



А. М. Титаренко
А. Н. Роганин

Математика

500 тестов и задач

ДЛЯ ВЫПУСКНИКОВ И АБИТУРИЕНТОВ

Москва
Eksmo Education



2007

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721.6
Т 45

1111111111

Т 45 Титаренко А.М., Роганин А.Н.
Математика : 500 тестов и задач : для выпускников и абитуриентов / А. М. Титаренко, А.Н. Роганин. — М. : Эксмо, 2007. — 448 с. — (Выбор лучших репетиторов).
ISBN 5-699-19995-0

Учебное пособие адресовано *выпускникам и абитуриентам* — для подготовки к устному и письменному итоговому экзамену, экзамену в форме ЕГЭ, вступительному экзамену.

В сборнике кратко и системно изложен теоретический материал по основным разделам школьного курса алгебры и начал анализа. При этом приведено и решено около 500 задач и примеров по всем темам курса. Задания расположены по уровню сложности — от простейших, решаемых устно, до задач повышенной сложности; многие решены несколькими способами.

По всем разделам даются:

- основные понятия и формулы;
- задачи с решениями;
- тестовые задания в форме ЕГЭ;
- ответы к тестам.

Книга поможет выработать уверенные навыки решения задач по математике.

Окажет помощь *учителям и репетиторам* при подготовке учащихся к итоговым и вступительным экзаменам.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721.6

ISBN 5-699-19995-0

© ООО «Издательство «Эксмо», 2007

СОДЕРЖАНИЕ

От автора	11

Глава 1. АРИФМЕТИКА

§1. Натуральные числа	12
§2. Арифметические действия над натуральными числами	13
§3. Числовые выражения. Порядок арифметических действий в числовом выражении	14
§4. Деление с остатком	15
§5. Признаки делимости натуральных чисел	15
§6. Разложение натурального числа на простые множители	16
§7. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное	17
§8. Обыкновенные дроби	18
§9. Правильные и неправильные дроби, смешанные дроби	19
§10. Основное свойство дроби	20
§11. Сокращение дроби	20
§12. Приведение дробей к общему знаменателю	21
§13. Сложение и вычитание дробей	22
§14. Умножение дробей	25
§15. Деление дробей	25
§16. Примеры на действия с дробями	26
§17. Десятичные дроби	27
§18. Сложение и вычитание десятичных дробей	27
§19. Умножение десятичных дробей	28
§20. Деление десятичных дробей	28
§21. Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную. Периодические дроби	30
§22. Отношение. Пропорция. Свойства пропорции	32
§23. Проценты	32
§24. Сложные проценты	33
Тесты к главе 1	34

Глава 2. ЦЕЛЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§25. Положительные и отрицательные числа. Целые числа	38

§26. Рациональные и иррациональные числа	38
§27. Действительные (вещественные) числа. Координатная прямая (числовая ось)	39
§28. Сравнение действительных чисел	40
§29. Свойства числовых неравенств	41
§30. Модуль (абсолютная величина) действительного числа	41
§31. Действия с действительными числами (сложение, вычитание, умножение, деление)	42
§32. Свойства арифметических действий над действительными числами (основные законы алгебры)	43
Тесты к главе 2	44

Глава 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§33. Примеры множеств, элементы множества, пустое множество	47
§34. Основные способы задания множеств	48
§35. Конечные и бесконечные множества	48
§36. Подмножества	49
§37. Стандартные обозначения и названия наиболее распространенных числовых множеств	50
§38. Операции над множествами	51
§39. Взаимно однозначное соответствие между множествами	55
§40. Логическая символика	56
Тесты к главе 3	57

Глава 4. ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

§41. Виды алгебраических выражений	60
§42. Область определения алгебраического выражения	61
§43. Тождественно равные выражения	61
§44. Степень натурального числа с натуральным показателем	62
§45. Степень действительного числа с натуральным показателем	62
§46. Свойства степени действительного числа с натуральным показателем	62
§47. Степень действительного числа с нулевым и отрицательным целым показателем	64
§48. Одночлен и многочлен (общие понятия)	64
§49. Многочлен n -й степени и его частные случаи для $n=0, 1, 2$	65

§50. Преобразование суммы и разности многочленов. Правило раскрытия скобок. Приведение подобных членов (слагаемых)	66
§51. Умножение многочлена на многочлен	67
§52. Деление с остатком многочлена на многочлен	67
§53. Формулы сокращенного умножения	69
§54. Треугольник Паскаля	70
§55. Выделение полного квадрата двучлена из квадратного трехчлена	70
§56. Разложение многочлена на множители	71
§57. Целые рациональные выражения	72
§58. Дробные рациональные выражения. Основное свойство рациональной дроби	72
§59. Сокращение рациональных дробей	74
§60. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю	74
§61. Сложение и вычитание рациональных дробей	76
§62. Умножение и деление рациональных дробей	77
§63. Возведение рациональных дробей в степень	78
§64. Решение примеров на тождественные преобразования рациональных выражений	79
§65. Корень n -й степени из действительного числа	80
§66. Основные свойства корней (правила действий с радикалами)	81
§67. Вынесение множителя из-под корня	82
§68. Внесение множителя под корень	82
§69. Приведение подкоренного выражения к целому виду	83
§70. Освобождение дроби от иррациональности в знаменателе дроби или в числителе дроби	83
§71. Подобные радикалы	85
§72. Степень действительного числа с рациональным показателем	85
§73. Степень действительного числа с действительным показателем	85
§74. Решение примеров на преобразование иррациональных выражений	87
§75. Среднее арифметическое и среднее геометрическое. Неравенство Коши	89
Тесты к главе 4	90

Глава 5. ФУНКЦИИ И ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФИКИ

§76. Область определения и область значений функции	93

§77. Основные способы задания функции	93
§78. Четные и нечетные функции	96
§79. Периодические функции	97
§80. Ограниченность функции	98
§81. Монотонность функции	98
§82. Промежутки знакопостоянства и корни функции	99
§83. Точки минимума и точки максимума функции. Экстремум функции	99
§84. Обратная функция	100
§85. Основные элементарные функции	101
§86. Определение и обозначение некоторых распространенных функций	103
§87. Линейная функция и ее график	104
§88. Функция $y=k/x$ и ее график	108
§89. Квадратичная функция и ее график	110
§90. Функция $y = x^3$ и ее график	112
§91. Степенная функция с натуральным показателем ($y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$)	112
§92. Степенная функция с целым отрицательным показателем ($y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$)	113
§93. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график	114
§94. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ и ее график	115
§95. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее график	116
§96. Функция $y = x $ и ее график	116
§97. Функция $y=[x]$ и ее график	117
§98. Функция $y=\{x\}$ и ее график	118
§99. Геометрические преобразования графиков функций	118
Тесты к главе 5	122

Глава 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§100. Равенства и их свойства. Тождества	127
§101. Уравнения с одной переменной (общие понятия)	128
§102. Равносильность уравнений	129
§103. Совокупность уравнений	130

§104. Классификация алгебраических уравнений	131
§105. Линейные уравнения и приводимые к ним уравнения	132
§106. Квадратные уравнения	133
§107. Неполные квадратные уравнения	135
§108. Теорема Виета	136
§109. Двучленные уравнения	137
§110. Трехчленные уравнения. Биквадратные уравнения	138
§111. Целые рациональные уравнения высших степеней. Теорема Безу	139
§112. Симметричные уравнения третьей степени	143
§113. Симметричные уравнения четвертой степени	144
§114. Решение некоторых неполных рациональных уравнений высших степеней	145
§115. Решение рациональных и дробно-рациональных уравнений методом введения новой переменной	147
§116. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля	150
§117. Метод интервалов (промежутков) при решении уравнений с модулями	152
§118. Иррациональные уравнения	154
§119. Системы уравнений	166
§120. Однородные системы уравнений	172
§121. Симметрические системы уравнений	173
Тесты к главе 6	176

Глава 7. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§122. Неравенства с одной переменной (основные понятия)	180
§123. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным	181
§124. Системы и совокупность неравенств с одной переменной	183
§125. Геометрическая интерпретация неравенств	185
§126. Неравенства второй степени	188
§127. Графическое решение неравенств второй степени	189
§128. Решение рациональных неравенств методом интервалов	192
§129. Обобщенный метод интервалов	196

§130. Метод замены переменной при решении рациональных неравенств	199
§131. Неравенства с модулем	200
§132. Иррациональные неравенства	205
Тесты к главе 7	211

Глава 8. ПРОГРЕССИИ

§133. Понятие числовой последовательности	215
§134. Арифметическая прогрессия	216
§135. Геометрическая прогрессия	220
§136. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	223
§137. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии	226
Тесты к главе 8	229

Глава 9. ТРИГОНОМЕТРИЯ

§138. Углы и их измерения	232
§139. Определение тригонометрических функций	234
§140. Основные тригонометрические тождества	238
§141. Решение важных примеров, доказательство тождеств	239
§142. Свойства тригонометрических функций	244
§143. Формулы приведения	246
§144. Основные формулы тригонометрии	248
§145. Решение примеров на тождественные преобразо- вания тригонометрических выражений	252
§146. Свойства и график функции $y=\sin x$	255
§147. Свойства и график функции $y=\cos x$	256
§148. Свойства и график функции $y=\operatorname{tg} x$	257
§149. Свойства и график функции $y=\operatorname{ctg} x$	258
§150. Обратные тригонометрические функции	259
§151. Тригонометрические функции от обратных тригонометрических функций	266
§152. Простейшие тригонометрические уравнения	269
§153. Основные методы решения тригонометрических уравнений	280
§154. Решение тригонометрических уравнений с применением комбинированных способов	299
§155. Тригонометрические уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции	310
§156. Системы тригонометрических уравнений	312
§157. Тригонометрические неравенства	313
Тесты к главе 9	320

Глава 10. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§158. Показательная функция, ее свойства и график	324
§159. Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество	326
§160. Свойства логарифмов	328
§161. Логарифмирование и потенцирование	332
§162. Логарифмическая функция, ее свойства и график	333
Тесты к главе 10	336

Глава 11. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВА

§163. Методы решения показательных уравнений	340
§164. Степенно-показательные уравнения	350
§165. Основные методы решения логарифмических уравнений	354
§166. Системы показательных и логарифмических уравнений	367
§167. Показательные неравенства	370
§168. Степенно-показательные неравенства	375
§169. Логарифмические неравенства	381
§170. Примеры решения показательных и логариф- мических неравенств повышенной сложности	388
Тесты к главе 11	392

Глава 12. ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§171. Предел функции. Непрерывность функции	395
§172. Определение производной. Основные формулы и правила дифференцирования	396
§173. Геометрический смысл производной	400
§174. Применение производной к исследованию функций и построению графиков	402
§175. Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значений функции. Экстремальные геометрические задачи	404
Тесты к главе 12	408

Глава 13. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§176. Применение геометрических преобразований ...	412
Тесты к главе 13	417

Глава 14. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

§177. Общие и частные утверждения.

Дедукция и индукция 425

§178. Метод математической индукции 425

§179. Символы суммирования и произведения 428

Тесты к главе 14 431

Ответы на тесты 435

Список литературы 445

ОТ АВТОРА

Книга написана на основе опыта преподавания авторов. В пособии — около 500 задач и примеров с подробными решениями. В нем содержатся методы решения основных типов задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в вузы и колледжи. Задачи и примеры в каждой главе расположены в основном с нарастающей степенью сложности.

В имеющихся в настоящее время учебно-методических пособиях для поступающих в вузы рассматривается решение задач среднего или повышенного уровня сложности. Отличительная особенность предлагаемого пособия состоит в том, что в нем представлен широкий набор задач — от простейших, решаемых устно, до повышенной трудности. Многие задачи и примеры решены несколькими способами. К некоторым из них дается несколько возможных форм записи решения и ответа. Особое внимание обращено на узловое понятия теории и важнейшие приемы, используемые в математике. В пособии помещены те разделы школьной математики, знание которых необходимо для успешного усвоения курса высшей математики.

Наличие теории и большого количества подробно разобранных примеров и задач дает возможность читателю самостоятельно, без посторонней помощи, ликвидировать пробелы, разобраться во всех основных разделах школьного курса математики, повторить теорию и научиться решать задачи. Качество усвоения материала можно проверить, выполнив тестовые задания в конце каждой главы.

Проработав предлагаемое пособие, читатель сможет успешно решать задачи средней и повышенной сложности.

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено широкому кругу читателей: слушателям подготовительных курсов, учащимся средних школ, гимназий, лицеев, техникумов, ПТУ. Большую помощь окажет пособие абитуриентам, готовящимся к поступлению в вуз или колледж.

Глава 1

АРИФМЕТИКА

Арифметика изучает простейшие свойства чисел и действия над ними. Знание арифметики необходимо практически для любой сферы человеческой деятельности. Великий немецкий математик К.Ф. Гаусс писал: «Математика — царица наук, арифметика — царица математики».

§1. Натуральные числа

Число — это первичное понятие математики, математическая абстракция. Цифры — это математические знаки для обозначения чисел.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... называются *натуральными* или *целыми положительными числами*. Эти числа используются для счета предметов и для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов.

Число 0 (нуль) не считается натуральным.

Для записи натуральных чисел пользуются *десятичной системой счисления*, в основе которой лежат цифры (числа) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Среди натуральных чисел есть наименьшее (число 1), но нет наибольшего. За каждым натуральным числом следует в порядке возрастания еще одно, на единицу большее, натуральное число, за которым следует другое, и так далее. Все натуральные числа записать невозможно, поэтому при записи натуральных чисел записывается несколько первых натуральных чисел, после которых ставится многоточие, например, 1, 2, 3, 4, ...

Важнейшее значение в десятичной системе счисления имеет число 10. Десять единиц называется *десятком*, десять десятков — *сотней*, десять сотен — *тысячей* и так далее. Эти названия используются при чтении натуральных чисел в десятичной системе счисления: 1 — единица, 10 — десять, 100 — сто, 1 000 — тысяча, 10 000 — десять тысяч, 100 000 — сто тысяч, 1 000 000 — миллион, 10 000 000 — десять миллионов, 100 000 000 — сто миллионов, 1 000 000 000 — миллиард, 10 000 000 000 — десять миллиардов, 100 000 000 000 — сто миллиардов, 1 000 000 000 000 — триллион, ..., 1 000 000 000 000 000 — квадриллион.

Если обозначить $10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \dots 10}_n$, то 10^2 — сто, 10^3 — тысяча, 10^6 — миллион, 10^9 — миллиард, 10^{12} — триллион, 10^{15} — квадриллион.

Если натуральное число записано одной цифрой, то оно называется *однозначным*, двумя цифрами — *двузначным*, тремя цифрами — *трехзначным*, четырьмя цифрами — *четырёхзначным* и так далее.

Например:

1, 2, 3, 4, 7, 9 — однозначные числа;

10, 11, 34, 87, 99 — двузначные числа;

100, 126, 367, 768, 999 — трехзначные числа;

1000, 1256, 5567, 9999 — четырехзначные числа;

10000, 10001, 65589, 99999 — пятизначные числа.

Число 0 (*нуль*) считается *однозначным числом*. Двузначные, трехзначные, четырехзначные числа и так далее называются *многозначными числами*.

Первая цифра справа в десятичной записи натурального числа называется *цифрой первого разряда* или *разряда единиц*, вторая цифра справа — *цифрой второго разряда* или *разряда десятков*, третья цифра справа — *цифрой третьего разряда* или *разряда сотен*, четвертая цифра справа — *цифрой четвертого разряда* или *разряда тысяч*, пятая цифра справа — *цифрой пятого разряда* или *разряда десятков тысяч* и т.д.

Например, запись 4369 означает: 4 — цифра тысяч, 3 — цифра сотен, 6 — цифра десятков, 9 — цифра единиц. Отсюда можем записать:

$$4369 = 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 9.$$

§2. Арифметические действия над натуральными числами

В арифметике определены 4 действия: сложение, вычитание, умножение, деление. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число. Если a, b — натуральные числа, то $s = a + b$ также натуральное число, a, b — *слагаемые*, s — *сумма*; $p = a \cdot b$ также натуральное число, a, b — *множители*, p — *произведение*.

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

1) $a + b = b + a$ (переместительный или коммутативный закон сложения);

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (сочетательный или ассоциативный закон сложения);

3) $a \cdot b = b \cdot a$ (переместительный или коммутативный закон умножения);

4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (сочетательный или ассоциативный закон умножения);

5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (распределительный или дистрибутивный закон умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число. Так, например, $10 - 3 = 7$ — натуральное число; $5 - 13 = -8$ — не является натуральным числом; $45/9 = 5$ — натуральное число; $25/2 = 12,5$ — не является натуральным числом.

Заметим, что *нельзя делить на ноль*. Так, например, записи $7/0$; $5/0$; $0/0$ не имеют смысла.

Пусть a, b, c — натуральные числа. Если $a - b = c$, то говорят, что a — *уменьшаемое*, b — *вычитаемое*, c — *разность*. Если $a / b = c$, то говорят, что a — *делимое*, b — *делитель*, c — *частное*, число a называют *кратным* числа b , а число b — *делителем* числа a . Если a — кратное числа b , то существует натуральное число c , такое что $a = b \cdot c$.

§3. Числовые выражения. Порядок арифметических действий в числовом выражении

Числовое выражение — это запись, состоящая из чисел, соединенных знаками арифметических действий, и скобок.

Значением числового выражения называется число, которое получится, если в данном числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая порядок арифметических действий.

Порядок арифметических действий в числовом выражении следующий: сначала выполняют действия в скобках, внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а затем сложение и вычитание.

Например, в числовом выражении $((135 - 15) \cdot 5 + 10 \cdot 12) : 8 - 60$ порядок арифметических действий следующий:

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\ ((135 - 15) \cdot 5 + 10 \cdot 12) : 8 - 60. \end{array}$$

Замечание. Иногда употребляют еще прямые и фигурные скобки, т.е. [...] и {...}. При этом вначале выполняют действия в круглых скобках, затем в прямых, а затем уже в фигурных. Применяя, например, круглые и прямые скобки, приведенное выше выражение можно записать так:

$$[(135 - 15) \cdot 5 + 10 \cdot 12] : 8 - 60.$$

§4. Деление с остатком

Если натуральное число a не делится на натуральное число b , то не существует такого натурального числа c , что $a = b \cdot c$. В этом случае говорят о *делении с остатком*. Так, при делении 51 на 8 в частном получается 6 и в остатке 3, таким образом, $51 = 8 \cdot 6 + 3$ или $51/8 = 6 + 3/8$. В общем случае можем записать: если a — делимое, b — делитель ($a > b$), p — частное, r — остаток, то $a = b \cdot p + r$, где $r < b$. Иначе можно записать: $a/b = p + r/b$. Здесь a, b, p, r — натуральные числа (если a делится на b без остатка, то $r = 0$, т.е. r не является натуральным числом). В частности, запись $a = 5 \cdot p + 3$ означает, что при делении числа a на 5 получается число p и остаток 3.

Пример. Найти частное и остаток от деления числа 587 на число 31.

Решение.

Выполняем деление «углом»:

$$\begin{array}{r} 587 \overline{) 31} \\ \underline{31} \\ 277 \\ \underline{248} \\ 29 \end{array}$$

В результате деления получаем частное 18, остаток 29. Можем записать: $587 = 18 \cdot 31 + 29$ или $587/31 = 18 + 29/31$.

Ответ: частное = 18, остаток = 29.

§5. Признаки делимости натуральных чисел

Признак делимости на 2. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2. Например, числа 84, 348, 576, 6284, 60530 делятся на 2.

Признак делимости на 3. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Например, числа 186, 252, 348, 1062, 15189 делятся на 3.

Признак делимости на 4. Натуральное число делится на 4, если две его последние цифры образуют число, делящееся на 4, или две его последние цифры — нули. Например, числа 80, 132, 448, 700 делятся на 4.

Признак делимости на 5. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5. Например, 15, 25, 60, 385, 12005 делятся на 5.

Признак делимости на 9. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Например, числа 162, 261, 828, 3141, 5796 делятся на 9.

Признак делимости на 10. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0. Например, числа 100, 180, 250, 1050, 11250 делятся на 10.

Признак делимости на 25. Натуральное число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры либо 25, либо 50, либо 75, либо нули (00). Например, числа 125, 150, 975, 2200, 2150, 34875 делятся на 25.

Заметим, что справедливы следующие свойства делимости суммы и произведения: если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число (*теорема о делимости суммы*); если в произведении хотя бы один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (*теорема о делимости произведения*). Например, сумма $72+99=171$ делится на 9. Не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $39 \cdot 55 \cdot 136$ делится на 5, так как один из множителей (55) делится на 5.

§6. Разложение натурального числа на простые множители

Всякое число, кроме единицы, которое делится только на 1 и само на себя, называется *простым*. Таким образом, простое число имеет только два делителя: само это число и единицу. Число, которое делится не только на единицу и само на себя, но еще и на другие числа, называется *составным*. Составное число имеет более двух делителей. Число 1 (единица) не относится ни к простым, ни к составным числам.

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители, и только одним способом.

При разложении чисел на простые множители обычно записывают столбик, при этом делитель располагается справа от

вертикальной черты, а частное записывается под делимым. Так, для чисел 300, 630 имеем:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Если в разложении числа на простые множители один и тот же множитель a встречается n раз, то записывают коротко

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n = a^n$. Выражение a^n называется степенью, a — основа-

нием степени, n — показателем степени.

Отсюда $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Замечание. Разложение натурального числа на произведение степеней простых сомножителей (основная теорема арифметики) имеет вид:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{m-1}^{\alpha_{m-1}} \cdot p_m^{\alpha_m},$$

где N — любое натуральное число, большее 1;

$p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$ — попарно различные простые числа;

α_i — натуральные числа ($i = 1, 2, \dots, m-1, m$).

§7. Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное

Делитель данного числа есть такое число, на которое данное число делится без остатка (нацело). Например, число 9 есть делитель числа 63, число 42 есть делитель числа 126.

Пусть даны два числа 60 и 72.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 — делители числа 60.

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72 — делители числа 72.

Среди выписанных делителей есть одинаковые 1, 2, 3, 4, 6, 12. Все эти числа называются общими делителями чисел 60 и 72, а наибольшее среди них — наибольшим общим делителем (для чисел 60 и 72 — это число 12). *Наибольшим общим делителем* нескольких чисел называется наибольшее число, на которое все данные числа делятся без остатка. Наибольший общий делитель n чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ обозначается НОД, Д или $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Для нахождения наибольшего общего де-

лителя находится произведение общих простых множителей, причем каждый из них берется с наименьшим из имеющихся показателей.

Взаимно простыми числами называются числа, не имеющие общих делителей, кроме единицы. Иначе говоря, если a и b — взаимно простые числа, то $\text{НОД}(a; b) = 1$.

Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел без остатка. Например, для чисел 4 и 6 число 12 есть наименьшее общее кратное; для чисел 12 и 18 наименьшее общее кратное есть число 36. Наименьшее общее кратное n чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ обозначается НОК, К или $\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Для нахождения наименьшего общего кратного находится произведение всех простых множителей, причем каждый из них берется с наибольшим из имеющихся показателей.

Пример 1. Найти НОД и НОК чисел 126, 540, 630.

Решение.

$$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5, \quad 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7. \quad \text{Отсюда:}$$

$$\text{НОД}(126; 540; 630) = 2 \cdot 3^2 = 18;$$

$$\text{НОК}(126; 540; 630) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 3780. \quad \text{Ответ: } \{ 18; 3780 \}.$$

Пример 2. Найти НОД и НОК чисел 144, 1008, 1224.

Решение.

$$144 = 2^4 \cdot 3^2, \quad 1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17. \quad \text{Отсюда:}$$

$$\text{НОД}(144; 1008; 1224) = 2^3 \cdot 3^2 = 72;$$

$$\text{НОК}(144; 1008; 1224) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 17 = 17136. \quad \text{Ответ: } \{ 72; 17136 \}.$$

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство $\text{НОД}(a; b) \cdot \text{НОК}(a; b) = a \cdot b$. В частности, если числа a и b взаимно простые, т. е. $\text{НОД}(a; b) = 1$, то $\text{НОК}(a; b) = ab$. Это означает, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.*

§8. Обыкновенные дроби

Обыкновенной дробью называется одна или несколько равных частей единицы. Например, дробь $1/4$ означает, что единица разделена на 4 равные части и взята одна такая часть; дробь $3/5$ означает, что единица разделена на 5 равных частей и взяты три такие части (рис. 1).

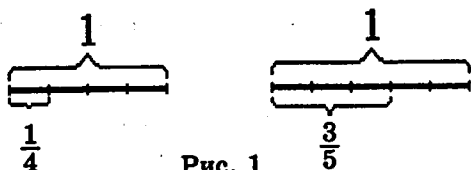


Рис. 1

Обыкновенная дробь записывается с помощью черты и двух натуральных чисел. Число, стоящее под чертой и показывающее, на сколько равных частей разделена единица, называется *знаменателем дроби*. Число, стоящее над чертой и показывающее, сколько взято таких равных частей, называется *числителем дроби*.

Дроби читаются так: $\frac{1}{3}$ (одна третья), $\frac{2}{5}$ (две пятых). Дробную

черту можно рассматривать как знак деления. Например, $\frac{3}{4} = 3:4$,

$\frac{8}{17} = 8:17$. Единицу можно представить как дробь, у которой чис-

литель равен знаменателю. Например, $1 = \frac{3}{3}$; $1 = \frac{1}{1}$; $1 = \frac{13}{13}$.

Замечание. Дробь можно писать с помощью наклонной, горизонтальной черты, а также с помощью знака деления «:», на-

пример, $1/3 = \frac{1}{3} = 1:3$; $2/5 = \frac{2}{5} = 2:5$.

§9. Правильные и неправильные дроби; смешанные дроби

Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называется *правильной*. Например, дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{25}{39}$ являются правильными.

Дробь, в которой числитель больше знаменателя или равен знаменателю, называется *неправильной*. Примеры неправильных дробей: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{8}{5}$.

Число, состоящее из натурального числа и дроби, называется *смешанным* (или *смешанной дробью*). Например, $6\frac{1}{2}$, $5\frac{9}{13}$,

— смешанные числа (смешанные дроби).

Чтобы записать смешанное число в виде неправильной дроби, нужно умножить его целую часть на знаменатель дробной части и к произведению прибавить числитель дробной части. Полу-

ченная сумма будет числителем дроби, а знаменателем будет знаменатель дробной части. Например:

$$6\frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{13}{2}; \quad 9\frac{2}{5} = \frac{9 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{47}{5}.$$

Из любой неправильной дроби можно выделить целую часть. Для этого нужно разделить с остатком числитель на знаменатель. Частное от деления будет целой частью числа, остаток — числителем, а делитель — знаменателем. Например:

$$\frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}; \quad \frac{61}{6} = 10\frac{1}{6}.$$

§10. Основное свойство дроби

Две дроби a/b и m/n называются *равными*, если $a \cdot n = b \cdot m$. Например, $3/5 = 6/10$ (так как $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$); $5/7 = 15/21$ (так как $5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$). Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной. Это свойство называется *основным свойством дроби*. Например, $3/4 = 6/8$ (дробь справа получается из дроби слева умножением числителя и знаменателя ее на 2); $12/18 = 2/3$ (разделили числитель и знаменатель дроби слева на 6).

В общем случае основное свойство дроби можно записать

так: $a/b = a \cdot k / (b \cdot k)$, $a/b = \frac{a/k}{b/k}$, где k — любое натуральное число.

§11. Сокращение дроби

Пользуясь основным свойством дроби, иногда можно заметить данную дробь другой, равной данной, но с меньшим числителем и меньшим знаменателем. Такую замену называют *сокращением дроби*. Иначе говоря, *сокращение дроби* — это деление числителя и знаменателя на их общий делитель. Например, $90/120 = 9/12$ (числитель и знаменатель мы разделили на число 10); полученную дробь снова можно сократить, разделив числитель и знаменатель на 3, т.е. $9/12 = 3/4$. Таким образом, $90/120 = 9/12 = 3/4$. Заметим, что можно было бы сразу записать $90/120 = 3/4$ (при этом числитель и знаменатель мы разделили на 30).

В общем случае сокращение дроби возможно, если числитель и знаменатель не взаимно простые числа; если же числитель и знаменатель — взаимно простые числа, то дробь называется *несократимой*. Например, $3/7$, $5/6$, $13/24$ — несократимые дроби. Основная цель сокращения дроби — замена данной дроби равной ей несократимой дробью.

§12. Приведение дробей к общему знаменателю

Пусть даны две дроби $3/4$ и $8/7$. Они имеют разные знаменатели: 4 и 7. Воспользовавшись основным свойством дроби, можно заменить эти дроби другими дробями, равными им, причем такими, что у полученных дробей будут одинаковые знаменатели. Такое преобразование называется *приведением дробей к общему знаменателю*. Умножив числитель и знаменатель дроби $3/4$ на 7, получим $3/4 = 3 \cdot 7 / (4 \cdot 7) = 21/28$; умножив числитель и знаменатель дроби $8/7$ на 4, получим $8/7 = 8 \cdot 4 / (7 \cdot 4) = 32/28$. Итак, дроби $3/4$ и $8/7$ приведены к общему знаменателю: $3/4 = 21/28$; $8/7 = 32/28$.

Заметим, что приведенное выше решение поставленной задачи не является единственно возможным. Например, дроби можно было привести к общему знаменателю 56:

$3/4 = 3 \cdot 14 / (4 \cdot 14) = 42/56$; $8/7 = 8 \cdot 8 / (7 \cdot 8) = 64/56$,
и к общему знаменателю 84:

$3/4 = 3 \cdot 21 / (4 \cdot 21) = 63/84$; $8/7 = 8 \cdot 12 / (7 \cdot 12) = 96/84$,
и вообще к любому знаменателю, делящемуся одновременно на 4 и на 7.

Таким образом, привести дроби к общему знаменателю можно многими способами, но обычно стараются привести дроби к *наименьшему общему знаменателю*, который равен наименьшему общему кратному знаменателей данных дробей.

Пример. Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $5/12$ и $7/18$.

Решение.

Найдем наименьшее общее кратное чисел 12 и 18, т.е. $\text{НОК}(12;18)=36$. Имеем $36:12=3$, поэтому, чтобы привести дробь $5/12$ к знаменателю 36, надо ее числитель и знаменатель умножить на 3:

$$5/12 = 5 \cdot 3 / (12 \cdot 3) = 15/36.$$

$36:18=2$, поэтому, чтобы привести дробь $7/18$ к знаменателю 36, надо ее числитель и знаменатель умножить на 2:

$$7/18=7 \cdot 2/(18 \cdot 2)=14/36.$$

Дроби приведены к наименьшему общему знаменателю:
 $5/12=15/36$; $7/18=14/36$.

Числа 3 и 2 называют *дополнительными множителями* соответственно для первой и второй дроби. Используются следующие записи:

$$\begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \frac{5}{12} = \frac{5}{12} = \frac{15}{36}; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \frac{7}{18} = \frac{7}{18} = \frac{14}{36}. \end{array}$$

Таким образом, можно сформулировать *правило приведения дроби к наименьшему общему знаменателю*. Чтобы привести дробь к наименьшему общему знаменателю, нужно:

- 1) найти наименьшее общее кратное знаменателей дробей;
- 2) вычислить дополнительные множители, разделив наименьшее общее кратное на каждый знаменатель;
- 3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на соответствующий дополнительный множитель.

§13. Сложение и вычитание дробей

При сложении (вычитании) дробей с одинаковыми знаменателями к числителю первой дроби прибавляют числитель второй дроби (из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби) и оставляют тот же знаменатель. Полученную дробь, если это возможно, сокращают. Например, $5/11+3/11=(5+3)/11=8/11$; $6/17-2/17=(6-2)/17=4/17$.

При сложении (вычитании) дробей с различными знаменателями предпочтительнее предварительно привести их к наименьшему общему знаменателю. Например,

$$\begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{2} \\ \frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{15+14}{36} = \frac{29}{36}. \end{array}$$

Замечание 1. При сложении (вычитании) дробей не обязательно приводить дроби к наименьшему общему знаменателю, а можно приводить к общему знаменателю, однако в этом случае приходится иметь дело с большими по величине числами. Например,

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 18 + 7 \cdot 12}{216} = \frac{90 + 84}{216} = \frac{174}{216} = \frac{29}{36}.$$

Как видим, предпочтительнее приводить дроби именно к наименьшему общему знаменателю, а не просто к общему знаменателю.

При сложении смешанных дробей нужно сложить отдельно целые части и дробные части. Например:

$$a) 5\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = 5 + 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 7 + \frac{2}{4} = 7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2};$$

$$б) 3\frac{1}{3} + 5\frac{1}{2} = 3 + 5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{2+3}{6} = 8 + \frac{5}{6} = 8\frac{5}{6};$$

$$в) 3\frac{9}{10} + 4\frac{7}{10} = 3 + 4 + \frac{9+7}{10} = 7 + \frac{16}{10} = 7 + 1\frac{3}{5} = 8\frac{3}{5}.$$

При вычитании смешанных дробей следует различать следующие случаи:

а) дробная часть уменьшаемого больше или равна дробной части вычитаемого; в этом случае из целой части уменьшаемого вычитают целую часть вычитаемого, а из дробной части уменьшаемого — дробную часть вычитаемого, например,

$$\begin{array}{c} \quad \quad \quad \underbrace{3} \quad \underbrace{2} \\ 5\frac{5}{8} - 3\frac{5}{12} = 5 - 3 + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} = 2 + \frac{15-10}{24} = 2 + \frac{5}{24} = 2\frac{5}{24}; \end{array}$$

б) дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого (например, $5\frac{6}{11} - 2\frac{9}{11}$); в этом случае одну из единиц целой части уменьшаемого нужно заменить равной ей дробью. Например:

$$\begin{array}{l} 5\frac{6}{11} - 2\frac{9}{11} = 5 - 2 + \frac{6}{11} - \frac{9}{11} = 3 + \frac{6-9}{11} = 2 + 1 + \frac{6-9}{11} = 2 + \frac{11}{11} + \\ + \frac{6-9}{11} = 2\frac{11+6-9}{11} = 2\frac{8}{11}; \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \quad \quad \quad \underbrace{5} \quad \underbrace{4} \\ 8\frac{3}{8} - 5\frac{7}{10} = 8 - 5 + \frac{3}{8} - \frac{7}{10} = 3\frac{15-28}{40} = 2 + 1 + \frac{15-28}{40} = 2 + \frac{40}{40} + \\ + \frac{15-28}{40} = 2\frac{40+15-28}{40} = 2\frac{27}{40}. \end{array}$$

Замечание 2. При сложении (вычитании) смешанных дробей можно предварительно представить их в виде неправильной дроби, а затем производить сложение (вычитание). Например:

$$\overset{(2)}{3} \frac{1}{3} + 5 \overset{(3)}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{3} + \frac{11}{2} = \frac{20 + 33}{6} = \frac{53}{6} = 8 \frac{5}{6};$$

$$\overset{(3)}{5} \frac{5}{8} - 3 \overset{(2)}{\frac{5}{12}} = \frac{45}{8} - \frac{41}{12} = \frac{135 - 82}{24} = \frac{53}{24} = 2 \frac{5}{24}.$$

Этим способом обычно пользуются тогда, когда имеют дело с небольшими по величине числами.

Замечание 3. Действие вычитания дробей может привести к понятию *отрицательной дроби*, которая получается, если перед положительной дробью поставить знак «минус». Используя отрицательные дроби, можно при вычитании смешанных дробей поступать так:

$$\begin{aligned} \overset{(5)}{8} \frac{3}{8} - 5 \overset{(4)}{\frac{7}{10}} &= 8 - 5 + \frac{3}{8} - \frac{7}{10} = 3 + \frac{15 - 28}{40} = 3 - \frac{13}{40} = 2 + 1 - \frac{13}{40} = \\ &= 2 + \frac{40 - 13}{40} = 2 \frac{27}{40}. \end{aligned}$$

При вычитании дробей можно не использовать единицу, то есть решение вышеприведенного примера записывать так:

$$\begin{aligned} \overset{(5)}{8} \frac{3}{8} - 5 \overset{(4)}{\frac{7}{10}} &= 8 - 5 + \frac{3}{8} - \frac{7}{10} = 3 + \frac{15 - 28}{40} = 3 - \frac{13}{40} = \frac{3 \cdot 40 - 13}{40} = \\ &= \frac{107}{40} = 2 \frac{27}{40}. \end{aligned}$$

Отметим, что приведенную разность дробей можно было бы находить и с использованием неправильных дробей, а именно:

$$\overset{(5)}{8} \frac{3}{8} - 5 \overset{(4)}{\frac{7}{10}} = \frac{67}{8} - \frac{57}{10} = \frac{67 \cdot 5 - 57 \cdot 4}{40} = \frac{335 - 228}{40} = \frac{107}{40} = 2 \frac{27}{40}.$$

Для данного конкретного примера вычисления с использованием неправильных дробей, как видим, получаются более громоздкими.

§14. Умножение дробей

Умножение обыкновенных дробей выполняют следующим

образом: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, т. е. перемножают отдельно числители, отдельно знаменатели, первое произведение делают числителем, второе знаменателем. Полученную дробь, если это возможно, сокращают.

Например: $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 13} = \frac{6}{65}$; $\frac{3}{7} \cdot \frac{21}{18} = \frac{3 \cdot 21}{7 \cdot 18} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 3}{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

При умножении смешанных дробей их предварительно представляют в виде неправильных дробей, а затем перемножают. Например,

$$3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{17}{4} = \frac{7 \cdot 17}{2 \cdot 4} = \frac{119}{8} = 14\frac{7}{8}.$$

§15. Деление дробей

При делении дроби на дробь числитель делимого умножают на знаменатель делителя, а знаменатель делимого — на числитель делителя. Первое произведение служит числителем, а второе — зна-

менателем частного: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. Например:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10}; \quad \frac{3}{7} : \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Два числа называются *взаимно обратными*, если их произведение равно 1. Например, 2 и $1/2$, 5 и $1/5$, x и $1/x$ — примеры взаимно обратных чисел. Любые две дроби m/n и n/m являются взаимно обратными, так как их произведение равно 1.

Правило деления дробей $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ можно коротко

сформулировать так: при делении дробей делимое $\frac{a}{b}$ умножается

на дробь $\frac{d}{c}$, обратную делителю $\frac{c}{d}$, например, $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$.

Если нужно разделить дробь на дробь, в случае когда одна или обе дроби — смешанные, то нужно предварительно представить смешанную дробь в виде неправильной дроби, например:

$$2\frac{3}{5} : 1\frac{1}{2} = \frac{13}{5} : \frac{3}{2} = \frac{13 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{26}{15} = 1\frac{11}{15}.$$

Любое целое число можно представить в виде дроби. Например, $1 = \frac{1}{1}$, $7 = \frac{7}{1}$, $n = \frac{n}{1}$. Это позволяет производить умножение и деление целого числа на дробь (или наоборот). Например:

$$2\frac{3}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{6}{5} = \frac{10}{5} = 2\frac{1}{5}; \quad 7 \cdot \frac{4}{17} = \frac{7}{1} \cdot \frac{4}{17} = \frac{7 \cdot 4}{1 \cdot 17} = \frac{28}{17} = 1\frac{11}{17}.$$

§16. Примеры на действия с дробями

Пример 1. Выполнить действия $3\frac{2}{15} + 4\frac{1}{30} - 1\frac{11}{20}$.

Решение.

Первый способ. Обращаем каждое из смешанных чисел в неправильную дробь, а затем выполняем указанные действия:

$$3\frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 15 + 2}{15} = \frac{47}{15}; \quad 4\frac{1}{30} = \frac{4 \cdot 30 + 1}{30} = \frac{121}{30};$$

$$1\frac{11}{20} = \frac{1 \cdot 20 + 11}{20} = \frac{31}{20};$$

$$3\frac{2}{15} + 4\frac{1}{30} - 1\frac{11}{20} = \frac{47}{15} + \frac{121}{30} - \frac{31}{20} = \frac{188 + 242 - 93}{60} = \frac{337}{60} = 5\frac{37}{60}.$$

Ответ : $\left\{ 5\frac{37}{60} \right\}$.

Второй способ. Складываем и вычитаем отдельно целые и дробные части:

$$\begin{aligned} 3\frac{2}{15} + 4\frac{1}{30} - 1\frac{11}{20} &= (3 + 4 - 1) + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} - \frac{11}{20} = 6 + \frac{8 + 2 - 33}{60} = \\ &= 5 + 1 + \frac{8 + 2 - 33}{60} = 5 + \frac{60 + 8 + 2 - 33}{60} = 5 + \frac{37}{60} = 5\frac{37}{60}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ 5\frac{37}{60} \right\}$.

Третий способ. В процессе решения используем отрицательную дробь:

$$3\frac{2}{15} + 4\frac{1}{30} - 1\frac{11}{20} = 3 + 4 - 1 + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} - \frac{11}{20} = 6 + \frac{8 + 2 - 33}{60} = 6 - \frac{23}{60} = \frac{360 - 23}{60} = \frac{337}{60} = 5\frac{37}{60}. \quad \text{Ответ: } \left\{ 5\frac{37}{60} \right\}.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1:1\frac{1}{9}$.

Решение.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1:1\frac{1}{9} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5} + \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 10}{1 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{4 \cdot 5} + \frac{5}{3} - \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 10} =$$

$$\underbrace{\frac{6}{5} + \frac{10}{3} - \frac{9}{10}} = \frac{36 + 50 - 27}{30} = \frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}. \quad \text{Ответ: } \left\{ 1\frac{29}{30} \right\}.$$

§17. Десятичные дроби

Дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т. д., называют *десятичной дробью*. Например, $\frac{1}{10} = 0,1$; $\frac{7}{10} = 0,7$;

$\frac{31}{100} = 0,31$; $\frac{9}{1000} = 0,009$ и т. д. Можно сказать, что *десятичная дробь* — это другая форма записи дроби со знаменателем 10^n , где n — натуральное число.

Для десятичных дробей вводится понятие значащей цифры числа. *Значащими цифрами* числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале. Например, в числе 17,5103 шесть значащих цифр (1,7,5,1,0,3); в числе 0,9007 четыре значащие цифры (9,0,0,7); в числе 0,007 одна значащая цифра (7).

§18. Сложение и вычитание десятичных дробей

При сложении (вычитании) десятичных дробей числа записывают так, чтобы одинаковые разряды были записаны один под другим, а запятая — под запятой, и складывают (вычитают) как натуральные числа. Например,

$$\begin{array}{r} +0,234 \\ 3,153; \\ \hline 3,387 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -7,459 \\ 2,181; \\ \hline 5,278 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -13,300 \\ 9,674. \\ \hline 3,626 \end{array}$$

§19. Умножение десятичных дробей

Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, нужно выполнить умножение, не обращая внимание на запятые, и в полученном произведении отделить справа запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе. Например,

$$0,132 \cdot 2,34 = 0,30888;$$

$$\begin{array}{r} 0,132 \\ 2,34 \\ \hline 528 \\ 396 \\ \hline 264 \\ \hline 0,30888 \end{array}$$

Рассмотрим умножение десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т.д. Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т.д., нужно в этой дроби перенести запятую вправо на столько цифр, сколько нулей в множителе (приписав в случае необходимости к дроби справа определенное число нулей). Например:

$$2,63 \cdot 10 = 26,3; 3,682 \cdot 100 = 368,2;$$

$$2,589 \cdot 1000 = 2589; 5,43 \cdot 10000 = 54300.$$

§20. Деление десятичных дробей

Деление десятичной дроби на натуральное число выполняется так же, как деление натурального числа на натуральное, а запятую в частном ставят после того, как закончено деление целой части. Например, $19,2 : 12 = 1,6$;

$$\begin{array}{r} 19,2 \overline{)12} \\ \underline{12} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

Заметим, что в приведенном примере можно непосредственно перед делением «углом» умножить делимое и делитель на 10 и, таким образом, делить не дробь на число, а целое число на целое число, т.е. $19,2 : 12 = 192 : 120$.

Если целая часть делимого меньше делителя, то в ответе получается нуль целых. Деление можно производить либо не-

посредственно, либо увеличивая числитель и знаменатель в 10, 100 и т.д. раз. Например, $0,192 : 12 = 0,016$. При непосредственном делении получаем

$$\begin{array}{r} 0,192 \overline{)12} \\ \underline{12} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

При предварительном умножении на 1000 числителя и знаменателя получаем

$$\begin{array}{r} 192 \overline{)12000} \\ \underline{19200} \\ 12000 \\ \underline{72000} \\ 72000 \\ \underline{} \\ 0 \end{array}$$

Рассмотрим деление десятичной дроби на десятичную. Пусть нужно разделить 3,456 на 0,36. Для этого и в делимом, и в делителе перенесем запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется после запятой в делителе. Таким образом, для нашего примера умножим делимое и делитель на 100. Получаем

$$\frac{3,456}{0,36} = \frac{345,6}{36} = 9,6.$$

Заметим, что мы могли бы перенести запятую на три цифры в числителе и знаменателе и делить уже натуральное число на натуральное.

$$\frac{3,456}{0,36} = \frac{3456}{360} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 48}{8 \cdot 9 \cdot 5} = \frac{48}{5} = 9,6.$$

Чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно в делимом и в делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их имеется после запятой в делителе, а потом выполнить деление на натуральное число. Например, $\frac{4}{1,6} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Чтобы разделить десятичную дробь на 10^n (n - натуральное число), надо в этой дроби перенести запятую на n цифр влево. Например, $35,13 : 10^3 = 0,03513$. Деление не всегда выполнимо для десятичных дробей, т.к. в результате деления не всегда получается конечная десятичная дробь. Разделим, например,

$$2,9 \text{ на } 0,9: \frac{2,9}{0,9} = \frac{29}{9} = 3,222\dots \text{Получилась так называемая бес-}$$

конечная десятичная дробь. В таких случаях нужно переходить к обыкновенным или смешанным дробям, то есть, $\frac{2,9}{0,9} = \frac{29}{9} = 3\frac{2}{9}$.

При выполнении действий с дробями может оказаться, что одни числа записаны в виде обыкновенных дробей, другие — в виде смешанных, третьи — в виде десятичных. При выполнении действий над такими числами можно либо обращать десятичные дроби в обыкновенные или смешанные и применять правила действий над обыкновенными дробями, либо обращать обыкновенные и смешанные дроби в десятичные (если это возможно) и применять правила действий над десятичными дробями.

§21. Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную.

Периодические дроби

Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, достаточно в числителе дроби записать число, стоящее после запятой, а в знаменателе — единицу с нулями, причем нулей должно быть столько, сколько цифр справа от запятой. Например:

$$0,3 = \frac{3}{10}; \quad 0,37 = \frac{37}{100}; \quad 0,003 = \frac{3}{1000}.$$

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, следует разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на целое число. Например, $\frac{9}{25} = 0,36$; выполнив деление «углом», получим:

$$\begin{array}{r|l} 9,0 & 25 \\ -90 & 0,36 \\ \hline 75 & \\ -75 & \\ \hline 150 & \\ -150 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Как уже отмечалось, при делении дробей (или натуральных чисел) может получиться бесконечная десятичная дробь.

Например, $\frac{0,6}{7} = 0,085714285\dots$

Бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются, называется *периодической*. Примеры периодических дробей: $0,111\dots$, $4,333\dots$, $5,8777\dots$, $9,0131313\dots$. Последовательно повторяющаяся группа цифр (минимальная) после запятой в десятичной записи числа называется

периодом. Так, $0,111\dots$ — период равен 1; $4,3333\dots$ — период равен 3; $5,8777\dots$ — период равен 7; $9,0131313\dots$ — период равен 13. Для краткости принято период записывать один раз, заключая его в круглые скобки: $0,111\dots=0,(1)$, $4,333\dots=4,(3)$, $5,8777\dots=5,8(7)$, $9,0131313\dots=9,0(13)$.

Если период начинается сразу после запятой, то дробь называется *чисто периодической*; если между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называется *смешанной периодической*. Так, например, $3,(41)=3,414141\dots$ — чистая периодическая дробь; $5,8(7)$ — смешанная периодическая дробь.

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную: чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность числителем; в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом. Например:

$$0,(36) = \frac{36 - 0}{99} = \frac{36}{99} = \frac{9 \cdot 4}{9 \cdot 11} = \frac{4}{11}; \quad 5,8(12) = \frac{5812 - 58}{990} = \frac{5754}{990} = \frac{959}{165}.$$

Замечание. Переводить бесконечную периодическую дробь в обыкновенную можно и другими способами, не пользуясь приведенным выше правилом. Например, обратим в обыкновенную дробь число $0,(36)$. Обозначим $x = 0,(36) = 0,363636\dots$. Умножив обе части последнего равенства на 100, получаем $100x = 36,3636\dots = 36,(36)$.

$$\text{Отсюда } 100x - x = 36,(36) - 0,(36) = 36, \quad 99x = 36, \quad x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$$

$$\text{Таким образом, } 0,(36) = \frac{4}{11}.$$

Обратим теперь $5,8(12) = 5,8121212\dots$ в обыкновенную (неправильную) дробь. Обозначим $y = 5,8(12)$. Тогда $10y = 58,(12)$, $1000y = 5812,(12)$, $1000y - 10y = 5812,(12) - 58,(12) = 5754$, $990y = 5754$,

$$y = \frac{5754}{990} = \frac{959}{165}. \quad \text{Окончательно, } 5,8(12) = \frac{959}{165}.$$

Переводить бесконечную периодическую дробь в обыкновенную можно и с использованием формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Например,

$$0,333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{0,3}{1 - 0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

§22. Отношение. Пропорция. Свойства пропорции

Отношением числа a к числу b называется частное чисел a и b , т.е. a/b (или $a:b$). В отношении a/b число a называют предыдущим членом, b — последующим членом.

Пропорцией называют равенство двух отношений, т.е.

$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$; a и n называют крайними членами пропорции, b и m — средними членами пропорции.

Свойства пропорции

1) Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов, т.е. если $a/b = m/n$, то $an = bm$.

2) Из пропорции $a/b = m/n$ вытекают следующие пропорции: $a/m = b/n$, $n/b = m/a$, $n/m = b/a$, т.е. в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

3) Чтобы найти неизвестный крайний (средний) член пропорции, надо произведение средних (крайних) членов разделить на

известный крайний (средний) член пропорции: $\frac{x}{a} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot m}{n}$;

$$\frac{a}{x} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot n}{m}; \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{n} \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot n}{b}; \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{x} \Leftrightarrow x = \frac{b \cdot m}{a}.$$

Например: $\frac{2}{x} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 6}{5} = \frac{12}{5}$; $\frac{x}{4} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 7}{9} = \frac{28}{9}$.

§23. Проценты

Процентом называется сотая часть какого-либо числа. Процент обозначается знаком «%». Если данное число принять за единицу, то 1% составляет 0,01 этого числа, 10% составляют 0,1 числа, 25% составляют 0,25 числа (или $1/4$ числа), 50% составляют 0,5 числа (или $1/2$ числа), 75% составляют 0,75 числа (или $3/4$ числа) и т.д. Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100. Например, 7% = 0,07; 150% = 1,5; 350% = 3,5; 0,2% = 0,002.

Нахождение процентов данного числа

Чтобы найти $p\%$ от числа a , надо a умножить на $p/100$. Например, 60% от 90 составляют $90 \cdot 60/100 = 54$.

Нахождение числа по его процентам

Если известно, что $p\%$ числа x равно a , то число x можно найти по формуле $x = a \cdot 100/p$. Например, если 5% вклада в сбербанк составляют 250 долларов, то этот вклад равен $250 \cdot 100/5 = 5000$ (долларов).

§24. Сложные проценты

Говорят, что на вклад начисляются сложные проценты (проценты на проценты), если причитающиеся на вклад процентные деньги присоединяются в конце каждого года к вкладу для наращивания их процентами в следующие годы.

Пусть ставится следующая задача: первоначальный вклад в сбербанк равен a долларов. За год начисляется p процентов. Вычислить сумму вклада через n лет.

Решение.

Через 1 год сумма вклада будет $a + a \cdot \frac{p}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)$.

Через 2 года сумма вклада будет

$$a \left(1 + \frac{p}{100} \right) + a \left(1 + \frac{p}{100} \right) \frac{p}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100} \right) \times \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

Через 3 года сумма вклада будет

$$a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 + a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 \frac{p}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^3.$$

Ясно, что через n лет сумма вклада будет $a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$.

Таким образом, мы приходим к формуле сложных процентов:

$s = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$, где s — величина вклада через n лет; a — первоначальная величина вклада, p — число процентов, n — срок вклада.

Пример.

Первоначальный вклад в сбербанк равен 300 долларов, за год начисляется 3% . Найти сумму вклада через 5 лет.

Решение.

$$s = 300 \left(1 + \frac{3}{100} \right)^5 = 300 (1,03)^5 \approx 300 \cdot 1,159 \approx 348 \text{ (долларов).}$$

Ответ : ≈ 348 долларов.

Тесты к главе 1. Арифметика

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Из приведенных числовых выражений выберите то, значение которого — наибольшее число.

- 1) $510 : 17 + 24 \cdot 38 - 80 : 4$;
- 2) $510 : 17 + 24 \cdot (38 - 80 : 4)$;
- 3) $(510 : 17 + 24) \cdot 38 - 80 : 4$;
- 4) $(510 : 17 + 24) \cdot (38 - 80 : 4)$.

A2. Число 2004 делится на:

- 1) 25; 2) 10; 3) 9; 4) 3.

A3. Найдите НОД (56; 70; 126).

- 1) 7; 2) 14; 3) 28; 4) 63.

A4. Найдите НОК (54; 90; 162).

- 1) 18; 2) 180; 3) 810; 4) 900.

A5. Велосипедист проехал $\frac{4}{9}$ всего пути. Сколько километров

пути ему осталось проехать, если он проехал 20 км?

- 1) 45 км; 2) 40 км; 3) 35 км; 4) 25 км.

A6. Бассейн наполняется через первую трубу за 4 часа, через вторую — за 6 часов. Какую часть бассейна останется наполнить после совместной работы обеих труб в течение двух часов?

- 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $\frac{1}{12}$.

A7. Запишите десятичную дробь 1,125 в виде обыкновенной дроби.

- 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $1\frac{1}{5}$; 3) $1\frac{1}{4}$; 4) $1\frac{1}{8}$.

A8. Скорость катера в стоячей воде 16,2 км/час, а скорость течения реки — 1,5 км/час. Сколько километров пройдет катер за 2 часа против течения и 3 часа по течению реки?
1) 64,8 км; 2) 79,8 км; 3) 82,5 км; 4) 97,5 км.

A9. Представьте периодическую дробь $0,2(35)$ в виде обыкновенной.

1) $\frac{47}{200}$; 2) $\frac{235}{999}$; 3) $\frac{233}{900}$; 4) $\frac{233}{990}$.

A10. Расстояние между Киевом и Харьковом в 420 км изображено на карте отрезком 14 см. Найдите масштаб карты.
1) 1 : 3 000 000; 2) 1 : 300 000; 3) 1 : 30 000; 4) 1 : 3000.

A11. Из молока получают 10 % творога. Сколько творога получают из 40 кг молока?
1) 10 кг; 2) 5 кг; 3) 4 кг; 4) 0,4 кг.

A12. Определите процент соли в растворе, если в 300 г раствора содержится 15 г соли.
1) 20 %; 2) 10 %; 3) 5 %; 4) 0,5 %.

A13. Некоторый товар сначала подорожал на 10 %, а затем подешевел на 10 %. Как изменилась цена этого товара?
1) Останется неизменной; 2) Подорожал на 1 %;
3) Подешевел на 1 %; 4) Определить невозможно.

A14. Найдите неизвестное x :

$$\left(\frac{2}{3}\right)\% \cdot x = 6\frac{1}{5}.$$

1) 9,3; 2) $\frac{62}{15}$; 3) 100; 4) 930.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

- B1.** Собака погналась за лисцей, когда расстояние между ними было 90 м. Через сколько минут собака догонит лисицу, если лисица пробегает в минуту 320 м, а собака — 350 м?
- B2.** Вычислите $(377 - 255) \cdot 102 - 375 \cdot 12 + (3075 : 15) \cdot 42$.
- B3.** Какое наименьшее число метров материала должно быть в рулоне, чтобы его можно было продать без остатка по 3 м, по 4 м, по 5 м?
- B4.** На соревнованиях по настольному теннису участвовали равные по составу команды, всего 123 мальчика и 82 девочки. Сколько мальчиков было в каждой команде?
- B5.** Выполните указанные действия:
$$\left(\frac{5}{48} \cdot 3\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) : \left(-\frac{2}{45} \right) + 2.$$
- B6.** Найдите значение выражения:
 $((8 - 0,2) \cdot (7,2 - 5,7) + (5,4 - 3,65) \cdot (4,3 - 2,7)) : 7,25.$
- B7.** Вычислите
 $(2,(6) + 1,8(3)) : 1,5.$
- B8.** Сколько литров воды следует долить до 7,5 л 12 % раствора соли, чтобы получить 10 % раствор?
- B9.** Первоначальный вклад в сбербанк равен 400 руб. За год начисляется 3 %. Найдите сумму вклада через 2 года.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

C1. Вычислите

$$21\frac{1}{4} - 19\frac{7}{8} + \frac{115\frac{3}{16} - 108\frac{1}{4}}{0,012 : 0,048 + 0,0004 : 0,008}$$

C2. Бассейн наполняется через первую трубу за 4 часа, через вторую — за 6 часов. Через сколько часов наполнится бассейн при совместной работе обеих труб?

C3. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$. Докажите.

C4. Свежие грибы содержат по весу 90 % воды, а сухие — 20 % воды. Сколько надо собрать свежих грибов, чтобы из них получить 8 кг сухих грибов?

Глава 2

ЦЕЛЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§25. Положительные и отрицательные числа.

Целые числа

Числа бывают положительные и отрицательные, натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные.

$+5$; $+7$; $+0,23$; $+4,59$; $+\frac{3}{8}$; $+\frac{9}{7}$ — положительные числа.

Положительные числа можно писать без знака, т.е. вместо

$+5$; $+4,59$; $+\frac{3}{8}$ можно писать 5 ; $4,59$; $\frac{3}{8}$.

-1 ; -37 ; $-0,2$; $-\frac{1}{5}$; $-13,2$ — отрицательные числа.

Отрицательные числа нельзя писать без знака.

Числа 1 и (-1) , 5 и (-5) , $5\frac{1}{2}$ и $(-5\frac{1}{2})$ называются *противоположными*. В общем случае $(+a)$ и $(-a)$ — противоположные числа. Сумма противоположных чисел равна нулю, т.е. $(+a) + (-a) = 0$.

Целые числа — это натуральные числа, противоположные им числа и число нуль.

0 ; ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ... — целые числа.

Число 0 (нуль) отделяет положительные числа от отрицательных.

§26. Рациональные и иррациональные числа

Рациональные числа — это числа, которые можно представить в виде отношения p/q , где p и q — любые целые числа, причем $q \neq 0$. Целые числа и дроби являются рациональными числами.

Примеры рациональных чисел:

$$11=11/1; 0,75=75/100; 3,29=329/100; -2\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}; 1/3=0,333....$$

Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей.

Иррациональные числа — это числа, которые нельзя представить в виде отношения p/q ($q \neq 0$) двух целых чисел. Иррациональные числа представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями. Примеры иррациональных чисел:

$$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{7}; \sqrt{7}-3; \sqrt{5}-\sqrt{2}; \pi; e; 2+\pi; \sqrt{\pi}; \sqrt{e}; 2^{\sqrt{2}}; \pi^e; \sqrt{e^3}-5^{\pi} (\pi \approx 3,14; e \approx 2,7).$$

§27. Действительные (вещественные) числа.

Координатная прямая (числовая ось)

Действительные числа — это совокупность всех рациональных и иррациональных чисел. Иначе говоря, действительные числа — это бесконечные (периодические и непериодические) десятичные дроби.

Действительные числа можно изобразить точками на прямой. Прямую линию с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением называют **координатной прямой** или **числовой осью**. Направление на координатной прямой слева направо называется **положительным**, а противоположное (т.е. справа налево) — **отрицательным**. Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой и каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число.

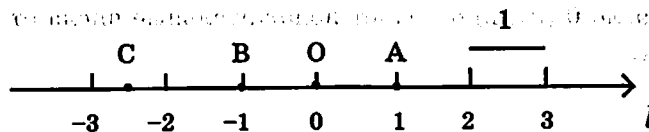


Рис. 2

На рис. 2 изображена координатная прямая l . Через 0 обозначено начало отсчета. Пусть точка K прямой l соответствует некоторому числу r , тогда это число называют **координатой**

точки К и пишут $K(r)$. Точка А изображает число 1; 1 — координата точки А. Точка В изображает число (-1) ; (-1) — координата точки В. Точка С изображает число $-2\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$; $-5/2$ — координата точки С. Точка О изображает число 0 (нуль); 0 — координата точки О.

Можно записать так : А(1), В(-1), С(-5/2), О(0).

§28. Сравнение действительных чисел

Говорят, что число a больше числа b , и пишут $a > b$, если разность $a - b$ — положительное число. Если разность $a - b$ отрицательное число, то говорят, что число a меньше числа b и пишут $a < b$. Согласно этим определениям любое положительное число больше нуля, любое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа. Для любых заданных чисел a и b верно одно и только одно из соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$. С геометрической точки зрения неравенство $a < b$ ($a > b$) означает, что точка a расположена на координатной прямой левее (правее) точки b .

Знаки « $<$ », « $>$ » называют знаками строгих неравенств. Используют также знаки « $\geq$ », « $\leq$ » — знаки нестрогих неравенств. Запись $a \leq b$ означает, что верно одно из двух: или число a меньше числа b , или число a равно числу b . Например, $2 \leq 10$, $7 \geq 7$ — верные числовые неравенства, $3 \leq 1$ — неверное числовое неравенство. Неравенства $a > b$ и $c > d$ ($a < b$ и $c < d$) называют неравенствами одинакового смысла (или одного знака); неравенства $a > b$ и $c < d$ ($a < b$ и $c > d$) называют неравенствами противоположного смысла (или противоположных знаков). Если числа a , b , c таковы, что $a < b$ и $b < c$, то вместо этих двух неравенств используется запись $a < b < c$. Такое неравенство называется двойным.

Пример. Сравнить числа $4/5$ и $0,93$.

Решение.

Составим разность $4/5 - 0,93$ и найдем значение этой разности:

$$\frac{4}{5} - 0,93 = \frac{4}{5} - \frac{93}{100} = \frac{80 - 93}{100} = -\frac{13}{100}.$$

Разность отрицательна, поэтому $4/5 < 0,93$. Ответ: $4/5 < 0,93$.

§29. Свойства числовых неравенств

Для любых действительных чисел a, b, c, d выполняются следующие свойства.

- 1) Если $a > b$, то $b < a$.
- 2) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).
- 3) Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
- 4) Если $a > b$ и $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$. Это свойство означает, что если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.
- 5) Если $a > b$ и $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$. Это свойство означает, что если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.
- 6) Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. Это свойство означает, что неравенства одинакового смысла можно почленно складывать.
- 7) Если a, b, c, d — положительные числа, причем $a > b$ и $c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$. Это свойство означает, что неравенства одинакового смысла с положительными частями можно почленно умножать.
- 8) Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$. Это свойство означает, что два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого мы вычитаем.
- 9) Если $a > b > 0$, то $1/a < 1/b$.
- 10) Если $a > b > 0$, то для любого натурального числа n выполняется неравенство $a^n > b^n$.

§30. Модуль (абсолютная величина) действительного числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа называется само это число, если ≥ 0 , и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль числа a обозначается $|a|$. Таким образом,

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0. \end{cases}$$

Например, $|7| = 7$, т.к. $7 \geq 0$; $|-7| = -(-7) = 7$, т.к. $-7 < 0$;
 $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, т.к. $\sqrt{5} - 2 \geq 0$; $|\sqrt{\pi} - 1| = \sqrt{\pi} - 1$, т.к. $\sqrt{\pi} - 1 \geq 0$
 $(\pi \approx 3,14)$; $|\sqrt{3} - 5| = -(\sqrt{3} - 5) = 5 - \sqrt{3}$, т.к. $\sqrt{3} - 5 < 0$.

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от начала отсчета до точки, изображающей число a .

Свойства модулей:

$$1) |a| \geq 0;$$

$$2) |a| \geq a;$$

$$3) |-a| = |a|;$$

$$4) |ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$5) |a / b| = |a| / |b|;$$

$$6) |a|^2 = a^2;$$

$$7) |a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases}$$

$$8) |a| + |b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0;$$

$$9) |a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$10) |a - b| \geq ||a| - |b||.$$

§31. Действия с действительными числами (сложение, вычитание, умножение, деление)

При сложении действительных чисел с одинаковыми знаками нужно сложить их модули и перед суммой поставить их общий знак. Например, $(+3) + (+8) = +11$; $(-4) + (-9) = -13$.

При сложении двух действительных чисел с разными знаками модуль суммы равен разности модулей слагаемых. Знак суммы есть знак слагаемого, где модуль больше. Например, $(+3) + (-9) = -6$; $(+11) + (-7) = +4$.

Вычитание действительных чисел можно заменить сложением: $a - b = a + (-b)$, то есть, чтобы вычесть из числа a число b , достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому. Например:

$$(+3) - (-8) = (+3) + (+8) = +11; (+4) - (+9) = (+4) + (-9) = -5.$$

При умножении (делении) двух действительных чисел нужно умножить (разделить) их модули. Перед результатом нужно поставить знак по правилу знаков из таблицы знаков (табл. 1).

Таблица знаков

При умножении	При делении
$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$
$(+) \cdot (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$
$(-) \cdot (+) = (-)$	$(-) : (+) = (-)$

При умножении и делении действительных чисел желательно помнить пословицу: «Друг моего друга — мой друг, враг моего врага — мой друг, друг моего врага — мой враг, враг моего друга — мой враг».

Например, $(+3)(+4) = +12$; $(-2)(+5) = -10$; $(-5)(-3) = 15$;

$$7(-\sqrt{2}) = -7\sqrt{2}; \quad \frac{(-24)}{(-6)} = 4; \quad \frac{(-18)}{(+3)} = -6; \quad \frac{\sqrt{5}}{(-2)} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

§32. Свойства арифметических действий над действительными числами (основные законы алгебры)

Эти свойства записываются в виде следующих тождеств:

- 1) $a + b = b + a$;
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) $a + 0 = a$;
- 4) $a + (-a) = 0$;
- 5) $ab = ba$;
- 6) $(ab)c = a(bc)$;
- 7) $a(b + c) = ab + ac$;
- 8) $a \cdot 1 = a$;
- 9) $a \cdot 0 = 0$;
- 10) $a \cdot \frac{1}{a} = 1, (a \neq 0)$.

Свойства 1) и 5) выражают переместительный закон сложения и умножения соответственно; свойства 2) и 6) выражают сочетательный закон, а свойство 7) — распределительный закон умножения относительно сложения.

**Тесты к главе 2. Целые, рациональные,
действительные числа.**

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

- A1.** Среди приведенных ниже числовых выражений укажите выражение, имеющее наименьшее значение:
1) $5 - 29$; 2) $-29 + 16$; 3) $5 - (-16)$; 4) $-8 + (-13)$.
- A2.** Среди приведенных ниже числовых выражений укажите выражение, имеющее наибольшее значение:
1) $6 \cdot (-4)$; 2) $(-8) \cdot 7$; 3) $(-18) : 2$; 4) $28 : (-4)$.
- A3.** Значение какого из приведенных выражений, кратно трем:
1) $28 - 4 \cdot (25 - 33) - 100$;
2) $28 - 4 \cdot (25 - 33 - 100)$;
3) $(28 - 4) \cdot (25 - 33) - 100$;
4) $(28 - 4) \cdot (25 - 33 - 100)$?
- A4.** Значение какого из приведенных ниже выражений кратно 13:
1) $30 - 120 : 30 - 36$;
2) $30 - 120 : (30 - 36)$;
3) $(30 - 120) : 30 - 36$;
4) $(30 - 120) : (30 - 36)$?
- A5.** Какие из указанных чисел рациональны?
1) $\sqrt{1,5}$; 2) $\sqrt{0,16}$; 3) π ; 4) e .
- A6.** Каким числом является значение выражения $\operatorname{tg} 30^\circ$?
1) натуральным; 2) целым;
3) иррациональным; 4) рациональным.
- A7.** Каким числом является значение выражения $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}$?
1) натуральным; 2) целым;
3) рациональным; 4) отрицательным.
- A8.** Запишите выражение $|2 - \sqrt{2}|$ без знака модуля.
1) $2 - \sqrt{2}$; 2) $-2 - \sqrt{2}$; 3) $2 + \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2} - 2$.

А9. Запишите выражение $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - 4|$ без знака модуля.

- 1) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 4$; 2) $-\sqrt{2} + \sqrt{3} - 4$;
3) $\sqrt{2} - \sqrt{3} - 4$; 4) $-\sqrt{2} - \sqrt{3} + 4$.

А10. Запишите выражение $x + |x|$, при $x < 0$ без знака модуля.

- 1) 0; 2) $2x$; 3) $-2x$; 4) записать нельзя.

А11. Среди приведенных ниже числовых выражений укажите выражение, имеющее наибольшее значение.

- 1) $570 : 19 - 36 \cdot 25 - 60 : 2$;
2) $570 : 19 - 36 \cdot (25 - 60 : 2)$;
3) $(570 : 19 - 36) \cdot 25 - 60 : 2$;
4) $(570 : 19 - 36) \cdot (25 - 60 : 2)$.

А12. Среди чисел $\sqrt{2}$, 1,4, $1\frac{1}{8}$, $\sqrt{3}$ наибольшим является

- 1) $\sqrt{2}$; 2) 1,4; 3) $1\frac{1}{8}$; 4) $\sqrt{3}$

А13. Среди десятичных дробей 0,5005; 5,05; 0,0505; 0,505; 5,505 наименьшей является дробь:

- 1) 5,05; 2) 0,505; 3) 0,5005; 4) 0,0505.

А14. Сравните числа $0,(2)$ и $\frac{2}{9}$.

- 1) $0,(2) < \frac{2}{9}$; 2) $0,(2) = \frac{2}{9}$;
3) $0,(2) > \frac{2}{9}$; 4) сравнить невозможно.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

В1. Вычислите $|\sqrt{7} + \sqrt{5} - 4| + |\sqrt{7} + \sqrt{5} - 5|$.

В2. Вычислите $(10101 - 419) : 94 - (10101 + 8,17) : 53 + 3$.

В3. Найдите значение выражения
$$\frac{36\frac{2}{3} : 15 + 8\frac{2}{3} \cdot 7}{12\frac{1}{3} + 8\frac{6}{7} : 2\frac{4}{7}} + \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24 \cdot \frac{7}{9}}{7\frac{2}{3} - 157\frac{4}{5} : 24}$$

В4. Вычислите $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$.

В5. Вычислите $\frac{3\frac{1}{8} + 2,08(3) - 0,(3)}{7,3 - 0,4 \cdot 8,5}$.

В6. Вычислите $\frac{12 \cdot 0,8 - 1,8}{2,08(3) + 2,0(6) - 0,25}$.

В7. Найдите значение выражения $|x+3| - |x-3|$ при $x \leq -3$.

В8. Запишите выражение $\frac{x - \sqrt{2} + |x - \sqrt{2}|}{2(x - \sqrt{2})}$ без знака модуля, если $x > \sqrt{2}$.

В9. Вычислите значение выражения $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

С1. Запишите выражение $\|x| - |x+4|\|$ без знака модуля.

С2. Докажите, что $\sqrt{3}$ — иррациональное число.

С3. Докажите, что $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ — натуральное число.

С4. Упростите $\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$.

Глава 3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§33. Примеры множеств, элементы множества, пустое множество

Понятие множества — одно из основных понятий математики, которое не определяется. Множество можно представить себе как совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-нибудь признаку. При этом предполагается, что объекты данной совокупности отличаются друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность.

Приведем примеры множеств.

Пример 1. Множество планет Солнечной системы.

Пример 2. Множество книг в данной библиотеке.

Пример 3. Множество всех натуральных чисел.

Пример 4. Множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Пример 5. Множество времен года.

Множества состоят из элементов. Так, элементами множества решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ являются числа 2 и 3. Элементами множества однозначных натуральных чисел являются числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Множества обозначаются большими буквами A, B, C, D и т.д. Если элемент x принадлежит множеству A , то записывают $x \in A$; если x не принадлежит A , то записывают $x \notin A$ (или $x \bar{\in} A$).

Пример 6. Число 8 принадлежит множеству однозначных натуральных чисел, а число $2/5$ не принадлежит множеству однозначных натуральных чисел.

Множество, не имеющее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Пустое множество можно определить любым противоречивым свойством.

Примеры пустых множеств.

Пример 7. Множество людей, живущих на Солнце. Это $\emptyset$.

Пример 8. Множество решений неравенства $x^2 < -16$. Это $\emptyset$.

Пример 9. Множество действительных корней уравнения $x^2 = -9$. Это $\emptyset$.

§34. Основные способы задания множеств

Существует два основных способа задания (описания) множеств.

1) Множество A определяется непосредственно перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, т.е. записывается в виде

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Например, запись $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ означает множество, состоящее из элементов 1, 3, 5, 7, 9.

2) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества U , которые обладают свойством $\alpha(x)$. В этом случае используются обозначения: $A = \{x | \alpha(x)\}$ или $A = \{x \in U | \alpha(x)\}$, где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством $\alpha(x)$. Иначе можно записать $A = \{\text{элемент} | \text{свойство}\}$. Таким образом, множество считается заданным, если известно свойство, которым обладают элементы этого множества.

Пример 1. Запись $\{x | x^2 - 4x + 3 = 0\}$ означает множество корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$. Это числа 1 и 3.

Пример 2. Запись $\{x | x^2 < 4\}$ означает множество таких x , для которых $x^2 < 4$. Это множество $x \in (-2; 2)$.

Пример 3. Запись $\{x | x \neq x\}$ означает пустое множество $\emptyset$.

§35. Конечные и бесконечные множества

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов. Бесконечные множества определяются при помощи свойств. При задании таких множеств выписывается или несколько первых элементов, или записывают элемент и свойство, которым обладают элементы данного множества.

Пример 1. $A = \{\text{зима, весна, лето, осень}\}$ — множество времен года, конечное множество.

Пример 2. $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ — множество всех целых чисел, бесконечное множество.

Пример 3. $\{2n | n \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех четных чисел, бесконечное множество.

Пример 4. $\{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех нечетных чисел, бесконечное множество.

§36. Подмножества

Множество A называется *подмножеством* множества B , если каждый элемент множества A принадлежит множеству B . Записывается это так: $A \subset B$ или $B \supset A$. Иногда читают так: A содержится в B или B содержит A . На рис. 3 множество A изображено внутри множества B .

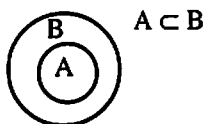


Рис. 3

Пример 1. Множество всех четных положительных чисел есть подмножество множества всех натуральных чисел.

Из определения множества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо включение $A \subset A$. Полагают по определению, что пустое множество является подмножеством любого множества, т.е. для любого A . $\emptyset \in A$.

Заметим, что *множество из n элементов содержит 2^n подмножеств*.

Пример 2. Выписать все подмножества множества A , состоящего из трех элементов, $A = \{a; b; c\}$.

Решение.

Всех подмножеств будет $2^3 = 8$. Это такие подмножества: $\{a; b; c\}$, $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\emptyset$.

Множества A и B называются *равными* (записывается $A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$. Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Примеры равных множеств:

Пример 3. $\{x | x^2 - 7x + 6 = 0\} = \{x | x_1 = 1, x_2 = 6\} = \{1; 6\}$.

Пример 4. $\{x | x^2 < 9\} = \{x | -3 < x < 3\} = (-3; 3)$.

§37. Стандартные обозначения и названия наиболее распространенных числовых множеств

Числовым множеством называется множество, элементы которого есть числа.

Для распространенных числовых множеств применяют следующие обозначения и названия.

1. $N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$ — множество всех натуральных чисел.

2. $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots; \pm n; \dots\}$ — множество всех целых чисел.

3. $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ — множество всех неотрицательных целых чисел.

4. $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \right\}$ — множество всех рациональных чисел.

5. $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z_0, n \in N \right\}$ — множество всех неотрицательных рациональных чисел.

6. $R = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ — множество всех действительных чисел (числовая прямая). Элементы множества R (числа) называются также точками числовой прямой.

7. $R \setminus \{a\} = \{x \mid -\infty < x < \infty, x \neq a\}$ — множество всех действительных чисел, таких что $x \neq a$ (вся числовая прямая, из которой выбрасывается точка $x = a$).

8. $R_+ = \{x \mid 0 < x < \infty\}$ — множество всех положительных действительных чисел.

9. $R_- = \{x \mid -\infty < x < 0\}$ — множество всех отрицательных действительных чисел.

10. $[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ — замкнутый промежуток (отрезок, сегмент) с концами в точках a и b , $a < b$, $a \in R$, $b \in R$.

11. $(a; b) = \{x \mid a < x < b\}$ — открытый промежуток (интервал) с концами в точках a и b , $a < b$, $a \in R$, $b \in R$.

12. $[a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}$, $(a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы, полусегменты) с концами в точках a и b , $a < b$.

13. $[a; +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\}$, $(-\infty; b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\}$ — замкнутые полубесконечные промежутки (бесконечные полусегменты, полупрямые, числовые лучи).

14. $(a; +\infty) = \{x | a < x < +\infty\}$, $(-\infty; b) = \{x | -\infty < x < b\}$ — открытые полубесконечные промежутки (бесконечные полуинтервалы, открытые полупрямые, открытые числовые лучи).

15. $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$ — ε -окрестность числа a (точки a).

16. $R^2 = \{(x; y) | x \in R, y \in R\}$ — множество всех упорядоченных пар чисел (числовая плоскость).

Очевидно, что для множеств N, Z, Q, R справедливы следующие включения: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Замечание 1. Знак ∞ («бесконечность») не служит для обозначения какого-либо числа, а является лишь условным символом, который как бы символизирует тот факт, что точки множества простираются как угодно далеко вправо (если $+\infty$) или влево (если $-\infty$).

Замечание 2. Неравенства $a \leq x < +\infty$, $-\infty < x \leq b$, $a < x < +\infty$, $-\infty < x < b$ можно записать без употребления символа ∞ , а именно: $x \geq a$, $x \leq b$, $x > a$, $x < b$.

§38. Операции над множествами

Пересечением (или произведением) множеств A и B (обозначение $A \cap B$ или $A \cdot B$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно как множеству A , так и множеству B :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}. \quad (1)$$

Название «пересечение» происходит от того, что при пересечении множеств точек двух геометрических фигур получают множество точек пересечения этих фигур в самом обычном смысле слова. Так, если множества A и B интерпретировать, например, как круги, то $A \cap B$ — общая часть этих кругов. На рис. 4 множество $A \cap B$ заштриховано.

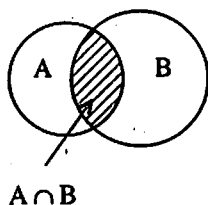


Рис. 4

Замечание. Схематическое изображение множеств, когда множества изображаются в виде кругов или каких-нибудь других простых областей, называется *диаграммами Венна* (иногда этот способ изображения множеств называют *кругами Эйлера*).

Пример 1. $A = [-1; 1]$, $B = (0; 3)$. $A \cap B = (0; 1]$.

Если множества A и B не пересекаются, то их пересечение — пустое множество. Таким образом, для непересекающихся множеств $A \cap B = \emptyset$.

Пример 2. $A = (1; 3)$, $B = (4; 5)$. $A \cap B = \emptyset$.

Объединением (или суммой) множеств A и B (обозначение $A \cup B$ или $A + B$) называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}. \quad (2)$$

На рис. 5 множество $A \cup B$ заштриховано.

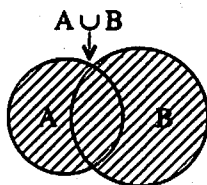


Рис. 5

Пример 3. $A = \{1; 5; 9\}$, $B = \{2; 3; 9\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 9\}$.

Иногда приходится рассматривать пересечение и объединение трех и более множеств. Например, объединение множеств A, B, C есть множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств — A , B или C (рис. 6). Пересечение множеств A, B, C есть множество всех элементов, принадлежащих и множеству A , и множеству B , и множеству C (рис. 7).

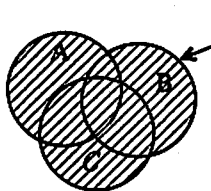


Рис. 6

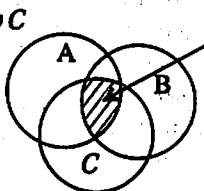


Рис. 7

Основные свойства операций объединения и пересечения множеств

Операции объединения и пересечения обладают следующими свойствами:

- 1) $A \cup B = B \cup A$;
- 2) $A \cap B = B \cap A$;

- 3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- 4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- 6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- 7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- 8) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;
- 9) $A \cup A = A$;
- 10) $A \cap A = A$;
- 11) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- 12) $A \cup \emptyset = A$.

Разность множеств (обозначение $A \setminus B$) называется множеством, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B . На рис. 8 множество $A \setminus B$ заштриховано.

$$A \setminus B = \{x | x \in A, x \notin B\}. \quad (3)$$

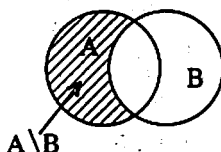


Рис. 8

Пример 4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$.

Дополнение множества

Пусть U — столь обширное множество, что все рассматриваемые множества окажутся его подмножествами.

U — **универсальное множество** (иначе оно называется **основное множество**). Универсальным множеством для элементарной арифметики является, например, множество $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел; для аналитической геометрии универсальное множество есть $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел (числовая прямая), а также $\mathbb{R}^2$ — множество упорядоченных пар (числовая плоскость).

Дополнением множества A (обозначение $\bar{A}$ или cA) называется множество элементов универсального множества U , не принадлежащих множеству A .

$$\bar{A} = \{x | x \in U, x \notin A\}. \quad (4)$$

Если U изобразить в виде прямоугольника, то множество $\bar{A}$ заштриховано на рис. 9.

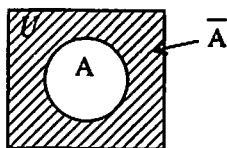


Рис. 9

Основные свойства операции дополнения

1) $A \cup \bar{A} = U$;

2) $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

3) $\bar{\bar{U}} = \emptyset$;

4) $\bar{\emptyset} = U$;

5) $\bar{\bar{A}} = A$;

6) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

7) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Свойства 6) и 7) называют правилами де Моргана.

Операция симметрической разности

Симметрической разностью (обозначение $A \Delta B$) множеств A и B называется множество элементов, которые принадлежат только множеству A или только множеству B .

$$A \Delta B = \{x | (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}. \quad (5)$$

Иначе можно записать:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (5a)$$

На рис. 10 симметрическая разность $A \Delta B$ заштрихована.

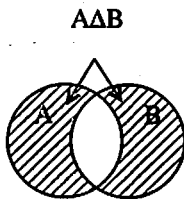


Рис. 10

§39. Взаимно однозначное соответствие между множествами

Соответствие между множествами A и B называется *взаимно однозначным*, если каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B , причем разным элементам множества A соответствуют разные элементы множества B и каждый элемент множества B поставлен в соответствие некоторому элементу множества A . Множества называют *эквивалентными* (или *равномощными*), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Конечные множества A и B эквивалентны тогда и только тогда, когда количество элементов в них одинаково.

Установление взаимно однозначного соответствия дает возможность сравнивать не только конечные множества, но и, что самое главное, множества с бесконечным числом элементов.

Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел.

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Иначе можно сказать, что множество счетно, если все его элементы можно занумеровать всеми натуральными числами.

Пример 1. Множество натуральных чисел $N = \{1; 2; 3; \dots\}$ эквивалентно множеству целых отрицательных чисел $A = \{-1; -2; -3; \dots\}$, причем взаимно однозначное соответствие устанавливается так: каждому числу $n \in N$ соответствует число $-n \in A$.

Пример 2. Сопоставим числу n число $2n$. Тогда получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством всех четных натуральных чисел.

Замечание. Для конечных множеств справедлива формула

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B), \quad (6)$$

где $m(A)$, $m(B)$, $m(A \cup B)$, $m(A \cap B)$ — соответственно число элементов множеств A , B , $A \cup B$, $A \cap B$.

Пример 3. Экзамен по русскому языку сдавали 300 абитуриентов, оценки 2, 3, 4 получили 280 человек, а оценки 3, 4, 5 получили 200 человек. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Решение.

Введем следующие обозначения:

A — множество абитуриентов, получивших оценки 2, 3, 4;

B — множество абитуриентов, получивших оценки 3, 4, 5.

Тогда $A \cup B$ — множество всех абитуриентов; $A \cap B$ — множество абитуриентов, получивших оценки 3, 4.

$$m(A)=280, m(B)=200, m(A \cup B)=300.$$

$m(A \cap B)$ нужно найти.

Из формулы (6):

$$m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cup B);$$

$$m(A \cap B) = 280 + 200 - 300 = 180.$$

Ответ: {180}.

§40. Логическая символика

При записи математических рассуждений часто применяется логическая символика. Приведем несколько наиболее употребительных символов.

Пусть $\alpha, \beta, \dots$ — некоторые высказывания или утверждения, т.е. предложения, относительно каждого из которых можно сказать, истинно оно или ложно.

Запись $\bar{\alpha}$ означает «не α », т.е. отрицание утверждения α .

Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: «из утверждения α следует утверждение β ». Символ $\Rightarrow$ — символ импликации.

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: «утверждение α эквивалентно утверждению β », т.е. из α следует β и из β следует α . Символ $\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности.

Запись $\alpha \wedge \beta$ означает « α и β ». Символ $\wedge$ — символ конъюнкции.

Запись $\alpha \vee \beta$ означает « α или β ». Символ $\vee$ — символ дизъюнкции.

Запись $\forall x \in X \alpha(x)$ означает: «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$ ». Символ $\forall$ — символ всеобщности, заменяющий слова «любой», «каждый», «всякий».

Запись $\exists x \in X \alpha(x)$ означает: «существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$ ». Символ $\exists$ — символ существования, заменяющий слова «существует», «есть», «найдется».

Замечание.

$\forall$ — перевернутое латинское A (от английского слова Any — любой);

$\exists$ — перевернутая латинская буква E (от латинского слова Existence — существование).

Тесты к главе 3. Основные понятия теории множеств.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

- A1. Пусть A -множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Какие из данных ниже записей верны?
1) $-5 \in A$; 2) $6 \in A$; 3) $2 \in A$; 4) $3 \in A$.
- A2. Выберите среди указанных ниже множеств пустое.
1) множество корней уравнения $x^2 - 4 = 0$;
2) множество корней уравнения $x + 1 = x + 1$;
3) множество корней уравнения $x = x + 3$;
4) множество корней уравнения $x^2 = 0$.
- A3. Для множеств $A = \{1; 3\}$ и $B = \{3; 7\}$ найдите $A \cup B$.
1) $\{1\}$; 2) $\{3\}$; 3) $\{1; 3; 7\}$; 4) $\emptyset$.
- A4. Для множеств $A = \{-1; 0; 0,5\}$ и $B = \{2; 0; 7\}$ найдите $A \cap B$.
1) $\emptyset$; 2) $\{0\}$; 3) $\{-1; 0; 0,5; 2; 7\}$; 4) $\{-1; 0,5; 2; 7\}$.
- A5. Для множеств $a = [0; 5]$ и $b = (1; 6)$ найдите $A \cup B$.
1) $[0; 6]$; 2) $(1; 5]$; 3) $[0; 1]$; 4) $[5; 6)$.
- A6. Для множеств $A = (-\infty; 1]$ и $b = [1; +\infty)$ найдите $A \cap B$.
1) $\{0\}$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $\{1\}$.
- A7. Для множеств $A = (-1; 0]$ и $B = [0; 2)$ найдите $A \setminus B$.
1) $(-1; 0)$; 2) $(0; 2)$; 3) $(-1; 2)$; 4) $\{0\}$.
- A8. Множество $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}$ равно множеству:
1) $\mathbb{N}$; 2) $\mathbb{Z}$; 3) $\mathbb{Q}$; 4) $\mathbb{R}$.
- A9. Множество $\mathbb{R} \cup \mathbb{N}$ равно множеству:
1) $\mathbb{N}$; 2) $\mathbb{Z}$; 3) $\mathbb{Q}$; 4) $\mathbb{R}$.
- A10. Множество $\mathbb{Z} \setminus \overline{\mathbb{N}}$ равно множеству:
1) $\mathbb{N}$; 2) $\overline{\mathbb{N}}$; 3) $\mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

A11. Какие из предложенных ниже равенств истинны?

- 1) $A \cap A = 0$; 2) $A \cap 0 = A$; 3) $A \cup A = 0$; 4) $A \cup 0 = A$.

A12. Для множеств $A = [-3; 3]$ и $B = (-\infty; 0)$ найдите $A \cup \bar{B}$

- 1) $(-\infty; 3)$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $[-3; 0)$; 4) $(0; 3]$.

A13. Для множеств $A = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$ найдите $A \setminus B$.

- 1) A ; 2) B ; 3) 0 ; 4) N .

A14. В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются в математическом кружке, 11 — в биологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько биологов увлекаются математикой?

- 1) 1; 2) 6; 3) 9; 4) 10.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Даны множества $A = (-\infty; 3]$, $B = (1; +\infty)$. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих множеству $A \cap B$.

B2. Даны множества $A = (-\infty; 0)$ и $B = [0; 6)$. Найдите наибольшее целое число, принадлежащее множеству $A \cup B$.

B3. Даны множества $A = (2; 10)$, $B = (3; 9)$, $C = (4; 8)$. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих множеству $A \cap B \cap C$.

B4. Даны множества $A = (-5; 8)$, $B = (-2; 10)$, $C = (0; 13)$. Найдите наибольшее натуральное число, принадлежащее множеству $A \cup B \cup C$.

B5. Даны множества $A = (-3; 4]$ и $B = [3; 9)$. Найдите сумму целых чисел, принадлежащих множеству $A \setminus B$.

B6. Даны множества $A = [-3; 3]$, $B = (-\infty; 0)$. Найдите наименьшее натуральное число, принадлежащее множеству $\overline{A \cup B}$.

- В7.** Найдите сумму целых чисел, принадлежащих множеству $\overline{A} \cap B$, если $A = (0; +\infty)$, $B = [-7; 7)$.
- В8.** В одном городе все жители говорят на английском или французском языке. На английском языке говорят 90 % всех жителей, на французском 80 %. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?
- В9.** В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

- С1.** Упростите $(A \cap B) \cap (A \cap B)$.
- С2.** Докажите, что если $A \subset B \subset C \subset A$, то $A = B = C$.
- С3.** Докажите, что если множество состоит из элементов, то число его подмножеств равно 2^n .
- С4.** В лицее 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, а в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают драмкружок. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке?

Глава 4

ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

§41. Виды алгебраических выражений

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения.

Постоянная величина — это величина, численные значения которой не меняются. Постоянную величину часто рассматривают как частный случай переменной, у которой все численные значения одинаковы. Постоянную величину нередко называют **константой**.

Алгебраические выражения — это математические выражения, которые составляются из чисел и переменных с помощью знаков сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень, извлечения корня и с помощью скобок.

Примеры алгебраических выражений:

$$1) x^3 - 4xy(x + y^2); \quad 2) x + 3y - \frac{27}{15};$$

$$3) (x^2 + x + \sqrt[3]{6})^5; \quad 4) \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x + 2};$$

$$5) \left(\frac{5}{3x} - \frac{3}{4y} \right)^2; \quad 6) \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{c};$$

$$7) 3x^{\frac{2}{3}} + 5y^{\frac{3}{4}}.$$

Если алгебраическое выражение не содержит деления на переменные и извлечения корня из переменных, то оно называется **целым**. Из приведенных выше примеров 1), 2), 3) — целые выражения.

Если алгебраическое выражение составлено из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления на выражения с переменными, то оно называется **дробным**. 4), 5) — примеры дробных алгебраических выражений.

Целые и дробные выражения называются *рациональными выражениями*. 1), 2), 3), 4), 5) — примеры рациональных алгебраических выражений.

Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то такое алгебраическое выражение называется *иррациональным*. 6), 7) — примеры иррациональных алгебраических выражений.

Таким образом, алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные выражения, в свою очередь, бывают целыми и дробными. Рациональные дробные выражения нередко называют дробно-рациональными.

§42. Область определения алгебраического выражения

Множество значений переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называется *областью определения алгебраического выражения*. Например, областью определения

выражения $\frac{5}{2x+6}$ является множество всех значений $x \in R$, кроме $x = -3$, т. е. $x \in R \setminus \{-3\}$. Область определения выражения $\frac{7a^3b^3}{a-b}$ есть множество пар чисел $(a; b)$, для которых $a \neq b$.

§43. Тождественно равные выражения

Два выражения называются *тождественно равными*, если при всех значениях входящих в них переменных, принадлежащих общей области определения, соответственные значения этих выражений равны.

Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных. Примеры тождеств:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad x+0 = x, \quad x \cdot 1 = x, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Верные числовые равенства также называют тождествами,

например: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \quad -\frac{3}{7} = -\frac{6}{14}$ — тождества.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием выражения*.

§44. Степень натурального числа с натуральным показателем

Пусть $a \in N$, $n \in N$. a^n — это степень, a — основание степени, n — показатель степени. Степень a^n есть произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n.$$

§45. Степень действительного числа с натуральным показателем

Понятие степени натурального числа с натуральным показателем обобщается на степень любого действительного числа с натуральным показателем. Если $a \in R$, $n \in N$, то полагают по определению

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n.$$

Любая степень положительного числа есть положительное число, например: $5^{11} > 0$, $(1,2)^5 > 0$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4 > 0$, $(\sqrt{2})^7 > 0$, $(\pi-3)^{13} > 0$, $(\pi \approx 3,14)$.

Четная степень отрицательного числа есть положительное число, например: $(-2)^{12} > 0$, $(-5)^8 > 0$, $(-\pi)^8 > 0$, $(-e)^{10} > 0$, $(e \approx 2,7)$.

Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное, например: $(-2)^5 < 0$, $(-3)^3 < 0$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^7 < 0$, $(-\pi)^5 < 0$, $(-2e)^7 < 0$.

§46. Свойства степени действительного числа с натуральным показателем

Пусть $a \in R$, $b \in R$, $n \in N$, $m \in N$. Тогда справедливы следующие свойства степени с натуральным показателем:

$$1) \underbrace{a^n \cdot a^m}_{\dots} = a^{n+m}; \quad 2) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$3) (a^n)^m = a^{nm} = (a^m)^n;$$

$$4) (ab)^n = a^n b^n;$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$6) 1^n = 1;$$

$$7) a^1 = a.$$

Пример 1. а) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$; б) $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$;

в) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$; г) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$.

Ответ: а) {32}; б) {4}; в) {36}; г) {64}.

Пример 2. $\frac{2^{12} \cdot 3^{15}}{2^{10} \cdot 3^{12}} = 2^{12-10} \cdot 3^{15-12} = 2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$.

Ответ: {108}.

Пример 3. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 =$
 $= -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^5 = -1^3 \cdot 1^5 = -1$.

Ответ: {-1}.

Пример 4.

$$\frac{(-2)^5 \cdot 7^7}{14^6} \cdot \frac{26^5 \cdot 2^{10}}{13^4 \cdot 8^4} = -\frac{2^5 \cdot 7^7 \cdot (2 \cdot 13)^5 \cdot 2^{10}}{(2 \cdot 7)^6 \cdot 13^4 \cdot (2^3)^4} = -\frac{2^5 \cdot 7^7 \cdot 2^5 \cdot 13^5 \cdot 2^{10}}{2^6 \cdot 7^6 \cdot 13^4 \cdot 2^{12}} =$$

 $= -2^{5+5+10-6-12} \cdot 7^{7-6} \cdot 13^{5-4} = -2^2 \cdot 7 \cdot 13 = -364$.

Ответ: {-364}.

Замечание 1. Формулы 1)–7) свойства степени с натуральным показателем нередко применяют в обратном порядке, т. е. справа налево. Например, $5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2 = 225$.

Замечание 2. В процессе решения примеров целесообразно сокращать выражения, если это возможно, так как это быстрее приводит к результату.

Пример 5. $\frac{2^4 \cdot 18^5 \cdot 3 \cdot 8}{2^4 \cdot 18^4 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 18^5}{18^4} = 3 \cdot 18 = 54$. **Ответ:** {54}.

§47. Степень действительного числа с нулевым и отрицательным целым показателем

Пусть $a \neq 0$, $n \in N$. Положим по определению $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Свойства 1)–6) степени с натуральным показателем справедливы и для степени действительного числа с отрицательным целым показателем.

Например: $(2 \cdot 3)^{-2} = 2^{-2} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$; $\frac{2^{-5}}{2^{-2}} = 2^{-5-(-2)} =$

$$= 2^{-3} = \frac{1}{8}; \quad 3^{-1} \cdot 3^{-2} = 3^{-1-2} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}.$$

Пример 1. $\frac{12^5}{2^3 \cdot 3^4} : \frac{10^{10}}{2^6 \cdot 5^7} = \frac{12^5 \cdot 2^6 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 10^{10}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^5 \cdot 2^6 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot (2 \cdot 5)^{10}} =$

$$= \frac{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 2^6 \cdot 5^7}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} = 2^{10+6-3-10} \cdot 3^{5-4} \cdot 5^{7-10} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^{-3} = \frac{2^3 \cdot 3}{5^3} =$$

$$= \frac{8 \cdot 3}{125} = \frac{24}{125}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{24}{125} \right\}.$

Пример 2.

$$\frac{5^6}{2^6 \cdot 7^4} \cdot \frac{21^5 \cdot 4^5}{(90)^4} = \frac{5^6 \cdot (7 \cdot 3)^5 \cdot (2^2)^5}{2^6 \cdot 7^4 \cdot (3^2 \cdot 2 \cdot 5)^4} = \frac{5^6 \cdot 7^5 \cdot 3^5 \cdot 2^{10}}{2^6 \cdot 7^4 \cdot 3^8 \cdot 2^4 \cdot 5^4} =$$

$$= 5^{6-4} \cdot 7^{5-4} \cdot 3^{5-8} \cdot 2^{10-6-4} = 5^2 \cdot 7 \cdot 3^{-3} \cdot 2^0 = \frac{25 \cdot 7}{3^3} = \frac{175}{27} = 6 \frac{13}{27}. \quad \text{Ответ: } \left\{ 6 \frac{13}{27} \right\}.$$

§48. Одночлен и многочлен (общие понятия)

Одночлен — это выражение, которое может содержать только два действия: умножение переменных и чисел и возведение переменных в неотрицательную целую степень. Примеры одночленов:

$$-9, \quad 6x^2, \quad 5ax^5, \quad 3xy^2 \cdot \frac{1}{5}, \quad 10a \cdot \frac{ba^5}{7}, \quad -2xy^3x^4, \quad -12a^2x.$$

Здесь $-9, 6, 5, \frac{3}{5}, \frac{10}{7}, -2, -12$ — это числовые коэффициенты.

Выражения $x^2 + x^7$, $a^3 - a^5 + 1$, $\frac{5x^3}{2y^2}$ не являются одночленами, так как представляют собой сумму, разность или частное переменных и чисел.

Стандартным видом одночлена называется одночлен, у которого числовой коэффициент стоит на первом месте, а произведение одинаковых множителей записано в виде степени. Так, например, $10a^2bc a^3 = 10a^5bc$; $2aa b^2 15a b^4 = 30a^3b^6$; $5xy \frac{1}{3}y^4 = \frac{5}{3}xy^5$.

Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней переменных. Например, 17 — одночлен нулевой степени; $43x$ — одночлен первой степени; $12a^2$ — одночлен второй степени; $5x^3$ — одночлен третьей степени; $5x^3y^5$ — одночлен восьмой степени.

Подобными одночленами называются одночлены, которые имеют одинаковые буквенные выражения. Например, $5a^5b^2$, $9a^3b^2$, $-25a^5b^2$, $0,3a^5b^2$ — подобные одночлены.

Привести подобные члены — это значит сложить их числовые коэффициенты и результат умножить на общее буквенное выражение.

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов. Примеры многочленов: $x^2 - 3x + 1$, $x^5 - 5ax$, $x^8 + 3x^7 - 5x - 6$,

$3a^2 - 7ax^9$. Выражения $\frac{17x}{x^3 + 5x + y}$, $\frac{x}{x^2 + 1}$ не являются многочленами, так как не являются алгебраической суммой одночленов.

Многочленом стандартного вида называется такой многочлен, у которого все одночлены записаны в стандартном виде и приведены подобные члены. Например, $5x^3 + 4ax^2 - 17$, $3x^5 - 8x + 3$, $7x^6 - 5xa^2 + 4a - 9$, $x^2 + x + 9$ — многочлены стандартного вида.

Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая степень одночлена, входящего в этот многочлен. Например, $5x^2y^3 + 2x + 7$, $3xy^4 - x^3$, $7x^5 - 17x^2 + 5$ — многочлены пятой степени.

§49. Многочлен n -й степени и его частные случаи для $n=0,1,2$

Многочлен n -й степени чаще всего записывается в таком виде, при котором он образует алгебраическую сумму одночленов по убывающим степеням:

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, в котором $a_0 \neq 0$;

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — коэффициенты многочлена n -й степени;

$a_0 x^n$ — старший член многочлена;

a_0 — коэффициент при старшем члене;

a_n — свободный член многочлена;

n — степень многочлена (это степень старшего члена).

Многочлен нулевой степени $P_0(x) = a_0$ называется *константой*, многочлен первой степени $P_1(x) = a_0 x + a_1$ называется *линейной функцией*, многочлен второй степени $P_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ называется *квадратичной функцией* или квадратным трехчленом.

Например, $x^2 + 3x - 9$ — многочлен второй степени (квадратный трехчлен), в котором x^2 — старший член, коэффициент при старшем члене равен единице, -9 — свободный член многочлена;

$6x^7 - 3x^5 + 4x + 3$ — многочлен седьмой степени, в котором $6x^7$ — старший член, 6 — коэффициент при старшем члене, 3 — свободный член многочлена.

Корнем многочлена $P_n(x)$ называется такое значение x , при котором многочлен обращается в нуль. Например, число $x = 2$ является корнем многочлена $P_3(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, так как $P_3(2) = 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$.

§50. Преобразование суммы и разности многочленов.

Правило раскрытия скобок.

Приведение подобных членов (слагаемых)

Для того, чтобы преобразовать сумму или разность многочленов в многочлен стандартного вида, необходимо раскрыть скобки и привести подобные члены (слагаемые).

Правило раскрытия скобок

Если перед скобками стоит знак «+», то, раскрывая скобки, нужно сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки. Если перед скобками стоит знак «-», то, раскрывая скобки, нужно знаки слагаемых поменять на противоположные.

Отметим следующее. Сравнивая правила грамматики с правилами математики, можно заметить, что иногда роль запятой в грамматике играет скобка в математике. Последовательность расставления запятых или скобок может иметь первостепенное

значение. Рассмотрим предложение «Казнить нельзя помиловать», в котором можно запятую расставить двумя способами: «Казнить, нельзя помиловать» и «Казнить нельзя, помиловать». Как видим, смысл совершенно противоположный и зависит от того, в каком месте поставить запятую. В математике можно рассмотреть следующие примеры:

$$а) (2 + 8)5 = 10 \cdot 5 = 50; 2 + 8 \cdot 5 = 2 + 40 = 42; 50 \neq 42;$$

$$б) (-1)^4 = 1; -1^4 = -(1)^4 = -1; 1 \neq -1;$$

$$в) (5 - x)x = 5x - x^2; 5 - x \cdot x = 5 - x^2; 5x - x^2 \neq 5 - x^2;$$

$$г) (2 - 3x)x^2 = 2x^2 - 3x^3; 2 - 3x \cdot x^2 = 2 - 3x^3; 2x^2 - 3x^3 \neq 2 - 3x^3.$$

Примеры показывают, что умение правильно расставлять скобки имеет огромное значение.

Приведение подобных членов (слагаемых)

Чтобы привести подобные члены (слагаемые), достаточно сложить их числовые коэффициенты и полученное число умножить на общее буквенное выражение.

$$\text{Пример. } (7x^3 - 5x^2 + 6) - (5x^2 + 4x - 3) = 7x^3 - 5x^2 + 6 - 5x^2 - 4x + 3 = 7x^3 - 10x^2 - 4x + 9.$$

§51. Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго и полученные произведения сложить. При умножении выражений нужно помнить правила знаков, а именно: $(+x) \cdot (+y) = xy$; $(-x) \cdot (-y) = xy$; $(+x) \cdot (-y) = -xy$; $(-x) \cdot (+y) = -xy$.

§52. Деление с остатком многочлена на многочлен

Такое деление возможно, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе. Чтобы найти частное двух многочленов, нужно расположить многочлен делимого и многочлен делителя по убывающим степеням переменной и выполнить деление.

Пусть $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно, причем $m \geq n$:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \quad a_0 \neq 0.$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n, \quad b_0 \neq 0.$$

Разделив $P_m(x)$ на $Q_n(x)$, получаем:

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = F_{m-n}(x) + \frac{r(x)}{Q_n(x)}$, где $F_{m-n}(x)$ — многочлен степени $(m-n)$, называемый целой частью; $r(x)$ — многочлен степени не выше $(n-1)$, называемый остатком. На практике деление многочленов выполняется «углом». Располагаем оба многочлена по убывающим степеням и записываем рядом, отделив «углом». Сначала делим старший член делимого на старший член делителя и записываем результат под горизонтальной чертой. Затем под делимым подписываем произведение делителя на указанный результат и вычитаем это произведение из делимого. Теперь задача свелась к делению нового многочлена меньшей степени на прежний делитель. Дальнейшие действия аналогичны описанным. В результате либо многочлен нацело разделится на многочлен ($r(x) \equiv 0$), либо получится остаток.

Пример 1. Разделить $x^3 + x - 2$ на $(x - 1)$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x - 2 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & \\ x^2 + x & \\ \underline{x^2 - x} & \\ 2x - 2 & \\ \underline{2x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Отсюда $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2)$. Таким образом, многочлен $x^3 + x - 2$ нацело делится на многочлен (двучлен) $x - 1$.

$$\text{Ответ: } \frac{x^3 + x - 2}{x - 1} = x^2 + x + 2.$$

Пример 2. Разделить $x^4 + 2x^2 - 5$ на $x^2 + 2x + 2$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 2x^2 - 5 & x^2 + 2x + 2 \\ \underline{x^4 + 2x^3 + 2x^2} & \\ -2x^3 - 5 & \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 - 4x} & \\ 4x^2 + 4x - 5 & \\ \underline{4x^2 + 8x + 8} & \\ -4x - 13 & \end{array}$$

Отсюда $\frac{x^4 + 2x^2 - 5}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - 2x + 4 + \frac{-4x - 13}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{4x + 13}{x^2 + 2x + 2}$; $x^2 - 2x + 4$ есть целая часть, а $(-4x - 13)$ есть остаток.

Ответ: $\frac{x^4 + 2x^2 - 5}{x^2 + 2x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{4x + 13}{x^2 + 2x + 2}$.

§53. Формулы сокращенного умножения

1) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$;

2) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

3) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;

4) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;

5) $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;

6) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;

7) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$;

8) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$.

9) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$.

Написанные выше формулы 1) — 9) применяются для преобразования (упрощения) выражений. Часто их применяют, читая не слева направо, а справа налево.

Приведем примеры на использование формул сокращенного умножения.

Пример 1. $(4a)^2 - (x + a)^2 = (4a - (x + a))(4a + (x + a)) = (3a - x)(5a + x)$.

Пример 2. $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3 = (2x - 5y) \times ((2x)^2 + 2x5y + (5y)^2) = (2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$.

Пример 3. $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2) = (3a - 2b) \times ((3a)^2 + 3a \cdot 2b + (2b)^2) = (3a)^3 - (2b)^3 = 27a^3 - 8b^3$.

§54. Треугольник Паскаля

Если требуется возвести двучлен в степень выше третьей, то быстрее всего это можно сделать с использованием треугольника Паскаля, который иначе называется арифметическим треугольником. Треугольник Паскаля — это числовая таблица «треугольной формы», в которой по боковым сторонам стоят единицы, а всякое другое число получается как сумма двух ближайших к нему чисел из предшествующей строки. Треугольник Паскаля имеет вид (рис. 11):

				1			
			1	1			
		1	2	1			
	1	3	3	1			
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	

Рис. 11

Треугольник Паскаля можно продолжить, заполняя элементы любой строки. Мы ограничились выписыванием семи первых строк.

Пример 1. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пример 2. $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Из примера 2 видно, что если возводится в степень разность двучлена, то наблюдается чередование знаков и после знака «+» обязательно ставится знак «-» и т. д.

§55. Выделение полного квадрата двучлена из квадратного трехчлена

Пусть дан квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ и нужно преобразовать его к виду $a(x+m)^2 + n$. Для этого поступаем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = \\
 &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

Приведем примеры на выделение полного квадрата .

Пример 1. $x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 1 = (x-2)^2 - 4 + 1 =$
 $= (x-2)^2 - 3.$ **Ответ:** $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3.$

Пример 2. $-2x^2 + 7x - 3 = -2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) =$
 $= -2\left(x^2 - 2x \cdot \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\right) = -2\left(\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2}\right) =$
 $= -2\left(\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right) = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}.$

Ответ: $-2x^2 + 7x - 3 = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}.$

§56. Разложение многочлена на множители

Разложением многочлена на множители называется преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов, среди которых могут быть и одночлены. Существует четыре основных способа разложения многочлена на множители.

Первый способ. Вынесение общего множителя за скобки.

Пример 1. $10x^2y - 5xy^3 = 5xy(2x - y^2).$

Второй способ. Способ группировки, который заключается в том, что объединяются в группы те члены, которые имеют общие множители, и выносятся за скобки общий множитель каждой из групп. Если после такого преобразования окажется общий множитель у всех получившихся групп, то его выносят за скобки.

Пример 2. $5(x-3y)^2 - 4x + 12y = 5(x-3y)^2 - 4(x-3y) =$
 $= (x-3y)(5(x-3y) - 4) = (x-3y)(5x - 15y - 4);$

$(x-3y)$ — общий множитель.

Третий способ. Применение формул сокращенного умножения.

Пример 3. $a^2 + b^2 + 2ab - 4c^2 = (a+b)^2 - (2c)^2 =$
 $= (a+b-2c)(a+b+2c).$

Четвертый способ. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители, если известны его корни. Забегая вперед, заметим, что если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 , то он может быть разложен на линейные множители следующим образом: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Пример 4. $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, так как $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 4$.

§57. Целые рациональные выражения

Целыми рациональными выражениями называются все числовые выражения, а также выражения с переменными, которые могут содержать действия сложения, вычитания, умножения, возведения переменных в натуральную степень. Если рассматривать выражения от одной переменной, то простейшим примером целого рационального выражения является многочлен степени $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

Другие примеры целых рациональных выражений: $5x - \frac{1}{4}xy^2$,

$ab + 7a^2$, $0,1ax^5 - abcsxy$. Выражения $5xy^{-2}$, $\frac{y^2}{15x+7}$, $\frac{5x-3y}{x^2+5y}$ не являются целыми рациональными, поскольку содержат операции возведения в целую отрицательную степень и деления на переменные.

§58. Дробные рациональные выражения.

Основное свойство рациональной дроби

Дробными рациональными выражениями (дробно-рациональными выражениями) называются выражения с переменными, которые могут содержать действия сложения, вычитания, умножения, возведения переменных в натуральную степень и деления на выражения с переменными. Если рассматривать выражения от одной переменной, то примером дробно-рационального выражения является отношение двух многочленов:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}.$$

Другие примеры дробных рациональных выражений:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 9xyz}; \frac{m - n^2}{m^3 + 3nx}; \frac{m}{n} + \frac{6x}{x^2 + 5y}; \frac{x^3}{x + 1}.$$

Рациональной дробью называется выражение $\frac{P}{Q}$, где P и Q — рациональные выражения, причем Q обязательно содержит переменные. Примеры рациональных дробей: $\frac{1}{x^2 + x + 1}$; $\frac{a^2 + bc}{ax^2 + bx + c}$;

$$\frac{a^2 + a + 1}{m^2 + 3mn}; \frac{x + 10}{x^3 - x^2 + 2}; \frac{x^5 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Основное свойство дроби заключается в том, что числитель и знаменатель дроби можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, одночлен или многочлен, $\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot R}$,

$$\text{если } R \neq 0; \frac{P}{Q} = \frac{P/R}{Q/R}, R — \text{целое рациональное выражение.}$$

Приведем примеры на использование основного свойства дроби.

$$\text{Пример 1. } \frac{a + b}{a^2 + 1} = \frac{2(a + b)}{2(a^2 + 1)}.$$

$$\text{Пример 2. } \frac{\frac{1}{5}x^2 + x + 1}{\frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{3}x} = \frac{15\left(\frac{1}{5}x^2 + x + 1\right)}{15\left(\frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{3}x\right)} = \frac{3x^2 + 15x + 15}{x^3 + 5x}.$$

$$\text{Пример 3. } \frac{7x^2 + 21x}{49x - 7xy} = \frac{\frac{7x^2 + 21x}{7x}}{\frac{49x - 7xy}{7x}} = \frac{x + 3}{7 - y}, x \neq 0, y \neq 7.$$

Основное свойство дроби может быть использовано для перемены знаков у членов дроби. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{P}{Q}$ умножить на (-1) , то получим $\frac{P}{Q} = \frac{-P}{-Q}$. Отсюда значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у

числителя и знаменателя. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак:

$$\frac{-P}{Q} = \frac{P}{-Q} = -\frac{P}{Q}. \text{ Также можно записать: } \frac{P}{Q} = -\frac{-P}{Q} = -\frac{P}{-Q}.$$

Пример 4. $\frac{2-3x^2}{-5+7x} = -\frac{3x^2-2}{-5+7x} = \frac{3x^2-2}{-7x+5} = -\frac{2-3x^2}{5-7x}.$

Пример 5. $\frac{m^2-3n}{9n-m} = \frac{3n-m^2}{m-9n} = -\frac{m^2-3n}{m-9n} = -\frac{3n-m^2}{9n-m}.$

§59. Сокращение рациональных дробей

Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на общий множитель. Возможность подобного рода сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить рациональную дробь, нужно попытаться разложить на множители числитель и знаменатель. Если числитель и знаменатель имеют общие множители, то дробь можно сократить. Если общих множителей нет, то преобразование дроби посредством сокращения невозможно.

Пример 1. Сократить дробь $\frac{x^2-y^2}{2(x+y)}.$

Решение.

$$\frac{x^2-y^2}{2(x+y)} = \frac{(x-y)(x+y)}{2(x+y)} = \frac{x-y}{2}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{x-y}{2} \right\}.$$

Пример 2. Сократить дробь $\frac{3a-6b}{a^2-4b^2}.$

Решение.

$$\frac{3a-6b}{a^2-4b^2} = \frac{3(a-2b)}{a^2-(2b)^2} = \frac{3(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{3}{a+2b}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{3}{a+2b} \right\}.$$

§60. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю

Общим знаменателем двух или нескольких рациональных дробей называется целое рациональное выражение, которое делится на знаменатель каждой дроби.

Например, общим знаменателем дробей $\frac{5}{x-1}$ и $\frac{7x+3}{2x+1}$ является многочлен $(x-1)(2x+1)$, однако не только он, но и многочлены $2(x-1)(2x+1)$, $7x(x-1)(2x+1)$, $9x^2(x-1)^4(2x+1)^7$ и т. д. Предпочтительнее взять *наименьший общий знаменатель* — такой простейший общий знаменатель, что любой другой общий знаменатель делится на этот простейший. Наименьшим общим знаменателем дробей $\frac{5}{x-1}$ и $\frac{7x+3}{2x+1}$ является $(x-1)(2x+1)$. Можно записать:

$$\frac{5}{x-1} = \frac{5(2x+1)}{(x-1)(2x+1)}; \quad \frac{7x+3}{2x+1} = \frac{(7x+3)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}.$$

Приведение исходных дробей к наименьшему общему знаменателю (в дальнейшем будем называть его просто общим знаменателем) было достигнуто умножением числителя и знаменателя первой дроби на $(2x+1)$, а числителя и знаменателя второй дроби на $(x-1)$. Многочлены $(2x+1)$ и $(x-1)$ называют дополнительными множителями для первой и второй дробей соответственно. Таким образом, *дополнительный множитель* для данной дроби равен частному от деления общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Для того чтобы несколько рациональных дробей привести к общему знаменателю, необходимо:

1) разложить знаменатель каждой дроби на множители, если это возможно;

2) составить общий знаменатель, включив в него в качестве сомножителей все различные множители, полученные в пункте 1); если некоторый множитель имеется в нескольких разложениях, то он берется с показателем степени, равным наибольшему из имеющих;

3) определить дополнительные множители для каждой из дробей, для чего общий знаменатель разделить на знаменатель каждой дроби;

4) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на дополнительный множитель.

Пример. Привести дроби к общему знаменателю.

$$\frac{1}{9a(a^2-4b^2)}; \quad \frac{5n}{36a^4-72a^3b}; \quad \frac{3m}{20a^3+40a^2b}.$$

Решение.

$9a(a^2-4b^2) = 9a(a-2b)(a+2b)$; $36a^4-72a^3b = 36a^3(a-2b)$; $20a^3+40a^2b = 20a^2(a+2b)$. Наименьшее общее кратное чисел 9,

36, 20 есть число 180. Отсюда общий знаменатель имеет вид $180a^3(a-2b)(a+2b)$. Дополнительные множители: $20a^2$, $5(a+2b)$, $9a(a-2b)$, — для первой, второй и третьей дробей соответственно.

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{9a(a^2-4b^2)} &= \frac{\overbrace{20a^2}^{20a^2}}{9a(a-2b)(a+2b)} = \frac{20a^2}{180a^3(a-2b)(a+2b)}; \\ \frac{5n}{36a^4-72a^3b} &= \frac{\overbrace{5(a+2b)}^{5(a+2b)}}{36a^3(a-2b)} = \frac{25n(a+2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)}; \\ \frac{3m}{20a^3+40a^2b} &= \frac{\overbrace{9a(a-2b)}^{9a(a-2b)}}{20a^2(a+2b)} = \frac{27am(a-2b)}{180a^3(a-2b)(a+2b)}.\end{aligned}$$

§61. Сложение и вычитание рациональных дробей

Сумма (разность) двух рациональных дробей с *одинаковыми знаменателями* тождественно равна дроби с тем же знаменателем и с числителем, равным сумме (разности) числителей исходных дробей:

$$\frac{P_1}{Q} \pm \frac{P_2}{Q} = \frac{P_1 \pm P_2}{Q}.$$

Пример 1. $\frac{2a+5}{a-1} + \frac{2-3a}{a-1} = \frac{2a+5+2-3a}{a-1} = \frac{7-a}{a-1}, (a \neq 1).$

Пример 2. $\frac{x^2}{x-y} - \frac{y^2}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y, (x \neq y).$

При сложении (или вычитании) рациональных дробей с *разными знаменателями* нужно привести дроби к общему знаменателю и выполнить сложение (или вычитание) дробей с общим знаменателем:

$$\frac{P}{Q} \pm \frac{P_1}{Q_1} = \frac{Pm \pm P_1n}{S}, \text{ где } m \text{ — дополнительный множитель}$$

для первой дроби $\left(m = \frac{S}{Q}\right)$; n — дополнительный множитель для

второй дроби $\left(n = \frac{S}{Q_1}\right)$; S — общий знаменатель.

Замечание. Приведенные правила справедливы для любого конечного числа дробей.

$$\text{Пример 3. } \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{5(x+1) - 4(x-1) + 2}{x^2-1} = \\ = \frac{5x+5-4x+4+2}{x^2-1} = \frac{x+11}{x^2-1}.$$

$$\text{Пример 4. Упростить выражение } \frac{1}{b} - \frac{3a}{b^2+3ab} - \frac{b}{b^2-9a^2}.$$

Решение.

$$b^2+3ab = b(b+3a), \quad b^2-9a^2 = b^2-(3a)^2 = (b-3a)(b+3a).$$

$$\frac{1}{b} - \frac{3a}{b^2+3ab} - \frac{b}{b^2-9a^2} = \frac{1}{b} - \frac{3a}{b(b+3a)} - \frac{b}{(b-3a)(b+3a)} = \\ = \frac{(b+3a)(b-3a) - 3a(b-3a) - b^2}{b(b+3a)(b-3a)} = \frac{b^2-9a^2-3ab+9a^2-b^2}{b(b+3a)(b-3a)} = \\ = \frac{-3ab}{b(b+3a)(b-3a)} = \frac{-3ab}{b(b^2-9a^2)} = \frac{3ab}{b(9a^2-b^2)}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{3ab}{b(9a^2-b^2)} \right\}.$$

§62. Умножение и деление рациональных дробей

Произведение двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей перемножаемых дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} \cdot \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot P_2}{Q_1 \cdot Q_2}.$$

Это правило распространяется на произведение любого конечного числа дробей.

Частное от деления двух рациональных дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителя первой дроби на знаменатель второй дроби, а знаменатель — произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{P_1}{Q_1} : \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 \cdot Q_2}{Q_1 \cdot P_2}.$$

Если дробь умножается или делится не на дробь, а на многочлен $R(x)$, то указанные выше правила остаются в силе, но многочлен $R(x)$ необходимо представить в виде $R(x) = \frac{R(x)}{1}$.

На практике при умножении или делении рациональных дробей обычно предварительно разлагают на множители числители и знаменатели исходных дробей (если это возможно).

Пример 1. Упростить выражение $\frac{x^2+4x+4}{3x^2(x^2-4x+4)} \cdot \frac{x^3(x^2-4)}{(x+2)^3} = A$.

Решение. $\frac{x^2+4x+4}{3x^2(x^2-4x+4)} = \frac{(x+2)^2}{3x^2(x-2)^2}$;

$$\frac{x^3(x^2-4)}{(x+2)^3} = \frac{x^3(x-2)(x+2)}{(x+2)^3} = \frac{x^3(x-2)}{(x+2)^2};$$

$$A = \frac{(x+2)^2}{3x^2(x-2)^2} \cdot \frac{x^3(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{x}{3(x-2)}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{x}{3(x-2)} \right\}.$$

Пример 2. Упростить выражение $\left(a + \frac{b-a}{1-ab}\right) : \left(a + \frac{ab-a}{1-ab}\right) = A$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1-ab}{a + \frac{b-a}{1-ab}} &= \frac{a(1-ab) + b-a}{1-ab} = \frac{a-a^2b+b-a}{1-ab} = \frac{b-a^2b}{1-ab} = \\ &= \frac{b(1-a^2)}{1-ab} = \frac{b(1-a)(1+a)}{1-ab}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + \frac{ab-a}{1-ab} &= \frac{a(1-ab) + ab-a}{1-ab} = \frac{a-a^2b+ab-a}{1-ab} = \frac{ab-a^2b}{1-ab} = \frac{ab(1-a)}{1-ab}; \\ A &= \frac{b(1-a)(1+a)}{1-ab} : \frac{ab(1-a)}{1-ab} = \frac{b(1-a)(1+a)(1-ab)}{(1-ab)ab(1-a)} = \frac{1+a}{a}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1+a}{a} \right\}.$$

§63. Возведение рациональных дробей в степень

Степень рациональной дроби тождественно равна дроби, у которой числитель есть степень числителя, а знаменатель — степень знаменателя:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n = \frac{P^n}{Q^n}.$$

Например: $\left(\frac{x^2-9}{xy+3y}\right)^3 = \left(\frac{(x-3)(x+3)}{y(x+3)}\right)^3 = \left(\frac{x-3}{y}\right)^3 = \frac{(x-3)^3}{y^3};$

$$\left(\frac{3ab^2}{2c^3}\right)^4 = \frac{(3ab^2)^4}{(2c^3)^4} = \frac{3^4 a^4 b^8}{2^4 c^{12}} = \frac{81 a^4 b^8}{16 c^{12}}.$$

§64. Решение примеров на тождественные преобразования рациональных выражений

Преобразование рационального выражения сводится к сложению, вычитанию, умножению и делению рациональных дробей, а также к возведению дроби в целую степень. Целью тождественного преобразования рациональных выражений обычно является преобразование их в дробь, числитель и знаменатель которой — целые рациональные выражения.

Пример 1. Упростить выражение

$$\left(\frac{a}{a^2-4} + \frac{2}{2-a} + \frac{1}{a+2}\right) : \left(a-2 + \frac{10-a^2}{a+2}\right) = A.$$

Решение.

Преобразуем вначале выражения в скобках, а затем выполним деление. Решение осуществляем в несколько этапов.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{a}{a^2-4} + \frac{2}{2-a} + \frac{1}{a+2} &= \frac{a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2} + \frac{1}{a+2} = \\ &= \frac{a-2(a+2)+a-2}{(a-2)(a+2)} = \frac{a-2a-4+a-2}{(a-2)(a+2)} = -\frac{6}{(a-2)(a+2)}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } (a-2) + \frac{10-a^2}{a+2} = \frac{(a+2)(a-2)+10-a^2}{a+2} = \frac{6}{a+2};$$

$$\text{в) } A = -\frac{6}{(a-2)(a+2)} : \frac{6}{a+2} = \frac{(-6)(a+2)}{(a-2)(a+2)6} = -\frac{1}{a-2} = \frac{1}{2-a}.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2-a}\right\}.$

Пример 2. Упростить выражение

$$M = \left(\frac{a}{ax-2x^2} - \frac{2}{a+a^2-2ax-2x} \left(1 + \frac{3a+a^2}{a+3}\right)\right)^{-1}.$$

Р е ш е н и е. Выполняем преобразования непосредственно, не разбивая решение на несколько этапов.

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{a}{x(a-2x)} - \frac{2}{a(1+a)-2x(a+1)} \left(1 + \frac{a(3+a)}{a+3} \right) \right)^{-1} = \\
 &= \left(\frac{a}{x(a-2x)} - \frac{2}{(1+a)(a-2x)} (1+a) \right)^{-1} = \left(\frac{a}{x(a-2x)} - \frac{2}{a-2x} \right)^{-1} = \left(\frac{a-2x}{x(a-2x)} \right)^{-1} = \\
 &= \left(\frac{1}{x} \right)^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{x\}$.

Пример 3. Упростить выражение

$$\left(\frac{x+5}{x^2-81} + \frac{x+7}{x^2-18x+81} \right) : \left(\frac{x+3}{x-9} \right)^2 + \frac{x+7}{x+9} = A.$$

Р е ш е н и е. Осуществляем решение в несколько этапов

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \frac{x+5}{x^2-81} + \frac{x+7}{x^2-18x+81} &= \frac{x+5}{(x-9)(x+9)} + \frac{x+7}{(x-9)^2} = \\
 &= \frac{(x-9)(x+5) + (x+9)(x+7)}{(x-9)^2(x+9)} = \frac{x^2+5x-9x-45+x^2+7x+9x+63}{(x-9)^2(x+9)} = \\
 &= \frac{2x^2+12x+18}{(x-9)^2(x+9)} = \frac{2(x^2+6x+9)}{(x-9)^2(x+9)} = \frac{2(x+3)^2}{(x-9)^2(x+9)}; \\
 \text{б) } \frac{2(x+3)^2}{(x-9)^2(x+9)} : \left(\frac{x+3}{x-9} \right)^2 &= \frac{2(x+3)^2(x-9)^2}{(x-9)^2(x+9)(x+3)^2} = \frac{2}{x+9}; \\
 \text{в) } A &= \frac{2}{x+9} + \frac{x+7}{x+9} = \frac{2+x+7}{x+9} = \frac{x+9}{x+9} = 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\{1\}$.

§65. Корень n -й степени из действительного числа

Действительное число x называется *корнем n -й степени из действительного числа a* , если $x^n = a$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Корень n -й степени обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Согласно определению $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Число a называется *подкоренным числом* или *подкоренным выражением*, n — *показателем корня*. Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют это выражение *квадратным*

корнем. $\sqrt[3]{a}$ называют *кубическим корнем*. Вместо термина «корень» употребляют термин «радикал».

Пример. а) $\sqrt{4} = 2$, так как $2^2 = 4$; б) $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3^4 = 81$; в) $\sqrt{0} = 0$; г) $\sqrt{1} = 1$; д) $\sqrt[3]{8} = 2$; е) $\sqrt[3]{27} = 3$; ж) $\sqrt[5]{243} = 3$.

Действие, посредством которого отыскивается корень n -й степени, называется *извлечением корня n -й степени*.

Корень четной степени извлекается только из неотрицательного числа, то есть если $a < 0$, то $\sqrt[n]{a}$ не существует. Например, выражения $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-81}$, $\sqrt[6]{-3}$ не имеют смысла в области действительных чисел. Корень нечетной степени извлекается и из отрицательного числа. Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, т. к. $(-3)^3 = -27$; $\sqrt[3]{-1} = -1$; $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[5]{-32} = -2$. Для корней нечетной степени $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. Для корней четной степени это свойство не выполняется, т. е. $\sqrt[n]{-a} \neq -\sqrt[n]{a}$ (оно выполняется только для $a = 0$). Таким образом, $\sqrt[n]{a}$ существует при $a \geq 0$, $\sqrt[n+1]{a}$ существует для любого $a \in R$.

Чтобы устранить двузначность корня n -й степени из действительного числа a , вводится понятие арифметического корня.

Арифметическим корнем называется *неотрицательный корень n -й степени* из неотрицательного числа. Для корней четной степени условились брать только арифметический корень. Таким образом, можем записать: $\sqrt{a^2} = |a| \geq 0$, $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| \geq 0$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{100} = 10$. Ошибочно записывать $\sqrt{9} = \pm 3$, $\sqrt{100} = \pm 10$.

Замечание. Иногда арифметическим корнем называют неотрицательный корень четной степени из неотрицательного числа.

§66. Основные свойства корней (правила действий с радикалами)

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;	2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b \neq 0$);
3) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;	4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$;	6) $(\sqrt[n]{a})^n = a$;
7) $\sqrt{a^2} = a $;	8) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a $.

Замечание 1. Приведенные выше свойства 1)–6) справедливы для $a \geq 0$, $b \geq 0$, если рассматривать корни четной степени. Свойства 7)–8) справедливы для любого $a \in R$.

Если же рассматривать корни нечетной степени, то эти свойства 1)–8) справедливы для $a \in R$, $b \in R$.

Замечание 2. Формулы 1)–5) часто применяются в обратном порядке, т. е. справа налево. Например: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15}$;
 $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{22}{11}} = \sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2^5} = (\sqrt[3]{2})^5$; $\sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{\sqrt{7}}$; $\sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{3^3}$.

§67. Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня: $\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0$.

Пример. Вынести множитель из-под корня:

а) $\sqrt[3]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$;

б) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{2^2 \cdot 6} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500} = \sqrt[4]{625 \cdot 4} = \sqrt[4]{625} \cdot \sqrt[4]{4} = 5 \cdot \sqrt[4]{2^2} = 5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11} \cdot b^4} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot b} = \sqrt[3]{a^9 \cdot b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b} = a^3 \cdot b \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}$.

Ответ: а) $\{2\sqrt[3]{4}\}$; б) $\{2\sqrt{6}\}$; в) $\{5\sqrt{2}\}$; г) $\{a^3 b \sqrt[3]{a^2 b}\}$.

§68. Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня: $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$.

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем:

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{2n} b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$; $a \cdot \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^{2n} b}$, если $a \leq 0, b \geq 0$.

В частности, для квадратных корней:

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, если $a \geq 0, b \geq 0$; $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$, если $a \leq 0, b \geq 0$.

Пример. Внести множитель под корень: а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2 \cdot \sqrt[5]{b}$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 6} = \sqrt[3]{27 \cdot 6} = \sqrt[3]{162}$;

б) $a^2 \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10}} \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^{10} b}$. Ответ: а) $\{\sqrt[3]{162}\}$; б) $\{\sqrt[5]{a^{10} b}\}$.

§69. Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^k \cdot b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}.$$

Пример 1. $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{5} = \frac{1}{5} \sqrt[3]{15}.$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{5} \sqrt[3]{15} \right\}.$

Упростить корень — это значит:

- 1) вынести множитель из-под корня;
- 2) сократить показатели корня и подкоренного выражения;
- 3) привести подкоренное выражение к целому виду.

Пример 2. Упростить корень $\sqrt[4]{\frac{7ab^5}{2m^3n}}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{7ab^5}{2m^3n}} &= \sqrt[4]{\frac{b^4 7ab}{2m^3n}} = b \cdot \sqrt[4]{\frac{7ab}{2m^3n}} = b \cdot \sqrt[4]{\frac{7 \cdot 2^3 \cdot m \cdot n^3 \cdot a \cdot b}{2 \cdot 2^3 \cdot m^3 \cdot m \cdot n^3 \cdot n}} = \\ &= b \cdot \sqrt[4]{\frac{7 \cdot 8 \cdot a \cdot b \cdot m \cdot n^3}{2^4 \cdot m^4 \cdot n^4}} = b \cdot \frac{\sqrt[4]{56abmn^3}}{2mn} = \frac{b}{2mn} \cdot \sqrt[4]{56abmn^3}, \end{aligned}$$

где $a \geq 0, b \geq 0, mn > 0.$

Ответ: $\left\{ \frac{b}{2mn} \sqrt[4]{56abmn^3} \right\}.$

§70. Освобождение дроби от иррациональности в знаменателе дроби или в числителе дроби

Дробь можно освободить от иррациональности (от иррационального выражения) в числителе или в знаменателе, например,

так: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \Rightarrow$ дробь $\frac{a}{\sqrt{b}}$ освободили от иррациональ-

ности в знаменателе; $\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{b\sqrt{a}} = \frac{a}{b\sqrt{a}} \Rightarrow$ дробь $\frac{\sqrt{a}}{b}$ освободили от иррациональности в числителе.

Чтобы освободить дробь от иррациональности в числителе или в знаменателе, можно применять формулы сокращенного умножения, которые применительно к корням имеют вид:

$$\text{а) } (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b;$$

$$\text{б) } (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2) = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + b;$$

$$\text{в) } (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})((\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b.$$

Выражения $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ и $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ называются *взаимно сопряженными выражениями*. Их произведение равно разности подкоренных выражений: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, $(a \geq 0, b \geq 0)$.

Пример. Освободить дроби от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}; \quad \text{в) } \frac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \\ &= \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b};$$

$$\text{в) } \frac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}.$$

$$\text{Ответ: а) } \{\sqrt{5} - \sqrt{3}\}; \quad \text{б) } \left\{ \frac{c(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b} \right\}; \quad \text{в) } \left\{ \frac{xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} \right\}.$$

§71. Подобные радикалы

Множитель, стоящий перед корнем, называется его *коэффициентом*. Например, в выражении $4\sqrt{5}$ коэффициентом является число 4. Корни (радикалы) называются *подобными*, если они имеют одинаковые показатели корней и одинаковые подкоренные выражения, а отличаются только коэффициентом. Например, радикалы $\sqrt[3]{108}$ и $\sqrt[3]{32}$ подобны, т. к. $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \cdot 4} = 3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2\sqrt[3]{4}$.

§72. Степень действительного числа с рациональным показателем

Если $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a > 0$, то полагают по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например, $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$; $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{125}$.

Замечание. Формула $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$. Если $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), то формула $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ справедлива при $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если $\frac{m}{n} > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ имеет смысл не только при $a > 0$, но и при $a \leq 0$, причем $\sqrt[n]{0^m} = 0$. Например, имеют смысл следующие выражения, которые можно записать с помощью ради-

калов: $(-2)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32} = -\sqrt[3]{32}$; $(-0,5)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-0,5)^2} = \sqrt[3]{0,25}$;

$(-27)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^2} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{3^6} = 9$; $0^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{0} = 0$; $0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2} = 0$.

§73. Степень действительного числа с действительным показателем

Степень действительного числа с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным, целым, рациональным показателями. Запишем эти свойства, предполагая, что $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Свойства степени действительного числа с действительными показателями

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

3) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$;

4) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

7) $a^0 = 1$; 8) $a^1 = a$; 9) $1^x = 1$.

Пример.

а) $\frac{9^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 9 \cdot \sqrt[3]{9}$;

б) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{16}} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$.

Замечание 1. Выражение a^x обычно рассматривается при $a > 0$, т. к. при $a > 0$ выражение a^x имеет смысл всегда. Однако при $a < 0$ a^x имеет смысл в следующих случаях:

а) для неотрицательных целых $x \geq 0$;

б) для рациональных чисел $x = \frac{p}{q}$, у которых знаменатель

q — нечетное число;

в) когда x — целое отрицательное число.

Например, выражения $(-9)^{-4}$, $(-5)^0$, $(-0,8)^{-\frac{1}{3}}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$,

$(-2,5)^{-\frac{2}{3}}$ существуют (имеют смысл); выражения $(-7)^{\frac{1}{2}}$, $(-3)^{\frac{1}{4}}$,

$(-0,5)^{\frac{2}{3}}$, $(-5)^{\frac{1}{2}}$ не существуют в области действительных чисел.

Замечание 2. Обычно переменные обозначаются буквами x , y , z , u , v , w , а постоянные (или параметры) — буквами a , b , c , α , β , γ , δ и т. д. Если основание степени обозначить через x , а показатель степени через α , то степень принимает вид x^α . Так как преобразования со степенями вида x^α встречаются довольно часто, то запишем свойства степени 1)–9), условно

назвав их свойствами степени с переменным основанием и фиксированным показателем степени ($x > 0, y > 0, \alpha \in R, \beta \in R$).

$$1) x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}; \quad 2) \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta};$$

$$3) (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha; \quad 4) (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha;$$

$$5) \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}; \quad 6) x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha};$$

$$7) x^0 = 1; \quad 8) x^1 = x; \quad 9) 1^\alpha = 1.$$

Замечание 3. Выражение x^α обычно рассматривают при $x > 0$, т. к. при $x > 0$ x^α имеет смысл всегда. Однако при $\alpha > 0$ (α — целое) x^α определено для любого $x \in R$; если α — целое отрицательное число, то x^α определено при $x \in R \setminus \{0\}$; если $\alpha = \frac{p}{q}$, где q — нечетное число, то x^α определено не только при $x > 0$, но и при $x < 0$.

§74. Решение примеров на преобразование иррациональных выражений

При решении примеров на преобразование иррациональных выражений используются свойства радикалов и свойства степени с рациональным показателем.

Пример 1. Упростить $\sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}}$.

Решение.

$$1 \text{ способ. } x^4 \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x^4)^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^{12} \cdot x} = \sqrt[3]{x^{13}} \Rightarrow \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{13}}} = \sqrt[15]{x^{13}}.$$

$$2 \text{ способ. } \sqrt[5]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x}} = \sqrt[5]{x^4} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{1}{15}} = x^{\frac{4}{5} + \frac{1}{15}} = x^{\frac{12+1}{15}} = x^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{x^{13}}.$$

Ответ: $\sqrt[15]{x^{13}}$.

Пример 2. Упростить $(\sqrt[7]{a^3})^5$.

Решение.

$$(\sqrt[7]{a^3})^5 = \sqrt[7]{a^{3 \cdot 5}} = \sqrt[7]{a^{15}} = \sqrt[7]{a^{14} \cdot a} = a^2 \cdot \sqrt[7]{a}.$$

Ответ: $\{a^2 \cdot \sqrt[7]{a}\}$.

Пример 3. Упростить $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}$.

Решение.

1 способ. Приведем радикалы к одному показателю:

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{(x^2)^2} = \sqrt[6]{x^4}. \text{ Тогда } \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^4} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^4 \cdot x} = \sqrt[6]{x^5}.$$

$$\text{2 способ. } \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{4+1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}.$$

Ответ: $\{\sqrt[6]{x^5}\}$.

Пример 4. Упростить $\sqrt{x^2 - 8x + 16}$.

Решение.

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2 = (x-4)^2. \text{ Поэтому } \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|.$$

Ответ: $\{|x-4|\}$.

Пример 5. Упростить выражение $\frac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}} \cdot b}{1 - \sqrt{a^{-1}} \cdot b} - \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}} \cdot b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{b}} = A$.

Решение.

Решение проведем в несколько этапов.

$$\text{а) } \frac{\sqrt{a} - a^{-\frac{1}{2}} \cdot b}{1 - \sqrt{a^{-1}} \cdot b} = \frac{\sqrt{a} - \frac{b}{\sqrt{a}}}{1 - \frac{b}{\sqrt{a}}} = \frac{(\sqrt{a})^2 - b}{\sqrt{a} \left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)} = \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt[3]{a^2} - a^{-\frac{1}{3}} \cdot b}{\sqrt[6]{a} + a^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \frac{b}{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[6]{a} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} - b}{\sqrt[3]{a} \left(\sqrt[6]{a} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}\right)} = \frac{\sqrt[3]{a^3} - b}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} + \sqrt{b}} =$$

$$= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

$$\text{в) } A = \sqrt{a} + \sqrt{b} - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{b} = 2\sqrt{b}.$$

Ответ: $\{2\sqrt{b}\}$.

**§75. Среднее арифметическое и среднее геометрическое.
Неравенство Коши**

Среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть число A_n :

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Среднее геометрическое n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ есть число G_n : $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Пример. Найти среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел 8; 8; 27.

Решение.

$$A_3 = \frac{8 + 8 + 27}{3} = \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3};$$

$$G_3 = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Заметим, что среднее арифметическое n неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (\text{неравенство Коши}).$$

Знак равенства в неравенстве Коши имеет место тогда и только тогда, когда все n чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ равны между собой.

Тесты к главе 4.

Действия с алгебраическими выражениями.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Запишите выражение $\left(\frac{x \cdot x^{-3}}{x^{-4}}\right)$ в виде степени с основанием x .

- 1) x^{-4} ; 2) x^{-2} ; 3) x^2 ; 4) x^4 .

A2. Найдите значение выражения $\frac{4 \cdot 3^{32} + 9 \cdot 3^{30}}{9^{16}}$.

- 1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) 10.

A3. Найдите частное от деления многочлена $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ на двучлен $x - 3$.

- 1) $2x^2 - 3x + 2$; 2) $2x^2 + 3x + 2$;
3) $2x^2 + 3x - 2$; 4) $2x^2 - 3x - 2$.

A4. Найдите остаток от деления многочлена $3x^4 + 5x^2 + 7$ на многочлен $x^2 + x$.

- 1) $-3x + 8$; 2) $8x + 7$; 3) $-8x - 7$; 4) $-8x + 7$.

A5. Сократите дробь $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}$.

- 1) $\frac{x+2}{x-1}$; 2) $\frac{x-2}{x+1}$; 3) $\frac{x-1}{x+2}$; 4) $\frac{x-1}{x-2}$.

A6. Упростите выражение $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b^2}{a}} \sqrt{\frac{1}{c^2}}$.

- 1) $\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 4) 1.

A7. Упростите выражение $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \cdot \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) : \left(\frac{(a+b)^2}{ab}\right)$.

- 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab ; 4) $\frac{1}{ab}$.

A8. Упростите выражение $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$.

- 1) 1; 2) $2\sqrt{7} - 5$; 3) 5; 4) -1.

A9. Освободите дробь $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ от иррациональности в знаменателе:

1) $\frac{x+y}{x-y}$; 2) $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$; 3) $\frac{x-2\sqrt{xy}+4}{x+y}$; 4) $\frac{x-y}{x+y}$.

A10. Внесите множитель под знак радикала в выражении $x\sqrt{y}$, если $x < 0$.

1) $\sqrt{x^2y}$; 2) $\sqrt{-x^2y}$; 3) $-\sqrt{xy}$; 4) $-\sqrt{x^2y}$.

A11. Упростите выражение $\left(x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} \cdot x^{0,3} \cdot x^{0,7}$.

1) x ; 2) x^2 ; 3) x^3 ; 4) x^4 .

A12. Упростите выражение $\sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{\frac{y}{x}}$.

1) $\sqrt{\frac{x}{y}}$; 2) $\sqrt{\frac{y}{x}}$; 3) $\sqrt{\frac{x}{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{y}{x}}$.

A13. Вычислите без калькулятора и таблиц $\frac{27^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{4}}{2^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{3}} + \frac{7}{2}$.

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5.

A14. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$.

1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) $2\sqrt{7}$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Найдите значение выражения $\frac{22 \cdot (21 \cdot 7^{30} - 7^{31})}{7^{32} + 4 \cdot 7^{21}}$.

B2. Упростите выражение

$$\frac{5a+42}{a+8} - \left(\frac{a-8}{a+4}\right)^2 \cdot \left(\frac{a+10}{64-16a+a^2} - \frac{a+6}{64-a^2}\right).$$

B3. Известно, что $x^2 + x + 1 = 0$. Найдите $x + x^{-1}$.

B4. Упростите выражение $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

B5. Вычислите $\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

B6. Упростите $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) : \left(2 + \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) - \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

B7. Известно, что $a + a^{-1} = 2$. Найдите $a^2 + a^{-2}$.

B8. Найдите значение выражения $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$.

B9. Упростите выражение $\frac{y\sqrt{y} + 2x^2 : \sqrt{x} + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3\sqrt{xy} - 3y}{x - y}$ и найдите его значение при $x = y = 2004$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

C1. Найдите, при каких значениях a и b многочлен $x^4 + 6x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится без остатка на многочлен $x^2 + 4x + 3$.

C2. Разложите на множители выражение

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3.$$

C3. Упростите выражение

$$\frac{3}{1-x^3} + \frac{3}{1+x^3} + \frac{6}{1+x^6} + \frac{12}{1+x^{12}} + \frac{24}{1+x^{24}} + \frac{48}{1+x^{48}}.$$

C4. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Глава 5

ФУНКЦИИ И ПРОСТЕЙШИЕ ГРАФИКИ

§76. Область определения и область значений функции

Пусть $D(f)$ и $E(f)$ — произвольные числовые множества. Говорят, что на множестве $D(f)$ определена числовая функция $y = f(x)$, если каждому числу $x \in D(f)$ поставлено в соответствие *единственное*, вполне определенное число $y = f(x) \in E(f)$. Множество $D(f)$ называется *областью определения* функции или областью допустимых значений независимой переменной (сокращенно ОДЗ), а $E(f)$ — *областью значений* функции ($E(f)$ также называют областью изменения, множеством значений),

$$E(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}.$$

Нередко область определения и область значений функции $y = f(x)$ обозначают так: $D(y)$ — область определения, $E(y)$ — область значений.

Произвольный элемент x области определения $D(f)$ называется *независимой переменной* или *аргументом*, а величина $y = f(x)$ называется *зависимой переменной* или *функцией*.

Коротко можно сказать: зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y .

Тот факт, что задана функция $y = f(x)$, $x \in D(f)$ с областью определения $D(f)$ и областью значений $E(f)$, иногда записывают в следующей форме:

$$f: D(f) \rightarrow E(f), \text{ или } D(f) \xrightarrow{f} E(f), \text{ или } D \xrightarrow{f} E.$$

§77. Основные способы задания функции

Чтобы задать функцию, нужно указать способ, с помощью которого для каждого значения аргумента можно было бы найти соответствующее значение функции. Имеется четыре основных

способа задания функции: 1) аналитический; 2) графический; 3) табличный; 4) словесным описанием.

1) Аналитический способ задания функции. При аналитическом способе задания функция задается с помощью формулы $y = f(x)$, где $f(x)$ — некоторое выражение с переменной x .

$$\text{Например, } y = x^2, y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, y = \begin{cases} 2x^5, & x \leq 0, \\ \sqrt{x+1}, & x > 0. \end{cases}$$

Замечание 1. В математической литературе чаще всего встречается запись функции с помощью фигурных скобок, если функция задана не одним аналитическим выражением. Такая запись является, по-видимому, не совсем корректной, т. е. вместо фигурных скобок точнее было бы писать прямые скобки. Тем не менее, чтобы не отступать от общепринятых обозначений, мы будем в дальнейшем использовать фигурные скобки.

Если функция задается аналитически, то ее область определения нередко называется *естественной областью определения*. Это множество всех тех значений x , для каждого из которых формула, определяющая функцию $f(x)$, имеет смысл. Так, например, для функции $y = x^2$ естественная область определения — множество всех действительных чисел, т. е. $x \in (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$. Для функции $y = \sqrt{x}$ естественной областью определения является множество неотрицательных действительных чисел, т. е. $x \in [0; +\infty)$.

2) При графическом способе задания изображают график функции $y = f(x)$ в системе координат xOy .

Графиком функции называется изображение на координатной плоскости множества упорядоченных пар $\{(x; y) | y = f(x), x \in D(f)\}$. Каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x; y)$ можно поставить в соответствие точку на плоскости. Для этого на плоскости изображают прямоугольную (декартову) систему координат xOy (рис. 12).

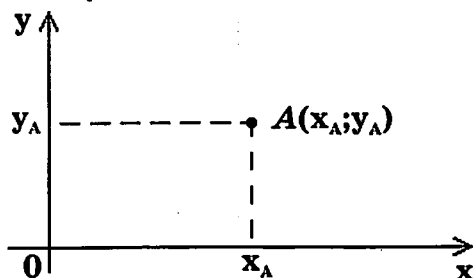


Рис. 12

Прямые Ox и Oy взаимно перпендикулярны, O — точка пересечения этих прямых. Ox — ось абсцисс, Oy — ось ординат, O — начало координат. На каждой из осей Ox и Oy выбирают положительное направление отсчета (на оси Ox — слева направо, на оси Oy — снизу вверх). Выбирают также единицу измерения (масштаб). Каждая точка $A(x_A; y_A)$ на координатной плоскости имеет две координаты: x_A — абсциссу, y_A — ординату (рис. 12). Записывается это так: $A(x_A; y_A)$.

Таким образом, график функции $y = f(x)$ есть множество точек координатной плоскости xOy , абсциссы которых есть значения аргумента x , а ординаты — соответствующие значения функции y . Для того чтобы множество точек координатной плоскости являлось графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы любая прямая, параллельная оси Oy , пересекалась с этим графиком не более чем в одной точке.

Графический способ удобен тогда, когда задать функцию аналитически довольно трудно (см., например, рис. 13).

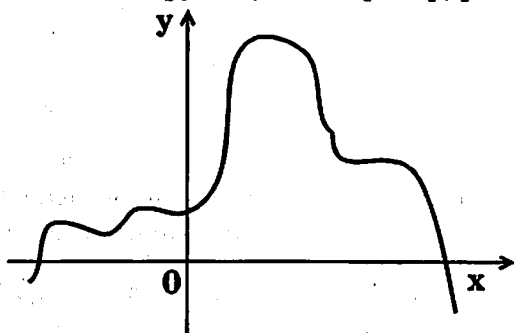


Рис. 13

Замечание 2. Оси координат разбивают плоскость на четыре части — I, II, III, IV четверти или координатные углы (рис. 14).

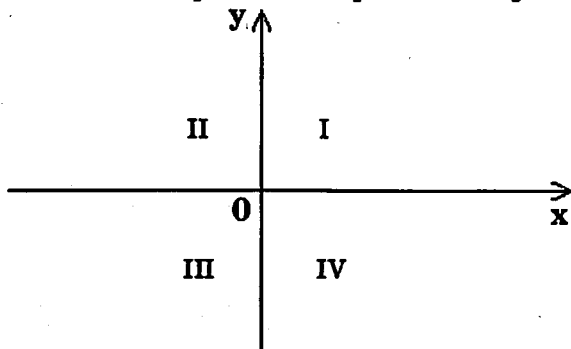


Рис. 14

3) *Табличный способ задания функции* заключается в том, что соответствие между элементами множеств $D(f)$ и $E(f)$ задается в форме таблицы.

При этом способе приводится таблица, указывающая значения функции $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ для имеющихся в таблице значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ (табл. 2).

Таблица 2

x	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Примерами табличного способа задания функции являются, например, таблицы квадратов, квадратных корней, кубов, логарифмов и т. д.

4) При словесном способе задания функции закон, согласно которому значения функции соответствуют значениям аргумента, формулируется словесно. Так, например, размер подоходного налога является функцией заработной платы налогоплательщика.

§78. Четные и нечетные функции

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Если функция $y = f(x)$ такова, что хотя бы для одной пары значений x и $(-x)$ оказалось, что $f(-x) \neq -f(x)$, и хотя бы для одной пары значений x и $(-x)$ оказалось, что $f(-x) \neq f(x)$, то функция называется *функцией общего вида*. Коротко: если

$$f(-x) \neq \begin{cases} -f(x), \\ f(x), \end{cases} \text{ то } f(x) \text{ — функция общего вида.}$$

Примеры четных функций: $y = x^2, y = x^4, y = x^6,$

$y = x^4 + x^2 + 1, y = x^6 - x^2, y = -x^8 - x^4 + 1,$

$y = \cos x, y = (\sin x)/x, y = x \operatorname{tg} x.$

Примеры нечетных функций: $y = x, y = x^3, y = x^5, y = x^7,$
 $y = x + x^{19}, y = x^9 - x^3, y = -x^{13} + x^7, y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x.$

Примеры функций общего вида: $y = x^2 + x, y = (x + 2)^4,$
 $y = (x - 1)^3, y = x^3 + x^6, y = x - x^4.$

Из определения четных и нечетных функций следует, что область определения $D(f)$ как четной, так и нечетной функции

симметрична относительно начала координат, т. е. если $x \in D(f) \Rightarrow (-x) \in D(f)$.

Если функция $y = f(x)$ является четной, то ее график симметричен относительно оси ординат.

Если функция $y = f(x)$ является нечетной, то ее график симметричен относительно начала координат.

Пример.

Выяснить, является ли данная функция четной, нечетной,

общего вида: а) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 7$; б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; в) $f(x) = x + \sin x$;

г) $f(x) = 3x^5 - 8x^3$; д) $f(x) = 5x^3 - 2x^2$; е) $f(x) = (x+3)^5$.

Решение.

а) $f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 7 = 2x^4 + 3x^2 + 7 = f(x) \Rightarrow f(x)$ — четная функция;

б) $f(-x) = \frac{\operatorname{tg}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{tg} x}{-x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} = f(x) \Rightarrow f(x)$ — четная функция;

в) $f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ — нечетная функция;

г) $f(-x) = 3(-x)^5 - 8(-x)^3 = 3(-x^5) - 8(-x^3) = -3x^5 + 8x^3 = -(3x^5 - 8x^3) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ — нечетная функция;

д) $f(-x) = 5(-x)^3 - 2(-x)^2 = -5x^3 - 2x^2, f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow f(x)$ — функция общего вида;

е) $f(-x) = (-x+3)^5, f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow f(x)$ — функция общего вида.

Ответ: а), б) — четные функции; в), г) — нечетные функции; д), е) — функции общего вида.

§79. Периодические функции

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x-T)$ и $(x+T)$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Число T в этом случае называется *периодом функции* $f(x)$.

Всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов, так как если T — период функции $y = f(x)$, то и число вида kT — период функции ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). На практике, го-

вора о периоде, нередко имеют в виду наименьший положительный период (если таковой существует). Наименьший положительный период называется *основным периодом*.

Примеры периодических функций: $y = \{x\}$ — дробная часть x , основной период $T=1$; $y = \sin x$, основной период $T = 2\pi$; $y = \operatorname{tg} x$, основной период $T = \pi$.

§80. Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной*, если ее область значений ограничена, т. е. если все ее значения лежат на каком-нибудь конечном промежутке. В противном случае функцию называют *неограниченной*.

Примеры функций, ограниченных на всей области определения: $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $y = \frac{x^2 + 5}{x^4 + x^2 + 1}$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Замечание 1. Можно дать следующее определение ограниченности функции: функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на всей области определения* $D(f)$, если существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ для каждой точки $x \in D(f)$.

Замечание 2. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ для каждого $x \in X$.

Функция, ограниченная на некотором множестве $X \subset D(f)$, может быть неограниченной на всей области определения. Например, функция $y = 1/x$ ограничена при $x \in [1/10; 10]$, но на всей области определения она является неограниченной.

§81. Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке X , если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на данном числовом промежутке X , если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется *монотонной* на этом промежутке.

Примеры монотонных функций на всей области определения: $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, $y = 2^x$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$.

Функция $y = x^2$ не является монотонной на всей области определения, однако при $x \in (-\infty; 0)$ она является убывающей, а при $x \in (0; +\infty)$ $y = x^2$ является возрастающей. Функция $y = \sin x$ не является монотонной на всей области определения, однако внутри каждого из интервалов $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) она является возрастающей, а внутри каждого из интервалов $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$) — убывающей.

§82. Промежутки знакопостоянства и корни функции

Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т. е. остается положительной или отрицательной), называются *промежутками знакопостоянства функции*. Например, для функции $y = x$, $y > 0$ при $x > 0$ и $y < 0$ при $x < 0$.

Значения аргумента $x \in D(f)$, при которых функция $f(x) = 0$, называются *корнями (или нулями) функции*. Ясно, что значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, — это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox . Например, для функции $y = x + 2$ нулем функции является $x = -2$; для функции $y = x^2 - 5x + 6$ нулями функции являются $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

§83. Точки минимума и точки максимума функции. Экстремум функции

Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если найдется такая δ -окрестность точки x_0 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$. Записывается это так: $m = \min_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x)$.

Точка x_0 из области определения функции $y = f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если найдется такая δ -окрестность точки x_0 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$. Записывается это так: $M = \max_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} f(x)$.

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума* данной функции, а значение функции в этих точках называется *экстремумом функции* (соответственно *минимумом* и *максимумом*).

§84. Обратная функция

Каждому значению $x \in D(f)$ равенство $y = f(x)$ ставит вполне определенное значение $y \in E(f)$. В некоторых случаях равенство $y = f(x)$ можно рассматривать как такое, которое каждому значению $y \in E(f)$ ставит в соответствие вполне определенное значение $x \in D(f)$.

Пример 1. Равенство $y = 3x - 1$ каждому значению y ставит в соответствие $x = (y + 1)/3$. Можно сказать, что равенство $y = 3x - 1$ определяет x как некоторую функцию переменной y , т. е. $x = (y + 1)/3$.

Пусть функция $y = f(x)$ такова, что по каждому допустимому значению величины y можно восстановить одно и только одно значение величины x . Тогда это равенство определяет x как некоторую функцию от y . Обозначим эту функцию через φ : $x = \varphi(y)$. В этом соотношении $x = \varphi(y)$ роль аргумента играет y , а роль функции — x . Поскольку обычно x обозначает аргумент, y обозначает функцию, то перепишем зависимость $x = \varphi(y)$ в виде $y = \varphi(x)$. Функция $y = \varphi(x)$ называется *обратной по отношению к функции $y = f(x)$* .

Так, например, $y = 3x - 1 \Leftrightarrow x = (y + 1)/3$. Поэтому функция $y = (x + 1)/3$ является обратной к функции $y = 3x - 1$.

Для того чтобы у функции $y = f(x)$ при $x \in [a; b]$ существовала обратная к ней функция, необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ была монотонной при $x \in [a; b]$ (то есть или только возрастающей, или только убывающей).

Так, для функции $y = x^3$ обратной является $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Для функции $y = x^2$ при $x \in (-\infty; +\infty)$ обратной не существует, однако при $x \in (0; +\infty)$ обратной для $y = x^2$ является $y = \sqrt{x}$, а при $x \in (-\infty; 0)$ обратной для $y = x^2$ является функция $y = -\sqrt{x}$.

Если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y; x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому графики прямой и обратной функции симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов).

Так, например, график функции $y = x^3$ симметричен графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ относительно прямой $y = x$ (см. рис. 15). Вообще для функции $y = x^n$ ($x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) обратной является $y = \sqrt[n]{x}$.

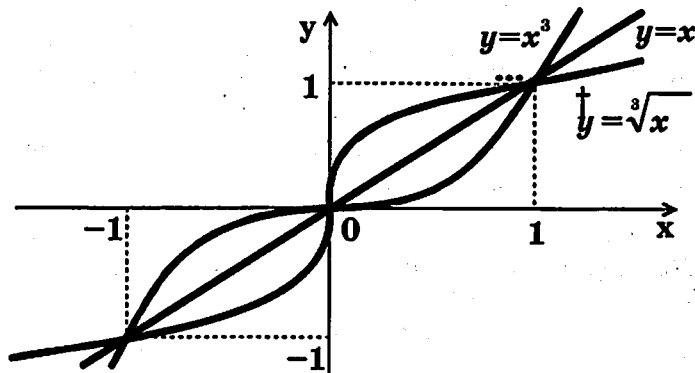


Рис. 15

Замечание. Область определения обратной функции совпадает с множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции, т. е. область определения и область значений прямой и обратной функций меняются местами.

§ 85. Основные элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся следующие функции.

1. Степенная функция: $y = x^a$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Показательная функция: $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.
5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

Из основных элементарных функций можно строить другие функции при помощи арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и операции взятия функции от функции.

Элементарными функциями называются функции, построенные из основных элементарных функций при помощи конечно-

го числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Примеры элементарных функций: $y = x^2 + \sqrt{x}$, $y = \frac{10^x - 3}{5x^2}$,
 $y = \log_2(x + \sqrt{1 + x^2})$, $y = \arctg \sqrt{x^2 - 1}$, $y = \sin \sqrt{x}$.

Элементарные функции делятся на два класса: *алгебраические* и *трансцендентные* функции.

Функция называется *алгебраической*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число алгебраических действий: сложений, вычитаний, умножений, делений и возведений в степень с рациональным показателем.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*. Известно, что все прямые и обратные тригонометрические функции, а также показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

Примеры *алгебраических* функций:

$$y = 3x^2 - 5x + 2, y = \frac{2x - 3}{1 - x}, y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + \sqrt[3]{x} + 2}.$$

Примеры *трансцендентных* функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$,

$$y = \lg x, y = \log_2 x, y = x \cdot 2^x, y = \arctg \frac{x}{x+1}, y = x^2 + \operatorname{tg} x.$$

Алгебраические функции в свою очередь делятся на *рациональные* и *иррациональные*.

Алгебраическая функция называется *рациональной*, если среди действий, которые производятся над независимой переменной, отсутствует извлечение корней.

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется *иррациональной*.

Примеры *рациональных* функций: $y = 3x^3 - x + 5$, $y = 7$,

$$y = 2 \cdot x^2, y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}, y = \frac{x^2 + e}{x - 2}, y = \frac{x - \pi}{x^2 + 5}, y = x^5 + \frac{3x}{x^2 + 1}.$$

Примеры *иррациональных* функций:

$$y = \sqrt{x + 1}, y = \sqrt[3]{x^2 + 7}, y = \sqrt[4]{3x^2 + x + 1}, y = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 1}, y = \frac{\sqrt[5]{x} + \pi}{x^3 + 7}.$$

Наиболее простыми рациональными функциями являются *целые рациональные функции* (многочлены).

$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ — многочлен степени n ($a_0 \neq 0$).

Примеры *целых рациональных функций*: $y = 2$, $y = 2x + 5$,

$$y = 3x^3 - 5x + 6, y = \frac{1}{5}(x - 1)^2 + 3x, y = 3(x + 2)^5 - 2x + 16.$$

Если рациональная функция $R(x)$ записывается в виде отношения двух многочленов, то она называется *дробно-рациональной функцией*, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — дробно-рациональная функция ($P(x)$, $Q(x)$ — многочлены).

Примеры дробно-рациональных функций: $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{2x+5}$,
 $y = \frac{x}{3x+1}$, $y = \frac{2x+5}{x^2+x+3}$, $y = \frac{x^5-3x^2+6}{x^3+8}$, $y = \frac{x^7+1}{x^3-3x+2}$.

§86. Определение и обозначение некоторых распространенных функций

Для некоторых распространенных функций введены специальные названия и обозначения.

$|x|$ — модуль x (абсолютная величина x);

$\text{sign } x$ — знак x (сигнум x);

$[x]$ — целая часть x ;

$\{x\}$ — дробная часть x ;

$D(x)$ — функция Дирихле;

$\eta(x)$ — единичная функция Хевисайда (функция скачка);

x^+ — положительная часть x ;

x^- — отрицательная часть x .

Вышеперечисленные функции определяются следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x ;

$$\{x\} = x - [x];$$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$x^+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$x^- = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Между некоторыми из этих функций существуют такие непосредственно проверяемые соотношения:

$$x = |x| \cdot \text{sign} x, \quad |x| = x \cdot \text{sign} x, \quad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-,$$

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}, \quad x = \{x\} + [x].$$

Отметим также обозначения и названия некоторых функций, которые широко применяются в высшей математике:

$y = e^x$ — экспонента;

$y = \lg x$ — десятичный логарифм;

$y = \ln x$ — натуральный логарифм;

$$y = \text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ — синус гиперболический;}$$

$$y = \text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ — косинус гиперболический;}$$

$$y = \text{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\text{sh} x}{\text{ch} x} \text{ — тангенс гиперболический;}$$

$$y = \text{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\text{ch} x}{\text{sh} x} \text{ — котангенс гиперболический.}$$

§ 87. Линейная функция и ее график

Функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые фиксированные числа, называется *линейной*.

Областью определения линейной функции $y = kx + b$ является множество всех действительных чисел $R = (-\infty, \infty)$.

График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая линия. Для построения графика $y = kx + b$ достаточно знать координаты двух точек этого графика. Взяв $x=0 \Rightarrow y=b \Rightarrow A(0; b)$ — точка

пересечения графика с осью Oy . Взяв $y=0 \Rightarrow x = -\frac{b}{k}$ ($k \neq 0$) $\Rightarrow$

$B(-\frac{b}{k}; 0)$ — точка пересечения графика с осью Ox . Таким обра-

зом, точки пересечения графика функции $y = kx + b$ с осями координат будут $B(-\frac{b}{k}; 0)$, $A(0; b)$, если $k \neq 0$ (рис. 16, 17).

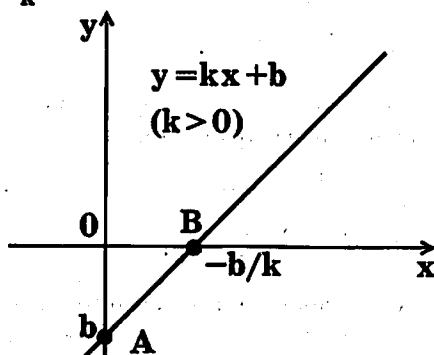


Рис. 16

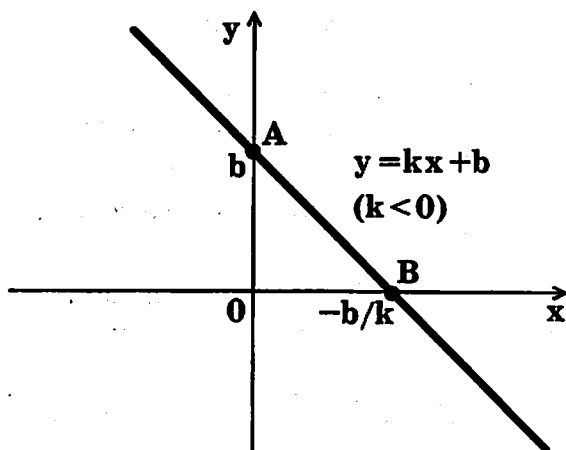


Рис. 17

При $k = 0$ получаем прямую $y = b$, которая параллельна оси Ox и совпадает с осью Ox , если $b = 0$ (рис. 18).

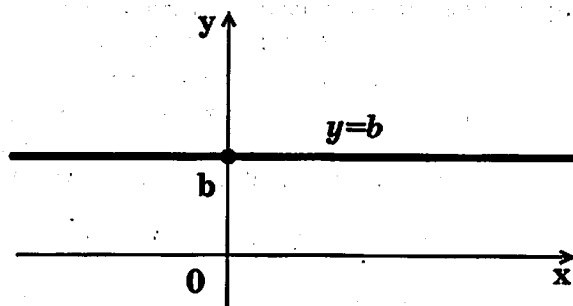


Рис. 18

Функция вида $y = kx$ ($k \neq 0$) называется *прямой пропорциональностью*, где k — коэффициент прямой пропорциональности. График функции $y = kx$ есть прямая, которая проходит через начало координат. На рис. 19 изображены графики функций $y = kx$ при $k = +1/2$, $k = -1/2$, $k = -2$, $k = +2$.

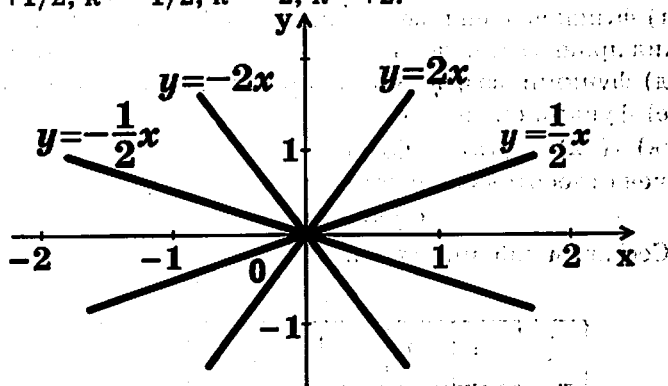


Рис. 19

Рассмотрим функции $y = x$ и $y = -x$, получающиеся из $y = kx + b$, когда $b = 0$, $k = \pm 1$.

Функция $y = x$

Составим таблицу, взяв несколько значений x и соответствующих значений y (табл. 3).

Таблица 3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

Замечание. Для линейной функции $y = kx + b$ достаточно задать координаты двух точек.

Графиком функции $y = x$ является прямая линия, которая проходит через начало координат. Ее называют биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов (рис. 20).

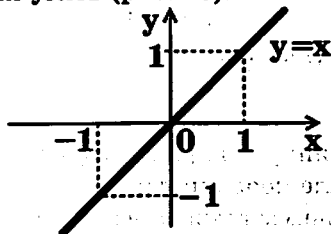


Рис. 20

Свойства функции $y = x$:

- а) $D(f) = \mathbb{R}$;
- б) $E(f) = \mathbb{R}$;
- в) нули функции: $y = 0$ при $x = 0$ (функция $y = x$ имеет только один нуль в начале координат);
- г) функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$;
- функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$;
- д) функция возрастает на всей области определения;
- е) функция не имеет экстремумов;
- ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = x$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = -x$

Составим таблицу (табл. 4).

Таблица 4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	-1	-2	-3

Графиком функции $y = -x$ является прямая линия, которая проходит через начало координат. Ее называют биссектрисой 2-го и 4-го координатных углов (рис. 21).

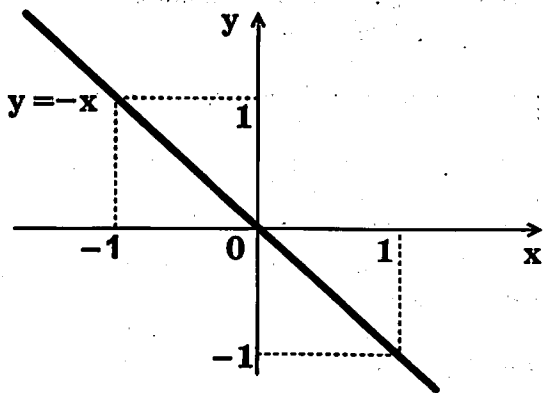


Рис. 21

Свойства функции $y = -x$:

- а) $D(f) = \mathbb{R}$;
- б) $E(f) = \mathbb{R}$;
- в) нули функции: $y = 0$ при $x = 0$ (функция $y = x$ имеет только один нуль в начале координат);
- г) функция принимает отрицательные значения при $x \in (0; +\infty)$, функция принимает положительные значения при $x \in (-\infty; 0)$;

- д) функция убывает на всей области определения;
 е) функция не имеет экстремумов;
 ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = x$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

§88. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Функция вида $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) называется *обратной пропорциональностью*; k называется коэффициентом обратной пропорциональности. Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола. Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных углах; если $k < 0$, то ветви гиперболы расположены в II и IV координатных углах (рис. 22, 23).

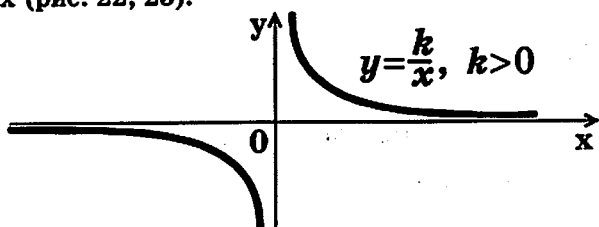


Рис. 22

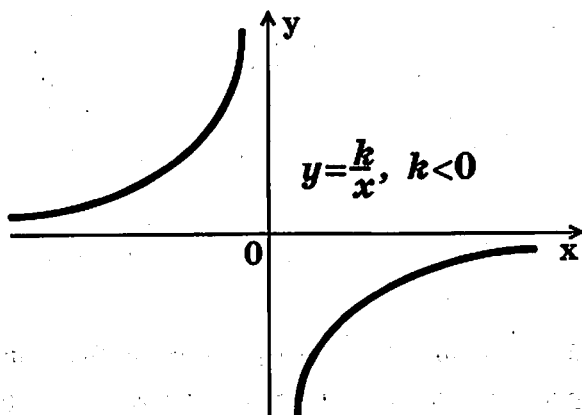


Рис. 23

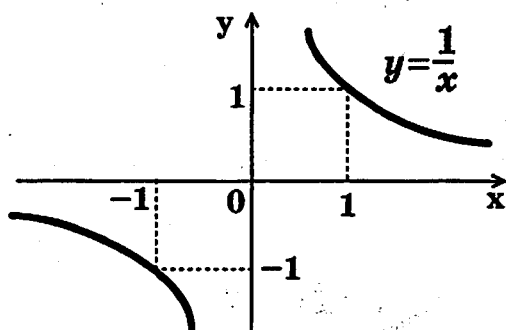
Рассмотрим более подробно функцию $y = \frac{k}{x}$ при $k = 1$ ($y = 1/x$).

Функция $y = \frac{1}{x}$

Составляем таблицу, учитывая, что при $x = 0$ функция не определена (табл. 5).

Таблица 5

x	-3	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



Строим график функции $y = \frac{1}{x}$. Это гиперболa (рис. 24).

Рис. 24

Свойства функции $y = \frac{1}{x}$:

а) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

б) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

в) функция $y = 1/x$ не имеет нулей, так как уравнение $1/x = 0$ не имеет корней, график функции $y = 1/x$ не пересекает ось Ox ;

г) функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$ и положительные значения при $x \in (0; +\infty)$;

д) функция $y = 1/x$ убывает при $x \in (-\infty; 0)$, а также при $x \in (0; +\infty)$;

е) функция не имеет экстремумов;

ж) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ функция $y = \frac{1}{x}$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат;

з) график функции $y = \frac{1}{x}$ не пересекает ось Oy , но при неограниченном приближении x к нулю ветви гиперболы неограниченно приближаются к оси Oy . При неограниченном увеличении x ветви гиперболы неограниченно приближаются к оси Ox , нигде ее не

пересекая. Говорят, что оси Ox и Oy — асимптоты гиперболы $y = \frac{1}{x}$, ось Oy — вертикальная асимптота графика функции $y = \frac{1}{x}$, ось Ox — горизонтальная асимптота графика функции $y = \frac{1}{x}$.

§89. Квадратичная функция и ее график

Функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — заданные числа ($a \neq 0$), называется *квадратичной*. Область определения квадратичной функции $D(y) = R$. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является *парабола*. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, то ветви направлены вниз. Прямая

$x = -\frac{b}{2a}$ является осью симметрии. Для построения графика функции

$y = ax^2 + bx + c$ ее приводят к виду $y = a(x + m)^2 + p$ путем выделения полного квадрата. Полный квадрат выделяется следующим образом:

$$\begin{aligned} y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $y = ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 + p$, где $m = \frac{b}{2a}$, $p = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Точка с координатами $(-m; p) = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ есть вершина параболы.

На рис. 25, 26 приведены параболы для $a > 0$ и $a < 0$.

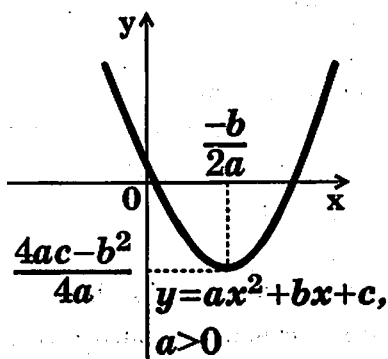


Рис. 25

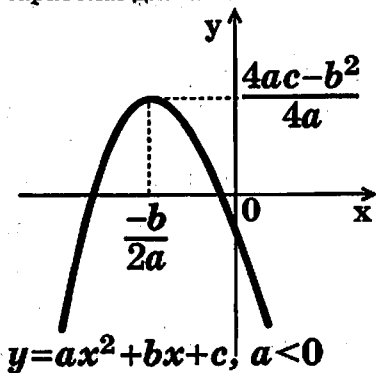


Рис. 26

Рассмотрим более подробно функцию $y = x^2$.

Функция $y = x^2$

Составим таблицу некоторых значений функции (табл. 6).

Таблица 6

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

График функции $y = x^2$ есть парабола, вершина которой совпадает с началом координат, а ветви параболы направлены вверх (рис. 27).

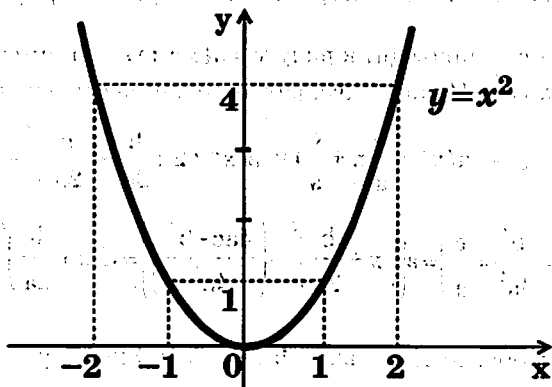


Рис. 27

Свойства функции $y = x^2$:

- а) $D(f) = \mathbb{R}$;
- б) $E(f) = [0; +\infty)$;
- в) функция имеет один нуль: $y=0$ при $x=0$;
- г) функция принимает положительные значения при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;
- д) функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$, функция убывает при $x \in (-\infty; 0)$;
- е) функция имеет минимум при $x=0$ ($\min y = y(0) = 0$);
- ж) $y(-x) = y(x) \Rightarrow$ функция $y = x^2$ четная, ее график симметричен относительно оси Oy .

§90. Функция $y=x^3$ и ее график

Составим таблицу значений функции (табл. 7).

Таблица 7

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

Графиком функции $y=x^3$ является кубическая парабола (рис. 28).

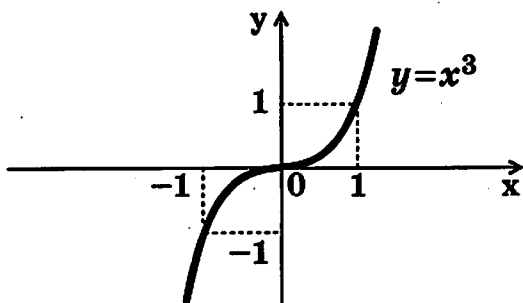


Рис. 28

Свойства функции $y=x^3$:

- а) $D(f)=\mathbb{R}$;
- б) $E(f)=\mathbb{R}$;
- в) функция имеет один нуль: $y=0$ при $x=0$;
- г) функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$, функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$;
- д) функция возрастает на всей области определения;
- е) функция не имеет экстремумов;
- ж) $y(-x)=-y(x) \Rightarrow$ функция $y=x^3$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

В более общем виде можно рассмотреть степенную функцию с натуральным показателем.

§91. Степенная функция с натуральным показателем ($y=x^n, n \in \mathbb{N}$)

Рассмотрим функцию $y=x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. При $n=1$ получаем $y=x$ — линейную функцию, изученную ранее. Пусть теперь $n>1$. Если n — четное натуральное число ($n=2k, k \in \mathbb{N}$), то свойства функции $y=x^{2k}$ такие же, как и у функции $y=x^2$.

Если n — нечетное натуральное число, большее или равное 3 ($n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$), то свойства функции $y = x^{2k+1}$ такие же, как и у функции $y = x^3$. Поэтому приведем общий вид графиков функций $y = x^{2k}$ и $y = x^{2k+1}$ (рис. 29, 30).

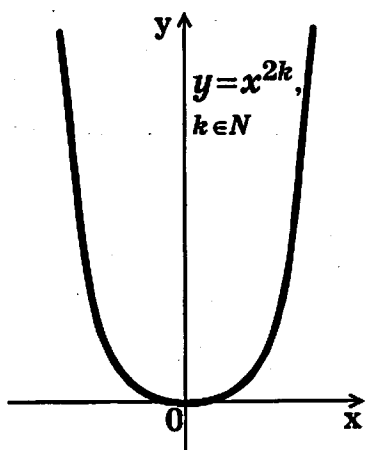


Рис. 29

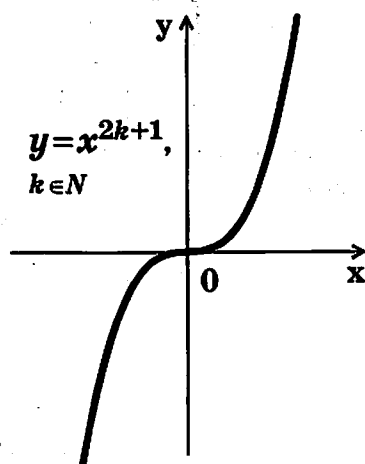


Рис. 30

§92. Степенная функция с целым отрицательным показателем ($y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$)

Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где $n \in \mathbb{N}$. При $n=1$ получаем $y = x^{-1} = 1/x$ — гипербола, рассмотренная в §88. Пусть n — нечетное число, большее единицы ($n=3, 5, 7, 9, \dots$). В этом случае функция $y = x^{-n}$ обладает в основном теми же свойствами, что и функция $y=1/x$. График функции $y = x^{-n}$ ($n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$) напоминает график функции $y=1/x$ (рис. 31).

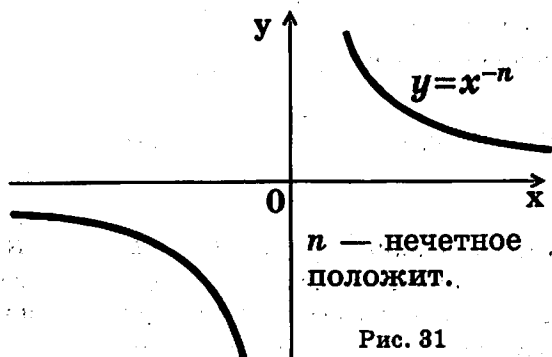


Рис. 31

Пусть n — четное число ($n=2k, k \in \mathbb{N}$). Перечислим некоторые свойства функции $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$:

а) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

б) $E(f) = (0; +\infty)$

в) $y(-x) = y(x) \Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$ — четная функция;

г) $y = \frac{1}{x^2}$ убывает при $x \in (0; +\infty)$ и возрастает при $x \in (-\infty; 0)$.

Таковыми же свойствами обладают любые функции вида $y = x^{-n}$ при четном n , большем двух. График функций $y = x^{-n}$ (общий вид графиков функций $y = x^{-n}$ при четном положительном n) изображен на рис. 32.

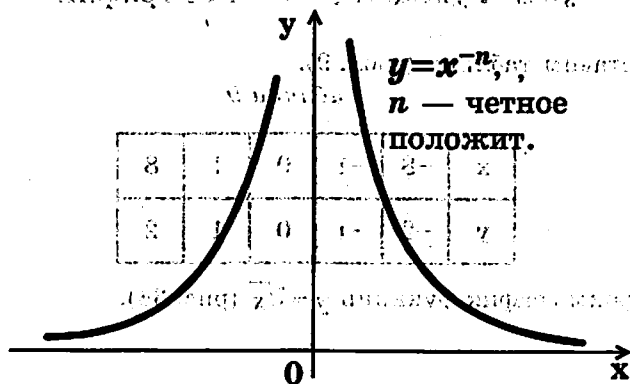


Рис. 32

§93. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Составим таблицу некоторых значений, учитывая, что функция определена при $x \geq 0$ (табл. 8).

Таблица 8

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

Строим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 33).

Свойства функции $y = \sqrt{x}$:

- а) $D(f) = [0; +\infty)$;
- б) $E(f) = [0; +\infty)$;
- в) функция $y = \sqrt{x}$ имеет один нуль: $y=0$ при $x=0$;
- г) функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$;
- д) функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$;
- е) функция имеет минимум при $x=0$, $\min y = y(0) = 0$;
- ж) функция $y = \sqrt{x}$ ни четная, ни нечетная, то есть $y = \sqrt{x}$ является функцией общего вида.

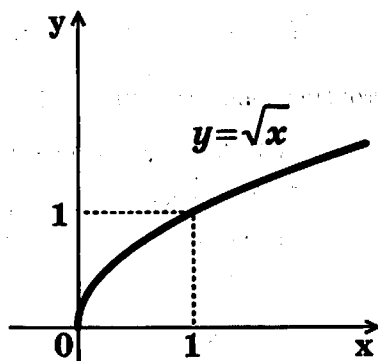


Рис. 33

§94. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ и ее график

Составим таблицу (табл. 9).

Таблица 9

x	-8	-1	0	1	8
y	-2	-1	0	1	2

Строим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 34).

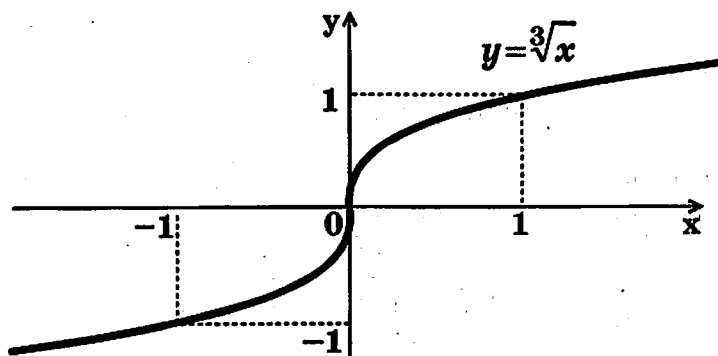


Рис. 34

Свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$:

- а) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- б) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
- в) функция имеет один нуль: $y=0$ при $x=0$;
- г) функция принимает положительные значения при $x \in (0; +\infty)$;
- функция принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty; 0)$;
- д) функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$, т.е. на всей области определения;
- е) функция не имеет экстремумов;
- ж) $y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = \sqrt[n]{x}$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

§95. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее график

При четном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt{x}$, и график ее напоминает график функции $y = \sqrt{x}$. При нечетном n функция $y = \sqrt[n]{x}$ обладает теми же свойствами, что и функция $y = \sqrt[3]{x}$, и график ее напоминает график функции $y = \sqrt[3]{x}$. На рис. 35, 36 изображены графики функций $y = \sqrt[n]{x}$ при n четном и n нечетном.



Рис. 35

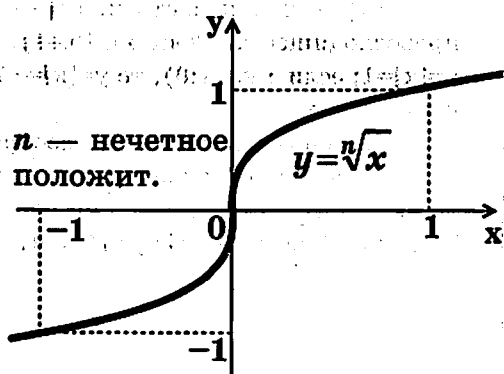


Рис. 36

§96. Функция $y = |x|$ и ее график

$|x|$ — модуль x (абсолютная величина x). Эта функция определяется так: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

График функции $y = |x|$ изображен на рис. 37.

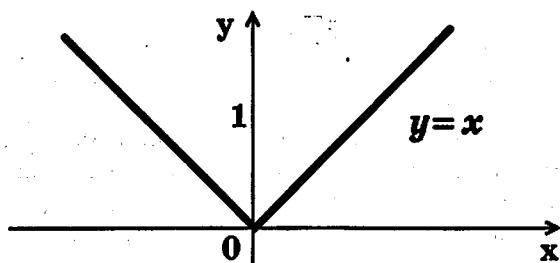


Рис. 37

Функция $y = |x|$ определена при $x \in \mathbb{R}$, принимает только неотрицательные значения. Таким образом, $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$; функция $y = |x|$ обращается в нуль при $x=0$. При $x \in (-\infty; 0)$ функция убывает, при $x \in (0; +\infty)$ функция $y = |x|$ возрастает. Поскольку $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$, то функция $y = |x|$ четная.

Замечание. В общем случае можно рассмотреть модуль функ-

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

§97. Функция $y = [x]$ и ее график

$[x]$ — целая часть x . $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x . Если $x \in [0; 1)$, то $y = [x] = 0$; если $x \in [1; 2)$, то $y = [x] = 1$; если $x \in [-1; 0)$, то $y = [x] = -1$; если $x \in [-2; -1)$, то $y = [x] = -2$ и так далее.

График функции $y = [x]$ изображен на рис. 38. Белыми кружочками (белыми точками) изображены выколотые значения (т. е. те значения, которые функция не принимает в этих точках). Так, для функции $y = [x]$ $y(1) \neq 0$, $y(1) = 1$; $y(2) \neq 1$, $y(2) = 2$ и т. д.

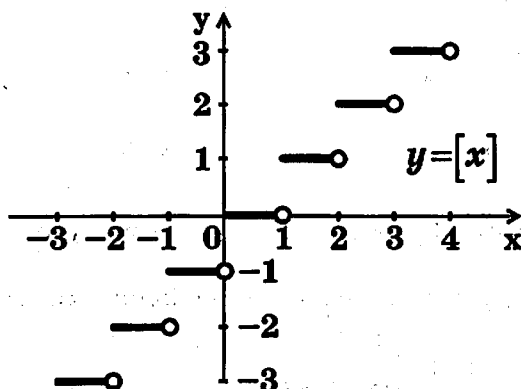


Рис. 38

§98. Функция $y=\{x\}$ и ее график

$\{x\}$ — дробная часть x , $\{x\}=x-[x]$. Функция $y=\{x\}$ является периодической, основным период $T=1$, $\{x+1\}=\{x\}$, поэтому доста-

точно сначала построить ветвь графика на любом промежутке длиной 1, например при $x \in [0;1)$.

Если $x \in [0;1)$, то $[x]=0 \Rightarrow \{x\}=x$. На рис. 39 изображен график функции $y=\{x\}$.

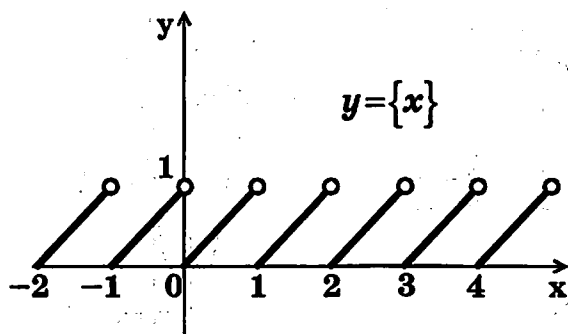


Рис. 39

§99. Геометрические преобразования графиков функций

Если известен график функции $y=f(x)$, то с помощью геометрических преобразований можно построить графики более сложных функций.

1) График функции $y=Af(x)$ получается из графика $y=f(x)$ «растяжением» вдоль оси Oy в A раз при $A>1$ и «сжатием» вдоль этой оси в $1/A$ раз при $0<A<1$ (рис. 40).

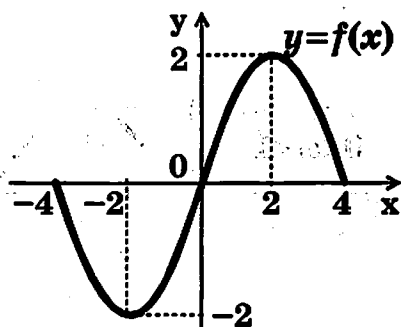


Рис. 40 а)

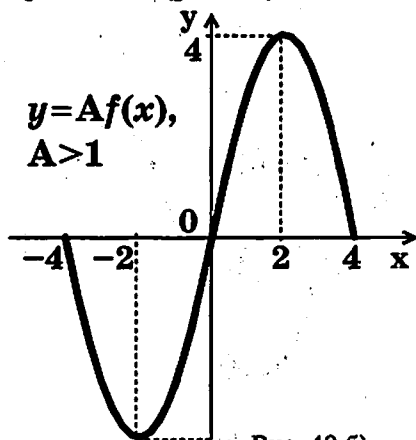


Рис. 40 б)

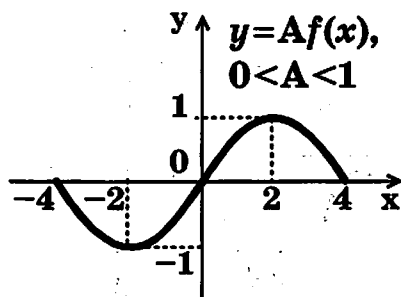


Рис. 40 в)

2) График функции $y=f(\omega x)$ получается «сжатием» графика $y=f(x)$ в ω раз к оси Oy при $\omega > 1$ или «растяжением» в $1/\omega$ раз от этой оси Oy при $0 < \omega < 1$ (рис. 41).

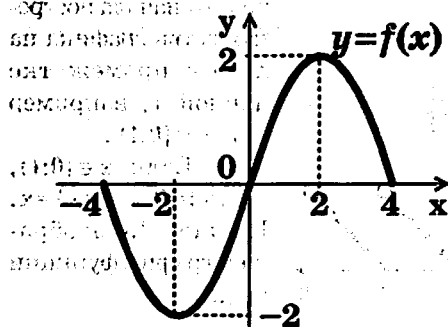


Рис. 41 а)

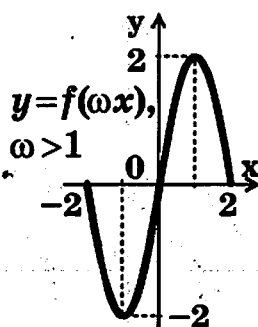


Рис. 41 б)

3) График функции $y=f(x+b)$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|b|$ при $b > 0$ и в положительном направлении на $|b|$ при $b < 0$ (рис. 42).

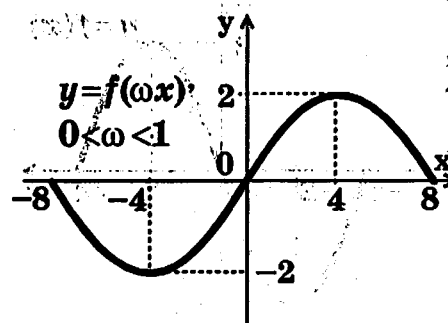


Рис. 41 в)

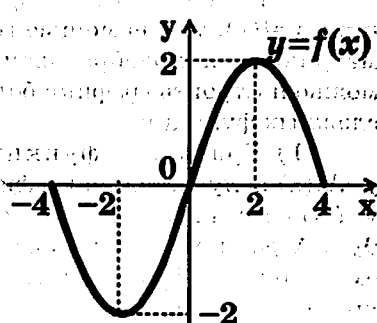


Рис. 42 а)

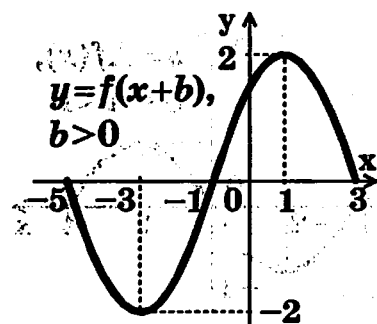


Рис. 42 б)

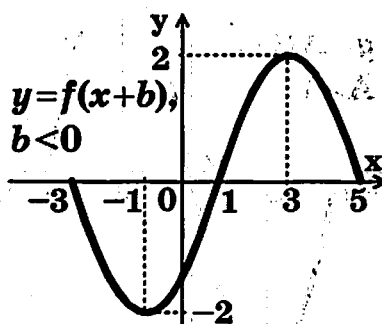


Рис. 42 в)

4) График функции $y=f(x)+M$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ в положительном направлении оси Oy на M при $M>0$ и в отрицательном направлении на $|M|$ при $M<0$ (рис. 43).

5) График функции $y=-f(x)$ получается симметричным отображением (зеркальным отражением) графика $y=f(x)$ относительно оси Ox (рис. 44).

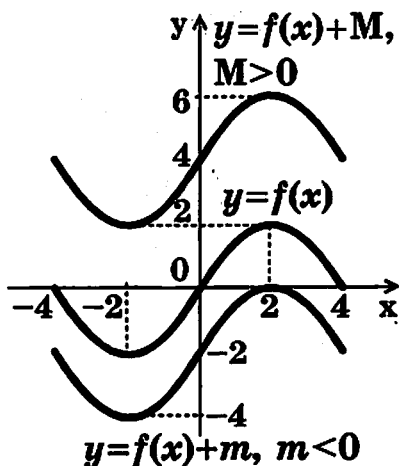


Рис. 43

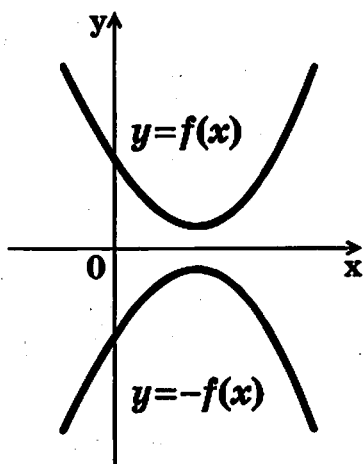
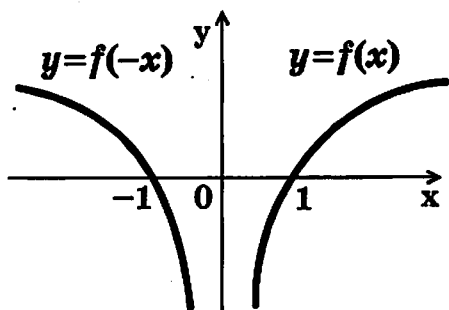
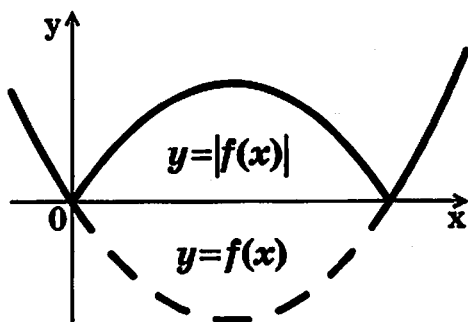


Рис. 44



6) График функции $y=f(-x)$ получается симметричным отображением (зеркальным отражением) графика $y=f(x)$ относительно оси Oy (рис. 45).

Рис. 45



7) График функции $y=|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: часть графика $y=f(x)$, лежащая над осью Ox (где $f(x)\geq 0$), сохраняется, часть графика, лежащая под осью Ox (где $f(x)<0$), отображается симметрично относительно оси Ox (рис. 46).

Рис. 46

8) График функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: при $x \geq 0$ график функции $y=f(x)$ сохраняется, при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Oy (рис. 47).

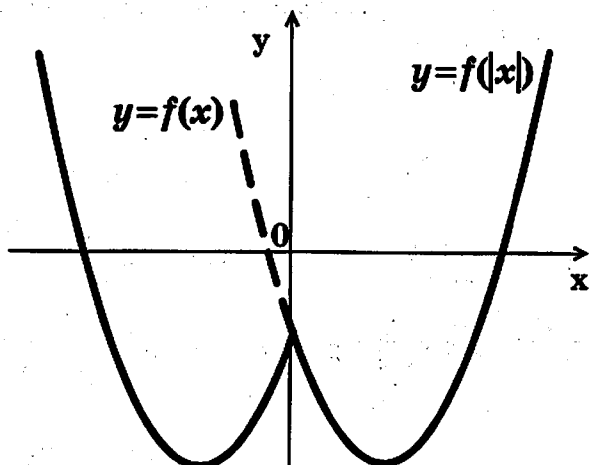


Рис. 47

Применение на практике геометрических преобразований графиков функций показано в главе 13, которой предшествовало изучение свойств тригонометрических, показательных и логарифмических функций.

Тесты к главе 5.
Функции и простейшие графики

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Задана функция $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Найдите $f(x+1)$.

1) $f(x+1) = \frac{x}{x+2}$; 2) $f(x+1) = -\frac{x}{x+2}$;

3) $f(x+1) = \frac{2}{1+x}$; 4) $f(x+1) = \frac{1+x}{1-x}$.

A2. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x-4}{x+1}}$.

1) $(-1; 4]$; 2) $(-\infty; -1)$; 3) $[4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$.

A3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x} + \sqrt{9-x^2}$.

1) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 2) $[-3; 0]$; 3) $[0; 3]$; 4) $[-3; 3]$.

A4. Найдите множество значений функции $y = \frac{1}{x^2+2}$.

1) R ; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left[0; \frac{1}{2}\right)$; 4) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

A5. Среди приведенных ниже функций четной функцией является функция

1) $y = x^2 + |x|$; 2) $y = 5x^3$; 3) $y = x^{13} + x^2$; 4) $y = \sqrt{x}$.

A6. Среди приведенных ниже функций нечетной функцией является функция

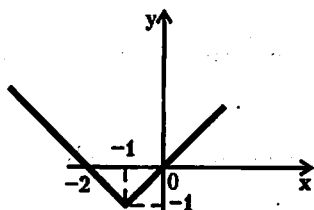
1) $y = |x| + x$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{1-x^3}$.

A7. Для заданной функции $y = x^2 + 4$, $x \leq 0$ найдите обратную.

1) $y = \sqrt{x+4}$; 2) $y = \sqrt{x-4}$;

3) $y = -\sqrt{x+4}$; 4) $y = -\sqrt{x-4}$.

A8.

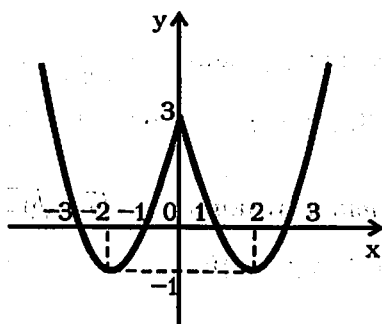


На рисунке изображен график функции

1) $y = |x - 1|$; 2) $y = |x - 1| + 1$;

3) $y = |x + 1| - 1$; 4) $y = |x - 1| - 1$.

A9.

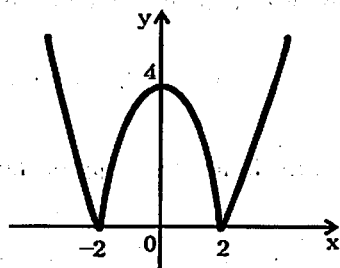


На рисунке изображен график функции

1) $y = |x^2 - 4x - 3|$; 2) $y = x^2 - 4|x| + 3$;

3) $y = |x^2 + 4x + 3|$; 4) $y = x^2 - 4|x + 3|$

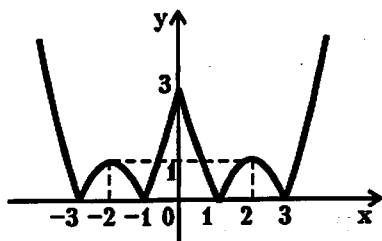
A10.



На рисунке изображен график функции

1) $y = |4 - x|^2$; 2) $y = |x - 4|^2$; 3) $y = |4 + x^2|$; 4) $y = |4 - x^2|$.

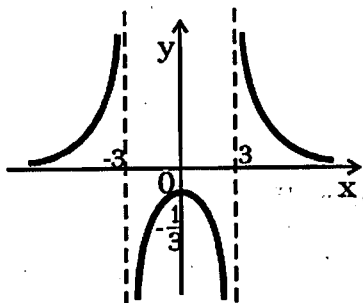
A11.



На рисунке изображен график функции

1) $y = |x|^2 - 4|x| + 3$; 2) $y = |x|^2 - 4|x| + 3$;
3) $y = |x^2 - 4| - 4|x| - 3$; 4) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

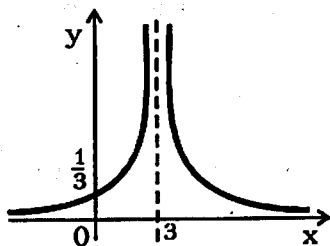
A12.



На рисунке изображен график функции

1) $y = \frac{1}{|x-3|}$; 2) $y = \frac{1}{|x+3|}$; 3) $y = \frac{1}{|x|-3}$; 4) $y = \frac{1}{|x|+3}$.

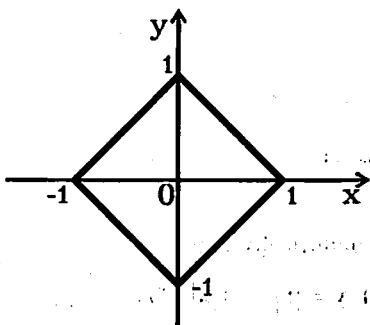
A13.



На рисунке изображен график функции

1) $y = \frac{1}{|x-3|}$; 2) $y = \frac{1}{|x+3|}$; 3) $y = \frac{1}{|x|-3}$; 4) $y = \frac{1}{|x|+3}$.

A14.



На чертеже изображен график уравнения

1) $|x| + y = 1$; 2) $x + |y| = 1$;
3) $|x + y| = 1$; 4) $|x| + |y| = 1$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Задана функция $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x^2 + 2, & x \geq 0. \end{cases}$ Найдите $f(3) + f(-3)$.

B2. Найдите сумму натуральных чисел, входящих в область определения функции $y = \sqrt{\frac{3+2x-x^2}{x-2}}$.

B3. Найдите целое число, которое не входит в область значений функции $y = \frac{x+3}{x-2}$.

- B4.** Сколько промежутков убывания имеет функция $y = |x^2 - 6|x||$?
- B5.** Найдите наибольшее значение функции $y = 2 - |x| - x^2$.
- B6.** Найдите точку максимума функции $y = |4 - x^2|$.
- B7.** Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \frac{1-x}{|x+3|}$ с осью x .
- B8.** Найдите ординату точки пересечения графика функции $y = \frac{|x|-2}{|x+3|-1}$ с осью y .
- B9.** Найдите период функции $y = \{2x - 1\}$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

- C1.** Исследуйте на четность (нечетность) функцию $y = |x - 2| + |x + 2|$.

- C2.** Постройте график функции $y = \frac{x-4}{x+2}$.

- C3.** Постройте график функции $y = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$.

- C4.** Постройте график уравнения $|x + y| = 3$.

Глава 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§100. РАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА. ТОЖДЕСТВА

Равенство — это два выражения, которые соединены знаком «равно». $x=y$ — это равенство, x — левая часть равенства, y — правая часть равенства.

Свойства равенств:

1) $x=y \Rightarrow y=x$;

2) $x=y, y=z \Rightarrow x=z$;

3) $x=y \Rightarrow x+z=y+z$;

4) $x=y \Rightarrow x \cdot z=y \cdot z$;

5) $x=y \Rightarrow \frac{x}{z}=\frac{y}{z} \quad (z \neq 0)$.

Равенство может быть **числовым** или **с переменными**. Числовое равенство может быть **верным** или **неверным**.

$10-4=6, \frac{20}{5}=7-3, 4-10=-\frac{12}{2}$ — верные числовые равенства.

$3=5, 3+8=2 \cdot 5$ — неверные числовые равенства.

$x+y=2$ — равенство с переменными. Переменные x и y в этом равенстве могут принимать различные числовые значения. Если $x=0, y=2$, то $0+2=2$ — верное числовое равенство. Если $x=1, y=5$, то $1+5=2$ — неверное числовое равенство.

Множество значений переменных, при которых левая и правая части равенства имеют смысл (определены), называется **областью определения равенства** и обозначается обычно через D .

Например, равенство $\frac{a^2-9}{a+3}=1$ определено для любого значения a , кроме $a=-3$. Отсюда $D(a) = \{a \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\}$.

Тождество — это равенство, которое верно при любых значениях переменных из области определения равенства.

Примеры тождеств:

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y); \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1, \quad x \neq -1; \quad \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

§101. Уравнения с одной переменной (общие понятия)

Уравнением с одной переменной называется равенство вида $f(x) = \varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые заданные функции. Величина x называется неизвестной.

Всякое значение переменной x , при котором уравнение $f(x) = \varphi(x)$ обращается в верное числовое равенство, называется *корнем* или *решением* уравнения. *Решить уравнение* — это значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Пример 1. Уравнение $x+2=5$ имеет единственный корень $x=3$, т. к. при этом и только при этом значении переменной уравнение $x+2=5$ обращается в верное числовое равенство $3+2=5$. Если обозначить S — множество корней уравнения $x+2=5$, то $S=\{3\}$.

Ответ: $\{3\}$.

Пример 2. Уравнение $(x+1)(x-3)(x-6)=0$ имеет три корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$. $S = \{-1; 3; 6\}$ — множество корней уравнения.

Ответ: $\{-1; 3; 6\}$.

Пример 3. Уравнение $2x+5=2x-7$ не имеет корней, $S=\emptyset$.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 4. Уравнение $|x| = x$ имеет бесчисленное множество корней (решений), т. к. любое неотрицательное число $x \geq 0$ есть решение этого уравнения. Отсюда $S = \{x \mid x \geq 0\}$.

Ответ: $\{x \mid x \geq 0\}$.

Пример 5. Уравнение с двумя переменными $2(x-y)=2x-2y$ имеет бесчисленное множество решений. Это уравнение является тождеством и любые действительные значения x и y являются его решением, $S = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Ответ: $\{(x; y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$.

Пример 6. Уравнение $x^2 = -16$ не имеет действительных корней.

Ответ: $\emptyset$.

Множество всех значений переменной x , при которых имеют смысл (определены) левая и правая части уравнения, называется *областью определения уравнения* (или областью допустимых значений уравнения) и обозначается через D (или через ОДЗ). Для того чтобы найти область определения уравнения $f(x) = \varphi(x)$, необходимо найти пересечение множеств, на которых определены заданные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Пример 7. Найти область определения уравнения $\frac{4}{x-2} = \sqrt{x}$.

Решение.

Имеем $f(x) = \frac{4}{x-2}$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$,

$D_1 = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$, $D_2 = D(\varphi) = [0; \infty)$.

Отсюда $D = D_1 \cap D_2 = [0; 2) \cup (2; \infty)$.

Ответ: $x \in [0; 2) \cup (2; \infty)$.

§102. Равносильность уравнений

Напомним, что если из истинности высказывания A следует истинность высказывания B , то употребляют знак логического следования $\Rightarrow$, т. е. $A \Rightarrow B$ (читается: из A следует B).

Если $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то такие высказывания называются *равносильными (эквивалентными)*. Записывается это так: $A \Leftrightarrow B$ (читается: A эквивалентно B , A равносильно B).

Два уравнения называются *равносильными (эквивалентными)*, если множества их решений (корней) совпадают, т. е. это такие уравнения, которые имеют одни и те же корни. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней.

Например, уравнения $x+1=7$ и $x+4=10$ равносильны, т. к. каждое из них имеет единственный корень — число 6. Равносильны и уравнения $x^2 = -4$ и $3x^2 + 5 = 0$ (в области действительных чисел), т. к. ни одно из них не имеет корней.

Уравнения $x-8=1$ и $x^2 = 81$ не равносильны, т. к. уравнение $x-8=1$ имеет только один корень $x=9$, тогда как уравнение $x^2 = 81$ имеет два корня: $x_1 = 9$ и $x_2 = -9$.

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение

1) Если в уравнении поменять местами левую и правую части, то получится уравнение, равносильное данному. Например, $x+4 = 2x+9 \Leftrightarrow 2x+9 = x+4$.

2) Если в уравнении какое-нибудь слагаемое перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный, то получится уравнение, равносильное данному. Например, $2x+7=x-3 \Leftrightarrow 2x-x=-7-3$.

3) Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному. Например, уравнение $\frac{x+1}{4} = x$ равносильно уравнению $x+1=4x$ (уравнение $x+1=4x$ получено из уравнения $\frac{x+1}{4} = x$ умножением обеих частей на число 4).

4) Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному. Например, $x+2=5x \Leftrightarrow x+2+7=5x+7$; $5x+2=0 \Leftrightarrow 5x+2-2=0-2$.

5) Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть любую функцию, то получится уравнение, равносильное данному при условии, что области определения полученного и данного уравнений совпадают. Например, $x=2 \Leftrightarrow x+x^2=2+x^2$; $x^3+5x=8+5x \Leftrightarrow x^3=8$.

§103. Совокупность уравнений

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если находятся все такие значения переменной, каждое из которых удовлетворяет по крайней мере одному из заданных уравнений. Уравнения, образующие совокупность уравнений, записываются в столбик с помощью квадратной скобки,

например $\begin{bmatrix} x+3=2x-7, \\ x^2-5x+6=0, \end{bmatrix}$ или с помощью знака «;» (точка с запятой), например $x+3=2x-7$; $x^2-5x+6=0$.

Решением совокупности уравнений является объединение множеств корней уравнений, составляющих данную совокупность.

Например, уравнение $2x(x-1)(x^2-7x+12)=0$ равносильно

совокупности уравнений: $2x(x-1)(x^2-7x+12)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x=0, \\ x-1=0, \\ x^2-7x+12=0. \end{bmatrix}$

Решая каждое из уравнений совокупности, получаем корни исходного уравнения: $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=3$; $x_4=4$.

§104. Классификация алгебраических уравнений

Уравнение $f(x) = \varphi(x)$ называется *алгебраическим*, если $f(x)$, $\varphi(x)$ — алгебраические функции. К алгебраическим функциям относятся, например, целые рациональные функции (многочлены), дробно-рациональные функции (отношение двух многочленов), иррациональные функции.

Примеры алгебраических уравнений: $2x+5=1$, $x^2-x-1=0$,
 $x^3-3x=0$, $\frac{x}{x+1} = \frac{x}{2}$, $\sqrt{x+1}=3$, $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$.

Уравнение $f(x) = \varphi(x)$ называется *рациональным*, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — многочлены.

Уравнение $f(x) = \varphi(x)$ называется *дробно-рациональным*, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — рациональные функции, причем хотя бы одна из них дробно-рациональная относительно переменной x .

Уравнение $f(x) = \varphi(x)$ называется *иррациональным*, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — элементарные алгебраические функции и хотя бы одна из них иррациональная относительно переменной x .

Уравнение $f(x) = \varphi(x)$ называется *элементарным трансцендентным*, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — элементарные функции и хотя бы одна из них трансцендентная относительно переменной x .

Замечание. Можно дать другое определение иррационального уравнения, а именно: это такое уравнение, в котором переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень.

Примеры алгебраических уравнений различного вида:

1) $x-7=2$, $x^2-x=0$, $x^5-3=0$ — рациональные уравнения с одним неизвестным;

2) $x^2-y^2=x-y$ — рациональное уравнение с двумя неизвестными;

3) $\frac{x^2+1}{x}=2$, $\frac{2x}{x+1}=\frac{3}{5x-2}$ — дробно-рациональные уравнения;

4) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=2$ — иррациональное уравнение;

5) $2^{\sqrt{x}}=5$, $\lg x=-1$, $x^{\lg x}=10$, $\sin x=\frac{1}{2}$ — трансцендентные уравнения.

§105. Линейные уравнения и приводимые к ним уравнения

Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $a \cdot x = b$, где a и b — заданные числа; a называется коэффициентом при переменной x , b — свободным членом.

Для линейного уравнения $a \cdot x = b$ возможны три случая:

1) $a \neq 0$, тогда $a \cdot x = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$ — единственный корень уравнения;

2) $a=0, b=0$, тогда уравнение $a \cdot x = b$ принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x , т. е. корнем уравнения является любое действительное число;

3) $a=0, b \neq 0$, тогда уравнение $a \cdot x = b$ принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.

Пример 1. $2x = -10 \Leftrightarrow x = \frac{-10}{2} = -5$.

Ответ: $\{-5\}$.

Уравнения, приводимые к линейным

Уравнения вида а) $\frac{x}{a} = b$; б) $\frac{a}{x} = b$; в) $ax + b = c$;
г) $ax + b = cx + d$; д) $\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{m}{n}$ приводятся (сводятся) к линейным путем преобразований. Запишем решения этих уравнений:

$$\text{а) } \frac{x}{a} = b \Rightarrow x = a \cdot b \quad (a \neq 0);$$

$$\text{б) } \frac{a}{x} = b \Rightarrow x = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0);$$

$$\text{в) } ax + b = c \Rightarrow x = \frac{c - b}{a} \quad (a \neq 0);$$

$$\text{г) } ax + b = cx + d \Rightarrow x = \frac{d - b}{a - c} \quad (a \neq c);$$

$$\text{д) } \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{md - nb}{na - mc} \quad (na - mc \neq 0).$$

Пример 2. Решить уравнение $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0$.

Решение.

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{6} = \frac{x-3}{12} + 1$.

Решение.

$$\overset{4}{\underbrace{\frac{x-2}{3}}} + \overset{2}{\underbrace{\frac{2x-1}{6}}} = \overset{1}{\underbrace{\frac{x-3}{12}}} + \overset{12}{\underbrace{1}} \Leftrightarrow 4x - 8 + 4x - 2 = x - 3 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4x - x = 8 + 2 - 3 + 12 \Leftrightarrow 7x = 19 \Leftrightarrow x = \frac{19}{7}. \text{ Ответ: } \left\{ \frac{19}{7} \right\}.$$

§106. Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) называется *квадратным уравнением с одной переменной*. a — коэффициент при x^2 (первый коэффициент), b — коэффициент при x (второй коэффициент), c — свободный член.

Если $b \neq 0$, $c \neq 0$, то квадратное уравнение называется *полным*. Если $a=1$, то квадратное уравнение называется *приведенным*, если $a \neq 1$, — *неприведенным*. Неприведенное квадратное уравнение всегда можно сделать приведенным, разделив обе части его на первый коэффициент $a \neq 0$.

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ($a \neq 0$) — *приведенное квадратное уравнение*.

Приведенные квадратные уравнения обычно записываются в виде $x^2 + px + q = 0$.

Корни квадратного уравнения можно найти, выделяя полный квадрат двучлена из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad a \neq 0.$$

Таким образом, корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находят по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней; если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет равные корни (в этом случае говорят, что уравнение имеет кратный корень кратности два); если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня.

$$\text{Итак, } D \geq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если $b = 2k$ (b — четное число, $k \in \mathbb{Z}$), то формулу для нахождения корней можно упростить:

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \end{aligned}$$

Итак, если квадратное уравнение имеет вторым коэффициентом четное число, то имеем уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad (a \neq 0).$$

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Решение.

$$\text{Имеем } a=2; b=-5; c=2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4};$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } \left\{ 2; \frac{1}{2} \right\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $5x^2 - 18x + 9 = 0$.

Решение.

Применяем формулу для нахождения корней квадратного уравнения, когда коэффициент при x — четное число. Имеем $a=5$;

$$2k = -18 \Leftrightarrow k = -9; c = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 5 \cdot 9}}{5} = \frac{9 \pm \sqrt{36}}{5} = \frac{9 \pm 6}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{9+6}{5} = 3, \quad x_2 = \frac{9-6}{5} = \frac{3}{5}. \quad \text{Ответ: } \left\{ 3; \frac{3}{5} \right\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Решение.

$$a=1; 2k=-4 \Leftrightarrow k=-2; c=4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 4}}{1} = 2 \pm \sqrt{0} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

Замечание. Уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$ можно решать без использования формул для решения квадратного уравнения. Заметив, что $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, получаем $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + x + 1 = 0$.

Решение.

$x^2 + x + 1 = 0$, $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $\emptyset$.

§107. Неполные квадратные уравнения

Если второй коэффициент b или свободный член c равны нулю, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется *неполным*. Для отыскания корней неполного квадратного уравнения обычно не пользуются формулами для нахождения корней полного квадратного уравнения, т. к. неполные квадратные уравнения проще решать методом разложения их левой части на линейные множители.

Итак, рассмотрим решение уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, когда
1) $c=0$; 2) $b=0$; 3) $b=c=0$.

$$1) c=0; ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$2) b=0; ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ если } \frac{c}{a} \leq 0;$$

если $\frac{c}{a} > 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

$$3) b=c=0; ax^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \quad (a \neq 0).$$

Пример 1. Решить уравнение $3x^2 - 8x = 0$.

Решение.

$$3x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 3x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{cases} \text{ Ответ: } \left\{0; \frac{8}{3}\right\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $5x^2 - 125 = 0$.

Решение.

$$5x^2 - 125 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{125}{5} = 25 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 0, \\ x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = -5. \end{cases}$$

Ответ: $\{-5; 5\}$.

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 + 11 = 0$.

Решение.

$$3x^2 + 11 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -11 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow x \in \emptyset, \text{ так как } x^2 \geq 0.$$

Ответ: $\emptyset$.

§108. Теорема Виета

Теорема Виета формулируется следующим образом: если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2 , то их сумма равна $(-p)$, а произведение равно q , т. е.

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Таким образом, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Замечание. Поскольку неприведенное квадратное уравнение всегда можно сделать приведенным, разделив его обе части на коэффициент при x^2 , то теорема Виета для неприведенного квадратного уравнения имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

Из теоремы Виета для неприведенного квадратного уравнения следует, что квадратный трехчлен может быть разложен на линейные множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

§109. Двучленные уравнения

Алгебраическое уравнение называется *двучленным уравнением*, если оно имеет вид $x^n - a = 0$ ($n \in \mathbb{N}$).

В простейшем случае при $a=1$ имеем $x^n - 1 = 0$. Тогда

а) при $n=1$ имеем $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

б) при $n=2$ имеем $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$;

в) при $n=3$ имеем $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ — единственный действительный корень.

Можно показать, что в общем случае для двучленных уравнений $x^n - a = 0$ справедливы следующие утверждения:

1) при любом положительном a уравнение $x^n - a = 0$ имеет:

а) при любом нечетном n ($n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$) только один действительный корень $x = \sqrt[n]{a}$;

б) при любом четном n ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) только два действительных корня $x_1 = \sqrt[n]{a}, x_2 = -\sqrt[n]{a}$;

2) при $a=0$ уравнение $x^n - a = 0$ имеет только один корень $x=0$;

3) при любом отрицательном a уравнение $x^n - a = 0$ имеет:

а) при любом нечетном n ($n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$) только один действительный корень $x = \sqrt[n]{a}$;

б) при любом четном n ($n = 2k, k \in \mathbb{N}$) не имеет действительных корней.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - 625 = 0$.

Решение.

$$x^4 - 625 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[4]{625} = 5, x_2 = -\sqrt[4]{625} = -5. \text{ Ответ: } \{-5; 5\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 27 = 0$.

Решение.

$$x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3. \text{ Ответ: } \{3\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $x^5 - 12 = 0$.

Решение.

$$x^5 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 12 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{12}. \text{ Ответ: } \{\sqrt[5]{12}\}.$$

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + 4 = 0$.

Решение.

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Ответ: } \emptyset.$$

Пример 5. Решить уравнение $x^6 + 123 = 0$.

Решение.

$$x^6 + 123 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -123 \Leftrightarrow x \in \emptyset. \quad \text{Ответ: } \emptyset.$$

Пример 6. Решить уравнения: а) $x^3 = 0$; б) $x^{12} = 0$.

Решение.

$$\text{а) } x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad \text{б) } x^{12} = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad \text{Ответ: а) } \{0\}; \text{ б) } \{0\}.$$

§110. Трехчленные уравнения.

Биквадратные уравнения

Алгебраическое уравнение вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ называется *трехчленным*, если $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

При $n=2$ трехчленное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным уравнением*.

Заменой переменной $x^n = t$ трехчленное уравнение $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ преобразуется в квадратное $at^2 + bt + c = 0$.

В частности, для биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$ замена $x^2 = t$ приводит его к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение.

Имеем биквадратное уравнение. Положив $x^2 = t$, получим квадратное уравнение $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4, t_2 = 9$. Задача свелась к решению уравнений $x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$; $x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm 3$.

Ответ: $\{\pm 2; \pm 3\}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.

Решение.

Положив $x^2 = t$, получаем квадратное уравнение $t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -2, t_2 = 5$.

Теперь задача сводится к решению уравнений $x^2 = -2$, $x^2 = 5$.

Уравнение $x^2 = -2$ не имеет действительных корней, уравнение $x^2 = 5$ имеет два корня $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$.

Ответ: $\{\pm\sqrt{5}\}$.

Пример 3. Решить уравнение $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.

Р е ш е н и е.

Имеем трехчленное уравнение. Положив $x^3 = t$, получаем

$$x^6 = (x^3)^2 = t^2,$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 1, \\ x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = \sqrt[3]{2}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{1; \sqrt[3]{2}\}.$$

Пример 4. Решить уравнение $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Р е ш е н и е.

Положив $x^4 = t$, получаем $x^8 = (x^4)^2 = t^2$, $t^2 - 17t + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1, \\ x^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{1} = 1, \\ x_2 = -\sqrt[4]{1} = -1, \\ x_3 = \sqrt[4]{16} = 2, \\ x_4 = -\sqrt[4]{16} = -2. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{\pm 1; \pm 2\}.$$

§111. Целые рациональные уравнения высших степеней. Теорема Безу

Уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$) есть алгебраическое уравнение степени n .

Если $n=1$, то $a_0x + a_1 = 0$ — линейное уравнение.

Если $n=2$, то $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ — квадратное уравнение.

Если $n>2$, то уравнение называется уравнением степени выше второй или *уравнением высшей степени*.

Алгебраическое уравнение степени n имеет не более n действительных корней.

Уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ называется *неприведенным целым рациональным уравнением* ($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 1$).

Уравнение $x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0$ называется *приведенным целым рациональным уравнением*.

Обозначим $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Для уравнения $P_n(x) = 0$ справедлива *теорема Безу*: многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $(x - \alpha)$ в том и только в том случае, когда α — корень многочлена $P_n(x)$.

Замечание. Теорема Безу нередко формулируется следующим образом: остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$ равен значению этого многочлена $P_n(x)$ при $x=\alpha$, то есть $P_n(\alpha)=r$, где r — остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$.

Пример 1. Многочлен x^3+x^2-x-1 делится без остатка (нацело) на двучлен $(x-1)$, т. к. $x=1$ является корнем многочлена $x^3+x^2-x-1=0$.

Пример 2. Остаток от деления многочлена x^3+x^2-x-1 на двучлен $(x-2)$ равен 9, т. к. $P_3(2)=2^3+2^2-2-1=8+4-3=9$. В этом можно убедиться и непосредственно, разделив x^3+x^2-x-1 «углом» на $(x-2)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-x-1 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2+3x+5 \\ \hline 3x^2-x & \\ \hline 3x^2-6x & \\ \hline 5x-1 & \\ \hline 5x-10 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

Таким образом, $\frac{x^3+x^2-x-1}{x-2}=x^2+3x+5+\frac{9}{x-2}$.

Если $P_n(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то всякий целый корень многочлена $P_n(x)$ является делителем свободного члена a_n . Например, $x^2-7x+12$ — многочлен второй степени; его корни $x_1=3$, $x_2=4$ есть делители свободного члена (числа 12).

Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем неприведенного целого рационального уравнения с целыми коэффициентами $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$, то q является делителем старшего коэффициента a_0 , а p является делителем свободного члена a_n .

Решение уравнений высших степеней, имеющих хотя бы один целый корень, выполняют в следующем порядке:

- 1) находят множество делителей свободного члена a_n ;
- 2) по теореме Безу проверяют, какие из этих делителей являются корнями уравнения $P_n(x)=0$;

3) делением «углом» находят частное от деления $P_n(x)$ на $(x - x_1)$, где x_1 — корень уравнения $P_n(x) = 0$;

4) записывают частное $Q_{n-1}(x)$ как многочлен степени $(n-1)$:

$$\frac{P_n(x)}{x - x_1} = Q_{n-1}(x) \Rightarrow P_n(x) = (x - x_1)Q_{n-1}(x),$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$;

5) определяют, если это возможно, корни многочлена $Q_{n-1}(x)$, которые являются также корнями исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Решение.

Поскольку целые корни исходного уравнения являются делителями числа 1, то ищем корни среди чисел ± 1 . При $x = 1$ $x^3 - 2x + 1 = 1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ является корнем заданного уравнения. Разделив «углом» многочлен $x^3 - 2x + 1$ на $(x-1)$, получаем $\frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} = x^2 + x - 1$. Отсюда исходное уравнение можно

записать в виде $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}. \quad \text{Ответ: } \left\{ 1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Пример 4. Решить уравнение $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$.

Решение.

Подбором находим целый корень исходного уравнения. Для этого выписываем делители свободного члена: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 4 ; ± 6 ; ± 8 ; ± 12 ; ± 24 . Подставляя в исходное уравнение вместо $x = -1$, получаем $(-1)^3 - 5(-1)^2 - 2(-1) + 24 = -1 - 5 + 2 + 24 = 20 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ не является корнем исходного уравнения.

При $x = 1$ $1^3 - 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 24 = 1 - 5 - 2 + 24 = 18 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ не является корнем.

При $x = -2$ $(-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24 = -8 - 20 + 4 + 24 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ является корнем исходного уравнения. По теореме Безу исходный многочлен делится без остатка на $(x+2)$. Выполним это деление «углом»:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 5x^2 - 2x + 24 & x + 2 \\
 \underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 7x + 12 \\
 -7x^2 - 2x & \\
 \underline{-7x^2 - 14x} & \\
 12x + 24 & \\
 \underline{12x + 24} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Таким образом, $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x+2)(x^2 - 7x + 12) \Rightarrow$ исходное уравнение принимает вид $(x+2)(x^2 - 7x + 12) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений (решение первого из которых $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ уже найдено): $x+2=0$; $x^2 - 7x + 12=0$. Второе уравнение совокупности имеет корни $x=3$ и $x=4 \Rightarrow$ исходное уравнение имеет три корня: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

Ответ: $\{-2; 3; 4\}$.

Пример 5. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$.

Решение.

Так как ± 1 не являются корнями исходного уравнения, то нужно попытаться найти рациональные корни (если они есть).

Рациональные корни исходного уравнения ищем в виде $\frac{p}{q}$, где

p — делитель числа 1, q — делитель числа 2, p и q — взаимно простые числа. Ясно, что рациональные корни следует искать

среди чисел $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Проверяя эти числа путем подстановки в

исходное уравнение, находим корень $x = \frac{1}{2}$. Отсюда нужно разде-

лить исходный многочлен левой части уравнения на $(x - \frac{1}{2})$ или,

что то же самое, но без дробей, на $2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1$ (т.к. $x = \frac{1}{2}$

(дробь) является корнем, то лучше делить не на $(x - \frac{1}{2})$, а на

$2(x - \frac{1}{2}) = 2x - 1$, тогда мы при делении избегаем дробных коэффи-

циентов). Выполняем деление «углом»:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 3x^2 - x + 1 & 2x - 1 \\
 \underline{2x^3 - x^2} & x^2 - x - 1 \\
 -2x^2 - x & \\
 \underline{-2x^2 + x} & \\
 -2x + 1 & \\
 \underline{-2x + 1} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$\text{Отсюда } 2x^3 - 3x^2 - x + 1 = (2x - 1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$(\text{решение первого из которых уже найдено, это } x = \frac{1}{2}): \begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ x^2 - x - 1 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение совокупности $x^2 - x - 1 = 0$ имеет корни

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{исходное уравнение имеет три корня: } x_1 = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

§112. Симметричные уравнения третьей степени

Рациональное уравнение третьей степени называется *симметричным*, если оно имеет вид: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, ($a \neq 0$).

Для решения этого уравнения преобразуем многочлен, стоящий в левой части уравнения, используя разложение многочлена на множители. Имеем следующую цепочку тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= ax^3 + a + bx^2 + bx = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = \\ &= (x + 1)[ax^2 - ax + a + bx] = (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 &\Leftrightarrow (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0 \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x + 1 = 0, \\ ax^2 + (b - a)x + a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Получили совокупность уравнений, эквивалентную исходному кубическому уравнению. Решение полученной совокупности легко находится, поскольку эта совокупность содержит линейное и квадратное уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Преобразуем левую часть уравнения: } x^3 + 9x^2 + 9x + 1 &= \\ = \underline{x^3 + 1} + \underline{9x^2 + 9x} &= \underline{(x + 1)(x^2 - x + 1)} + \underline{9x(x + 1)} = (x + 1)(x^2 - x + 1 + 9x) = \\ &= (x + 1)(x^2 + 8x + 1). \end{aligned}$$

Отсюда

$$x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 8x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0, \\ x^2 + 8x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -4 \pm \sqrt{16-1} = -4 \pm \sqrt{15}. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; -4 \pm \sqrt{15}\}$.

§113. Симметричные уравнения четвертой степени

Рациональное уравнение четвертой степени называется *симметричным*, если оно имеет вид $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$).

Так как $a \neq 0$, то, разделив обе части на a , получаем равносильное уравнение $x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 = 0$. Сгруппировав первый член с последним и второй с четвертым, получаем

$$x^4 + 1 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 = x^4 + 1 + \frac{b}{a}x(x^2 + 1) + \frac{c}{a}x^2.$$

Заметим, что

$$x^4 + 1 = (x^2)^2 + 1 = \underline{(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2} - 2x^2 = \underline{(x^2 + 1)^2} - 2x^2.$$

Отсюда получаем цепочку тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 + \frac{b}{a}x(x^2 + 1) + \frac{c}{a}x^2 &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + \frac{b}{a}x(x^2 + 1) + \frac{c}{a}x^2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 + \frac{b}{a}x(x^2 + 1) - 2x^2 + \frac{c}{a}x^2 = \\ &= \underbrace{(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)\frac{bx}{2a} + \left(\frac{bx}{2a}\right)^2}_{\left(x^2 + 1 + \frac{bx}{2a}\right)^2} - \left(\frac{bx}{2a}\right)^2 + x^2 \left(-2 + \frac{c}{a}\right) = \\ &= \left(x^2 + 1 + \frac{bx}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 x^2}{4a^2} + x^2 \left(\frac{c-2a}{a}\right) = \left(x^2 + \frac{bx}{2a} + 1\right)^2 + x^2 \left(-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c-2a}{a}\right) = \\ &= \left(x^2 + \frac{bx}{2a} + 1\right)^2 + \left(\frac{4a(c-2a) - b^2}{4a^2}\right)x^2 = \left(x^2 + \frac{bx}{2a} + 1\right)^2 - \frac{b^2 - 4a(c-2a)}{4a^2}x^2. \end{aligned}$$

Отсюда при $a \neq 0$ имеем

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{bx}{2a} + 1\right)^2 - \frac{b^2 - 4a(c-2a)}{4a^2}x^2 = 0.$$

Последнее уравнение нетрудно решить, так как его решение сводится к решению более простых уравнений. Рассмотрим пример.

Пример. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение.

Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 &= x^4 + 1 - 2x^3 - 2x - x^2 = \\ &= (x^2)^2 + 1 - 2x(x^2 + 1) - x^2 = \\ &= \underline{(x^2)^2 + 2x^2 \cdot 1 + 1^2} - 2x^2 - 2x(x^2 + 1) - x^2 = \\ &= \underline{(x^2 + 1)^2} - 2x(x^2 + 1) - 3x^2 = \\ &= \underline{(x^2 + 1)^2 - 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot x + x^2} - x^2 - 3x^2 = \underline{((x^2 + 1) - x)^2} - 4x^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 - x + 1)^2 - (2x)^2 &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1 - 2x)(x^2 - x + 1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 0, & (a) \\ x^2 + x + 1 = 0. & (б) \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение (а) совокупности уравнений имеет корни x_1 и x_2 :

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Уравнение (б) действительных корней не имеет, т. к. его

дискриминант $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$. Ответ: $\left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

§114. Решение некоторых неполных рациональных уравнений высших степеней

Рассмотрим решение некоторых неполных рациональных уравнений высших степеней, у которых *свободный член равен нулю*. У подобного рода уравнений $x=0$ всегда является корнем. После вынесения x за скобки в скобках может получиться множитель, приравнявая нулю который, получаем уравнение степени на единицу меньше исходного, которое нередко удаётся легко решить.

Замечание. Иногда нужно выносить за скобки не x , а x^n , где $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - x = 0$.

Решение.

$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ (x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1. \text{ Ответ: } \{0; 1; -1\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.

Решение.

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2; x_3 = 3. \end{cases} \text{ Ответ: } \{0; 2; 3\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $2x^3 + 4x^2 = 0$.

Решение.

$$2x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 0, \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Ответ: $\{0; -2\}$.

Пример 4. Решить уравнение $x^4 + 9x^2 = 0$.

Решение.

$$x^4 + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0, \\ x^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: $\{0\}$.

Пример 5. Решить уравнение $x^4 + 27x = 0$.

Решение.

$$x^4 + 27x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 27) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^3 + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -3. \end{cases}$$

Ответ: $\{0; -3\}$.

Пример 6. Решить уравнение $x^6 - 4x^5 + 3x^4 = 0$.

Решение.

$$x^6 - 4x^5 + 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^4(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1; x_3 = 3. \end{cases} \text{ Ответ: } \{0; 1; 3\}.$$

Пример 7. Решить уравнение $x^{14} - 7x = 0$.

Решение.

$$x^{14} - 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^{13} - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x^{13} - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \sqrt[13]{7}. \end{cases}$$

Ответ: $\{0; \sqrt[13]{7}\}$.

§115. Решение рациональных и дробно-рациональных уравнений методом введения новой переменной

Метод введения новой переменной был использован ранее при решении трехчленных уравнений, однако этот метод с успехом применяется и при решении многих других уравнений, где возможна и полезна замена переменной. Для закрепления этого метода рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

Решение.

Положив $x^2 + x = t$, получим уравнение $t^2 - 8t + 12 = 0$, откуда находим $t_1 = 2$; $t_2 = 6$. Теперь задача свелась к решению сово-

купности уравнений $x^2 + x = 2$; $x^2 + x = 6$, то есть $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0, (a) \\ x^2 + x - 6 = 0. (б) \end{cases}$

Уравнение (а) имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; уравнение (б) имеет корни $x_3 = -3$, $x_4 = 2$.

Ответ: $\{-2; 1; -3; 2\}$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{x+1}\right) + 6 = 0$.

Решение.

Замена $\frac{x}{x+1} = t$ приводит исходное уравнение к квадратному $t^2 - 5t + 6 = 0$, корни которого $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Взяв $t_1 = 2 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = -2$. Взяв $t_2 = 3 \Rightarrow \frac{x}{x+1} = 3 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $\{-2; -\frac{3}{2}\}$.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{7}{x^2+x+1} - \frac{16}{x^2+x+2} = -1$.

Решение.

Замена $x^2+x+1=t$ приводит исходное уравнение к такому:

$$\frac{7}{t} - \frac{16}{t+1} = -1 \Leftrightarrow 7(t+1) - 16t = -t(t+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7t + 7 - 16t + t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = 7.$$

$$\text{Взяв } t_1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -1.$$

$$\text{Взяв } t_2 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -3, x_4 = 2.$$

Ответ: $\{0; -1; -3; 2\}$.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = \frac{27}{4}$.

Решение.

$$\text{Положим } x + x^{-1} = x + \frac{1}{x} = t. \text{ Тогда } t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} =$$

$= x^2 + x^{-2} + 2 \Rightarrow x^2 + x^{-2} = t^2 - 2$. Исходное уравнение записывается в виде

$$t^2 + t - 2 = \frac{27}{4} \Leftrightarrow t^2 + t - \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 35}}{4} = \frac{-2 \pm 12}{4} \Leftrightarrow t_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, t_2 = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{Взяв } t_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Взяв } t_2 = -\frac{7}{2}, \text{ получаем } x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2 = -7x \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Ответ: $\left\{2; \frac{1}{2}; \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}\right\}$.

Пример 5. Решить уравнение $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Решение.

Уравнения вида $(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} = M$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) решаются с помощью замены $t = x + c = x + \frac{a+b}{2}$ (c — среднее арифметическое чисел a и b).

Для уравнения $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$

$$c = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow \text{делаем замену } t = x + 4 \Rightarrow x = t - 4, x + 3 = t - 4 + 3 = t - 1,$$

$x + 5 = t - 4 + 5 = t + 1 \Rightarrow$ исходное уравнение записывается в виде $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$. Применяя треугольник Паскаля, получаем

$$\underline{t^4} - \underline{4t^3} + \underline{6t^2} - \underline{4t} + \underline{1} + \underline{t^4} + \underline{4t^3} + \underline{6t^2} + \underline{4t} + \underline{1} = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, получаем $t_1 = 1$, $t_2 = -1$.

$$\text{Взяв } t_1 = 1 \Rightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -4 + 1 = -3.$$

$$\text{Взяв } t_2 = -1 \Rightarrow x + 4 = -1 \Leftrightarrow x = -4 - 1 = -5.$$

Ответ: $\{-3; -5\}$.

Пример 6. Решить уравнение $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$.

Решение.

В данном уравнении отношение первого коэффициента к свободному члену и квадрата второго коэффициента к квадрату

предпоследнего равны между собой, то есть $\frac{3}{12} = \frac{(-2)^2}{(-4)^2} = \frac{1}{4}$. Такие

уравнения называются *возвратными*. В общем случае уравнение вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m = 0$ называется *возвратным*, если

выполнено условие $\frac{a}{m} = \frac{b^2}{d^2}$, $m \neq 0$. Поскольку $x=0$ не является решением возвратного уравнения, то можно разделить обе части

уравнения на x^2 и после замены переменных получить квадратное уравнение. Разделив исходное уравнение на x^2 , получаем

$$3x^2 - 2x - 9 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0. \text{ Группируя слагаемые, имеем}$$

$$3x^2 + \frac{12}{x^2} - 2x - \frac{4}{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 9 = 0.$$

Положив $x + \frac{2}{x} = t$, имеем

$$t^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$3(t^2 - 4) - 2t - 9 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 21 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -\frac{7}{3}.$$

$$\text{Взяв } t_1 = 3 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

$$\text{Взяв } t_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x + \frac{2}{x} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow 3(x^2 + 2) = -7x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 6 = 0. \text{ Т. к. дискриминант этого уравнения } D = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 49 - 72 = -23 < 0, \text{ то оно действительных корней не имеет.}$$

Ответ: $\{1; 2\}$.

§116. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, чаще всего применяют следующие методы:

- а) раскрытие модуля по определению;
- б) возведение обеих частей уравнения в квадрат;
- в) метод интервалов (промежутков).

Вспомним определение модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Отметим следующие свойства модуля, которые нередко используются на практике: $|x| \geq 0$, $|x| \geq x$, $|xy| = |x| \cdot |y|$, $|x|^2 = x^2$,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad |-x| = |x|, \quad |-f(x)| = |f(x)|.$$

Прежде чем начать решать уравнение с модулем, заметим, что уравнение $|f(x)| = a$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a, \end{cases} \text{ если } a \geq 0. \text{ Если же } a < 0, \text{ то уравнение } |f(x)| = a \text{ решений не имеет.}$$

Пример 1. Решить уравнение $|2x-1|=5$.

Решение.

$$|2x-1|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=5, \\ 2x-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ x=-2. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{3; -2\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $|x+2|=0$.

Решение.

$$|x+2|=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2. \quad \text{Ответ: } \{-2\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $|2x+5|=-1$.

Решение.

$|2x+5|=-1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, так как из определения модуля следует, что $|f(x)| \geq 0$ для любого x из области определения функции $f(x)$.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 4. Решить уравнение $|x+1|=2x-1$.

Решение.

Рассмотрим два случая, когда подмодульное выражение $(x+1)$ неотрицательно и когда отрицательно. При $x+1 \geq 0 \Rightarrow |x+1|=x+1$. При $x+1 < 0 \Rightarrow |x+1|=-(x+1)$. Отсюда исходное уравнение эквивалентно совокупности двух смешанных систем:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+1 = 2x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 < 0, \\ -(x+1) = 2x-1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $x=2$.

Вторая система решений не имеет, т. к. $0 \notin (-\infty; -1)$.

Ответ: $\{2\}$.

Пример 5. Решить уравнение $|2x-1|=|x-1|$.

Решение.

Исходное уравнение с двумя модулями можно решать методом интервалов, который рассмотрен ниже, однако для данного уравнения быстрее всего приводит к цели способ возведения обеих частей уравнения в квадрат, с учетом того что $|f(x)|^2 = (f(x))^2$.
Имеем

$$|2x-1|=|x-1| \Leftrightarrow |2x-1|^2 = |x-1|^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$.

§117. Метод интервалов (промежутков) при решении уравнений с модулями

Этот метод заключается в следующем:

1) приравниваются к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;

2) полученные значения откладываются на числовой прямой, которая при этом разбивается на интервалы (промежутки), в каждом из которых свой знак подмодульного выражения;

3) решаются полученные уравнения в каждом из интервалов.

На практике метод интервалов обычно применяется тогда, когда уравнение содержит более одного модуля.

Рассмотрим применение метода интервалов на конкретных примерах.

Пример 1. Решить уравнение $|x+2|+|x-4|=5x-20$.

Решение.

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$; $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$. Наносим на числовую прямую точки $x=-2$ и $x=4$. Эти точки разбивают прямую на три интервала (промежутка), в каждом из которых свой знак подмодульного выражения. Обозначим эти интервалы I, II, III, где I: $x < -2$; II: $-2 \leq x \leq 4$; III: $x > 4$ (рис. 48).

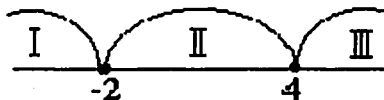


Рис. 48

Для интервала I имеем: $|x+2| = -(x+2) = -x-2$;
 $|x-4| = -(x-4) = -x+4$.

Отсюда получаем решение уравнения в I интервале:

$$-x-2-x+4=5x-20 \Leftrightarrow -2+4+20=x+x+5x \Leftrightarrow 22=7x \Leftrightarrow x=\frac{22}{7}.$$

Однако значение $x=\frac{22}{7}$ не принадлежит I интервалу, где

$x < -2$, иначе говоря, $\frac{22}{7} \notin (-\infty; -2)$, отсюда в I интервале исходное уравнение $|x+2|+|x-4|=5x-20$ решений не имеет.

Для II интервала $|x+2|=x+2$, $|x-4|=-(x-4)=-x+4 \Rightarrow$ исходное уравнение имеет вид $x+2+(-x+4)=5x-20 \Rightarrow 5x=2+4+20=26 \Leftrightarrow x=\frac{26}{5}$. Однако $\frac{26}{5}$ не входит в интервал $-2 \leq x \leq 4$, значит, во II интервале исходное уравнение решений не имеет.

Для III интервала $|x+2|=x+2$, $|x-4|=x-4 \Rightarrow$ исходное уравнение имеет вид: $x+2+x-4=5x-20 \Leftrightarrow 2-4+20=-x-x+5x \Leftrightarrow 18=3x \Leftrightarrow x=6$. Т. к. 6 входит в интервал $x>4$, то $x=6$ является решением исходного уравнения. Ответ: {6}.

Замечание. Решение примера 1 можно записать в следующей форме, применяя понятие совокупности смешанных систем, т. е. систем, содержащих уравнения и неравенства.

$$|x+2|+|x-4|=5x-20.$$

Имеем три интервала I: $x < -2$; II: $-2 \leq x \leq 4$; III: $x > 4$. Отсюда, в зависимости от того, в каком интервале мы ищем решение, исходное уравнение равносильно совокупности следующих смешанных систем:

$$\begin{cases} x < -2, \\ -(x+2)-(x-4)=5x-20; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ x+2-(x-4)=5x-20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4, \\ x+2+x-4=5x-20 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x < -2, \\ x = \frac{22}{7}; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 4, \\ x = \frac{26}{5}; \end{cases} \begin{cases} x > 4, \\ x = 6. \end{cases}$$

Первая и вторая системы решений не имеют (это означает, что в I и во II интервале решений нет), т. к. $\frac{22}{7} \notin (-\infty; -2)$, $\frac{26}{5} \notin [-2; 4]$, а третья система имеет решение $x=6$. Ответ: {6}.

Пример 2. Решить уравнение $|x-2|+|x+2|=4$.

Решение.

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2; \quad x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Имеем три интервала (рис. 49):

$$\text{I: } x \in (-\infty; -2);$$

$$\text{II: } x \in [-2; 2];$$

$$\text{III: } x \in (2; \infty).$$

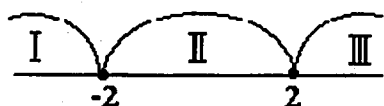


Рис. 49

В I интервале

$$|x-2|=-(x-2), \quad |x+2|=-(x+2).$$

Во II интервале

$$|x-2|=-(x-2), \quad |x+2|=x+2.$$

В III интервале

$$|x-2|=x-2, \quad |x+2|=x+2.$$

Отсюда получаем совокупность, состоящую из трех смешанных систем:

$$\begin{cases} x < -2, \\ -(x-2) - (x+2) = 4; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ -(x-2) + (x+2) = 4; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x-2 + x+2 = 4 \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x < -2, \\ x = -2; \end{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 4 = 4; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x = 2. \end{cases}$$

Первая и третья системы решений не имеют, поскольку $-2 \notin (-\infty; -2)$, $2 \notin (2; \infty)$. Т. к. $4=4$ — это тождество, то для второй системы любое $x \in [-2; 2]$ является решением, т. е. решением второй системы является весь отрезок $[-2; 2]$.

Ответ: $x \in [-2; 2]$.

§118. Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня (радикала) или под знаком возведения в дробную степень.

Примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{1-x} = 3; \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3} = 5; \sqrt{x-5} = x-7; \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-1} = -1; \\ x^{\frac{1}{3}} + 4 = 0; (x-1)^{\frac{2}{5}} + (x-2)^{\frac{1}{5}} = 15; \sqrt{x^2} + 2\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x^5} = 11.$$

ОСНОВНЫМИ МЕТОДАМИ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЯВЛЯЮТСЯ:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень; 2) метод введения новых переменных. Иногда применяют также различные искусственные приемы.

При решении иррациональных уравнений методом возведения обеих частей в четную степень могут появиться посторонние (лишние) корни. Эти корни могут появиться за счет того, что при возведении обеих частей исходного уравнения $f(x) = \varphi(x)$ в четную степень получается уравнение, являющееся следствием не только уравнения $f(x) = \varphi(x)$, но и уравнения $f(x) = -\varphi(x)$, поскольку и $(f(x))^2 = (\varphi(x))^2$, и $(f(x))^2 = (-\varphi(x))^2$. Если уравнение $f(x) = -\varphi(x)$ имеет корни, то именно они являются посторонними корнями исходного уравнения $f(x) = \varphi(x)$. Так, например, возьмем уравнение $\sqrt{x-5} = x-7$. Возведя обе части этого уравне-

ния в квадрат, получим $(\sqrt{x-5})^2 = (x-7)^2 \Leftrightarrow x-5 = x^2 - 14x + 49 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 54 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $x_1 = 9$, $x_2 = 6$. Однако $x_1 = 9$ является корнем уравнения $\sqrt{x-5} = x-7$, а $x_2 = 6$ является посторонним корнем (очевидно, что $x_2 = 6$ является корнем уравнения $\sqrt{x-5} = -(x-7) = 7-x$, то есть является корнем уравнения $f(x) = -\varphi(x)$, если исходное уравнение есть $f(x) = \varphi(x)$).

Причиной появления посторонних корней, помимо возведения обеих частей уравнения в четную степень, может быть также какая-либо замена (неэквивалентное преобразование), выполняемая, например, в ходе решения уравнения, содержащего кубические радикалы.

Приступая к решению иррационального уравнения, содержащего четные степени радикалов, бывает полезным нахождение множества D допустимых значений переменной (ОДЗ — область допустимых значений), это может облегчить решение исходного уравнения. При этом найденные при решении уравнения значения неизвестных, которые не принадлежат множеству D , являются посторонними. Однако те найденные корни, которые принадлежат D , необходимо проверять, так как и они могут быть посторонними (это будет в том случае, если производились неэквивалентные преобразования в процессе решения уравнения).

Отсюда следуют, что в подавляющем большинстве случаев найденные корни иррационального уравнения необходимо проверять. Исключения составляют только случаи, когда на всех этапах решения исходного уравнения производились только эквивалентные (равносильные) преобразования. Однако при этом приходится, как правило, решать неравенства, что иногда отнимает немало времени. Таким образом, нужно либо делать проверку найденных корней, подставляя их значения в исходное уравнение, либо в процессе решения исходного уравнения делать только эквивалентные преобразования, которые не могут привести ни к потере корней, ни к приобретению лишних корней.

Прежде чем приступать к рассмотрению основных методов решения иррациональных уравнений, рассмотрим некоторые несложные иррациональные уравнения, при решении которых основные методы не применяются.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[7]{(x-1)^7} = 5$.

Решение. Поскольку $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, где a — любое действительное число, если n — нечетное, $m/n > 0$, то исходное уравнение равносильно такому: $x + (x-1) = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. Ответ: $\{3\}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-5} + \sqrt{3-x} = 7$.

Решение. Находим ОДЗ (область допустимых значений x , или, что то же самое, множество D).

$$D: \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Таким образом, в данном примере предварительное нахождение ОДЗ оказалось чрезвычайно полезным. **Ответ:** $\emptyset$.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-5} = -1$.

Решение. Поскольку $\sqrt{x-3} \geq 0$, $\sqrt{x-5} \geq 0$, то $\sqrt{x-5} + \sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow x \in \emptyset$, так как неотрицательное число не может равняться отрицательному. **Ответ:** $\emptyset$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{x+1} = 0$.

Решение. Т. к. для корней четной степени берется всегда арифметическое (неотрицательное) значение корня, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-x-2} \geq 0, \quad \sqrt{x+1} \geq 0, \quad \sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=-1, \Leftrightarrow x=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{-1\}$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-4x+4} = 4$.

Решение. Поскольку $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, $x^2-4x+4 = (x-2)^2$, $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$, $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, то исходное уравнение равносильно следующему: $|x+1| + |x-2| = 4$.

Решая это уравнение методом интервалов, имеем совокуп-

ность трех смешанных систем: $\begin{cases} x < -1, \\ -x-1-x+2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ x+1+2-x=4; \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x+1+x-2=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -1, \\ x = -\frac{3}{2}; \end{cases} \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ 3=4; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x = \frac{5}{2}. \end{cases} \text{ Первая и третья}$$

системы имеют решения, а именно, $-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}$, а вторая — нет.

Ответ: $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

МЕТОД ВОЗВЕДЕНИЯ ОБЕИХ ЧАСТЕЙ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ОДНУ И ТУ ЖЕ СТЕПЕНЬ

Этот метод состоит в следующем:

а) возводят обе части исходного уравнения в одну и ту же степень, предварительно уединив один из радикалов;

б) с учетом тождества $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (где $a \geq 0$, если n — четное; $a \in \mathbb{R}$, если n — нечетное) получают уравнение $f(x) = \varphi(x)$;

в) решают уравнение $f(x) = \varphi(x)$ и делают проверку, которая в основном осуществляется с помощью подстановки найденных значений переменной в исходное уравнение.

Замечание 1. Если производить только эквивалентные преобразования исходного уравнения, то проверку делать не нужно.

Замечание 2. При натуральном n уравнение

$$2\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^{\frac{2n}{n-2}}, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Необходимо учитывать, что нередко записывают:

$$2\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^{\frac{2n}{n-2}}, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Последняя форма записи решения уравнения $2\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, содержащая лишнее неравенство $f(x) \geq 0$, как правило, легче усваивается, чем предыдущая, т. к. она более наглядная и включает ОДЗ ($f(x) \geq 0$).

Замечание 3.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Из приведенных выше трех систем выбирают обычно ту, где проще решить неравенство ($f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$). Если же оба неравенства $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ решить несложно, то можно выбрать первую систему, которая, хотя и содержит одно лишнее неравенство, является более наглядной, чем вторая или третья системы.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{3x-6} = \sqrt{9-2x}$.

Решение. Приведем два варианта решения.

1 вариант решения (с проверкой найденных корней).

Возведя в квадрат обе части исходного уравнения, получим $3x-6 = 9-2x \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$.

Проверка.

При $x=3$ $\sqrt{3x-6}=\sqrt{3\cdot 3-6}=\sqrt{3}$; $\sqrt{9-2x}=\sqrt{9-2\cdot 3}=\sqrt{3}$; $\sqrt{3}=\sqrt{3}$.
Отсюда $x=3$ является корнем заданного уравнения. Ответ: {3}.

II вариант решения (с помощью эквивалентных преобразований).

$$\sqrt{3x-6}=\sqrt{9-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6 \geq 0, \\ 9-2x \geq 0, \\ (\sqrt{3x-6})^2 = (\sqrt{9-2x})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 4,5, \\ 3x-6=9-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4,5, \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: {3}.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x^3-2x^2-x+3}=\sqrt{4x-3}$.

Решение. Приведем два варианта решения.

I вариант решения (с проверкой найденных корней).

Возведя в квадрат обе части исходного уравнения, получим

$x^3-2x^2-x+3=4x-3 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$. Подбором находим один из корней $x=1$, а затем, разделив «углом» x^3-2x^2-5x+6 на $(x-1)$, получим $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x-3)(x+2)=0 \Leftrightarrow x_1=1; x_2=3; x_3=-2$. Проверка показывает, что корни $x_1=1$ и $x_2=3$ удовлетворяют исходному уравнению, а корень $x_3=-2$ является посторонним.

Ответ: {1;3}.

II вариант решения (с помощью эквивалентных преобразований).

$$\sqrt{x^3-2x^2-x+3}=\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geq 0, \\ x^3-2x^2-x+3=4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4}, \\ x^3-2x^2-5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4}, \\ x_1=1; x_2=3; x_3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=1; x_2=3.$$

В процессе решения исходного уравнения мы выбрали систему, содержащую более простое неравенство $4x-3 \geq 0$, неравенство же $x^3-2x^2-x+3 \geq 0$ решать довольно-таки затруднительно, т. к. $x^3-2x^2-x+3=0$ не имеет корней среди целых чисел.

Ответ: {1;3}.

Пример 8. Решить уравнение $\sqrt{x^7 - x^5 + 1} = \sqrt{x^7 - x^5 + x^2}$.

Решение. Возведя в квадрат обе части исходного уравнения, получим

$$x^7 - x^5 + 1 = x^7 - x^5 + x^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -1.$$

Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению. Заметим, что пример 8 решать с помощью эквивалентных преобразований чрезвычайно трудно, т. к. решение неравенств $x^7 - x^5 + 1 \geq 0$ и $x^7 - x^5 + x^2 \geq 0$ может вызвать большие затруднения.

Ответ: $\{1; -1\}$.

Пример 9. Решить уравнение $\sqrt{x+11} = 1-x$.

Решение. Решим уравнение двумя способами.

I способ (с проверкой найденных корней). Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получаем $(\sqrt{x+11})^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow x+11 = 1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 5; x_1, x_2 \in \mathbb{D}$.

Проверка. При $x_1 = -2$ $\sqrt{x_1+11} = \sqrt{-2+11} = \sqrt{9} = 3, 1-x_1 = 1-(-2) = 3, 3=3 \Rightarrow x_1 = -2$ является корнем исходного уравнения.

При $x_2 = 5$ $\sqrt{x_2+11} = \sqrt{5+11} = \sqrt{16} = 4, 1-x_2 = 1-5 = -4;$

$4 \neq -4 \Rightarrow x_2 = 5$ — лишний корень, хотя $x_2 \in \mathbb{D}$. Ответ: $\{-2\}$.

II способ (с помощью эквивалентных преобразований).

$$\sqrt{x+11} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+11 \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \\ (\sqrt{x+11})^2 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -11, \\ x \leq 1, \\ x+11 = 1-2x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11 \leq x \leq 1, \\ x_1 = -2, x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2. \quad \text{Ответ: } \{-2\}.$$

Замечание 4. Если быть более точным, то $\sqrt{x+11} = 1-x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ (\sqrt{x+11})^2 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Хотя такая форма записи решения (без $x+11 \geq 0$) и является более короткой, однако она менее наглядна.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt[6]{x-20} = 2$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в шестую степень, получим: $x-20 = 2^6$, откуда $x = 20 + 2^6 = 20 + 64 = 84$.

Проверка. Подставив $x=84$ в исходное уравнение, получаем $\sqrt[6]{84-20} = \sqrt[6]{64} = 2$, т. е. $2 = 2$ — верное равенство $\Rightarrow x=84$ является корнем. **Ответ:** {84}.

Пример 11. Решить уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$.

Решение. Уединим один из радикалов, а затем возведем обе части уравнения в квадрат $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = \sqrt{x-3} + 2 \Rightarrow \sqrt{x+5}^2 = (\sqrt{x-3} + 2)^2 \Leftrightarrow x+5 = x-3 + 4\sqrt{x-3} + 4 \Leftrightarrow x+5 = x+1 + 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4 = 4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 = 1 \Leftrightarrow x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 4$.

Проверка.

При $x=4$ $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \sqrt{4+5} - \sqrt{4-3} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3-1=2$, $2=2 \Leftrightarrow x=4$ является корнем исходного уравнения. **Ответ:** {4}.

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$.

Решение. ОДЗ исходного уравнения — вся числовая прямая, т. е. $x \in \mathbb{R}$. Возведем обе части исходного уравнения в куб

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1})^3 &= (\sqrt[3]{x+1})^3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^3 + 3(\sqrt[3]{x-1})^2 \cdot \sqrt[3]{3x-1} + \\ &+ 3\sqrt[3]{x-1} \cdot (\sqrt[3]{3x-1})^2 + (\sqrt[3]{3x-1})^3 = x+1 \Leftrightarrow x-1 + 3\sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} \times \\ &\times (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1}) + 3x-1 = x+1 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(3x-1)} \cdot (\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1}) = \\ &= -x+1-3x+1+x+1 = -3(x-1). \end{aligned}$$

Заменим выражение $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1}$, являющееся левой частью исходного уравнения, правой частью исходного уравнения, т. е. положим $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x+1}$.

$$\text{Получим } 3\sqrt[3]{(x-1)(3x-1)} \cdot \sqrt[3]{x+1} = -3(x-1).$$

Разделим обе части последнего уравнения на 3 и возведем обе части в куб: $(x-1)(3x-1)(x+1) = -(x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(x+1) + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)[(3x-1)(x+1) + (x-1)^2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0, & (a) \\ (3x-1)(x+1) + (x-1)^2 = 0 & (б) \end{cases}$

В полученной совокупности уравнений уравнение (а) имеет корень $x=1$, а уравнение (б) эквивалентно следующему: $3x^2 + 3x - x - 1 + x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Проверка.

При $x=1$ $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{1-1} + \sqrt[3]{3 \cdot 1 - 1} = 0 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x=1$ является корнем исходного

уравнения. При $x=0$ $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{0-1} + \sqrt[3]{3 \cdot 0 - 1} = -1 - 1 = -2$;
 $\sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1$, $-2 \neq 1 \Rightarrow x=0$ является посторонним корнем.

Этот посторонний корень ($x=0$) появился в результате замены левой части исходного уравнения на не равную ей тождественно правую часть, т. е. использование условия исходного уравнения, вообще говоря, не приводит к уравнению, эквивалентному исходному. Ответ: $\{1\}$.

Приведенные выше примеры показывают, что нахождение ОДЗ уравнения не гарантирует нас от появления посторонних корней, то есть не избавляет от необходимости делать проверку полученных в результате решения уравнения корней. Эта проверка, как уже отмечалось, является излишней только в тех случаях, когда в процессе решения уравнения применяются только эквивалентные преобразования.

Как уже отмечалось, находить ОДЗ иногда бывает полезным и можно привести немало примеров, когда знание ОДЗ существенно упрощает решение.

Пример 13. Решить уравнение $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$.

Решение. Найдем множество D — область допустимых значений (ОДЗ) исходного уравнения

$$D: \begin{cases} 3x+4 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4/3, \\ x \geq 4, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Возведя обе части исходного уравнения в квадрат, получаем

$$3x+4+2\sqrt{3x+4} \cdot \sqrt{x-4}+x-4=4x \Rightarrow$$

$$2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=4x-3x-4-x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0 \Leftrightarrow$$

$$(3x+4)(x-4)=0 \Leftrightarrow x_1=-\frac{4}{3}; x_2=4.$$

Проверка. Так как $x_1=-\frac{4}{3} \notin D$, то он является посторонним корнем исходного уравнения. Этот посторонний корень не нуждается в проверке.

При $x_2=4$ $\sqrt{3x_2+4} + \sqrt{x_2-4} = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} + \sqrt{4-4} = \sqrt{16} + \sqrt{0} = 4$,
 $2\sqrt{x_2} = 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2 = 4$, $4=4 \Rightarrow x_2=4$ является корнем исходного уравнения. Таким образом, нахождение ОДЗ оказалось полезным, так как позволило не производить проверку постороннего корня $x_1=-\frac{4}{3}$, не принадлежащего ОДЗ. Ответ: $\{4\}$.

МЕТОД ВВЕДЕНИЯ НОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пример 14. Решить уравнение $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$.

Решение. Сделаем замену переменной, положив

$$t = \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}. \text{ Тогда } \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = \sqrt[7]{\left(\frac{5-x}{x+3}\right)^{-1}} = \left(\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}\right)^{-1} = t^{-1} = \frac{1}{t}. \text{ Отсюда по-}$$

$$\text{лучаем } t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 + 1 = 2t \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t = 1$. Так как производились только эквивалентные преобразования, то исходное уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 5-x = x+3 \Leftrightarrow 5-3 = x+x \Leftrightarrow 2 = 2x \Leftrightarrow x = 1.$$

Проверка. Поскольку уравнение $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1$ равносильно исходному уравнению, то найденный корень можно не проверять

или проверять подстановкой в уравнение $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1$. При $x = 1$

$$\text{имеем } \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = \sqrt[7]{\frac{5-1}{1+3}} = \sqrt[7]{\frac{4}{4}} = \sqrt[7]{1} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ является корнем урав-}$$

нения $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} = 1$, а значит, и исходного уравнения. Ответ: $\{1\}$.

Пример 15. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -x^2 + 3x + 7$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 5} + (x^2 - 3x + 5) - 12 = 0$. Положив $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t$, получаем $t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3, t_2 = -4$. Взяв $t_1 = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4, x_2 = -1$. Взяв $t_2 = -4$, получим $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -4 \Rightarrow x \in \emptyset$, т. к. корень четной степени есть число неотрицательное.

Проверка. Поскольку исходное уравнение эквивалентно уравнению $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3$, то корни можно проверять подстановкой в уравнение $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3$. Эта подстановка показывает, что $x_1 = 4, x_2 = -1$ являются корнями этого, а значит, и исходного уравнения. Ответ: $\{4, -1\}$.

Пример 16. Решить уравнение $\sqrt{x}\sqrt[5]{x} - 26\sqrt[5]{x}\sqrt{x} = 27$.

Решение. $D \geq 0$. Преобразуем выражения, стоящие в левой части исходного уравнения.

$$\sqrt{x}\sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{x^5 \cdot x} = \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{6}{5}} = x^{\frac{3}{5}}, \quad \sqrt[5]{x}\sqrt{x} = \sqrt[5]{x^2 \cdot x} = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}.$$

Положив $x^{\frac{3}{5}} = t \geq 0$, получаем $x^{\frac{3}{5}} = (x^{\frac{3}{5}})^2 = t^2$.

Отсюда исходное уравнение при $t \geq 0$ эквивалентно уравнению $t^2 - 26t = 27 \Leftrightarrow t^2 - 26t - 27 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 27, t_2 = -1$. Так как $t \geq 0$, то $t_2 = -1$ есть посторонний корень. Взяв $t_1 = 27 \Rightarrow x^{\frac{3}{5}} = 27 \Leftrightarrow (x^{\frac{3}{5}})^{\frac{10}{3}} = (27)^{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow x = (3^3)^{\frac{10}{3}} = 3^{10} = 59049$.

Проверка. Поскольку исходное уравнение эквивалентно уравнению $x^{\frac{3}{5}} = 27$, то проверку можно производить, подставляя $x = 59049$ в это уравнение. При $x = 59049$ $x^{\frac{3}{5}} = (59049)^{\frac{3}{5}} = (3^{10})^{\frac{3}{5}} = 3^3 = 27 \Rightarrow x = 59049$ является корнем уравнения $x^{\frac{3}{5}} = 27$, а значит, и исходного уравнения. **Ответ:** {59049}.

Пример 17. Решить уравнение $\sqrt[3]{x^5} + 2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x^3} = 0$.

Решение. ОДЗ исходного уравнения $x \geq 0$. Заметим, что $\sqrt[3]{x^5} = (\sqrt[3]{x})^5$, $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x^4} = (\sqrt[3]{x})^4$, $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[3]{x^6} = (\sqrt[3]{x})^6$.

Сделав замену $\sqrt[3]{x} = t \geq 0$, получаем $t^5 + 2t^4 - t^6 = 0 \Leftrightarrow$

$$t^4(t + 2 - t^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^4 = 0, \\ t + 2 - t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^4 = 0, \\ t^2 - t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0, \\ t_2 = 2, t_3 = -1. \end{cases}$$

Положив $t_1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$.

Положив $t_2 = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2^8 = 256$.

Поскольку $t \geq 0 \Rightarrow t_3 = -1$ является посторонним корнем.

Проверка.

При $x_1 = 0$ $\sqrt[3]{0^5} + 2\sqrt{0} - \sqrt[4]{0^3} = 0 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ является корнем. При $x_2 = 256$ $\sqrt[3]{256^5} + 2\sqrt{256} - \sqrt[4]{256^3} = \sqrt[3]{(2^8)^5} + 2 \cdot 16 - \sqrt[4]{(2^8)^3} = \sqrt[3]{2^{40}} + 32 - \sqrt[4]{2^{24}} = 2^5 + 32 - 2^6 = 32 + 32 - 64 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 256$ является корнем.

Ответ: {0; 256}.

Пример 18. Решить уравнение.

Решение.

Положив $\sqrt{x^3+x^2-1}=t \geq 0$, получаем $x^3+x^2-1=t^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^3+x^2=t^2+1$. Приходим к уравнению $t+\sqrt{t^2+1}+2=3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1}=3-t$. Заметив, что $3-t \geq 0$, возведем обе части последнего уравнения в квадрат.

$$t^2+3=(3-t)^2=9-6t+t^2 \Leftrightarrow t^2+3-9+6t-t^2=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Положив $t=1$, получим $\sqrt{x^3+x^2-1}=1$. Возведя в квадрат, имеем: $x^3+x^2-1=1 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0$. Так как $x=1$ является корнем, то, разделив «углом» (x^3+x^2-2) на $(x-1)$, получим

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-2 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+2x+2 \\ \hline 2x^2-2 & \\ \hline 2x^2-2x & \\ \hline 2x-2 & \\ \hline 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Отсюда

$$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0, & (a) \\ x^2+2x+2=0. & (б) \end{cases}$$

Из (a) $\Rightarrow$, что $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Из (б) $\Rightarrow x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, т. к. дискриминант $D=2^2-4 \cdot 1 \cdot 2=4-8=-4 < 0$.

Проверка. При $x=1$ $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=\sqrt{1^3+1^2-1}+\sqrt{1^3+1^2+2}=\sqrt{1}+\sqrt{4}=1+2=3 \Rightarrow 3=3 \Rightarrow x=1$ является корнем.

Ответ: {1}.

Пример 19. Решить уравнение $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$.

Решение.

D: $x \in \mathbb{R}$. Положим $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}=U$, $\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=V$. Тогда $U+V=1$,

$U^5=\frac{1}{2}+x$, $V^5=\frac{1}{2}-x$, $U^5+V^5=\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}-x=1$. Возведем $(U+V)$ в пятую степень, пользуясь треугольником Паскаля:

$$(U+V)^5 = U^5 + 5U^4V + 10U^3V^2 + 10U^2V^3 + 5UV^4 + V^5 = \\ = U^5 + V^5 + 5UV(U^3 + V^3) + 10U^2V^2(U+V);$$

$$U+V=1, (U+V)^5=1^5=1, U^5+V^5=1 \Rightarrow$$

$$1=1+5UV(U^3+V^3)+10U^2V^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5UV(U^3+V^3)+10U^2V^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5UV(U^3+V^3+2UV)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} UV=0, & (a) \\ U^3+V^3+2UV=0. & (6) \end{cases}$$

$$a) UV=0 \Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{1}{2}+x} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+x=0, \\ \frac{1}{2}-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}, \\ x_2=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (6):

$$U^3+V^3+2UV=0 \Leftrightarrow (U+V)(U^2-UV+V^2)+2UV=0 \Rightarrow$$

$$1((U+V)^2-3UV)+2UV=0 \Leftrightarrow (1^2-3UV)+2UV=0 \Leftrightarrow$$

$$1-3UV+2UV=0 \Leftrightarrow UV=1 \Rightarrow$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1 \Leftrightarrow \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2=1^5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4}-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Проверка. При $x_1=-\frac{1}{2}$ $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x_1} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x_1} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} =$
 $= \sqrt[5]{0} + \sqrt[5]{1} = 1, 1=1 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}$ является корнем.

При $x_2=\frac{1}{2}$ $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x_2} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x_2} = \sqrt[5]{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} =$
 $= \sqrt[5]{1} + \sqrt[5]{0} = 1, 1=1 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}$ является корнем.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$

ИСКУССТВЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 20. Решить уравнение $\sqrt{4x^2 + 6x + 6} + \sqrt{4x^2 - 6x + 6} = 6x$.

Решение.

Поскольку произведение взаимно сопряженных чисел равно разности квадратов $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, то, умножив обе части исходного уравнения на выражение

$g(x) = \sqrt{4x^2 + 6x + 6} - \sqrt{4x^2 - 6x + 6}$, получим:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 6} + \sqrt{4x^2 - 6x + 6} \right) \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 6} - \sqrt{4x^2 - 6x + 6} \right) = \\ & = 6x \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 6} - \sqrt{4x^2 - 6x + 6} \right) \Leftrightarrow \\ & (4x^2 + 6x + 6) - (4x^2 - 6x + 6) = 6x \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 6} - \sqrt{4x^2 - 6x + 6} \right) \Leftrightarrow \\ & 12x = 6x \left(\sqrt{4x^2 + 6x + 6} - \sqrt{4x^2 - 6x + 6} \right) \Leftrightarrow \\ & 6x \left(2 - \sqrt{4x^2 + 6x + 6} + \sqrt{4x^2 - 6x + 6} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} 6x = 0, & (a) \\ 2 - \sqrt{4x^2 + 6x + 6} + \sqrt{4x^2 - 6x + 6} = 0. & (б) \end{cases} \end{aligned}$$

Из уравнения (а) $x_1 = 0$.

Из (б) $\Rightarrow \sqrt{4x^2 + 6x + 6} - \sqrt{4x^2 - 6x + 6} = 2$. Складывая это уравнение с исходным уравнением, получаем

$$2\sqrt{4x^2 + 6x + 6} = 6x + 2 = 2(3x + 1).$$

Разделив обе части на 2 и возведя обе части в квадрат, получаем

$$4x^2 + 6x + 6 = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Проверка. Подставляя найденные значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ в исходное уравнение, убеждаемся, что ему удовлетворяет только значение $x_2 = 1$. Отсюда $x = 1$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: {1}.

§119. Системы уравнений

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют *систему уравнений*, если ставится задача найти множество общих решений этих уравнений. Систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases}$$

Множество упорядоченных пар, троек (в случае систем с тремя переменными) и т. д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется *решением системы уравнений*.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется *определенной*, если она имеет конечное число решений, и *неопределенной*, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Система уравнений называется *линейной*, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными. Если система из n линейных уравнений содержит n неизвестных, то возможны следующие три случая:

- 1) система не имеет решений;
- 2) система имеет ровно одно решение;
- 3) система имеет бесконечно много решений.

Не решая системы линейных уравнений, можно определить число ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных. Так, для системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ имеем:}$$

- а) если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение;

геометрически это решение иллюстрируется как точка пересечения двух прямых, являющихся графиками уравнений системы;

- б) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений; в этом

случае прямые, являющиеся графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают;

- в) если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений; в этом случае прямые совпадают.

ОСНОВНЫМИ МЕТОДАМИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЯВЛЯЮТСЯ СЛЕДУЮЩИЕ:

- 1) метод подстановки;
- 2) метод алгебраического сложения (или метод преобразования системы);
- 3) метод замены переменных.

При решении системы *методом подстановки* сначала из какого-нибудь уравнения выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение системы, в результате чего приходят к уравнению с одной переменной, затем решают это уравнение и находят соответствующее значение второй переменной.

При решении системы *методом алгебраического сложения* переходят от данной системы к равносильной ей системе, в которой одно из уравнений содержит только одну переменную. При этом обычно умножают одно или оба уравнения на числовые множители таким образом, чтобы коэффициенты при x или y были одинаковыми, но с противоположными знаками.

Пример 1. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + 5y = 12, \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$$

Решение. Решим исходную систему двумя способами: методом подстановки и методом алгебраического сложения.

1 способ (метод подстановки).
$$\begin{cases} 2x + 5y = 12, & (a) \\ 3x - 4y = -5. & (б) \end{cases}$$

Из уравнения (a) $y = \frac{12 - 2x}{5}$.

Подставляя в уравнение (б), получаем

$$3x - 4\left(\frac{12 - 2x}{5}\right) = -5 \Leftrightarrow 15x - 48 + 8x = -25 \Leftrightarrow 23x = 23 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$y = \frac{12 - 2x}{5} = \frac{12 - 2}{5} = 2. \text{ Итак, окончательно } x = 1, y = 2.$$

2 способ (метод алгебраического сложения). Решая этим способом, умножим первое уравнение системы на 3, а второе на

$$(-2) \text{ и сложим: } \begin{cases} 2x + 5y = 12, \\ 3x - 4y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15y = 36, \\ -6x + 8y = 10 \end{cases} \Rightarrow 6x + 15y - 6x +$$

$$+ 8y = 36 + 10 \Leftrightarrow 23y = 46 \Leftrightarrow y = 2, x = \frac{12 - 5y}{2} = \frac{12 - 10}{2} = 1, \text{ оконча-}$$

тельно $x = 1, y = 2$.

Заметим, что решение исходной системы методом подстановки можно было бы оформить следующим образом, используя только равносильные преобразования и символ $\Leftrightarrow$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x+5y=12, \\ 3x-4y=-5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{12-2x}{5}, \\ 3x-4\left(\frac{12-2x}{5}\right)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{12-2x}{5}, \\ 15x-4(12-2x)=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{12-2x}{5}, \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ x=1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{(1;2)\}$.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$

Решение. Решаем систему методом подстановки. Из первого уравнения системы $y=(7-x)$, подставив во второе уравнение системы вместо y выражение $7-x$, получаем:

$$\begin{cases} y=7-x, \\ x^2+(7-x)^2=25. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим x :

$$x^2+(7-x)^2=25 \Leftrightarrow x^2+49-14x+x^2=25 \Leftrightarrow$$

$$2x^2-14x+24=0 \Leftrightarrow x^2-7x+12=0 \Rightarrow x_1=3, x_2=4.$$

Поэтому данная система имеет два решения:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1=7-x_1=7-3=4, \\ x_1=3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y_2=7-x_2=7-4=3, \\ x_2=4. \end{cases}$$

Таким образом, $x_1=3, y_1=4; x_2=4, y_2=3$.

Заметим, что решение исходной системы с использованием только равносильных преобразований и совокупности систем можно оформить следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ x^2+(7-x)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ x^2-7x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x, \\ \begin{cases} x=3, \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=3, \\ x=4 \end{cases}, \\ \begin{cases} y=4, \\ y=3 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{(3;4);(4;3)\}$.

Пример 3. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Решение. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Поскольку $x^2 - xy + y^2 = 3$ (это первое уравнение исходной системы), то $(x+y)3 = 9 \Leftrightarrow x+y=3$. Таким образом, мы получили уравнение первой степени (линейное уравнение), которое совместно с первым уравнением исходной системы определяет новую систему:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ x^2 - x(3-x) + (3-x)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ \begin{cases} x=1, \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1, \\ x=2 \end{cases}, \\ \begin{cases} y=2, \\ y=1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;2), (2;1)\}$.

Пример 4. Решить систему
$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{9}{2x+y} = 2, \\ \frac{4}{x+y} - \frac{12}{2x+y} = -1. \end{cases}$$

Решение. Решаем систему уравнений *методом замены переменных*. Положив $U = \frac{1}{x+y}$, $V = \frac{1}{2x+y}$, приходим к системе

уравнений:
$$\begin{cases} 2U + 9V = 2, \\ 4U - 12V = -1. \end{cases}$$
 Умножив первое уравнение последней

системы на (-2) и сложив со вторым уравнением, получим

$$\begin{array}{r} -4U - 18V = -4 \\ + 4U - 12V = -1 \\ \hline -30V = -5 \Rightarrow V = \frac{1}{6}. \end{array}$$

Тогда $U = \frac{1}{2}(2 - 9V) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{9}{6}\right) = \frac{1}{4}$. Следовательно, имеем систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2x+y} = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Rightarrow (2x+y) - (x+y) = 6-4 \Leftrightarrow$$

$$x=2, y=4-x=4-2=2.$$

Ответ: $\{(2;2)\}$.

Пример 5. Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x+y+xy=9. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} \geq 0, \\ \frac{y}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow x \text{ и } y \text{ — оба поло-}$$

жительные или оба отрицательные.

В первом уравнении системы положим $\sqrt{\frac{x}{y}} = t \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$.

Тогда $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 2 = 3t \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$. Поскольку $t > 0 \Rightarrow t_2 = -\frac{1}{2}$ является посторонним

корнем. $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = 4y$. Таким образом, по-

лучаем систему, равносильную исходной:
$$\begin{cases} x = 4y, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$

Подставив $x = 4y$ во второе уравнение последней системы, получаем $4y + y + 4y \cdot y = 9 \Leftrightarrow 4y^2 + 5y - 9 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1, y_2 = -\frac{9}{4}$;

$y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 4y_1 = 4$; $y_2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow x_2 = 4y_2 = 4 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = -9$.

Ответ: $\left\{ (4;1), \left(-9; -\frac{9}{4}\right) \right\}$.

§120. Однородные системы уравнений

Система двух уравнений с двумя переменными называется *однородной*, если левые части ее уравнений, содержащие переменные, есть однородные многочлены степени n от двух переменных. Таким образом, однородная система с двумя переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = a, \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \dots + b_{n-1} x y^{n-1} + b_n y^n = b. \end{cases}$$

Однородные системы решаются с помощью применения методов алгебраического сложения и введения новых переменных.

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$$

Решение. Левые части обеих уравнений системы — однородные многочлены второй степени от переменных x и y . Если в первом уравнении системы положить $x = 0$, то получим

$$2 \cdot 0^2 + 0 \cdot y - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Однако пара $(0; 0)$, являющаяся решением первого уравнения системы, не удовлетворяет второму уравнению, т. к. $0^2 - 3 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 = 0 \neq -1$. Отсюда $x \neq 0$, и поэтому можем обе части первого уравнения системы разделить на $x^2 \neq 0$ (это не приведет к потере корней). Разделив обе части первого уравнения системы на x^2 , получим

$$\frac{2x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{0}{x^2} \Leftrightarrow 2 + \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 2 = 0.$$

Сделав замену $\frac{y}{x} = t$, получим $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = -1$.

Тогда $\frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x \ (x \neq 0)$ или $\frac{y}{x} = -1 \Leftrightarrow y = -x \ (x \neq 0)$.

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases} \text{ Первая из этих систем име-}$$

ет два решения: $x_1 = 1, y_1 = 2; x_2 = -1, y_2 = -2$.

Вторая система несовместна. Отсюда $(1;2)$, $(-1;-2)$ — решения исходной системы. Ответ: $\{(1;2);(-1;-2)\}$.

Пример 2. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на 13 и сложим со вторым уравнением

$$\begin{array}{r} 13x^2 - 39xy + 13y^2 = -13 \\ + \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \\ \hline 16x^2 - 40xy + 16y^2 = 0. \end{array}$$

Разделив обе части полученного уравнения на 8, имеем $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$. Таким образом, получаем следующую систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы можем разделить на $x^2 \neq 0$ ($x \neq 0$, так как если положить $x = 0$, то получим $y = 0$, а пара $(0;0)$ не удовлетворяет первому уравнению последней системы).

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 : x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0.$$

Положив $\frac{y}{x} = t$, получаем $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Тогда $\frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x$ или $\frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2y$.

Поэтому исходная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ y = 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ x = 2y. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $(1;2), (-1;-2)$; вторая система — $(2;1), (-2;-1)$. Ответ: $\{(1;2); (-1;-2); (2;1); (-2;-1)\}$.

§121. Симметрические системы уравнений

Выражение $f(x,y)$ называется *симметрическим*, если при замене x на y , y на x оно не изменяется.

Примеры симметрических выражений

$$f(x,y) = x+y; f(x,y) = x^2 + y^2; f(x,y) = x^3 + y^3;$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy; \quad f(x, y) = 2x^2 + 5xy + 2y^2.$$

Выражения $(x+y)$ и xy называются *основными симметрическими многочленами* с двумя переменными. Все симметрические выражения с двумя переменными выражаются через основные симметрические многочлены, например:

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy; \quad x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy;$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) =$$

$$= (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = (x+y)^3 - 3(x+y)xy.$$

Симметрической системой уравнений называется система, все уравнения которой симметрические. Решать симметрическую систему можно, например, с помощью замены переменных, где новыми переменными являются основные симметрические многочлены.

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$$

Решение.

Поскольку $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, то, положив $x+y = U$, $xy = V$, приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} U^2 - 2V = 34, \\ U + V = 23. \end{cases} \quad \text{Из этой системы находим} \quad \begin{cases} U_1 = 8, \\ V_1 = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} U_2 = -10, \\ V_2 = 33. \end{cases}$$

Отсюда исходная система эквивалентна следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 33. \end{cases}$$

Первая система совокупности имеет решения $(3;5), (5;3)$; вторая система решений не имеет. **Ответ:** $\{(3;5); (5;3)\}$.

Пример 2. Решить систему
$$\begin{cases} x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 136, \\ x^3y + xy^3 = 30 \end{cases}$$

Решение.

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 + 4x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 + 4(xy)^2,$$

$$x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = xy((x+y)^2 - 2xy).$$

Положим $x+y = U$, $xy = V$, тогда заданная система сводится к следующей:

$$\begin{cases} (U^2 - 2V)^2 + 4V^2 = 136, & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(U^2 - 2V) = 30. & (б) \end{cases}$$

Из уравнения (б) последней системы $U^2 - 2V = \frac{30}{V}$; подстав-

ляя в (а), получаем $\left(\frac{30}{V}\right)^2 + 4V^2 = 136 \Leftrightarrow \frac{900}{V^2} + 4V^2 = 136 \Leftrightarrow$

$$4V^4 - 136V^2 + 900 = 0 \Leftrightarrow V^4 - 34V^2 + 225 = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, находим $V = \pm 5$, $V = \pm 3$.

Из (б) $U^2 - 2V = \frac{30}{V} \Leftrightarrow U^2 = 2V + \frac{30}{V}$.

Подставляя найденные значения V , получаем:

$$V = 5 \Rightarrow U^2 = 16 \Leftrightarrow U = \pm 4; \quad V = 3 \Rightarrow U^2 = 16 \Leftrightarrow U = \pm 4$$

(для $V = -5$, $V = -3$ действительных значений U не существует).

Отсюда относительно U , V система имеет решения

$$\begin{cases} U_1 = 4, \\ V_1 = 5; \end{cases} \begin{cases} U_2 = -4, \\ V_2 = 5; \end{cases} \begin{cases} U_3 = 4, \\ V_3 = 3; \end{cases} \begin{cases} U_4 = -4, \\ V_4 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 5; \end{cases} \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 5; \end{cases} \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases} \begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Первая и вторая системы решений не имеют, третья система имеет решения $(1;3);(3;1)$, четвертая система имеет решения $(-1;-3)$, $(-3;-1)$.

Ответ: $\{(1;3);(3;1);(-1;-3);(-3;-1)\}$.

Тесты к главе 6.
Алгебраические уравнения и системы уравнений

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

- A1.** Решите уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$ и найдите разность между большим и меньшим корнем.
1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
- A2.** Решите уравнение $4x^2 - 5\sqrt{2}x + 2 = 0$ и найдите частное от деления большего корня на меньший корень.
1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) 8.
- A3.** Решите уравнение $x^2 - 2x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$ и найдите разность между большим и меньшим корнем.
1) $2 - 2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) 2; 4) $2\sqrt{3} - 2$.
- A4.** Решите уравнение $|x - 1| = 3$ и найдите сумму корней.
1) 4; 2) 2; 3) 0; 4) -2.
- A5.** Решите уравнение $|x^2 - 3x + 2| = 2$ и найдите сумму корней.
1) -1; 2) 0; 3) 1; 4) 3.
- A6.** Решите уравнение $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$.
1) 2; 4; 2) 4; 3) 1; 2; 4; 4) 1; 2.
- A7.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 3 \end{cases}$ и найдите $x + 2y$.
1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 12.
- A8.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ и вычислите $x + y$.
1) 1; 2) 5; 3) 6; 4) 11.

A9. Составьте квадратичное уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

1) $cx^2 + bx + a = 0$; 2) $ax^2 + (2ac - b^2)x + c^2 = 0$;

3) $cx^2 + (2ac + b^2)x + a = 0$; 4) $a^3x^2 + (b^3 - 3abc)x + c^3 = 0$.

A10. Не решая уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, корни которого x_1 и x_2 , найти $x_1^{-2} + x_2^{-2}$.

1) $\frac{b^2 - 2ac}{a^2}$; 2) $\frac{b^2 - 2ac}{c^2}$;

3) $\frac{b^2 + 2ac}{a^2}$; 4) $\frac{b^2 + 2ac}{c^2}$.

A11. Уравнение $\sqrt{2x-9} = \sqrt{6-x}$ равносильно уравнению:

1) $\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[5]{x^5} = 10$; 2) $\sqrt{x} = \sqrt{2-x}$;

3) $\sqrt[5]{2x-4} = 2$; 4) $\sqrt[5]{-4x} = 2$.

A12. При каком условии уравнение $ax + b = 0$ не имеет решений?

1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$; $b = 0$; 3) $a = 0$; $b \neq 0$; 4) $a \neq 0$; $b = 0$.

A13. Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7; \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}$?

1) Ни одного; 2) одно; 3) два; 4) три.

A14. Сколько рациональных корней имеет уравнение

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0?$$

1) Ни одного; 2) один; 3) два; 4) три.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Решите уравнение $\frac{9x-5}{3x+1} + \frac{108x-9-36x^2}{4(9x^2-1)} = \frac{12x+1}{6x-2}$.

B2. Найдите наибольший рациональный корень уравнения $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

B3. Найдите натуральный корень уравнения $(x^2 - 4x)^2 - 6(x - 2)^2 = 16$.

B4. Найдите отрицательный корень уравнения $|x| + |x - 3| = 11$.

B5. Решите уравнение $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$.

B6. Решите уравнение $\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{x-3} = 1$.

B7. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-5} = \sqrt[3]{x-3}$.

B8. Решите уравнение $|2x+1| - |3-x| = |x-4|$.

B9. Сколько решений имеет система $\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{26}{5}, \\ xy - 6x - 6y = 6 \end{cases}$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

C1. Решите уравнение $x^4 + (x - 4)^4 = 82$.

C2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2|x| + |y| = 6, \\ 3y + 4x = 2. \end{cases}$$

C3. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет два корня?

C4. Найдите, при каких a система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ 3x + 4y = a \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

Глава 7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§122. Неравенства с одной переменной (основные понятия)

Неравенством с одной переменной называется неравенство, содержащее одну независимую переменную. Неравенства с переменными называют иногда *функциональными неравенствами*.

Пусть дано неравенство с одной переменной $f(x) > g(x)$ (вместо знака $>$ могут быть знаки $<, \leq, \geq$). Областью определения неравенства $f(x) > g(x)$ называется пересечение областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$. *Решением неравенства* называется всякое значение переменной, при котором исходное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. *Решить неравенство с переменной* — значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Два неравенства с одной переменной называются *равносильными (эквивалентными)*, если решения этих неравенств совпадают; в частности, неравенства *равносильны*, если они не имеют решений.

При решении неравенств пользуются следующими *основными теоремами о равносильности неравенств*:

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное исходному.

2. Если к обеим частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить (или вычесть) любую функцию $\varphi(x)$, то получится неравенство, равносильное исходному при условии, что области определения полученного и исходного неравенств совпадают.

3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить (или разделить) на любую функцию $\varphi(x)$, сохраняющую постоянный знак и отличную от нуля, то при $\varphi(x) > 0$ получается неравенство, равносильное исходному, а при $\varphi(x) < 0$ равносильным исходному будет неравенство противоположного смысла (предполагается, что области определения полученного и исходного неравенств совпадают).

Таким образом, можем записать:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x), \text{ если } \varphi(x) > 0;$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} > \frac{g(x)}{\varphi(x)}, \text{ если } \varphi(x) > 0;$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot \varphi(x) < g(x) \cdot \varphi(x), \text{ если } \varphi(x) < 0;$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{g(x)}{\varphi(x)}, \text{ если } \varphi(x) < 0.$$

Замечание. На практике при применении 2 и 3 теорем чаще всего вместо функции $\varphi(x)$ берется ее частный случай — отличная от нуля константа.

Пример. $x^2 - 4x > -3$ и $x^2 - 4x + 3 > 0$ равносильны по теореме 1. Неравенство $x^2 + 7x < x^2$ равносильно неравенству $7x < 0$ по теореме 2, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $x < 0$ по теореме 3. Неравенство $-7x \leq 21$ равносильно неравенству $x \geq -3$ по теореме 3, т. к. обе части неравенства $-7x \leq 21$ можно разделить на отрицательное число (-7) , изменив при этом знак $\leq$ на $\geq$.

§123. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным

Линейным неравенством с одной переменной называется неравенство вида $ax > b$ (или $ax < b$, $ax \leq b$, $ax \geq b$).

$$\text{Если } a > 0, \text{ то неравенство } ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{b}{a}; \infty \right).$$

$$\text{Если } a < 0, \text{ то неравенство } ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{b}{a} \right).$$

Если $a = 0$, то неравенство принимает вид $0 \cdot x > b$ и оно верно для любого $x \in (-\infty; \infty)$, если $b < 0$, и не имеет решений, если $b \geq 0$.

Пример 1. Решить неравенство $2x > 8$.

$$\text{Решение. } 2x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{2} \Leftrightarrow x > 4 \Leftrightarrow x \in (4; \infty).$$

Ответ: $x \in (4; \infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $-3x \leq 15$.

$$\text{Решение. } -3x \leq 15 \Leftrightarrow x \geq \frac{15}{-3} \Leftrightarrow x \geq -5 \Leftrightarrow x \in [-5; \infty).$$

Ответ: $x \in [-5; \infty)$.

Неравенствами, приводимыми к линейным, назовем следующие неравенства: $ax+b>0$ (или $ax+b\geq 0$, $ax+b<0$, $ax+b\leq 0$), $ax+b>cx+d$ (или $ax+b\geq cx+d$, $ax+b<cx+d$, $ax+b\leq cx+d$).

У этих неравенств левая и правая части представляют собой линейные функции относительно x . Такие неравенства в процессе преобразований сводятся к линейным.

Пример 3. Решить неравенство $2x+3\leq x-8$.

Решение. $2x+3\leq x-8\Rightarrow 2x-x\leq -3-8\Rightarrow x\leq -11\Rightarrow x\in(-\infty;-11]$.

Ответ: $x\in(-\infty;-11]$.

Пример 4. Решить неравенство $3(x+2)-4(x-6)>2(x-5)$.

Решение. $3(x+2)-4(x-6)>2(x-5)\Rightarrow 3x+6-4x+24>2x-10\Rightarrow$
 $-x+30>2x-10\Rightarrow -x-2x>-30-10\Rightarrow -3x>-40\Rightarrow x<\frac{-40}{-3}\Rightarrow x<\frac{40}{3}\Rightarrow$
 $\Rightarrow x\in(-\infty;\frac{40}{3})$.

В процессе решения неравенства мы раскрыли скобки, а дальше использовали теоремы о равносильности неравенств. Особо следует обратить внимание на то, что неравенство $-3x>-40$ равносильно неравенству $x<\frac{-40}{-3}$, так как при делении на отрицательное число нужно изменить знак на противоположный.

Ответ: $x\in(-\infty;\frac{40}{3})$.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2x+1$.

Решение. Рассмотрим несколько форм записи решения исходного неравенства.

1-я форма записи. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2x+1\Rightarrow \frac{3x-2x}{6}<\frac{6(2x+1)}{6}\Rightarrow$

$3x-2x<12x+6\Rightarrow x-12x<6\Rightarrow -11x<6\Rightarrow x>-\frac{6}{11}\Rightarrow x\in(-\frac{6}{11};\infty)$.

В процессе решения неравенства мы привели левую и правую части исходного неравенства к общему знаменателю, то есть к числу 6, а затем применили теоремы о равносильных неравенствах.

2-я форма записи. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2x+1\Rightarrow 6\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)<6(2x+1)\Rightarrow$

$3x-2x<12x+6\Rightarrow x-12x<6\Rightarrow -11x<6\Rightarrow x>-\frac{6}{11}\Rightarrow x\in(-\frac{6}{11};\infty)$.

В процессе решения мы вначале умножили обе части исходного неравенства на 6, а затем применили свойства неравенств (теоремы о равносильных неравенствах).

$$\text{3-я форма записи. } \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{x}{3} - 2x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x - 2x - 12x}{6} < 1 \Leftrightarrow \frac{-11x}{6} < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{6}{11} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{6}{11}; \infty\right).$$

В процессе решения исходного неравенства с самого начала все неизвестные были перенесены в левую часть неравенства, а в правой части остались только постоянные. Далее выражение слева было приведено к общему знаменателю, а затем использованы теоремы о равносильных неравенствах.

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{6}{11}; \infty\right).$$

Замечание. Ответы к неравенствам не обязательно давать с применением теории множеств. Так, вполне допустимо дать ответ в виде $x > -\frac{6}{11}$.

вет в виде $x > -\frac{6}{11}$.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{4,2 + 2x}{3} > 1,5x - 1,1$.

Решение.

$$\frac{4,2 + 2x}{3} > 1,5x - 1,1 \Leftrightarrow 4,2 + 2x > 3(1,5x - 1,1) \Leftrightarrow 4,2 + 2x > 4,5x - 3,3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4,5x > -3,3 - 4,2 \Leftrightarrow -2,5x > -7,5 \Leftrightarrow x < \frac{-7,5}{-2,5} \Leftrightarrow x < 3.$$

В процессе решения исходного неравенства обе части его были умножены на число 3, а затем применены теоремы о равносильных неравенствах. Как уже отмечалось, ответ можно давать либо в форме $x < 3$, либо в форме $x \in (-\infty; 3)$. **Ответ:** $x < 3$.

§ 124. Системы и совокупность неравенств с одной переменной

Несколько неравенств с одной переменной образуют *систему неравенств*, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют *одновременно каждому из этих неравенств* (т. е. если отыскиваются все общие решения исходных неравенств).

Несколько неравенств с одной переменной образуют *совокупность неравенств*, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет *по крайней мере одному из этих неравенств*.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется *решением системы неравенств*.

Две системы неравенств называются *равносильными*, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как и равносильность систем уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

Очевидно, что *решением системы неравенств* является *пересечение решений неравенств*, образующих систему, а *решением совокупности неравенств* является *объединение решений неравенств*, образующих совокупность.

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют *систему неравенств*, то их записывают в столбик с помощью *фигурной скобки*:

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

Так, например, запись $\begin{cases} 3x+5 > 2, \\ 4x-5 \leq 15 \end{cases}$ означает, что неравенства $3x+5 > 2$ и $4x-5 \leq 15$ образуют систему неравенств.

Двойное неравенство $g(x) < f(x) < \varphi(x)$ эквивалентно (равносильно) системе неравенств, т. е. $g(x) < f(x) < \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < \varphi(x). \end{cases}$

Например, $\begin{cases} x+1 \leq -5, \\ x+1 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x+1 \leq -5.$

Если неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ образуют *совокупность неравенств*, то их записывают либо в столбик с помощью *квадратной скобки*, либо в строку с помощью знака «;», например,

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases} \Leftrightarrow f_1(x) > g_1(x); f_2(x) > g_2(x).$$

Несколько систем неравенств с одной переменной образуют *совокупность систем неравенств*, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет *по крайней мере одной из этих систем*.

§125. Геометрическая интерпретация неравенств

Решение неравенств можно показать геометрически на числовой оси. Так, если мы имеем строгое неравенство $x > a$, то геометрически это множество изображается в виде той части числовой прямой, которая лежит справа от точки с абсциссой $x = a$. При этом правее точки $x = a$ наносят штриховку (рис. 50), а саму точку $x = a$ обычно изображают в виде светлого кружка (говорят, что точку $x = a$ «выкалывают»).



Рис. 50

Если имеем нестрогое неравенство $x \leq b$, то на числовой оси наносят штриховку слева от точки $x = b$ (рис. 51), при этом точку $x = b$ обычно закрашивают в черный цвет, т. е. изображают темной точкой.

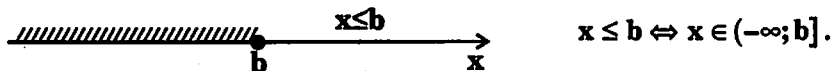


Рис. 51

При решении систем линейных неравенств, состоящих из двух неравенств, можно изображать решения с помощью двух числовых осей или с помощью одной оси, с помощью дуг или без дуг, без помощи штриховок или с помощью штриховок, нанося штриховки, имеющие разный угол наклона относительно числовой прямой, снизу и сверху или только сверху (снизу).

Пример 1. Решить систему неравенств, используя геометрическую интерпретацию

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7. \end{cases}$$

Решение. $\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 + 3, \\ 3x \geq -2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 4, \\ 3x \geq -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -3. \end{cases}$

Дадим четыре варианта геометрической интерпретации примера 1.

1 вариант (с использованием двух числовых осей).

На одной числовой прямой отмечаем все те значения x , при которых выполняется первое неравенство системы, а на второй числовой прямой, расположенной под первой, — все те значения x , при которых выполняется второе неравенство системы (рис. 52). Сравнение этих двух результатов показывает, что оба неравенст-

ва одновременно будут выполняться при всех значениях x , заключенных от (-3) до $(+2)$, т. е.

$$-3 \leq x < 2 \Leftrightarrow x \in [-3; 2).$$

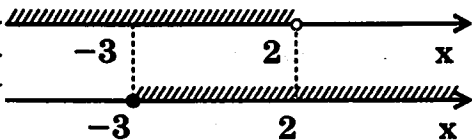


Рис. 52

2 вариант (с использованием одной числовой оси и штриховок снизу и сверху оси). На числовую ось наносим штриховки, расположенные выше и ниже числовой прямой, и находим пересечение решений неравенств, образующих исходную систему.

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -3. \end{cases}$$

С помощью координатной прямой (рис. 53) находим, что множество решений исходной системы есть полуинтервал $[-3; 2)$.



Рис. 53

3 вариант (с использованием одной оси, дуг и штриховок).

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -3. \end{cases}$$

На числовую ось наносим заданные множества $x < 2$ и $x \geq -3$ при помощи дуг и штриховок с разным углом наклона к координатной прямой (рис. 54). Искомое множество изображено двойной штриховкой, при помощи наложения двух штриховок.



Рис. 54

4 вариант (с использованием одной оси и дуг)

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3 \\ 3x + 2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -3. \end{cases}$$



Рис. 55

На числовую ось наносим заданные множества

$x < 2$ и $x \geq -3$ при помощи только одних дуг, а штриховку наносим только там, где заданные множества пересекаются (рис. 55).

Ответ: $x \in [-3; 2)$.

Пример 2. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} 4x+3 < 7, \\ 2x+1 > 5. \end{cases}$$

Решение.
$$\begin{cases} 4x+3 < 7, \\ 2x+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 7-3, \\ 2x > 5-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 4, \\ 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 2. \end{cases}$$

Таким образом, любое число, удовлетворяющее обоим неравенствам одновременно, должно быть меньше 1 и больше 2 (рис. 56). Но таких чисел не существует. Поэтому данная система неравенств не выполняется ни при каких значениях x , т. е. $x \in \emptyset$. О таких системах говорят, что они несовместны (геометрически это означает, что нет наложения штриховок).

Ответ: $\emptyset$.

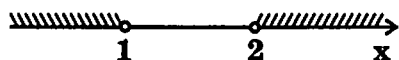


Рис. 56

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 7, \\ 3x-1 \leq 8. \end{cases}$$

Решение.
$$\begin{cases} 2x+1 \geq 7, \\ 3x-1 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 3. \end{cases}$$



Рис. 57

Изображая данные множества с помощью дуг и штриховок (рис. 57), видим, что оба неравенства будут одновременно выполняться только при $x=3$.

Ответ: $\{3\}$.

Пример 4. Решить совокупность неравенств
$$\begin{cases} 4x+3 < 7, \\ 2x+1 > 5. \end{cases}$$

Решение.
$$\begin{cases} 4x+3 < 7, \\ 2x+1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 2. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой (рис. 58) находим, что решением заданной совокупности является множество, состоящее из двух полубесконечных интервалов, т. е.



Рис. 58

$$\begin{cases} x < 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$.

Пример 5. Решить совокупность неравенств
$$\begin{cases} 2x+1 < 7, \\ 3x-1 < -1. \end{cases}$$

Решение.
$$\begin{cases} 2x+1 < 7, \\ 3x-1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x < 0. \end{cases}$$
 С помощью координатной



Рис. 59

мой (рис. 59) находим, что решением исходной совокупности неравенств есть полубесконечный интервал $(-\infty; 3)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$.

Пример 6. Решить совокупность неравенств $\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \geq -7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geq -3. \end{cases}$$


С помощью числовой прямой (рис. 60) находим, что решением заданной со-

Рис. 60

вокупности неравенств является вся числовая прямая, т. е.

$$x \in (-\infty; \infty).$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; \infty).$$

§ 126. Неравенства второй степени

Пусть требуется решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ (аналогичные рассуждения проводятся при решении неравенств $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$). В зависимости от знака дискриминанта квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac$ нужно рассмотреть два случая.

1) Если $D < 0$, а старший коэффициент a положителен, то при всех значениях x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c > 0$.

2) Если $D \geq 0$, то для решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ нужно разложить квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, затем разделить обе части неравенства $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$ на число a , сохранив знак неравенства, если $a > 0$, и изменив знак неравенства на противоположный, если $a < 0$, и перейти к неравенству $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Далее используют тот факт, что произведение двух чисел положительно, если сомножители имеют одинаковые знаки (если $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, то сомножители имеют противоположные знаки).

Пример 1. Решить неравенство $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Решение.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

$$\text{Отсюда } x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-3 > 0, \\ x-2 < 0, \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x > 3, \\ x < 2, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $2x^2 - x - 1 \leq 0$.

Решение. $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$.

Отсюда $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ и, следовательно,

$$2x^2 - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+\frac{1}{2}) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x+\frac{1}{2} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq -\frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x+\frac{1}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

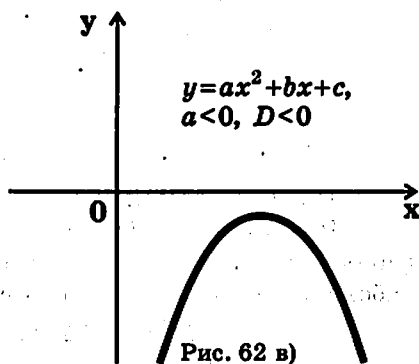
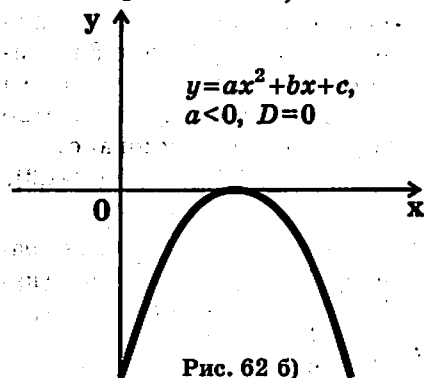
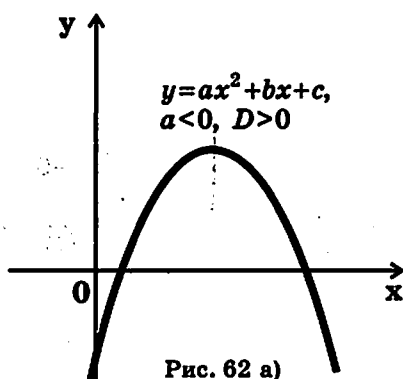
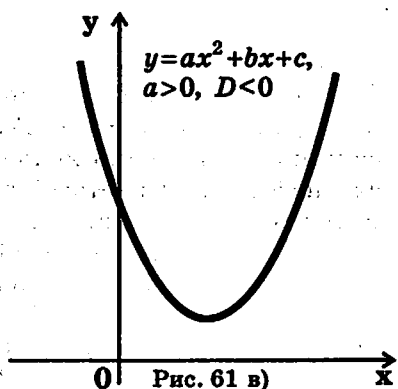
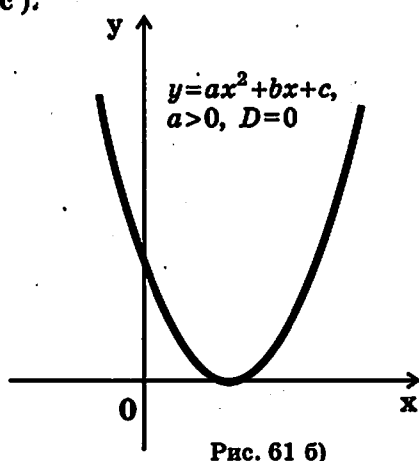
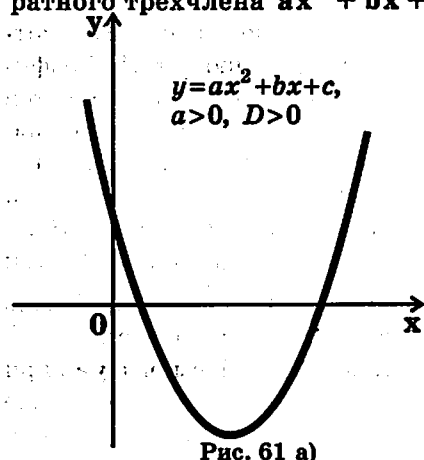
Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Замечание. Рассмотренные выше неравенства второй степени обычно решают либо графически, либо методом интервалов, которые рассмотрены ниже. Однако приведенные выше способы также имеют право на существование, т. к. они достаточно просты и наглядны.

§127. Графическое решение неравенств второй степени

Как известно, графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с ветвями, направленными вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$ (иногда говорят, что парабола направлена выпуклостью вниз, если $a > 0$ и выпуклостью вверх, если $a < 0$). При этом возможны три случая: парабола пересекает ось ox (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня), парабола имеет вершину на оси ox (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, так называемый двукратный

корень), парабола не пересекает ось ox (т. е. уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней). Таким образом, возможны шесть положений параболы, которые представлены на рис. 61—62 ($D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$).



Используя графические иллюстрации, можно решать квадратные неравенства. График параболы можно строить чисто схематически, не находя координаты вершин (если $D \neq 0$) и точку пересечения с осью Oy .

Пример 1. Решить неравенство $x^2 > 0$.

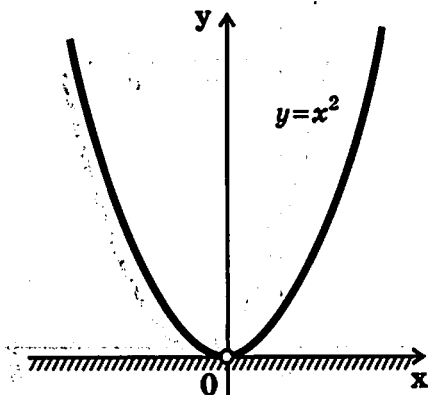


Рис. 63

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх (парабола направлена выпуклостью вниз). Парабола пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = 0$, так как $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Изобразив схематически параболу $y = x^2$ (рис. 63), найдем, что $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. На чертеже искомое множество заштриховано.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $x^2 - x - 6 \leq 0$.

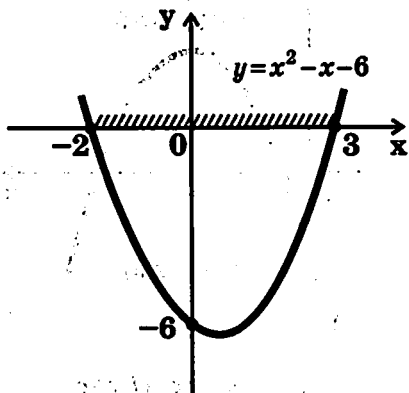


Рис. 64

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - x - 6$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$. Решим уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. Корни его $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Значит данная парабола $y = x^2 - x - 6$ пересекает ось Ox в точках с абсциссами $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Изобразив схематически параболу $y = x^2 - x - 6$ (рис. 64), находим, что $y \leq 0$, если $x \in [-2; 3]$. Искомое множество на рис. 64 заштриховано.

Ответ: $x \in [-2; 3]$.

Пример 3. Решить неравенство $-2x^2 + 3x + 2 > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = -2x^2 + 3x + 2$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз (парабола направлена выпуклостью вверх), т. к. $a = -2 < 0$.

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2.$$

Изобразив схематически параболу $y = -2x^2 + 3x + 2$, находим, что $y < 0$ в каждом из бесконечных промежутков: $(-\infty; -\frac{1}{2})$, $(2; \infty)$. Искомое множество заштриховано на рис. 65.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $x^2 + 2x + 3 \geq 0$.

Решение.

Поскольку для квадратного трехчлена $x^2 + 2x + 3$ дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$, то парабола $y = x^2 + 2x + 3$ не пересекает ось ox . Изобразив параболу $y = x^2 + 2x + 3$ схематически (рис. 66), находим, что $x^2 + 2x + 3 \geq 0$ при любом значении $x \in \mathbb{R}$. Искомое множество заштриховано на рис. 66.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

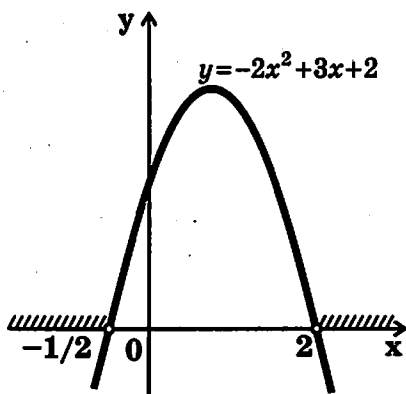


Рис. 65

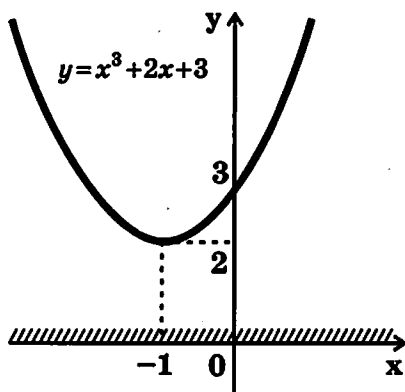


Рис. 66

§128. Решение рациональных неравенств методом интервалов

Неравенства вида $P_n(x) > 0$ ($P_n(x) < 0$, $P_n(x) \geq 0$, $P_n(x) \leq 0$),

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ ($\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$), где

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней n и m , т. е.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m,$$

обычно решают методом интервалов (методом промежутков). Этот метод удобен, например, для решения неравенств следующего вида:

$$x(x+1) \geq 0, \quad \frac{3x}{x-3} < 0, \quad (x-1)(x-3)(x-5) \leq 0,$$

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x - 6} \geq 0, \quad \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x+1)(x+3)} < 0.$$

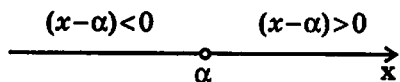


Рис. 67

В основе метода интервалов лежит следующее свойство двучлена $(x-\alpha)$: точка $x=\alpha$ делит числовую ось на две части — справа от точки α двучлен $(x-\alpha) > 0$, а слева от точки α $(x-\alpha) < 0$ (рис. 67).

Пусть требуется решить неравенство $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) > 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$. Для решения неравенства $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) > 0$ методом интервалов поступают следующим образом: на числовую ось наносят числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; в промежутке справа от наибольшего из них, т. е. числа α_n , ставят знак «плюс», в следующем за ним справа налево интервале ставят знак «минус», затем — знак «плюс», затем знак «минус» и т. д. Тогда множество всех решений неравенства $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) > 0$ будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «плюс», а множество решений неравенства $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) < 0$ будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «минус».

Замечание 1. На практике среди двучленов встречаются выражения $(\alpha_i - x)$, в этом случае справа от наибольшего числа $x = \alpha_n$ уже не обязательно будет знак «плюс». Поэтому неравенства, где в левой части встречаются двучлены вида $(\alpha_i - x)$, лучше всего решать так: найти знак левой части выражения в каком-то одном из интервалов, не обязательно крайнем справа, а дальше в соседних интервалах будут противоположные знаки.

Замечание 2. Изменение знаков левой части неравенства удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (которую называют «кривой знаков»), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком неравенства в рассматриваемом промежутке.

Замечание 3. Приведенные выше рассуждения справедливы и для неравенств вида $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, где $f(x)$ имеет

вид $f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)}$, при этом числа $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b_k$ попарно различны. При этом изменение знаков функции $f(x)$ иллюстрируется с помощью «кривой знаков».

Пример 1. Решить неравенство $(x-1)(x-3) > 0$.

Решение. Многочлен $f(x) = (x-1)(x-3)$ обращается в нуль в точках $x=1$, $x=3$. Эти точки разбивают координатную прямую на промежутки $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$, внутри каждого из которых функция $f(x)$ сохраняет знак. Так как в промежутке $(3; +\infty)$ сомножители $(x-1)$, $(x-3)$ положительны, то и их произведение положительно, т. е. $f(x) > 0$. Отметим промежуток $(3; +\infty)$ знаком «+». Далее знаки в промежутках чередуются. Проводим через отмеченные точки «кривую знаков» (рис. 68) Иллюстрацию с помощью «кривой знаков» понимаем так: на тех промежутках, где «кривая знаков» проходит выше координатной прямой (где ставится знак «+»), выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех промежутках, где кривая проходит ниже прямой (где знак «-»), выполняется неравенство $f(x) < 0$. В результате получаем, что решение исходного неравенства есть объединение промежутков: $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$. Это множество на рис. 68 заштриховано.

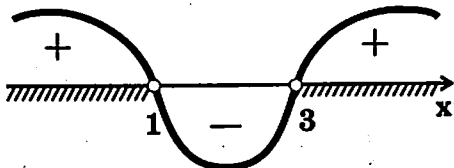


Рис. 68

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $(2-x)(x+1)(x-4) \leq 0$.

Решение. Наносим на числовую ось точки $x=2$; $x=-1$; $x=4$ (рис. 69). Поскольку решаем нестрогое неравенство, то точки $x=2$; $x=-1$; $x=4$ окрашиваем в темный цвет (ставим темные кружки). Взяв, например, в интервале $(-1; 2)$ точку $x=0$, определяем знак левой части исходного неравенства: $(2-0)(0+1)(0-4) = -8 < 0$. Отсюда при $x \in [-1; 2]$ имеем $(2-x)(x+1)(x-4) \leq 0$. Проведя «кривую знаков», определяем знак левой части исходного неравенства в каждом из промежутков. Множество, дающее решение исходного неравенства, есть объединение промежутков: $[-1; 2]$, $[4; +\infty)$. Это множество заштриховано на рис. 69.

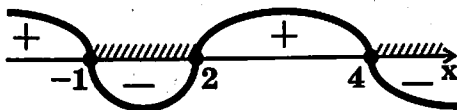


Рис. 69

Ответ: $x \in [-1; 2] \cup [4; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{3x}{(x+2)(x-4)} < 0$.

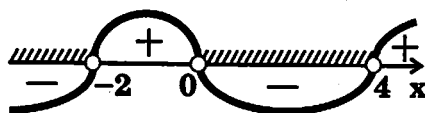


Рис. 70

Решение. Корнями уравнений $3x=0$, $x+2=0$, $x-4=0$ являются числа $x=0$, $x=-2$, $x=4$. Наносим эти числа на прямую (рис. 70) и определяем знак левой части неравенства, т. е. знак

функции $f(x) = \frac{3x}{(x+2)(x-4)}$ на одном из интервалов. В частности,

взяв $x=5$, получаем $f(5) = \frac{3 \cdot 5}{(5+2)(5-4)} = \frac{15}{7} > 0$. Отсюда при

$x > 4$ $f(x) > 0$. Проведя «кривую знаков», определяем знак $f(x)$ в каждом из интервалов. Множество, дающее решение исходного неравенства, заштриховано на рис. 70. Это множество — объединение промежутков $(-\infty; -2)$, $(0; 4)$. Точки $x=-2$; $x=0$; $x=4$ «выкалываются», т. е. представляются светлыми кружками.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 4)$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{(x+1)(x-2)}{(4-x)(x+2)} \geq 0$.

Решение. Корнями уравнений $x+1=0$, $x-2=0$, $4-x=0$, $x+2=0$ являются числа $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=-2$. Наносим эти числа на числовую ось. Точки $x=-1$, $x=2$ отмечаем темными кружками, т. к. решается нестрогое неравенство и выражения $(x+1)$ и $(x-2)$ находятся в числителе. Точки $x=4$, $x=-2$ отмечаем светлыми кружками, т. к. хотя решается и нестрогое неравенство, но эти точки ($x=4$, $x=-2$) не входят в область определения функции

$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(4-x)(x+2)}$. Проведя «кривую знаков», определяем знак $f(x)$

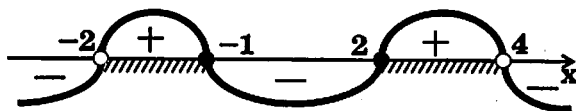


Рис. 71

в каждом из интервалов (рис. 71). Множество, дающее решение исходного неравенства, заштриховано на рис. 71.

Ответ:

$x \in (-2; -1] \cup [2; 4)$.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{1}{2x} > 3$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство следующим образом:

$$\frac{1}{2x} > 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-6x}{2x} > 0.$$

Применяя «кривую знаков» (рис. 72), получаем, что исходное неравенство выполняется при

$x \in (0; \frac{1}{6})$. Это множество заштриховано на рис. 72.

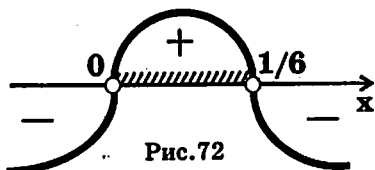


Рис. 72

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{6})$.

Пример 6. Решить неравенство $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-6x}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{(x+1)(x+2)} \leq 0. \end{aligned}$$

В процессе преобразований мы учли, что $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, а также тот факт, что при умножении на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный. Применяя «кривую знаков» (рис. 73), получим, что

неравенство $\frac{6x}{(x+1)(x+2)} \leq 0$, равносильное исходному, выполняется при $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0]$. Это множество заштриховано на рис. 73.

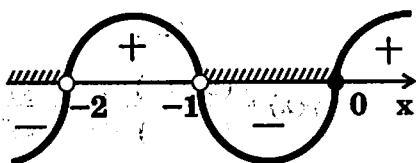


Рис. 73

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0]$.

§129. Обобщенный метод интервалов

Пусть требуется решить неравенство

$$(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_{n-1})^{k_{n-1}} (x - \alpha_n)^{k_n} > 0,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ — целые положительные числа;

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — действительные числа, среди которых нет равных и такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$. Неравенства подобного типа решают с применением обобщенного метода интервалов. В основе этого метода лежит следующее свойство

двучлена $(x-\alpha)^n$: точка $x=\alpha$ делит числовую ось на две части, причем если $n=2k$ (n — четное), то выражение $(x-\alpha)^n$ справа и слева от точки $x=\alpha$ сохраняет положительный знак; если $n=2k+1$ (n — нечетное число), то выражение $(x-\alpha)^n$ справа от точки $x=\alpha$ положительно, а слева от точки $x=\alpha$ отрицательно.

Для решения неравенства

$$(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n} > 0$$

обобщенным методом интервалов на числовую ось наносим числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; в промежутке справа от наибольшего из них ставим знак «плюс», а затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередное число α_i меняем знак, если k_i — нечетное число, и сохраняем знак, если k_i — четное число.

Замечание 1. Если встречаются выражения $(\alpha_i - x)^n$, то справа от наибольшего из α_i не обязательно будет знак «+». В этом случае лучше всего определить знак левой части неравенства в каком-либо из интервалов, а затем поставить знаки в каждом из интервалов с учетом изложенных выше соображений.

Замечание 2. Приведенные выше рассуждения справедливы и для неравенств вида $\varphi(x) < 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) \leq 0$, где

$$\varphi(x) = \frac{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\dots(x-\alpha_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\dots(x-b_p)^{m_p}}.$$

Пример 1. Решить неравенство $x^2(x-1)^3(x-2)^5 < 0$.

Решение. Отмечаем на числовой прямой точки $x=0$, $x=1$, $x=2$ (рис. 74). Проводим через эти точки «кривую знаков» с учетом того, что слева и справа от точки $x=0$ будет один и тот же знак «+», так

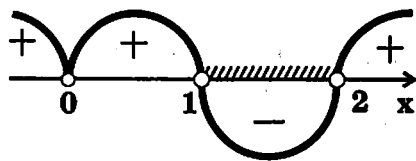


Рис. 74

как в выражении x^2 показатель степени (число 2) есть число четное. В окрестности точек $x=1$ и $x=2$ знаки в соседних промежутках чередуются, так как в выражениях $(x-1)^3$ и

$(x-2)^5$ показатели степеней (числа 3 и 5) нечетные. Множество, дающее решение исходного неравенства, заштриховано на рис. 74. Это интервал $(1; 2)$.

Ответ: $x \in (1; 2)$.

Пример 2. Решить неравенство $\frac{(x-6)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)} \geq 0$.

Решение. Наносим на числовую прямую точки $x=6$, $x=2$, $x=0$, $x=-1$, $x=-5$. Точки $x=6$, $x=2$, $x=0$ отмечаем темными кружками, а точки $x=-1$, $x=-5$ светлыми (рис. 75). Проведя «кривую знаков» с учетом того, что в окрестности точек $x=-1$ и $x=6$ левая часть неравенства сохраняет знак (т. к. в выражениях $(x+1)^4$, $(x-6)^2$ показатели степеней есть четные числа), получаем решение $x \in (-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; 6] \cup [6; +\infty) = (-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$. Это множество на рис. 75 заштриховано.

Ответ: $x \in (-5; -1) \cup (-1; 0] \cup [2; +\infty)$.

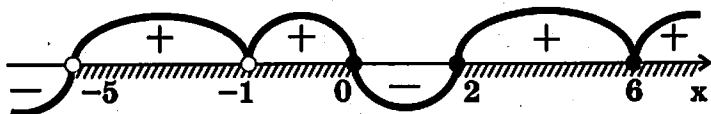


Рис. 75

Пример 3. Решить неравенство $\frac{x^6(2x-11)(x-1)}{(x+4)^7(3x-9)^8} \leq 0$.

Решение.

Наносим точки $x=-4$; 0 ; 1 ; 3 ; $\frac{11}{2}$ на числовую ось. С помощью «кривой знаков» получаем решение, заштрихованное на рис. 76. Заметим, что точка $x=0$ входит в множество решений, т. к. при $x=0$ получаем $0 \leq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup \{0\} \cup [1; 3) \cup \left(3; \frac{11}{2}\right]$.

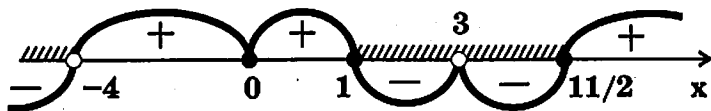


Рис. 76

Пример 4.

Решить неравенство $(2-x)^5(x+1)^3(x-1)^2(x^2+2x+7) < 0$.

Решение. Наносим точки $x=2$; -1 ; 1 на числовую ось (поскольку дискриминант квадратного трехчлена x^2+2x+7

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -24 < 0$, то $x^2 + 2x + 7 > 0$ для всех x и, значит, парабола $x^2 + 2x + 7$ не пересекает ось Ox). С помощью «кривой знаков» получаем решение, заштрихованное на рис. 77.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

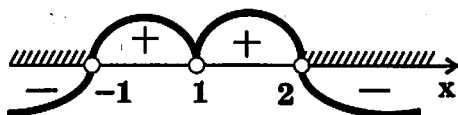


Рис. 77

§130. Метод замены переменной при решении рациональных неравенств

Многие неравенства удобно решать, применяя метод замены переменной (метод подстановки).

Пример 1. Решить неравенство $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 < 0$.

Решение.

Сделав замену переменной $t = x^2 - x$, получаем $t^2 - 8t + 12 < 0$.

Корни уравнения $t^2 - 8t + 12 = 0$ есть $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

Отсюда $t^2 - 8t + 12 = (t - 2)(t - 6) < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 6$.

Поскольку $t = x^2 - x$, то получаем

$$2 < x^2 - x < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > 2, & (a) \\ x^2 - x < 6. & (б) \end{cases}$$

Решаем неравенство (а):

$$x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x > 2. \end{cases}$$

Решаем неравенство (б):

$$x^2 - x < 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3.$$

Отсюда

$$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > 2, \\ x^2 - x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x > 2, \\ -2 < x < 3. \end{cases}$$

Изобразим полученные множества с помощью двух координатных прямых (рис. 78). Из рис. 78 видим, что решением исходного неравенства является объединение множеств $(-2; -1), (2; 3)$.

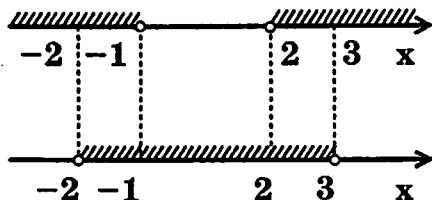


Рис. 78

Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (2; 3)$.

Пример 2.

Решить неравенство $(x^2 + 6x + 14)^2 - 9(x^2 + 6x + 15) + 9 < 0$.

Решение.

Обозначив $t = x^2 + 6x + 14$, получаем из исходного неравенства $t^2 - 9(t+1) + 9 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 9$. Отсюда исходное неравенство равносильно следующему неравенству:

$$0 < x^2 + 6x + 14 < 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 14 > 0, \\ x^2 + 6x + 14 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x^2 + 6x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ -5 < x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < -1.$$

($x^2 + 6x + 14 > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$, поскольку дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 6x + 14$ $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = -20 < 0$).

Ответ: $x \in (-5; -1)$.

§131. Неравенства с модулем

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используется определение модуля функции:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Можно также пользоваться свойствами модуля, в частности такими как

$$|f(x)| \geq 0; |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|; |f(x)|^2 = (f(x))^2; \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|};$$

$$|-f(x)| = |f(x)|; |f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 > (g(x))^2$$

(аналогичные свойства для неравенств имеют место, если в последней равносильности будет знак $<$, $\leq$, $\geq$).

Иногда используется геометрическая интерпретация модуля, согласно которой есть расстояние на числовой прямой между точками x и a .

Неравенство вида $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$, если $a > 0$, если $a \leq 0$, то неравенство $|f(x)| < a$ решений не имеет.

Неравенство вида $|f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a, \end{cases}$ если $a > 0$;

если $a < 0$, то решением неравенства $|f(x)| > a$ будет множество допустимых значений функции $f(x)$; если $a = 0$, то решением неравенства $|f(x)| > a$ будет множество тех x , для которых $f(x) \neq 0$.

При решении неравенств, содержащих более одного модуля, применяют метод интервалов для модулей.

Пример 1. Решить неравенство $|x+2| \leq 5$.

Решение.

1 способ.

Поскольку $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$ при $a \geq 0$, то получаем $|x+2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x+2 \leq 5 \Leftrightarrow -5-2 \leq x \leq 5-2 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-7; 3]$.

2 способ.

Возведя обе части исходного неравенства в квадрат, получим равносильное ему неравенство $(x+2)^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 5^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2-5)(x+2+5) \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+7) \leq 0 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$ (последнюю равносильность можно получить, используя, например, метод интервалов).

3 способ.

Используем определение модуля $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x+2 \geq 0, \\ -(x+2), & x+2 < 0. \end{cases}$

Отсюда исходное неравенство можно заменить совокупностью

двух систем неравенств: $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x+2 \leq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2 < 0, \\ -(x+2) \leq 5. \end{cases}$

Из первой системы получаем $-2 \leq x \leq 3$, из второй системы $-7 \leq x < -2$. Отсюда искомое решение будет объединением решений 1 и 2 систем, т. е. $x \in [-2; 3] \cup [-7; -2) = [-7; 3]$. Ответ: $x \in [-7; 3]$.

Пример 2. Решить неравенство $|3x-2| > -2$.

Решение. Поскольку $|3x-2| \geq 0$, то исходное неравенство выполняется для любого действительного x , т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $|3x-2| > 7$.

Решение.

1 способ. Поскольку при $a > 0$ $|f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a, \end{cases}$ то имеем:

$$|3x-2| > 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 > 7, \\ 3x-2 < -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (3; +\infty).$$

2 способ. Исходное неравенство можно заменить двумя системами (точнее совокупностью двух систем неравенств):

$$\text{а) } \begin{cases} 3x-2 \geq 0, \\ 3x-2 > 7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x-2 < 0 \\ -(3x-2) > 7 \end{cases}$$

Решая систему а), найдем $x > 3$. Решая систему б), найдем $x < -\frac{5}{3}$. Решение исходного неравенства есть объединение решений систем а) и б), т. е. $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (3; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $|3x+61| < -1$.

Решение. Поскольку $|3x+61| \geq 0$, то исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 5. Решить неравенство $|2x-4| < x-1$.

Решение.

1 способ. Исходное неравенство можно заменить совокупностью двух систем: $\begin{cases} 2x-4 \geq 0, \\ 2x-4 < x-1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-4 < 0, \\ -(2x-4) < x-1. \end{cases}$

Из первой системы получаем $2 \leq x < 3$, из второй системы — $\frac{5}{3} < x < 2$. Искомое решение будет объединением решений первой и второй систем, т. е. $x \in [2; 3) \cup (\frac{5}{3}; 2) \Leftrightarrow x \in (\frac{5}{3}; 3)$.

2 способ.

$$|2x-4| < x-1 \Leftrightarrow -(x-1) < 2x-4 < x-1 \Leftrightarrow -x+1 < 2x-4 < x-1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-4 > -x+1, \\ 2x-4 < x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 5, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{3}, \\ x < 3. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x \in (\frac{5}{3}; 3).$$

Пример 6. Решить неравенство $x^2 > |5x + 6|$.

Р е ш е н и е.

$$\text{Поскольку } |5x + 6| = \begin{cases} 5x + 6, & x \geq -\frac{6}{5}, \\ -5x - 6, & x < -\frac{6}{5}, \end{cases} \quad \text{то исходное неравенст-}$$

во можно заменить совокупностью двух систем неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5}, \\ x^2 > 5x + 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x < -\frac{6}{5}, \\ x^2 > -5x - 6. \end{cases} \quad \text{Решим эти две системы нера-$$

венств а) и б):

$$\text{а) } \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5}, \\ x^2 - 5x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5}, \\ x < -1; \quad x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \leq x < -1; \quad x > 6.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x < -\frac{6}{5}, \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{6}{5}, \\ x < -3; \quad x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3; \quad -2 < x < -\frac{6}{5}.$$

Объединяя решения, полученные для систем а) и б), получаем окончательный ответ.

Ответ:

$$x \in \left[-\frac{6}{5}; -1\right) \cup (6; +\infty) \cup (-\infty; -3) \cup \left(-2; -\frac{6}{5}\right) = (-\infty; -3) \cup (-2; -1) \cup (6; +\infty).$$

Пример 7. Решить неравенство $|x + 2| + |x - 2| < 6$.

Р е ш е н и е. При решении исходного неравенства используем метод интервалов для модулей. Отметим на числовой прямой точки, в которых выражения, находящиеся под знаками модулей, обращаются в нуль. Это точки $x = -2$, $x = 2$. Вся числовая прямая разбивается этими точками на три интервала (три промежутка): $(-\infty; -2)$ (1 интервал), $[-2; 2]$ (2 интервал), $(2; \infty)$ (3 интервал). Приведем четыре формы записи решения исходного неравенства.

1 форма записи решения.

На 1 интервале $(-\infty; -2)$ по определению модуля имеем $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$; $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$. Значит, на 1 интервале исходное неравенство равносильно такому:

$$-x - 2 - x + 2 < 6 \Leftrightarrow -2x < 6 \Leftrightarrow x > -3.$$

Так как рассматривается интервал $x \in (-\infty; -2)$, то в множество решений входит пересечение множеств: $(-\infty; -2) \cap (-3; \infty) = (-3; -2)$ — решение исходного неравенства на 1 интервале.

На отрезке $[-2; 2]$ (2 интервал)

$|x+2|=x+2$; $|x-2|=-(x-2)=-x+2$ и мы имеем

$x+2-x+2 < 6 \Leftrightarrow 4 < 6$, т. е. верное числовое неравенство. Поэтому все значения переменной, принадлежащие этому отрезку, входят в множество решений, т. е. $x \in [-2; 2]$ — решение на 2 интервале.

На 3 интервале $x \in (2; \infty)$ $|x+2|=x+2$; $|x-2|=x-2$, и мы получаем $x+2+x-2 < 6 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$. Поскольку рассматривается интервал $x \in (2; \infty)$, то в множество решений входит пересечение множеств $(2; \infty) \cap (-\infty; 3) = (2; 3)$ — решение на 3 интервале.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод: исходное неравенство выполняется при $x \in (-3; -2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3)$. Таким образом, $x \in (-3; 3)$ — решение исходного неравенства.

Ответ: $x \in (-3; 3)$.

2 форма записи решения.

Рассматривая исходное неравенство на каждом из трех промежутков, получаем совокупность трех систем. Таким образом,

$$|x+2|+|x-2| < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ -(x+2)-(x-2) < 6; \\ -2 \leq x \leq 2, \\ x+2-(x-2) < 6; \\ x > 2, \\ x+2+x-2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > -3; \\ -2 \leq x \leq 2, \\ 4 < 6; \\ x > 2, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -2 \leq x \leq 2, \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3).$$

3 форма записи решения.

На каждом из трех интервалов рассмотрим решение исходного неравенства.

1 интервал ($x < -2$): $|x+2|=-(x+2)$; $|x-2|=-(x-2)$. Имеем

$$\text{систему неравенств } \begin{cases} x < -2, \\ -(x+2)-(x-2) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < -2.$$

2 интервал ($-2 \leq x \leq 2$): $|x+2|=x+2$; $|x-2|=-(x-2)$. Имеем

$$\text{систему неравенств } \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x+2-(x-2) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 4 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

3 интервал ($x > 2$): $|x+2| = x+2$; $|x-2| = x-2$. Имеем систему

$$\text{неравенств } \begin{cases} x > 2, \\ x+2+x-2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Решение исходного неравенства получается путем объединения решений, полученных на 1, 2 и 3 интервалах:

$$x \in (-3; -2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3).$$

4 форма записи решения.

Рассмотрим три случая:

$$1) \begin{cases} x < -2, \\ -(x+2) - (x-2) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; -2);$$

$$2) \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x+2 - (x-2) < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ 4 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 2];$$

$$3) \begin{cases} x > 2, \\ x+2+x-2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2; 3).$$

Объединяя найденные множества значений x , получаем

$$x \in (-3; -2) \cup [-2; 2] \cup (2; 3) = (-3; 3).$$

Ответ: $-3 < x < 3$.

Пример 8. Решить неравенство $|x-2|^3 + |x-2| > 2$.

Решение.

Сделав замену переменной $|x-2| = t$, $t \geq 0$, получаем

$$\begin{cases} t^3 + t > 2, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + t - 2 > 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t^2 + t + 2) > 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t-1 > 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1.$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем, что исходное неравенство эквивалентно следующему:

$$|x-2| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 1, \\ x-2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (3; \infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

§132. Иррациональные неравенства

При решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, уединение радикала, введение новых переменных и т. д. При

решении можно придерживаться, например, такого плана: а) найти область определения исходного неравенства; б) решить исходное неравенство, руководствуясь утверждениями о равносильности неравенств; в) из полученных решений отобрать те, которые принадлежат области определения исходного неравенства. *Утверждения о равносильности неравенств имеют следующий вид.* Если обе части неравенства на множестве D принимают только неотрицательные значения, то возведя обе части неравенства в любую четную степень и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное исходному на множестве D . Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же нечетную степень с сохранением знака неравенства всегда является равносильным (эквивалентным) преобразованием неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x} > 2$.

Решение.

Область определения левой части неравенства, т. е. $D(\sqrt{x})$: $x \geq 0$. Отсюда получаем, что исходное неравенство эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ (\sqrt{x})^2 > 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4. \quad \text{Ответ: } x \in (4; \infty).$$

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{2x+1} \leq 3$.

Решение.

$$\sqrt{2x+1} \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ (\sqrt{2x+1})^2 \leq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ 2x+1 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2}, \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 4.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{1}{2}; 4\right].$$

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x-2} \geq -1$.

Решение.

Так как $\sqrt{x-2} \geq 0$, то исходное неравенство выполняется для всех x из области определения функции $f(x) = \sqrt{x-2}$.

$$D(f): x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$\text{Ответ: } x \in [2; \infty).$$

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x+6} < -2$.

Решение.

Поскольку $\sqrt{x+6} \geq 0$, то исходное неравенство не выполняется ни при каких значениях x .

$$\text{Ответ: } \emptyset.$$

Рассмотрим более сложные неравенства.

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно систе-

$$\text{ме неравенств, т. е. } \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств, т. е.

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \\ \text{или} \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Замечание. Если рассмотреть неравенства $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$, то эти неравенства эквивалентны приведенной выше системе неравенств и совокупности двух систем неравенств, в которых знаки строгих неравенств везде заменены на знаки нестрогих, кроме неравенства $g(x) < 0$, которое остается неизменным.

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x+31} < x+1$.

Р е ш е н и е.

$$\sqrt{x+31} < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+31 \geq 0, \\ x+1 > 0, \\ (\sqrt{x+31})^2 < (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -31, \\ x > -1, \\ x+31 < x^2+2x+1. \end{cases} \begin{matrix} \text{(а)} \\ \text{(б)} \\ \text{(в)} \end{matrix}$$

Неравенство (в) равносильно следующему:

$$x^2+x-30 > 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6, \\ x > 5. \end{cases}$$

Множества, полученные при решении неравенств (а), (б), (в), необходимо пересечь. Для этого, во избежание ошибок, лучше всего начертить три оси и нанести на каждую из осей полученные множества решений.

Полученные множества пересекаются при $x > 5$ (рис. 79).

Ответ: $x \in (5; +\infty)$.

Пример 6. Решить нера-

венство $\sqrt{5x-4} < x$.

Решение.

$$\sqrt{5x-4} < x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-4 \geq 0, \\ x > 0, \\ (\sqrt{5x-4})^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{5}, \\ x > 0, \\ 5x-4 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{5}, & (a) \\ x > 0, & (б) \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > 4. \end{cases} & (в) \end{cases}$$

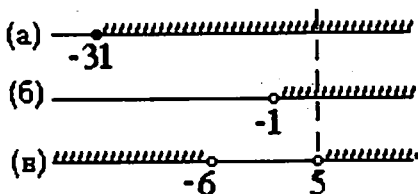


Рис. 79

Пересекая множества, полученные при решении неравенств (а), (б), (в) (рис. 80), получаем решение исходного нера-

венства: $x \in \left[\frac{4}{5}; 1\right) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left[\frac{4}{5}; 1\right) \cup (4; +\infty)$.

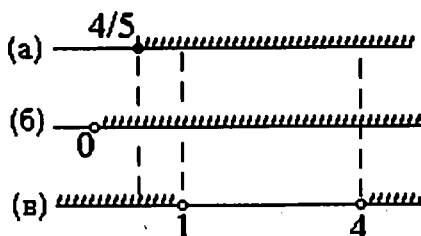


Рис. 80

Пример 7. Решить неравенство $\sqrt{x+2} > x + \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\sqrt{x+2} > x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, & (a) \\ x + \frac{1}{2} \geq 0, & (б) \\ (\sqrt{x+2})^2 > \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, & (в) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, & (a) \\ x \geq -\frac{1}{2}, & (б) \\ x^2 < \frac{7}{4}, & (в) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, & (a) \\ x + \frac{1}{2} < 0 & (г) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, & (a) \\ x < \frac{1}{2}. & (г) \end{cases}$$

Решая неравенство (в), получаем

$$x^2 < \frac{7}{4} \Leftrightarrow x^2 < \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 < 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{7}}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{7}}{2} < x < \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Пересекая множества, полученные при решении неравенств

(а), (б), (в) (рис. 81), получаем $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{\sqrt{7}}{2}$.

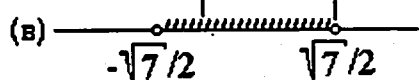
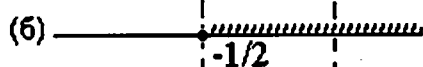
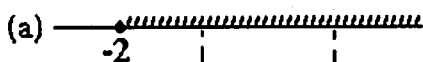
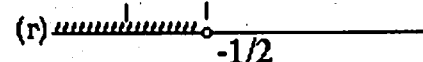
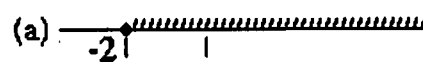


Рис. 81

Пересекая множества, полученные при решении неравенств (а) и (г) (рис. 82), полу-

чаем $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$.

Решение исходного неравенства есть объединение множеств:



$$\left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left[-2; -\frac{1}{2}\right) = \left[-2; \frac{\sqrt{7}}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left[-2; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

Рис. 82

Пример 8. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

Решение.

Рассмотрим две возможные формы записи решения.

1 форма записи решения.

$$\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, \\ x - 3 \geq 0, \\ \left(\sqrt{x^2 - 4x}\right)^2 > (x - 3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 4) \geq 0, \\ x \geq 3, \\ x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4, \end{cases} \\ x \geq 3, \\ x > \frac{9}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4, \end{cases} \\ x < 3 \end{cases}$$

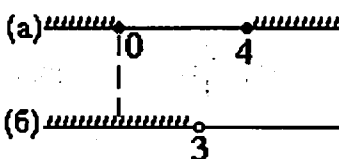
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{2}, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$.

2 форма записи решения.

ОДЗ исходного неравенства есть множество тех x , для которых $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [4; \infty)$. Если $x-3 < 0$, то левая часть неравенства неотрицательна в силу ОДЗ $x^2 - 4x \geq 0$, а правая — отрицательна, т. е. система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, & (a) \\ x - 3 < 0 & (б) \end{cases}$$



дает решение исходного неравенства.

Из рис. 83 видно, что решение последней системы неравенств есть множество $x \in (-\infty; 0]$. Пусть теперь $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$

Рис. 83

$\Leftrightarrow x \geq 3$. Тогда с учетом ОДЗ можем обе части исходного неравенства возвести в квадрат. Таким образом, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0, & (a) \\ x - 3 \geq 0, & (в) \\ \left(\sqrt{x^2 - 4x}\right)^2 > (x-3)^2. & (г) \end{cases}$$

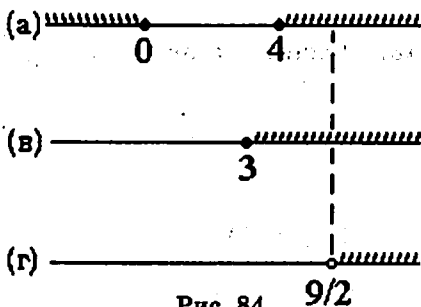


Рис. 84

Решение неравенства (а) уже есть; решение неравенства (в) — это $x \geq 3$. Решая неравенство (г), получаем

$$x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 2x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}.$$

Наносим полученные множества на числовые оси (рис. 84).

Пересечением найденных множеств есть множество $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$.

Отсюда, объединяя множества $x \in (-\infty; 0]$ и $x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$, приходим

к окончательному ответу: $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$.

Тесты к главе 7.
Алгебраические неравенства.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Решите неравенство $\frac{2x+3}{2-x} \leq 5$.

- 1) $\left[\frac{2}{3}; 2\right)$; 2) $[1; 2)$; 3) $(-\infty; -1,5] \cup (2; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1] \cup (2; +\infty)$.

A2. Решите неравенство $\frac{x-3}{x+1} \geq 5$.

- 1) $(-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$;
3) $[-2; -1)$; 4) $(-1; 3]$.

A3. Решите неравенство $\frac{2x-1}{6} < \frac{x+3}{12} < \frac{3x+7}{18}$.

- 1) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$;
3) $(-1; 1)$; 4) $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

A4. Сколько натуральных решений имеет неравенство $-x^2 - x + 12 \geq 0$?

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

A5. Решите неравенство $-9 \leq x^2 \leq 25$.

- 1) $[-3; 3]$; 2) $[-3; 5]$; 3) $[-5; 3]$; 4) $[-; 5]$.

A6. Решите неравенство $\frac{5x^2(x-2)^8(x+4)^5}{(x+2)^3} < 0$.

- 1) $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-2; 0) \cup (2; 4)$;

3) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (2; 4)$;

4) $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty)$.

A7. Сколько целых решений имеет неравенство $x^6 - 9x^3 + 8 \leq 0$?
1) ни одного; 2) одно; 3) два; 4) три.

A8. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 1,2x - 1 < 9, \\ -1 \leq 1 - x \leq 4. \end{cases}$$

1) $[-3; 1]$; 2) $(1; 2]$; 3) $[2; 5]$; 4) $[-3; 5]$.

A9. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{9}{x^2} \geq 1, \\ \frac{1}{x+2} > 0. \end{cases}$$

1) $[-2; 2) \cup (0; 3]$; 2) $[-3; 0) \cup (0; 3]$;

3) $(-2; 0) \cup (0; 3]$; 4) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

A10. Решите совокупность неравенств
$$\begin{cases} 1 < 3x - 2 \leq 4, \\ -3 < 4x + 4 < 1. \end{cases}$$

1) $(-2; 2]$; 2) $(-1; 1]$;

3) $(-2; 1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$; 4) $(-2; -1) \cup (1; 2]$.

A11. Решите неравенство $(x - 5)\sqrt{x - 2} \geq 0$.

1) $[5; +\infty)$; 2) $\{2\} \cup [5; +\infty)$;

3) $[2; +\infty)$; 4) $[2; 5]$.

A12. Решите неравенство $\sqrt{3 - x} \leq x + 3$.

1) $[-6; -1]$; 2) $[-6; 3]$;

3) $[-1; 3]$; 4) $(-\infty; -1] \cup \{3\}$.

A13. При каких значениях a неравенство $ax > 0$ не имеет решений?

1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a \neq 0$; 4) $a = 0$.

- A14. При каких значениях параметра a неравенство $|x + 9| < ax$ не имеет решений?
1) $a \leq -1$; 2) $-1 < a < 0$; 3) $0 \leq a \leq 1$; 4) $a < 1$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

- B1. Найдите наименьшее целое решение неравенства
 $2 \leq x^2 + x < 6$.
- B2. Найдите целое решение неравенства $\frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{3x^2} < 0$.
- B3. Решите неравенство $(x - 2)^4 - 13(x - 2)^2 + 36 \leq 0$ и найдите сумму целых решений.
- B4. Найдите наибольшее целое решение неравенства
 $|x + 2| > x + 3$.
- B5. Решите неравенство $\sqrt{11 - x} \leq x - 5$ и найдите сумму наибольшего и наименьшего натуральных решений.
- B6. Сколько целых решений имеет неравенство $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$?
- B7. Найдите сумму целых решений системы $\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ \frac{x - 1}{2 - x} + \frac{1}{2} \geq 0. \end{cases}$
- B8. При каком значении параметра a неравенство $(a - 3)(x - 2) > 8$ не имеет решений?
- B9. Найдите наименьшее целое решение неравенства $a\sqrt{x + 9} < 2$ при условии, что $a \leq 0$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

C1. Решите неравенство $(x^2 - 5x + 1)^2 - 9(x^2 - 5x - 2) - 17 > 0$.

C2. При каких неотрицательных значениях a неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$ не имеет решений?

C3. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2 - 3x} - 3}{x} > 1$.

C4. При каком значении параметра a система неравенств

$$\begin{cases} y \geq (x - a)^2, \\ x \geq (y - a)^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

Глава 8

ПРОГРЕССИИ

§133. Понятие числовой последовательности

Числовой последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел ($f: N \rightarrow R$, f — функция натурального аргумента). Обозначается числовая последовательность обычно через (x_n) , где $n \in N$, $x_n = f(n)$ — n -й член последовательности. Формула $x_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности (x_n) , $n \in N$.

Примеры числовых последовательностей

Пример 1. Пусть числовая последовательность задана общим членом $x_n = \frac{1}{2n}$. Это означает, что каждому натуральному

числу n соответствует определенный член последовательности (x_n) , т. е. $n \rightarrow \frac{1}{2n}$. Придавая n значения 1, 2, 3, ..., получим последовательность (x_n) : $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots \frac{1}{2n}; \dots$

Пример 2. Для числовой последовательности $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$

формула общего члена имеет вид $x_n = \frac{1}{n+1}$.

Пример 3. Пусть последовательность задана формулой $x_n = (-1)^n$. Все члены последовательности с нечетными номерами равны -1 , а с четными номерами равны 1 : $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 1; x_5 = -1; \dots$. Получаем последовательность $-1; 1; -1; 1; \dots$.

Пример 4. Формулой $x_n = 2$ задается последовательность, все члены которой равны 2 : $2; 2; 2; 2; 2; \dots$.

Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего,

т. е. если для всех $n \in N$ $x_{n+1} > x_n$. Пример возрастающей последовательности: 1; 3; 5; 7; 9; ...; $(2n-1)$;

Последовательность (x_n) называется *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. если для всех $n \in N$ $x_{n+1} < x_n$. Пример убывающей последовательности:

сти: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$.

§134. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным для данной последовательности числом. Обозначается арифметическая прогрессия обычно так: (a_n) . a_n называется n -м членом арифметической прогрессии.

Из определения арифметической прогрессии следует, что $a_{n+1} = a_n + d$. Число d называется *разностью прогрессии*. Таким образом, $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_{n+1} - a_n = \dots$.

Для того чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n) , достаточно знать ее первый член a_1 и разность d . Если разность арифметической прогрессии — положительное число, то такая прогрессия является *возрастающей*; если разность есть отрицательное число, то *убывающей*. Если разность d арифметической прогрессии равна нулю, то все члены прогрессии равны между собой.

Характеристическое свойство (признак) арифметической прогрессии формулируется так: каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим

соседних с ним членов: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N, n \geq 2$.

Из определения разности арифметической прогрессии следует, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$, т. е. сумма членов, равноудаленных от концов прогрессии, есть величина постоянная.

Формула n -го члена арифметической прогрессии имеет вид $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Формулы для суммы n первых членов арифметической прогрессии имеют вид

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Пример 1. Выписать первые пять членов арифметической прогрессии (a_n) , если: $a_1=12$, $d=3$.

Решение.

$$a_2 = a_1 + d = 12 + 3 = 15; a_3 = a_2 + d = 15 + 3 = 18;$$

$$a_4 = a_3 + d = 18 + 3 = 21; a_5 = a_4 + d = 21 + 3 = 24.$$

Ответ: 12; 15; 18; 21; 24.

Пример 2. Найти одиннадцатый член арифметической прогрессии (a_n) , если $a_1 = -3$, $d = 0,7$.

Решение.

$$a_{11} = a_1 + 10d = -3 + 10 \cdot 0,7 = -3 + 7 = 4.$$

Ответ: {4}.

Пример 3. Найти семнадцатый член арифметической прогрессии (a_n) , если арифметическая прогрессия имеет вид 3; 7; 11; 15; ...

Решение.

$$\text{Находим разность прогрессии: } d = 7 - 3 = 4; a_{17} = a_1 + 16d = \\ = 3 + 16 \cdot 4 = 3 + 64 = 67.$$

Ответ: {67}.

Пример 4. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найти: а) a_1 , если $a_{36} = 26$, $d = 0,7$; б) d , если $a_1 = -10$, $a_{15} = 1,2$.

Решение.

$$\text{а) } a_{36} = a_1 + 35d \Leftrightarrow a_1 = a_{36} - 35d = 26 - 35 \cdot 0,7 = 26 - 24,5 = 1,5;$$

$$\text{б) } a_{15} = a_1 + 14d \Leftrightarrow d = \frac{a_{15} - a_1}{14} = \frac{1,2 - (-10)}{14} = \frac{11,2}{14} = 0,8.$$

Ответ: а) {1,5}; б) {0,8}.

Пример 5. Разность арифметической прогрессии равна 3, а сумма первых ее шести членов равна 57. Найти a_1 , a_6 .

Решение.

$$d=3; S_6=57. \text{ Имеем } S_6 = \frac{2a_1 + (6-1)d}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5d)3 \Leftrightarrow 57 =$$

$$(2a_1 + 5d)3 \Leftrightarrow 2a_1 + 5d = \frac{57}{3} = 19 \Leftrightarrow a_1 = \frac{19 - 5d}{2} = \frac{19 - 5 \cdot 3}{2} = \frac{19 - 15}{2} = 2;$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 2 + 5 \cdot 3 = 17.$$

Ответ: $a_1 = 2$; $a_6 = 17$.

Пример 6. Найти первый член арифметической прогрессии и количество членов n , если $d = -2$, $a_n = 17$, $S_n = 161$.

Решение.

Подставив данные значения из условия примера в формулы

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ получаем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} 17 = a_1 + (n-1)(-2), \\ 161 = \frac{a_1 + 17}{2} \cdot n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 15 + 2n, \\ 161 = \frac{15 + 2n + 17}{2} \cdot n. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получаем

$$\Leftrightarrow n^2 + 16n - 161 = 0 \Leftrightarrow n_1 = 7, \quad n_2 = -23 \text{ (это значение } n \text{ отпадает, т. к. } n \in \mathbb{N}). \text{ Итак, } n=7, \quad a_1 = 15 + 2 \cdot 7 = 29. \quad \text{Ответ: } a_1 = 29; n = 7.$$

Пример 7. Найти арифметическую прогрессию (a_n) , если

$$\begin{cases} 2a_1 + a_7 = 36, \\ a_2 \cdot a_3 = 60. \end{cases}$$

Решение. $a_7 = a_1 + 6d$, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$. Подставив в исходную систему, получаем:

$$\begin{cases} 2a_1 + a_1 + 6d = 36, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 6d = 36, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 60. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $3(a_1 + 2d) = 36 \Leftrightarrow a_1 + 2d = 12$. Подставив это значение во второе уравнение системы, получаем

$$(a_1 + d)12 = 60 \Leftrightarrow a_1 + d = \frac{60}{12} = 5. \text{ Отсюда имеем равносильную исходной систему}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 12, \\ a_1 + d = 5 \end{cases} \Rightarrow 2d - d = 12 - 5 \Leftrightarrow d = 7; \quad a_1 = 5 - d = 5 - 7 = -2.$$

Выпишем несколько первых членов: $-2; 5; 12; 19; \dots$

Ответ: $a_1 = -2; d = 7$.

Пример 8. Найти арифметическую прогрессию, если сумма ее n первых членов $S_n = 2n^2 - 3n$.

Решение.

$$S_1 = a_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1; \quad S_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2;$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2 \Leftrightarrow a_2 = 2 - a_1 = 2 - (-1) = 3.$$

$$\text{Отсюда } d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4. \quad \text{Ответ: } a_1 = -1; d = 4.$$

Пример 9. Найти десятый член арифметической прогрессии, если сумма ее n первых членов $S_n = 3n^2 - 2n$.

Решение.

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + a_{10}; \quad S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 + a_9. \text{ Ясно, что } a_{10} = S_{10} - S_9 = 3 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 - (3 \cdot 9^2 - 2 \cdot 9) = 3(10^2 - 9^2) - 2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 = 3(100 - 81) - 20 + 18 = 57 - 2 = 55. \quad \text{Ответ: } \{55\}.$$

Пример 10. В арифметической прогрессии (a_n) $S_{19} = 133$.

Найти a_{10} .

Решение.

$$S_{19} = \frac{2a_1 + (19-1)d}{2} \cdot 19 = \frac{2a_1 + 18d}{2} \cdot 19 = (a_1 + 9d)19 = a_{10} \cdot 19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{10} = \frac{S_{19}}{19} = \frac{133}{19} = 7.$$

Ответ: $\{7\}$.

Пример 11. Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

Решение.

Имеем $a_1 = 13; a_2 = 17; a_3 = 21; \dots; a_n = 97$. Найдем число n членов этой прогрессии из формулы $a_n = a_1 + (n-1)d$. Подставив $a_n = 97, a_1 = 13, d = 4$, получаем $97 = 13 + (n-1)4 \Leftrightarrow 4(n-1) = 97 - 13 =$

$$= 84 \Leftrightarrow n-1 = \frac{84}{4} = 21 \Leftrightarrow n = 1 + 21 = 22. \text{ Отсюда } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n =$$

$$= S_{22} = \frac{13 + 97}{2} \cdot 22 = 110 \cdot 2 = 220.$$

Ответ: $\{220\}$.

Пример 12. Решить уравнение $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155$.

Решение.

Имеем $a_1 = x+1, d = (x+4) - (x+1) = 3, a_n = x+28$. С другой стороны, $a_n = a_1 + (n-1)d \Leftrightarrow x+28 = (x+1) + (n-1)3 \Leftrightarrow x+28 - x - 1 = 3(n-1) \Leftrightarrow 27 = 3(n-1) \Leftrightarrow n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 10$. Тогда по условию

$$S_{10} = 155. \text{ Отсюда } 155 = \frac{(x+1) + (x+28)}{2} \cdot 10 = (2x+29)5 \Leftrightarrow 2x+29 =$$

$$= \frac{155}{5} = 31 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 13. В арифметической прогрессии (a_n) $2S_6 = S_8$. Найти $S_4 / (S_8 - S_4)$.

Решение.

$$S_6 = \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5d)3; S_8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = (2a_1 + 7d)4;$$

$$2S_6 = S_8 \Leftrightarrow 2(2a_1 + 5d)3 = (2a_1 + 7d)4 \Leftrightarrow 3(2a_1 + 5d) = (2a_1 + 7d)2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6a_1 + 15d = 4a_1 + 14d \Leftrightarrow 6a_1 - 4a_1 = -15d + 14d \Leftrightarrow 2a_1 = -d; S_4 =$$

$$= \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = (2a_1 + 3d)2 = (-d + 3d)2 = 4d; S_8 = (2a_1 + 7d)4 = (-d + 7d)4 =$$

$$= 24d; \frac{S_4}{S_8 - S_4} = \frac{4d}{24d - 4d} = \frac{4d}{20d} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

Ответ: $\{0,2\}$.

§135. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность (b_n) , каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же постоянное для данной последовательности число, отличное от нуля. Первый член геометрической прогрессии предполагается отличным от нуля. b_n называется n -ым членом геометрической прогрессии.

Примеры геометрической прогрессии: а) 1;2;4;8;16;32;...;

б) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}; \frac{1}{256}; \dots$; в) $12; 4; \frac{4}{3}; \frac{4}{9}; \frac{4}{27}; \dots$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что

$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Число q называется *знаменателем геометрической про-*

грессии. Таким образом, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \dots$.

Для того чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n) , достаточно знать ее первый член и знаменатель.

Если $q > 0$ и $q \neq 1$, то геометрическая прогрессия является монотонной последовательностью. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае геометрическая прогрессия является постоянной последовательностью, которая рассматривается редко.

Характеристические свойства геометрической прогрессии формулируются следующим образом:

а) в геометрической прогрессии, все члены которой положительные числа, любой ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов, т. е. при $n \geq 2$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \Rightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1};$$

б) произведение членов, равноотстоящих от концов геометрической прогрессии, есть величина постоянная, т. е.

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \dots$$

Формула n -го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формулы для суммы n первых членов геометрической про-

грессии имеют вид $S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Пример 1. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 16$; $q = \frac{1}{2}$.

Найти b_7 .

Решение.

$$b_7 = b_1 q^6 = 16 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{2^4}{2^6} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}. \quad \text{Ответ: } \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

Пример 2. Дана геометрическая прогрессия (b_n) : 2; -6; 18; ...

Найти b_5 .

Решение.

Находим вначале знаменатель прогрессии: $q = \frac{-6}{2} = -3$;

$$b_5 = b_1 q^4 = 2(-3)^4 = 2 \cdot 81 = 162. \quad \text{Ответ: } \{162\}.$$

Пример 3. Найти первый член геометрической прогрессии (b_n) , если $b_6 = 3$, $q = 3$.

Решение.

$$b_6 = b_1 q^5 \Leftrightarrow b_1 = \frac{b_6}{q^5} = \frac{3}{3^5} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}. \quad \text{Ответ: } \left\{\frac{1}{81}\right\}.$$

Пример 4. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = -\frac{2}{9}$, $b_3 = -2$.

Найти b_7 .

Решение.

$b_7 = b_1 q^6$. Найдем знаменатель прогрессии q . Имеем

$$\begin{aligned} b_3 = b_1 q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{-2}{-\frac{2}{9}} = 9; \quad b_1 = b_1 q^6 = b_1 (q^2)^3 = \left(-\frac{2}{9}\right) 9^3 = \\ = -\frac{2 \cdot 9^3}{9} = -2 \cdot 9^2 = -2 \cdot 81 = -162. \quad \text{Ответ: } \{-162\}. \end{aligned}$$

Пример 5. В геометрической прогрессии (b_n) $b_2 = 6$, $b_4 = 24$.

Найти b_6 .

Решение.

Найдем вначале знаменатель прогрессии q . По условию

$$\begin{aligned} b_2 = 6 \Leftrightarrow b_1 q = 6; \quad b_4 = 24 \Leftrightarrow b_1 q^3 = 24; \quad \frac{b_2}{b_4} = \frac{b_1 q}{b_1 q^3} = \frac{6}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q^2 = 4; \quad b_6 = b_5 q = b_4 q \cdot q = b_4 \cdot q^2 = 24 \cdot 4 = 96. \quad \text{Ответ: } \{96\}. \end{aligned}$$

Пример 6. В геометрической прогрессии (b_n) $b_1 = 6$, $q = 3$.
Найти b_{64} , S_{64} .

Решение.

$$b_{64} = b_1 q^{63} = 6 \cdot 3^{63}; \quad S_{64} = \frac{b_1(1-q^{64})}{1-q} = \frac{6(1-3^{64})}{1-3} = \frac{6}{-2}(1-3^{64}) =$$

$$= (-3)(1-3^{64}) = 3(3^{64} - 1). \quad \text{Ответ: } b_{64} = 6 \cdot 3^{63}; S_{64} = 3(3^{64} - 1).$$

Пример 7. Найти сумму $1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100}$, $x \neq 1$.

Решение.

Имеем $q = \frac{x}{1} = \frac{x^2}{x} = \dots = x$, $b_1 = 1$, $n = 101$. Отсюда искомая

$$\text{сумма есть } S_{101} = \frac{1(1-x^{101})}{1-x} = \frac{1-x^{101}}{1-x}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{1-x^{101}}{1-x} \right\}.$$

Пример 8. В геометрической прогрессии (b_n) $\begin{cases} b_1 + b_3 = 10, \\ b_2 + b_4 = 30. \end{cases}$

Найти сумму S_8 восьми первых членов прогрессии.

Решение.

Поскольку $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$, то имеем систему урав-

нений, равносильную исходной: $\begin{cases} b_1 + b_1 q^2 = 10, \\ b_1 q + b_1 q^3 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q^2) = 10, \\ b_1 q(1 + q^2) = 30. \end{cases}$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим $\frac{b_1 q(1 + q^2)}{b_1(1 + q^2)} =$

$$= \frac{30}{10} \Leftrightarrow q = 3. \text{ Из первого уравнения системы } b_1 = \frac{10}{1 + q^2} = \frac{10}{1 + 3^2} =$$

$$= \frac{10}{10} = 1. \text{ Итак, } b_1 = 1, q = 3. \text{ По формуле для суммы } n \text{ первых}$$

членов находим $S_8 = \frac{b_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{1(1-3^8)}{1-3} = \frac{3^8 - 1}{2} = \frac{6560}{2} = 3280.$

Ответ: $S_8 = 3280$.

Пример 9. В геометрической прогрессии (b_n) с положительными членами $b_m = k$, $b_s = l$. Найти b_p .

Решение.

$$b_p = b_1 q^{p-1}; \quad b_m = k \Leftrightarrow b_1 q^{m-1} = k; \quad b_s = 1 \Leftrightarrow b_1 q^{s-1} = 1. \text{ Имеем}$$

систему уравнений $\begin{cases} b_1 q^{m-1} = k, \\ b_1 q^{s-1} = 1. \end{cases}$ Разделив первое уравнение системы

на второе, получим $\frac{b_1 q^{m-1}}{b_1 q^{s-1}} = \frac{k}{1} \Leftrightarrow q^{m-s} = \frac{k}{1} \Leftrightarrow q = \left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{1}{m-s}}$. Из первого

$$\text{уравнения системы находим } b_1: b_1 = \frac{k}{q^{m-1}} = \frac{k}{\left(\left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{1}{m-s}}\right)^{m-1}} = \frac{k}{\left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{m-1}{m-s}}}.$$

$$\text{Тогда } b_p = b_1 q^{p-1} = \frac{k}{\left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{m-1}{m-s}}} \left(\left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{1}{m-s}}\right)^{p-1} = k \left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{p-1}{m-s} - \frac{m-1}{m-s}} = k \left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{p-m}{m-s}}.$$

$$\text{Ответ: } b_p = k \left(\frac{k}{1}\right)^{\frac{p-m}{m-s}}.$$

§136. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Будем называть *бесконечно убывающей геометрической прогрессией* такую геометрическую прогрессию (b_n) , у которой знаменатель $|q| < 1$ и которая содержит бесконечное число слагаемых. Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется предел суммы n первых ее членов, когда $n \rightarrow \infty$.

$S = \frac{b_1}{1-q}$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пример 1. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$.

Решение. Из условия ясно, что $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Тогда

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

Пример 2. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}; 1; \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}; \dots$.

Решение.

Из условия ясно, что $b_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, $q = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (лучше всего

q найти, взяв $q = \frac{b_3}{b_2}$). Тогда $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} : \left(1 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} : \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^3}{2(3-1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}+5}{2}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{3\sqrt{3}+5}{2} \right\}.$$

Пример 3. Обратить периодическую дробь $0,454545\dots = 0,(45)$ в обыкновенную.

Решение. Представим исходную дробь в виде суммы:

$$0,(45) = \frac{45}{100} + \frac{45}{10000} + \frac{45}{1000000} + \dots = \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{45}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

(так как у нас есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{100}$).

$$\text{Ответ: } 0,(45) = \frac{5}{11}.$$

Пример 4. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии (b_n) $S = 16$, а сумма квадратов всех ее членов $\tilde{S} = 153,6$. Найти четвертый член прогрессии.

Решение.

Прогрессия, у которой каждый член есть квадрат (b_n) , то есть $b_1^2; b_2^2; b_3^2; \dots; b_n^2; \dots$, имеет знаменатель Q , который равен квадрату знаменателя заданной прогрессии (b_n) , так как

$$Q = \frac{b_n^2}{b_{n-1}^2} = \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} \right)^2 = q^2. \text{ Отсюда имеем систему уравнений}$$

$$\begin{cases} S = 16 = \frac{b_1}{1-q}, \\ \tilde{S} = 153,6 = \frac{b_1^2}{1-q^2}. \end{cases} \quad \text{Разделив второе уравнение системы на первое,}$$

$$\text{возведенное в квадрат, получим } \frac{b_1^2}{1-q^2} \cdot \frac{b_1^2}{(1-q)^2} = \frac{153,6}{(16)^2} \Leftrightarrow \frac{b_1^2(1-q)^2}{(1-q^2)b_1^2} =$$

$$= \frac{153,6}{(16)^2} \Leftrightarrow \frac{1-q}{1+q} = \frac{153,6}{256} \Leftrightarrow 256(1-q) = 153,6(1+q) \Leftrightarrow q = \frac{102,4}{409,6} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Тогда } b_1 = 16(1-q) = 16\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 12; \quad b_4 = b_1 q^3 = 12\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{16}.$$

$$\text{Ответ: } b_4 = \frac{3}{16}.$$

Пример 5. В равносторонний треугольник со стороной a вписан посредством соединения середин его сторон новый треугольник; в этот треугольник тем же способом вписан новый треугольник и так далее до бесконечности. Найти сумму периметров всех этих треугольников и сумму их площадей.

Решение.

Изобразим на рисунке несколько треугольников, удовлетворяющих условию задачи (рис. 85). $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = a$. Так как A_2B_2, A_2C_2, B_2C_2 — средние линии, то их длины равны $\frac{a}{2}$. Аналогично $A_3B_3 = B_3C_3 =$

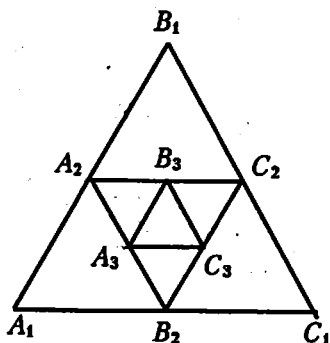


Рис. 85

$A_3C_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{4}$. Таким образом, последовательность длин сторон вписанных треугольников образует бесконечную убывающую геометрическую про-

грессию $a; \frac{a}{2}; \frac{a}{4}; \frac{a}{8}; \dots; \frac{a}{2^{n-1}}; \dots$. Последовательность периметров

будет получаться путем утроения, т. е. $3a; \frac{3a}{2}; \frac{3a}{4}; \frac{3a}{8}; \dots; \frac{3a}{2^{n-1}}; \dots$.

Знаменатель такой прогрессии $q = \frac{1}{2}$, а сумма периметров P может быть вычислена по формуле для суммы бесконечно убываю-

щей геометрической прогрессии: $P = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$. Площади полу-

ченных правильных треугольников также образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $S_1; S_2; S_3; S_4; \dots; S_n; \dots$, по-

скольку $S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, $S_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, $S_3 = \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ и т. д. Знаменатель такой прогрессии $q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \dots = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{4}$. Отсюда сумма площадей $S = \frac{S_1}{1-q} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} : \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $P = 6a$; $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$.

§137. Комбинированные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессию

Задача 1. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если из второго члена этой прогрессии вычесть число 2, а остальные числа оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Решение.

Пусть $a_1; a_2; a_3$ — члены арифметической прогрессии; $b_1; b_2; b_3$ — члены геометрической прогрессии. По условию $a_1 + a_2 + a_3 = 30$. Найдем связь между a_1 и d — разностью прогрессии.

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 30 \Leftrightarrow 3a_1 + 3d = 30 \Leftrightarrow a_1 + d = 10 \Leftrightarrow a_1 = 10 - d.$$

Выразим все члены прогрессии через d : $a_2 = a_1 + d = 10$, $a_3 = a_1 + 2d = 10 - d + 2d = 10 + d$. Таким образом, $a_1 = 10 - d$; $a_2 = 10$; $a_3 = 10 + d$.

По условию $b_1 = a_1$; $b_2 = a_2 - 2$; $b_3 = a_3$. Тогда $10 - d$; 8 ; $10 + d$ — геометрическая прогрессия.

$$\text{Поскольку } b_2^2 = b_1 \cdot b_3 \Leftrightarrow 8^2 = (10 - d)(10 + d) \Leftrightarrow 64 = 100 - d^2 \Leftrightarrow d^2 = 36 \Leftrightarrow d_{1,2} = \pm 6. \text{ Тогда } a_1 = 10 - d_1 = 4 \text{ или } a_1 = 10 - d_2 = 16.$$

Отсюда получаем две тройки чисел: $4; 10; 16 (d = 6)$ и $16; 10; 4 (d = -6)$.

Ответ: $4; 10; 16$ или $16; 10; 4$.

Задача 2. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если из первого числа вычесть 11, из второго 1, из третьего 3, а из четвертого 9, то получится арифметическая прогрессия. Найти эти числа.

Решение.

Обозначим искомые числа через b_1, b_2, b_3, b_4 — четыре первых члена геометрической прогрессии. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — соответствующие члены арифметической прогрессии. Ясно, что $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$. Тогда $a_1 = b_1 - 11$, $a_2 = b_2 - 1 = b_1 q - 1$, $a_3 = b_3 - 3 = b_1 q^2 - 3$, $a_4 = b_4 - 9 = b_1 q^3 - 9$. Применим характеристическое

свойство арифметической прогрессии: $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$.

Тогда получаем систему уравнений, в которой неизвестными бу-

$$\text{дут } b_1 \text{ и } q: \begin{cases} b_1 q - 1 = \frac{b_1 - 11 + b_1 q^2 - 3}{2}, \\ b_1 q^2 - 3 = \frac{b_1 q - 1 + b_1 q^3 - 9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 q - 2 = b_1 + b_1 q^2 - 14, \\ 2b_1 q^2 - 6 = b_1 q + b_1 q^3 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^2 - 2q + 1) = 12, \\ b_1 q(q^2 - 2q + 1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3}, \\ b_1 = 27. \end{cases} \text{ Запишем геометрическую про-}$$

грессию: $b_2 = b_1 q = 27 \cdot \frac{1}{3} = 9$; $b_3 = b_1 q^2 = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3$; $b_4 = b_1 q^3 =$

$$= 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1.$$

Ответ: 27;9;3;1.

Задача 3. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, если сумма крайних чисел равна 35, а сумма средних 30.

Решение.

Обозначим искомые числа через C_1, C_2, C_3, C_4 . Тогда

$$\begin{array}{c} \overbrace{C_1, C_2, C_3, C_4}^{\text{геометрическая прогрессия}} \\ \underbrace{C_1, C_2, C_3, C_4}_{\text{арифметическая прогрессия}} \end{array} \quad \begin{cases} C_1 + C_4 = 35, \\ C_2 + C_3 = 30. \end{cases}$$

Выразим C_1, C_2, C_3, C_4 через b_1 и q , где b_1 — первый член геометрической прогрессии, q — знаменатель прогрессии. $C_1 = b_1$; $C_2 = b_1 q$; $C_3 = b_1 q^2$; $C_4 = 35 - C_1 = 35 - b_1$. По характеристическо-

му свойству арифметической прогрессии $C_3 = \frac{C_2 + C_4}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2C_3 = C_2 + C_4 \Leftrightarrow 2b_1q^2 = b_1q + (35 - b_1), C_2 + C_3 = 30 \Leftrightarrow b_1q + b_1q^2 = 30.$$

Получаем систему уравнений для определения b_1 и q :

$$\begin{cases} b_1q + b_1q^2 = 30, \\ 2b_1q^2 = b_1q + 35 - b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q(1+q) = 30, \\ b_1(2q^2 - q + 1) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{b_1q(1+q)}{b_1(2q^2 - q + 1)} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{q(1+q)}{2q^2 - q + 1} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow 7q + 7q^2 = 12q^2 - 6q + 6 \Leftrightarrow 5q^2 - 13q + 6 = 0 \Leftrightarrow q_1 = 2, q_2 = \frac{3}{5}. \text{ Получаем два решения:}$$

$$1) q = 2 \Rightarrow b_1 = \frac{30}{q(1+q)} = \frac{30}{2(1+2)} = 5 = C_1; C_2 = b_1q = 5 \cdot 2 = 10;$$

$$C_3 = b_1q^2 = 5 \cdot 2^2 = 20; C_4 = 35 - C_1 = 35 - 5 = 30;$$

$$2) q = \frac{3}{5}; b_1 = \frac{30}{q(1+q)} = \frac{30}{\frac{3}{5}\left(1 + \frac{3}{5}\right)} = \frac{125}{4} = 31\frac{1}{4} = C_1; C_2 = b_1q =$$

$$= \frac{125}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}; C_3 = b_1q^2 = \frac{125}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}; C_4 = 35 -$$

$$- b_1 = 35 - \frac{125}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Ответ: 5; 10; 20; 30 или $\frac{125}{4}; \frac{75}{4}; \frac{45}{4}; \frac{15}{4}$.

Тесты к главе 8. Прогрессии

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

- A1. Найдите разность арифметической прогрессии 0; 2; 4; 6; ...
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- A2. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $d = -4$. Найдите a_{11} .
1) -16; 2) -24; 3) -36; 4) -42.
- A3. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$.
1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 10.
- A4. Найдите первый член арифметической прогрессии, если $a_{11} = 20$, $d = -3$.
1) 12; 2) 35; 3) 42; 4) 50.
- A5. Найдите двадцать третий член арифметической прогрессии 3; 7; 11; 15; ...
1) 83; 2) 87; 3) 91; 4) 95.
- A6. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1 = 2$, $b_5 = 162$.
1) $\cdot 1$; 2) $\cdot 2$; 3) $\cdot 3$; 4) $\cdot 4$.
- A7. Найдите девятый член геометрической прогрессии, если $b_1 = 9$, $q = 3$.
1) 820; 2) 6561; 3) 52 488; 4) 157 464.
- A8. В геометрической прогрессии $b_4 = 11$, $b_7 = 88$. Найдите b_9 .
1) 253; 2) 352; 3) 523; 4) 532.
- A9. Найдите сумму первых восемнадцати членов арифметической прогрессии, если $a_6 + a_8 + a_{11} + a_{14} = 26$.
1) 117; 2) 52; 3) 63; 4) 26.
- A10. Найдите сумму девяти первых членов геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 8$, $q = 3$.
1) 9841; 2) 19 682; 3) 78 728; 4) 31 4912.

- A11. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_1 + a_7 = 38$, $a_4 a_4 = 95$.
1) -7; 2) -5; 3) 5; 4) 7.
- A12. В арифметической прогрессии $s_{17} = 187$. Найдите a_9 .
1) 7; 2) 9; 3) 11; 4) 13.
- A13. В геометрической прогрессии $b_4 - b_1 = 52$, $b_1 + b_2 + b_3 = 26$.
Найдите s_6 .
1) 91; 2) 182; 3) 364; 4) 728.
- A14. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел.
1) 4805; 2) 4905; 3) 5005; 4) 5105.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

- B1. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, делящихся на 7 нацело.
- B2. В арифметической прогрессии $a_{16} = 1$. Найдите $a_1 + a_7 + a_{13} + a_{19} + a_{25} + a_{31}$.
- B3. В арифметической прогрессии $s_{17} = 187$. Найдите a_9 .
- B4. Найдите наибольшее число из трех чисел, образующих геометрическую прогрессию с положительными членами, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна $\frac{7}{12}$.
- B5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $3; -\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{8}; \dots$
- B6. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов всех ее членов равна 72. Найдите первый член прогрессии.

В7. Третий, первый и второй члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

В8. Решите уравнение $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}} = 81$.

В9. Найдите сумму $(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 597^2 + 599^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 598^2 + 600^2)$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

С1. В арифметической прогрессии $S_p = q$, $S_q = p$, $p \neq q$ (S_n — сумма n первых членов). Найдите S_{p+q} .

С2. В геометрической прогрессии $b_m = k$, $b_n = l$. Найдите b_p .

С3. Найдите сумму n чисел вида 1; 11; 111; 1111; ...

Ответ: $\frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right)$.

С4. Постройте график функции

$$y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \dots$$

Глава 9

ТРИГОНОМЕТРИЯ

§138. Углы и их измерения

Угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки, называемой вершиной угла (рис. 86).

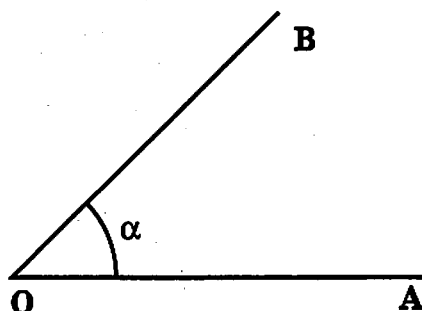


Рис.86

Слово «угол» заменяют символом $\angle$: $\angle AOB = \angle BOA = \angle \alpha$. Часто символ $\angle$ опускают и пишут просто α , т. е. $\alpha = \angle \alpha$.

Угол можно рассматривать как фигуру, образованную вращением луча вокруг своей начальной точки O. Луч можно вращать вокруг своей начальной точки в двух на-

правлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки. Направление вращения *против часовой стрелки* условились называть *положительным*, а *по часовой стрелке* — *отрицательным*. Соответственно этому углы и дуги, полученные вращением луча против часовой стрелки, считаются положительными, а углы и дуги, полученные вращением луча по часовой стрелке, считаются отрицательными (рис. 87).

Если стороны угла образуют прямую, то такой угол называется *развернутым*. Если луч сделает полный оборот вокруг своей начальной точки, то полученный угол называется *полным*.

Оси абсцисс (Ox) и ординат (Oy) делят полный угол (окружность) на четыре четверти (I—IV), или четыре квадранта (рис. 88).

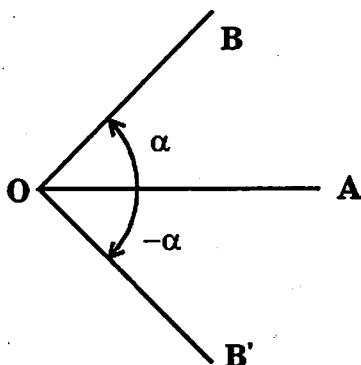


Рис. 87

Углы измеряются в градусах и радианах. Угол в 1 градус — это угол, который опишет луч, совершив $1/360$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки (обозначение 1°). $1/60$ часть градуса называется минутой (обозначение $1'$). $1/60$ часть минуты называется секундой (обозначение $1''$).

Центральным углом в окружности называется угол, вершина которого находится в ее центре.

Угол в 1 радиан — это центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности (рис. 89).

Слово «радиан» обычно не пишут. Таким образом, если

$$|\vec{AB}| = R, |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = R,$$

то $\angle AOB = \angle \alpha = 1$, т. е. угол α равен одному радиану.

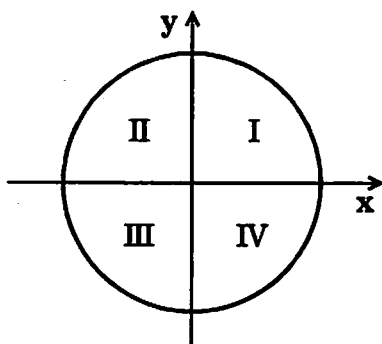


Рис. 88

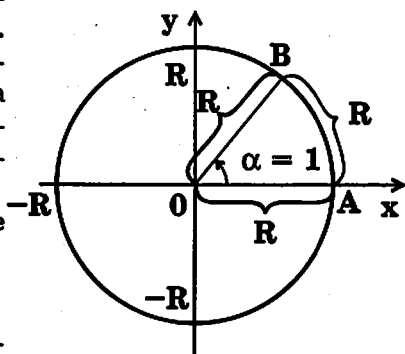


Рис. 89

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАДИАННОЙ И ГРАДУСНОЙ МЕРАМИ УГЛА

Поскольку длина всей окружности равна $2\pi R$, то полный

угол составляет 2π радиан, т. к. $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$. Поскольку полный

угол равен 360° , то $2\pi = 360^\circ$. Отсюда 1 радиан = $\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx$

$\approx 57^\circ 17' 45''$ (57 градусов, 17 минут, 45 секунд).

Таким образом, из соотношений $\pi = 180^\circ$, $1 = \frac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$

можно переходить от градусов к радианам и наоборот.

Пример 1. а) Выразить в радианах угол в 30° ;
б) выразить в градусах угол в 2 радиана.

Р е ш е н и е.

$$а) 1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \Rightarrow 30^{\circ} = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6};$$

$$б) 1 = \frac{180^{\circ}}{\pi} \Rightarrow 2 = 2 \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{360^{\circ}}{\pi} \approx \frac{360^{\circ}}{3,14} \approx (114,6)^{\circ}.$$

Приведем таблицу перехода от градусов к радианам наиболее распространенных углов (табл. 10).

Таблица 10

Соответствие между градусами и радианами

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

§139. Определение тригонометрических функций

Рассмотрим вначале тригонометрические функции острого угла, которые можно ввести с помощью прямоугольного треугольника (рис. 90).

Пусть в прямоугольном треугольнике ACB $\angle ACB = 90^{\circ}$, $\angle BAC = \alpha$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

$$\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c} \text{ (отношение противолежащего катета к гипотенузе).}$$

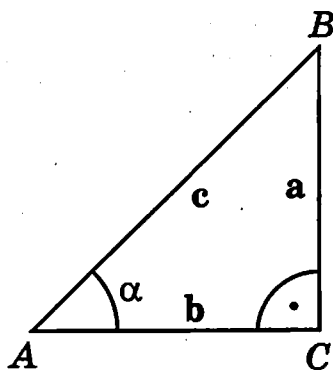


Рис. 90

$$\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c} \text{ (отношение прилежащего катета к гипотенузе).}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{a}{b} \text{ (отношение противолежащего катета к прилежащему).}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a} \text{ (отношение прилежащего катета к противолежащему).}$$

Из последних двух равенств следует, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Рассмотрим *тригонометрические функции произвольных значений аргумента*.

Имеем прямоугольную систему координат xOy на плоскости и круг единичного радиуса, имеющий центр в начале координат (рис. 91). Такой круг называется *единичным кругом* или *тригонометрическим кругом*. Отметим на оси Ox справа от начала координат точку M_0 ,

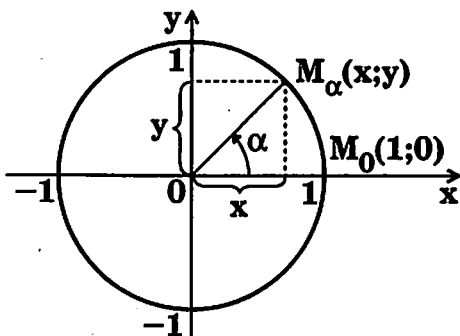


Рис. 91

лежащую на тригонометрическом круге: $M_0(1;0)$. Радиус OM_0 называется *начальным радиусом*. При повороте начального радиуса OM_0 около центра O на угол α точка $M_0(1;0)$ переходит в некоторую точку $M_\alpha(x;y)$.

Синусом угла α называется отношение ординаты точки M_α к радиусу.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки M_α к радиусу.

Таким образом, $\sin \alpha = \frac{y}{R}$, $\cos \alpha = \frac{x}{R}$. Поскольку $R=1$, то $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$. x и y можно рассматривать как проекции на оси координат единичного вектора $\overrightarrow{OM_\alpha}(x;y)$. Таким образом, можно утверждать, что *синус* угла α равен *ординате*, а *косинус* — *абсциссе* вектора единичной длины, исходящего из начала координат и образующего с положительным направлением оси Ox угол α . Так как координаты любой точки $M_\alpha(x;y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$, то $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Соотношение $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки M_α к ее абсциссе: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки M_α к ее ординате: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

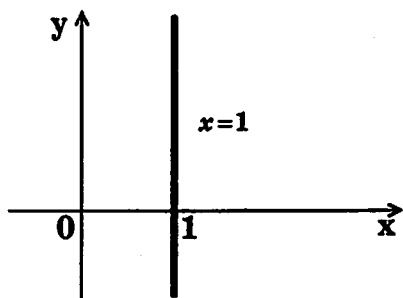
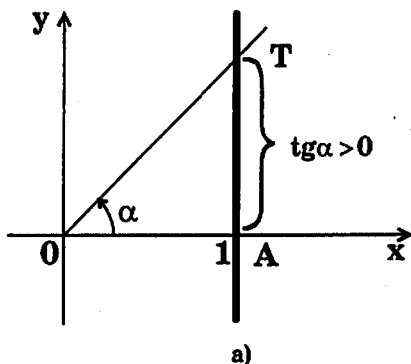


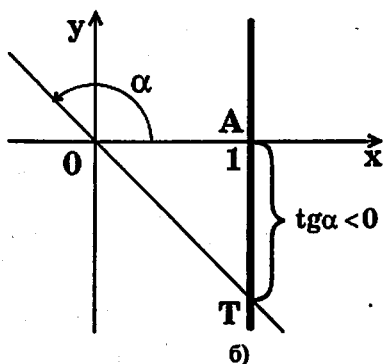
Рис. 92

Прямая $x=1$ (рис. 92) называется *осью тангенсов*.

Каждому углу $\alpha \neq 90^\circ + 180^\circ \cdot n$ ($n \in \mathbb{Z}$) можно поставить в соответствие точку Т на оси тангенсов, являющуюся точкой пересечения конечной стороны угла α (или ее продолжения) с осью тангенсов (рис. 93).



а)



б)

Рис. 93

Тангенс угла α равен ординате соответствующей точки Т на оси тангенсов.

Прямая $y=1$ (рис. 94) называется *осью котангенсов*.

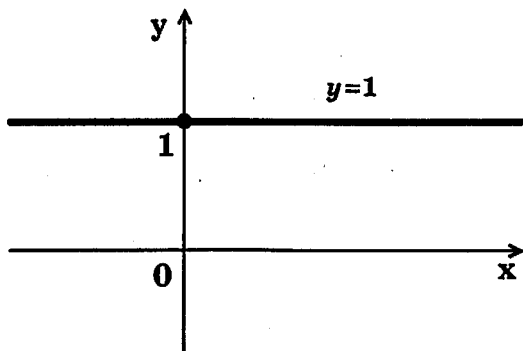


Рис. 94

Каждому углу $\alpha \neq 180^\circ \cdot n$ ($n \in \mathbb{Z}$) можно поставить в соответствие точку К на оси котангенсов, являющуюся точкой пере-

сечения конечной стороны угла α (или ее продолжения) с осью котангенсов (рис. 95).

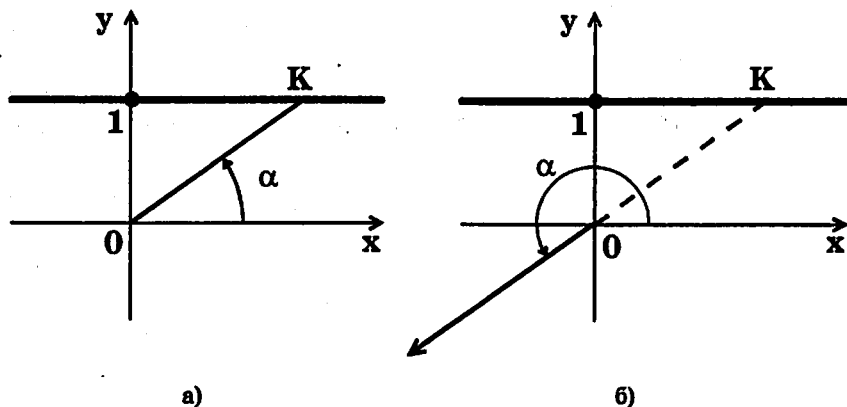


Рис. 95

Котангенс угла α равен абсциссе соответствующей точки К на оси котангенсов.

Знаки тригонометрических функций $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ в различных четвертях (квадрантах) даны на рис. 96.

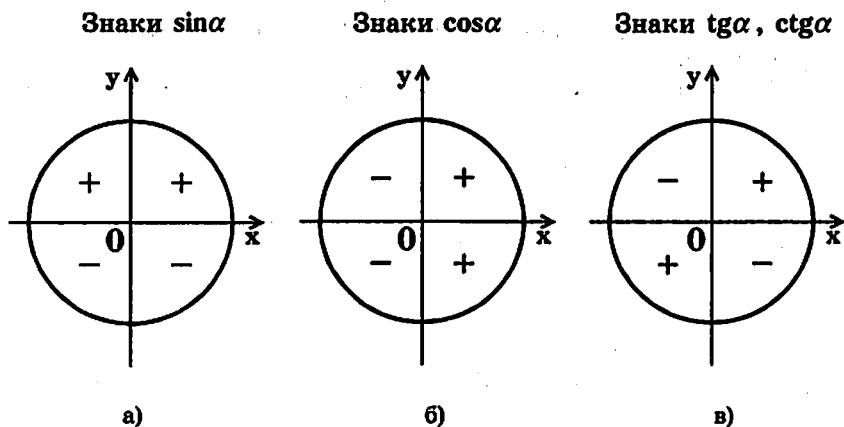


Рис. 96

Приведем таблицу значений тригонометрических функций некоторых углов, которые наиболее часто используются на практике (табл. 11).

**Значения тригонометрических функций
для некоторых значений аргумента**

Угол α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Ф-ция	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞	0	∞

Символ ∞ (бесконечность) означает, что $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{ctg} \alpha$ при соответствующих значениях аргумента не определены и принимают сколь угодно большие значения по модулю.

Секансом угла α (обозначение $\sec \alpha$) называется величина,

обратная $\cos \alpha$, т. е. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, $\cos \alpha \neq 0$.

Косекансом угла α (обозначение $\operatorname{cosec} \alpha$) называется вели-

чина, обратная $\sin \alpha$, т. е. $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$, $\sin \alpha \neq 0$.

§140. Основные тригонометрические тождества

Помимо тождества $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, основными тригонометрическими тождествами называются также следующие соотношения:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Докажем некоторые из этих тождеств.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z});$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 = \sec^2 \alpha;$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

В формулах $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ знаки «+» или «-» выбираются в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α . Так, если α оканчивается в I или II четверти, то берем знак «+», а если в III или IV четверти, то знак «-» в формуле $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$. В формуле $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ для углов, оканчивающихся в I или IV четвертях, нужно взять знак «+», а если углы оканчиваются во II или III четвертях, то знак «-».

§141. Решение важных примеров, доказательство тождеств

Пример 1. Определить знак выражений: а) $\sin 2$; б) $\cos 6$.
Решение.

Изобразим углы в 2 и 6 радиан на тригонометрическом круге (рис. 97). Заметим, что

$\pi = 180^\circ$, но, с другой стороны,

$\pi = 3,14$ радиан. Поэтому $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$,

$\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$. Отсюда угол $\alpha = 2$ оканчивается во II четверти, а угол $\alpha = 6$ оканчивается в IV четверти. Тогда $\sin 2 > 0$, $\cos 6 > 0$.

Ответ: а) $\sin 2 > 0$; б) $\cos 6 > 0$.

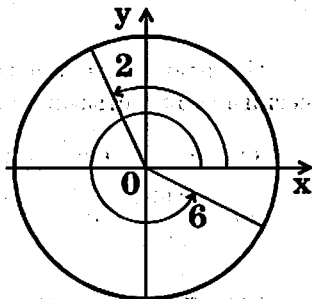


Рис. 97

Пример 2. Вычислить $A = \frac{1}{2} \sin 180^\circ - \sqrt{3} \cos 180^\circ + \sec 180^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$.

Решение. $A = \frac{1}{2} \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot (-1) + \frac{1}{(-1)} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 1$.

Ответ: $A = 2\sqrt{3} - 1$.

Пример 3.

Найти $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Решение.

$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$. Т. к. по условию угол α оканчивается во II четверти, то $\cos \alpha < 0$ и перед радикалом нужно взять знак $\leftarrow$. Отсюда

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

Пример 4.

Найти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Решение.

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Поскольку по условию угол α оканчивается в III четверти, то $\cos \alpha < 0$ и перед радикалом нужно взять знак $\leftarrow$. Отсюда

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{10}},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3. \quad \text{Ответ: } \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = 3.$$

Пример 5. Упростить $A = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Решение.

$$A = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 1.$$

Ответ: $A = 1$.

Пример 6. Упростить $A = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2$.

Решение.

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2 = \\ & = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha - 2 = \\ & = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $A=0$.

Пример 7.

Упростить $A = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$, если $3\pi < \alpha < 4\pi$.

Решение. $A = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| + \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|$.

Избавимся от модулей. $3\pi < \alpha < 4\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{4\pi}{2} \Rightarrow$ угол $\frac{\alpha}{2}$

оканчивается в IV четверти $\Rightarrow \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \cos \frac{\alpha}{2}$, $\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = -\sin \frac{\alpha}{2}$.

Отсюда $A = \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $A = \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$.

Пример 8.

Дано $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Найти: а) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$; б) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Решение.

а) Возведем обе части исходного выражения в квадрат:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m^2 - 1 \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2};$$

$$\text{б) } \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = m \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2} \right) = m \left(\frac{2 - m^2 + 1}{2} \right) = \frac{m(3 - m^2)}{2}.$$

В процессе решения мы учли, что если $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, то

$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$ согласно выводам пункта а).

Ответ: а) $\left\{ \frac{m^2 - 1}{2} \right\}$; б) $\left\{ \frac{m(3 - m^2)}{2} \right\}$.

ПРИМЕРЫ НА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВ

При доказательстве тождеств обычно используют следующие способы:

- 1) выражение, стоящее в одной части тождества, с помощью тождественных преобразований приводят к выражению, стоящему в другой части тождества;
- 2) выражения, стоящие в левой и правой частях тождества, приводят к одному и тому же виду;
- 3) доказывают, что разность между левой и правой частями тождества равна нулю.

Примеры 9—15. Доказать тождества:

$$9. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha ;$$

$$10. \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha ;$$

$$11. 1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha ;$$

$$12. \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \sin^2 \alpha ;$$

$$13. \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0 ;$$

$$14. \sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 ;$$

$$15. \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} .$$

Решение.

9.

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha . \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1} \cdot \frac{\cos \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha . \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} & \underline{1 - \sin^2 \alpha} + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \\ & = \underline{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{1} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \\ & = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

13.

1 способ.

Применим тождество $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$.

Тогда левую часть можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \underline{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \underline{(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} - \\ & - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \\ & = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0. \end{aligned}$$

2 способ.

$$\begin{aligned} & \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha = \\ & = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \\ & = \sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = -\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 0. \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} & \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha)^2 + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (\cos^2 \alpha)^2 = \\ & = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2 = 1. \end{aligned}$$

15. Это тождество можно рассматривать как пропорцию.

Чтобы доказать справедливость пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, достаточно до-

казать, что $ad = bc$. Поэтому достаточно показать, что

$\sin \alpha \cdot \sin \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)$. Это равенство очевидно, т. к.

$\sin \alpha \sin \alpha = \sin^2 \alpha$, $(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha$, а $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

Вывод: тождества доказаны.

§142. Свойства тригонометрических функций

Четность и нечетность тригонометрических функций

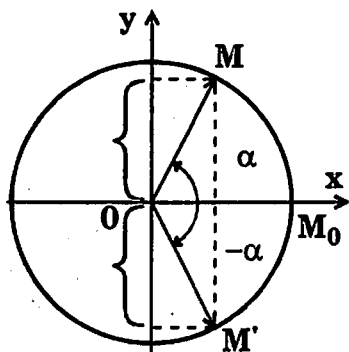


Рис. 98

При повороте единичного вектора $\vec{OM}_0$ (начального радиуса OM_0) на углы α и $-\alpha$ абсциссы векторов $\vec{OM}_0$ и $\vec{OM}'$ равны, а ординаты равны по модулю, но противоположны по знаку (рис. 98). Это значит, что $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, т. е. функция $\cos\alpha$ является четной, а $\sin\alpha$ — нечетной.

Рассмотрим остальные тригонометрические функции:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Отсюда $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$ функция $\operatorname{tg}\alpha$ является нечетной.

$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \Rightarrow$ функция $\operatorname{ctg}\alpha$ является нечетной.

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha; \quad \sec(-\alpha) = \sec\alpha;$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = \frac{1}{\sin(-\alpha)} = -\frac{1}{\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha; \quad \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Таким образом, из шести основных тригонометрических функций функции $y = \cos x$, $y = \sec x$ являются четными, а остальные четыре — нечетными.

Пример 1. Исследовать на четность функции:

а) $y = \sin x \cdot \cos x$; б) $y = \frac{\sin x}{x}$; в) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;

г) $y = x - \sin x$; д) $y = \sin x - \cos x$.

Решение.

а) $y(x) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow y(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = \sin x \cdot \cos x$ является нечетной;

б) $y(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = y(x) \Rightarrow y(-x) = y(x) \Rightarrow$

функция $y = \frac{\sin x}{x}$ является четной;

в) $y(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \Rightarrow y(-x) = \operatorname{tg}(-x) + \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ является нечетной;

г) $y(x) = x - \sin x \Rightarrow y(-x) = (-x) - \sin(-x) = -x + \sin x = -(x - \sin x) = -y(x) \Rightarrow$ функция $y = x - \sin x$ является нечетной;

д) $y(x) = \sin x - \cos x \Rightarrow y(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x \Rightarrow y(-x) \neq y(x), y(-x) \neq -y(x) \Rightarrow$ функция $y = \sin x - \cos x$ не является ни четной, ни нечетной, т. е. это функция общего вида.

ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для периодической функции $y = f(x)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$, где T — отличное от нуля число, называемое периодом функции. Каждая периодическая функция имеет бесчисленное множество периодов, т. к. если T — период, то nT — период, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Обычно, говоря о периоде, имеют в виду наименьший положительный период, который называется *основным*. Основными периодами для тригонометрических функций являются: $T = 360^\circ$ для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$; $T = 180^\circ$ для функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. В более общем виде можем записать:

$$\sin(x \pm 360^\circ k) = \sin x, \quad \cos(x \pm 360^\circ k) = \cos x,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm 180^\circ k) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x \pm 180^\circ k) = \operatorname{ctg} x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если углы выражать в радианах, то можно сказать, что периоды функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$ $T = 2\pi k$, а периоды функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ $T = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

При этом $T = 2\pi$ — основной период функций $\sin x$, $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$; $T = \pi$ — основной период функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Известно, что периоды функций $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ вычисляются по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а периоды функ-

ций $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ — по формуле $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Если период функции $y = f(x)$ равен T_1 , а период функции $y = \varphi(x)$ равен T_2 , то период функций $y = f(x) + \varphi(x)$ и $y = f(x) - \varphi(x)$ равен наименьшему числу, при делении которого на T_1 и T_2 получаются целые числа.

Пример 2. Вычислить без использования калькулятора и таблиц: а) $\cos 405^\circ$; б) $\sin 1020^\circ$; в) $\operatorname{tg} 930^\circ$.

Р е ш е н и е.

а) $\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin 1020^\circ = \sin(360^\circ \cdot 3 - 60^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} 930^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 5 + 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Найти период функций: а) $y = 5\sin 2x + 2\operatorname{ctg} 3x$;

б) $y = 9\sin(5x + \frac{\pi}{3}) - 4\cos(7x + 2)$; в) $y = 3\sin \pi x + 8\operatorname{tg}(x + 5)$.

Р е ш е н и е.

а) Период функции $y = 5\sin 2x$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, а период функции $y = 2\operatorname{ctg} 3x$ равен $\frac{\pi}{3}$. Наименьшее число, при делении

которого на $T_1 = \pi$ и $T_2 = \frac{\pi}{3}$ получаются целые числа, есть число π . Следовательно, период заданной функции равен $T = \pi$.

б) Находим периоды слагаемых. Период функции $y = 9\sin(5x + \frac{\pi}{3})$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, а период функции $4\cos(7x + 2)$ равен $T_2 = \frac{2\pi}{7}$. Очевидно, что период заданной функции равен $T = 2\pi$.

в) Период функции $y = 3\sin \pi x$ равен $T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, а период функции $y = 8\operatorname{tg}(x + 5)$ равен $T_2 = \frac{\pi}{1} = \pi$. Периода у заданной функции не существует, т. к. нет такого числа, при делении которого на 2 и на π одновременно получались бы целые числа.

Ответ: а) $T = \pi$; б) $T = 2\pi$; в) периода T не существует.

§143. Формулы приведения

Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ выражаются через значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Для облегчения запоминания формул приведения можно пользоваться следующими правилами:

1) если в формулах содержатся углы π и 2π , то наименование функции не изменяется; если же в формулах содержатся

углы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, то наименование функции меняется на сходное (синус — на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот);

2) чтобы определить знак в правой части формулы («+» или «-»), достаточно, считая угол α острым, определить знак выражения, стоящего в левой части формулы; при этом перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая

функция углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$.

Например, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$.

Пример 1. Привести к тригонометрической функции острого угла:

а) $\sin 1944^\circ$; б) $\cos \frac{389\pi}{18}$.

Решение.

а) $\sin 1944^\circ = \sin(360^\circ \cdot 5 + 144^\circ) = \sin 144^\circ = \sin(180^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ$;

б) $\cos \frac{389\pi}{18} = \cos\left(21\pi + \frac{11\pi}{18}\right) = \cos\left(2\pi \cdot 10 + \pi + \frac{11\pi}{18}\right) =$

$= \cos\left(\pi + \frac{11\pi}{18}\right) = -\cos \frac{11\pi}{18} = -\cos\left(\pi - \frac{7\pi}{18}\right) =$

$= -\left(-\cos \frac{7\pi}{18}\right) = \cos \frac{7\pi}{18}$.

Ответ: а) $\sin 36^\circ$; б) $\cos \frac{7\pi}{18}$.

Пример 2. Вычислить $A = \cos 105^\circ - \sin 195^\circ + \sin(-135^\circ)$.

Решение.

$\cos 105^\circ = \cos(90^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$; $\sin 195^\circ = \sin(180^\circ + 15^\circ) = -\sin 15^\circ$;

$\sin(-135^\circ) = -\sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$A = -\sin 15^\circ - (-\sin 15^\circ) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Пример 3. Вычислить $A = \sin \frac{8\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{29\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. Применяя периодичность функций и формулы приведения, имеем

$$\sin \frac{8\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{ctg}(\frac{12\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \operatorname{ctg}(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3};$$

$$\cos \frac{29\pi}{6} = \cos(\frac{30\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = \cos(5\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(2\pi \cdot 2 + \pi - \frac{\pi}{6}) =$$

$$= \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg}(\pi + \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3. \quad \text{Ответ: } \{-3\}.$$

Пример 4. Без калькулятора определить знак выражения $\sin 100$.

Р е ш е н и е. Используем тот факт, что периодом функции $y = \sin x$ является $T = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } \sin 100 &= \sin(100 - 2\pi n) = \\ &= \sin(100 - 2\pi \cdot 16) = \sin(100 - 32\pi) \approx \sin(100 - 32 \cdot 3,1416) = \\ &= \sin(100 - 100,5312) = \sin(-0,5312) = -\sin 0,5312 < 0. \end{aligned}$$

(Поскольку $0 < 0,5312 < \frac{\pi}{2}$, то $\sin 0,5312 > 0 \Rightarrow -\sin 0,5312 < 0$).

Ответ: $\sin 100 < 0$.

§144. Основные формулы тригонометрии

Укажем восемь основных групп формул тригонометрии (часть из которых уже ранее приведена).

1. Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right);$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right); 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi).$$

2. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha; \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \right);$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi, \beta \neq k\pi, \alpha \pm \beta \neq m\pi).$$

3. Формулы двойного и тройного аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right);$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

5. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

6. Формулы преобразования суммы и разности одноименных тригонометрических функций:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad \left(\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (\alpha, \beta \neq n\pi).$$

7. Формулы, дающие рациональное выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi + n\pi);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \alpha \neq \pi + 2k\pi \right).$$

8. Формулы тригонометрических функций половинного аргумента:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq n\pi); \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (\alpha \neq \pi + 2n\pi);$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \quad (\alpha \neq 2n\pi); \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

Знак перед радикалом в последних трех формулах зависит от того, в какой координатной четверти находится угол $\frac{\alpha}{2}$.

Кроме основных формул тригонометрии, при решении задач часто используют метод введения вспомогательного угла для выражений вида

$$C = a \sin x + b \cos x, \text{ где } a \neq 0, b \neq 0.$$

Это выражение можно преобразовать в произведение следующим образом:

$$C = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a \sin x + b \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\sin x \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \text{ где}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{такой угол } \varphi \text{ существует,}$$

$$\text{поскольку } \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1).$$

Таким образом, $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, где

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (иначе } \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \text{)}.$$

ПРИМЕРЫ НА ВВЕДЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО УГЛА

Пример 1. Преобразовать выражение $\sin x + \cos x$ с помощью введения вспомогательного угла.

Решение.

$$\begin{aligned} 1 \text{ способ. } \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ способ. } \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Пример 2. Преобразовать $\sin x - 3 \cos x$ с помощью введения вспомогательного угла.

Решение.

$$\begin{aligned} \sin x - 3 \cos x &= \sqrt{10} \left(\frac{\sin x - 3 \cos x}{\sqrt{10}} \right) = \sqrt{10} \left(\sin x \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{10} (\sin x \cos \varphi - \sin \varphi \cos x) = \sqrt{10} \sin(x - \varphi), \text{ где } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \end{aligned}$$

$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}. \text{ Из последних двух равенств } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = 3 \text{ и в каче-}$$

стве φ можно взять $\varphi = \operatorname{arctg} 3$.

$$\text{Ответ: } \sin x - 3 \cos x = \sqrt{10} \sin(x - \operatorname{arctg} 3).$$

§145. Решение примеров на тождественные преобразования тригонометрических выражений

Пример 1. Вычислить без помощи калькулятора $A = \cos 36^\circ \cos 72^\circ$.

Решение.

Умножим и разделим исходное выражение на $2\sin 36^\circ$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{имеем } A &= \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 72^\circ \cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ} = \\ &= \frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{4\sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{4\sin 36^\circ} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \cos 36^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4}.$$

Пример 2.

Вычислить без помощи калькулятора $\cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} = A$.

Решение.

Умножим и разделим исходное выражение на $2\sin \frac{\pi}{9}$. Получаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sin \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}}{2\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}}{2\sin \frac{\pi}{9}} = \\ &= \frac{2\sin \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}}{4\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}}{4\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{2\sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \\ &= \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{9}\right)}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{8} \right\}.$$

Пример 3.

Преобразовать в произведение $A = \frac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha}$.

Р е ш е н и е.

В числителе и знаменателе к сумме первого и третьего слагаемых применяем формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha} = \frac{2\sin 5\alpha \cdot \cos(-\alpha) + \sin 5\alpha}{2\cos 5\alpha \cdot \cos(-\alpha) + \cos 5\alpha} = \\ &= \frac{\sin 5\alpha(2\cos\alpha + 1)}{\cos 5\alpha(2\cos\alpha + 1)} = \operatorname{tg} 5\alpha. \end{aligned} \quad \text{Ответ: } \{\operatorname{tg} 5\alpha\}.$$

Пример 4.

Упростить до числа $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha - \cos(4\alpha - \pi)}{\sin^4 \alpha}.$

Р е ш е н и е.

Преобразуем числитель данного выражения:

$$\cos(4\alpha - \pi) = \cos(\pi - 4\alpha) = -\cos 4\alpha;$$

$$3 - 4\cos 2\alpha - (-\cos 4\alpha) = 4 - 1 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha =$$

$$= (4 - 4\cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = 4(1 - \cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) =$$

$$= 4 \cdot 2\sin^2 \alpha - 2\sin^2 2\alpha = 8\sin^2 \alpha - 2\sin^2 2\alpha = 8\sin^2 \alpha - 2 \cdot (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 =$$

$$= 8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 8\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = 8\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 8\sin^4 \alpha.$$

$$\text{Тогда } A = \frac{8\sin^4 \alpha}{\sin^4 \alpha} = 8.$$

Ответ: {8}.

Пример 5. Вычислить $A = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \alpha}$, если $\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin \beta$.

Р е ш е н и е.

Преобразуем исходное выражение $A = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{ctg} \alpha =$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta)} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}(\sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta)}{\frac{1}{2}(\sin(2\alpha + \beta) + \sin(-\beta))} = \frac{\sin(2\alpha + \beta) + \sin \beta}{\sin(2\alpha + \beta) - \sin \beta} = \end{aligned}$$

(с учетом того, что $\sin(2\alpha + \beta) = 3\sin \beta$)

$$= \frac{3\sin \beta + \sin \beta}{3\sin \beta - \sin \beta} = \frac{4\sin \beta}{2\sin \beta} = 2.$$

Ответ: {2}.

Пример 6.

Доказать тождество $4\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha$.

Решение.

Преобразовав левую часть исходного тождества, имеем

$$\begin{aligned} & 4\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \\ & = 2\cos\alpha \cdot 2\cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) = \\ & = 2\cos\alpha \cdot (\cos(60^\circ - \alpha + 60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha - 60^\circ - \alpha)) = \\ & = 2\cos\alpha \cdot (\cos 120^\circ + \cos(-2\alpha)) = 2\cos\alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right) = \\ & = -\cos\alpha + \underline{2\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha} = -\cos\alpha + \underline{\cos 3\alpha + \cos\alpha} = \cos 3\alpha. \end{aligned}$$

Вывод: тождество доказано.

Пример 7. Доказать тождество $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$.

Решение.

Поскольку $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то для любого k

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^k = 1^k = 1$. Поэтому для доказательства тождества лучше всего преобразовать правую часть с учетом того, что $1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3$. Возведя в куб, получаем $1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 =$

$$\begin{aligned} & = (\sin^2\alpha)^3 + 3(\sin^2\alpha)^2 \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha (\cos^2\alpha)^2 + (\cos^2\alpha)^3 = \\ & = \sin^6\alpha + 3\sin^4\alpha \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha \cos^4\alpha + \cos^6\alpha = \\ & = \sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cos^2\alpha (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^6\alpha = \\ & = \sin^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cos^2\alpha \cdot 1 + \cos^6\alpha = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cos^2\alpha = 1. \end{aligned}$$

Вывод: тождество доказано.

Пример 8.

Доказать тождество $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

Решение.

Преобразуем левую часть исходного тождества. Выражение $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ представим как сумму кубов, а 1 запишем в виде

$1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$. Тогда с учетом тождества для суммы кубов

$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 2\left((\sin^2\alpha)^3 + (\cos^2\alpha)^3\right) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) + \\
 &\quad + \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = \\
 &= 2\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha = \\
 &= 3\sin^4 \alpha + 3\cos^4 \alpha = 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha).
 \end{aligned}$$

Вывод: тождество доказано.

Пример 9. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 45^\circ \dots \operatorname{tg} 87^\circ \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ = 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 &\text{По формулам приведения имеем } \operatorname{tg} 89^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ) = \operatorname{ctg} 1^\circ; \\
 &\operatorname{tg} 88^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 2^\circ) = \operatorname{ctg} 2^\circ; \quad \operatorname{tg} 87^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 3^\circ) = \operatorname{ctg} 3^\circ; \dots; \\
 &\operatorname{tg} 46^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 44^\circ) = \operatorname{ctg} 44^\circ.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Тогда выражение слева можно записать следующим обра-} \\
 &\text{зом: } \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ \dots \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ = \\
 &= \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \dots \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = \\
 &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 \cdot 1 = 1.
 \end{aligned}$$

(Мы изменили порядок следования множителей и использо-
вали 44 раза тождество $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, а также тот факт, что $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$).

Вывод: тождество доказано.

Пример 10. Доказать тождество $\sin(112^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 158^\circ) = 0$.

Решение.

Преобразуем левую часть исходного тождества, применив формулы приведения

$$\begin{aligned}
 &\sin(112^\circ - \alpha) = \sin(180^\circ - 68^\circ - \alpha) = \sin(180^\circ - (68^\circ + \alpha)) = \sin(68^\circ + \alpha); \\
 &\cos(\alpha + 158^\circ) = \cos(\alpha + 90^\circ + 68^\circ) = \cos(90^\circ + (68^\circ + \alpha)) = -\sin(68^\circ + \alpha).
 \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \sin(112^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 158^\circ) = \sin(68^\circ + \alpha) - \sin(68^\circ + \alpha) = 0.$$

Вывод: тождество доказано.

§146. Свойства и график функции $y = \sin x$

1. Область определения — вся числовая прямая, т. е. $D(\sin x) = \mathbb{R}$.

2. Область значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. $E(\sin x) = [-1; 1]$.

3. Функция $y = \sin x$ — нечетная, т. к. $\sin(-x) = -\sin x$; график симметричен относительно начала координат.

4. Функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$.

5. Нули функции: $\sin x = 0$ при $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Интервалы знакопостоянства:

а) $\sin x > 0$, если $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\sin x < 0$, если $x \in (-\pi + 2k\pi; 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Интервалы возрастания и убывания:

а) Функция $y = \sin x$ возрастает на промежутках

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z};$$

б) функция $y = \sin x$ убывает на промежутках

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

8. Экстремумы функции:

а) $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $y_{\min} = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Функция $y = \sin x$ является ограниченной, $|\sin x| \leq 1$.

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой*, он приведен на рисунке 99.

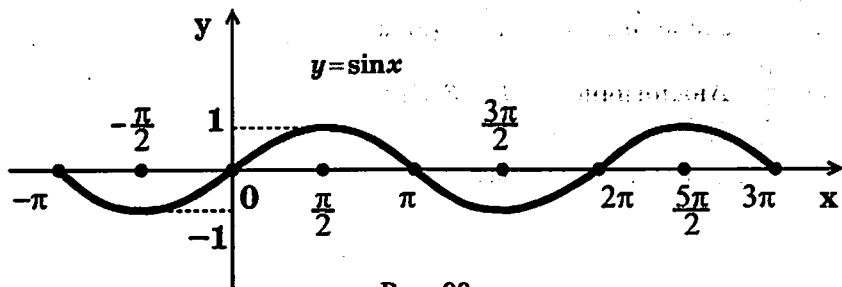


Рис. 99

§147. Свойства и график функции $y = \cos x$

1. Область определения — вся числовая прямая, т. е.

$$D(\cos x) = \mathbb{R}.$$

2. Область значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. $E(\cos x) = [-1; 1]$.

3. Функция $y = \cos x$ — четная, т. к. $\cos(-x) = \cos x$; график симметричен относительно оси Oy.

4. Функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$.

5. Нули функции: $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Интервалы знакопостоянства:

а) $\cos x > 0$ если $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos x < 0$ если $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Интервалы возрастания и убывания:

а) функция $y = \cos x$ возрастает на промежутках $x \in (-\pi + 2k\pi; 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) функция $y = \cos x$ убывает на промежутках $x \in (2k\pi; \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Экстремумы функции:

а) $y_{\max} = 1$ при $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $y_{\min} = -1$ при $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Функция $y = \cos x$, является ограниченной, $|\cos x| \leq 1$.

График функции $y = \cos x$ называется *косинусоидой*, он приведен на рис. 100.

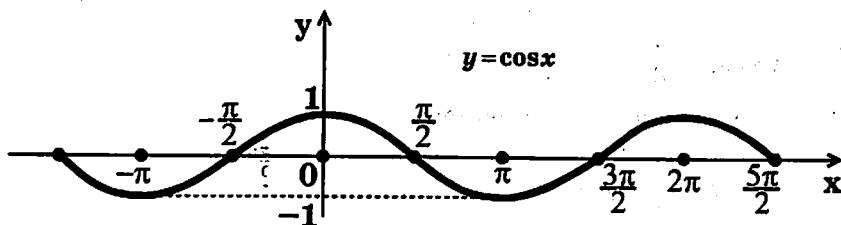


Рис. 100

§148. Свойства и график функции $y = \operatorname{tg} x$

1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Иначе $D(\operatorname{tg} x) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$.

2. Область значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ — нечетная, т. к. $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, график симметричен относительно начала координат.

4. Функция периодическая с основным периодом $T = \pi$.

5. Нули функции: $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Интервалы знакопостоянства:

а) $\operatorname{tg} x > 0$, если $x \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\operatorname{tg} x < 0$, если $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Интервалы возрастания и убывания: функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Функция $y = \operatorname{tg} x$ экстремумов не имеет.

9. Функция $y = \operatorname{tg} x$ неограниченная.

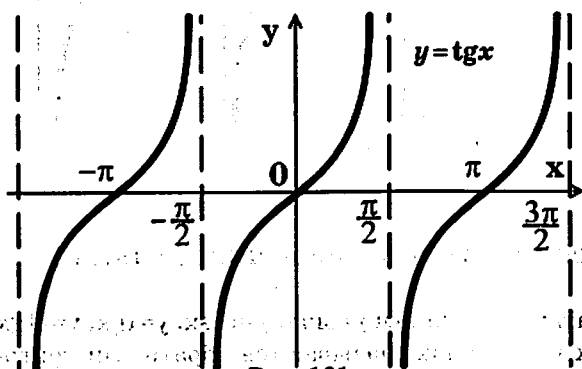


Рис. 101

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называется *тангенсодой*, он приведен на рис. 101.

Прямые

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

называются *вертикальными асимптотами* графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

§149. Свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), т. е. $D(\operatorname{ctg} x) = \{x | x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}\}$.

2. Область значений — вся числовая прямая, т. е. $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$.

3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетная, т. к. $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, график симметричен относительно начала координат.

4. Функция периодическая с основным периодом $T = \pi$.

5. Нули функции: $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Интервалы знакопостоянства:

а) $\operatorname{ctg} x > 0$, если $x \in (k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\operatorname{ctg} x < 0$, если $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Интервалы возрастания и убывания: функция $y=\text{ctgx}$ убывает на промежутках $x \in (k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. Функция $y=\text{ctgx}$ экстремумов не имеет.

9. Функция $y=\text{ctgx}$ неограниченная.

График функции $y=\text{ctgx}$ называется *котангенсойдой*, он приведен на рис. 102. Прямые $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) называются *вертикальными асимптотами* графика функции $y=\text{ctgx}$.

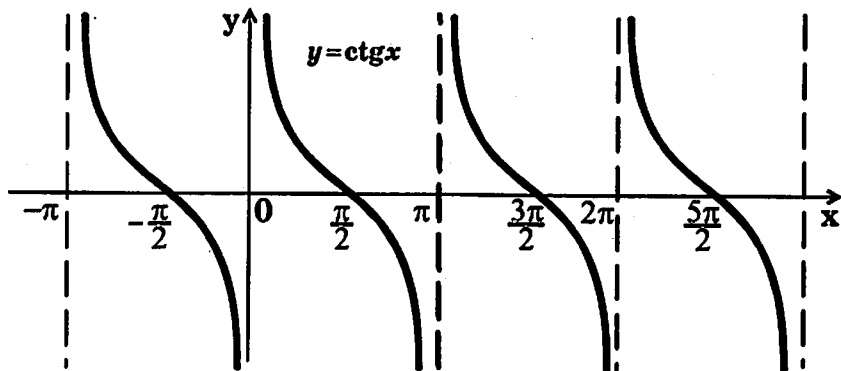


Рис. 102

§150. Обратные тригонометрические функции

Функции, обратные функциям $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg} x$, $y=\text{ctg} x$ на соответствующих интервалах, называются обратными тригонометрическими. Они обозначаются: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctg x$, $y=\text{arctg} x$.

Тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ не являются монотонными во всей области их определения. Поэтому для образования обратных функций выделяют интервалы монотонности.

1. Функция $y=\arcsin x$ и ее график

Функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$. Поэтому функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется *арксинусом* и обозначается $y=\arcsin x$. Таким образом, *арксинусом* числа x называется число y из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что его синус равен x . Математически это можно записать так:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin(\arcsin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Геометрически $\arcsin x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x .

Например, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ (т. к. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$),

$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

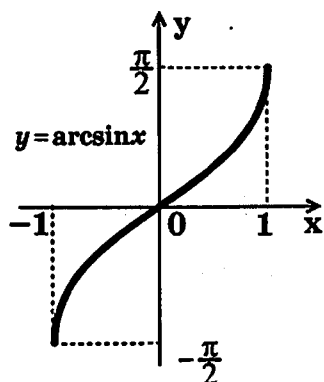


Рис. 103

График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 103. Этот график симметричен графику функции

$y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $y=x$.

Отметим основные свойства функции $y = \arcsin x$:

а) $D(\arcsin x) = [-1; 1]$;

б) $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, т. е. $y = \arcsin x$ — нечетная функция;

г) функция $y = \arcsin x$ возрастающая;

д) $\sin(\arcsin x) = x$ при $x \in [-1; 1]$.

Пример 1. Вычислить:

а) $A = \arcsin 0 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$; в) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{12}\right)$; г) $\arcsin(\sin 6)$.

Решение.

а) Поскольку $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$,

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, то получаем $A = 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi + 4\pi + 6\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$;

в) обозначим $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{12}$. Поскольку

из определения $\arcsin x$ следует, что $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$. Отсюда окончательно $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$;

г) обозначим $\arcsin(\sin 6) = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sin 6$. Отсюда не можем сделать вывод, что $\alpha = 6$, так как α должен принадлежать

отрезку от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Используем периодичность функции $y = \sin x$. Тогда

$\sin x = \sin(x - 2\pi)$, $\sin 6 = \sin(6 - 2\pi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq 6 - 2\pi \leq \frac{\pi}{2}$, т. к. $6 - 2\pi \approx$

$\approx 6 - 2 \cdot 3,14 = 6 - 6,28 = -0,28$, $-\frac{\pi}{2} \leq -0,28 \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\sin\alpha = \sin 6 =$

$= \sin(6 - 2\pi) \Leftrightarrow \alpha = 6 - 2\pi$ и окончательно $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

Ответ: а) $\left\{\frac{13\pi}{12}\right\}$; б) $\{-1\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{12}\right\}$; г) $\{6 - 2\pi\}$.

2. Функция $y = \arccos x$ и ее график

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$. Поэтому функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется *арккосинусом* и обозначается $y = \arccos x$. Таким образом, *арккосинусом* числа x называется число y из отрезка $[0; \pi]$ такое, что его косинус равен x . Математически это можно записать так: $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos(\arccos x) = x$, $0 \leq y \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 1$.

Геометрически $\arccos x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен x .

Например, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ (т. к. $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $0 \leq \frac{\pi}{3} \leq \pi$), $\arccos 1 = 0$,

$\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ (ошибочно записывать $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$,

т. к. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]$).

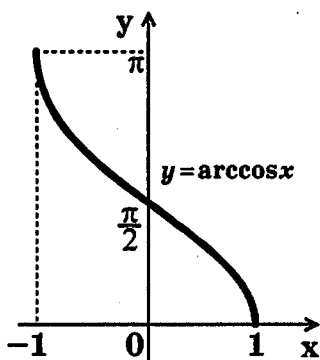


Рис. 104

График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 104. Этот график симметричен графику функции $y = \cos x$ относительно прямой $y = x$.

Основные свойства функции $y = \arccos x$:

а) $D(\arccos x) = [-1; 1]$;

б) $E(\arccos x) = [0; \pi]$;

в) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, т. е.

функция $y = \arccos x$ является функцией общего вида;

г) функция $y = \arccos x$ убывающая;

д) $\cos(\arccos x) = x$ при $x \in [-1; 1]$.

Пример 2. Вычислить: а) $A = \arccos(-1) - \arccos 1 - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)$; г) $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right)$.

Решение.

а) $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$,

$\arccos 1 = 0$. Отсюда $A = \pi - 0 - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$;

б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;

в) обозначим $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{7} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{7}$

(поскольку $0 \leq \alpha \leq \pi$ и, значит, из $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{7} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{7}$). Окон-

чательно $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$;

г) обозначим $\arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{7}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Преобразуем $-\cos\frac{\pi}{7}$ следующим образом: $-\cos\frac{\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) =$

$= \cos\frac{6\pi}{7}$. Тогда получим: $\cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}$. Отсюда $\alpha = \frac{6\pi}{7}$,

т. к. $0 \leq \frac{6\pi}{7} \leq \pi$. Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$; б) $\{\sqrt{3}\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{7}\right\}$; г) $\left\{\frac{6\pi}{7}\right\}$.

Замечание. Связь между $\arcsin x$ и $\arccos x$ задается формулой $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

3. Функция $y = \arctg x$ и ее график

Функция $y = \tg x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает и принимает все числовые значения, т. к. $E(\tg x) = R$. Поэтому функция $y = \tg x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется *арктангенсом* и обозначается $y = \arctg x$. Таким образом, *арктангенсом* числа x называется число y из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что его тангенс равен x . Математически это можно записать так:

$$y = \arctg x \Leftrightarrow \tg(\arctg x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Геометрически $\arctg x$ означает величину угла (дуги), заключенного в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x .

Например, $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (т. к. $\tg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$), $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$,

$$\arctg 0 = 0, \quad \arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

График функции $y = \arctg x$ изображен на рис. 105. Этот график симметричен графику функции $y = \tg x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, относительно прямой $y = x$. Прямые $y = \pm \frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами графика функции $y = \arctg x$.

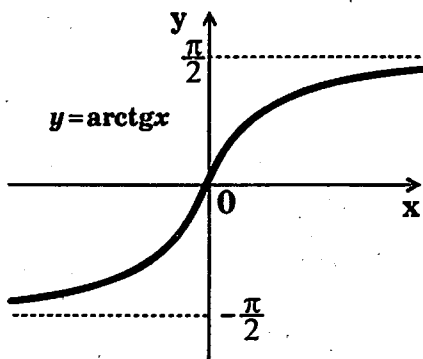


Рис. 105

Основные свойства функции $y = \arctg x$:

а) $D(\arctg x) = (-\infty; \infty)$;

б) $E(\arctg x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\arctg(-x) = -\arctg x$, т. е. функция $y = \arctg x$ является нечетной;

г) функция $y = \arctg x$ является возрастающей;

д) $\tg(\arctg x) = x$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

Пример 3. Вычислить:

а) $A = \arctg 0 + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg \sqrt{3} + \arctg 1$;

б) $\sin(\arctg \sqrt{3})$; в) $\arctg\left(\tg \frac{1}{2}\right)$; г) $\arctg(\tg 2)$.

Р е ш е н и е.

а) $\arctg 0 = 0$, $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Отсюда $A = 0 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 4\pi + 3\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$;

б) $\arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin(\arctg \sqrt{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) обозначим $\arctg\left(\tg \frac{1}{2}\right) = \alpha \Rightarrow \tg \alpha = \tg \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$, т. к.

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и из равенства тангенсов следует равенство самих

углов. Окончательно $\arctg\left(\tg \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$;

г) обозначим $\arctg(\tg 2) = \alpha \Rightarrow \tg \alpha = \tg 2$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Нельзя

записать, что $\alpha = 2$, т. к. 2 не принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Преобразуем $\tg 2$ следующим образом: $\tg 2 = \tg(2 - \pi)$. Тогда

$\tg \alpha = \tg 2 = \tg(2 - \pi) \Rightarrow \alpha = 2 - \pi$, т. к. $-\frac{\pi}{2} < 2 - \pi < \frac{\pi}{2}$. Окончательно

$\arctg(\tg 2) = 2 - \pi$. Ответ: а) $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$; б) $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; г) $\{2 - \pi\}$.

4. Функция $y = \text{arccctg} x$ и ее график

Функция $y = \text{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ убывает и принимает все числовые значения, т. к. $E(\text{ctg} x) = \mathbb{R}$. Поэтому функция $y = \text{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которая называется *арккотангенсом* и обозначается $y = \text{arccctg} x$. Таким образом, *арккотангенсом* числа x называется число y из интервала $(0; \pi)$ такое, что его котангенс равен x . Математически это можно записать так:

$$y = \text{arccctg} x \Leftrightarrow \text{ctg}(\text{arccctg} x) = x, \quad 0 < y < \pi, \quad -\infty < x < \infty.$$

Геометрически $\text{arccctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в интервале $(0; \pi)$, котангенс которого равен x .

Например, $\text{arccctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ (т. к. $\text{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$),

$$\text{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arccctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \quad \text{arccctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{arccctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{5\pi}{6}.$$

График функции $y = \text{arccctg} x$ изображен на рис. 106. Этот график симметричен графику функции $y = \text{ctg} x$ относительно прямой $y = x$. Прямые $y = 0$, $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика функции $y = \text{arccctg} x$.

Основные свойства функции $y = \text{arccctg} x$:

а) $D(\text{arccctg} x) = (-\infty; \infty)$;

б) $E(\text{arccctg} x) = (0; \pi)$;

в) $\text{arccctg}(-x) = \pi - \text{arccctg} x$, т. е. функция $y = \text{arccctg} x$ является функцией общего вида;

г) функция $y = \text{arccctg} x$ убывающая;

д) $\text{ctg}(\text{arccctg} x) = x$ при $x \in (-\infty; \infty)$.

Пример 4. Вычислить

а) $A = \text{arccctg} 0 + \text{arccctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{arccctg} \sqrt{3} + \text{arccctg} 1$;

б) $\cos(\text{arccctg}(-1))$; в) $\text{arccctg}(\text{ctg} 2)$; г) $\text{arccctg}(\text{ctg} 4)$.

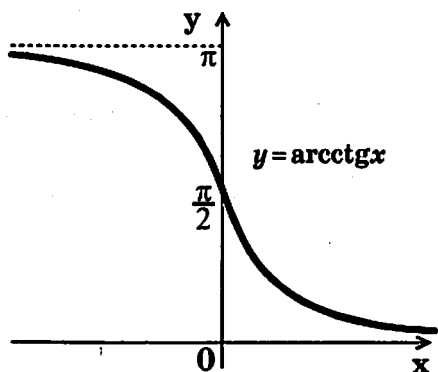


Рис. 106

Решение.

$$\text{а) } \operatorname{arccctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}, \operatorname{arccctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Отсюда } A = \frac{\frac{6}{\pi}}{2} + \frac{\frac{4}{\pi}}{3} + \frac{\frac{2}{\pi}}{6} + \frac{\frac{3}{\pi}}{4} = \frac{6\pi + 4\pi + 2\pi + 3\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4};$$

$$\text{б) } \operatorname{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos(\operatorname{arccctg}(-1)) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

в) обозначим $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 2) = \alpha \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 2 \Rightarrow \alpha = 2$, т. к. $0 < 2 < \pi$. Окончательно $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 2) = 2$;

г) обозначим $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 4) = \alpha \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 4$. Поскольку $4 \notin (0; \pi)$, то преобразуем выражение $\operatorname{ctg} 4$. Используя периодичность функции $y = \operatorname{ctg} x$, получаем $\operatorname{ctg} 4 = \operatorname{ctg}(4 - \pi)$. Тогда $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 4 = \operatorname{ctg}(4 - \pi) \Rightarrow \alpha = 4 - \pi$, поскольку $0 < 4 - \pi < \pi$. Окончательно $\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} 4) = 4 - \pi$.

$$\text{Ответ: а) } \left\{ \frac{5\pi}{4} \right\}; \text{ б) } \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}; \text{ в) } \{2\}; \text{ г) } \{4 - \pi\}.$$

Замечание 2. Связь между функциями $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arccctg} x$ задается формулой $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$.

§151. Тригонометрические функции от обратных тригонометрических функций

1. Тригонометрические функции от $\operatorname{arcsin} x$

Обозначим $\operatorname{arcsin} x = \alpha$. Тогда $\sin \alpha = x$, где $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Пусть $x > 0$. Тогда можно построить прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α , гипотенуза равна 1, а катет, противолежащий углу α , равен x (рис. 107). Тогда по теореме Пифагора вто-

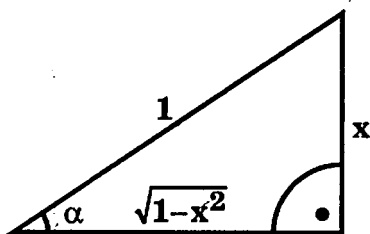


Рис. 107

рой катет равен $\sqrt{1-x^2}$. Имеем

$$\sin \alpha = \frac{x}{1} = x; \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} =$$

$$= \sqrt{1-x^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Т. к. $\alpha = \arcsin x$, то получаем $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$,

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1), \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (x \neq 0).$$

Можно доказать, что если $x \leq 0$, то приведенные выше формулы остаются в силе, т. е. эти формулы справедливы для $|x| \leq 1$.

2. Тригонометрические функции от $\arccos x$

Обозначим $\arccos x = \alpha$. Тогда $\cos \alpha = x$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $-1 \leq x \leq 1$. В отличие от предыдущего случая, в прямоугольном треугольнике теперь уже прилежащий катет нужно положить равным x (рис. 108), а гипотенузу по-прежнему равной 1.

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда $\cos(\arccos x) = x$,

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad (x \neq 0),$$

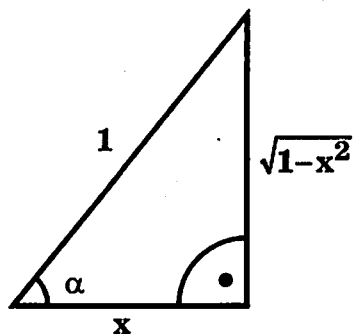


Рис. 108

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1). \quad \text{Формулы верны для } |x| \leq 1.$$

3. Тригонометрические функции от $\arctg x$

Обозначим $\arctg x = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = x$ и в треугольнике нужно положить противолежащий катет равным x , а прилежащий равным 1 (рис. 109). По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{1+x^2}$.

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{1} = x, \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \quad \text{Оконча-}$$

$$\text{тельно получаем } \sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

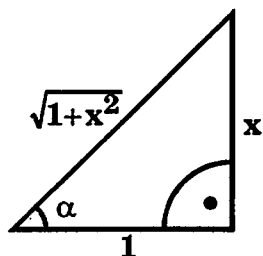


Рис. 109

$\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\operatorname{tg}(\arctg x) = x$, $\operatorname{ctg}(\arctg x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Эти формулы справедливы для любого действительного $x \in (-\infty; \infty)$.

4. Тригонометрические функции от $\operatorname{arctg} x$

Обозначим $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Тогда $\operatorname{ctg} \alpha = x$, значит, в прямоугольном треугольнике прилежащий катет полагаем равным x , противолежащий равным 1 (рис. 110). Тогда гипотенуза равна $\sqrt{1+x^2}$.

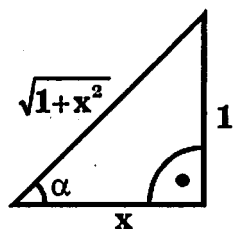


Рис. 110

Из приведенного треугольника получаем $\operatorname{ctg} \alpha = x$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x}$.

Окончательно $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \ (x \neq 0), \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Эти формулы справедливы для любого действительного $x \in (-\infty; \infty)$.

Пример 1. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arccos(-0,8)\right)$.

Решение.

Используя формулы приведения, а также формулу

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ получаем } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \arccos(-0,8)\right) =$$

$$= -\sin(\arccos(-0,8)) = -\sqrt{1-(-0,8)^2} = -\sqrt{1-0,64} = -\sqrt{0,36} = -0,6.$$

Ответ: $\{-0,6\}$.

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}}{\left(-\frac{5}{13}\right)} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{12}{5}\right\}$.

§152. Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнения называются *тригонометрическими*, если неизвестная величина находится под знаком тригонометрических функций. Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Решить простейшее тригонометрическое уравнение — значит найти множество всех углов, имеющих данное значение a тригонометрической функции. Если тригонометрическое уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим, решение которых определяется стандартными формулами.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

1. Уравнение $\sin x = a$

Поскольку $|\sin x| \leq 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет решение только при $|a| \leq 1$. Корни уравнения $\sin x = a$ можно рассматривать как абсциссы точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ с прямой $y = a$ (рис. 111).

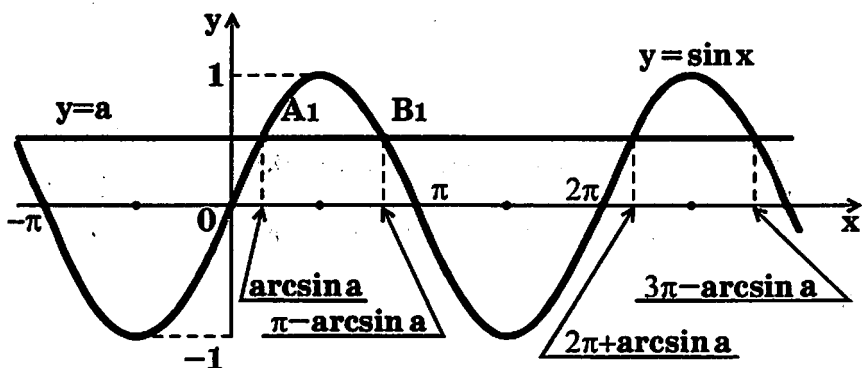


Рис. 111

Пусть $0 < a < 1$. Тогда при $0 < x < \pi$ A_1 и B_1 — точки пересечения синусоиды $y = \sin x$ и прямой $y = a$. Абсциссы этих точек имеют координаты $\arcsin a$ и $\pi - \arcsin a$. С учетом периодичности функции $y = \sin x$ получаем две серии (два множества) решений: $x_1 = \arcsin a + 2k\pi$, $x_2 = \pi - \arcsin a + 2k\pi = -\arcsin a + (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Серии (группы) корней x_1 и x_2 можно представить одной формулой $x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Действительно, если $n = 2k \Rightarrow x = (-1)^{2k} \arcsin a + 2k\pi = \arcsin a + 2k\pi$ (серия корней x_1); если $n = 2k+1 \Rightarrow x = (-1)^{2k+1} \arcsin a + (2k+1)\pi = -\arcsin a + (2k+1)\pi$ (серия корней x_2).

Можно доказать, что формула $x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, дающая решение уравнения $\sin x = a$, остается справедливой и для

$-1 < a < 0$, а также для $a = 0$,

$\sin x = 0$ $a = \pm 1$, т. е. она справедлива для

$x = n\pi$ $|a| \leq 1$. Однако при $a = 0$, $a = \pm 1$

$n \in \mathbb{Z}$ этой формулой пользоваться нецелесообразно.

Рассмотрим, например, уравнение $\sin x = 0$. Используем тригонометрический круг (рис. 112).

Поскольку $\sin \alpha$ — это ордината вектора единичной длины, то решить уравнение $\sin x = 0$, — это фактически найти общий вид углов, оканчивающихся на оси абсцисс. Это будут такие значения: $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi$, т. е. общий вид углов, оканчивающихся на оси абсцисс, есть $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Положения единичного вектора на тригонометрическом круге, когда $\sin x = 1$, показаны на рис. 113.

Решить уравнение $\sin x = 1$, — это фактически написать общий вид углов, оканчивающихся на положительной части оси ординат. Их мож-

но записать так: $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отсюда $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Положение единичного вектора, если $\sin x = -1$, показано на рис. 114. Это общий вид углов, оканчивающихся на отрицательной части оси ординат, и есть решение уравнения $\sin x = -1$, т. е.

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

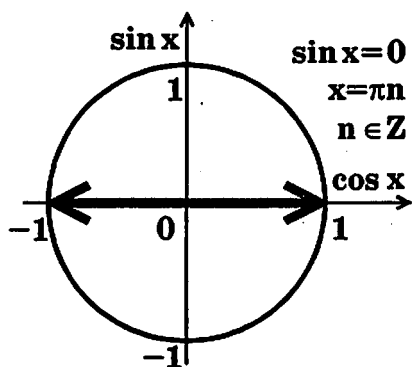


Рис. 112

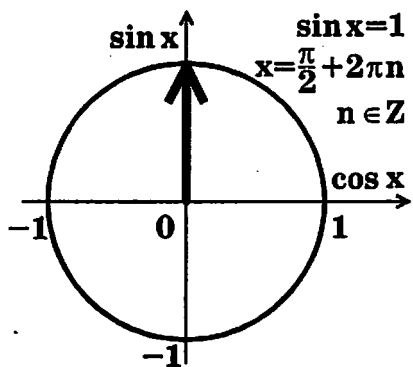


Рис. 113

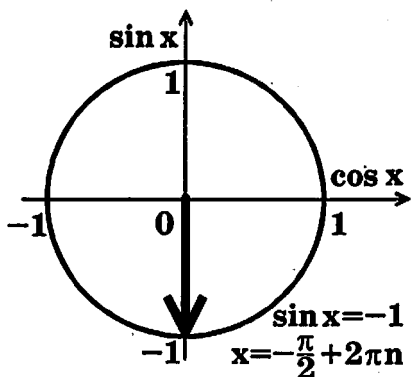


Рис. 114

Таким образом, окончательно получаем

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что для записи решений тригонометрических уравнений очень часто используют символику из теории множеств.

Например, множество решений уравнения $\sin x = 1$ ($x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$) можно записать в виде $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi.$

Ответ: $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 2. Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin \left(-\frac{1}{2} \right) + n\pi =$

$$= (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6} \right) + n\pi = (-1)^n (-1) \frac{\pi}{6} + n\pi = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Ответ: $\left\{ (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 3. Решить уравнение $\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$.

Р е ш е н и е.

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = n\pi \Leftrightarrow 2x = n\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\left\{ x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

2. Уравнение $\cos x = a$

Поскольку $|\cos x| \leq 1$, то уравнение имеет решение только при $|a| \leq 1$. Используя рис. 115 и проводя рассуждения, аналогич-

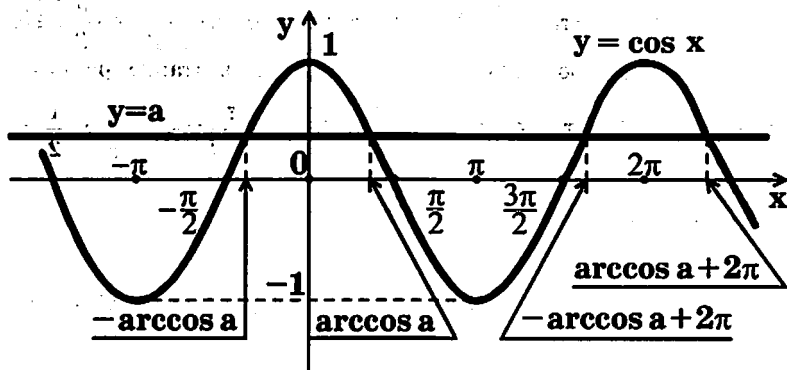


Рис. 115

ные при решении уравнения $\sin x = a$, окончательно получаем:

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для частных случаев $a = 0$, $a = \pm 1$ имеем:

а) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

б) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z};$

в) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Соответствующие геометрические иллюстрации приведены на рис. 116.

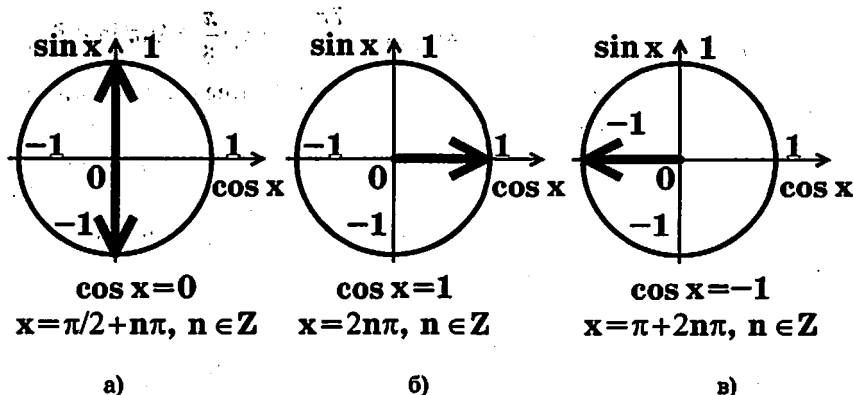


Рис. 116

Пример 4. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Решение. $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Необходимо отметить, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Очень часто приводится ошибочная запись $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Поэтому желательно проверять себя на некоторых этапах решения уравнений. В частности, $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \Rightarrow \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, т. к. $0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 5. Решить уравнение $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

$$\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2n\pi = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 4n\pi = \frac{7\pi}{6} + 4n\pi; x_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 4n\pi = \frac{\pi}{6} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{7\pi}{6} + 4n\pi; \frac{\pi}{6} + 4n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 1 (о форме записи ответа). Приведенная форма записи ответа примера 5 не является единственно правильной. В частности, можно было бы ответ давать следующим образом:

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + 4n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Ответ: } x \in \left\{ \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + 4n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{7\pi}{6} + 4n\pi; x_2 = \frac{\pi}{6} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{7\pi}{6} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{6} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{7\pi}{6} + 4n\pi; \frac{\pi}{6} + 4k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

Используя рис. 117, нетрудно доказать, что все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$ задаются формулой $x = \operatorname{arctg} a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

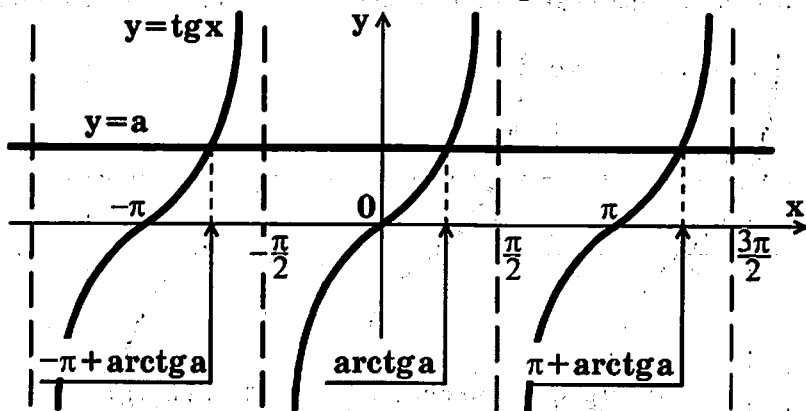


Рис. 117

Для частных случаев, когда $a = 0$, $a = \pm 1$, получаем:

$$a = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$a = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$a = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{3} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 7. Решить уравнение $\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{5} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение.

$$\operatorname{tg} \left(2x + \frac{\pi}{5} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{5} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + n\pi = -\frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} + n\pi = -\frac{11\pi}{30} + n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{60} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{11\pi}{60} + \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

4. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$

Используя рис. 118, нетрудно доказать, что все корни уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ определяются соотношением $x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} a + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

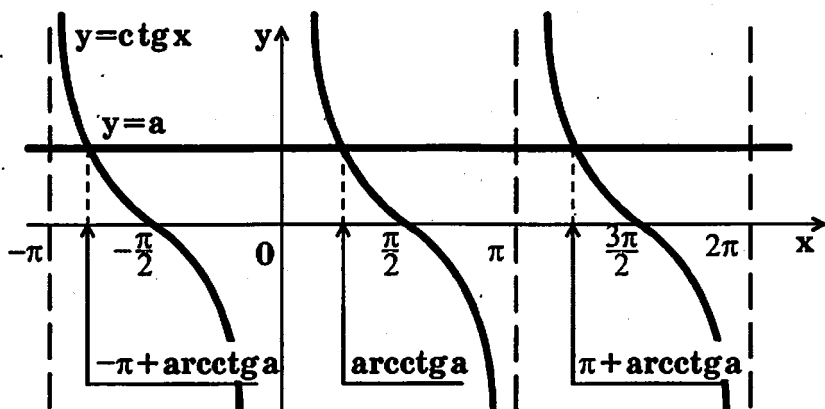


Рис. 118

Для частных случаев $a=0$, $a=\pm 1$ получаем:

$$a=0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$a=1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$a=-1 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\text{или } x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}).$$

Пример 8. Решить уравнение $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$.

Решение. $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{3} + n\pi = \frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 9. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3}.$

Решение.

$$\operatorname{ctg}^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arccctg} \frac{\sqrt{3}}{3} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arccctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + n\pi = \frac{7\pi}{12} + n\pi \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + k\pi = \frac{11\pi}{12} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}; \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 2 (о форме записи ответа). Ответ к примеру 9 можно дать еще в следующих формах:

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}; \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{7\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}, x_2 = \frac{11\pi}{24} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

В последней форме записи ответа целочисленные параметры в различных сериях (множествах) решений уравнения обозначены одной и той же буквой n , а не разными буквами, как в других формах записи. В тех же случаях, когда элементы множества сравниваются между собой, нужно использовать разные буквы для обозначения целочисленных параметров. К этому вопросу мы вернемся немного позже.

Пример 10. Решить уравнение $\operatorname{ctg}(x^2) = -1$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}(x^2) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{\pi}{4} + n\pi}, \text{ если}$$

$$-\frac{\pi}{4} + n\pi \geq 0 \Rightarrow n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{-\frac{\pi}{4} + n\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Завершая рассмотрение простейших тригонометрических уравнений, приведем таблицу решений простейших тригонометрических уравнений (табл. 12).

Таблица 12

Решение простейших тригонометрических уравнений

Значение a	$\sin x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$ a < 1$	$(-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\pm \arcsin a + 2\pi n$	$\arctg a + \pi n$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n$
$ a > 1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\arctg a + \pi n$	$\operatorname{arcctg} a + \pi n$
$a = 0$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$
$a = 1$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$2\pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$	$\frac{\pi}{4} + \pi n$
$a = -1$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\pi + 2\pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$

Во всех приведенных формулах таблицы $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что при $a=0$, $a=\pm 1$ общими формулами также можно пользоваться, они дают верный результат, однако зачастую эти формулы не имеют компактного вида. Например, если

использовать частные случаи, то $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если же воспользоваться общей формулой, то $\sin x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin 1 + k\pi = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ — это одно и то же множество.

Действительно,

$$\text{при } k = 2n \Rightarrow x = (-1)^{2n} \arcsin 1 + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{при } k = 2n + 1 \Rightarrow x = (-1)^{2n+1} \arcsin 1 + (2n+1)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n + \pi =$$

$= \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, множества решений, полученные двумя способами, совпадают.

Замечание 3. При решении тригонометрических уравнений (и, в частности, простейших) с равным успехом можно пользоваться и радианной, и градусной мерами. Так, например,

$$\text{а) } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ (используется радианная мера);}$$

б) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}$ (используется градусная мера). При этом следует, однако, знать, что можно использовать либо только радианную, либо только градусную меры, т. е. нельзя использовать в одном и том же решении частично радианную и частично градусную меры. Так, *нельзя записывать*

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ или } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = 90^\circ + 2n\pi, \text{ а нужно записывать так, как приведено выше, т. е. } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ или } x = 90^\circ + 360^\circ n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 4. Помимо обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arccctg} x$ пользуются *многозначными обратными тригонометрическими функциями*: $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$.

При этом $\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + n\pi$, $\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2n\pi$, $\operatorname{Arctg} x = \arctg x + n\pi$, $\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arccctg} x + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccctg} x$ называют *главными значениями* соответственно арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса.

С применением многозначных обратных тригонометрических функций решение простейших тригонометрических уравнений можно записать так: $\sin x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{Arcsin} a$; $\cos x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{Arccos} a$; $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{Arctg} a$; $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{Arcctg} a$.

Замечание 5. При решении тригонометрических уравнений вида $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций

$(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$, их сводят к системам вида $\begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) \neq 0, \end{cases}$ т. е. необходимо исключать из решения те значения x , для которых $\varphi(x)$ обращается в нуль.

Пример 11. Решить уравнение $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \text{ Отсюда}$$

$n\pi \neq 2\pi k \Rightarrow n \neq 2k$, т. е. подходят только $n = 2k + 1$. Таким образом, $x = (2k + 1)\pi = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 12. Решить уравнение $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$.

Решение.

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ 1 + \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{\pi}{2} + n\pi \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{1}{2} + n \neq -\frac{1}{2} + 2k \Rightarrow n \neq 2k - 1 \Rightarrow$ подходят только четные n , т. е. $n = 2k$. Таким образом,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 13. Решить уравнение $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$.

Решение.

$$\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ 1 + \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Ответ: $\emptyset$.

Пример 14. Решить уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$.

$$\text{Решение. } \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда $n\pi \neq \pi + 2k\pi \Rightarrow n \neq 2k + 1 \Rightarrow$ подходят только четные n , т. е. $n = 2k$. Таким образом, $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

§153. Основные методы решения тригонометрических уравнений

Решения тригонометрических уравнений основываются на использовании свойств тригонометрических функций и основных соотношений между ними.

Рассмотрим основные методы решения тригонометрических уравнений. Эти уравнения в конечном итоге сводятся к простейшим, решение которых уже рассмотрено ранее.

1. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители

Применение этого метода основано на том, что уравнение

$f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ равносильно совокупности уравнений $\begin{cases} f(x) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$ в области определения уравнения $f(x) \cdot \varphi(x) = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $2\cos x \cos 3x = \cos x$.

Решение.

$$2\cos x \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos x \cos 3x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2\cos 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ 2\cos 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi; \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 1. Целочисленные параметры в приведенном ответе можно обозначать одной и той же буквой, т. е. ответ можно записать так:

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi; \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 2. При решении уравнений с применением равносильных (эквивалентных) преобразований нередко вместо символа $\Leftrightarrow$ ставят точку с запятой, запятую или не ставят вообще никакого знака препинания. Иногда решение нужно для ясности сопровождать комментариями, разъясняющими суть решения. Так, например, форма записи решения примера 1 может быть следующей:

$$2\cos x \cos 3x = \cos x, \quad 2\cos x \cos 3x - \cos x = 0, \quad \cos x (2\cos 3x - 1) = 0.$$

Теперь задача свелась к решению совокупности уравнений $\cos x = 0$, $2\cos 3x - 1 = 0$. Из уравнения $\cos x = 0$ находим $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Из уравнения $2\cos 3x - 1 = 0$ находим $\cos 3x = \frac{1}{2}$ и далее $3x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, т. е. $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, решение исходного уравнения таково:

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ (в различных сериях решений можно писать x с индексами, т. е. x_1 и x_2).

Пример 2. Решить уравнение $7\sin x \cos 3x = \sin x$.

Решение.

$$7\sin x \cos 3x = \sin x \Leftrightarrow 7\sin x \cos 3x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(7\cos 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ 7\cos 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{7} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ n\pi; \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{7} + \frac{2k\pi}{3} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

Решение. Применяя формулу понижения степени

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x, \text{ получаем } (1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 2x \sin 2x - \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x(2\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 2x = 0, \\ 2\sin 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}; (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

При решении уравнений методом разложения на множители оно может оказаться не равносильным полученной совокупности уравнений, поскольку возможно появление посторонних корней. Чтобы избежать ошибок в ответе, желательно находить ОДЗ (если ОДЗ — множество действительных чисел, то об ОДЗ обычно не упоминается) и при записи ответа исключить решения, не удовлетворяющие ОДЗ.

Пример 4. Решить уравнение $(\sin x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$.

Приведем две формы записи решения исходного уравнения.

1 форма записи решения.

$$\text{ОДЗ: } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Находим значения x , удовлетворяющие уравнениям $\sin x - 1 = 0$ и $\operatorname{tg} x + 1 = 0$; если $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; \text{ если } \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку в силу ОДЗ $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, то серия решений $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ непригодна, она не входит в ОДЗ и ответом является только вторая серия решений $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2 форма записи решения.

$$(\sin x - 1)(\operatorname{tg} x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x - 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1 = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Способ приведения тригонометрического уравнения к одной из функций

Если уравнение, содержащее две или более тригонометрические функции, удастся свести к какой-либо одной ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д.), то после соответствующей замены переменной тригонометрическое уравнение преобразуется в алгебраическое относительно сделанной замены переменной. Если алгебраическое уравнение удастся решить, то тем самым исходное уравнение сводится к одному или к совокупности нескольких простейших уравнений.

Особо отметим тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным уравнениям. Здесь часто используется основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha x = 1$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin x + 2\cos^2 x - 1 = 0$.

Решение. Заменяя $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, получим $\sin x + 2(1 - \sin^2 x) - 1 = 0$, $-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$, $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Положив $\sin x = t$, получаем квадратное уравнение $2t^2 - t - 1 = 0$.

Решая это уравнение, находим $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Если

$\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi ; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 6. Решить уравнение $\cos^4 2x - 6\sin^2 2x = -\frac{71}{16}$.

Решение. Учитывая, что $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$, и обозначив $\cos^2 2x = t$, получаем уравнение $t^2 + 6t - \frac{25}{16} = 0$, корни которого $t_1 = -\frac{25}{4}$, $t_2 = \frac{1}{4}$. Уравнение $\cos^2 2x = -\frac{25}{4}$ корней не имеет, а уравнение $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$ можно решить двумя способами.

$$1 \text{ способ. } \cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2 \text{ способ. } \cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2}, \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Можно показать, что серии корней, полученные вторым способом, совпадают с серией, полученной первым способом.

Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 7. Решить уравнение $2\operatorname{tg}^4 3x - \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 3x} + 1 = 0$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0, \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поскольку $\frac{1}{\operatorname{ctg} 3x} = \operatorname{tg} 3x$, то после замены $\operatorname{tg}^2 3x = t$ приходим к квадратному уравнению $2t^2 - 3t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\operatorname{tg}^2 3x = 1$ находим $\operatorname{tg} 3x = \pm 1 \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$. Из уравнения $\operatorname{tg}^2 3x = \frac{1}{2}$ находим $\operatorname{tg} 3x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 3x = \pm \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + k\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{3} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что все серии корней входят в ОДЗ.

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3}; \pm \frac{1}{3} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{k\pi}{3} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Решение тригонометрических уравнений, однородных относительно синуса и косинуса, а также приводимых к однородным

Однородными тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

$$a_0 \sin \alpha x + a_1 \cos \alpha x = 0 \quad (\text{однородные уравнения 1-й степени});$$

$$a_0 \sin^2 \alpha x + a_1 \sin \alpha x \cos \alpha x + a_2 \cos^2 \alpha x = 0 \quad (\text{однородные уравнения 2-й степени});$$

$$a_0 \sin^3 \alpha x + a_1 \sin^2 \alpha x \cos \alpha x + a_2 \sin \alpha x \cos^2 \alpha x + a_3 \cos^3 \alpha x = 0 \quad (\text{однородные уравнения 3-й степени});$$

$$a_0 \sin^k \alpha x + a_1 \sin^{k-1} \alpha x \cos \alpha x + a_2 \sin^{k-2} \alpha x \cos^2 \alpha x + a_3 \sin^{k-3} \alpha x \cos^3 \alpha x + \dots + a_k \cos^k \alpha x = 0 \quad (\text{однородные уравнения } k\text{-й степени}).$$

Видим, что у всех слагаемых однородных уравнений сумма показателей степеней одинакова.

Уравнение $a_0 \sin^2 \alpha x + a_1 \sin \alpha x \cos \alpha x + a_2 \cos^2 \alpha x = c$ при $c \neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному

уравнению 2-й степени, заменив число с тождественно равным ему выражением $c(\sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha x)$.

Для решения однородных уравнений в случае $a_0 \neq 0$ рассмотрим такие значения x , для которых $\cos \alpha x = 0$. Тогда из исходного однородного уравнения следует, что при тех же значениях x должно быть и $\sin \alpha x = 0$, а это невозможно, т. к. противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \alpha x + \cos^2 \alpha x = 1$. Отсюда решениями однородных уравнений (при $a_0 \neq 0$) могут быть только такие значения x , для которых $\cos \alpha x \neq 0$. Отсюда однородное тригонометрическое уравнение можно свести к уравнению относительно $\operatorname{tg} \alpha x$, если все его члены разделить на $\cos^k \alpha x$ и при этом (если $a_0 \neq 0$) такое деление не приведет к потере решений, поскольку значения x , при которых $\cos \alpha x = 0$, не удовлетворяют исходному уравнению. Если же $a_0 = 0$, то такое деление приведет к потере корней и, значит, в ответ следует включить решения уравнения $\cos \alpha x = 0$, т. е. $x = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{n\pi}{\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Решить уравнение $2\sin x + 3\cos x = 0$.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на $\cos x \neq 0$, получим $2\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \arctg\left(-\frac{3}{2}\right) + n\pi = -\arctg\frac{3}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\left\{-\arctg\frac{3}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Пример 9. Решить уравнение $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части исходного уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получаем $\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$, откуда $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \arctg 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + n\pi, \arctg 3 + k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Пример 10. Решить уравнение $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$.

Решение. Исходное уравнение не является однородным, однако оно легко сводится к однородному 2-й степени после замены $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \quad (\cos^2 x \neq 0) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg} 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi; \operatorname{arctg} 2 + k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 11. Решить уравнение $\sin^3 x - 2\sin^2 x \cos x + \cos^3 x = 0$.

Решение. Исходное уравнение является однородным уравнением 3-й степени. Разделив обе части его на $\cos^3 x \neq 0$, получим $\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$. Обозначив $\operatorname{tg} x = y$, получаем $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$. Поскольку $y=1$ является корнем этого уравнения, то имеем

$$y^3 - 2y^2 + 1 = (y-1)(y^2 - y - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1, \\ y_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + n\pi, \\ x = \operatorname{arctg} \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right) + n\pi, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + n\pi; \operatorname{arctg} \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right) + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

При использовании универсальной подстановки функции $\sin x$, $\cos x$ несложно выражаются через $\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$ по следующим формулам:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Поскольку использование универсальной подстановки возможно лишь при $x \neq \pi + 2n\pi$, то нужно проверять, не являются ли числа вида $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ решениями исходного уравнения.

Пример 12. Решить уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

Решение. Выполнив в исходном уравнении подстанов-

ку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получаем уравнение $2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{3}$. Из уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ получаем $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Из уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Остается проверить, не удовлетво-

ряют ли исходному уравнению числа $x = \pi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Подстав-

ляя $x = \pi + 2m\pi$ в исходное уравнение, имеем: $2\sin(\pi + 2m\pi) +$

$+\cos(\pi + 2m\pi) = 2 \cdot 0 + (-1) = -1 \neq 2$; значит, числа $x = \pi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$

не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi; 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 13. Решить уравнение $2\sin x - \cos x = 1$.

Решение.

Выражая $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и полагая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$,

приходим к рациональному уравнению $2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$.

Решив это уравнение, получаем $t = \frac{1}{2}$. Из уравнения

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ находим x : $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + n\pi \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Проверяем, не являются ли числа вида $x = \pi + 2k\pi$ решени-

ями исходного уравнения. Имеем при $x = \pi + 2k\pi$:

$$2\sin(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) = 2 \cdot 0 - (-1) = 1; 1 = 1 \Rightarrow$$

$x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\left\{ 2\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2n\pi; \pi + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Метод введения вспомогательного аргумента

Иногда при решении тригонометрических уравнений полезно воспользоваться формулой $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, где

$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. В этом случае φ называется *вспомогательным аргументом* или *вспомогательным углом*.

Пример 14. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$.

Решение.

Поскольку $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, то $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos x \right) = 1 \Leftrightarrow 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ В процессе решения мы учли тот факт,}$$

что если $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, то φ можно положить равным $\frac{\pi}{6}$.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 3. Пример 14 можно решить еще, например, такими способами:

$$\text{а) } \sqrt{3} \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2n\pi, \\ \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi + 2n\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

б) Применяя универсальную тригонометрическую подстановку

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \text{ получаем } \sqrt{3} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Необходимо проверить еще серию корней $x = \pi + 2n\pi$. Проверкой убеждаемся, что значения $x = \pi + 2n\pi$ удовлетворяют исходному уравнению, т. е. являются решениями.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2n\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Заметим, что ответ $\left\{ \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ совпадает с полученными способами а) и б), если положить $n=2k$ и $n=2k+1$. При этом в обеих сериях решений целочисленный параметр будет обозначен одной буквой k .

Пример 15. Решить уравнение $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 5x = 1$.

Решение. Вспомогательный угол можно ввести следующим образом: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \varphi = \frac{1}{2}$, тогда $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Отсюда

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin \frac{\pi}{3}} \cos 5x + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos \frac{\pi}{3}} \sin 5x = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cos 5x + \sin 5x \cos \frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin \left(5x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{30} + \frac{2n\pi}{5} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 16. Решить уравнение $3 \sin x + 2 \cos x = 1$.

Решение.

$$3 \sin x + 2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} \left(\sin x \cdot \frac{3}{\frac{\sqrt{13}}{\cos \varphi}} + \cos x \cdot \frac{2}{\frac{\sqrt{13}}{\sin \varphi}} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} \sin(x + \varphi) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{13}} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}$, то в качестве φ

можно взять $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$, или $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$, или $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Окончательно решение может быть записано в виде $x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{13}} + n\pi$ (вместо $-\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ можно записать $-\arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$

или $-\arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$). Ответ: $\left\{ -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{13}} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Замечание 4. Тригонометрические уравнения $a \sin x + b \cos x = c$, как мы видим из примера 14, можно решать помимо метода введения вспомогательного аргумента и при помощи универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Однако недостатком этой подстановки является тот факт, что приходится дополнительно проверять серию решений $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, т. к. числа вида $x = \pi + 2n\pi$ могут быть решениями исходного уравнения. Этого недостатка лишен метод введения вспомогательного аргумента.

6. Решение уравнений преобразованием суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

Пример 17. Решить уравнение $\sin \alpha x = \sin \beta x$.

Решение. $\sin \alpha x = \sin \beta x \Leftrightarrow \sin \alpha x - \sin \beta x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2} \cos \frac{(\alpha + \beta)x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{(\alpha - \beta)x}{2} = 0, \\ \cos \frac{(\alpha + \beta)x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\alpha - \beta)x}{2} = n\pi, \\ \frac{(\alpha + \beta)x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2n\pi}{\alpha - \beta}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi + 2k\pi}{\alpha + \beta}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{2n\pi}{\alpha - \beta}; \frac{\pi + 2k\pi}{\alpha + \beta} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 18. Решить уравнение $\sin \alpha x = \cos \beta x$.

Решение. Используя формулу приведения $\cos \beta x =$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right), \text{ получаем } \sin \alpha x = \cos \beta x \Leftrightarrow \sin \alpha x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{\alpha x - \frac{\pi}{2} + \beta x}{2} \cos \frac{\alpha x + \frac{\pi}{2} - \beta x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{(\alpha + \beta)x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0, \\ \cos \frac{(\alpha - \beta)x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\alpha + \beta}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{\alpha - \beta}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi + 4n\pi}{2(\alpha + \beta)}; \frac{\pi + 4k\pi}{2(\alpha - \beta)} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 19. Решить уравнение $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$.

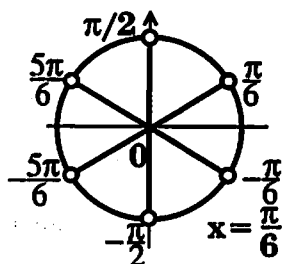
Решение. Поскольку $\sin 2x - \sin 4x = 2\sin(-x)\cos 3x = -2\sin x \cos 3x$, то имеем $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos 3x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0, \\ 1 - 2\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

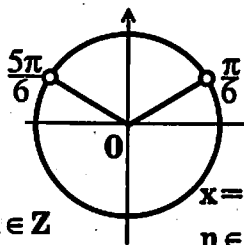
Изобразив множество решений $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ и $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ на рис. 119, видим, что множество решений $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$

целиком содержится в множестве $x = \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}$. Поэтому ответом

служит только это множество. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.



а)



б)

Рис. 119

7. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Пример 20. Решить уравнение $\cos 3x \cos 9x = \cos x \cos 7x$.

Решение. Применяя формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 6x) &= \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 8x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2\sin 10x \sin 2x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 10x = 0, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = n\pi, \\ 2x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Серия решений $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ является подмножеством серии решений $x = \frac{n\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}$, поэтому в ответе нужно записать $x = \frac{n\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}$ (при $n = 5k$ серии $x = \frac{n\pi}{10}$ и $x = \frac{k\pi}{2}$ совпадают).

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{n\pi}{10} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 5. Поскольку элементы множеств $\frac{n\pi}{10}$ и $\frac{k\pi}{2}, n, k \in \mathbb{Z}$ сравниваются между собой, то для обозначения целочисленных параметров в примере 20 необходимо использовать различные буквы.

8. Тригонометрические уравнения, решаемые с применением формул понижения степени

При решении подобного рода уравнений пользуются формулами понижения степени $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Пример 21. Решить уравнение $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$.

Решение. Применяя формулу понижения степени $\cos^2 \alpha x = \frac{1 + \cos 2\alpha x}{2}$, получаем $\frac{1 + \cos 6x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0 \Leftrightarrow \cos 10x + \cos 6x + \cos 8x = 0$.

Применяя к первым двум слагаемым формулу преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение, получаем: $2\cos 8x \cos 2x + \cos 8x = 0 \Leftrightarrow \cos 8x(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 8x = 0, \\ 2\cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{16} + \frac{n\pi}{8}; \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 22. Решить уравнение $\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}$.

Решение. Поскольку $\sin^8 2x = (\sin^2 2x)^4 = \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^4$,

$\cos^8 2x = (\cos^2 2x)^4 = \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)^4$, то возведя в 4-ю степень с использованием треугольника Паскаля, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1 - 4\cos 4x + 6\cos^2 4x - 4\cos^3 4x + \cos^4 4x}{16} + \\ & + \frac{1 + 4\cos 4x + 6\cos^2 4x + 4\cos^3 4x + \cos^4 4x}{16} = \frac{41}{128} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 16\cos^4 4x + 96\cos^2 4x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 4x = \frac{1}{4}, \\ \cos^2 4x = -\frac{25}{4} \Leftrightarrow \cos^2 4x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 8x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

9. Решение уравнений с применением формул двойного и тройного аргументов

Пример 23. Решить уравнение $\sin 2x = \cos x$.

Решение. В левой части применим формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Делить обе части полученного уравнения на $\cos x$ нельзя, поскольку это приведет к потере решений, являющихся корнями уравнения $\cos x = 0$. Получаем

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi; (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 24. Решить уравнение $\sin x = \cos 2x$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение, используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$\begin{aligned} \sin x = \cos 2x &\Leftrightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}. \\ &\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Замечание 6. Ответ к примеру 24 можно дать и с помощью полученных двух серий решений, поскольку эти множества не пересекаются.

Пример 25. Решить уравнение $\sin 3x = 4\sin x \cos 2x$.

Решение.

Используя формулу $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, получаем

$$\sin 3x = 4\sin x \cos 2x \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - 4\sin x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(3 - 4\sin^2 x - 4\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, & (a) \\ 3 - 4\sin^2 x - 4\cos 2x = 0. & (б) \end{cases}$$

Уравнение (а) имеет множество решений $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение (б) после применения формулы $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$$\text{приводится к виду } 3 - 2(1 - \cos 2x) - 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } \left\{ n\pi; \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

10. Решение уравнений с помощью замены переменных

В некоторых ранее рассмотренных уравнениях применялась замена переменной, когда эти уравнения приводились к алгебраическим относительно одной из тригонометрических функций. Рассмотрим более сложные случаи замены переменных.

Если уравнение содержит одно из выражений $(\sin x + \cos x)$ или $(\sin x - \cos x)$ и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x \cos x$), то, вводя новую переменную $t = \sin x + \cos x$ или $t = \sin x - \cos x$, приходим к уравнению относительно t . Это связано с тем, что если обозначить $t = \sin x + \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$;

если обозначить $t = \sin x - \cos x \Rightarrow t^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$.

Пример 26.

Решить уравнение $5(\sin x + \cos x)^2 - 13(\sin x + \cos x) + 8 = 0$.

Решение. Обозначив $t = \sin x + \cos x$, получаем

$$5t^2 - 13t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, & (a) \\ t_2 = 1,6. & (б) \end{cases}$$

Рассмотрим каждое из уравнений совокупности в отдельности.

$$(a) \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что уравнение $\sin x + \cos x = 1$ можно было бы решать, применяя формулы $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ и $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, т. е.

$$2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Этот ответ совпадает с полученным ранее, т. к., полагая $n=2m$ и $n=2k+1$, получаем совпадение ответов.

(б) $\sin x + \cos x = 1,6 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, поскольку

$$|\sin x + \cos x| = \left| \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}, \text{ а число } 1,6 > \sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 27. Решить уравнение $4 - 4(\cos x - \sin x) - \sin 2x = 0$.

Решение. Обозначив $t = \cos x - \sin x$, получаем $t^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$. Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$4 - 4t - (1 - t^2) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 1, & (a) \\ \cos x - \sin x = 3. & (б) \end{cases}$$

Уравнение (а) решается проще всего методом введения вспомогательного угла: $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) =$

$$= \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Второе уравнение совокупности (б) решений не имеет, поскольку $|\cos x - \sin x| = \left| \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$, а число $3 > \sqrt{2}$.

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

11. Решение тригонометрических уравнений вида

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

Пример 28. Решить уравнение $\sqrt{\cos x} = \sin x$.

Решение.

$$\sqrt{\cos x} = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x \geq 0, \\ (\sqrt{\cos x})^2 = (\sin x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, \text{ т. к.}$$

вторая серия решений со знаком « $\rightarrow$ » не удовлетворяет неравенству

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ответ: } \left\{ \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 7. Если быть более точным, то

$$\sqrt{\cos x} = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ (\sqrt{\cos x})^2 = (\sin x)^2. \end{cases}$$

Однако такая эквивалентность (без лишнего неравенства $\cos x \geq 0$ в системе) обладает, по мнению автора, меньшей наглядностью, чем приведенная в решении примера 28 эквивалентность.

12. Решение тригонометрических уравнений с использованием ограниченности функций $y = \sin x$, $y = \cos x$

Решая подобные уравнения, нередко приходят к системам тригонометрических уравнений.

Пример 29. Решить уравнение $\cos \frac{x}{2} + \cos 2x = 2$.

Решение. Т. к. $\cos \frac{x}{2}$, $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, то сумма их равна 2 тогда и только тогда, когда $\cos \frac{x}{2} = 1$, $\cos 2x = 1$ одновременно. Отсюда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

(поскольку серия решений $x = 4n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ входит полностью в серию $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $\{4n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 30. Решить уравнение $3\sin^7 x + 5\cos^{16} x = 8$.

Решение. Поскольку $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, то

$$|3\sin^7 x + 5\cos^{16} x| \leq 3|\sin^7 x| + 5|\cos^{16} x| \leq 3 + 5 = 8.$$

Знак равенства с учетом приведенных неравенств может иметь место только в том случае, когда

$$\begin{cases} \sin^7 x = 1, \\ \cos^{16} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ |\cos x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ (поскольку } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{)}.$$

Ответ: $\emptyset$.

Пример 31. Решить уравнение $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5$.

Решение. Сравним множества значений левой и правой частей исходного уравнения. Для левой части уравнения $|\cos 4x - \cos 2x| \leq 2 \Rightarrow$ левая часть не превосходит $2^2 = 4$. Для правой части уравнения имеем $\sin 3x + 5 \geq 4$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\sin 3x = -1$. Таким образом, исходное уравнение может иметь решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |\cos 4x - \cos 2x| = 2, & (a) \\ \sin 3x = -1. & (б) \end{cases}$$

Решая уравнение (а), получаем $\begin{cases} \cos 4x - \cos 2x = 2 \\ \cos 4x - \cos 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0 \\ 2\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Уравнение (б)} \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ (поскольку}$$

первая серия решений $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ полностью входит во вторую

серию $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2m\pi}{3}$ только при $k=2n$). Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 32. Решить уравнение $\sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = 2 - \operatorname{ctg}^2 x$.

Решение. ОДЗ: $\sin x > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Поскольку для любого $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$, то левая часть исходного уравнения $\sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \geq 2$. Знак равенства имеет место при $\sqrt{\sin x} = 1$. Правая часть уравнения $2 - \operatorname{ctg}^2 x \leq 2$, знак равенства имеет место при $\operatorname{ctg} x = 0$. Отсюда $\sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{\sin x}} = 2 - \operatorname{ctg}^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\sin x} = 1, \\ \operatorname{ctg} x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Пример 33. Решить уравнение $\sin 7x \sin 5x = 1$.

Решение. Применяя формулу для произведения синусов, получаем $\sin 7x \sin 5x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 12x) = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \cos 12x = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 12x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Выясним, пересекаются ли множества $x = n\pi$ и $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$.

Приравняв правые части, получаем $n\pi = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \Leftrightarrow n = \frac{1}{12} + \frac{k}{6} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 12n = 1 + 2k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$

Из последнего уравнения видно, что оно не имеет решений в целых числах, поскольку слева четное число ($12n$), а справа нечетное ($1 + 2k$). Отсюда исходное уравнение решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

§154. Решение тригонометрических уравнений с применением комбинированных способов

Пример 1. Решить уравнение $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = -\frac{1}{4}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) =$$

$$= 2 \frac{\sin x \cos x}{2} (-\cos 2x) = -\frac{\sin 2x \cos 2x}{2} = -\frac{2 \sin 2x \cos 2x}{4} = -\frac{\sin 4x}{4}.$$

Отсюда исходное уравнение равносильно уравнению $-\frac{\sin 4x}{4} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \frac{1}{8}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x &= \sin^2 x \sin x \sin 3x + \cos^2 x \cos x \cos 3x = \\ &= \sin^2 x \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) + \cos^2 x \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) = \\ &= \frac{1}{2} (\sin^2 x \cos 2x - \sin^2 x \cos 4x + \cos^2 x \cos 4x + \cos^2 x \cos 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \left((\sin^2 x + \cos^2 x) \cos 2x + \cos 4x (\cos^2 x - \sin^2 x) \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x \cos 2x) = \frac{\cos 2x (1 + \cos 4x)}{2} = \frac{\cos 2x \cdot 2 \cos^2 2x}{2} = \cos^3 2x. \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно такому:

$$\cos^3 2x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \cos 2x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2n\pi = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x = \frac{3}{8}$.

Решение.

Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$\begin{aligned} \sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin^3 x &= \sin 3x \cos x \cos^2 x + \cos 3x \sin x \sin^2 x = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \cos^2 x + \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin 2x) \sin^2 x = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 4x \cos^2 x + \sin 2x \cos^2 x + \sin 4x \sin^2 x - \sin 2x \sin^2 x) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 4x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(\sin 4x + \frac{\sin 4x}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \sin 4x}{2} = \frac{3 \sin 4x}{4}.$$

Получаем, что исходное уравнение равносильно следующему:

$$\frac{3 \sin 4x}{4} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } \left\{ (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{n\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 4.

Решить уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} x = 1$.

Решение. Преобразуем левую часть исходного уравнения:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ) + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ.$$

Отсюда исходное уравнение эквивалентно такому:

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ) + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ} = \left(\frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ} \right)^{-1} = (\operatorname{tg}(10^\circ + 50^\circ))^{-1} =$$

$$= (\operatorname{tg} 60^\circ)^{-1} = (\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + n\pi = \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 5. Решить уравнение $8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$.

Решение. Приведем два способа решения исходного уравнения.

1 способ.

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 8\cos^2 x (\cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^2 x (-\sin^2 x) - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -8\sin^2 x \cos^2 x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2(2\sin x \cos x)^2 - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(1 - \cos 4x) - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + \cos 4x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -2\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{5x}{2} = 0, \\ \sin \frac{3x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2n\pi}{5}; \frac{2k\pi}{3} \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Замечание 1. При записи ответа к примеру 5 желательно потребовать дополнительного условия $n \neq 5l, l \in \mathbb{Z}$. В этом случае приведенные серии решений не пересекались бы.

2 способ.

Положив $\cos x = t$, получаем $8t^4 - 8t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8t^2(t^2 - 1) - (t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[8t^2(t + 1) - 1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(8t^3 + 8t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 & (a) \\ 8t^3 + 8t^2 - 1 = 0 & (б). \end{cases}$$

Уравнение (а) имеет корень $t = 1$.

Для решения уравнения (б) заметим, что его корни нужно искать в виде $\frac{p}{q}$, где p — делитель 1, а q — делитель 8. Таким образом, корни уравнения (б) нужно искать среди чисел $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$. Подбором находим, что $t = -\frac{1}{2}$ — корень уравнения (б). Тогда по теореме Безу $8t^3 + 8t^2 - 1$ делится без остатка на $t + \frac{1}{2}$. Разделив $8t^3 + 8t^2 - 1$ на $t + \frac{1}{2}$ «углом», получаем

$$\frac{8t^3 + 8t^2 - 1}{t + \frac{1}{2}} = 8t^2 + 4t - 2 \Rightarrow 8t^3 + 8t^2 - 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)(8t^2 + 4t - 2).$$

$$\text{Отсюда } 8t^3 + 8t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)(8t^2 + 4t - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Тогда исходное уравнение равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2}, \\ \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ 2n\pi; \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \pm \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2m\pi \mid n, k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$

Замечание 2. Ответ, полученный первым способом, по внешнему виду отличается от ответа, полученного вторым способом. Однако можно показать, что эти ответы совпадают.

Пример 6. Решить уравнение $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \frac{1}{16}$.

Решение. Умножим правую и левую части исходного уравнения на $16\sin x$. При этом возможно появление посторонних корней, которые являются решениями уравнения $\sin x = 0$. Поэтому в окончательном ответе нужно исключить те значения x , для которых $\sin x = 0$ (т. е. значения $x = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$), поскольку они не удовлетворяют исходному уравнению. Умножив обе части исходного уравнения на $16\sin x$, получаем уравнение, равносильное исходному при условии, что $\sin x \neq 0$:

$$\begin{aligned} 16\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x &= \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x &= \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x &= \sin x \Leftrightarrow 2\sin 8x \cdot \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 16x = \sin x \Leftrightarrow \sin 16x - \sin x &= 0 \Leftrightarrow 2\sin \frac{15x}{2} \cos \frac{17x}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\sin \frac{15x}{2} = 0, \right. &\left. \begin{array}{l} x = \frac{2n\pi}{15}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right] \end{aligned}$$

Из серии решений $x = \frac{2n\pi}{15}$, $n \in \mathbb{Z}$ нужно исключить значения

$x = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$, получающиеся при $n = 15l$, поскольку при $n = 15l$ $\sin x = 0$, а решение этого уравнения содержит посторон-

ние корни для исходного уравнения. Из серии решений $x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17}$, $k \in \mathbb{Z}$ следует исключить значения $x = \pi(1+2l)$, $l \in \mathbb{Z}$, получающиеся при $k = 17l + 8$, $l \in \mathbb{Z}$, как посторонние для исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2n\pi}{15}; \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17} \mid n, k \in \mathbb{Z}; n \neq 15l, k \neq 17l + 8, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 7.

$$\text{Решить уравнение } \sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9}{8}.$$

Решение.

Воспользуемся формулами понижения степени и формулами приведения

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4},$$

$$\sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \left(\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)}{2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 + \sin 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4},$$

$$\sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \left(\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right)}{2} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - \sin 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4}.$$

Тогда исходное уравнение равносильно следующему:

$$\frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + (\cos^2 2x + \sin^2 2x) - 2\cos 2x + \sin^2 2x}{4} = \frac{9}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\cos 2x + \sin^2 2x = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4 - 2\cos 2x + 1 - \cos^2 2x = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 4\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}, \\ \cos 2x = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \right) + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 8. Решить уравнение $\sin(x^2) = 1$.

$$\text{Решение. } \sin(x^2) = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, n \in \mathbb{Z}_0. \quad \text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \mid n \in \mathbb{Z}_0 \right\}.$$

Пример 9. Решить уравнение $\sin(x^2) - \sin x = 0$.

$$\text{Решение. } \sin(x^2) - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin \frac{x^2 - x}{2} \cdot \cos \frac{x^2 + x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x^2 - x}{2} = 0, & (a) \\ \cos \frac{x^2 + x}{2} = 0 & (б) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{x^2 + x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Из уравнения (a) } x^2 - x = 2n\pi \Leftrightarrow x^2 - x - 2n\pi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8n\pi}}{2}, n \in \mathbb{Z}_0.$$

$$\text{Из уравнения (б) } x^2 + x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x^2 + x - (\pi + 2k\pi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\pi + 2k\pi)}}{2}, k \in \mathbb{Z}_0.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8n\pi}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\pi + 2k\pi)}}{2} \mid n, k \in \mathbb{Z}_0 \right\}.$$

Завершая данный параграф, приведем решение одного тригонометрического уравнения практически всеми разумными спо-

собами и покажем совпадение ответов, отличающихся по внешнему виду. Заметим, что существует достаточно много типов тригонометрических уравнений, которые можно решить несколькими способами. Выбор того или другого способа зачастую зависит от знаний, опыта и интуиции решающего.

Пример 10. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

Решение.

1 способ (с применением формул двойного угла и понижения степени).

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x - (1 + \cos x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \pi + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2 способ (с помощью введения вспомогательного угла). Рассмотрим два варианта введения вспомогательного угла: а) и б)

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin x - \cos x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$$\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = (-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + m\pi = (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 6) \sin x - \cos x &= -(\cos x - \sin x) = -\sqrt{2} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}} \right) = \\
 &= -\sqrt{2} \left(\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\sqrt{2} \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2l\pi = \pm \frac{3\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z} \right\}.$

3 способ (с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$).

Сделав замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получаем для $\sin x$ и $\cos x$:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Учтем, что замена $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ может привести к потере корней вида $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти серии необходимо подставить в исходное уравнение, чтобы выяснить, являются ли они решениями этого уравнения. Пусть $x \neq \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow 2t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Проверим, являются ли числа $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ решениями. Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$\sin x - \cos x = \sin(\pi + 2n\pi) - \cos(\pi + 2n\pi) = 0 - (-1) = 1, 1 = 1 \Rightarrow$$

$x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ являются решениями.

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2n\pi \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

4 способ (с применением формул приведения и разности одноименных тригонометрических функций). Рассмотрим два возможных варианта.

$$а) \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ отсюда } \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \cdot \cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$б) \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ тогда } \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{\frac{\pi}{2} - x + x}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} - x - x}{2} = 1 \Leftrightarrow -2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5 способ (при помощи возведения обеих частей уравнения в квадрат).

$$\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0, \\ (\sin x - \cos x)^2 = 1^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \\ \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0, \\ 1 - \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}, \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2m\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{l\pi}{2}, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{эти решения полу-}$$

чаются из $x = \frac{l\pi}{2}$ с учетом неравенства).

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2n\pi \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Покажем совпадение ответов, которые отличаются по внешнему виду. Ответы, полученные 1, 3, 5 способами, полностью совпадают. Покажем, что ответы, полученные 2 и 4 способами, совпадают с этими ответами.

Пусть $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Тогда рассмотрим два случая, когда m — четное и m — нечетное.

Если $m = 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{2n} \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2n\pi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Если $m = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{2k+1} \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi = \pi + 2k\pi.$$

Таким образом, показано совпадение множеств решений, т. е.

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + (-1)^m \frac{\pi}{4} + m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \pi + 2k\pi \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$.

Взяв знак «+», получаем $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2l\pi = \frac{\pi}{2} + 2l\pi.$

Взяв знак «-», имеем $x = -\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2l\pi = -\pi + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}.$

Очевидно, что $\{-\pi + 2l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\} = \{\pi + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Это равенство можно доказать либо с помощью тригонометрического круга, либо взяв $l = n+1 \Rightarrow -\pi + 2l\pi = -\pi + 2(n+1)\pi = -\pi + 2n\pi + 2\pi = \pi + 2n\pi$, $l, n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, доказано, что все ответы, полученные при решении уравнения различными способами, полностью совпадают.

§155. Тригонометрические уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

При решении уравнений с обратными тригонометрическими функциями наиболее распространенный прием — переход от равенства углов к равенству тригонометрических функций. При этом получающиеся уравнения в общем случае не будут равносильны исходным, т. к. происходит расширение области определения исходного уравнения, и, следовательно, возможно появление посторонних корней. Отсюда необходима проверка полученных решений, если не везде были равносильные преобразования.

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin x - \arccos x = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

1 способ. Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то, подставляя

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ в исходное уравнение, получаем:

$$\arcsin x - \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Ответ: } \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

2 способ. Записав исходное уравнение в виде $\arcsin x = \frac{\pi}{6} + \arccos x$, возьмем синус от обеих частей последнего уравнения:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \arccos x\right) \Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos(\arccos x) + \\ &+ \sin(\arccos x) \cdot \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3(1-x^2) = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Проверка.

$$\text{При } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \arcsin x_1 - \arccos x_1 = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — корень исходного уравнения.}$$

$$\text{При } x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \arcsin x_2 - \arccos x_2 =$$

$$= \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3} - \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{7\pi}{6} \neq \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ — посторонний корень.} \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\arcsin x + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Перенесем $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ в правую часть уравнения и возьмем синус от обеих частей. Получаем $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right) \Rightarrow x = \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right) - \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{5}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{13}} - \frac{1}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Проверка показывает, что $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ является корнем исходного уравнения.

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{2}{\sqrt{13}} \right\}.$$

Пример 3. Решить уравнение $4(\arcsin x)^2 - 17(\arcsin x) + 4 = 0$.

Решение. Обозначив $\arcsin x = t$, получаем квадратное уравнение $4t^2 - 17t + 4 = 0$, корни которого $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = 4$. Из уравнения $\arcsin x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sin \frac{1}{4}$, из уравнения $\arcsin x = 4 \Rightarrow x \in \emptyset$, т. к. $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, а $4 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда $x = \sin \frac{1}{4}$ является единственным корнем исходного уравнения. Проверка решения для данного уравнения является излишней.

$$\text{Ответ: } \left\{ \sin \frac{1}{4} \right\}.$$

§156. Системы тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений используются те же приемы, что и при решении систем алгебраических уравнений, а также формулы тригонометрии. Обычно при решении тригонометрических систем последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

Пример 1. Решить систему
$$\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3}, \\ \cos x + \cos y = 1. \end{cases}$$

Решение.

Выразив y через x из первого уравнения системы и подставив во второе, получим равносильную исходной систему:

$$\begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} - x, \\ \cos x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} - x, \\ 2\cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2\pi}{3} - x, \\ x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $y = \frac{\pi}{3} - 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Ответ можно было бы записать в следующей

форме: $\left\{ \left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{\pi}{3} - 2n\pi \right) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Пример 2. Решить систему
$$\begin{cases} \sin(x-2y)=0, \\ \sin(x+2y)=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \sin(x-2y)=0, \\ \sin(x+2y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=n\pi, \\ x+2y=k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(k+n)\pi}{2}, \\ y = \frac{(k-n)\pi}{4}, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

В примере 2 существенным является использование различных букв (n и k) для обозначения целочисленных параметров.

ров, поскольку найденные множества не связаны между собой. Если бы эти множества мы записали с помощью одной и той же буквы, то это привело бы к потере решений.

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{(k+n)\pi}{2}, \frac{(k-n)\pi}{4} \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пример 3. Решить систему
$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0,5, \\ \cos x \cdot \sin y = -0,5. \end{cases}$$

Решение. Сложив 1 и 2 уравнения системы, получим
$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x+y) = 0.$$

Сделав вычитание из первого уравнения второго, получим
$$\sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sin(x-y) = 1.$$

Таким образом, получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=n\pi, \\ x-y=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}+k\pi, \\ y=-\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}-k\pi, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2} - k\pi \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

§157. Тригонометрические неравенства

Тригонометрическими неравенствами называются неравенства, в которых переменная находится под знаком тригонометрической функции.

При решении неравенств с тригонометрическими функциями используется периодичность этих функций и их монотонность на соответствующих интервалах. При этом полезно обращаться к графикам.

Поскольку решение тригонометрических неравенств в конечном итоге сводится к решению простейших, то рассмотрим вначале примеры решения простейших тригонометрических неравенств, т. е. неравенств вида $f(x) > a$ (или $f(x) < a$, $f(x) \geq a$, $f(x) \leq a$), где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций.

Поскольку функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ имеют основной период $T = 2\pi$, то неравенства вида $\sin x > a$ ($\sin x < a$, $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$)

и $\cos x > a$ ($\cos x < a$, $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$) достаточно решить сначала на каком-нибудь отрезке длины 2π . Множество всех решений получим, прибавив к каждому из найденных на этом отрезке решений числа вида $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Для решения неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$ ($\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x \geq a$, $\operatorname{tg} x \leq a$) и $\operatorname{ctg} x > a$ ($\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x \geq a$, $\operatorname{ctg} x \leq a$) достаточно решить их вначале на интервале длины π . Поскольку функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ имеют период π , то прибавляя к найденным на соответствующих интервалах решениям числа вида $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, получим все решения исходного неравенства.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x \geq 0$.

Решение. Построим график функции $y = \sin x$ и выберем на оси Ox значения аргумента x , которым соответствуют точки графика, лежащие на оси Ox или выше ее. Одним из промежутков, содержащих такие точки оси Ox , является замкнутый интервал $[0; \pi]$, а всего таких интервалов будет бесконечно много, каждый из которых получается из интервала $[0; \pi]$ сдвигом по оси Ox на $2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 120).

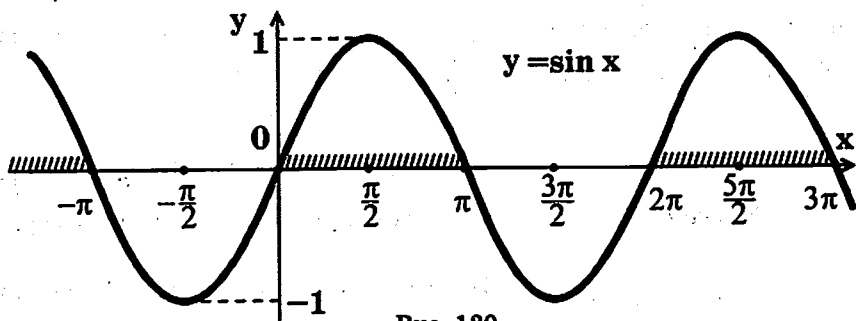


Рис. 120

Таким образом, решением исходного неравенства является объединение замкнутых интервалов вида $[0 + 2n\pi; \pi + 2n\pi]$, т. е.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; \pi + 2n\pi].$$

Ответ можно записать так: $2n\pi \leq x \leq \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (или $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi; \pi + 2n\pi]$, или $x \in [2n\pi; \pi + 2n\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$).

Ответ: $2n\pi \leq x \leq \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1. При решении тригонометрических неравенств можно вместо графиков пользоваться единичной окружностью (тригонометрическим кругом).

Пример 2. Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$.

Решение.

Строим графики функции $y = \sin x$ и прямой $y = \frac{1}{2}$, которая пересекает синусоиду в точках $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 121).

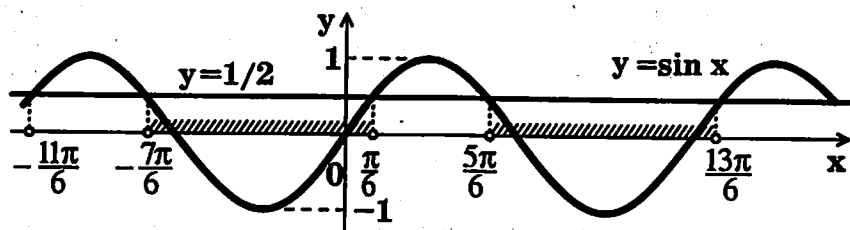


Рис. 121

Выделим один из интервалов значений аргумента, где график синуса расположен ниже графика прямой $y = \frac{1}{2}$; таким интервалом является, например, интервал $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{13\pi}{6}$. Используя периодичность функции $y = \sin x$, получаем ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n \right).$$

Замечание 2. Можно было бы ответ записать следующим образом: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right)$. Интересно заметить, что если $k = n+1$, то

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{7\pi}{6} + 2\pi(n+1) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{\pi}{6} + 2\pi(n+1) = \frac{13\pi}{6} + 2\pi n.$$

Пример 3. Решить неравенство $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. На одном и том же чертеже построим графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 122). Из рисунка видно, что один из интервалов, в котором выполняется данное неравенство, заключен между наименьшими по модулю корнями уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть между точками $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{6}$ (включая эти

точки). Все остальные интервалы, в которых выполняется данное неравенство, получаются путем сдвига отрезка $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ влево или вправо на расстояния, кратные 2π .

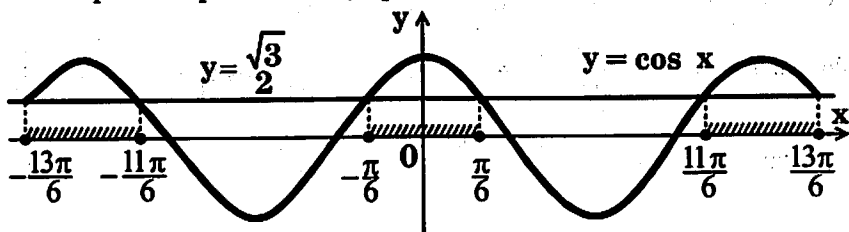


Рис. 122

Поэтому неравенство $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ выполняется при $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решить неравенство $\operatorname{tg} x < 3$.

Решение.

На одном и том же чертеже строим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 3$ (рис. 123). Выделим один из интервалов значений аргумента, где график тангенсоиды ниже графика прямой $y = 3$; таким интервалом является, например, интервал $-\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 3$.

Используя периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, заключаем, что ре-

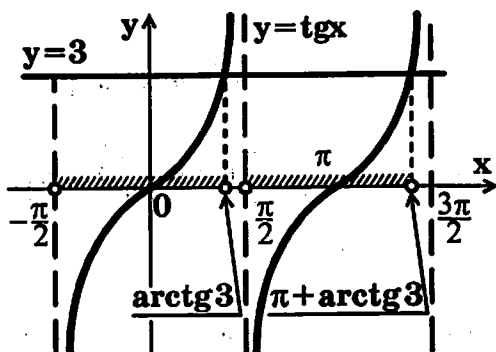


Рис. 123

шениями исходного неравенства на всей числовой прямой являются те и только те значения x , которые удовлетворяют двойному неравенству $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}$

Ответ:

$$U \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} 3 + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим решение более сложных неравенств.

Пример 5. Решить неравенство $\sin x \geq \cos x$.

Решение.

Перенесем $\cos x$ в левую часть неравенства и применим формулу введения вспомогательного аргумента:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Таким образом, } \sin x \geq \cos x \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0.$$

Обозначим $t = x - \frac{\pi}{4}$. Тогда неравенство будет иметь вид $\sin t \geq 0$. Множество решений этого неравенства $2\pi n \leq t \leq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $t = x - \frac{\pi}{4}$, то получим $2\pi n \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi n \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Решить неравенство $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 > 0$.

Решение.

Обозначив $\sin x$ через t , приходим к неравенству

$$2t^2 + 3t - 2 > 0. \text{ Это неравенство выполняется при } t < -2 \text{ и } t > \frac{1}{2}.$$

Тогда все решения исходного неравенства должны удовлетворять

либо неравенству $\sin x < -2$, либо неравенству $\sin x > \frac{1}{2}$. Неравен-

ство $\sin x < -2$ не выполняется ни при каких значениях x ; нера-

венство $\sin x > \frac{1}{2}$ выполняется при $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right).$$

Пример 7. Решить неравенство $|\sin x| > |\cos x|$.

Решение.

Поскольку $|\sin x| \geq 0$, $|\cos x| \geq 0$, то можем возвести обе части исходного неравенства в квадрат, получив при этом неравенство, равносильное исходному:

$$\begin{aligned}
 |\sin x| > |\cos x| &\Leftrightarrow |\sin x|^2 > |\cos x|^2 \Leftrightarrow (\sin x)^2 > (\cos x)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x > 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 8. Решить неравенство $\sin x \cdot \cos x < \frac{1}{4}$.

Решение.

Умножив обе части исходного неравенства на 2 и используя формулу $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \sin x \cdot \cos x < \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x < 2 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + \pi n < x < \frac{13\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi}{12} + \pi n < x < \frac{13\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 9. Решить неравенство $\frac{\sin x - 2}{4 \sin^2 x - 1} > 2$.

Решение.

$$\begin{aligned}
 \text{Обозначив } \sin x = t, \text{ получаем } \frac{\sin x - 2}{4 \sin^2 x - 1} > 2 &\Leftrightarrow \frac{t - 2}{4t^2 - 1} > 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{t - 2}{4t^2 - 1} - 2 > 0 &\Leftrightarrow \frac{-8t^2 + t}{4t^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{t(1 - 8t)}{(2t - 1)(2t + 1)} > 0.
 \end{aligned}$$

Применяя метод интервалов (рис. 124), получаем:

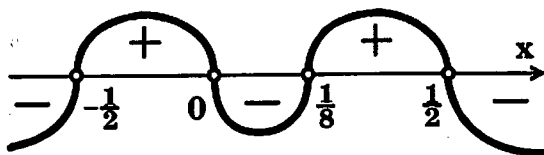


Рис. 124

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{aligned} -\frac{1}{2} < t < 0, \\ \frac{1}{8} < t < \frac{1}{2} \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \frac{1}{2} < \sin x < 0, (a) \\ \frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2}. (б) \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

Рассмотрим решения неравенств (а) и (б).

(а): Из графиков (рис. 125) видно, что

$$-\frac{1}{2} < \sin x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \pi + 2m\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

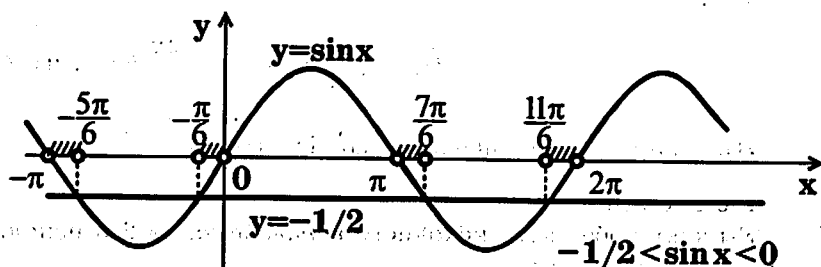


Рис. 125

(б): Из графиков (рис. 126) видно, что

$$\frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin \frac{1}{8} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5\pi}{6} + 2l\pi < x < \pi - \arcsin \frac{1}{8} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

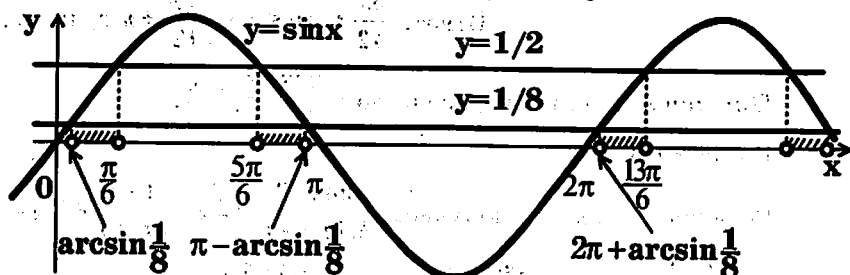


Рис. 126

Решение исходного неравенства есть объединение решений неравенств (а) и (б).

Ответ:

$$\left(\arcsin \frac{1}{8} + 2n\pi; \frac{\pi}{6} + 2n\pi \right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; 2k\pi \right) \cup$$

$$\left(\pi + 2m\pi; \frac{7\pi}{6} + 2m\pi \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2l\pi; \pi - \arcsin \frac{1}{8} + 2l\pi \right), n, k, m, l \in \mathbb{Z}.$$

Тесты к главе 9.
Тригонометрия.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -0,4$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

- 1) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$; 2) $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$; 3) $\frac{\sqrt{21}}{5}$; 4) $\frac{5\sqrt{21}}{21}$.

A2. Какое из перечисленных свойств имеет функция $y = 2\cos 3x$:

- 1) убывает на R ; 2) четная;
3) непериодическая; 4) возрастает на R ?

A3. Функция $y = 2\sin 3x - \frac{1}{2}$ принимает наибольшее значение, которое равно:

- 1) 1; 2) $1\frac{1}{2}$; 3) $2\frac{1}{2}$; 4) $3\frac{1}{2}$.

A4. Через какую из данных точек проходит график функции $y = \sin 2x$:

- 1) $A(0; 0)$; 2) $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 3) $C(0; 1)$; 4) $D(\pi; 1)$?

A5. Наименьшим положительным периодом функции

$y = 4\cos \frac{x}{2}$ является:

- 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π ; 3) 4π ; 4) 6π .

A6. Вычислите значение выражения $\sin \frac{11\pi}{2}$.

- 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) -1.

A7. Упростите выражение $\frac{1 + \operatorname{tg}^6 \alpha}{\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha}$.

- 1) $\operatorname{tg} \alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2 \alpha$;
3) $\operatorname{tg}^3 \alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4 \alpha$.

A8. Уравнение $\operatorname{tg} x = -1$ имеет корни:

- 1) $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A9. Решите уравнение $\cos 3x = -\frac{1}{2}$.

- 1) $\pm \frac{2\pi}{9} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

A10. Решите уравнение $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

- 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) 1; 4) другой ответ.

A11. Неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ имеет решения:

- 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
2) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
4) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A12. Неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$ имеет решения:

1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

3) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

4) $-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

A13. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0,5\right)$.

1) $5 - \sqrt{2}$; 2) $5 + \sqrt{2}$; 3) $\sqrt{5} - 2$; 4) $\sqrt{5} + 2$.

A14. Решите уравнение $\arccos(x + 2) = \pi$.

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ, в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Найдите значение выражения $\cos 29^\circ \cos 119^\circ + \sin 29^\circ \sin 119^\circ$.

B2. Найдите значение выражения

$$2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{7} - \sin^2 \frac{\pi}{7}.$$

B3. Найдите значение выражения $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$.

B4. Найдите значение выражения $1 - \cos 15^\circ \cos 75^\circ$.

B5. Вычислите значение выражения $\frac{18 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}{13 \sin \alpha - 16 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

- B6. Упростите $\frac{\operatorname{tg}(18\pi + \alpha) \cos(90\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}(17\pi + \alpha) \sin(80\pi + \alpha)} + \operatorname{tg}(27\pi - \alpha)$.
- B7. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25} + 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right)$.
- B8. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{9 - x^2} \sin^2 x = 0$.
- B9. Сколько корней уравнения $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right)$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

- C1. Упростите выражение $\frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$.
- C2. Решите уравнение $\cos 3x + 3 \cos x = 2 \sin 3x$.
- C3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin^5 x = \frac{1}{4} \sin y, \\ \cos^5 x = \frac{1}{4} \cos y, \end{cases}$$
 при условии, что $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- C4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\cos^2 x + 2a \sin x - 2a < a^2 - 4$ выполняется для всех x .

Глава 10

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§158. Показательная функция, ее свойства и график

Функция, заданная формулой вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, называется *показательной*.

Замечание 1. Поскольку $1^x=1$ при $x\in\mathbb{R}$, то иногда показательную функцию определяют, не исключая значение $a=1$. При таком определении показательной функции случай $a=1$ рассматривается особо. При решении же степенно-показательных уравнений, содержащих выражения с переменным основанием и переменным показателем степени $(U(x))^{V(x)}$, случай $U(x)=1$ также необходимо рассматривать особо.

Рассмотрим свойства функции $y=a^x$ при $a>1$ и $0<a<1$.

Свойства функции $y=a^x$ при $a>1$:

1) область определения функции — вся числовая прямая, т. е. $D(y)=\mathbb{R}$;

2) область значений функции — промежуток $(0;+\infty)$, т. е. $E(y)=\mathbb{R}_+$;

3) функция не является ни четной, ни нечетной, так как $a^{-x}\neq a^x$, $a^{-x}\neq -a^x$;

4) функция возрастает на всей числовой прямой, $x_1>x_2\Rightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$;

5) при $x=0$ значение функции равно 1, т. е. $a^0=1$;

6) если $x>0$, то $a^x>1$;

7) если $x<0$, то $0<a^x<1$.

График функции $y=a^x$ при $a>1$ выглядит так, как показано на рис. 127. На рис. 128 показан график функции $y=a^x$ при $a=2$, $a=3$.

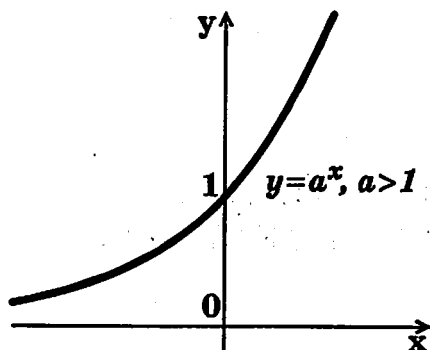


Рис. 127

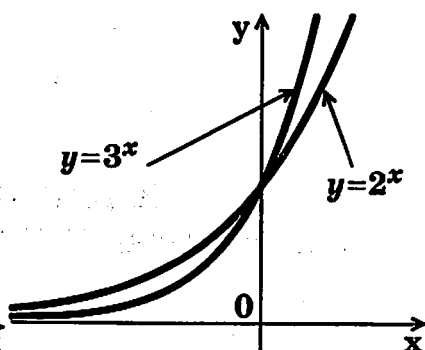


Рис. 128

Свойства функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$:

- 1) область определения $D(y) = \mathbb{R}$;
- 2) область значений $E(y) = \mathbb{R}_+$;
- 3) функция не является ни четной, ни нечетной;
- 4) функция убывает на всей числовой прямой, $x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$;
- 5) при $x=0$ $a^0 = 1$;
- 6) если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$;
- 7) если $x < 0$, то $a^x > 1$.

График функции $y=a^x$ при $0 < a < 1$ выглядит так, как показано на рис. 129. На рис. 130 показаны графики функции

$y=a^x$ при $a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{3}$.

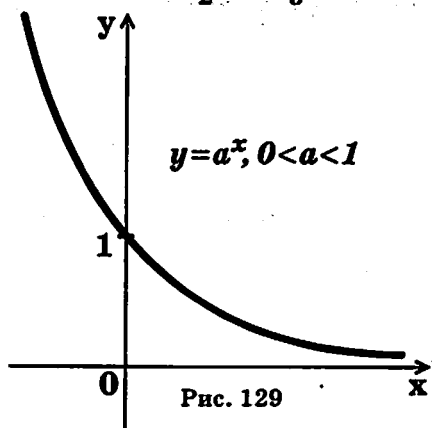


Рис. 129

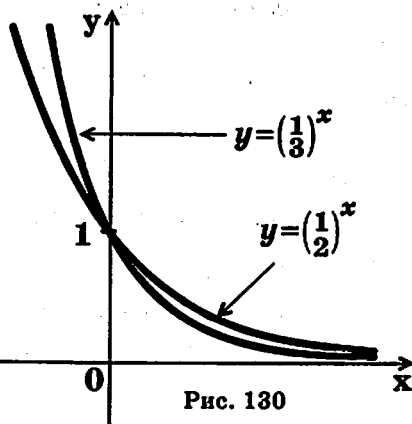


Рис. 130

Замечание 2. Если $a=1$, то $a^x = 1^x = 1$. Таким образом, если не исключать значение $a=1$ в определении показательной функции, то можно утверждать, что функция $y=1^x=1$ есть постоянная и ее графиком является прямая $y=1$.

Пример. Найти область определения следующих функций:

$$\text{а) } y = 5^{\frac{1}{x}}; \quad \text{б) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-3}}; \quad \text{в) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г) } y = 2^{\sqrt{x^2-16}}.$$

Решение. а) Функция $y = 5^{\frac{1}{x}}$ определена при $x \neq 0$, отсюда $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

б) $D(y): x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Отсюда $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

в) функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{1-x^2}}$ определена при условии $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow D(y) = [-1; 1]$;

г) $D(y): \Leftrightarrow x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4, \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

Ответ: а) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$;

в) $x \in [-1; 1]$; г) $x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

§159. Определение логарифма.

Основное логарифмическое тождество

Логарифм положительного числа b по основанию a (где $a > 0$, $a \neq 1$) есть показатель степени, в которую нужно возвести (возвысить) число a , чтобы получить число b . Логарифм числа b по основанию a обозначается символом $\log_a b$.

Например, $3^2 = 9 \Leftrightarrow 2 = \log_3 9$;

$$5^3 = 125 \Leftrightarrow 3 = \log_5 125; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}.$$

Из определения логарифма следует, что $a^{\log_a b} = b$. Равенство $a^{\log_a b} = b$, верное для любых $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, называется **основным логарифмическим тождеством**.

Например, $5^{\log_5 3} = 3$; $7^{\log_7 9} = 9$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 7} = 7$.

Для обозначения десятичных и натуральных логарифмов приняты специальные обозначения: вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$, вместо $\log_e b$ пишут $\ln b$ (e — основание натурального логарифма, $e \approx 2.7$). Таким образом, $\log_{10} x = \lg x$, $\log_e x = \ln x$.

Пример 1. Вычислить а) $\log_2 64$; б) $\log_2 \frac{1}{2}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 1$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; д) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$; е) $\log_3 27$; ж) $\log_3 \frac{1}{243}$; з) $\log_3 (3\sqrt{3})$;

и) $\ln \sqrt{e}$; к) $\lg \frac{1}{100}$.

Решение.

а) Вычислим исходное значение логарифма, используя несколько возможных форм записи решения.

1 форма записи. Поскольку $2^6 = 64 \Leftrightarrow 6 = \log_2 64 \Leftrightarrow \log_2 64 = 6$.

2 форма записи. $\log_2 64 = 6$, т. к. $2^6 = 64$.

3 форма записи. Поскольку $\log_2 64$ есть показатель степени, то обозначим его через x . Тогда $\log_2 64 = x$ или $2^x = 64 = 2^6$. Отсюда $x = 6$.

б) $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, т. к. $2^{-1} = \frac{1}{2}$; в) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, т. к. $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$, т. к. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$; д) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$, т. к. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

е) $\log_3 27 = 3$, т. к. $3^3 = 27$; ж) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$, т. к. $3^{-5} = \frac{1}{243}$;

з) $\log_3 (3\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$, т. к. $3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$; и) $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, т. к. $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$;

к) $\lg \frac{1}{100} = -2$, т. к. $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

Пример 2. Используя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, вычислить:

а) $2^{\log_2 62}$; б) $3^{\log_3 19}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\log_{\frac{1}{2}} 6}$; г) $27^{\log_3 2}$; д) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}$;

е) $\left(\frac{1}{25}\right)^{4\log_5 2}$; ж) $5^{\log_5 7-3}$; з) $10^{3\lg 2}$; и) $e^{5\ln \sqrt{6}}$.

Решение.

а) $2^{\log_2 62} = 62$; б) $3^{\log_3 19} = 19$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\log_{\frac{1}{2}} 6} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6}\right)^3 = 6^3 = 216$;

г) $27^{\log_3 2} = (3^3)^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^3 = 2^3 = 8$;

д) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}\right)^4 = 5^4 = (5^2)^2 = 25^2 = 625$;

е) $\left(\frac{1}{25}\right)^{4\log_5 2} = (5^{-2})^{4\log_5 2} = (5^{\log_5 2})^{(-8)} = 2^{-8} = \frac{1}{256}$;

ж) $5^{\log_5 7 \cdot 3} = \frac{5^{\log_5 7}}{5^3} = \frac{7}{125}$; з) $10^{3\lg 2} = (10^{\lg 2})^3 = 2^3 = 8$;

и) $e^{5\ln \sqrt{6}} = (e^{\ln \sqrt{6}})^5 = (\sqrt{6})^5 = \sqrt{6^4 \cdot 6} = 6^2 \sqrt{6} = 36\sqrt{6}$.

Ответ: а) 62; б) 19; в) 216; г) 8; д) 625;

е) $\frac{1}{256}$; ж) $\frac{7}{125}$; з) 8; и) $36\sqrt{6}$.

§160. Свойства логарифмов

Перечислим основные свойства логарифмов:

1) $a^{\log_a b} = b$ (основное логарифмическое тождество);

2) $\log_a a = 1$ (логарифм основания равен единице);

3) $\log_a 1 = 0$ (логарифм единицы равен нулю);

4) если $b > 0$, $c > 0$, то $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ (формула для логарифма произведения, который равен сумме логарифмов). Заметим, что если $b < 0$, $c < 0$, то $\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|$;

5) если $b > 0$, $c > 0$, то $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ (формула для логарифма частного, который равен разности логарифмов). Заме-

тим, что если $b < 0$, $c < 0$, то $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a |b| - \log_a |c|$;

6) если $b > 0$, то $\log_a b^p = p \log_a b$ (формула для логарифма степени, который равен произведению показателя степени на логарифм ее основания). Заметим, что если показатель степени есть четное число $2p$, то справедлива формула

$$6a) \log_a b^{2p} = 2p \log_a |b|. \text{ Здесь } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

7) если $b > 0$, то $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (формула перехода к новому основанию логарифма). В частности, при $c=b$ получаем формулу

$$7a) \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a};$$

8) $\log_a b = \log_{a^p} b^p$ (это свойство формулируется так: если основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится). Для доказательства свойства 8) достаточно в правой части тождества перейти к основанию a :

$$\log_{a^p} b^p = \frac{\log_a b^p}{\log_a a^p} = \frac{p \log_a b}{p \log_a a} = \log_a b;$$

9) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$. Для доказательства свойства 9) достаточно прологарифмировать обе части тождества по основанию c .

Запишем свойства логарифмов в компактном виде:

$$1) a^{\log_a b} = b; \quad 2) \log_a a = 1; \quad 3) \log_a 1 = 0;$$

$$4) \log_a (bc) = \log_a b + \log_a c;$$

$$5) \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c;$$

$$6) \log_a b^p = p \log_a b; \quad 6a) \log_a b^{2p} = 2p \log_a |b|;$$

$$7) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad 7a) \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a};$$

$$8) \log_a b = \log_{a^p} b^p; \quad 9) a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

Замечание. Необходимо различать логарифм суммы и сумму логарифмов. Сумма логарифмов равна логарифму произведения, т. е. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$, а для логарифма суммы $\log_a (b+c)$ никакой формулы нет.

Пример 1. Упростить:

а) $2^{\log_4 9 + 1}$; б) $5^{\frac{3 - \lg 5}{\lg 25}}$; в) $a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}}$;

г) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_8 9 \cdot \log_9 10$.

Решение.

а) Используя свойство логарифмов 8), получаем

$$\log_4 9 = \log_{\sqrt{4}} \sqrt{9} = \log_2 3. \text{ Отсюда } 2^{\log_4 9 + 1} = 2^{\log_4 9} \cdot 2 = 2^{\log_2 3} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

б) Заметив, что $3 - \lg 5 = \lg 10^3 - \lg 5 = \lg \left(\frac{10^3}{5} \right) = \lg 200$, а также

тот факт, что $\frac{1}{\lg 25} = \log_{25} 10 = \log_{\sqrt{25}} \sqrt{10} = \log_5 \sqrt{10}$, получаем

$$\begin{aligned} 5^{\frac{3 - \lg 5}{\lg 25}} &= 5^{\log_5 \sqrt{10} \cdot \lg 200} = \left(5^{\log_5 \sqrt{10}} \right)^{\lg 200} = \left(\sqrt{10} \right)^{\lg 200} = \left(10^{\frac{1}{2}} \right)^{\lg 200} = \\ &= 10^{\frac{1}{2} \lg 200} = 10^{\lg \left(200^{\frac{1}{2}} \right)} = 10^{\lg \sqrt{200}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

в) Учитывая, что $\frac{1}{\log_b a} = \log_a b$, получаем

$$a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}} = a^{\log_a b \cdot \log_b (\log_b a)} = \left(a^{\log_a b} \right)^{\log_b (\log_b a)} = b^{\log_b (\log_b a)} = \log_b a$$

(с учетом основного логарифмического тождества).

г) Обозначив исходное выражение через A , а также переходя во всех множителях к логарифмам по основанию 10, получаем:

$$A = \frac{\lg 3}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 4} \dots \frac{\lg 9}{\lg 8} \cdot \frac{\lg 10}{\lg 9} = \frac{\lg 10}{\lg 2} = \frac{1}{\lg 2} = \log_2 10.$$

Ответ: а) $\{6\}$; б) $\{10\sqrt{2}\}$; в) $\{\log_b a\}$; г) $\{\log_2 10\}$.

Пример 2. Найти $\log_3 6$, если $\log_3 2 = a$.

Решение.

$$\log_3 6 = \log_3 (2 \cdot 3) = \log_3 2 + \log_3 3 = a + 1. \quad \text{Ответ: } \{a+1\}.$$

Пример 3. Найти $\log_5 12$, если $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = c$.

Решение.

$$\log_5 12 = \log_5 (2^2 \cdot 3) = \log_5 2^2 + \log_5 3 = 2\log_5 2 + c = 2a + c.$$

Ответ: $\{2a+c\}$.

Пример 4. Найти $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = c$.

Решение.

$$\begin{aligned}\log_{30} 8 &= \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30} \left(\frac{10}{5}\right) = 3(\log_{30} 10 - \log_{30} 5) = \\ &= 3\left(\log_{30} \left(\frac{30}{3}\right) - c\right) = 3(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - c) = 3(1 - a - c).\end{aligned}$$

Ответ: $\{3(1 - a - c)\}$.

Пример 5. Найти $\lg 56$, если $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

Решение.

$$\begin{aligned}56 &= 2^3 \cdot 7 \Rightarrow \lg 56 = \lg(2^3 \cdot 7) = \lg 2^3 + \lg 7 = 3\lg 2 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = \\ &= 3a + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba = ab + 3a.\end{aligned}$$

Ответ: $\{ab + 3a\}$.

Пример 6. Упростить $\log_2 \log_3 \sqrt[8]{5} = A$.

Решение.

$$\log_3 \sqrt[8]{5} = \log_3 5^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}. \text{ Отсюда } A = \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

Пример 7. Упростить $\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt{3}} = A$.

Решение.

$$\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[3]{3^{\frac{1}{2}}} = 3^{\frac{1}{6}} \Rightarrow A = \log_3 \left(\log_3 3^{\frac{1}{6}}\right) = \log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

Пример 8. Упростить $\log_2 \log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = A$.

Решение.

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{4}}} = 2^{\frac{7}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \log_2 \left(\log_2 2^{\frac{7}{8}}\right) = \log_2 \left(\frac{7}{8}\right) = \log_2 7 - \log_2 8 = \log_2 7 - 3.$$

Ответ: $\{\log_2 7 - 3\}$.

Пример 9. Вычислить $\sqrt{2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1} = A$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_3 2} &= \log_2 3; \quad \frac{1}{2\log_3 5} = \frac{1}{2} \log_5 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= \sqrt{2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1} = \sqrt{2^{2+\log_2 3} + 25^{\frac{1}{2} \log_5 3} + 1} = \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 2^{\log_2 3} + \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 3} + 1} = \sqrt{4 \cdot 3 + 5^{\log_5 3} + 1} = \\ &= \sqrt{12 + 3 + 1} = \sqrt{16} = 4. \end{aligned}$$

Ответ: {4}.

Пример 10. Вычислить $3^{\frac{1}{2\log_7 3}} \cdot 3^{\log_3 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + (\sqrt{3})^{\log_3 25} = A$.

Решение.

$$\frac{1}{2\log_7 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 3} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 7; \quad 3^{\log_3 8} = 3^{\log_3 8 \cdot \log_3 8} = (3^{\log_3 8})^{\log_3 8} = 8^{\log_3 8}.$$

$$\text{Отсюда } A = 3^{\frac{1}{2} \log_3 7} \cdot 8^{\log_3 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + (\sqrt{3})^{\log_3 25} = (3^{\log_3 7})^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\log_3 8} -$$

$$- \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + (3^{\log_3 25})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} - \sqrt{7} \cdot 8^{\log_3 8} + (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: {5}.

§161. Логарифмирование и потенцирование

Если некоторое выражение F составлено из чисел или переменных с помощью операций умножения, деления, возведения в степень, то можно выразить $\log_a F$ через логарифмы входящих в $\log_a F$ чисел или переменных, используя свойства логарифмов.

Такое преобразование называется **логарифмированием**.

Пример 1. Дано $A = \frac{a^2 b^7}{c^{43}}$. Найти $\lg A$, если $b > 0$, $c > 0$.

Решение. Используя свойства логарифмов, получаем

$$\lg A = \lg \left(\frac{a^2 b^7}{c^{43}} \right) = \lg(a^2 b^7) - \lg(c^{43}) = \lg a^2 + \lg b^7 - 43 \lg c =$$

$$= 2 \lg a + 7 \lg b - 43 \lg c.$$

Ответ: { $2 \lg a + 7 \lg b - 43 \lg c$ }.

Потенцирование — это преобразование, обратное логарифмированию. При потенцировании находят выражение по его логарифму.

Пример 2. Найти x , если $\log_5 x = 1 + \frac{1}{3} \log_5 3 - \log_5 3 - 2 \log_5 2$.

Решение.

Преобразуем правую часть исходного выражения:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} \log_5 3 - \log_5 3 - 2 \log_5 2 &= \log_5 5 + \log_5 3^{\frac{1}{3}} - (\log_5 3 + \log_5 2^2) = \\ &= \log_5 (5 \cdot \sqrt[3]{3}) - \log_5 (3 \cdot 2^2) = \log_5 \left(\frac{5\sqrt[3]{3}}{12} \right). \end{aligned}$$

Тогда $\log_5 x = \log_5 \left(\frac{5\sqrt[3]{3}}{12} \right) \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt[3]{3}}{12}$. Ответ: $\left\{ \frac{5\sqrt[3]{3}}{12} \right\}$.

Пример 3. Найти x , если $\lg x = \frac{2}{3} (\lg a - \lg b) - \lg(a - b)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \lg x &= \frac{2}{3} \cdot \lg \left(\frac{a}{b} \right) - \lg(a - b) = \lg \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} - \lg(a - b) = \lg \left[\frac{\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}}}{a - b} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}}}{a - b} = \frac{1}{a - b} \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{a - b} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b} \right)^2}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{a - b} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b} \right)^2} \right\}. \end{aligned}$$

§162. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Поскольку показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) является монотонно возрастающей при $a > 1$ и монотонно убывающей при $0 < a < 1$, то она имеет обратную функцию. Чтобы найти эту обратную функцию, нужно из соотношения $y = a^x$ выразить x через y (т. е. $y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$), а затем поменять обозначения x на y , а y на x ; тогда получим $y = \log_a x$. Функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется **логарифмической**.

Таким образом, показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

График логарифмической функции $y = \log_a x$ можно построить, используя тот факт, что функция $y = \log_a x$ является обратной к показательной функции $y = a^x$. Поэтому достаточно построить график $y = a^x$, а затем отобразить его симметрично относительно прямой $y=x$, являющейся биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов. На рис. 131 изображен график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$, а на рис. 132 — график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

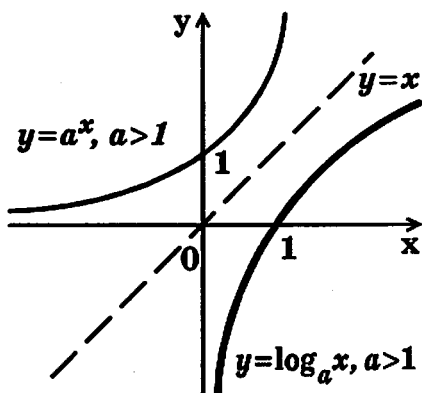


Рис.131

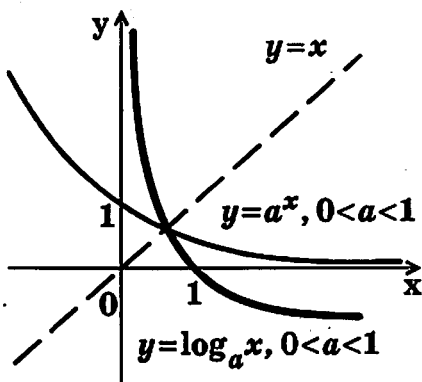


Рис.132

Если приведенные рисунки перегнуть по биссектрисе $y=x$, то графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$ наложатся друг на друга.

Свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$:

- 1) область определения функции — промежуток $(0; +\infty)$, т. е. $D(y) = R_+$;
- 2) область значений функции — вся числовая прямая, т. е. $E(y) = R$;
- 3) функция не является ни четной, ни нечетной;
- 4) функция возрастает при $x > 0$, т. е. $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$;
- 5) при $x=1$ значение функции равно 0, т. е. $\log_a 1 = 0$;
- 6) если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$;
- 7) если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

Свойства функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$:

- 1) область определения функции — промежуток $(0; +\infty)$, т. е. $D(y) = \mathbb{R}_+$;
- 2) область значений функции — вся числовая прямая, т. е. $E(y) = \mathbb{R}$;
- 3) функция не является ни четной, ни нечетной;
- 4) функция убывает при $x > 0$, т. е. $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$;
- 5) при $x=1$ значение функции равно 0, т. е. $\log_a 1 = 0$;
- 6) если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$;
- 7) если $x > 1$, то $\log_a x < 0$.

Пример. Найти область определения функций:

а) $y = \log_3(2x-6)$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}}(1-4x)$; в) $y = \log_5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Решение.

а) Поскольку область определения логарифмической функции — множество положительных чисел, то $D(y): 2x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 3$;

б) $D(y): 1-4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$;

в) $D(y): \frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x > 1. \end{cases}$

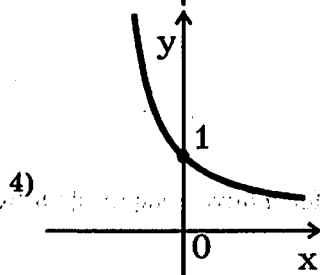
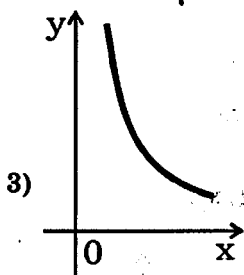
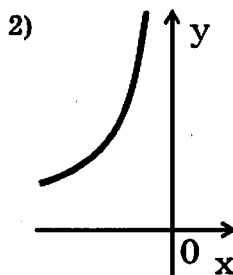
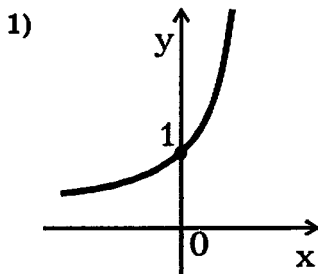
Ответ: а) $x \in (3; +\infty)$; б) $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; в) $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Тесты к главе 10. Показательная и логарифмическая функции.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. На каком из рисунков представлен график функции $y = \pi^x$?



A2. Сравните числа $2^{-\sqrt{2}}$ и $(0,5)^{\sqrt{3}}$.

- 1) $2^{-\sqrt{2}} = (0,5)^{\sqrt{3}}$; 2) $2^{-\sqrt{2}} < (0,5)^{\sqrt{3}}$;
3) $2^{-\sqrt{2}} > (0,5)^{\sqrt{3}}$; 4) сравнить нельзя.

A3. Найдите область определения функции $y = 2^{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{-x}}}$.

- 1) R ; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0)$; 4) 0 .

A4. Найдите множество значений функции $y = 5^{-x} - 3$.

- 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; +\infty)$.

A5. Найдите наименьшее значение функции $y = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{\sqrt{1-x^2}}$.

- 1) 2; 2) 1; 3) -1; 4) 0.

A6. Найдите наибольшее значение функции $y = (\sqrt{2} - 1)^{\sqrt{1-x^2}}$.

- 1) $\sqrt{2} - 1$; 2) 1; 3) $1 + \sqrt{2}$; 4) 2.

A7. Найдите значение выражения $\log_2 \frac{4}{\sqrt[4]{8}}$.

- 1) -1,25; 2) -1; 3) 1; 4) 1,25.

A8. Вычислите $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3\log_3 4}$.

- 1) 64; 2) 16; 3) 4; 4) 1.

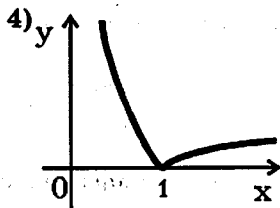
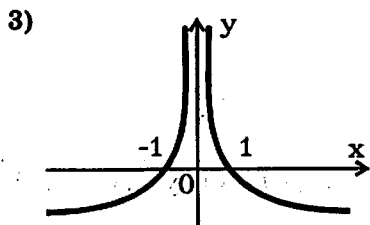
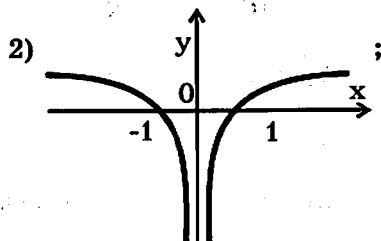
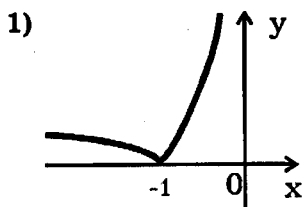
A9. Вычислите $\log_{\frac{1}{4}} \cos 675^\circ$.

- 1) -0,5; 2) 0; 3) 0,25; 4) 0,5.

A10. Сравните $\log_3 7$ и $\log_7 27$.

- 1) $\log_3 7 < \log_7 27$; 2) $\log_3 7 = \log_7 27$;
3) $\log_3 7 > \log_7 27$; 4) сравнить нельзя.

A11. Постройте график функции $y = |\log_2 x|$.



A12. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_3(\cos x)}$.

1) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

A13. Найдите область значений функции $y = \lg(1 - x)$.

1) $(-\infty; 1)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $\mathbb{R}$.

A14. Найдите $\log_3 200$, если $\log_3 2 = a, \log_3 5 = b$.

1) $a + 3b$; 2) $2a + 3b$; 3) $3a + b$; 4) $3a + 2b$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Вычислите $\frac{\lg(3 + 2\sqrt{2})}{\lg(\sqrt{2} + 1)}$.

B2. Вычислите $2^{3\log_{2,5} \sqrt{5}}$.

B3. Упростите выражение — $\log_2 \log_4 \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}$.

B4. Вычислите $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

B5. Вычислите $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

B6. Найдите $\log_{ab} b$, если $\log_{ab} a = 9$.
Ответ. -8.

B7. Найдите $\log_{abc} x$, если $\log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_c x = 6$.

B8. Найдите $\log_c x$, если $\log_a x = 2, \log_b x = 3, \log_{abc} x = 1$.

B9. Найдите сумму целых чисел, входящих в область определения функции $y = \sqrt{\log_7 \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{4-x}{2+x} \right)}$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

С1. Докажите неравенство $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_3 \pi} > 2$.

С2. Докажите тождество $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

С3. Упростите выражение $a^{\frac{\log_b (\log_b a)}{\log_b a}}$.

С4. Найдите $\log_{25} 24$, если $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 8 = b$.

Глава 11

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВА

Показательными уравнениями называют такие уравнения, в которых переменная содержится в показателе степени.

Логарифмическими уравнениями называются такие уравнения, в которых переменная находится под знаком логарифма или в основании логарифма.

Показательные и логарифмические уравнения относятся к *трансцендентным уравнениям*, т. е. таким уравнениям, которые содержат трансцендентные функции (показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции).

§163. Методы решения показательных уравнений

Основными методами решения показательных уравнений являются: а) метод уравнивания показателей степеней; б) метод введения новой переменной. Иногда применяют различные искусственные приемы.

Будем называть *простейшими показательными уравнениями* уравнения вида: $a^x=1$; $a^{f(x)}=1$; $a^{f(x)}=a^c$; $a^x=b$; $a^{f(x)}=b$; $a^{f(x)}=a^{g(x)}$. При решении этих уравнений используют свойство показательной функции $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

1. *Решение простейших показательных уравнений (предполагается, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)*

а) $a^x=1 \Leftrightarrow a^x=a^0 \Leftrightarrow x=0$;

б) $a^{f(x)}=1 \Leftrightarrow a^{f(x)}=a^0 \Leftrightarrow f(x)=0$;

в) $a^{f(x)}=a^c \Leftrightarrow f(x)=c$;

г) $a^x=b \Leftrightarrow a^x=a^{\log_a b} \Leftrightarrow x=\log_a b$ (решение уравнения $a^x=b$ можно было бы записать сразу, так как $x=\log_a b$ следует из определения логарифма);

д) $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow f(x)=\log_a b$;

е) $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $7^x = 1$.

Решение. $7^x = 1 \Leftrightarrow 7^x = 7^0 \Leftrightarrow x = 0$. **Ответ:** $\{0\}$.

Пример 2. Решить уравнение $5^{x^2+x} = 1$.

Решение. $5^{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow 5^{x^2+x} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -1$. **Ответ:** $\{0; -1\}$.

Пример 3. Решить уравнение $3^{x^2-5x+4} = 3^{-2}$.

Решение. $x^2 - 5x + 4 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$.
Ответ: $\{2; 3\}$.

Пример 4. Решить уравнение $6^{x+2} = 6^{x^2}$.

Решение. $6^{x+2} = 6^{x^2} \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$. **Ответ:** $\{2; -1\}$.

Пример 5. Решить уравнение $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5$.

Решение. $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{7}} 5$. **Ответ:** $\left\{\log_{\frac{1}{7}} 5\right\}$.

Пример 6. Решить уравнение $14^{x^2} = 9$.

Решение. $14^{x^2} = 9 \Leftrightarrow x^2 = \log_{14} 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\log_{14} 9}$.

Ответ: $\left\{\pm\sqrt{\log_{14} 9}\right\}$.

Рассмотрим примеры, при решении которых необходимо помнить область значений показательной функции ($a^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$).

Пример 7. Решить уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} = -2$.

Решение. Поскольку для любого $x \in \mathbb{R}$ показательная функция принимает только положительные значения, то $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} = -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. **Ответ:** $\emptyset$.

Пример 8. Решить уравнение $9^{x+6} = 0$.

Решение. $9^{x+6} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, т.к. $9^{x+6} > 0$ при $x \in \mathbb{R}$.
Ответ: $\emptyset$.

2. Решение показательных уравнений, приводимых к простейшим, с использованием метода уравнивания показателей степеней

При этом сначала приводят показательные уравнения к одному основанию в обеих частях равенства, затем уравнивают показатели степеней левой и правой частей равенства, после этого решают полученное уравнение.

Пример 9. Решить уравнение $(121)^x = \left(\frac{1}{11}\right)^{x^2}$.

Решение. Приведем все степени к основанию 11.

$$\begin{aligned} 121 &= 11^2, \quad \frac{1}{11} = 11^{-1}. \text{ Тогда } (121)^x = \left(\frac{1}{11}\right)^{x^2} \Leftrightarrow (11^2)^x = (11^{-1})^{x^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 11^{2x} = 11^{-x^2} \Leftrightarrow 2x = -x^2 \Leftrightarrow 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2+x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2. \end{aligned}$$

Ответ: $\{0; -2\}$.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$.

Решение. $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = \sqrt{3^x \cdot 5^x} = \sqrt{(3 \cdot 5)^x} = \sqrt{15^x} = 15^{\frac{x}{2}}, \quad 225 = 15^2$.

Отсюда исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$15^{\frac{x}{2}} = 15^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $\{4\}$.

Пример 11. Решить уравнение $(0,25)^{2x} = \frac{256}{2^{x+3}}$.

Решение. Приведем степени к одинаковому основанию,

а затем приравняем показатели степеней: $0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}, \quad \frac{256}{2^{x+3}} = \frac{2^8}{2^{x+3}} = 2^{5-x}$.

Отсюда исходное уравнение эквивалентно такому:

$$(2^{-2})^{2x} = 2^{5-x} \Leftrightarrow 2^{-4+2x} = 2^{5-x} \Leftrightarrow -4+2x = 5-x \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

Пример 12. Решить уравнение $\sqrt{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}}$.

Решение.

$$27 = 3^3, \quad 9 = 3^2, \quad 27^{x-1} = (3^3)^{x-1} = 3^{3x-3}, \quad 9^{2-x} = (3^2)^{2-x} = 3^{4-2x}.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt[3]{27^{x-1}} = \sqrt[3]{9^{2-x}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3^{3x-3}} = \sqrt[3]{3^{4-2x}} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{2}} = 3^{\frac{4-2x}{3}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} = \frac{4-2x}{3} \Leftrightarrow 3(3x-3) = 2(4-2x) \Leftrightarrow x = \frac{17}{13}. \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{17}{13} \right\}.$$

3. Решение уравнений вида $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ ($a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)

Эти уравнения решаются путем деления обеих частей на $b^{f(x)}$ или на $a^{f(x)}$.

Пример 13. Решить уравнение $3^x = 19^x$.

Решение. $3^x = 19^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{19^x} = \frac{19^x}{19^x} \Leftrightarrow \frac{3^x}{19^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{19} \right)^x = 1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0. \quad \text{Ответ: } \{0\}.$

Пример 14. Решить уравнение $6^{x+1} = 37^{x+1}$.

Решение. $6^{x+1} = 37^{x+1} \Leftrightarrow \frac{6^{x+1}}{37^{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{37} \right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow$
 $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \quad \text{Ответ: } \{-1\}.$

4. Решение уравнений вида $A \cdot a^{f(x)} = B \cdot b^{g(x)}$

Эти уравнения сводятся к алгебраическим путем логарифмирования обеих частей уравнения по одному и тому же основанию.

Пример 15. Решить уравнение $2 \cdot 5^x = 3^{x-1} \cdot 7$.

Решение.

Исходное уравнение можно решить двумя способами:

1 способ. Логарифмируем обе части по одному и тому же основанию, например по основанию 3. Тогда имеем:

$$\log_3(2 \cdot 5^x) = \log_3(3^{x-1} \cdot 7) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3(5^x) = \log_3(3^{x-1}) + \log_3 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 2 + x \log_3 5 = (x-1) \log_3 3 + \log_3 7 = x - 1 + \log_3 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \log_3 5 - x = -\log_3 2 - 1 + \log_3 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(\log_3 5 - 1) = \log_3 7 - \log_3 2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_3 \frac{7}{2} - 1}{\log_3 5 - 1} = \frac{\log_3 \frac{7}{2} - \log_3 3}{\log_3 5 - \log_3 3} = \frac{\log_3 \left(\frac{7}{6} \right)}{\log_3 \left(\frac{5}{3} \right)} = \log_{\frac{5}{3}} \left(\frac{7}{6} \right).$$

2 способ. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$2 \cdot 5^x = 3^{x-1} \cdot 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^x = \frac{3^x}{3} \cdot 7 \Leftrightarrow \frac{5^x}{3^x} = \frac{7}{3 \cdot 2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{7}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right).$$

Как видим, ответы совпали, однако второй способ для данного примера является более рациональным.

Ответ: $\left\{\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{7}{6}\right)\right\}.$

Пример 16. Решить уравнение $7^{x^2-4} = 8^{2x}$.

Решение.

Прологарифмируем исходное уравнение по основанию 7 (можно было бы логарифмировать по основанию 8 или по любому положительному основанию, отличному от 1). Получаем

$$\log_7(7^{x^2-4}) = \log_7(8^{2x}) \Leftrightarrow (x^2-4)\log_7 7 = 2x\log_7 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 - 2x\log_7 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2\log_7 8)x - 4 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим его корни

$$x_{1,2} = \log_7 8 \pm \sqrt{(\log_7 8)^2 + 4},$$

которые и являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\left\{\log_7 8 \pm \sqrt{(\log_7 8)^2 + 4}\right\}.$

5. Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки

Пример 17. Решить уравнение $3^x + 3^{x+1} = 108$.

Решение. $3^x + 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 = 108 \Leftrightarrow 3^x(1+3) = 108 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{108}{4} = 27 = 3^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $\{3\}.$

Пример 18. Решить уравнение $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$.

Решение. $5^{x+1} = 5^{x-1} \cdot 5^2$, $5^x = 5^{x-1} \cdot 5 = 5^{x-1} \cdot 5$. Отсюда исходное уравнение эквивалентно следующему:

$$5^{x-1} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^{x-1} \cdot 5 + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-1}(5^2 + 3 - 6 \cdot 5) + 10 = 0 \Leftrightarrow 5^{x-1}(-2) + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{x-1}=5 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2.$$

Заметим, что в данном примере можно было бы выносить за скобки 5^x или 5^{x+1} , однако в этих случаях преобразования были бы более громоздкими. Ответ: $\{2\}$.

Пример 19. Решить уравнение $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$.

Решение. В левой части исходного уравнения вынесем за скобки 3^x , а в правой части 4^x . Имеем:

$$3^x(1+3+3^2) = 4^x(1+4+4^2) \Leftrightarrow 3^x \cdot 13 = 4^x \cdot 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^x}{4^x} = \frac{21}{13} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{21}{13} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{21}{13}\right).$$

Ответ: $\left\{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{21}{13}\right)\right\}$.

Рассмотрим некоторые типы показательных уравнений, которые могут быть решены методом введения новой переменной.

6. Решение показательных уравнений, сводящихся к квадратным или алгебраическим уравнениям высших степеней

а) Уравнения вида $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводятся к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

Пример 20. Решить уравнение $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

Решение. Обозначив $5^x = y > 0$, получаем $y^2 - 6y + 5 = 0$, корни которого $y_1 = 5$, $y_2 = 1$. Отсюда исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\begin{cases} 5^x = 5, \\ 5^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{1; 0\}$.

б) Уравнения вида $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$) с помощью подстановки $a^{f(x)} = y$ сводятся к алгебраическому (квадратному) уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

Пример 21. Решить уравнение $3^{2x^2} - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0$.

Решение. Пусть $3^{x^2} = y$, тогда $3^{2x^2} = (3^{x^2})^2 = y^2$. Подставив в исходное уравнение, получаем $y^2 - 12y + 27 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 3$, $y_2 = 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2} = 3, \\ 3^{x^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ x = \pm \sqrt{2}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{\pm 1; \pm \sqrt{2}\}.$$

Пример 22. Решить уравнение $3^{2\sqrt{x+1}} - 30 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} + 81 = 0$.

Решение. Пусть $3^{\sqrt{x+1}} = y$, тогда $3^{2\sqrt{x+1}} = (3^{\sqrt{x+1}})^2 = y^2$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем: $y^2 - 30y + 81 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y_1 = 27, \quad y_2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x+1}} = 27 = 3^3, \\ 3^{\sqrt{x+1}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 3, \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{8; 0\}$.

в) Решение показательных уравнений, сводящихся к алгебраическим уравнениям высших степеней.

Пример 23. Решить уравнение $8^x - 2^{x+1} - 4 = 0$.

Решение. $8^x = (2^3)^x = (2^x)^3$, $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$. Обозначив

$2^x = y$, получаем $y^3 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+2)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 0, \\ y^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

г) Уравнения вида $Aa^x + Ba^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}} + Cb^x = 0$ сводятся к квадратному путем деления обеих частей исходного уравнения на a^x , или на b^x , или на $(ab)^{\frac{x}{2}}$. Например, при делении на $a^x \neq 0$ имеем уравнение, эквивалентное данному:

$$A \cdot \frac{a^x}{a^x} + \frac{Ba^{\frac{x}{2}}b^{\frac{x}{2}}}{a^x} + C \cdot \frac{b^x}{a^x} = 0 \Leftrightarrow A + B \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} + C \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^x = 0.$$

Замена $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{x}{2}} = y$ приводит исходное уравнение к квадрат-

ному $A + By + Cy^2 = 0$.

Пример 24. Решить уравнение $9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$.

Решение. Поскольку $12 = 3 \cdot 4$, $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, то исходное уравнение можно записать в виде $9 \cdot 4^{2x} - 7 \cdot 3^x \cdot 4^x - 16 \cdot 3^{2x} = 0$. Делим обе части исходного уравнения на $4^{2x} = 16^x$. Получаем

$$9 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0 \quad (: 16^x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 7 \cdot \left(\frac{12}{16}\right)^x - 16 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x = 0 \Leftrightarrow 9 - 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 16 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^x\right)^2 = 0.$$

Замена $\left(\frac{3}{4}\right)^x = y > 0$ приводит исходное уравнение к квадратному

$$9 - 7y - 16y^2 = 0 \Leftrightarrow 16y^2 + 7y - 9 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{9}{16}, \quad y_2 = -1.$$

$y_2 = -1$ отпадает т. к. $y > 0$.

$$\text{Отсюда } y = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: {2}.

д) Уравнения вида $M(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}})^x + N(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}})^x = p$, где $a^2 - b = 1$, сводятся к квадратному посредством замены $(\sqrt[n]{a-\sqrt{b}})^x = y$ или замены $(\sqrt[n]{a+\sqrt{b}})^x = y$.

Пример 25. Решить уравнение $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$.

Решение. Поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3=1$, то, заменив $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = y$, получаем:

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = \left(\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x = \frac{1}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x} = \frac{1}{y}. \quad \text{Отсюда}$$

исходное уравнение эквивалентно следующему: $y + \frac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}, \\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}, \\ (2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 1, \\ \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -2. \end{cases}$$

Ответ: {2; -2}.

Пример 26. Решить уравнение $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 6$.

Решение. $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8}) = 9-8=1 \Leftrightarrow 3+\sqrt{8} = \frac{1}{3-\sqrt{8}}$.

Обозначив $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = y$, получаем:

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{3-\sqrt{8}}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x} = \frac{1}{y}. \text{ Тогда имеем:}$$

$$y + \frac{1}{y} = 6 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3+\sqrt{8}, \\ \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 3-\sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{8})^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3-\sqrt{8}} = (3-\sqrt{8})^{-1}, \\ (3-\sqrt{8})^{\frac{x}{3}} = 3-\sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = -1, \\ \frac{x}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: {-3; 3}.

7. Решение показательных уравнений вида $A \cdot a^{mx} + B \cdot a^{mx} \cdot b^{(n-m)x} + C \cdot b^{mx} = 0$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$)

В этом уравнении сумма показателей степеней чисел a и b в каждом слагаемом одинакова и равна nx .

Разделив почленно исходное уравнение на b^{nx} , получаем

$$A \cdot \frac{a^{nx}}{b^{nx}} + B \cdot \frac{a^{mx} \cdot b^{nx} \cdot b^{-mx}}{b^{nx}} + C \cdot \frac{b^{nx}}{b^{nx}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \left(\frac{a}{b} \right)^{nx} + B \left(\frac{a}{b} \right)^{mx} + C = 0.$$

Обозначив $\left(\frac{a}{b} \right)^x = y$, получаем алгебраическое уравнение

$Ay^n + By^m + C = 0$. Решая это уравнение, находим его корни, а затем возвращаемся к старой переменной x .

Пример 27. Решить уравнение $64^x + 36^x - 10 \cdot 27^x = 0$.

Решение. $64=4^3$, $36=3^2 \cdot 4$, $27=3^3$. Отсюда исходное уравнение можно записать в виде $4^{3x} + 3^{2x} \cdot 4^x - 10 \cdot 3^{3x} = 0$. Разделив исходное уравнение почленно на $3^{3x} = 27^x$, получаем

$$\left(\frac{64}{27} \right)^x + \left(\frac{36}{27} \right)^x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{3} \right)^x \right)^3 + \left(\frac{4}{3} \right)^x - 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3 + y - 10 = 0 \text{ (где } y = \left(\frac{4}{3} \right)^x > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y^2+2y+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0, \\ y^2+2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2, \\ y \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} \right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{4}{3}} 2.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \log_{\frac{4}{3}} 2 \right\}.$$

8. Решение показательных уравнений «методом подбора»

При решении показательных уравнений этим методом вначале находят путем подбора корень исходного уравнения, а затем доказывают, что этот корень единственный, с использованием свойства монотонности показательной функции.

Пример 28. Решить уравнение $6^x + 8^x = 10^x$.

Решение.

Подбором находим, что $x=2$ — корень исходного уравнения. Покажем, что других корней нет. Разделив исходное уравнение на 10^x , получаем равносильное уравнение

$$\frac{6^x}{10^x} + \frac{8^x}{10^x} = \frac{10^x}{10^x} \Leftrightarrow \left(\frac{6}{10}\right)^x + \left(\frac{8}{10}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

а) Покажем, что среди чисел $x < 2$ корней нет. Если $x < 2$, то

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x < 2$ корней нет.

б) Покажем, что среди чисел $x > 2$ корней исходного уравнения также нет. Если $x > 2$, то

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $x > 2$ исходное уравнение корней не имеет. Ответ: $\{2\}$.

Пример 29. Решить уравнение $(\sqrt{8+\sqrt{63}})^x + (\sqrt{8-\sqrt{63}})^x = 4^x$.

Решение. Перепишем уравнение так:

$$\left(\frac{\sqrt{8+\sqrt{63}}}{4}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{8-\sqrt{63}}}{4}\right)^x = 1.$$

Очевидно, что $x = 2$ — корень уравнения. Покажем, что

других корней нет. Обозначим $\frac{\sqrt{8+\sqrt{63}}}{4} = a$, $\frac{\sqrt{8-\sqrt{63}}}{4} = b$.

Очевидно, что $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $a^2 + b^2 = 1$.

С учетом введенных обозначений исходное уравнение равносильно такому: $a^x + b^x = 1$.

Если $x < 2$, то $a^x > a^2$, $b^x > b^2$, откуда $a^x + b^x > a^2 + b^2 = 1$, т. е. $a^x + b^x > 1$ и при $x < 2$ исходное уравнение корней не имеет.

Если $x > 2$ то $a^x < a^2$, $b^x < b^2$, и, следовательно, $a^x + b^x < a^2 + b^2 = 1$, т. е. $a^x + b^x < 1$ и при $x > 2$ исходное уравнение корней не имеет. Таким образом, $x = 2$ — единственный корень исходного уравнения. Ответ: $\{2\}$.

§164. Степенно-показательные уравнения

Степенно-показательными уравнениями называются уравнения вида $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{g(x)}$.

Корнями таких уравнений считаются решения смешанной системы

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ \varphi(x) = g(x) \end{cases}$$

и те значения x , для которых $f(x) = 1$, если при этих значениях определены $\varphi(x)$ и $g(x)$.

Замечание 1. Поскольку мы предполагаем, что функции вида $(f(x))^{\varphi(x)}$ определены только при $f(x) > 0$, то те значения x , которые формально удовлетворяют уравнению $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{g(x)}$, но при которых $f(x) \leq 0$, мы не будем считать корнями степенно-показательного уравнения.

Следует, однако, отметить, что если условием предполагается возможность $f(x) \leq 0$, то при решении степенно-показательных уравнений $(f(x))^{\varphi(x)} = (f(x))^{g(x)}$ нужно рассматривать также случай, когда $f(x) \leq 0$, что значительно усложняет решение.

Рассмотрим вначале степенно-показательные уравнения упрощенного вида $(f(x))^{\varphi(x)} = 1$.

Это уравнение сводится к совокупности двух уравнений $f(x) = 1$, $\varphi(x) = 0$. Решениями исходного уравнения будут решения этих двух уравнений, для которых выражения $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и $f(x) > 0$.

$$\text{Таким образом, } (f(x))^{\varphi(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1, \\ \varphi(x) = 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение $(x+8)^{x^2+2x-8} = 1$.

Решение. Приведем две формы записи решения.
1 форма записи решения.

Находим ОДЗ: $x+8 > 0 \Leftrightarrow x > -8$.

При $x+8 = 1 \Leftrightarrow x = -7$. Значение $x = -7$ удовлетворяет исходному уравнению (и при $x = -7$ выражение $x^2 + 2x - 8$ определено). Отсюда $x = -7$ — корень.

Решив уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$, получаем $x = 2$, $x = -4$, которые удовлетворяют условию $x + 8 > 0$. Ответ: $\{-7; 2; -4\}$.

2 форма записи решения.

$$(x+8)^{x^2+2x-8} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+8=1, \\ x^2+2x-8=0, \\ x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7, \\ x=2; x=-4, \\ x>-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -7, x_2 = 2, x_3 = -4.$$

Ответ: $\{-7; 2; -4\}$.

Пример 2. Решить уравнение $|x|^{x^2-2x} = 1$.

Решение.

$$|x|^{x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=1, \\ x^2-2x=0, \\ |x|>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1, \\ x=0; x=2, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

Ответ: $\{-1; 1; 2\}$.

Пример 3. Решить уравнение $|x-4|^{x^2-3x-4} = 1$.

Решение.

$$|x-4|^{x^2-3x-4} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|=1, \\ x^2-3x-4=0, \\ |x-4|>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5; x=3, \\ x=4; x=-1, \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = -1.$$

Ответ: $\{5; 3; -1\}$.

Пример 4. Решить уравнение $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$.

Решение. Рассмотрим два случая:

$$1) \begin{cases} x-2>0, \\ x-2 \neq 1, \\ x^2-x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x \neq 3, \\ x=4; x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

2) $x-2=1 \Leftrightarrow x=3$. Подставляя $x=3$ в исходное уравнение, приходим к тождеству. При $x=3$ выражение x^2-x определено, поэтому $x=3$ — корень исходного уравнения.

Замечание 2. Значения $x=-3$, $x=1$, $x=2$ удовлетворяют исходному уравнению, однако в силу ограничения $x-2>0$ их нельзя считать корнями уравнения $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$.

Ответ: $\{4; 3\}$.

Пример 5. Решить уравнение $(3x - 4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x}$.

Решение.

$$(3x - 4)^{2x^2+2} = (3x - 4)^{5x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 > 0, \\ 3x - 4 \neq 1, \\ 2x^2 + 2 = 5x, \\ 3x - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3}, \\ x \neq \frac{5}{3}, \\ x = 2; x = \frac{1}{2}, \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ 2; \frac{5}{3} \right\}.$$

Пример 6. Решить уравнение $x^{x+1} = x^{x^2-1}$.

Решение. $D(f): x > 0$.

1) $x_1 = 1$. Видим, что $x_1 \in D(f)$ и удовлетворяет исходному уравнению, т. е. $x_1 = 1$ является корнем;

2) для $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$x + 1 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_3 = -1, \end{cases}$$

$x_3 = -1$ не удовлетворяет системе $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases}$ и поэтому является

посторонним корнем.

Ответ: $\{1; 2\}$.

Пример 7. Решить уравнение $|x - 1|^{x^2-4x} = |x - 1|^{x-6}$.

Решение. Корнями исходного уравнения являются решения смешанной системы:

$$\begin{cases} |x - 1| > 0, \\ |x - 1| \neq 1, \\ x^2 - 4x = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 2; x \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{cases}$$

и еще, может быть, решения уравнения $|x - 1| = 1$. Из корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ ($x=2, x=3$) решением системы является

только число $x=3$, а условию $|x-1|=1$ удовлетворяют $x=2$ и $x=0$, также являющиеся решениями исходного уравнения, поскольку при этих значениях x функции $(x^2 - 4x)$ и $(x - 6)$ определены. Таким образом, корнями исходного уравнения являются числа $x = 3$, $x = 2$, $x = 0$. Ответ: $\{3; 2; 0\}$.

§165. Основные методы решения логарифмических уравнений

Решение логарифмических уравнений основано на свойствах логарифмической функции. Рассмотрим основные приемы решения этих уравнений.

1. Решение простейших логарифмических уравнений

Простейшими логарифмическими уравнениями будем называть уравнения вида:

а) $\log_a x = b$; б) $\log_a f(x) = b$; в) $\log_a f(x) = g(x)$;

г) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$; д) $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$.

Рассмотрим решение этих уравнений.

а) $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$;

б) $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$;

в) $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$;

г) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ где $a > 0$, $a \neq 1$.

На практике при решении логарифмических уравнений вида г) можно решать либо первую систему, либо вторую, либо третью. Достоинством первой системы является ее наглядность и очевидность, однако приходится решать два неравенства. Этого недостатка лишены вторая и третья системы; при этом лучше всего решать ту из этих двух систем, где проще решение неравенства ($f(x) > 0$ или $g(x) > 0$).

Отметим, что при решении уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ можно не пользоваться символами эквивалентности и не решать смешанные системы. При этом от исходного уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ переходим к уравнению $f(x) = g(x)$. Решая

последнее уравнение, находим его корни, среди которых могут быть посторонние. Посторонние корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, которая задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$д) \log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$$

На практике можно использовать любую из приведенных выше трех систем.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3 x = 2$.

Решение. $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$. Ответ: {9}.

Пример 2. Решить уравнение $\log_4(x+2) = 3$.

Решение. $\log_4(x+2) = 3 \Leftrightarrow x+2 = 4^3 = 64 \Leftrightarrow x = 64 - 2 = 62$.
Ответ: {62}.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2(4^x - 2) = x$.

Решение. $\log_2(4^x - 2) = x \Leftrightarrow 4^x - 2 = 2^x \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2^x = y) \quad y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2, \\ 2^x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: {1}.

Пример 4. Решить уравнение $\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7)$.

Решение. Приведем три формы записи решения.

1 форма записи решения (с помощью только эквивалентных преобразований).

$$\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 7x - 7, \\ x^2 - 1 > 0, \\ 7x - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ x < -1; x > 1, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 6, \\ x < -1; x > 1, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

2 форма записи решения (с помощью только эквивалентных преобразований).

$$\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 7x - 7, \\ 7x - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 6, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

3 форма записи решения (со словесными комментариями и с проверкой найденных корней).

$$\log_5(x^2 - 1) = \log_5(7x - 7) \Rightarrow x^2 - 1 = 7x - 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 6.$$

Проверка. Подставляя $x_1 = 1$ в исходное уравнение, получаем что выражения слева и справа не существуют, т. е. $x_1 = 1$ — посторонний корень. Подставляя $x_2 = 6$ в исходное уравнение, имеем

$$\log_5(x^2 - 1) = \log_5(6^2 - 1) = \log_5 35,$$

$$\log_5(7x - 7) = \log_5(7 \cdot 6 - 7) = \log_5 35, \log_5 35 = \log_5 35.$$

Отсюда $x = 6$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: {6}.

Пример 5. Решить уравнение $\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(6x - 8)$.

Решение.

$$\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(6x - 8) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 6x - 8, \\ x^2 - 3x > 0, \\ 6x - 8 > 0, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 8 = 0, \\ x < 0; x > 3, \\ x > \frac{4}{3}, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = 8, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

Ответ: {8}.

Пример 6. Решить уравнение $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$.

Решение.

$$\begin{aligned}\log_2(\log_3(\log_4 x)) &= 0 \Leftrightarrow \log_2(\log_3(\log_4 x)) = \log_2 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) &= 1 \Leftrightarrow \log_3(\log_4 x) = \log_3 3 \Leftrightarrow \log_4 x = 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= 4^3 = 64.\end{aligned}$$

Ответ: {64}.

Пример 7. Решить уравнение $\lg x = 2 - \lg 5$.

Решение.

$$2 - \lg 5 = \lg 10^2 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20. \text{ Отсюда } \lg x = 2 - \lg 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = \lg 20 \Leftrightarrow x = 20.$$

Ответ: {20}.

2. Решение логарифмических уравнений потенцированием

Пример 8. Решить уравнение $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.

Решение.

$$\begin{cases} \log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1, \\ x+1 > 0, \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1)(x+3) = 1, \\ x > -1, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 4x + 3) = 1, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 3, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 0, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = -4, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ответ: {0}.

Пример 9. Решить уравнение $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$.

Решение. $2 - \log_4 8 = \log_4 4^2 - \log_4 8 = \log_4 \frac{16}{8} = \log_4 2$.

Тогда имеем

$$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \log_4 2, \\ x+3 > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = 2, \\ x > -3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x > -3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Ответ: {5}.

3. Решение уравнений с применением основного логарифмического тождества $a^{\log_a b} = b$

Пример 10. Решить уравнение $\log_4(2^{4x}) = 2^{\log_2 4}$.

Решение. Согласно основному логарифмическому тождеству $2^{\log_2 4} = 4$. Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$$\log_4(2^{4x}) = 4 \Leftrightarrow 2^{4x} = 4^4 = (2^2)^4 = 2^8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: $\{2\}$.

Пример 11. Решить уравнение $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5$.

Решение.

Преобразуем левую часть исходного уравнения, применяя свойства логарифмов и основное логарифмическое тождество

$$9^{\log_3(1-2x)} = (3^2)^{\log_3(1-2x)} = 3^{2\log_3(1-2x)} = 3^{\log_3(1-2x)^2} = (1-2x)^2 \quad \text{при}$$

условии, что $1 - 2x > 0$.

Отсюда можем записать

$$9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2x)^2 = 5x^2 - 5 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-4x+4x^2 = 5x^2-5, \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-6=0, \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{10}, \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - \sqrt{10}. \quad \text{Ответ: } \{-2 - \sqrt{10}\}.$$

4. Решение логарифмических уравнений методом замены переменной

При решении уравнений этим методом необходимо обратить внимание на следующее:

$$\log_a^2(x^2) = (\log_a x^2)^2 = (2\log_a |x|)^2 = 2^2(\log_a |x|)^2 = 4\log_a^2 |x|;$$

$$\log_a^2 x^3 = (\log_a x^3)^2 = (3\log_a x)^2 = 3^2 \log_a^2 x = 9\log_a^2 x.$$

$$\text{В общем случае } \log_a^n x^m = (\log_a x^m)^n = (m\log_a x)^n = m^n \log_a^n x,$$

где $x > 0$, если m — нечетное число.

Если $m=2k$ (m — четное число), то при $x \neq 0$

$$\log_a^n x^m = \log_a^n x^{2k} = (2k)^n \cdot \log_a^n |x| = m^n \log_a^n |x|.$$

Пример 12. Решить уравнение $\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$.

Решение. Обозначив $\lg x = t$, получаем $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^1 = 10, \\ x = 10^2 = 100. \end{cases} \text{ Ответ: } \{10; 100\}.$$

Пример 13. Решить уравнение $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$.

Решение.

$$\lg^2(x^3) = (\lg x^3)^2 = (3\lg x)^2 = 3^2(\lg x)^2 = 9\lg^2 x.$$

Отсюда исходное уравнение равносильно такому

$$2 \cdot 9\lg^2 x - 3\lg x - 1 = 0 \Leftrightarrow 18\lg^2 x - 3\lg x - 1 = 0.$$

Пусть $\lg x = t$. Тогда $18t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 18}}{2 \cdot 18} = \frac{3 \pm 9}{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \\ t_2 = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{1}{3} \\ \lg x = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{\frac{1}{3}}, \\ x = 10^{-\frac{1}{6}}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left\{10^{\frac{1}{3}}; 10^{-\frac{1}{6}}\right\}.$$

Пример 14. Решить уравнение $\lg^4 x - 10\lg^2 x + 9 = 0$.

Решение. Обозначив $\lg^2 x = t$, получаем $t^2 - 10t + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x = 1, \\ \lg^2 x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = \pm 1, \\ \lg x = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^{\pm 1}, \\ x = 10^{\pm 3}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \{10; 10^{-1}; 10^3; 10^{-3}\}.$$

Пример 15. Решить уравнение $(2,5)^{\log_3 x} + (0,4)^{\log_3 x} = 2,9$.

$$\text{Решение. } 2,5 = \frac{5}{2}, \quad 0,4 = \frac{2}{5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}.$$

Отсюда исходное уравнение равносильно следующему:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} + \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right)^{\log_3 x} = \frac{29}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} + \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x}\right)^{-1} = \frac{29}{10}.$$

Обозначив $\left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} = t$, получаем $t + t^{-1} = \frac{29}{10} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t + t^{-1} - \frac{29}{10} = 0 \Leftrightarrow \frac{10t^2 + 10 - 29t}{10t} = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 10 - 29t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2}, \\ t = \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} = \frac{5}{2}, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_3 x} = \frac{2}{5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1, \\ \log_3 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 3^{-1} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{3; \frac{1}{3}\right\}$.

5. Решение уравнений методом логарифмирования, который заключается в том, что от уравнения $f(x) = g(x)$ переходят к уравнению $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Метод логарифмирования обычно применяется при решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени.

Пример 16. Решить уравнение $x^{\lg x} = 10$.

Решение.

Логарифмируя обе части исходного уравнения по основанию 10, приходим к уравнению, равносильному исходному:

$$x^{\lg x} = 10 \Leftrightarrow \lg(x^{\lg x}) = \lg 10 \Leftrightarrow \lg x \cdot \lg x = 1 \Leftrightarrow (\lg x)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ x = 10^{-1} = 0,1. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \{10; 0,1\}.$$

Пример 17. Решить уравнение $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$.

Решение.

Используя метод логарифмирования, получаем

$$(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5 \Leftrightarrow \log_5 \left((\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} \right) = \log_5 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_5 x - 1) \log_5 \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow (\log_5 x - 1) \frac{1}{2} \log_5 x = 1.$$

Обозначив $\log_5 x = t$, получаем: $\frac{(t-1)t}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = 2, \\ \log_5 x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^2 = 25, \\ x = 5^{-1} = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{25; \frac{1}{5}\right\}$.

Пример 18. Решить уравнение $x^{2\lg^3 x - 1,5\lg x} = \sqrt{10}$.

Решение.

$$x^{2\lg^3 x - 1,5\lg x} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \lg(x^{2\lg^3 x - 1,5\lg x}) = \lg \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\lg^3 x - 1,5\lg x)\lg x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\lg^4 x - 3\lg^2 x - 1 = 0.$$

Обозначив $\lg^2 x = t$, получаем $4t^2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x = 1, \\ \lg^2 x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 1; \lg x = -1, \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 10; x = 10^{-1} = 0,1.$$

Ответ: $\{10; 0,1\}$.

6. Решение уравнений методом деления обеих частей на показательно-логарифмическую функцию

Пример 19. Решить уравнение $3^{2\lg x} = 5^{3\lg x}$.

Решение.

$$3^{2\lg x} = 5^{3\lg x} \Leftrightarrow \frac{3^{2\lg x}}{5^{3\lg x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(3^2)^{\lg x}}{(5^3)^{\lg x}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3^2}{5^3}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{125}\right)^{\lg x} = 1 \Leftrightarrow \lg x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ответ: $\{1\}$.

Пример 20. Решить уравнение $7^{\lg x} \cdot 5^{\lg x + 1} = 3 \cdot 5^{\lg x - 1} \cdot 13 \cdot 7^{\lg x - 1}$.

$$\text{Решение. } 5^{\lg x + 1} = 5^{\lg x} \cdot 5, \quad 5^{\lg x - 1} = \frac{5^{\lg x}}{5}, \quad 7^{\lg x - 1} = \frac{7^{\lg x}}{7}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
 7^{\lg x} \cdot 5 \cdot 5^{\lg x} &= \frac{3}{5} \cdot 5^{\lg x} \cdot \frac{13}{7} \cdot 7^{\lg x} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{13}{7}\right) \cdot 7^{\lg x} = \left(5 + \frac{3}{5}\right) \cdot 5^{\lg x} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{20}{7} \cdot 7^{\lg x} &= \frac{28}{5} \cdot 5^{\lg x} \Leftrightarrow \frac{7^{\lg x}}{5^{\lg x}} = \frac{28 \cdot 7}{5 \cdot 20} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^{\lg x} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \lg x &= 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100.
 \end{aligned}$$

Ответ: {100}.

7. Решение уравнений путем перехода к другому основанию

Пример 21. Решить уравнение $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1, x \neq 2 \Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

В выражении $\log_{x-1} 4$ переходим к основанию 2:

$$\log_{x-1} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2(x-1)} = \frac{2}{\log_2(x-1)}.$$

Обозначив $\log_2(x-1) = t$, приходим к уравнению, эквивалентному исходному: $1 + t = \frac{2}{t} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x-1) = 1, \\ \log_2(x-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2, \\ x-1 = 2^{-2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = \frac{5}{4}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left\{3; \frac{5}{4}\right\}.$$

Пример 22. Решить уравнение $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$.

Решение. Решим уравнение двумя способами.

1 способ. Переходим к основанию 2:

$$\log_{16} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} = \frac{\log_2 x}{4}, \quad \log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}.$$

Обозначив $\log_2 x = t$, получаем: $\frac{t}{4} + \frac{t}{2} + t = 7 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow$

$$\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16.$$

Ответ: {16}.

2 способ. Переходим к основанию 16:

$$\log_4 x = \frac{\log_{16} x}{\log_{16} 4} = \frac{\log_{16} x}{\frac{1}{2}} = 2 \log_{16} x, \quad \log_2 x = \frac{\log_{16} x}{\log_{16} 2} = \frac{\log_{16} x}{\frac{1}{4}} = 4 \log_{16} x.$$

Обозначив $\log_{16} x = t$, получаем $t + 2t + 4t = 7 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_{16} x = 1 \Leftrightarrow x = 16.$$

Ответ: {16}.

8. Решение логарифмических уравнений комбинированными методами

Пример 23. Решить уравнение $x^{\log_2 x} + 16 \cdot x^{-\log_2 x} = 17$.

Решение. Введем новую переменную по формуле $t = x^{\log_2 x}$. Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$$t + \frac{16}{t} = 17 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_2 x} = 1, \\ x^{\log_2 x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 1, \\ \log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_2 x)^2 = 0, \\ (\log_2 x)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0, \\ \log_2 x = 2; \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2^2 = 4; x = 2^{-2} = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left\{ 1; 4; \frac{1}{4} \right\}.$$

Пример 24. Решить уравнение $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 32$.

Решение.

Приведем два способа решения исходного уравнения.

1 способ.

$$2^{\log_2^2 x} = 2^{\log_2 x \cdot \log_2 x} = (2^{\log_2 x})^{\log_2 x} = x^{\log_2 x}.$$

Обозначив $x^{\log_2 x} = t$, получаем $t + t = 32 \Leftrightarrow t = 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^{\log_2 x} = 16 \Leftrightarrow \log_2(x^{\log_2 x}) = \log_2 16 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^2 = 4, \\ x = 2^{-2} = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left\{ 4; \frac{1}{4} \right\}.$$

2 способ.

Обозначив $\log_2 x = y$, получаем $x = 2^y$, $2^{\log_2^2 x} = 2^{y^2}$. Тогда исходное уравнение принимает вид $2^{y^2} + (2^y)^y = 32 \Leftrightarrow 2^{y^2} + 2^{y^2} = 32 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{y^2} = \frac{32}{2} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^2 = 4, \\ x = 2^{-2} = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left\{ 4; \frac{1}{4} \right\}.$$

Пример 25. Решить уравнение $6^{\lg x} = 72 - x^{\lg 6}$.

Решение. Приведем два способа решения.

1 способ. Поскольку $6^{\lg x} = x^{\lg 6}$, то получаем $6^{\lg x} = 72 - 6^{\lg x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 2 \cdot 6^{\lg x} = 72 \Leftrightarrow 6^{\lg x} = 36 = 6^2 \Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100.$

Ответ: $\{100\}$.

2 способ. Обозначим $\lg x = t$, тогда $x = 10^t$,

$x^{\lg 6} = (10^t)^{\lg 6} = (10^{\lg 6})^t = 6^t$, и мы приходим к уравнению

$$6^t = 72 - 6^t \Leftrightarrow 2 \cdot 6^t = 72 \Leftrightarrow 6^t = 36 = 6^2 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100.$$

Ответ: $\{100\}$.

Пример 26. Решить уравнение $36^{\lg x} = 6 + 5 \cdot x^{\lg 6}$.

Решение. Поскольку $x^{\lg 6} = 6^{\lg x}$, $36^{\lg x} = (6^2)^{\lg x} = (6^{\lg x})^2$,

то, обозначив $6^{\lg x} = t$, получаем $t^2 = 6 + 5t \Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t_1 = 6, t_2 = -1$. Из того, что $6^{\lg x} = 6$, следует $\lg x = 1 \Leftrightarrow x = 10$.

Уравнение $6^{\lg x} = -1$ решений не имеет, т. к. $6^{\lg x} > 0$.

Отсюда исходное уравнение имеет одно решение $x = 10$.

Ответ: $\{10\}$.

Пример 27. Решить уравнение $2\lg x^2 - (\lg(-x))^2 = 4$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases} x^2 > 0, \\ -x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$.

Поскольку по ОДЗ $x < 0$, то $\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg(-x)$ (нами использован тот факт, что при $x < 0$ $|x| = -x$). Отсюда исходное уравнение при $x < 0$ равносильно следующему: $2 \cdot 2\lg(-x) - (\lg(-x))^2 = 4$.

Обозначив $\lg(-x) = t$, получаем $4t - t^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (t - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \lg(-x) = 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -x = 10^2 = 100 \Leftrightarrow x = -100.$

Ответ: $\{-100\}$.

Пример 28. Решить уравнение $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0$.

Решение. Находим ОДЗ исходного уравнения:

$$\begin{cases} 2\log_8(-x) \geq 0, \\ \sqrt{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 1, \\ |x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1.$$

Таким образом, ОДЗ $x \in (-\infty; -1]$. Поскольку $x \leq -1$, то $\log_8\sqrt{x^2} = \log_8|x| = \log_8(-x)$. Обозначив $\sqrt{2\log_8(-x)} = y \geq 0$, полу-

чаем: $2\log_8(-x) = y^2 \Leftrightarrow \log_8(-x) = \frac{y^2}{2}$. Тогда исходное уравнение

равносильно такому $y - \frac{y^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2y - y^2 = 0 \Leftrightarrow y(2 - y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(-x) = 0, \\ \log_8(-x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = 1, \\ -x = 8^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -64. \end{cases}$$

Ответ: $\{-1; -64\}$.

Пример 29. Решить уравнение $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$.

Решение. $\log_x \sqrt{5x} = \log_x(5x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_x(5x) =$

$$= \frac{1}{2}(\log_x 5 + \log_x x) = \frac{1}{2}(\log_x 5 + 1).$$

Обозначив $\log_x 5 = t$, получаем уравнение, равносильное ис-

ходному: $\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)} = -t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1) \geq 0, \\ -t \geq 0, \\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}(t+1)}\right)^2 = (-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1, \\ t \leq 0, \\ \frac{1}{2}(t+1) = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 0, \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq t \leq 0, \\ t = 1, t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_x 5 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

Поскольку при решении исходного уравнения использовались только эквивалентные преобразования, то $x = \frac{1}{25}$ — единственный корень уравнения, который не нуждается в проверке.

Ответ: $\left\{\frac{1}{25}\right\}.$

9. Решение логарифмических уравнений, содержащих модули

Пример 30. Решить уравнение $\log_3|2x - 1| = 2$.

Решение.

$$\log_3|2x - 1| = 2 \Leftrightarrow |2x - 1| = 3^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 9, \\ 2x - 1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = -4. \end{cases}$$

Ответ: $\{5; -4\}.$

Пример 31. Решить уравнение $|\log_{\sqrt{3}}x - 2| - |\log_3x - 2| = 2$.

Решение. $\log_{\sqrt{3}}x = \frac{\log_3x}{\log_3\sqrt{3}} = \frac{\log_3x}{\frac{1}{2}} = 2\log_3x.$

Обозначив $\log_3x = t$, приходим к уравнению, равносильному исходному: $|2t - 2| - |t - 2| = 2 \Leftrightarrow 2|t - 1| - |t - 2| = 2$.

Решаем последнее уравнение методом интервалов. При этом имеем три интервала (I, II, III):

$$\text{I)} \quad \begin{cases} t < 1, \\ 2(1 - t) - (2 - t) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 1, \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow t = -2.$$

$$\text{II)} \quad \begin{cases} 1 \leq t \leq 2, \\ 2(t - 1) - (2 - t) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq t \leq 2, \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\text{III)} \quad \begin{cases} t > 2, \\ 2(t - 1) - (t - 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 2, \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \emptyset.$$

Таким образом, получаем $t = -2, t = 2$.

Отсюда $\begin{cases} \log_3x = -2, \\ \log_3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{-2} = \frac{1}{9}, \\ x = 3^2 = 9. \end{cases}$ Ответ: $\left\{\frac{1}{9}; 9\right\}.$

§166. Системы показательных и логарифмических уравнений

Решение систем показательных и логарифмических уравнений не содержит каких-либо принципиально новых трудностей по сравнению с решением систем алгебраических уравнений. Используются обычные приемы решения показательных и логарифмических уравнений и обычные приемы решения систем уравнений. Желательно, прежде чем применять тот или иной метод решения систем, преобразовать каждое уравнение системы к возможно более простому виду.

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения выражаем y через x и подставляем в первое уравнение системы. Получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{5-x} = 12, \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + \frac{32}{2^x} = 12, \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8; 2^x = 4, \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2, \\ y = 5 - x. \end{cases} \end{aligned}$$

Из второго уравнения системы находим $y_1 = 5 - x_1 = 5 - 3 = 2$, $y_2 = 5 - x_2 = 5 - 2 = 3$. Таким образом, система имеет два решения: $(3;2)$, $(2;3)$. Ответ: $\{(3;2); (2;3)\}$.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$

Решение.

Перемножив первое и второе уравнения системы, получим

$$\begin{aligned} 2^x \cdot 3^y \cdot 2^y \cdot 3^x &= 12 \cdot 18 \Leftrightarrow 2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2 \cdot 3)^{x+y} = 6^3 \Leftrightarrow 6^{x+y} = 6^3 \Leftrightarrow x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x. \end{aligned}$$

Подставив вместо y его значение $3-x$ в первое уравнение исходной системы, получим

$$2^x \cdot 3^{3-x} = 12 \Leftrightarrow \frac{2^x \cdot 3^3}{3^x} = 12 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{12}{3^3} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Отсюда $y = 3 - x = 3 - 2 = 1$.

Ответ: $\{(2;1)\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 34 \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ \log_2(x \cdot y) = 6, \\ x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ xy = 2^6 = 64, \\ x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ x(34 - x) = 64, \\ x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 32, \end{cases} \\ x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2, y_1 = 34 - 2 = 32;$$

$$x_2 = 32, y_2 = 34 - 32 = 2.$$

Ответ: $\{(2; 32); (32; 2)\}$.

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3, \\ \lg x^3 - \lg y^2 = 9. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ исходной системы задается системой неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

$$\lg x^3 = 3\lg x, \lg y^2 = 2\lg y, \text{ т. к. } y > 0.$$

Отсюда исходная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} \lg x + 2\lg y = -3 \\ 3\lg x - 2\lg y = 9 \end{cases} \Rightarrow \lg x + 2\lg y + 3\lg x - 2\lg y = -3 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lg x = 6 \Leftrightarrow \lg x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10}.$$

Из первого уравнения системы $2\lg y = -\lg x - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lg y = \frac{-\lg x - 3}{2} = \frac{-\frac{3}{2} - 3}{2} = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow y = 10^{-\frac{9}{4}} = \frac{1}{100\sqrt[4]{10}}.$$

Ответ: $\left\{ \left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100\sqrt[4]{10}} \right) \right\}.$

Пример 5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\lg y} = 4 \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы следует, что $x > 0$, $y > 0$. Прологарифмировав по основанию 10 обе части первого и второго уравнений системы, приходим к системе, равносильной исходной:

$$\begin{cases} \lg(xy) = \lg 40, \\ \lg(x^{\lg y}) = \lg 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 4 + 1, \\ \lg y \cdot \lg x = \lg 4. \end{cases}$$

Обозначив $\lg x = U$, $\lg y = V$, получаем

$$\begin{cases} U + V = \lg 4 + 1, \\ U \cdot V = \lg 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \lg 4 + 1 - U, \\ U(\lg 4 + 1 - U) = \lg 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V = \lg 4 + 1 - U, \\ U^2 - (\lg 4 + 1)U + \lg 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V = \lg 4 + 1 - U, \\ U_1 = \lg 4, U_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U_1 = \lg 4, V_1 = 1; U_2 = 1, V_2 = \lg 4.$$

Отсюда исходная система распадается на две:

$$\begin{cases} \lg x = \lg 4, \\ \lg y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x = 1, \\ \lg y = \lg 4. \end{cases}$$

Первая система имеет решения $x_1 = 4$, $y_1 = 10$; вторая система — решения $x_2 = 10$, $y_2 = 4$. Ответ: $\{(4; 10); (10; 4)\}$.

Пример 6. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_5 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ исходной системы задается системой неравенств
$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

$3^{\log_5 y} = y$ (основное логарифмическое тождество). Прологарифмировав второе уравнение системы по основанию 5, получаем

$$\log_5(x^y) = \log_5(5^{12}) \Leftrightarrow y \log_5 x = 12 \quad (\text{т. к. } x > 0, y > 0).$$

Отсюда приходим к системе, эквивалентной исходной:

$$\begin{cases} \log_5 x + y = 7, \\ y \log_5 x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - \log_5 x, \\ (7 - \log_5 x) \log_5 x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - \log_5 x, \\ \log_5 x = 3, \\ \log_5 x = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - \log_5 x, \\ x_1 = 5^3, \\ x_2 = 5^4. \end{cases}$$

Получаем две пары решений:

$$x_1 = 5^3 = 125, y_1 = 7 - \log_5 5^3 = 7 - 3 = 4;$$

$$x_2 = 5^4 = 625, y_2 = 7 - \log_5 5^4 = 7 - 4 = 3.$$

Ответ: $\{(125;4); (625;3)\}$.

Пример 7. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 5^{\log_5(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ исходной системы должна удовлетворять условию $x - 4y > 0$. Обозначив во втором уравнении системы $2^{x-2y} = t$, получаем $t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 8, t_2 = -1$; t_2 отпадает, так как $t > 0$.

$$\text{Отсюда } 2^{x-2y} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow x - 2y = 3.$$

Из первого уравнения исходной системы следует, что $\log_5(x - 4y) = 0 \Leftrightarrow x - 4y = 1$.

Таким образом, получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x - 4y = 1, \\ x - 2y = 3, \end{cases} \text{ решением которой является пара чисел } x=5, y=1.$$

Ответ: $\{(5;1)\}$.

§167. Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;

если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$. Коротко можно записать:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Заметим, что применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак $>$, можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки $<$, $\geq$, $\leq$. В част-

ности, можно, например, записать: $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) \geq g(x). \end{cases}$

Пример 1. Решить неравенство $2^x < \frac{1}{8}$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то $2^x < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x < 2^{-3} \Leftrightarrow x < -3$.
 Ответ: $x \in (-\infty; -3)$.

Пример 2. Решить неравенство $(0,5)^x \geq \frac{1}{32}$.

Решение. $(0,5)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow x \leq 5$.
 Ответ: $x \in (-\infty; 5]$.

Пример 3. Решить неравенство $16^x > 0,125$.

Решение. $16^x = (2^4)^x = 2^{4x}$, $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$, отсюда $16^x > 0,125 \Leftrightarrow 2^{4x} > 2^{-3} \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$.
 Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Пример 4. Решить неравенство $\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{x+2}} > 6^{-x}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{\sqrt{x+2}} > 6^{-x} \Leftrightarrow 6^{-\sqrt{x+2}} > 6^{-x} \Leftrightarrow -\sqrt{x+2} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} < x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0, \\ x > 0, \\ (\sqrt{x+2})^2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x+2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \begin{cases} x < -1, \\ x > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

2. Неравенства вида $a^{f(x)} > b$, $a > 0$

Необходимо рассмотреть два случая:

а) $b \leq 0$, тогда $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow x \in D(f)$;

б) $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$;

$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$ при $0 < a < 1$.

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

Пример 5. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1$.

Решение.

Поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ при $x \in \mathbb{R}$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $x \in \mathbb{R}$.

Пример 6. Решить неравенство $2^x > 5$.

Решение. $2^x > 5 \Leftrightarrow 2^x > 2^{\log_2 5} \Leftrightarrow x > \log_2 5$.

Ответ: $x \in (\log_2 5; +\infty)$.

Пример 7. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq 3$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} \Leftrightarrow 3x \leq \log_{\frac{1}{2}} 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{3}\right]$.

3. Неравенства вида $a^{f(x)} > b^{\varphi(x)}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b . Учитывая свойства показательной функции, получаем

$$a^{f(x)} > b^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x) \log_a b, \text{ если } a > 1;$$

$$a^{f(x)} > b^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x) \log_a b, \text{ если } 0 < a < 1.$$

Пример 8. Решить неравенство $2^x \geq 3^{x^2}$.

Решение. Прологарифмируем обе части исходного неравенства по основанию 2. Тогда имеем

$$2^x \geq 3^{x^2} \Leftrightarrow \log_2(2^x) \geq \log_2(3^{x^2}) \Leftrightarrow x \geq x^2 \log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 \log_2 3 \geq 0 \Leftrightarrow x(1 - x \log_2 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] = [0; \log_3 2].$$

Ответ: $x \in [0; \log_3 2]$.

4. Решение показательных неравенств методом замены переменной

Пример 9. Решить неравенство $9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$.

Решение. Пусть $3^x = t$, тогда исходное неравенство равносильно такому:

$$t^2 - 12t + 27 < 0 \Leftrightarrow 3 < t < 9 \Leftrightarrow 3 < 3^x < 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^1 < 3^x < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $x \in (1; 2)$.

Пример 10. Решить неравенство $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$.

Решение. Обозначив $3^x = t$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{t+5} < \frac{1}{3t-1} \Leftrightarrow \frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(t-3)}{(t+5)(3t-1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -5, \\ \frac{1}{3} < t < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t < 3 \text{ (поскольку } 3^x = t > 0 \text{)}. \text{ Отсюда исход-}$$

ное неравенство равносильно такому: $\frac{1}{3} < 3^x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Ответ: $x \in (-1; 1)$.

5. Решение неравенств, содержащих однородные функции относительно показательных функций

Пример 11. Решить неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0$.

Решение. Исходное неравенство можно записать в виде

$$2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0.$$

В левой части — однородные функции относительно 2^x и 5^x . Отсюда можно разделить обе части исходного неравенства на 2^{2x} , 5^{2x} или на $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части исходного неравенства на $5^{2x} = 25^x$, получаем

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{10}{25}\right)^x > 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0.$$

Обозначив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$, получаем $t^2 - t - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ t > 2. \end{cases}$

Поскольку $t > 0 \Rightarrow t > 2$ и исходное неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$.

Пример 12. Решить неравенство $2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^x \geq 0$.

Решение.

Разделив обе части исходного неравенства на $9^x \neq 0$, полу-

чим $2 - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geq 0$. Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, тогда имеем

$$3t^2 - 5t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1, \\ t \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq 1, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

§168. Степенно-показательные неравенства

К степенно-показательным неравенствам относятся неравенства, содержащие неизвестное и в основании, и в показателе степени.

1. Неравенства вида $(f(x))^{U(x)} > 1$

Решение подобных неравенств записывается в виде цепочек эквивалентных неравенств:

$$(f(x))^{U(x)} > 1 \Leftrightarrow (f(x))^{U(x)} > (f(x))^0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ U(x) < 0, \\ f(x) > 1, \\ U(x) > 0. \end{cases}$$

Несложно записать цепочку эквивалентных неравенств, если будут знаки $\geq$, $<$, $\leq$. Так, например,

$$(f(x))^{U(x)} < 1 \Leftrightarrow (f(x))^{U(x)} < (f(x))^0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ U(x) > 0, \\ f(x) > 1, \\ U(x) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что если в исходном неравенстве имеется знак нестрогого неравенства, то нужно рассмотреть еще случай, когда основание $f(x)$ равно 1.

Пример 1. Решить неравенство $x^{\frac{2x-1}{2-x}} > 1$.

Решение. Рассмотрим два случая, в зависимости от того, какое основание:

$$1) \begin{cases} x > 1, \\ \frac{2x-1}{2-x} > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{2x-1}{2-x} < 0. \end{cases} \quad \text{Решение системы 1) следующее: } 1 < x < 2.$$

Решение системы 2): $0 < x < \frac{1}{2}$. Объединяя эти два множества, получаем окончательный ответ.

$$\text{Ответ: } x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2).$$

Пример 2. Решить неравенство $|x|^{x^2-x-2} < 1$.

Р е ш е н и е. Рассматривая два возможных значения для $|x|$, получаем совокупность двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} |x| > 1, \\ x^2 - x - 2 < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < |x| < 1 \\ x^2 - x - 2 > 0. \end{cases}$$

1) система неравенств имеет решение $1 < x < 2$;

2) система решений не имеет.

Ответ: $x \in (1; 2)$.

Пример 3. Решить неравенство $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$.

Р е ш е н и е. $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1 \Leftrightarrow (3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < (3-x)^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 1, \\ \frac{3x-5}{3-x} < 0, \\ 0 < 3-x < 1, \\ \frac{3x-5}{3-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x < \frac{5}{3}; x > 3, \\ 2 < x < 3, \\ \frac{5}{3} < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{3}, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup (2; 3)$.

Пример 4. Решить неравенство $\left|\frac{x}{5} + 2\right|^{x^2-81} \geq 1$.

Р е ш е н и е.

Рассмотрим два способа решения исходного неравенства.

1 способ. Необходимо рассмотреть три случая:

$$\left|\frac{x}{5} + 2\right| = 1; \quad \left|\frac{x}{5} + 2\right| > 1; \quad 0 < \left|\frac{x}{5} + 2\right| < 1.$$

$$1) \left|\frac{x}{5} + 2\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} + 2 = 1, \\ \frac{x}{5} + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ x = -15. \end{cases}$$

Очевидно, что при $x = -5$ и $x = -15$ исходное неравенство выполняется, поэтому эти значения x являются решениями.

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{x}{5} + 2 \right| > 1, \\ x^2 - 81 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{5} + 2 > 1, \\ \frac{x}{5} + 2 < -1, \\ |x| \geq 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > -5, \\ x < -15, \\ x \leq -9, \\ x \geq 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -15) \cup [9; +\infty).$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 0 < \left| \frac{x}{5} + 2 \right| < 1, \\ x^2 - 81 \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -15 < x < -10, \\ -10 < x < -5, \\ -9 \leq x \leq 9 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in [-9; -5).$$

Решение исходного неравенства есть объединение множеств, полученных при рассмотрении трех случаев:

$$x \in (-\infty; -15) \cup [9; +\infty) \cup [-9; -5) \cup \{-5\} \cup \{-15\} = (-\infty; -15] \cup [-9; -5] \cup [9; +\infty).$$

2 способ. Прологарифмируем обе части исходного неравенства, например, по основанию 10. Тогда получаем

$$\left| \frac{x}{5} + 2 \right|^{x^2 - 81} \geq 1 \Leftrightarrow \lg \left| \frac{x}{5} + 2 \right|^{x^2 - 81} \geq \lg 1 \Leftrightarrow (x^2 - 81) \lg \left| \frac{x}{5} + 2 \right| \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{а) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 81 \geq 0, \\ \lg \left| \frac{x}{5} + 2 \right| \geq 0 \end{array} \right. \text{ или б) } \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 81 \leq 0, \\ \lg \left| \frac{x}{5} + 2 \right| \leq 0. \end{array} \right.$$

Система неравенств а) имеет решение $x \in (-\infty; -15] \cup [9; +\infty)$.

Система неравенств б) имеет решение $x \in [-9; -5]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -15] \cup [-9; -5] \cup [9; +\infty)$.

2. Неравенства вида $(f(x))^{U(x)} > (f(x))^{V(x)}$

При решении неравенств подобного вида существенным является величина основания $f(x)$: $0 < f(x) < 1$ или $f(x) > 1$.

$$(f(x))^{U(x)} > (f(x))^{V(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1, \\ U(x) > V(x), \\ 0 < f(x) < 1, \\ U(x) < V(x). \end{cases}$$

Исходное неравенство можно решать также с использованием логарифмирования обеих частей. При этом, если основание логарифма $a > 1$, то знак исходного неравенства не меняется,

если $0 < a < 1$, то знак исходного неравенства следует изменить на противоположный.

Заметим, что если исходное неравенство содержит знак $<$, $\leq$, $\geq$, то при решении подобного неравенства применяются те же правила, что и при решении неравенства, содержащего знак $>$, только в случае нестрогого неравенства нужно учитывать, что решение уравнения $f(x) = 1$ может дать решение исходного нестрогого неравенства.

Пример 5. Решить неравенство $x^{x+5} > x^3$.

Решение. Решим неравенство, используя две формы записи решения.

1 форма записи решения (с использованием символов эквивалентности и понятия совокупности систем неравенств).

$$x^{x+5} > x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 1, \\ x+5 > 3, \\ 0 < x < 1, \\ x+5 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 1, \\ x > -2, \\ 0 < x < 1, \\ x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x > 1, \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

2 форма записи решения (с рассмотрением двух случаев)

$$1) \begin{cases} x > 1, \\ x+5 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1; \quad 2) \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x+5 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Ответ: $x \in (1; \infty)$.

Пример 6. Решить неравенство $(14-x)^{2x-25} \geq (14-x)^{29-2x}$.

Решение. Решим исходное неравенство двумя способами.

1 способ (с использованием логарифмирования обеих частей исходного неравенства по основанию $a = 10$).

$$\begin{aligned} (14-x)^{2x-25} \geq (14-x)^{29-2x} &\Leftrightarrow \lg(14-x)^{2x-25} \geq \lg(14-x)^{29-2x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x-25) \cdot \lg(14-x) \geq (29-2x) \cdot \lg(14-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (2x-25-29+2x) \cdot \lg(14-x) \geq 0 \Leftrightarrow (4x-54) \cdot \lg(14-x) \geq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} 4x-54 \geq 0, \\ \lg(14-x) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \geq \frac{27}{2}, \\ x \leq 13, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \in \emptyset, \\ 13 \leq x \leq 13,5 \end{cases} \Leftrightarrow \right. \right.$$

$$\Leftrightarrow x \in [13; 13,5].$$

Ответ: $x \in [13; 13,5]$.

2 способ (с рассмотрением трех случаев, когда $14 - x = 1$, $14 - x > 1$, $0 < 14 - x < 1$).

1) $14 - x = 1 \Leftrightarrow x = 13$. Подстановка $x=13$ в исходное неравенство приводит его к верному числовому неравенству $1^1 \geq 1^3$, отсюда $x=13$ — решение исходного неравенства;

$$2) \begin{cases} 14 - x > 1, \\ 2x - 25 \geq 29 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 13, \\ x \geq 13,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

$$3) \begin{cases} 0 < 14 - x < 1, \\ 2x - 25 \leq 29 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 < x < 14, \\ x \leq 13,5 \end{cases} \Leftrightarrow 13 < x \leq 13,5.$$

Отсюда $x \in (13; 13,5] \cup \{13\} = [13; 13,5]$ — решение исходного неравенства.

Замечание. Значение $x=14$ удовлетворяет исходному неравенству, однако оно не включено в ответ, так как выражение $(f(x))^{u(x)}$ определено при $f(x) > 0$ по определению степенно-показательной функции.

Ответ: $x \in [13; 13,5]$.

Пример 7. Решить неравенство $(x+4)^{8-7x} \leq (x+4)^{1-9x}$.

Решение.

$D(f)$ исходного неравенства определяется неравенством $x+4 > 0$.

$$(x+4)^{8-7x} \leq (x+4)^{1-9x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+4 > 1, \\ 8-7x \leq 1-9x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x \leq -3,5, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, \\ -3,5 \leq x < -3, \\ x = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x+4 < 1, \\ 8-7x \geq 1-9x, \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3, \\ x \geq -3,5, \end{cases} & \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x+4 = 1, \\ x \in D(f) \end{cases} & \Leftrightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -3,5 \leq x \leq -3.$$

Ответ: $x \in [-3,5; -3]$.

3. Неравенства вида $(f(x))^{u(x)} > (g(x))^{u(x)}$

Подобного вида неравенства проще всего решать логарифмированием обеих частей с сохранением знака исходного нера-

венства, если основание логарифма $a > 1$, и с изменением знака на противоположный, если основание логарифма $0 < a < 1$. Можно также вместо логарифмирования рассматривать несколько случаев в зависимости от величины основания.

Пример 8. Решить неравенство $(x+1)^x \geq (x+2)^x$.

Решение. Решим исходное неравенство двумя способами.

1 способ (с использованием логарифмирования обеих частей исходного неравенства по основанию $a=10 > 1$).

$$(x+1)^x \geq (x+2)^x \Leftrightarrow \lg(x+1)^x \geq \lg(x+2)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \lg(x+1) \geq x \cdot \lg(x+2) \Leftrightarrow x(\lg(x+1) - \lg(x+2)) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \lg(x+1) - \lg(x+2) \geq 0, \\ x \leq 0, \\ \lg(x+1) - \lg(x+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ \lg(x+1) \geq \lg(x+2), \\ x \leq 0, \\ \lg(x+1) \leq \lg(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x+1 > 0, \\ x+2 > 0, \\ x+1 \geq x+2, \\ x \leq 0, \\ x+1 > 0, \\ x+2 > 0, \\ x+1 \leq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, \\ -1 < x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 0.$$

Ответ: $-1 < x \leq 0$.

2 способ. ОДЗ $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$.

Разделим обе части исходного неравенства на $(x+2)^x > 0$.

Получаем неравенство, равносильное исходному, $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x \geq 1$.

Рассмотрим 3 возможных случая в зависимости от того, какова величина основания.

$$1. \frac{x+1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x+1=x+2 \Leftrightarrow 1=2 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$2. \begin{cases} 0 < \frac{x+1}{x+2} < 1, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{с учетом ОДЗ}) \begin{cases} 0 < x+1 < x+2, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 0]. \text{ Этот полуинтервал входит в ОДЗ.}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} > 1, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\text{с учетом ОДЗ}) \begin{cases} x+1 > x+2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Таким образом, только второй случай дает решение.

Ответ: $x \in (-1; 0]$.

§169. Логарифмические неравенства

Логарифмическими называются неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании.

При решении логарифмических неравенств нахождение области определения исходного неравенства не является обязательным, а часто даже нецелесообразным, поскольку условия, задающие область определения неравенства, обычно подключают к тому неравенству, которое является следствием заданного логарифмического неравенства.

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

1. Неравенства, решаемые с использованием определения логарифма

Неравенства вида $\log_a f(x) > b$ решаются следующим образом:

$$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1, \\ f(x) > a^b, \\ a > 1. \end{cases}$$

Аналогично решаются неравенства вида $\log_a f(x) < b$:

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < a^b, \\ a > 1. \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\log_2(1-x) > -2$.

Решение. $\log_2(1-x) > -2 \Leftrightarrow \log_2(1-x) > \log_2(2^{-2}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1-x > 2^{-2} \Leftrightarrow 1-x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x < \frac{3}{4}. \quad \text{Ответ: } x \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right).$$

Пример 2. Решить неравенство $\log_{0,5}(x^2+x) \geq -1$.

Решение. Приведем две формы записи решения.

1 форма записи решения.

$$\log_{0,5}(x^2+x) \geq -1 \Leftrightarrow \log_{0,5}(x^2+x) \geq \log_{0,5}(0,5)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 + x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x > 0, \\ x^2+x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ x^2+x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1; x > 0, \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; -1) \cup (0; 1].$$

2 форма записи решения.

Находим ОДЗ: $x^2 + x > 0$, $x(x+1) > 0$, $x < -1$, $x > 0$.

$$\log_{0,5}(x^2+x) \geq -1, \log_{0,5}(x^2+x) \geq \log_{0,5} 2, x^2 + x \leq 2,$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0, -2 \leq x \leq 1.$$

Решение исходного неравенства есть пересечение ОДЗ и не-

равенства $-2 \leq x \leq 1$, т. е. $\begin{cases} x < -1; x > 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Решение этой системы есть

объединение множеств: $[-2; -1) \cup (0; 1]$. Ответ: $x \in [-2; -1) \cup (0; 1]$.

Пример 3. Решить неравенство $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0$.

Решение.

Решение исходного неравенства лучше всего записать с использованием цепочек эквивалентных неравенств:

$$\begin{aligned}
& \log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_2 1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 0 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3 1 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_3 3 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq x-1 < \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{8} \leq x < \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left[\frac{9}{8}; \frac{3}{2}\right)$.

2. Неравенства, решаемые с использованием свойств логарифмов

Решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ основано на том, что функция $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) является убывающей при $0 < a < 1$ и возрастающей при $a > 1$.

Таким образом, имеем следующие утверждения:

$$\text{а) } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases}$$

Заметим, что в неравенствах а) и б) можно использовать как первую (более полную) систему неравенств, так и вторую (укороченную) систему неравенств, ей равносильную. Достоинством более полной системы неравенств является ее наглядность и очевидность, а достоинством укороченной — меньшая трудоемкость, т. к. приходится решать на одно неравенство меньше. Однако переход от более полной системы к укороченной не всегда очевиден для малоопытного решающего.

Пример 4. Решить неравенство $\log_2(8-x) > \log_2(4-2x)$.

Р е ш е н и е. Исходное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 8 - x > 0, \\ 4 - 2x > 0, \\ 8 - x > 4 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8, \\ x < 2, \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

Ответ: $x \in (-4; 2)$.

Пример 5. Решить неравенство $\log_{0,2}(x^2) > \log_{0,2}(3x)$.

Р е ш е н и е.

Учитывая, что основание логарифмов $0 < 0,2 < 1$, получаем

$$\log_{0,2}(x^2) > \log_{0,2}(3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ 3x > 0, \\ x^2 < 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Ответ: $x \in (0; 3)$.

3. Логарифмические неравенства, решаемые с использованием замены переменной

Пример 6. Решить неравенство $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \leq 0$.

Р е ш е н и е. Обозначив $\log_3 x = t$, приходим к неравенству

$$t^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq \log_3 x \leq 3 \Leftrightarrow \log_3 3^{-1} \leq \log_3 x \leq \log_3 3^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 27.$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{3}; 27\right]$.

Пример 7. Решить неравенство $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \leq \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Перейдем в логарифме по основанию 4 к логарифму по основанию 2: $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2} = \frac{1}{2} \log_2 x$.

Обозначив $\log_2 x = t$, приходим к неравенству

$$\frac{1 - \frac{1}{2}t}{1 + t} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2 - t}{2(1 + t)} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2t}{2(1 + t)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < -1, \\ \log_2 x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}, \\ \log_2 x \geq \log_2 2^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

4. Решение показательно-логарифмических неравенств

Показательно-логарифмическими неравенствами называются неравенства вида $(U(x))^{V(x)} > a$, где $V(x)$ содержит логарифмические функции (знак неравенства может быть $<$, $\geq$, $\leq$). При решении подобных неравенств целесообразно взять логарифмы от обеих частей исходного неравенства, убедившись предварительно, что эти логарифмы существуют. Знак полученного логарифмического неравенства останется таким же, каким он был до логарифмирования, если логарифмирование производится по основанию $a > 1$, и изменится на противоположный, если логарифмирование производится по основанию $0 < a < 1$.

Пример 8. Решить неравенство $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} \leq 100$.

Решение. Обе части исходного неравенства при $x > 0$ принимают только положительные значения, откуда логарифмы этих частей существуют. Возьмем логарифмы от обеих частей по основанию 10. Так как $10 > 1$, то знак неравенства не изменится:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} \leq 100 \Leftrightarrow \lg \left(\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2}\right) \leq \lg 100 \Leftrightarrow (\lg x - 2) \cdot \lg \left(\frac{x}{10}\right) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lg x - 2) \cdot (\lg x - 1) \leq 2. \text{ Обозначив } \lg x = t, \text{ получаем}$$

$$(t - 2) \cdot (t - 1) \leq 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \lg x \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg 1 \leq \lg x \leq \lg 10^3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 1000.$$

Ответ: $x \in [1; 1000]$.

5. Логарифмические неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма и в основании логарифма

В общем виде решение подобных неравенств можно записать следующим образом:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > A \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ f(x) > (\varphi(x))^A, \\ 0 < \varphi(x) < 1, \\ 0 < f(x) < (\varphi(x))^A; \end{cases}$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 1, \\ 0 < g(x) < f(x), \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases}$$

На практике обычно рассматривают два случая (когда основание логарифма $\varphi(x) > 1$ и $0 < \varphi(x) < 1$) и не всегда пользуются приведенными выше эквивалентностями.

Пример 9. Решить неравенство $\log_x(x-2) \leq 2$.

Решение.

$$\text{Находим ОДЗ} \quad \begin{cases} x-2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Отсюда основание логарифма больше 1, и мы приходим к цепочке неравенств, равносильных исходному:

$$\begin{aligned} \log_x(x-2) \leq 2 &\Leftrightarrow \log_x(x-2) \leq \log_x x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq x^2, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

Пример 10. Решить неравенство $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) > 1$.

Решение. Рассмотрим два случая в зависимости от величины основания логарифма:

$$1) \quad \begin{cases} 0 < 2x < 1, \\ 0 < x^2 - 5x + 6 < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 5x + 6 < 2x \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x < 2; x > 3, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 3 < x < 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$2) \quad \begin{cases} 2x > 1, \\ x^2 - 5x + 6 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (6; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (6; +\infty)$.

Пример 11. Решить неравенство $\log_x(6x - 1) > \log_x(2x)$.

Решение.

$$\text{Находим ОДЗ } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 6x - 1 > 0, \Leftrightarrow \frac{1}{6} < x < 1; \quad x > 1. \\ 2x > 0 \end{cases}$$

С учетом ОДЗ, необходимо рассмотреть два случая:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{6} < x < 1, \\ 6x - 1 < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} < x < 1, \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}.$$

$$2) \begin{cases} x > 1, \\ 6x - 1 > 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Решение исходного неравенства есть объединение решений, полученных при решении систем 1) и 2).

$$\text{Ответ: } x \in \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty).$$

Пример 12. Решить неравенство $\log_x 5 > \log_x 2$.

Решение.

1 способ. Переходим в исходном неравенстве к основанию 10:

$$\log_x 5 > \log_x 2 \Leftrightarrow \frac{\lg 5}{\lg x} > \frac{\lg 2}{\lg x} \Leftrightarrow \frac{\lg 5 - \lg 2}{\lg x} > 0 \Leftrightarrow \frac{\lg \frac{5}{2}}{\lg x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ (нами использован тот факт, что } \lg \frac{5}{2} > 0 \text{)}.$$

2 способ. Поскольку $5 > 2$, то исходное неравенство может выполняться только в том случае, когда основание логарифма больше 1, т. е. при $x > 1$.

3 способ.

$$\log_x 5 > \log_x 2 \Leftrightarrow \log_x 5 - \log_x 2 > 0 \Leftrightarrow \log_x \left(\frac{5}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ответ: } x \in (1; +\infty).$$

§170. Примеры решения показательных и логарифмических неравенств повышенной сложности

Пример 1. Решить неравенство $1 < 4^{|x^2-x|} \leq 16$.

Решение. Исходное неравенство запишем с помощью цепочек равносильных неравенств:

$$4^0 < 4^{|x^2-x|} \leq 4^2 \Leftrightarrow 0 < |x^2-x| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-x| > 0, \\ |x^2-x| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \neq 0, \\ \begin{cases} x^2-x \leq 2, \\ x^2-x \geq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, x \neq 1, \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2].$$

Ответ: $x \in [-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2]$.

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{5}{4}\right)^{|x+7|} \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{|x^2-3x+2|}$.

Решение. Поскольку $\frac{5}{4} > 1$, то приходим к следующей цепочке эквивалентных неравенств:

$$|x+7| \leq |x^2-3x+2| \Leftrightarrow |x+7|^2 \leq |x^2-3x+2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+7)^2 - (x^2-3x+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+7-x^2+3x-2)(x+7+x^2-3x+2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x^2+4x+5)(x^2-2x+9) \leq 0 \Leftrightarrow x^2-4x-5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Прежде чем приступить к рассмотрению следующих примеров, напомним вкратце на *методе интервалов для непрерывных функций*. В основе этого метода лежит свойство непрерывной функции: если на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Пусть надо решить неравенство $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$). Находим вначале ОДЗ исходного неравенства, которое пусть состоит из объединения конечного числа промежутков (интервалов). Пусть на каждом из промежутков функция $f(x)$ непрерывна и имеет конечное число нулей. Отметим на числовой прямой нули функции $y = f(x)$. При этом некоторые из исходных промежутков, входящие в ОДЗ, могут разбиться на некоторое число интервалов. На каждом из полученных промежутков функция $y = f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, а отсюда она сохраняет знак на каждом из интервалов. Выбираем в каждом из промежутков некоторую точку x_0 и вычисляем знак $f(x_0)$ в каждом из них. Тогда решением неравенства $f(x) > 0$ будет объединение тех интервалов, где поставлен знак «+», а решением неравенства $f(x) < 0$ — где поставлен знак «-».

Рассмотрим примеры на применение метода интервалов для непрерывных функций.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{\log_2(2x) \cdot \log_5(x+1)}{x-2} > 0$.

Решение. ОДЗ $\begin{cases} 2x > 0, \\ x+1 > 0, \Leftrightarrow 0 < x < 2; x > 2. \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$

$$\log_2(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2};$$

$$\log_5(x+1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Отмечаем на число-

вой прямой точки $x = \frac{1}{2}$,

$x = 0$, $x = 2$ (рис. 133).

Числовая прямая с учетом ОДЗ разбивается на три промежутка:

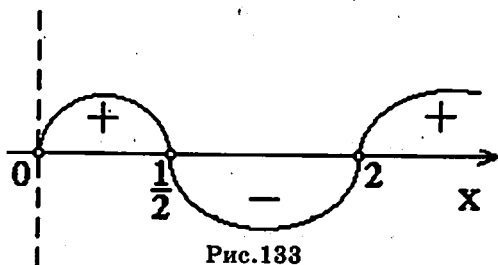


Рис.133

$$\left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 2\right), (2; +\infty).$$

Обозначив $f(x) = \frac{\log_2(2x) \cdot \log_5(x+1)}{x-2}$, определяем знак $f(x)$

на каждом из промежутков.

Возьмем $x = \frac{1}{4}$, $x = 1$, $x = 3$, $\frac{1}{4} \in (0; \frac{1}{2})$, $1 \in (\frac{1}{2}; 2)$, $3 \in (2; +\infty)$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\log_2\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \log_3\left(\frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{7}{4}\right)} > 0. \text{ Аналогично вычислив } f(1),$$

$f(3)$, получим $f(1) < 0$, $f(3) > 0$. Таким образом, $f(x) > 0$ при

$x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$. Это и есть решение исходного неравенства.

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_{2x-3} 4 > \log_{2x} 4$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 2x - 3 \neq 1 \\ 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty) = D(f).$$

Перейдем в исходном неравенстве к основанию 4:

$$\begin{aligned} \log_{2x-3} 4 > \log_{2x} 4 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_4(2x-3)} > \frac{1}{\log_4(2x)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_4(2x) - \log_4(2x-3)}{\log_4(2x-3) \cdot \log_4(2x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_4\left(\frac{2x}{2x-3}\right)}{\log_4(2x-3) \cdot \log_4(2x)} > 0. \\ x \in D(f) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\log_4\left(\frac{2x}{2x-3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{2x-3} = 1 \Leftrightarrow 2x = 2x-3 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\log_4(2x-3) = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$\log_4(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ — не входит в } D(f).$$

Отсюда на числовую прямую наносим точки $x = \frac{3}{2}$, $x=2$ (рис. 134).

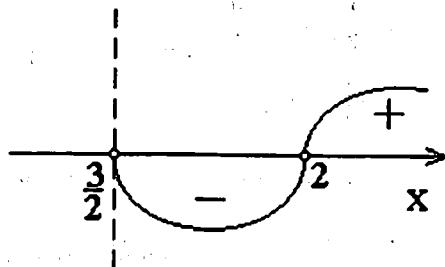


Рис.134

Обозначив $f(x) = \frac{\log_4\left(\frac{2x}{2x-3}\right)}{\log_4(2x-3) \cdot \log_4(2x)}$ и взяв точки $x=5 \in (2; +\infty)$,

$x=1,7 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$, получаем $f(5) > 0$, $f(1,7) < 0$.

Отсюда исходное неравенство выполняется при $x > 2$.

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

Тесты к главе 11. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

- A1. Уравнение $81^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}$ равносильно уравнению:
1) $2^x = 1$; 2) $3^{x^2+2x} = 1$; 3) $(0,7)^{x-x^3} = 1$; 4) $5^x = 0$.
- A2. Сколько корней имеет уравнение $3^x = \arctg \sqrt{3}$?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- A3. Найдите сумму корней уравнения $8^x - 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^{x+1} = 8$.
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- A4. Корень уравнения $\log_3 \log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 0$ является:
1) натуральным числом; 2) целым числом;
3) иррациональным числом; 4) дробным числом.
- A5. Сколько корней имеет уравнение $\log_2(3+x) + \log_2(x+2) = 1$?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- A6. Сколько натуральных решений имеет неравенство $3^x \leq 9$?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.
- A7. Найдите сумму целых решений неравенства $2^{x-1} \leq 16$.
1) 6; 2) 7; 3) 8; 4) 9.
- A8. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) \geq -1$.
1) $0 \leq x \leq 2$; 2) $-2 < x < 2$; 3) $-2 < x \leq 0$; 4) R .

- A9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7, \\ 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 18 \end{cases}$ и найдите $x + y$.
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

- A10. Сколько натуральных решений имеет неравенство $\log_3(x-1) \leq 0$?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

- A11. Сколько корней имеет уравнение $x^{3-x} = x$?
1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

- A12. Неравенство $(4x-1)^{2x-1} \leq 1$ имеет:
1) одно решение; 2) два решения;
3) три решения; 4) бесконечно много решений.

- A13. При каком значении параметра a неравенство $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ не имеет решений?
1) $a < 0$; 2) $a = 0$; 3) $a > 0$; 4) $a \neq 0$.

- A14. При каком значении параметра a уравнение $25^x - (2a+1)5^x + a^2 + a = 0$ не имеет решений?
1) $a > 0$; 2) $-1 < a \leq 0$; 3) $a \leq -1$; 4) $a \in \mathbb{R}$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Решите уравнение $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} = 196$.

B2. Решите уравнение $81 \cdot (\sqrt{10} + 3)^{5x-61} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}-3} \right)^{5x-61}$.

B3. Решите уравнение $\log_3 x + \log_9 x + \log_{81} x = 7$.

B4. Решите уравнение $1 + \log_x(6-x) = \log_7 5 \log_x 7$.

- В5. Решите уравнение $\log_{4x-x^2-3} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{x} + \cos \frac{\pi}{x} \right) = 0$.
- В6. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x \leq 0$.
- В7. Найдите сумму целых решений неравенства $|\log_x 8 + 1| \leq 2$.
- В8. Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства $|\log_x 8 + 1| \leq 2$.
- В9. При каком значении a система уравнений $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = x^2 + y + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

- С1. Решите уравнение $(\sqrt[3]{5 - \sqrt{24}})^x + (\sqrt[3]{5 + \sqrt{24}})^x = 10$.
- С2. Решите неравенство $\log_{\log_3 x} 3 \leq 1$.
- С3. При каких значениях a уравнение $\log_{x-1}(x+a) = \frac{1}{2}$ имеет единственное решение?
- С4. Найдите все значения a , при которых имеет решение неравенство $2^{-|x-a|} \log_2 (4x - x^2 - 2) \geq 1$.

Глава 12

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§171. Предел функции. Непрерывность функции

Говорят, что число b есть предел функции $y=f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. При этом употребляется запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Коротко можно записать:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, x \neq a, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Так как неравенство $|x - a| < \delta$ равносильно неравенству $a - \delta < x < a + \delta$, а неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ равносильно неравенству $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$, то определение предела можно дать в следующей форме: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если какова бы ни была ε -окрестность точки b , найдется такая δ -окрестность точки a , что для

любого значения $x \neq a$, принадлежащего δ -окрестности точки a , значение $f(x)$ принадлежит ε -окрестности точки b .

Из определения предела функции следует, что функция должна быть определена на промежутке $(a - \delta; a + \delta)$, кроме, возможно, точки $x=a$.

На практике предел функции в точке находят, пользуясь свойствами (теоремами о пределах), основными из которых являются следующие:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad k = \text{const.}$$

Предполагается, что в свойствах 1)–4) пределы слева и справа существуют.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке $x = a$* , если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \rightarrow a$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Функция, непрерывная в каждой точке заданного промежутка, называется *непрерывной на всем промежутке*.

Все основные элементарные функции x^a , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x , $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и т. д. — непрерывны во всех точках, где они определены.

Если функция, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, в самой точке $x = a$ не определена или ее предел в точке $x = a$ не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет *разрыв в точке $x = a$* , а точку $x = a$ называют *точкой разрыва*.

Например, $y = \frac{1}{x-2}$; функция непрерывна всюду, кроме $x = 2$, а в точке $x = 2$ терпит разрыв.

§172. Определение производной.

Основные формулы и правила дифференцирования

Пусть $y = f(x)$ — заданная функция, x , x_0 — два значения независимой переменной из области определения $D(f)$ функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением независимой переменной* или *приращением аргумента*.

$$\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x.$$

Разность $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и первоначальным значением $f(x_0)$ называется *приращением функции в точке $x = x_0$* и обозначается $\Delta f(x_0)$, а также через Δf или Δy . Таким образом,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δf в точке x_0 к приращению аргумента Δx , когда $\Delta x \rightarrow 0$. Это определение можно

записать так:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$, то говорят, что она дифференцируема в точке $x = x_0$.

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Вычисление производной с использованием ее определения связано с громоздкими выкладками и обычно на практике не применяется. При практическом нахождении производной необходимо знать производные основных элементарных функций и основные правила дифференцирования.

Основные формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности $(x)' = 1$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$,
 $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

3. $(\sin x)' = \cos x$. 4. $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. 6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$.

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, в частности $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Основные правила дифференцирования

1. $(cf(x))' = cf'(x)$, $c = \text{const}$. 2. $(f + g)' = f' + g'$.

3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. 4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

5. $f(g(x))' = f'_g(g) \cdot g'_x(x)$, где $f(g(x))$ — сложная функция (правило дифференцирования сложной функции).

Пример 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^9$; б) $y = ax^2 + bx + c$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; г) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[5]{7}$;

д) $y = (2x-5)(3x+1)$; е) $y = x \cos x$; ж) $y = \frac{1+5x}{1-3x}$.

Решение. а) $y = x^9$, $y' = 9x^8$;

б) $y = ax^2 + bx + c$, $y' = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c' =$
 $= a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, $y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$;

г) $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[5]{7}$, $y' = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[5]{7} \right)' = (\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{x} \right)' + (\sqrt[5]{7})' =$
 $= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2} \right) + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$;

д) $y = (2x-5)(3x+1)$, $y' = (2x-5)'(3x+1) + (2x-5)(3x+1)' =$
 $= 2(3x+1) + (2x-5)3 = 6x + 2 + 6x - 15 = 12x - 13$;

е) $y = x \cos x$, $y' = (x)' \cos x + x(\cos x)' =$
 $= 1 \cdot \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$;

ж) $y = \frac{1+5x}{1-3x}$, $y' = \frac{(1+5x)'(1-3x) - (1+5x)(1-3x)'}{(1-3x)^2} =$
 $= \frac{5(1-3x) - (1+5x)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{8}{(1-3x)^2}$.

Пример 2. Используя правило нахождения производной сложной функции, найти производные функций:

а) $y = (x^2 - 5x + 6)^{40}$; б) $y = \sqrt{1-x^2}$; в) $y = \sqrt[3]{\cos 9x}$;

$$\text{г) } y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad \text{д) } y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x;$$

$$\text{е) } y = \sqrt{1 + e^{\sin 2x}}; \quad \text{ж) } y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= (x^2 - 5x + 6)^{40}; \quad y' = 40(x^2 - 5x + 6)^{39} \cdot (x^2 - 5x + 6)' = \\ &= 40(x^2 - 5x + 6)^{39} \cdot (2x - 5) = 40(2x - 5)(x^2 - 5x + 6)^{39}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}(1 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } y &= \sqrt[3]{\cos 9x}, \quad y' = \left((\cos 9x)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}(\cos 9x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (\cos 9x)' = \\ &= \frac{1}{3}(\cos 9x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\sin 9x) \cdot 9 = -\frac{3\sin 9x}{\sqrt[3]{(\cos 9x)^2}}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y' = -\frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}};$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x, \quad y' = \frac{1}{4} \cdot 4 \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x};$$

$$\text{е) } y = \sqrt{1 + e^{\sin 2x}},$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + e^{\sin 2x}}} \cdot e^{\sin 2x} \cdot (\cos 2x) \cdot 2 = \frac{\cos 2x \cdot e^{\sin 2x}}{\sqrt{1 + e^{\sin 2x}}};$$

$$\text{ж) } y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x \right) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{(x + \sqrt{1 + x^2})\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Пример 3. Дана функция $y = \frac{x}{2x-1}$. Найти $y'(-2)$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x}{2x-1} \right)' = \frac{x' \cdot (2x-1) - x \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{2x-1-x \cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{(2x-1)^2};$$

$$y'(-2) = -\frac{1}{(2(-2)-1)^2} = -\frac{1}{25}.$$

Ответ: $\left\{ -\frac{1}{25} \right\}$.

Пример 4. Дана функция $y = \frac{\pi}{x} \cos 3x$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$y' = \pi \left(\frac{\cos 3x}{x} \right)' = \pi \frac{(\cos 3x)' \cdot x - (\cos 3x) \cdot x'}{x^2} =$$

$$= \pi \frac{(-3\sin 3x) \cdot x - \cos 3x}{x^2} = \pi \frac{-3x\sin 3x - \cos 3x}{x^2},$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \frac{-3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \pi \cdot \frac{\frac{3\pi}{2} - 0}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{3\pi^2 \cdot 4}{2\pi^2} = 6.$$

Ответ: $\{6\}$.

§173. Геометрический смысл производной

С геометрической точки зрения производная функции $y = f(x)$, вычисленная в точке $x = x_0$, есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке x_0 . Другими словами, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент к упомянутой выше касательной (рис. 135). Таким образом, $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в заданной точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

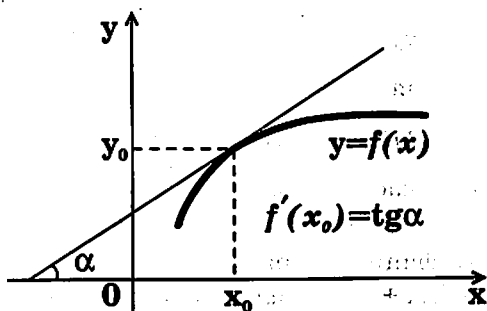


Рис. 135

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты точки касания, $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной, $(x; y)$ — текущие координаты, т. е. координаты любой точки, принадлежащей касательной.

Задача 1. Под каким углом наклонена касательная к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в точке $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$?

Решение.

$$y' = \frac{1}{2}(x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x, \quad y'(1) = 1 = \operatorname{tg} \alpha. \quad \text{Отсюда } \alpha = 45^\circ.$$

Ответ: 45° .

Задача 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + x$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение.

$$\text{Находим ординату точки касания } y_0 = x_0^2 + x_0 = 3^2 + 3 = 12.$$

$$y' = 2x + 1, \quad y'(x_0) = y'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Подставив в уравнение касательной $x_0 = 3$, $y_0 = 12$, $y'(x_0) = 7$, находим искомое уравнение касательной:

$$y = 12 + 7(x - 3) \quad \text{или} \quad y = 7x - 9. \quad \text{Ответ: } y = 7x - 9.$$

Задача 3. В какой точке параболы $y = x^2 + 3x - 10$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 135° ?

Решение.

Находим $y' = 2x + 3$. По условию $y'(x) = k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$. Отсюда $2x + 3 = -1 \Rightarrow x = -2 = x_0$,

$y_0 = x_0^2 + 3x_0 - 10 = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 10 = -12$. Таким образом, искомая точка $M_0(-2; -12)$.

Ответ: $M_0(-2; -12)$.

Задача 4. На параболе $y = -x^2 + 7x - 10$ найти точку, в которой касательная к ней параллельна прямой $x + y - 1 = 0$.

Решение. $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 1$, откуда угловой коэффициент прямой $k = -1$. Поскольку прямые $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$, то угловой коэффициент касательной к параболе равен (-1) в

силу параллельности прямой и касательной. $y = -x^2 + 7x - 10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y' = -2x + 7 = -1 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = -(4)^2 + 7 \cdot 4 - 10 = 2$. Искомая
 точка $M(4;2)$. Ответ: $M(4;2)$

§174. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

При применении производной к исследованию функций необходимо помнить следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Если производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ положительна, то функция возрастает в точке $x = x_0$. Если производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ отрицательна, то функция $y = f(x)$ убывает в точке $x = x_0$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция возрастает на этом интервале. Если функция $y = f(x)$ имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то функция убывает на этом интервале.

Пример 1. Найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 27x$.

Решение. $y' = 3x^2 - 27$.
 $y' > 0$ при $3x^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 9 \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$;
 $y' < 0$ при $x \in (-3; 3)$.

Отсюда функция $y = x^3 - 27x$ возрастает при $x \in (-\infty; -3)$ и при $x \in (3; +\infty)$, убывает при $x \in (-3; 3)$.

Ответ: y возрастает при $x \in (-\infty; -3)$ и при $x \in (3; +\infty)$, y убывает при $x \in (-3; 3)$.

Вспомним, что *критическими точками* называются внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует.

Точки минимума и точки максимума называются точками экстремума данной функции, а значение функции в этих точках соответственно *минимумом и максимумом функций* (или *экстремумом самой функции*).

Необходимое условие существования экстремума дается теоремой: если точка $x = x_0$ является точкой экстремума функ-

ции $y = f(x)$, то в этой точке производная равна нулю (т. е. $f'(x_0) = 0$) или не существует.

Заметим, что необходимое условие существования экстремума не является достаточным, поскольку из того, что производная обращается в нуль или не существует в заданной точке $x = x_0$, не следует, что x_0 — точка экстремума.

Так, например, производная функции $y = x^3$ ($y' = 3x^2$) в точке $x = 0$ равна нулю, однако экстремума в точке $x = 0$ функция $y = x^3$ не имеет.

Достаточные условия существования экстремума

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$ и имеет производную $f'(x)$ в некоторой окрестности $(a; b)$ этой точки. Тогда:

- а) если $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка минимума функции $y = f(x)$;
- б) если $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка максимума функции $y = f(x)$.

Общая схема исследования функций

Общее исследование функции и построение ее графика обычно проводят в таком порядке:

- 1) находят область определения функции;
- 2) выясняют вопрос четности, нечетности, периодичности функции;
- 3) находят, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат. Иногда для уточнения построения графика следует найти две-три дополнительные точки;
- 4) находят производную функции и ее критические точки;
- 5) находят промежутки монотонности и экстремумы функции;
- 6) используя полученные результаты, строят график функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y = -x^3 + 3x - 2$ и построить ее график.

Решение

1. Область определения — множество всех действительных чисел $R = (-\infty; +\infty)$.

2. $y(-x) = -(-x)^3 + 3(-x) - 2 = x^3 - 3x - 2$, т. е. $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$. Значит, функция ни четная, ни нечетная, т. е. это функция общего вида. Функция непериодическая.

3. Находим нули функции: $-x^3 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=-2 \end{cases}$$

точки пересечения графика с осью Ox . При $x=0$ $y(0)=-2$ (точка пересечения графика с осью ординат).

4. $y' = -3x^2 + 3$. Приравняв производную нулю, получим критические точки $-3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1, x = 1$.

5. Найденные критические точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

Составим таблицу, которая помогает в построении графика (табл. 13):

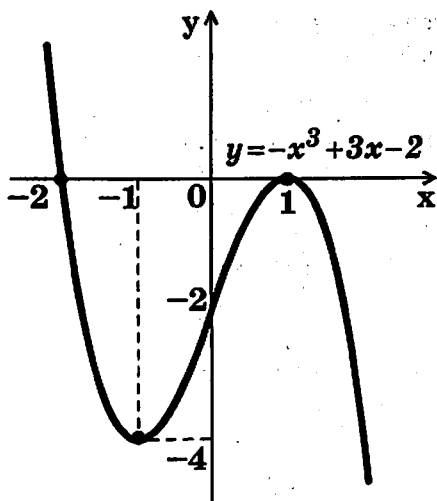


Рис. 136

Таблица 13

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	убыв. ↘	-4	↗ возр.	0	убыв. ↘
		min		max	

6. Используя полученные результаты, строим график функции (рис. 136).

§175. Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значений функции.

Экстремальные геометрические задачи

Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, нужно найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на

концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Задача 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1; 3]$.

Решение.

Находим критические точки функции:

$$y' = (x^4 - 8x^2 - 9)' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 0, x = -2, x = 2$ — критические точки. В промежутке $x \in (-1; 3)$ лежат две критические точки: $x = 0, x = 2$.

$$y(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9, \quad y(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 - 9 = -25,$$

$$y(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^2 - 9 = -16, \quad y(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 0.$$

Отсюда наименьшее значение функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ достигается в точке $x = 2$ и равно -25 , а наибольшее — в точке $x = 3$ и равно 0 . Кратко это записывается так:

$$\min_{[-1;3]} y = y(2) = -25, \quad \max_{[-1;3]} y = y(3) = 0.$$

$$\text{Ответ: } \min_{[-1;3]} y = y(2) = -25; \quad \max_{[-1;3]} y = y(3) = 0.$$

Задача 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2\cos x - \cos 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$y' = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x + 4\sin x \cos x = 2\sin x(-1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В промежутке $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ лежит только одна критическая

точка $x = \frac{\pi}{3}$. Вычисляем $y\left(\frac{\pi}{3}\right), y\left(\frac{\pi}{6}\right), y\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{2\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\pi = 0 - (-1) = 1.$$

Отсюда наименьшее значение функции достигается в точке $x = \frac{\pi}{2}$, а наибольшее в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Ответ: } \min_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad \max_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}.$$

Рассмотрим задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значений, встречающиеся в геометрии.

Задача 3. Найти длины сторон прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами 18; 24; 30 и имеющего с ним общий угол.

Решение.

Пусть $\triangle ABC$ — заданный треугольник, в котором $AC=18$, $AB=24$, $BC=30$, $\angle A=90^\circ$ (рис. 137).

$AKLM$ — вписанный прямоугольник наибольшей площади, имеющий с данным треугольником общий угол A . Пусть $AM=KL=x$, $AK=ML=z$. Тогда $MC=AC-AM=18-x$, $BK=AB-AK=24-z$.

Из подобия треугольников BKL и BAC получаем

$$\frac{BK}{KL} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{24-z}{x} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(24-z) = 4x \Leftrightarrow z = 24 - \frac{4}{3}x. \text{ Площадь прямоугольника } AKLM$$

$$S_{AKLM} = AM \cdot AK = x \cdot z = x \left(24 - \frac{4}{3}x \right) = 24x - \frac{4}{3}x^2 = S(x).$$

$$S'(x) = 24 - \frac{8}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ — точка максимума функции}$$

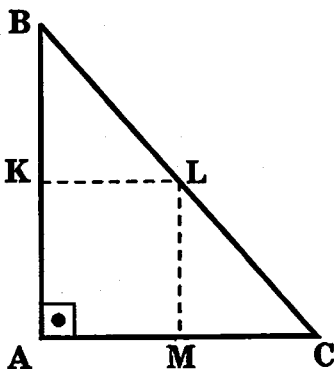


Рис.137

$$S(x) = 24x - \frac{4}{3}x^2; AM=KL=x=9, \quad AK=ML=z=24 - \frac{4}{3}x = 24 -$$

$-\frac{4}{3} \cdot 9 = 12$. Таким образом, стороны прямоугольника наибольшей площади $x=9, z=12$. Ответ: $\{9; 12\}$.

Задача 4. Найти высоту цилиндра заданного объема V , который имеет наименьшую полную поверхность.

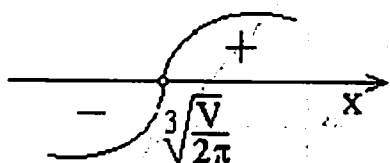
Решение.

Пусть радиус основания цилиндра равен x . Полная поверхность цилиндра $S = 2\pi xH + 2\pi x^2$, где H — высота цилиндра.

$$V = \pi x^2 H \Rightarrow H = \frac{V}{\pi x^2}. \text{ Подставляя это значение } H \text{ в формулу для полной поверхности } S, \text{ получаем}$$

$$S = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2 = S(x).$$

$$S'(x) = 2V\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2\pi \cdot 2x = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$



Поскольку при переходе через

точку $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ производная

$S'(x)$ меняет знак с «-» на

«+», то $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ — точка ми-

нимума (рис. 138).

„+“, „-“ — знаки $S'(x)$

Рис.138

$$\text{Высота цилиндра } H = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{V^3 \cdot 4\pi^2}{\pi^3 \cdot V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

$$\text{Ответ: } H = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Тесты к главе 12. Элементы дифференциального исчисления

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

- A1. Найдите значение производной функции $f(x) = x \cos x$ при заданном значении аргумента $x_0 = \pi$.
1) -1 ; 2) 0 ; 3) 1 ; 4) π .
- A2. Найдите производную функции $y = \ln \sin x$.
1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$.
- A3. Найдите производную функции $y = \cos \lg 3x$.
1) $\frac{1}{\cos 3x \ln 10}$; 2) $-\frac{\sin \lg 3x}{x \ln 10}$; 3) $-\frac{\sin \lg 3x}{x}$; 4) $\sin \lg 3x$.
- A4. Найдите производную функции $y = \ln \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.
1) $\cos x$; 2) $\sin x$; 3) $\operatorname{tg} x$; 4) $\operatorname{ctg} x$.
- A5. В каких точках производная функции $y = x^5$ совпадает со значением самой функции?
1) 0 ; 1; 2) 0 ; 3; 3) 0 ; 5; 4) 0 ; 7.
- A6. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^2 + x$ в точке $x_0 = 1$.
1) 1 ; 2) 2 ; 3) 3 ; 4) 4 .
- A7. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = e^{-2x}$ в точке $x_0 = 0$.
1) $y = 2x + 1$; 2) $y = 2x - 1$;
3) $y = -2x - 1$; 4) $y = -2x + 1$.
- A8. Найдите промежуток возрастания функции $y = \frac{3}{x + 2 + x^2}$.
1) $(-\infty; -0,5)$; 2) $(-0,5; +\infty)$; 3) $(-0,5; 0,5)$; 4) $(-1; 1)$.

A9. Найдите экстремумы функции $y = \lg(16 - x^2)$.

1) $y_{\min} = y(0) = 0$; 2) $y_{\max} = y(0) = 1$;

3) $y_{\min} = y(1) = 0$; 4) $y_{\max} = y(0) = 0$.

A10. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 4 \cos x - \sin^2 x$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1) 4; 2) 9; 3) 13; 4) 20.

A11. Найдите угол наклона касательной к графику функции

$y = \frac{x^2}{x}$ в точке (a, a) .

1) 30° ; 2) 45° ; 3) 135° ; 4) 150° .

A12. На кривой $y = 4x^2 - 6x - 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 10x$.

1) (1; 2); 2) (2; 1); 3) (-1; 2); 4) (-2; 1).

A13. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c . Каковы должны быть катеты этого треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

1) $\frac{c}{2}; \frac{c}{2}$;

2) $\frac{c}{3}; \frac{c}{3}$;

3) $\frac{c}{\sqrt{2}}; \frac{c}{\sqrt{2}}$;

4) $\frac{c}{\sqrt{3}}; \frac{c}{\sqrt{3}}$.

A14. В прямой круговой конус вписан шар объема V . Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

1) $\frac{5V}{2}$; 2) $3V$; 3) $\frac{3V}{2}$; 4) $2V$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

- B1. Вычислите значение производной функции $y = x \ln(x^2 + 2x - 7)$ при заданном значении аргумента $x_0 = 2$.
- B2. Вычислите значение производной функции $y = 3 \cos\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right)$ при заданном значении аргумента $x_0 = 1$.
- B3. Корни квадратного трехчлена равны -3 и 5 . Найдите корень производной этого трехчлена.
- B4. Найдите градусную меру угла наклона к оси x касательной, проведенной к кривой $y = 0,5x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$.
- B5. Найдите точку минимума функции $y = 5x^6 - 5x^5$.
- B6. Найдите наибольшее значение функции $y = 8x^3 - x^4$.
- B7. Найдите число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.
- B8. В правильной четырехугольной призме длина диагонали боковой грани равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину высоты призмы наибольшего объема.
- B9. В конус с заданным постоянным объемом вписана пирамида; в ее основании лежит равнобедренный треугольник, у которого величина угла при вершине равна φ . При каком значении φ (в градусах) объем пирамиды будет наибольшим.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

- C1. Найдите острый угол между касательными, проведенными к кривым $y = \frac{18}{\sqrt{x}}$ и $y = \frac{12}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$ в точке их пересечения.
- C2. Найдите, при каком значении параметра a минимальное значение функции $y = x^2 - 4ax - a^4$ наибольшее.
- C3. Исследуйте функцию $y = \sqrt{x^3 - 3x}$ и постройте ее график.
- C4. На параболе $y = x^2$ найдите точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

Глава 13

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§176. Применение геометрических преобразований

В главе 12 показано применение производной к исследованию функций и построению их графиков. Нередко можно избежать проведения подобного исследования, используя ряд методов, облегчающих построение графиков (в частности геометрические преобразования графиков функций, описанные в §99). Покажем применение геометрических преобразований графиков функций на практике.

Пример. Построить эскизы графиков функций:

$$1) y = -1; \quad 2) y = -\frac{x}{2}; \quad 3) y = \frac{1}{3}x^2; \quad 4) y = (x-1)^2 + 1;$$

$$5) y = -2x^2 + 4x - 1; \quad 6) y = -\sqrt{x}; \quad 7) y = \sqrt{-x}; \quad 8) y = \sqrt{x+3};$$

$$9) y = \frac{1}{x} + 1; \quad 10) y = \frac{x-1}{x+1}; \quad 11) y = -|x|; \quad 12) y = |x+2|;$$

$$13) y = \frac{x-1}{|x-1|}; \quad 14) y = |x-1| - |x+1|; \quad 15) y = |x^2 - 2|x| - 3|;$$

$$16) y = \left| \frac{x}{x+1} \right|; \quad 17) y = \log_2(x-2); \quad 18) y = x^{\frac{1}{\log_3 x}};$$

$$19) y = \frac{1}{2} \sin x + 1; \quad 20) y = \sin|2x|; \quad 21) y = |\sin 2x|; \quad 22) y = \arccos \frac{x}{2};$$

$$23) y = \cos(\arccos x); \quad 24) y = \arccos(\cos 2x); \quad 25) y = \frac{1}{[x]};$$

$$26) y = \frac{x}{[x]}; \quad 27) y = x|\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x; \quad 28) y = \log_4 \log_{\frac{1}{2}} \log_3 x.$$

Решение.

Используя основные методы построения графиков функций, строим эскизы заданных графиков, которые приведены на рис. 139—166.

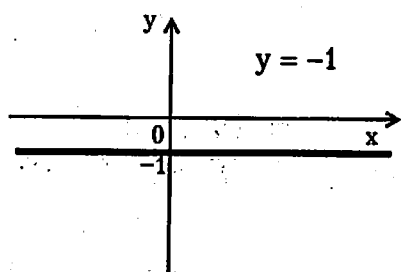


Рис. 139

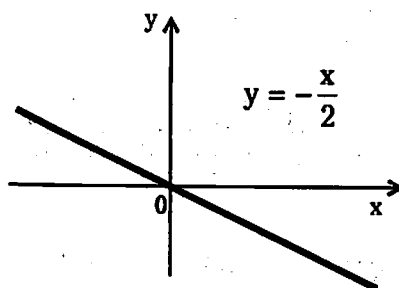


Рис. 140

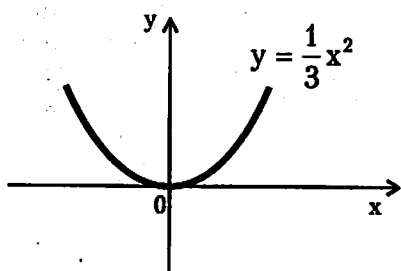


Рис. 141

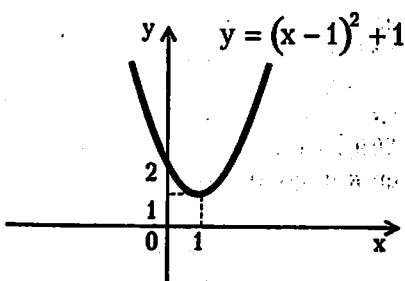


Рис. 142

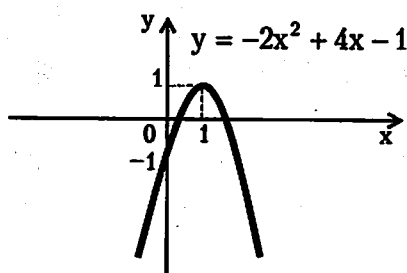


Рис. 143

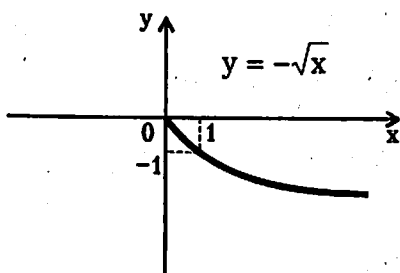


Рис. 144

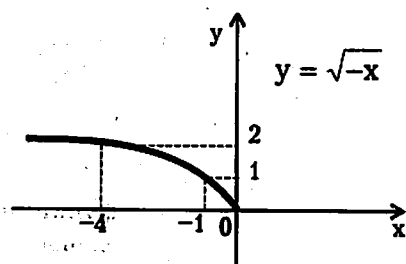


Рис. 145

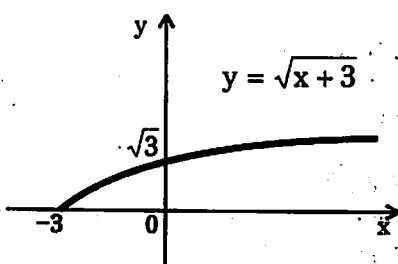


Рис. 146

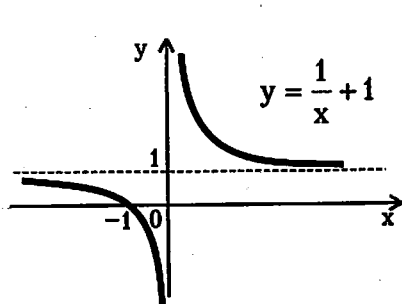


Рис. 147

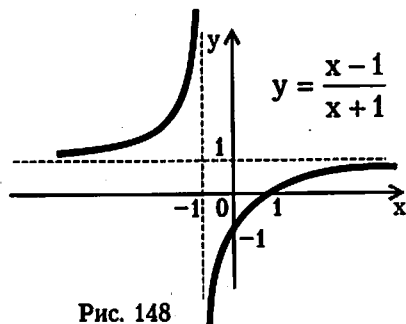


Рис. 148

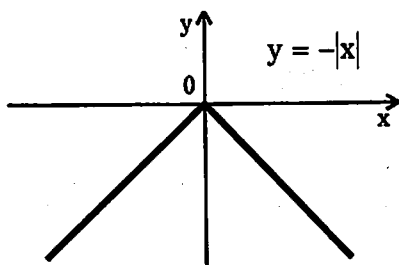


Рис. 149

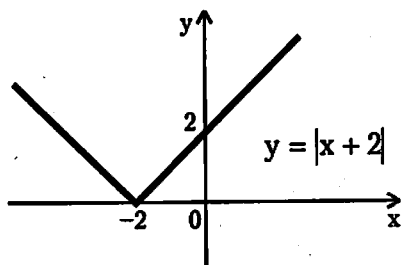


Рис. 150

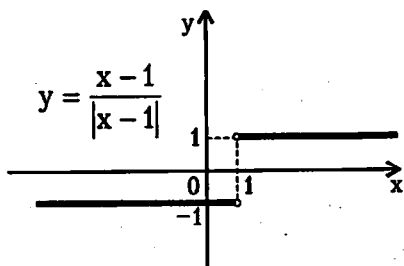


Рис. 151

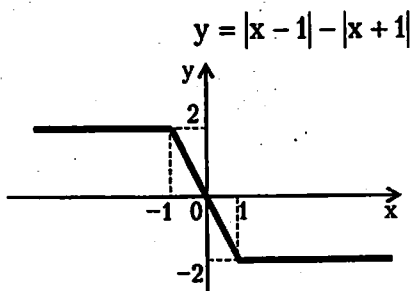


Рис. 152

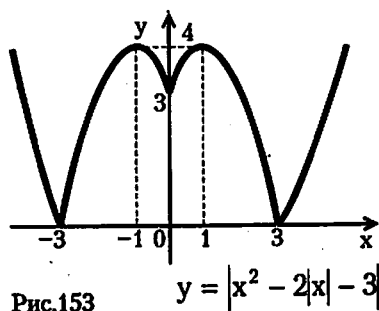


Рис.153

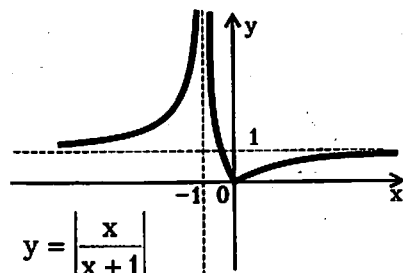


Рис. 154

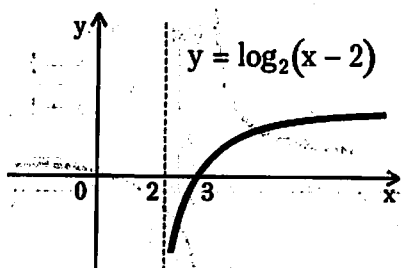


Рис. 155

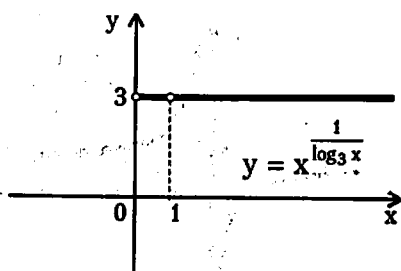


Рис. 156

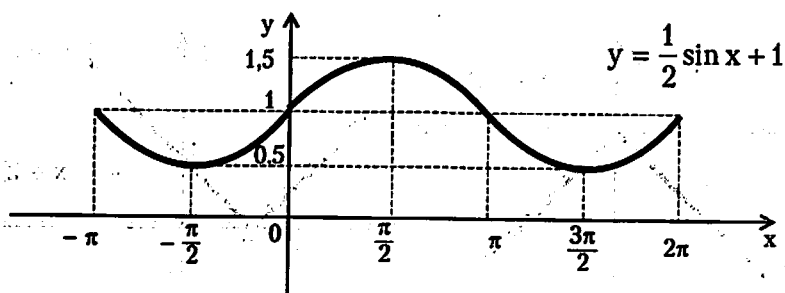


Рис. 157

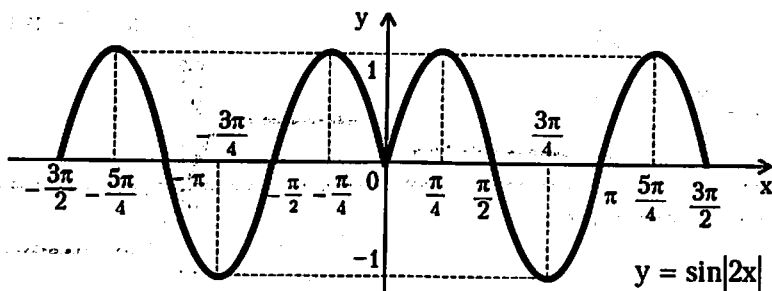


Рис. 158

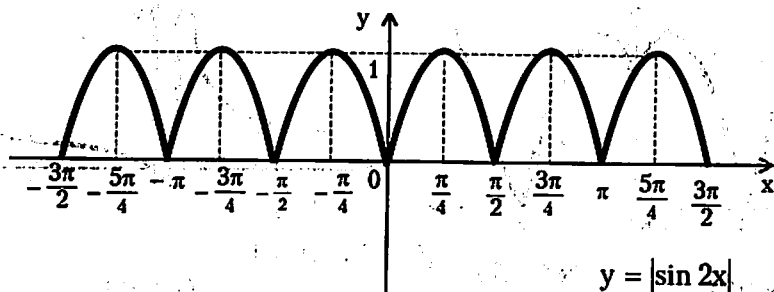


Рис. 159

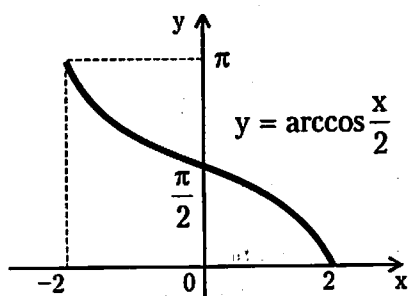


Рис. 160

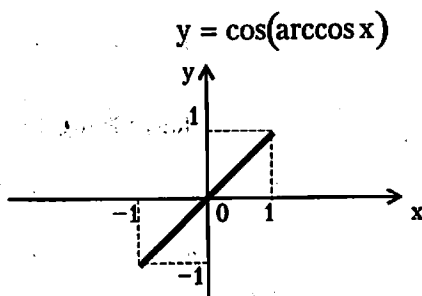


Рис. 161

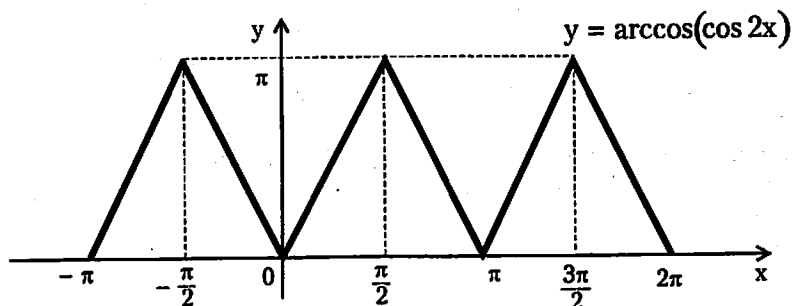


Рис. 162

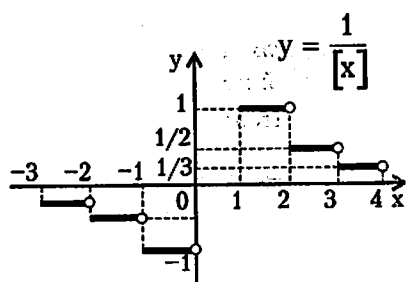


Рис. 163

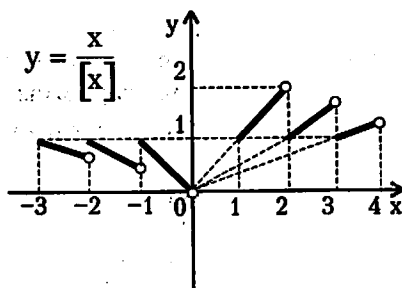


Рис. 164

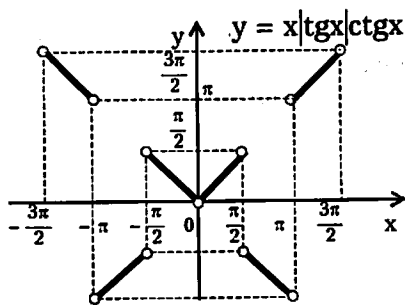


Рис. 165

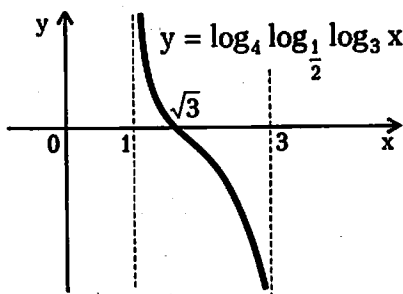


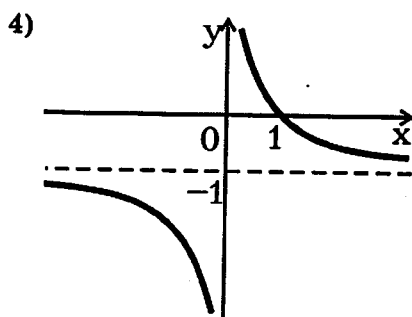
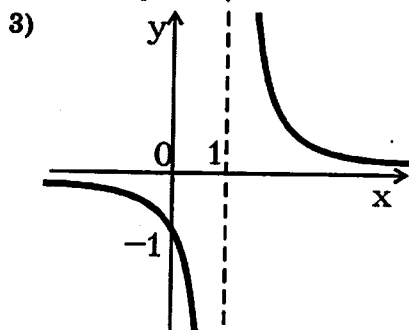
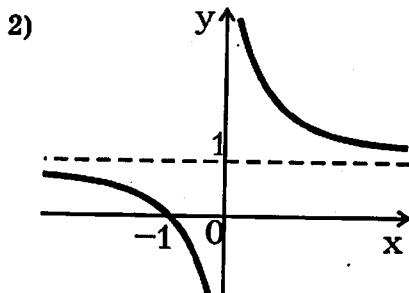
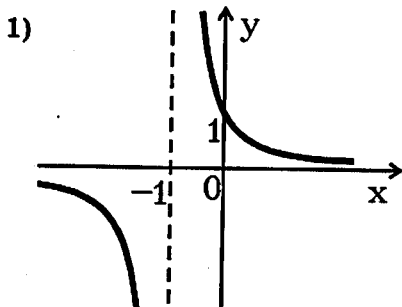
Рис. 166

Тесты к главе 13. Построение графиков функции без использования производных.

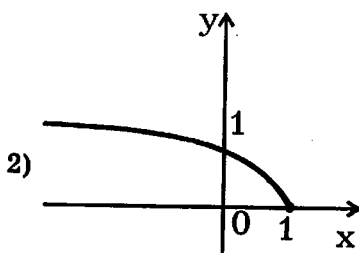
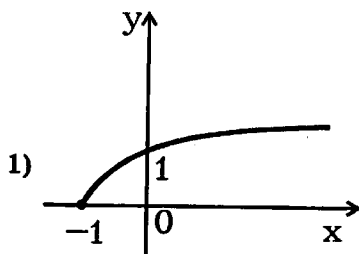
Часть I

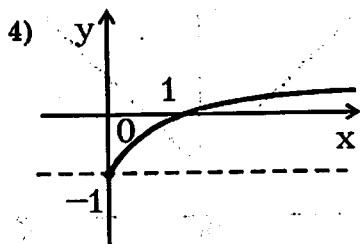
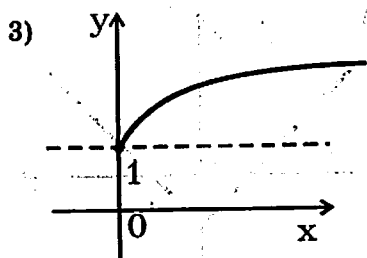
При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Постройте график функции $y = \frac{1}{x-1}$.

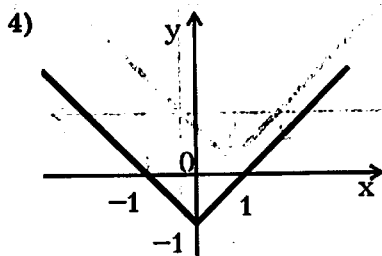
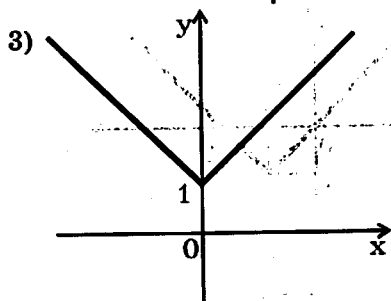
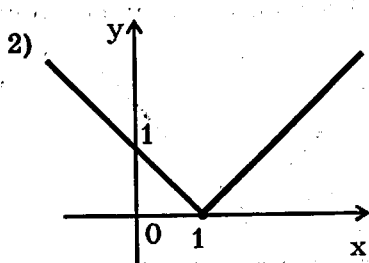
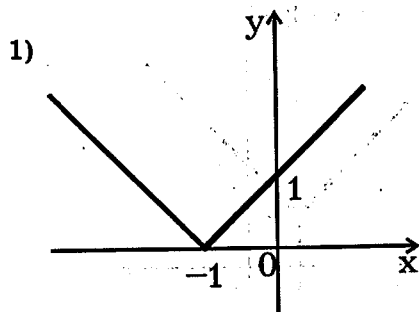


A2. Постройте график функции $y = \sqrt{x} - 1$.

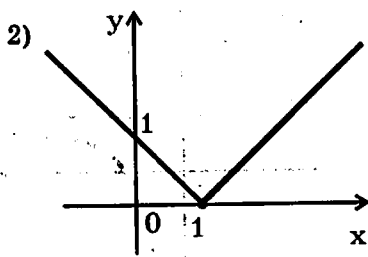
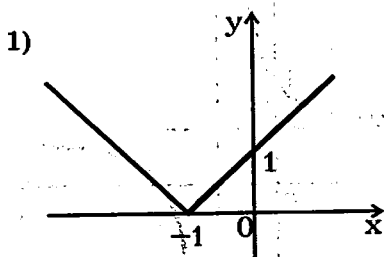


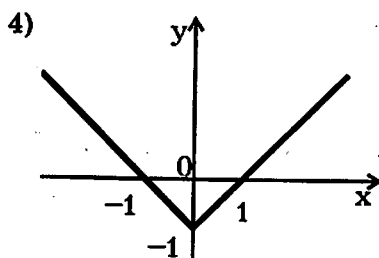
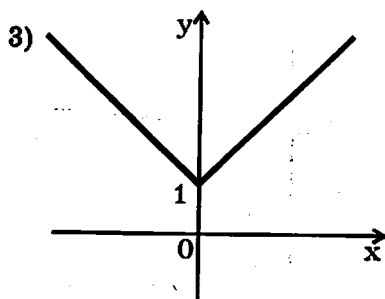


A3. Постройте график функции $y = |x + 1|$.

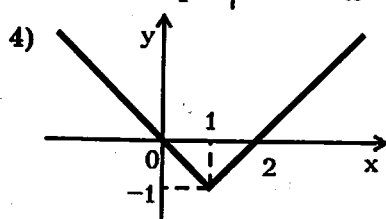
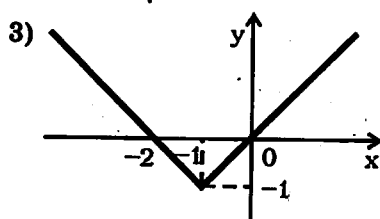
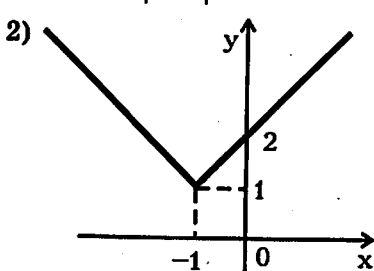
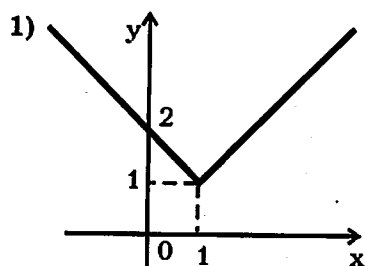


A4. Постройте график $y = |x| + 1$.

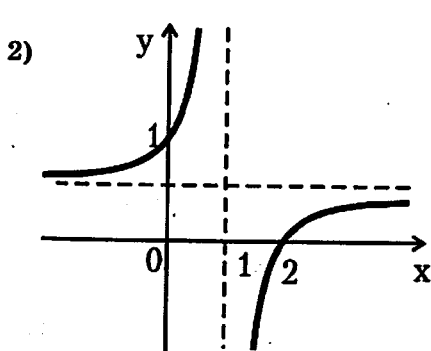
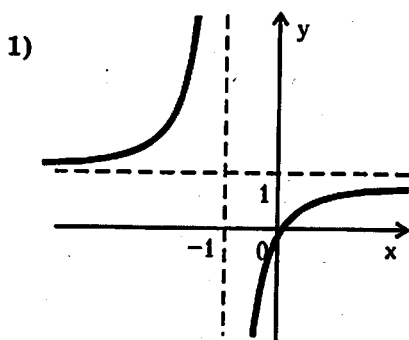




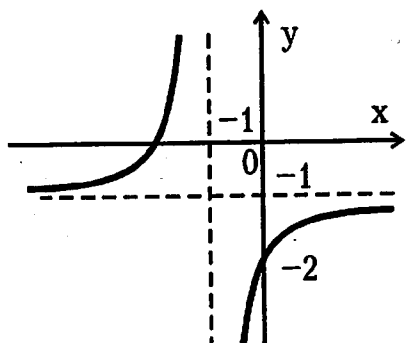
A5. Постройте график функции $y = |x - 1| + 1$.



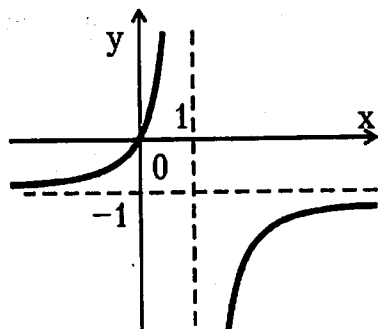
A6. Постройте график функции $y = \frac{1}{-x + 1} + 1$.



3)

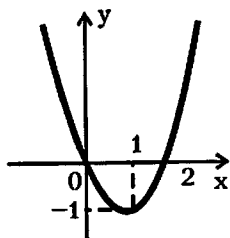


4)

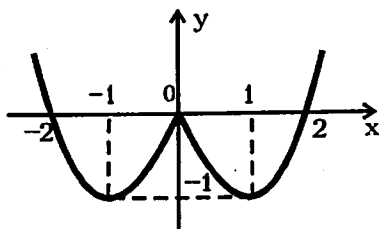


A7. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x|$.

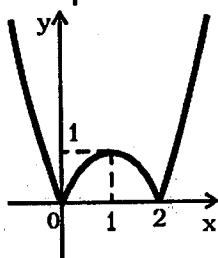
1)



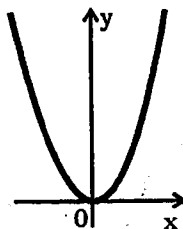
2)



3)

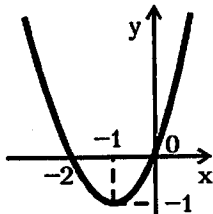


4)

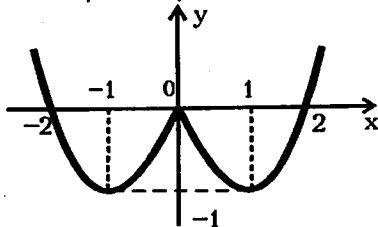


A8. Постройте график функции $y = |x^2 + 2x|$.

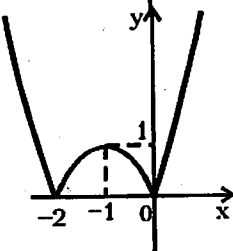
1)



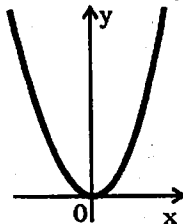
2)



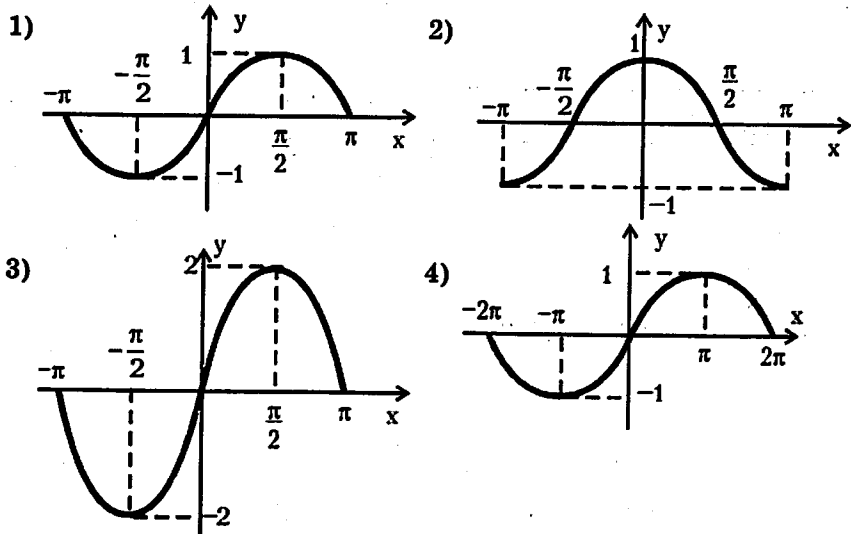
3)



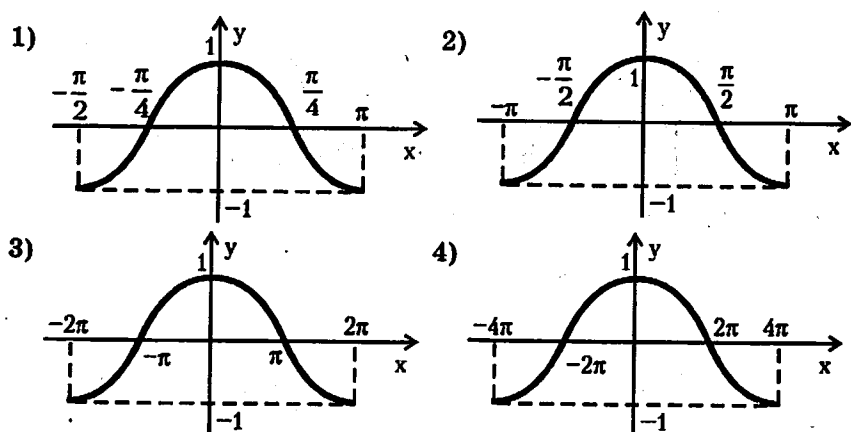
4)



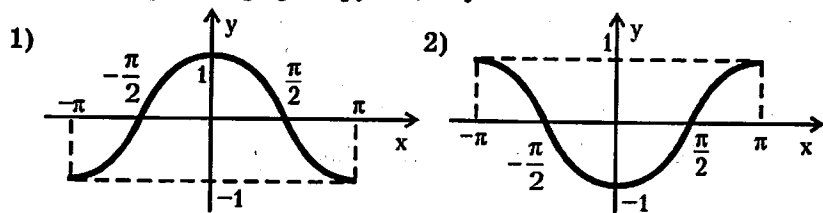
A9. Постройте график функции $y = 2\sin x$.

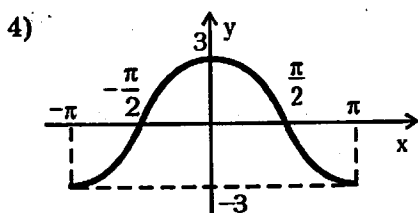
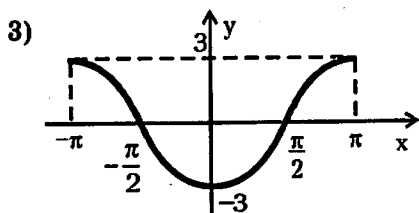


A10. Постройте график функции $y = \cos \frac{x}{2}$.

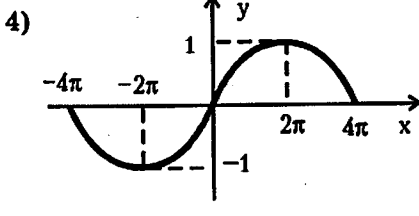
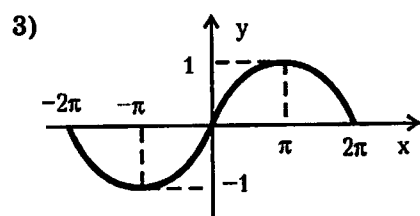
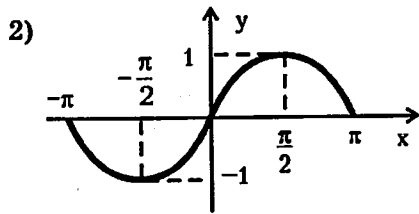
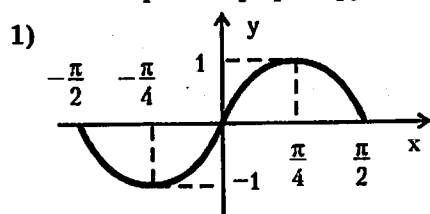


A11. Постройте график функции $y = -3\cos x$.

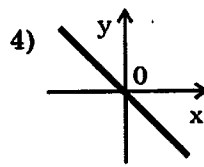
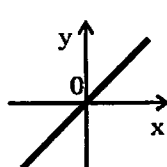
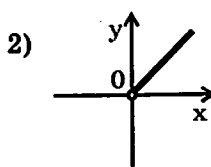
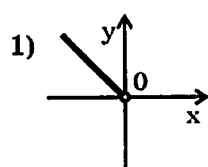




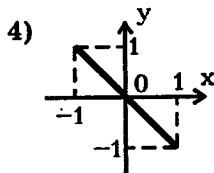
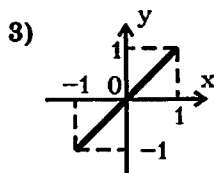
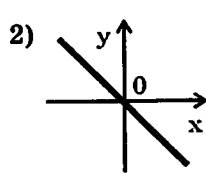
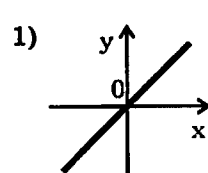
A12. Постройте график функции $y = \sin 2x$.



A13. Постройте график функции $y = 2^{\log_2 x}$.



A14. Постройте график функции $y = \cos(\arccos x)$.



Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

- B1.** Постройте график функции $y = |x^2 - 4|x| + 3|$. Сколько точек минимума имеет эта функция?
- B2.** Пользуясь графиком $y = |x^2 - 4|x| + 3|$, запишите, сколько точек максимума имеет эта функция.
- B3.** Постройте график функции $y = \frac{x + |x|}{x}$. Укажите наименьшее значение этой функции.
- B4.** Постройте график функции $y = |x + 1| - |x - 1|$. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции.
- B5.** Постройте график функции $y = \frac{2}{|x - 1| - 1}$. Найдите точку максимума этой функции.
- B6.** Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 1; \\ 4 - x, & x \geq 1. \end{cases}$ Найдите точку минимума этой функции.
- B7.** Сколько промежутков возрастания имеет функция $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$?
- B8.** Найдите точку максимума функции $y = \frac{1}{|x^2 - 4x + 3|}$.
- B9.** Сколько точек экстремума имеет функция $y = \frac{1}{x^2 - 4|x| + 3}$?

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

C1. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

C2. Постройте график функции $y = \frac{x \cos x}{|\cos x|}$.

C3. Постройте график функции $y = \sin^2 \sqrt{x-2} + \cos^2 \sqrt{x-2}$.

C4. Постройте график функции $y = \log_2 \sin x$.

Глава 14

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

§177. Общие и частные утверждения.

Дедукция и индукция

Все утверждения делятся на общие и частные.

Примеры общих утверждений:

- 1) сумма внутренних углов треугольника равна 180° ;
- 2) натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Примеры частных утверждений:

- 1) в данном треугольнике ABC сумма внутренних углов равна 180° ;
- 2) число 231 делится на 3.

Переход от общих утверждений к частным называется *дедукцией*. Дедукция используется в математике на каждом шагу, поскольку почти всегда общие теоремы доказываются для того, чтобы в дальнейшем применять их при решении частных задач.

Переход от частных утверждений к общим называется *индукцией*. Так, рассматривая геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, можно заметить, что $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q = b_1 q^2$, $b_4 = b_3 q = b_1 q^3$, $b_5 = b_4 q = b_1 q^4$. Исходя из полученных частных формул, можно сделать вывод, что $b_n = b_1 q^{n-1}$ для любого натурального n .

Если дедукция всегда приводит к верным результатам, то индукция может привести как к верным, так и к неверным результатам. Неверных результатов можно избежать, применяя *метод математической индукции*.

§178. Метод математической индукции

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции, который формулируется следующим образом. Если какое-либо утверждение, сформулированное для натурального числа n , проверено для $n=1$ и из допущения его

истинности для некоторого значения $n=k$ следует его истинность для значения $n=k+1$, то утверждение верно для любого натурального n .

Метод доказательства, основанный на использовании этого принципа, называется *методом математической индукции*.

Таким образом, метод математической индукции, применяемый к доказательству теорем (или формул), выглядит так.

1) Проверяем истинность теоремы (или формулы) для $n=1$.

2) Допускаем, что теорема (формула) верна для некоторого $n=k$, и, исходя из этого допущения, доказываем истинность теоремы (формулы) для $n=k+1$.

3) На основании 1) и 2) пунктов и принципа математической индукции заключаем, что теорема верна для любого натурального n .

Задача 1. Доказать справедливость формулы

$$S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство.

1-й шаг. При $n=1$ имеем $S_1 = \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = 1$; $S_1 = 1$ — фор-

мула верна для $n=1$.

2-й шаг. Пусть при $n=k$ исходная формула верна, т. е.

$$S_k = 1+2+3+\dots+k = \frac{(1+k)k}{2}.$$

Докажем, что тогда верна и формула

$$S_{k+1} = 1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(1+(k+1))(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1) = \frac{(1+k)k}{2} + (k+1) = \frac{(1+k)k + 2(k+1)}{2} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \end{aligned}$$

3-й шаг. Учитывая результаты первых двух шагов доказательства и применив принцип математической индукции, считаем исходную формулу доказанной для любого $n \in \mathbb{N}$.

Вывод: формула доказана.

Задача 2. Доказать справедливость формулы

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство.

1-й шаг. При $n=1$ имеем

$$S_1 = 1^3 = \left[\frac{1 \cdot (1+1)}{2} \right]^2 = 1; S_1 = 1 \text{ — формула верна для } n=1.$$

2-й шаг. Пусть при $n=k$ исходная формула верна, т. е.

$$S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2.$$

Докажем, что тогда верна и формула

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

$$\text{Действительно, } S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4(k+1))}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2 \cdot (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2.$$

3-й шаг. Учитывая результаты первых двух шагов доказательства и применив принцип математической индукции, считаем исходную формулу доказанной для любого $n \in \mathbb{N}$.

Вывод: формула доказана.

Замечание. Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных n , а лишь для натуральных n , начиная с некоторого числа $p \in \mathbb{N}$. Для таких утверждений также справедлив метод математической индукции, но в следующей интерпретации.

Утверждение справедливо при всех натуральных значениях $n \geq p$, если:

- 1) оно справедливо при $n = p$;
- 2) из справедливости этого утверждения при $n = k$, где $k \geq p$, следует, что оно справедливо и при $n = k + 1$.

Задача 3. Доказать, что для любых натуральных $n > 1$ выполняется неравенство $(1+x)^n > 1+nx$, где $x > -1$, $x \neq 0$.

Доказательство.

- 1) При $n = 2$ исходное неравенство справедливо, поскольку

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \quad (\text{т. к. } x^2 > 0).$$

2) Пусть неравенство справедливо при $n = k$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Покажем, что тогда неравенство справедливо и при $n = k + 1$. В самом деле,

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x) > (1+kx)(1+x) = \\ &= 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2 > 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

Вывод: неравенство доказано.

§179. Символы суммирования и произведения

Знак (символ) суммирования Σ

Обозначим символом $\sum_{i=1}^n a_k$ сумму n первых членов последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, т. е. $\sum_{i=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$.

Число k называется индексом суммирования; Σ — знак (символ) суммирования.

Заметим, что можно рассматривать знак Σ , где суммирование начинается не с 1, а с m , где $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, т. е.

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Суммирование может начинаться и с 0, т. е.

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

С помощью знака Σ некоторые известные формулы могут быть записаны в компактной форме, например:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{(n+1)n}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Используем символ суммирования для записи суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1;$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1;$$

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots + x^{2n-2} + \dots = \frac{1}{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-2} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1;$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + \dots = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1;$$

$$x^3 + x^6 + x^9 + \dots + x^{3n} + \dots = \frac{x^3}{1-x^3} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x^{3k} = \frac{x^3}{1-x^3}, \quad |x| < 1;$$

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots + (-x)^{3n-3} + \dots = \frac{1}{1+x^3} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{3k-3} = \sum_{m=0}^{\infty} (-x)^{3m} = \frac{1}{1+x^3}, \quad |x| < 1.$$

Отметим некоторые важные свойства знака суммирования Σ :

$$1) \sum_{k=1}^n (-a_k) = - \sum_{k=1}^n a_k;$$

$$2) \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k;$$

$$3) \sum_{k=1}^n (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k, \quad \alpha = \text{const.}$$

Знак (символ) произведения Π

Обозначим символом $\prod_{k=1}^n a_k$ произведение n первых членов последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$, т. е.

$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$, k — индекс произведения (умножения), $\prod$ — символ произведения.

Если k начинается не с 1, а с m , где $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, то полагают по определению $\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$.

С помощью символа произведения $\prod$ запишем некоторые известные соотношения:

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}; \quad \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}; \quad \prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{2}{(k-1)k}\right) = \frac{n+1}{3(n-1)}.$$

Задача. Доказать формулу $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Доказательство.

Докажем методом математической индукции.

1) При $n=2$ исходная формула справедлива, поскольку

$$1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}; \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

2) Пусть формула справедлива при $n=p$, где $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\prod_{k=2}^p \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{p+1}{2p}.$$

Покажем, что тогда она справедлива и при $n=p+1$, т. е.

$$\prod_{k=2}^{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{p+2}{2(p+1)}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{p+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \left(\prod_{k=2}^p \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \\ &= \left(\frac{p+1}{2p}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(p+1)^2}\right) = \frac{p+1}{2p} \cdot \frac{p^2 + 2p}{(p+1)^2} = \\ &= \frac{(p+1) \cdot p(p+2)}{2 \cdot p \cdot (p+1)^2} = \frac{p+2}{2(p+1)}. \end{aligned}$$

Вывод: формула доказана.

Тесты к главе 14. Метод математической индукции.

Часть I

При выполнении заданий части I выберите правильный ответ.

A1. Сумму первых n ($n \in N$) нечетных чисел можно коротко записать так:

1) $\sum_{k=1}^n k$; 2) $\sum_{k=1}^n 2k$; 3) $\sum_{k=1}^n (2k-1)$; 4) $\sum_{k=1}^n (2k+1)$.

A2. Запись $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ означает:

1) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)$;

2) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$;

3) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \dots$;

4) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

A3. Произведение первых n ($n \in N$) четных чисел можно коротко записать так:

1) $\prod_{k=1}^n k$; 2) $\prod_{k=1}^n 2k$; 3) $\prod_{k=1}^n (2k-1)$; 4) $\prod_{k=1}^n (2k+1)$.

A4. Запись $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ означает:

1) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n+1}$; 2) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k-1}{k}$;

3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k+1}$; 4) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n+1}$.

A5. Какое из равенств истинное:

1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n-1)n}{2}$; 2) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2}{2}$;

3) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$; 4) $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

A6. Какое из равенств истинное:

1) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n$; 2) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$;

3) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^3$; 4) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^4$.

A7. Какое из равенств истинное:

1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{n+1}$; 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n-1}$;

3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$; 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+1}$.

A8. Какое из равенств истинное:

1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{n}{4n+1}$; 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{n}{3n+1}$;

3) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{n}{6n+1}$; 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)(k+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$.

A9. Какое из равенств истинное:

1) $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1}$; 2) $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$;

3) $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+1}$; 4) $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n+2}$.

A10. Какое из выражений при любом натуральном n делится на 11:

1) $4^n + 15n - 1$; 2) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$;

3) $9^{3n+1} + 3^{3n+1} + 1$; 4) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$.

A11. Выражение $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ при любом натуральном n делится на:

1) 9; 2) 11; 3) 13; 4) 133.

A12. Числовая последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ определяется условиями: $x_0 = 2, x_1 = 3, x_{n+1} = x_1 \cdot x_n - x_0 \cdot x_{n-1}$. Формула n -го члена этой последовательности имеет вид:

1) $x_n = 2^n - 1$; 2) $x_n = 2^n + 1$; 3) $x_n = 2^n$; 4) $x_n = 2^n + 2$.

A13. На сколько частей делят плоскость n различных прямых, которые имеют общую точку?

1) $n + 2$; 2) $2n$; 3) $2(n + 1)$; 4) $4n$.

A14. Сколько диагоналей имеет выпуклый n -угольник ($n > 3$)?

1) $\frac{n(n-2)}{2}$; 2) $\frac{n \cdot (n-2)}{3}$; 3) $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$; 4) $\frac{n \cdot (n-3)}{3}$.

Часть II

При выполнении заданий части II запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби.

B1. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{20} (2k - 1)$.

B2. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

B3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{(k+3)(k+4)}$.

B4. Найдите произведение $\prod_{k=2}^{1000} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

B5. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

- В6. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$.
- В7. На плоскости проведено 100 прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей разбивают эти прямые плоскость?
- В8. На сколько частей делят пространство 100 плоскостей, проходящих через одну точку так, что никакие три из них не проходят через одну прямую?
- В9. Числовая последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ определяется условиями: $x_0 = 2, x_1 = 3, x_{n+1} = x_1 \cdot x_n - x_0 \cdot x_{n-1}$. Определите номер наименьшего члена последовательности, для которого выполняется условие $x_n \geq 1025$.

Часть III

При выполнении заданий части III запишите последовательно логические действия и объяснения, необходимые ссылки на математические факты.

- С1. Докажите методом математической индукции формулу

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^k} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

- С2. Докажите методом математической индукции тождество

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+x^3+\dots+x^n)^2 - x^n = \\ = (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1+x+x^2+\dots+x^{n+1}). \end{aligned}$$

- С3. Докажите методом математической индукции неравенство

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|, n \in \mathbb{N}.$$

- С4. Докажите, что

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} < n \cdot \sqrt{\frac{1+n}{2}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

ОТВЕТЫ НА ТЕСТЫ

К главе 1. Арифметика

Часть I

A1. 3	A2. 4	A3. 2	A4. 3	A5. 4
A6. 1	A7. 4	A8. 3	A9. 4	A10. 1
A11. 3	A12. 3	A13. 3	A14. 4	

Часть II

B1. 3.	B2. 16554.	B3. 60.	B4. 3.	B5. 5,75.
B6. 2.	B7. 3.	B8. 1,5.	B9. 424,36.	

Часть III

C1. 144,25.
C2. 2,4 часа.
C4. 64 кг.

К главе 2. Целые, рациональные, действительные числа

Часть I

A1. 1	A2. 4	A3. 4	A4. 3	A5. 2
A6. 3	A7. 3	A8. 1	A9. 4	A10. 1
A11. 2	A12. 4	A13. 4	A14. 2	

Часть II

B1. 1.	B2. -100.	B3. 24.	B4. 8.	
B5. 1,25.	B6. 2.	B7. -6.	B8. 1.	B9. 1.

Часть III

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 4, x < -4; \\ -2x - 4, -4 \leq x, -2; \\ 2x + 4, -2 \leq x < 0; \\ 4, x \geq 0. \end{array} \right. \\ \text{C1.} \end{array} \quad \text{C4. } 1 + \sqrt{2}.$$

К главе 3. Основные понятия теории множеств

Часть I

A1. 2	A2. 3	A3. 3	A4. 2	A5. 1
A6. 4	A7. 1	A8. 2	A9. 4	A10. 4
A11. 4	A12. 2	A13. 1	A14. 2	

Часть II

B1. 5.	B2. 5.	B3. 18.	B4. 12.	B5. 0.
B6. 4.	B7. -28.	B8. 70.	B9. 22.	

Часть III

- C1. $\emptyset$.
C4. 10 ребят.

К главе 4. Действия с алгебраическими выражениями

Часть I

A1. 1	A2. 3	A3. 3	A4. 4	A5. 2
A6. 4	A7. 4	A8. 1	A9. 2	A10. 4
A11. 2	A12. 1	A13. 4	A14. 2	

Часть II

B1. 4.	B2. 5.	B3. -1.	B4. 4.	B5. 1.
B6. 0.	B7. 2.	B8. 2.	B9. 3.	

Часть III

- C1. $a = -26$, $b = -24$.
C2. $3(x + y)(y + z)(z + x)$.

C3. $\frac{96}{1 - x^{96}}$.

- C4. 4.

К главе 5. Функции и простейшие графики

Часть I

A1. 2	A2. 4	A3. 3	A4. 4	A5. 1
A6. 2	A7. 4	A8. 3	A9. 2	A10. 4
A11. 4	A12. 3	A13. 1	A14. 4	

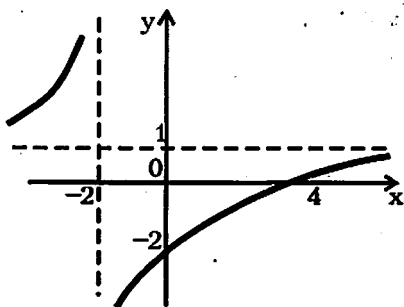
Часть II

B1. 8.	B2. 5.	B3. 1.	B4. 4.	B5. 2.
B6. 0.	B7. 1.	B8. -1.	B9. 0,5.	

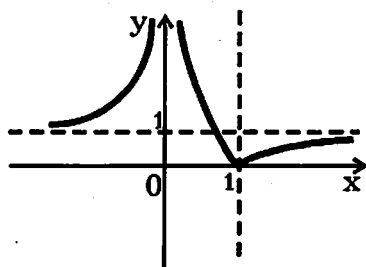
Часть III

C1. Чётная.

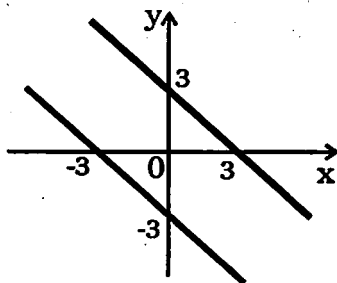
C2.



C3.



C4.



К главе 6. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Часть I

A1. 2	A2. 3	A3. 4	A4. 2	A5. 4
A6. 4	A7. 4	A8. 3	A9. 2	A10. 2
A11. 1	A12. 3	A13. 3	A14. 2	

Часть II

B1. 0,5.	B2. 3.	B3. 2.	B4. -4.	B5. 5.
B6. 2.	B7. 1.	B8. 1,5.	B9. 2.	

Часть III

C1. 1; 3.

C2. $(2; -2), \left(-\frac{8}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

C3. $a \in (-0,25; 0]$.

C4. $a = \pm 25$.

К главе 7. Алгебраические неравенства

Часть I

A1. 4	A2. 3	A3. 2	A4. 3	A5. 4
A6. 2	A7. 3	A8. 2	A9. 3	A10. 4
A11. 2	A12. 3	A13. 4	A14. 3	

Часть II

B1. -2.	B2. 1.	B3. 8.	B4. -3.	B5. 18.
B6. 4.	B7. 1.	B8. 3.	B9. -9.	

Часть III

C1. $(-\infty; -1) \cup (0; 5) \cup (6; \infty)$.

C2. $a \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

C3. $(-1; 0)$.

C4. $-\frac{1}{4}$.

К главе 8. Прогрессии

Часть I

A1. 3

A2. 4

A3. 2

A4. 4

A5. 3

A6. 3

A7. 3

A8. 2

A9. 1

A10. 3

A11. 1

A12. 3

A13. 4

A14. 2

Часть II

B1. 70336.

B2. 6.

B3. 11.

B4. 12.

B5. 2.

B6. 8.

B7. -0,5.

B8. 9.

B9. -180300.

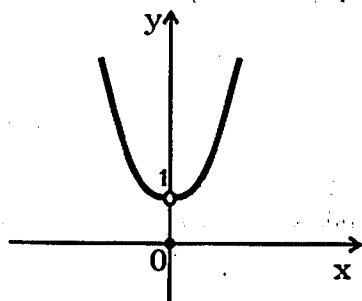
Часть III

C1. $-(p + q)$.

C4.

C2. $m \cdot n \sqrt{\frac{k^{p-n}}{e^{p-m}}}$.

C3. $\frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right)$.



К главе 9. Тригонометрия

Часть I

A1. 3	A2. 2	A3. 2	A4. 1	A5. 3
A6. 4	A7. 3	A8. 3	A9. 3	A10. 4
A11. 2	A12. 4	A13. 3	A14. 3	

Часть II

B1. 0.	B2. 1,5.	B3. 0.	B4. 0,5.	B5. 3.
B6. 0.	B7. -2.	B8. 0.	B9. 1.	

Часть III

C1. 1,5.	C2. $-\arctg 2 + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
C3. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$	C4. $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{8}) \cup (2; +\infty).$

К главе 10. Показательная и логарифмическая функции

Часть I

A1. 1	A2. 3	A3. 4	A4. 4	A5. 2
A6. 2	A7. 4	A8. 1	A9. 3	A10. 3
A11. 4	A12. 1	A13. 4	A14. 4	

Часть II

B1. 2.	B2. 3.	B3. 7.	B4. 0.	B5. 0.
B6. -8.	B7. 1.	B8. 6.	B9. 5.	

Часть III

C3. $\log_6 a$.

C4. $\frac{5-b}{2(a+ab-2b+1)}$.

К главе 11. Показательные и логарифмические уравнения, системы уравнений и неравенства

Часть I

A1. 2

A2. 2

A3. 4

A4. 4

A5. 2

A6. 3

A7. 4

A8. 3

A9. 4

A10. 2

A11. 3

A12. 1

A13. 2

A14. 3

Часть II

B1. 4.

B2. 0.

B3. 13.

B4. 81.

B5. 5.

B6. 1,5.

B7. -1.

B8. 8.

B9. 0.

Часть III

C1. ± 7 .

C2. $(1; 3) \cup [27; +\infty)$.

C3. $a \in (-\infty; -1) \cup \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

C4. При $a = \pm\sqrt{2}$ $x = 2$.

К главе 12. Элементы дифференциального исчисления

Часть I

A1. 1	A2. 4	A3. 2	A4. 3	A5. 3
A6. 3	A7. 4	A8. 1	A9. 4	A10. 2
A11. 3	A12. 2	A13. 3	A14. 4	

Часть II

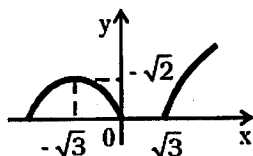
B1. 12.	B2. 0.	B3. 1.	B4. 45.	B5. 1.
B6. 432.	B7. 2.	B8. 6.	B9. 60.	

Часть III

C1. 30° .

C2. $a = 0$.

C3.



C4. (1; 1).

К главе 13. Построение графиков функций без использования производной

Часть I

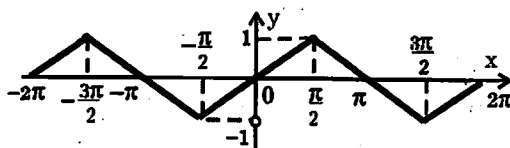
A1. 3	A2. 4	A3. 1	A4. 3	A5. 1
A6. 2	A7. 2	A8. 3	A9. 3	A10. 3
A11. 4	A12. 1	A13. 2	A14. 3	

Часть II

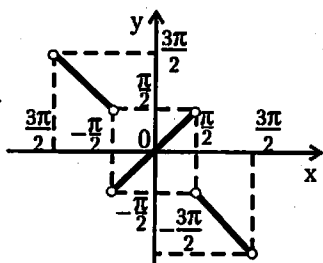
B1. 4.	B2. 3.	B3. 0.	B4. 4.	B5. 1.
B6. -1.	B7. 2.	B8. 2.	B9. 3.	

Часть III

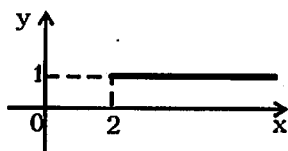
C1.



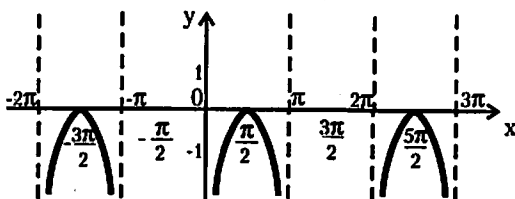
C2.



C3.



C4.



К главе 14. Метод математической индукции

Часть I

A1. 3	A2. 4	A3. 2	A4. 4	A5. 3
A6. 2	A7. 3	A8. 4	A9. 2	A10. 2
A11. 4	A12. 2	A13. 2	A14. 3	

Часть II

B1. 400. B2. 0,48. B3. 0,2. B4. 0,001.
B5. 0,325. B6. 0, 15625. B7. 5051.
B8. 9902. B9. 10.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 3000 конкурсных задач по математике.— 2-е изд., испр. и доп.— М.: Рольф, Айрис-пресс, 1998.— 624 с.
2. Алексеев В.М. Элементарная математика. Решение задач.— Киев: Вища школа, 1984.— 351 с.
3. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра. Учебник для 9 класса средней школы /Под научным руководством акад. А.Н. Тихонова.— М.: Просвещение, 1992.— 223 с.
4. Болгов В.А., Демидович Б.П., Ефименко В.А. и др. Сборник задач по математике для втузов /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— 464 с.
5. Говоров В.М. и др. Сборник конкурсных задач по математике /Под ред. А.И. Прилепко.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
6. Гуминская Н.А., Дорохин Д.П., Ильенко Н.А. и др. Математика. Алгебра и начала анализа. / Под общ. ред. А.И. Лобанова.— Киев: Вища школа, 1987.— 304 с.
7. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика. Справочные материалы.— М.: Просвещение, 1988.— 416 с.
8. Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др. Сборник задач по математике для поступающих во втузы /Под ред. М.И. Сканави.— М.: Высшая школа, 1992.— 528 с.
9. Игначков В.С., Игначкова А.В. Математика для поступающих в вузы.— Харьков: Изд-во «Основа» при ХГУ, 1992.— 176 с.
10. Каганов Э.Д. 400 самых интересных задач с решениями по школьному курсу математики для 6—11 классов.— М.: ЮНВЕС, 1997.— 288 с.
11. Каганов Э.Д. Самоучитель. Решение типовых школьных заданий по курсу математики средней школы.— М.: ЮНВЕС, 1998.— 272 с.
12. Киселев А.П. Алгебра, часть 2.— М.: Изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1961.— 232 с.
13. Корешкова Т.А., Мироший В.В., Шевелева Н.В. Математика. Тренировочные тесты ЕГЭ 2004.— М.: Изд-во Эксмо, 2004.— 80 с.
14. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции, часть 1.— М.: Просвещение, 1974.— 352 с.
15. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции, часть 2.— М.: Просвещение, 1975.— 288 с.
16. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа.— М.: Просвещение, 1990.— 416 с.
17. Кутасов А.Д. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы /Под ред. Г.Н. Яковлева.— М.: Наука, 1982.— 608 с.

18. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике.— М.: Просвещение, 1991.— 352 с.
19. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. Алгебра. Учебник для 9 класса средней школы /Под ред. С.А. Теляковского.— М.: Просвещение, 1992.— 271 с.
20. Математика. Справочник абитуриента/ О.А. Смирнов.— М.: Филолог. об-во «Слово», Компания «Ключ-С», АСТ. Центр гуманитар. наук при факультете журналистики МГУ, 1997.— 576 с.
21. Математика. Справочник школьника/ Сост. Г.М. Якушева; Научн. ред. А.С. Барашков.— М.: Филолог. об-во «Слово», Компания «Ключ-С», АСТ. Центр гуманитар. наук при факультете журналистики МГУ, 1997.— 576 с.
22. Математика: Большой справочник для школьников и поступающих в вузы/ Д.И. Аверьянов, П.И. Алтынов, И.И. Баврин и др.— 3-е изд., испр.— М.: Дрофа, 2000.— 864 с.
23. Математика: Лекции, задачи, решения/ В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин и др.— Мн.: ООО «Попурри», 1996.— 640 с.
24. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Арифметика.— М.: Наука, 1988.— 384 с.
25. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств.— М.: МГУ, 1991.— 144 с.
26. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И. Алгебра и анализ элементарных функций.— М.: Наука, 1980.— 560 с.
27. Решение задач по математике. Справочник школьника/ Сост. Г.М. Якушева, при участии О.А. Смирнова. Под ред. А.С. Барашкова.— М.: Филолог. об-во «Слово», Компания «Ключ-С», АСТ. Центр гуманитар. наук при факультете журналистики МГУ, 1996.— 640 с.
28. Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике.— М.: Просвещение, 1991.— 208 с.
29. Столин А.В. Комплексные упражнения по математике с решениями. 7—11 классы.— Х.: ИМП «Рубикон», 1995.— 240 с.
30. Титаренко А.М. 5770 задач по математике.— Х.: Торсинг, 2004.— 336 с.
31. Титаренко А.М., Семенец В.В., Кармазин В.В. Сборник тренировочных задач по математике.— Х.: Рубикон, 2002.— 224 с.
32. Шарова Л.И. Уравнения и неравенства.— Киев: Вища школа, 1981.— 280 с.
33. Шевченко И.Н. Арифметика.— М.: Изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1963.— 216 с.