Л. П. Евстафьева А. П. Карп

Алгебра

Дидактические материалы

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Л. П. Евстафьева А. П. Карп

Алгебра

Дидактические материалы

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

12-е издание

Москва
«Просвещение»
2018

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1я72
Е26

6+

Евстафьева Л. П.
Е26 Алгебра. Дидактические материалы. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Л. П. Евстафьева, А. П. Карп. — 12-е изд. — М. : Просвещение, 2018. — 159 с. : ил. — ISBN 978-5-09-053517-5.

Книга содержит упражнения по алгебре, функциям и анализу данных к учебнику «Алгебра. 7 класс» Г. В. Дорофеева и др. Дидактические материалы включают обучающие работы с заданиями разного уровня сложности, проверочные работы для организации текущего оперативного контроля, а также материалы для математического кружка.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1я72

ISBN 978-5-09-053517-5

Предисловие

Дидактические материалы предназначены для организации самостоятельной дифференцированной работы учащихся и содержат разнообразный материал, который может быть использован на различных этапах изучения темы и для разных групп учащихся.

Книга состоит из трех разделов:

I. Обучающие работы.

II. Проверочные работы.

III. Материалы для математического кружка.

В разделах I и II работы распределены по девяти главам, названия которых совпадают. Внутри глав все работы имеют сквозную нумерацию.

Обучающие работы (О-1, О-2 и т. д.) нацелены на формирование важнейших умений и навыков, связанных с материалом 7 класса. Они предназначены для организации обучения в текущем учебном процессе и используются, когда упражнений учебника не хватает для отработки навыков, для дополнительной работы с отстающими учениками, для развития математических знаний и умений школьников. Тематика каждой работы указана в ее названии.

Большинство обучающих работ содержат опорные сведения, в которых приводятся образцы решения основных задач, правила, некоторые термины и т. д. Далее следуют задания разного уровня сложности, разбитые на две части горизонтальной чертой. Задания первой части направлены прежде всего на достижение уровня обязательной подготовки. Задания второй части предназначены для овладения изучаемым материалом на более высоком уровне. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Обучающие работы не регламентированы по времени и могут использоваться отдельными фрагментами на различных этапах формирования конкретного умения как для самостоятельной дифференцированной работы, так и для фронтальной работы с классом.

Работы рубрики *«Проверь себя!»* содержат задания с выбором ответа и снабжены «ключом» — перечнем верных ответов. Они предназначены для самостоятельного обзора и повторения законченных фрагментов учебного материала.

Проверочные работы (П-1, П-2 и т. д.) охватывают весь материал курса. Они предназначены для организации текущего оперативного контроля и рассчитаны на 10—15 мин. Эти работы представлены в двух вариантах одного уровня сложности. Многие из них содержат по одному заданию более высокой сложности, отмеченному звездочкой. Эти задания могут быть опущены или включены в состав работы в зависимости от ситуации по усмотрению учителя.

В конце сборника помещены **материалы для математического кружка** (М-1, М-2 и т. д.). Каждая работа содержит объяснительный текст и систему задач. Они рассчитаны на выполнение в течение достаточно длительного времени и могут быть использованы как на занятиях кружка, так и при индивидуальной работе с сильными учащимися (для подготовки к олимпиадам и т. п.). При составлении этих работ использованы материалы петербургских математических кружков и олимпиад.

Главы 1, 2, 3, 4, 7 из разделов I и II (кроме работ О-8 и П-12) написаны Л. П. Евстафьевой. Главы 5, 6, 8, 9 и работы О-8 и П-12 из разделов I и II, а также раздел III написаны А. П. Карпом.

Раздел I. ОБУЧАЮЩИЕ РАБОТЫ

Глава 1. Дроби и проценты

О-1. Повторение. Вычисления с обыкновенными и десятичными дробями

1. Выполните действия и сравните результат с указанным числом:

1) а) $\frac{1}{16}+\frac{3}{4}$ и $\frac{15}{16}$; б) $\frac{2}{5}+\frac{3}{15}$ и $\frac{14}{25}$; в) $\frac{7}{9}+\frac{1}{2}$ и $\frac{23}{17}$.

2) а) $\frac{9}{10}-\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{25}$; б) $\frac{8}{9}-\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{36}$; в) $\frac{7}{15}-\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{17}$.

3) а) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}$ и $4\frac{99}{100}$; в) $\frac{3}{14}+5\frac{1}{2}$ и $5\frac{7}{11}$.

б) $3\frac{1}{2}+5\frac{3}{7}$ и $8\frac{13}{15}$;

4) а) $1\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$ и $\frac{11}{13}$; в) $6-1\frac{3}{5}$ и $4\frac{2222}{5555}$.

б) $2\frac{1}{15}-1\frac{3}{20}$ и $\frac{33}{37}$;

2. Выполните действия и расположите результаты, полученные в пунктах «а», «б», «в», в порядке возрастания:

1) а) 0,3 + 0,07; б) 0,04 + 0,6; в) 0,012 + 0,08.
2) а) 0,43 – 0,043; б) 0,57 – 0,057; в) 0,24 – 0,024.
3) а) 4,24 + 2,76; б) 2,37 + 10,063; в) 4 + 5,6.
4) а) 4,24 – 2,76; б) 12,3 – 1,23; в) 5,1 – 4,51.

3. Выполните действия и сравните результат с первым числом:

1) а) $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}$; б) $1\frac{5}{7}\cdot1\frac{5}{16}$; в) $\frac{5}{18}\cdot1\frac{11}{15}$.

2) а) $2:1\frac{5}{7}$; б) $\frac{8}{9}:\frac{16}{27}$; в) $3\frac{1}{8}:2\frac{1}{2}$.

3) а) $3{,}5 \cdot 0{,}24$; б) $0{,}205 \cdot 3800$; в) $0{,}54 \cdot 2{,}5$.
4) а) $3{,}2 : 4$; б) $12 : 1{,}5$; в) $0{,}24 : 1{,}5$.
5) а) $3{,}56 \cdot 0$; б) $0 : 1\frac{1}{3}$; в) $2\frac{1}{7} \cdot 0$.

4. Вычислите, выбрав удобный порядок действий:

1) а) $5{,}64 + (2{,}7 + 2{,}36 + 4{,}3)$;
б) $5{,}32 + 3{,}875 + (4{,}68 + 6{,}125)$;
в) $5{,}867 + 4{,}9 - 4{,}867$;
г) $13 - 6{,}84 - 2{,}16$.

2) а) $2\frac{3}{4} + 5\frac{3}{7} + \left(6\frac{4}{7} + 4\frac{1}{4}\right)$; в) $5\frac{7}{12} + 3\frac{4}{19} - 4\frac{7}{12}$;
б) $3\frac{1}{5} + \left(5\frac{1}{4} + 4\frac{4}{5}\right) + 6\frac{3}{4}$; г) $5\frac{1}{19} - 3\frac{4}{9} - 1\frac{5}{9}$.

3) а) $1\frac{1}{3} \cdot 2\frac{3}{4} \cdot 0{,}5$; в) $5\frac{1}{15} \cdot 3 - 2\frac{1}{20} \cdot 4$;
б) $5\frac{1}{3} : 6\frac{1}{7} : 2\frac{2}{3} : 3\frac{1}{14}$; г) $6\frac{3}{7} : 3 - 8\frac{4}{7} : 4$.

---

5. Вычислите, применяя свойства умножения и деления, а также некоторые «удобные» произведения:

$a \cdot b = b \cdot a$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$	$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$ $2 \cdot 5 = 10$; $4 \cdot 25 = 100$; $8 \cdot 125 = 1000$

1) а) $0{,}4 \cdot 7{,}65 \cdot 2{,}5$; б) $3{,}5 \cdot (0{,}8 \cdot 4) \cdot 1{,}25$.
2) а) $1\frac{5}{7} : 2 : \frac{1}{2}$; б) $2\frac{6}{7} : 3 : \frac{1}{3}$.
3) а) $1\frac{2}{7} \cdot 5\frac{1}{9} + 1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{8}{9}$; б) $5\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{13} - 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{3}{13}$.
4) а) $7{,}29 \cdot 2{,}5 \cdot 0 \cdot 0{,}4$; б) $13\frac{5}{8} \cdot 2\frac{1}{17} \cdot 0 \cdot 17$.

6. Выполните действия:

1) а) $5\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} \cdot \left(12\frac{1}{3} : 5 - \frac{1}{6} \cdot 3\right)$;
б) $2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} \cdot \left(7\frac{1}{5} : 6 - \frac{1}{10} \cdot 2\right)$.

2) а) $8{,}5 + 1{,}5 \cdot (0{,}8 : 0{,}16 - 0{,}16 \cdot 0{,}5)$;
б) $12{,}5 - 2{,}5 \cdot (0{,}9 : 0{,}18 - 0{,}18 \cdot 0{,}5)$.

3) а) $\left(4\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}\cdot 3\right):\left(1\frac{1}{6}+2\frac{4}{9}\right)$;

б) $\left(3\frac{1}{3}-1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2}\right):\left(2\frac{1}{4}-1\frac{1}{6}\right)$.

4) а) $(15{,}4 - 7{,}2 - 6{,}2) \cdot 0{,}5 : 0{,}1$;

б) $(14{,}6 - 6{,}8 - 5{,}8) \cdot 0{,}05 : 0{,}1$.

7. Миша попал в баскетбольное кольцо 6 раз из 10 бросков, а Коля — 9 раз из 15 бросков. Сравните результативность попаданий.

О-2. Повторение. Действия с рациональными числами

1. Выполните действия:

1) а) $-37 + (-15)$; б) $-37 - (-15)$; в) $-37 \cdot (-15)$; г) $-37 : (-15)$; д) $-37 + 0$.

2) а) $-3{,}6 + 4{,}8$; б) $-3{,}6 - 4{,}8$; в) $-3{,}6 \cdot 4{,}8$; г) $-3{,}6 : (-4{,}8)$; д) $0 \cdot (-2{,}5)$.

3) а) $2\frac{1}{4}+\left(-5\frac{1}{3}\right)$; б) $2\frac{1}{4}-\left(-5\frac{1}{3}\right)$; в) $2\frac{1}{4}\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)$; г) $2\frac{1}{4}:\left(-5\frac{1}{3}\right)$; д) $0 : (-2{,}5)$.

2. Решите уравнение, используя связи между компонентами действий:

1) а) $-7{,}6 + x = 3$; б) $3\frac{2}{3} + x = -2$; в) $-5{,}6 + x = 0$; г) $-3{,}4 + x = -7{,}8$.

2) а) $-2{,}5 \cdot x = 10$; б) $1{,}2 \cdot x = -12{,}24$; в) $0{,}48 \cdot x = -0{,}24$; г) $-2 \cdot x = 0$.

3) а) $8 : x = -16$; б) $x : 2\frac{1}{5} = -5\frac{1}{2}$; в) $x : (-2) = 0$; г) $x - 2 = -2$.

3. Выполните действия:

а) $(-3{,}6 - 1{,}6 - 4{,}8) : (-2)$;

б) $\left(-1\frac{3}{7}+5\frac{3}{7}-4\right)\cdot\left(-1\frac{1}{7}\right)$;

в) $-0{,}125 \cdot (-6{,}7) \cdot (-8)$;
г) $-3{,}6 \cdot 7{,}4 - 3{,}6 \cdot 2{,}6$;
д) $(-5{,}6 + 5{,}6) \cdot 2{,}69 : 134{,}5$.

4. Решите уравнение и сделайте проверку:

а) $(x - 5) : 2{,}5 = -4$;
б) $2x - 0{,}4 = 0{,}6$;
в) $(x + 4{,}6) \cdot 2{,}4 = -9{,}6$;
г) $(x - 3{,}2) \cdot 5{,}6 = 0$.

Проверь себя!

1. Вычислите значение выражения $7{,}2 - 2{,}6 - 2{,}6$.

А. 3. **Б.** 7,2. **В.** 2.

2. Найдите произведение $3{,}5 \cdot (-0{,}02) \cdot (-0{,}1)$.

А. 0,007. **Б.** $-0{,}007$. **В.** 0,0007.

3. Чему равна разность $2\frac{1}{6} - 1\frac{1}{3}$?

А. $1\frac{1}{3}$. **Б.** $1\frac{5}{6}$. **В.** $\frac{5}{6}$.

4. Найдите значение выражения $-8{,}4 - 6{,}4$.

А. -2. **Б.** 2. **В.** $-14{,}8$.

5. Найдите x, если $-x = 2{,}3$.

А. $-2{,}3$. **Б.** Не существует. **В.** 2,3.

6. Вычислите $\frac{-0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}01}$.

А. $-0{,}01$. **Б.** $-0{,}1$. **В.** -10.

7. Решите уравнение $17x = 8{,}5$.

А. $x = 8{,}5$. **Б.** $x = \frac{1}{2}$. **В.** $x = 2$.

8. Сравните числа a и b, если $a = -\frac{3}{4} \cdot 16$, $b = -16 : \frac{4}{3}$.

А. $a > b$. **Б.** $a = b$. **В.** $a < b$.

9. Сравните числа a и b, если $a = -3{,}2 - 2{,}6 - 0{,}4$, $b = -3{,}2 - (2{,}6 - 0{,}4)$.

А. $a > b$. **Б.** $a = b$. **В.** $a < b$.

10. Сравните числа a и b, если известно, что они отрицательные и $|a| = -10 \cdot (-0{,}08)$, $|b| = \frac{2}{3}$.

А. $a > b$. **Б.** $a = b$. **В.** $a < b$.

В А В В А В Б Б В В

О-3. Обыкновенные и десятичные дроби

Помните: $2 \cdot 5 = 10$; $4 \cdot 25 = 100$; $8 \cdot 125 = 1000$.

1. Представьте десятичные дроби в виде обыкновенных, несократимых дробей:

а) $0{,}3$; $0{,}03$; $-0{,}003$; $0{,}00003$;
б) $-0{,}056$; $0{,}64$; $-0{,}0088$; $0{,}039$.

2. Представьте обыкновенные дроби в виде десятичных:

а) $-\frac{9}{100}$; $\frac{5}{4}$; $-\frac{17}{20}$; $\frac{47}{500}$;
б) $\frac{19}{10\,000}$; $-\frac{7}{25}$; $\frac{19}{8}$; $-\frac{7}{125}$;
в) $-\frac{3}{40}$; $\frac{9}{12}$; $-\frac{137}{200}$; $\frac{127}{50}$.

3. Вычислите:

1) а) $2\frac{2}{3} + 0{,}5$; в) $-1\frac{2}{7} + 0{,}4$; д) $1\frac{7}{30} + \frac{13}{15}$;
б) $3\frac{2}{5} - 0{,}64$; г) $4\frac{7}{25} - 0{,}18$; е) $2{,}78 - 3\frac{7}{20}$.

2) а) $1\frac{1}{7} \cdot (-0{,}14)$; в) $\frac{3}{25} \cdot 0{,}8$; д) $-0{,}64 \cdot \frac{1}{8}$;
б) $-5{,}6 : 1\frac{1}{7}$; г) $-0{,}65 : \frac{1}{4}$; е) $8{,}32 : \frac{2}{5}$.

4. Вычислите удобным для вас способом:

1) а) $\dfrac{0{,}4 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} \cdot 1{,}2}$; в) $\dfrac{0{,}7 \cdot \frac{3}{7}}{1\frac{3}{14} \cdot 0{,}42}$;
б) $\dfrac{2{,}5 \cdot \frac{4}{5}}{1{,}6 \cdot \frac{3}{4}}$; г) $\dfrac{3{,}2 : \frac{2}{7}}{0{,}8 \cdot 0{,}7}$.

2) а) $\dfrac{0{,}4+\dfrac{1}{3}}{\dfrac{5}{6}+1{,}2}$; в) $\dfrac{-2{,}3+\dfrac{1}{6}}{-1\dfrac{2}{3}+0{,}6}$;

б) $\dfrac{2{,}5-\dfrac{4}{5}}{1{,}6-\dfrac{3}{4}}$; г) $\dfrac{-3{,}75+\dfrac{3}{4}}{-2{,}88-\dfrac{3}{25}}$.

5. Сравните числа удобным для вас способом:

1) а) $-1\dfrac{2}{7}$ и $-\dfrac{5}{7}$; в) $\dfrac{1}{37}$ и $-0{,}875$;

б) $\dfrac{17}{18}$ и $\dfrac{17}{19}$; г) $\dfrac{13}{15}$ и $\dfrac{14}{17}$.

2) а) 1,2309 и 1,2312; в) $-0{,}8$ и $-\dfrac{11}{125}$;

б) 0,00931 и 0,01011; г) $-\dfrac{13}{17}$ и $-\dfrac{11}{15}$.

3) а) $-0{,}3$ и $\dfrac{8}{15}$; в) $-\dfrac{11}{21}$ и $-\dfrac{11}{20}$;

б) $-0{,}56$ и $-\dfrac{11}{20}$; г) $-\dfrac{7}{9}$ и $-0{,}67$.

6. Найдите значение выражения при данных значениях букв $a = 3{,}6$, $b = -2{,}6$:

1) а) $\dfrac{a-b}{2(a+b)}$; б) $\dfrac{3a}{a+b}$; в) $\dfrac{a-b}{3{,}1b}$.

2) а) $a + 2b$; б) $a - 2b$; в) $2a - b$.

---

7. Посчитайте, выбрав удобный порядок выполнения действий:

а) $3{,}6\cdot\left(1\dfrac{2}{5}-9{,}91+7{,}91\right)+\left(-9{,}55+\dfrac{3}{20}\right)\cdot 3\dfrac{3}{5}$;

б) $5{,}6\cdot 1\dfrac{2}{11}-4{,}6:\dfrac{11}{13}$; г) $\dfrac{20{,}4\cdot 0{,}7}{1\dfrac{1}{6}\cdot 0{,}51}+\dfrac{3\dfrac{1}{3}-0{,}2}{0{,}3-2\dfrac{1}{2}}$;

в) $\left(15{,}7-2\dfrac{3}{7}-4\dfrac{4}{7}\right)\cdot\dfrac{1}{3}$; д) $\dfrac{0{,}084\cdot 2{,}56\cdot 700}{4{,}9\cdot 0{,}32\cdot 2{,}4}$.

8. Решите уравнение:

а) $x-2\dfrac{3}{4}-1\dfrac{3}{4}=4{,}5$; в) $3x+5x-4{,}7x=0$;

б) $x\cdot 2{,}5\cdot(-0{,}4)=-10$; г) $(x-3{,}2)\cdot 3{,}4=0$.

Проверь себя!

1. Какая из дробей обращается в конечную десятичную?

А. $-\frac{2}{15}$. **Б.** $-\frac{17}{60}$. **В.** $\frac{9}{15}$.

2. Какой обыкновенной дроби равна дробь 0,016?

А. $\frac{4}{25}$. **Б.** $\frac{2}{125}$. **В.** $\frac{8}{525}$.

3. Найдите сумму $-\frac{1}{3}+0{,}5$.

А. $-\frac{5}{6}$. **Б.** $-\frac{2}{15}$. **В.** $\frac{1}{6}$.

4. Чему равен x, если $-8 \cdot x = \frac{1}{2}$?

А. $-\frac{1}{16}$. **Б.** -16. **В.** -4.

5. Вычислите $0{,}076 : \frac{1}{2}$.

А. 15,2. **Б.** 0,152. **В.** 0,0152.

6. Вычислите $1\frac{1}{9} \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}8$.

А. $\frac{1}{9}$. **Б.** 0,9. **В.** $\frac{1}{90}$.

7. Поставьте знак $>$, $<$ или $=$ вместо многоточия в выражении $0{,}303 \ldots \frac{1}{3}$.

А. $>$. **Б.** $<$. **В.** $=$.

8. Какое из чисел больше, чем $-\frac{2}{7}$?

А. $-\frac{2}{3}$. **Б.** $-\frac{5}{14}$. **В.** $-0{,}2$.

9. Какой десятичной дроби равна дробь $\frac{17}{40}$?

А. 0,925. **Б.** 0,425. **В.** 0,0425.

10. При каком из данных значений x неравенство $\frac{24}{x} > \frac{12}{5}$ верно?

А. 9. **Б.** 10. **В.** 11.

В Б В А Б А Б В Б А

О-4. Решение задач

Задача. Поезд «С.-Петербург — Москва» вышел из С.-Петербурга в 0 ч 05 мин и прибыл в Москву в 8 ч 25 мин. Расстояние от С.-Петербурга до Москвы 650 км. Какова скорость движения поезда?

1) 8 ч 25 мин − 0 ч 05 мин = 8 ч 20 мин = $8\frac{1}{3}$ ч;

2) $650 : 8\frac{1}{3} = \frac{650 \cdot 3}{1 \cdot 25} = 78$ (км/ч).

Эту скорость принято называть *средней скоростью* движения поезда, так как во время движения скорость его не была одной и той же. Поезд то увеличивал скорость, то уменьшал. На остановках он вообще не двигался.

$$\text{Средняя скорость} = \frac{\text{Весь пройденный путь}}{\text{Все затраченное время}}.$$

1. Поезд за 2,5 ч прошел 135 км. Какова средняя скорость движения поезда?

2. Автобус вышел из пункта A в 8 ч утра и, сделав в пути несколько остановок, прибыл в пункт B в 12 ч 30 мин. Расстояние от A до B 162 км. Какова средняя скорость автобуса?

3. Пешеход два часа двигался со скоростью 4,5 км/ч, а затем еще один час со скоростью 5,4 км/ч. Какова средняя скорость движения пешехода?

4. 1 $см^3$ железа имеет массу 7,8 г. Какую массу имеет кусок железа прямоугольной формы и размером $5 \times 3{,}2 \times 2{,}4$ см? Ответ округлите до целых.

---

5. Автомобиль проехал 43 км за 35 мин. Какова средняя скорость его движения в км/ч? Ответ дайте в десятичных дробях и округлите до десятых.

6. Мотоциклист за первые 2 ч проехал 83 км, а затем еще 40 мин двигался со скоростью 51 км/ч. Какое расстояние проехал автомобиль и какова средняя скорость его движения? Ответ округлите до целых.

7. Средняя скорость движения автомобиля 75 км/ч. За сколько секунд он переедет мост длиной 800 м? Ответ

округлите до целых. Совет: узнайте сначала, сколько метров проезжает автомобиль за одну секунду.

8. Собственная скорость лодки 8,1 км/ч. Скорость течения реки 1,5 км/ч. Лодка плыла 2 ч 10 мин по течению реки и 40 мин против течения. Какое расстояние проплыла лодка? Сколько времени она потратила на весь путь? Какова средняя скорость ее движения? Сравните среднюю скорость с собственной.

9. Пластинка прямоугольной формы имеет размер $15 \times 2 \times 0{,}5$ см и массу 400 г. Сделана пластинка из алюминия. Какую массу имеет 1 см^3 алюминия? Ответ округлите до десятых.

О-5. Степень с натуральным показателем

1. Запишите короче, не вычисляя результата:

1) а) $3 + 3 + 3 + 3 + 3$;
   б) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
   в) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
   г) $(3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$;
   д) $-(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$.
2) а) $(-2) + (-2) + (-2) + (-2)$;
   б) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
   в) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2)$;
   г) $(-2 \cdot (-2) \cdot (-2)) \cdot (-2 \cdot (-2))$;
   д) $-(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$.
3) а) $m + m + m + m + m$;
   б) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$;
   в) $m \cdot m + m \cdot m \cdot m$;
   г) $(m + m + m) - (m \cdot m \cdot m)$;
   д) $-(m \cdot m)$.

2. Вычислите степень чисел:

1) а) 13^2; б) $(-7)^3$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; г) $(-1)^5$.
2) а) $(-12)^2$; б) 6^3; в) $(-0{,}3)^3$; г) 0^{73}.
3) а) 25^2; б) $(-3)^5$; в) $\left(-2\frac{1}{4}\right)^2$; г) 1^{115}.
4) а) $(1{,}7)^2$; б) $(-2)^6$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$; г) $(-1)^8$.

3. Сравните числа:

1) а) 3^2 и 2^3; б) 3^5 и 5^3; в) 2^4 и 4^2.

2) а) $(-0,2)^2$ и $\frac{1}{30}$; в) $-2 \cdot (-3)^3$ и $-3 \cdot (-2)^6$.

б) $(-0,1)^4$ и $\frac{1}{9999}$;

3) а) $(-4)^3$ и $-62,3$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{21}$ и $(-100,3)^3$.

б) $(-5)^3$ и -11^2;

4) а) $(-3)^2$ и -3^2; в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$ и $\left(-\frac{2}{3}\right)^7$.

б) -5^3 и $(-5)^3$;

5) а) $0,2537$ и 0^{56}; в) $-2 \cdot (-0,7)^4$ и $-3 \cdot (-0,7)^3$.

б) 2^{100} и $(-2)^{100}$;

6) а) 3^2 и 3^3; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; в) 1^3 и 1^{51}.

7) а) $3^2 + 2^2$ и $(3 + 2)^2$; в) $3^2 \cdot 2^2$ и $(3 \cdot 2)^2$.

б) $3^2 - 2^2$ и $(3 - 2)^2$;

4. Сравните с нулем:

а) $\frac{(-5)^3 \cdot (-9)^4}{(-3)^7}$; б) $(-2)^{24}$; в) -2^{24}; г) $(-2)^{24} - 2^{24}$.

5. Вычислите:

1) а) $3^2 + 2^3$; в) $3^2 + (-2)^3$;

б) $(-3)^2 + 2^3$; г) $(-3)^2 + (-2)^3$.

2) а) $(0,7 - 1,3)^2$; в) $0,7^2 - 1,3$;

б) $0,7 - 1,3^2$; г) $0,7^2 - 1,3^2$.

3) а) $-5 + 0,2^2$; в) $(-5)^2 + 0,2$;

б) $(-5 + 0,2)^2$; г) $5 - 0,2^2$.

6. Разложите на простые множители и запишите, где можно, используя степень:

1) а) 32; б) 45; в) 81; г) 120; д) 289.

2) а) 25; б) 56; в) 160; г) 49; д) 169.

3) а) 27; б) 50; в) 80; г) 180; д) 121.

---

7. Найдите x, если:

1) а) $x = 2^3 \cdot 5^2$; в) $x = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4$;

б) $x = 2^2 \cdot 5^3$; г) $x = 3^2 \cdot 7$.

2) а) $x = 2^4 \cdot 5^3$; в) $x = 2 \cdot 7^2$;

б) $x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; г) $x = 3^2 \cdot 11$.

3) а) $x = 2^6 \cdot 5^5$;
б) $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$;
в) $x = 3 \cdot 5^2$;
г) $x = 7 \cdot 11^2$.

8. Объясните, не возводя чисел в степень, почему ни одно из равенств не может быть верным. Обратите внимание на образец.

> **Образец.**
> $103^2 = 10\,087$ — неверно, так как 103^2 оканчивается на 9.
> $32^2 = 894$ — неверно, так как $32 > 30$, а $30^2 = 900$.

1) а) $177^2 = 37\,877$;
б) $104^2 = 9816$;
в) $670^3 = 276\,490\,000$;
г) $0{,}5^4 = 0{,}03125$.

2) а) $(-13)^3 = 2197$;
б) $(-0{,}7)^4 = -0{,}2401$;
в) $(-1)^{75} = -75$;
г) $(-1)^{32} = -1$.

Проверь себя!

1. Какому числу равен квадрат числа 0,3?
А. 0,9. **Б.** 0,0009. **В.** 0,09.

2. Поставьте знак >, < или = между числами $3^2 + 4^2$ и 5^2.
А. =. **Б.** >. **В.** <.

3. Посчитайте $-3{,}2^2$.
А. 10,24. **Б.** 12,4. **В.** –10,24.

4. Какое из чисел больше числа $12{,}3^2$?
А. 169. **Б.** 121. **В.** 123.

5. Значение какого из выражений равно нулю?
А. $(-1)^{16} - (-1)^{15}$. **Б.** $(-1)^8 + (-1)^9$. **В.** $-1^4 - (1)^2$.

6. Какое из утверждений верно, если $a = \left(\frac{2}{3}\right)^3$, $b = \left(\frac{4}{17}\right)^2$?
А. $a > b$. **Б.** $a = b$. **В.** $a < b$.

7. Какому из данных чисел равен квадрат числа 293?
А. 858 049. **Б.** 85 849. **В.** 8589.

8. Поставьте знак >, < или = вместо многоточия в выражение $\left(-\frac{7}{8}\right)^3 \ldots -1$.

А. >. Б. =. В. <.

9. Назовите наибольшее из чисел:

А. $(-15)^3$. Б. $(-17)^5$. В. $(-14)^7$.

10. Назовите наименьшее из чисел:

А. $-3{,}5^2$. Б. -3^2. В. $-(-2{,}7)^2$.

В А В А Б А Б А А В

О-6. Решение задач (повторение)

Задача 1: Найти $\frac{3}{4}$ от 24.	**Задача 2, обратная задаче 1:** Найти число, $\frac{3}{4}$ которого равны 18. $x \cdot \frac{3}{4} = 18$.	**Задача 3, обратная задаче 1:** Какую часть составляет 18 от 24? $24 \cdot x = 18$.
Решается умножением: $24 \cdot \frac{3}{4} = 18$.	Решается делением: $18 : \frac{3}{4} = 24$.	Решается делением: $18 : 24 = \frac{3}{4}$.

Определите, каким действием решаются задачи **1—2**, и решите их. Составьте и решите две обратные к ним задачи.

1. Скорость волка 18 м/с, а скорость лисы составляет $\frac{2}{3}$ скорости волка. Какова скорость лисы?

2. В классе 30 учеников. $\frac{11}{15}$ всего класса приняли участие в туристском походе. Сколько учеников было в походе?

3. В кастрюлю налили 1 л воды, и кастрюля лишь на $\frac{2}{3}$ заполнилась водой. Какова вместимость кастрюли?

4. Из 96 листов тетради ученик исписал 64 листа. Какую часть тетради исписал ученик?

5. В 200 г первого раствора 50 г соли, а в 300 г второго раствора 75 г соли. Какой раствор более соленый?

---

6. Расстояние между пешеходом и велосипедистом 4 км 500 м. Догонит ли велосипедист пешехода за 30 мин, если скорость велосипедиста 12 км/ч, а скорость пешехода составляет $\frac{7}{24}$ скорости велосипедиста?

7. В школьных кружках занимается $\frac{2}{3}$ учащихся класса, причем $\frac{1}{4}$ из них — в математическом кружке. Сколько учеников в классе, если в математическом кружке 4 человека?

8. Из кастрюли отлили $\frac{2}{3}$ имевшейся в ней воды, а потом еще $\frac{2}{3}$ оставшегося количества. После этого в кастрюле остался 1 л воды. Сколько воды было в кастрюле первоначально?

О-7. Задачи на проценты

1. За день рабочему надо сделать 80 деталей. До обеда он выполнил 60% нормы. Сколько деталей он сделал до обеда?

2. До обеда рабочий обработал 18 деталей, что составляло 45% дневной нормы. Какова дневная норма рабочего?

3. Сколько процентов дневной нормы выполнил рабочий до обеда, если он сделал 22 детали, а дневная норма 55 деталей?

4. Стоимость упаковки составляет обычно 2% стоимости товара. Сколько будет стоить товар с упаковкой, если сам товар стоит 400 р.?

5. За год число учеников в школе выросло на 4%. Сколько стало учеников в школе к концу года, если в начале года их было 650?

6. Количество ДТП сократилось в 2004 г. по сравнению с 2003 г. на 5%. Сколько было ДТП в 2004 г., если в 2003 г. их было 160?

7. Начертите в тетради отрезок длиной 20 клеток.
а) Увеличьте его на 10%.
б) Уменьшите его на 20%.

---

8. В школьном туристском слете приняли участие 35% всех учащихся школы, это 224 ученика. Сколько учеников в школе?

9. Мужчины на заводе составляют 65% всего количества рабочих завода. Женщин — 175 человек. Сколько всего рабочих на этом заводе?

10. Стоимость упаковки составляет обычно 2% стоимости товара. Товар с упаковкой стоит 367,2 р. Найдите стоимость товара.

11. Начертите квадрат со стороной 10 клеток. Закрасьте 1% этого квадрата. Теперь увеличьте каждую сторону квадрата на 10%. Получился новый квадрат. Закрасьте ту часть большего квадрата, на которую увеличился меньший квадрат. Сколько процентов составляет закрашенная часть от старого квадрата? На сколько процентов произошло увеличение площади квадрата?

12. Какую сумму следует положить в банк, начисляющий 12% годовых, чтобы через год получить 800 р.? Ответ округлите до 1 р. Подумайте, как сделать округление.

13. Один человек получил зарплату 9000 р. За квартиру он заплатил 1080 р. Какую часть своей зарплаты он тратит на оплату квартиры? Сколько процентов от своей зарплаты он тратит на оплату квартиры?

14. Из 28 учеников класса 10 человек учатся без троек. Какую часть класса они составляют? Сколько процентов от численности класса они составляют? Ответ округлите до 0,1%.

15. В январе 1 кг мяса стоил 120 р., а в феврале — 132 р. На сколько процентов поднялась цена?

16. В справке о заработной плате написано:
— зарплата: 9000 р.;
— вычеты: подоходный налог 1170 р.; в пенсионный фонд 90 р.
Сколько процентов от зарплаты получает владелец справки на руки?

17. Положив в один банк 8000 р., вкладчик к концу года получил 8240 р. Положив в другой банк 60 000 р., он к концу года получил 62 400 р. В каком банке выше процентная ставка?

18. Есть такие понятия: «золото 750-й пробы» и «золото 900-й пробы». Число в пробе показывает, сколько граммов чистого золота содержится в 1 кг сплава.
а) Каково процентное содержание чистого золота в сплаве 750-й пробы? в сплаве 900-й пробы?
б) Сплавили два куска золота: 56 г 750-й пробы и 124 г 900-й пробы.
Определите пробу полученного сплава.

19. Смешали 6 л 15%-ного раствора соляной кислоты и 10 л 10%-ного раствора. Определите процентное содержание кислоты в полученном растворе. Ответ округлите до 0,1%.

Проверь себя!

1. Какая из дробей равна 12,5%?

А. $\frac{1}{8}$. **Б.** $\frac{2}{7}$. **В.** $\frac{7}{8}$.

2. Сравните 20% от 40 с 8% от 100.

А. $<$. **Б.** $=$. **В.** $>$.

3. 20% какого числа равны 40?

А. 200. **Б.** 8. **В.** $\frac{1}{2}$.

4. Какая из величин больше 110% цены?

А. 1,02 цены. **Б.** 0,11 цены. **В.** 1,2 цены.

5. Увеличьте число 25 на 12%.

А. 37. **Б.** 28. **В.** 25,12.

6. Вычислите 10% от разности (8,7 – 4,9 – 3,2).

А. 0,7. **Б.** 0,006. **В.** 0,06.

7. Сколько процентов от числа 80 составляет число 160?

А. 200%. **Б.** 50%. **В.** 80%.

8. Пальто стоило 4000 р., его цену сначала подняли на 10%, а потом снизили на 10%. Сколько стало стоить пальто в итоге?

А. 4000 р. Б. 3960 р. В. 4200 р.

9. Найдите число, если 20% его равны значению выражения $-2{,}4 \cdot (-1{,}6 + 0{,}6)$.

А. 12. Б. 48. В. 120.

10. Сколько процентов составляет значение выражения $(-2)^2 - (-3)^3$ от значения выражения $-3{,}1 \cdot (-20)$?

А. 200%. Б. 100%. В. 50%.

А Б А В В Б В А Б А В

О-8. Статистические характеристики

1. Найдите среднее арифметическое, моду и размах ряда:
   а) 11, 11, 11, 11, 11, 11;
   б) 12, 11, 12, 11, 12, 11;
   в) 11, 11, 11, 12, 12, 12;
   г) 11, −12, 11, −12, 11, −12;
   д) 15, 121, 121, −61, 0, 20;
   е) 35, −23, 121, −55, 35, −35.

2. Приведите пример ряда чисел, среднее арифметическое которых равно нулю. Могут ли в таком ряду быть ненулевые числа? Может ли мода такого ряда быть отличной от нуля?

3. Один человек заработал за январь 5500 р., за февраль 8500 р. и за март 7200 р. Сколько он в среднем зарабатывал ежемесячно за этот период? Какой был размах колебаний его заработка за этот период?

4. В таблице показана численность населения России с 1993 по 1996 г.

Год	1993	1994	1995	1996
Численность населения, млн чел.	148,7	148,4	148,3	148,0

Определите среднюю численность населения за эти годы (результат округлите до десятых).

5. Приведите пример ряда чисел, размах которого равен нулю. Как связаны в таком ряду мода и среднее арифметическое?

6. Приведите пример ряда чисел, мода которого равна нулю, а среднее арифметическое не равно нулю.

7. Может ли среднее арифметическое ряда чисел совпадать с его наибольшим числом? Каким при этом будет размах ряда?

8. Ребята стреляли в тире (каждый по разу): 6 человек выбили 10 очков, 8 человек — 9 очков, 7 человек — 8 очков и 3 человека — 7 очков. Сколько в среднем очков выбил один человек?

9. В таблице показана заработная плата в 1995 г. на одном предприятии у некоторых категорий работников.

Категории работников	Слесари	Токари	Плотники
Зарплата, р.	558	611	490

а) Один учащийся, решив определить среднюю зарплату по всем категориям, нашел среднее арифметическое этого ряда чисел. Правильно ли он рассуждал?
б) Другой учащийся утверждал, что размах заработной платы у этих категорий работников на данном предприятии равен 121 р. Прав ли он?

10. У Жени в журнале шесть оценок по алгебре. Про одну из них он говорит, что ее не помнит, а остальные: 5, 2, 4, 2, 3. На родительском собрании учитель сказал, что в среднем у Жени точно выходит тройка. Какая оценка была забыта?

Глава 2. Отношения и пропорции

О-9. Что такое отношение

Частное $\frac{a}{b}$ называется **отношением** a к b.

Для положительных чисел a и b отношение a к b позволяет сравнивать a с b. (Первое число со вторым.)

Если $\frac{a}{b} > 1$, то $\frac{a}{b}$ показывает, во сколько раз a больше b.

Если $\frac{a}{b} < 1$, то $\frac{a}{b}$ показывает, какую часть a составляет от b.

Если $\frac{a}{b} = 1$, то $\frac{a}{b}$ показывает, что $a = b$.

Примеры:

$20 : 5 = \frac{20}{5} = 4$ показывает, что 20 больше 5 в 4 раза;

$5 : 20 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ показывает, что 5 составляет от 20 одну четверть;

$0{,}4 : \frac{2}{5} = 1$ показывает, что $0{,}4 = \frac{2}{5}$.

1. Магазин продал 90 м шерстяной ткани из 150 м, имевшихся в магазине. Какую часть составляет проданная ткань от всей имевшейся? Во сколько раз больше ткани продано, чем осталось?

2. Найдите следующие отношения и напишите, что показывает каждое из отношений:

а) $8 : 12$; б) $12 : 8$; в) $5{,}6 : 2{,}1$; г) $2{,}1 : 5{,}6$; д) $0{,}75 : \frac{3}{4}$.

3. Назовите по 2 пары чисел, отношение которых равно:

а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) 0,4; г) 1.

4. На рисунке 1 шесть равных отрезков. Найдите отношения и запишите, что они показывают:

а) $\frac{AD}{DE}$; б) $\frac{AC}{AF}$; в) $\frac{AK}{AD}$; г) $\frac{AF}{AK}$; д) $\frac{FD}{CE}$.

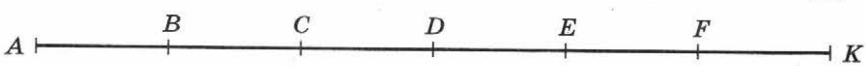


Рис. 1

5. Во сколько раз больше:

1) а) 6 см, чем 4 см;
б) 2 дм, чем 15 см;
в) 300 г, чем 180 г;
г) 1 кг, чем 250 г;
д) 2 дм^2, чем 40 см^2?

2) а) 8 дм, чем 5 дм;
б) 3 м, чем 6 дм;
в) 2 кг, чем 400 г;
г) 350 г, чем 100 г;
д) 1 м^2, чем 50 см^2?

6. Какую часть составляют:

1) а) 60 г от 90 г;
б) 2 дм от 2 м;
в) 120 км от 200 км;
г) 400 г от 0,8 кг;
д) 400 см^2 от 1 м^2?

2) а) 70 г от 105 г;
б) 30 см от 3 м;
в) 20 к. от 2 р.;
г) 500 г от 0,7 кг;
д) 25 см^2 от 2 дм^2?

7. Что больше и во сколько раз:

а) 3 т или 4500 кг;
б) 3 м^2 или 60 дм^2;
в) 1,5 м^3 или 10 000 см^3;
г) 0,4 дм^3 или 300 см^3?

---

8. На олимпиаде по математике шестиклассникам было предложено 15 задач, а восьмиклассникам — 20 задач. Шестиклассник решил 9 задач, а восьмиклассник — 14 задач. У кого результат лучше: у шестиклассника или у восьмиклассника?

9. Начертите два квадрата со сторонами соответственно 2 см и 5 см. Во сколько раз сторона одного квадрата больше стороны другого? Покажите ответ на чертеже. Во сколько раз площадь одного квадрата больше площади другого? Попробуйте увидеть это на чертеже.

О-10. Деление в данном отношении

1. В каком отношении точка C делит отрезок AB на каждом из рисунков 2, *а—г*?

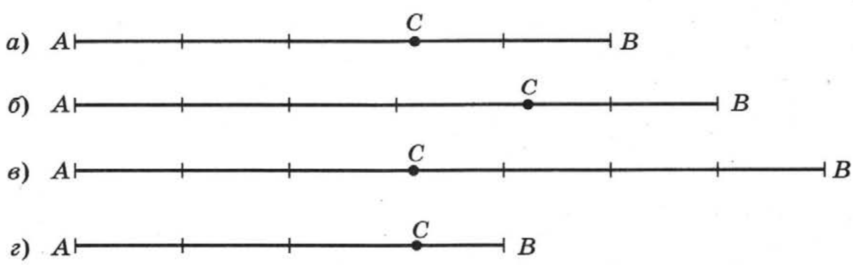


Рис. 2

2. Отрезок AB длиной 3,6 см разделен точкой C на части в отношении 4 : 5. Какова длина каждой части?

3. В комнате площадью 42 м^2 поставили перегородку, которая разделила комнату на части в отношении 4 : 3. Какую площадь имеет каждая из полученных частей комнаты?

4. Отрезок AB разделили точкой C на две части в отношении 3 : 8. Какова была длина отрезка AB, если длина меньшей части этого отрезка 0,6 см?

5. В каком отношении точки C и D делят отрезок AB на каждом из рисунков 3, *а—в*?

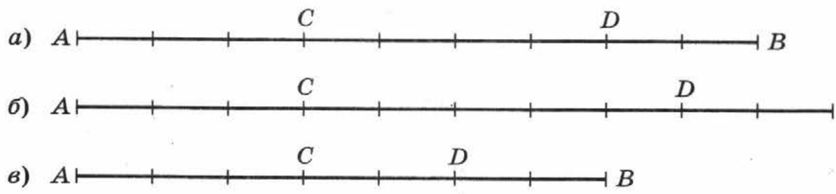


Рис. 3

6. Отрезок длиной 7,2 см разделен двумя точками в отношении 2 : 3 : 4. Какова длина каждой части?

---

7. Угол ABC разделен лучами BD и BE в отношении 3 : 1 : 2. Какова величина угла ABC, если $\angle DBC = 40°$? Сделайте рисунок.

8. Две машинистки разделили между собой рукопись в отношении 3 : 5. Сколько денег получит каждая, если в рукописи 160 страниц, а за каждую страницу машинисткам платят по 2 р.?

9. В состав серной кислоты входят водород, сера и кислород в отношении 2 : 32 : 64. Сколько потребуется кислорода и водорода для получения серной кислоты, если взять 1,6 кг серы? А сколько получится при этом серной кислоты?

10. Изобразите треугольник, отношение сторон которого 5 : 5 : 6, а периметр равен 6,4 см.

11. Для трех призеров соревнований по бегу была выделена некоторая сумма денег. Причем победителю соревнований было выдано 50% всей суммы, а остальные деньги были разделены между участниками, занявшими II и III места, в отношении 3 : 2. Сколько денег получил победитель, если участник, занявший третье место, получил 24 000 р.?

О-11. Формулы и зависимости

1. Одна сторона прямоугольника равна a см, а другая — 4 см. Составьте формулу зависимости площади S прямоугольника от a. Начертите прямоугольник при $a = \frac{1}{2}$; $a = 1$; $a = 3$ и вычислите его площадь.

2. На p рублей купили 1,5 кг конфет. Составьте формулу зависимости цены конфет c от p. Вычислите цену конфет при $p = 75$; $p = 90$; $p = 150$.

3. Сколько километров (S) можно проехать за 45 мин, если ехать со скоростью v км/ч? Вычислите при $v = 12$; $v = 40$; $v = 120$.

4. За какое время t можно проехать 400 км, если ехать со скоростью v км/ч? Вычислите при $v = 80$; $v = 20$; $v = 100$.

---

5. Расстояние по шоссе между двумя пунктами A и B равно 10 км. Из пункта B выехал велосипедист и едет со скоростью 12 км/ч в сторону, противоположную пункту A. Составьте формулу зависимости расстояния S от велосипедиста до пункта A от времени t (ч). Вычислите при $t = 2$; $t = 2{,}5$; $t = 3$.

6. Сторона квадрата равна 4 см. Каждую сторону квадрата увеличили на x см. Составьте формулу зависимости площади S нового квадрата от x. Вычислите при $x = 1$; $x = 2$; $x = 10$.

7. Поезд шел со скоростью v км/ч, а затем он увеличил скорость на 6 км/ч. Какое расстояние S он пройдет при новой скорости за 5 ч? Вычислите при $v = 60$; $v = 74$; $v = 90$.

8. Стоимость телеграммы (c) определяется количеством слов (n) и оплатой за услуги (a). За каждое слово платят p рублей. Составьте формулу зависимости c от переменных p, a, n.

9. На огонь поставили котел с водой. Температура воды была 18 °C. Каждую минуту температура повышалась на 4 °C. Составьте формулы зависимости температуры воды (T °C) от времени (t). Какие значения может принимать t, если воду надо довести до кипения (температура кипения воды 100 °C)?

О-12. Прямая и обратная пропорциональность

1. Составьте формулу зависимости одной переменной от другой. Заполните таблицу. Прочитайте предложения, вставляя вместо многоточия слова «прямо пропорционально», «обратно пропорционально».

а) Пешеход, велосипедист и мотоциклист находятся в пути по 2 ч каждый. Пройденное расстояние (S) ... скорости (v).

v, км/ч	4	12	24
S, км			

б) Площадь прямоугольника равна 36 см^2. Длина одной из сторон прямоугольника (a) ... длине другой стороны (b).

b, см	2	4	6	12
a, см				

в) 1 см^3 алюминия имеет массу 2,7 г. Масса куска алюминия (m) ... его объему (V).

V, см^3	1	2	4	10
m, г				

2. Прочитайте предложения, вставляя вместо многоточия слова «прямо пропорционально», «обратно пропорционально». Составьте формулу, выражающую указанную зависимость (обратите внимание на размерность величин, входящих в формулу).

а) Требуется купить по 400 г конфет разных сортов. Стоимость конфет в рублях (C) ... их цене в рублях за килограмм (c).

б) У покупателя есть 40 р. для покупки конфет. Количество купленных конфет в граммах (m) ... их цене в рублях за килограмм (c).

---

3. Формула объема пирамиды $V = \dfrac{Sh}{3}$, где S — площадь основания пирамиды, h — ее высота. Прочитайте пред-

ложения, вставляя вместо многоточия слова «прямо пропорционально», «обратно пропорционально»:
а) объем пирамиды (V) ... высоте пирамиды (h) при постоянной площади основания (S);
б) объем пирамиды (V) ... площади ее основания (S) при постоянной высоте h;
в) площадь основания пирамиды (S) ... ее высоте (h) при постоянном объеме (V);
г) высота пирамиды (h) ... ее объему (V) при постоянной площади основания (S).

4. Формула площади треугольника $S = \frac{ah}{2}$, где a — основание треугольника, h — высота, проведенная к основанию. Прочитайте предложения, вставляя вместо многоточия слова «прямо пропорционально», «обратно пропорционально»:
а) площадь треугольника (S) ... высоте (h) при постоянном основании (a);
б) основание треугольника (a) ... высоте (h) при постоянной площади (S);
в) высота треугольника (h) ... площади треугольника (S) при постоянном основании (a);
г) основание треугольника (a) ... его площади (S) при постоянной высоте (h).

О-13. Пропорции

Средние члены $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, или $a : b = c : d$ *Крайние члены*	Помните, что $a : b = \frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, т. е. $a : b = (ac) : (bc)$.

1. Выберите из данных отношений такие пары, из которых можно составить пропорцию:

1) $8 : 4$; $6 : 12$; $9 : 4{,}5$; $12 : 4$;

2) $6 : 8$; $2 : 3$; $\frac{2}{3} : \frac{3}{7}$; $12 : 18$; $6 : 4$;

3) $8 : 4$; $9 : 6$; $4 : 2$.

2. Заполните пропуски в пропорции:

1) $6 : 3 = 2 : ...$; 3) $... : 10 = 6 : 12$;
2) $12 : 4 = ... : 5$; 4) $20 : ... = 35 : 7$.

3. Заполните пропуски и составьте пропорции:

1) а) 12 больше 6 во столько же раз, во сколько 50 больше ...;
б) 20 составляет от 80 такую же часть, какую 5 составляет от ... .

2) а) 36 больше 9 во столько же раз, во сколько ... больше 6;
б) 9 составляет от 27 такую же часть, какую ... составляет от 12.

4. Составьте пропорции из данных чисел:

1) 15; 5; 6; 18;
2) 3; 21; 28; 4;
3) 0,6; 0,7; 7; 6;
4) 4; 100; 20; 20;
5) 5; 25; 125;
6) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$.

5. Найдите a, если:

1) $10 : a = 4 : 2$; 2) $a : 5 = 1{,}6 : 1\frac{3}{5}$; 3) $9 : 3 = a : 6$.

Заметьте, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то и $\frac{a}{b} \cdot \frac{bd}{1} = \frac{c}{d} \cdot \frac{bd}{1}$, т. е. $\frac{a \cdot \cancel{b}d}{\cancel{b} \cdot 1} = \frac{c \cdot b\cancel{d}}{\cancel{d} \cdot 1}$, или $ad = bc$.

6. Используя свойство пропорции, найдите неизвестный член пропорции:

1) а) $x : 15 = 0{,}3 : 1{,}5$;
б) $20 : x = 35 : 175$;
в) $\frac{3}{8} = \frac{y}{8{,}8}$;
г) $\frac{17}{6{,}5} = \frac{102}{y}$.

2) а) $x : \frac{2}{3} = \frac{5}{6} : \frac{1}{2}$;
б) $0{,}4 : x = 5 : 6$;
в) $\frac{7}{6} = \frac{y}{4{,}2}$;
г) $\frac{19}{4{,}5} = \frac{76}{y}$.

7. Решите задачу, составив пропорции с неизвестным членом:

1) Ширина прямоугольника 4 см, а отношение ширины к длине прямоугольника равно отношению чисел 0,8 и 1,2. Найдите длину прямоугольника, а затем его периметр и площадь.

2) Мама купила карамель и шоколадные конфеты в отношении 3 : 2. Карамели было куплено 450 г. Сколько было куплено шоколадных конфет?

3) На карте отрезок длиной 3 см изображает дорогу длиной 12 км. Дорогу какой длины изображает отрезок длиной 4,5 см?

---

8. Ширина прямоугольника на 3 см меньше его длины, а их отношение равно отношению чисел $1\frac{1}{3}$ и $2\frac{2}{3}$. Убедитесь, что этот прямоугольник можно разбить на два квадрата.

9. Начертите какой-нибудь равнобедренный треугольник, отношение боковой стороны которого к основанию равно 6 : 10. Убедитесь путем измерения, что его больший угол содержит примерно 113°.

10. Периметр треугольника относится к периметру квадрата как 3 : 4. Найдите длину стороны квадрата, если стороны треугольника равны 3,3 см, 4,2 см, 4,8 см.

Проверь себя!

1. Во сколько раз 24 меньше 36?

А. $\frac{2}{3}$. **Б.** 2,5. **В.** 1,5.

2. Найдите отношение AE к CF, если $AB = BC = CD = DE = EF$ (рис. 4).

А. $1\frac{1}{3}$. **Б.** $\frac{5}{3}$. **В.** $\frac{4}{5}$.

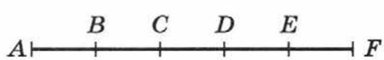


Рис. 4

3. Какому из чисел равно отношение 4 дм к 40 см?

А. 0,1. **Б.** 1. **В.** 10.

4. Поставьте знак <, > или = между отношениями 16,16 : 16 и 101 : 100.

А. =. **Б.** >. **В.** <.

5. Отрезок разделен в отношении 2 : 7. Какую его часть составляет меньший из получившихся отрезков?

А. $\frac{1}{3}$. **Б.** $\frac{7}{9}$. **В.** $\frac{2}{9}$.

6. Какое из трех равенств является пропорцией?

А. $42{,}21 : 21 = 4{,}2 : 2$. **В.** $\frac{1}{2} : \frac{1}{7} = 7 : 2$.

Б. $6 : 3 = 2{,}5 : \frac{1}{2}$.

7. В какой из пропорций $x = 5$?

А. $x : 2{,}45 = 4 : 2$. **В.** $3 : 0{,}1 = x : \frac{1}{6}$.

Б. $\frac{1}{17} : x = \frac{1}{85} : 2$.

8. Масштаб карты 1 : 200 000. Каким отрезком будет изображена дорога длиной 3 км?

А. 1,5 см. **Б.** 15 см. **В.** 0,5 см.

9. Скорость велосипедиста 12 км/ч, а скорость мотоциклиста 30 км/ч. Они выехали из пункта A одновременно и поехали в одном направлении. Какую часть будет составлять расстояние, преодоленное велосипедистом за 2 ч, от расстояния, преодоленного мотоциклистом за то же время?

А. $\frac{2}{5}$. **Б.** $\frac{4}{5}$. **В.** 0,6.

10. На 20 р. можно купить 250 г конфет или 400 г печенья. Во сколько раз печенье дешевле конфет?

А. В 2 раза. **Б.** В 1,6 раза. **В.** В 2,5 раза.

В А Б А В В В А А Б

Глава 3. Введение в алгебру

О-14. Буквенные выражения и числовые подстановки

1. Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

1) а) $x - y - z$ при $x = 2$, $y = -3$, $z = 7$;
б) $x - (y + z)$ при $x = 2$, $y = -3$, $z = 7$;
в) $a - b + c$ при $a = 2$, $b = -3$, $c = -7$;
г) $a - (b - c)$ при $a = 2$, $b = -3$, $c = -7$.

2) а) $3mn - p$ при $m = -2$, $n = 4$, $p = -10$;
б) $3m \cdot (n - p)$ при $m = -2$, $n = 4$, $p = -10$;
в) $2xy - z$ при $x = -2$, $y = 4$, $z = -10$;
г) $2x \cdot (y - z)$ при $x = -2$, $y = 4$, $z = -10$.

3) а) $2a^2$ при $a = -3$;
б) $(2a)^2$ при $a = -3$;
в) $3m^2$ при $m = -2$;
г) $(3m)^2$ при $m = -2$.

2. Найдите значение каждого из выражений при данных значениях переменных.

1) При $x = 0{,}5$, $y = 3$:
а) $x - y^2$;
б) $x - 2y$;
в) $(x - y)^2$;
г) $(x - y) \cdot 2$;
д) $x^2 - y$;
е) $2x - y$.

2) При $a = 0{,}5$, $b = 4$:
а) $2a - b$;
б) $a^2 - b$;
в) $a - 2b$;
г) $a - b^2$;
д) $(a - b) \cdot 2$;
е) $(a - b)^2$.

3. Даны два выражения. Сравните значения данных выражений при нескольких значениях переменных. Значения переменных выберите сами.

1) а) $(a - 2) \cdot (a + 2)$ и $a^2 - 4$;
б) $(3x)^2$ и $9x^2$;
в) $a - b - c$ и $a - (b + c)$;
г) $-2 \cdot a$ и $2 \cdot (-a)$.

2) а) $(b - 3)(b + 3)$ и $b^2 - 9$;
б) $(2m)^2$ и $4m^2$;
в) $a - (b - c)$ и $a - b + c$;
г) $\frac{-6}{a}$ и $-\frac{6}{a}$.

З а м е ч а н и е. Если значения выражений не получились одинаковыми, то пересчитайте.

4. При каких значениях переменной каждое из выражений принимает значение, равное 10? Сделайте проверку.

1) а) $x - 12$;
б) $\frac{1}{3}a + 6$;
в) $-2c - 6$;
г) $\frac{20}{a}$;
д) $|x| - 2$.

2) а) $a + 15$;
б) $\frac{2}{3}x - 2$;
в) $-3m - 2$;
г) $\frac{-30}{b}$;
д) $|a| + 2$.

3) а) $12 + a$;
б) $0{,}4x - 0{,}6$;
в) $-7m - 4$;
г) $\frac{-40}{c}$;
д) $2 \cdot |a|$.

5. Подберите значения переменных так, чтобы значение каждого из выражений было равно -3:

а) $a + b$;
б) $5a - b$;
в) $x^2 + y$;
г) $-3m + n$.

6. Составьте выражения по условию задачи:

1) Купили 2 кг конфет по цене a р. за 1 кг и 3 кг конфет по цене b р. за 1 кг. Сколько заплатили за по-

купку? Какова средняя цена 1 кг смеси? Вычислите при $a = 60$ и $b = 80$.

2) Велосипедист ехал по проселочной дороге в течение 2 ч со скоростью x км/ч и 3 ч по шоссе со скоростью y км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист? Какова средняя скорость его движения? Вычислите при $x = 8$ и $y = 13$.

3) Велосипедист ехал по проселочной дороге в течение a ч со скоростью 8 км/ч и t ч по шоссе со скоростью 13 км/ч. Оказалось, что по шоссе он проехал большее расстояние, чем по проселочной дороге. На сколько километров больше проехал велосипедист по шоссе, чем по проселочной дороге? Вычислите при $a = 3$ и $t = 2$.

4) Два тракториста взялись вспахать поле. Один из них работал n часов и за час обрабатывал 0,8 га, а другой работал m часов и за час обрабатывал 0,9 га. Какова площадь поля? Вычислите при $n = 6$ и $m = 7$.

---

5) За 3 ч одна машинистка напечатала n страниц, а другая за 5 ч — m страниц. Оказалось, что первая машинистка печатает быстрее, чем вторая. На сколько страниц в час больше печатает первая машинистка? Вычислите при $n = 24$, $m = 45$.

6) У Маши несколько двухрублевых и a пятирублевых монет всего на сумму 24 р. Сколько двухрублевых монет у Маши? Какие значения может принимать число a?

7) На складе 300 т картофеля. Ежедневно со склада увозят по 16 т. Сколько тонн картофеля останется на складе через t дней? Какое самое большое значение может принимать число t?

7. Подберите такие значения переменной a, при которых значение выражения $\dfrac{2a-5}{a+1}$:

а) положительно; в) равно нулю;
б) отрицательно; г) не существует.

8. Подберите такие значения переменных m и n, при которых значение выражения $\dfrac{m+2n}{m-n}$:

а) положительно; в) равно нулю;
б) отрицательно; г) не существует.

9. Даны два выражения $2a$ и $\frac{1}{2}a$. Подберите такие значения a, при которых значение первого выражения:

а) больше значения второго;
б) меньше значения второго;
в) равно значению второго.

10. Дано выражение $\frac{|a|}{a}$.

а) Вычислите значение этого выражения при трех положительных значениях a.
б) Вычислите значение этого выражения при трех отрицательных значениях a.
в) Какие значения может принимать данное выражение?
г) Есть ли значения a, при которых данное выражение не имеет смысла?

11. Сравните значение выражения $a^2 - a - 6$ при данных значениях переменных:

а) $a = -2$ и $a = 3$; б) $a = 4$ и $a = 3$; в) $a = -2$ и $a = 0$.

О-15. Буквенная запись свойств действий над числами

Задача.
В автобусе ехало a пассажиров. На первой остановке вошло b человек и никто не вышел, а на второй остановке вошло c человек и никто не вышел. Сколько человек стало в автобусе? Решите задачу двумя способами. Запишите возможное равенство.
I способ: $a + b + c$ (человек стало в автобусе).
II способ: $a + (b + c)$ (человек стало в автобусе).
Следовательно, $a + b + c = a + (b + c)$,
или $a + (b + c) = a + b + c$.

Решите каждую задачу двумя способами и запишите возможное равенство. Какое свойство и какого действия оно иллюстрирует?

1. У кассира в кассе было a рублей. Он получил с покупателя b рублей и дал сдачу c рублей. Сколько денег у него стало в кассе?

2. От веревки длиной a м отрезали куски сначала длиной b м, а потом длиной c м. Какова длина оставшейся части?

3. Поезд шел до остановки a ч со скоростью v км/ч, а затем после остановки b ч с той же скоростью. Какое расстояние прошел поезд?

4. В семье c детей. Мама принесла a яблок и разделила их поровну между детьми. Затем пришел папа и тоже принес яблоки, но b штук. Он их тоже разделил между детьми поровну. Сколько яблок получил каждый из детей?

---

5. Прямоугольник длиной a м и шириной b м разделен по длине на c равных частей (рис. 5). Найдите площадь каждой из получившихся частей.

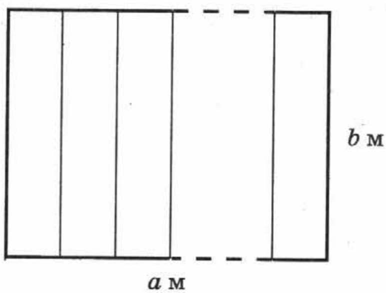


Рис. 5

6. В детский сад привезли c пакетов, в каждом из которых оказалось по b коробок, а в каждой коробке — по a карандашей. Сколько карандашей получил детский сад?

7. Каким выражением можно заменить данное, чтобы получилось верное равенство:

а) $m - n - p - q = \ldots;$

б) $m \cdot p + n \cdot p + q \cdot p = \ldots;$

в) $\dfrac{m + n}{p} = \ldots;$

г) $\dfrac{a \cdot b}{c \cdot d} = \ldots;$

д) $2 + a - 3 + b = \ldots;$

е) $2a \cdot (-3) \cdot b = \ldots?$

О-16. Раскрытие скобок

Три правила раскрытия скобок:

$$a + (b + c) = a + b + c$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

1. Запишите в виде суммы:

1) $a - b - c + d$;
2) $-m + n - k - e$;
3) $2a - 3b + 4c - 5d$;
4) $-5p + 3q - 10m$.

2. Раскройте скобки, воспользовавшись образцом:

$$a + (-b + n) = a + (-b) + n = a - b + n$$
$$m - (-x - y + z) = m - (-x) - (-y) - z = m + x + y - z$$

1) а) $m - (-3n - 5k)$;
б) $-x + (-2a + 0{,}3b)$;
в) $3c - (2b - 3x - 5y)$.

2) а) $3x + (-y + 5a)$;
б) $-7a - (-2b - 3c)$;
в) $12p - (2a - 3b + 7c)$.

3. Раскройте скобки:

1) а) $(x - y) + (2y - 3b)$;
б) $-(a - b) + (-x + a) - (b - x)$;
в) $-(x - 9) + (a - 5)$;
г) $(a - 7) - (5 + a) - (9 - a)$.

2) а) $(x - a) + (y + b)$;
б) $-(m + n) + (n - p) - (-p - m)$;
в) $(b - 4) - (-c + 7)$;
г) $(-m + 8) - (m - 4) + (-8 + m)$.

4. Раскройте скобки:

1) а) $-2 \cdot (x - y + z)$;
б) $3 \cdot (-a + b)$;
в) $-2 \cdot (2x - 5y)$;
г) $0{,}3 \cdot (-30a + 40b)$.

2) а) $-2 \cdot (-a + b + c)$;
б) $4 \cdot (-m - n)$;
в) $-3 \cdot (-2a + 5b)$;
г) $0{,}5 \cdot (20c - 60d)$.

5. Раскройте скобки:

1) а) $2 \cdot (a - 9) - 3$;
б) $-3 \cdot (x + 2) + 10$;
в) $5 \cdot (4 - x) - (-5x + 1)$;
г) $-3 \cdot (2x + 5) + (15 - a)$;
д) $x \cdot (a - b) - (c - bx)$.

2) а) $-5 \cdot (m - 1) + 12$;
б) $3 \cdot (x - 3) - 9$;
в) $2 \cdot (7 - x) - (4 - 2x)$;
г) $-0{,}5 \cdot (2x - 8) + (b - 4)$;
д) $a \cdot (m + n) - (p + an)$.

О-17. Приведение подобных слагаемых

$$a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a \cdot (b + c - d)$$
$$2a - 3a + 15a = (2 - 3 + 15) \cdot a = 14a$$

1. Упростите те выражения, которые можно упростить, воспользовавшись распределительным законом:

1) а) $2m - 4m + 5m$;
б) $3m - 2n$;
в) $-1{,}3a + 4a - 3{,}7a$;
г) $4x - 8y - 6x + 11y$.

2) а) $-7x - 8x + 2x$;
б) $-1{,}5a + 7{,}3b$;
в) $1{,}8b - 5{,}8b + 3b$;
г) $-2m + 3n - 8m - n$.

2. Упростите выражение:

1) а) $(a - 2) + (a - 3) - (-2a + 7)$;
б) $2 \cdot (a - 3) - (5a + 6)$;
в) $-3 \cdot (2x - 9) + (-5x + 1)$.

2) а) $(x - 3) + (x - 5) - (7 - 3x)$;
б) $-2 \cdot (m - 3) - (3m - 5)$;
в) $4 \cdot (2a - 1) + (7 - 5a)$.

3. Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

1) От произведения чисел a и 5 отнять разность этих чисел.
2) От удвоенной разности чисел b и 7 отнять утроенную сумму этих чисел.
3) Машина ехала t ч со скоростью 65 км/ч, а со скоростью 53 км/ч на 2 ч меньше. Какое расстояние проехала машина?
4) Три бригады изготовляли детали. Первая бригада изготовила a деталей, вторая — на 6 деталей больше, а третья — на 5 деталей меньше, чем первая. Сколько деталей изготовили все три бригады вместе?
5) Связали вместе три куска веревки, один из которых в 2 раза длиннее второго и на 0,8 м длиннее третьего. Какова длина получившейся веревки, если длина второго куска a м?

4. Найдите значение выражения при данных значениях переменной:

а) $2a - 1{,}5a + 7{,}5a - 3a$ при $a = -2{,}75$;
б) $3a - 1{,}5b + 7a - 8{,}5b$ при $a = 1{,}7$, $b = -4{,}3$;
в) $-2 \cdot (x - 2y) + (9y + 2x)$ при $x = 0{,}64$, $y = 1{,}5$;
г) $a \cdot (b - 4) - b \cdot (a - 3)$ при $a = 2{,}5$, $b = -\frac{1}{3}$.

---

5. Решите уравнение:

1) а) $-3x + 5x = 2{,}4$;
б) $(3x - 1) - (2x - 5) = 0$;
в) $2 \cdot (y + 1) + 5 \cdot (y - 0{,}4) = 14$.

2) а) $-8x + 2x + 3x = -12$;
б) $(-7x + 1) - (2 - 8x) = 0$;
в) $4 \cdot (y - 1) - 0{,}8 \cdot (y - 5) = 32$.

6. На складе было 300 т картофеля. В первый день со склада вывезли p т картофеля, а во второй день — на 2 т меньше, чем в первый. Сколько тонн картофеля осталось на складе?

7. Два комбайна убрали пшеницу с поля. Первый убирал с 10 га в день, а второй — с 8 га в день. Первый работал m дней, а второй — на один день меньше. Какова площадь поля?

Проверь себя!

1. Найдите значение выражения $3 - 2y$ при $y = -\frac{1}{2}$.

   А. 0. Б. 1. В. 4.

2. Поставьте знак >, < или = между значениями выражений $2a^2$ и $(2a)^2$ при $a = \frac{1}{2}$.

   А. <. Б. =. В. >.

3. Какое из выражений соответствует предложению «сумма квадрата числа a и числа b»?

   А. $(a + b)^2$. Б. $a^2 + b$. В. $a + b^2$.

4. Какое из выражений равно выражению $a - b - c$?

   А. $a - (b - c)$. Б. $a + (b - c)$. В. $a - (b + c)$.

5. При каком из данных значений a выражение $1 + \frac{|a|}{a}$ равно нулю?

   А. −2097. Б. 834. В. 0.

6. При каком значении m выражение $\frac{2m - 9}{m}$ неотрицательно?

   А. −4,5. Б. 1,099. В. 0,001.

7. Какое из данных выражений равно выражению $-3a - 2b - 4a$?

   А. $-2b - 7a$. Б. $-5ab - 4a$. В. $-3a + 8ab$.

8. Какое из данных выражений равно выражению $-3a \cdot (-2b) \cdot (-4a)$?

   А. $-24a^2b$. Б. $-48ab$. В. $-24ab$.

9. Приведите подобные слагаемые $2n - 3m - 3n + 5m$.

   А. m. Б. mn. В. $2m - n$.

10. Упростите $a(a - 2) - (a^2 - 3)$.

    А. $-2a - 3$. Б. $3 - 2a$. В. $-2a^2 + 3$.

В А Б В А А А А В Б

Глава 4. Уравнения

О-18. Составление уравнений

Составьте, если возможно, несколько уравнений по условию задачи:

1. Брат младше сестры на 3 года, а вместе им 21 год. Сколько лет брату и сколько лет сестре?

2. Брат старше сестры в 1,5 раза, а вместе им 15 лет. Сколько лет брату и сколько лет сестре?

3. Машина двигалась несколько часов со скоростью 65 км/ч, а со скоростью 53 км/ч — на 2 ч меньше. Сколько времени она двигалась со скоростью 65 км/ч, если за все время она прошла 602 км?

О-19. Корни уравнения

1. Докажите, что число -1 является корнем уравнения:

а) $-2x + 3 = 5$;

б) $-x = 3x + 4$;

в) $y^2 - 5 = 3y - 1$;

г) $(2x - 5)(x + 1) = 0$;

д) $\frac{2x+2}{x-5} = 0$;

е) $0 \cdot y = 0$.

2. Проверьте, является ли число 2 корнем уравнения:

а) $3 - x = 2x - 3$;

б) $x - 5 = x^2 - 1$;

в) $(y - 2) \cdot (2y + 3) = 0$;

г) $x \cdot (x - 2) = 2$;

д) $\frac{x}{x-2} = 0$;

е) $|y| = 2$.

---

3. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а) $x^2 + 1 = 0$;

б) $|y| + 4 = -5$;

в) $x^2 + |x| = -2$;

г) $\frac{|x|}{x} = 2$;

д) $0 \cdot x = 3$.

4. Докажите, что корнем уравнения является любое число:

а) $x + 3 = 3 + x$;

б) $-2y + 5y = 3y$;

в) $2x - (x - 5) = 2x - x + 5$;

г) $-2 \cdot (-3x) = 6x$;

д) $0 \cdot x = 0$.

5. Назовите не менее двух корней уравнения:

а) $\dfrac{|x|}{x} = 1$; в) $x + |x| = 0$; д) $3x = 2x + x$.

б) $\dfrac{|x|}{x} = -1$; г) $x - |x| = 0$;

О-20. Решение уравнений

1. Решите уравнение, воспользовавшись свойствами уравнений:

1) а) $x - 2,5 = 6,5$; в) $2,3 + x = -5,3$;
б) $5,6 + y = -4,5$; г) $y - 4,9 = 2,9$.

2) а) $-2x = 0,8$; г) $-1,2y = 0,6$;
б) $2,5y = -10$; д) $\dfrac{-5x}{2} = 10$;
в) $3x = 2$; е) $\dfrac{-7x}{3} = 14$.

3) а) $\dfrac{2x}{3} = -4$; б) $\dfrac{3x}{2} = -6$.

2. Решите уравнение:

1) а) $2x - 5 = 27$; д) $2x - (5x - 6) = 7 + (x - 1)$;
б) $-3 + 4y = -5$; е) $3x - 1 = 2x - (4 - x)$;
в) $2x - 1 = 4x + 3$; ж) $2(x - 3) = -3(x + 2)$;
г) $\dfrac{1}{3}y + 2 = -\dfrac{1}{6}y + 5$; з) $2(x - 5) - 7(x + 2) = 1$.

2) а) $4 - 3x = 16$; д) $5x - (2x - 9) = 6 + (x + 3)$;
б) $5y - 7 = -12$; е) $7x - 8 = 4x - (1 - 3x)$;
в) $7x - 1 = 2x - 11$; ж) $3(x + 4) = -4(x - 3)$;
г) $\dfrac{1}{2}y - 3 = -\dfrac{1}{6}y - 7$; з) $3(x + 2) - 8(x - 4) = -2$.

3. Составьте уравнение по условию задачи и решите его:

1) Задумано число. Сумма задуманного числа и 11 равна разности 15 и задуманного числа. Какое число задумано?
2) Задумано число. Если от 15 отнять удвоенное задуманное число, то получится столько же, сколько получилось бы, если к половине задуманного числа прибавить 5. Какое число задумано?
3) Задумано число. $\dfrac{3}{4}$ этого числа равны разности числа 35 и задуманного числа. Какое число задумано?

4) Задуманное число увеличили на 20% и получили число, которое могли получить, прибавив к половине задуманного числа 2,1. Какое число задумано?

5) Если сложить пятую часть задуманного числа, двадцатую часть этого числа и треть этого числа, то получится 70. Какое число задумано?

---

4. Решите уравнение, предварительно разделив обе части на общий числовой множитель:

а) $4 \cdot (x - 1) = 8 \cdot (2 - x)$;
б) $-6 \cdot (2x - 5) = 9 \cdot (x + 1)$;
в) $0{,}6 \cdot (x - 9) = 0{,}2 \cdot (23 - 2x)$;
г) $6 \cdot (x - 3) = 3 \cdot (15 - x)$;
д) $-8 \cdot (2x - 3) = 12 \cdot (x + 4)$;
е) $0{,}2 \cdot (x - 8) = 0{,}4 \cdot (x - 3)$.

5. Решите уравнение, умножив обе части на общий знаменатель всех дробей:

а) $\frac{1}{3} \cdot (x + 5) = \frac{1}{2} \cdot (x + 3)$;
б) $1\frac{1}{4} \cdot (3y - 1) = -\frac{2}{3} \cdot (9 - 8y)$;
в) $0{,}7 \cdot (x - 3) = 0{,}5 \cdot (x + 1)$;
г) $\frac{1}{4} \cdot (5 - x) = -\frac{1}{3} \cdot (2x - 15)$;
д) $1\frac{1}{3} \cdot (2y + 5) = \frac{1}{2} \cdot (3y + 25)$;
е) $-0{,}2 \cdot (x - 2) = 0{,}5 \cdot (x - 5)$.

6. Найдите значения переменных, при которых значения выражений $1 - 5x$ и $x - 13$:

а) равны;
б) противоположны;
в) первое больше второго на 3.

7. Решите уравнение относительно x или y:

а) $-a + x = 3$;
б) $2 + y = -3y + 4a$;
в) $5x - 4a = a$;
г) $c - x = -3$;
д) $3 + y = -5c + 2y$;
е) $3x - 7c = 2c$.

О-21. Решение задач с помощью уравнений

1. Расстояние между двумя пристанями моторная лодка прошла за 2 ч по течению, а обратно вернулась за 2,5 ч. Скорость течения реки 2 км/ч. Какова собственная скорость моторной лодки?

2. Скорость течения реки 2 км/ч. По течению моторная лодка двигалась 4 ч, а против течения — 2 ч. Оказалось, что по течению она прошла на 28 км больше, чем против течения. Какова собственная скорость лодки?

3. Купили несколько килограммов конфет по 60 р. за 1 кг и печенье по 44 р. за 1 кг. Печенья купили на 2 кг больше, чем конфет. За всю покупку заплатили 348 р. Сколько купили конфет и сколько печенья?

4. Задумано число. Если к нему добавить 80% от 20, то получится столько же, как если от 70 отнять 80% от задуманного числа.

---

5. На одной полке стояло 36 книг, а на другой — 40. Когда со второй полки сняли несколько книг, а с первой сняли столько, сколько осталось на второй, то на обеих полках книг стало поровну. Сколько книг сняли с каждой из полок?

6. В коридоре детского сада стояли велосипеды: двухколесные и трехколесные. Когда посчитали рули, то их оказалось 7. А когда посчитали колеса, то их оказалось 18. Сколько двухколесных и сколько трехколесных велосипедов в детском саду?

7. Метр ткани подорожал на 15 р., и поэтому на ту сумму, которую надо было заплатить за 4,5 м этой ткани, теперь можно купить лишь 4 м. Сколько стоит теперь 1 м ткани?

Проверь себя!

1. Какое из чисел является корнем уравнения $x+3=2x-9$?

   А. 10. Б. 12. В. 6.

2. Для какого из уравнений число 3 является корнем?

А. $x \cdot 0{,}002 = 0{,}06$. **Б.** $|x| = -3$. **В.** $(-x)^2 = 9$.

3. Какое из уравнений не имеет корней?

А. $x + x = -100$.
Б. $x \cdot x = -100$.
В. $x - 100 = -100$.

4. От числа x отняли 4, полученную разность разделили пополам и получили столько же, как если бы от x отняли 26. Какое из уравнений соответствует этому условию?

А. $(x - 4) : 2 = 26$.
Б. $(x - 4) \cdot \frac{1}{2} = x - 26$.
В. $(x - 4) : \frac{1}{2} = x - 26$.

5. Какое из уравнений имеет тот же корень, что и уравнение $2x - 5 = 73$?

А. $2x = 73 - 5$.
Б. $2x = 73 + 5$.
В. $2x - 73 = -5$.

6. Решите уравнение $15 - x = 1 - 2(3x - 2)$.

А. -2. **Б.** $-3{,}6$. **В.** $-\frac{10}{7}$.

7. Решите уравнение $-0{,}3(x - 2) = 0{,}5(-x + 1)$.

А. $\frac{2}{15}$. **Б.** $-0{,}5$. **В.** $7{,}5$.

8. Корнем какого из уравнений является любое положительное число?

А. $x + 2 = 2x$. **Б.** $x = x^2$. **В.** $|x| = x$.

9. Какое из уравнений имеет два различных по модулю корня?

А. $(x - 2)x = 0$. **Б.** $|x| = 36$. **В.** $5(x - 2) = 0$.

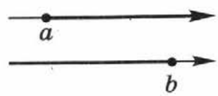
10. Какое из уравнений имеет отрицательный корень?

А. $-2 : x = -100$. **Б.** $2 - x = -7$. **В.** $-x = 3$.

Б В Б Б Б А Б В А В

Глава 5. Координаты и графики

О-22. Множества точек на координатной прямой

Числовые промежутки		
Название	**Изображение**	**Запись на языке алгебры**
Открытый луч		$x > a$, $x < b$
Замкнутый луч		$x \geqslant a$, $x \leqslant b$
Отрезок		$a \leqslant x \leqslant b$
Интервал		$a < x < b$

1. Изобразите на координатной прямой числа:

а) 3; б) 2,5; в) -6; г) $\frac{2}{3}$; д) $-4\frac{5}{6}$; е) $-3{,}8$.

Какое из этих чисел расположено на координатной прямой правее всех других? левее всех других?

2. Приведите примеры таких чисел a и b, что $a < b$. Изобразите их на координатной прямой.

3. На рисунке 6 изображены числа на координатной прямой. Все ли сделанные рисунки правильны?

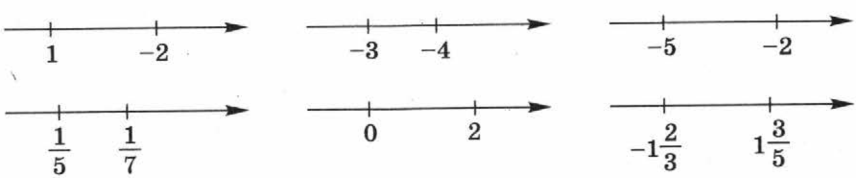


Рис. 6

4. На рисунке 7 изображены промежутки. Задайте их с помощью неравенств или двойных неравенств.

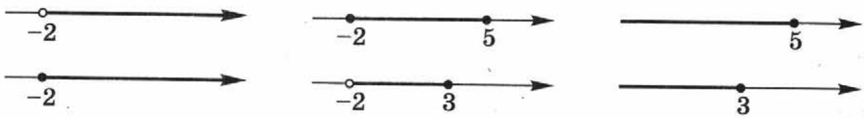


Рис. 7

5. Для каждого из промежутков, изображенных на рисунке 7, укажите, содержатся ли в них точки:

а) 1; б) -2; в) $\frac{1}{6}$; г) -3; д) $3\frac{2}{7}$; е) $-3\frac{4}{11}$.

6. Изобразите на координатной прямой множества точек, координаты которых удовлетворяют данным условиям. Назовите любые два числа из этих множеств:

а) $x \geqslant -3$;
б) $x \leqslant -1$;
в) $1 < x < 2$;
г) $1 \leqslant x \leqslant 2$;
д) $0 < x < 1$;
е) $1 < x < 3$.

7. Приведите пример числового промежутка, такого, что наибольшее число в нем:

а) 1; б) -3; в) 7.

8. Приведите пример числового промежутка, такого, что наименьшее число в нем:

а) -2; б) 4; в) 6.

9. Для каждого из промежутков, изображенных на рисунке 7, выясните, какие из следующих утверждений справедливы:

а) в промежутке содержатся все целые числа;
б) в промежутке содержатся все натуральные числа;
в) в промежутке содержатся все целые отрицательные числа;
г) в промежутке содержится конечное количество целых чисел.

---

10. Приведите пример числового промежутка:

а) не содержащего ни одного целого числа;
б) не содержащего ни одного отрицательного числа;
в) содержащего все отрицательные числа;
г) содержащего все отрицательные числа, но не содержащего ни одного положительного.

11. Для каждой из данных пар числовых множеств проверьте, есть ли у них общие точки:

а) $x < 2$, $x > 3$;
б) $x \leqslant 5$, $x \geqslant 3$;
в) $x \geqslant -1$, $x < 2$;
г) $x \leqslant 1$, $x \geqslant 1$.

12. Для каждого из числовых промежутков, указанных в задаче 6, проверьте, содержится ли он в каком-либо из промежутков, изображенных на рисунке 7. Содержит ли он какой-либо из этих промежутков?

13. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $|x| > 1$;
б) $|x| < 2$;
в) $|x| \geqslant 2$;
г) $|x| \leqslant 3$.

14. Каждый из изображенных на рисунке 8 промежутков может быть задан неравенством вида $|x| < a$ при каком-то a. Найдите эти числа a.

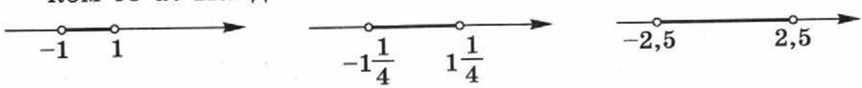


Рис. 8

15. Каждый из изображенных на рисунке 9 промежутков может быть задан неравенством вида $|x| > a$ при каком-то a. Найдите эти числа a.

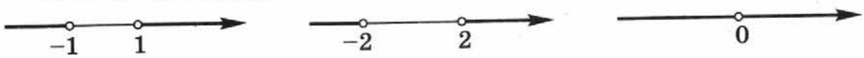


Рис. 9

16. Проверьте, какие из изображенных на рисунке 10 множеств могут быть заданы условиями вида:

а) $|x| = a$;
б) $|x| \leqslant a$;
в) $|x| \geqslant a$.

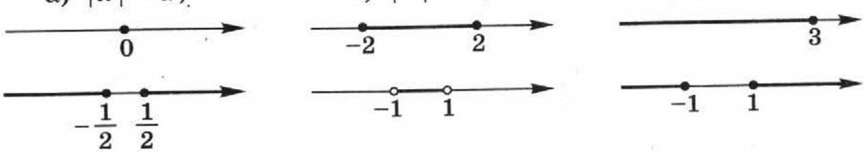


Рис. 10

17. На рисунке 11 изображены числовые промежутки, в которых содержатся числа x. Изобразите числовые промежутки, в которых содержатся числа $-x$.

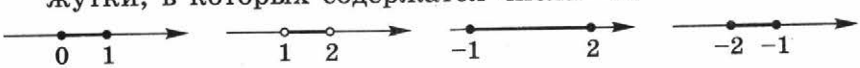
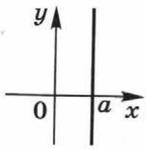
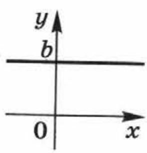
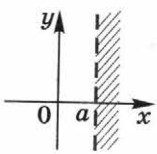
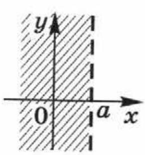
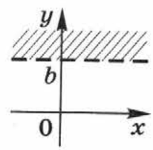
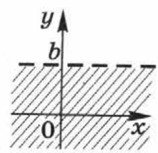
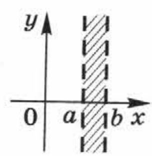
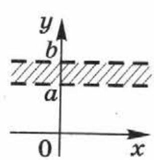


Рис. 11

О-23. Множества точек на координатной плоскости

Изображение	Запись на языке алгебры
	$x = a$
	$y = b$
	$x > a$
	$x < a$

Изображение	Запись на языке алгебры
	$y > b$
	$y < b$
	$a < x < b$
	$a < y < b$

1. Изобразите на координатной плоскости точки с координатами (1; 2), (–2; 3), (4,5; –3), $\left(-4; -3\frac{1}{3}\right)$.

2. Укажите, какие из точек A (–1; 3), B (2; 4), C (–4; –4), D (2; 5,5), $E\left(\frac{2}{3}; 5\right)$ удовлетворяют условию:

а) $x > 1$; б) $y < 3$; в) $x = 2$; г) $0 < x < 1$.

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

а) $x = 5$; б) $x = -2$; в) $y = -3$; г) $y = 4$; д) $x < 3$; е) $x > 7$; ж) $y \geqslant 2$; з) $y \leqslant -1$.

4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

а) $-2 < x < 1$; б) $-3{,}5 \leqslant x \leqslant 5$; в) $1 < y < 4{,}5$; г) $-1 \leqslant y \leqslant 5$.

5. Опишите на алгебраическом языке множества точек, изображенные на рисунке 12, *а—ж*.

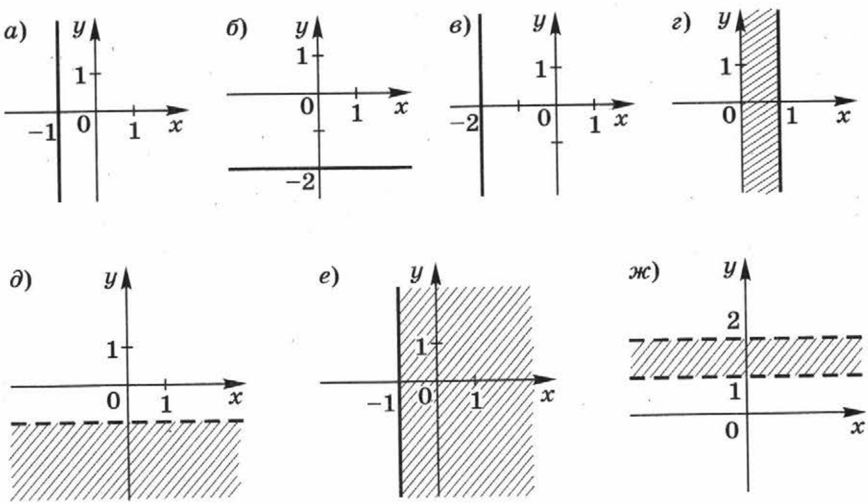


Рис. 12

6. Опишите на алгебраическом языке прямую:

а) параллельную оси абсцисс и проходящую через точку с координатами (–3; 2);

б) перпендикулярную оси абсцисс и проходящую через эту же точку.

---

7. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

а) $|x| = 1$; б) $|y| = 2$; в) $|y| \geqslant 3$; г) $|x| \leqslant 2$; д) $1 \leqslant |x| \leqslant 2$; е) $2 < |y| < 3$.

8. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

а) $x < 1$, $y < 2$;
б) $x = 1$, $y > 3$;
в) $|x| = 1$, $|y| = 2$;
г) $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 2$;
д) $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $-3 \leqslant y \leqslant 2$;
е) $1 < |x| \leqslant 2$, $1 \leqslant |y| < 2$.

9. Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных точкам прямых $x = 5$ и $y = 2$ относительно прямых:

а) $x = 2$; б) $x = -2$; в) $y = 3$; г) $y = 4$.

Есть ли среди построенных множеств совпадающие с исходными?

10. Множество точек с координатами, удовлетворяющими условиям $x > a$, $y < a$ (при некотором a), содержится в множестве точек с координатами, удовлетворяющими условиям $x > 1$, $y < 3$. Каким может быть число a?

11. Какой фигурой является множество точек с координатами, удовлетворяющими условиям $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$ (при положительном a)? Каким может быть число a, если известно, что площадь этой фигуры больше 1?

12. Определите числа a и b, если известно, что множество точек, заданное условиями $a < x < a + 2$ и $b < y < b + 1$, симметрично множеству, заданному условиями $1 < x < 3$ и $2 < y < 3$:

а) относительно оси абсцисс;
б) относительно оси ординат;
в) относительно начала координат.

13. Можно ли отыскать числа a и b, такие, чтобы множество точек, заданное условиями $a < x < a + 2$ и $b < y < b + 1$, было симметрично множеству, заданному условиями $1 < x < 4$ и $-2 < y < 3$:

а) относительно оси абсцисс;
б) относительно оси ординат;
в) относительно начала координат?

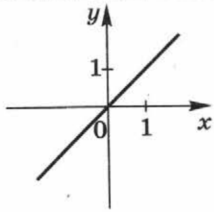
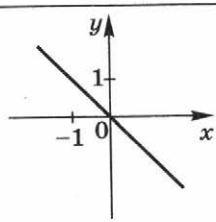
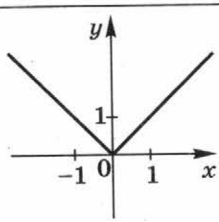
14. Рассматривается множество точек прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Две его вершины $A\ (-1;\ 1)$ и $C\ (2;\ 3)$.

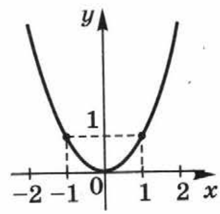
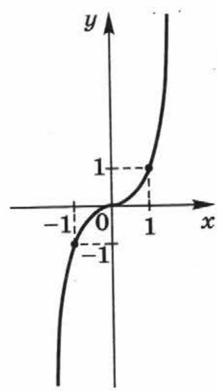
а) Изобразите этот прямоугольник.
б) Задайте его алгебраически.
в) Укажите координаты всех его вершин.

15. Рассматривается множество точек координатной плоскости, заданное условиями $a \leqslant x \leqslant a + 2$, $b \leqslant y \leqslant 2b$. Приведите примеры таких чисел a и b, что:

а) рассматриваемая фигура является квадратом;
б) начало координат лежит в этой фигуре;
в) рассматриваемая фигура симметрична относительно оси ординат.

О-24. Графики

Зависимость	График зависимости
$y = x$	
$y = -x$	
$y = \|x\|$	

Зависимость	График зависимости
$y = x^2$	
$y = x^3$	

1. Координаты точек связаны соотношением:

а) $y = x - 2$; б) $x = y - 2$; в) $y + x = 3$.

Для каждого из этих случаев заполните таблицу и постройте график зависимости.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

2. Принадлежат ли множеству точек, заданному условием $y = 2 + x$, точки A (1; 1), B (−2; 0), C (1; 3), D (−1; 2)? Найдите координаты еще двух точек, принадлежащих этому множеству, и двух точек, не принадлежащих ему.

3. На рисунке 13 изображен график одной из следующих зависимостей:

а) $y = 3 - x$;
б) $y = 5 + x$;
в) $y = x - 1$.
Укажите, какой именно.

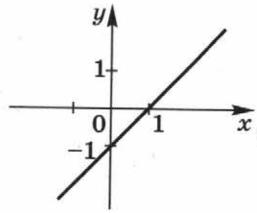


Рис. 13

4. Запишите на алгебраическом языке следующие условия, связывающие координаты точек, и изобразите на координатной плоскости множества точек, которые они задают:

а) абсцисса равна удвоенной ординате;
б) ордината на 2 меньше абсциссы;
в) сумма абсциссы и ординаты равна 2;
г) разность абсциссы и удвоенной ординаты равна 4.

5. Изобразите графики зависимостей $y = x - 5$, $y = 3 - x$, $x + y = -1$ и найдите для каждой из них значения:

а) y при $x = -1$; 1; 3; 5;
б) x при $y = -1$; 1; 5; 7.

6. Графиком зависимости является прямая, проходящая через точки A (1; 2) и B (−1; 4).

а) Постройте эту прямую.
б) Найдите координаты точек ее пересечения с осями координат.
в) Укажите координаты нескольких точек графика, которые лежат в I, II и III координатных четвертях.

7. По изображенному на рисунке 14 графику заполните таблицу:

x	−2	−1	0	1	2
y					

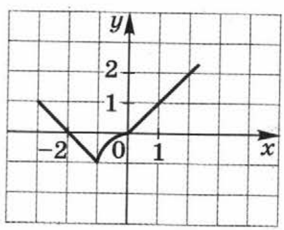


Рис. 14

8. а) Изобразите прямую $y = -3x$.

б) Изобразите прямую, симметричную ей относительно оси абсцисс, и найдите зависимость, которой удовлетворяют точки этой прямой.

в) Изобразите прямую, симметричную ей относительно оси ординат, и найдите зависимость, которой удовлетворяют точки этой прямой.

О-25. Графики

1. Изобразите на координатной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям $y = -|x|$, $y = -x^2$ и $y = -x^3$, если:

а) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; б) $-3 \leqslant x \leqslant 2$; в) $x \leqslant -1$; г) $x \geqslant 0$.

2. По заданному соотношению $y = x^2 - 1$ заполните таблицу

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

и постройте график. Как называется построенная кривая?

3. Множества точек на координатной плоскости заданы условиями:

а) $y = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x < 0; \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ при } x < 0; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2 \text{ при } x \geqslant 2 \\ x \text{ при } x < 2; \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} |x| \text{ при } x \geqslant 1 \\ x^3 \text{ при } x < 1. \end{cases}$

Для каждой из этих зависимостей выполните следующие задания:

1) найдите значения y при $x = -2$; -1, 0; 1; 2; 3;
2) проверьте, какие из точек (1; 2), (2; 8), (−3; −3), (−1; 1), (−2; 0), (2; 2) принадлежат рассматриваемому множеству;
3) найдите такие значения x, при которых $y = 0$, -8, 4 (или покажите, что их нет);
4) постройте эти множества.

---

4. Три множества точек координатной плоскости заданы таблицами:

а)

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

б)

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

в)

x	0	1	2	3
y	0	2	4	-3

Выясните, лежат ли они на какой-либо прямой или на какой-либо параболе.

5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

а) $y = -2x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;$
б) $2y = x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 2;$
в) $x + y = 4, \quad 1 \leqslant y \leqslant 3;$
г) $y = x^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1;$
д) $x^2 - y^2 = 0, \quad 1 \leqslant y \leqslant 3;$
е) $y = x^2, \quad |y| \leqslant 2;$
ж) $y = x^3, \quad |x| \geqslant 1;$
з) $y = -|x|, \quad y \leqslant -1.$

6. Постройте графики зависимостей:

а) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqslant 2 \\ 4 & \text{при } -1 < x < 2 \\ x+5 & \text{при } x \leqslant -1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geqslant 1 \\ |x| & \text{при } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{при } x \leqslant -1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x \geqslant 3 \\ 4 & \text{при } -2 < x < 3 \\ |x| & \text{при } x \leqslant -2. \end{cases}$

7. Установите, сколько общих точек имеют график зависимости $y = x^2$ и график:

а) $y = -1;$
б) $y = 0;$
в) $y = 1;$
г) $y = x;$
д) $y = -x;$
е) $y = 2x;$
ж) $y = 2x - 1.$

8. Найдите все такие числа a, что график $y = x^2$ и график $y = a$ имеют две общие точки.

О-26. Графики вокруг нас

1. На рисунке 15 изображена температурная кривая больного (по дням). Определите по этой кривой:
а) какая температура была у больного на шестой день наблюдения;

Рис. 15

Рис. 16

Рис. 17

б) на какой день наблюдения температура у больного была 36°;
в) какова была максимальная температура у больного за время наблюдения;
г) сколько дней держалась температура 40°.

2. На рисунке 16 изображен график скорости движения велосипедиста в течение трех минут. С помощью графика ответьте на следующие вопросы:

а) Какова была его наибольшая скорость за это время?
б) Сколько времени велосипедист двигался с постоянной скоростью?
в) Когда скорость движения велосипедиста возрастала?
Составьте несколько вопросов, на которые можно ответить с помощью этого графика.

3. Мальчик вышел из дома и пошел в школу (по прямой), но по дороге вспомнил, что забыл тетрадь с домашним заданием, и вернулся домой. Взяв тетрадь, он снова пошел в школу и на этот раз дошел туда без приключений. На рисунке 17 изображен график расстояния от места нахождения мальчика до его дома (время дано в минутах, расстояние — в метрах). С помощью графика ответьте на следующие вопросы:
а) На каком расстоянии от дома мальчик вспомнил о забытой тетради?

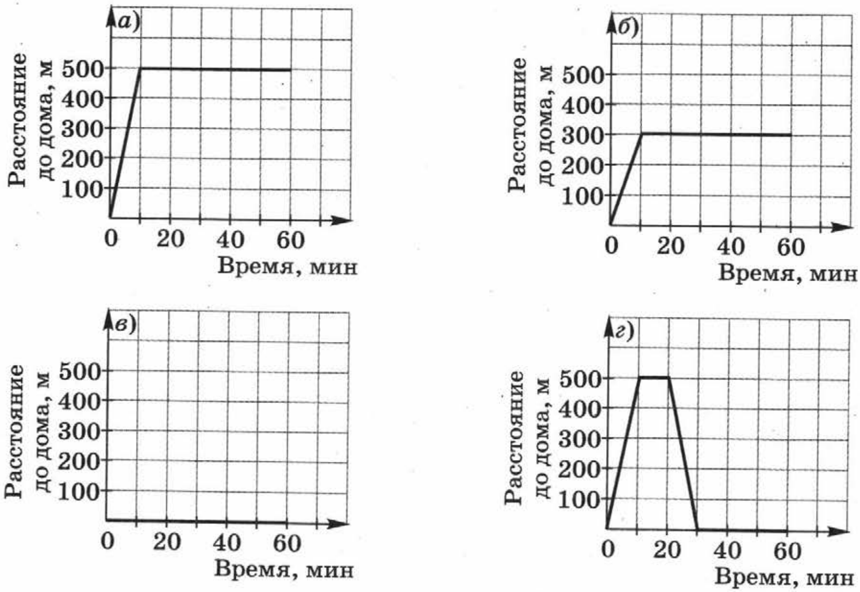


Рис. 18

б) Сколько времени мальчик пробыл дома, вернувшись за тетрадью?

в) На каком расстоянии от дома мальчика находилась школа?

г) Когда мальчик шел быстрее всего?

4. Света, Люда, Юра и Женя живут в одном доме, к их школе от дома идет прямая дорога. Женя направился в школу, но по дороге решил заглянуть в кинотеатр; Люда пришла в школу, но, узнав, что первого урока не будет, вернулась домой; Света знала об этом заранее и потому в школу не пошла; Юра в школу пошел, а узнав об отмене урока, остался в школе поливать цветы. На рисунке 18, *а—г* изображены графики расстояний ребят от их дома в течение часа (в качестве начала отсчета взято время 8 ч 30 мин). Укажите, чьи действия отображены на каждом из рисунков.

5. Велосипедист едет по прямолинейному шоссе. На рисунке 19 изображен график его расстояния до дома. Расскажите, как проходило его путешествие.

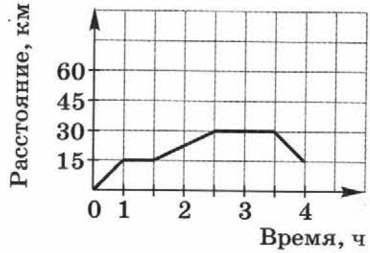


Рис. 19

6. На рисунке 20 показан рост цен (в р.) на хлеб по полугодиям с лета 1994 г. в течение полутора лет. С помощью графика ответьте на вопросы:

а) На сколько выросла цена на хлеб за третье полугодие?
б) В какое полугодие прирост цены был наибольшим?
в) Верно ли, что цена на хлеб за третье полугодие возросла более чем на 60%?

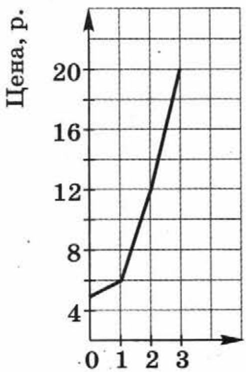


Рис. 20

7. На рисунке 21 изображены графики изменений капиталов двух фирм (A и B) за два года по кварталам (в условных единицах). С помощью графиков ответьте на вопросы:

а) Какая из фирм была богаче в начале рассматриваемого периода? в конце его?
б) На сколько вырос капитал каждой из фирм?
в) Были ли периоды уменьшения капитала у этих фирм?
г) У какой из фирм был больше капитал в начале третьего квартала первого года и на сколько?
д) Каков был капитал фирмы A, когда капитал фирмы B был равен 300 тыс. усл. ед.?

8. Два мальчика, Андрей и Борис, шли навстречу друг другу по шоссе, соединяющему пункты A и B, выйдя из них одновременно. На рисунке 22 изображены графики расстояний от каждого из них до пункта A. Ответьте на следующие вопросы:

Рис. 21

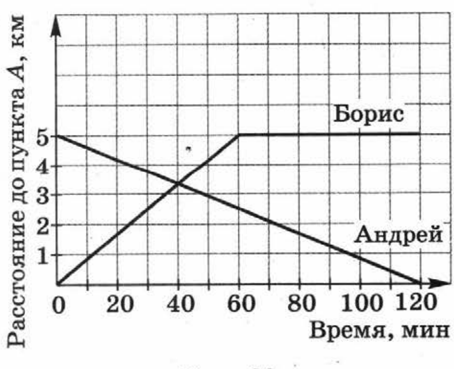


Рис. 22

а) Кто шел из пункта A в пункт B?
б) Через сколько времени после начала пути мальчики встретились?
в) Кто из мальчиков шел быстрее до момента встречи?

9. По условию задачи 3 постройте график расстояния от места нахождения мальчика до школы.

Проверь себя!

1. Промежуток $x > 3$ изображен на:

А. Рис. 23. **Б.** Рис. 24. **В.** Рис. 25.

Рис. 23

Рис. 24

Рис. 25

2. На рисунке 26 изображено множество точек, удовлетворяющих условию:

А. $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Б. $-2 \leqslant y \leqslant 2$.
В. $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

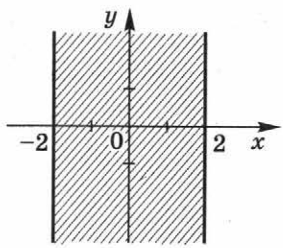


Рис. 26

3. Прямая, проходящая через точку A (1; 3) и параллельная оси абсцисс, задается уравнением:

А. $x = 1$.
Б. $y = 3$.
В. $y = x + 3$.

4. На прямой $y = 2x - 1$ лежит точка:

А. (1; 2).
Б. (−1; −3).
В. (0; 1).

5. Лифт поднялся с первого этажа на третий, постоял без движения и поехал на второй этаж, где и сломался. График расстояния от места нахождения лифта до первого этажа изображен на:

А. Рис. 27.
Б. Рис. 28.
В. Рис. 29.

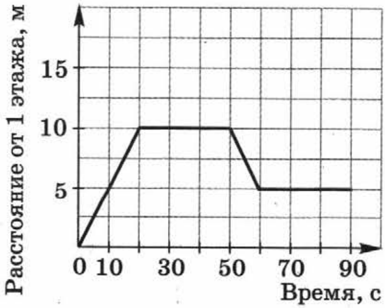


Рис. 27

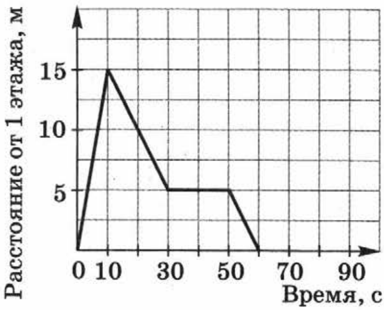


Рис. 28

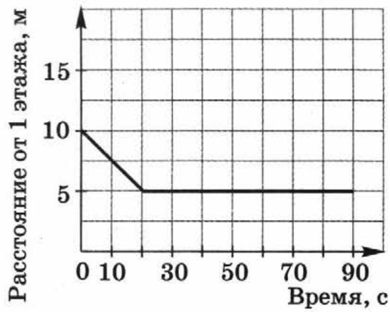


Рис. 29

6. Бесконечно много целых чисел содержит промежуток:

А. $1 < x < 75$. **Б.** $|x| < 5$. **В.** $x > 0{,}5$.

7. Относительно оси абсцисс симметричны графики зависимостей:

А. $y = 2$ и $y = -1$.
Б. $y = x$ и $y = x^2$.
В. $y = 4$ и $y = -4$.

8. График зависимости $y = x^2$ является:

А. Параболой. **Б.** Прямой. **В.** Ломаной.

9. График зависимости $y = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0 \\ x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{при } x > 1 \end{cases}$ и прямая $y = 0$ пересекаются:

А. В одной точке.
Б. В двух точках.
В. В трех точках.

10. Сколько существует значений a, при которых график зависимости $y = \begin{cases} 5 \text{ при } x < 0 \\ a \text{ при } x \geqslant 0 \end{cases}$ симметричен относительно начала координат?

А. Ровно одно.
Б. Бесконечно много.
В. Не существует.

В А Б Б А В В А Б А

Глава 6. Свойства степени с натуральным показателем

О-27. Произведение и частное степеней

$a^m a^n = a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(m > n,\ a \neq 0)$.

Пример 1. Упростите выражение $x^3x^5x^4$.

Решение. $x^3x^5x^4 = x^{3+5+4} = x^{12}$.

Пример 2. Упростите выражение $\frac{x^6}{x^4}$.

Решение. $\frac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$.

1. Запишите в виде степени:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
б) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
в) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.

2. Запишите в виде произведения:

а) x^3; б) y^5; в) z^6.

3. Какое равенство неверно:

а) $2^2 = 4$; б) $2^3 = 6$; в) $3^3 = 9$; г) $3^3 = 27$?

4. Запишите в виде степени:

a^2a^3; $a^2a^4a^3$; $b^7b^5b^2b$; $x^3x^6x^7x^4$; $y^2yy^3y^8$; $a^2a^4a^2a^7$; $3^53^n3^2$; 2^22^62.

5. Упростите: $a^3b^2a^3$; $x^2y^4a^2yx^2$; $b^3yb^2y^3$; $t^5b^2yt^4b$.

6. Упростите выражение:

а) $(-y)^3\,y^4$;
б) $(-y)\,(-y)^2$;
в) $(-y)^2\,(-y)^2$;
г) $y^2\,(-y)^3\,(-y)$.

7. При каком значении n выполняется равенство:

а) $a^3a^2 = a^n$;
б) $b^4b^n = b^7$;
в) $x^nx^4 = x^8$;
г) $t^{2n}t = t^7$?

8. Частное степеней замените степенью с тем же основанием:

а) $\frac{x^5}{x^2}$; в) $\frac{y^8}{y^3}$; д) $\frac{z^{43}}{z^{34}}$; ж) $\frac{7^{11}}{7^2}$;

б) $\frac{t^9}{t^6}$; г) $\frac{b^{11}}{b^3}$; е) $\frac{v^{14}}{v^{12}}$; з) $\frac{2^{19}}{2^9}$.

9. Выполните деление:

а) $a^8 : a^6$; в) $y^{17} : y^3$; д) $11^{35} : 11^2$;
б) $x^{12} : x^2$; г) $u^6 : u^2$; е) $5^{28} : 5^7$.

10. Вычислите:

а) $10^{18} : 10^{16}$; б) $2^{13} : 2^{10}$; в) $\frac{3^8}{3^6}$; г) $\frac{5^{13}}{5^{11}}$.

11. Упростите выражение:

а) $\frac{u^5u^3}{u^2}$; в) $\frac{y^3y^2}{y^4}$; д) $\frac{aa^2a^5}{a^3aa^2}$;

б) $\frac{t^7t^5}{t^2t}$; г) $\frac{xx^{12}x^3}{x^4x^3}$; е) $\frac{b^3b^5b^6}{b^2bb^2b^3}$.

12. Вычислите:

а) $\frac{2^{11}2^6}{2^{14}}$; в) $\frac{5^7}{5^25^3}$; д) $\frac{10^{12}10^3}{10^210^910}$;

б) $\frac{3^43^5}{3^33^3}$; г) $\frac{6^26^36}{6^26^26}$; е) $\frac{2^{35}2^{11}2^6}{2^{13}2^{27}2^{10}}$.

13. При каком значении x выполняется равенство:

а) $5^3 : 5 = 5^x$; в) $2^x : 2 = 2^5$; д) $\frac{11^x}{11^4} = 11^8$;

б) $10^x : 10^2 = 10$; г) $3^{11} : 3^x = 3^2$; е) $\frac{7^{15}}{7^x} = 7^3$?

14. Выполните умножение:

а) $3x^2 \cdot 7x$; д) $4ab^3 \cdot 6a^4b^2$;
б) $5y^3 \cdot (-2y^4)$; е) $3x^6y \cdot 7x^9$;
в) $0,5z \cdot 6z^3z^4$; ж) $0,25z^4 \cdot (-8z^3) \cdot 4z$;
г) $5t^3 \cdot 4t^4 \cdot \left(-\frac{1}{10}t^5\right)$; з) $3b^2 \cdot \left(-\frac{2}{9}b^5\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}b^4\right)$.

15. Упростите выражение:

а) $0,5y^3b^4 \cdot 4yb^2$; в) $0,25a^2b^4 \cdot 2a^5$;
б) $-\frac{3}{4}x^3y^5 \cdot (-6x^2z^5)$; г) $5xz^2 \cdot (-2z^3) \cdot 0,1x^4z$.

16. Сократите дробь:

а) $\frac{27b^4}{9b^3}$; б) $\frac{18z^6}{9z^3}$; в) $\frac{6t^4 \cdot 5t^5}{15t^4}$; г) $\frac{8u^8}{2u^3\,4u^4}$; д) $\frac{yz^3}{z^7}$; е) $\frac{x^5z^2}{x^3z^4}$; ж) $\frac{8a^5b}{2a^7}$; з) $\frac{c^{12}d^3}{c^3d^{12}}$; и) $\frac{x^2y^4}{x^4y^7}$; к) $\frac{a^5b^3c^2}{a^4b^3}$.

17. Упростите выражение:

а) $\frac{16a^{17}b^{11}}{-8a^{14}b^9}$; б) $\frac{24x^6y^5}{3x^5y^4}$; в) $\frac{-12d^4v^3}{48d^6v^7}$; г) $\frac{-39x^{18}y^{29}}{-13x^{19}y^{39}}$; д) $\frac{-7u^3v^{56}}{42u^9v^{67}}$; е) $\frac{125y^2c^9}{25y^9c^6}$.

---

18. Сравните значения выражений:

а) 10^{13} и $9 \cdot 10^{12}$; б) $6 \cdot 2^5$ и $3 \cdot 2^3$; в) $(-5)^6$ и $(-4) \cdot (-5)^5$; г) 3^{11} и $8 \cdot 3^9$.

19. Представьте каждое из выражений в виде степени:

> **Пример.** $6 \cdot 5^4 - 5^4$.
> Решение. $6 \cdot 5^4 - 5^4 = 5^4\,(6 - 1) = 5^4 \cdot 5 = 5^5$.

а) $2^{11} + 2^{11}$; б) $3^7 + 3^7 + 3^7$; в) $5 \cdot 3^9 - 2 \cdot 3^9$; г) $9 \cdot 2^5 - 2^5$.

20. Вычислите:

а) $\frac{4^{14}}{64 \cdot 4^{10}}$; б) $\frac{81 \cdot 243}{3^7}$; в) $\frac{128 \cdot 3^9}{243 \cdot 2^5}$.

21. Упростите выражение:

а) $\frac{x^{n+m}}{x^{n+1}x^{m-1}}$; б) $\frac{a^2 \cdot a^{n+1}a^3}{a^{n-1}a^6}$; в) $\frac{x^{2n}x^{n+3}}{x^{3n}}$; г) $\frac{d^{n+1}}{d^{n-5}d^7}$.

22. Вычислите:

а) $\frac{2^{n+2} + 2^n + 2^n + 2^n + 2^n}{2^{n+3}}$; б) $\frac{3^{n+2} + 5 \cdot 3^n}{3^n}$; в) $\frac{5^{n+1} - 5^n}{5^n}$; г) $\frac{4^{n+1} + 4^{n+2}}{4^n}$; д) $\frac{2^{n+3} - 2^{n+1}}{2^{n+1} + 2^n}$; е) $\frac{3^{n+3} - 3^{n+1} + 3^n}{3^{n+2} + 3^{n+1}}$.

О-28. Степень степени, произведения и дроби

$(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

Пример 1. Возведите в степень $(x^3y^5)^4$.

Решение. $(x^3y^5)^4 = (x^3)^4\,(y^5)^4 = x^{12}y^{20}$.

Пример 2. Возведите в степень $\left(\dfrac{x^2}{z^5}\right)^4$.

Решение. $\left(\dfrac{x^2}{z^5}\right)^4 = \dfrac{(x^2)^4}{(z^5)^4} = \dfrac{x^8}{z^{20}}$.

1. Выполните действия:

а) $(a^3)^4$, $(t^2)^5$, $(n^6)^8$, $(v^5)^7$, $(u^9)^3$, $(k^{11})^4$;

б) $6\,(h^7)^4$, $-2\,(y^5)^6$, $-(d^3)^5$, $((-2)^4)^2$, $((-3)^2)^2$, $((-5)^2)^2$.

2. Упростите выражения:

$x^2\,(x^3)^2$, $(u^4)^5\,u^7$, $(t^3t^4)^7$, $(y^6y^3)^2\,y^4$, $(v^2v^6)^3\,(v^4v)^2$,

$(r^2r^8r)^{10}\,(r^2r)^2$, $\dfrac{(b^5)^8}{b^{34}}$, $\dfrac{x^{35}}{(x^{17})^2}$, $\left(\dfrac{y^9}{y^4}\right)^2$, $\left(\dfrac{t^3t^4}{t^5}\right)^5$.

3. Представьте x^{48} в виде степени с основанием:

а) x^2; б) x^4; в) x^{12}; г) x^{24}.

4. При каком k верно равенство:

а) $(2^3 \cdot 2)^k = 2^{16}$; в) $(7^2 \cdot 7^3)^5 = 7^k$;

б) $(3^k \cdot 3^2)^2 = 3^{18}$; г) $(5^k \cdot 5^{k+1})^2 = 5^{10}$?

5. Представьте в виде степени с основанием 3:

9^2, 27^4, 81^7, 243^5.

6. Возведите в степень:

$(ab)^5$, $(xyz)^4$, $(-tyu)^6$, $(2n)^4$, $(-3xy)^3$, $(0{,}1cd)^2$,

$\left(-\dfrac{1}{2}sr\right)^5$, $\left(\dfrac{1}{3}mn\right)^2$.

7. Вычислите:

$5^9 \cdot 2^2$, $125^3 \cdot 8^3$, $0{,}2^{11} \cdot 5^{11}$, $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5 \cdot 7^5$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^{12}$, $\left(\dfrac{1}{5}\right)^8 \cdot 25^4$.

8. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{t}{u}\right)^4$, $\left(\frac{y}{z}\right)^5$, $\left(\frac{s}{2}\right)^5$, $\left(\frac{3}{d}\right)^4$, $\left(-\frac{c}{2}\right)^6$, $\left(-\frac{3}{x}\right)^2$;

б) $\left(\frac{2y}{3v}\right)^3$, $\left(-\frac{2t}{5u}\right)^4$, $\left(-\frac{3}{4b}\right)^5$, $\left(\frac{5d}{3c}\right)^4$;

в) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)$, $\left(-\frac{t^4}{y^5}\right)^4$, $\left(-\frac{v^3}{2}\right)^5$, $\left(\frac{3}{u^5}\right)^6$;

г) $\left(\frac{xy^2}{z^3}\right)^4$, $\left(\frac{2u^3}{3v^4}\right)^7$, $\left(-\frac{3x^2z^3}{au^4}\right)^5$, $\left(-\frac{5h^2}{2c^2d^3e^4}\right)^3$.

9. Вычислите:

$\frac{100^5}{50^5}$, $\frac{16^3}{4^3}$, $\frac{550^4}{110^4}$, $57^3 : 19^3$.

10. Упростите выражение:

а) $u^3(v^5u^4)$, $(-cd^8)^6c^7d^5$, $-x^5(-3xy^2)^5$, $5t(-7bt^5)^2$;

б) $(a^3b^2)^4(a^3b^5)^2$, $(2x^3y)^3(3x^2y^5)^2$, $(-a^3c^7)^8(5a^5c^4)^3$, $(-2u^2z^{11})^2(-uz^3)^8$;

в) $\frac{(3xy)^3}{x^2y^5}$, $\frac{(-2s^2t^3)^5}{(-4st^9)^3}$, $\frac{(a^3)^5(d^4)^2}{(-a^2d)^8}$, $\frac{5w^5(w^2z^3)^4}{(2w^6z)^3}$, $\left(\frac{(a^3b^2)^4}{a^{11}(b^3)^5}\right)^4$, $\left(-\frac{q^5(t^9)^5}{(qt^{12})^4}\right)^3$.

---

11. Вычислите:

а) $\frac{3^{12}\cdot(3^4)^5}{(3^{15})^2}$;

б) $\frac{25^4\cdot 5}{125^3}$;

в) $\frac{128^5}{32^4\cdot 64^2}$;

г) $\frac{6^{12}}{(2^5\cdot 3^7)^2}$;

д) $\frac{21^8}{9^7\cdot 7^9}$;

е) $\frac{125^3\cdot 81^2}{15^{10}}$;

ж) $0{,}125^{12}\cdot 2^{37}$;

з) $\left(\frac{1}{3}\right)^{17}\cdot 81^4$;

и) $\left(\frac{3}{5}\right)^{27}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^8$.

12. Сравните:

а) $2^{10}\cdot 3^{12}$ и 6^{11};

б) 33^9 и $11^{12}\cdot 3^9$;

в) 11^{24} и 100^{12};

г) 3^{24} и 2^{36};

д) 9^{30} и $(2^{12}\cdot 4^9)^3$;

е) $6^{12}\cdot 5^{12}$ и 3^{36}.

13. Установите, при каких значениях x выполняется равенство:

а) $3^{x+1} = 243$, $3^x \cdot 3 = 243$, $(3^x)^2 \cdot 3 = 243$;
б) $5^{2x} = 625$, $5^x \cdot 5^3 = 625$, $(5^x)^3 \cdot 5 = 625$.

О-29. Решение комбинаторных задач

Пример 1. У Жени есть три свитера (красный, синий и черный) и две пары брюк (синие и черные). Сколько у него имеется способов одеться?

Решение. В данном случае легко перебрать все возможности. Женя может надеть красный свитер, тогда есть два варианта — надеть синие брюки и надеть черные брюки. Запишем: (красный, синие), (красный, черные). Женя может надеть синий свитер, тогда есть еще две возможности: (синий, синие), (синий, черные). Наконец, есть еще две возможности: (черный, синие), (черный, черные). Таким образом, всего шесть возможностей.

Подобные рассуждения удобно проводить с помощью схемы:

красный		синий		черный	
синие	черные	синие	черные	синие	черные

Видно, что есть 6 способов соединения свитеров с брюками (им соответствуют соединительные стрелки).

Пример 2. В магазине продают четыре сорта сыра: российский, голландский, чеддер и сулугуни. Сколько имеется способов купить сыр двух сортов?

Решение. Решим эту задачу с помощью схемы, обозначая сорта первыми буквами их названий и учитывая, что сыры надо брать разные.

Р			Г			Ч			С		
Г	Ч	С	Р	Ч	С	Р	Г	С	Р	Г	Ч

Всего имеется 12 способов соединения, но при этом каждый способ покупки посчитан дважды: например, парам (Р, Г) и (Г, Р) соответствует один способ. Таким образом, существует всего шесть способов покупки.

1. а) У Светы есть три разных карандаша (красный, синий и зеленый) и две разные ручки (синяя и черная). Сколько у нее способов сложить пенал (туда надо положить один карандаш и одну ручку)? Выпишите все эти способы.
б) В шкафу стоят четыре разные чашки и три разных блюдца. Сколько имеется способов подать гостю чашку с блюдцем?

2. а) На выборах выдвинуты кандидатуры Андреева, Борисова, Васильева и Григорьева. Выбрать надо двоих. Сколько есть способов это сделать? Выпишите эти способы.
б) На острове расположены четыре города. Сколько надо проложить дорог, чтобы из любого города можно было напрямую проехать в любой другой город?

3. В классе выбирают старосту и ответственного за дежурства. Сколько существует вариантов их выбрать, если в классе 24 человека?

4. В классе 24 человека. Надо выбрать двоих дежурных. Сколько есть способов это сделать?

5. Граф Монте-Кристо решил подарить Гайде два разных драгоценных камня. Сколько существует способов это сделать, если у него есть изумруды, сапфиры, бриллианты и рубины?

---

6. У Билли Бонса в сундуке лежат мешки с пиастрами, дублонами, гинеями и луидорами. Джим берет лишь две монетки. Сколько есть вариантов это сделать?

7. Сколько диагоналей у выпуклого пятнадцатиугольника?

8. Имеется 5 разных сортов хлеба и 8 разных сортов колбасы. Сколько существует вариантов приготовления бутерброда с колбасой?

9. Для приготовления молочного коктейля, кроме молока, решили использовать один сорт мороженого (из пяти имеющихся), один сорт сока (из четырех имеющихся) и один сорт сиропа (из шести имеющихся). Сколько есть вариантов приготовления коктейля?

10. Главарь шайки разбойников изобрел специальные значки — «пляшущие человечки» — для передачи секретных сообщений. Имеется 23 различных «пляшущих человечка». Сколько различных записей из 12 знаков можно составить с их помощью?

11. В классе 24 человека. Сколько существует способов выставить им оценки за контрольную работу (единицы учитель не ставит)?

12. Сколько существует пятизначных чисел, составленных из цифр 3, 6 и 9?

13. В классе 18 мальчиков, двоих из них надо послать переносить стулья. Сколько существует вариантов выбора, если Женю и Жору вместе посылать нельзя?

14. На полках надо расставить 32 разные книги. Полок всего три. Сколько имеется вариантов определить, на какой полке будет стоять каждая книга, если известно, что занимать все полки необязательно и даже все книги можно поставить на одну полку.

15. Миледи решила срезать у герцога Бэкингема две подвески из двенадцати. Сколько имеется вариантов это сделать, если две крайние подвески нельзя отрезать одновременно?

16. Сколько существует четырехзначных чисел, составленных из нечетных чисел и не делящихся на пять?

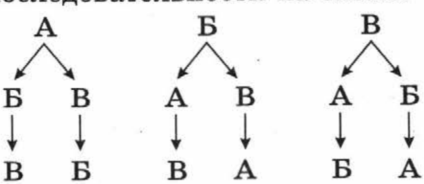
17. Света и Люда обнаружили 12 различных шоколадок. Сколько у них вариантов поделить найденное так, чтобы у каждой была хотя бы одна шоколадка?

18. Сколько можно передать сообщений (последовательностей знаков), содержащих не более шести знаков и состоящих из точек и тире?

О-30. Перестановки

Пример. Андрей, Борис и Василий входят в комнату по одному. Сколько у них есть способов это сделать?

Решение. Пусть первым войдет Андрей, но тогда вторым может войти Борис или Василий, т. е. имеются две возможности. Аналогично есть две возможности, если первым войдет Борис и если первым войдет Василий. Таким образом, всего 6 возможностей (3!). Изобразим возможные последовательности на схеме.



В общем случае число перестановок для множества из n элементов равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n.$$

1. Света, Люда и Женя договорились в течение трех дней по очереди поливать в классе цветы. Сколько у них есть способов установить порядок дежурства? Перечислите все возможные способы.

2. У Атоса, Портоса и Арамиса на всех имеется одна шпага, один кинжал и один пистолет. Сколько у них способов распределить оружие так, чтобы все были вооружены?

3. Четыре лектора должны прочитать по одной лекции. Сколько имеется вариантов составления расписания?

4. Капитан Жеглов рассматривает фотографии. Всего их у него 25. Сколько существует различных последовательностей их рассматривания?

5. Сколько существует анаграмм слова «корень»? (Анаграмма — это слово, полученное из данного перестановкой его букв.)

6. Слова в считалке из шести различных слов произносят в разном порядке. Сколько существует вариантов это сделать?

7. У мамы есть один апельсин, одна груша, одно яблоко и один банан. Она хочет раздать их четверым детям так, чтобы каждому достался какой-нибудь фрукт. Сколько имеется вариантов это сделать?

8. Имеется по одной монете достоинством в 1, 5, 10, 50 копеек. Их надо раздать четырем туристам (каждому по монете). Сколько существует способов это сделать?

9. В семье растут семь сестер. Для них приобретены семь пар различных сережек. Сколько имеется способов распределить серьги так, чтобы никого не обделить?

10. Верно ли, что:

а) $12! = 120 \cdot 10!$; б) $14! = \dfrac{15!}{15}$; в) $8! = 4! + 4!$?

11. Упростите:

а) $10 \cdot 10! + 10! - 11!$; б) $\dfrac{13! + 12!}{12!}$; в) $\dfrac{11! - 10!}{9!}$.

12. Аня, Боря, Вася и Дима делят пирожки. У них есть один пирожок с мясом, один с рыбой, один с капустой и один с морковью. Сколько существует способов разделить пирожки (каждому по штуке) так, чтобы Ане не пришлось есть пирожок с морковью?

13. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, в которых все цифры разные. Сколько таких четных чисел?

14. Сколько имеется анаграмм слова «алгебра»?

15. Калиф-Аист забыл волшебное слово «мутабор», однако помнит все его буквы, его длину и то, что в нем встречается сочетание «табор». Сколько у него есть вариантов попыток произнести заветное слово?

16. Делится ли число 90! на 19? на 350? на 91? на 92?

Проверь себя!

1. Выражение $(x^3)^5$ равно:

   А. x^8. **Б.** x^{15}. **В.** x^2.

2. Вычислите $\frac{7^5 \cdot 7^3}{7^9}$.

   А. $\frac{1}{7}$. **Б.** 7^6. **В.** 7.

3. Выражение $4^{12} \cdot 8^5$ можно представить в виде степени с основанием 2 следующим образом:

   А. 2^{39}. **Б.** 2^{17}. **В.** 2^{120}.

4. В клетки таблицы 2×2 вписывают нолики или крестики. Таблицу можно заполнить:

   А. Одним способом.
   Б. 144 способами.
   В. 16 способами.

5. Если ребро куба уменьшить в 5 раз, то объем куба:

   А. Уменьшится в 5 раз.
   Б. Останется без изменения.
   В. Уменьшится в 125 раз.

6. Преобразуйте $\dfrac{28a^{35}d^{12}}{7(a^{12}d^5)^3}$.

А. $\dfrac{4}{ad^3}$. **Б.** $\dfrac{14a}{d^3}$. **В.** $4a^{20}d^4$.

7. Для чисел $a = 35^{14}$ и $b = 100^7 \cdot 49^7 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{14}$ выполняется соотношение:

А. $a < b$. **Б.** $a > b$. **В.** $a = b$.

8. Имеются красный, зеленый, синий, черный и желтый карандаши. Их надо раздать пяти мальчикам (каждому по карандашу). Это можно сделать:

А. 120 способами. **Б.** 5^5 способами. **В.** 10! способами.

9. Отношение $\dfrac{10^{18}}{50^9 \cdot 6!}$:

А. Равно 1. **Б.** Меньше 1. **В.** Больше 1.

Б А А В В А В А Б

Глава 7. Многочлены

О-31. Одночлены, многочлены

1. Представьте одночлен в стандартном виде:

1) а) $aaabb$; б) $c^2 \cdot 3c^3ab$; в) $-0{,}4ab^3 \cdot 2{,}5a^2b$; г) $3a^3b \cdot 0{,}4 \cdot 10ab^4$.

2) а) $xxxxyyy$; б) $x^3 \cdot 2x^2yz$; в) $-0{,}8xy^3 \cdot 12{,}5x^4y^2$; г) $0{,}3x \cdot 0{,}4y \cdot 0{,}5x^2y^6$.

3) а) $mnmnmnn$; б) $m^2 \cdot 2n^3am^3$; в) $-0{,}6m^2n^3 \cdot 5m^4n^3$; г) $0{,}1m \cdot 0{,}2n \cdot 0{,}5m^2n^3$.

2. Укажите коэффициент одночлена, выпишите его отдельно:

1) а) $2a^2$; б) $-3a^3$; в) a^2b^3; г) $-m^2n^5p$; д) $-3a^2m \cdot (-2)\, a^2m$.

2) а) $-\dfrac{2}{5}m^4$; б) $0{,}7x^3$; в) $-a^3c^5$; г) m^6; д) $-\dfrac{5}{6}p^3 \cdot \dfrac{6}{5}q^2$.

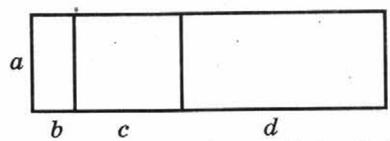
3. Запишите сумму одночленов в виде многочлена:

а) $(-2a) + (-5b) + (3c)$;
б) $(2a^2) + (-3a) + 1$;
в) $(-3a^3) + \left(-\dfrac{2}{5}b^2\right) + (-4c)$;
г) $(-3x) + (-4x^2) + (3x^3)$;
д) $(2x) + (-3y) + (-5z) + (-4)$;
е) $(-5a^4) + \left(\dfrac{2}{3}b^3\right) + (-8c^2)$.

4. Запишите многочлен в виде суммы одночленов:

а) $3a^2 - 5a - 4$;
б) $-7xy - 3x^2 - 4y^2$;
в) $2a - 5b$;
г) $-3x - 2y$;
д) $5a^2 - 3a + 1$;
е) $-7ab + 3a^2 - 5b$.

5. Замените сумму одночленов одним одночленом:



$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (b + c + d)$$

Образец.
$-3x^2 + 5x^2 - 9x^2 = (-3 + 5 - 9) \cdot x^2 = -7x^2$;
$5ab - 3ab - 12ab = (5 - 3 - 12) \cdot ab = -10ab$;
$-c + 5c - 7c = -1 \cdot c + 5 \cdot c - 7 \cdot c = (-1 + 5 - 7) \cdot c = -3c$.

а) $-7a^2 + 12a^2 - 19a^2$;
б) $3cd - 4cd + 7cd$;
в) $-m + 3m - 9m$;
г) $-2x^3 + 4x^3 - 12x^3$;
д) $2xy^2 - 3xy^2 + 4xy^2$;
е) $-x + 13x - 19x$.

6. Представьте многочлен в стандартном виде:

1) а) $3x^2x - 5xy + \dfrac{2}{3}xy^2x^2y$;
б) $-2a \cdot 5b + 10aa^6 - 7b^3b^2$;
в) $3a - 5b - 8a + 7b$.

2) а) $3a^3a - 15ab - 12bbb$;
б) $-3x \cdot 2y - 10xyxy + 2x^2 \cdot 3y^3$;
в) $-4x - 5y + 6x - 9y$.

7. Определите степень многочлена:

а) $5a^2a^2 - 3a^3 - 12aa^4$;
б) $-8x^3 + 5x^2x^3 - 2x + 1$;
в) $-2m^3m^2 + 2mm^4 - 23m^2 - 7$.

8. Найдите значение данного многочлена при данных значениях букв:

1) а) $3y^3 - 2y$ при $y = -2$;
б) $-2x^2 + 3xy - 5y^2$ при $x = -1$, $y = 2$;
в) $-3a + 5a - 14a + 2a$ при $a = -13{,}6$;
г) $-3x^3x^2 + 15xx + 3xx^4 - 1$ при $x = -\frac{1}{3}$.

2) а) $-2x^3 + 3x$ при $x = 2$;
б) $3x^2 - 5xy + 2y^2$ при $x = 1$, $y = -2$;
в) $-7x + 2x - 13x + 8x$ при $x = 12{,}4$;
г) $-4x^4x^2 - 12xx + 4x^3x^3 + 1$ при $x = -\frac{1}{3}$.

9. Упростите данный многочлен, выполнив приведение подобных слагаемых:

1) а) $-2a + 3b - 8a + 7b$;
б) $3x^2 - 5xy + 7xy - 10x^2 + y^2$;
в) $2x^2y - 3ab^3 - 4x^2y - 5ab^3$.

2) а) $2a^2 - 3ab - 3a^2 + 7ab - 4b^2$;
б) $-3c + 2d - 4c - 5d$;
в) $3a^3b - 4xy^2 - 5xy^2 + 7a^3b$.

10. Найдите значение многочлена:

а) $-3a + 7b - 7a + 2b$ при $a = -0{,}8$ и $b = \frac{5}{9}$;
б) $7x^2 - 8xy + y^2 - 2x^2 + 8xy - 3y^2$ при $x = -2$ и $y = \frac{1}{2}$;
в) $-2x + 3x - 7x + 6x$ при $x = 0{,}679$.

11. Решите уравнение, выполнив приведение подобных слагаемых в многочлене:

1) а) $-3x + 2x - 7x + 9x = 3$;
б) $2{,}5x - 3{,}5x + 4x = -2$.

2) а) $2x - 4x + 5x - 8x = 5{,}5$;
б) $-1{,}5x - 4{,}5x = 2{,}4$.

---

12. Запишите числа 75 321, 8974, $\overline{abc}$, $\overline{abcd}$ в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням числа 10, по образцу:

$$583 = 500 + 80 + 3 = 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3 = \\ = 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3;$$
$$\overline{ab} = 10a + b.$$

13. Докажите, что:

а) $\overline{x5}$ делится нацело на 5;
б) $\overline{xy6}$ делится нацело на 2;
в) $\overline{ab0}$ делится нацело на 10.

14. При каких значениях a выполняется утверждение:

а) $\overline{37a}$ делится нацело на 5;
б) $\overline{29a}$ делится нацело на 10;
в) $\overline{45a}$ делится нацело на 9;
г) $\overline{3a7}$ делится нацело на 3;
д) $\overline{53a2}$ делится нацело на 4;
е) $\overline{32a57}$ делится нацело на 9?

О-32. Сложение и вычитание одночленов и многочленов

Прочитайте словами правила, записанные с помощью букв:

$a + (b + c) = a + b + c$ $a - (b + c) = a - b - c$	$a - b = a + (-b)$ $a + b = a - (-b)$

1. Раскройте скобки:

> **Образец.**
> $3a + (b - 2ab + 3c) = 3a + b + (-2b) + 3c =$
> $= 3a + b - 2ab + 3c;$
> $4x - (y - 2xy - 4a) = 4x - y - (-2xy) - (-4a) =$
> $= 4x - y + 2xy + 4a.$

1) а) $5x + (-2y - 3c + 5m)$;
б) $-3a^2 - (-2a + 4a^3 - 5b)$;
в) $(2a - b) + (3a^2 - 4b^2)$;
г) $(3x + y) - (-4x^2 + 5y^2)$.

2) а) $-2a + (-3b + 5c - 7d)$;
б) $-3a^2 - (-5a - 7b + 9b^2)$;
в) $(3x + y^2) + (-4x^2 + 5y)$;
г) $(2a - b^2) - (-3a^2 + 4b)$.

2. Раскройте скобки и упростите полученный многочлен:

1) а) $(2a - 3x) + (-13a + 5x)$;
б) $-(5{,}2x - y) + (3{,}2x - 4y)$;
в) $(-3x^2 + 6x - 1) - (-2x^2 + 3x - 1)$;
г) $-(5a^2 - 10a + 12) - (3a^2 + 10a - 7)$;
д) $(-2a + 13b) + (2a - 13b)$.

2) а) $(1{,}2a - 3{,}4b) + (-3{,}2a + 0{,}6b)$;
б) $-(2x + y) + (-6x - 7y)$;
в) $(-5a^2 - 9a + 1) - (-13a^2 - 9a + 5)$;
г) $-(2x^2 - 3xy + 7) - (-2x^2 + 7xy - 9)$;
д) $(-3a + b) - (b - 3a)$.

3. Заполните пропуски:

1) а) $(2a - 3b) + (\ldots) = 0$;
   б) $(3x - 7y) - (\ldots) = 0$;
   в) $(-5a^2 + 6a - 1) + (\ldots) = 0$;
   г) $(7a^2 - 12a + 4) - (\ldots) = 0$.

2) а) $(\ldots) + (-4a + 3b) = 0$;
   б) $(\ldots) - (13x - 2y) = 0$;
   в) $(\ldots) + (-3a^2 - 2a + 1) = 0$;
   г) $(\ldots) - (-x^2 + 2x - 5) = 0$.

4. Найдите значение выражения:

а) $(-3a^2 + 2a - 5) + (7 - 3a + 3a^2)$ при $a = -4{,}5$;
б) $2x - y - (-3y + 2x)$ при $x = 3{,}875$, $y = -0{,}5$;
в) $-(3x^2 - 2xy - y^2) + (2x^2 - 7xy + y^2) - (-5xy + y^2)$ при $x = 13$, $y = 9$.

5. Решите уравнение:

1) а) $(2x - 1) + (-x + 5) = 2$;
   б) $(43 - 12x) - (-7x + 33) = -2$.
2) а) $(-3x + 1) + (7 - 2x) = 16$;
   б) $(2x - 10) - (3x - 4) = 6$.

---

6. Раскройте скобки:

1) а) $(7a - b) - (-4a - (b - 3a))$;
   б) $-13a + (-7a + (4 - 9a))$.
2) а) $(a - 5b) + (-7a - (2a - 5b))$;
   б) $-14x - (2x + (-3x + 1))$.

7. Решите уравнение:

а) $(-2x^2 + 3x) - (7x - 2x^2) = -2$;
б) $-(3x^2 - 2x + 1) + (3x^2 - 4x - 8) = 0$;
в) $-12y + (-7y - (4 - 3y)) = 0$.

8. Составьте уравнение по условию задачи и решите его: Задумано число a. Если от 15 отнять сумму задуманного числа и 3, то получится столько же, как если к 11 прибавить разность задуманного числа и 9.

9. Докажите, что при любом натуральном значении n данное выражение делится на указанное число:

1) а) $(n - 1) + (5n + 1)$ на 6;
   б) $(-2n + 4) - (5n + 10)$ на 7.
2) а) $(-2n^2 - 3n + 5) + (2n^2 - 7n + 15)$ на 10;
   б) $(5n - 10) - (-4n - 10)$ на 9.

10. Докажите, что разность числа $\overline{abc}$ и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99 (пусть $a > c$).

Проверь себя!

1. Чему равно значение выражения $-2y^2 - 4$ при $y = \frac{1}{2}$?

А. $2\frac{1}{4}$. **Б.** -3. **В.** $-4{,}5$.

2. Продолжите запись, чтобы равенство оказалось верным:

$$-(2a - 3) - (-5a + 3) = \dots .$$

А. $-2a - 3 + 5a + 3$. **В.** $-2a + 3 - 5a + 3$.
Б. $-2a + 3 + 5a - 3$.

3. Заполните пропуск так, чтобы равенство $(-3a + b) - (\dots) = -b$ оказалось верным:

А. $-3a + 2b$. **Б.** $3a - 2b$. **В.** $-3a - 2b$.

4. Корнем какого из уравнений является число 3?

А. $8x - 6x - x = -3$. **В.** $-12x + 9x = 12$.
Б. $-7x + 5x + x = -3$.

5. Какому из чисел равно значение выражения

$$-(2a^2 - 3) + (-1 + 3a) - (3a - 2a^2)$$

при всех значениях букв?

А. 2. **Б.** 4. **В.** -2.

6. Какое из чисел является корнем уравнения

$$3 - (2x - 5) = 5 + (7 + x)?$$

А. 4. **Б.** 10. **В.** $-1\frac{1}{3}$.

7. Какую степень имеет многочлен

$$3x^5 - 4x^4 - 3x^2x^3 + 4x^2x^2 - 2x + 1?$$

А. 5. **Б.** 4. **В.** 1.

8. Если значение выражения $-3x^2 + 2x - 1$ при некотором значении x равно $\left(-\frac{3}{4}\right)$, то значение выражения $3x^2 - 2x + 1$ при том же значении x равно:

А. $-\frac{3}{4}$. **Б.** $\frac{3}{4}$. **В.** 1.

9. Если при некоторых значениях x и y значение выражения $2x - 5y$ равно 2, то чему равно значение выражения $(-3x + 2y) - (-5x + 7y)$?

А. 2. **Б.** -2. **В.** 3.

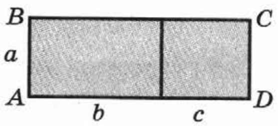
10. Решите уравнение

$$(3x - 2) - (8x - 3) = (4x - 5) - (10x - 7).$$

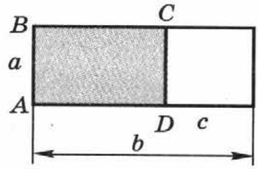
А. 1. **Б.** -1. **В.** -2.

В Б А Б А В В Б А А

О-33. Умножение одночлена на многочлен



$S_{ABCD} = ab + ac$
$S_{ABCD} = a\,(b + c)$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$



$S_{ABCD} = a\,(b - c)$
$S_{ABCD} = ab - ac$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

1. Выполните умножение:

1) а) $-3ab^2 \cdot (2a - 7b)$; б) $5x^2 \cdot (-3x + 1)$.
2) а) $10a^3b^2\,(2a^2b - b^4)$; б) $-7x^3 \cdot (-2x^2 + 5)$.

2. Представьте в виде многочлена:

1) а) $(4b^3 - 3b^2 + 7b - 10) \cdot (-2b^2)$;
б) $-3c^2\,(2c^4 - c^3 - 8c + 10)$;
в) $5\,(a - b + 2c)$;
г) $-5\,(a - b + 2c)$.
2) а) $12ab \cdot (-3a^2 + 5b^2)$;
б) $(4m^2 - 7m - 1) \cdot (-5m^3)$;
в) $7 \cdot (x - 2y + z)$;
г) $-7 \cdot (x - 2y + z)$.

3. Заполните промежутки и устно сделайте проверку:

1) а) $2a \cdot (\ldots) = -6a^2 + 4a$;
б) $-7x \cdot (\ldots) = -7x^3 + 14x^2 - 21x$;
в) $3a^2b \cdot (\ldots) = 9a^3b - 6a^2b^2$.
2) а) $-5a \cdot (\ldots) = 10a^2 - 15a$;
б) $3x \cdot (\ldots) = 9x^3 - 6x^2y^2 + 15x$;
в) $-4xy^2 \cdot (\ldots) = -8x^2y^2 + 20xy^3$.

4. Представьте в виде многочлена:

1) а) $7a + 3\,(a - b)$;
б) $-5a + 2\,(2{,}5a - b)$;
в) $7x^2 - 3x\,(x - 5)$;
г) $5a^2 - 2a\,(2{,}5 - b)$.
2) а) $2x - 3\,(x - y)$;
б) $-4x + 2\,(2x - 5)$;
в) $2a^2 - 5a\,(a + b)$;
г) $10x^2 + 5x\,(-2x + 1)$.

5. Представьте в виде многочлена:

1) а) $4a\,(5a - 2) + 7a\,(3a - 4)$;
б) $-2b\,(b - 4) + 3b\,(-2b + 7)$;
в) $3x\,(x - 1) - 5x\,(x - 2)$;
г) $2a\,(a - 7) - 3a\,(a + 2) + 6\,(a^2 - 3)$.
2) а) $11x\,(2x - 3) + 5x\,(x - 4)$;
б) $-5x\,(x + 2) + 4x\,(-x + 7)$;
в) $3x\,(x - 7) - 9x\,(2x - 1)$;
г) $-2a\,(a + 3) - 4a\,(a - 5) + 7\,(a^2 - 1)$.

6. Решите уравнение:

1) а) $3x - 2(x - 3) = 7$; б) $13(x - 2) + 10(4 - x) = 23$.
2) а) $5x - 3(x - 3) = 19$; б) $13(x - 3) = 16(x + 3) - 42$.

7. Найдите значение выражения при $a = -0{,}7$, $b = 2$:

1) $2a(3a - 5b) - 3a(2a - b)$;
2) $-12b\left(\frac{1}{4} - a\right) - 6a\left(2b - \frac{1}{3}\right)$.

О-34. Составление выражений по условию задач

1. Для детского сада купили 28 м ткани двух сортов по 30 р. за 1 м и по 20 р. за 1 м, причем ткани первого сорта было куплено x м. Составьте выражение для определения стоимости всей ткани и упростите его.

2. Имеются 25 монет достоинством 50 к. и 1 р., причем монет достоинством 50 к. было a штук. Составьте выражение для определения стоимости всех монет и упростите его.

3. Для детского сада купили ткань по 40 р. за 1 м и по 20 р. за 1 м, причем ткани первого сорта было куплено a м, а ткани второго сорта — на 3 м больше. Составьте выражение для определения стоимости всей ткани и упростите его.

4. С двух турбаз A и B одновременно навстречу друг другу вышли две группы туристов и встретились через 3 ч. Скорость одной группы v км/ч, а другой — на 1 км/ч меньше. Составьте выражение для нахождения расстояния между турбазами и упростите его.

---

5. Группа туристов вышла с турбазы A со скоростью v км/ч и через 4 ч встретила группу туристов, вышедших на 1 ч позже первой группы с турбазы B. Скорость второй группы на 1 км/ч больше скорости первой группы. При встрече оказалось, что первая группа прошла большее расстояние, чем вторая. На сколько километров больше прошла первая группа? Составьте выражение и упростите его.

6. Один рабочий работал 5 ч, а другой — 3 ч. Оказалось, что первый рабочий за один час изготавливал x деталей, а второй — на 3 детали в час меньше. На сколько боль-

ше деталей изготовил первый рабочий за 5 ч, чем второй за 3 ч? Составьте выражение и упростите его.

7. Длина первого земельного участка прямоугольной формы 250 м, а длина второго 150 м. Какова общая площадь двух земельных участков, если ширина первого a м, а ширина второго на 5 м меньше? На сколько $м^2$ площадь первого участка больше площади второго? Составьте два выражения и упростите их.

О-35. Умножение многочлена на многочлен

1. Представьте в виде многочлена стандартного вида:

1) а) $(x - 7) \cdot (x + 1)$;
   б) $(2a - 5) \cdot (1 - 2a)$;
   в) $(3a - b) \cdot (2a + b)$;
   г) $(a - b) \cdot (2a - b - 1)$;
   д) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 3)$;
   е) $(2x - 5)(2x + 5)$;
   ж) $(2x - 5)(2x - 5)$.

2) а) $(a + 5) \cdot (a - 4)$;
   б) $(3x - 1) \cdot (3 - 2x)$;
   в) $(3a + b) \cdot (b - 2a)$;
   г) $(x - y) \cdot (2x + y - 3)$;
   д) $(a^2 - 3) \cdot (a^2 + 5)$;
   е) $(3a - b)(3a + b)$;
   ж) $(3a + b)(3a + b)$.

3) а) $(c - 7) \cdot (c + 2)$;
   б) $(5c + 2) \cdot (1 - 2c)$;
   в) $(3c - 2d) \cdot (d - c)$;
   г) $(a + b) \cdot (3a - b + 2)$;
   д) $(x^2 + 1) \cdot (4 - x^2)$;
   е) $(5 - x)(5 + x)$;
   ж) $(5 - x)(5 - x)$.

2. Представьте в виде многочлена стандартного вида:

1) а) $(5a + 2b - 1) \cdot (-2a - 3b)$;
   б) $(4a^3b - 7a^2b^2) \cdot (a - b)$;
   в) $(a^2 - 2a - 3) \cdot (a + 1)$;
   г) $(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot (x + 1)$;
   д) $(x + y + z)(x + y + z)$.

2) а) $(3x - 5y - 2) \cdot (-7x - 1)$;
   б) $(5x^2y - 4xy^2) \cdot (x - y)$;
   в) $(a^2 - a + 3) \cdot (a - 4)$;
   г) $(m^3 + m^2 + m + 1) \cdot (m - 1)$;
   д) $(a - b + c)(a - b + c)$.

3. Упростите выражение:

1) а) $-5x(x - 2) + (x - 3)(5x + 1)$;
   б) $3a(a - b) - (a + b)(3a - b)$;
   в) $(2a - b)(3a + b) + (3a - 5b)(a - b)$;
   г) $(5x^2y - y)(x - 2y) - (x^2 + 2y)(5x - 3y)$.

2) а) $3a(a + 3) + (2 - a)(3a - 4)$;
   б) $7x(x - 2y) - (x - y)(7x + y)$;
   в) $(3m - 2n)(2m - 3n) + (3n - m)(2n - m)$;
   г) $(2a - 5b^2)(a + b) - (b^2 - 2a)(a - 5b)$.

4. Найдите значение выражения при $a = 3{,}6$, $b = -2$:

1) $(2a - b)(b - 3a) + (6a^2 + b^2)$;
2) $2(3a^2 - b^2) - (3a - 2b)(2a + b)$.

5. Проверьте, верно ли равенство:

1) $(a - 3)(a + 5) = (a + 3)(a - 5)$;
2) $(x - 7)(8 - x) = (7 - x)(x - 8)$;
3) $(a - b)(a - b) = (b - a)(b - a)$.

---

6. Решите уравнение:

1) а) $2x^2 = (2x - 1)(x + 1)$;
   б) $(10x + 14)x - (5x - 1)(2x + 3) = 4$.
2) а) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2$;
   б) $(6x + 2)x - (2x - 1)(3x + 2) = 3$.

7. Найдите значение выражения при $a = 0{,}9$:

а) $(2a^2 - 4a - 1)(3a + 1) - (3a^2 + a - 5)(2a - 4)$;
б) $(5a^2 - 8a - 1)(2a + 1) + (1 - 10a)(a^2 - a - 3)$.

8. а) Имеется квадрат со стороной a см ($a > 5$) и прямоугольник, стороны которого таковы: одна на 2 см меньше стороны квадрата, а другая на 5 см меньше стороны квадрата. На сколько площадь квадрата больше площади прямоугольника? Составьте выражение и упростите его.

б) Одна машина шла со скоростью v км/ч и была в пути t ч. Другая шла со скоростью на 2 км/ч больше, но была в пути на 1 ч меньше. Оказалось, что первая машина прошла больший путь, чем вторая. На сколько километров больше прошла первая машина, чем вторая? Составьте выражение и упростите его.

9. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения делится на 5 нацело:

а) $n(n + 14) - (n - 1)(n + 5)$;
б) $(2n + 3)(3n - 7) - (n + 1)(n - 1)$.

О-36. Квадрат суммы и разности

1. Представьте в виде многочлена стандартного вида:

1) а) $(x + 2)^2$;
   б) $(2a + 3b)^2$;
   в) $(5x - 7)^2$;
   г) $(4a - b)^2$.
2) а) $(m + 4)^2$;
   б) $(3m + 2n)^2$;
   в) $(7m - 2)^2$;
   г) $(8m - n)^2$.
3) а) $(a + 9)^2$;
   б) $(3x + y)^2$;
   в) $(4a - 9)^2$;
   г) $(5x - 3y)^2$.

2. Упростите выражение:

1) а) $(7a-1)^2+14a$;
б) $12ab+(6a-b)^2$;
в) $(3a-b)^2-9a^2$;
г) $4x^2-(2x+1)^2$;

2) а) $(5a-1)^2+10a$;
б) $(4+7x)^2-56x$;
в) $6ab+(3a-2b)^2$;
г) $49x^2-(2-7x)^2$.

3. Замените данное выражение многочленом стандартного вида:

1) а) $(5a-1)^2+(a+5)^2$;
б) $(7a-3)^2-(2-7a)^2$;
в) $-2\cdot(4a-9)^2$;

2) а) $(3a-2)^2+(2a+3)^2$;
б) $(4a-b)^2-(3b+4a)^2$;
в) $-3\cdot(7a-8)^2$.

4. Верно ли равенство:

а) $7a+5=5+7a$;
б) $(7a+5)^2=(5+7a)^2$;
в) $7a-5=5-7a$;
г) $(7a-5)^2=(5-7a)^2$?

5. Заполните пропуски и сделайте проверку:

1) а) $9a^2-6a+1=(\ldots\ -\ \ldots)^2$;
б) $16x^2+8x+1=(\ldots\ +\ \ldots)^2$;
в) $36a^2+\ldots+49b^2=(\ldots\ +\ \ldots)^2$;
г) $25m^2-20mn+\ldots=(\ldots\ -\ \ldots)^2$;
д) $9a^2-\ldots+4=(2\ -\ \ldots)^2$.

2) а) $25a^2+10a+1=(\ldots\ +\ \ldots)^2$;
б) $4x^2-12xy+9y^2=(\ldots\ -\ \ldots)^2$;
в) $36m^2+\ldots+1=(\ldots\ +\ \ldots)^2$;
г) $9a^2-30a+\ldots=(\ldots\ -\ \ldots)^2$;
д) $\ldots-10x+\ \ldots=(1\ -\ \ldots)^2$.

6. Найдите значение выражения при $a=0{,}8$, $b=0{,}6$:

а) $(2a-5b)^2-(2a+5b)^2$;
б) $(3a-b)^2+(a+3b)^2$.

---

7. Решите уравнение и сделайте проверку:

1) а) $(2x-5)^2-3x^2=(x+2)^2-3$;
б) $(2x-1)(x+1)-x^2=(x-3)^2-10$.

2) а) $(y+1)^2-4y=-5+(y-2)^2$;
б) $(3x+1)(x-1)-2x^2=(x+2)^2-5$.

8. Вычислите квадраты следующих чисел по образцу:

Образец.
$31^2=(30+1)^2=30^2+2\cdot30\cdot1+1=$
$=900+60+1=961$;
$78^2=(80-2)^2=6400+2\cdot80\cdot2+4=$
$=6400-320+4=6084$.

1) а) 61^2; б) 89^2; в) 199^2.
2) а) 52^2; б) 68^2; в) 301^2.

9. Даны выражения: $(x-2)^2$, $(x+2)^2$, $(2-x)^2$, $-(x-2)^2$, $(-x-2)^2$, $(2x-1)^2$, $(1-2x)^2$. Значения каких из этих выражений равны при всех значениях x? Выпишите соответствующие равенства.

10. Установите, чему равно частное:

1) а) $(a-b):(b-a)$; б) $(a+2b):(2b+a)$; в) $(3a-2b)^2:(2b-3a)^2$; г) $(x+3y)^2:(3y+x)^2$.
2) а) $(m+n):(n+m)$; б) $(m-2n):(2n-m)$; в) $(3x+2y)^2:(2y+3x)^2$; г) $(7x-y)^2:(y-7x)^2$.

11. Докажите, что при любых натуральных значениях n выражение делится нацело на данное число:

а) $9n^2-(3n-2)^2$ на 4; б) $(3n+2)^2-(2n+3)^2$ на 5.

12. Докажите, что значение данного выражения будет одинаковым при всех значениях букв:

а) $(3a-4)^2-3a\cdot(3a-8)$;
б) $(5x+7)^2-5x\cdot(5x+14)$.

13. Найдите значение выражения a^2+b^2, если известно, что $a+b=8$, $a\cdot b=15{,}84$.

Проверь себя!

1. Какому из многочленов равно выражение

$$-2x\,(8x-1)-4x\,(1-4x)?$$

А. $-6x$. **Б.** $-2x$. **В.** $-32x^2+2x$.

2. Какой двучлен нужно поставить вместо пропуска, чтобы равенство $3a^3b^2\cdot(\ldots)=-6a^9b^2+9a^3b^6$ было верным?

А. $-2a^6+3b^4$. **Б.** $3b^4-2a^7$. **В.** $3b^3-2a^7$.

3. Какой из многочленов равен произведению

$$(2x-1)\,(x-2)?$$

А. $2x^2+2$. **Б.** $2x^2-5x+2$. **В.** $2x^2-3x+2$.

4. Какому числу равно при $a=0$ значение выражения $(2a+1)\,(8a-1)-(4a-5)\,(3-2a)+12$?

А. -16. **Б.** 16. **В.** 26.

5. Какой из многочленов равен квадрату двучлена $3b - 2a$?

А. $4a^2 + 9b^2$. Б. $9b^2 - 4a^2$. В. $4a^2 - 12ab + 9b^2$.

6. Какое из выражений достаточно прибавить к выражению $49a^2 + 1$, чтобы получился квадрат суммы двух выражений?

А. $14a$. Б. $-7a$. В. $7a$.

7. Корнем какого из уравнений является число 2?

А. $(3x - 5)^2 = 1$. Б. $(4 - 3x)^2 = 81$. В. $(2x - 1)^2 = 25$.

8. Найдите значение выражения $16a^2 - (4a - 1)^2$ при $a = \frac{7}{8}$.

А. 1. Б. 6. В. -6.

9. Решите уравнение $(3x - 5)^2 = 25 + 9x^2$.

А. $-\frac{2}{3}$. Б. 1. В. 0.

10. Какому из выражений равно произведение $(x - 2)(3 - x)$?

А. $(x - 2)(x - 3)$. В. $(2 - x)(x - 3)$.
Б. $(x + 2)(3 + x)$.

Б А Б В В А А Б В В

О-37. Решение уравнений

1. Решите уравнение:

1) а) $7x + (7x - 3) - (-8x - 8) = x + 26$;
б) $5x \cdot (12x + 7) - 4x \cdot (15x - 11) = 10 + 29x$;
в) $(x + 1) \cdot (x + 4) - 3(4x - 7) = (x - 6)^2$;
г) $(x + 3) \cdot (x - 3) - (2x - 5)^2 = -3x \cdot (x - 2) - 27$.

2) а) $5y - (7 - 2y) - (4y + 8) = 2y$;
б) $6y \cdot (13y - 9) - 13y \cdot (6y - 1) = 24y + 13$;
в) $(2x - 3)^2 - (2x + 1) \cdot (2x - 5) = 3x - 14$;
г) $(x + 4) \cdot (x - 4) - (2x - 3)^2 = -3x \cdot (x + 1) - 22$.

2. Решите уравнение:

1) $\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3}{2}$; 2) $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = 0{,}1$; 3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = -0{,}2$.

3. Решите уравнение, введя новую переменную:

а) $2{,}5 \cdot (10x + 17) - 18 = -3{,}5 \cdot (10x + 17)$;
б) $-5{,}5 \cdot (2 \cdot (1{,}4 - x) - 4) + 4 = 4{,}8 \cdot (5 \cdot (1{,}4 - x) + 20)$.

О-38. Решение задач с помощью уравнений

1. Составьте уравнение по условию задачи и решите его. Сделайте проверку:

а) От числа a отняли 2,5 и результат умножили на 2. Получили столько же, сколько получили бы, если бы к числу a прибавили 5, а результат разделили бы на 3. Чему равно число a?

б) Число x умножили на 2 и к результату прибавили 5. Получили столько же, сколько получили бы, если бы к числу x прибавили 5, а результат разделили бы на 3. Чему равно число x?

в) От квадрата числа b отняли произведение числа b и числа, на 2 единицы меньшего b. Получили 10. Чему равно число b?

2. В одном зале кинотеатра x рядов, а в другом — на 2 ряда больше. В каждом ряду первого зала 24 места, а в каждом ряду второго зала 26 мест. Всего в двух залах 802 места. Сколько рядов в каждом зале?

3. В маленькую коробку помещается x карандашей, а в большую — на 6 карандашей больше. Известно, что в 10 маленьких и 6 больших коробках помещается 132 карандаша. Сколько карандашей помещается в одной маленькой коробке?

4. Скорость мотоциклиста x км/ч, а скорость велосипедиста на 20 км/ч меньше. Известно, что за 3 ч мотоциклист проехал такое же расстояние, какое велосипедист проехал за 8 ч. Какова скорость мотоциклиста?

5. Первый токарь обрабатывает в час x деталей, а второй — на 3 детали в час меньше. Первый токарь работал 6 ч, а второй — 5 ч. К концу рабочего дня оказалось, что первый токарь обработал на 36 деталей больше, чем второй токарь. Сколько деталей обрабатывает каждый токарь в час?

О-39. Различные способы решения задач с помощью уравнений

Один из способов записи решения задач с помощью уравнений дан в учебнике (пункт 7.6, пример 1). Существуют и другие способы записи, например с помощью таблиц. Рассмотрим ту же **задачу**.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
I турист	x	3	$3x$
II турист	$x + 1{,}5$	3	$3\,(x + 1{,}5)$

Возможный **вариант решения** уравнения:

$3x + 3 \cdot (x + 1{,}5) = 22{,}5,$
$3x + 3x + 4{,}5 = 22{,}5,$
$6x = 18,$
$x = 3.$

Ответ. 3 км/ч, 4,5 км/ч.

Решите задачи, используя удобный для вас способ записи:

1. Все имеющиеся карандаши можно разложить в 15 маленьких коробок или в 5 больших. Сколько всего карандашей имеется, если в одну большую коробку помещается на 12 карандашей больше, чем в одну маленькую?[1]

2. Есть 120 карандашей. Их разложили в 5 больших и 10 маленьких коробок. Известно, что в одной большой коробке помещается на 6 карандашей больше, чем в одной маленькой. Сколько карандашей помещается в одну большую и сколько в одну маленькую коробку?

3. За 2 ч мотоциклист проехал такое же расстояние, какое велосипедист проехал за 5 ч. Какова скорость велосипедиста, если она на 18 км/ч меньше скорости мотоциклиста?

4. За 6 ч один рабочий изготовил столько же деталей, сколько другой — за 4 ч. Сколько деталей изготавлива-

[1] Совет: решите задачу двумя способами.
I способ: обозначить через x число карандашей в маленькой коробке.
II способ: обозначить через x общее число карандашей.

ет в час каждый рабочий, если первый изготавливает в час на 2 детали меньше, чем второй?

5. Скорость мотоциклиста на 18 км/ч больше скорости велосипедиста. Известно, что за 3 ч мотоциклист проехал на 30 км больше, чем велосипедист за 5 ч. Какова скорость велосипедиста?

---

6. Сумма двух чисел равна 200. Известно, что 20% одного числа равны 30% другого числа. Найдите эти числа.

7. Одно число на 60 больше другого. Известно, что если сложить 20% одного числа и 30% другого числа, то получится 40. Найдите эти числа. (Задача имеет два решения.)

Глава 8. Разложение многочленов на множители

О-40. Вынесение общего множителя за скобки

Пример 1. Вынесите общий множитель многочлена $12ax^3 + 8a^2x^2$ за скобки.

Решение. а) Смотрим на коэффициенты: 4 — наибольший общий множитель чисел 12 и 8, следовательно, можно вынести общий множитель 4. б) Смотрим на переменные: первое слагаемое содержит множитель a, второе — множитель a^2; общий множитель a. в) Первое слагаемое содержит множитель x^2, второе — множитель x^2; общий множитель x^2. г) Выносим общие множители и смотрим, что останется в скобках.

Ответ. $12ax^3 + 8a^2x^2 = 4ax^2\,(3x + 2a)$.

Пример 2. Сократите дробь $\dfrac{cx - cy}{dx - xy}$.

Решение. Сокращать можно только после того, как числитель и знаменатель представлены в виде произведения. а) Вынесем общие множители. б) Сократим числитель и знаменатель дроби на общий множитель:

$$\frac{cx - cy}{dx - xy} = \frac{c(x - y)}{d(x - y)} = \frac{c}{d}.$$

1. Разложите число на простые множители:

а) 126; б) 96; в) 224.

2. Найдите несколько общих множителей двух чисел:

а) 24 и 36; б) 27 и 45; в) 100 и 150.

3. Найдите значение выражения, преобразовав его на основе распределительного закона:

а) $3 \cdot 99 + 3$; б) $7 \cdot 68 + 7 \cdot 32$; в) $13 \cdot 123 - 13 \cdot 23$.

4. Найдите несколько общих множителей двух одночленов:

а) $15ax$ и $25ay$;
б) $16c^3d$ и $18cd^2$;
в) $12x^2y^3$ и $24x^2y^2$;
г) $15ab^3$ и $12b^2x$;
д) $14a^3b^4c$ и $47a^2bc^3$;
е) $3x^3y^4z^5$ и $5x^2y^3z$.

5. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $3a + 3b$;
б) $12c - 4x$;
в) $16 + 4y$;
г) $21a + 7b$;
д) $-24s - 12t$;
е) $-54x + 54y$.

6. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $ax + ay$;
б) $uz - uzw$;
в) $5w + aw$;
г) $-ax - ab$;
д) $-sr - rt$;
е) $xz + xzw$.

7. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $ax + ay + az$;
б) $xy - xz - 5x$;
в) $15x + xz - 2xy$;
г) $bxs - bxy - bxd$;
д) $2xy - 4xz - 6xw$;
е) $-5ab - 15ax + 25ay$.

8. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $a^4 + a$;
б) $c^2 - c$;
в) $x^3 + x^5$;
г) $2y^3 - 6y^5$;
д) $9z^6 + 18z^4$;
е) $16u^5 - 24u^4$.

9. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $z^2 + 3zy$;
б) $3x^3 - 6xz$;
в) $y^2 + y^7z$;
г) $-x^3z^3 + x^3$;
д) $a^3c^2 + a^2c^3$;
е) $4ab^5 + 6b^4c$.

10. Разложите на множители:

а) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
б) $x^2 - 4xy - 3xy$;
в) $by^3 - by^4 + by^7$;
г) $16a^3b^6 + 8a^6b^3$;
д) $11c^4d^2 - 121c^3d^5$;
е) $-5x^6c^5 - 25x^4c^6$.

11. Проверьте, верно ли выполнено разложение на множители:

а) $5x^3z - 15x^2z^2 = 5x^3z\ (1 - 3z)$;
б) $-4a^3b^3 + 4a^2b^4 = -4a^2b^3\ (a + b)$;
в) $-u^6v^5 - u^5v^6 = -u^5v^5\ (u + v)$;
г) $14c^2d^6 + 24c^5d^5 = 7c^2d^5\ (2d + 3c^3)$.

12. Сократите дробь:

а) $\frac{7(a-b)}{14a}$; б) $\frac{15x+25y}{5x}$; в) $\frac{ac-bc}{cx+cy}$; г) $\frac{5cx-5cy}{15cz}$;

д) $\frac{abc+abd}{abcd}$; е) $\frac{6abs}{2as+4bs}$; ж) $\frac{axy+5ay}{abz+5az}$; з) $\frac{bc+bd}{3c+3d}$;

и) $\frac{x^3-x^2}{xy-x}$; к) $\frac{(a-3)^2}{ax-3x}$; л) $\frac{xy+xw}{y^2+2yw+w^2}$; м) $\frac{a^5-2a^4b}{a^2-4ab+4b^2}$.

---

13. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $4a^5c^2d^4+2a^3c^4d-6a^2c^3d^7$;
б) $15x^2c^4y^5-12x^3c^4y^4-18xc^3y$;
в) $-63ab^4c^3d+9ab^4c^3-27a^2b^5cd^2$;
г) $7x^2y^3c^4+x^3y^5c^4-49x^3y^5c^6$.

14. Докажите, что значение выражения:

а) 9^6+9^5 делится на 10;
б) 7^9+7^7 делится на 50;
в) $11^7-6\cdot 11^5$ делится на 115;
г) $5^4+5^3+5^2$ делится на 31;
д) $3^7-3^5+3^6$ делится на 11;
е) $2^8+2^6+2^5+3\cdot 2^4$ делится на 25.

15. Разложите на множители:

а) $3(t+2)-t(t+2)$;
б) $ab(b-3)+a^2(b-3)$;
в) $c(c-d)+d(d-c)$;
г) $k(m-3n)-p(3n-m)$;
д) $5(y+3)-a(y+3)-x(y+3)$;
е) $2(x-4)+c(4-x)-a(x-4)$;
ж) $2(a+b-c)+x(a+b-c)-y(a+b-c)$;
з) $(x+2z)(x-3y)+(x+2z)^2$;
и) $(a-x)(a+x^2)+(x-a)x^2$;
к) $a(a^2+3ab)-a^3$;
л) $c^3(d-4)^3+c^2(d-4)^4$;
м) $a^5(b-c)^7+a^6(c-b)^5$;
н) $x^3(2x-5y)^5+x^2(5y-2x)^4-x^3(5y-2x)^3$;
о) $(a-c)^3(x+y)^5-(a-c)^2(x+y)^4+(c-a)^6(x+y)^6$;
п) $5x^2+10xy+5y^2$;
р) $x^3+4x^2y+4xy^2$;
с) $(a+1)c^2+6(a+1)c+9(a+1)$;
т) $25(x-6y)a^2-10(x-6y)a-(6y-x)$.

16. Сократите дробь:

а) $\frac{x - y}{2y - 2x}$;

б) $\frac{xz - xy}{ay - az}$;

в) $\frac{x^2 - 4x}{4x^2 - x^3}$;

г) $\frac{(a - 3b)^2}{3b - a}$;

д) $\frac{mn - (mn)^2}{kmn - k}$;

е) $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{15b - 10a}$;

ж) $\frac{3ax - 9ay + 15az}{12y - 20z - 4x}$;

з) $\frac{a^2b + ac - 4a^2}{12a - 3ab - 3c}$;

и) $\frac{x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2}{2x^5 + 2x^3 - 4x^4 - 2x^6}$.

17. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $3^{n+2} - 3^n$;

б) $7^{2n} - 7^n$;

в) $4^{2n+1} + 4^{n+2}$;

г) $6^{n+3} - 6^{n+1} - 6^n$.

18. Сократите дробь:

а) $\frac{2^{n+1} + 2^n}{3}$;

б) $\frac{5^{2n} + 5^n}{5^n + 1}$;

в) $\frac{3^{2n} + 2 \cdot 3^n + 1}{3^{3n} + 3^{2n}}$;

г) $\frac{3^{n+2} + 5 \cdot 3^n}{5^n - 11 \cdot 5^{n-2}}$.

19. Вычислите значение выражения:

а) $\frac{x^3 - 5x^2y}{x^2}$, если $x - 5y = 2$;

б) $\frac{5x - 15y}{9y^2 - 6xy + x^2}$, если $x - 3y = 2$;

в) $\frac{x^3y + xyz - axy}{2a - 2x^2 - 2z}$, если $xy = 2$.

О-41. Способ группировки

Пример. Разложите на множители

$$cx - cy + 2dy - 2dx.$$

Решение. $cx - cy + 2dy - 2dx =$
$= (cx - cy) + (2dy - 2dx) = c(x - y) + 2d(y - x) =$
$= c(x - y) - 2d(x - y) = (x - y)(c - 2d)$.

1. Представьте в виде произведения:

а) $(x + y) - z(x + y)$;
б) $a(a + b) + b(a + b)$;
в) $c(c - 2d) - b(c - 2d)$;
г) $z(2a - 5b) + x(2a - 5b)$.

2. Заключите два первых слагаемых в скобки и затем вынесите общий множитель за скобки:

а) $x + z + a(x + z)$;
б) $a - 3v + b(a - 3v)$;
в) $2s - 5t - 4c(2s - 5t)$;
г) $3a - 2b - cd(3a - 2b)$;
д) $x - 2a - 2b(x - 2a)$;
е) $2c - d - 3c(2c - d)$.

3. Заключите два последних слагаемых в скобки и затем вынесите общий множитель за скобки:

а) $2(a + 3b) + a + 3b$;
б) $c(x + 4z) + x + 4z$;
в) $a(a - 4bc) + a - 4bc$;
г) $3x(2x + y) + 2x + y$;
д) $2z(2w - 3v) + 2w - 3v$;
е) $4a(2a - 4b) + 2a - 4b$.

4. Разложите на множители:

а) $2(x - y) + x - y$;
б) $a + b(a + 2c) + 2c$;
в) $3x + 2a - c(3x + 2a)$;
г) $2x - z(2x - y) - y$;
д) $3c(2a + 5b) + 2a + 5b$;
е) $-6z + 5d(x - 6z) + x$.

5. Заключите два первых слагаемых в скобки, вынесите их общий множитель, а затем представьте все выражение в виде произведения:

а) $2x + 2a + c(x + a)$;
б) $ax + ay + c(x + y)$;
в) $2ab - 5ac - c(2b - 5c)$;
г) $3vz - 6vw + x(z - 2w)$;
д) $2x + 4xy - 3z(1 + 2y)$;
е) $x^2 + xy + z(x + y)$.

6. Разложите на множители:

а) $3x + 3y + a(x + y)$;
б) $5a - c(a - b) - 5b$;
в) $ac - 2ad - x(c - 2d)$;
г) $4ad - 3c(2a + 3x) + 6dx$;
д) $x^3 + x + y(x^2 + 1)$;
е) $a^2 - ab + c(a - b)$.

7. Разложите на множители:

а) $xz + xy + 2z + 2y$;
б) $2ab - 2ac + 3b - 3c$;
в) $5ax + 10ay + bx + 2by$;
г) $3ac + 6bc + 7ax + 14bx$;
д) $2ax + 2xy - an - yn$;
е) $x^2 + xz + ax + az$.

8. Проверьте, правильно ли выполнено разложение на множители:

а) $2ax + 2ay + cx + cy = (2a + c)(x + y)$;
б) $2a + 2ab + 3c + 3bc = (a + c)(2 + 3b)$;
в) $a^2 + ac - 2bc - 2ab = (a - 2b)(c + a)$;
г) $3a^2 - 3ac + 2bc - 2ab = (3a - 2b)(a + c)$.

9. Заключите два последних слагаемых в скобки, поставив перед ними знак «минус», и затем вынесите общий множитель за скобки:

а) $c(a + 2c) - a - 2c$;
б) $d(2x + 3y) - 2x - 3y$;
в) $a(s - t) - s + t$;
г) $3b(3a - 5x) - 3a + 5x$;
д) $x(a - 3b) + 3b - a$;
е) $a(2z - 5x) + 5x - 2z$.

10. Проверьте, можно ли вынести за скобки множитель $x + y$ в каждом из следующих случаев:

а) $a(x + y) + x + y$;
б) $5x + 5y - ax - ay$;
в) $2d(x + y) + x - y$;
г) $-x - x(x + y) + y$.

11. Разложите на множители:

а) $a(2a - b) - 2a + b$;
б) $b(a - 3c) - 2a + 6c$;
в) $ac - 2(d - c) - ad$;
г) $-2xy - 3z(y - 2w) + 4xw$;
д) $xy - xz + z - y$;
е) $ab - ac + dc - db$;
ж) $2xy - 2zy + 3z - 3x$;
з) $3ax - 3az + bz - bx$.

12. Проверьте, правильно ли выполнено разложение на множители. Покажите, как его следовало выполнить в тех случаях, когда оно сделано ошибочно:

а) $zw - zv + 2v - 2w = (z - 2)(w - z)$;
б) $az - 2ax + 2bx - bz = (a + b)(z - 2x)$;
в) $2ac - 6ad + 3xd - cx = (2a - x)(3d - c)$;
г) $x^2 - 2xc + 2cy - xy = (x - c)(y + 2c)$;
д) $2az - z^2 + bz - 2ab = (z - 2a)(b - z)$;
е) $x^2 - 2y + x - 2xy = (x + 2y)(x - 1)$.

---

13. Разложите на множители:

а) $a^3 + a^2b + ax + bx$;
б) $a^6 + a^5 - a^4 - a^3$;
в) $x^4y - x^3y^2 + 5zy - 5zx$;
г) $a^4x^4 - a^3x^3 + z^2 - axz^2$;
д) $ax + ay + bx + by - cx - cy$;
е) $a^2x - ax^2 + 3x - 3a + ac - cx$;
ж) $x^4 + x^3 + abx - c^2x + ab - c^2$;
з) $a^5 - a^4x - ab + x^5 - ax^4 + bx$.

14. Разложите многочлен на множители, заменяя средний член суммой одночленов:

а) $x^2 - 6x + 5$;
б) $a^2 + 8a + 12$;
в) $c^2 + 4c - 5$;
г) $a^2 - 4ab + 3b^2$;
д) $x^2 + 7xy - 8y^2$;
е) $2x^2 - 5xy + 3y^2$.

15. Сократите дробь:

а) $\dfrac{ax-3x+3-a}{a^2-3a}$; в) $\dfrac{ac-2bc+2b-a}{a^2-4ab+4b^2}$;

б) $\dfrac{xy-x+y-1}{xy+2y-x-2}$; г) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$.

О-42. Формула разности квадратов

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Пример. Разложите на множители $4b^2-9c^2$.

Решение. $4b^2-9c^2=(2b)^2-(3c)^2=(2b-3c)(2b+3c)$.

1. Представьте выражение в виде квадрата какого-либо выражения:

а) 36; в) $4c^2$; д) $81x^2y^4$;

б) a^6; г) a^2b^2; е) $16a^2b^2c^2$.

2. Какие из выражений можно разложить на множители, применив формулу разности квадратов:

а) b^2-4; в) $a^2-0{,}25$; д) x^2y^2-1;

б) $16+b^2$; г) $100-a^2$; е) a^2+4b^2?

3. Разложите на множители:

а) x^2-1; ж) $100-9b^2$; н) $\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{25}c^2d^2$;

б) y^2-16; з) $1-0{,}25c^2$; о) a^4-b^2;

в) a^2-c^2; и) a^2b^2-4; п) x^8-y^6;

г) $25-b^2$; к) $c^2d^2-81x^2$; р) $4x^4-25y^{10}$;

д) $144-y^2$; л) $\dfrac{1}{2}x^2z^2-a^2$; с) $9-x^4$;

е) $4c^2-9$; м) $\dfrac{4}{25}a^2-9b^2c^2$; т) $25-y^2z^6$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-9}{a+3}$; в) $\dfrac{a^2-4ax+4x^2}{a^2-4x^2}$; д) $\dfrac{c^2-81d^2}{(9d-c)^2}$;

б) $\dfrac{b^2-c^2}{bc+b^2}$; г) $\dfrac{16x^2-25}{4xz-5z}$; е) $\dfrac{144-25a^2}{12b-5ab}$.

5. Выполните умножение:

а) $(x-5)(x+5)$;
б) $(3-2x)(3+2x)$;
в) $(t-4c)(t+4c)$;
г) $(2u-3v)(2u+3v)$;
д) $(2-xz)(2+xz)$;
е) $(3c-5bd)(3c+5bd)$;
ж) $(a^2+1)(a^2-1)$;
з) $(b^3-c)(b^3+c)$;
и) $(2a+x^2)(2a-x^2)$;
к) $(x^3-2y^4)(x^3+2y^4)$.

6. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(x-1)(x+1)+x^2$;
б) $a(a-b)(a+b)$;
в) $(4-3y)(4+3y)+18y^2$;
г) $x(2x+z)(2x-z)+4xz^2$;
д) $(2b-5c)(2b+5c)+(b-c)(b+c)$;
е) $(3x-y)(3x+y)+(x-2y)(x+2y)$;
ж) $(x^2+1)(x^2-1)+x^4$;
з) $(x^3+y)(x^3-y)+(y-2x^3)(y+2x^3)$.

---

7. Разложите на множители:

а) $5x^2-125$;
б) $64-4y^2$;
в) ax^2-ay^2;
г) x^3-xy^2;
д) $(x+y)^2-z^2$;
е) $81-(a+2b)^2$;
ж) $(a+2b)^2-(a-2b)^2$;
з) $(c+d)^2-(2c+3d)^2$;
и) $a^{2n}-b^{2m}$;
к) $c^{4n}-d^4$.

8. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a-b}{b^2-a^2}$;
б) $\dfrac{x^2-16}{16-4x}$;
в) $\dfrac{4x^2-1}{y-2xy}$;
г) $\dfrac{2z^2-8}{z^2-2z}$;
д) $\dfrac{ab^2-ac^2}{c^2-bc}$;
е) $\dfrac{x^4-x^2y^2}{ay^2-axy}$;
ж) $\dfrac{a^4x^4-4}{2x+a^2x^3}$;
з) $\dfrac{81a^2-b^2c^4}{b^2c^2-9ab}$.

9. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(x+2)(x-2)-(x+4)(x-4)+(x-5)(x+5)$;
б) $(y-3)(y+3)+(2y-1)(2y+1)-(y+1)(y-1)$;
в) $(t-1)(t+1)(t^2+1)$;
г) $(u^2+v^2)(u-v)(u+v)$;
д) $(a+x-z)(a+x+z)$;
е) $(x^2+x+2)(x^2+x-2)$;
ж) $(a+b+c^2)(b+c^2-a)$;
з) $(c^2+ab-d^2)(ab-c^2+d^2)$.

О-43. Формулы разности и суммы кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Пример. Разложите на множители $c^3 - 27d^3$.

Решение. $c^3 - 27d^3 = c^3 - (3d)^3 = (c - 3d)(c^2 + 3cd + 9d^3)$.

1. Представьте выражение в виде куба каких-либо выражений:

а) 8; в) x^{12}; д) $64x^9$; ж) $a^6c^9z^3$;
б) c^6; г) $27d^3$; е) a^3b^6; з) $125x^3y^6z^{15}$.

2. Проверьте справедливость равенства:

а) $x^3 - 8y^3 = (x - 2y)(x^2 + 4xy + 4)$;
б) $z^3 + b^3 = (z - b)(z^2 + zb + b^2)$;
в) $27a^3 - b^3 = (3a - b)(9a^2 + 3ab + b^2)$;
г) $8c^3 + 1 = (8c + 1)(c^2 - 8c + 64)$;
д) $125 - x^6 = (5 - x^2)(25 + 5x + x^2)$;
е) $64 + y^9 = (4 + y^3)(16 - 4y^3 + y^6)$.

3. Разложите на множители:

а) $z^3 - w^3$; д) $0{,}001 + z^3$; и) $27a^3 - c^3$;
б) $u^3 + 27$; е) $\frac{1}{27} + c^3$; к) $1000x^3 + 27y^3$;
в) $x^3 - \frac{1}{8}$; ж) $a^6 + c^3$; л) $8a^9 + 125x^3$;
г) $0{,}008 - t^3$; з) $x^9 - y^{12}$; м) $1000v^9 - 0{,}001w^6$.

4. Выполните умножение:

а) $(u + 4)(u^2 - 4u + 16)$;
б) $(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$;
в) $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$;
г) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$;
д) $(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$;
е) $(0{,}3a^2 + 10)(0{,}09a^4 - 3a^2 + 100)$.

5. Сократите дробь:

а) $\frac{x^3 + z^3}{x^2 - xz + z^2}$; в) $\frac{a^3 - 8b^3}{2a - 4b}$; д) $\frac{x^3 - 1000z^3}{x^2 - 100z^2}$;
б) $\frac{u - 2}{u^3 - 8}$; г) $\frac{3cd + d}{27c^3 + 1}$; е) $\frac{4u^2 - 9}{8u^3 + 27}$.

6. Разложите на множители:

а) $a^3b^3 + c^3$;
б) $d^3 - x^3y^3$;
в) $8a^3 + c^3t^3$;
г) $w^3 - 27v^3z^3$;
д) $5a^3 + 320$;
е) $4 - 32z^3$;
ж) $a^4 - ab^3$;
з) $x^4 + 125x$;
и) $x^{10} - xy^3$;
к) $m^{13}n + mn^{13}$;
л) $a^6 (a + 2) + b^3 (a + 2)$;
м) $x^3 (a + b) - 8 (a + b) y^6$;
н) $(x - 2y)^3 + (x + 2y)^3$;
о) $(2a - b)^3 - (2a + b)^3$.

7. Выполните умножение:

а) $(x - y) (x + y) (x^4 + x^2y^2 + y^4)$;
б) $(a - 3b) (a + 3b) (a^4 + 9a^2b^2 + 81b^4)$;
в) $(2x + 1)^2 (4x^2 - 2x + 1)^2$;
г) $(3 + x)^2 (9 - 3x + x^2)^2$.

8. Упростите выражение:

а) $(x + 3y) (x^2 - 3xy + 9y^2) + (x - 3y) (x^2 + 3xy + 9y^2)$;
б) $(4a - 3) (16a^2 + 12a + 9) - (4a + 3) (16a^2 - 12a + 9)$;
в) $a (a - 1) (a + 1) + (3 - a) (9 + 3a + a^2)$;
г) $(x + 4) (x^2 - 4x + 16) - x (x + 5) (x - 5)$;
д) $(2x - 1) (4x^2 - 2x + 1) (4x^2 + 2x + 1) (2x + 1)$;
е) $(a - b) (a^2 + ab + 2b^2) + ab^2$;
ж) $(x + y) (x^2 - xy + 3y^2) - 2xy^2$;
з) $(a + 2) (a^2 - 3a + 4) + a^2 + 2a$;
и) $\dfrac{a^3b - b^4}{b^2 - ab}$;
к) $\dfrac{x^4 - xy^6}{xy^2 - x^2}$.

О-44. Разложение на множители разными способами

1. Разложите на множители:

а) $2x^2 - 8$;
б) $18 - 2y^2$;
в) $kt^2 - k$;
г) $3c^2 - 3x^2$;
д) $x^3 - 4x$;
е) $32a^3 - 2a$.

2. Разложите на множители:

а) $2u^3 - 2v^3$;
б) $3z^3 + 3w^3$;
в) $nx^3 + nz^3$;
г) $w^4 - w$;
д) $z^4 + 8z$;
е) $x^4 - 16z^4$;
ж) $81 - k^4$.

3. Разложите на множители:

а) $2a^2 - 12a + 18$;
б) $10x - 5x^2 - 5$;
в) $0{,}5u^2 + 4uv + 8v^2$;
г) $-0{,}9x^2 - 0{,}6xy - 0{,}1y^2$;
д) $t^3 - 8t^2 + 16t$;
е) $4u^3 + 4u^2 + u$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$;

б) $\dfrac{8-8t+2t^2}{12-3t^2}$;

в) $\dfrac{x^2-16xy^2}{ax-4ay}$;

г) $\dfrac{uw+wz}{u^3-uz^2}$;

д) $\dfrac{3x^3-81}{2x^2+6x+18}$;

е) $\dfrac{4y^2-4y+4}{3y^3+3}$.

---

5. Разложите на множители:

а) $x^3-4x^2y+4xy^2$;
б) $pt^2+6p^2t+9p^3$;
в) $4a^3+12a^2b+9ab^2$;
г) $9x^3y-12x^2y^2+4xy^3$;
д) $x^2(x-1)+4x(x-1)+4(x-1)$;
е) $36(y+2)+12y(y+2)$;
ж) $25x^2(x^2-1)-10x(x^2-1)+x^2-1$;
з) $9a^2(a^2-b^2)+12ab(a^2-b^2)+4b^2(a^2-b^2)$.

6. Разложите на множители:

а) $4a-4-a^3+a^2$;
б) $3b^3+3b^2-3b-3$;
в) $5c^3+10c^2-5cd^2-10d^2$;
г) $3k^3+3k^2-3km^2-3m^2$;
д) $8x-8-x^4+x^3$;
е) $y^4+2y^3+27y+54$;
ж) $x^2-4x+4-y^2$;
з) $y^2+10y+25-x^2$;
и) $4z^2+4uz+u^2-16$;
к) $81-9x^2-6xy-y^2$.

7. Сократите дробь:

а) $\dfrac{ax-x+2a-2}{a^3-a+2a^2-2}$;

б) $\dfrac{bx^2-4b+x^2-4}{bx+2b-3x-6}$;

в) $\dfrac{x^2-4z^2+2xy+y^2}{(x+y)^2+4z(x+y)+4z^2}$;

г) $\dfrac{c^2-2c(a+2b)+(a+2b)^2}{a^2-c^2+4ab+4b^2}$;

д) $\dfrac{a^2(a+4)+4a(a+4)+4a+16}{a^3+2a^2-16a-32}$;

е) $\dfrac{8b-8-2b^3+2b^2}{b^2(b-2)-2b(b-2)+b-2}$.

О-45. Решение уравнений с помощью разложения на множители

Пример. Решите уравнение $x^2 - 5x = 0$.

Решение. $x^2 - 5x = x(x - 5)$. Но уравнение $x(x - 5) = 0$ «распадается» на два уравнения: $x = 0$ и $x - 5 = 0$.

Ответ. 0; 5.

1. Решите уравнение:

а) $2x + 4 = 0$;
б) $0{,}5x - 2 = 0$;
в) $3x = 7$;
г) $-5x + 3 = 0$.

2. Является ли корнем уравнения $(3x - 6)(x + 5)$ число: 1, 2, 3, 5, −1, −4, −5?

3. Найдите все числа, являющиеся корнями хотя бы одного из уравнений:

а) $x - 3 = 0$ и $x + 5 = 0$;
б) $2x - 8 = 0$ и $6x + 5 = 0$;
в) $0{,}2x - 1 = 0$ и $-x = 3$;
г) $2x - 0{,}5 = 0$ и $3x = -1$.

4. Решите уравнение:

а) $(x + 2)(x - 1) = 0$;
б) $(z - 5)(2z + 8) = 0$;
в) $-3x(0{,}6x - 12) = 0$;
г) $(5 - 2t)(7 + 5t) = 0$;
д) $(y - 3)(y + 4)(3y - 5) = 0$;
е) $5z(z + 1)(3z - 17) = 0$;
ж) $t^4 = 0$;
з) $(3x + 2)^2 = 0$;
и) $x^2(x - 3)(x + 6) = 0$;
к) $y^3(y - 1)^2(y + 1) = 0$.

5. Решите уравнение:

а) $x^2 - 4x = 0$;
б) $y^2 + 5y = 0$;
в) $3z - z^2 = 0$;
г) $5t - 2t^2 = 0$;
д) $x^3 - 3x^2 = 0$;
е) $6y^4 + 3y^5 = 0$;
ж) $z^2 - 9 = 0$;
з) $81 - x^2 = 0$;
и) $2y^2 - 2 = 0$;
к) $16 - 4y^2 = 0$;
л) $x^3 - 4x = 0$;
м) $t^2 - t^4 = 0$;
н) $x^2 + 4x + 4 = 0$;
о) $4z^2 - 4z + 1 = 0$.

6. Придумайте уравнение, имеющее ровно два корня; ровно три корня; ровно четыре корня.

7. Запишите такое уравнение, чтобы числа 2, 5, 7 были его корнями.

8. Решите уравнение:

а) $(x-3)(x^2+4)=0$;

б) $(x^4+2)(2x-5)=0$;

в) $(x-1)^2(x^6+3)(x^2-4)=0$;

г) $(x+2)^2(x^4-1)=0$;

д) $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=0$;

е) $\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\right)=0$.

9. Решите уравнение:

а) $2(x-2)+x(x-2)=0$;
б) $5(y+3)-(y-1)(y+3)=0$;
в) $t(t+3)+t^2-9=0$;
г) $(x-2)(x+3)+x^2-4=0$;
д) $2(y-1)=y^2-1$;
е) $z+1=3(z^2-1)$;
ж) $(u+2)^2-16=0$;
з) $(v+3)^2=9$;
и) $x^3+2x^2+x=0$;
к) $4y^3+y=4y^2$;
л) $y^3-25y=3(y-5)y$;
м) $5z^2(z+2)=4z^2-z^4$.

10. Решите уравнение относительно x:

а) $(x+b)(x-2b)=0$;
б) $(x-3a)(x+2a)=0$;
в) $x^2-4a^2=0$;
г) $16c^2-x^2=0$;
д) $100-(x+a)^2=0$;
е) $(x-b)^2-4=0$;
ж) $x^3-a^2x=0$;
з) $y^3=9b^2y$.

11. Найдите такое значение a, что число $x=1$ будет корнем данного уравнения:

а) $(x-a)(x+a)=0$; б) $(2x-a)(x+3a)=0$.

Проверь себя!

1. Упростите $(c-2d)(c+2d)$.

А. c^2-d^2. **Б.** c^2+4d^2. **В.** c^2-4d^2.

2. Выражения $5t^3+15t^2$ и $5t^2(t+3)$:

А. Равны.
Б. Равны только при $t=0$.
В. Никогда не равны.

3. Упростите $a^3 + 27b^3 - (a + 3b)(a^2 - 3b + 9b^2)$.

А. $2a^3$. **Б.** $54b^3$. **В.** 0.

4. Чему равно выражение $\dfrac{a(b-1)+1-b}{b-1}$?

А. $a + 1 - b$. **Б.** $a - 1$. **В.** $a + 1$.

5. Корнем уравнения $(x + 4)(3x - 6) = 0$ является:

А. Только число -4.
Б. Число 2 и число -4.
В. Число -4 и число $\dfrac{1}{2}$.

6. Выражение $x^3 - 4x$:

А. Можно разложить на множители, используя формулу разности кубов.
Б. Можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов.
В. Нельзя разложить на множители.

7. Выражение $(y + x)^3 - (x - y)^3$ может быть представлено в виде многочлена:

А. $2x^3 + 2y^3$. **Б.** $2x^3 + 6xy^2$. **В.** $2y^3 + 6x^2y$.

8. Чему равно выражение $\dfrac{at - a + t - 1}{t^2 - 1}$?

А. $\dfrac{a+1}{t+1}$. **Б.** $\dfrac{at - a + 1}{t+1}$. **В.** 0.

9. Упростите $x^2(x + 9) + 18x(x + 9) + 81(x + 9)$.

А. $(x + 9)(x^2 - 81)$.
Б. $(x + 9)^3$.
В. $(x + 9)(x + 6)^2$.

10. Выражения $3x(x + 5)$ и $x + 5$:

А. Равны при $x = \dfrac{1}{3}$.
Б. Равны всегда.
В. Равны при $x = -5$ и $x = \dfrac{1}{3}$.

В А В Б Б Б В А Б В

Глава 9. Частота и вероятность

О-46. Частота и вероятность случайного события

$$T = \frac{n}{N},$$

где T — частота события, n — число появлений этого события, N — общее число экспериментов.

В качестве приближенного значения вероятности случайного события можно брать частоту этого события при большом числе экспериментов.

1. За четверть домашнее задание по алгебре было задано 16 раз.

а) Света два раза не сделала домашнее задание. Какова частота невыполнения домашнего задания у Светы за четверть?

б) Женя не сделал домашнее задание девять раз. Какова частота выполнения домашнего задания у Жени за четверть?

в) Света не делала домашнее задание с такой же частотой (см. п. «а») и весь год. Сколько раз она не выполнила его (примерно), если за год домашнее задание было задано 64 раза?

2. Стрелок стреляет по мишени. Число попаданий в зависимости от количества выстрелов приведено в таблице:

Количество выстрелов	10	20	30	40	50	60	70
Число попаданий	8	17	25	33	41	49	57

а) Определите частоту попадания в зависимости от количества выстрелов.

б) Представьте эту зависимость графически.

в) Болельщики стрелка заключили пари с его соперниками, что, сделав еще 30 выстрелов, стрелок поразит цель не менее 20 раз. Как вы считаете, стоило ли соглашаться соперникам стрелка на пари? Могут ли болельщики стрелка проиграть пари?

3. Классный руководитель подсчитал, что у семиклассника Сидорова частота опозданий за год была примерно равна 0,029.

а) Сколько раз Сидоров пришел вовремя за год (было 175 учебных дней)?
б) Можно ли с уверенностью утверждать, что в течение любых двух учебных месяцев (примерно 40 учебных дней) Сидоров хотя бы раз, да опоздал?

4. По статистике на 1000 человек в 1995 г. приходилось 88 человек, получивших травмы или отравления. Случайным образом выбрали одного человека. Какова вероятность, что у него не было ни травм, ни отравлений?

5. У Люды стоят следующие оценки по алгебре: 2, 3, 2, 4, 2, 3. Какое из следующих утверждений представляется справедливым?

а) Частота получения двойки Людой за этот период равна 2,67.
б) Частота получения двойки Людой за этот период равна 0,5.
в) Вероятность того, что следующая оценка, полученная Людой, будет двойка, равна 1.
г) Вероятность того, что следующая оценка, полученная Людой, будет двойка, равна 0,5.

6. Таблица содержит данные о числе N дождливых дней летом в одном городе по годам:

Год	1997	1998	1999	2000	2001	2002
N	60	61	59	62	63	61

Год	2003	2004	2005	2006	2007
N	60	60	61	61	60

а) Определите частоту дождливых дней летом каждого года.
б) Представьте графически зависимость частоты летних дождливых дней от года.
в) Оцените вероятность того, что случайно выбранный летний день окажется в этом городе дождливым.

7. Вероятность того, что в книге есть хотя бы одна опечатка, равна 0,99. За год было издано 3,5 тысячи различных книг. Сколько примерно книг не содержат опечаток?

8. Эксперимент состоит в одновременном подбрасывании двух монет и записи каждый раз результатов. Ниже приведена таблица зависимости числа исходов от числа проведенных экспериментов.

Число экспериментов	Число появлений пары «герб, герб»	Число появлений пары «герб, решка»	Число появлений пары «решка, решка»
10	2	5	3
20	5	10	5
30	8	14	8
40	11	19	10
50	13	25	12

а) Определите частоты появления каждой пары в зависимости от числа экспериментов.
б) Постройте круговые диаграммы частот для каждого числа экспериментов, ставя в соответствие каждому исходу сектор круга, угол которого составляет от полного угла долю, равную частоте.
в) Справедливо ли утверждение, что вероятности выпадания каждой пары равны?
г) Объясните заметное несовпадение частот выпадания пар.

9. Из игральной колоды взяли карты двух мастей от «двойки» до «десятки». Случайным образом выбирают две карты и складывают полученные очки.

а) Укажите, какие исходы могут быть у такого эксперимента. Сколько всего возможно исходов?
б) Один семиклассник утверждает, что, повторив этот эксперимент 80 раз, он обнаружил, что частоты всех исходов равны. Может ли быть, что он говорит правду?
в) Проведите сами 80 таких экспериментов. Составьте таблицу частот и оцените вероятность того, что в результате одного эксперимента будет набрано: больше 12 очков; меньше 12 очков.

10. Атос рассказывал, что лишь три раза в жизни видел выпадание «двойки» при игре в кости (игра состоит в том, что бросают два игральных кубика и складывают полученные очки). Атос играл в кости тысячи раз. Как вам кажется, естественно или удивительно рассказываемое Атосом?

О-47. Вероятностная шкала

1. На вероятностной шкале точками изображены следующие события (рис. 30):

Рис. 30

а) выпадание «шестерки» при однократном бросании кубика — точка A;
б) выпадание «двойки» при однократном бросании кубика — точка B;
в) выпадание снега в Москве 1 июля в какой-то год — точка C;
г) обнаружение в вашей школе хотя бы одного человека моложе 70 лет — точка D;
д) наличие в вашем классе человека, знающего наизусть 299-ю страницу учебника по алгебре — точка E.
Проверьте, правильно ли изображены эти события.

2. Наудачу выбирают два последовательных натуральных числа меньше 20. Найдите вероятность следующих событий и отметьте их на вероятностной шкале:

а) сумма выбранных чисел больше 40;
б) разность выбранных чисел — целое число;
в) сумма выбранных чисел делится на 2;
г) произведение двух выбранных чисел делится на 2.

3. Д'Артаньян выиграл у лорда Винтера в кости, хотя у него самого выпало лишь три очка. Как следует охарактеризовать его выигрыш: как маловероятный; как невозможный; как очень вероятный?

4. Определите вероятность того, что случайно выбранный корень уравнения $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$:

а) окажется целым числом;
б) окажется числом, большим десяти.

5. Один ученик седьмого класса считает, что следующие события являются достоверными:

а) случайно выбранный корень произвольного уравнения является натуральным числом;
б) случайно выбранный график зависимости вида $y = a$, где a — целое число и $|a| < 5$, является прямой;
в) площадь случайно выбранной страницы этой книги меньше 300 см^2.
Проверьте, всегда ли прав ученик.

6. Из кошелька в темноте вынимали монету. Известно: то, что будет вытащена рублевая монета, являлось достоверным событием. Однако этот же исход при повторной попытке оказался невозможным. Сколько и каких монет было в кошельке?

7. Определите вероятность каждого из следующих событий:

а) произвольно выбранный корень уравнения $x^2 - x = 0$ является корнем уравнения $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;
б) случайным образом выбирают три подряд идущих натуральных числа, меньших 50; среди выбранных чисел нет числа, делящегося на три;
в) в кошельке лежат монеты достоинством в 5, 10 и 25 центов, наудачу выбирают четыре монеты, среди выбранных оказываются одинаковые монеты.

8. В карточной колоде 36 карт четырех мастей. Какое наименьшее число карт надо взять, чтобы вероятность того, что среди выбранных есть хотя бы одна карта каждой масти, была равна 1?

9. В ящике лежит пять шариков. Случайным образом определяют, сколько из них вынуть. Рассматриваются следующие события: A — вынуто два шарика; B — вынуто больше шариков, чем оставлено; C — оставлено три шарика; D — и вынуто, и оставлено четное число шариков; E — оставлено меньше шариков, чем вынуто. Определите, какие события равновероятны.

Проверь себя!

1. Следующая таблица показывает, сколько бракованных деталей было обнаружено в отделе контроля завода в зависимости от числа проверенных деталей:

Проверено деталей	1000	2000	3000	4000	5000
Среди них бракованных	15	31	44	60	74

Частота появления бракованной детали:
А. Существенно зависит от того, сколько деталей проверено.
Б. Не может быть вычислена ни для одного из рассматриваемых чисел проверяемых деталей.
В. Всегда примерно одинаковая.

2. Целесообразно ожидать, что среди 10 000 изготовленных на том же заводе деталей качественных будет примерно:

А. 150. **Б.** 9850. **В.** 5000.

3. На рисунке 31 изображен график зависимости частоты появления некоторого результата в зависимости от числа N экспериментов. Этому графику соответствует таблица:

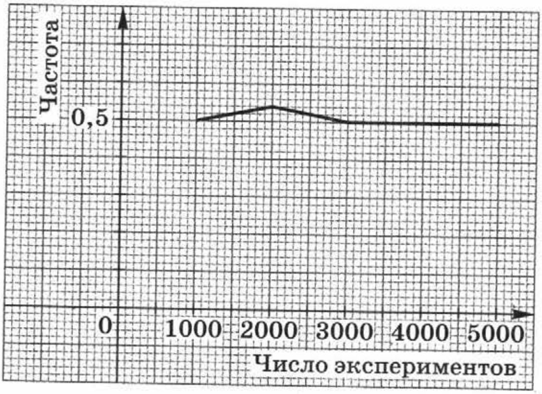


Рис. 31

А.

N	1000	2000	3000	4000	5000
Частота	900	1800	2702	3598	4601

Б.

N	1000	2000	3000	4000	5000
Частота	500	1007	1509	2002	2511

В.

N	1000	2000	3000	4000	5000
Частота	900	1100	2000	2598	3041

4. В газете напечатаны три предложения:

А. Победа В. Белоусова на следующих выборах представляется маловероятной.

Б. Болельщики убеждены, что «Спартак» будет чемпионом с вероятностью 200%.

В. Вероятность рождения ребенка с серьезными заболеваниями возросла до 45%.

Какое из них вам представляется математически бессмысленным?

5. Рассматриваются два события: X — случайно выбранная деталь (см. задачу 1) оказывается бракованной, Y — она оказывается доброкачественной. Справедливо считать, что:

А. Вероятности событий X и Y равны.
Б. X вероятнее Y.
В. Y вероятнее X.

6. Вероятность того, что исследуемый в задаче 3 результат будет достигнут при одном эксперименте, примерно равна:

А. 0,5. **Б.** 0,25. **В.** 0,93.

7. На вероятностной шкале (рис. 32) точкой изображено событие. Оно является:

Рис. 32

А. Невозможным.
Б. Достоверным.
В. Маловероятным.

8. За четверть Женя получил шесть оценок по алгебре. То, что среди них есть одинаковые, является:

А. Достоверным событием.
Б. Невозможным событием.
В. Маловероятным событием.

9. Следующее событие является невозможным:

А. Случайно выбранное натуральное число, меньшее 10, оказалось корнем уравнения $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$.
Б. Случайно выбранные натуральные числа x и y, меньшие 10, оказались такими, что число xy — простое.
В. Случайно выбранное натуральное число, меньшее 10, оказалось таким, что $2^n = 258$.

10. На вероятностной шкале (рис. 33) изображены два события A и B. Справедливо утверждение:

Рис. 33

А. Эти события равновероятны.
Б. То, что не произойдет событие B, равновероятно событию A.
В. То, что не произойдет событие A, равновероятно тому, что не произойдет событие B.

В Б Б Б В А В А В Б

Раздел II. ПРОВЕРОЧНЫЕ РАБОТЫ

Глава 1. Дроби и проценты

П-1. Действия с обыкновенными дробями (повторение)

Вариант 1

1. Найдите значение выражения и сравните с данным числом:

а) $1\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}\cdot 2$ и $4\frac{1}{3}$;
в) $3\frac{2}{17}+\frac{1}{3}+\frac{5}{17}+4\frac{2}{3}$ и $8\frac{7}{15}$;
б) $2\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}-1\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{4}$;
г) $4:7+3:14$ и $\frac{5}{6}$.

2. Решите уравнение:

а) $x\cdot\left(1\frac{5}{29}+5\frac{17}{93}\right)=0$;
б) $x\cdot\left(2{,}5-2\frac{1}{2}\right)=0$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения и сравните с данным числом:

а) $1\frac{3}{4}\cdot 2\frac{2}{3}-1\frac{2}{3}$ и $2\frac{34}{99}$;
в) $5\frac{2}{13}+\frac{7}{9}+\frac{11}{13}+5\frac{2}{9}$ и $11\frac{3}{11}$;
б) $1\frac{5}{6}+1\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}$ и $2\frac{1}{4}$;
г) $4:9+5:18$ и $\frac{5}{6}$.

2. Решите уравнение:

а) $x:\left(4\frac{5}{47}-1\frac{2}{43}\right)=0$;
б) $x\cdot\left(3\frac{1}{4}-3{,}25\right)=0$.

П-2. Действия с десятичными дробями (повторение)

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $0{,}6\cdot 7{,}1-3{,}1$;
в) $0{,}1236:0{,}12$;
б) $3{,}6+2{,}4:6$;
г) $4{,}5\cdot 3{,}76+5{,}5\cdot 3{,}76$.

2. Расположите выражения в порядке возрастания их значений: $3{,}8 \cdot 0{,}9$; $3{,}8$; $3{,}8 \cdot 1{,}1$.

3. Решите уравнение:

а) $3{,}5 \cdot x = 0{,}7$; б) $3{,}5 : x = 0{,}7$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $5{,}4 + 4{,}6 \cdot 2$; в) $1{,}836 : 1{,}8$;
б) $2{,}8 : 1{,}4 - 0{,}4$; г) $5{,}8 \cdot 2{,}79 + 4{,}2 \cdot 2{,}79$.

2. Расположите выражения в порядке убывания их значений: $5{,}8$; $5{,}8 \cdot 1{,}2$; $5{,}8 \cdot 0{,}95$.

3. Решите уравнение:

а) $2{,}5 \cdot x = 0{,}5$; б) $2{,}5 : x = 0{,}5$.

П-3. Действия с рациональными числами (повторение)

Вариант 1

1. Найдите значение выражения и ответы запишите в порядке возрастания:

а) $-15{,}6 - 5{,}6$; в) $0{,}25 \cdot (-0{,}4)$;

б) $-24 + 36$; г) $-10 : \left(-\frac{1}{7}\right)$.

2. Решите уравнение:

а) $x + (-2{,}6) = 0$; б) $x : (-3{,}4) = 0$; в) $x - (-0{,}4) = -\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения и ответы запишите в порядке убывания:

а) $-46 + 24$; в) $0{,}125 \cdot (-0{,}8)$;

б) $-13{,}7 - 3{,}7$; г) $-4 : \left(-\frac{1}{7}\right)$.

2. Решите уравнение:

а) $-3{,}2 + x = 0$; б) $-3{,}2 \cdot x = 0$; в) $x - (-0{,}6) = -\frac{1}{2}$.

П-4. Обыкновенные и десятичные дроби

Вариант 1

1. Представьте обыкновенные дроби в виде десятичных, а десятичные в виде обыкновенных:

$$0{,}8;\quad \frac{3}{25};\quad -0{,}079;\quad -\frac{17}{20}.$$

2. Найдите значение выражения:

а) $2\frac{1}{2}+0{,}3$; б) $-2{,}8\cdot\frac{2}{7}$; в) $5\frac{2}{3}-2{,}2$; г) $-0{,}7\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$.

3. Сравните дроби $\frac{3}{17}$ и $0{,}19$.

4. Решите уравнение:

а) $3\frac{1}{3}:x=-1$; б) $-2{,}5\cdot x=2\frac{1}{2}$.

Вариант 2

1. Представьте обыкновенные дроби в виде десятичных, а десятичные в виде обыкновенных:

$$0{,}6;\quad \frac{7}{20};\quad -0{,}037;\quad -\frac{13}{15}.$$

2. Найдите значение выражения:

а) $3\frac{1}{2}+0{,}4$; б) $-3{,}5\cdot\frac{3}{7}$; в) $4\frac{1}{3}-2{,}25$; г) $-0{,}9\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$.

3. Сравните дроби $\frac{4}{17}$ и $0{,}24$.

4. Решите уравнение:

а) $x:(-2{,}7)=-1$; б) $3\frac{1}{7}\cdot x=-3\frac{1}{7}$.

П-5. Решение задач на движение

Вариант 1

1. Время отправления поезда с одной станции 11 ч 45 мин, а время прибытия на другую 12 ч 10 мин. Каково расстояние между станциями, если скорость поезда 64,8 км/ч?

2. За 40 мин поезд прошел 66 км. С какой скоростью он шел? Ответ дайте в километрах в час.

Вариант 2

1. Междугородный автобус отправляется в путь в 10 ч 45 мин и в 11 ч 35 мин делает остановку. Какое расстояние прошел автобус до остановки, если его скорость 63,6 км/ч?

2. За 50 мин автобус прошел 55 км. С какой скоростью он шел? Ответ дайте в километрах в час.

П-6. Степень с натуральным показателем

Вариант 1

1. Запишите короче, используя степени:

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; в) $aaaxxxx$;
б) $x \cdot x \cdot x \cdot x$; г) $\underbrace{17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 17}_{100 \text{ раз}}$.

2. Вычислите:

а) 3^3; б) $0{,}2^2$; в) $(-9)^2$; г) 1^{19}; д) -2^4.

3. Сравните, не вычисляя:

а) $(5{,}7)^2$ и $(-5{,}7)^2$; б) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ и $\left(\frac{2}{7}\right)^2$.

Вариант 2

1. Запишите короче, используя степени:

а) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$; в) $aabbbb$;
б) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$; г) $\underbrace{18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 18 \cdot 18}_{36 \text{ раз}}$.

2. Вычислите:

а) 2^4; б) $0{,}3^2$; в) $(-4)^3$; г) 0^{20}; д) -3^2.

3. Сравните, не вычисляя:

а) $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{8}\right)^3$; б) $(-3{,}4)^2$ и $(3{,}4)^2$.

П-7. Степень с натуральным показателем

Вариант 1

1. Запишите число в виде степени другого положительного числа:

а) 16; б) $\frac{8}{27}$; в) 1; г) 0,25; д) 169.

2. Запишите число в виде степени отрицательного числа:

а) 9; б) −27; в) $\frac{4}{25}$; г) 0,008; д) 121.

Вариант 2

1. Запишите число в виде степени другого положительного числа:

а) 81; б) $\frac{27}{8}$; в) 1; г) 0,36; д) 121.

2. Запишите число в виде степени отрицательного числа:

а) 16; б) −8; в) $\frac{9}{49}$; г) −0,027; д) 169.

П-8. Вычисление значений выражений, содержащих степени с натуральным показателем

Вариант 1

1. Найдите значение выражения:

а) $0{,}7^2 + 0{,}3^2$; в) $2^3 \cdot 5^2$;

б) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2$; г) $(-4)^2 \cdot (2{,}5)^2$.

2. Сравните значения выражений, вычислив их:

а) $3^2 + 4^2$ и 5^2; в) -2^4 и $(-2)^4$;

б) $10^2 - 6^2$ и $(10 - 6)^2$; г) $(2 \cdot 3)^2$ и $2^2 \cdot 3^2$.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения:

а) $0{,}6^2 + 0{,}4^2$; в) $2^2 \cdot 5^3$;

б) $\left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2$; г) $(-25)^2 \cdot (0{,}4)^2$.

2. Сравните значения выражений, вычислив их:

а) $2^3 \cdot 3^3$ и $(2 \cdot 3)^3$;
б) $10^2 - 8^2$ и $(10 - 8)^2$;
в) -4^2 и $(-4)^2$;
г) $12^2 + 5^2$ и 13^2.

П-9. Нахождение дроби от числа и числа по дроби (повторение)

Вариант 1

1. У мастера был кусок проволоки длиной 40 м. Он отрезал 0,4 этого куска. Какую длину имеет отрезанный кусок?

2. $\frac{2}{15}$ всего сада занято клубникой, а это 80 м^2. Какова площадь всего сада?

3. В классе 30 учащихся, из них 18 девочек. Какую часть составляет количество девочек от количества всех учащихся класса?

Вариант 2

1. Сад имеет площадь 600 м^2. $\frac{2}{15}$ сада занято клубникой. Сколько квадратных метров занято клубникой?

2. В классе 18 девочек. Они составляют 0,6 всего класса. Сколько учащихся в классе?

3. От куска проволоки длиной 40 м отрезали кусок длиной 16 м. Какую часть составляет отрезанный кусок от первоначального?

П-10. Дроби и проценты

Вариант 1

1. Выразите дробью:

$$8\%;\quad 80\%;\quad 0{,}8\%;\quad 180\%.$$

2. Выразите в процентах:

$$0{,}23;\quad 0{,}4;\quad \frac{4}{25};\quad 1\frac{1}{2}.$$

3. Сравните:

а) $\frac{2}{5}$ и 42%;   б) $\frac{1}{3}$ и 33%.

Вариант 2

1. Выразите дробью:

60%; 6%; 0,6%; 160%.

2. Выразите в процентах:

$0{,}37;\ 0{,}7;\ \frac{11}{25};\ 1\frac{1}{4}$.

3. Сравните:

а) $\frac{3}{5}$ и 62%;   б) $\frac{2}{3}$ и 66%.

П-11. Задачи на проценты

Вариант 1

1. У Коли было 30 р. На мороженое он истратил 30% своих денег. Сколько стоит мороженое?
2. В саду растут плодовые деревья. 150 из них — яблони. Сколько в саду деревьев, если яблони составляют лишь 60% всех деревьев?
3. Токарю нужно было сделать 120 деталей, но он перевыполнил план на 10%. Сколько деталей сделал токарь?

Вариант 2

1. Сколько денег было у мальчика, если, купив мороженое за 9 р., он истратил 60% первоначальной суммы?
2. В саду 300 плодовых деревьев, причем 60% всех деревьев составляют яблони. Сколько яблонь в саду?
3. Ежемесячный заработок отца 7500 р., а мать получает на 30% меньше. Сколько зарабатывает мать?

П-12. Статистические характеристики

Вариант 1

1. Определите моду, среднее арифметическое и размах ряда:

5, 6, 11, 11, –1.

2. В таблице показано, сколько экспортировалось нефти в зарубежные страны (не члены СНГ) в 1993—1995 гг.

Год	1993	1994	1995
Объем экспорта, млн т	79,9	95,4	96,2

Определите, сколько миллионов тонн нефти в среднем экспортировалось ежегодно в этот период.

Вариант 2

1. Определите моду, среднее арифметическое и размах ряда:

$$15, \quad 4, \quad 12, \quad -3, \quad 15.$$

2. В таблице показано, сколько экспортировалось меди в зарубежные страны (не члены СНГ) в 1993—1995 гг.

Год	1993	1994	1995
Объем экспорта, тыс. т	165	451	449

Определите, сколько тысяч тонн меди в среднем экспортировалось ежегодно в этот период.

Глава 2. Отношения и пропорции

П-13. Отношения

Вариант 1

Имеется два куска веревки: один длиной 1,8 м, а другой длиной 45 см.

а) Во сколько раз первый кусок длиннее второго?
б) Какую часть второй кусок составляет от первого?
в) На сколько один кусок веревки длиннее другого?

Вариант 2

Имеется два куска веревки: один длиной 60 см, а другой длиной 2,4 м.

а) Какую часть первый кусок составляет от второго?
б) Во сколько раз второй кусок длиннее первого?
в) На сколько один кусок веревки короче другого?

П-14. Вычисление отношений

Вариант 1

1. Найдите отношение чисел и запишите, что оно показывает:

   а) 2,8 к 0,7; б) 8 к 12.

2. Придумайте два числа, такие, чтобы их отношение равнялось:

   а) 2,5; б) $\frac{3}{8}$.

3. Даны три числа: 3, 9, 27. Составьте из них два равных отношения.

Вариант 2

1. Найдите отношение чисел и запишите, что оно показывает:

   а) 2,4 к 0,6; б) 12 к 16.

2. Придумайте два числа, такие, чтобы их отношение равнялось:

   а) $\frac{4}{7}$; б) 3,5.

3. Даны три числа: 2, 8, 32. Составьте из них два равных отношения.

П-15. Задачи на нахождение отношений

Вариант 1

В классе 15 девочек и 10 мальчиков.
а) Сколько процентов от численности класса составляют девочки?
б) Во сколько раз девочек больше, чем мальчиков?
в) Чему равно отношение числа мальчиков к числу девочек? Что оно показывает?
г) Правда ли, что мальчиков в классе в полтора раза больше, чем девочек?

Вариант 2

В классе 12 девочек и 18 мальчиков.
а) Сколько процентов от численности класса составляют мальчики?

б) Во сколько раз мальчиков больше, чем девочек?
в) Чему равно отношение числа девочек к числу мальчиков? Что оно показывает?
г) Правда ли, что девочек в классе в полтора раза меньше, чем мальчиков?

П-16. Задачи на нахождение отношений

Вариант 1

Человек, получающий зарплату 8000 р., истратил за месяц на питание 5000 р., а получающий зарплату 6000 р. истратил 4000 р. Кто из них затратил большую часть зарплаты на питание?

Вариант 2

Человек, получающий зарплату 8000 р. истратил за месяц на книги 600 р., а получающий зарплату 6000 р. истратил на книги 500 р. Кто из них затратил большую часть зарплаты на книги?

П-17. Задачи на нахождение отношений

Вариант 1

Токарь должен был обработать за смену 60 деталей, но, применив новый резец, он сумел обработать 66 деталей. На сколько процентов он перевыполнил свой план?

Вариант 2

Тракторист должен был вспахать за день 4 га земли. Но к концу дня оказалось, что он вспахал 4,8 га земли. На сколько процентов он перевыполнил свой план?

П-18. Решение задач на деление в данном отношении

Вариант 1

1. Отрезок длиной 8 см разделен на две части в отношении 2 : 3. Какова длина каждой части? Какую часть составляет меньшая часть от длины всего отрезка?

2. Отношение числа мальчиков в классе к числу девочек равно 8 : 5. Сколько в классе учеников, если в классе 10 девочек?

Вариант 2

1. Отрезок длиной 9 см разделен на две части в отношении 3 : 7. Какова длина каждой части? Какую часть составляет большая часть от длины всего отрезка?

2. Отношение числа мальчиков в классе к числу девочек равно 4 : 9. Сколько в классе учеников, если в классе 8 мальчиков?

П-19. Зависимости и формулы

Вариант 1

1. Какую сумму денег (р.) надо заплатить в кассу, если покупать 2,5 кг печенья по p р. за килограмм? Вычислите при $p = 30$; $p = 42$.

2. За какое время t (ч) поезд пройдет расстояние 630 км, если он идет со скоростью v км/ч? Вычислите при $v = 60$; $v = 84$.

Вариант 2

1. Какую сумму денег (р.) надо заплатить в кассу, если покупать p кг печенья по 45 р. за килограмм? Вычислите при $p = 2$; $p = 0,8$.

2. С какой скоростью v (км/ч) должен идти поезд, чтобы расстояние 640 км преодолеть за t ч? Вычислите при $t = 8$; $t = 10$.

П-20. Решение задач на прямую пропорциональность

Вариант 1

1. Велосипедист едет по шоссе с одной и той же скоростью. Оказалось, что за 24 мин он проехал 4,5 км.

   а) За сколько минут он проедет вдвое большее расстояние?

   б) Сколько километров он проедет за время, втрое меньшее указанного?

2. Для школы нужно купить лампочки. Упаковка, содержащая 40 лампочек, стоит 640 р.

а) Сколько лампочек можно купить на сумму, в 4 раза меньшую указанной?

б) Сколько денег должна заплатить школа, если лампочек требуется в 2,5 раза больше, чем в упаковке?

Вариант 2

1. Автобус едет по дороге с одной и той же скоростью. Оказалось, что 36 км он проехал за 45 мин.

а) Сколько километров он проедет за время, вдвое большее указанного?

б) За сколько минут он проедет втрое меньшее расстояние?

2. Для детского сада нужно купить шоколадки. Упаковка, в которой 40 шоколадок, стоит 800 р.

а) Сколько шоколадок можно купить на сумму, в 2 раза меньшую?

б) Сколько денег придется заплатить, если шоколадок требуется в 3,5 раза больше, чем в одной упаковке?

П-21. Решение задач на обратную пропорциональность

Вариант 1

1. Одно и то же расстояние велосипедист проехал за 6 ч, а мотоциклист — за 2 ч. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

2. Площади двух прямоугольников одинаковы, но длина одного из них в 1,5 раза больше длины другого. Сравните ширину первого прямоугольника с шириной второго.

Вариант 2

1. По дороге от поселка до станции велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, а пешеход шел со скоростью 4 км/ч. Во сколько раз меньше времени затратил на дорогу велосипедист, чем пешеход?

2. Площади двух прямоугольников одинаковы, но ширина одного из них в 2,5 раза больше ширины другого. Сравните длины первого и второго прямоугольников.

П-22. Решение задач на прямую и обратную пропорциональность

Вариант 1

Решите задачи, составив нужные пропорции:

1. За 2,5 ч рабочие отремонтировали 300 м шоссе. За какое время они отремонтируют оставшиеся 240 м шоссе, если их производительность не изменится?

2. Два участка шоссе одинаковой длины взялись ремонтировать 2 бригады. Производительность первой бригады — 120 м/ч, а второй — 180 м/ч. Первая бригада отремонтировала свой участок за 6 ч. За сколько часов отремонтировала свой участок вторая бригада?

Вариант 2

Решите задачи, составив нужные пропорции:

1. За 3,5 ч рабочие отремонтировали 420 м шоссе. Какой длины участок они отремонтируют за оставшиеся 3 ч, если их производительность не изменится?

2. Два участка шоссе одинаковой длины взялись ремонтировать 2 бригады. Производительность первой бригады — 160 м/ч, и она отремонтировала свой участок за 6 ч. За сколько часов отремонтировала свой участок вторая бригада, если ее производительность 120 м/ч?

П-23. Решение задач на прямую и обратную пропорциональность

Вариант 1

Решите задачи, составив нужные пропорции:

1. Расстояние от поселка до станции пешеход прошел за 2,5 ч, а велосипедист проехал за 50 мин. Какова скорость пешехода, если скорость велосипедиста 10,8 км/ч?

2. На одну и ту же сумму денег можно купить 300 г карамели по цене 48 р. за килограмм или 200 г шоколадных конфет. Сколько стоит 1 кг шоколадных конфет?

Вариант 2

Решите задачи, составив нужную пропорцию:

1. Расстояние от поселка до станции велосипедист проехал за 40 мин, а пешеход прошел за 2,5 ч. Какова скорость велосипедиста, если скорость пешехода 3,6 км/ч?

2. На одну и ту же сумму денег можно купить 400 г карамели или 300 г шоколадных конфет по цене 72 р. за килограмм. Сколько стоит 1 кг карамели?

П-24. Пропорции

Вариант 1

1. Проверьте равенство отношений и составьте из них пропорции:

а) $6 : 3,\ 9 : 4{,}5$;

б) $0{,}4 : 8,\ 5 : 100$;

в) $\frac{2}{3} : \frac{4}{9},\ \frac{5}{7} : \frac{10}{21}$;

г) $9 : 6,\ 6 : 4$.

2. Составьте какую-нибудь пропорцию, используя данные числа:

а) 12; 18; 3; 2; б) 5; 6; 4,2; 3,5; в) 8; 16; 32.

Вариант 2

1. Проверьте равенство отношений и составьте из них пропорции:

а) $8 : 4,\quad 11 : 5{,}5$;

б) $0{,}6 : 5,\quad 12 : 100$;

в) $\frac{2}{5} : \frac{4}{15},\quad \frac{5}{7} : \frac{10}{21}$;

г) $25 : 10,\quad 10 : 4$.

2. Составьте какую-нибудь пропорцию, используя данные числа:

а) 12; 20; 3; 5; б) 6; 8; 5,6; 4,2; в) 9; 18; 36.

П-25. Решение уравнений

Вариант 1

Найдите неизвестный член пропорции:

а) $15 : 10 = x : 40$;

б) $3{,}6 : 4{,}2 = 6 : x$;

в) $3 : x = \frac{3}{8} : \frac{1}{4}$;

г) $x : 1\frac{1}{3} = 6 : 4$;

д) $x : 3{,}86 = 2{,}5 : 2\frac{1}{2}$.

Вариант 2

Найдите неизвестный член пропорции:

а) $20 : x = 4 : 6$;

б) $x : 4{,}5 = 0{,}4 : 0{,}5$;

в) $\frac{5}{8} : \frac{1}{6} = x : 4$;

г) $1\frac{1}{3} : 4 = 4 : x$;

д) $5{,}84 : x = 3\frac{1}{4} : 3{,}25$.

П-26. Решение задач с применением пропорций

Вариант 1

Решите задачи, составив пропорции с неизвестным членом:

1. В одной коробке 12 карандашей. Число карандашей в этой коробке относится к числу карандашей во второй коробке как 2 : 3. Сколько карандашей во второй коробке?

2. На карте отрезок длиной 2 см изображает дорогу длиной 10 км. Каким отрезком изобразится дорога длиной 15 км?

Вариант 2

Решите задачи, составив пропорции с неизвестным членом:

1. В первой коробке 24 карандаша. Число карандашей во второй коробке относится к числу карандашей в первой коробке как 4 : 3. Сколько карандашей во второй коробке?

2. На карте отрезок длиной 4 см изображает дорогу длиной 10 км. Каким отрезком изобразится дорога длиной 25 км?

Глава 3. Введение в алгебру

П-27. Буквенные выражения и числовые подстановки

Вариант 1

Найдите значения выражения при $a = -3$, $b = -2$:

а) $5a - b$; в) $\dfrac{a+b}{2a}$; д) $\dfrac{a^2}{b}$;

б) $5(a - b)$; г) $|a| - 2 \cdot |b|$; е) $-4a^2$.

Вариант 2

Найдите значения выражения при $x = 4$, $y = -2$:

а) $-2x - y$; в) $\dfrac{x+y}{2y}$; д) $\dfrac{y^2}{x}$;

б) $-2(x - y)$; г) $|x| - 2 \cdot |y|$; е) $-3x^2$.

П-28. Буквенные выражения и числовые подстановки

Вариант 1

1. Сравните значения выражений при $x = 1{,}5$ и выпишите их в порядке возрастания:

   а) $-2x + 1$; б) $x^2 - 4$; в) $x \cdot (x - 2{,}5)$; г) $\dfrac{-6}{x}$.

2. Придумайте значения переменных a и b, при которых значение выражения $2a - 3b$ равно 0.

3. Придумайте значения переменных, при которых значение выражения $\dfrac{16}{a+b}$ не существует.

Вариант 2

1. Сравните значения выражений при $a = 2{,}5$ и выпишите их в порядке возрастания:

   а) $-2a + 3$; б) $a^2 - 8$; в) $a \cdot (a - 3{,}5)$; г) $\dfrac{-10}{a}$.

2. Придумайте значения переменных a и b, при которых значение выражения $3b - 4a$ равно 0.

3. Придумайте значения переменных, при которых значение выражения $\frac{-12}{m+n}$ не существует.

П-29. Составление выражений по условию задачи

Вариант 1

Составьте выражение по условию задачи:

1. Для класса купили x тетрадей по 12 р. за тетрадь и y тетрадей по 13 р. за тетрадь. Сколько рублей заплатили за покупку?

2. От куска материи длиной c м 3 раза отрезали по a м. Сколько метров материи осталось в куске? Вычислите при $a = 3$, $c = 16$.

Вариант 2

Составьте выражение по условию задачи:

1. Для класса купили a угольников по 9 р. за угольник и c транспортиров по 4,5 р. за транспортир. Сколько рублей заплатили за покупку? Вычислите при $a = 15$, $c = 20$.

2. От веревки длиной m м 4 раза отрезали по n м. Сколько метров осталось в куске веревки?

П-30. Преобразование буквенных выражений

Вариант 1

1. Замените выражение равным ему выражением, не содержащим скобок:

а) $-(7a)$; в) $x + (-y) - (-8)$; д) $-3 \cdot (-2b)$;
б) $-(-12b)$; г) $-2x - (-5) - (-2x)$; е) $2x \cdot (-3x)$.

2. Вычислите:

а) $-(-3,6) + 5,1 - 8,7$; б) $-4 \cdot (17,3 \cdot (-2,5))$.

Вариант 2

1. Замените каждое из выражений равным ему, не содержащим скобок:

а) $-(-4m)$; в) $a - (-y) + (-9)$; д) $-2 \cdot (-5x)$;
б) $-(8p)$; г) $-3m - (-x) - (-3m)$; е) $3x \cdot (-7x)$.

2. Вычислите:

а) $-(-3{,}8) - 9{,}4 + 5{,}6$; б) $-8 \cdot (18{,}3 \cdot (-1{,}25))$.

П-31. Раскрытие скобок

Вариант 1

1. Раскройте скобки:

а) $a + (-3b + 2c)$; в) $-(m - 2n) + (-3a + b)$;
б) $-x - (-3p - 2y)$; г) $(x - 5) - (7 - x) + (9 - x)$.

2. Вычислите:

а) $-4{,}5 + (-5{,}6 + 4{,}5)$; б) $-4{,}5 - (-5{,}6 - 4{,}5)$.

Вариант 2

1. Раскройте скобки:

а) $b + (-7m + 2n)$; в) $-(a - 4b) + (-8x + 3y)$;
б) $-3p - (-5x + 2y)$; г) $(a - 9) - (13 - a) + (11 - a)$.

2. Вычислите:

а) $-3{,}8 + (-10{,}2 + 3{,}8)$; б) $-3{,}8 - (-10{,}2 - 3{,}8)$.

П-32. Раскрытие скобок

Вариант 1

1. Раскройте скобки:

а) $-a \cdot (b - 5)$; г) $-2 \cdot (-1{,}5c - 6) + (7 - 3c)$;
б) $3 \cdot (a - 2b + 3c)$; д) $2 \cdot (4 - a) + 8 \cdot (b - 1)$.
в) $0{,}5 \cdot (2a - 4b) - (a - 5)$;

2. Вычислите $11\frac{1}{63} \cdot 9 - 12\frac{1}{35} \cdot 5$.

Вариант 2

1. Раскройте скобки:

а) $-2 \cdot (x - 4)$; г) $3 \cdot (-4x + 6) - (1 - 12x)$;
б) $a \cdot (-3b + 2c - 7)$; д) $2 \cdot (7 - y) + 7 \cdot (x - 2)$.
в) $-1{,}5 \cdot (2x - 4y)$;

2. Вычислите $11\frac{1}{63} \cdot 7 - 13\frac{1}{45} \cdot 5$.

П-33. Приведение подобных слагаемых

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $-2x + 3x - 5x$;
б) $(2a - 5) - (7 - 2a + 4)$;
в) $-4 \cdot (1{,}5c - 1) + 3\,(c - 5)$;
г) $2a - 3b - 5a + 7b$;
д) $4 \cdot (3x - y) - 5 \cdot (x + y)$.

2. Вычислите:

а) $-2 \cdot 1{,}32 + 12 \cdot 1{,}32$;
б) $3{,}56 \cdot 3\frac{1}{9} - 1{,}56 \cdot 3\frac{1}{9}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $-3a + 7a - 10a$;
б) $(3x - 5) - (-2x + 7)$;
в) $-2 \cdot (2{,}5m - 1) + 3 \cdot (m - 4)$;
г) $7a - 5b - 5a + 8b$;
д) $2 \cdot (3m - n) - 9 \cdot (m - 2n)$.

2. Вычислите:

а) $-3 \cdot 1{,}46 + 13 \cdot 1{,}46$;
б) $4{,}57 \cdot 4\frac{1}{7} - 2{,}57 \cdot 4\frac{1}{7}$.

П-34. Решение уравнений

Вариант 1

Решите уравнение:

а) $-2x + 7x = -10$;
б) $-3y + (4y - 2) = 0$;
в) $-(x + 6) + 3 \cdot (x + 2) = 0$;
г) $2 \cdot (y - 9) - 5 \cdot (y - 3{,}6) = 27$.

Вариант 2

Решите уравнение:

а) $-3x + 9x = -12$;
б) $-5y + (6y - 4) = 0$;
в) $-2 \cdot (x - 4) + 4 \cdot (x - 2) = 0$;
г) $3 \cdot (y - 6) - 12 \cdot (y - 1{,}5) = 18$.

П-35. Составление выражения по условию задачи

Вариант 1

Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

1. От суммы чисел a и 13 отнимите утроенное число a.

2. У Пети было 10 монет, из них a монет достоинством 2 р., а остальные — достоинством 5 р. Какая сумма денег была у Пети? (Вычислите при $a = 4$.)

Вариант 2

Составьте выражение по условию задачи и упростите его:

1. К разности чисел a и 3 прибавьте удвоенное число a.

2. У Маши было 12 монет, из них m монет достоинством 5 р., а остальные — достоинством 2 р. Какая сумма денег была у Маши? (Вычислите при $m = 4$.)

Глава 4. Уравнения

П-36. Корни уравнения

Вариант 1

1. Проверьте, является ли число -2 корнем уравнения:

а) $3x + 5 = x + 1$; г) $3x + 8 = |x|$;
б) $x^2 = 4$; д) $(x + 17)(x + 2) = 0$;
в) $-2x + 1 = 7 - x$; е) $-x = 2{,}5 - 0{,}5$.

2. Назовите хотя бы один корень уравнения
$$(x - 2) \cdot (5 - x) \cdot (x + 9) = 0.$$

3. Какое из уравнений не имеет корней:

а) $|x| = -3$; б) $|x| = 1$; в) $|x| = 0$?

Вариант 2

1. Проверьте, является ли число -2 корнем уравнения:

а) $5x + 3 = x - 5$; г) $2x + 6 = |x|$;
б) $x^2 + 1 = 5$; д) $(x - 13)(x + 2) = 0$;
в) $-3x + 4 = 12 - x$; е) $-x = 4{,}5 - 2{,}5$.

2. Назовите хотя бы один корень уравнения
$$(4 - x) \cdot (x - 3) \cdot (x + 10) = 0.$$

3. Какое из уравнений не имеет корней:

а) $|x| = 2$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -7$?

П-37. Решение уравнений

Вариант 1

Решите уравнение:

а) $x - 8 = 16 - x$;

б) $-16x = 4$;

в) $5x - 9 = 14 + 3x$;

г) $\frac{5x}{7} = 10$;

д) $2(x - 3) = -7(1 - x)$;

е) $1 - 3(x - 1) = 2 - 7(1 - x)$;

ж) $|x| = -2$.

Вариант 2

Решите уравнение:

а) $15 - x = x - 17$;

б) $18x = -9$;

в) $8x - 9 = 6x + 12$;

г) $\frac{6x}{5} = 12$;

д) $-3(x - 2) = 4(1 - x)$;

е) $2 - 6(x - 1) = 3 - 4(2 - x)$;

ж) $x^2 = -9$.

П-38. Решение задач с помощью уравнений

Вариант 1

Решите задачу, составив уравнение:

1. В одном баке x л воды, а в другом — в 3 раза больше. В первый бак долили 5 л воды, а из второго вылили 7 л. Воды в баках стало поровну. Выясните, сколько воды было в первом баке.

2. К задуманному числу a прибавили 16 и получили столько же, как если бы число a вычли из 24. Какое число задумали?

Вариант 2

Решите задачу, составив уравнение:

1. В одном пенале y карандашей, а в другом — в 4 раза больше. В первый пенал добавили 5 карандашей, а из второго вынули 7 карандашей. Карандашей в пеналах стало поровну. Выясните, сколько карандашей было в первом пенале.

2. Из 19 вычли задуманное число a и получили столько же, как если бы к 9 прибавили это число. Какое число задумали?

П-39. Решение задач с помощью уравнений

Вариант 1

Решите задачу с помощью уравнения, обозначив через x меньшую из величин:

1. Арбуз и дыня вместе весят 13 кг. Арбуз тяжелее дыни на 3 кг. Сколько весит дыня? Сколько весит арбуз?
2. За тетрадь и альбом вместе заплатили 8 р. Оказалось, что альбом в 3 раза дороже тетради. Сколько стоит тетрадь? Сколько стоит альбом?

Вариант 2

Решите задачу с помощью уравнения, обозначив через x меньшую из величин:

1. Арбуз и дыня вместе весят 12 кг. Арбуз втрое тяжелее дыни. Сколько весит дыня? Сколько весит арбуз?
2. За тетрадь и альбом вместе заплатили 9 р. Оказалось, что альбом дороже тетради на 3 р. Сколько стоит тетрадь? Сколько стоит альбом?

П-40. Решение задач с помощью уравнений

Вариант 1

1. Мастер и ученик изготовили вместе 62 детали. Ученик работал 5 ч, а мастер — 7 ч. Мастер изготавливал в час на две детали больше, чем ученик. Сколько деталей в час делал ученик? сколько мастер?
2. Задуманное число умножили на 2,5 и получили столько же, как если бы его вычли из 140. Какое число задумано?

Вариант 2

1. Туристы до обеда были в пути 4 ч, а после обеда — 3 ч. Скорость их движения до обеда была на 1 км/ч больше, чем после обеда. К вечеру оказалось, что они прошли 25 км. С какой скоростью шли туристы до обеда? после обеда?
2. Задуманное число умножили на $\frac{2}{9}$ и получили столько же, как если бы из него вычли 70. Какое число задумано?

Глава 5. Координаты и графики

П-41. Множества точек на координатной прямой

Вариант 1

1. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

   а) $x > 2,5$;   б) $3 \leqslant x \leqslant 6$.

2. Задайте с помощью неравенства или двойного неравенства промежутки, изображенные на рисунке 34, *а* — *г*.

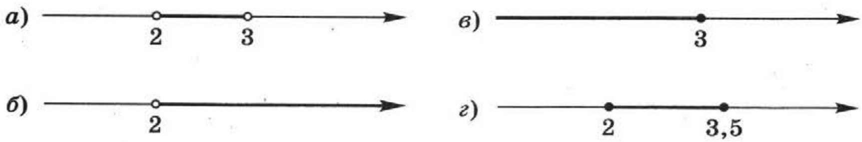


Рис. 34

3. Какие из чисел -3; 2; 3; -4 лежат на промежутке, изображенном на рисунке 35?

4*. Каким может быть число a, если известно, что промежуток $|x| < a$ содержит число -3?

Рис. 35

Вариант 2

1. Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

   а) $x < 4$;   б) $1,5 \leqslant x \leqslant 5$.

2. Задайте с помощью неравенства или двойного неравенства промежутки, изображенные на рисунке 36, *а* — *г*.

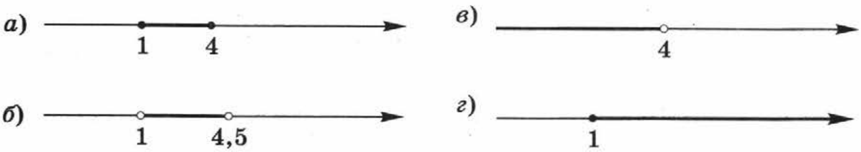


Рис. 36

3. Какие из чисел -2; -1; 4; 7 лежат на промежутке, изображенном на рисунке 37?

Рис. 37

4*. Каким может быть число a, если известно, что промежуток $|x| > a$ содержит число -5?

П-42. Множества точек на координатной плоскости

Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $x = 1$; б) $x < -2$; в) $-3 \leqslant y \leqslant 2$.

2. Опишите на алгебраическом языке прямую, проходящую через точку $(-3; 5)$ и параллельную оси абсцисс.

3*. Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных относительно оси абсцисс точкам фигуры, задаваемой условиями $|x| \leqslant 2$; $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Вариант 2

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $y = -1$; б) $y > 4$; в) $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

2. Опишите на алгебраическом языке прямую, проходящую через точку $(2; -5)$ и параллельную оси ординат.

3*. Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных относительно оси ординат точкам фигуры, задаваемой условиями $|y| \leqslant 3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

П-43. Графики

Вариант 1

1. Координаты точек связаны соотношением $y = x - 3$.

а) Заполните таблицу:

x	-3	0	1	3	4
y					

б) Используя данные таблицы, постройте график.

2. Из точек $A\ (-1;\ 3)$, $B\ (0;\ 3)$, $C\ (2;\ 5)$ укажите те, которые принадлежат графику зависимости $y - x = 3$.

3*. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $x - y = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

Вариант 2

1. Координаты точек связаны соотношением $y = -x + 2$.

а) Заполните таблицу:

x	-2	0	1	2	4
y					

б) Используя данные таблицы, постройте график.

2. Из точек $A\ (-2;\ 2)$, $B\ (1;\ 3)$, $C\ (-1;\ 5)$ укажите те, которые принадлежат графику зависимости $y + x = 4$.

3*. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $x + y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

П-44. Графики

Вариант 1

1. Из точек $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (2;\ 4)$, $C\ (3;\ 9)$, $D\ (-2;\ 3)$, $E\ (-3;\ -9)$ выберите те, которые принадлежат параболе $y = x^2$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $y = x^2$, если $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

3. Постройте график зависимости $y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geqslant 1 \\ x^2 & \text{при } x < 1. \end{cases}$

4*. Найдите координаты точек пересечения графиков $y = |x|$ и $y = x^3$.

Вариант 2

1. Из точек $A\ (-1;\ -1)$, $B\ (-2;\ 4)$, $C\ (3;\ -27)$, $D\ (-2;\ -8)$, $E\ (0;\ 3)$ выберите те, которые принадлежат кубической параболе $y = x^3$.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $y = x^3$, если $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Постройте график зависимости $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geqslant 1 \\ x^3 & \text{при } x < 1. \end{cases}$

4*. Найдите координаты точек пересечения графиков $y = -|x|$ и $y = x^3$.

П-45. Графики вокруг нас

Вариант 1

1. Лодка плывет по реке из пункта A в пункт B. На рисунке 38 изображен график расстояния от нее до пункта A от начала движения до момента прибытия в пункт B.

а) На каком расстоянии от пункта A была лодка через полчаса после начала движения?

б) Через какое время после начала движения лодка оказалась на расстоянии 10 км от пункта A?

в) Были ли в пути остановки? Если да, то сколько раз и на какое время каждый раз?

г) На каком расстоянии от пункта A находится пункт B?

д) Когда лодка плыла с наибольшей скоростью?

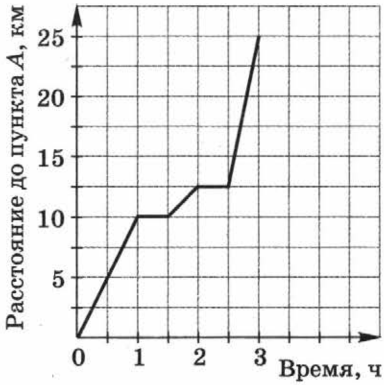


Рис. 38

2*. Определите, больше или меньше 60% составляет путь, пройденный лодкой за первый час, от пути, пройденного ею за оставшееся время движения.

Вариант 2

1. Машина едет по шоссе из пункта A в пункт B. На рисунке 39 изображен график расстояния от нее до пункта A от начала движения до момента прибытия в пункт B.

а) На каком расстоянии от пункта A была машина через час после начала движения?

б) Через какое время после начала движения машина была на расстоянии 90 км от пункта A?

в) Были ли в пути остановки? Если да, то сколько раз и на какое время каждый раз?

г) На каком расстоянии от пункта A находится пункт B?

д) Когда машина ехала с наибольшей скоростью?

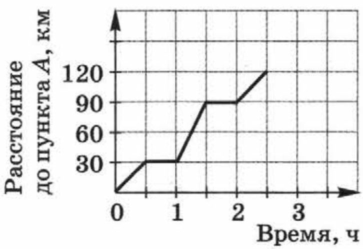


Рис. 39

2*. Определите, больше или меньше 30% составляет путь, пройденный машиной за первый час, от пути, пройденного ею за оставшееся время движения.

Глава 6. Свойства степени с натуральным показателем

П-46. Произведение и частное степеней

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $a^5b^3a^2b^4$; б) $\dfrac{x^9}{x^3}$; в) $\dfrac{x^3bx^4}{x^5}$; г) $\dfrac{28t^5u^7}{-7t^6u^5}$.

2. При каком значении k выполняется равенство $\dfrac{a^k}{a^2a^3} = a^5$?

3*. Сравните значения выражений 9^{15} и $0{,}01 \cdot 9^{17}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $x^3y^7x^2y^3$; б) $\dfrac{t^{11}}{t^5}$; в) $\dfrac{u^4x^2u^3}{u^6}$; г) $\dfrac{-18x^8v^5}{36x^6v^9}$.

2. При каком значении k выполняется равенство $\dfrac{b^k}{b^5} = b^7b^3$?

3*. Сравните значения выражений 8^{17} и $100 \cdot 8^{15}$.

П-47. Степень степени, произведения и дроби

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $3(-x^5)^8$; б) $(2cd^2)^6$; в) $\left(\dfrac{y^2}{z^8}\right)^5$; г) $(ab^4)^4 \cdot (a^5b^2)^3$.

2. При каком значении k выполняется равенство $\left(\dfrac{5^k}{5^2}\right)^2 = 5^8$?

3*. Вычислите $\dfrac{(3^7 \cdot 5^5)^4}{(5^4 \cdot 3^6)^5}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

   а) $2(-t^7)^4$; б) $(-3u^2v^4)^3$; в) $\left(\frac{x^4}{u^6}\right)^4$; г) $\frac{(u^4v^3)^2}{u^3v^7}$.

2. При каком значении k выполняется равенство $\left(\frac{3^{12}}{3^k}\right)^3 = 3^6$?

3*. Вычислите $(2^4 \cdot 3^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$.

П-48. Решение комбинаторных задач

Вариант 1

1. Для обозначения текущих дел в канцелярии применяют индексы, состоящие из одной буквы и одного числа, причем используют 30 букв и 100 чисел. Сколько дел можно так обозначить?
2. Группу детского сада (36 человек) ведут на прогулку. Сколько существует способов составить первую пару в колонне?
3. Аня, Боря и Вася делят 12 различных открыток (возможно, совсем не справедливо). Сколько имеется способов это сделать так, чтобы самая красивая открытка досталась не Васе?

Вариант 2

1. На балу присутствуют 30 кавалеров и 25 дам. Сколько существует способов составить пару для танца?
2. В отряде 25 бойцов. Двоих надо отправить в разведку. Сколько существует вариантов это сделать?

3*. Элла, Юля и Яша делят 15 шариковых ручек (возможно, совсем не справедливо). Сколько имеется способов это сделать так, чтобы самая плохая досталась не Юле?

П-49. Перестановки

Вариант 1

1. 50 депутатов парламента рассаживаются в зале заседаний, в котором 50 мест. Сколько у них есть вариантов это сделать?

2. Упростите выражение $\frac{15! - 14!}{14!}$.

3*. У мамы есть три конфеты: «Грильяж», «Белочка» и «Мишка на Севере». Сколько у нее способов дать каждому из троих детей по одной конфете так, чтобы конфета «Грильяж» не досталась младшему?

Вариант 2

1. 200 солдат строятся в шеренгу. Сколько имеется вариантов это сделать?

2. Упростите выражение $\frac{12! + 12 \cdot 12!}{13!}$.

3*. У мамы есть три шоколадки: «Марс», «Баунти» и «Сникерс». Сколько у нее способов дать каждому из троих детей по шоколадке так, чтобы «Марс» не достался старшему?

Глава 7. Многочлены

П-50. Одночлены и многочлены

Вариант 1

1. Найдите значение многочлена $3a^2 - 5a$ при $a = -3$.

2. Приведите к стандартному виду многочлен:

а) $-5x + 3x^2 - 9x + 15x$; б) $3a^2a - 5a \cdot 3b - 12bbb$.

3. Решите уравнение $2x - 3x + 7x = 12$.

Вариант 2

1. Найдите значение многочлена $5a^2 - 3a$ при $a = -3$.

2. Приведите к стандартному виду многочлен:

а) $-4y + 7y^2 - 5y + 3y^2$; б) $-4x^3x - 2x \cdot 3y + 15yy$.

3. Решите уравнение $-2x + 3x - 7x = -12$.

П-51. Сложение и вычитание многочленов

Вариант 1

1. Выполните сложение и вычитание многочленов:

а) $(2a - 5b) + (-3a + 2b)$;
б) $(-2x^2 - 3x + 4) - (-2x^2 + 7x - 6)$.

2. Представьте многочлен «а» в виде суммы двух многочленов, а многочлен «б» в виде разности:

а) $-4x^3 + 2x^2 - 7x + 1$; б) $7a^4 - 2a^3 + 5a^2 - 8a - 9$.

3. Заполните пропуски:

а) $(3a - 2b) + (\ldots) = 0$; б) $(7a + 8b) - (\ldots) = 0$.

Вариант 2

1. Выполните сложение и вычитание многочленов:

а) $(7a - 9b) + (-3b + 2a)$;
б) $(-3x^2 - 5x + 1) - (-3x^2 + 2x - 9)$.

2. Представьте многочлен «а» в виде суммы двух многочленов, а многочлен «б» в виде разности:

а) $-5x^3 + 7x^2 - 9x + 1$; б) $9a^4 - 6a^3 + 2a^2 - 15a - 8$.

3. Заполните пропуски:

а) $(-8a + b) + (\ldots) = 0$; б) $(3a - 4b) - (\ldots) = 0$.

П-52. Умножение одночлена на многочлен

Вариант 1

1. Представьте в виде многочлена:

а) $-2a^2b \cdot (1{,}2ab^3 + 0{,}4a^3b)$; в) $-1 \cdot (2a^2 - 3a + 1)$.
б) $7a \cdot (a - b) - b \cdot (b - 7a)$;

2. Решите уравнение:

а) $5 - 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (x - 2) = 0$; в) $-1 \cdot (3x - 5) = 5$.
б) $3x - 5 \cdot (2x - 1) = 12$;

Вариант 2

1. Представьте в виде многочлена:

а) $-3a^2b^2 \cdot (0{,}8a + 0{,}3b)$; в) $-1 \cdot (-3a^2 + 2a - 1)$.
б) $3x \cdot (x - 2a) - 6a \cdot (a - x)$;

2. Решите уравнение:

а) $7 + 4 \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x - 1) = 0$; в) $-1 \cdot (4x - 2) = 2$.
б) $2x - 7 \cdot (3x - 1) = 26$;

П-53. Составление выражений по условию задачи

Вариант 1

Составьте выражения по условию задачи и упростите их:

В одном саду растут яблони, 40 рядов по a яблонь в ряду, а в другом — груши, 45 рядов. В каждом ряду груш на 2 больше, чем яблонь в одном ряду первого сада. Сколько всего деревьев в двух садах? На сколько больше груш, чем яблонь?

Вариант 2

Составьте выражения по условию задачи и упростите их:

В кинотеатре 2 зала. В одном зале 25 рядов по x мест в каждом, а в другом 15 рядов, причем в каждом на 4 места меньше, чем в одном ряду первого зала. Сколько всего мест в двух залах? На сколько больше мест в первом зале, чем во втором?

П-54. Умножение многочленов

Вариант 1

Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(2a - 7) \cdot (3 - a)$;
б) $(3a - b) \cdot (5b - a)$;
в) $4a \cdot (a - b) - (a + b) \cdot (4a - b)$;
г) $(3a - 2) \cdot (a + 3) + (a - 4) \cdot (1 - 3a)$;
д) $(2a - 3)^2$;
е) $3(x - 1)(x + 2)$.

Вариант 2

Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(3x - 7) \cdot (2 - x)$;
б) $(2x - y) \cdot (3y - x)$;
в) $3x \cdot (x - y) - (x + y) \cdot (3x - y)$;
г) $(5x - 1) \cdot (x + 2) + (x - 1) \cdot (2 - 5x)$;
д) $(3x - 2)^2$;
е) $2(x - 3)(x + 1)$.

П-55. Квадрат суммы и разности

Вариант 1

Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(3a + b)^2$;
б) $(7v - u)^2$;
в) $12fg + (2f - 3g)^2$;
г) $25x^2 - (5x - 1)^2$;
д) $-2 \cdot (5a - 3)^2$.

Вариант 2

Запишите выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(7d - 2)^2$;
б) $(2t + 5r)^2$;
в) $-40qs + (4q + 5s)^2$;
г) $49y^2 - (3 - 7y)^2$;
д) $-3 \cdot (3a - 5)^2$.

П-56. Решение уравнений

Вариант 1

1. Решите уравнение и сделайте проверку:

   а) $-2 \cdot (x - 1) + 3x = 7$;
   б) $5y - (3 - y) + (2y - 1) = y + 3$.

2. Решите уравнение $2 \cdot (x - 5) - 3 \cdot (x + 4) = x - 22$.

Вариант 2

1. Решите уравнение и сделайте проверку:

   а) $-3 \cdot (x - 2) + 4x = 11$;
   б) $2y - (4 - y) + (3y - 2) = y + 4$.

2. Решите уравнение $3 \cdot (x - 4) - 4 \cdot (x + 5) = -30 + x$.

П-57. Решение уравнений

Вариант 1

1. Решите уравнение:

   а) $(x - 1)^2 - (x - 2) \cdot (x + 2) = x - 4$;
   б) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{3} = 0{,}2$;
   в) $(x - 5)^2 = (5 - x)^2$.

2. Составьте уравнение по условию задачи и решите его: От числа a отняли число 7,5, результат умножили на 2 и получили снова число a. Чему оно равно?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

   а) $(x-2)^2-(x-1)\cdot(x+1)=x-5$;

   б) $\frac{x}{7}-\frac{x}{5}=0{,}2$;

   в) $(x-3)^2=(3-x)^2$.

2. Составьте уравнение по условию задачи и решите его: От числа m отняли число 4,5, результат умножили на 2 и получили снова число m. Чему оно равно?

П-58. Решение задач с помощью уравнений

Вариант 1

Сторона квадрата x см. Одну сторону уменьшили на 2 см, а другую увеличили на 3 см. Площадь получившегося прямоугольника оказалась такой же, как и площадь квадрата. Найдите сторону квадрата.

Вариант 2

Две группы туристов вышли одновременно навстречу друг другу с двух турбаз. Первая группа шла со скоростью x км/ч, а вторая — со скоростью на 1 км/ч больше, чем первая. Встретились группы через 2 ч. Расстояние между турбазами 18 км. Найдите скорость движения каждой группы.

П-59. Решение задач с помощью уравнений

Вариант 1

Скорость пешехода 5 км/ч, а скорость велосипедиста 9 км/ч. Пешеход был в пути на 2 ч больше, чем велосипедист, но расстояние они преодолели одинаковое. Как долго был в пути каждый?

Вариант 2

Карандаши разложили в 5 больших коробок и 15 маленьких. В большой коробке помещается на 12 карандашей больше, чем в маленькой. Оказалось, что во всех больших коробках столько же карандашей, сколько во всех маленьких. Сколько всего было карандашей?

Глава 8. Разложение многочленов на множители

П-60. Вынесение общего множителя за скобки

Вариант 1

1. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $5x - 25y$; б) $2ab - ac$.

2. Разложите на множители:

а) $3az + 6ac - 9ab$; б) $x^3y - 4xy^2$.

3. Сократите дробь $\dfrac{ab + bc}{ax + cx}$.

4*. Найдите значение выражения $\dfrac{4c^2 - 4a}{ab^3 - b^3c^2}$ при условии, что $b = 2$.

Вариант 2

1. Вынесите общий множитель за скобки:

а) $6a - 18b$; б) $5bx - cx$.

2. Разложите на множители:

а) $2xy - 4xz + 8xw$; б) $a^4b - 6ab^3$.

3. Сократите дробь $\dfrac{ax + xy}{az + yz}$.

4*. Найдите значение выражения $\dfrac{9d^2 - 9b}{bc^3 - c^3d^2}$ при условии, что $c = 3$.

П-61. Способ группировки

Вариант 1

1. Разложите на множители:

а) $c + d + 3x(c + d)$;
б) $2a + ax + 2bx + 4b$;
в) $mn - 3m + 3 - n$;
г) $2cx - 3cy + 6by - 4bc$;
д) $x^2 - 3ax + 6a - 2x$.

2*. Сократите дробь $\dfrac{ax^4 - bx - a^2x^3 + ab}{x^2 - 2ax + a^2}$.

Вариант 2

1. Разложите на множители:

а) $a - b + 2c(a - b)$;
б) $by + 3b + 2cy + 6c$;
в) $kl - 5l - k + 5$;
г) $3ab - 2ac + 4cd - 6bd$;
д) $y^2 - 2by + 6b - 3y$.

2*. Сократите дробь $\dfrac{b^2 - 2by + y^2}{by^5 - ay - b^2y^4 + ab}$.

П-62. Формула разности квадратов

Вариант 1

1. Разложите на множители:

а) $z^2 - 4$; б) $9 - x^2y^2$; в) $\dfrac{1}{100}x^2 - u^4$.

2. Выполните умножение $(x - 3y)(x + 3y)$.

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{c^2 - d^2}{bc - bd}$; б)* $\dfrac{3x^2 - 27}{3x - x^2}$.

Вариант 2

1. Разложите на множители:

а) $u^2 - 9$; б) $4 - a^2b^2$; в) $\dfrac{1}{16}a^2 - b^4$.

2. Выполните умножение $(2a + b)(2a - b)$.

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{xz + yz}{x^2 - y^2}$; б)* $\dfrac{4a - a^2}{4a^2 - 64}$.

П-63. Формулы разности и суммы кубов

Вариант 1

1. Разложите на множители:

а) $c^3 + 8e^3$; б) $a^3 - d^6$.

2. Выполните умножение:

а) $(x + 0{,}2z)(x^2 - 0{,}2xz + 0{,}04z^2)$;
б) $(4a - 1)(16a^2 + 4a + 1)$.

3. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^3 - y^3}{2x^2 + 2xy + 2y^2}$; б)* $\dfrac{a^3b^3 - 1}{c - abc}$.

Вариант 2

1. Разложите на множители:

   а) $v^3 - 27w^3$; б) $x^6 + z^3$.

2. Выполните умножение:

   а) $(a - 0{,}3b)(a^2 + 0{,}3ab + 0{,}09b^2)$;
   б) $(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$.

3. Сократите дробь:

   а) $\dfrac{3a^2 - 3ab + 3b^2}{a^3 + b^3}$; б)* $\dfrac{1 - x^3y^3}{xyz - z}$.

П-64. Разложение на множители разными способами

Вариант 1

1. Разложите на множители:

   а) $4x^2 - 4$; в) $c - 27cd^3$;
   б) $5t^2 - 20st + 20s^2$; г) $vu^3 + vw^3$.

2*. Сократите дробь $\dfrac{mn - n^2 + 2m - 2n}{m^3n - mn^3}$.

Вариант 2

1. Разложите на множители:

   а) $16 - y^2$; в) $\dfrac{1}{8}km^3 + kn^3$;
   б) $45q^2 + 30pq + 5p^2$; г) $ax^3 - ay^3$.

2*. Сократите дробь $\dfrac{a^3b - ab^3}{a^2 + ab - 3a - 3b}$.

П-65. Решение уравнений с помощью разложения на множители

Вариант 1

1. Решите уравнение:

   а) $(x - 3)(2x + 9) = 0$; в) $t^2 + 6t + 9 = 0$;
   б) $9y^2 - 1 = 0$; г) $z^4 = 4z^2$.

2*. При каких значениях a равны значения выражений $3a^2 - 12$ и $a(a + 2)$?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $(y + 2)(3y - 9) = 0$;
б) $16 - z^2 = 0$;
в) $x^2 - 8x + 16 = 0$;
г) $t^5 = 9t^3$.

2*. При каких значениях b равны значения выражений $b(b + 4)$ и $2b^2 - 32$?

Глава 9. Частота и вероятность

П-66. Частота и вероятность случайного события

(*Работа выполняется с помощью калькулятора.*)

Вариант 1

В ящике 10 белых, 10 черных и 10 красных шаров. Эксперимент состоит в том, что наудачу вытаскивают три шара и проверяют, все ли они разных цветов. В таблице показано, сколько было благоприятных исходов в зависимости от числа проведенных экспериментов.

Число экспериментов	100	200	300
Число благоприятных исходов	25	49	74

а) Найдите частоты появления благоприятных исходов (с точностью до сотых) в зависимости от числа экспериментов.

б) Используя полученные данные, представьте графически зависимость частоты благоприятного исхода от числа экспериментов.

в) Определите, какова примерно вероятность благоприятного исхода при одном испытании.

Вариант 2

В ящике 10 белых, 10 черных и 10 красных шаров. Эксперимент состоит в том, что наудачу вытаскивают три шара и проверяют, одного ли они цвета. В таблице показано, сколько было благоприятных исходов в зависимости от числа проведенных экспериментов.

Число экспериментов	100	200	300
Число благоприятных исходов	9	17	28

а) Найдите частоты появления благоприятных исходов (с точностью до сотых) в зависимости от числа экспериментов.

б) Используя полученные данные, представьте графически зависимость частоты благоприятного исхода от числа экспериментов.

в) Определите, какова примерно вероятность благоприятного исхода при одном испытании.

П-67. Вероятностная шкала

Вариант 1

В ящике 5 белых и 5 черных шаров. Наудачу выбирают 6 шаров.

1. Изобразите на вероятностной шкале следующие события:
а) Все выбранные шары черные.
б) Среди выбранных шаров есть черный.

2. Определите, какие из следующих событий являются достоверными:
а) Среди выбранных шаров есть по крайней мере три одного цвета.
б) Среди выбранных шаров есть по крайней мере четыре одного цвета.

3*. Какое наименьшее число шаров надо взять из этого ящика, чтобы вероятность того, что среди выбранных есть три шара черного цвета, была равна 1?

Вариант 2

В ящике 6 красных и 6 синих шаров. Наудачу выбирают 8 шаров.

1. Изобразите на вероятностной шкале следующие события:
а) Все выбранные шары красные.
б) Среди выбранных шаров есть красный.

2. Определите, какие из следующих событий являются достоверными:
а) Среди выбранных шаров есть по крайней мере четыре одного цвета.
б) Среди выбранных шаров есть по крайней мере пять одного цвета.

3*. Какое наименьшее число шаров надо взять из этого ящика, чтобы вероятность того, что среди выбранных есть четыре шара синего цвета, была равна 1?

Раздел III. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

М-1. Делимость и остатки

Как вы знаете, если два целых числа a и b имеют общий делитель d (пишут: $a \vdots d$, $b \vdots d$)[1], то он будет делителем и чисел $a+b$, $a-b$, ka, mb, $ka+mb$ (k и m — целые числа).

Пример 1. Докажите, что если $2a+b \vdots 4$, то $14a-21b \vdots 4$ (a и b — целые числа).

Решение. Заметим, что $14a-21b=7(2a-3b)=$ $=7(2a+b-4b)$. Но так как $2a+b \vdots 4$, то поскольку и $4b \vdots 4$, то $2a-3b \vdots 4$, а тем самым и $7(2a-b) \vdots 4$.

Заметим, что совсем легко получить и более сильное утверждение: $14a-21b \vdots 28$. В самом деле, $2a-3b \vdots 4$, но числа 7 и 4 не имеют общих делителей, кроме единицы (взаимно просты), поэтому произведение $7(2a-3b) \vdots 28$.

Если $a \vdots d$ и $a \vdots c$, причем c и d взаимно просты, то $a \vdots cd$.

Часто при решении задач на делимость чисел приходится перебирать их остатки от деления на какие-то другие числа. Например, остаток числа 17 от деления на 6 — число 5, а остаток числа 28 от деления на 6 — число 4. Вообще остаток от деления на 6 может быть равен лишь 0, 1, 2, 3, 4, 5. От деления, скажем, на 57 может быть лишь 57 остатков (0, 1, 2, 3, ..., 55, 56). Их конечное число, и потому их можно все перебрать!

Пример 2. Докажите, что $x(7x+2)(5x+2) \vdots 3$ при любом целом x.

Решение. Число x от деления на 3 может иметь остатки 0, 1 и 2, т. е. число x можно записать одним из следующих способов: $x=3k$, $x=3k+1$, $x=3k+2$ при каком-то целом k. Но в первом случае рассматриваемое выражение, очевидно, делится на 3, поскольку один из его множителей делится на 3. Во втором случае $7x+2=21k+9 \vdots 3$ и, следовательно, все произведение кратно 3. Наконец, в третьем случае $5x+2=15k+12 \vdots 3$, а потому $x(7x+2)(5x+2) \vdots 3$.

[1] Знак $\vdots$ означает «делится нацело».

1. Докажите утверждение (m и n — целые числа):

а) если $3n + 7 \vdots 2$, то $15n + 35 \vdots 2$;
б) если $m + 2 \vdots 3$, то $4m + 5 \vdots 3$;
в) если $m \vdots 7$, то $3m \vdots 21$;
г) если $2m + 3n \vdots 5$, то $8m - 3n + 125 \vdots 5$;
д) если $m + 3n \vdots 5$, то $24m + 12n + 120 \vdots 20$.

2. Число a — четное. Может ли остаток от деления a на 8 быть равным 3? 5?

3. Число b кратно 5. Может ли остаток от деления b на 10 быть равен 2? 6?

4. Число a не делится ни на 2, ни на 3. Найдите:

а) какие остатки оно может иметь при делении на 6;
б) какие остатки при делении на 6 может иметь число a^2.

5. Докажите, что если $a > 3$ и не кратно ни 2, ни 3, то число a^2 при делении на 24 дает остаток, равный 1.

6. Докажите, что ни при каком целом n следующие числа не являются квадратами целых чисел:

а) $3n - 1$; б) $4n + 2$; в) $5n + 2$; г) $5n + 3$.

7. Может ли сумма двух последовательных натуральных чисел быть точным квадратом?

8. Известно, что число $a^2 + b^2$ делится на 3 (a, b — целые). Докажите, что $a^2 + b^2$ делится на 9.

9. Остаток от деления простого числа на 42 — число составное. Чему он равен?

10. Найдите все целые числа x, такие, что число:

а) $x(x - 1)$ — простое; б) $x^2 - 4$ — простое.

11. Найдите все простые числа p, такие, что:

а) числа $p + 10$ и $p + 14$ — простые;
б) число $8p^2 + 1$ — простое.

12. Докажите, что утверждение справедливо при всех целых числах n:

а) $n(n + 1) \vdots 2$;
б) $3n(5n - 1) \vdots 2$;
в) $n(n + 1)(n + 2) \vdots 3$;
г) $n(n + 2)(n + 4) \vdots 3$;
д) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \vdots 8$;
е) $n^3 - n \vdots 6$;
ж) если $5m - 7n \vdots 2$, то $n^2 + 11m \vdots 2$;
з) $n(n^2 + 2) \vdots 3$.

13. Докажите, что:

а) если число n нечетное, то $n^2 - 1$ делится на 8;
б) если число n четное, то $n^3 - 4n$ делится на 48;
в) если число p простое и $p > 3$, то $p^2 - 1$ делится на 24.

М-2. Уравнения в целых числах

При решении уравнений в целых числах часто приходится использовать утверждения о делимости.

Пример 1. Докажите, что уравнение $x^2 (x^2 + 5) = 2000$ не имеет решений в целых числах.

Решение. Заметим, что $x^2 (x^2 + 5) \vdots 3$ при всех целых x (в самом деле, если $x \vdots 3$, это очевидно, но если x не кратно 3, то x^2 имеет вид $3k + 1$ при каком-то k, а потому $x^2 + 5 \vdots 3$). Но 2000 не делится на 3, поэтому таких целых x, чтобы выполнялось данное равенство, нет.

Иногда приходится использовать и более сложные соображения.

Пример 2. Решите уравнение $(x + 1)(5x + 2) = 14$ в натуральных числах.

Решение. Нам надо найти все натуральные числа x, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное равенство. Но заметим, что число 14 можно представить в виде произведения натуральных чисел лишь следующими способами: $1 \cdot 14$, $2 \cdot 7$, $7 \cdot 2$, $14 \cdot 1$. Ясно, что нет таких натуральных x, что $x + 1 = 1$, или $5x + 2 = 1$, или $5x + 2 = 2$. Поэтому остается лишь одна возможность: одновременно выполняются два равенства $x + 1 = 2$ и $5x + 2 = 7$. Такое число x имеется ровно одно, это $x = 1$.

Ответ. $x = 1$.

Некоторые уравнения в целых числах удается решить подбором, доказав, что других решений они не имеют.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 (x + 1) = 12$ в натуральных числах.

Решение. Это уравнение можно решить тем же методом, что и предыдущее (попробуйте это сделать!), но можно рассуждать и по-другому. Очевидно, $x = 2$ является корнем уравнения. Покажем, что других корней нет. Ясно, что $x = 1$ не является корнем уравнения, а если взять $x > 2$, то $x + 1 > 3$ и $x^2 > 4$, поэтому $x^2 (x + 1) > 12$. Следовательно, такое число тоже не может быть корнем.

Ответ. $x = 2$.

1. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:

а) $2x^2 + 164x = 2005$;
б) $x(x + 3) = 2005$;
в) $x(x + 2)(4x + 1) = 2005$;
г) $x(x^2 + 2) = 2005$;
д) $x^2 - 1 = 7$.

2. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в натуральных числах:

а) $5x^3 + 4x = 3$;
б) $3x + 5x^4 = 4$;
в) $\dfrac{x+1}{x} + \dfrac{x^3+1}{x^3} = 1$.

3. Решите уравнение в натуральных числах:

а) $5x^2 + 3x = 8$;
б) $x(x + 1)(x + 2) = 6$;
в) $x(x + 2)(x + 4) = 15$.

4. Решите уравнение в целых числах:

а) $x(x + 2) = 3$;
б) $x^2(x + 2) = 11$;
в) $x(x - 5) = 6$;
г) $x(x - 3) = 10$.

5. В прямоугольной таблице несколько строк и несколько столбцов. Столбцов на четыре больше, чем строк. Всего в ней 45 клеток. Сколько в таблице строк и столько столбцов?

6. Завуч размышляет, в каком порядке поставить уроки в 7 классе в пятницу (все планируемые на этот день уроки различны). Всего у него 24 возможности. Сколько уроков планируется провести в пятницу?

7. В выпуклом многоугольнике девять диагоналей. Сколько вершин у этого многоугольника?

8. Робин-Бобин Барабек сперва хотел съесть несколько коробок конфет «Белочка», но потом передумал и предпочел «Грильяж». Правда, в коробке «Грильяжа» конфет оказалось на четыре меньше, чем в коробке с «Белочкой», поэтому, чтобы съесть запланированное число конфет — 120, Барабеку пришлось съесть на одну коробку конфет больше, чем он предполагал. Сколько коробок конфет съел Робин-Бобин?

М-3. Принцип Дирихле

Принцип Дирихле помогает при решении многих логических и комбинаторных задач. Обычно его формулируют так: если $n + 1$ зайцев живут в n домах, то найдется хотя бы один дом, в котором живут по крайней мере два зайца. Действительно, если бы в каждом доме жило не больше одного зайца, то всего зайцев было бы не больше n. (Ясно, что вывод надо формулировать очень точно, например, неверно говорить, что есть лишь один дом, в котором живут два зайца, — таких домов может быть и несколько, ведь какие-то дома могут быть пустыми.)

Соображения такого типа часто бывают полезными.

Пример 1. Пять девочек съели шесть конфет (на части конфеты не делили). Докажите, что есть девочка, съевшая по крайней мере две конфеты.

Решение. Роль домов здесь играют девочки, а зайцев — конфеты. Еще раз повторим рассуждение: если бы такой, как сказано в условии, девочки не было, то каждая из девочек съела бы не более одной конфеты, но тогда 5 девочек вместе съели бы не более 5 конфет — противоречие.

Подобные рассуждения бывают и более сложными или требующими каких-то дополнительных соображений.

Пример 2. В классе 26 человек. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные — меньше. Докажите, что в классе имеется по крайней мере три ученика, сделавшие одинаковое количество ошибок.

Решение. 25 учеников сделали от 0 до 11 ошибок — всего у них 12 возможностей. Но если в классе нет трех человек, сделавших одинаковое количество ошибок, то каждую из этих 12 возможностей осуществило не более двух человек, т. е. всего от 0 до 11 ошибок сделали 24 ученика — противоречие.

Пример 3. В строчку выписаны последовательные натуральные числа от 1 до k. Докажите, что найдется несколько чисел, стоящих рядом, сумма которых делится на k.

Решение. Будем рассматривать следующие числа: $1,\ 1 + 2,\ 1 + 2 + 3,\ 1 + 2 + 3 + 4,\ \ldots,\ 1 + 2 + 3 + \ldots + k$. Всего k чисел. Если хотя бы одно из них делится на k, то требуемое получено.

Пусть каждое из чисел делится на k лишь с ненулевым остатком, но существуют $k - 1$ ненулевых остатков от деления на k. По принципу Дирихле, по крайней мере два из рассматриваемых чисел имеют одинаковые остатки, но тогда их разность делится на k. Остается заметить, что разность двух чисел рассматриваемого вида является суммой нескольких подряд идущих натуральных чисел.

1. В ящике лежат красные и синие карандаши. Их вынимают из ящика в темноте. Какое наименьшее число карандашей надо вынуть, чтобы быть уверенным, что среди взятых обязательно есть карандаши одного цвета?

2. Вершины четырехугольника раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Докажите, что найдется диагональ или сторона, соединяющая вершины одного цвета.

3. В городе 5 млн жителей и 20 административных районов. Докажите, что имеется район, в котором проживает не менее 250 тыс. человек.

4. В классе 25 человек. Докажите, что найдется 7 учащихся, имеющих одинаковую четвертную оценку по алгебре.

5. Дано 15 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа:
а) имеющие одинаковые остатки от деления на 14;
б) разность которых делится на 14.

6. В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зеленых, 4 желтых. Карандаши вынимают из ящика в темноте. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы быть уверенным, что среди них есть:
а) четыре карандаша одного цвета;
б) хотя бы один карандаш каждого цвета;
в) не меньше шести синих?

7. Докажите, что в любой компании из шести человек есть двое, имеющих в этой компании одинаковое число знакомых.

8. В классе 25 человек. Ребята дежурят парами, причем для каждой пары, которую можно составить, существует день, когда она дежурит. Решено каждой паре дежурных вручать специальную эмблему. Изготовили эмблемы 200 различных типов. Докажите, что найдутся две пары дежурных, получившие одинаковую эмблему. Верно ли, что обязательно найдутся три такие пары?

9. В классе 25 человек, по успеваемости они отличники, хорошисты или троечники. Каждый из ребят занимается одним из следующих видов спорта: волейболом, баскетболом, бегом или шахматами. Докажите, что в классе есть по крайней мере три человека, имеющие одинаковую успеваемость и одинаковые спортивные интересы.

10. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое мужчин сидят друг напротив друга.

11. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

12. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа -1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из восьми сумм по всем строкам, по всем столбцам и двум главным диагоналям равны.

13. Докажите, что найдутся два числа вида 2^n, где n — натуральное число, имеющие равные остатки от деления на число 2005.

14. Докажите, что найдутся два числа вида 3^n, где n — натуральное число, разность которых делится на 2005.

15. Докажите, что найдется число вида

$$200620062006\ldots200600\ldots0$$

(состоящее из нескольких групп цифр «2006» и приписанных в конце нескольких нулей), кратное числу 2005.

М-4. Инвариант

Пример 1. Женя и Жора меняются друг с другом марками по следующим правилам: за 8 английских марок дают 14 французских и 3 немецкие, за 5 испанских и 2 французские дают 6 португальских и 11 норвежских, за 4 датские и 5 шведских дают 6 португальских и 8 голландских. Могло ли в результате обменов по этим правилам получиться так, что у Жени стало в полтора раза больше марок, чем было, а у Жоры на две марки больше?

Решение. Конечно, нет: ясно, что общее число марок у Жени и у Жоры никак в ходе обменов не меняется и возрасти не может.

В решении этой шуточной задачи применена очень важная и серьезная идея — здесь найден, как говорят, инвариант, т. е. то, что не меняется при всех производимых операциях.

Как доказать, что в результате каких-то операций от данной ситуации нельзя было перейти к какой-то другой? Для этого достаточно найти какой-нибудь инвариант — то, что не меняется при всех операциях, — и показать, что в двух рассматриваемых ситуациях он различен.

Пример 2. В строке 2005 раз написано число -1. За одну операцию разрешается взять любые восемь написанных в строчке чисел и поменять у них знаки. Можно ли с помощью таких операций добиться того, чтобы все числа в строчке были равны 1?

Решение. Ясно, что легко можно сделать так, чтобы в строке появилось 8 единиц, 16 единиц и даже 800 и 1600 единиц. Но добиться того, чтобы в строке остались одни единицы, невозможно, и это легко доказать. Заметим, что произведение всех чисел, записанных в строке, при производимой операции не меняется: мы восемь чисел умножаем на -1, а $(-1)^2 = 1$. Но в начальной ситуации произведение всех чисел в строке равно -1, а если все числа в строке равны 1, то это произведение равно 1. Сколько бы раз мы ни производили разрешенную операцию, произведение чисел в строке от этого не изменится, значит, прийти к тому, чтобы все числа в строке стали единицами, невозможно.

Похожую идею можно применить на первый взгляд совсем в другой ситуации.

Пример 3. В квадрате 8×8 одна клетка закрашена в черный цвет, а остальные — в белый. За один ход разрешается перекрашивать все клетки в одной строке или в одном столбце — белые клетки в черный цвет и наоборот. Можно ли добиться того, чтобы все клетки оказались покрашенными в черный цвет?

Решение. Заметим, что если в строке или столбце, которые мы перекрашиваем, было k черных клеток, то их там станет $8 - k$. Но числа k и $8 - k$ либо оба четные, либо оба нечетные. Поэтому ясно, что четность числа черных клеток не меняется при производимой операции, но вначале их было нечетное число, значит, четное число — все 64 клетки — получиться не может.

Заметим, что эта задача очень похожа на предыдущую. Поставим в черную клетку -1, а в белые 1. Теперь, вместо того чтобы перекрашивать клетки, будем все числа (в строке или столбце) умножать на -1. Ясно, что произведение всех чисел в таблице при этом не меняется. Но вначале оно было равно -1, а в желаемой ситуации 1, значит, добиться ее невозможно.

1. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 2005. За один ход разрешается стереть любые два числа x и y и написать вместо них одно число $x + y$. В конце на доске остается одно число. Может ли быть, что это число 12 957?

2. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 2005. За один ход разрешается стереть любые два числа x и y и написать вместо них одно число xy. В конце на доске остается одно число. Может ли быть, что это число 18 976?

3. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 2005. За один ход разрешается стереть любые три числа x, y и z и написать вместо них два числа $\frac{2x + y - z}{3}$ и $\frac{x + 2y + 4z}{3}$. В конце на доске остается два числа. Может ли быть, что это числа 12 051 и 13 566?

4. У Жени в библиотеке 624 тома, а у Светы — 641 том. Женя купил несколько двухтомников стихов и несколько четырехтомных романов, а Света купила несколько словарей (двухтомных и шеститомных) и несколько энциклопедий (десятитомных и двадцатитомных). Женя утверждает, что после всех покупок у него стало на 112 томов больше, чем у Светы. Прав ли он?

5. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 1998. За один ход стирают любые два числа x и y и, если их сумма делится на два, пишут двойку, а если нет, то единицу. В конце на доске остается одно число. Может ли быть, что это число 2?

6. На доске записаны числа 2005, 2006, 2007. За один ход разрешается стереть три числа a, b, c и написать вместо них числа $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$, $\frac{bc}{a}$. Можно ли добиться того, чтобы на доске оказались числа 2002, 2003, 2004?

7. В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы, причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ или добавить в любое место буквосочетания ЫУ или УУЫЫ, то смысл слова не изменится. Можно ли утверждать, что слова ЫУЫЫ и ЫУУУ имеют одинаковый смысл?

8. Хулиган Женя порвал газету, причем каждый попадающийся ему кусок он рвал на четыре части. Могло ли в итоге получиться 2006 кусков?

9. В банке данных находится несколько чисел. Разрешается заносить в банк любые числа вида $ax + by$, где x и y — числа из банка, а a и b — целые числа. В банке первоначально находились только числа 1917, 1941 и 2007. Может ли в банке оказаться число 2006?

10. На столе стоит семь стаканов — все вверх дном. За один ход разрешается перевернуть любые четыре стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

11. В стакане летают две мухи, скорости полета меняются у них лишь при столкновении. Если до столкновения скорость первой была u, а второй — v, то после столкновения их скорости будут соответственно равны $\frac{u(u+2v)}{u+v}$ и $\frac{v^2}{u+v}$. Может ли получиться так, что через несколько столкновений скорость первой мухи увеличится в 1,3 раза, а второй — в 1,4 раза?

12. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. За один ход разрешается сдвинуть любые две фишки в соседние с ними секторы. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

13. В стране Серобурмалин живет 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Когда встречаются два хамелеона разного цвета, они одновременно приобретают окраску третьего цвета (например, серый и бурый становятся малиновыми). Может ли через некоторое время оказаться, что все хамелеоны имеют один цвет?

М-5. Графы

Пример 1. В одном городе шесть станций метро: Алмазная, Золотая, Лесная, Парковая, Садовая, Серебряная. Поезда следуют по маршрутам Алмазная — Золотая, Золотая — Серебряная, Лесная — Садовая, Садовая — Парковая, Парковая — Лесная, Серебряная — Алмазная. Можно ли с помощью этих поездов добраться от станции Парковая до станции Алмазная?

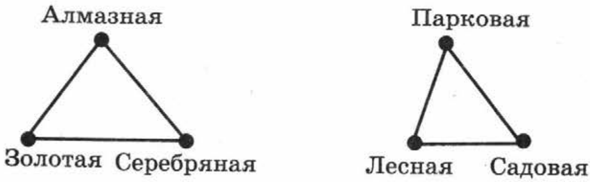


Рис. 40

Р е ш е н и е. Нарисуем картинку (рис. 40), на которой будем отмечать станции точками, а соединяющие их маршруты — линиями. Теперь видно, что добраться от станции Парковая до станции Алмазная нельзя.

Такие картинки — наборы точек, некоторые из которых соединены линиями, — называются **графами.** Точки при этом называют **вершинами графа**, а линии — его **ребрами.** Мы будем считать, что две вершины в графе могут быть соединены не более чем одним ребром.

Очень часто построение графа помогает при решении задач. Применение графов делает наглядной общую идею задач.

Пример 2. В классе 24 человека. Может ли быть так, что 8 из них имеют по три друга в классе, 11 — по пять друзей, а 5 человек — по четыре друга?

Пример 3. В государстве 24 города. Может ли быть так, что 8 из них соединены с тремя городами, 11 — с пятью городами, а 5 — с четырьмя городами?

Р е ш е н и е. И в той и в другой задаче речь идет о том, можно ли построить граф, имеющий 24 вершины, причем 8 из них соединены ребрами с тремя вершинами, 11 — с пятью вершинами и 5 — с четырьмя вершинами.

Сосчитаем, сколько ребер должно быть у такого графа. Для этого найдем сумму: $8 \cdot 3 + 11 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 24 + 55 + 20 = 99$ (по три ребра выходит из каждой вершины первого сорта, по пять — из каждой вершины второго сорта и по четыре — из каждой вершины третьего сорта). Очевидно, что мы считали каждое ребро дважды — ведь оно соединяет две вершины. Поэтому ребер должно быть $99 : 2 == 49{,}5$. Но число ребер не может быть нецелым. Получено противоречие. Такой граф построить невозможно.

Дадим важное определение: **число ребер, выходящих из вершины, называется ее степенью.**

В рассмотренных примерах речь шла о построении графа, имеющего 8 вершин степени 3, 11 вершин степени 5 и 5 вершин степени 4.

Еще не зная слово «граф», вы, возможно, встречали задачи, в которых спрашивалось, можно ли нарисовать ту или иную картинку, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждую линию ровно один раз. Такие задачи впервые были исследованы Леонардом Эйлером и типичны для теории графов.

Пример 4. Можно ли нарисовать граф, изображенный на рисунке 41, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

Р е ш е н и е. Сделать это нельзя. В самом деле, рисуя граф так, как требуется в условии, мы в каждую вершину, кроме двух — начальной и конечной, должны войти столько же раз, сколько выйти, поэтому степени всех вершин, кроме двух, должны быть четными, а это не так.

Рис. 41

1. Нарисуйте граф, имеющий:

   а) три вершины и два ребра;
   б) четыре вершины и четыре ребра;
   в) четыре вершины и шесть ребер.

2. В графе n вершин и любые две из них соединены одним ребром. Сколько ребер в этом графе?

3. Встретились три мушкетера и четыре гвардейца. И мушкетеры, и гвардейцы любят только тех, кто служит в их части. Изобразите эту систему отношений с помощью графа.

4. Женя пытался представить родственные отношения в своей семье в виде графа. Вершинами он отмечал некоторых членов семьи, а ребрами соединял тех, кто является отцом и сыном. Результаты его изысканий представлены на рисунке 42. Не допустил ли Женя ошибки?

Рис. 42

5. Пять мальчиков: Андрей, Борис, Василий, Григорий и Дмитрий — разъехались на каникулы. Стали переписываться: Андрей и Дмитрий, Василий и Григорий, Григорий и Борис. Постройте граф, показывающий, кто с кем поддерживает переписку. Может ли сообщение о жизни Бориса дойти до Василия? до Андрея?

6. На рисунке 43, *а—д* изображены графы. Для каждого из этих графов определите степени его вершин.

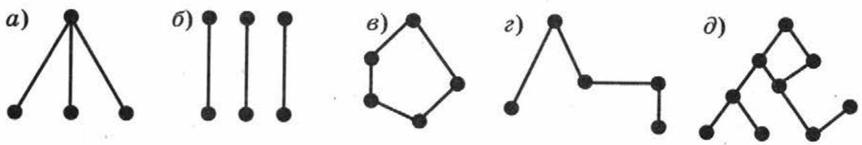


Рис. 43

7. Постройте графы, в которых степень всех вершин равна:
а) 1; б) 2; в) 3.

8. Можете ли вы построить граф, у которого:
а) одна вершина степени 3 и три степени 1;
б) одна вершина степени 2 и три степени 1;
в) пять вершин степени 7 и две вершины степени 6;
г) три вершины степени 5, пять вершин степени 7 и семь вершин степени 3?

9. В стране живут 20 рыцарей. Может ли быть так, что у троих из них по 7 врагов, у одиннадцати — по 2 врага, а у шести — по 5 врагов?

10. Докажите, что число людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

11. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

12. Можете ли вы построить граф, в котором будут только вершины степени 3 и 5, а число ребер будет равно 7?

13. В графе n вершин ($n > 1$).

а) Какие степени могут быть у вершин графа?

б) Могут ли быть у графа одновременно вершина степени $n - 1$ и вершина степени 0?

в) Докажите, что в графе обязательно есть две вершины с одинаковыми степенями.

14. В высшей футбольной лиге участвуют 16 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой остальной ровно один раз. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.

15. Какие из приведенных на рисунке 44, *а—е* графов можно изобразить, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз?

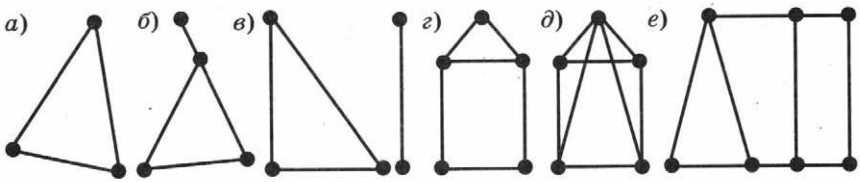


Рис. 44

16. В городе пять островов (рис. 45), некоторые из которых соединены мостами. Можно ли обойти все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз? Решите такую же задачу для другого города, схема которого изображена на рисунке 46. (Задача такого типа про город Кенигсберг впервые была решена Леонардом Эйлером.)

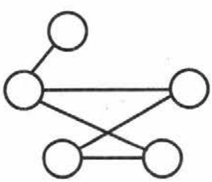


Рис. 45

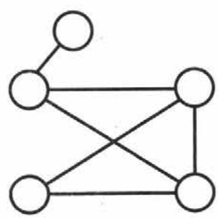


Рис. 46

Содержание

Глава 2. Отношения и пропорции

Глава 3. Введение в алгебру

Глава 4. Уравнения

Глава 5. Координаты и графики

a02b1847-c4d1-4cbe-889d-30060bc3b178

Учебное издание

Евстафьева Лариса Петровна
Карп Александр Поэлевич

АЛГЕБРА

Дидактические материалы
7 класс

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией **Т. А. Бурмистрова**
Редактор **Л. В. Кузнецова**
Младший редактор **Н. В. Ноговицина**
Художник **О. П. Богомолова**
Художественный редактор **О. П. Богомолова**
Компьютерная вёрстка **Н. В. Лукиной**
Технический редактор **С. В. Щербакова**
Корректор **И. П. Ткаченко**

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 06.07.17. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,13. Тираж 5000 экз. Заказ № 3244.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ООО «Тульская типография».
300026, г. Тула, пр-т Ленина, 109.