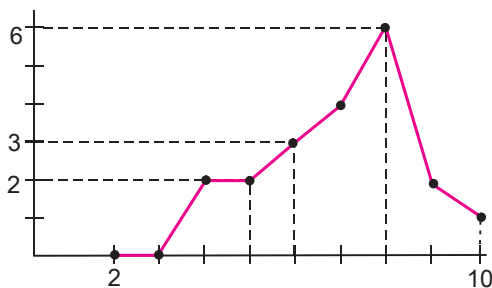
Testul A

Note	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv	0	0	2	2	3	4	6	2	1

Testul B

Note	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv	3	2	1	0	1	0	4	4	5

14 Care este mediana notelor le fiecare dintre aceste teste? Dar media?



15 Precizează coordonatele fiecărui punct marcat pe graficele alăturate.

Să analizăm!

Rezultatele obținute la cele două teste au aceeași medie: 7. Configurația notelor în jurul mediei este însă foarte diferită. Pentru a exprima cantitativ această configurație, determinăm distanțele față de medie și exprimăm o „medie” a pătratelor acestor distanțe. În acest fel, obținem dispersia și abaterea medie pătratică.

Avem:

Testul A

Note	Efectiv	Distanța față de medie	Pătratul distanței
2	0	5	25
3	0	4	16
4	2	3	9
5	2	2	4
6	3	1	1
7	4	0	0
8	6	1	1
9	2	2	4
10	1	3	9

Testul B

Note	Efectiv	Distanța față de medie	Pătratul distanței
2	3	5	25
3	2	4	16
4	1	3	9
5	0	2	4
6	1	1	1
7	0	0	0
8	4	1	1
9	4	2	4
10	5	3	9

16 Compară rezultatele la cele două teste prin intermediul abaterii medii liniare.

▲ Putem calcula abaterea medie pătratică a datelor 6; 6; 7; 8; 8; 8, folosind un calculator de buzunar. Apăsăm tastele în succesiunea:

MODE [.] [SHIFT] [SAC] 6 [DATA]
6 [DATA] 7 [DATA] 8 [DATA] 8
[DATA] 8 [DATA] [SHIFT] [σ_n]

Dispersia se notează de obicei cu v (de la variație sau varianță).

Abaterea medie pătratică este rădăcina pătrată a dispersiei. Ea se notează de obicei cu σ (sigma).

Pentru exemplele date, obținem:

$$v_1 = \frac{25 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{0 + 0 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6 + 2 + 1} \approx 2,599$$

$$\sigma_1 = \sqrt{v_1} \approx 1,612 \quad , \text{ respectiv}$$

$$v_2 = \frac{25 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 5}{3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 0 + 4 + 4 + 5} \approx 8,851$$

$$\sigma_2 = \sqrt{v_2} \approx 2,975.$$

În acest fel putem compara numeric împrăștierea datelor: cu cât dispersia și abaterea medie pătratică sunt mai mari, cu atât datele statistice analizate sunt mai împrăștiate.

17 Pentru fiecare dintre teste, împarte rezultatele în două clase: note sub 5 și note peste 5. Construiește apoi câte o histogramă și marchează pe ea mediana notelor.

18 Stabilește o relație între dispersie și abaterea medie pătratică.

A Pentru studiul analizat, se consideră ca fiind nesemnificativ procentual numărul elevilor ce nu au înălțimea cuprinsă între 140 cm și 200 cm.

19 Justifică toate calculele făcute în exemplul alăturat.

20 În primul semestru, un elev a primit la matematică trei note. În ce situație abaterea medie liniară, respectiv abaterea medie pătratică a acestor note sunt maxim posibilă? Aceeași întrebare pentru cazul în care elevul ar fi primit patru note.

Să observăm!

Abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică au același ordin de mărime (și aceeași unitate de măsură) ca și valorile statistice studiate.

În general

Fie x_1, x_2, \dots, x_n valorile unei variabile statistice discrete și \bar{x} media aritmetică a acestor valori.

Dispersia și abaterea medie pătratică măsoară gradul de împrăștiere a valorilor variabilei în jurul mediei. Acești indicatori se calculează cu formulele:

$$v = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}, \text{ respectiv}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Să aplicăm!

Pentru a calcula abaterea medie pătratică a unor date grupate în clase statistice, putem proceda în același mod ca și pentru calculul mediei sau al abaterii medii liniare.

De exemplu, pentru studiul privind înălțimea elevilor cu vârsta între 15 și 19 ani, ale cărui rezultate sunt cele din tabelul de mai jos, abaterea medie pătratică este $\sigma \approx 11,82$.

Înălțimea (în cm)	[140; 160)	[160; 170)	[170; 180)	[180; 190)	[190; 200]
Frecvența (%)	15	25	40	15	5

Să demonstrăm!

Abaterea medie liniară, respectiv abaterea medie pătratică ale unor valori statistice sunt egale cu zero dacă și numai dacă toate valorile statistice date sunt egale.

Fie x_1, x_2, \dots, x_n valorile unei variabile statistice, \bar{x} media acestor valori și τ , respectiv σ abaterile lor medii.

Deoarece $\tau = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$, iar $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$,

avem:

$$\tau = 0 \Leftrightarrow |x_i - \bar{x}| = 0 \text{ pentru orice } i \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x} \dots$$

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow (x_i - \bar{x})^2 = 0 \text{ pentru orice } i \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x} \dots$$

◆ Care dintre indicatorii de împrăștiere furnizează informații mai consistente?

Să analizăm!

Punctajele obținute de doi sportivi în proba olimpică de pistol cu aer comprimat - 50 m, sunt următoarele:

Sportivul 1: 9, 9, 8, 6

Sportivul 2: 10, 8, 8, 6.

Observăm că media punctajelor celor doi sportivi este aceeași: 8. Calculând abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică obținem:

$$\tau_1 = 1; \quad \sigma_1 \approx 1,225, \quad \text{respectiv} \quad \tau_2 = 1; \quad \sigma_2 \approx 1,414.$$

Media și abaterea medie liniară a punctajelor celor doi sportivi sunt aceleași, dar abaterea medie pătratică este diferită.

Împrăștierea rezultatelor obținute de al doilea sportiv este mai mare.

În general

Pentru a compara gradul de împrăștiere a unor date statistice este mai utilă compararea abaterilor medii pătratice.

Să demonstrăm!

Fie x_1, x_2, \dots, x_n valorile unei variabile statistice, τ și σ abaterea medie liniară, respectiv abaterea medie pătratică a acestor valori.

Atunci $\tau \leq \sigma$.

Notăm cu \bar{x} media valorilor date și fie $a_1 = |x_1 - \bar{x}|$, $a_2 = |x_2 - \bar{x}|$, ..., $a_n = |x_n - \bar{x}|$.

Cu această notație, concluzia se scrie în următoarea formă echivalentă:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

Prin ridicarea la pătrat și gruparea convenabilă a termenilor în membrul al doilea din inegalitatea anterioară, obținem inegalitatea evidentă:

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

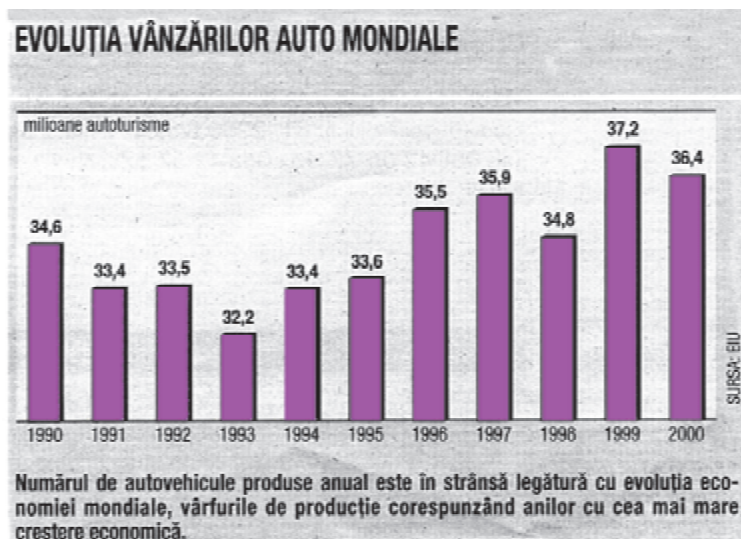
21 Verifică corectitudinea calculului pentru abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică a rezultatelor sportivilor, din exemplul analizat.

22 Găsește un exemplu numeric pentru mai multe date statistice, în care mediile și abaterile medii pătratice sunt aceleași, dar abaterile medii liniare sunt diferite.

23 Precizează numărul de termeni ai ultimei inegalități ce apare în demonstrația alăturată.

Exerciții și probleme

1. Diagrama alăturată prezintă evoluția vânzărilor mondiale de automobile în deceniul trecut.
 - a) Exprimă procentual datele privind evoluția vânzărilor de autovehicule pe piața mondială. Folosește un calculator de buzunar și treci datele obținute într-un tabel.
 - b) Determină media vânzărilor în perioadele: 1990-1995; 1996-2000; 1990-2000. Ce observi?
 - c) Calculează dispersia vânzărilor în perioadele 1990-1995; 1996-2000; 1990-2000.



2. Prețurile plantelor de apartament practicate în 2005 este dat în tabelul alăturat. Grupează prețurile în clase cu amplitudinea 5 lei.
a) Completează tabelul următor cu frecvențele și frecvențele cumulate crescător.

PLANTE DE APARTAMENT

Dracaena	9 lei
Dracaena India	790 - 1000 lei
Ficus	7,5 - 330 lei
Difembachia	4,5 - 9 lei
Croton	5,5 - 125 lei
Yucca	20 - 59 lei
Cordilina	39 lei
Kalanchoe	7 - 16 lei
Gardenia	28 lei
Begonia Superhibrida	13,5 lei
Cyclamen	6,8 lei
Mușcată	4,5 - 8 lei
Cactus	2,1 - 48 lei
Bonsai	32,5 - 120 lei
Kenția	199 lei - 260 lei
Philodendron	10 - 32,6 lei
Hedera	32,5 lei
Mona	40 lei

*Prețul este orientativ și poate varia în funcție de distribuitori și comercianți.

Preț (RON)	0-5	5-10	10-15	15-50	50-100	mai mult de 100
Nr. plante	3	5		

În cazul plantelor care au prețuri variabile, în funcție de dimensiuni, se va considera prețul cel mai mic.

- b) Reprezintă poligonul frecvențelor cumulate și determină pe grafic valoarea mediane.
c) Compară această valoare cu prețul mediu al unei plante.
d) Exprimă procentual numărul plantelor care costă sub 50 lei, apoi al celor cu prețul peste 100 lei. Compară cele două numere.

3. Institutul Național de Statistică a dat publicității datele privind populația României în perioada 2000-2003.

	mii persoane			
	2000	2001	2002	2003
Total	22435,2	22408,4	21794,8	21733,6
<i>din care feminin</i>	<i>11466,4</i>	<i>11458,9</i>	<i>111152,3</i>	<i>11127,3</i>
Pe medii				
Urban	12244,6	12243,7	11608,7	11600,2
<i>din care feminin</i>	<i>6336,8</i>	<i>6340,2</i>	<i>6029,7</i>	<i>6033,8</i>
Rural	10190,6	10186,1	10186,1	10133,4
<i>din care feminin</i>	<i>5129,6</i>	<i>5118,7</i>	<i>5122,6</i>	<i>5093,6</i>

- a) Calculează valorile medii ale întregii populații, respectiv ale populației masculine și feminine din România, din mediul urban sau din cel rural.
b) Pentru fiecare dintre seriile statistice din tabelul dat, calculează abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică.
c) Reprezintă grafic într-o formă cât mai sugestivă variația populației României, între 2000 și 2004.

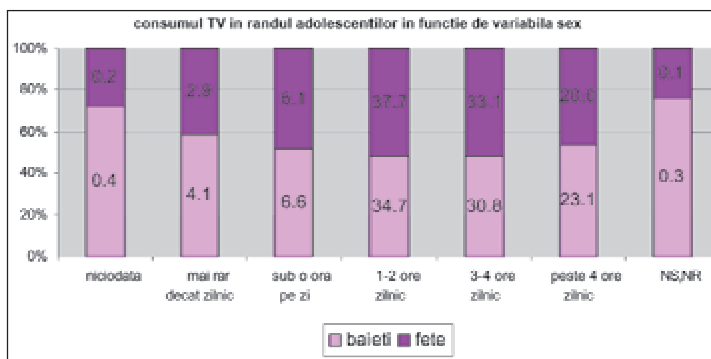
4. În graficul cu bare alăturat sunt evidențiate rezultatele unui sondaj statistic privind intervalul de timp pe care elevii de 15-18 ani îl petrec în fața televizorului.

Pe fiecare bară verticală a graficului sunt reprezentate simultan frecvența efectivelor de băieți, respectiv fete, care corespund unei anumite caracteristici.

Astfel, 34,7% dintre băieții intervievați și 37,7% dintre fete petrec în fața televizorului între 1 și 2 ore zilnic.

- a) Calculează cât timp petrec în medie în fața televizorului fetele, respectiv băieții. Pentru aceasta, înlocuiește caracteristica „mă uit mai rar decât zilnic” cu intervalul $[0; 0,25)$ și „mă uit mai mult de 4 ore zilnic” cu intervalul $[4; 8)$.

- b) Transformă diagrama dată într-un grafic cu bare duble. Reprezintă mediile pe acest nou grafic.



Sursa: www.cna.ro/cercetari/sondaje/curs_iul2005/c_med15_18_iul2005.pdf

Utilizarea indicatorilor statistici în interpretarea datelor



Aplicăm și dezvoltăm!

Pentru a descrie o variabilă cantitativă (numerică) a unei populații statistice este necesar să identificăm câteva caracteristici ale valorilor ei numerice. Fiecare dintre aceste caracteristici oferă un anumit tip de informație. Astfel:

- caracteristicile de poziție: media, mediana dau informații asupra ordinului de mărime al observațiilor statistice;
- caracteristicile de dispersie: amplitudinea, modulul, abaterea medie liniară, dispersia, abaterea medie pătratică, dau informații despre gradul de împrăștiere a valorilor.

◆ Interpretarea indicatorilor de poziție

Exemplul 1

Considerăm o serie statistică discretă dată de numărul de cărți citite într-o lună de fiecare dintre cei 75 de elevi ai clasei a XI-a din liceul „Matei Basarab”.

Număr de cărți (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
Efectiv (n_i)	5	18	14	15	11	3	8
$n_i \cdot x_i$	0	18	28	45	44	15	48

Pentru această serie calculăm:

$$\text{media ponderată (valoarea medie)} = \frac{\text{suma produselor } n_i \cdot x_i}{\text{efectiv total}} = \frac{198}{75} = 2,64$$

În medie, fiecare elev a citit 2-3 cărți.

Observăm că media unei serii statistice poate să nu fie egală cu nici una dintre datele înregistrate.

Exemplul 2

O serie statistică continuă are ca variabilă vârsta elevilor dintr-un liceu.

Efectivele de elevi din liceu, pe toate cele 4 clase, se prezintă astfel:

Vârsta	15-16	16-17	17-18	18-19
Efectiv (n_i)	72	69	97	61
Centrul clasei (x_i)	15,5	16,5	17,5	18,5
$n_i \cdot x_i$	1116	1138,5	1697,5	1128,5

Vârsta medie a elevilor din liceu, conform cu această repartiție statistică este:

$$\frac{5080,5}{299} \approx 17 \text{ ani.}$$

În aceeași serie statistică, mediana aparține clasei de vârstă (17; 18). Folosind poligonul frecvențelor cumulate crescătoare sau reprezentarea datelor cu ajutorul histogramelor, obținem că mediana vârstelor elevilor este 17,08, adică aproximativ 17 ani și o lună.

▲ Variabilele discrete iau valori izolate.

▲ Variabilele continue pot lua orice valori într-un interval dat.

Dacă variabilele discrete au valori suficient de multe în cadrul unei serii statistice, ele pot fi grupate în clase și sunt considerate în analiza statistică a acelei serii drept valori continue.

① Calculează media clasei voastre la ultima lucrare scrisă la matematică.

▲ În cazul unei serii statistice continue, prin convenție, se consideră ca valori x_i centrul fiecărei clase statistice.

Calculul mediei s-a făcut astfel:

$$\frac{\text{suma produselor } n_i \cdot x_i}{\text{efectivul total}}$$

▲ Poți considera că ultima clasă statistică din sondajul alăturat se referă la grupa de vârstă 65-85 ani.

Să aplicăm!

Vrem să determinăm care este vârsta medie a telespectatorilor ce urmăresc Jurnalul TVR, conform datelor sondajului prezentat în ziar.



Pentru aceasta, grupăm efectivele fiecărei clase statistice în mijlocul intervalului ce reprezintă clasa respectivă și calculăm media ponderată; obținem vârsta medie de aproximativ 46 ani.

Pentru aceleași date statistice, mediana este de aproximativ 47 ani. Altfel spus: 50% dintre telespectatorii Jurnalului au mai puțin de 47 de ani.

② Calculează pentru fiecare dintre cei doi sportivi performanța medie și evidențiază, printr-o diagramă, cea mai bună și cea mai slabă performanță.

◆ Interpretarea indicatorilor de dispersie

Un antrenor trebuie să aleagă între doi sportivi pe cel care va reprezenta clubul la următorul concurs de naționale.

El analizează performanțele sportivilor la ultimele 8 antrenamente.

Pentru a se putea decide, antrenorul va trebui să compare dispersia rezultatelor celor doi sportivi.

Iată cum a procedat:

Sportiv 1	30,2	29,7	29,9	29,3	29,4	30,1	30,2	29,6
Sportiv 2	30,1	29,8	29,2	29,8	30,2	29,9	29,9	29,5

③ Cum îl va alege antrenorul pe cel mai bun sportiv?

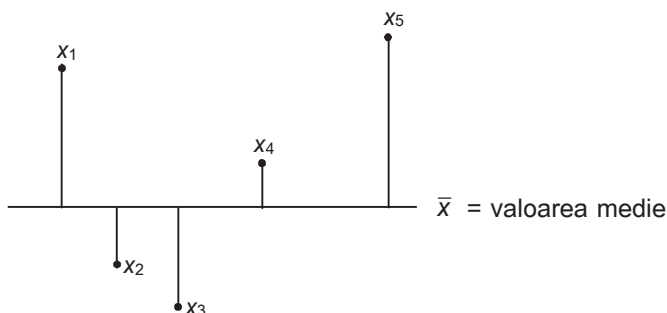
Calculând media performanțelor obținute de sportivi la cele 8 antrenamente, antrenorul constată că cei doi au obținut aceeași performanță medie (\bar{x}).

④ Calculează mediile rezultatelor celor doi sportivi, folosind un calculator de buzunar.

Să observăm!

Două serii statistice pot avea aceeași medie, dar pot lua valori diferite.

⑤ Comentează semnificația reprezentării grafice alăturate.



Pentru a da o semnificație numerică dispersiei valorilor, luăm în considerare abaterea fiecărei valori față de medie.

Pentru a calcula dispersia, procedăm astfel:

– calculăm diferența dintre fiecare valoare și medie, adică $|x_i - \bar{x}|$.

	Sportiv1	Sportiv 2
Antrenamentul 1:	$ 30,2 - 29,8 = 0,4$	$ 30,1 - 29,8 = 0,3$
Antrenamentul 2:	$ 29,7 - 29,8 = 0,1$	$ 29,8 - 29,8 = 0$
Antrenamentul 3:	$ 29,9 - 29,8 = 0,1$	$ 29,2 - 29,8 = 0,6$
Antrenamentul 4:	$ 29,3 - 29,8 = 0,5$	$ 29,8 - 29,8 = 0$
Antrenamentul 5:	$ 29,4 - 29,8 = 0,4$	$ 30,2 - 29,8 = 0,4$
Antrenamentul 6:	$ 30,1 - 29,8 = 0,3$	$ 29,9 - 29,8 = 0,1$
Antrenamentul 7:	$ 30,2 - 29,8 = 0,4$	$ 29,9 - 29,8 = 0,1$
Antrenamentul 8:	$ 29,6 - 29,8 = 0,2$	$ 29,5 - 29,8 = 0,3$

– ridicăm la pătrat diferența $|x_i - \bar{x}|$ între performanța obținută de fiecare sportiv la antrenament și media performanțelor;

– înmulțim această valoare cu efectivul corespunzător (numărul de antrenamente la care s-au obținut aceste rezultate);

– adunăm rezultatele obținute pentru fiecare valoare (performanță);

– împărțim la efectivul total (numărul total de antrenamente luate în calcul) pentru a obține dispersia valorilor față de medie, adică variația față de medie (v);

– calculăm abaterea medie pătratică: $\sigma = \sqrt{v}$.

Aceste etape de calcul se pot parcurge mai simplu prin completarea unui tabel.

Tabelele de calcul pentru dispersia performanțelor sportivilor față de performanța medie ($\bar{x} = 29,8$ sec.) sunt cele de mai jos.

Sportivul 1

x_i	n_i	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
30,2	1	0,4	0,16	0,16
29,7	1	0,1	0,01	0,01
29,9	1	0,1	0,01	0,01
29,3	1	0,5	0,25	0,25
29,4	1	0,4	0,16	0,16
30,1	1	0,3	0,06	0,06
30,2	1	0,4	0,08	0,08
29,6	1	0,2	0,04	0,04

În cele 8 antrenamente, $v_1 = \frac{0,77}{8} \approx 0,096$.

Abaterea medie pătratică $\sigma_1 = \sqrt{v_1} = \sqrt{0,096} \approx 0,310$.

6 Explică etapele de calcul listate alăturat, necesare în calculul dispersiei.

7 Urmărește datele din tabelul alăturat. Ce legătură este între coloana a treia și coloana a patra?

Sportivul 2

8 Calculează amplitudinea seriei de rezultate pentru Sportivul 2.

x_i	n_i	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
30,1	1	0,3	0,09	0,09
29,8	2	0	0	0
29,2	1	0,6	0,36	0,36
29,8	1	0	0	0
30,2	1	0,4	0,16	0,16
29,9	2	0,1	0,01	0,02
29,5	1	0,3	0,09	0,09

! Pentru a calcula dispersia a două serii statistice, se calculează media și abaterea medie pătratică. Cu cât această valoare este mai mare, au atât seria este mai dispersată.

În cele 8 antrenamente $v_2 = \frac{0,72}{8} = 0,09$.

Abaterea medie pătratică $\sigma_2 = \sqrt{v_2} \approx 0,300$.

Calculând abaterile medii pătratice pentru performanțele celor doi sportivi, se constată că $v_2 < v_1$.

Performanțele celui de-al doilea sportiv sunt mai puțin dispersate față de medie, deci sunt șanse ca la concurs să obțină o performanță mai apropiată de medie.

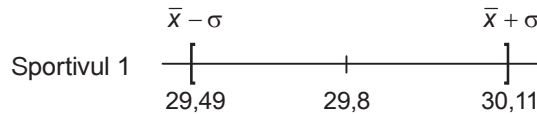
Putem exprima „împrăștierea“ rezultatelor și prin situarea acestora față de intervalul $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$.

Pentru exemplul dat:

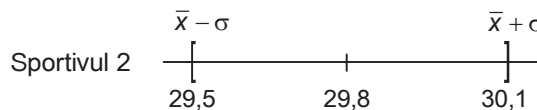
9 Majoritatea valorilor unei serii statistice se situează în intervalul

$$[\bar{x} - v, \bar{x} + v].$$

Verifică această afirmație în cazul exemplului dat și precizează care dintre valori se situează în interval.



– 4 dintre valori, adică 50% dintre performanțele luate în calcul, sunt în afara intervalului.



– o singură valoare, adică 12,5% dintre performanțele luate în calcul este în afara intervalului.

◆ Repartiția normală

La concursul „Cangurul“ au participat, în anul 2002, 170 000 de elevi. Înregistrarea rezultatelor la teste se face de către un corector automat.

La 100 de lucrări parcurse, corectorul a înregistrat următoarele punctaje:

25, 11, 11, 11, 20, 20, 14, 16, 18, 21, 21, 21, 19, 23, 17, 24, 25, 12, 12, 15, 19, 19, 14, 22, 22, 24, 24, 24, 15, 17, 19, 18, 16, 20, 25, 23, 21, 22, 24, 20, 23, 25, 23, 15, 17, 22, 24, 20, 15, 19, 23, 25, 23, 15, 17, 19, 23, 17, 24, 25, 15, 15, 15, 14, 11, 18, 21, 21, 21, 19, 23, 17, 24, 20, 20, 14, 16, 18, 21, 21, 23, 12, 12, 10, 15, 12, 19, 19, 20, 24, 23, 23, 22, 24, 20, 15, 19, 23, 25, 23.

Dacă punctajele nu au fost influențate de diferiți factori exteriori, cum ar fi „trasul cu ochiul“ la colegi, sau chiar copiatul în masă, distribuția grafică a punctajelor ar trebui să capete forma așa-numitei „repartiții normale“.

Să procedăm în pași succesivi:

- Ordonăm datele

Punctaj	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Efectiv	1	4	5	0	4	10	3	6	4	10	9	9	5	13	10	7

- Calculăm indicatorii: medie, abatere medie, dispersie

Folosind un calculator de buzunar, obținem:

media $\bar{x} = 19,25$ și dispersia $\sigma \approx 4,112$.

- Evaluăm calitatea eșantionului

Intervalul $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$ corespunde intervalului $[15,138; 23,362]$.

- 59 de lucrări sunt situate în acest interval, ceea ce reprezintă 59% din numărul notelor.

Intervalul $[\bar{x} - 2\sigma; \bar{x} + 2\sigma]$ corespunde intervalului $[11,026; 23,362]$.

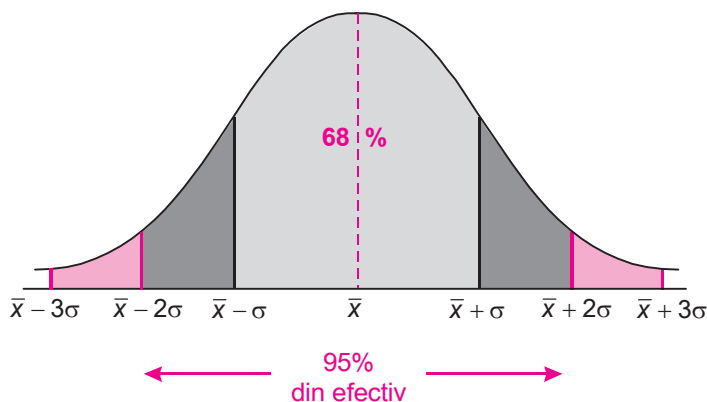
- 82 de lucrări sunt situate în acest interval, ceea ce reprezintă 82% din numărul notelor.

10 Verifică toate calculele pentru seria de rezultate de la Concursul Cangurul.

În general

O repartiție normală este aceea în care poligonul efectivelor prezintă un aspect de clopot simetric în raport cu media.

Într-o repartiție normală (sau apropiată de aceasta), valorile cuprinse între $\bar{x} - \sigma$ și $\bar{x} + \sigma$ reprezintă aproximativ 68% din efectivul total, valorile cuprinse între $\bar{x} - 2\sigma$ și $\bar{x} + 2\sigma$ reprezintă aproape 95% din efectiv, iar cele cuprinse între $\bar{x} - 3\sigma$ și $\bar{x} + 3\sigma$ reprezintă circa 99% din efectiv.



11 Trasează poligonul frecvențelor pentru punctajele la cele 100 de lucrări de la concurs și compară-l cu desenul alăturat.

În concluzie: punctajele obținute la concursul „Cangurul“ nu respectă repartiția normală. Este de presupus că unele note au fost influențate de factori externi, sau că, datorită numărului relativ unic de lucrări luate în discuție, nu putem formula concluzii pertinente.

⚠ Repartiția normală este de așteptat să apară doar la seriile statistice cu un număr mare de date.

◆ O aplicație a repartiției normale: controlul de calitate

O fabrică de conserve utilizează cutii de tablă care sunt umplute automat. Pentru a corespunde standardelor, masa după umplere a unei cutii trebuie să fie cuprinsă între 190 g și 210 g. Aparatul funcționează corect dacă dintr-un lot de conserve umplute avem $190 \leq \bar{x} \leq 210$ g, $\sigma \leq 10$ g și proporția de conserve din afara intervalului $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma]$ nu depășește 30%.

Pentru a preciza dacă aparatul a funcționat corespunzător pentru lotul de 50 de conserve, a căror masă de după umplere este redată mai jos, calculăm dispersia și verificăm repartiția.



190, 185, 192, 184, 186, 194, 197, 195, 201, 203,
215, 207, 219, 218, 220, 181, 183, 185, 187, 189,
199, 197, 195, 193, 191, 209, 201, 207, 203, 205,
219, 211, 207, 213, 215, 186, 188, 182, 192, 194,
196, 198, 200, 202, 204, 206, 208, 210, 212, 214.

Folosind un calculator de buzunar, putem calcula rapid:

$$\bar{x} = 199,76$$

$$\sigma = 10,99$$

$$[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma] = [188,76; 210,75].$$

În afara acestui interval sunt 32% dintre date.

De aceea, putem spune că aparatul nu funcționează corect.

Exerciții și probleme

1. Tabelul de mai jos a fost extras dintr-un studiu statistic privind transportul zilnic către locul de muncă.

Durata medie a transportului	15	45	75	105	135	165	95
Efectiv	175	392	267	127	168	120	63

Calculează media ponderată. Ce semnificație are aceasta?

2. Tabelul care urmează este extras din același studiu de mai sus, dar lipsesc câteva informații.

a) Explică, folosind limbajul statisticii, semnificația tabelului.

b) Calculează și completează datele care lipsesc.

c) Reprezintă poligonul frecvențelor cumulate crescător și poligonul frecvențelor cumulate descrescător.

d) Calculează media și dispersia seriei statistice.

e) Formulează câteva concluzii ale studiului.

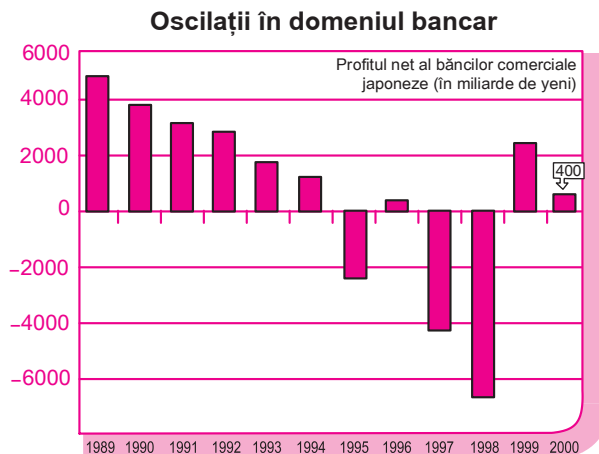
Timpu alocat transportului este mai mic de:	0	30	60	90	120	150	180	210
Frecvența	0	175		834	961	1129	1299	
Frecvența cumulată în procente	0%	13%	43%			86%		100%

3. Regulamentul unui concurs de tir cu arcul prevede că, din cele 10 încercări la care are dreptul un concurent, se elimină cel mai bun și cel mai slab dintre punctajele obținute și se face media pentru restul punctajelor. (Dacă punctajul cel mai bun al unui sportiv a fost obținut, de exemplu, la patru încercări, acest punctaj se elimină o singură dată). Care dintre cei doi concurenți a câștigat?

Robin	8	10	6	9	10	2	4	7	8	5
Radu	6	9	10	1	2	5	7	8	8	3

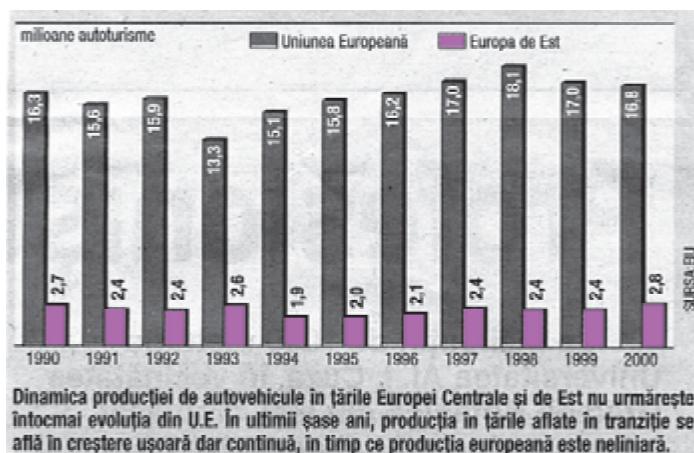
4. Observă diagrama alăturată, care reprezintă oscilația profitului net al băncilor comerciale japoneze în perioada 1989-2000. Răspunde la întrebările următoare aproximând valorile pe baza graficului.

- Cu cât a scăzut profitul băncilor nipone în 1995 față de 1989? Dar față de 1992? Dar față de 1994?
- Comentează evoluția profitului: în 1997 față de 1994; în 1998 față de 1989; în 1998 față de 1997; în 2000 față de 1999; în 2000 față de 1998.
- Care este media profitului în perioada 1989-1994? Dar în perioada 1995-2000? Dar în întreaga perioadă 1989-2000? Poți exprima printr-o formulă legătura dintre cele trei medii?
- Determină mediana pentru fiecare dintre cele trei perioade considerate mai sus.
- Determină dispersia profitului în perioada 1989-2000.

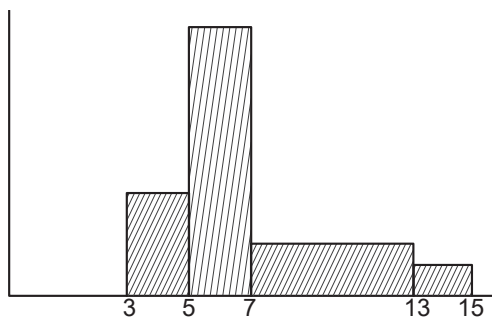


5. Diagrama alăturată indică dinamica producției de autovehicule în țările europene, între 1990 și 2000

- Calculează media producției auto în țările din U.E. în perioada 1990-2000.
- Calculează media producției auto în țările Europei Centrale și de Est în perioada 1990-2000.
- Reprezintă poligonul frecvențelor în cele două cazuri. Marchează pe grafice mediana fiecărei serii.
- Determină abaterea medie în fiecare caz.



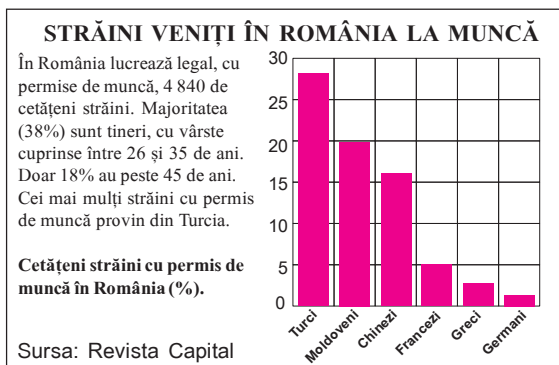
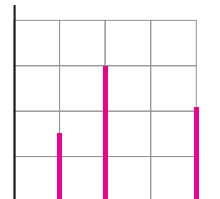
6. Determină media datelor reprezentate în histograma de mai jos.



8. O revistă de profil a publicat diagrama cu bare alăturată, care se referă la cetățenii străini veniți la muncă în România.

- Pentru fiecare dintre categoriile prezentate, aproximează numărul de persoane aflate la muncă în România.
- Calculează abaterea medie pătratică a datelor prezentate.

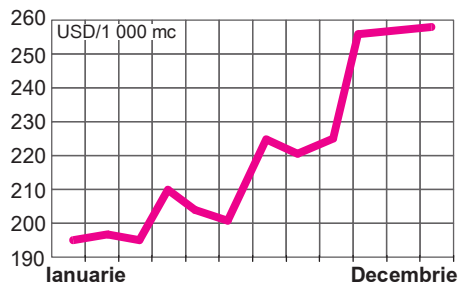
7. Datele unui studiu statistic sunt reprezentate în diagrama cu bare de mai jos. Reprezintă pe o diagramă separată valoarea medie și efectivul cumulat al acestor date.



9. Aproximează prețul a 1000 m³ de gaze naturale, în România, pentru fiecare lună a anului 2005, folosind graficul alăturat. Calculează apoi prețul mediu pe întregul an.

(Sursa: ANRGN)

EVOLUȚIA PREȚULUI MEDIU AL GAZELOR DE IMPORT ÎN ANUL 2005 ÎN ROMÂNIA



Am reușit...?!?

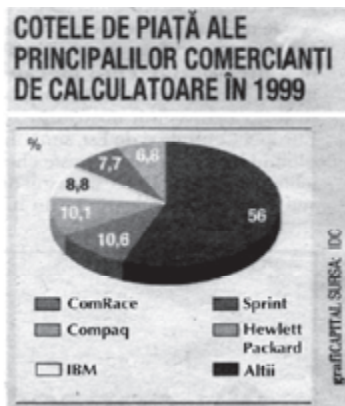
Prin parcurgerea acestei unități de învățare, am reușit...

- ◆ să reprezint datele unui studiu în diverse moduri
- ◆ să interpretez date, organizate în diferite moduri
- ◆ să utilizez formule în scopul corelării datelor
- ◆ să transpun în limbaj statistic probleme practice
- ◆ să estimez comportarea unui sistem, cunoscând câteva valori particulare?

Teste de verificare

Testul 1

1. Reprezintă datele din diagrama circulară alăturată sub forma unui grafic cu bare.



2. Companiile de transport menționate mai jos au tarife diferite. Cu care dintre ele este convenabil să se facă deplasarea pe o distanță de 5 km, astfel încât costurile să fie minime?

Companie	Taxa de pornire (RON)	Taxa pe kilometru parcurs (RON)
MICRO	1,3	1,2
MACRO	1	1,3
MEGA	0,4	1,9
MANO	0,5	1,7

3. O anchetă statistică a analizat timpul pe care îl consumă pentru transportul zilnic cei 1 312 angajați ai unei întreprinderi. Rezultatele au fost grupate în clase cu amplitudine de 30 minute ca în tabloul de distribuție alăturat.

Determină media și dispersia acestei repartiții.

Clasa	[0, 30)	[30, 60)	[60, 90)	[90, 120)	[120, 150)	[150, 180)	[180, 210)
Efectiv	175	392	267	127	168	120	63

4. La un cabinet medical au fost înregistrate înălțimile unui grup de copii și apoi sintetizate într-un tabel:

Înălțime	Număr de copii
între 80 și 90 cm	4
între 90 și 95 cm	16
între 95 și 100 cm	21
între 100 și 105 cm	17
între 105 și 110 cm	14
între 110 și 120 cm	3

- a) Care este înălțimea medie în acest grup de copii?
 b) Ce procentaj de copii au înălțimea cuprinsă între 90 și 110 cm?
5. Estimează categoriile de vârste ale copiilor cuprinși în eșantionul descris în problema 4. Argumentează estimarea făcută.

Testul 2

1. Tabelul de mai jos, indică numărul de turiști străini în câteva dintre cele mai vizitate țări din lume în anii 2000 și 2001.

	Franța	Spania	SUA	Italia	China
2000	75,6	47,9	50,9	41,2	31,2
2001	76,5	49,5	44,5	39,1	33,2

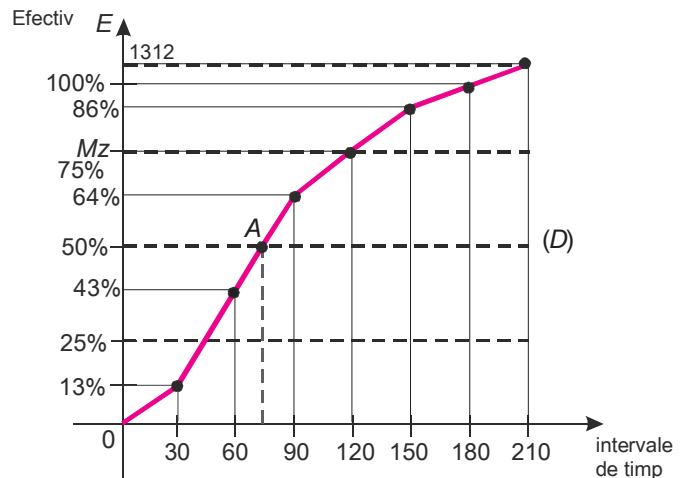
Reprezintă aceste date printr-un grafic cu bare duble.

2. Datele ilustrate alături sunt extrase dintr-un studiu privind timpul necesar pentru transportul de acasă la locul de muncă.

Linia poligonală reprezintă graficul efectivelor cumulate crescător.

Observă datele și răspunde la întrebări:

- Ce reprezintă punctul A? Ce semnificație au abscisa și ordonata acestui punct?
- Ce reprezintă dreapta D?
- Ce reprezintă punctele care se află pe grafic deasupra lui D?
- Ce reprezintă punctele care se află pe grafic sub D?



3. Pentru situația prezentată în tabelul alăturat, calculează media, mediana și abaterea medie pătratică, în două situații:

- considerând inclusiv capitala;
- excluzând capitala.

4. O piesă de formă paralelipipedică din componența unui angrenaj trebuie să aibă dimensiunile L , l și h astfel încât

$8 \text{ cm} \leq L \leq 8,1 \text{ cm}$, $3,5 \text{ cm} \leq l \leq 3,6 \text{ cm}$, $4,9 \text{ cm} \leq h \leq 5 \text{ cm}$. Un lot de piese este acceptat dacă abaterile la 20 de piese nu depășesc 10%. Lotul cu dimensiunile de mai jos va fi sau nu acceptat?

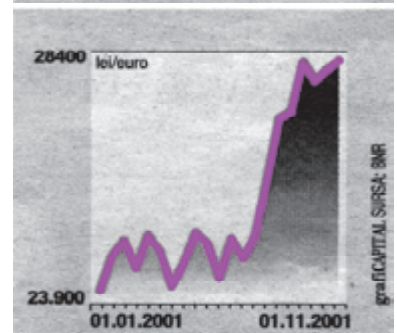
$8 \times 3 \times 5$; $7,9 \times 3,6 \times 5$; $8,1 \times 3,5 \times 4,9$; $8 \times 3,5 \times 5$;
 $8 \times 3,6 \times 5$; $8,009 \times 3,6 \times 4,99$; $8,01 \times 3,62 \times 4,92$;
 $8 \times 3,56 \times 4,9$; $8 \times 3,558 \times 4,99$; $7,999 \times 3,5 \times 5$;
 $8,11 \times 3,5 \times 5$; $8,12 \times 3,6 \times 4,9$; $8 \times 3,5 \times 4,995$;
 $8,12 \times 3,5 \times 5$; $8,1 \times 3,6 \times 4,9$; $8 \times 3,55 \times 4,93$;
 $8,1 \times 3,51 \times 4,91$; $8 \times 3,5 \times 4,9$; $8 \times 3,6 \times 5$; $8 \times 3,51 \times 4,99$.

5. Graficul alăturat redă evoluția Euro în perioada 01.01.2001-01.11.2001. Determină cu aproximație valorile Euro în lunile martie și septembrie 2001. Estimează valorile Euro din ianuarie 2002.

COMPANII IT ÎNMATRICULATE ÎN 2001

Judet	Productie hard	Dezvoltare soft
București	43	523
Cluj	4	50
Brașov	0	42
Timis	2	40
Iasi	3	27
Mures	2	17
Sibiu	0	17
Maramures	2	15
Dolj	2	18
Hunedoara	2	14
Total pe țară	85	621

CURSUL EURO



Unitatea de învățare 5

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând problemele următoare îți vei aminti noțiuni necesare parcurgerii acestei unități:

Calcul numeric

1. Calculează:

- a) $2 + 3 \cdot (-4)$
- b) $(2 + 3 + 4) \cdot 3$
- c) $2,75 + 1,29$
- d) $4,81 - 1,99$

- e) $(3,47 + 1,22) : 3$
- f) $2,51 - 0,2 \cdot 4,7$
- g) $15,2 : 0,25$
- h) $11,4 + 11,4 \cdot 9$

Exponențiale și logaritmi

2. Determină:

- a) $(-2)^3$
- b) 5^2
- c) $\log_3 9$
- d) $\log_2 0,5$

- e) $\log_5 \sqrt[3]{5}$
- f) $\lg 100$
- g) 10^{-5}
- h) $\lg(0,1)$

3. Scrie într-o formă mai simplă:

- a) $2^5 \cdot 2^7$
- b) $(-5)^2 \cdot (-5)^4$
- c) $\log_2 7 + \log_2 10$
- d) $\lg 2 + \lg 5$

Calcul procentual

4. Calculează:

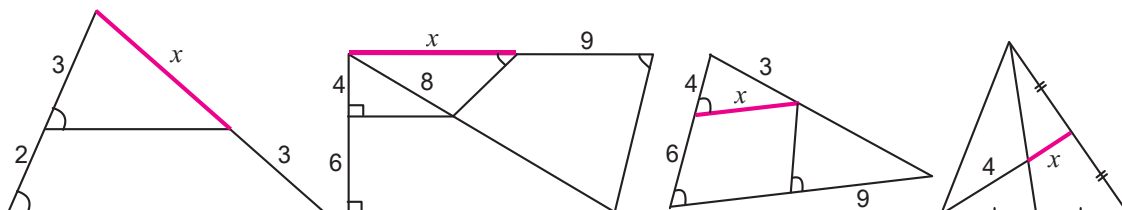
- a) 20% din 180 m
- b) 15% din 100 kg
- c) 6% din 10% din 100 tone
- d) 75% din 25% dintr-un kl.

5. Precizează:

- a) Care este diferența de preț la o scumpire cu 20% a unui produs care costa 54 lei?
- b) Cât la sută reprezintă 60 m din 300 m?
- c) Cu ce procent s-a micșorat costul unui obiect al cărui preț s-a înjumătățit?
- d) Ce preț are un fular care costa 10 lei, și a fost scumpit cu 10%, apoi ieftinit cu același procent?

Proprietăți geometrice

6. Determină lungimile marcate cu x pe figurile următoare:



Studii de caz în statistică

Studii statistice

Ne amintim și explorăm!

◆ Sondaje statistice

În evaluările statistice, este nevoie ca specialiștii să dispună de date cât mai relevante.

Pentru actualizarea datelor se fac periodic sondaje statistice. În acest caz, deși procesul de culegere a datelor nu implică întreaga populație, datele obținute sunt suficiente pentru conturarea unor politici de perspectivă.

Sondajele se aplică de obicei unui eșantion format din aproximativ 1 000 de persoane. Pentru a putea extinde rezultatele la întreaga populație, specialiștii stabilesc un eșantion național reprezentativ, asupra căruia sunt aplicate instrumentele de analiză (chestionare, discuții organizate pe grupuri, interviuri). Stabilirea eșantionului reprezentativ se face în funcție de criterii precum: vârstă, sex, nivel de pregătire profesională, zonă geografică, mediu social, mediu familial, nivel de cultură etc.

Pe baza datelor obținute de la un eșantion național reprezentativ se pot estima răspunsurile ce ar putea să fie date de întreaga populație.

Exemplu

În cadrul unui sondaj de opinie au fost adresate persoanelor intervievate trei întrebări și anume:

- Obișnuiți să citiți reviste?
- Cât de des obișnuiți să vă uitați la televizor?
- Atunci când vă uitați la televizor, ce gen de programe obișnuiți să urmăriți?

Rezultatele sondajului, așa cum au fost prezentate într-o revistă de specialitate, sunt cele de mai jos:

a)

Nu – 46,8%	Da – 53,2%
------------	------------

b)

Cât de des vă uitați la televizor?	Nr. răspunsuri
Mai rar de o dată pe săptămână	9
O dată pe săptămână	13
De 2-3 ori pe săptămână	37
De 4-6 ori pe săptămână	20
O dată pe zi	472
De 2-3 ori pe zi	352
Mai des de 3 ori pe zi	257
Nu mă uit la televizor	40

Baza: 1 200 de persoane

▲ În matematică, estimarea comportării unei funcții pentru care nu se cunosc decât câteva valori particulare se numește extrapolare.

❶ Caută în ziare rezultatele unui sondaj de opinie. Ce temă are acesta? Ce întrebări au fost adresate? Cum au fost prezentate rezultatele?

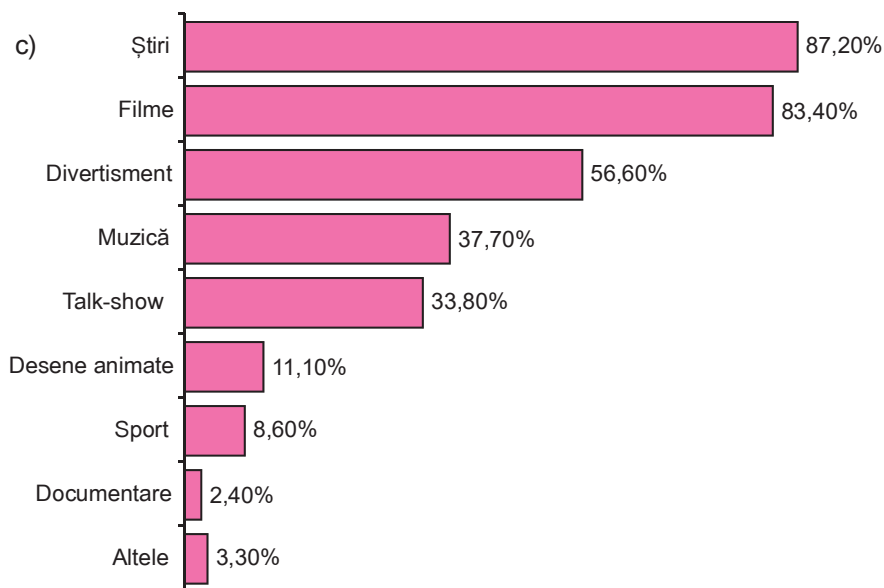
❷ Folosește datele sondajului prezentat pentru a răspunde!

– Câte persoane dintre cele intervievate au declarat că nu citesc reviste?

– De ce baza de calcul la întrebarea c) diferă de cea de la restul de întrebări?

– Câte persoane (dintr-un total estimat de 16 milioane care s-ar putea uita la televizor) preferă emisiunile de sport? Câte persoane nu se uită la televizor?

④ Adresează aceleași întrebări colegilor de clasă și prietenilor și compară rezultatele obținute cu cele ale sondajului. De ce crezi că apar diferențe între aceste rezultate?



Baza: 1 160 de persoane

◆ Cum se utilizează datele statistice?

Rezultatele sondajelor dau informații asupra tendințelor ce apar în viața socială sau economică. În acest fel, pot fi luate din timp măsurile ce se consideră a fi necesare.

Exemplul 1

O revistă de specialitate a publicat rezultatele unor sondaje comparative, efectuate în luna ianuarie a anilor 2001 și 2002, privind gradul de pătrundere a tehnologiei informației în România.

Sondajul a avut în vedere câteva variabile, ce sunt prezentate în tabelul alăturat. Putem compara variația de la un an la altul examinând diferența sau raportul.

IT&C ÎN ROMÂNIA (LA 1.000 LOCUITORI)		
	2001	2002
Adrese Internet	1,2	2
Utilizatori Internet	33	64
Computere	39	45
Linii telefonice	180	187
Telefoane mobile	162	195

SURSA: ROLAND BERGER

Astfel:

- în 2002, numărul de posesori ai unui telefon mobil a crescut cu 726 000 față de 2001;
- numărul de deținători de computere a crescut în 2002 cu 15,4% față de 2001;
- utilizatorii de Internet au fost de aproape două ori mai mulți în 2002 față de 2001.

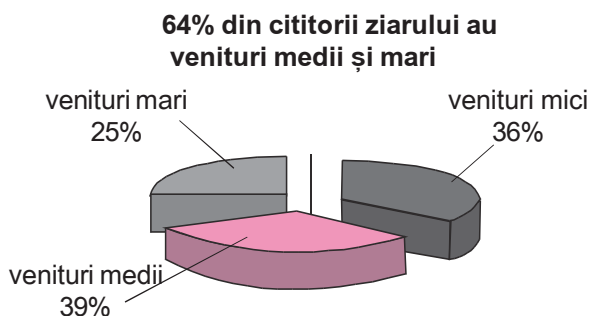
Interesul crescut al populației față de aceste domenii a determinat, în planul politicilor sociale și economice:

- alocarea de fonduri pentru achiziționarea a 500 000 de calculatoare pentru unitățile școlare;
- introducerea orelor de educație tehnologică și de informatică în școlile generale și în licee;
- încurajarea specializărilor universitare în domeniul tehnologiei informației;
- diminuarea impozitului pe venit pentru specialiștii din informatică.

Exemplul 2

Un ziar a inițiat un studiu privind profilul-tip al cititorilor săi; studiul este necesar pentru orientarea materialelor publicate în ziar în direcția interesului cititorilor.

Una dintre întrebările studiului s-a referit la veniturile cititorilor ziarului, prin încadrarea în una dintre categoriile: venituri mici, venituri medii și venituri mari. Rezultatele sondajului, exprimate în procente, au fost publicate într-o revistă de specialitate și sunt cele prezentate în figura alăturată.



Redacția ziarului a hotărât să se orienteze spre categoriile sociale cu venituri medii și mari, publicând periodic informații despre:

- oportunități de afaceri;
- activitate bancară;
- politici economice;
- bursa locurilor de muncă.

Exerciții și probleme

Întrebările 1-4 se referă la rezultatele sondajului de opinie referitor la viziunea programelor TV, prezentate în paginile anterioare. Folosește aceste date pentru a răspunde la următoarele întrebări:

1. Cu cât este mai mic numărul celor care se uită la televizor o dată pe zi față de numărul celor care se uită de 2-6 ori pe săptămână?
2. Ce procent din numărul total de respondenți reprezintă numărul celor care se uită la televizor:
 - a) mai rar de o dată pe săptămână;
 - b) o dată pe zi;
 - c) de 4-6 ori pe săptămână;
 - d) de 2-3 ori pe zi?
3. Care este raportul dintre numărul celor care urmăresc:
 - a) programele de știri și programele de muzică;
 - b) filme și desene animate;
 - c) sport și documentare?

4. *Informează-te și alcătuiește un scurt referat!*

Ce alte programe de interes național sau local au ca sursă de plecare studii care evidențiază expansiunea tehnologiei informației și a comunicațiilor?

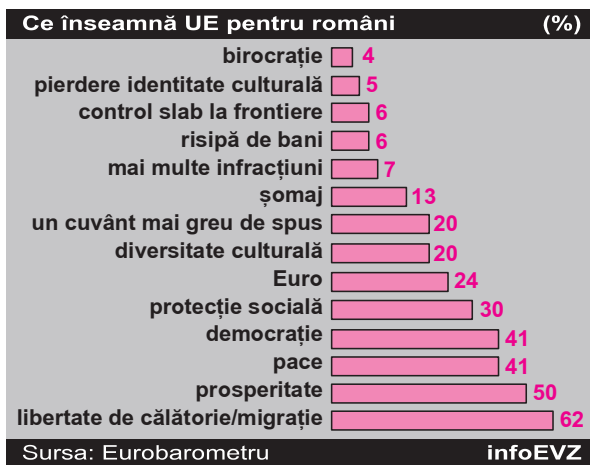
5. *Ce informații crezi că ar interesa categoriile sociale cu venituri mici?*

Dacă ai fi directorul / directoarea unui ziar orientat spre aceste categorii sociale, ce rubrici ai propune?

4. De câte ori este mai mare numărul celor care urmăresc programele de divertisment față de numărul celor care urmăresc talk-show-uri?
5. Comentează informațiile sugerate de reprezentarea grafică alăturată.

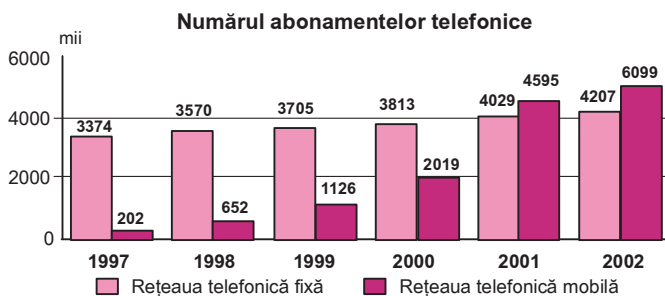


6. Rezultatele unui studiu statistic din 2006, referitor la percepția românilor privitoare la Uniunea Europeană, sunt prezentate sintetic în diagrama alăturată.



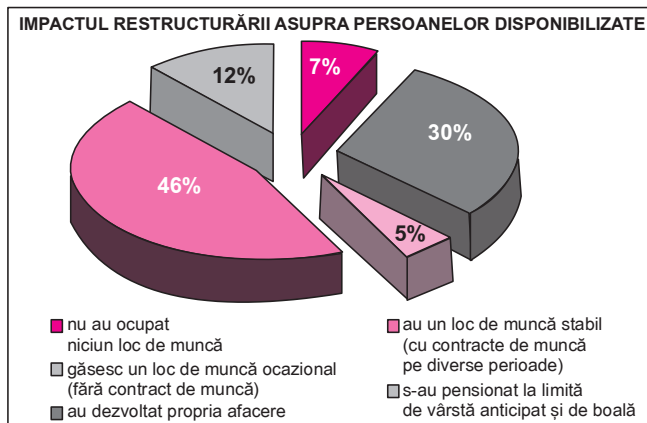
- a) Într-un eseu de maxim două pagini, compară rezultatele acestui sondaj cu propriile așteptări privind integrarea României în UE.
- b) La sondaj au participat 1200 de respondenți. Calculează câți respondenți au bifat fiecare item în parte.
- c) În diagramă, apar percepții optimiste și percepții pesimiste. Realizează o diagramă circulară în care aceste tipuri (mai bine/mai rău) apar grupate.

7. Într-o revistă de specialitate a apărut graficul cu bare de mai jos, referitor la evoluția numărului abonaților telefonice în 1997 și 2002.



- a) Caracterizează procentual evoluția numărului de abonamente la telefonia fixă, respectiv la telefonia mobilă.
- b) Folosește datele pentru a estima numărul abonaților la telefonia mobilă în 2008, dacă piața își păstrează aceeași tendință.
- c) Să presupunem că ești președintele / președinta unei companii de telefonie mobilă. Ce politică de dezvoltare a companiei ai putea concepe pentru viitor, ținând cont de datele din reprezentarea de mai sus?

8. Diagrama din imaginea de mai jos se referă la persoanele disponibilizate în perioada 1995-2005 din industria de prelucrare a metalelor neferoase.
- a) Reprezintă aceleași informații printr-o diagramă cu bare.
- b) Comentează distribuția frecvențelor diverselor categorii de personal disponibilizate.



Sursa: Săptămâna financiară



Analizăm și înțelegem!

◆ Modalități de comparare a datelor

Compararea datelor unor studii statistice se poate face în diverse feluri.

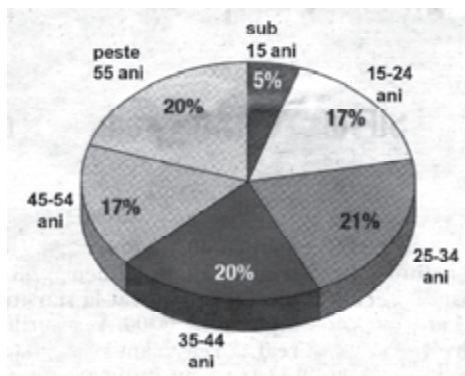
Uneori, pentru a reda sugestiv această comparare, este mai puțin importantă fiecare valoare în parte, în schimb are semnificație *media* valorilor.

În numeroase situații, media dă o imagine pertinentă a ordinului de mărime al unei serii statistice.

Să analizăm!

Pentru a orienta mai bine specificul publicației, conducerea unui ziar este interesată de vârsta medie a cititorilor săi. Directorul general al ziarului cunoaște numărul zilnic de cititori și localitățile în care se distribuie cele mai multe exemplare. El a pus aceste date la dispoziția unui institut specializat și a solicitat efectuarea unui sondaj pe un eșantion reprezentativ de cititori. Rezultatele sondajului sunt cele prezentate în diagrama circulară alăturată, în care se consideră că grupa de vârstă „sub 14 ani” are ca limită inferioară vârsta de 6 ani, iar grupa de vârstă „peste 55 ani” are ca limită superioară vârsta de 85 de ani (în afara intervalului de vârstă [6; 85], procentul de cititori fiind practic neglijabil).

58% din cititorii ziarului au vârsta cuprinsă între 15 și 44 de ani.



Studiul nu precizează distribuția efectivelor în interiorul claselor statistice luate în calcul. Pentru a estima totuși vârsta medie a cititorilor ziarului, se face ipoteza că în fiecare clasă statistică cititorii sunt distribuți uniform. În acest fel, media de vârstă a cititorilor ce se înscriu într-o clasă statistică este considerată ca fiind mijlocul intervalului ce determină clasa statistică respectivă.

Ipoteza făcută transformă datele cu caracter continuu ale studiului în următoarele date cu caracter discret:

Vârsta	10 ani	20 ani	30 ani	40 ani	50 ani	70 ani
Frecvența	5%	17%	21%	20%	17%	20%

Se obține în acest mod că media de vârstă a cititorilor ziarului este de (aproximativ) 40 de ani și 8 luni.

Exemplu: Managementul publicitar

Un ziar de publicitate, care se distribuie gratuit, trebuie să își atragă clienții pentru a nu fi tipărit în pierdere economică. De aceea, ziarul acordă facilități fiscale diverse (de exemplu, un anunț gratuit pentru alte 5 anunțuri plătite). Pentru a identifica ce alte facilități ar putea acorda, directorul ziarului are nevoie să definească „anunțul mediu”, din punctul de vedere al rândurilor conținute. El este hotărât ca, pentru anunțuri mai mari decât anunțul mediu, să stabilească o taxă mai mare prin comparație cu anunțurile mai scurte. În acest fel, un număr mai mare de oferte vor fi tipărite în fiecare număr al ziarului.

Pentru ultimele publicații s-a înregistrat următoarea situație:

⚠ Cuvântul „*medie*” este adesea utilizat într-un sens diferit de cel strict cantitativ din statistică. El este sinonim cu „reprezentativ”, „uzual”, „normal”. De exemplu, cititorul mediu al revistei de automobilism este un bărbat de circa 45 de ani, sportiv, pasionat de curse și posesor de automobil.

⚠ Pentru unele serii statistice, media nu are nici o semnificație. Aceasta a generat și numeroase glume pe seama statisticii. De exemplu: „A.B. nu știa să înoate și s-a înecat într-un râu cu adâncimea medie de 30 cm. De ce? Era statician.”

❶ Verifică dacă informația menționată deasupra diagramei circulare alăturate este în concordanță cu datele de pe diagramă.

❷ Verifică toate calculele făcute pentru a determina media de vârstă a cititorilor ziarului, pe baza datelor din tabelul de frecvențe.

Nr. de rânduri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. de anunțuri	15	27	81	96	72	51	42	18	3	1

Media pentru numărul de rânduri ocupate de anunțurile publicate este de 4,5. Având în vedere aceste calcule, redacția ziarului a fixat pentru patru apariții tarifele:

Nr. de rânduri	1 – 2	3 – 4	5 – 6	7 – 8	9 – 10
Preț (RON)	4	6	10	15	22

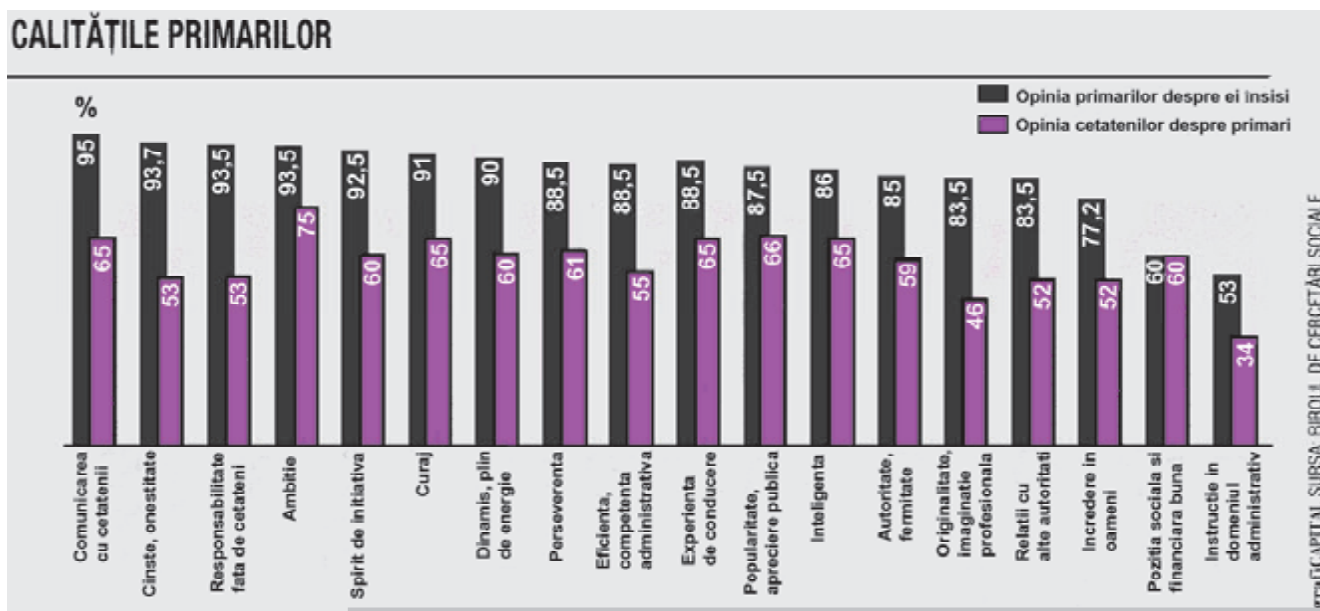
3 Calculează media numărului de rânduri ale anunțurilor publicitare, pe baza datelor din tabel.

4 Informează-te și răspunde! Care sunt tarifele pentru anunțuri la ziar? Care crezi că au fost criteriile pentru fixarea acestor tarife?

Să aplicăm!

În urma aplicării unor chestionare și a reprezentării grafice a datelor obținute, avem suficiente informații pentru a putea formula concluzii diverse. Această etapă de prelucrare a datelor statistice se dovedește a fi cea mai importantă din perspectiva utilității studiului.

Informațiile reprezentate mai jos au fost obținute în urma studiului „Atitudini și valori în administrația publică locală.”



5 Menționează populația statistică și eșantionul utilizate în acest studiu.

6 Ce variabile au fost folosite?

7 Completează un tabel în care notezi numărul de persoane din eșantion care au răspuns conform înregistrărilor din grafic.

8 Transpune în câte o diagramă circulară răspunsurile referitoare la spiritul de inițiativă.

9 Alcătuieste un eseu în care să valorifici informațiile obținute din acest studiu. Stabilește un titlu cât mai interesant pentru acest eseu.

Prima etapă a studiului s-a bazat pe un sondaj de opinie în rândul cetățenilor, care a cuprins 1.372 de subiecți, selectați din 104 localități urbane și rurale din 38 de județe. A doua etapă a constat dintr-un sondaj de opinie în rândul a 563 de reprezentanți ai autorităților publice locale. Ei provin din 120 de localități urbane și rurale din toate județele țării.

Pe baza datelor obținute putem formula următoarele concluzii:

1) În general, primarii au o altă percepție asupra calităților de care dau dovadă, față de percepția cetățenilor. De exemplu, 95% dintre primari cred că au o bună comunicare cu cetățenii, în timp ce doar 65% dintre cetățeni cred despre primarii lor acest lucru.

2) Atât primarii, cât și cetățenii, consideră că nu este nevoie ca reprezentanții lor să fie instruiți în domeniul administrativ.

Alte concluzii se pot formula răspunzând la următoarele întrebări:

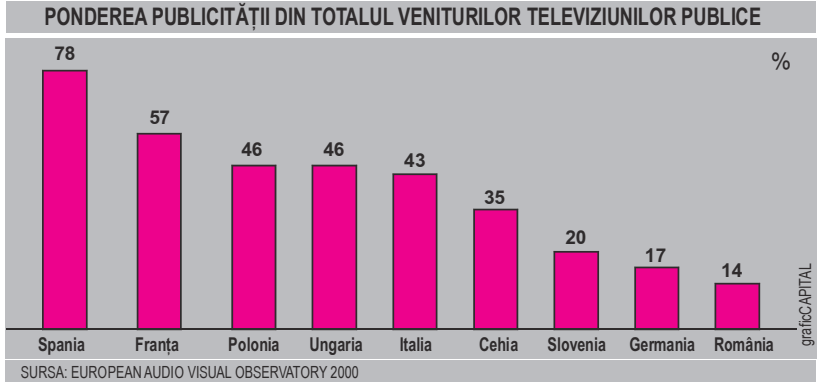
În ce domeniu opiniile autorităților și ale cetățenilor coincid?

În ce domeniu opiniile autorităților și ale cetățenilor sunt cele mai distanțate?

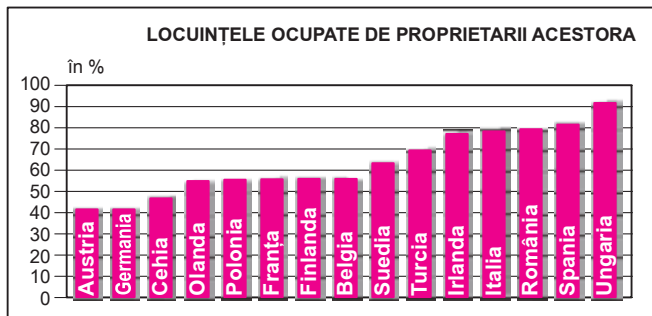
Care dintre calitățile primarilor este cea mai apreciată de către cetățeni? Dar de către primari?

Exerciții și probleme

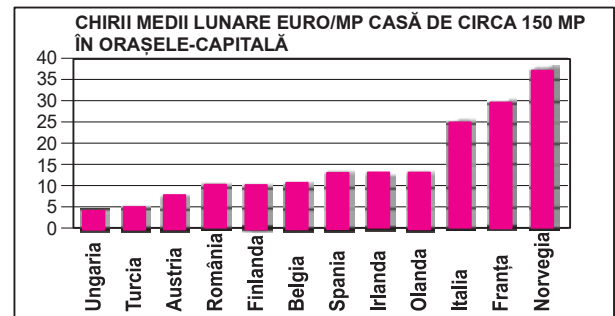
1. În ultima vreme se discută insistent despre ideea ca televiziunea publică să nu mai obțină venituri din publicitate. Pentru informarea opiniei publice despre acest subiect, un ziar a publicat studiul alăturat.
- a) De câte ori este mai mare ponderea publicității la televiziunea din Italia, față de televiziunea din România?
- b) Sunt egale veniturile obținute din publicitate la televiziunile din Polonia și Ungaria?



2. În unul dintre ziarele cu profil financiar a apărut un studiu statistic privind piața imobiliară în câteva țări europene. Două dintre reprezentările comparative ale studiului apar și în imaginile de mai jos.



Sursa: Revista Capital

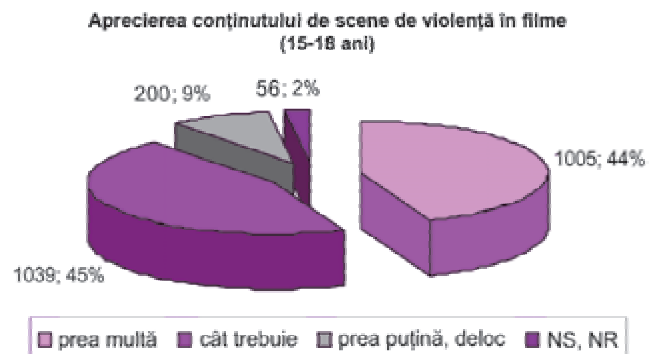
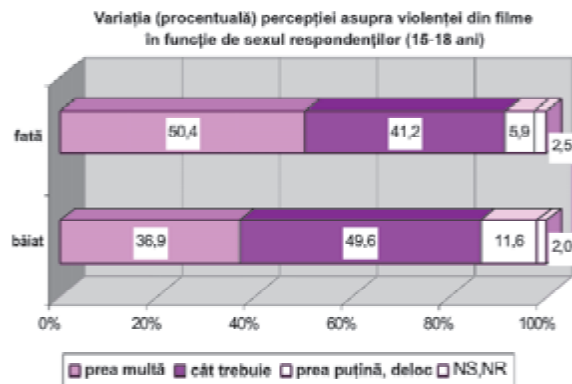


Sursa: Revista Capital

- a) Calculează prețul mediu al unui apartament de 150 mp în capitalele țărilor ce apar în studiul prezentat.
- b) Folosește diagramele pentru a reprezenta procentul de locuințe oferite spre închiriere, în țările analizate. Poți presupune că locuințele care nu sunt ocupate de proprietarii acestora, sunt oferite spre închiriere.
- c) Corelează cele două diagrame și formulează două explicații ale prețurilor practicate.
3. Un studiu comandat de CNA (Consiliul Național al Audiovizualului) a urmărit să determine imaginea pe care o au adolescenții în privința nivelului de violență din emisiunile de televiziune. Ca urmare a aplicării unui chestionar, pe un eșantion de 2300 de băieți și fete, cu vârste între 15 și 18 ani, s-au obținut datele reprezentate în diagrama cu bare de mai jos.

- a) Reprezintă prin diagrame circulare opinia fetelor, respectiv a băieților, privind violența în emisiunile film.

- b) Datele globale ale studiului au fost reprezentate în diagrama de mai jos. Corelează reprezentările și află câți băieți și câte fete au participat la acest studiu.



Sursa: www.cna.ro/cercetari/sondaje/curs_iul2005/c_med15_18iul2005.pdf.



Aplicăm și dezvoltăm!

Temele de statistică pot fi abordate prin intermediul proiectelor.

◆ Cum organizăm un proiect?

Proiectul începe în clasă, prin conturarea obiectivelor, formularea sarcinii de lucru și (dacă este cazul) precizarea echipei care îl realizează. În afara orelor de curs, dar sub îndrumarea profesorului, elevii stabilesc metodologiile de lucru, își definesc statutul și rolul în cadrul grupului și fixează termene pentru diferite etape ale proiectului. După colectarea datelor și organizarea materialului, proiectul se încheie în clasă, prin prezentarea rezultatelor.

1 *Informează-te și răspunde!*
Ce proiecte se derulează în liceul tău?

În realizarea unui proiect, este utilă parcurgerea următoarelor etape, în cadrul echipei de lucru.

1. Se stabilește o listă de întrebări esențiale, legate de tematica proiectului.
2. Se alcătuește un plan de acțiune, în care apar termene și responsabilități. Este important ca fiecare membru al echipei să respecte, pe cât posibil, acest plan.
3. Se lucrează cât mai mult împreună cu colegii din grupul de lucru. Dincolo de scopurile științifice, un proiect are și un scop social – ne simțim minunat când echipa noastră „merge bine”!
4. Membrii echipei de lucru se documentează cât mai amănunțit asupra problematicei propuse, cer sfaturi, consultă specialiști în domeniu.
5. Se prelucrează și se organizează datele. Proiectul trebuie să se concretizeze într-un produs finit.
6. Se prezintă rezultatele și concluziile proiectului într-un mod cât mai clar, dar care reflectă atât personalitatea, cât și creativitatea echipei.

◆ Ce teme de proiecte putem dezvolta la Statistică?

Exemplul 1: Compararea rezultatelor obținute de clase diferite la un același test

Poți dezvolta un proiect ce vizează compararea performanțelor școlare a două clase diferite.

Pentru aceasta, este necesar ca populația statistică să fie pusă în situația de a răspunde acelorași stimuli: testele date claselor să conțină aceleași subiecte (sau subiecte foarte asemănătoare), să fie aplicate în același timp și să fie corectate după același barem de punctaj.

După colectarea și reprezentarea datelor, este util să compari performanțele colegilor din cele două clase folosind media, mediana, abaterea medie pătratică. Analizează motivele diferențelor constatate și formulează concluzii.

Exemplul 2: Preferințele colegilor

O altă temă pentru proiect își poate propune să investigheze preferințele muzicale, sportive, de petrecere a timpului liber etc., ale colegilor.

Pentru aceasta este necesar:

- să decizi forma de interacțiune cu respondenții; aceasta poate fi un chestionar, un interviu individual sau un interviu de grup
- să colectezi datele
- să reprezinți datele culese în forme cât mai adecvate, pentru a obține maximum de informații pertinente
- să analizezi datele obținute, folosind indicatori de poziție și indicatori de dispersie
- să formulezi concluzii
- să prezinți sintetic și accesibil activitatea desfășurată și rezultatele obținute.

2 *Identifică situații în care compararea rezultatelor unor clase diferite este benefică pentru progresul colar al elevilor.*

◆ Cum proiectăm chestionarele?

În proiectarea unui chestionar, este necesar să ții cont de faptul că întrebările trebuie să fie clar formulate (adică să conțină toate atributele necesare pentru ca respondentul să înțeleagă bine cerința), să nu presupună ambiguități (adică sensul întrebării să fie univoc), să fie relativ scurte, vizând un singur aspect.

Se poate întâmpla ca întrebările la care te gândești să nu fie relevante sau de interes pentru populația statistică pe care o ai în vedere pentru proiect. De aceea, este util să aplici o formă preliminară a chestionarului pe câteva persoane, să prelucrezi răspunsurile primite și să reformulezi sau să completezi întrebările, astfel încât acestea să satisfacă mai bine scopul propus. De multe ori, pentru a elimina ambiguitățile unui chestionar, întrebările conțin variante posibile de răspuns.

Exemplu

În cadrul unui studiu statistic au fost adresate unor elevi de liceu câteva întrebări la care se poate răspunde prin marcarea unui semn distinctiv în spațiul corespunzător răspunsului ales. Trei dintre aceste întrebări au fost:

1) Care dintre materiile opționale din tabelul alăturat v-ar interesa mai mult?

Cultură și civilizație franceză	
Astronomie și astrologie	
Folclorul românesc	

2) Ce vârstă aveți?

15 ani	16 ani	17 ani	18 ani	19 ani	20 ani

3) Ce înălțime aveți?

sub 140 cm	între 140 și 160 cm	între 160 și 170 cm	între 170 și 180 cm	peste 180 cm

Cele trei întrebări sunt diferite nu doar prin conținutul lor, dar și prin natura răspunsurilor ce pot să apară. În primul caz, fiecare elev răspunde practic cu DA sau NU la câteva întrebări succesive de tipul: „Vă interesează Cultura și civilizația franceză?”. Răspunsurile la a doua întrebare se exprimă printr-un număr și poate lua doar câteva valori, în timp ce răspunsurile la a treia întrebare pot lua, în principiu, orice valoare dintr-un interval dat.

◆ Cum desfășurăm interviurile?

În desfășurarea interviurilor, este util să pornești de la un plan prestabilit privind conținutul întrebărilor, pe care să-l adaptezi pe parcurs în funcție de intervențiile interlocutorului/interlocutoarei.

Rezervă suficient timp pentru fiecare interviu și, mai ales, ai grijă să nu induci răspunsul pe care l-ai dori, din propria perspectivă! Pentru aceasta, formulează întrebări cât mai neutre și întreabă tot timpul „De ce?”. De asemenea, nu te grăbi să aprobi sau să dezaprobi răspunsurile primite, chiar dacă respondentul cere explicit confirmări asupra corectitudinii opiniilor sale. Poți îndemna interlocutorul să continue, întrebându-l: „Tu cum crezi că este corect?” sau „De ce crezi așa?”. Pentru a valorifica interviurile cât mai bine, este util să le înregistrezi audio și, ulterior, să le transcrii.

③ Notează într-un tabel oferta de opționale a liceului vostru. Întreabă colegii și completează un tabel cu opțiunile lor pentru clasa a XII-a. Care dintre opționale întrunesc cele mai multe „voturi”?

④ Proiectează un chestionar pentru un proiect cu tema: „Preferințele artistice ale tinerilor”. Compară întrebările propuse de tine cu colegul/colega de bancă.

Exerciții și probleme

1. Punctajele elevilor participanți la un concurs se distribuie crescător după cum urmează:

6; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 10; 11; 11; 12; 13; 13; 13; 14; 15; 15; 16

12 elevi mediana 12 elevi

- a) Calculează media punctajelor de la concurs.
b) Compară media cu mediana.
c) Reprezintă grafic datele din problemă.
2. Dezvoltă, împreună cu grupul tău de lucru, un proiect în care să investighezi ce tipuri de telefoane mobile și ce tip de abonament au colegii din clasele a XI-a. Compară seria statistică obținută cu o serie similară, realizată prin chestionarea colegilor de la clasele a XII-a.
3. Simulează desfășurarea unui interviu, în care se interesează percepția colegilor asupra utilității metodelor statistice. Identifică momentele în care interviul nu a decurs bine.
4. Dezvoltă, împreună cu grupul tău de lucru, un proiect de statistică. Alege una dintre temele următoare.
- a) Opțiunile colegilor de liceu pentru viitoarea profesie.
b) Variante de petrecere a timpului liber, preferate de colegii din liceu.
c) Modalitatea de transport și durata drumului de acasă până la școală.
d) Mărci de mașini preferate de colegii din liceu.
e) Tipul de lectură preferată de colegii din liceu.
f) Personalități din România – opțiuni ale adolescenților.
5. Formulează șase variante posibile de răspunsuri la întrebarea următoare, adresată respondenților în cadrul unui sondaj: „Care este principala problemă cu care se va confrunta România, în primii ani după aderarea la Uniunea Europeană?”
6. Urmărește mass-media și găsește datele unui sondaj de opinie. Formulează aprecieri critice asupra modului în care au fost formulate întrebările sondajului. Modifică eventual unele dintre întrebări și aplică același tip de chestionar colegilor tăi de liceu. Compară rezultatele sondajului, așa cum apar în mass-media, cu propriile rezultate.
7. Într-un ziar de profil a apărut un comentariu privind pseudo-sondajele de opinie.

„CELEBRIZAREA” MESAJULUI ȘI A CANALULUI

Există o rețetă consacrată de decenii de mass-media occidentală, dar folosită preponderent în zona presei tabloide sau glossy. Rețeta este simplă: o revistă –FHM, de exemplu, își întreabă cititorii care sunt cele mai sexy vedete pe care le știu, iar pe baza acestui „sondaj” realizează un clasament al respectivelor personalități mondene. Clasament care, coroborat cu autoritatea publicației în rândul revistelor internaționale pentru bărbați, devine știre în sine, transmisă pe multe alte canale de informare. Nu contează că, după două săptămâni, o altă revistă de profil va veni cu un alt astfel de clasament, contează că „FHM zice că vedeta cutare este cea mai tare”.

Totul pornește chiar de la conceptul de celebritate. Potrivit unor lucrări de specialitate, precum studiul „High Visibility”, ale experților media și marketing Irving Rein, Philip Kotler și Martin Stoller, o vedetă este acea persoană faimoasă într-o societate, care atrage atenția presei și a publicului și care se menține acolo prin activitate intensă în zona divertismentului de masă. Iar unul dintre cele mai facile mijloace de a realiza acest lucru este să fie inclusă în miile de „sondaje” și clasamente prin care instituțiile de presă, apelând la propriii consumatori, încearcă să-și mențină profilul pe piață.

Potrivit unui alt studiu, „Understanding Media: Inside Celebrity”, al expertului media Jessica Evans, aceste lucrări sunt vitale pentru clădirea statutului de celebritate.

Costin Ionescu

- a) Identifică în mass-media știri care se pot înscrie în direcția conturată de fragmentul reprodus mai sus.
b) Într-un eseu de 3 pagini, comentează critic concluziile la care a ajuns grupul tău de lucru, în desfășurarea unui proiect de statistică.

Am reușit...?!?

Prin parcurgerea acestei unități de învățare, am reușit...

- ◆ să identific metode de colectare și interpretare a datelor
- ◆ să interpretez date statistice cu ajutorul graficelor și al diagramelor
- ◆ să utilizez date statistice pentru analiza de caz
- ◆ să transpun în limbaj matematic, cu mijloace statistice, probleme practice
- ◆ să caracterizez situații reale prin interpretarea statistică a datelor?

Test de verificare

1. Precizează două modalități prin care poți afla cu aproximație ce cantitate de apă minerală se consumă lunar în orașul vostru.
2. La ediția I a manifestării „Educația adulților: Clopoțelul sună și pentru cei mari”, la care diverse firme au oferit oportunități de formare profesională, a fost adresată vizitatorilor întrebarea: „Ce cursuri dintre cele propuse vă interesează?”. Răspunsurile primite sunt cuprinse în tabelul de mai jos. Care dintre cursuri a întrunit cele mai multe opțiuni? Dar cele mai puține?

Ce cursuri vă interesează? (%)	Da	Nu
Despre om și societate	31,48	68,52
Medicină și educație	25,93	74,07
Tehnico-aplicative	5,56	94,44
Formare profesională continuă	40,74	59,26
Cultură și civilizație	27,78	72,22
Literatură și artă	16,67	83,33
Științe naturale	5,56	94,44
Matematică, fizică, chimie	3,70	96,30
Limbi străine	42,59	57,41
Informatică	22,22	77,78

3. La un Târg al locurilor de muncă, ofertanții au fost întrebați dacă au mai participat la astfel de manifestări și în trecut. Răspunsurile lor, exprimate procentual, au fost:
Da 40%
Nu 60%
Reprezintă printr-o diagramă circulară aceste date.

4. Un studiu al Ministerului Transporturilor prezintă situația întârzierilor la sosirea în Brașov a trenurilor de călători. Reprezintă printr-o histogramă aceste date:

Întârzieri	între 0 și 15 min.	între 15 și 45 min.	între 45 min. și 3 ore
Nr. trenuri	720	45	21

5. Să presupunem că ești director de publicitate al unei firme și că dispui de 25.000 de dolari, pe care vrei să îi investești în publicitatea prin televiziune. Într-un cotidian central citești următoarele date, obținute în urma unui sondaj de opinie efectuat de AGB Data Research.

Pentru reclame în timpul emisiunilor de știri, taxa la Antena 1 este de 4.500 \$ pe 30 secunde, iar la PROTV este de 6.000\$ pe 30 de secunde.

„Observatorul” de la Antena 1 are o contribuție importantă la mărirea audienței postului pe întreaga zi (cam 10%), în timp ce „Știrile” PROTV contribuie la audiența sa zilnică cu doar 8%.

În săptămâna 18-24 martie „Știrile” PROTV au câștigat bătălia. Au o medie de 12,5%, în timp ce „Observatorul” are doar 11,4%.

La care dintre cele două televiziuni este mai indicat să investești, pentru ca reclama firmei la care lucrezi să fie urmărită de cât mai multe persoane? Argumentează răspunsul!

Lectură

Primele înregistrări statistice se pare că au apărut simultan cu inventarea scrierii, în urmă cu peste 6 milenii, în Egipt și China, unde conducătorii erau interesați să cunoască numărul populației, al celor apti să lupte, al sclavilor, al cantității de produse agricole, pentru stabilirea nivelului birurilor. În statul roman, pe vremea republicii (440 î.e.n.) a fost creată funcția de cenzor (census), care avea atribuții și în efectuarea recensământului populației. Sunt cunoscute recensămintele efectuate în 28 î. Hr. 8 d. Hr. 14 d. Hr., în perioada lui Octavian Augustus.

În Dacia Romană au fost efectuate recensăminte, asemănătoare cu cele din restul imperiului, numite census provincial.

Parcurgând axa timpului, găsim rădăcini ale gândirii statistice încă în perioada renaștă. Astfel matematicianul L. Pacioli (1445-1514) încerca încă din 1494 să rezolve probleme statistice. Mai târziu G. Cardano (1501-1576) și N. Tartaglia (1499-1557) au atacat și ei aceleași probleme, având meritul de a atrage atenția asupra necesității unui instrument și a unei noi gândiri matematice pentru rezolvarea lor. În ultima parte a vieții, J. Bernoulli studia probleme de demografie prin prisma teoriei probabilităților.

Unitatea de învățare 6

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Calculează:

a) $2 + 3 \cdot 5 - 7 \cdot 2$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3$

c) $0,27 + 1,38$

d) $2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

e) $255 : 15$

f) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

g) $\frac{15}{8} \cdot \frac{10}{9}$

h) $2,7 + 3, (6)$

Ordinea efectuării operațiilor

2. Efectuează:

a) $(0,2 + 1,3 \cdot 5) \cdot 4$

b) $(4 - 6)^3$

c) $3 - (4 - 6)$

d) $24 : 8 - 3$

e) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot 5$

f) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{5}$

Rezolvări de ecuații

3. Rezolvă:

a) $x + 0,4 = 3,2$

b) $3x = -12$

c) $6x = 2$

d) $2x - 1 = 5x + 2$

e) $(x - 1)^2 = 4$

f) $1 + |x| = 3$

g) $(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 2(x + 3)$

h) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor

4. Transpune în limbaj matematic, apoi rezolvă problemele:

a) Suma a două numere este 36. Află numerele, dacă primul este cu 10 mai mare decât al doilea.

b) Diferența a două numere este 45. Află numerele, dacă primul este de 10 ori mai mare decât al doilea.

c) În două depozite sunt 480 t de cartofi. Dacă s-ar muta 40 t din primul depozit în cel de-al doilea, cantitățile aflate în cele două depozite ar fi egale. Ce cantitate de cartofi este în fiecare depozit?

d) Cât este latura unui pătrat dacă, mărinnd această latură cu 2 m, aria se mărește cu 20 m²?

Elemente de logică

5. Transpune în limbajul logicii matematice, apoi identifică propozițiile adevărate.

a) Nu este adevărat că Liviu Rebreanu nu este autorul romanului *Ion*.

b) Dacă fiecare elev de liceu a fost declarat admis la examenul de capacitate, atunci Sorin, care nu a fost declarat admis la acest examen, nu poate fi elev la liceu.

c) Dacă orice om care se scoală dimineața devreme este grăbit, atunci domnul Popescu, care nu se scoală dimineața devreme, nu este grăbit.

Grafuri – noțiuni de bază

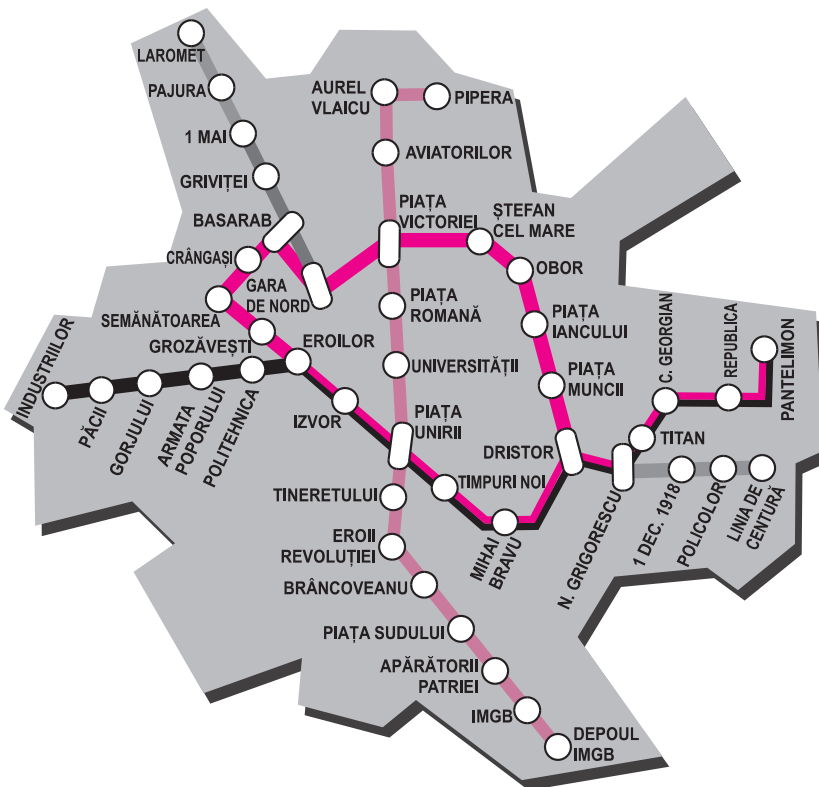
Reprezentări schematice ale unor rețele

Ne amintim și explorăm!

Reprezentările schematice apar frecvent în viața cotidiană.

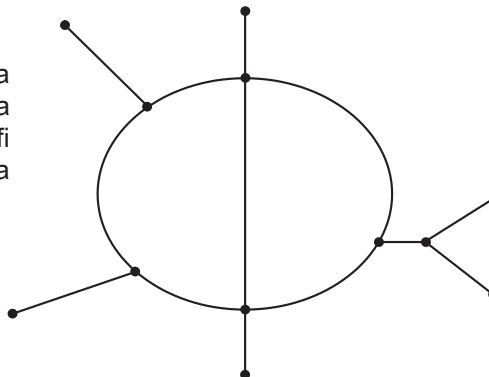
Exemplul 1: Harta metroului

În imaginea de mai jos este reprezentată harta rețelei de metrou din București (în exploatare sau doar în construcție). Aceasta este numai o reprezentare schematică, ce nu prezintă la scară distanțele dintre stații. Totuși, harta este suficientă pentru a ne orienta în călătoria cu metroul.



De exemplu, dacă un călător aflat în Gara de Nord vrea să ajungă în Piața Sudului, el poate lua metroul o stație până la Piața Victoriei, unde schimbă magistrala, apoi coboară la a șaptea stație.

Putem reprezenta sugestiv schema rețelei de metrou din București ca în figura alăturată. Această reprezentare poate fi utilă în analiza gradului de dezvoltare a transportului subteran.



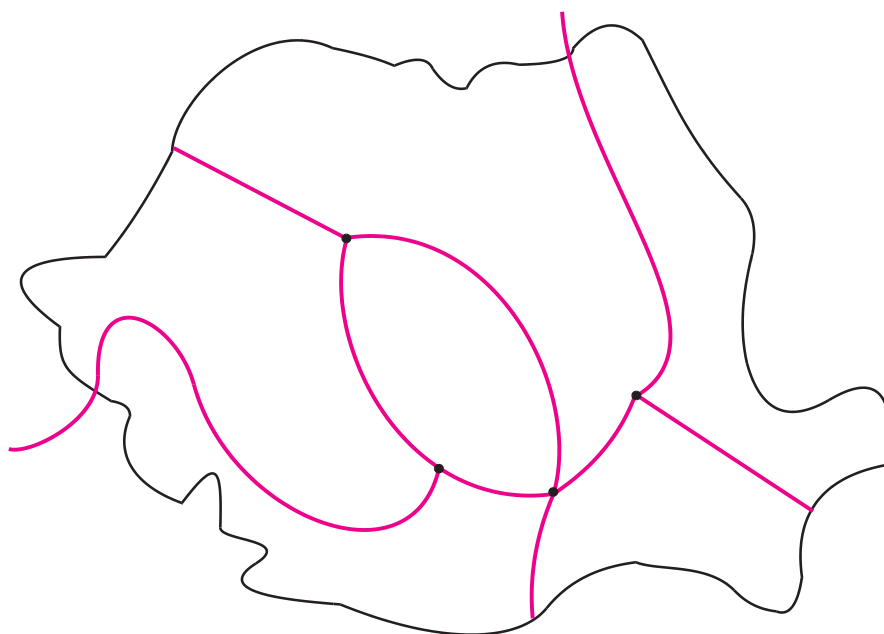
1 Observă harta metroului. Câte stații sunt între Piața Victoriei și Pantelimon, pe drumul cel mai scurt? Dar pe o rută ocolitoare?

2 Determină două trasee pe care se poate ajunge cu metroul din Gara de Nord până la Piața Sudului. În care dintre cele două variante călătorul trece prin mai multe stații? Pe care traseu crezi că se ajunge mai repede?

3 Folosește harta rețelei de metrou pentru a identifica stațiile marcate pe schema alăturată. Transpune desenele pe caiet și scrie numele stațiilor.

4 Desenează și alte scheme ale rețelei de metrou din București. Cum ai putea decide dacă o schemă este întocmită corect?

Pentru a fi utilizată la promovarea în străinătate a turismului în România și pentru a fi mai ușor de utilizat de către turiștii străini, harta a fost schematizată astfel:



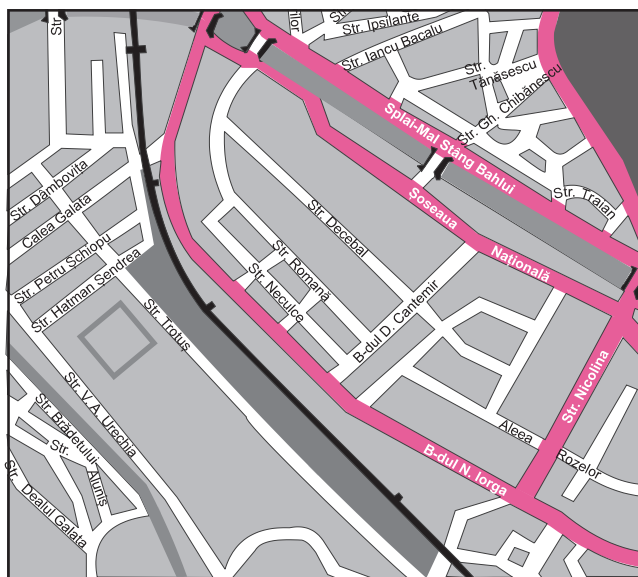
▲ În fiecare dintre exemplele anterioare sunt importante punctele în care traseele se ramifică.

Aceste puncte se pot numi **stații de corespondență** (la metrou) sau **intersecții** (pe harta orașului). În cazul rețelei de cale ferată, localitățile în care traseele se ramifică se mai numesc și **noduri de cale ferată**.

8 Este orașul tău un nod de cale ferată? Ce condiție crezi că trebuie să îndeplinească o stație de tren pentru a fi considerată nod de cale ferată?

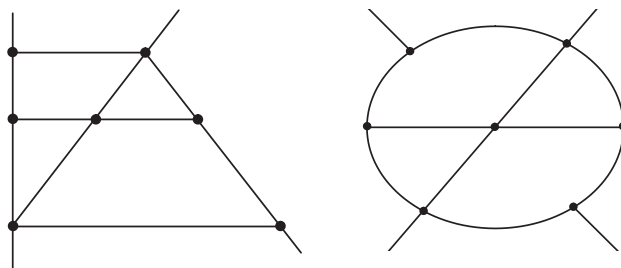
Exerciții și probleme

1. Realizează o schemă cu principalele artere ale orașului Iași, utilizând pentru aceasta harta de mai jos.



2. Găsește cât mai multe denumiri sugestive pentru punctele în care traseele unei rețele de transport se ramifică. Utilizează eventual un dicționar în acest scop.

3. Alexandru și Tudor au reprezentat schematic străzile din cartierul lor. Ei și-au imaginat în mod diferit cartierul în care locuiesc, realizând desenele:



Pot reprezenta aceste scheme același cartier?

4. Reprezintă printr-o schemă activitățile din programul de dimineață al lui Matei: „Mă scol, apoi mă spăl. Uneori fac gimnastică, alții iau direct micul dejun pregătit de mama. (Uneori, îmi pregătesc eu singur micul dejun.) Apoi îmi verific ghiozdanul și plec la școală.”

5. Realizează o schemă a traseului tău de acasă la școală. Marchează principalele 4 străzi pe acest traseu.

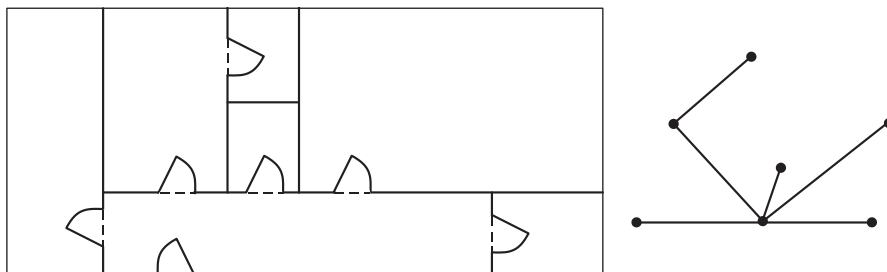
Analizăm și generalizăm!

◆ Ce este un graf?

În multe situații cotidiene, o reprezentare schematică este preferabilă unei reprezentări detaliate. În acest fel, ne putem concentra atenția asupra esențialului.

De exemplu, în proiectarea rațională a unei locuințe, arhitecții pot folosi planul acesteia (desenat în stânga), dar și reprezentarea schematică de mai jos (desenată în dreapta, în care încăperile au fost înlocuite cu puncte, iar accesul dintr-o încăpere în alta este sugerat prin unirea punctelor corespunzătoare).

1 Realizează schematic planul propriei locuințe. Folosește două tipuri de reprezentări, sugerate de desenele din dreapta.

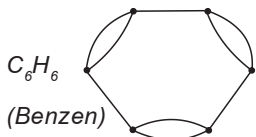


Reprezentarea schematică a locuinței ne poate da o idee despre funcționalitatea acesteia.

Să reținem!

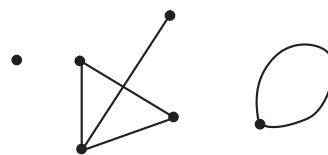
O reprezentare geometrică în care apar noduri unite prin muchii se numește *graf*. Un graf este determinat de mulțimea *nodurilor* și a *muchiiilor* sale. Nodurile sunt extremități de muchii.

⚠ În practică, s-au dovedit utile și grafurile cu muchii multiple (multigrafuri), în care pot exista mai multe muchii care unesc două noduri. De exemplu, printr-un astfel de multigraf se reprezintă molecula de benzen; în fiecare nod se găsește gruparea CH, a cărei valență, 3, este egală cu numărul de muchii ce pleacă din acest nod.



• Punctul care nu este legat de nici un alt punct se numește nod izolat.

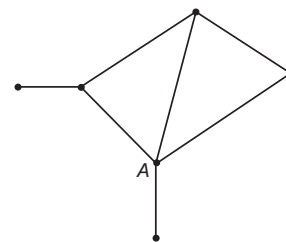
Nodurile corespunzătoare unor muchii nu trebuie neapărat să fie distincte. Dacă două noduri coincid, avem o buclă.



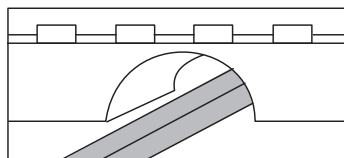
Două muchii pot avea numai un nod ca punct comun. Două noduri pot fi unite prin cel mult o muchie. Numărul de muchii care pleacă dintr-un nod se numește *ordinul nodului*.

Exemplu

Reprezentarea schematică alăturată este un graf. Acest graf are 6 noduri și 7 muchii. Ordinul nodului A este 4.

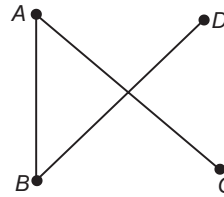


2 Desenează un graf care are 6 noduri și 8 muchii. Câte noduri și câte muchii are grafurile tale? Ce reprezintă în acest caz nodurile? Dar muchiiile? Ce reprezintă ordinul unui nod?



În reprezentarea prin desen, două muchii ale unui graf se pot intersecta într-un punct care nu este un nod. De exemplu, în acest mod se reprezintă pe harta unui oraș două șosele suprapuse.

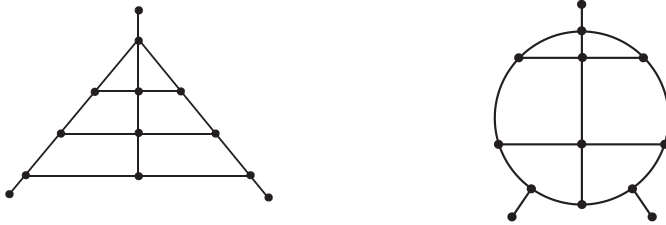
Graful din dreapta are 4 noduri și 3 muchii.
Punctul de intersecție al muchiilor AC și BD, nefiind un capăt al unei muchii, nu este nod.



3 Care este numărul maxim de muchii ale unui graf cu 6 noduri? Dar cel minim?

Să observăm!

Cele două grafuri de mai jos pot reprezenta planul aceluiași cartier; chiar dacă „străzile” nu au aceeași formă în cele două desene, ele unesc aceleași „intersecții”. Pentru orientarea în teren, oricare dintre aceste reprezentări este suficientă.

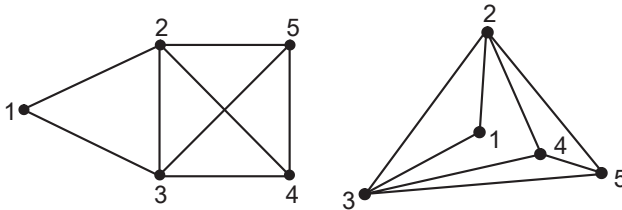


Să reținem!

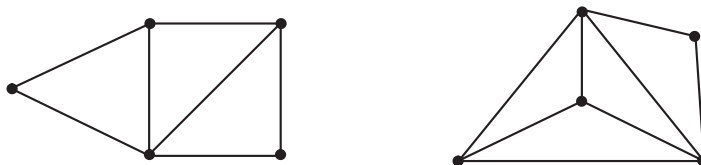
Două grafuri sunt *izomorfe* dacă au același număr de noduri și de muchii și dacă există o numerotare a nodurilor din cele două grafuri astfel încât două noduri sunt unite (printr-o muchie) pe primul graf dacă și numai dacă nodurile corespunzătoare sunt unite și pe al doilea graf. În grafuri izomorfe, nodurile corespunzătoare au ordine egale.

Exemple

1) Grafurile următoare sunt izomorfe.



2) Grafurile următoare nu sunt izomorfe.



◆ Ce este un graf orientat?

Să analizăm!

Străzile unui oraș pot fi parcurse de vehicule în ambele sensuri, sau pot avea sens unic. O astfel de situație poate fi marcată pe schema orașului, adăugând străzilor o săgeată care indică sensul de parcurs.

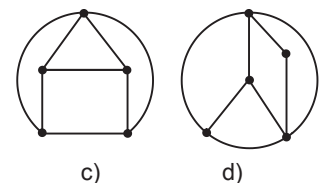
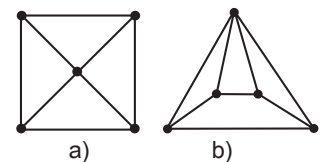
De exemplu, să considerăm principalele artere din zona Piața Victoriei din București și reprezentarea printr-un graf a acestora.

▲ Spunem pe scurt că grafurile izomorfe codează aceeași informație.

La grafurile izomorfe poziționarea vârfurilor nu contează, important este modul de conectare a acestora.

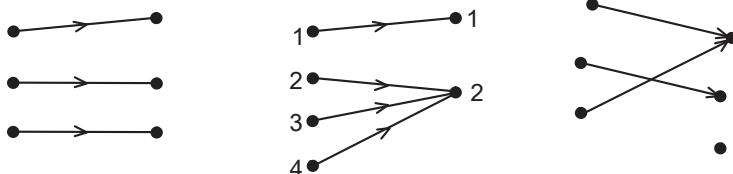
▲ Este foarte important să putem determina dacă două grafuri sunt izomorfe sau nu. De exemplu, acest lucru este esențial în realizarea unui montaj electronic pornind de la schema acestuia: montajul trebuie să respecte indicațiile schemei, dar poate fi poziționat altfel în spațiu.

4 Decide care dintre grafurile următoare sunt izomorfe.



◆ Ce legătură este între graf și funcție?

Alex a făcut următoarele desene:



Apoi, i-a explicat Mariei: „Am desenat trei grafuri. Dar, privindu-le din nou, pot să le consider ca fiind trei funcții. Deci, graful este o funcție”.

Maria i-a răspuns:

„Să considerăm grafurile reprezentate în figurile de mai jos. Primul este neorientat, iar cel de-al doilea este orientat.



La o privire superficială, am fi tentați să spunem că avem de-a face cu o funcție definită pe mulțimea nodurilor cu valori tot în mulțimea nodurilor. Această afirmație nu este însă adevărată.”

Să comparăm!

Să ne amintim definiția funcției: Fie A și B două mulțimi nevide. Orice lege f prin care fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un element $y = f(x) \in B$ unic și bine definit se numește *funcție* definită pe A cu valori în B și este notată $f: A \rightarrow B$.

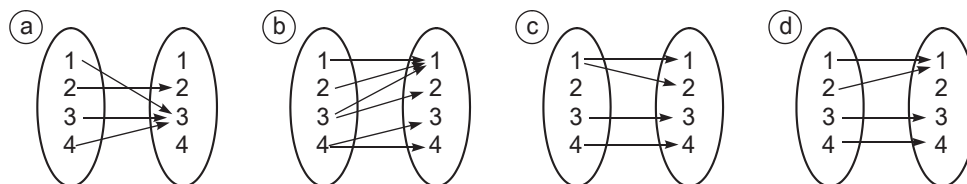
Deoarece prin legea f oricărui $x \in A$ îi corespunde un element $y \in B$ și numai unul, atunci funcția se mai numește *aplicație univocă de la A la B* .

Pentru a clarifica diferența dintre cele două noțiuni (adică funcție, respectiv graf), putem vorbi despre aplicația multivocă.

• O *aplicație multivocă* a mulțimii A în mulțimea B este o lege prin care fiecărui element $x \in A$ îi corespunde o submulțime bine definită a lui B (eventual submulțimea vidă).

Exemplu

Numai în situațiile (a) și (d) sunt reprezentate funcții. În situația (b) avem o aplicație multivocă deoarece, de exemplu, lui 3 îi corespunde mulțimea $\{1; 2\}$.



Așadar, s-au conturat următoarele două moduri de descriere (definire), ale unui graf, și anume:

- Prin cunoașterea mulțimii nodurilor și a mulțimii muchiilor (arcelor).
- Prin cunoașterea mulțimii nodurilor și a aplicației mulțimii nodurilor în ea însăși.

Aceste două moduri de definiție sunt legate intrinsec între ele, în sensul că, dacă avem dată mulțimea tuturor muchiilor (arcelor), ea determină aplicația, și reciproc, dacă este cunoscută aplicația multivocă, ea definește mulțimea muchiilor (arcelor) grafului.

10 Explică raționamentul Mariei folosind un alt exemplu.

▲ Eroarea este cauzată de înțelegerea vagă a definiției unei funcții.

▲ O funcție este un triplet. Funcția $f: A \rightarrow B$ este bine definită atunci când se cunosc cele trei elemente A, B, f .

11 Ce fel de aplicație este reprezentată la (c)?

12 Explică diferența între o aplicație univocă și o aplicație multivocă în cazul desenelor alăturate.

13 Fie $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b, c\}$.

Construiește o funcție definită pe A cu valori în B și o aplicație multivocă a mulțimii A în mulțimea B . Reprezintă aceste aplicații cu ajutorul unor grafuri.

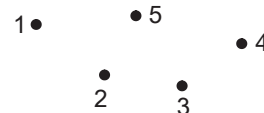
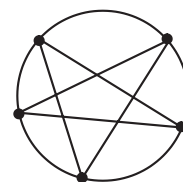
◆ Tipuri de grafuri neorientate

În aplicații, grafurile cu proprietăți speciale se dovedesc foarte utile. Câteva dintre aceste proprietăți sunt descrise în continuare.

Să analizăm!

La o recepție, se întâlnesc 5 prieteni. În mod firesc, fiecare dintre ei dă mâna cu ceilalți. Situația tuturor acestor interacțiuni se poate descrie printr-un graf complet, de ordin 5, adică prin grafurile din figura alăturată.

O situație complet diferită este cea în care 5 persoane invitate la o recepție nu se cunosc și, ca atare, nu dau mâna. Situația este reprezentată prin grafurile din figura alăturată.



În general

Grafurile neorientate în care oricare două noduri sunt legate printr-o muchie se numesc *graf complet*. Grafurile pentru care mulțimea muchiilor este nulă se numesc *graf nul*. Altfel spus, grafurile nule au numai noduri izolate.

14 Ordinul unui graf este dat de numărul nodurilor acestuia. Construiește grafurile complete de ordin 1, 2, 3, 4 și 5.

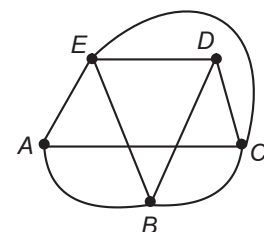
15 Trasează două grafuri cu câte 4, respectiv 5 noduri, care nu sunt complete.

16 Răspunde prin „Da” sau „Nu”:

Grafurile alăturate sunt:
a) complete;
b) orientate;
c) izomorfe?

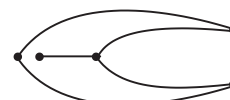
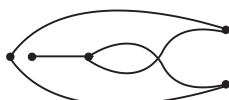
Exemple

- Grafurile descrise prin poligoane convexe în care au fost duse toate diagonalele sunt grafuri complete.
- Grafurile din figura alăturată nu sunt complete, deoarece nodurile A și D nu sunt legate prin muchii.



Să analizăm!

Atunci când realizează rețeaua de electricitate a unei locuințe, electricienii au grijă ca două conductoare diferite să nu se atingă de-a lungul lor, deoarece ar fi pericol de scurtcircuitare. De aceea, ei evită să facă legături de tipul celor din grafurile din stânga și înlocuiesc această schemă cu un graf echivalent, cum este cel reprezentat în dreapta.



Aceleași probleme tehnice le ridică și construcția de autostrăzi: dacă nu se pot construi porțiuni suspendate, atunci două autostrăzi pot avea doar orașele terminale ca puncte comune.

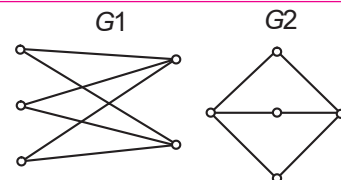
Să reținem!

Grafurile izomorfe cu un graf reprezentat în plan, în care orice două muchii nu au decât noduri ca puncte comune, se numesc *graf planar*.

Un graf planar poate fi desenat în plan, fără a avea muchii care se intersectează.

Exemplu

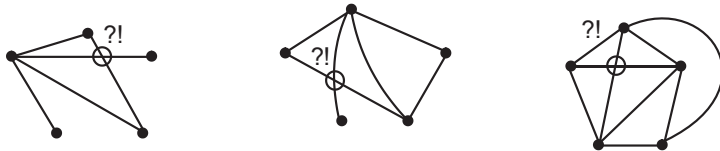
Grafurile G1 alăturate sunt planare, deoarece este izomorf cu G2, iar G2 este un graf planar, în care orice două muchii nu au decât noduri ca puncte comune.



Să analizăm!

Considerăm cinci orașe legate între ele prin autostrăzi, fiecare oraș fiind conectat cu celelalte patru. Proiectanții ar fi dorit să micșoreze costurile și să nu folosească porțiuni suspendate de autostradă. Totuși, oricât au încercat, ei nu au reușit să construiască un graf complet și planar cu 5 noduri, reprezentând schema dorită.

Câteva dintre încercările lor sunt desenate mai jos.



Ca urmare, ei au ajuns la concluzia că un astfel de graf nu există.

În general

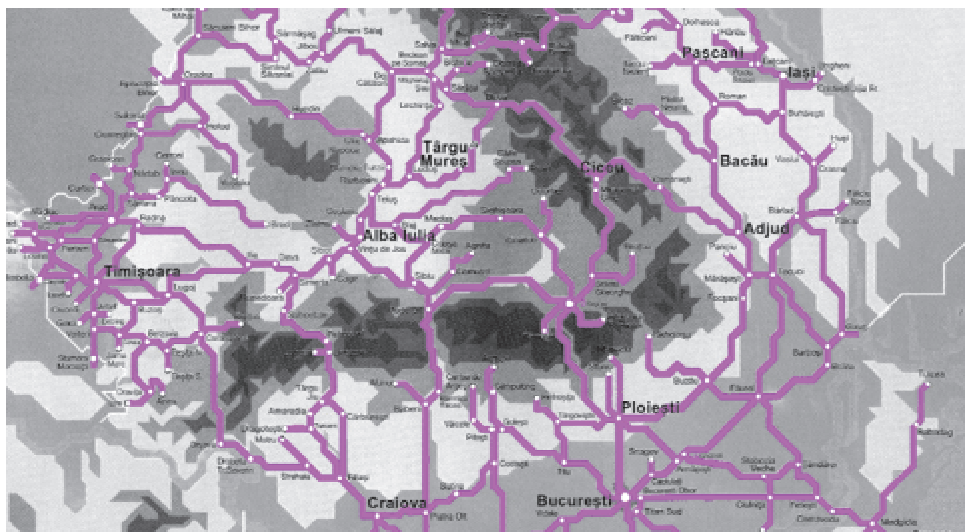
Pentru $n \geq 5$, un graf complet cu n noduri nu este graf planar.

- 17 Desenează în diverse moduri un graf complet cu 5 noduri. Verifică dacă un astfel de graf poate fi planar. Este grafurile complete cu 4 noduri un graf planar?

◆ Ce drumuri speciale pot fi descrise prin grafuri?

Să analizăm!

Schema de mai jos reprezintă rețeaua de căi ferate din România. Pentru a ajunge din Timișoara la Iași, un călător are mai multe posibilități de alegere a traseului. De exemplu, el poate merge pe ruta Timișoara-Craiova-București-Ploiești-Bacău-Pășcani-Iași sau pe ruta Timișoara-Alba Iulia-Târgu Mureș-Ciceu-Adjud-Bacău-Pășcani-Iași.



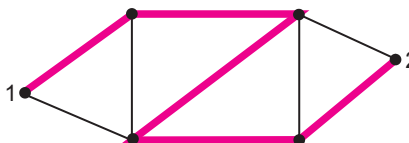
- ▲ Pentru a fi funcțională, o rețea de transport trebuie să prevadă existența unui drum între oricare două localități.

Să reținem

Un traseu ce unește două noduri ale unui graf printr-o succesiune de muchii adiacente ale grafului se numește *drum*. Un graf se numește *graf conex* dacă orice două noduri sunt legate printr-un drum.

Exemplu

Traseul marcat pe graful alăturat este un drum. El unește nodurile 1 și 2; acestea sunt *extremitățile* drumului. Acest graf este conex deoarece între orice două noduri există un drum.

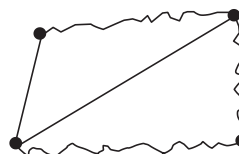


- 18 Folosind harta rețelei de metrou din București (reprodusă la pagina 37), identifică toate drumurile posibile dintre Gara de Nord și Piața Sudului. Care dintre aceste drumuri este optim?

Să observăm!

Drumul (sau lanțul) este o succesiune de muchii consecutive care permit trecerea de la un nod la altul. Dacă în succesiune fiecare muchie apare exact o dată sau toate nodurile sunt distincte, atunci drumul se numește *drum elementar*.

Linia ondulată este un drum elementar.



- 19 Cum crezi că ar putea fi definit un drum pe un graf orientat? Cărei situații practice îi corespunde această noțiune?

⚠ Regulamentul CFR permite realizarea la preț redus a unor circuite turistice. Singura condiție impusă este ca nici o porțiune de drum să nu fie parcursă de mai multe ori (într-un sens sau altul).

20 Proiectează un circuit turistic CFR care să treacă prin cât mai multe dintre orașele României. Interesează-te la agențiile de voiaj CFR cât va costa un bilet pe acest circuit. Poți face astfel importante economii pentru petrecerea vacanțelor într-un mod plăcut.

21 Informează-te și răspunde! Care este prețul biletelor pentru tren personal, pe fiecare muchie a grafului magistralei București-Constanța?

Exemplu

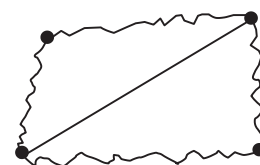
Rețeaua CFR din România este un graf conex, deoarece între oricare două gări se poate ajunge călătorind doar cu trenul.



Drumul marcat pe graful rețelei căilor ferate este un *circuit*. Extremitățile unui circuit coincid.

Să reținem!

Circuitul sau drumul închis sau ciclul este un drum care începe și se termină în același nod. În aceste condiții, la un circuit, nodul inițial coincide cu nodul final.



Exemplu

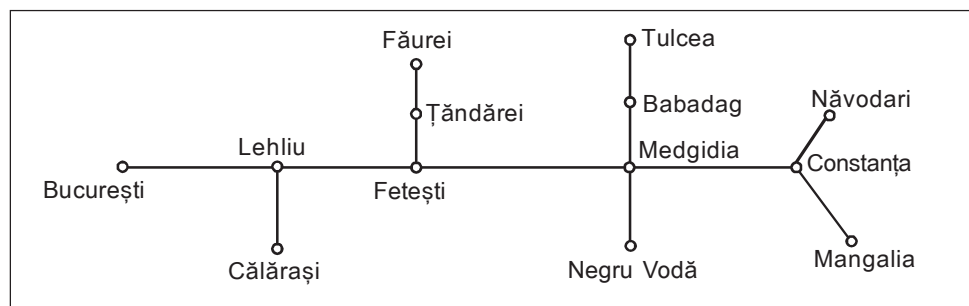
Linia ondulată marcată în dreapta este un circuit.

Să particularizăm!

Diverse situații se pot reprezenta prin grafuri de o formă particulară.

Exemplul 1: Rețeaua CFR

Subgraful rețelei CFR corespunzător magistralei București-Constanța este:



Acestui graf îi putem asocia, de exemplu, costul unui bilet pe fiecare tronson. Obținem în acest mod un graf ponderat.

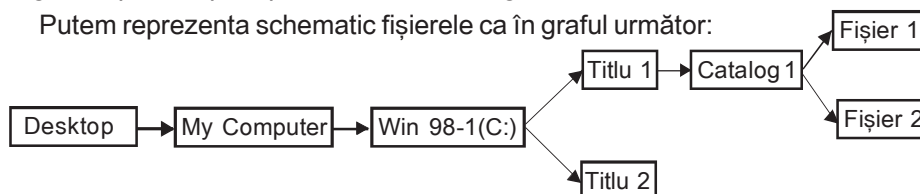
În general

Se numește *graf ponderat* (sau graf valorat) un graf în cadrul căruia fiecărui arc (muchie) îi este asociată o valoare. Valoarea asociată arcului poate avea semnificația de „cost” a legăturii între cele două noduri sau de „distanță” între noduri.

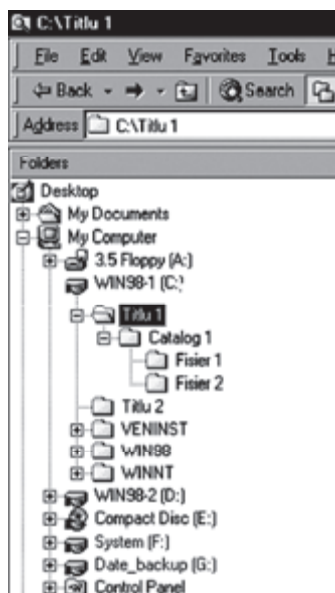
Exemplul 2: Organizarea fișierelor în computer

Computerele înmagazinează date în directoare sau fișiere consecutive. Aceste înregistrări pot să apară pe monitor ca în imaginea alăturată.

Putem reprezenta schematic fișierele ca în graful următor:

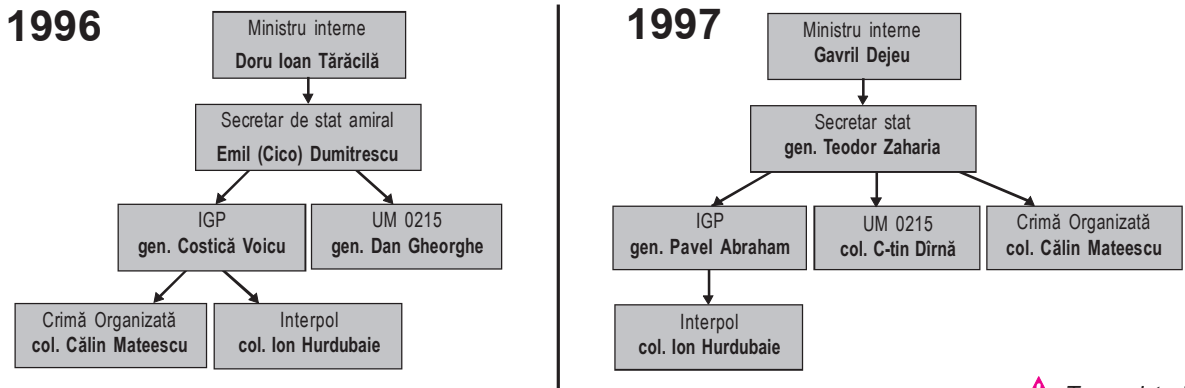


Orice fișier poate fi apelat urmând un traseu unic.



Exemplul 3: Structuri decizionale

Ziarele prezintă deseori structura de conducere a unor ministere sub forma unor arbori. Astfel, în anii 1996 și 1997, Ministerul de Interne a avut următoarea conducere:



Grafurile prezentate în exemplele 1, 2 și 3 sunt conexe, dar nu au circuite.

Să reținem!

Un graf conex, fără circuite, se numește *arbore*.
Într-un arbore, orice două noduri se pot uni printr-un traseu unic.

Să demonstrăm!

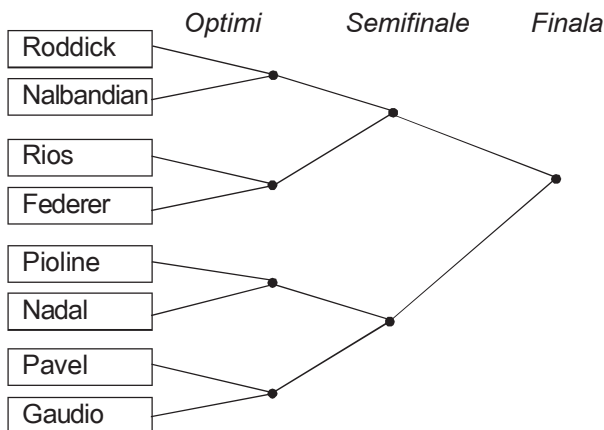
Fie G un graf arbore cu n noduri și m muchii. Atunci $n = m + 1$.

Demonstrăm proprietatea prin inducție după n .
Dacă $n = 1$, atunci graful G are un singur nod și deci $m = 0$. În acest caz, relația $n = m + 1$ este verificată.

Să presupunem că egalitatea este adevărată pentru grafuri cu n noduri și să o demonstrăm pentru grafuri cu $n + 1$ noduri. Dacă P este un nod terminal al grafului (adică un nod de ordinul 1), atunci el este unit cu un singur alt nod, notat Q . Fie G_1 graful obținut din G prin eliminarea nodului P și a muchiei PQ . G_1 este tot un arbore, cu $n' = n - 1$ noduri și $m' = m - 1$ muchii. Deoarece $n' = m' + 1$, deducem că $n = m + 1$. Demonstrația este încheiată.

Să aplicăm!

Turneele de tenis se desfășoară conform unui tablou al jocurilor ce reprezintă un arbore. Astfel, la turneul *Australian Open*, tabloul principal a fost următorul:



Conform regulamentului, unii jucători nu dispută partide în primele tururi. Câte jocuri se dispută, dacă la start s-au prezentat 105 sportivi? (Aplică în calcule teorema anterioară.)

▲ Traseul turistic al multor muzee este organizat sub forma unui arbore.

22 Rețeaua electrică a unei locuințe, alcătuită cu conductori bifiliari, este organizată sub forma unui arbore. Poți explica de ce această rețea nu poate avea circuite?
Desenează graful rețelei electrice din locuința ta.

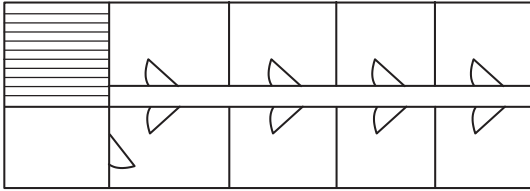
23 Care sunt pașii unui raționament prin inducție?

▲ Orice competiție sportivă în care jocurile sunt eliminatorii poate fi descrisă printr-un arbore.

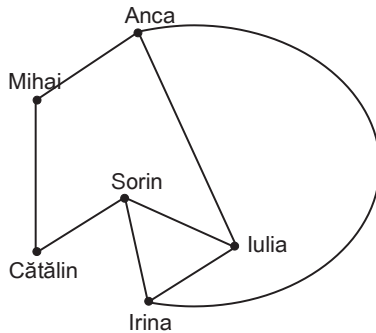
24 Întocmește arborele corespunzător Campionatului Mondial de Fotbal 2006, după etapa grupelor.
Ce semnificație poate avea afirmația „Brazilia și Germania au fost în zone diferite ale tabloului”?

Exerciții și probleme

1. În figura de mai jos este prezentat planul etajului 1 al unui hotel. Reprezintă acest plan sub forma unui graf.



2. Câțiva prieteni au vorbit între ei la telefon, pentru a detalia planul unei excursii. Când s-au întâlnit, ei au reconstituit convorbirile avute, reprezentându-le sub forma următorului graf:



Câte convorbiri au fost efectuate? Cine a vorbit de cele mai multe ori la telefon? Dar de cele mai puține ori? Reprezintă grafurile convorbirilor într-o altă formă.

3. Verifică dacă următoarele două grafuri sunt izomorfe:



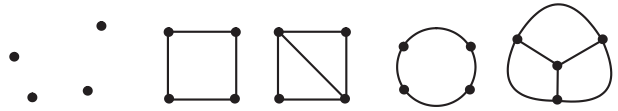
4. Asociază fiecare noțiune cu definiția care o caracterizează.

- | | |
|-----------------------|---|
| A. Punct izolat | 1. este cel în care se poate ajunge din orice nod în oricare nod de-a lungul muchiilor. |
| B. Graf conex | 2. este cel în care orice două noduri sunt legate exact printr-o muchie. |
| C. Grafurile izomorfe | 3. este cel în care muchiile nu au puncte de intersecție. |
| D. Graf complet | 4. nu este legat prin muchii de nici un alt nod. |
| E. Graf planar | 5. codează aceeași informație. |

5. Desenează un graf cu 5 noduri și 4 muchii.

6. Construiește un graf neorientat și un graf orientat, ambele determinate de 6 puncte.

7. Stabilește tipul fiecărui graf:

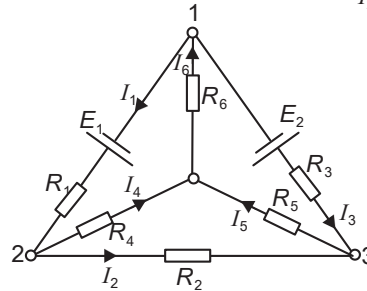
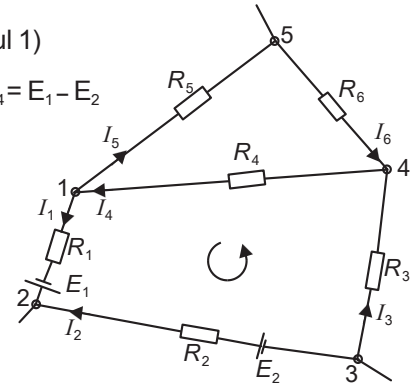


8. Ai învățat la fizică, în clasa a X-a, legile lui Kirchoff care sunt aplicabile, de exemplu, la calculul rețelelor electrice în curent continuu. Aceste legi se referă la intensitățile curenților dintr-un nod al rețelei și la tensiunile electromotoare ale generatoarelor dintr-un circuit al rețelei. De exemplu, pentru rețeaua de mai jos, legile lui Kirchoff se exprimă prin:

$$I_1 - I_4 + I_5 = 0 \text{ (în nodul 1)}$$

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = E_1 - E_2$$

$$\text{(în circuitul 1-2-3-4)}$$

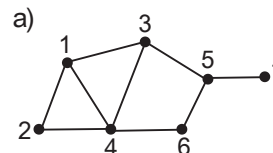


Scrie relațiile deduse din legile lui Kirchoff pentru toate nodurile și circuitele rețelei reprezentată prin grafurile alăturate.

9. Un graf se numește *graf regulat de ordinul r* dacă orice nod are ordinul r .

- Desenează un graf regulat de ordinul 3, care are 6 noduri.
- Demonstrează că într-un graf regulat de ordinul 3, numărul de noduri este par.

10. Pentru un graf planar, să numim „circuit elementar” un circuit care nu închide în interiorul său nici un nod și nici o muchie.



Pe grafurile alăturate, 1341 este un circuit elementar, dar 13421 nu este circuit elementar. Determină toate circuitele elementare ale grafului.

- Demonstrează că într-un graf planar și conex are loc relația: $N - M + C = 1$, unde N = numărul de noduri, M = numărul de muchii, C = numărul de circuite elementare.
- Demonstrează că grafurile complete cu 5 noduri nu sunt grafuri planare.

Situații practice de utilizare a teoriei grafurilor



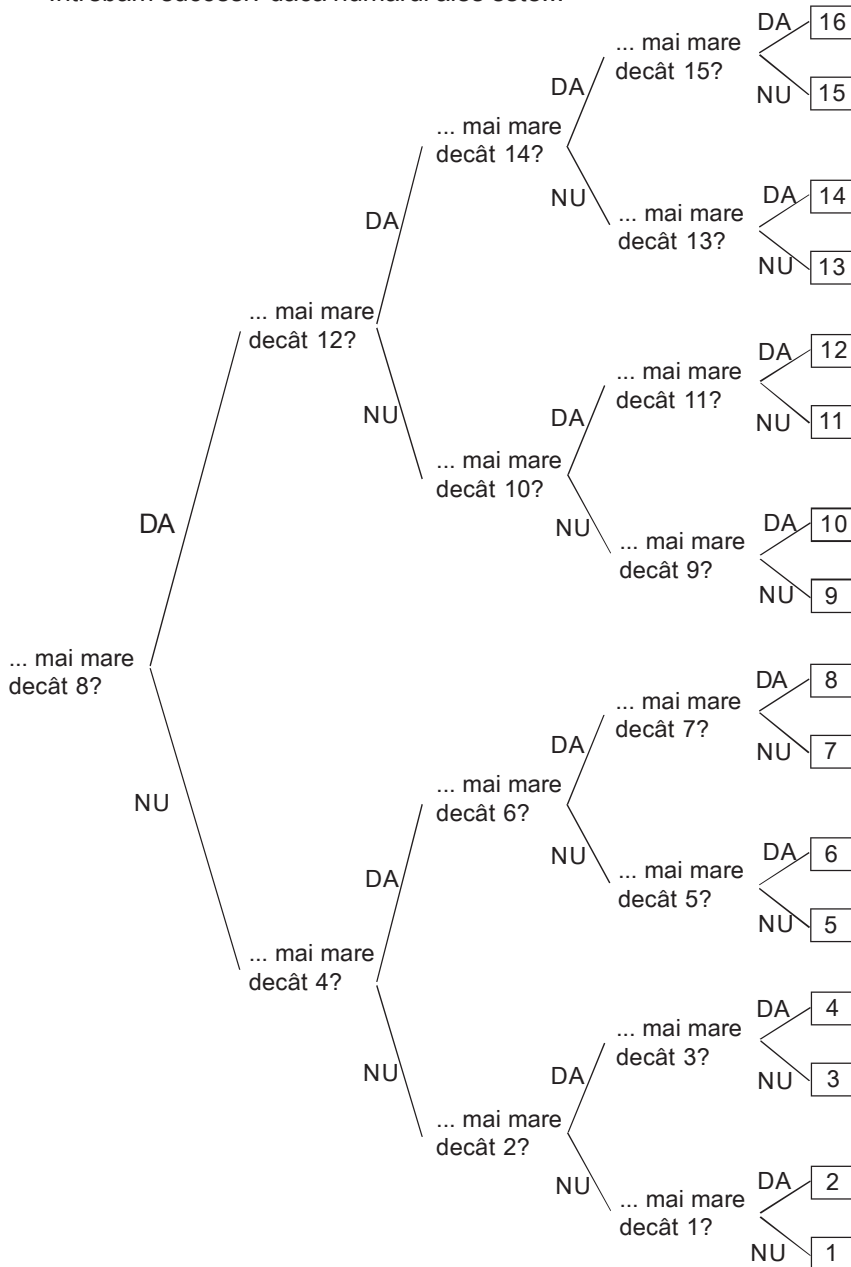
Aplicăm și dezvoltăm!

Teoria grafurilor are numeroase aplicații practice.

Exemplul 1: Organizarea datelor

Pentru a ghici un număr natural cuprins între 1 și 16 din cel mult 4 întrebări la care se răspunde cu da sau nu, putem organiza încercările ca în graful de mai jos.

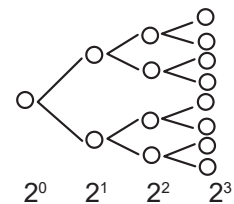
Întrebăm succesiv dacă numărul ales este...



▲ Succesiunea întrebărilor are legătură cu scrierea numerelor în baza 2.

❶ Câte întrebări vor fi necesare pentru a afla un număr natural cuprins între 1 și 32? Dar un număr natural cuprins între 1 și 1 000?

▲ Un arbore de același tip se obține, spre exemplu, în cazul diviziunii celulare.



❷ Ce tip de funcție modelează procesul diviziunii celulare?

3 Rezolvă ecuațiile următoare, aranjând calculele sub forma unui arbore.

$$|4 - |3 + |2 - x|| = 1;$$

$$|2 - |2 - |2 - x|| = 1.$$

Exemplul 2: Rezolvarea ecuațiilor

Știm că pentru $a > 0$, avem $|y| = a$ dacă și numai dacă $y = a$ sau $y = -a$.

Pentru a rezolva ecuația $||x + 1| - 3| = 2$ putem aranja calculele sub forma unui arbore, astfel:

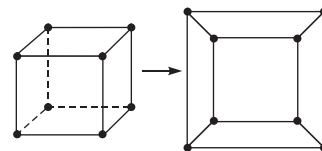
$$\begin{array}{l}
 |x+1|-3=2 \\
 |x+1|=5 \\
 \begin{array}{l}
 x+1=5 \Rightarrow x=4 \\
 x+1=-5 \Rightarrow x=-6
 \end{array} \\
 \\
 |x+1|-3=-2 \\
 |x+1|=1 \\
 \begin{array}{l}
 x+1=1 \Rightarrow x=0 \\
 x+1=-1 \Rightarrow x=-2
 \end{array}
 \end{array}$$

Obținem mulțimea de soluții $S = \{4; -6; 0; -2\}$.

Exemplul 3: Graful asociat unui poliedru

Anumite proprietăți ale poliedrelor pot fi mai bine evidențiate dacă acestea sunt reprezentate cu ajutorul unor grafuri.

Corina a construit un cub cu o față transparentă. Ea a privit în interiorul cubului ca printr-o fereastră și a desenat imaginea observată. Văzând desenul Corinei, Vlad a constatat: „Ai reprezentat cubul sub forma unui graf planar.”



▲ Cele două grafuri din dreapta sunt izomorfe.

4 Imaginează-ți cum aplatizăm o prismă triunghiulară și desenează graful asociat acesteia.

În general

Orice poliedru convex se poate reprezenta sub forma unui graf. Acesta este graful asociat poliedrului. Graful asociat unui poliedru se obține prin aplatizarea poliedrului: deformăm unele dintre fețe (și muchii) până când toate vârfurile ajung în același plan.

Exemplul 4: Logică și grafuri

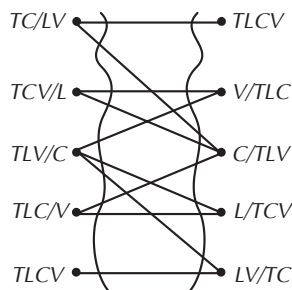
Analiza logică făcută de Anton Pann în versurile următoare poate fi înlocuită cu o soluție rapidă pe bază de graf.

Lupul, țapul și varza

de Anton Pann

5 Folosind graful de mai jos (în care T, L, C, V semnifică țăranul, lupul, capra, respectiv varza) explică soluția problemei propuse de Anton Pann.

Ce legătură este între poveste și drumuri în graf?

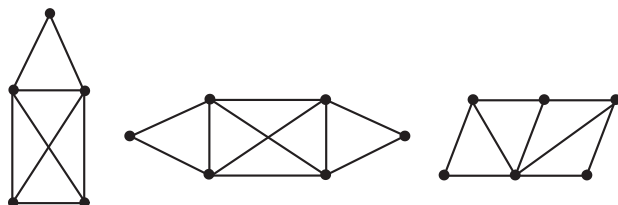


Un țăran la târg plecase.
Și de vânzare luase
Un lup, un ied și o varză.
Nevrând nici una să piarză
Și nefiind nici călare,
Vrea să treacă un râu mare,
Care era să-l înoate
Și să le treacă pe toate.
Stând în loc, se socotește
Și întru sine șoptește,
Cum și în ce chip să facă
Câte una să le treacă,
Că fiind apa prea lată,
Nu putea două deodată.
„Să trec întâi lupul, zice,
Capra varza o să-mi strice,
Să trec varza, ș-așa încă,
Lupul capra îmi mănâncă.”
Deci dacă-i veni în minte
Și trecu capra-nainte,
Stătu iar să se gândească
Că cum să o nemerească.
Gândind, zicea întru sine:
”Trecui una, merse bine,

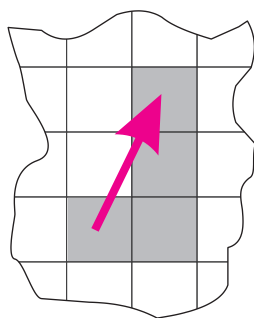
Pân-aci toate scăpară.
Acum care să trec dară?
Trecând varza și lăsând-o,
O strică iedul rozând-o,
Precum lupul și el iară
Îmi face iedul papară.
O, ce vită neunită
Și marfă nepotrivită!”
Dar mai gândind: „Ha! el zise,
Nevoia minte-mi trimise”.
Trecu lupul, clătind capul,
Și-ntoarse înapoi țapul.
Trecu și varza îndată,
Mereu făcând judecată,
Și mergând a doua oară,
Trecu țapul supsioară.
Omul dacă și gândește,
Orice i se înlesnește,
Prejudecând cele grele,
Le găsește ușurele,
Că pe cât el să gândește,
P-atât mintea-i se tocește.
Și orice, cu judecată,
Nu-l greșește niciodată.

Exerciții și probleme

- Afluenții unui râu pot fi reprezentați sub forma unui graf arbore. Desenează grafurile ce reprezintă râul Olt și afluenții lui.
- Trei prieteni, notați A, B, C , joacă tenis de câmp după sistemul „învingătorul rămâne”. Reprezintă printr-un graf situațiile ce pot să apară după 5 jocuri, dacă prima dată joacă A cu B .
- Desenează un graf complet care are 7 noduri. Marchează un circuit pe acest graf.
- În care dintre următoarele situații putem reprezenta datele printr-un arbore?
 - Rețeaua de străzi dintr-un cartier.
 - Rețeaua de distribuție a apei potabile a unui oraș.
 - Rețeaua de distribuție a gazului metan într-un oraș.
- Desenează figurile, fără a ridica creionul de pe hârtie.

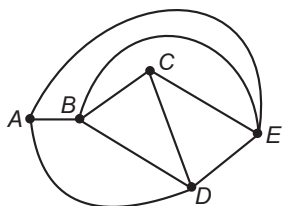


- Transpune într-o problemă despre grafuri întrebarea următoare.
Există un traseu pe care îl parcurge calul pe o tablă de șah cu dimensiunile 4×4 astfel încât acesta să treacă prin fiecare câmp al tablei o singură dată? (Vă reamintim că, la șah, calul se mută în formă de L, ca în figura alăturată).



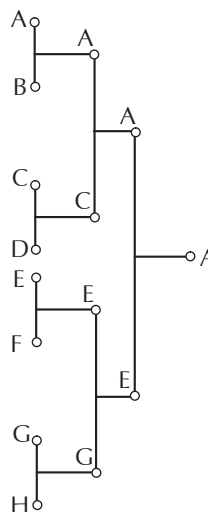
Este util ca în grafurile cerute să unești printr-o muchie oricare două câmpuri între care poate fi mutat calul.

- Determină ordinul fiecărui nod al grafului de mai jos.



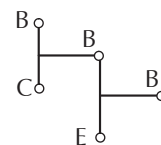
Dacă acest graf este reprezentarea schematică a rețelei de troleibuze a unui oraș, ar putea fi parcursă rețeaua de un troleibuz, care trece pe fiecare stradă o singură dată?

- Desenează:
 - un graf conex complet;
 - un graf conex care nu este complet.
- Câte configurații diferite pot forma 3 pioni albi și 4 negri așezați pe o tablă de șah 3×3 ? Folosește grafurile pentru a număra aceste configurații.
- Arborele de mai jos redă meciurile de cupă a 8 finaliști. În această competiție, nu toți jucătorii se confruntă între ei. Care sunt acei jucători care nu se confruntă direct?

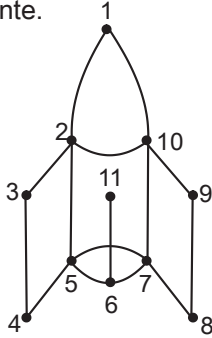


Imaginează-ți metode prin care acest tip de organizare a finalelor unor concursuri poate fi îmbunătățit.

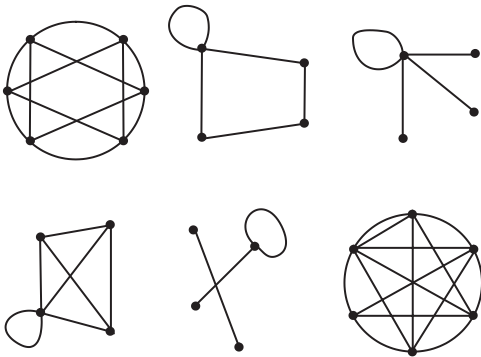
- Într-o competiție de 8 jucători, de tipul celei de mai sus, numărul celor învinși de campion este 3. Câte meciuri ar mai fi necesare pentru a afla care este cel mai bun dintre cei 3? Folosește grafurile alăturate.
- Reprezintă printr-un graf cazurile ce pot să apară în rezolvarea următoarelor probleme.
 - Dintre 5 monede identice ca mărime și aspect, una este mai ușoară. Folosind o balanță, determină prin cel mult două cântăriri moneda mai ușoară.
 - Dintre 5 monede identice ca mărime și aspect, una este de masă diferită față de celelalte (fiind mai ușoară sau mai grea!). Folosind o balanță, determină prin cel mult trei cântăriri moneda diferită.
- Reprezintă cu ajutorul unui graf orientat funcția:
 $f : \{0; 1; 2\} \rightarrow \{1; 2; 3; 4\}, f(x) = x + 1.$



14. În graful următor precizează nodurile și muchiile acestuia. Dă exemplu de noduri adiacente și de muchii adiacente.



15. Identifică perechi de grafuri izomorfe printre grafurile reprezentate mai jos.



16. Fie mulțimile $A = \{x \mid x \text{ oraș în Europa}\}$, $B = \{y \mid y \text{ țară în Europa}\}$ și aplicațiile:
 $f(\text{oraș } x) = \text{țara } y \text{ pe teritoriul căreia se găsește orașul } x$.
 $g(\text{țară } y) = \text{orașul } x \text{ de pe teritoriul țării } y$.
 Stabilește natura acestor aplicații.

17. a) Demonstrează că, în orice graf, suma ordinelor tuturor nodurilor este egală cu dublul numărului de muchii.
 b) Reprezintă printr-un graf arborele genealogic al familiei voastre.

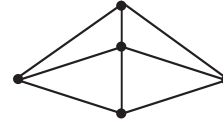
18. Caracterizează cu ajutorul ordinului unui nod:
 a) funcțiile injective; b) funcțiile surjective.
19. Desenează un graf de ordin 5 în care toate nodurile să fie impare. Este posibilă problema? Justifică.

20. Trasează un graf de ordin 6 în care toate nodurile să fie pare.

21. Cinci depozite fac schimb de mărfuri (distribuie produse și se aprovizionează) astfel:
 – depozitul A face schimb de mărfuri cu depozitele D, F;
 – depozitul B face schimb de mărfuri cu depozitele A, C;
 – depozitul C face schimb de mărfuri cu depozitele D, E;
 – depozitul D face schimb de mărfuri cu depozitul F.
 a) Trasează graful care descrie relațiile dintre cele 5 depozite.

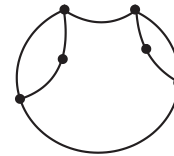
- b) Se stabilește un tip nou de regulă și anume: fiecare depozit este într-una dintre următoarele două situații: sau se aprovizionează (primește produse) sau distribuie produse. În rest, rămân aceleași relații între depozite. Trasează graful care descrie noua situație.

22. Se consideră următorul graf:

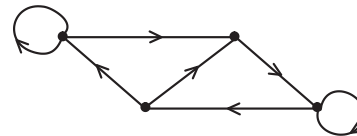


- a) Stabilește gradul fiecărui nod.
 b) Calculează suma tuturor gradelor și compară această sumă cu numărul muchiilor.
 c) Determină numărul de noduri impare.
 d) Indică un drum determinat de 4 noduri și un circuit cu 3 noduri.
 e) Există un drum care să treacă o singură dată prin toate nodurile? Dar un circuit cu aceeași proprietate?

23. În graful următor, elimină numărul minim de muchii astfel încât graful obținut să nu mai conțină circuite.



24. Fie graful de mai jos:



- a) Determină mulțimea nodurilor și mulțimea arcelor.
 b) Numerează nodurile și reprezintă printr-o diagramă cu săgeți aplicația multivocă a mulțimii nodurilor în ea însăși, care definește acest graf.

25. Rezolvă cu ajutorul unui graf arbore ecuația:
 $|x + |2x - 1|| = 7$.

26. Determină toate tipurile de grafuri arbore care au șase noduri. Deci trebuie să desenezi câteva grafuri cu proprietățile: oricare două nu sunt izomorfe și oricare alt graf arbore cu șase noduri este izomorf cu unul dintre cele desenate.

27. Desenează graful corespunzător următoarei aplicații multivoce. Mulțimea nodurilor este $\{A, B, C, D, E\}$, iar aplicația realizează asocierile:
 $A \mapsto \{B, C\}$; $B \mapsto \{A, E\}$; $C \mapsto \{A\}$; $D \mapsto \emptyset$; $E \mapsto \{B\}$.

Am reușit... ?!?

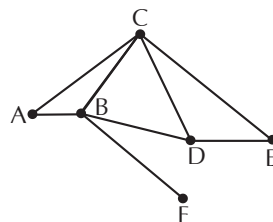
Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific tipul unui graf și elementele sale
- ◆ să transpun în reprezentare pe graf o problemă dată
- ◆ să utilizez grafuri pentru a determina soluții ale unor probleme
- ◆ să descriu toate variantele unei probleme cu ajutorul grafurilor?

Test de verificare

1. Pentru graful alăturat:

- a) precizează numărul de noduri și numărul de muchii;
- b) determină ordinul fiecărui nod;
- c) identifică două trasee care unesc A cu E;
- d) precizează un circuit al grafului;
- e) elimină cât mai puține muchii pentru ca graful rămas să fie un arbore.

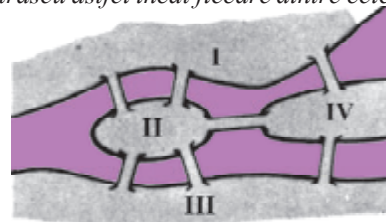


2. Reprezintă printr-un graf relația de divizibilitate între numerele naturale de la 1 la 10, unind printr-o muchie acele numere diferite care au proprietatea că unul dintre ele îl divide pe celălalt. Există pe acest graf drumuri de lungime 5?
3. Folosește graful situațiilor posibile pentru a calcula numărul variantelor de răspuns la un test-grilă format din 5 întrebări la care se răspunde DA sau NU.
4. Doi prieteni joacă tenis de câmp după sistemul „cel mai bun din 5 seturi”. Reprezintă printr-un graf toate situațiile ce pot să apară.

Lectură

Studiul unor structuri de tip graf a fost lansat pentru prima dată de Leonhard Euler în 1736. El a pornit de la problema celor șapte poduri din Königsberg. Enunțul acestei probleme este următorul: există un traseu astfel încât fiecare dintre cele șapte poduri să fie traversat o singură dată?

Se poate observa imediat că itinerariul nu poate să înceapă și nici să se termine în cel puțin două dintre cele patru regiuni I până la IV. În aceste regiuni se intră și se iese. Totuși, deoarece în fiecare regiune se poate ajunge printr-un număr impar de poduri, un astfel de itinerar nu este posibil. Euler și-a pus o problemă mai generală: în ce condiții un graf conex dat poate fi parcurs pe un drum închis astfel încât fiecare muchie să se acopere exact o dată? Un drum de acest tip există dacă și numai dacă în fiecare nod se întâlnesc un număr par de muchii.



O altă problemă celebră care a dus la dezvoltarea teoriei grafurilor este cea a trasării unei hărți folosind numai patru culori. Se demonstrează relativ ușor că sunt suficiente cinci culori pentru a colora orice hartă. Cartograful știu din experiență că o hartă politică poate fi desenată cu patru culori astfel încât două țări cu frontiera comună să fie colorate diferit. Problema dacă aceste patru culori sunt suficiente întotdeauna nu a putut fi demonstrată, însă ea a condus la dezvoltări matematice extrem de interesante și utile.

Unitatea de învățare 7

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Indică propozițiile adevărate.

Operații cu numere reale

1. a) $2,3 + 1,8 = 3,1$ b) $1,3 + 4,7 = 6$ c) $1,4 - 0,6 = 2$ d) $4,3 - 1,7 = 2,7$
 2. a) $2,13 > 3,1$ b) $0,472 < 0,51$ c) $1,3 + 0,7 \geq 1,3 + 0,2$ d) $3,5 + 0,2 > 1,2 + 2,5$.

Elemente de geometrie

Alege răspunsurile corecte!

3. Numărul de muchii ale unui cub este:
 a) 3 b) 4 c) 8 d) 12.
 4. Numărul de vârfuri ale unei prisme triunghiulare este:
 a) 3 b) 4 c) 8 d) 12.
 5. Dacă o piramidă are 10 fețe, atunci numărul de muchii ale sale este:
 a) 5 b) 6 c) 8 d) 10.

Rezolvarea ecuațiilor

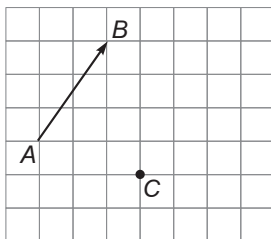
Rezolvă ecuațiile!

6. a) $2x + 3 = 1,6$ b) $x^2 - 2x - 4 = 0$ c) $2^x + 1 = 9$ d) $\log_2 x = 5$ e) $\sqrt{x-2} = 3$.

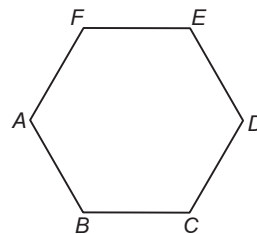
Răspunde la întrebări!

Vectori

7. Desenează vectorul \overline{CD} , egal cu vectorul \overline{AB} .



8. Pe hexagonul regulat de mai jos, reprezintă suma $\overline{AB} + \overline{FE}$, apoi vectorul $-\overline{DE}$.

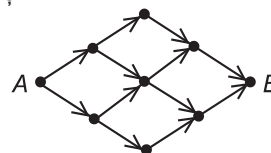
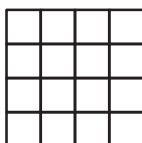


Logică

9. Precizează dacă raționamentul următor este corect.
 Astăzi nu este ziua în care se joacă meciul. Dacă meciul s-ar juca astăzi, stadionul ar fi plin de oameni, dar eu văd că nu este nimeni aici.
 10. Scrie enunțul obținut prin negarea următoarei propoziții:
 Dacă o piramidă are ca bază un hexagon, atunci numărul său de muchii este 12.

Numărare

11. Calculează câte numere naturale sunt între 102 și 347, inclusiv.
 12. Identifică numărul pătratelor din figură.
 13. Află câte drumuri există pe graful următor între A și B.



Drumuri în grafuri – optimizare

Problema optimizării

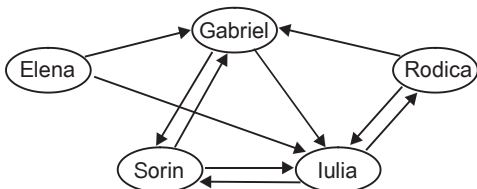
Observăm și explorăm!

O gamă variată de probleme cotidiene poate fi abordată cu ajutorul grafurilor. În aceste cazuri, folosind metode specifice de analiză, se pot lua decizii eficiente.

Exemplul 1: Liderul de grup

Diriginta clasei a XI-a C vrea să analizeze relațiile de simpatie și de antipatie ale membrilor unui grup de lucru.

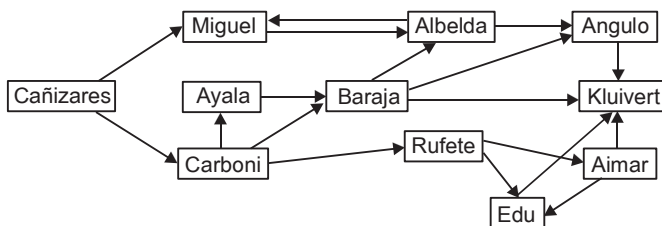
Pentru aceasta, ea a aplicat un test sociologic și a reprezentat informațiile obținute sub forma unor grafuri orientate. În desenul de mai jos, apare graful obținut din răspunsurile la întrebarea: „Atunci când primești o problemă de rezolvat, cu care dintre membrii grupului ai vrea să discuți mai întâi?”



Din această reprezentare, diriginta a concluzionat că Elena are probleme de acceptare în grup, precum și că Iulia este liderul echipei.

Exemplul 2: Strategia de joc

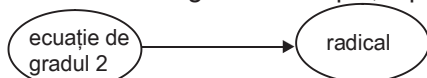
Pentru a analiza relațiile de joc, antrenorul echipei de fotbal F.C. Valencia, Sánchez Flores, a reprezentat modul în care sunt date de obicei pasele între jucători. El a obținut graful orientat de mai jos:



Prin această schemă, el a văzut că flancul drept al echipei are nevoie de antrenamente speciale, deoarece contraatacurile desfășurate pe această parte necesită prea multe pase pentru a duce mingea în fața porții adverse.

Exemplul 3: Hărțile conceptuale

Veronica vrea să își recapituleze materia din clasa a X-a. Ca să înțeleagă mai bine legăturile între diferite noțiuni, ea a întocmit o hartă a conceptelor, adică un graf orientat, în care nodurile sunt conceptele învățate, iar două concepte sunt unite printr-un arc dacă există un rezultat care le leagă. De exemplu, reprezentarea schematică:



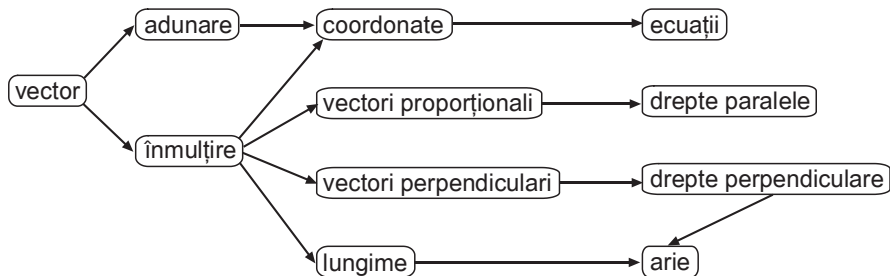
poate să însemne: „rezolvarea ecuației de gradul 2 se face cu o formulă care conține radicali”.

❶ Ești de aceeași părere cu diriginta clasei? Pe ce crezi că s-a bazat ea când a formulat aceste concluzii?

❷ Analizează graful relațiilor de joc și răspunde! Care crezi că este cel mai important jucător din această echipă? De ce?

În acest fel, pentru o parte din materia clasei a X-a, Veronica a obținut următoarea hartă a conceptelor:

3 Enunță trei dintre rezultatele care au condus-o pe Veronica la trasarea arcelor din hartă.



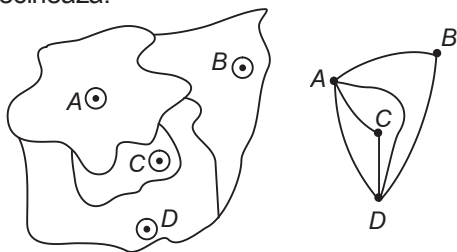
Harta realizată a ajutat-o pe Veronica să înțeleagă mai bine noțiunile de geometrie învățate.

În general

Reprezentările cu grafuri pot conduce la o înțelegere rapidă a situației analizate. Ele pot fi folosite în situații foarte diverse.

Exerciții și probleme

1. Putem transforma o hartă, cu ajutorul unui graf, prezentând schematic țările și modul în care ele se învecinează.



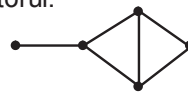
Astfel, pentru harta de mai sus am înlocuit fiecare țară cu un nod al grafului, simbolizând capitala și am trasat o muchie pentru fiecare porțiune de graniță comună.

a) Transformă într-un graf porțiunea din harta Europei reprezentată mai jos.

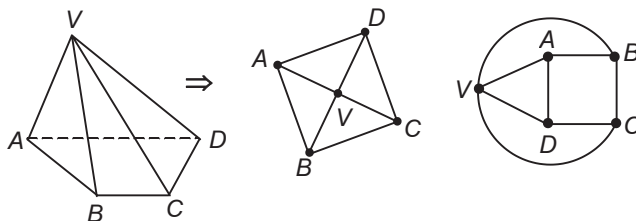


b) În ce caz graful asociat unei hărți este conex?

c) Imaginează harta unei regiuni al cărei graf asociat este următorul.



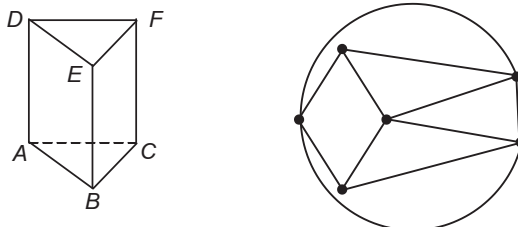
2. Fiecărui poliedru i se asociază graful vârfurilor și muchiilor sale, printr-un procedeu de aplatizare. De exemplu, piramidei $VABCD$ de mai jos, i se poate asocia oricare dintre grafurile alăturate.



a) Asociază aceleiași piramide alte două grafuri (izomorfe cu cele de mai sus).

b) Reprezintă în două moduri graful asociat prismei $ABCDEF$ din desen.

c) Desenează un poliedru corespunzător grafului de mai jos.



Drumuri optime în grafuri



Analizăm și generalizăm!

Multe dintre problemele practice reprezentate prin grafuri necesită determinarea unor drumuri care verifică anumite proprietăți.

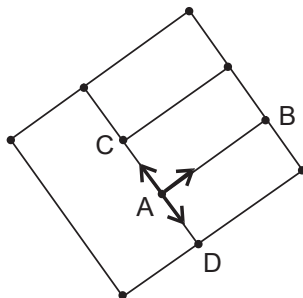
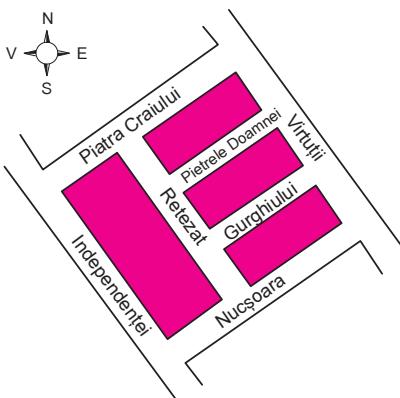
Pentru grafurile în care numărul vârfurilor este mic, putem răspunde la o astfel de întrebare descriind toate drumurile posibile. Dacă numărul vârfurilor este însă mare, acest procedeu poate să ia mult prea mult timp. De aceea, suntem interesați să găsim un *algorithm*, adică o succesiune de reguli prin aplicarea cărora determinăm soluția optimă pentru problema dată.

◆ Ce este un circuit eulerian?

Să analizăm!

Cartierul în care locuiește Mircea are forma din imaginea alăturată.

În fiecare seară, atunci când se plimbă cu bicicleta, Mircea pleacă de la locuința sa (marcată printr-un punct pe hartă) și încearcă să treacă pe toate străzile cartierului o singură dată. Pentru a găsi un astfel de circuit, el a reprezentat schematic cartierul sub forma grafului de mai jos, în care nodurile sunt intersecțiile, iar muchiile sunt străzile cartierului.



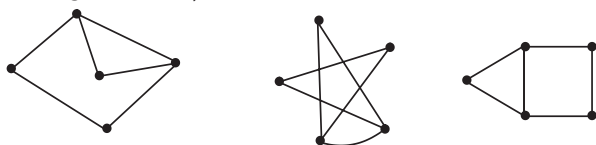
Mircea are trei posibilități de pornire de acasă: pe strada Gurghiului, pe Retezat spre Piatra Craiului sau pe Retezat spre Nucșoara (acestea sunt marcate pe graf prin muchiile AB , AC , respectiv AD). El trebuie să revină (cel puțin la sfârșit!) în punctul A , pe o altă stradă (muchie) decât cea pe care a plecat. De aceea, una dintre aceste muchii ale grafului nu poate fi închisă într-un astfel de circuit.

În general

Un circuit al unui graf se numește *circuit eulerian*, dacă poate fi parcurs în întregime trecând o singură dată prin fiecare muchie a grafului dat. Un graf este *eulerian* dacă are cel puțin un circuit eulerian.

Exemple

Următoarele grafuri conțin circuite euleriene.



1 Identifică pe harta alăturată două circuite distincte, pornind din punctul marcat.

2 Pe schița sub formă de graf a cartierului lui Mircea, identifică strada Independenței și locul din care pleacă Mircea la plimbare.

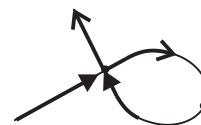


Leonard Euler
(1707 - 1783)

Să demonstrăm!

Un graf conex este eulerian dacă și numai dacă fiecare nod are ordin par.

Să presupunem că graful are un circuit eulerian. Marcăm pe acest circuit direcția de parcurgere; atunci numărul arcelor care intră într-un nod este egal cu numărul arcelor care ies din acesta. Deci fiecare nod are ordin par.



3 În enunțul alăturat, apare exprimarea „dacă și numai dacă”. Cum se reflectă această formulare în demonstrație?

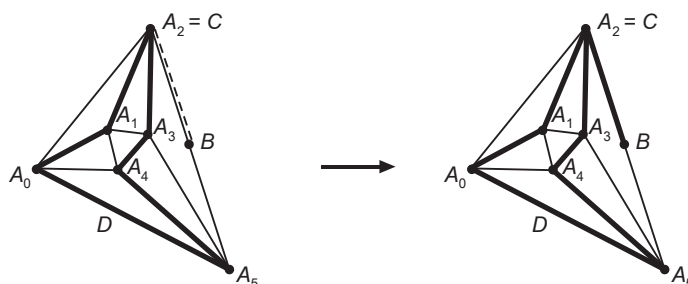
4 Urmărește demonstrația și răspunde. Unde folosim ipoteza că fiecare nod are ordin par?

Fie acum un graf conex, în care fiecare nod are ordin par și fie $D = A_0A_1A_2 \dots A_{r-1}A_r$ un drum de lungime maximă în graful dat, care nu trece de două ori prin aceeași muchie (dar care poate trece de mai multe ori prin același nod). Deoarece D este de lungime maximă, toate muchiile care pleacă din A_r sunt deja conținute în D

Deoarece numărul acestor muchii este par, deducem că A_r și A_0 coincid ..., deci D este un circuit. Să presupunem prin absurd că D nu este circuit eulerian; există atunci o muchie BC neparcursă de D , care are un capăt (sau amândouă) printre punctele A_0, A_1, \dots, A_r

Pentru a putea urmări raționamentul, analizăm graful de mai jos și presupunem $C = A_2$. Considerăm drumul $BCA_3A_4 \dots A_rA_1A_2$, care are lungime cu 1 mai mare decât D , ceea ce contrazice alegerea acestuia

Contradicția obținută arată că circuitul D parcurge toate muchiile grafului o singură dată, deci D este circuit eulerian.

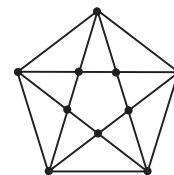


5 Demonstrează că un graf are un drum eulerian dacă și numai dacă numărul nodurilor de ordin impar este 2. Pentru demonstrație, adaugă o muchie la acest graf și aplică teorema anterioară!

6 Trasează un graf care are toate nodurile de ordin par. Propune unui coleg să realizeze un circuit eulerian în acest graf.

Să aplicăm!

Graful din imaginea alăturată are toate nodurile de ordin par, deci este un graf eulerian. Practic, asta înseamnă că putem reproduce desenul fără să ridicăm creionul de pe coala de hârtie.



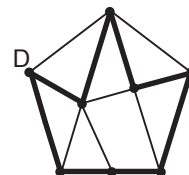
◆ Ce este un circuit hamiltonian?

Să presupunem că, în loc de un circuit care trece prin fiecare muchie a unui graf o singură dată, căutăm un circuit care trece prin fiecare nod al grafului o singură dată. Astfel de probleme apar în practică, de exemplu, în legătură cu aprovizionarea unor magazine printr-un același transport de marfă.

Să analizăm!

În cartierul Laviniei, la fiecare colț de stradă este un chioșc al firmei „Util”. În fiecare dimineață, un microbuz al firmei pleacă de la depozitul D și aprovizionează toate chioșcurile.

Pentru a scurta drumul, șoferul microbuzului a identificat circuitul marcat pe desen, care trece o singură dată prin fiecare nod al grafului.



7 Analizează schema cartierului Laviniei și găsește un alt circuit care trece prin toate nodurile.

În general

Un circuit al unui graf se numește *circuit hamiltonian*, dacă poate fi parcurs trecând prin fiecare nod o singură dată. Un *graf* este *hamiltonian* dacă are cel puțin un circuit hamiltonian.

Denumirea de graf hamiltonian provine de la jocul lansat în 1859 de către matematicianul William Hamilton (1805-1865). „Câmpul de joc” este un dodecaedru regulat, adică un corp geometric cu toate fețele pentagoane regulate. Jocul are un singur jucător și presupune găsirea unui circuit pe muchiile dodecaedrului, care să treacă prin fiecare vârf o singură dată.

Pentru ca jucătorul să poată face încercări, Hamilton a realizat dodecaedrul din lemn și a montat în fiecare vârf câte un cui; prin întinderea unui fir de ață între aceste cui, se putea vizualiza traseul parcurs.

Pentru a putea analiza și noi această problemă, desenăm graful planar asociat dodecaedrului. (E ca și cum am „întinde” fețele până când dodecaedrul se aplatizează!). Un circuit hamiltonian este marcat pe figura 2.

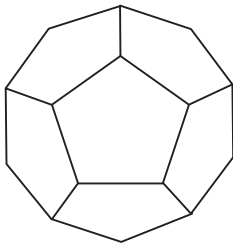


Fig. 1

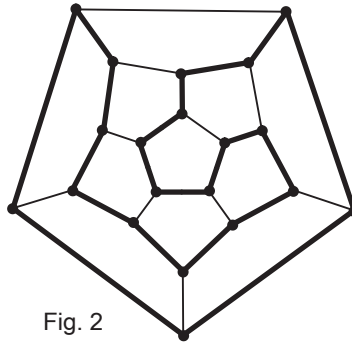


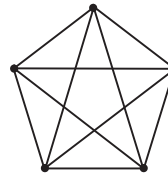
Fig. 2

Nu se cunosc condiții necesare și suficiente pentru a decide dacă un graf dat este sau nu hamiltonian. Câteva rezultate parțiale sunt enunțate în continuare.

Să verificăm!

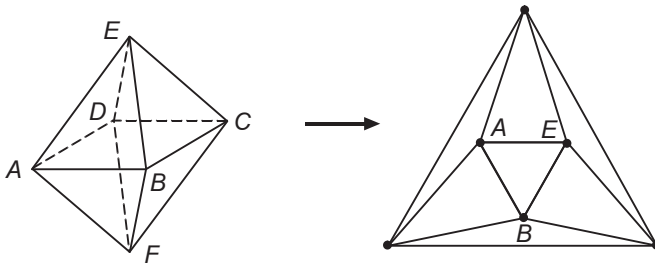
1) Orice graf complet (în care fiecare două noduri sunt unite printr-o muchie) este hamiltonian.

Verifică această teoremă pentru graful complet cu 5 noduri din figura alăturată.



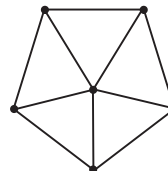
2) Grafurile asociate poliedrelor regulate sunt hamiltoniene.

Verifică această teoremă pentru graful asociat unui octaedru regulat, desenat în figura de mai jos.



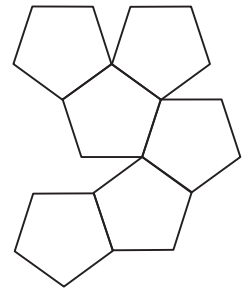
3) Dacă G este un graf cu $n \geq 3$ noduri, astfel încât ordinul fiecărui nod este cel puțin $\frac{n}{2}$, atunci G este hamiltonian.

Verifică această teoremă pentru graful din figura alăturată.



▲ Dodecaedrul regulat este un poliedru cu 12 fețe, 20 de vârfuri și 30 de muchii.

8 Decupează din carton două figuri de forma celei de mai jos și construiește un dodecaedru.



▲ Există cinci poliedre regulate: tetraedrul regulat, cubul, octaedrul regulat, dodecaedrul regulat și icosaedrul regulat.

9 Pe graful asociat octaedrului regulat, denumește toate nodurile, prin corespondență cu vârfurile octaedrului.

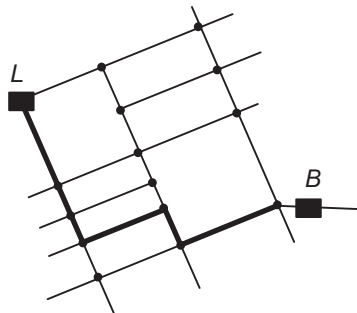
▲ Rezultatul enunțat a fost demonstrat de Dirac, în 1952.

◆ Cum determinăm drumuri de lungime minimă?

Să analizăm!

10 Câte semafoare sunt în cartierul domnului Popescu?

În fiecare dimineață, domnul Popescu pleacă de acasă la serviciu cu mașina personală. Pentru a scurta timpul de deplasare, el a căutat un traseu care să conțină cât mai puține intersecții, din cauza perioadei de așteptare la semafor. Harta zonei în care locuiește domnul Popescu este reprezentată schematic în imaginea de mai jos, în care L și B reprezintă locuința, respectiv biroul său.



11 Identifică un alt drum de la locuința până la biroul domnului Popescu.

12 Desenează un drum oarecare de la L la B și află lungimea acestuia.

13 Continuă algoritmul și asociază fiecărui nod al grafului un număr natural.

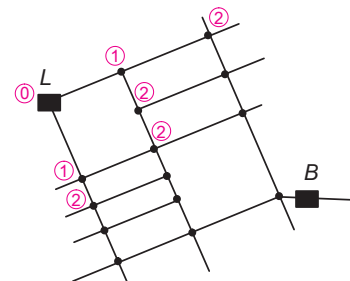
14 Marchează pe schița cartierului făcută de domnul Popescu un drum de lungime 4 între locuință și birou.

Pentru fiecare drum între L și B , domnul Popescu a definit „lungimea drumului” ca fiind numărul de semafoare întâlnite în cale. De exemplu, drumul marcat pe figură are lungimea 6.

Deoarece este dificil să identifice toate drumurile posibile între L și B , domnul Popescu a adoptat o altă strategie: a alocat fiecărui semafor un număr natural, egal cu lungimea minimă a unui drum de acasă până la semaforul respectiv.

El a procedat astfel:

- a atașat nodului L numărul 0, iar nodurilor legate prin muchii de L – numărul 1;
- pentru fiecare nod care nu a fost încă marcat, legat prin muchii de nodurile marcate cu 1, a atașat numărul 2;
- a continuat la fel, atașând nodurilor numere consecutive, până când a marcat toate nodurile.



În acest fel, domnul Popescu a demonstrat că drumul minim de acasă până la serviciu are lungimea 4.

În general

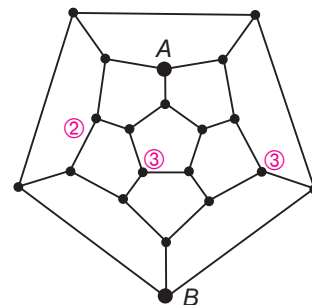
Lungimea minimă a unui drum între două noduri ale unui graf conex se poate determina prin *algoritmul de etichetare succesivă a nodurilor*, descris anterior. Drumul minim este format din muchii care unesc noduri marcate cu numere consecutive.

Să aplicăm!

Pentru graful asociat unui dodecaedru regulat, din figura alăturată, determinăm drumul de lungime minimă dintre nodurile A și B . Pentru aceasta, am etichetat unele dintre nodurile grafului conform algoritmului de mai sus. Continuă etichetarea, până ajungi la B .

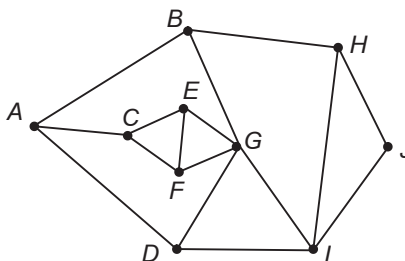
Demonstrează apoi că între oricare două noduri ale acestui graf, există un drum de lungime mai mică sau egală cu 5.

Prin algoritmul de etichetare a nodurilor, determinăm lungimea drumului minim între două noduri ale unui graf. Pentru a obține însă efectiv un astfel de drum minim, este nevoie să organizăm datele, astfel încât succesiunea pașilor făcuți să poată fi reconstituită.

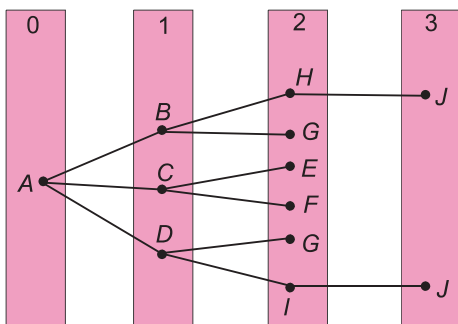


Exemplu

Să considerăm graful din imaginea alăturată, în care am notat nodurile cu litere de la A la J. Vrem să determinăm drumurile de lungime minimă care unesc nodul A cu celelalte noduri ale grafului. Pentru aceasta, atașăm nodului A numărul 0, nodurilor B, C și D numărul 1 și așa mai departe, ca în algoritmul folosit de domnul Popescu.



Reținem ordinea și motivul pentru care marcăm un nod, în graful-arbore de mai jos.



▲ În graful-arbore al drumurilor minime, fiecare nod apare pe un singur nivel.

15 Explică modul în care a fost alcătuit graful-arbore alăturat. Procedează la fel pentru graful cartierului domnului Popescu.

Observând acest mod de organizare a datelor, putem afirma că:

- există două drumuri minime, de lungime 2, între A și G; acestea sunt ABG și ADG;
- există un singur drum de lungime minimă de la A la E.

Să aplicăm!

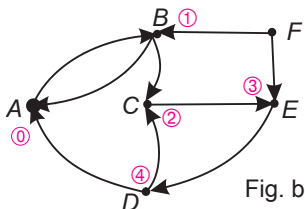
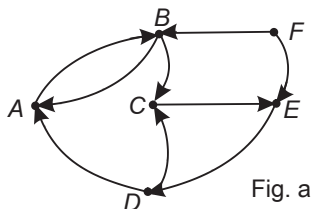
Pentru graful din exemplul anterior, alcătuieste graful-arbore al drumurilor minime cu un capăt în E. Demonstrează că există un unic drum minim de la E la J.

◆ Cum determinăm drumuri minime în grafuri orientate?

Metodele prezentate mai sus pot fi aplicate analog și pentru grafuri orientate. Singura deosebire, în acest caz, este aceea că orientarea arcelor corespunde ordinii crescătoare a numerelor atașate nodurilor.

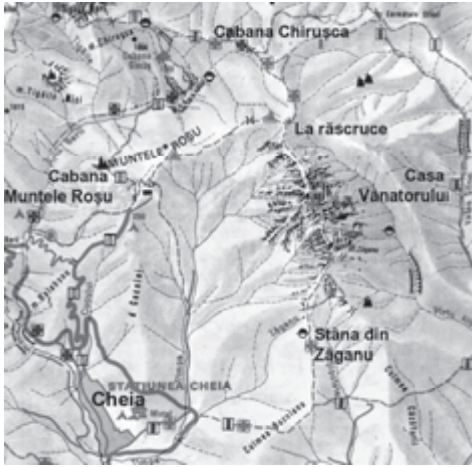
Exemplu

Pentru graful din figura a) de mai jos, vrem să determinăm lungimile minime ale unor drumuri ce pleacă din A spre celelalte noduri. Prin atașarea de numere consecutive, obținem figura b).



16 Desenează un graf orientat în care drumul minim între două noduri să aibă lungimea 5.

Deducem că drumul minim de la A la D are lungimea 4, iar de la A la F nu există un drum în graful dat.

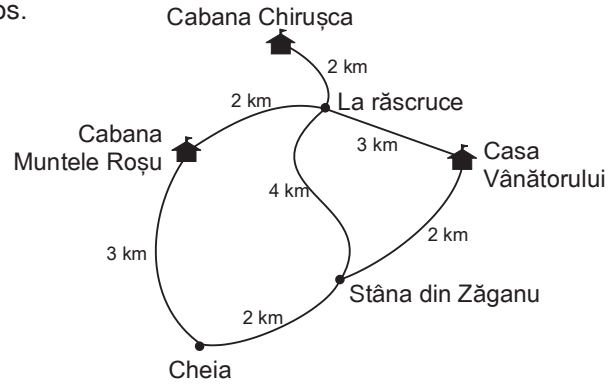


◆ Cum determinăm drumuri minime în grafuri ponderate?

Să analizăm!

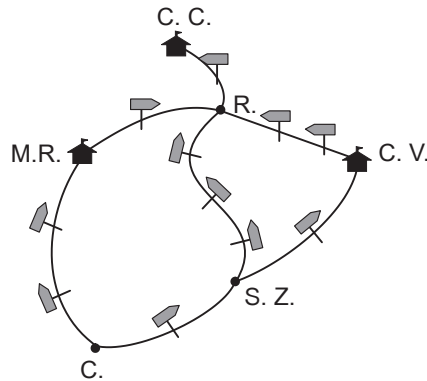
În vacanța de vară, Lulia și colegii ei vor să organizeze o excursie în munții Ciucaș. Lulia a procurat o hartă a masivului și a identificat trasee turistice pe care le-ar putea parcurge.

Ca să determine traseul optim între Cheia și Cabana Chirușca, Lulia a simplificat harta, reprezentând totul sub forma grafului ponderat de mai jos.



Desigur, graful precizează doar lungimea unui traseu, nu și dificultatea acestuia, dar, pentru un prim plan de călătorie, este suficient și atât.

Lulia ar vrea să determine algoritmic drumul minim, și nu prin încercări. Ea și-a imaginat că, de-a lungul fiecărui drum, sunt postate indicatoare la distanța de 1 km între ele. Prin reprezentarea acestor indicatoare pe graful traseelor, Lulia a obținut un graf mai detaliat în care toate muchiile au lungimea de 1 km.



17 Etichetează nodurile grafului și verifică afirmația lui Lulia. Identifică drumul minim de la Cheia la Chirușca.

Lulia a aplicat, pentru acest graf, metoda de determinare a drumului minim prin *etichetarea succesivă a nodurilor*. În acest mod, ea a demonstrat că lungimea drumului minim între Cheia (C) și Cabana Chirușca (C.C.) este de 7 km.

În general

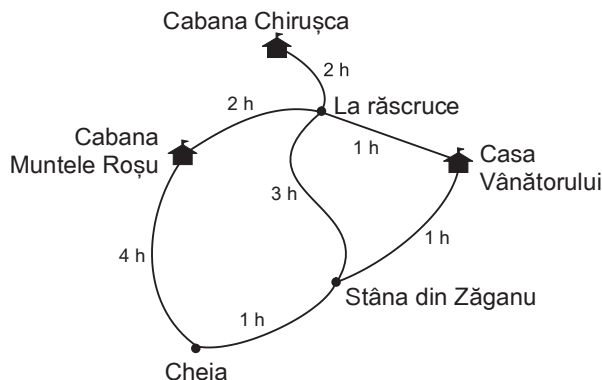
Drumurile minime dintr-un graf ponderat, în care muchiile au ca ponderi numere naturale, se pot determina prin algoritmul de etichetare a nodurilor.

Pentru aceasta, *adăugăm* pe muchiile grafului dat *noi noduri*, astfel încât fiecare muchie a grafului obținut să aibă ponderea 1.

Să aplicăm!

Căutând informații mai amănunțite, Lulia a găsit un ghid turistic despre munții Ciucaș, în care traseele turistice sunt prezentate mai detaliat. Din această carte, ea a înțeles că importantă este nu doar lungimea unui traseu, ci, mai ales, timpul estimativ în care acesta ar putea fi parcurs. De aceea, Lulia a refăcut graful de mai sus, precizând, de data aceasta, timpul de parcurs. Ea și-a imaginat că, de-a lungul unui traseu,

trebuie să se odihnească după fiecare oră de mers și a marcat pe graf locurile de popas. Marchează și tu aceste noduri ale grafului, apoi determină traseul ce poate fi parcurs în timpul minim.

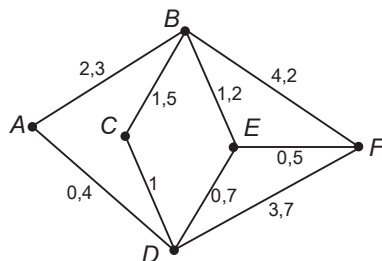


◆ **Cum putem afla drumul minim în cazul unor grafuri cu ponderi arbitrare?**

Algoritmul prezentat anterior nu poate fi aplicat decât în cazul în care ponderile sunt numere naturale. În continuare analizăm un algoritm care se poate aplica în cazul unor grafuri cu ponderi numere reale.

Să analizăm!

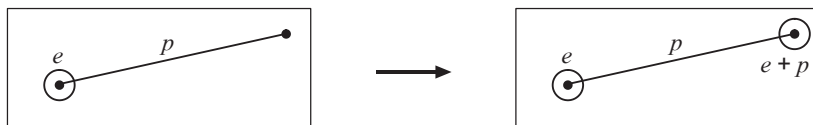
Pentru graful ponderat din figura de mai jos, vrem să determinăm lungimile drumurilor minime de la A la toate celelalte noduri. Vom folosi un algoritm de etichetare succesivă a nodurilor, asemănător cu cel prezentat în paragraful anterior.



▲ Acest algoritm a fost găsit de către Dijkstra, în 1959.

18 Pentru fiecare nod al grafului alăturat, determină muchia de pondere minimă care pleacă din acel nod.

Inițial, nodul A primește eticheta 0. La fiecare pas, determinăm toate muchiile grafului, ce unesc noduri etichetate deja, cu noduri neetichetate încă. Dintre aceste muchii, alegem acea muchie care are proprietatea că suma $e + p$ este minim posibilă, unde e este eticheta nodului din capăt, iar p este ponderea muchiei.



După ce am identificat această muchie, etichetăm nodul „liber” cu $e + p$ și continuăm analog, până când toate nodurile devin etichetate.

Etichetele obținute sunt lungimile drumurilor minime de la A la nodurile grafului.

Organizăm datele într-un tabel, în care pe prima linie apare eticheta nodului, iar în a doua linie apare nodul anterior:

A	B	C	D	E	F

Pentru graful de la care am pornit în exemplu, primii trei pași ai algoritmului sunt descriși în continuare.

Pasul 1.

- ▲ Pornim din A. Marcăm acest lucru în tabel astfel:
- A primește eticheta 0.
 - Nu există un nod anterior lui A (marcăm -).

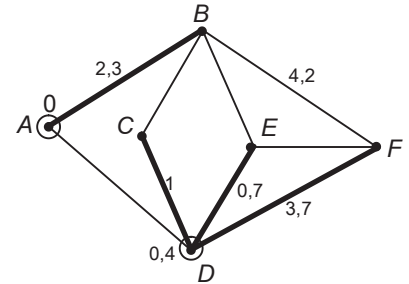
A	B	C	D	E	F
0					
-					

Pasul 2. Printre muchiile care pleacă din A, o identificăm pe cea de lungime minimă; aceasta este AD. Atribuim punctului D eticheta 0,4 și înregistrăm faptul că în D am ajuns venind din A (adică predecesorul lui D este A). Obținem tabelul:

A	B	C	D	E	F
0			0,4		
-			A		

- ▲ Marcăm în tabel:
- D primește eticheta 0,4.
 - Nodul anterior lui D este A.

Pasul 3. Considerăm muchiile care pleacă din A sau D și ajung într-un nod fără etichetă. Acestea sunt cele îngroșate pe figură.



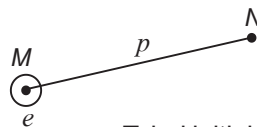
Suma $e + p$ (etichetă + pondere) este minimă pentru muchia DE; atribuim lui E eticheta „sumă” 1,1 (adică $0,4 + 0,7$) și ținem minte că predecesorul lui E este D. Obținem tabelul de mai jos:

A	B	C	D	E	F
0			0,4	1,1	
-			A	D	

- ▲ Marcăm în tabel:
- E primește eticheta „sumă” 1,1.
 - Nodul anterior lui E este D.

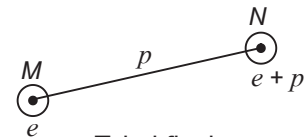
Observăm că, dacă la un pas alegem o muchie oarecare MN, unde M are eticheta e , iar MN are ponderea p , tabelul se modifică așa cum se arată în continuare:

- 19 Continuă algoritmul și etichetează toate nodurile grafului.



Tabel inițial

M	N
e	
Q	



Tabel final

M	N
e	$e + p$
Q	M

- 20 Ce semnificație are punctul Q care apare în tabel?

În general

Lungimea unui drum minim este eticheta atribuită nodului țintă, iar un astfel de drum se află scriind succesiv predecesorii nodului țintă.

Acest algoritm, numit algoritmul Dijkstra, determină drumul minim de la un nod al unui graf ponderat la orice alt nod al grafului.

Să aplicăm!

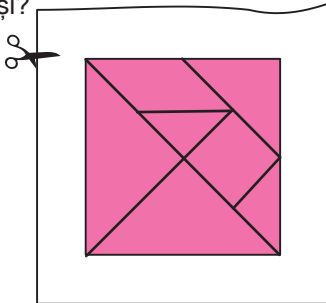
- Din calculele făcute mai sus, am obținut că:
- drumul minim de la A la E are lungimea 1,1;
 - un astfel de drum este $E \leftarrow D \leftarrow A$.

Analog, deducem că, spre exemplu, drumul minim dintre A și F este ADEF și are lungimea 1,6.

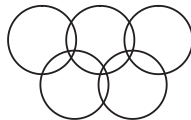
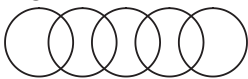
- 21 Verifică lungimea unui drum minim de la A la F folosind algoritmul Dijkstra.

Exerciții și probleme

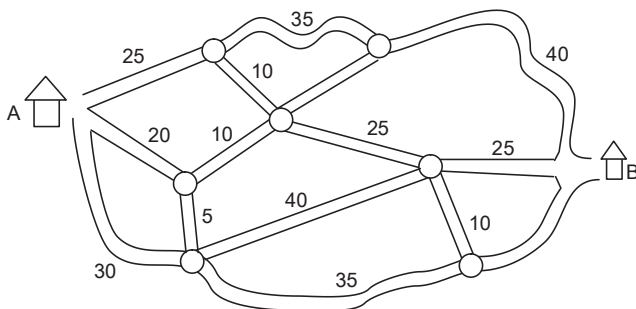
1. Raluca a desenat pe o foaie de hârtie figura de mai jos, din care se obțin cele 7 piese ale jocului numit Tangram. Ea ar vrea să decupeze toate piesele jocului, printr-o mișcare continuă a foarfecii. Ce crezi, va reuși?



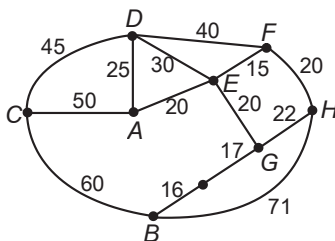
2. Realizează desenele următoare printr-o singură trăsătură de creion. Formulează problema în termeni de grafuri.



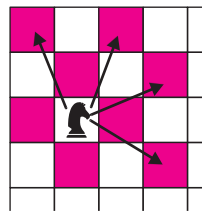
3. Un grup de excursioniști trebuie să ajungă de la cabana A la cabana B. Ei se pot deplasa pe traseele turistice reprezentate pe hartă, unde numerele de pe acestea reprezintă timpul de mers (în min.) Care este drumul ce poate fi parcurs cel mai repede?



4. În desenul alăturat este reprezentată rețeaua de șosele ale unui județ și distanțele între principalele localități. O firmă de transport vrea să determine drumuri între A și B, ce nu conțin circuite și au lungime minimă (pentru călători grăbiți), respectiv lungime maximă (pentru turiștii ce vor să viziteze cât mai multe obiective). Folosește un graf arbore (în care treci, pentru fiecare localitate, continuările posibile ale unui drum fără circuite) pentru a determina variantele necesare firmei.



5. a) Pe tabla de șah, calul se poate muta în formă de L, așa cum se arată în desen.

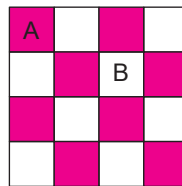


Asociază unei table 3×3 grafurile mutărilor calului.

Formulează în termenii teoriei grafurilor problema următoare:

Pe o tablă de șah $n \times n$, poate calul să treacă o dată prin fiecare pătrățel al tablei?

- b) Pe tabla de șah, turnul se poate muta doar pe orizontală sau verticală.



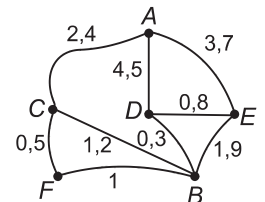
Asociază unei table 4×4 grafurile mutărilor turnului.

Formulează în termenii teoriei grafurilor problema:

Pe tabla 4×4 din figură, vrem să determinăm modul în care mutăm turnul, pentru a ajunge din A în B trecând prin toate căsuțele câte o dată.

6. a) Pentru a determina drumul minim dintre nodurile A și B din grafurile de mai jos, Marian a început să completeze tabelul etichetelor și predecesorilor, așa cum a învățat la școală.

A	B	C	D	E	F
0		2,4			
-		A			



Continuă algoritmul și determină drumul minim de la A la B.

b) În rezolvarea unei probleme asemănătoare, Sorin a completat tabelul, dar nu mai știe care este grafurile de la care a pornit. Ajută-l pe Sorin și desenează un graf corespunzător tabelului de mai jos. Este soluția unică?

A	B	C	D	E
0	0,2	0,9	1,2	0,7
-	A	E	B	B

7. Reprezintă cu ajutorul unui graf orientat funcția descrisă prin următorul tabel de valori:

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	4	5	3

8. Pentru mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$, reprezintă printr-un graf orientat relația „mai mic decât”. Câte drumuri are acest graf?

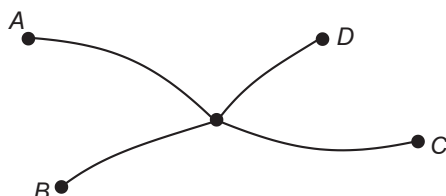
Aplicăm și dezvoltăm!

Determinarea unor drumuri optime în grafuri apare ca o necesitate în multe situații din viața cotidiană. Cunoașterea unor algoritmi specifici de rezolvare a acestor probleme poate să ne ajute în alegerea variantei optime în situații în care necesită analiza multor cazuri greu de inventariat.

Exemplul 1: Optimizarea rețelelor de transport

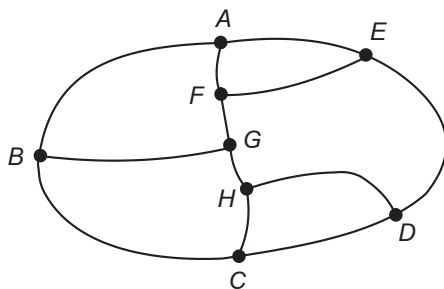
Societatea de transport „Troleibuzul” hotărăște să-și reorganizeze cursele, fără să-și schimbe rețeaua de cabluri existentă. Societatea dorește să facă acest lucru astfel ca fiecare porțiune de drum să fie parcursă de un singur troleibuz; pasagerii urmează să se transfere de la o cursă la alta, până când ajung la destinație. Oricât de complicată ar fi rețeaua, este întotdeauna posibil să găsim un astfel de sistem de curse. Pentru aceasta, e suficient să stabilim pe fiecare porțiune de rețea, între două intersecții consecutive, câte o cursă care să facă naveta. Aceasta ar necesita însă un număr mare de curse, care ar face călătoria dificilă și ar mări costurile de exploatare. Trebuie deci determinat numărul minim de trasee necesare, pentru ca transportul să se optimizeze.

Într-un oraș mic, cu puține drumuri de transport, soluția se găsește ușor.



De exemplu, pentru o rețea ca în figura alăturată, sunt suficiente două curse. Capetele acestor curse vor fi în nodurile de ordinul 1 ale grafului, care sunt A, B, C și D.

1) Determină și alte trasee care acoperă fiecare rețea desenată.

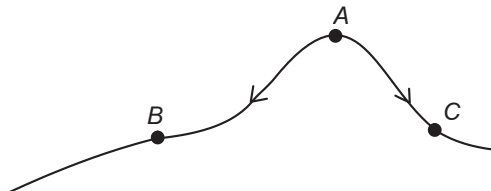


În rețeaua alăturată (care include și o linie de centură), toate nodurile au ordine impare. În acest caz, orice nod trebuie să fie capătul unei curse deoarece, în caz contrar, două curse diferite vor avea o porțiune comună de drum. Deducem că numărul minim de curse ar putea să fie 4. O posibilă soluție este considerarea traseelor:

A-F-G-H-D-C; H-C-B-G; B-A-E-F; E-D.

În general, este dificil de determinat sistemul optim de transport, adică sistemul cu număr minim posibil de curse. În mod sigur însă, un astfel de sistem există. Putem face câteva precizări despre situația optimă.

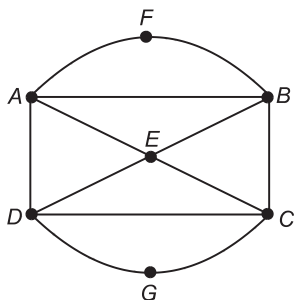
1) Două curse diferite nu pot avea același capăt.



Dacă există o cursă între A și B și o alta între A și C, le putem înlocui cu o „cursă directă” B-A-C. Astfel, numărul de curse scade cu 1 și găsim o repartizare mai bună a curselor.

▲ Astfel de situații sunt des întâlnite în organizarea mersului trenurilor, în care cursele pe distanțe lungi sunt preferate unora locale.

2) Dacă fiecare nod al rețelei este de ordin par, atunci este suficientă o singură cursă. În acest caz, cursa parcurge într-un circuit întreaga rețea.



Într-adevăr, la orice trecere printr-un nod, există un drum pe care cursa vine și un drum pe care pleacă. Cum numărul de muchii cu capătul în nod este par, cursa își poate continua de fiecare dată drumul pe o altă porțiune de traseu.

De exemplu, pentru rețeaua de transport alăturată, un posibil circuit este

$A-B-C-G-D-C-E-B-F-A-E-D-A$

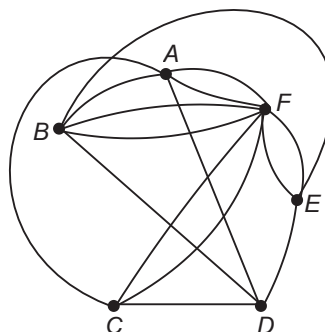
Tot o singură cursă este suficientă și dacă rețeaua are exact două noduri de ordin impar. În acest caz, cursa are capetele în nodurile impare ale grafului.

3) Numărul minim de curse necesar parcurgerii rețelei este cel puțin egal cu jumătate din numărul de noduri de ordin impar.

Aceasta deoarece în orice nod de ordin impar trebuie să se afle capătul unei curse și orice cursă, care nu e un circuit are două capete.

Exemplul 2: Jocul de tenis

Andrei, Bogdan, Claudia, Dan, Elena și Florin au jucat tenis de masă după sistemul „învingătorul continuă”. Jocul a fost pasionant pentru că nimeni nu a reușit să învingă în două partide consecutive. Se știe că Dan a jucat cu toți prietenii, în afară de Florin, iar Florin a jucat de câte două ori cu fiecare dintre ceilalți (desigur, fără Dan!). S-au mai jucat partidele Andrei-Bogdan, Bogdan-Elena și Claudia-Andrei. Știind că la primul joc a participat Claudia, vrem să aflăm cine a câștigat în ultimul joc.



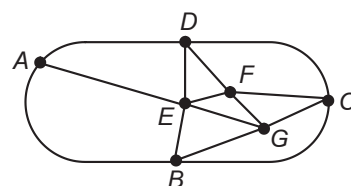
Pentru aceasta, reprezentăm situația jocurilor printr-un multigraf în care nodurile simbolizează jucătorii, iar muchiile sunt jocurile disputate.

Succesiunea de partide, în care câștigătorul rămâne să joace și partida următoare (dar pe care o pierde – conform precizării din enunț!) se transpune într-un drum eulerian pe graful reprezentat.

Acest graf are două noduri impare – și anume, A și B; deci Andrei și Bogdan sunt printre jucătorii din prima și din ultima partidă. Deoarece Claudia a jucat în prima partidă, iar Claudia și Bogdan nu au disputat nici un joc, înseamnă că prima confruntare a fost între Andrei și Claudia. De aceea, în ultimul joc a câștigat Bogdan.

2) Identifică și alte circuite pentru rețeaua desenată.

3) Precizează un traseu prin care poate fi parcursă rețeaua de mai jos. Este util să identifice mai întâi capetele traseului.



4) Propune o posibilă succesiune a partidelor disputate, respectând toate indicațiile din enunț.

Exerciții și probleme

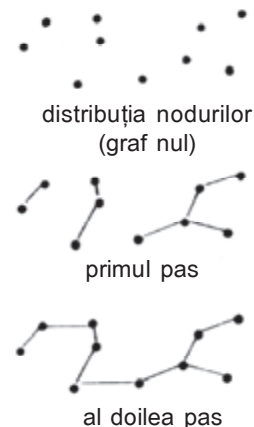
1. Grafurile întâlnite în practică au adesea o structură foarte generală și problema principală este aceea a găsirii unui algoritm pentru soluția efectivă a unei probleme de optimizare legată de graf. Un exemplu de astfel de problemă este problema celei mai ieftine rețele telefonice.

Trebuie legate n posturi printr-o rețea telefonică cu costuri minime, astfel încât punctele de racord să fie chiar posturile.

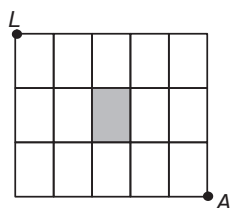
Primul pas: se unește fiecare nod cu nodul pentru care costul legăturii este minim. Se obțin astfel mai mulți arbori.

Al doilea pas: se asimilează fiecare arbore cu un punct și se repetă procedeul. Dacă se continuă în acest mod, se întrerupe procedeul atunci când rămâne un singur arbore. Acesta este arborele minimal căutat.

Câte posibilități sunt, dacă se încearcă toate variantele în cazul a 10 posturi?



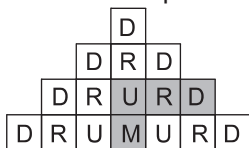
2. Cartierul lui Marius are forma de mai jos: în mijlocul cartierului este un parc, iar dreptele trasate sunt străzile din cartier.



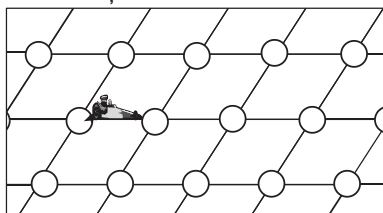
În fiecare seară, când pleacă de la liceu (L), Marius vrea să se relaxeze puțin și trece pe o latură a parcului. Bunica lui (care se sperie ușor) l-a rugat însă să nu întârzie prea mult și să vină acasă (A) pe drumul cel mai scurt.

- Reprezintă unul dintre drumurile pe care le poate alege Marius, ținând cont și de rugămintea bunicii.
- În drumul de la liceu acasă, poate Marius trece pe orice stradă din cartier respectând toate condițiile din enunț? Dacă nu, identifică o astfel de situație.
- Formulează enunțul sub forma unei probleme de grafuri orientate.
- Calculează pe câte drumuri diferite se poate întoarce Marius acasă.
- Propune și tu o problemă asemănătoare. Indică o demonstrație.

3. La un concurs cu premii, s-a cerut participanților să găsească numărul de drumuri din tabelul de mai jos, astfel încât pe fiecare drum să apară doar litere alăturate, ce formează împreună cuvântul DRUM. (Un drum posibil este marcat prin culoare pe figură.)

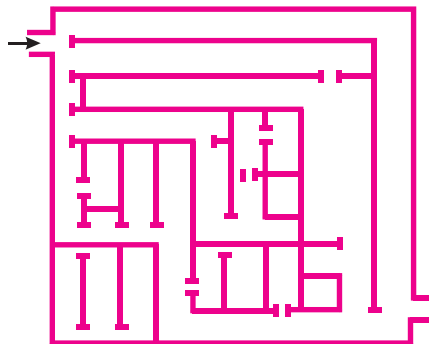


4. Considerăm un caroiaj $n \times n$, care are „străzi” de lungime 1 și „intersecții”. Pe acest „teren” vrem să identificăm circuite auto care trec o singură dată prin fiecare intersecție.

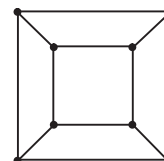


- Formulează problema, folosind termenii din această Unitate de învățare.
- Studiază existența unui astfel de circuit, pentru $n = 2, 3$ și respectiv 4.
- Desenează un circuit pe „terenul” 9×9 .

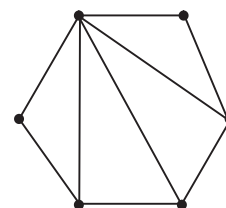
5. Găsește ieșirea din labirint!
Cum formulezi problema cu ajutorul grafurilor?



6. Unui cub i se asociază, prin apertizare, graful din figura alăturată. Demonstrează că acest graf este un graf hamiltonian, dar nu este un graf eulerian.



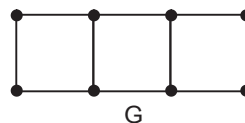
7. Considerăm graful G_n obținut în felul următor: nodurile sale sunt vârfurile unui poligon cu n laturi, iar muchiile sunt laturile poligonului și toate diagonalele construite din unul dintre vârfurile poligonului. (În imagine este reprezentat graful G_6).



- Fie G un graf ponderat, în care muchia ce unește nodul i cu nodul j are ponderea p_{ij} . Să notăm cu G^3 același graf, dar în care ponderile devin $q_{ij} = 3p_{ij}$. Demonstrează că drumurile minime dintre două noduri date sunt aceleași, atât în G , cât și în G^3 .
- Rămâne proprietatea de la a) adevărată pentru graful G^+ , obținut din G prin înlocuirea ponderilor p_{ij} cu ponderile $p_{ij} + 3$? Propune câteva exemple.

9. Dat un graf G , construim un nou graf G^2 în felul următor: nodurile lui G^2 sunt aceleași cu nodurile lui G , iar muchia MN apare în G^2 dacă și numai dacă nodurile M și N pot fi unite în G printr-un drum de lungime 2.

- Construiește graful G^2 , asociat grafului G din desen.



- Analizează definiția grafului G^2 și propune o definiție pentru graful G^3 .

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific probleme care pot fi abordate folosind grafuri
- ◆ să transpun în reprezentări pe graf probleme date
- ◆ să utilizez tehnici de lucru în grafuri pentru a determina soluții
- ◆ să descriu variantele unei probleme cu ajutorul grafurilor
- ◆ să aplic metode de optimizare în rezolvarea problemelor?

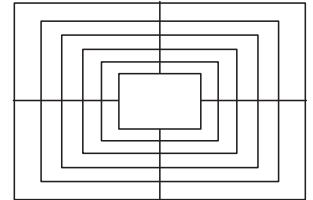


Test de verificare

1. Propune două exemple de situații care pot fi reprezentate cu ajutorul unor grafuri.

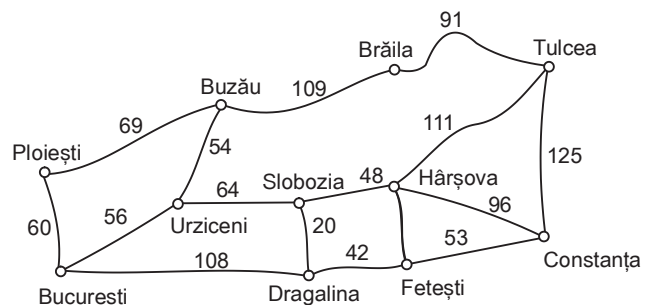
2. Realizează o hartă a conceptelor despre grafuri, pe care le-ai întâlnit în acest manual.

3. Rețeaua de străzi a unui oraș are o formă asemănătoare cu jocul de țintă, așa cum se arată în figură. Primăria orașului vrea să proiecteze trasee de troleibuz, astfel încât pe fiecare stradă să treacă exact un traseu. Demonstrează că numărul minim de trasee care respectă cerințele este 4. Găsește un exemplu. (Este util să consideri mai întâi hărți formate din mai puține dreptunghiuri concentrice.)



4. Află numerele $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc relația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Reprezintă problema printr-un graf al situațiilor posibile, observând mai întâi că unul dintre numere este 2 sau 3. Folosește un raționament prin reducere la absurd.

5. Un producător trebuie să transporte marfa din București la Tulcea. El are mai multe variante de transport, așa cum se arată pe hartă. Producătorul a schițat traseele sub forma grafului de mai jos.



Din motive economice, traseul urmat trebuie să fie de lungime minimă. Care este acesta?

Exerciții și probleme recapitulative

1. Considerăm următoarea serie statistică:

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efective	0	0	2	2	4	4	9	6	3	2

Alege răspunsul corect!

- a) Efectivul este: i) 10 ii) 8 iii) 32.
 b) Media seriei statistice este: i) 7 ii) 6,5 iii) 6,75
 c) Mediana seriei statistice este: i) 7 ii) 6,5 iii) 7,5
 d) Modulul seriei statistice este: i) 7 ii) 9 iii) 8

2. Alege răspunsul corect!

Care dintre afirmațiile următoare sunt adevărate?

- a) Dacă toate notele elevilor unei clase, pentru o anumită lucrare, se măresc cu 1 punct, atunci media notelor se mărește cu 1 punct.
 b) Dacă media notelor elevilor unei clase, pentru o lucrare, este 7, atunci sunt tot atâtea note mai mari decât 7, câte note sunt mai mici decât 7.
 c) Media notelor unui elev este egală cu una dintre note.

3. Considerăm seria statistică ce precizează repartiția greutateilor unor elevi (exprimate în kg).

Greutatea	[45; 50]	[50; 55]	[55; 60]	[60; 65]	[65; 70]
Efective	2	7	5	17	5

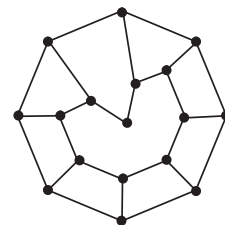
- a) Construiește histograma efectivelor.
 b) Precizează clasa modală.
 c) Calculează frecvențele relative și frecvențele cumulate crescător, respectiv descrescător ale unei serii date.
 d) Determină media și mediana seriei date.
4. Considerăm seria statistică a punctajelor obținute de concurenții unui concurs de șah:
 2; 3; 3,5; 3,5; 3,5; 4; 5,5; 5,5; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8,5.
 a) Organizează datele într-un tabel.
 b) Reprezintă datele printr-o diagramă cu bare.
 c) Determină modulul, media și mediana seriei date.

5. Patru prieteni și-au trimis felicitări cu ocazia anului nou. Fiecare i-a felicitat pe ceilalți 3. Câte scrisori au circulat? Reprezintă printr-un graf această situație. Ce tip de graf este?

6. Desenează un graf cu toate nodurile pare. Ce tip de graf este?

7. Observă grafurile alăturate.

- a) Precizează tipul grafului.
 b) Identifică două circuite în acest graf.
 c) Este eulerian acest graf?
 d) Identifică un drum hamiltonian în acest graf.



8. Notele obținute de către elevii participanți la Olimpiada de Fizică sunt prezentate în tabelul următor.

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efective	4	3	0	1	4	3	10	6	5	20
Note	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Efective	10	2	3	5	4	2	4	3	4	2

- a) Care este media acestei serii?
 b) Grupează notele date, alegând următoarele clase statistice: [1; 5], [6; 10], [11; 15], [16; 20]. Calculează media acestei noi serii.
 c) Stabilește un nou tablou de distribuție, alegând clasele statistice: [1; 4], [5; 8], [9; 12], [13; 16], [17; 20]. Calculează media acestei serii.
 d) Calculează media seriei obținută prin gruparea notelor în clasele [1; 10] și [11; 20].
 e) Compară cele patru medii. Ce constatăți?
9. Pentru seria statistică următoare:
- a) reprezintă datele cu ajutorul unei histograme;
 b) trasează poligonul efectivelor;
 c) trasează poligoanele efectivelor cumulate (crescător și descrescător);
 d) determină grafic mediana;
 e) calculează media.

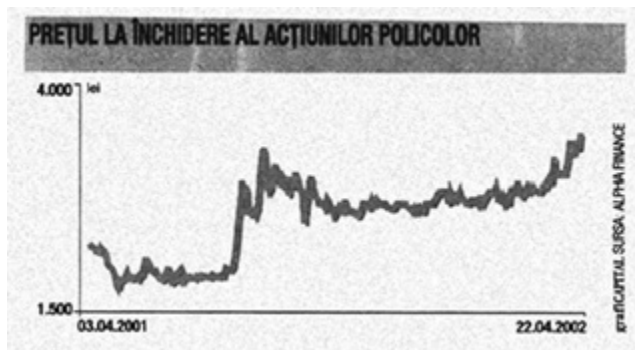
Clasa	[80; 90)	[90; 100)	[100; 110)	[110; 120)	[120; 130)	[130; 140)
Efective	5	15	30	35	75	20

10. Vârstele elevilor care se antrenează în echipa de fotbal a liceului „Matei Basarab” (exprimate în ani întregi) sunt cuprinse în tabelul următor.

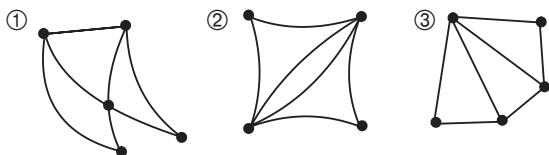
Vârsta	15	16	17	18
Nr. de elevi	2	13	22	3

- a) Precizează efectivul și modulul seriei statistice.
 b) Calculează media și abaterea medie liniară.
 c) Calculează abaterea medie pătratică.

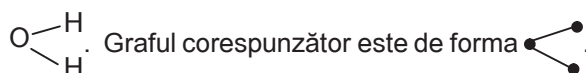
11. Observă graficul de mai jos și estimează:
- cu cât a crescut valoarea acțiunilor *Policolor* în intervalul considerat?
 - ce creștere procentuală s-a înregistrat?
 - la ce date s-au vândut cel mai bine aceste acțiuni?



12. Precizează dacă în figurile de mai jos există grafuri izomorfe. Justifică răspunsul.

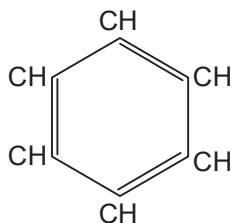


13. Formulele substanțelor chimice evidențiază structuri de tipul grafurilor, în care muchiile reprezintă legăturile dintre atomii sau grupările ce compun molecula. De exemplu, H_2O (formula apei) poate fi redată astfel:

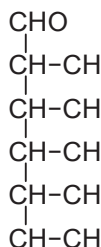


• Trasează graful ce descrie molecula de:

a) benzen



b) glucoză



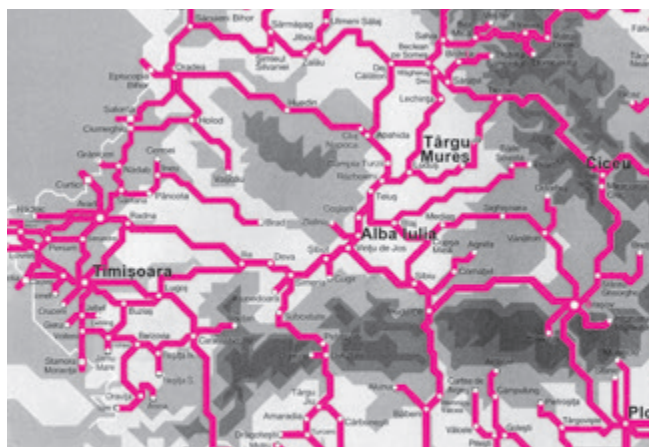
• Precizează tipul fiecărui graf.

14. Se face o statistică a bolnavilor de gripă dintr-un oraș cu 50 000 locuitori, care are 10 000 fumători. Se constată că sunt 10 000 persoane bolnave de gripă. Se constituie un lot de persoane bolnave de gripă. Dintre acestea, 50 sunt fumători și 150 nefumători.

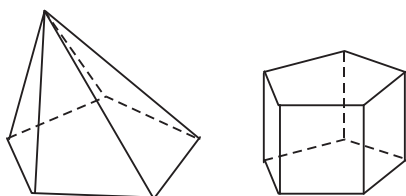
- Putem trage concluzia că fumătorii sunt mai puțin expuși la gripă decât nefumătorii?
- Estimează câți fumători și nefumători sunt printre cele 10 000 de persoane bolnave de gripă.
- Calculează frecvența celor bolnave de gripă dintre fumători și frecvența celor bolnave de gripă dintre nefumători.

15. La un magazin, într-o săptămână s-au obținut următoarele încasări (în milioane): luni: 10,5; marți: 12,1; miercuri: 10,2; joi: 9,5; vineri: 14; sâmbătă: 14,1.
- Care este media și dispersia încasărilor obținute?
 - Magazinul are un adaos comercial (diferența între prețul de vânzare și cel de cumpărare a mărfii) de 20%. Cheltuielile zilnice se ridică la 1,3 milioane, de luni până sâmbătă, și la 2,6 milioane dacă se lucrează duminică. Care este media și dispersia profitului magazinului?
 - Să presupunem că duminică s-ar obține încasări de 12 milioane lei. Arată că media încasărilor de luni până duminică este mai mare decât media încasărilor de luni până sâmbătă, dar profitul este mai mic. Cum se explică aceasta?
 - Care ar trebui să fie nivelul încasărilor duminică, pentru ca patronul să aibă un cont brut de 0,5 milioane săptămânal, organizând activitatea și duminică?

16. a) Reprezintă printr-un graf porțiunea de hartă din figura de mai jos.
- b) Precizează pe acest graf:
- trei drumuri;
 - două circuite;
 - un arbore;
 - un subgraf conex;
 - un subgraf complet.



17. Desenează grafuri planare asociate poliedrelor următoare:



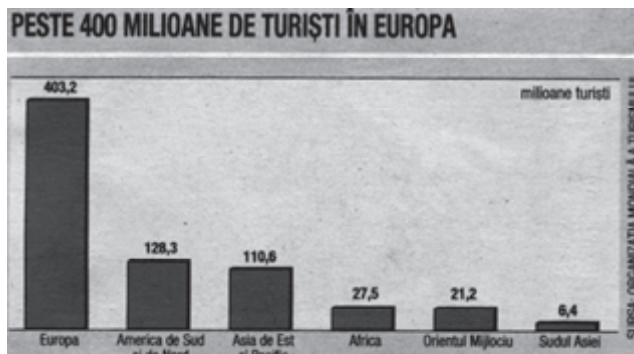
18. Răspunsurile spontane ale managerilor cu referire la problema principală cu care se confruntă firma în prezent indică o varietate de aspecte. Câte 10% au indicat deprecierea monedei EURO, respectiv birocrăția din România ca fiind principalul inconvenient. Cea mai importantă problemă cu care se confruntă alte 8% din firme o reprezintă scăderea vânzărilor/numărul mic al clienților. Aspecte legate de forța de muncă au fost menționate de 6% din manageri. Corupția este principala piedică pentru doar 3% din firme, iar adaptarea la normele UE reprezintă problema principală pentru 1%.



- Proiectează un sondaj, pornind de la întrebările acestui studiu.
- Aplică sondajul unei populații statistice aleasă de tine și compară rezultatele obținute cu cele din graficul de mai sus.

19. Graficul cu bare de mai jos indică numărul de turiști înregistrați pe câteva continente în anul 2001.

- Redă aceste informații sub forma unui tabel de frecvențe.
- Reprezintă datele printr-o diagramă circulară.
- Care este media dezvoltării turismului pe ansamblul zonelor considerate?



20. La un centru meteo s-au înregistrat următoarele temperaturi ale aerului într-o zi:

ora	1	8	14	19	22
temperatura	17 °C	19 °C	26 °C	20 °C	18 °C

Care este media temperaturii din acea zi?

- Media aritmetică a 50 de numere este 10. Media aritmetică a primelor 40 este 12. Aflați media aritmetică a ultimelor 10 numere.
- Modelează cu ajutorul grafurilor următoarele tipuri de întreceri sportive:
 - Campionatul național de Șah (la care participă 10 sportivi).
 - Turneul de tenis de la Roland Garros (32 de participanți).
 - Campionatul Național, divizia A (cu 16 echipe participante).
 - Cupa României la handbal.
 - Liga Campionilor la fotbal.

Compară tipurile de grafuri ale acestor competiții.

Răspunsuri

Pag. 6. Test inițial de autoevaluare. 1. CSM ENA Făgăraș; C.S. Târgu Secuiesc; C.S. Predeal. 2. Câțul, respectiv restul sunt egale cu: a) 7; 2; b) 3; 0; c) 5; 3; d) 8; 12; e) 100; 11; f) 24; 0. 3. A, F, F, A. 5. a) -2; b) 2; c) 0; d) 1; e) -6; f) 1; g) 3,32; h) $\frac{31}{30}$. 6. a) 36; b) 25%; c) 1,21 lei; d) 12,5%. 7. 10; 12; 10. **Pag. 8. 1.** a) impar; b) par. 2. a) $17 = (30 \cdot 5 - 30) : 10 + 5$. 5. a) 6; b) 26. 7. 6; 13; 14; 15; 19. 8. 679; 595. 9. 100; 30. 10. a) 0; b) 2400; c) 25. 11. a) 1000; b) 1500; c) 7000; d) 2000; e) 1300. 12. 1500. 13. a) 50600; b) 20. 14. a) 1070; b) 8. 17. 16. 18. a) 0; b) 0; c) 0. 19. a) 3; b) 4; c) 2; d) 5. **Pag. 17. 1.** b) 2, respectiv 3 operații. 3. a) 0,375; b) 4,(5); c) 1,9(4). 4. a) $\frac{14}{11}$; b) $\frac{11}{30}$; c) $\frac{21}{50}$; d) $\frac{32}{15}$. 9. a) 0; b) 1. 12. -0,57591; -2,3134. **Pag. 20. 3.** a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{57}$; c) $\frac{95}{14}$. 6. a) $3 + 2\sqrt{2}$; b) $4 - 2\sqrt{3}$; c) 3. 7. a) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x \in [0, 2]$; c) $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. 8. a) 9999; b) 10201; c) -26; d) 505; e) 1. 10. a) 110; b) 862.

Pag. 21. Test de verificare. 1. b) Nu. 2. Nu. 4. -1.

Pag. 22. Test inițial de autoevaluare. 1. a) -17; b) 68; c) 7,44; d) 2,74; e) 3,24; f) 4,68; g) 100,8; h) 124; i) 11,618. 2. a) -27; b) 36; c) 3; d) -2; e) $\frac{1}{3}$; f) 3; g) 0,0001; h) -1; i) 4; j) 2. 3. a) 30 m; b) 9; c) 500 m; d) 185,5 ml. 4. a) 8,5; b) 20%; c) 100%; d) 24,75. 5. c. 6. b. 7. b. 8. a. 9. a) 4; b) 3; c) 2; d) 1. **Pag. 26. 1.** c) octombrie; d) noiembrie. 3. De exemplu: muchia piramidei se corespunde cu generatoarea conului. **Pag. 32. 1.** Da. 2. 3. 3. a) d_4 ; b) d_5 ; c) d_1 ; d) d_3 ; e) d_2 . 4. a) $0 < x < 10$; b) $A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$. 5. a) b, c; e) f; d) d; e) a. 6. a) $8 - 2x$; $V(x) = (8 - 2x)^2 \cdot x$; b) $x = \frac{8}{3}$.

Pag. 35. 2. a) $12 + 8\sqrt{3}$; b) 54. 3) $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. 4. 9,5 l^2 . **Pag. 35. Test de verificare.** 1. 1. 3. $S = \{0; 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}$. 5. a) $A(0; -3)$, $B(2; 1)$, $C(-\sqrt{3}; 0)$; b) două; c) $x_1 \in (0; 1)$, $x_2 = 2$.

Pag. 36. Test inițial de autoevaluare. 1. a) 4,05; b) 1,24; c) 7,843; d) 4; e) 5,12; f) 3,45; g) 4,86; h) 5. 2. a) 7,07; b) 4,14; c) 3,25; d) 2,24; e) 6,05; f) 2,91; g) 3,93; h) 2,45. 3. a) 29; b) 20%; c) 144 RON; d) 15%. 4. a) 101,5 lei; b) 6 m^2 ; c) 16 min; d) 1 125 000 coli. **Pag. 39. 1.** a) 2; b) 3; c) 12. 2. a) 1,9; b) 3,1(6); c) 1,1875. 4. b) $\approx 31\%$; $\approx 12\%$.

Pag. 47. 5. a) 11 600 000 persoane. 6. b) $\approx 1,5\%$; 2000 : $\approx 1,7\%$; 2001 : $\approx 1,6\%$; 2002 : $\approx 1,3\%$; 2003 : $\approx 1,3\%$; c) Sporul natural = Născuți-vii - Decese. 8. 85%; 13,6%; 1,4%. **Pag. 51. 2.** A = C = 20; B = 40. 3. 121%.

5. a) ComRace; c) Diagrama I: ComRace: $\approx 38^\circ$; Compaq: $\approx 36^\circ$; IBM: $\approx 32^\circ$; Sprint: $\approx 28^\circ$; Hewlett Packard: $\approx 24^\circ$. 7. a) 97 mld. euro; b) 5,1%. 8. b) 13,4%; 29,8%; 20,4%; 9,6%; 12,8%; 9,2%; 4,8%.

Pag. 53. Test de verificare. 4. a) 166,(6)%; b) aproximativ 60 mii; c) 810 mii.

Pag. 54. Test inițial de autoevaluare. 1. c; f; g. 2. a) 22,50 RON; b) 154,50 RON; c) 85,5 RON. 3. 70 ha. 4. b. 5. a. 6. b. 7. a) 21 l ; b) 84 ore. **Pag. 58. 2.** a) 39%; c) chimie: 106,6; mașini și echipamente: 243,2; metalurgie: 128,8; hoteluri și restaurante: 99,6; construcții: 370. 3. a) 18,2; 17,8; 17,4; 16,5; c) 2.628.000. **Pag. 67. 1.** b) 33,45; 35,96; 34,6; c) 0,48; 0,6584. 2. a) 2; 6; 0; 2; b) mediana = 12,5. 3. b) Pentru total: $\tau = 328,8$; $\sigma = 329,6$. 4. a) Fetele: 1,78 ore/zi.

Pag. 74. 1. 77,8125. 2. a) Tabelul reprezintă frecvența cumulată crescător; b) Pentru frecvența absolută: 579; 1346. Pentru frecvența cumulată: 62%; 71%; 93% (aproximativ). 3. Robin. 4. a) 7500; 5500; 3500 (mld. yeni); b) 1800; -1700; 50; c) $m_3 = \frac{m_1 + m_2}{2}$; d) 2150; -1000 (mld yeni).

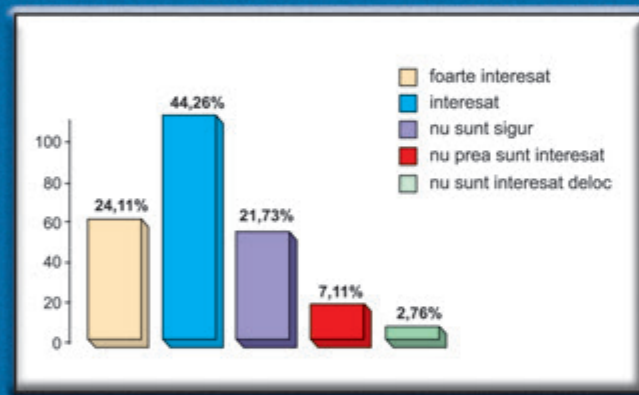
Pag. 76. Teste de verificare. Testul 1. 2. Micro. 4. a) 100 cm; b) 90,(6)%. **Testul 2. 2.** a) abscisa = mediana seriei statistice; b) D împarte efectivul în două părți egale; c) Corespund valorilor mai mari decât mediana. 4. Da. 5. martie 24 500 lei; septembrie 25 500 lei.

Pag. 78. Test inițial de autoevaluare. 1. a) -10; b) 27; c) 4,04; d) 2,82; e) 1,56(3); f) 1,57; g) 60,8; h) 114. 2. a) -8; b) 25; c) 2; d) -1; e) $\frac{1}{3}$; f) 2; g) 0,00001; h) -1. 3. a) 2^{12} ; b) 5^6 ; c) $\log_2 70$; d) 1. 4. a) 36 m; b) 15 kg; c) 0,6 tone; d) 187,5 l .

5. a) 10,8 lei; b) 20%; c) 50%; d) 9,9 lei. 6. 4,5; 6; 6; 2. **Pag. 81. 1.** cu 44%. 2. a) 0,75%; b) 39%; c) 1,7%; d) 29%.
 3. a) 2,3; b) 7,5; c) 3,5. 4. 1,67. **Pag. 85. 1.** a) ≈ 3 ori; b) nu, deoarece diferă veniturile televiziunilor publice.
Pag. 89. Test de verificare. 1. Sondaj, evidență contabilă. 2. Limbi străine; matematică, fizică, chimie. 5. La Antena 1.
Pag. 90. Test inițial de autoevaluare. 1. a) 3; b) 36; c) 1,65; d) $3\sqrt{3}$; e) 17; f) $\frac{7}{6}$; g) $\frac{27}{16}$. 2. a) 26,8; b) -8; c) 5; d) 0; e) $-7\sqrt{2}$; f) 0. 3. a) 2,8; b) -4; c) 3; d) -1; e) 3; -1; f) 2; -2; g) 3; h) 2; 3. 4. a) 13; 23; b) 5; 50; c) 200; 280; d) 4. 5. a) A; b) A; c) F. **Pag. 93. 2.** Da. **Pag. 102. 2. 8. 3.** Nu. 4. A4; B1; C5; D2; E3. **Pag. 105. 4.** b, c. 7. De exemplu: A are ordinul 3. 9. 180. 10. De exemplu: A și D. 17. Numărăm muchiile care pleacă din fiecare vârf: în acest mod, toate muchiile sunt numărate de câte două ori. 22. b) 16; c) 4; 23. 3. **Pag. 107. Test de verificare. 1.** a) 6 noduri; 8 muchii; b) $\text{ord}(A) = 2$; c) ACDE; ABDE; d) ACDBA; e) 3 muchii. 2. Nu. 3. 32.
Pag. 108. Test inițial de autoevaluare. 1. a) F; b) A; c) F; d) F. 2. a) F; b) A; c) A; d) F. 3. d. 4. b. 5. C. 6. a) -0,7; b) $1 + \sqrt{5}$; $1 - \sqrt{5}$; c) 3; d) 32; e) 11. 8. \overline{AC} ; \overline{ED} . 9. Da. 10. Dacă o piramidă nu are 12 muchii, atunci ea nu are ca bază un hexagon. 11. 246. 12. 30. 13. 6. **Pag. 110. 1.** Dacă nu are insule. **Pag. 119. 1.** Nu. 6. a) ACB; 8. 11.
Pag. 121. 2. d) 42. **Pag. 123. Test de verificare. 1.** Străzile unui cartier; rețeaua de căi ferate. 3. Pornește cu o rețea ce are două dreptunghiuri. 4. (2, 3, 6); (2, 4, 4), (3, 3, 3).

Bibliografie

1. Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Penguin Books, 1953
2. Câmpan, F., *Probleme celebre*, Ed. Albatros, 1972
3. Gardner M., *Amuzamente matematice*, Ed. Științifică, 1968
4. Gardner M., *Alte amuzamente matematice*, Ed. Științifică, 1970
5. Ion, I. D. Radu, N., *Algebră*, EDP, București, 1981
6. Minguin-Debray, M., *L'atelier des polyèdres*, ACL - Les Editions du Kangourou, Paris
7. Neagu, M., Singer, M., Voica, C., *Statistică și probabilități. Curs introductiv pentru elevi, studenți și profesori*, Ed. Sigma, 2003
8. Popescu, T., *Retrospectivă matematică - repere evolutive*, Ed. Litera, 1980
9. Rusu, E., *De la Thales la Einstein*, Ed. Albatros, 1971
10. Tarasov, L., *This amazingly symmetrical world*, Mir Publishers, 1986
11. Tomescu, I., *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, EDP 1981, București
12. Tomescu, I., *Introducere în Combinatorică*, Ed. Tehnică, București, 1972
13. Tomescu, I., *Ce este teoria grafurilor?*, Ed. Științifică Enciclopedică, 1982
14. *Tangram*, Carte - joc de decupat și asamblat. Ed. JECO, 1986
15. *Matematică distractivă pentru clasele IX-XII: Jocul concurs Cangurul*, Ed. Sigma, 2002
16. *Colecția ziarului „Capital”*
17. *Colecția ziarului Săptămâna financiară*



ISBN 973-649-261-3



ISBN 978-973-649-261-7