

JEAN GUIRAUD

500 exercices
et
problèmes
GÉOMÉTRIE

*Examens et concours
en fin de la classe de 3^e*

CLASSIQUES HACHETTE

© *Librairie Hachette, 1958.* -
Tous droits de traduction, de reproduction
et d'adaptation réservés pour tous pays.

GÉOMÉTRIE

Définitions, théorèmes et formules

TRIANGLE

- Cas d'égalité des triangles quelconques

Deux triangles sont égaux s'ils ont :

1^{er} cas : un côté égal compris entre 2 angles égaux chacun à chacun.

2^e cas : un angle égal compris entre 2 côtés égaux chacun à chacun.

3^e cas : les 3 côtés égaux chacun à chacun.

- Cas d'égalité des triangles rectangles

Deux triangles rectangles sont égaux s'ils ont :

1^{er} cas : l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

2^e cas : l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.

- Inégalités dans le triangle

1^o Dans un triangle, un côté quelconque est compris entre la différence et la somme des 2 autres côtés.

2^o Dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté et réciproquement.

- Triangle isocèle

C'est un triangle qui a 2 côtés égaux.

Propriétés : 1^o Les angles à la base sont égaux.

2^o La bissectrice de l'angle au sommet est aussi hauteur, médiane et médiatrice.

3^o Réciproquement : Si la bissectrice d'un angle d'un triangle est aussi hauteur, ou médiane, ou médiatrice, le triangle est isocèle.

• Médiatrice d'un segment

1^o Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

2^o Réciproquement : Tout point équidistant des extrémités d'un segment est situé sur la médiatrice de ce segment.

• Droites concourantes d'un triangle

1^o Les 3 médiatrices sont concourantes au centre du cercle circonscrit.

2^o Les 3 hauteurs sont concourantes à l'orthocentre.

3^o Les 3 médianes sont concourantes au centre de gravité situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet du triangle.

4^o Les 3 bissectrices intérieures sont concourantes au centre du cercle inscrit.

5^o Une bissectrice intérieure d'un angle et les bissectrices extérieures des 2 autres angles sont concourantes au centre du cercle exinscrit dans le premier angle.

• Triangle équilatéral

3 côtés égaux — 3 angles égaux à 60°.

Les 3 bissectrices sont aussi hauteurs, médianes, médiatrices.

Le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, l'orthocentre, le centre de gravité, sont confondus.

• Triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse et réciproquement.

L'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit.

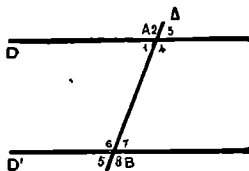
DROITES PARALLÈLES

• 2 parallèles coupées par une sécante, forment :

- 1^o des angles alternes internes égaux.
- 2^o des angles alternes externes égaux.
- 3^o des angles correspondants égaux.
- 4^o des angles intérieurs d'un même côté

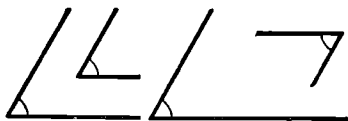
de la sécante supplémentaires.

5^o des angles extérieurs d'un même côté de la sécante supplémentaires et réciproquement



• Angles à côtés parallèles ou perpendiculaires

égaux

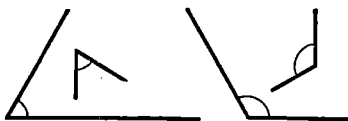


côtés \parallel et même sens côtés \parallel , sens contraire

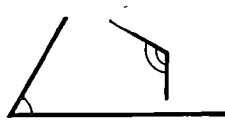
supplémentaires



côtés \parallel , 2 de même sens
2 de sens contraire.



angles aigus, côtés \perp angles obtus, côtés \perp



1 angle aigu } côtés \perp
1 angle obtus }

• Somme des angles d'un polygone

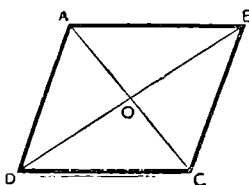
1^o La somme des angles d'un triangle est égale à 2 droits.

2^o L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.

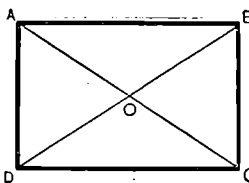
3^o La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois 2 droits qu'il y a de côtés moins 2

$$S_n = 2 \text{ dr. } (n - 2).$$

PARALLÉLOGRAMME

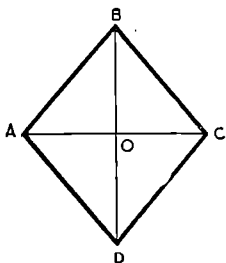


côtés opposés parallèles.
 côtés opposés égaux.
 angles opposés égaux.
 angles consécutifs supplémentaires.
 diagonales se coupent en leur milieu.
 point de concours des diagonales est
 centre de symétrie.



RECTANGLE

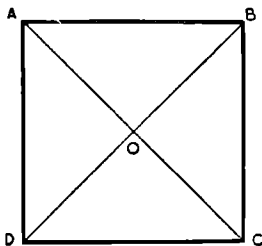
parallélogramme qui a un angle droit.
 quadrilatère qui a 3 angles droits.
 diagonales se coupent en leur milieu
 et sont égales.



LOSANGE

parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs égaux.
 diagonales se coupent en leur milieu,
 sont perpendiculaires,
 sont bissectrices des angles.

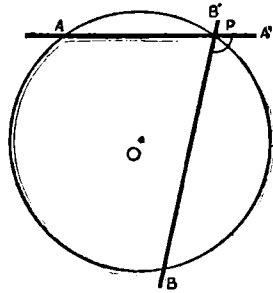
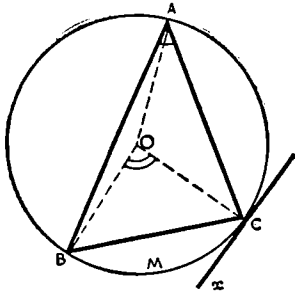
CARRÉ



losange qui a un angle droit.
 parallélogramme à la fois rectangle
 et losange.
 4 angles droits — 4 côtés égaux.
 diagonales se coupent en leur milieu,
 sont égales,
 sont perpendiculaires,
 sont bissectrices des angles.

— ANGES INSCRITS DANS UN CERCLE —

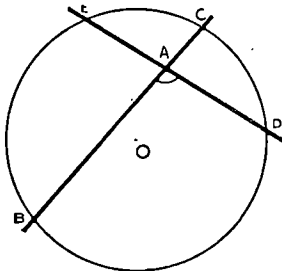
Angles intérieurs. Angles extérieurs



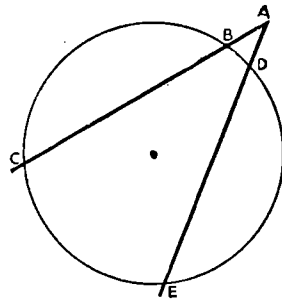
$$\text{mes. } \widehat{A'PB} = \text{mes. } \frac{\widehat{PA} + \widehat{PB}}{2}$$

\widehat{BOC} = angle au centre } interceptent
 \widehat{BAC} = angle inscrit } même arc

$$\left. \begin{array}{l} \text{mes. } \widehat{BOC} = \text{mes. } \widehat{BMC} \\ \text{mes. } \widehat{BAC} = \text{mes. } \frac{\widehat{BMC}}{2} \\ \text{mes. } \widehat{BCx} = \text{mes. } \frac{\widehat{BMC}}{2} \end{array} \right\} \widehat{BAC} = \widehat{BCx} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$$



$$\text{mes. } \widehat{BAD} = \text{mes. } \frac{\widehat{BD} + \widehat{CE}}{2}$$



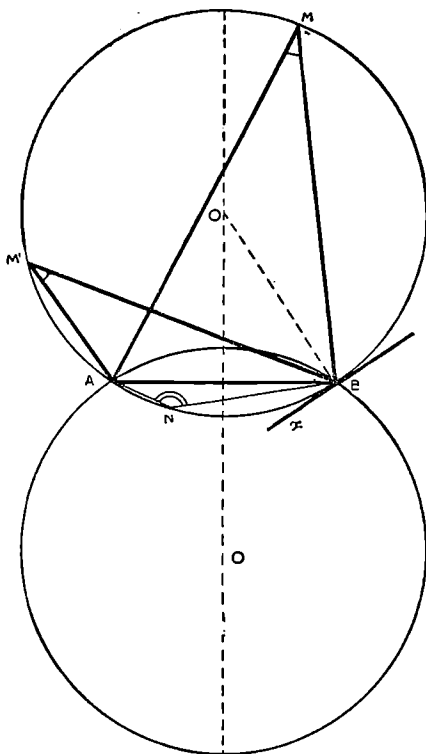
$$\text{mes. } \widehat{CAE} = \text{mes. } \frac{\widehat{CE} - \widehat{BD}}{2}$$

— ARC CAPABLE —

De tous les points de l'arc \widehat{AMB} on voit le segment AB sous le même angle.

L'arc \widehat{AMB} est l'arc capable de l'angle \widehat{AMB} décrit sur le segment AB (ainsi que son symétrique par rapport à AB).

L'arc \widehat{ANB} (et son symétrique par rapport à AB) est l'arc capable de l'angle $180^\circ - \widehat{AMB}$ décrit sur AB .



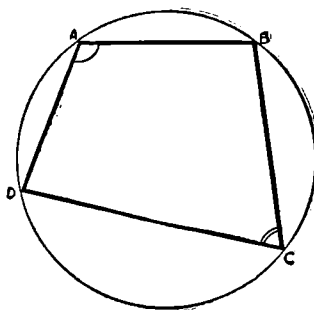
QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

I. 1^o Dans un quadrilatère convexe inscriptible, les angles opposés sont supplémentaires.

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ.$$

2^o *Réciproquement* : Si dans un quadrilatère convexe deux angles opposés sont supplémentaires, ce quadrilatère est inscriptible.



II. 1^o Dans un quadrilatère croisé inscriptible les angles opposés sont égaux

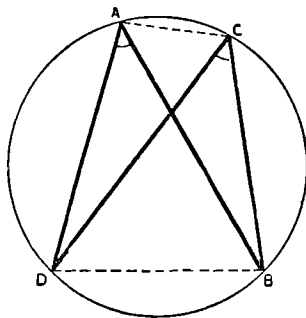
$$\hat{A} = \hat{C} \text{ et } \hat{B} = \hat{D}.$$

2^o *Réciproquement* : Si dans un quadrilatère croisé, deux angles opposés sont égaux, ce quadrilatère est inscriptible.

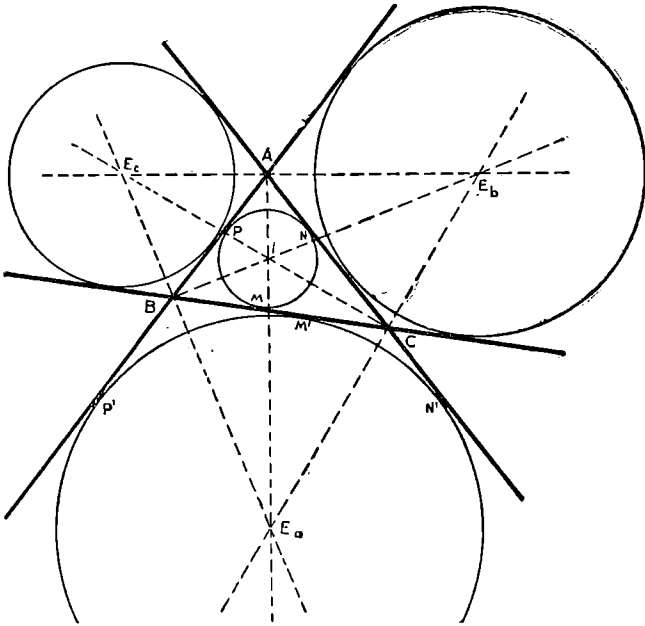
REMARQUE : En joignant AC et BD on obtient le quadrilatère convexe ACBD.

a) Dans un quadrilatère convexe inscriptible les angles formés par 2 côtés opposés et les diagonales sont égaux.

b) Si dans un quadrilatère convexe 2 angles formés par 2 côtés opposés et les diagonales sont égaux, ce quadrilatère est inscriptible.



CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES



1^o Cercle inscrit : Centre I au point de concours des bissectrices intérieures. Segments déterminés sur les côtés par les points de contact :

$$AB + AC + BC = a + b + c = 2p$$

$$AN = AP = p - a$$

$$BM = BP = p - b$$

$$CM = CN = p - c.$$

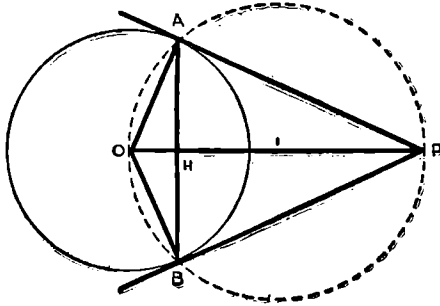
2^o Cercle exinscrit dans l'angle A : Centre E_a au point de concours de la bissectrice intérieure de \widehat{A} et des bissectrices extérieures de \widehat{B} et de \widehat{C} .

Segments déterminés sur les côtés par les points de contact

$$AP' = AN' = p$$

$$BM' = BP' = p - c$$

$$CM' = CN' = p - b.$$



La tangente à un cercle est perpendiculaire à l'extrémité du rayon. $PA \perp OA$.

Les tangentes à un même cercle, issues d'un même point de contact sont égales. $PA = PB$.

La droite que joint le centre du cercle au point commun des tangentes est :

bissectrice de l'angle des tangentes : $\widehat{OPA} = \widehat{OPB}$

bissectrice de l'angle des rayons de contact :

$$\widehat{POA} = \widehat{POB}$$

médiatrice de la corde de contact :

$$OP \perp AB \quad \text{et} \quad HA = HB.$$



REVISION DE LA CLASSE DE 4^e PROBLÈMES

1. On considère un trapèze isocèle ABCD ($AD = BC$).

- 1° Démontrer que les angles adjacents aux bases sont égaux.
- 2° Démontrer que les diagonales AC et BD sont égales.
- 3° Ces diagonales se coupent en E. Démontrer que $EC = ED$.
- 4° Les côtés DA et CB prolongés se coupent en S. Démontrer que $SA = SB$.
- 5° Soient K le milieu de AB et I le milieu de CD. Démontrer que la bissectrice de \widehat{ASB} passe par K, E et I.

2. On considère un triangle ABC rectangle en A. En C on mène la perpendiculaire au côté AC et on porte sur cette perpendiculaire, de part et d'autre de C, les segments $CD = CE = CB$, E du côté de B par rapport à AC

- 1° Que peut-on dire de la direction des droites AB et DE?
- 2° On joint BD. Démontrer que BD est bissectrice de \widehat{ABC} .
- 3° On joint BE. Démontrer que BE est bissectrice extérieure de \widehat{ABC} .
- 4° Que peut-on dire du triangle BDE?

3. On donne deux droites parallèles xy et $x'y'$. Par un point A de xy on mène une droite At qui coupe $x'y'$ en B. La bissectrice Az de l'angle \widehat{yAt} coupe $x'y'$ en C. Une droite quelconque passant par B coupe xy en D et Az en S. La perpendiculaire abaissée de M milieu de BD sur Az coupe xy en Q, At en P et $x'y'$ en R. La parallèle à PQ menée par B coupe Az en K et xy en E.

- 1° Démontrer que $AB = BC$.
- 2° Montrer que les triangles APQ et BPR sont isocèles
- 3° Comparer les triangles BRM et DQM.
- 4° Montrer l'égalité des segments BP et QD.
- 5° Démontrer que $\widehat{ABE} = \widehat{CBE}$ et que Q est le milieu de DE.
- 6° Démontrer que $SB = SE$.

4. On donne un triangle ABC. On construit sur les côtés AB et AC et extérieurement au triangle, les carrés ABDE et ACFG, puis les parallélogrammes AEIG et ABJC. Soient AH la hauteur et AM la médiane du triangle ABC relatives au côté BC. Démontrer :

- 1° que AM (que l'on prolonge) est perpendiculaire sur EG et que $AM = \frac{EG}{2}$.

- 2° que le prolongement de AH passe par I.
 3° que les droites BI et CD d'une part, CI et BF d'autre part sont égales et perpendiculaires.
 4° que AH, BF et CD sont concourantes.

5. On donne un angle droit \widehat{xOy} . A l'intérieur de cet angle on prend un point A quelconque et un point B sur Ox tel que $AB = AO$. On prolonge BA qui coupe Oy en C.

- 1° Quelle est la nature du triangle AOC?
 2° Comparer AB et AC.
 3° On trace un quart de cercle de centre O et de rayon OA. A partir d'un point A' de cet arc on opère une construction analogue à la précédente (B' sur Ox et C' sur Oy). Comparer BC et B'C'.
 4° Si $\widehat{AOB} = 45^\circ$, puis si $\widehat{AOB} = 60^\circ$, quelles remarques faites-vous?

6. Soit I le milieu du côté BC du parallélogramme ABCD. La droite AI coupe le prolongement de DC en E. La droite EB prolongée coupe DA en F.

- 1° Démontrer que BE est égal et parallèle à AC.
 2° Montrer que B, A, C sont les milieux respectifs de EF, DF et DE.
 3° FC coupe AB en J. Comparer en grandeur et en direction les segments IJ et EF.
 4° Démontrer que BD passe par G point d'intersection de AE et de FC.

7. On donne un triangle ABC rectangle en A ($AB > AC$). Soient AH la hauteur et AM la médiane relatives à l'hypoténuse. On projette H en D sur AB et en E sur AC. La droite DE coupe AH en I.

- 1° Étudier les triangles MAB et MAC.
 2° Étudier le triangle IAD et donner la valeur de ses angles en fonction de \widehat{B} et \widehat{C} du triangle ABC.
 3° Démontrer que DE et AM sont perpendiculaires.
 4° Quelles conditions doit remplir le triangle ABC pour que le triangle IAD soit équilatéral? Dans ce cas, comparer les angles \widehat{MAB} , \widehat{MAH} et \widehat{HAC} .

8. On considère un triangle ABC rectangle et isocèle ($AB = AC$). D'un point M quelconque de la base BC on abaisse les perpendiculaires MP sur AB et MQ sur AC.

- 1° Démontrer que la somme $MP + MQ$ est constante.
 2° Comparer les segments PQ et AM.
 3° Déterminer le point M sur BC de manière que le segment PQ soit égal à une longueur donnée l .
 4° Entre quelles limites doit-on prendre l pour que le problème soit possible?

9. On donne un triangle ABC et un point P intérieur au triangle. Soient M, N, R les milieux des côtés AB, BC, AC . On prolonge PM, PN, PR de longueurs respectives égales à ces segments et on obtient C', A', B' . On forme l'hexagone $AC'BA'CB'$.

1° Indiquer la nature des quadrilatères $APBC', BPCA'CPAB'$.

2° Montrer que les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point O qui est le milieu de chacune d'elles.

3° Quelles conditions doit remplir le triangle ABC et quelle doit être la position du point P pour que l'hexagone $AC'BA'CB'$ soit régulier?

10. Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O . On prend les points A', B', C' respectivement symétriques de O par rapport aux côtés BC, AC, AB . Démontrer que :

1° les quadrilatères $OAB'C, OAC'B$ et $OBA'C$ sont des losanges.

2° le quadrilatère $BCB'C'$ est un parallélogramme.

3° les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux.

4° le point O est le point de concours des hauteurs du triangle $A'B'C'$.

5° les droites AA', BB', CC' sont concourantes.

(B. E. P. C.).

11. On donne un trapèze isocèle $ABCD$ ($AD = BC$) dans lequel :

1° Les angles aigus sont la moitié des angles obtus.

2° La diagonale AC est perpendiculaire sur BC .

3° La petite base a une longueur $b = 12$ cm

On demande :

1° La valeur de chacun des angles du trapèze.

2° La valeur des angles formés par la diagonale AC avec les côtés du trapèze.

3° Le périmètre du trapèze en fonction de b .

4° De donner une règle pratique de construction du trapèze.

5° De comparer les diagonales AC et BD et montrer que leur point de concours est sur la perpendiculaire aux 2 bases du trapèze en leurs milieux.

(B. E.)

12. On donne un parallélogramme $ABCD$. Soient E, N, F et M les milieux respectifs des côtés AB, CB, CD et DA . Les diagonales AC et BD se coupent en O .

1° Démontrer que :

a) les points E, O, F sont alignés.

b) le quadrilatère $MENF$ est un parallélogramme.

c) les diagonales des 2 parallélogrammes $ABCD$ et $MENF$ sont concourantes au même point O .

2° Les droites AF et CE coupent BD respectivement en Q et P . Les droites DE et BF coupent AC respectivement en G et H . Démontrer que :

a) les 3 segments AG, GH et HC de la diagonale AC sont égaux, ainsi que les 3 segments DQ, QP, PB de la diagonale BD .

b) le quadrilatère $PGQH$ est un parallélogramme.

13. Dans un quadrilatère convexe ABCD les diagonales se coupent en O.

1^o Démontrer que chacune d'elles est inférieure au demi-périmètre du quadrilatère.

2^o Démontrer que la somme des diagonales est supérieure à la somme de 2 côtés opposés du quadrilatère.

3^o En déduire que la somme des diagonales est comprise entre le demi-périmètre et le périmètre du quadrilatère

14. Dans un triangle ABC ($AB > AC$) on trace la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de l'angle A. Du sommet C on abaisse les perpendiculaires sur chacune de ces bissectrices, soit CH sur la bissectrice intérieure et CK sur la bissectrice extérieure. CH coupe AB en D et CK coupe AB en E; HK coupe AC en I.

1^o Démontrer que $AI = \frac{DE}{4}$.

2^o Démontrer que pour tout point P de la bissectrice intérieure on a :

$$PB - PC < AB - AC.$$

3^o Démontrer que pour tout point P' de la bissectrice extérieure on a $P'B + P'C > AB + AC$.

15. On considère un triangle ABC, I le centre du cercle inscrit et E le centre du cercle exinscrit dans l'angle \hat{A}

1^o Montrer que les points A, I et E sont alignés.

2^o Évaluer l'angle \widehat{BIC} en fonction de l'angle \hat{A} du triangle ABC

3^o Évaluer l'angle \widehat{BEC} en fonction de l'angle \hat{A} du triangle ABC.

4^o Que remarque-t-on au sujet de ces angles \widehat{BIC} et \widehat{BEC} . Pouvait-on prévoir ce résultat?

5^o BI et EC se coupent en F; évaluer l'angle \widehat{BFC} en fonction de l'angle \hat{A} du triangle ABC.

16. Deux cercles de centres O et O' se coupent en A et B. Soient les diamètres AC du premier et AD du deuxième. Par A et B on mène 2 sécantes parallèles MN et PQ puis par A la sécante RS parallèle à la droite des centres.

1^o Démontrer que les points C, B, D sont alignés.

2^o Comparer OO' et CD en grandeur et en direction.

3^o Démontrer que les segments MN et PQ sont égaux.

4^o Démontrer que $RS = 2 OO'$.

5^o Démontrer que $RS > MN$

17. Soient un demi-cercle de diamètre $AB = 3a$ et un point M sur ce demi-cercle de telle sorte que l'angle $\widehat{ABM} = 30^\circ$.

1^o Mener la parallèle à AB qui coupe AM en C et BM en D de manière que $CD = a$.

2° Soient DE parallèle à AM (E sur AB) et DF parallèle à CE (F sur AB). Montrer que le quadrilatère ACDE est un losange.

3° Démontrer que le cercle circonscrit au triangle DEB est tangent à AD.

4° Démontrer que BM est tangente au cercle circonscrit au quadrilatère AFDC.

18. Dans un cercle de diamètre AB on trace une corde AC que l'on prolonge d'une longueur $CD = AC$. On mène la corde AE perpendiculaire à la corde AC et on la prolonge d'une longueur $EF = AE$.

1° Donner la valeur de l'angle ACB. Montrer que le triangle ABD est isocèle.

2° Démontrer que le triangle ABF est isocèle.

3° Donner le caractère du quadrilatère ACBE.

4° Démontrer que les 3 points D, B, F sont alignés.

5° Sur quelle ligne se déplacent les points D et F lorsque l'angle \widehat{BAC} varie? Préciser la position de cette ligne par rapport au cercle de diamètre AB.

6° Lorsque l'angle $\widehat{BAC} = 45^\circ$, préciser la position de la droite DF.

19. Dans un cercle O, deux cordes perpendiculaires AB et CD se coupent en I. Soit IH la perpendiculaire à AC, le prolongement de IH coupe BD en M; soit IK la perpendiculaire à BD, le prolongement de IK coupe AC en N.

1° Démontrer l'égalité des angles \widehat{AIH} et \widehat{DIK} .

2° Démontrer que M est milieu de BD et que N est milieu de AC.

3° En déduire que le quadrilatère OMIN est un parallélogramme.

4° Les cordes AB et CD pivotant autour du point fixe I, montrer que MN passe par un point fixe.

20. Étant donné un triangle ABC rectangle en A :

1° Construire les cercles, l'un de centre I tangent à BC en B et passant par A, l'autre de centre J, tangent à BC en C et passant par A.

2° Quelle position ces cercles occupent-ils l'un par rapport à l'autre?

3° Si M est le milieu de BC, caractériser le triangle MIJ.

4° On prolonge BA jusqu'en D sur le cercle J et CA jusqu'en E sur le cercle I. Démontrer que BE et CD sont perpendiculaires à BC.

21. Deux droites parallèles, xx' et yy' , sont coupées par une sécante en A et en B.

1° Trouver les points M et M' équidistants des 3 droites.

2° Nature du quadrilatère AMBM'?

3° Prouver que MM' passe par un point fixe quand les parallèles tournent en A et B.

4^o Soient O le milieu de AB, H et K les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur xx' et yy' . Sur quelles lignes se déplacent les points H et K quand xx' et yy' tournent autour de A et B en restant parallèles? (B. E. P. c.)

22. On donne un triangle ABC et ses 3 hauteurs AA', BB', CC' qui se coupent en H.

1^o Démontrez que les quadrilatères AB'HC' et ABA'B' sont inscriptibles. Citez d'autres quadrilatères inscriptibles de la figure.

2^o Démontrez que AA' est bissectrice de l'angle B'A'C'.

3^o Que représentent les 3 hauteurs du triangle ABC pour le triangle A'B'C'? Que représente l'orthocentre H du triangle ABC pour le triangle A'B'C'?

4^o Que représentent les 3 côtés du triangle ABC pour le triangle A'B'C'?

23. On donne un triangle ABC inscrit dans un cercle O de rayon R; les hauteurs AA', BB' et CC' se coupent en H. Soient M, N et P les milieux respectifs des côtés AB, AC et BC, puis Q, R, S les milieux des segments AH, BH et CH.

1^o Démontrez que D, symétrique de l'orthocentre H par rapport à BC est situé sur le cercle circonscrit.

2^o Démontrez que le quadrilatère MNPA' est un trapèze isocèle.

3^o Soit K le point diamétralement opposé à A. Démontrez que HK passe par P milieu de BC.

4^o Démontrez que le quadrilatère OPHQ est un parallélogramme.

5^o Démontrez que les 9 points M, N, P, Q, S, R, A', B', C' sont situés sur un même cercle.

24. On considère un triangle ABC dont l'angle \hat{A} est aigu. On construit à l'extérieur du triangle l'angle $\hat{A}Cy = \hat{A}BC$ et l'angle $\hat{A}Bx = \hat{A}CB$. Les prolongements des demi-droites Bx et Cy se coupent en un point D.

1^o Quelle particularité présente le triangle BDC?

2^o On désigne par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Prouver que le quadrilatère OBDC est inscriptible.

(B. E. P. c.)

● **Problème de revision.**

25. On donne un triangle ABC. On trace le cercle O circonscrit à ce triangle. Les 3 hauteurs AA' BB' CC' se coupent en H. La hauteur AA' coupe le cercle circonscrit en K et la hauteur BB' coupe le cercle en J. La bissectrice AD de \hat{BAC} coupe le cercle en M. Soit AE un diamètre du cercle circonscrit. Questions:

Groupe A : 1^o Comparer les angles \widehat{AEB} et \widehat{ACB} .

2^o En déduire l'égalité des angles \widehat{BAE} et \widehat{CAK} .

3^o Que peut-on dire du quadrilatère BHCE?

4^o Comparer les segments BE et CK.

- 5° Montrer que $CK = CJ$.
 6° Démontrer que E, P, H sont alignés (OM coupe BC en P).
 7° Montrer que K est symétrique de l'orthocentre H par rapport à BC.

Groupe B : 1° Comparer les angles \widehat{ABC} et \widehat{AEC} .

- 2° Montrer que \widehat{BAC} et \widehat{EAK} ont même bissectrice.
 3° Démontrer que OM coupe BC en son milieu P.
 4° Montrer que OM est parallèle à AA'.
 5° Comparer OP et AH en grandeur et en direction.
 6° Nature des quadrilatères AB'HC' et BC'B'C?
 7° Montrer que le quadrilatère EIB'C est inscriptible (AE coupe B'C' en I).
 8° Démontrer que AE est perpendiculaire sur B'C' en I.
 9° Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices du triangle A'B'C'.

● **Problème de revision.**

26. La distance des centres OO' de 2 cercles de rayons $R = 5$ cm et $R' = 3$ cm est de 8 cm. Une tangente commune extérieure à ces 2 cercles coupe la droite des centres en P et touche le cercle O en A, le cercle O' en B. La tangente commune intérieure coupe la droite des centres en C et la tangente AB en M. La parallèle au diamètre AA' menée par M coupe OO' en I et BA' en J. La parallèle à AB menée par O' coupe MI en K et OA en H; AC et OM se coupent en R; BC et O'M se coupent en S.

Groupe A : 1° Quelle position les cercles O et O' occupent-ils l'un par rapport à l'autre?

- 2° Montrer que le cercle de diamètre PO passe par A
 3° Démontrer que M est le milieu de AB.
 4° Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
 5° Démontrer que le cercle de diamètre AB est tangent à OO' en C.
 6° Quelle est la nature du quadrilatère AOO'B?
 7° Montrer que I est le milieu de OO' .
 8° Calculer AH et IK.
 9° Quelle est la nature du triangle MHO'?
 10° Démontrer l'égalité des triangles AHK et B'O'K. (BB' diamètre)

Groupe B : 1° Montrer que $PA < PO$ et que $PC < PM$.

- 2° Que peut-on dire du triangle OMO' ?
 3° Montrer que le cercle de diamètre OO' est tangent à AB en M et qu'il passe par H.
 4° Que peut-on dire du quadrilatère MRCS ?
 5° Montrer que $MC = RS$.
 6° Démontrer que RS est parallèle à O'H.
 7° Que peut-on dire des quadrilatères ARSM et BSRM ?
 8° Montrer que J est le milieu de BA'.
 9° Calculer MJ et IJ.
 10° Montrer que B, C, A' sont alignés, ainsi que A, C, B'.
 11° Comparer OM et BA' en grandeur et en direction.

PREMIERS LIEUX GÉOMÉTRIQUES

27. On donne 2 cercles égaux O et O' tangents extérieurement en B . La droite des centres OO' coupe le cercle O en A et le cercle O' en C . On trace 2 cordes parallèles AP dans le cercle O et BM dans le cercle O' . AP et CM se coupent en H .

1° Démontrer que $PM = BH$.

2° Quel est le lieu de H ?

3° Quel est le lieu de I milieu de PM ?

28. On donne un angle droit \widehat{xOy} et un point P sur la bissectrice Oz . Un cercle variable de centre I passant par O et par P coupe Ox en A et Oy en B .

1° Démontrer que le centre I est le milieu de AB . Quel est le lieu du point I .

2° Démontrer que PI est perpendiculaire sur AB .

3° Quel est le lieu de Q diamétralement opposé à P ?

29. Un point M décrit le côté Oy d'un angle droit \widehat{xOy} . On joint M à 2 points fixes A et B du côté Ox . Les perpendiculaires en A et B à MA et à MB se coupent en N .

1° Démontrer que les 4 points A, B, M et N sont situés sur un même cercle.

2° Quel est le lieu du centre de ce cercle?

3° Quel est le lieu de N ?

30. D'un point O d'une droite xy pris comme centre, on trace un cercle et par un point P de la même droite xy et symétriquement à cette droite, on mène 2 sécantes à ce cercle, la première coupe le cercle en A et B , la seconde en C et D .

1° Montrer que $PA = PC$, $PB = PD$, $AB = CD$.

2° Quel est le lieu géométrique des milieux des cordes passant par P ?

3° Étudier ce même lieu lorsque P décrit xy .

4° Soit une corde quelconque MN ; tracer une autre corde QR passant par P qui soit divisée en 2 parties égales par MN .

31. Étant donnés 2 cercles O et O' extérieurs et égaux, OP et $O'P'$ 2 rayons parallèles et de même sens.

1° Que peut-on dire du quadrilatère $OPP'O'$?

2° Montrer que PP' est constant en grandeur et en direction.

3° Quel est le lieu géométrique du milieu de PP' ?

4° Quel est le lieu géométrique des points d'où l'on voit les 2 cercles O et O' sous des angles égaux?

32. Étant donnés un angle \widehat{xOy} , les points B sur Oy et C sur Ox tels que $OB = OC$, soient M un point de BC , ME et MF , les distances respectives de M à Oy et à Ox .

1° Démontrer que l'on a $\widehat{BME} = \widehat{CMF} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$.

2° Quel est le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux 2 côtés de l'angle \widehat{xOy} est égale à une longueur donnée l ?

33. On donne un angle \widehat{xOy} , les points B sur Oy et C sur Ox tels que $OB = OC$; soient M un point sur BC extérieur à BC, ME et MF les distances respectives de M à Oy et à Ox.

1° Quelles relations y a-t-il entre \widehat{BME} , \widehat{BMF} et \widehat{xOy} ?

2° Quel est le lieu géométrique des points dont la différence des distances aux 2 côtés de l'angle \widehat{xOy} est égale à une longueur donnée l ?

34. Étant donnés un angle \widehat{xOy} et une longueur l .

1° Trouver le lieu géométrique des points intérieurs à cet angle et dont la somme des distances aux côtés de l'angle soit égale à l .

2° Indiquer la construction d'un triangle tel que la somme des distances d'un point intérieur à ce triangle, aux 3 côtés, soit égale à l .



ANGLES INSCRITS

35. On donne une demi-circonférence de diamètre $AB = a$. On élève en A et B les perpendiculaires Ax et By du même côté que la demi-circonférence. Un point mobile M parcourt la demi-circonférence. Les droites AM et BM coupent respectivement By en Q et Ax en P. La tangente en M à la demi-circonférence coupe By en Q' et Ax en P' .

1° Montrer que $P'Q' = AP' + BQ'$. A quel moment $P'Q'$ a-t-il une valeur minimum? Quelle est cette plus petite valeur?

2° Montrer que P' et Q' sont les milieux respectifs des segments AP et BQ.

3° Sur quelle ligne se déplace le milieu I de $P'Q'$ et sur quelle ligne se déplace le milieu J de PQ lorsque M décrit la demi-circonférence de diamètre AB?

36. On trace 2 cercles de centres respectifs O et O', de rayons égaux $R = 10$ cm et tels que $OO' = 10$ cm. Ces 2 cercles se coupent en A et B. On mène par A une sécante parallèle à la droite des centres OO' . Cette parallèle coupe le cercle O en C et le cercle O' en D.

1° Indiquer la nature du triangle OAO' et des quadrilatères OAO'B, OADO'. Donner la valeur des angles de ces quadrilatères.

2° Évaluer la longueur CD. Nature du triangle BCD?

3° On mène par A et B deux sécantes parallèles, soient MAN et PBQ (M et P sur le cercle O, N et Q sur le cercle O').

Démontrer que ces sécantes sont égales et comparer leur longueur à celle de CD.

37. Dans le triangle ABC, on prolonge les hauteurs AA' , BB' et CC' jusqu'à leur intersection D, E, F avec le cercle circonscrit. Ces hauteurs se coupent en H.

1° Évaluer les angles AHB, AHC, BHC en fonction de \hat{A} , de \hat{B} ou de \hat{C} .

2° Montrer que les angles du triangle DEF ont pour bissectrices les hauteurs du triangle ABC.

3° Démontrer que D, E, F sont les symétriques de l'orthocentre H par rapport aux côtés du triangle ABC.

38. On considère un triangle ABC dans lequel $AC > AB$; on désigne par D et E les pieds des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A, sur le côté BC.

1° Dédire une relation entre les angles B et C du triangle ABC, sachant que $AD = AE$.

2° On considère dans la suite du problème les triangles (T) pour lesquels on a $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$.

a) Trouver une propriété des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle \hat{A} .

b) Montrer que la hauteur issue de A est tangente au cercle circonscrit au triangle (T).

c) Construire un triangle (T) dont on donne la hauteur $AH = h$ et le rayon R du cercle circonscrit. Discuter. (B. E. P. C.)

ARC CAPABLE

39. Le côté **AB** d'un trapèze isocèle **ABCD** inscrit dans un cercle **O** est fixe. Soit **M** le point de concours des diagonales.

1° Quelle relation existe-t-il entre les angles \widehat{BMA} , \widehat{BDA} et \widehat{BOA} ? En déduire le lieu géométrique de **M**.

2° Par **M** on mène la droite xy parallèle aux bases **AD** et **BC**. Que peut-on dire des angles \widehat{MBC} et \widehat{BMx} , puis des angles \widehat{AMx} et \widehat{MAD} ? Montrer que **Mx** est bissectrice de l'angle \widehat{AMB} . Montrer aussi que **Mx** passe par un point fixe **I**. Que représente **IO** pour la droite **AB**?

3° Que peut-on dire des angles **OAI** et **OBI**? En déduire que les droites **IA** et **IB** sont tangentes au cercle donné **O**.

40. Soit un demi-cercle de diamètre **AB**. On considère un point **M** de ce demi-cercle et l'on construit sur les côtés **MA** et **MB** du triangle rectangle **AMB** et vers l'extérieur de celui-ci les carrés **AMNP** et **BMQR**.

1° Montrer que les 3 points **P**, **M** et **R** sont en ligne droite et que cette droite coupe le demi-cercle en un deuxième point, **I**, qui est le milieu de l'arc **AMB**.

2° Démontrer que **AN** et **BQ** sont parallèles. Que représente la droite **PMR** pour les 2 segments **AN** et **BQ**? En déduire le lieu géométrique de **N** et **Q** quand **M** décrit le demi-cercle.

3° Comparer les triangles **AMB** et **MNQ**. Montrer que la médiane **MC** du triangle **MNQ** est égale à la moitié de **AB** et que les droites **MC** et **AB** sont perpendiculaires. (B. E. P. C.)

41. Deux cercles, l'un de centre **O**, l'autre de centre **O'**, se coupent en **A** et **B**. Une sécante variable pivote autour de **A** et coupe le cercle **O** en **C** et le cercle **O'** en **D**. Soient **OP** et **O'Q** les perpendiculaires abaissées respectivement de **O** et de **O'** sur **CD**.

1° Démontrer que $CD = 2PQ$.

2° Quelle direction occupe **CD** lorsque sa longueur est maximum?

3° Démontrer que le triangle **BCD** conserve des angles constants.

4° **CO** et **DO'** se coupent en **E**. Démontrer que l'angle \widehat{CED} est constant.

5° Démontrer que le quadrilatère **OO'BE** est inscrit dans un cercle.

QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

42. On donne un cercle de centre O et de rayon R. Par un point A on mène une tangente AT à ce cercle. Par un point P de AT, parallèlement à OA, on mène une droite qui coupe le cercle en M et M'. De A on abaisse la perpendiculaire AN sur OM.

1° Démontrer que le quadrilatère ANTO est inscriptible.

2° Que peut-on dire du quadrilatère MPNT? En déduire l'égalité des angles \widehat{PNM} et \widehat{PTM} .

3° Démontrer que les triangles MOT et PNA ont des angles égaux. En déduire le caractère du triangle ANP.

43. Sur les 3 côtés d'un triangle quelconque pris comme bases, on construit les triangles équilatéraux ABF, ACD, BCE, et on trace les cercles O_1 et O_2 , circonscrits aux triangles ABF et ACD. Ils se coupent en I.

1° Évaluer les angles \widehat{AIB} et \widehat{AIC} .

2° Prouver que le cercle circonscrit au triangle BCE, soit O_3 , passe aussi par I.

3° On joint A, B, C à ce point I. Prouver que les prolongements de AI, BI et CI passent par les sommets extérieurs des triangles équilatéraux.

4° Démontrer que $AE = BD = FC$.

5° On suppose que, pour un triangle ABC donné, les cercles O_1 et O_2 deviennent tangents. Quelle est, dans ce cas, la valeur de l'angle \hat{A} ? Quelles remarques faites-vous sur la figure?

(B. E.)

44. Deux cercles O et O' sont sécants en A et B. On mène les diamètres AOC et AO'D.

1° Démontrer que les 3 points C, B, D sont alignés.

2° Comparer en direction et en grandeur OO' et CD .
3° De C et de D on abaisse les perpendiculaires respectivement sur AD et sur AC. Préciser la position des pieds E et F de ces perpendiculaires par rapport aux cercles O et O'.

4° Les droites CE et DF se coupent en H. Démontrer que les points H, A et B sont alignés.

5° Comparer les angles du triangle HEF à ceux du triangle ACD.

45. On donne un triangle ABC. On trace les bissectrices intérieures BD et CE des angles \hat{B} et \hat{C} de ce triangle et l'on construit sur BD et sur CE, et du même côté que A, les triangles isocèles MBD et NCE, dont les angles à la base sont :

$$\widehat{MBD} = \widehat{MDB} = \widehat{NCE} = \widehat{NEC} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}.$$

1° Montrer que les angles au sommet de ces 2 triangles isocèles sont tous les 2 égaux à l'angle $\widehat{BAC} = \hat{A}$. Que peut-on déduire

de là, relativement aux quadrilatères AMBD et ANCE? Montrer que les angles \widehat{MAB} et \widehat{NAC} sont tous les 2 égaux à $\frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2}$, que les points M, A, N sont alignés et que MN est la bissectrice extérieure de l'angle \widehat{BAC} du triangle ABC.

2° Exprimer la grandeur de l'angle \widehat{ANC} en fonction des angles \widehat{A} et \widehat{C} ; exprimer la grandeur de \widehat{MBC} en fonction des angles \widehat{B} et \widehat{C} . Que peut-on dire du quadrilatère BCNM?

3° On suppose $BD = CE$. Comparer les segments MB et NC. Que peut-on conclure de là, relativement au quadrilatère BCNM et relativement au triangle BAC? (E. N.)

46. On donne un triangle ABC inscrit dans un cercle O de rayon R.

1° Démontrer que les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle \widehat{A} coupent le cercle suivant le diamètre PQ perpendiculaire à BC.

2° Déterminer les centres I, E_a , E_b , E_c des cercles inscrit et exinscrits du triangle ABC.

3° Démontrer que le quadrilatère BICE_a est inscriptible et déterminer le centre du cercle circonscrit.

4° Soit M le milieu de BC et D, D_a , D_b , D_c les projections de I, E_a , E_b , E_c sur le côté BC. Montrer que M est le milieu de DD_a et de D_bD_c .

5° Démontrer que $R = \frac{1}{4}(r_a + r_b + r_c - r)$.

(r étant le rayon du cercle inscrit, r_a le rayon du cercle exinscrit dans l'angle \widehat{A} , r_b le rayon du cercle exinscrit dans l'angle \widehat{B} et r_c le rayon du cercle exinscrit dans l'angle \widehat{C}).

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

47. On considère une droite (D) et 2 points A et B situés d'un même côté de la droite (D) et tels que AB soit perpendiculaire à (D). Soit M un point de (D). On élève en A la perpendiculaire à AM et en B la perpendiculaire à BM; les 2 droites ainsi construites se coupent en P.

1° Montrer que le quadrilatère MABP est inscriptible.

2° On suppose que le point M décrit la droite D. Déterminer :

a) le lieu du centre O du cercle circonscrit au quadrilatère MABP.

b) le lieu du point P.

(B. E. P. C.)

48. On considère un demi-cercle de diamètre AB et un point M variable de ce demi-cercle. Sur AM, à partir de A, on porte AP = BM. En P on élève la perpendiculaire à AM qui coupe en D la tangente menée en A au demi-cercle.

1° Démontrer que AD est constant.

2° BD coupe le demi-cercle en Q. Montrer que AQ = BQ et que

Q est le milieu de l'arc \widehat{AB} .

3° Lieu géométrique de P?

4° Étendre la recherche du lieu de P lorsque M décrit en entier le cercle de diamètre AB.

49. Deux droites xy et zt se coupent en B. Soient Bm et Bn les bissectrices de $\widehat{x}Bz$ et de $\widehat{y}Bz$. D'un point quelconque A de Bz on abaisse les perpendiculaires sur ces bissectrices, soient AM perpendiculaire sur Bm qui coupe Bm en M et Bx en P et AN perpendiculaire sur Bn qui coupe Bn en N et By en Q.

1° Que peut-on dire du quadrilatère AMBN?

2° Comparer MN, PB et BQ.

3° Si le segment BA reste constant mais pivote avec Bz autour de B, que décrivent les points A, M et N?

50. Soit O le milieu de la médiane AM d'un triangle ABC rectangle en A. On construit le cercle de centre O qui coupe le côté AB en A et P et le côté AC en A et Q.

1° Démontrer que ce cercle coupe BC en H, pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.

2° Que peut-on dire du segment PQ?

3° Caractères du quadrilatère APMQ?

4° Lorsque A décrit le demi-cercle de diamètre BC, quelles lignes décrivent les points P et Q?

5° Quelles variations en grandeur et en direction subit PQ dans ce mouvement?

51. Soient AB et CD deux diamètres perpendiculaires dans un cercle de centre O. Un point M, variable sur le petit arc \widehat{AC} , se projette sur AB en H.

1° Démontrer que MD est bissectrice de l'angle \widehat{OMH} .

2° MD coupe la bissectrice de l'angle \widehat{AOM} en I. Calculer la grandeur en degrés de l'angle \widehat{OID} . Montrer que le quadrilatère OIAD est inscriptible.

3° Sur quelle ligne se déplace le point I quand M décrit l'arc \widehat{AC} ?

52. On considère un demi-cercle de diamètre AB et un point M variable de ce demi-cercle. La tangente en M coupe la parallèle à AM menée par O en P.

1° Démontrer que $\widehat{AMO} = \widehat{BOP}$.

2° Montrer que $PM = PB$. Conséquence?

3° Que pensez-vous du quadrilatère OBPM?

4° Lieu géométrique de P?

53. Soit un demi-cercle AMB de diamètre AB et de centre O (M milieu de l'arc AB). On trace deux rayons perpendiculaires OC et OD (C entre A et M). Soient C' et D' les projections de C et de D sur AB.

1° Comparer les triangles OCC' et ODD'.

2° Démontrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{C'CO}$ passe par un point fixe F et déterminer la valeur de l'angle \widehat{CFD} .

3° Nature du quadrilatère CDBF?

4° Démontrer que CB et D'I' sont perpendiculaires.

5° Lieu de N (intersection de CB et AD) lorsque C décrit le quart de cercle AM. Construire ce lieu. (E. N.)

54. On considère un cercle de centre O et une corde AB médiatrice d'un rayon OC de ce cercle. Un point I mobile sur l'arc \widehat{ACB} est le centre d'un cercle tangent à AB. Les tangentes à ce cercle I menées de A et de B se coupent en M.

1° Calculer la mesure de l'arc \widehat{ACB} et en déduire que AB est le côté du triangle équilatéral inscrit.

2° Quel est le lieu géométrique du point M?

55. On donne un triangle équilatéral ABC de côté $a = 5$ cm inscrit dans un cercle de centre O. On joint un point quelconque M du plus petit arc \widehat{AB} (opposé à l'arc \widehat{ACB}) aux sommets A, B et C du triangle. On prolonge le segment CM au-delà de M d'une longueur $MP = MB$. La droite AM coupe BP en S.

1° Calculer la mesure des angles \widehat{BMC} et \widehat{BPC} .

2° Quels sont le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle BPC? Construire ce cercle.

3° Quel est le lieu géométrique du point P lorsque le point M décrit l'arc \widehat{AB} (opposé à C) du cercle O?

56. Soit le triangle ABC inscrit dans le cercle O . On prolonge BA d'une longueur $AD = AC$. La médiatrice de BC et la hauteur AH du triangle ACD se coupent en I . La parallèle à CD menée par A coupe la médiatrice de BC en J .

1° Démontrer que I est situé sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

2° Démontrer que J est sur le même cercle. Préciser les positions de I et de J l'un par rapport à l'autre.

3° On suppose BC fixe ainsi que le cercle O , le point A variant sur l'arc \widehat{BIC} . Sur quelle ligne se déplace le point D ?

57. On mène la hauteur AH du triangle ABC rectangle en A . Une sécante issue de H coupe AB en M (entre A et B) et la perpendiculaire en H à HM coupe AC en N .

1° Montrer que le quadrilatère $AMHN$ est inscrit dans un cercle.

2° Ce cercle circonscrit au quadrilatère précédent coupe BC en H et en A' . Montrer que A, P , (milieu de MN) et A' sont en ligne droite.

3° Sur quelle ligne se déplace le point P lorsque HM pivote autour de H dans l'angle BHA ?

58. On donne un cercle O de diamètre AB et la tangente Ax à ce cercle. D'un point M mobile sur la tangente Ax , on mène la tangente MC .

1° Démontrer que le quadrilatère $AOCM$ est inscrit.

2° En déduire le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AMC .

3° Quel est le lieu de l'orthocentre du triangle AMC ?

4° Quel est le lieu du centre du cercle inscrit au triangle AMC ?

59. Soient 2 droites rectangulaires $x'Ox$ et Oy . Trois tiges égales AB, BC, CD de longueur 4 cm, articulées en B et C , se déplacent de manière que A reste sur Ox' , B sur Oy , C et D sur Ox , D au-delà de C par rapport à O .

1° Quelles sont les positions extrêmes des points A, B, C et D ?

2° Dans le cas où $OA = 2$ cm, calculer la longueur de la hauteur issue de C du triangle BCD .

3° Quels sont les lieux géométriques des points M, N, H respectivement milieux de AB, BC et BD ?

4° Montrer que le milieu de AD reste fixe. (B. E. P. C.)

60. On donne 3 points fixes A, B et C sur une droite xy , C entre A et B . En C on mène la perpendiculaire zz' à AB . Un cercle variable de centre O passe par A et B et coupe la droite zz' en M et N . On mène le diamètre MP du cercle O . Soit OQ le rayon perpendiculaire sur AB .

1° Démontrer que les angles \widehat{AMB} et \widehat{PMC} ont même bissectrice.

2° Quel est le lieu géométrique du centre O ?

3° Quel est le lieu géométrique du point P ?

61. On donne un triangle ABC rectangle en A et sa hauteur AH relative à l'hypoténuse BC. Un angle droit \widehat{xHy} pivote autour de son sommet H et le côté Hx coupe AB en P, le côté Hy coupe AC en Q.

1° Montrer que les cercles de diamètre PQ passent par 2 points fixes.

2° Quel est le lieu géométrique des centres de ces cercles?

3° Si HQ est bissectrice de \widehat{AHC} , démontrer que $AP = AQ$.

62. 1° Construire un triangle isocèle ABC dont la base BC mesure 4 cm et dont les côtés AB et AC mesurent chacun 6 cm. Construire ensuite le cercle circonscrit à ce triangle (une figure claire et précise dispensera de toute explication).

2° Une corde variable, issue de A, coupe le cercle circonscrit en M. On désigne par D la projection de B sur AM, et par P l'intersection de BD et de CM. Comparer les angles DMP et DMB aux angles à la base du triangle ABC. En conclure que P est symétrique de B par rapport à AM.

3° Sur quelle ligne se déplace P quand la corde AM tourne autour du sommet A? Construire cette ligne. Par quels points de la figure passe-t-elle?

4° Sur quelle ligne se déplace, au cours de ce mouvement, un point P' de AP, situé entre A et P, tel que $\frac{AP'}{AP} = \frac{1}{3}$? (B. E. P. c.)

63. Un point M décrit un segment AB. Soit Bx la perpendiculaire à AB. On construit le triangle équilatéral AMN. La perpendiculaire en N à MN coupe Bx en P.

1° Quel est le lieu de N?

2° Quel est le lieu de I milieu de BN?

3° Quel est le lieu de O, centre du cercle circonscrit au quadrilatère BPNM?

64. On donne un triangle ABC quelconque. On porte 2 longueurs égales, BD sur le prolongement Bx de AB et CE sur le prolongement Cy de AC. On désigne par P le milieu de BC. Par P on mène la parallèle à Ax et par D la parallèle à BC. Ces 2 droites se coupent en M. De même, on mène par P la parallèle à Ay et par E la parallèle à BC; ces 2 droites se coupent en N.

1° Démontrer que MN coupe DE en son milieu Q.

2° Que peut-on dire de la droite PQ par rapport à l'angle \widehat{MPN} ?

3° Si l'on a toujours $BD = CE$ bien que D et E décrivent respectivement Ax et By, quel est le lieu de Q?

65. Soit PQ la perpendiculaire abaissée d'un point fixe P sur une droite fixe x'x et un point A mobile sur cette droite. On construit le symétrique R du point Q, par rapport à PA.

1° Sur quelle ligne se déplace le point R?

2° Étudier le triangle AQR et trouver :

a) la ligne décrite par le centre O du cercle circonscrit.

b) la ligne décrite par le centre I du cercle inscrit.

c) la ligne décrite par l'orthocentre H de ce triangle.

66. On considère un cercle O de diamètre AB et la tangente $x'x$ en A. Un point M, mobile, décrit xx' . La droite MB coupe le cercle O en C.

1° Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle AMC?

2° On mène une tangente BD au cercle précédent. Lieu du point D?

3° Quel est le lieu du centre J du cercle inscrit au triangle ABC?

67. Soit un demi-cercle de diamètre AB, de centre O, et un point M variable sur ce demi-cercle. Extérieurement au triangle MAB et sur chacun des côtés MA et MB on construit les carrés AMEF et BMCD dont les diagonales se coupent en I pour le premier et J pour le deuxième.

1° Démontrer que les points I, M et J sont alignés et que la droite qui les porte passe par un point fixe.

2° Démontrer que l'angle IOJ est droit.

3° Quelles lignes décrivent I et J lorsque M se déplace sur le demi-cercle?

4° Si MH est la hauteur du triangle MAB, montrer que le triangle IHJ est rectangle et que ses côtés IH et JH restent parallèles à une même direction.

68. On considère un rectangle ABCD et un angle droit xAy mobile autour de son sommet A. Ax coupe BC en M et Ay coupe CD en P. On termine le rectangle PAMN et l'on désigne par Q et R les projections de N sur BC et CD.

1° Montrer que le centre O du rectangle AMNP est équidistant de M, P et C; en déduire le lieu géométrique du point O.

2° Montrer que l'angle ACN est droit. Trouver le lieu du point N.

3° Comparer les segments DP et CR, puis CQ et BM.

(B. E. P. C.)

69. On considère un cercle de centre O et une droite xy tangente à ce cercle en A. D'un point M quelconque de la droite xy on mène la deuxième tangente au cercle, soit N le point de contact.

1° Montrer que les milieux I et J des deux arcs \widehat{AN} sont les centres de cercles tangents aux trois droites xy , AN et MN.

2° Sur quelle droite se déplace le centre C du cercle circonscrit au triangle AMN quand M parcourt xy ?

3° Montrer que les hauteurs du triangle AMN issues de A et de N se coupent sur OM en un point H; montrer que le quadrilatère ONHA est un losange. Sur quelle courbe se déplace le point H quand M parcourt xy ?

70. On considère un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) inscrit dans un cercle de centre O. On trace une corde AD. De C on abaisse la perpendiculaire CH sur AD; cette perpendiculaire prolongée coupe BD en E.

1° Montrer que E est symétrique de C par rapport à AD.

2° Sur quelle ligne se déplace le point H de AD quand la corde tourne autour de A?

3° Sur quelle ligne se déplace le point E quand D décrit l'arc $\widehat{BA'C}$ du cercle O puis quand D décrit l'arc \widehat{BAC} de ce cercle? (AA' diamètre du cercle O).

4° Évaluer l'angle \widehat{CEB} par rapport à l'angle \widehat{BAC} et en déduire une vérification du résultat précédent.

71. Sur un cercle de centre O et de rayon R, on prend un point fixe A et un point mobile B. La perpendiculaire à AB élevée en A coupe le cercle en C.

1° Montrer que l'hypoténuse BC du triangle rectangle variable ABC passe par un point fixe.

2° Soit AH la hauteur relative à BC dans le triangle ABC. Sur quelle ligne se déplace le point H?

On donne $AH = h$; construire le triangle ABC.

3° Soit CM la médiane relative à AB dans le triangle ABC. Comparer en grandeur et en direction les segments OM et AC. OA et CM se coupent en D, calculer OD en fonction de R.

4° On donne $CM = m$; construire le triangle ABC. Discuter.

72. On donne un carré ABCD. Une droite $x'x$ extérieure au carré pivote autour de A. Intérieurement au carré on construit l'angle $\widehat{BC'ij}$ égal à $\widehat{BA'x}$. Le côté $C'j$ de cet angle, mobile, coupe la diagonale BD en E, le côté AB ou AD en F et $x'x$ en G.

1° Démontrer que les angles \widehat{BAG} et \widehat{BAE} sont égaux.

2° Démontrer que le triangle AGF est rectangle.

3° Démontrer que le quadrilatère AGE O est inscriptible dans un cercle (O centre du carré).

4° Lieu du centre O' du cercle circonscrit au quadrilatère AGE O.

5° Lieu géométrique de G?

73. Une sécante coupe en A et B un cercle de centre O et de rayon R. On prend un point C sur le prolongement de AB.

1° Construire les cercles passant par C et tangents au cercle O, l'un en A, l'autre en B. Soient I et J leurs centres respectifs.

2° On mène en A la tangente au cercle I et en C la tangente au cercle J. Démontrer qu'elles sont parallèles.

3° Étudier la nature du quadrilatère OJCI.

Montrer que AC est bissectrice de l'angle \widehat{ICJ} .

4° Sur quelle ligne se déplace le milieu M de IJ lorsque C se déplace sur AB?

74. On fait glisser une équerre ABC de façon que les sommets des angles aigus B et C parcourent deux demi-droites perpendiculaires Ox et Oy . Étudier le cas où le sommet A de l'angle droit est opposé à O puis le cas où A est du côté de O par rapport à BC.

1° Que peut-on dire du quadrilatère OBAC?

2° Lieu géométrique du milieu de BC?

3° Lieu géométrique du sommet A?

75. Un angle droit \widehat{BAC} pivote autour de son sommet A. Le point B reste sur une demi-droite Ox et C sur Oy ; l'angle \widehat{xOy} est égal à l'angle \widehat{BAC} ; A et O sont situés de part et d'autre de BC.

1° Démontrez que le quadrilatère OBAC est inscriptible dans un cercle.

2° Démontrez que le triangle ABC a ses angles constants.

3° Quel est le lieu géométrique du centre O' du cercle circonscrit au quadrilatère OBAC?

4° Soient B', C', H, les projections de A respectivement sur Ox, Oy et BC; montrer que l'angle AB'H est constant.

5° Quel est le lieu géométrique de H?

76. On considère un triangle équilatéral ABC et le centre O de son cercle circonscrit. On prend sur le segment BA un point M et sur le segment AC un point N tels que $BM = AN$.

1° Comparer les triangles OBM et OAN.

2° Démontrer que le quadrilatère OMAN est inscriptible dans une circonférence.

3° Démontrer que le triangle MON est isocèle et calculer ses angles.

4° On construit le parallélogramme MANP : lieu du point P et lieu du milieu de MN quand M se déplace de B à A.

(E. N.)

77. Deux cercles de centres respectifs O et O' se coupent en A et B. Deux sécantes quelconques passent par A et coupent l'une le cercle O en M et le cercle O' en N, l'autre le cercle O en P et le cercle O' en Q. Les droites PM et NQ se coupent en R.

1° Comparer les angles $\widehat{OAO'}$ et \widehat{MRQ} . En déduire que \widehat{MRQ} est constant.

2° Montrer que le quadrilatère MRNB est inscriptible dans un cercle.

3° Les médiatrices des segments PM et QN se coupent en S. Quel est le lieu de S?

78. On donne un cercle O de rayon R. Par un point fixe A de ce cercle on mène 2 cordes rectangulaires variables AB et AC.

1° Montrer que le 4^e sommet D du rectangle ABDC est fixe.

2° Quel est le lieu de la projection H de A sur la diagonale BC?

3° Évaluer l'aire du rectangle en fonction de R et de AH. Quel est le rectangle d'aire maximum?

4° Démontrer que le point de concours des médiatrices du triangle ABC est fixe.

5° Lieux des milieux M et N de AB et de AC. Démontrer que MN passe par un point fixe.

6° Démontrer que A, M, N, H, O sont 5 points d'un cercle fixe.

(E. N.)

79. Étant données 2 droites perpendiculaires Ox et Oy, on porte 2 longueurs égales OA = OB, OA sur Ox et OB sur Oy. Par le point A on mène une droite variable qui coupe OB en H entre O et B. La perpendiculaire abaissée de B sur AH coupe AH en I et le prolongement de Ox en D.

1° Démontrer que OD = OH et dire quel est le lieu du point I.

2° Démontrer que le quadrilatère IHOD est inscriptible dans un cercle et indiquer le lieu du centre de ce cercle. Démontrer que IO est bissectrice de l'angle \widehat{DIH} .

3° On abaisse OK perpendiculaire sur BI, démontrer que $KO = KI$ et indiquer le lieu du symétrique O' de O par rapport à BD.

4° Lorsque le point H varie sur OB, démontrer que HD reste parallèle à une direction fixe.

80. Deux cercles O et O' se coupent en A et B. Une sécante variable passant par A coupe les 2 cercles en P et Q. On désigne par I et J les milieux de AP et AQ.

1° Montrer que la médiatrice de IJ passe par un point fixe que l'on précisera.

2° Les perpendiculaires en P et Q à la droite PQ passent par des points fixes alignés avec B. En déduire que la médiatrice de PQ passe par un point fixe D que l'on précisera.

3° Lieu du milieu de PQ.

4° Montrer qu'il existe deux cercles de centre D tangents à deux cercles donnés. (E. N.)⁶

81. 1° Démontrer que dans un triangle ABC la bissectrice intérieure AE de l'angle \widehat{A} est aussi bissectrice de l'angle \widehat{OAH} formé par le rayon OA du cercle circonscrit et la hauteur AH du triangle ABC.

2° Démontrer que le rayon OA est perpendiculaire à la droite $H'H''$ qui joint les pieds des hauteurs BH' et CH'' issues des sommets B et C.

3° Trouver le lieu des points M tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les 3 côtés du triangle ABC soient en ligne droite.

82. On donne une circonférence de centre O et une corde AB fixe. Un point M se déplace sur le plus grand arc \widehat{BMA} du cercle O et on construit le parallélogramme BAMP.

1° Démontrer que la bissectrice de l'angle AMB passe par un point fixe E sur la circonférence de centre O.

2° On prolonge PB jusqu'à sa rencontre avec la bissectrice précédente ME en N. Démontrer que le triangle MNB est isocèle, que l'angle BNM est constant et en déduire le lieu géométrique du point N.

3° Soit Q le milieu de la droite MN. Que pensez-vous du triangle BQE? En déduire le lieu de Q?

4° Soit R le milieu de la droite PM. Trouver le lieu géométrique de ce point R. (E. N.)

83. On considère un cercle de centre O et de rayon R, deux diamètres rectangulaires AOB et COD. Un point M parcourt ce cercle; la droite MA coupe CD en E.

1° Trouver le lieu géométrique du milieu N de AM.

2° Quelle particularité présente le quadrilatère OBME?

3° Soit H l'orthocentre du triangle MEO . Montrer que MHO est un triangle isocèle et trouver le lieu de H .

4° Soit F le point de rencontre de MB et CD . Trouver le lieu du point de concours K de BE et AF et celui du centre du cercle circonscrit au triangle OMF . (E. N.)

84. On donne un cercle de centre O et de rayon R , ainsi qu'un point A extérieur.

1° Sur ce cercle, déterminer un point M , tel que la corde MN , perpendiculaire à AM , ait une longueur donnée m . Discuter.

2° Le point M décrit le cercle. Par l'extrémité N de la corde MN perpendiculaire à AM , on mène la droite Nx parallèle à la droite AM . Montrer que cette droite Nx passe par un point fixe.

3° Du point O , et toujours d'un même côté par rapport à la droite OA , on mène une demi-droite, perpendiculaire à la droite MA sur laquelle on place le point L , tel que $OL = AM$. Du même côté que OL par rapport à OA , on mène une demi-droite perpendiculaire à OA sur laquelle on place le point I , tel que $OI = OA$. Montrer que, lorsque M varie, le point L se déplace sur un cercle de centre I . (E. N.)



CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

85. Soient 2 droites D_1, D_2 parallèles et à la distance $d = 3$ cm l'une de l'autre.

1° Construire une sécante, xy à ces 2 droites, telle que la portion MP de cette sécante comprise entre D_1 et D_2 ait une longueur donnée : $l = 5$ cm.

2° Que pouvez-vous dire des diverses sécantes, telles que xy répondant au 1°?

3° On donne une circonférence (C) de centre O et deux droites parallèles D_1, D_2 . Menez à la circonférence (C) une tangente, de telle manière que la portion MP de cette tangente comprise entre les 2 parallèles ait une longueur donnée. Le problème est-il toujours possible? (B. E. P. c.)

86. Soient une circonférence de centre O et de rayon R, A un point fixe de cette circonférence, B un point variable. La perpendiculaire en A à BA coupe la circonférence en un second point, C. On considère le triangle variable BAC ainsi défini.

1° Montrer que l'hypoténuse BC passe par un point fixe.

2° On abaisse de A la hauteur AH. Quelle est la courbe sur laquelle se déplace le point H? Construire le triangle BAC, connaissant $AH = h$. La construction est-elle toujours possible?

3° Soit M le milieu de AB. On trace la médiane CM; on trace OM et OA. Montrer que OM est parallèle à AC. Déterminer la position sur CM et sur OA du point D, intersection des 2 droites CM et OA.

4° Construire le triangle ABC, connaissant la longueur m de la médiane CM. Discuter. (B. E. P. c.)



RAPPORTS DE DEUX SEGMENTS



Il existe deux points, l'un M entre A et B, l'autre M' , extérieur à AB, qui partagent le segment AB dans le même rapport différent de 1.

Le point M partage AB en segment additifs.

Le point M' partage AB en segments soustractifs :

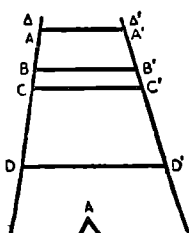
$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{m}{n}.$$

A, B, M, M' forment une division harmonique.

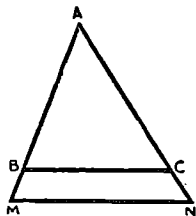
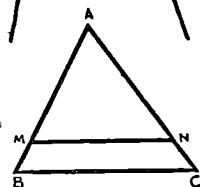
THÉOREME DE THALÈS

Des droites parallèles déterminent sur des sécantes des segments correspondants proportionnels.

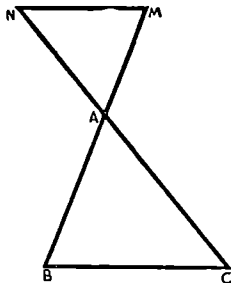
$AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ et Δ, Δ' sécantes



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'D'}{AD} = \frac{B'D'}{BD}$$



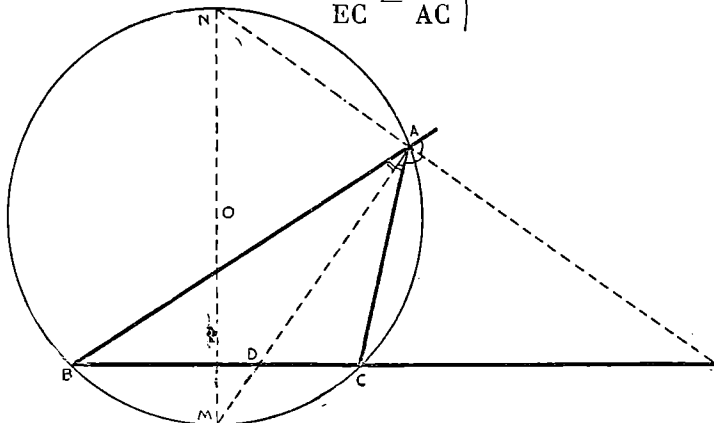
$$\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$



• Propriétés des bissectrices des angles d'un triangle.

Les bissectrices (intérieure et extérieure) d'un angle d'un triangle divisent le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \\ \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} \end{array} \right\} \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$



RAPPORT DE 2 SEGMENTS. THÉORÈME DE THALÈS

87. 1° Soient les points M et M' qui divisent le segment $AB = 40$ cm dans le rapport $\frac{3}{7}$, calculer \overline{MA} , \overline{MB} , $\overline{M'A}$, $\overline{M'B}$ et $\overline{MM'}$.

2° Si O est le milieu de AB, vérifier la relation $\overline{OA}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OM'}$.

3° Vérifier la relation : $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AM'}$.

4° Si I est le milieu de MM' , calculer $\frac{IA}{IM}$ et $\frac{IM}{IB}$.

88. 1° Étant donné un segment $AB = 48$ cm et les 2 points M et M' qui le partagent l'un en segments additifs, l'autre en segments soustractifs dans le rapport $\frac{1}{3}$, calculer les longueurs des segments MA, MB, M'A, M'B et MM'.

2° Généraliser et calculer les segments précédents en fonction de $AB = a$ et de m et n , termes du rapport $\frac{m}{n}$, en étudiant les cas où $\frac{m}{n} > 1$ et $\frac{m}{n} < 1$.

3° Un point M partage AB en segments additifs dans le rapport $\frac{3}{4}$, le segment MA = 42 cm. Quelle est la longueur du segment AB?

4° Un point M' partage AB en segments soustractifs dans le rapport $\frac{7}{5}$, le segment M'A = 84 cm. Quel est la longueur du segment AB?

89. On donne un quadrilatère ABCD et l'on trace ses diagonales AC et BD.

1° Par A on mène la parallèle à BC qui coupe BD en E et par B on mène la parallèle à AD qui coupe AC en F. Démontrer que EF est parallèle à CD.

2° On mène 2 parallèles à la diagonale AC de part et d'autre de AC, soient MN et PQ, M sur AB, N sur BC, P sur AD et Q sur CD. Démontrer que MP et NQ se coupent en I sur la diagonale BD ou sont parallèles.

90. Deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' sont tangents extérieurement en T. Une tangente commune extérieure AB coupe en H la tangente commune intérieure et en S, la droite des centres OO'.

1° Démontrer que le triangle TAB est rectangle.

2° Établir la similitude des triangles TAB et OHO'. Calculer la longueur de HT si OO' = 65 mm et R = 45 mm.

3° AT recoupe le cercle O' en D et BT recoupe le cercle O en E. Démontrer que AE est diamètre du cercle O, que BD est diamètre du cercle O' et que les points E, D, S sont alignés.



TRIANGLES SEMBLABLES

$$\left\{ \begin{array}{l} AH \perp BC \text{ et } A'H' \perp B'C' \\ BM = MC = \frac{BC}{2} \text{ et } B'M' = M'C' = \frac{B'C'}{2} \\ \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \text{ et } \widehat{B'A'H'} = \widehat{C'A'H'} \end{array} \right.$$

Triangles semblables

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \\ = \frac{AM}{A'M'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{\mathfrak{E} \cdot ABC}{\mathfrak{E} \cdot A'B'C'} \end{array} \right.$$

Deux triangles sont semblables s'ils ont :

- 1^{er} cas : 2 angles respectivement égaux.
- 2^e cas : un angle égal compris entre côtés proportionnels.
- 3^e cas : les 3 côtés proportionnels.

TRIANGLES SEMBLABLES

91. Soit un segment AB = 7 cm.

1° Construire un point C entre A et B, qui partage AB dans le rapport $\frac{5}{2}$.

2° Soit Ax une sécante variable issue de A. Des points B et C on mène les perpendiculaires BM et CN à cette droite. Lieux géométriques des points M et N.

3° On joint les points B et N. On mène par le point M la parallèle à NB; elle rencontre AB en D. Démontrer que l'on a

$$AC \cdot AD = AB^2.$$

En déduire la longueur de AD.

(B. E. P. C.)

92. Dans tout ce problème, BC désigne un segment donné ayant pour longueur 10 cm.

1° Construire le point M, placé entre B et C, tel que $\frac{MB}{MC} = \frac{3}{2}$.

Calculer les longueurs des segments MB et MC.

2° a désignant un nombre positif donné à l'avance, on voudrait construire un triangle ABC dans lequel la longueur des côtés BA et CA, exprimée en cm, soit respectivement $3a$ et $2a$. Cette construction est-elle possible pour $a = 1$? Dire comment il faut choisir a pour que l'on puisse obtenir le point A.

3° En supposant le triangle ABC construit de telle sorte que $BA = 3a$ et que $CA = 2a$, on mène par le point C la parallèle à la droite AM qui coupe le prolongement de AB en D. Evaluer AD en fonction de a . Comparer les angles \widehat{BAM} et \widehat{MAC} . (B. E. P. c.)

93. On considère un point P situé à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon R. Une droite quelconque passant par P coupe le cercle en M et N.

1° Construire le centre C du cercle qui passe par les points P et M et qui est tangent en M au cercle de centre O. Justifier la construction. Tracer également le cercle de centre D qui passe par les points P et N et qui est tangent en N au cercle de centre O.

2° Montrer que le quadrilatère ODPC est un parallélogramme.

En déduire que, lorsque la droite MN tourne autour du point P :

a) la droite CD passe par un point fixe, que l'on déterminera ;
b) la somme des rayons des cercles de centres C et D conserve une valeur constante, que l'on précisera.

3° Dans quel rapport algébrique le point P divise-t-il le segment MN, lorsque le rayon du cercle de centre D est le double du rayon du cercle de centre C? (B. E. P. c.)

94. On donne un triangle ABC et le cercle circonscrit de centre O.

1° Comparer les angles \widehat{AOB} , \widehat{BOC} et \widehat{COA} aux angles \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} du triangle.

2° Démontrer que la médiatrice de BC et la bissectrice de \widehat{A} se coupent sur le cercle.

3° Si AA' est la hauteur issue de A, montrer que $\widehat{CAA'} = \widehat{ABO}$.

4° Construire un triangle dont le côté BC = 4 cm, l'angle $\widehat{A} = 40^\circ$ et tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$.

95. Soit un triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH.

1° Construire une droite passant par I milieu de AH, coupant AB en D, AC en E et telle que DI = IE.

2° Démontrer que le quadrilatère BDEC est inscriptible dans un cercle.

3° Démontrer la similitude des triangles ABC et ADE et préciser les sommets homologues

96. On donne un triangle ABC (3 angles aigus) et ses 3 hauteurs AA', BB', CC' qui se coupent en H.

1° Démontrer que les quadrilatères AC'HB', BA'HC', CB'HA' sont inscriptibles.

2° Démontrer que les quadrilatères BCB'C', ACA'C', ABA'B' sont inscriptibles.

3° Démontrer que les triangles ABC, AB'C, A'BC', A'B'C sont semblables.

4° Établir la relation : $B'A \times B'C = B'C' \times A'B'$.

97. Soit un trapèze ABCD de bases AB et CD.

1° les milieux G, H, des côtés non parallèles et les milieux E et F des diagonales sont situés sur une même droite parallèle aux bases.

2° la distance GH des milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases.

3° la distance EF des milieux des diagonales est égale à la demi-différence des bases.

4° Par O, point de rencontre des diagonales, on mène MN parallèle aux bases. Montrer que $MO = ON$.

98. Soit un triangle ABC inscrit dans une circonférence. On mène une corde DE parallèle à BC. AE coupe BC en F.

1° Démontrer l'égalité des angles \widehat{BAD} et \widehat{CAE} .

2° Démontrer que les angles \widehat{DAE} et \widehat{BAC} ont la même bissectrice.

3° Comparer les triangles ABD et ACF, puis les triangles ADC et ABF.

4° Démontrer que le produit $AD \cdot AF$ est constant.

(B. E. P. C.)

99. On prolonge de longueurs égales les côtés BA et AC d'un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) de telle sorte que $AD = CE$. Extérieurement au triangle ABC on trace le parallélogramme AEPD.

1° Que peut-on dire des triangles ABC et ECP?

2° Montrer que l'angle \widehat{EPD} est constant et indiquer sur quelle ligne se déplace le point P lorsque AD varie.

3° Donner le lieu de M, milieu de la diagonale DE du parallélogramme AEPD.

100. Soit un triangle ABC et son cercle circonscrit de centre O, H son orthocentre et G son centre de gravité. Le diamètre AO recoupe le cercle circonscrit en D.

1° Montrer que BHCD est un parallélogramme; en déduire que HD et BC ont même milieu M;

2° Comparer les segments AH et OM.

3° Comparer les triangles AHG et GOM.

4° En déduire que H, G, O sont alignés; calculer $\frac{GO}{GH}$.

101. On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle O.

On mène la bissectrice de l'angle \hat{A} . Cette bissectrice coupe le côté BC en D et le cercle circonscrit en M.

1° Démontrer que $MB = MC$.

2° Quels sont les 2 triangles semblables au triangle CMD? Démontrer que $MD \times MA = MC^2$.

3° Prouver que MC est tangente au cercle circonscrit au triangle ADC.

4° Calculer MC dans le cas où BC coupe OM = R en son milieu P.

102. Soit un triangle ABC. D'un point D de AB on trace la parallèle DEF à BC, qui coupe AC en E, et la parallèle tracée de C à AB, en F. Enfin, BF rencontre AC en I.

1° Montrer que l'on peut choisir D de façon que BF soit bissectrice de l'angle B.

2° Démontrer que, si l'on choisit D au milieu de AB, le segment IC est le double du segment IE.

3° D étant un point quelconque de AB, démontrer que

$$IC^2 = IE \times IA.$$

(B. E. P. C.)

103. On donne un triangle quelconque ABC et ses 3 hauteurs AA', BB', CC' qui se coupent en H. Les 3 médianes AM, BN et CP se coupent en G et soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1° Comparer les triangles ABH et MNO et montrer que

$$AH = 2 MO.$$

2° Comparer les triangles AHG et MOG et indiquer la position de G par rapport à O et à H.

3° Trouver tous les quadrilatères inscrits de la figure.

104. On considère un triangle ABC dans lequel l'angle \hat{B} est le double de l'angle C. La bissectrice intérieure de l'angle \hat{B} coupe en D le côté AC et en E le cercle circonscrit au triangle ABC. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1° Que peut-on dire du quadrilatère BAEC? Écrire toutes les égalités de segments de la figure formée par les 5 points A, B, C, D, E.

Montrer sans construction nouvelle que $\frac{DA}{DC} = \frac{c}{a}$.

2° Démontrer la similitude des triangles ABC et ADB. En déduire les expressions de DA et DC en fonction de a , b , c .

3° En utilisant le fait que D est sur le segment AC, montrer qu'il existe une relation entre a , b , c .

4° b et c étant donnés, on calcule a à l'aide de la relation précédente. Quelles inégalités doivent vérifier b et c pour qu'il existe un triangle dont les côtés ont pour mesure les 3 nombres a , b , c ?

(B. E. P. C.)

105. Soit un triangle isocèle OAB, de base AB.

1° La perpendiculaire en B à AB coupe AO en C. Montrer que O est le milieu de AC.

2° Soient AD la hauteur issue de A dans le triangle AOB et F l'intersection de OA avec la perpendiculaire en B à OB.

Montrer que $OA^2 = OD \cdot OF$.

3° La parallèle menée par B à la bissectrice intérieure de l'angle OAB coupe le prolongement de OA en P. Quel est le lieu de P lorsque OA varie, AB restant fixe? (B. E. P. C.)

106. On donne un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$. On prend un point M sur le rayon OA et l'on décrit le cercle de centre A, de rayon AM, qui coupe le demi-cercle précédent en C. On trace OC, qui recoupe le cercle de centre A en D.

1° Démontrer que les triangles OAC et CAD sont semblables et en déduire que AM est moyenne proportionnelle entre OA et CD.

2° Quant M décrit le segment AO, sur quelle courbe se déplace le milieu I de CD?

3° Construire le point M pour lequel les segments OD, DI et IC sont égaux. (B. E. P. C.)

107. Soit un triangle ABC rectangle en A ($AB < AC$) et AH la hauteur relative à l'hypoténuse. Sur BC on porte $HD = HB$, on mène AD et de C on abaisse la perpendiculaire sur AD soit CE.

1° Donner la nature du triangle ABD.

2° Démontrer que les triangles AHB et CED sont semblables.

3° Montrer que BC est bissectrice de l'angle \widehat{ACE} .

4° Démontrer que le quadrilatère ACEH est inscriptible. En déduire que $AH = HE$.

108. Un triangle ABC tel que $\widehat{ACB} > 90^\circ$ est inscrit dans un cercle O. On trace les médiatrices des côtés AC et BC. La perpendiculaire élevée en A à AB coupe la médiatrice de AC en D et la perpendiculaire élevée en B à AB coupe la médiatrice de BC en E.

1° Démontrer que les angles \widehat{OCD} et \widehat{OCE} sont égaux.

2° Démontrer l'égalité des angles \widehat{BAC} , \widehat{COE} et \widehat{ODC} .

3° Établir la relation : $OC^2 = CE \cdot CD$.

109. On donne 3 points A, B et C alignés dans cet ordre sur une droite xy . On pose $AB = m$ et $BC = n$. En B et en C, de part et d'autre de xy on élève les demi-droites Bb et Cc perpendiculaires à xy . Par A, on trace une droite qui coupe Bb en M. La perpendiculaire à AM passant par A coupe Cc en N.

1° Démontrer que les triangles ABM et ACN sont semblables.

2° En déduire la valeur du produit $BM \times CN$ en fonction de m et n .

3° Soit P le pied de la perpendiculaire menée de A sur MN. Montrer que les quadrilatères ABPM et APCN sont inscriptibles.

4° En déduire que l'angle \widehat{BPC} est droit et trouver le lieu de P quand l'angle droit \widehat{MAN} tourne autour de A. (B. E. P. C.)

110. Dans un cercle de centre O et de rayon R, on trace deux diamètres rectangulaires fixes AB et CD. Les droites reliant les points C et D à un point M variable sur le cercle coupent la droite AB en E et en F.

1° Comparer les triangles EOC et DOF. Montrer que le produit OE · OF reste constant.

2° I désignant le milieu de EF, évaluer l'angle IMO.

3° Construire le point M pour lequel $EF = R$. (B. E.).

111. Étant donné un triangle ABC quelconque, un point M sur la base BC et un point N sur le prolongement de BC, on abaisse de M les perpendiculaires MP et MQ et de N les perpendiculaires NP' et NQ' sur AB et sur AC. Soient BH et CK les hauteurs du triangle issues de B et de C.

1° Démontrer les relations $\frac{MP}{CK} + \frac{MQ}{BH} = 1$ et $\frac{NP'}{CK} - \frac{NQ'}{BH} = 1$.

2° Étudier le cas particulier où le triangle ABC est isocèle avec $AB = AC$.

112. Étant donné un rectangle ABCD, on prolonge le côté CD d'une longueur DE et le côté CB d'une longueur BF et on forme le rectangle CEGF. On pose $AD = BC = a$, $AB = CD = b$, $DE = x$, $BF = y$ et ces nombres vérifient la relation $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

1° Comparer les triangles ADE et ABF. En déduire que les points F, A, E sont alignés.

2° La droite BA coupe EG en H et DA coupe FG en K. Comparer les triangles GAH et EAH.

3° Montrer que les droites GA et EF sont perpendiculaires.

113. Étant donné un triangle ABC rectangle en A et isocèle, on mène de C une droite variable qui coupe AB en H et de B la perpendiculaire à CH qui coupe CH en I et AC en D.

1° Montrer que les triangles ABC et ADH sont semblables.

2° Sur quelle ligne se déplace le point I lorsque H décrit AB?

3° Établir la relation : $IH \cdot IC = IB \cdot ID$.

114. On considère un demi-cercle de diamètre AB et de centre O. Aux extrémités A et B du diamètre on mène les tangentes Ax et By et une troisième tangente en un point M quelconque du demi-cercle; cette tangente coupe BA en P, Ax en C et By en D.

1° Démontrer que $AC + BD = CD$.

2° Démontrer que le triangle CDO est rectangle.

3° Calculer le produit $AC \times BD$ en fonction de $OA = R$.

4° Soit MH perpendiculaire sur AB. Démontrer que les points P et H partagent AB dans le même rapport et que $OP \times OH = R^2$.

115. Aux extrémités A et B d'un segment $AB = 4a$ et d'un même côté de AB on élève les perpendiculaires Ax et By. Soit un point C de AB tel que $AC = 3a$ et un point M variable sur Ax. La perpendiculaire en C à CM coupe By en N. On appelle P le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur MN

1° Montrer que le produit $AM \cdot BN$ est constant et donner sa valeur en fonction de a .

2° Que peut-on dire des quadrilatères $AMPC$ et $BCPN$?

3° Sur quelle ligne se déplace le point P lorsque M décrit la demi-droite Ax ?

116. On donne un triangle isocèle ABC ($AB = AC$). Par A on mène $x'x$ parallèle à BC . On prend M sur Ax' et N sur Ax de telle sorte que $AM \times AN = AB \times AC$. MB et NC se coupent en P .

1° Démontrer que les triangles MAB , CAN et MPN sont semblables.

2° Comparer l'angle \widehat{MPN} et l'angle \widehat{BAC} .

3° La relation $AM \times AN = AB \times AC$ restant vérifiée, sur quelle ligne se déplace P lorsque M et N varient sur $x'Ax$?

117. On donne un cercle O et une corde CD de ce cercle. Les rayons OA et OB coupent CD respectivement en E et F de telle sorte que $CE = EF = FD$. On prolonge AB qui coupe OC en M et OD en N .

1° Montrez l'égalité des triangles OCE et ODF .

2° Comparez les triangles OEF et OAB . Montrez que les droites CD et MN sont parallèles.

3° Que peut-on dire des segments MA , AB et BN ?

4° Des résultats précédents, les rayons OA et OB étant donnés, déduire la construction de la corde CD telle que les rayons OA et OB la partagent en 3 parties égales.

118. On donne un angle $\widehat{xAy} < 1$ droit, un point M sur Ax et un point N sur Ay .

1° Déterminer sur Ax un point P tel que les triangles ANM et APM soient semblables. Dans quel cas les points M et P sont-ils confondus?

2° Montrer que le cercle circonscrit au triangle PMN est tangent en N à Ay .

3° Si Q est la symétrique de M par rapport au rayon ON du cercle circonscrit au triangle PMN , démontrer la similitude des triangles AMN et NQP .

4° Si M décrit Ax , prouver que la bissectrice de l'angle \widehat{PNM} reste parallèle à une direction fixe.

119. Les 3 hauteurs AA' , BB' , CC' d'un triangle ABC se coupent en H . On prolonge $B'C'$ qui coupe en M et N le cercle circonscrit au triangle ABC .

1° Démontrer que les quadrilatères $AB'HC'$, $BA'HC'$, $CA'HB'$ et $BCB'C'$ sont inscriptibles.

2° Démontrer l'égalité des angles $\widehat{AB'C'}$, \widehat{ABC} et $\widehat{AHC'}$.

3° Montrer que la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC est parallèle à $B'C'$.

4° Démontrer que le triangle AMN est isocèle.

5° Établir la similitude des triangles AMC' et ABM puis des triangles $AC'H$ et ABA' . En déduire la relation :

$$AM^2 = AB \cdot AC' = AH \cdot AA'.$$

120. Soient un demi-cercle de diamètre AB, S un point de ce demi-cercle et C le milieu de l'arc \widehat{BS} . On trace les cordes AC et BS, qui se coupent en D.

1° Démontrer que les triangles ABC et BCD sont semblables. Écrire leur rapport de similitude.

2° La perpendiculaire abaissée de C sur AB coupe BD en I. Démontrer que I est le milieu de BD et trouver le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

3° On prolonge la corde AC, au-delà de C, d'une longueur $CM = CB$. Quel est le lieu géométrique du point M quand le point S décrit le demi-cercle?

4° Construire ce lieu en prenant $AB = 6$ cm.

(B. E. P. C.)

121. On considère un trapèze rectangle ABCD. Les bases sont AB et CD, le côté AD est perpendiculaire aux bases. On suppose que les diagonales de ce trapèze sont perpendiculaires et soit I leur point commun.

1° Comparer les triangles ABD et DAC. En déduire la relation :

$$\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{AD}^2.$$

2° On trace le cercle circonscrit au triangle ADI. La tangente en I à ce cercle coupe les bases aux points E et F. Montrer que ces points sont les milieux des bases.

3° On prolonge AB du côté de A d'une longueur $AH = CD$. Que peut-on dire du triangle DBH? En déduire une construction du trapèze ABCD, connaissant la somme de ses bases et sa hauteur. Faire cette construction lorsqu'on donne :

$$AB + CD = 6,5 \text{ cm}; \quad AD = 3 \text{ cm.}$$

(B. E. P. C.)

122. Trois points A, B, C situés sur une même droite, dans cet ordre, sont tels que $AB = BC = a$. En C on élève la perpendiculaire à AC, soit (D). Par A on trace une droite qui coupe (D) en M, de B on abaisse la perpendiculaire sur AM, soit BP; la droite PB coupe (D) en N.

1° Démontrer que les 2 droites MB et AN sont perpendiculaires.

2° MB coupe AN en Q; montrer que si M décrit la droite (D), les points P et Q décrivent une même ligne que l'on précisera.

3° Montrer la similitude des triangles ACM et BCN. En déduire la relation $CM \cdot CN = 2a^2$.

Construire la figure si $CN = 2$ CM.

123. On donne un segment de droite $AB = 60$ cm et M son milieu. On trace le cercle de diamètre AM et la perpendiculaire à AB élevée en B, soit (Δ). Une droite, menée par M coupe le cercle en D et la droite (Δ) en E. On joint AD que l'on prolonge jusqu'en F sur (Δ) et AE qui coupe le cercle en G. Démontrer :

1° que les quadrilatères MBEG et MBFD sont inscriptibles.

2° que AB est bissectrice de l'angle \widehat{DBG} .

3° que les triangles MBE et FBA sont semblables.

4° Calculer le produit $BE \times BF$.

124. On donne un cercle de diamètre AB et une droite D perpendiculaire à AB en un point H extérieur au cercle situé du même côté que B par rapport au centre du cercle.

Une droite quelconque issue de A recoupe le cercle en M et rencontre la droite D en M'.

1° Montrer que le quadrilatère BHM'M est inscriptible dans un cercle, dont on désignera le centre par I. Préciser la position de I. Lieu de I lorsque la droite AM tourne autour de A.

2° Comparer les triangles AMB et AHM'. En déduire la relation (1)

$$AB \times AH = AM \times AM'.$$

Que peut-on dire du produit $AM \times AM'$ lorsque la droite AM varie en passant constamment par A?

3° On appelle A' le point tel que la droite D soit médiatrice du segment AA'. O désignant le milieu de AB, comparer les triangles AOM et AM'A'. En déduire la relation (2)

$$AM \times AM' = AO \times AA':$$

Pourrait-on déduire directement cette relation de l'égalité (1)?
(D'après B. E. P. C.)

125. On donne 3 points A, B, C sur une même droite, de manière que $AB = \frac{BC}{2} = a$. On décrit le cercle de centre O et de diamètre AB et on trace une sécante variable issue de A qui coupe le cercle O en D. On détermine un point M sur cette sécante AD tel que

$$AM = \frac{AB \times AC}{2 AD}.$$

1° Comparer les triangles OAD et MAC. Quelle est la nature du triangle MAC?

2° Démontrer que le quadrilatère ODMC est inscriptible dans un cercle. Quand la sécante AD pivote autour de A, sur quelle ligne se déplace le centre de ce cercle et sur quelle ligne se déplace le point M?

3° Lorsque les droites OD et CM sont parallèles, quelle est la nature du triangle MAC?

126. On donne un demi-cercle de diamètre BC = 2 R et de centre O. Soient un point A quelconque du demi-cercle et P et Q les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles AOB et AOC. Les points P et Q se projettent sur BC en P' et Q'.

1° Expliquer la construction des cercles de centres P et Q. Montrer que PQ est médiatrice de OA.

Caractériser le triangle OPQ.

2° Établir la relation $PP' \times QQ' = \frac{R^3}{4}$.

3° On joint BP et CQ qui se coupent en M. Sur quelle ligne se déplace M lorsque A décrit le demi-cercle O?

127. On donne un segment de droite AB = 6 cm.

1° Construire les cercles de centres O et O' et passant par A et B de rayons respectifs 5 cm et 6 cm; O et O' seront de part et d'autre de AB.

2° On appelle C et D les points diamétralement opposés à A sur les 2 cercles. Que peut-on dire des points C, B, D?

3° Une droite variable passant par B recoupe le cercle O en M, le cercle O' en N. Montrer que le triangle AMN reste semblable à un triangle fixe quand la sécante MBN varie.

4° Quelle est la position de la sécante qui correspond à la plus grande longueur de MN? (B. E. P. C.)

128. Sur les côtés AB et AC d'un triangle quelconque comme diamètres, on construit les cercles de centre O et O'. Ces cercles se coupent en A et H.

1° Démontrer que H est le pied de la hauteur AH du triangle ABC.

2° Une corde pivote autour de A et coupe le cercle O en M et le cercle O' en N. Démontrer que quelle que soit la position de la sécante MN, les triangles ABC et HMN sont semblables. Comparer ces 2 triangles lorsque MN est parallèle à BC.

3° Démontrer que les médiatrices des cordes HM et HN forment un angle constant. Sur quelle ligne se déplace le sommet de cet angle lorsque $\widehat{BAC} = 1$ dr? Et dans ce cas, sur quelle ligne se déplace le milieu de MN?

129. L'angle A d'un triangle ABC est égal à 120° . On désigne par D l'intersection avec BC de la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{BAC} ; par E et F, les pieds des perpendiculaires abaissées du point D sur AB et AC respectivement. On trace EF.

1° Quelle est la nature du triangle DEF.

2° On marque, sur le prolongement de AF, au-delà de F, le point S et l'on marque sur le prolongement de BE, au-delà de E, le point T, de telle manière que FS = ET. On trace SD, TD, TS. Quelle est la nature du triangle DST?

3° Par C, on trace la parallèle à DA et on désigne par M le point où elle coupe le prolongement de BA. Quelle est la nature du triangle MAC? Sachant que les grandeurs des côtés AB et AC sont respectivement $AB = c$ et $AC = b$, calculer en fonction de b et de c la longueur de AD. Cas particulier où le triangle ABC est isocèle. (B. E.)

130. On donne un triangle ABC rectangle en A, $AB = 6$ cm, $AC = 3$ cm. B est centre d'un cercle de rayon 3 cm. C est centre d'un cercle de rayon 1,5 cm. On prend 2 rayons BM et CN perpendiculaires, dans les sens relatifs indiqués par la figure.

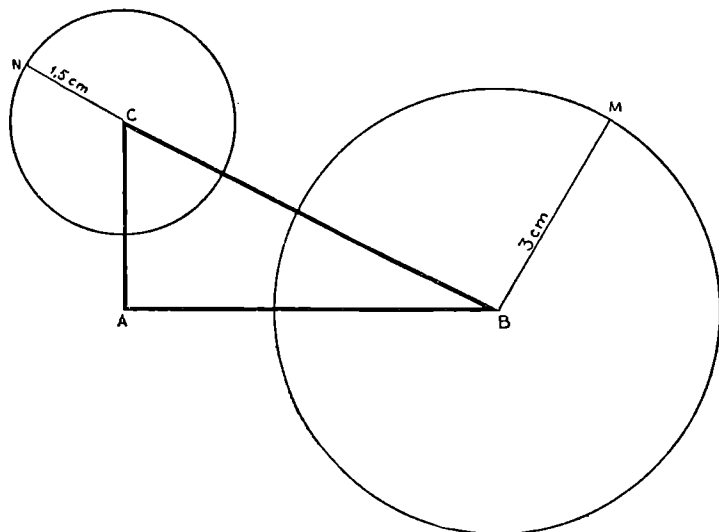
1° Comparer les triangles ABM et ACN et évaluer $\frac{AM}{AN}$.

Comparer les angles en A de ces 2 triangles.

Que vaut l'angle \widehat{MAN} ? Comparer les triangles ABC et AMN.

2° Soient D le milieu de BC, I le milieu de MN. Que peut-on dire des triangles ABD, AMI? Montrer que les triangles ABM et ADI sont semblables.

3° On suppose que M parcourt le cercle de centre B. Montrer que DI garde une longueur constante. Quelle courbe décrit le point I? (B. E. P. C.)



131. Deux segments consécutifs $AB = 6$ cm et $BC = 3$ cm sont portés par une même droite. On trace les cercles de diamètre AB et BC dont les centres respectifs sont O et O' . On mène une corde BM dans le cercle O et une corde BM' dans le cercle O' , perpendiculaire à BM . La droite MM' coupe la droite des centres en I .

1° Démontrer le parallélisme des cordes BM et CM' puis des rayons OM et $O'M'$.

2° Donner la valeur du rapport $\frac{IO'}{IO}$ et montrer que quelle que soit la position de la corde BM pivotant autour de B , le point I reste fixe sur la droite ABC .

3° La corde $M'B$ coupe le cercle O en P et la corde MB coupe le cercle O' en P' . Montrer que P et P' sont diamétralement opposés à M et à M' . Montrer que PP' passe par I .

4° Démontrer que R , milieu de MM' , se déplace sur le cercle de diamètre OO' .

132. Deux segments de droite BC et DE se coupent en A et $AB = 28$ mm; $AD = 21$ mm; $AC = 72$ mm; $AE = 96$ mm; $BD = 35$ mm.

1° Comparer les triangles ABD et AEC . Calculer EC .

2° En déduire les angles égaux de la figure puis une propriété du quadrilatère $BDCE$.

3° Établir la similitude des triangles ADC et ABE et donner le rapport de similitude.

4° Les droites CD et EB se coupent en F . Montrer la similitude des triangles DFE et BFC et donner le rapport de similitude.

133. Deux cercles de centres O et O' , de rayons $R = 4$ cm et $R' = 2$ cm, sont tangents extérieurement en A . On trace la corde AB dans le cercle O et la corde AC dans le cercle O' de telle sorte que l'angle $\widehat{BAC} = 90^\circ$.

1° Montrer le parallélisme des rayons OB et $O'C$.

2° La droite BC prolongée coupe la droite des centres OO' en I . Montrer que I est un point fixe et calculer OI .

3° Sur quelle ligne se déplace le point H , projection de O sur BC ?

4° Indiquer la construction de AB et de AC de manière que $IC = 5$ cm.

134. La médiane AM du triangle ABC détermine les deux angles \widehat{ACB} et \widehat{BAM} égaux.

1° Établir la relation $2AB^2 = BC^2$ et en déduire que BC est la diagonale d'un carré de côté AB .

2° Montrer que le cercle circonscrit au triangle AMC est tangent au côté AB .

3° La parallèle à AM menée par C coupe AB en D . Montrer que BC est tangente au cercle circonscrit au triangle ACD .

4° La bissectrice de \widehat{BAC} coupe BC en I et la bissectrice de \widehat{AMB} coupe AB en J . Montrer que IJ est parallèle à AC .

135. Soit O le milieu de la base BC d'un triangle isocèle ABC ($AB = AC$). Autour de O pivote un angle \widehat{xOy} égal aux angles égaux \widehat{B} et \widehat{C} du triangle ABC . Ox coupe AB en M et Oy coupe AC en N .

1° Comparer les triangles OMB et ONC . Montrer que

$$\overline{OB}^2 = BM \cdot CN.$$

2° Démontrer que le triangle OMN est semblable aux triangles OMB et ONC .

3° Montrer que OM et ON sont bissectrices des angles \widehat{BMN} et \widehat{CNM} .

4° Montrez que MN est tangente à un cercle fixe lorsque \widehat{xOy} pivote autour de O .

136. Un point M se déplace entre les extrémités du segment AB . Du même côté de AB on construit les carrés $AMCD$ et $BMEF$ ainsi que les cercles O et O' circonscrits à ces carrés. Ces cercles se coupent en M et N .

1° Quelle ligne décrit le point N lorsque M parcourt AB ?

2° Les droites AF et BD se coupent en P . Calculer MP en fonction de AM et de BM et montrer que P est sur MC .

3° Démontrer que H , orthocentre du triangle PAB est sur MC . Montrez la similitude des triangles AMH et PMB .

Sur quelle ligne se déplace le point H ?

137. On donne un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) et l'on désigne par O le milieu de BC .

Un cercle tangent en O à BC coupe la droite AB en D et D' ($BD' < BD$) et la droite AC en E' et E ($CE < CE'$).

1° Comparer CE et BD' .

2° Montrer que $BD \times CE = BO^2$.

3° Montrer que les triangles BDO et COE sont semblables. Marquer clairement sur la figure les angles égaux.

4° Comparer les angles \widehat{DOE} et \widehat{ABC} , puis les triangles DOE et DBO .

5° Que représentent DO et EO pour le triangle ADE ?

6° On trace le cercle de centre O tangent à AB . Indiquer la construction.

7° On fait varier le cercle, donné au début, tangent à BC . Montrer que la droite DE varie en restant tangente à une courbe fixe, que l'on indiquera. (B. E. P. c.)

138. On donne un cercle de centre O , de diamètre AB . Une corde CD pivote autour de P milieu de OB .

1° Sur quelle ligne se déplace le milieu M de CD ?

2° La droite BM coupe en Q la hauteur AH du triangle ACD . Comparer OM et AQ en grandeur et en direction.

3° Établir la similitude des triangles OPM et AOQ . Sur quelle ligne se déplace le point Q .

4° Quelle est la nature du quadrilatère $BDQC$? Montrer que Q est l'orthocentre du triangle ACD .

139. Un triangle ABC est inscrit dans une circonférence de centre O . La bissectrice intérieure de l'angle A coupe la circonférence en P et le côté BC en I . On joint P et C .

1° Prouver qu'il existe dans la figure 2 triangles semblables au triangle PIC . Conclure que $PC^2 = PI \times PA$.

2° Établir la relation : $IA \times PA = AB \times AC$.

3° On donne : $PA = 9$ cm ; $PC = 6$ cm ; $AC = 6$ cm. Construire le triangle ABC , après avoir construit le triangle APC .

4° Calculer AB .

5° La longueur de la bissectrice l_a de l'angle \widehat{BAC} du triangle ABC est donnée par la formule :

$$l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

dans laquelle p désigne le demi-périmètre du triangle. En outre : $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$. Appliquer cette formule au calcul du côté BC . Indiquer une nouvelle manière de construire le triangle ABC . (E. N.)

140. Deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' sont extérieurs. On mène deux diamètres parallèles AB dans le cercle O et $A'B'$ dans le cercle O' ; OA et $O'A'$ sont de même sens.

1° Montrer que les droites AA' et AB' coupent la droite des centres en 2 points fixes, l'une en J et l'autre en I . Que dit-on des 4 points O , O' , I , J ?

2° Montrer que les tangentes communes extérieures aux 2 cercles passent par J et que les tangentes communes intérieures passent par I. En déduire un procédé de construction de ces tangentes.

3° Calculer les segments IO, IO', JO, JO' et IJ en fonction de $OO' = d$ et de R et R'.

141. On donne un triangle ABC. La bissectrice intérieure AD de l'angle A recoupe le cercle circonscrit au triangle en P.

1° a) Démontrer que les triangles ABD et APC sont semblables et vérifier la relation $AP \cdot AD = AB \cdot AC$.

b) Démontrer que les triangles APC et CPD sont semblables et vérifier la relation $PD \cdot PA = PB^2$.

2° On désigne par I le centre du cercle inscrit, par J le centre du cercle exinscrit dans l'angle A. Prouver que B, C, I, J sont 4 points d'un même cercle. Quel est le centre de ce cercle?

3° Démontrer que les triangles ABI et AJC sont semblables et établir la relation $AI \cdot AJ = AB \cdot AC$.

(B. E. P. C.)

142. Dans un cercle de centre O et de rayon $R = 5$ cm, on mène une corde AC, qui mesure 6 cm et le diamètre BD perpendiculaire à cette corde au point E.

1° Démontrer que $AE = EC$;

2° Calculer la somme des angles ABC et ADC;

3° Calculer la longueur des segments de droite BE et DE;

4° Calculer le périmètre du quadrilatère ABCD;

5° Évaluer la longueur FG de la parallèle à AC menée par O et imitée aux droites AD et CD.

(B. E. P. C.)

143. Soient A et B deux points sur une droite (D), $AB = a$, deux segments AP, BQ perpendiculaires à (D) de part et d'autre de (D), et tels que $AP = p$, $BQ = q$. On construit le cercle (O) de diamètre PQ, qui coupe (D) en I et J.

1° Montrer que : $IA = BJ$.

2° Montrer que les triangles IAP et QBI sont semblables, et que : $IA \times IB = pq$.

3° Soit M un point variable de (D). On lui fait correspondre le point N de (D) par la construction suivante : MP recoupe le cercle (O) en C; QC coupe (D) en N. Montrer que : $AM \times BN = pq$.

4° Si le point M vient en A, que peut-on dire du point N? Justifier par le calcul et par les propriétés géométriques de la figure.

(E. N.)

144. On donne un losange ACBD. Sur le côté AG, à partir de A, on prend une longueur AP, telle que $\frac{AP}{AC} = m$, et sur BD, à

partir de B, une longueur BQ, telle que $\frac{BQ}{BD} = m$, m étant compris entre 0 et 1.

1° Quelle est la nature des quadrilatères DPCQ, AQBP?

2° Les droites QP et DA prolongées se rencontrent en un point I.

Calculer le rapport $\frac{ID}{IA}$.

3° On donne à m la valeur $\frac{1}{3}$; le point P est au $\frac{1}{3}$ de AC. Démontrer que IC est perpendiculaire à DC. Quelles sont les médianes du triangle IDC issues des sommets I et C?

4° Lorsque m varie de 0 à 1, indiquer le déplacement du point I. (B. E.)

145. Soit le point P milieu du plus petit des 2 arcs sous-tendus par la corde AB d'un cercle O. Du point P on mène les cordes PC et PD qui coupent la corde AB respectivement en M et N et qui déterminent un angle $\widehat{CPD} = \alpha$. On joint CD.

1° Démontrer que $PM \times CD = PD \times MN$.

2° Démontrer que le quadrilatère CMND est inscriptible.

3° On mène les diagonales de ce quadrilatère; CN coupe la circonférence en E et DM la coupe en F. Montrer que EF est parallèle à AB.

4° Quel est le lieu géométrique du point I milieu de la corde CD lorsque l'angle \widehat{CPD} pivote autour du point P en restant constant? Préciser les limites et les caractères de ce lieu.

146. On donne un triangle ABC rectangle en A, tel que $AB < AC$. Sur chacun des côtés de l'angle droit AB et AC comme diamètres, on construit un cercle. Une droite mobile autour de A coupe le cercle de diamètre AB en M et le cercle de diamètre AC en N.

1° Le cercle de diamètre AB, de centre O, coupe le cercle de diamètre AC, de centre O', en A et H. Montrer que H est sur BC.

2° Comparer les triangles ABC, AOO' et HMN. Montrer que ce dernier reste semblable à lui-même. Donner le rapport de similitude.

3° Quelle est la position de MN pour laquelle l'aire du triangle HMN est maximum? Valeur de cette aire en fonction de $AB = c$ et $AC = b$?

4° Comparer les triangles MAB et NCA.

5° Quelle est la nature du quadrilatère BMNC? Indiquer les particularités de sa variation lorsque MN pivote autour de A. Quelle est la position particulière de MN pour laquelle son aire sera maximum? Valeur de cette aire si $AB = c$ et $AC = b$?

6° Soit F le milieu de OO' et L le milieu de BC; montrer que A, F, L sont alignés.

7° Soit K le milieu de MN. Montrer que le cercle de centre F et de diamètre AL passe par K.

147. Le triangle ABC est tel que l'angle $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Extérieurement à ce triangle, sur les côtés AB et AC, on construit les

triangles équilatéraux ABD et ACE. Les côtés DB et EC se coupent en F, les droites BE et CD se coupent en O et CD coupe AB en I tandis que BE coupe AC en J.

- 1° Démontrer que AD et AE sont en prolongement.
- 2° Déterminer la nature du triangle FDE.
- 3° Indiquer la nature du quadrilatère ABFC.
- 4° Démontrer l'égalité des segments BE et CD
- 5° Calculer la mesure de l'angle \widehat{DOE} .
- 6° Déterminer les triangles semblables au triangle DOE et donner les rapports de similitude correspondants.
- 7° Démontrer que AO est bissectrice de l'angle \widehat{DOE} .
- 8° Établir l'égalité de AI et de AJ.
- 9° En déduire le parallélisme de IJ et de DE.
- 10° Trouver les quadrilatères inscrits de la figure.
- 11° Dans le cas où $OA \perp DE$, quelle est la nature du triangle ABC?
- 12° Si A, O, F sont alignés, quelle est la nature du triangle ABC?



HOMOTHÉTIE

148. Sur un segment de droite AB, on considère un point M (entre A et B); on pose $MA = a$, $MB = b$. D'un même côté de la droite AB, on construit 2 triangles équilatéraux, MAC et MBD.

1° Quel est le lieu géométrique du point C quand M décrit le segment AB? Dans les mêmes conditions, lieu géométrique du point D.

2° Les droites AC et BD se coupent au point S. Quel est le lieu géométrique du point I, milieu de CD quand M décrit le segment AB (on pourra utiliser la nature du quadrilatère MCSD).

3° Démontrer que les triangles MAD et MBC sont égaux. Les droites AD et BC se coupent au point P. Comparer les angles des triangles AMD et PAB. Quelle est la valeur de l'angle APB?

4° Démontrer que les 4 points A, C, P, M sont sur un même cercle; de même, les 4 points B, D, P, M. Calculer, en fonction de a et de b , le rapport des rayons de ces cercles. (B. E. P. C.)

149. On considère un carré ABCD; ses diagonales se coupent en I. D'un point O pris comme centre, sur la diagonale BD, on décrit un cercle de rayon OA qui coupe AB en M, BC en N, CD en Q et AD en P.

1° Démontrer l'égalité des triangles BMC et DPC. Montrer que le triangle IOC est semblable aux précédents. Montrer que MP est diamètre du cercle O et que OC et MP sont perpendiculaires.

2° Si O décrit la diagonale BD, démontrer que C' diamétralement opposé à C dans le cercle O se déplace sur la droite xy parallèle à BD passant par A.

3° Trouver sur MP un point R équidistant de C et de xy .

4° Démontrer que C'C est bissectrice de l'angle \widehat{ACR} .

150. 1° Une droite xy pivote autour d'un point fixe O. Quel est le lieu du symétrique d'un point fixe B par rapport à xy ?

2° On considère 2 points fixes A et B un cercle (C) tangent en A à AB et un cercle (C') tangent en B à AB. Les 2 cercles (C) et (C') sont toujours du même côté de la droite AB. Les centres O et O' de ces cercles sont sur une droite xy . La seconde tangente commune extérieure touche (C) en T et (C') en T'.

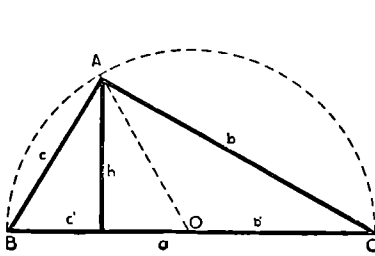
a) Lieu du point T' si le cercle (C) restant fixe, le cercle (C') seul varie.

b) On suppose que les cercles (C) et (C') varient de manière que le rapport de leurs rayons reste constant. Montrer que la droite des centres xy coupe AB en un point fixe I. En déduire les lieux de T et de T'.

c) On suppose que les cercles (C) et (C') varient de manière que la somme de leurs rayons reste constante. Quels sont les lieux de T et de T'?

(E. N.)

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

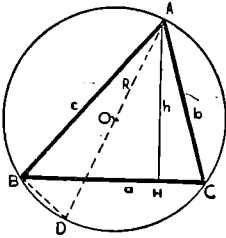


$\hat{A} = 1 \text{ dr.}; AH \perp BC$

$\left. \begin{array}{l} \frac{ABC}{HBA} \\ \frac{ABC}{HAC} \end{array} \right\} \text{ triangles semblables}$

$$\begin{array}{l}
 1^{\circ} \quad b^2 = ab' \\
 2^{\circ} \quad c^2 = ac' \\
 3^{\circ} \quad h^2 = b'c' \\
 4^{\circ} \quad a^2 = b^2 + c^2 \\
 5^{\circ} \quad bc = ah \\
 6^{\circ} \quad \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}
 \end{array}$$

APPLICATIONS DES RELATIONS MÉTRIQUES

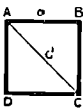


Triangle rectangle

Le produit de 2 côtés d'un triangle est égal au produit de la hauteur relative au 3^e côté par le diamètre du cercle circonscrit

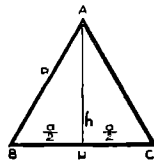
$$bc = 2 Rh.$$

● Carré



$$\left. \begin{array}{l} d = a\sqrt{2} \\ a = \frac{d\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \sqrt{2} = 1,414.$$

● Triangle équilatéral



$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ a = \frac{2h\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \sqrt{3} = 1,732.$$

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

151. On considère un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$, de centre O . On mène la corde AC telle que l'angle $BAC = 30^\circ$.

1° Évaluer en fonction de R les côtés AC et BC , ainsi que la hauteur CH du triangle ABC .

2° On joint le point O au milieu I de AC . Évaluer la surface du quadrilatère $OICH$.

3° On mène en O la perpendiculaire à AB , qui coupe AC en K . Démontrer que $AI \times AK = R^2$. (B. E. P. C.)

152. Par un point M d'une droite (D) extérieure à un cercle (O, R) on mène 2 tangentes à ce cercle, soient MA et MB . Les droites AB et OM se coupent en H ; la droite AB coupe en I la perpendiculaire OK abaissée de O sur la droite (D) .

1° Établir la similitude des triangles OHI et OKM .

2° Si M est variable sur la droite (D) montrer que le produit $OM \times OH$ est constant et que le point I est fixe.

3° En déduire le lieu du point H .

4° On mène le diamètre AA' du cercle O . Démontrer que les droites OM et $A'B$ sont parallèles.

153. On construit un triangle isocèle ABC de base $BC = 6$ cm et de hauteur $AH = 4$ cm. Soit O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

1° Calculer la longueur des côtés égaux AB et AC et du diamètre AA' du cercle circonscrit.

2° On trace le diamètre BB' et la perpendiculaire AL sur CB' . Indiquer la nature du quadrilatère $ALHB$.

3° Soit AK la perpendiculaire à BB' . Montrer que $AK = AL$.

4° Montrer que les 3 points H, K, L sont alignés.

154. Étant donné un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ on trace, une corde CD remplissant 2 conditions :

1° Elle est parallèle au diamètre AB .

2° Elle est égale à la distance OE qui la sépare du centre. On demande :

a) de calculer CD en fonction de R .

b) de prouver que $HI = 4 OH$, H étant la projection de C sur AB et I l'intersection de AB avec la tangente en C .

c) de montrer que $CI = 2R$. (B. E.)

155. 1° Construire un triangle ABC rectangle en A tel que $BC = 70$ mm et $AB = 42$ mm. Calculer le côté AC .

2° Soit un point M de BC tel que $\frac{BM}{BC} = \frac{5}{7}$. Calculer BM et MC .

3° La perpendiculaire à BC élevée en M coupe AC en D . Démon-

trer la similitude des 2 triangles MDC et ABC. Quel est le rapport de similitude? Calculer les segments CD, MD, AD.

4° Montrer que le quadrilatère ABMD est inscriptible dans un cercle et calculer sa surface.

156. On donne un triangle ABC rectangle en A et tel que $BC = 5$ cm et $AB = 3$ cm. On trace la hauteur AH et la médiane AM relatives à l'hypoténuse.

1° Démontrer que $AM = \frac{BC}{2}$.

2° Quels sont, dans la figure, les angles égaux à l'angle \hat{C} ?

3° Quels sont, dans la figure, les angles égaux à l'angle \hat{B} ?

4° Calculer les segments AC, AH, BH, CH et l'aire du triangle ABC.

157. On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$, on trace une corde $AC = \frac{3R}{2}$; son prolongement coupe en K la tangente en B. Soit H la projection de C sur AB et D le point où la perpendiculaire élevée en K sur AK coupe le prolongement de AB.

1° Calculer HB.

2° Établir la relation : $CH \times BK = CA \times CK$.

3° Indiquer, en fonction de R, la valeur commune de ces produits.

4° Calculer CK et BD.

(B. E.)

158. Dans un cercle de centre O, de 5 cm de rayon, on trace une corde $AB = 6$ cm. On mène le diamètre CD perpendiculaire sur cette corde en H. On joint AC et AD. Soient OI et OK, les distances du centre aux cordes AC et AD.

1° Calculer les segments OH, AC et AD.

2° Évaluer IK en grandeur et en direction.

3° Calculer OI et OK.

159. Un triangle ABC est rectangle en A. On mène la hauteur AH relative à l'hypoténuse et on construit les symétriques D et E du point H par rapport à AB et à AC.

1° Démontrer que les 3 points D, A et E sont alignés.

2° Quelle est la nature du quadrilatère BDEC?

3° Montrer que l'hypoténuse BC est tangente au cercle de diamètre DE.

4° Calculer en fonction de $AB = c$ et $AC = b$ l'aire du quadrilatère BDEC et le segment DE.

160. Aux extrémités A et B d'une droite, on élève les perpendiculaires Ax et By sur lesquelles on porte respectivement des longueurs AC et BD telles que $AC \times BD = \frac{AB^2}{4}$.

1° En appelant O le milieu de AB, démontrer que l'on a

$$CD^2 = OC^2 + OD^2.$$

2° Montrer que le triangle ODC est semblable aux triangles AOC et BDO.

3° Trouver le lieu géométrique de la projection I du point O sur CD lorsque les points C et D varient en vérifiant toujours la condition précédente. (B. E.)

161. On donne un cercle de diamètre AB = 2 R. Sur le diamètre CD perpendiculaire à AB on porte OE = $\frac{R}{2}$. La droite AE coupe le cercle en F. On joint BF.

1° Calculer les segments AE, AF, BF.

2° Démontrer que DF est bissectrice de l'angle \widehat{AFB} .

3° La perpendiculaire en B à BF coupe DF en J. Calculer BJ.

4° DF coupe AB en I, calculer AI et IB.

162. On considère un demi-cercle de diamètre AB = 2 R. On mène les tangentes en A, soit Ax et en B, soit By. Une troisième tangente menée en un point I quelconque du demi-cercle coupe Ax en P, By en Q et le prolongement de AB en S.

1° Démontrer que $AP + BQ = PQ$.

2° Montrer que le triangle POQ est rectangle et que le produit $AP \times BQ$ est constant.

3° Si $BQ = \frac{AP}{3}$, calculer AP, BQ, BS, l'aire du quadrilatère ABQP et celle de chacun des triangles ASP et BSQ.

4° Indiquer la construction de la tangente en I pour que $AP = 2 BQ$.

163. La grande base AB d'un trapèze rectangle en A mesure 6 cm, la petite base CD est le $\frac{1}{3}$ de la grande base et la hauteur est moyenne proportionnelle entre les 2 bases.

1° Construire le trapèze.

2° Démontrer la similitude des triangles ADC et BAD.

3° Calculer les diagonales AC et BD ainsi que la surface du trapèze.

164. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et la hauteur h relative à l'hypoténuse.

Condition de possibilité.

Sachant que l'hypoténuse vaut 15 m et l'un des côtés de l'angle droit 9 m, calculer :

1° La hauteur du triangle.

2° Les segments déterminés par la hauteur sur l'hypoténuse.

3° La surface du triangle. (B. E.)

165. Sur la perpendiculaire en A au segment $AB = a$, on porte successivement AI et IC égaux à $\frac{a}{2}$. On mène BI. La perpendiculaire CH à BI coupe le prolongement de BA en K.

1° Établir la relation : $BI \cdot IH = \frac{a^2}{4}$.

2° Comparer les triangles ABI et ACK?

3° Que peut-on dire des quadrilatères AIHK et ABCH?

4° Calculer, en fonction de a , les segments BI, CH, IH et HK.

166. On donne un losange ABCD de côté a . Sur les côtés opposés AB et CD, à partir de A et de C, on porte les points E et F tels que $AE = CF = \frac{a}{3}$.

1° Démontrer que EF passe par O, point de concours des diagonales du losange.

2° La droite EF coupe DA en I et BC en K. Montrer l'égalité des segments IE, EF et FK.

3° Si l'angle \hat{A} du losange mesure 60° , calculer BI.

167. Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AB = 4$ cm et $AC = 3$ cm. On mène la hauteur AH relative à l'hypoténuse BC. Soit un point M variable sur BC et $BM = x$. La parallèle à AH menée par M coupe AB en P; la parallèle à BC menée par P coupe AC en Q.

1° Calculer les segments BC, BH, CH, AH.

2° Établir la similitude des triangles MBP, APQ et ABC. Donner les rapports de similitude. Calculer en fonction de x les segments MP, BP, PA, PQ, AQ.

3° Calculer x pour que $BM = PQ$. Donner, dans ce cas, la valeur de MQ.

168. Soit ABC un triangle isocèle dans lequel la base $BC = 160$ mm et la hauteur $AH = 60$ mm.

1° Calculer les longueurs des côtés AB et AC.

2° On marque sur BC un point D tel que $BD = 35$ mm et sur BA le point E tel que $BE = 56$ mm.

Démontrer que les triangles BAC et BDE sont semblables. Quel est le rapport de similitude? Quelle est la longueur de ED? Démontrer que le quadrilatère EACD est inscriptible.

3° Calculer AD dans le triangle ADH. En déduire que le triangle DAC est rectangle en A. Indiquer alors le centre du cercle passant par E, A, C, D et calculer EC dans le triangle DEC.

(B. E. P. C.)

169. On considère un triangle isocèle ABC de base BC et de hauteur AH ($AH < BC$). Un cercle de centre O pris sur BH, passe par B, coupe AB en M et BC en D.

1° Que peut-on dire des quadrilatères OMAC et AMHD? Établir une relation entre BM, BC, BO et AB.

2° Dans le cas où $BC = 36$ mm, $AH = 24$ mm et $\frac{OB}{OC} = \frac{5}{7}$, calculer AB , OB , OC puis BM et DM .

On mène la hauteur CK issue de C dans le triangle ABC . Calculer cette hauteur.

(B. E. P. C.)

170. On prend un point A sur le côté Ox d'un angle $\widehat{xOy} = 45^\circ$ et tel que $OA = a$. La perpendiculaire élevée en A à Ox coupe Oy en B . On prend ensuite sur Ox le point C tel que $OC = 3a$. De C on abaisse la perpendiculaire CD sur Oy .

1° Donner la nature du triangle OAB et la mesure, en fonction de a , des segments AB et OB .

2° Comparer les triangles OAB et ODC . Évaluer la longueur des segments OD et CD .

3° Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est inscritible dans un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

4° Calculer le segment AD .

171. Le triangle ABC offre les particularités suivantes : l'angle \hat{B} est double de l'angle \hat{C} et le pied D de la hauteur issue de A est entre B et C . On appelle E un point situé sur le prolongement de AB au-delà de B , tel que $BE = BD$, et F l'intersection de ED avec AC .

1° Montrer que les triangles EBD et DFC sont isocèles et semblables.

2° Montrer que : $DF \times DE = BD \times DC$. Que peut-on dire du quadrilatère $BECF$?

3° Comparer les triangles AEF et ABC . Que dire du triangle ADF ?

4° Calculer tous les angles et segments de la figure quand elle a en plus la particularité nouvelle : le triangle ADE est isocèle, et connaissant $AB = a$.

(B. E. P. C.)

172. Sur une droite xy on porte les segments successifs $AB = 5$ cm et $BC = 12$ cm. D'un même côté de xy , en A et en C , on élève les perpendiculaires à AC sur lesquelles on prend $AP = 4$ cm, $CM = 15$ cm.

1° Comparer les triangles ABP et CMB .

2° Que peut-on dire du triangle BMP ? Calculer son aire.

3° On projette le point B en H sur MP . Que peut-on dire des quadrilatères $ABHP$ et $BCMH$?

4° Donner la nature du triangle ACH .

173. On donne un triangle ABC rectangle en A , $AC = b$, $AB = c$ ($AB < AC$). On mène la médiane AM et la hauteur AH . La perpendiculaire abaissée de B sur la médiane AM coupe AH en D , AM en E et AC en F .

1° Montrer que le segment MD est perpendiculaire à AB .

2° Calculer, en fonction de b et de c , les segments BC , AH , BD , BE , DE , AF , FC , MD .

3° Évaluer, en fonction de b et de c , l'aire du trapèze $ACMD$.
Application numérique : $b = 160$ mm et $c = 120$ mm.

174. On donne un cercle de centre O , de diamètre $AB = 2$ cm. On joint le point A à un point quelconque M , variable sur le cercle, et on prolonge AM d'une longueur $MP = 2 AM$.

1° La perpendiculaire en P à AP rencontre la droite AB en H . Montrer que PH est parallèle à MB . Calculer BH . En conclure que le point H est fixe lorsque M décrit le cercle donné.

2° Montrer que le lieu géométrique du point P lorsque M décrit le cercle est un cercle. Où est situé son centre? Quel est son rayon? Quelle position occupe-t-il par rapport au cercle initial?

3° On suppose maintenant que $MB = 1$ cm. Calculer PH . Si P' est la projection de P sur BH , calculer $P'H$ et PP' .

(B. E. P. C.)

175. Un triangle ABC a pour côtés évalués en mètres :

$$AC = 160; \quad BC = 120; \quad AB = 56.$$

1° Le construire à l'échelle $\frac{3}{4000}$. Dites pourquoi cette construction est possible.

2° Du sommet B , mener une droite BD rencontrant AC au point D situé entre A et C et telle que $\widehat{CBD} = \widehat{BAC}$. Dire comment on effectue cette construction. Étudier les triangles CDB et ABC .

3° Calculer CD et BD .

4° Étudier le triangle ABD . Que dire de l'angle \widehat{ABD} ?

5° Mener la hauteur BH du triangle ABC ; la calculer, ainsi que l'aire de ce triangle.

(B. E.)

176. Étant donné un parallélogramme $ABCD$, soient M et N les milieux respectifs des côtés AB et CD .

1° Démontrer le parallélisme de AM et de CN .

2° Quelles sont les conditions que doit remplir le parallélogramme $ABCD$ pour que CM soit la bissectrice de l'angle \widehat{ACB} ?

3° Construire le parallélogramme qui répond aux conditions de la question précédente et tel que $AB = 6$ cm et $CM = 4$ cm.

4° Dans ce nouveau parallélogramme, calculer les segments : AC , BC et BD .

177. On donne 3 points A , B et C sur une droite xy . Par A on mène la tangente AT au cercle de diamètre BC , de centre O . On trace la perpendiculaire TH à AC et on prolonge TH en T' sur le cercle O . On pose $OA = a$ et $BC = 2R$.

1° Établir la relation : $OA \times OH = R^2$. Calculer AT en fonction de a et de R .

2° Démontrer que BT est bissectrice intérieure et CT bissectrice extérieure de l'angle \widehat{ATH} .

3° La parallèle à CT menée par B coupe TT' en D et AT en E. Montrer que $BD = BE$ et prouver que $\frac{AC}{AB} = \frac{HC}{HB}$.

178. Un point M décrit un cercle de diamètre AB de centre O. Par un point D du diamètre AB on élève la perpendiculaire D α à ce diamètre. D α coupe le cercle en K. On mène AM et BM qui coupent la perpendiculaire D α respectivement en I et J.

1° Que peut-on dire des triangles DAI, MAB et DJB?

En déduire les relations $DA \cdot AB = AM \cdot AI$

$$DA \cdot DB = DI \cdot DJ.$$

2° Que deviennent les relations précédentes lorsque M est en K? Quels théorèmes connus se trouvent vérifiés?

3° AJ coupe BI en N. Démontrer que le quadrilatère MINJ est inscriptible dans un cercle. Sur quelle ligne se déplace le point N?

179. Un triangle ABC est rectangle en A. On joint les milieux A', B', C', des côtés BC, AC et AB.

1° Montrer que les 2 triangles A'B'C' et ABC sont semblables et donner leur rapport de similitude.

2° Calculer B'C' en fonction de $AB = c$ et $AC = b$ puis les hauteurs A'M et AN des 2 triangles A'B'C' et AB'C'.

3° Donner la nature puis l'aire du quadrilatère AMA'N.

180. Un triangle ABC rectangle en A a pour côtés de l'angle droit $AB = 4$ cm et $AC = 3$ cm. Les cercles de diamètre AB (centre I) et AC (centre J) se coupent en A et D.

1° Montrer que les points B, D et C sont en ligne droite.

2° Évaluer la longueur des segments BC, AD, BD, CD, IJ.

3° La tangente menée par B au cercle de diamètre AB coupe AD en E. Calculer BE et AE.

181. On donne un triangle rectangle en A, l'angle B vaut 60° et $BC = a$.

1° Quel doit être, en fonction de a , le rayon d'un cercle de centre C pour que ce cercle soit tangent à AB?

2° Montrer que AC est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle O de diamètre BC.

a) d'après la figure géométrique.

b) d'après la valeur trouvée pour AC.

3° On trace en C la tangente au cercle O circonscrit au triangle ABC. Soit D le point de rencontre de cette tangente avec AB. Démontrer que les triangles ABC et ADC sont semblables et indiquer leur rapport de similitude. En déduire les longueurs de AD et de CD.

(B. E. P. c.)

182. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R, une tangente fixe Ax en un point A du cercle et un point B sur Ax, tel que $AB = d$.

1° Déterminer sur (C) tous les points tels qu'en joignant l'un d'eux aux points A et B, le triangle obtenu soit rectangle en A, en B ou au sommet situé sur le cercle.

2° Indiquer, suivant les valeurs de d , le nombre de solutions.

3° Dans le cas le plus favorable, on a 4 solutions. Montrer que les triangles obtenus forment deux groupes de triangles semblables.

4° Calculer les côtés de ces triangles en fonction de R et de d .
(B. E.)

183. On donne un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 8$ cm. Soit OC le rayon perpendiculaire à AB. Une corde variable issue de A coupe OC en I, entre O et C, et le cercle en M. Soient H la projection de M sur AB et N la projection de O sur AM.

1° Démontrer que le produit $AI \times AM$ est constant.

2° Les droites OM et BN se coupent en K. Démontrer que OK est constant. Sur quelle ligne se déplace K lorsque I décrit OC?

3° Calculer AI, AM, AH, MB, MH en fonction de $OI = 3$ cm.

4° Déterminer la valeur de l'angle \widehat{MAB} lorsque $MI = MB$.

184. Un trapèze ABCD rectangle en C et D est tel que la diagonale AC forme avec le côté oblique $AB = a$ un triangle isocèle et rectangle en A. Le sommet C se projette en K sur la diagonale BD. Les deux diagonales se coupent en O.

1° Calculer, en fonction de a , les longueurs de AC, BC, AD, BD et donner le périmètre du trapèze.

2° Comparer les triangles OAD et OCB et calculer OA, OC, OD et OB.

3° Comparer les triangles COK et BOA. Calculer DK, BK et OK.

185. Sur une droite xy on porte les segments $AC = CB = a$. Sur la perpendiculaire à AB élevée en C, on porte $CM = \frac{a}{2}$.

On trace le demi-cercle de diamètre AB et la droite AM coupe ce demi-cercle en D. Le point D se projette en H sur AB. La bissectrice de l'angle \widehat{ADB} coupe AB en E.

1° Démontrer la similitude des triangles ACM, ADB et AHD.

2° Démontrer les relations :

$$AD \cdot AM = 2a^2; \quad DB \cdot AM = a^2; \quad DI = \frac{AH}{2}.$$

3° Calculer les segments : AM, AD, BD, AH, HB, DI, AE et BE.

186. On donne un triangle ABC rectangle en A et tel que $AB = 2AC$. Le demi-cercle de diamètre AB coupe BC en D.

On mène la corde BE de manière que BD soit bissectrice de l'angle \widehat{ABE} . La corde AE coupe BC en F. On joint AD.

- 1° Indiquer la nature du triangle ACF.
- 2° Démontrer la similitude des triangles ABC, DAC, EBF et établir les rapports de similitude.
- 3° Évaluer le périmètre de ces triangles en fonction de $AB = 2R$.

187. On donne un demi-cercle O, de diamètre $AB = 2R$ et la tangente Ax au point A. D'un point quelconque P pris sur Ax on mène la deuxième tangente au cercle soit PM

- 1° Démontrer que PO est bissectrice de l'angle \widehat{AOM}
Démontrer que BM est parallèle à OP.
- 2° Au point O on mène la perpendiculaire à AB, qui coupe BM ou son prolongement en N.
- a) Démontrer que le quadrilatère OBNP est un parallélogramme.
- b) Démontrer que le quadrilatère OMNP est un trapèze isocèle.

3° On donne $AP = \frac{4}{3}R$; calculer en fonction de R, les segments BN, AM et BM (B. E. P. C.)

188. Les côtés d'un trapèze ABDC ont les dimensions suivantes : grande base $AB = 130$ cm; petite base $CD = 33$ cm; côté $AC = 65$ cm; côté $BD = 72$ cm. On mène DE parallèle à AC.

- 1° Construire le trapèze.
- 2° Donner le caractère du triangle DEB.
- 3° Calculer la hauteur DH et la surface du trapèze
- 4° Par un point M de AC tel que $\frac{MA}{MC} = \frac{3}{2}$ on mène une parallèle au côté AB. Cette parallèle coupe BD en N et DE en P. Calculer MN. Évaluer la surface du trapèze ABNM

189. On donne un demi-cercle de centre O, et de diamètre $BC = 2R$. On prend un point P sur le rayon OB et l'on décrit le cercle de centre B, de rayon BP, qui coupe le demi-cercle précédent en A. On trace OA, qui recoupe le cercle de centre B en D.

- 1° Démontrer que les triangles OBA et ABD sont semblables et en déduire que BP est la moyenne proportionnelle entre OB et AD.
- 2° Quand P décrit le segment BO, sur quelle ligne se déplace le milieu K de AD? La limiter.
- 3° En utilisant les résultats de la 1^{re} question, calculer en fonction de R la valeur non nulle qu'il faut donner à BP pour que AD soit la moitié de BP. Dans ce cas particulier, calculer la distance de B au milieu K de AD et l'aire du triangle OBA.
- 4° En utilisant le lieu trouvé au 2°, construire le point P pour lequel les segments OD, DK et KA sont égaux.

(B. E. P. C.)

190. On inscrit un triangle ABC dans un cercle de rayon R
On mène la hauteur AH et le diamètre AM.

1° Démontrer que les triangles ABM et AHC sont semblables et établir la relation : $AB \times AC = 2R \times AH$.

2° On donne : $2R = 130$ cm; $AB = 120$ cm; $AC = 78$ cm (les 2 cordes AB et AC sont de part et d'autre du diamètre AM).

Calculer AH, BH, CH, BC.

3° Il existe un second triangle inscrit dans le cercle et dont les côtés AB et AC' valent respectivement 120 cm et 78 cm (les cordes AB et AC' étant, dans ce cas, du même côté de AM). Si AH' est la hauteur de ce deuxième triangle, calculer AH' et BC'.

4° Calculer l'aire du quadrilatère ACBC'. (B. E.)

191. Deux cercles concentriques, de centre O ont pour rayons respectifs $R = 6$ cm et $r = 4$ cm. On mène au cercle intérieur une tangente variable qui coupe le cercle extérieur en B et C. Les tangentes au grand cercle menées par B et C se coupent en P.

1° Calculer, en fonction de R et r, les segments BC et PO.

2° Quel est le lieu géométrique du point P.

3° PO coupe le grand cercle en D et le petit cercle en A. Calculer la longueur de la tangente MN en D au grand cercle, M sur BP et N sur PC.

4° Soit DE le diamètre du grand cercle passant par P. Montrer que $\frac{PD}{PE} = \frac{AD}{AE}$.

192. Deux cercles, l'un de centre O et de rayon $R = 9$ cm, l'autre de centre O' et de rayon $R' = 4$ cm sont tangents extérieurement en M. On mène la tangente commune extérieure AB, A sur le cercle O, B sur le cercle O' et la tangente commune intérieure MT qui coupe AB en N.

1° Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.

2° AM coupe le cercle O' en C et BM coupe le cercle O en D. Montrer que BC et AD sont les diamètres respectifs des cercles O et O'. Indiquer la nature du quadrilatère ABCD.

3° Démontrer que le segment AB de la tangente commune extérieure est moyenne proportionnelle entre les diamètres des 2 cercles. Calculer sa valeur. Calculer le périmètre et la surface du quadrilatère ABCD.

193. Deux cercles de centres O et O', de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. Une tangente commune extérieure touche le cercle O en B, le cercle O' en C et coupe la droite des centres en S. La tangente commune intérieure coupe la tangente commune extérieure en M.

1° Comparer les triangles ABC et MOO'.

2° OM et AB se coupent en P, O'M et AC se coupent en Q. Nature du quadrilatère APMQ? Démontrer que PQ est parallèle à BC.

- 3° Calculer les segments PQ, BC et AH hauteur du triangle ABC.
- 4° Évaluer le rapport $\frac{SO'}{SO}$ et calculer les segments SO' et SO.

194. Deux cercles l'un de centre O et de rayon $R = 4$ cm, l'autre de centre O' et de rayon $R' = 1$ cm, sont tangents extérieurement en A. Une tangente commune extérieure touche le cercle O en M, le cercle O' en N et coupe la droite des centres en S. On mène les diamètres MP et NQ.

- 1° Calculer MN et l'aire du quadrilatère OO'NM.
- 2° Calculer SO' et SN.
- 3° Montrer que les points P, A, N sont alignés.
- 4° Calculer PN, PA, AN.
- 5° Montrer que les points P, Q, S sont alignés.

195. On appelle C et D les points qui partagent le segment $AB = 5$ cm en segments additifs (point C) et en segments soustractifs (point D) dans le rapport $\frac{1}{3}$.

- 1° Calculer les segments CA, CB, DA, DB et DC.
- 2° Les cercles de diamètre AB (centre O) et CD (centre O') se coupent en M et N. Calculer la distance OO' de leurs centres. Montrer que O'M est tangente en M au cercle O et que OM est tangente au cercle O'. Calculer la longueur de la corde commune MN.
- 3° Une sécante variable pivote autour de N et coupe les cercles O et O' en P et P'. Démontrer que le triangle MPP' reste semblable à lui-même. Montrer que MP est perpendiculaire à MP'.

196. Deux cercles sécants O et O' et de rayon R et R' se coupent en A et B, l'angle OAO' est droit et OO' coupe AB en H.

- 1° Calculer en fonction de R et de R' les segments OO', OH, O'H, AB.
- 2° On mène la médiane AM du triangle AOO' et la sécante PQ passant par A et perpendiculaire à AM. Comparer AP et AQ.
- 3° Démontrer que $PQ = 2 AB$.
- 4° On abaisse de O et de O' les perpendiculaires OC et OD sur PQ. Par O', on mène la parallèle à PQ qui coupe OC ou son prolongement en E. Démontrer la similitude des 2 triangles AMH et O'OE. Calculer O'E et OE en fonction de R et de R'.

197. Deux cercles l'un de centre O et de rayon R, l'autre de centre O' et de rayon R' ($R > R'$) sont extérieurs.

- 1° Démontrer que les 2 tangentes communes extérieures AB et A'B' se coupent en I sur la droite des centres. Calculer, en fonction de R, R' et OO', les distances IO et IO'.
- 2° Démontrer que les 2 tangentes communes intérieures CD et C'D' se coupent en J sur la droite des centres. Calculer, en fonction de R, R' et OO', les distances JO et JO'.
- 3° Que peut-on dire des 4 points O, O', J, I?
- 4° Si $OO' = 15$, $R = 11$, $R' = 2$, calculer AB, CD puis l'aire du quadrilatère ABOO'.

198. Deux cercles, l'un de centre O et de rayon 3 cm, l'autre de centre O' et de rayon 4 cm et tels que $OO' = 5$ cm, se coupent en A et B .

1° Montrer que le quadrilatère $AOBO'$ est inscriptible. Calculer AB et l'aire du quadrilatère.

2° On mène par A une sécante variable qui coupe le cercle O en C et le cercle O' en D . Démontrer que le triangle CBD reste semblable à lui-même lorsque CD pivote autour de A .

3° Sur quelle ligne se déplace le point H , pied de la hauteur. BH du triangle BCD ?

4° Construire le triangle BCD tel que $BH = 4$ cm. Calculer ses côtés et son aire.

199. On considère un angle droit xOy , un point fixe A sur Ox tel que $OA = a$ et un point mobile B qui décrit la demi-droite Oy . La perpendiculaire en A à AB coupe le prolongement de Oy en C .

1° Établir que les milieux I et J , de AB et AC se déplacent sur une droite fixe et que l'angle IOJ est constant.

2° Dans les triangles OAB et OAC , on mène les hauteurs issues de O dont les pieds respectifs sont H et K .

Lieux géométriques de H et de K . Montrer que HK passe par un point fixe.

3° Évaluer AB , AC , OC , OH et OK dans le cas particulier où $OB = \frac{a}{2}$. Inversement, calculer OB pour que l'on ait $\frac{OK}{OH} = \frac{3}{2}$.
(B. E. P. C.)

200. On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A et D et dont les diagonales AC et BD se coupent perpendiculairement en I . Soient M , N , P , Q les milieux respectifs des côtés AD , BC , AB et CD . On donne la petite base $AB = a$ et la grande base $CD = b$.

1° Soient E le milieu de BD et F le milieu de AC . Démontrer que les 4 points M , E , F et N sont alignés. Calculer MN et EF .

2° Démontrer que I est sur PQ et calculer le segment PQ .

3° Nature du quadrilatère $MPNQ$.

4° Calculer la hauteur et les diagonales du trapèze donné.

201. Dans un trapèze $ABCD$, on donne la grande base $DC = 20$ m et le côté oblique $BC = 12$ m. On sait de plus que la diagonale BD est perpendiculaire au côté BC et que $AB = AD$.

1° Construire le trapèze (échelle de 1 cm pour 4 m) et raisonner.
2° Montrer que la hauteur AI du triangle ABD est parallèle à BC , et évaluer AI . Calculer la diagonale BD , la petite base AB et la hauteur du trapèze $ABCD$.

3° Calculer la surface du trapèze $ABCI$.

4° On prolonge les côtés AD et BC du trapèze jusqu'à leur rencontre en S . Calculer SA , SB et la hauteur issue de S dans le triangle SDC .
(B. E.)

202. 1° **Indiquer la construction** d'un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) dont le côté BC mesure 6 cm et la hauteur AH relative à BC mesure 4 cm.

2° Calculer les 2 côtés égaux AB et AC.

3° Indiquer la construction du cercle O circonscrit à ce triangle. On mène le diamètre CC' . On joint BC' . On projette A sur BC' en K et sur CC' en L. Comparer les triangles AKB et ALC.

4° Établir la similitude des triangles AKL et ABC. Calculer KL.

5° Montrer que KH passe par L.

203. 1° **Construire 2 cercles** de centres O et O' sachant que la droite des centres coupe ces cercles respectivement en A et B d'une part, A' et B' d'autre part et la corde commune MN en H.

Les points A et A' sont du même côté du point H et l'on donne $MN = 48$ mm, $AH = 72$ mm, $A'H = 48$ mm.

2° Calculer HB, HB', R et R', rayons des cercles de centres O et O'.

3° Calculer HO, HO', OO'.

4° Démontrer la similitude des triangles HOM et HO'M et en déduire la valeur de la somme des angles HOM et HO'M.

(B. E. P. C.)

204. Dans un cercle de centre O et de rayon R, on trace deux diamètres perpendiculaires AB et CD.

Par le point C, on mène une sécante qui coupe le rayon OA en M et le cercle en N; on trace la tangente au cercle en N. Soit P le point d'intersection de la tangente en N avec la perpendiculaire au diamètre AB en M.

1° Démontrer que le quadrilatère OMNP est inscriptible dans un cercle.

2° Démontrer que OP est parallèle à CM et préciser la nature du quadrilatère OPMC.

3° Trouver le lieu du point P quand M décrit le segment OA.

4° Dans le cas particulier où M est le milieu de OA, calculer CM, puis CN.

(B. E. P. C.)

205. Un carré ABCD, dont les diagonales AC et BD se coupent en O, a pour côté a . Sur les côtés BC et CD respectivement, à partir de B et de C, on porte les segments égaux $BM = CN$. On joint AM et BN qui se coupent en P.

1° Démontrer la relation $AB \times BM = AM \times BP$.

2° Montrer que le quadrilatère APND est inscriptible. Quelle ligne décrit le centre I du cercle circonscrit à ce quadrilatère quand M et N décrivent respectivement BC et CD? Donner les limites du rayon de ce cercle.

3° On donne au rayon du cercle circonscrit au quadrilatère précédent une valeur r ; expliquer dans ce cas la construction des points M et N.

206. Par le point A on mène une tangente xx' au cercle de diamètre $AB = 2R$ et de centre O. Une sécante variable issue

de B coupe le cercle en C et la tangente ax' en M. Soit D le symétrique de A par rapport à BM.

1° Comparer les triangles ABC et MAC.

2° Étudier la nature du triangle BAD. En déduire la ligne sur laquelle se déplace le point D lorsque M décrit ax' .

3° Que peut-on dire du quadrilatère ABDM?

4° Si $AM = \frac{AB}{2}$, calculer BM, AC et AD en fonction de R.

207. Soit un rectangle ABCD tel que $AB = 15$ cm, $BC = 9$ cm. On marque le point M sur le côté AD, tel que $AM = 4$ cm. La perpendiculaire abaissée du point D sur la droite MC coupe cette droite en H et la droite AB en E.

1° Montrer que les triangles DMC et AED sont semblables. En déduire la mesure du segment AE.

2° Calculer les segments ME et EC. Quelle est la nature du triangle MEC?

3° Montrer que les quadrilatères MAEH et HEBC sont inscriptibles et indiquer le centre de chacun des cercles circonscrits.

4° Le rectangle ABCD restant fixe, on imagine que M décrive le segment AD; comment se déplace le point H?

(B. E. P. C.)

208. Les côtés de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en A mesurent 12 cm et 5 cm. On mène la hauteur AH, la bissectrice de l'angle AHB coupe le côté AB en E et la bissectrice de l'angle AHC coupe le côté AC en F.

1° Calculer l'hypoténuse BC, la hauteur AH, les segments BH et HC, puis l'aire du triangle.

2° Que peut-on dire du quadrilatère AEHF? En déduire la relation $AB \cdot HF = AC \cdot HE$.

3° Démontrer que le triangle AEF est isocèle et calculer les longueurs de ses côtés.

209. On donne un cercle fixe de centre O, de rayon $R = 6$ cm et un point fixe A sur ce cercle. Un angle droit BAC pivote autour de A, B et C restant sur le cercle.

1° Établir une relation entre les cordes AB et AC. Montrer que BC passe par un point fixe.

2° On mène CM, médiane relative à AB. Comparer les segments OM et AC. Quel est le lieu géométrique de M?

3° Soit D le point où CM coupe OA, calculer OD.

4° Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse a 12 cm et une médiane 7 cm. La construction est-elle toujours possible avec une longueur quelconque donnée à la médiane, avec 6 cm par exemple?

210. Soit un cercle de centre O, de rayon R, et un point P tel que : $OP = 3R$.

1° Déterminer un diamètre MN de façon que le triangle PMN soit rectangle en M.

2° Calculer les côtés de ce triangle en fonction de R , ainsi que sa surface.

3° PN recoupe le cercle en K . Calculer PK .

4° Le diamètre MN tourne autour de O ; quel est le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de P sur MN ? En déduire la position de MN pour laquelle la surface du triangle PNM est maximum. (B. E. P. c.)

211. On donne un triangle ABC rectangle en A et tel que $AB = 18$ cm, $AC = 24$ cm. La médiatrice de l'hypoténuse BC coupe AC en D et AB en E (M est le milieu de BC).

1° Calculer l'hypoténuse BC .

2° Montrer que les triangles MDC , ADE , MBE , sont semblables au triangle ABC . Calculer les côtés de ces triangles.

3° Montrer que le quadrilatère $AECM$ est inscritible dans un cercle. Calculer le rayon de ce cercle.

212. On donne un triangle ABC , rectangle en A , dont les côtés AB et AC ont respectivement pour longueurs 3 cm et 4 cm; on trace le cercle de centre O tangent en B à l'hypoténuse et passant par A , puis un second cercle de centre O' tangent en C à l'hypoténuse et passant par A .

1° Faire la figure et indiquer en la justifiant la construction des points O et O' .

2° Démontrer que les points A , O et O' sont alignés. En déduire que les cercles sont tangents en A .

3° Montrer que la médiane AM du triangle ABC (M étant le milieu de l'hypoténuse BC) est également tangente aux 2 cercles.

4° Montrer que : $OB \times O'C = AM^2$, et calculer la valeur numérique de ce produit en prenant 10 cm pour unité de longueur. (B. E.)

213. On donne un trapèze rectangle $ABCD$; les angles A et D sont droits et l'on a $AB = 3$ cm, $AD = 4$ cm, $DC = 5$ cm.

1° Calculer BC .

2° Montrer que le triangle BDC est isocèle.

3° Soient H le pied de la perpendiculaire menée de B sur DC et I le milieu de BC . Montrer que les 5 points A , B , I , H , D sont sur un même cercle.

4° Montrer que les 2 triangles AID et BDC sont semblables.

5° La droite AI rencontre BH en K . Montrer que AI est la bissectrice de l'angle \widehat{BAH} et calculer KB et KH . (B. E. P. c.)

214. On prend un point M sur le côté AB d'un carré $ABCD$. On joint MC . La perpendiculaire élevée en C à MC coupe AD en N .

1° Donner la nature du triangle CMN .

2° Si M se déplace sur AB , montrer que l'aire du quadrilatère $AMCN$ est constante.

3° Sur quelle ligne se déplace le centre O du cercle circonscrit au triangle CMN lorsque M se déplace sur AB ?

4° Calculer le rayon du cercle circonscrit au triangle CMN si

$$AB = 4 \text{ cm} \quad \text{et si} \quad AM = \frac{AB}{4}.$$

215. On considère un cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$. Un point M décrit le cercle O. Le cercle de centre M et de rayon variable MA coupe le cercle O en I. On mène AC, diamètre du cercle de centre M.

1° Démontrer que le triangle BAC est isocèle et que le côté BC passe par I. Sur quelle ligne se déplace le point C lorsque M parcourt le cercle O?

2° Démontrer la similitude des triangles OAM et MIC. En déduire une relation entre AM, AO et IC.

3° Comment construire le point M pour que $CI = \frac{AM}{2}$?

Dans ce cas, donner en fonction de R les longueurs AI et IB.

216. On donne un triangle ABC rectangle en A. La hauteur AH prolongée coupe en D la parallèle à AB menée par C.

1° Établir la relation $AC^2 = AB \cdot CD$.

2° On trace le cercle de diamètre AC. La tangente à ce cercle menée par H coupe AB en E et CD en F. Montrer que $HE = \frac{AB}{2}$

et que $HF = \frac{CD}{2}$. En déduire que $AC^2 = 4 HE \cdot HF$.

3° On joint BD. On prolonge DC du côté de C de $CG = AB$. Quelle est la nature du triangle ADG? En déduire la construction du trapèze ABDC connaissant la somme des bases et la hauteur.

217. Deux droites perpendiculaires $x'x$ et yy' se coupent en I. Sur Ix , puis sur Ix' , Iy , Iy' on porte respectivement $IA = 4 \text{ cm}$, $IA' = 9 \text{ cm}$, $IB = 7,2 \text{ cm}$ et $IB' = 5 \text{ cm}$.

1° Montrer que les triangles IAB et $IA'B'$ sont semblables. Donner leur rapport de similitude et indiquer leurs angles égaux.

2° Les médiatrices de AA' et de BB' se coupent en O. Calculer les distances de O à AA' et à BB' puis les distances de O aux 4 points A, A', B et B'. Que peut-on dire du quadrilatère $ABA'B'$?

3° Soit M le milieu de AB. Montrer que IM est perpendiculaire à $A'B'$.

218. 1° Construire un triangle isocèle, ABC, dont la base BC mesure 6 cm et dont la hauteur AH mesure 4 cm. Construire le cercle circonscrit à ce triangle. On laissera sur le dessin les lignes ayant servi aux constructions.

2° Soit A' le point diamétralement opposé au point A dans le cercle tracé. Calculer le diamètre AA' ainsi que la longueur de la corde BC' , C' étant le point où la parallèle By à la hauteur AH recoupe le cercle.

3° On projette le point A en E sur By et en F sur CC' . Étudier

les triangles ABE et ACF; comparer les longueurs AE et AF.

4° Étudier les triangles C'AE et C'AF; comparer les longueurs C'E et C'F. (B. E. P. C.)

219. On donne un cercle de diamètre AB = 2 R, de centre O et le diamètre CD perpendiculaire à AB. Sur OC on porte OE = 2 R et sur OD on porte OF = $\frac{R}{2}$. On joint AE qui coupe le cercle en G et AF qui coupe le cercle en I. On mène BG et BI.

1° Calculer les segments AE, AG, BG puis AF, AI et BI.

2° Montrer que le quadrilatère AGBI est un rectangle.

3° Démontrer que GD coupe AB en K est bissectrice de \widehat{AGB} et montrer que $\frac{AK}{BK} = \frac{1}{2}$.

220. Soit ABC un triangle rectangle en A. On mène la hauteur AH et on trace le cercle de centre A et de rayon AH. De B et de C, on mène les tangentes BD et CE à ce cercle.

1° Montrer que BD et CE sont parallèles.

2° Montrer que $BD \times CE = \frac{DE^2}{4}$.

3° HD coupe AB en M et HE coupe AC en N. Montrer que MN et AH sont égales et se coupent en leur milieu.

4° Calculer la surface du triangle DHE sachant que AB = 3 cm et AC = 4 cm. (B. E.)

221. On donne un triangle ABC rectangle en A, tel que AC = b, AB = c, avec b > c. La bissectrice intérieure de \widehat{BAC} coupe BC en D. La parallèle à AD menée par B coupe CA en E.

1° Démontrer que le triangle ABE est isocèle. Calculer BE, AD, BD et CD puis l'aire du quadrilatère ADBE.

2° Sur AC on porte AF = AB et on trace la parallèle à BF passant par A, cette parallèle coupe CB en D'. Montrer que AD' est la bissectrice extérieure de \widehat{A} . Calculer BF, AD', D'B et D'C.

222. Un point M se déplace sur un segment AB de milieu O. D'un même côté de AB, on construit les triangles rectangles isocèles ARM ayant AM pour hypoténuse et BSM ayant BM pour hypoténuse.

1° Montrer que, lorsque M parcourt AB, R est situé sur un segment de droite fixe, S sur un autre segment de droite fixe, les 2 segments ayant une extrémité commune P.

2° Montrer que PM passe par le milieu de RS. Sur quelle ligne fixe se trouve le centre du cercle circonscrit au triangle RMS? Que peut-on dire du triangle ORS?

3° Montrer que l'orthocentre de chacun des triangles PAM et PBM est équidistant de A et de B.

4° On pose AB = a et on suppose que $AM = \frac{AB}{3}$. Calculer en fonction de a la hauteur OK dans le triangle POM. Application numérique : a = 18 cm. (E. N.)

223. Les côtés d'un triangle ABC sont proportionnels aux nombres 3, 4, 5.

1° Démontrer que si $3r$, $4r$ et $5r$ représentent les longueurs de ses côtés, le triangle est rectangle et x représente le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

2° A une même distance d de chaque côté, et à l'extérieur du triangle, on mène des parallèles aux côtés de manière à former un deuxième triangle $A'B'C'$ (côtés parallèles à ceux du précédent et de même sens). Démontrer que $(r + d)$ représente le rayon du cercle inscrit dans le deuxième triangle $A'B'C'$.

3° On donne d et la surface S de la portion comprise entre les 2 triangles. Calculer les côtés de chacun des triangles. (B. E.)

224. On donne 2 cercles concentriques de centre O et de rayon R et r . Par un point fixe P pris sur le cercle intérieur, on mène dans ce cercle la corde PA , puis, dans le cercle extérieur, la corde BPC perpendiculaire sur PA et qui coupe en D le petit cercle.

1° Montrer que les milieux de BC et de PD sont confondus en un point E . Lieu géométrique de E lorsque A varie.

2° Montrer que le point de concours des médianes du triangle APD est confondu avec le point de concours des médianes du triangle ABC et qu'il est fixe.

3° L étant le milieu de OA , M le milieu de AC , démontrer que LM a une longueur constante.

4° Si l'on prolonge PM d'une longueur MS égale à PM , montrer que S se trouve sur le grand cercle.

5° On pose : $BP = a$, $PE = b$, $OE = c$; calculer en fonction de a , b , c les longueurs : PA , PC , R^2 , r^2 .

En déduire que l'expression : $PA^2 + PB^2 + PC^2$ est constante et égale à $2(R^2 + r^2)$. (E. N.)

225. A l'extrémité B du diamètre $AB = 2R$ d'un cercle de centre O , on élève la perpendiculaire Bx . Une sécante issue de A coupe le cercle en C et Bx en D . La droite OC coupe en O' la perpendiculaire élevée en D à Bx .

1° Démontrer que le produit $AC \cdot AD$ est constant.

2° Comparer les triangles OAC et $O'CD$ et si $BD = \frac{3R}{2}$, calculer AD , AC , CD , $O'C$, $O'D$ en fonction de R .

3° En déduire que les cercles O de diamètre AB , et O' de rayon $O'D$ sont tangents extérieurement.

226. Soit un carré ABCD de côté a . Sur le côté AB comme diamètre on décrit un cercle de centre O . De C , on mène à ce cercle la tangente autre que CB ; soit T son point de contact. Soit enfin E l'intersection de AD et OT .

1° Comparer ET et ED . Valeur de l'angle OCE ?

2° On pose $DE = x$. Exprimer en fonction de a et x les côtés du triangle AOE . En déduire le calcul de x en fonction de a .

3° Calculer les côtés, la surface, les hauteurs du triangle COE . (B. E.)

227. On donne un cercle de centre O et de diamètre $AB = 2R$. En B on mène la tangente à ce cercle. Une sécante issue de A coupe le cercle en M et la tangente en N . La perpendiculaire à la tangente élevée en N coupe OM en O' .

1° Quelle est la nature du triangle $O'MN$?

2° On trace le cercle de centre O' et de rayon $O'N$; démontrer qu'il est tangent au cercle O .

3° Expliquer la construction du point M pour que $O'N = 3R$.

4° Dans le cas précédent (3° question), calculer les angles et la surface en fonction de R du trapèze $OBNO'$.

228. On considère un segment AB de longueur 4 cm et l'on mène par A et B deux demi-droites Ax et By de même sens perpendiculaires à AB . On marque sur Ax le point O tel que $AO = 4$ cm et sur By le point O' tel que $BO' = 1$ cm.

1° Soient (O) et (O') les circonférences ayant respectivement pour centres O et O' et pour rayon OA et $O'B$. Que représente la droite AB pour ces circonférences? Que peut-on dire des circonférences O et O' ? Justifiez vos réponses.

2° Soit C le point où la circonférence (O) coupe OO' . La perpendiculaire à OO' en C coupe AB en D . Montrer que D est le milieu de AB et que l'angle ODO' est droit.

3° On suppose maintenant que O et O' varient respectivement sur Ax et By de manière que le produit des nombres mesurant en cm les segments AO et BO' soit égal à 4. Montrer que dans ces conditions $OO'^2 = OA^2 + O'B^2 + 8$ puisque $OO' = OA + O'B$. Qu'en résulte-t-il pour les circonférences de centres O et O' passant respectivement par A et B ? Montrer que le point C où la circonférence de centre O coupe OO' varie sur une circonférence que l'on déterminera. (B. E. P. C.)

229. On donne un cercle de centre O , de diamètre $AB = 2R$. Par le point P milieu de AO , on mène la corde CD perpendiculaire à AB . Une sécante variable issue de A coupe CD en M et le cercle en N .

1° Comparer les triangles APM et ANB . Établir la relation :

$$AM \times AN = R^2.$$

2° Démontrer que le quadrilatère $MNBP$ est inscriptible dans un cercle. Sur quelle ligne se déplace le centre I de ce cercle lorsque la sécante AN varie?

3° Si $AN = \frac{3R}{2}$, calculer AM , PM , MN et BM .

230. On donne un demi-cercle de centre O , de diamètre $AB = 2R$, un rayon OC perpendiculaire à AB et la tangente Bx au demi-cercle. Une sécante variable issue de A coupe OC en M , le demi-cercle en N et la tangente Bx en I . La tangente au demi-cercle menée par N coupe Bx en P et OC en Q . La corde BN coupe OP en H .

1° Démontrer que le quadrilatère $AOPM$ est un parallélogramme.

2° Démontrer que le quadrilatère OPNM est inscriptible dans un cercle. Sur quelle ligne se déplace le centre J du cercle circonscrit lorsque M décrit OC?

3° Démontrer que $OQ = PQ$.

4° Si M est au milieu de OC, calculer BI, AI, AN, BN, MN et l'aire du quadrilatère OPNM en fonction de R.

231. On considère un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 8$ cm et le rayon OC perpendiculaire à AB. Sur OC, on prend un point I tel que $OI = 3$ cm. La sécante AI coupe le cercle en M. Les médianes MO et BN du triangle MAB se coupent en G.

1° Calculer la longueur des segments AC, AI, AM, BM et de la hauteur MH du triangle MAB.

2° Calculer la longueur GK de la perpendiculaire abaissée de G sur AB.

3° Le point I est mobile sur OC. Sur quelle ligne se déplace le point G. Démontrer que le quadrilatère OBMI est inscriptible dans un cercle. Déterminer et limiter la ligne sur laquelle se déplace le centre J de ce cercle.

232. On considère un cercle O de rayon R et un point fixe P sur ce cercle. Un angle de grandeur constante pivote autour de P et ses côtés coupent le cercle en A et B.

1° Montrer que AB conserve une longueur constante a .

2° On trace le parallélogramme PACB. Montrer que les hauteurs AD et BE du triangle ABC se coupent en un point fixe P' situé sur le cercle.

3° Les hauteurs AA' et BB' du triangle PAB se coupent en H. Démontrer que P'H passe par I milieu de AB.

4° Calculer OI en fonction de R et de a . Sur quelle ligne se déplace I lorsque APB pivote autour de P?

5° Calculer PH en fonction de R et de a . Sur quelle ligne se déplace le point H?

233. On considère 3 points fixes A, B et C, dans cet ordre, sur une droite xy . Deux points variables P et Q, de part et d'autre de xy , décrivent la perpendiculaire à AC élevée en C et on a toujours AP perpendiculaire sur BQ.

1° Démontrer que AQ et BP sont perpendiculaires.

2° Établir la similitude des triangles ACP et QCB. En déduire que le produit $CP \times CQ$ est constant.

3° Montrer que le cercle de diamètre PQ passe par 2 points fixes.

4° Montrer que le cercle circonscrit au triangle APQ passe par un point fixe autre que A. Lieu géométrique du centre de ce cercle. Mêmes questions pour le cercle circonscrit au triangle BPQ.

234. On donne un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$, un point C sur AB tel que $AC = \frac{2R}{3}$. La perpendiculaire

élevée en C à AB coupe le demi-cercle en D. La perpendiculaire abaissée de O sur AD coupe CD en E et AD en H.

1° Calculer CD, AD, BD, OH en fonction de R. Démontrer que AE est perpendiculaire à OD.

2° Démontrer que chacun des quadrilatères OCHD et ACEH est inscriptible dans un cercle.

3° Si I est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère OCHD et J le centre du cercle circonscrit au quadrilatère ACEH, montrer que le quadrilatère IHJC est inscriptible dans un cercle.

4° Comparer les triangles OCE et OHA. En déduire les longueurs OE, CE et IJ en fonction de R.

235. On considère un angle droit \widehat{xOy} . Un point A tel que $OA = a$ reste fixe sur le côté Ox. Un point B tel que $OB = b$ est mobile sur Oy; b est donc variable mais on a toujours $b > a$. Soient OM la médiane, OH la hauteur relatives à l'hypoténuse du triangle rectangle OAB et G le centre de gravité de ce triangle. On désigne par C et D les projections de G sur Ox et sur Oy, par P le milieu de OA et par Q le milieu de OB.

1° Évaluer, en fonction de a et b , les longueurs GC et GD.

2° Démontrer que les points M, H, P, O, Q sont sur un même cercle. Déterminer le centre et calculer le rayon de ce cercle.

3° Lorsque B décrit Oy ($b > a$), sur quelles lignes se déplacent les points M, G et H.

236. On considère 2 droites parallèles D et D' dont la distance est d . Soit A un point de D et O un point situé en dehors de l'intervalle des 2 droites au-delà de D', tel que : $OA = a$, $OH = h$ (H est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D).

Une droite qui tourne autour de O coupe D en X, D' en Y.

1° Lieu du milieu M de XY.

2° Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de A sur XY.

3° En déduire la position de M quand le triangle AXY est isocèle de sommet A. Discussion.

4° A l'aide de la règle et du compas, construire le triangle AXY isocèle de sommet A, quand : $a = 8$ cm; $h = 4$ cm; $d = 4$ cm.

5° Montrer que, dans ce cas particulier :

a) la perpendiculaire menée par I, milieu de OA à D, coupe XY en M.

b) que les triangles MAI et AXY sont semblables. En déduire que AXY est équilatéral et trouver le rapport de similitude des 2 triangles MAI et AXY. (E. N.)

237. On donne 2 droites $x'x$ et yy' perpendiculaires en P. Successivement, sur Px, Px' et Py' on porte les longueurs $PA = 2a$, $PB = 3a$, $PC = 4a$ (a étant une longueur donnée). On joint BC. En A, on construit l'angle $\widehat{PAD} = \widehat{PCB}$; D sur Py. On trace le cercle de centre O circonscrit au triangle BCD.

1° Démontrer que ce cercle passe par A.

2° Calculer les segments AC, BC, PD, AD et BD.

3° Démontrer que la médiane PM du triangle PAD coupe perpendiculairement BC en K. Évaluer le segment MK.

4° Démontrer que la hauteur PH du triangle PAD coupe BC en son milieu N.

5° Quelle est la nature du quadrilatère PMON? Si les droites perpendiculaires xx' et yy' pivotent autour de P, les points A, B, C, D restant sur le cercle O fixe, montrer que MN passe par un point fixe. (E. N.)

238. On donne 3 points en ligne droite A, D, B, placés dans l'ordre A, D, B, et tels que $AD = 2a$ et $DB = a$, a étant une longueur donnée.

Trois demi-droites Dx , Ay , Bz sont perpendiculaires à AB et situées d'un même côté de AB. Soit I un point quelconque de Dx , AI coupe Bz en B' et BI coupe Ay en A'.

1° On pose $DI = x$. Calculer AA' et BB' connaissant a et x .
2° La droite A'B' coupe AB en P. Calculer BP. Le résultat ne contient pas x . Conclusion?

Vérifier en construisant la figure avec $a = 2$ cm et en prenant sur la même figure successivement : $x = 2$ cm, $x = 3$ cm, $x = 5$ cm.

3° Est-il possible de choisir le point I tel que $A'B' = 4a$?

Application. — Construire la figure avec $a = 1,2$ cm et trouver le point I tel que $A'B' = 4,8$ cm.

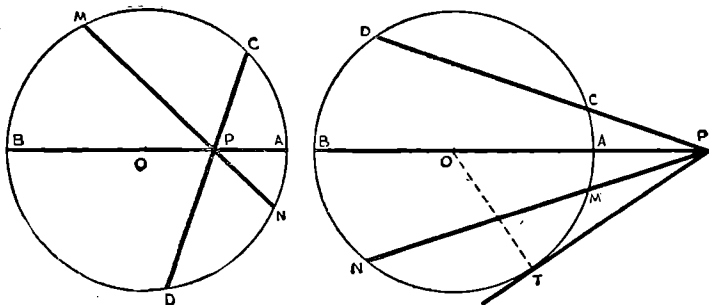
4° On dit dans l'énoncé que les demi-droites doivent être perpendiculaires à AB. Cette condition intervient-elle dans votre solution? Comment pourrait-on modifier l'énoncé, les résultats que vous avez trouvés restant valables? Vérifiez sur une figure l'exactitude de ce que vous proposez. (E. N.)



RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE CERCLE

Si d'un point P l'on mène 2 sécantes PAB et PCD à un cercle, les mesures algébriques des vecteurs ayant leur origine en P et leur extrémité sur le cercle vérifient la relation :

$$PA \times PB = PC \times PD.$$



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PM \cdot PN = PT^2$$

$$\left. \begin{array}{l} PO = d \\ OA = R \\ PA \cdot PB = p \end{array} \right\} p = d^2 - R^2.$$

• Réciproques :

1° Si les droites MN et CD sont sécantes en P et si $PM \cdot PN = PC \cdot PD$, les 4 points M, N, C, D sont sur un même cercle.

2° Deux droites étant concourantes en P, si C et D sont situés sur l'une des sécantes et T sur l'autre et si

$$PT^2 = PC \cdot PD$$

le cercle passant par les 3 points C, D et T est tangent en T à la droite PT.

(La tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.)

RELATIONS METRIQUES DANS LE CERCLE

239. On donne un cercle de centre O , de rayon R et deux diamètres perpendiculaires AB et CD de ce cercle. On mène une corde issue de A qui coupe le cercle en M et CD en N .

1° Montrer que le quadrilatère $OBMN$ est inscriptible dans un cercle. Établir la relation $AN \cdot AM = AO \cdot AB$. Sur quelle ligne se déplace le centre du cercle circonscrit au quadrilatère $OBMN$ lorsque le point M décrit l'arc BC du cercle O .

2° Si N est au milieu de OC , déterminer AN , AM , MB en fonction de R .

3° Quelle doit être la mesure de l'angle \widehat{BAM} pour que le triangle MNB soit isocèle?

240. On considère un cercle de centre O , de diamètre $AB = 2R$. En C , milieu de AO , on élève la perpendiculaire à AB qui coupe le cercle en D et E .

1° Montrer que les triangles ADB et ACD sont semblables. En déduire que $AD = R$.

2° Par A , on mène une sécante variable qui coupe DE en P et le cercle en Q . Pourquoi le quadrilatère $BCPQ$ est-il inscriptible? En déduire : $AP \cdot AQ = R^2$.

3° Quel est le lieu du centre I du cercle circonscrit au quadrilatère $BCPQ$ lorsque la sécante APQ tourne autour de A ?

4° De A on mène les tangentes au cercle circonscrit au quadrilatère $BCPQ$, soient AT et AT' . Démontrer que $AT = AT' = R$. En déduire la ligne sur laquelle se déplacent T et T' lorsque la sécante APQ pivote autour de A .

241. On donne un triangle ABC rectangle et isocèle ($AB = AC = a$). Une droite issue de B coupe AC en D . La perpendiculaire abaissée de C sur BD coupe BD en E et BA en F .

1° Démontrer que le triangle ADF est isocèle.

2° Démontrer que le quadrilatère $ABCE$ est inscriptible dans un cercle. Donner le rayon de ce cercle.

3° Démontrer que AE est bissectrice de l'angle \widehat{DEF} .

4° Établir la relation $FA \times FB = FE \times FC$. Quelle est la valeur, en fonction de a , de chacun de ces produits si $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$?

242. Soient 2 droites D_1 et D_2 perpendiculaires en O . Soit, d'autre part, un point A de D_1 tel que $OA = a$. Un angle droit xAy tourne autour de A . Ax coupe D_2 en B ; Ay coupe D_2 en C .

1° Montrer que le produit $OB \times OC$ reste constant quand l'angle xAy tourne autour de A . Quelle est la valeur de ce produit?

2° On abaisse de O la perpendiculaire OE sur Ax (E est sur Ax) et la perpendiculaire OF sur Ay (F sur Ay). Sur quelle ligne se déplacent E et F quand xAy tourne autour de A ? Montrer que EF reste constant.

3° Montrer que les triangles AEF et ABC sont semblables. En déduire une relation métrique qui montre que les points B, C, E et F sont sur un même cercle.

4° On suppose dans cette question que $AB = \frac{4a}{3}$. Calculer dans ce cas les longueurs de OB, AE et OE en fonction de a.

(B. E. P. C.)

243. 1° On considère un cercle C, de centre O, de diamètre AB = 2 cm et un point P situé sur la droite AB à 2 cm du point O (B entre O et P). Par P et les extrémités M et N d'un diamètre variable du cercle C, on fait passer un cercle C'. Ce cercle coupe OP en dehors de P en un point I. Montrer que le produit $OI \times OP$ est constant et que le point I a une position sur OP qui ne dépend pas du diamètre variable MN que l'on considère. En déduire le lieu du centre O' du cercle C' quand MN tourne autour de O.

2° On suppose maintenant que le diamètre MN est fixe et que l'angle \widehat{NOP} est égal à 60°. Montrer que, dans ce cas, la droite PN est tangente au cercle. Calculer PN et le segment BT de la tangente en B au cercle C limité en B et à l'intersection T de cette tangente avec PN

(B. E. P. C.)

244. On considère un cercle de centre O et de rayon R dans lequel la corde AB est le côté du carré inscrit.

1° Calculer AB en fonction de R.

2° On prolonge AB au-delà de B d'une longueur BP = AB, et l'on trace de P les tangentes PM et PN à la circonférence O, en M et N. Calculer PM et OP.

3° On trace la corde MN, qui coupe OP au point I. Démontrer la similitude des triangles OMP, OMI, IMP. Donner les rapports de similitude de ces triangles pris deux à deux.

En déduire que $OI = \frac{MI}{2}$ et $MI = \frac{IP}{2}$.

Calculer les segments \overline{OI} , \overline{MI} et \overline{IP} en fonction de R.

4° Calculer le périmètre et l'aire du triangle MNP.

(B. E. P. C.)

245. La somme des côtés AB et AC d'un triangle ABC est égale à 12 cm. La bissectrice intérieure de l'angle \widehat{A} coupe le côté BC en I et $\frac{IB}{IC} = \frac{1}{2}$.

1° Calculer les côtés AB et AC du triangle.

2° La bissectrice AI de l'angle \widehat{A} coupe en D le cercle de centre O circonscrit au triangle ABC. Indiquer la nature du quadrilatère ABDC en supposant que l'angle \widehat{BAC} du triangle est le double de l'angle \widehat{ACB} .

3° Montrer que la parallèle à DC menée par B coupe AC en son milieu, que le triangle ABC est rectangle et calculer BC.

4° Évaluer les segments IB et IC puis le produit $AI \times ID$.

246. On donne un cercle de diamètre BC, de centre O, un point A sur BC et extérieur au cercle O, la demi-droite Ox perpendiculaire à BC qui coupe le cercle O en D. Une sécante variable, issue de A, coupe le cercle O en M et N. La droite CM coupe Ox en P et CN coupe Ox en Q.

1° Montrer que les quadrilatères OPMB et ONQB sont inscriptibles. En déduire la relation : $CO \cdot CB = CM \cdot CP = CN \cdot CQ$.

2° Montrer que le quadrilatère PMQN est inscriptible.

3° Établir l'égalité : $CD^2 = CO \cdot CB$. Démontrer que la droite CD est tangente commune en D aux cercles circonscrits aux triangles DMP et DNQ.

247. On donne un cercle de centre O et de diamètre BC = 6 cm. Soit un point A tel que $OA = 5$ cm. Le cercle de centre O' circonscrit au triangle ABC coupe AO en A'.

1° Montrer que le produit $OA \times OA'$ est constant. Calculer OA' . Montrer que A' est fixe lorsque BC tourne autour de O.

2° Sur quelle ligne se déplace O' lorsque BC tourne autour de O?

3° Expliquer la construction des triangles ABC dont le rayon du cercle circonscrit mesure 5 cm.

248. Soit un cercle de diamètre AB = 35 mm. En un point C de la droite AB, sur le prolongement de AB, tel que $\frac{CA}{CB} = \frac{12}{5}$, on élève la perpendiculaire xy à AB. On prend un point P sur xy et l'on mène PA qui coupe le cercle de diamètre AB en D.

1° Calculer AC et BC.

2° Montrer que le quadrilatère BCPD est inscriptible dans un cercle. En déduire la relation $AD \cdot AP = AB \cdot AC$.

3° Si $CP = 45$ mm, calculer DA et DB.

4° Si P décrit xy , sur quelle ligne se déplace le centre I du cercle circonscrit au quadrilatère BCPD.

5° Soit I, un point de la médiatrice de BC, le cercle de centre I et de rayon IB coupe xy en P et le cercle de diamètre AB en D, montrer que les points A, D, P, sont alignés.

249. On considère un cercle de centre O et de diamètre AB. Soit un point C mobile sur le cercle. On prolonge la corde AC d'une longueur $CD = AC$.

1° Étudier le triangle BAD. Sur quelle ligne se déplace le point D quand C décrit le cercle O.

2° Soit H la projection de D sur AB. Montrer que :

$$\overline{AB} \cdot \overline{AH} = 2 \overline{AC}^2.$$

3° Si l'arc $\widehat{BC} = 60^\circ$, démontrer que le triangle DCH est équilatéral et que CH est tangente au cercle O.

250. Soit un segment AB = 12 cm et sur le prolongement de AB un point S, tel que $SB = 4$ cm.

1° On considère les cercles qui passent par A et B. Lieu du centre de ces cercles. Démontrer que le lieu des points de contact

des tangentes menées de S à ces cercles est un cercle dont on calculera le rayon.

2° On considère maintenant le cercle qui a pour diamètre AB. Soient O son centre, T le point de contact d'une des tangentes menées de S, M le pied de la perpendiculaire abaissée de T sur AB. Calculer OM, TM, BM.

3° Évaluer les rapports : $\frac{BM}{BS}$ et $\frac{TM}{TS}$.

Pouvait-on prévoir ce résultat?

(B. E. P. C.)

251. On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2 R. Un point M parcourt le demi-cercle. La parallèle à AB menée par M coupe le cercle en P.

1° Quelle ligne décrit le point I milieu de AM?

2° La parallèle à AB menée par I coupe AP en J. Montrer que J est sur le cercle de diamètre AO.

3° Si l'arc $\widehat{BM} = 60^\circ$:

a) Caractériser le quadrilatère AOMP.

b) Soit C la projection de P sur AB. On décrit le cercle de diamètre CP, qui coupe le cercle de diamètre AO en T et T'. PT coupe AB en D et TT' coupe AB en D'. Calculer, en fonction de R, les segments PT, PT', PD et PD'.

252. Dans un triangle ABC, on désigne par A' le pied sur BC de la hauteur issue de A. On suppose que l'angle \widehat{ABC} est obtus et aussi que les triangles AA'B et AA'C sont semblables.

1° Préciser les angles de ces 2 triangles qui sont égaux chacun à chacun. Déterminer les mesures des angles \widehat{ABC} et \widehat{BAC} en fonction de celles de \widehat{ACB} que l'on désignera par C.

2° Montrer que la longueur AA' est moyenne proportionnelle entre les longueurs A'B et A'C. Quelle est la tangente en A au cercle circonscrit à ABC?

3° Soit H le symétrique de A par rapport à BC. Montrer que la droite HB est perpendiculaire à la droite AC. Qu'est le point H pour le triangle ABC?
(E. N.)

253. Sur une demi-droite Ax on prend trois points B, C, D tels que AB = a, AC = 2 a, AD = 3 a. On mène par B la perpendiculaire à Ax, sur laquelle on prend un point P tel que BP = a. La perpendiculaire menée par C à la droite PD rencontre cette droite en H.

1° Montrer que les 4 points P, B, C, H se trouvent sur un cercle (O), que la droite AP est tangente à ce cercle et que la droite HB est la bissectrice de l'angle H du triangle PHC.

2° Calculer PD, HP et HC en fonction de a.

3° Par le point P, on mène la parallèle à Ax, qui coupe le cercle (O) en Q, et l'on désigne par R l'intersection des droites PD et QC.

Montrer que les droites QD et PC sont parallèles.

Calculer l'aire du quadrilatère PARQ en fonction de a.

(E. N.)

254. On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 9$ cm et de centre O . Soient C le milieu de AO et D le milieu de AC . La perpendiculaire à AB élevée en D coupe le demi-cercle en D' et la droite AD' coupe en E la perpendiculaire à AB élevée en C .

1° Calculer les segments AD' et BD' .

2° Nature du triangle EAO . Calculer ses médianes.

3° Indiquer la construction de la tangente ET au cercle O et calculer ET .

4° Soit F le milieu de OE . Démontrer la similitude des triangles AFO et $ED'F$. Quel est leur rapport de similitude?

5° Construire un triangle isocèle dont la base et les médianes relatives aux côtés égaux ont même longueur 3 cm.

255. On donne un cercle de diamètre AB , de centre O , de rayon R et sa tangente $x'x$ en B .

1° Une sécante variable tourne autour du point A . Elle recoupe le cercle en C et soit D son intersection avec $x'x$. Démontrer que $AC \cdot AD$ est constant et égal à $4R^2$.

2° La perpendiculaire en D à $x'x$ coupe le prolongement de OC en I . Montrer que I est le centre d'un cercle tangent au cercle donné et à la droite $x'x$. Soit (I) ce cercle.

3° T et T' sont les points de contact des tangentes menées de A au cercle (I) . Montrer que AT et AT' conservent une longueur constante. Sur quelle courbe se déplacent les points T et T' ?

(B. E. P. C.)

256. Dans un cercle de centre O et de rayon $R = 5$ cm on mène 2 cordes égales $AB = CD = 8$ cm qui se coupent en P , intérieur au cercle, tel que $OP = 4$ cm.

1° Démontrer que $PA = PC$ et $PB = PD$.

2° Que peut-on dire du quadrilatère inscrit $ACBD$?

3° Soient H et I les milieux des cordes AB et CD . Démontrer que le quadrilatère $OHIP$ est inscriptible dans un cercle. Calculer le rayon r de ce cercle et le produit $PA \times PB$.

257. On donne un triangle équilatéral ABC dont la mesure du côté est désignée par a . Soient Bx et Cy les 2 demi-droites de son plan respectivement parallèles à CA et BA , et situées du même côté de BC que le point A . Une droite variable (D) passant par A coupe la demi-droite Bx au point M et la demi-droite Cy au point N .

1° Montrer que l'on a $BM \times CN = a^2$.

2° On trace les segments BN et CM et on désigne par I leur point d'intersection. Montrer que les triangles BCM et CNB sont semblables. En déduire que le triangle ICB est semblable à chacun d'eux. Calculer l'angle \widehat{BIC} .

3° Montrer que l'on a : $CM \times CI = \overline{CB}^2$. A quelle ligne fixe appartient le centre du cercle circonscrit au triangle IBM ?

(E. N.)¹²

258. Deux cercles de centres respectifs O et O' se coupent en A et B . Par un point P pris sur le prolongement de AB on mène les

tangentes PT et PT' à chaque cercle, puis la sécante PMN au cercle O et la sécante PRS au cercle O'. On trace une tangente commune extérieure qui touche le cercle O en C et le cercle O' en D. Démontrer que :

- 1° les 2 tangentes PT et PT' sont égales.
- 2° le quadrilatère MNRS est inscriptible.
- 3° la corde AB coupe CD en son milieu I.
- 4° Construire géométriquement PT de telle manière que $PT = l$ (l étant une longueur donnée).

259. Soit un triangle OAB rectangle en A tel que l'on ait $OA < AB$. On prend le point C de AB tel que : $OA^2 = AB \times AC$.

- 1° Montrer que les triangles OAB et OAC sont semblables. Écrire les égalités d'angles en résultant.
- 2° Montrer que dans le triangle OAB la médiane AI relative à l'hypoténuse est perpendiculaire à OC.
- 3° Montrer qu'il existe un cercle et un seul, tangent en O à OA et qui passe par C et démontrer que ce cercle passe aussi par B.
- 4° Que serait la figure si l'on avait $OA > AB$ au lieu de $OA < AB$? (B. E. P. C.)

260. On donne un cercle de centre O, de diamètre AB et une corde CD parallèle à AB. On construit le centre de gravité G et l'orthocentre H du triangle ACD. La hauteur AH coupe CD en K; la hauteur CH coupe AD en N.

- 1° Montrer que $\widehat{ACD} - \widehat{ADC} = 1$ droit.
- 2° Établir la relation : $AK^2 = KC \cdot KD$.
- 3° Démontrer que $AC = CH$.
- 4° La corde CD reste parallèle au diamètre fixe AB. Sur quelle ligne se déplace le centre de gravité G du triangle ACD?

261. On donne un triangle ABC. Les hauteurs AA', BB', CC' se coupent en H. La droite B'C' coupe le cercle circonscrit au triangle en M et N (M de l'autre côté de AB par rapport à C.) La tangente en A à ce cercle, soit TAT', coupe BC en T.

- 1° Démontrer que $\widehat{ACB} = \widehat{AC'B'}$ et que $\overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'}$.
- 2° Montrer que B'C' est parallèle à TAT'.
- 3° Caractériser le triangle AMN.
- 4° Établir la relation $\overline{AM}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC'} = \overline{AH} \cdot \overline{AA'} = \overline{AC} \cdot \overline{AB'}$.

262. Dans un triangle ABC, le côté BC = 2c reste fixe et le sommet A se déplace de manière que la somme AB + AC demeure égale à une constante 2a. On prend le symétrique D de C par rapport à la bissectrice extérieure de l'angle A.

- 1° Montrer que les points B, A, D sont en ligne droite.
- 2° Sur quelle ligne le point D se déplace-t-il quand le sommet A se déplace?
- 3° Prouver que les projections I de C et J de B sur la bissectrice extérieure de l'angle A sont sur une circonférence dont on précisera le centre O et le rayon.

4° On prolonge JO jusqu'à sa rencontre J' avec la droite DC. Prouver que $CJ' = BJ$ et évaluer en fonction de a et de c le produit $CI \times BJ$. (E. N.)

263. On considère 3 points A, B, C, dans cet ordre sur une même droite et tels que $AB = BC$. On décrit un cercle de centre O, de diamètre AB ($AB = 2R$). Une sécante issue de A coupe le cercle O en M. Soit un point P sur AM tel que

$$AB \times AC = AM \times AP.$$

1° Démontrer que le triangle ACP est rectangle en C. Sur quelle ligne se déplace le point P lorsque M décrit le cercle O?

2° MB et PC se coupent en Q. Démontrer que le quadrilatère AMCQ est inscriptible et que le produit $BM \times BQ$ est constant.

3° Démontrer que PB est perpendiculaire sur AQ en un point N situé sur le cercle O.

264. On donne 2 cercles de diamètre AB et AC ($AB < AC$), tangents intérieurement en A, de centres O et O'. Un troisième cercle de centre O₁ passe par B et C et coupe le cercle O en B et E, le cercle O' en C et D. La droite CD coupe en F la perpendiculaire élevée en A à AC et DE coupe AC en I.

1° Montrer que $\widehat{CBE} = \widehat{EDF}$. En déduire que le quadrilatère AEDF est inscriptible.

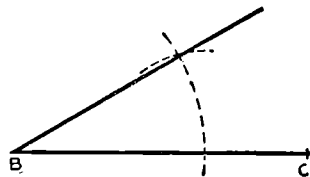
2° Démontrer que les 3 points B, E, F sont en ligne droite.

3° Établir les relations : $IA^2 = IE \cdot ID = IB \cdot IC$.

265. On considère un triangle ABC dans lequel l'angle C est obtus. De plus, si l'on désigne par H le pied de la hauteur issue de A, l'angle CAH que fait cette hauteur avec le côté AC est égal à l'angle B du triangle.

1° Si n est la valeur en degrés de l'angle B, exprimer la mesure des 2 autres angles du triangle en fonction de n . Pour quelles valeurs de n la construction du triangle est-elle possible?

2° Indiquer comment on fera cette construction si on donne la position des sommets B et C et la valeur de l'angle B. On réalisera une figure exacte, avec la règle et le compas seulement, en utilisant les données graphiques ci-contre, qu'on reportera sans utiliser le double décimètre ni le rapporteur. Enfin, on interprétera géométriquement la condition de possibilité déjà trouvée.



3° Établir la relation $HA^2 = HB \cdot HC$. En déduire que HA est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

4° On donne les points A et H et, sur la perpendiculaire $x'x$ menée en H au segment HA, un point M qui est le milieu de BC. Montrer que ces 3 points permettent de construire le triangle ABC. Quelle relation doit-il exister entre HA et HM pour que la construction soit possible?

5° Si on ne donne que les points A et H, quel est le lieu du point M? Quel est le lieu du centre de gravité (point d'intersection des médianes) du triangle ABC? (E. N.)

266. On donne 3 points A, B, C en ligne droite : $AB = 16$ mm; $BC = 48$ mm.

1° Construire et calculer la moyenne géométrique entre AB et AC.

2° On mène, du point A, au cercle de centre O et de diamètre BC, les tangentes AT et AT'; la corde TT' coupe BC en I. Calculer AT, AT', AI, TI.

3° Au point A on mène la perpendiculaire xAx' à la droite ABC. Quelle doit être la longueur du rayon d'un cercle passant par B et C et tangent à la droite xAx' ? Construire l'un de ces cercles. Combien y en a-t-il? (B. E. P. C.)

267. Deux cercles, O et O' de rayons R et R' ($R > R'$) se coupent en 2 points A et B.

Les tangentes issues de A à chaque cercle passent par le centre de l'autre.

1° Indiquer la nature du triangle OAO' et calculer OO' en fonction de R et R'.

2° Par un point P quelconque pris sur le prolongement de AB, on trace 2 tangentes, PC et PC', à chacun des cercles, C et C' étant les points de tangence.

Démontrer que $PC = PC'$.

3° Trouver, par une construction géométrique, les positions du point P telles que la tangente PC ait une longueur donnée l.

4° Évaluer la différence $PO^2 - PO'^2$ et montrer qu'elle est constante. (B. E. P. C.)

268. On donne un cercle (C) de diamètre AB et de rayon R. Soient BT la tangente en B au cercle et P le milieu du rayon OB.

1° Déterminer le point Q de la droite AB tel que $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = 4 R^2$.

2° On trace par A une sécante coupant le cercle en M et la tangente BT en N. On trace par A une 2° sécante coupant le cercle en M' et la tangente BT en N'. Démontrer que

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = \overline{AM'} \cdot \overline{AN'} = 4 R^2.$$

En déduire que les triangles AMN' et AN'M sont semblables et que le quadrilatère MNN'M' est inscriptible.

3° On suppose que MM' passe par P.

a) Comparer les triangles AMP et AQN. En déduire que

$$\widehat{AQN} = \widehat{AMP} = \widehat{AN'B}.$$

b) Démontrer que le quadrilatère AN'QN est inscriptible. En déduire que le produit $\overline{BN} \cdot \overline{BN'}$ est constant quand MM' tourne autour de P. Évaluer la valeur de ce produit en fonction de R. (E. N.)

269. On donne une circonférence O de rayon R et un diamètre fixe AA' sur lequel on prend 2 points fixes B et B' symétriques par rapport à O. Par B et B' on mène 2 cordes parallèles PBQ et P'B'Q'.

1° Montrer que le quadrilatère PP'Q'Q est un rectangle et que $PB = B'Q'$, $BQ = B'Q'$. En déduire que le produit $BP \times B'P'$ est constant quand B et B' restent fixes, la direction commune des 2 cordes PQ et P'Q' varie.

2° Soient M et M' les points de rencontre de PP' avec les tangentes en A et en A' au cercle. Montrer que les quadrilatères ABPM et A'BPM' sont inscriptibles. En déduire que l'angle MBM' garde une valeur constante qu'on donnera. Sur quelle droite fixe reste le milieu I de MM' quand la direction de PQ et P'Q' varie?

(E. N.)

270. On donne un cercle fixe, de centre O, de rayon R, et un point fixe A à l'intérieur de ce cercle. On pose $OA = d$. Par le point A on fait passer une sécante variable BC. On construit le cercle de diamètre BC.

1° Lieu du centre D de ce cercle quand BC tourne autour de A.

2° Construire la corde BC connaissant sa longueur l . Donner, en fonction de R et de d , les valeurs limites de l pour que le problème soit possible.

Application numérique : $R = 5$ cm ; $d = 3$ cm.

3° Soit PAQ la corde du cercle O perpendiculaire à OA. Évaluer sa longueur et montrer que pour toutes les cordes BC, le produit $AB \cdot AC$ est constant.

4° La perpendiculaire en A à BC coupe le cercle D en M et N. Montrer que le quadrilatère PMQN est un rectangle et dire sur quelle ligne se déplace M et N quand BC tourne autour de A.

(E. N.)

271. On donne un triangle ABC où $AB = AC$. Un cercle variable, tangent à BC en son milieu O, et dont le diamètre est inférieur à OA, est situé par rapport à BC du côté du point A. Il coupe AB en M et G et AC en J et N; M et N sont choisis de manière que $AM > AN$.

1° Montrer que les arcs \widehat{OM} et \widehat{OJ} situés à l'intérieur du triangle ABC sont égaux et que le point O est équidistant des 3 droites AB, AC, MN.

2° Tracer le cercle exinscrit dans l'angle A du triangle AMN et montrer que le périmètre du triangle AMN est constant.

3° Prouver que lorsque le rayon du cercle varie, le produit $BM \times CN$ reste constant.

4° On porte sur MN, à l'extérieur de l'angle MAN, les longueurs $MU = MA$; $NV = NA$. Montrer que U et V se déplacent sur le cercle de centre O et de rayon OA. Établir la réciproque et trouver les positions limites que peuvent attendre U et V sur le cercle précédent.

(E. N.)

POLYGONES REGULIERS

$$\text{Angle au centre } \widehat{O}_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

$$\text{Angle intérieur } \widehat{A}_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{(2n - 4)dr}{n}.$$

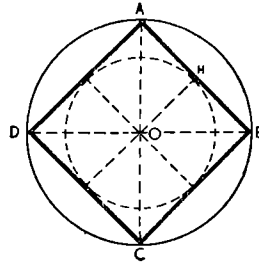
<i>n</i> côtés.	Polygone.	Angle. au centre.	Angle intérieur.
3	triangle équil.	$O_3 = 120^\circ$	$A_3 = 60^\circ$
4	carré	90°	90°
5	pentagone	72°	108°
6	hexagone	60°	120°
8	octogone	45°	135°
10	décagone	36°	144°

Carré

$$AB = c = R\sqrt{2}$$

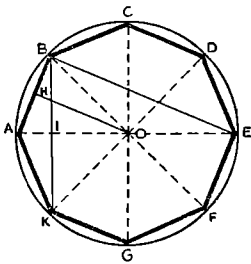
$$OH = a = \frac{c}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{aire} = 2 R^2$$



Octogone

convexe

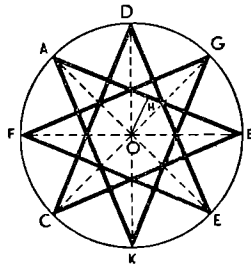


$$AB = c = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$OH = a = \frac{R\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

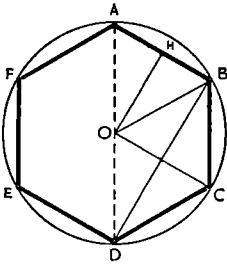
$$\text{aire} = 2 R^2 \sqrt{2}$$

concave (étoilé)



$$AB = c = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

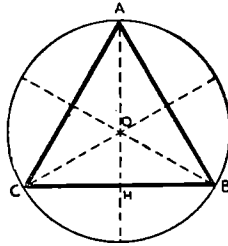
$$OH = a = \frac{R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Hexagone

$$AB = c = R$$

$$OH = a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{aire} = \frac{3 R^2 \sqrt{3}}{2}$$

Triangle équilatéral

$$AB = c = R \sqrt{3}$$

$$OH = a = \frac{R}{2}$$

$$\text{aire} = \frac{3 R^2 \sqrt{3}}{4}$$



POLYGONES RÉGULIERS

272. On donne un triangle équilatéral ABC de côté a . Du centre A on décrit un arc de cercle tangent au côté BC. Cet arc coupe AB en E et AC en F.

- 1° Établir la similitude des triangles ABC et AEF.
- 2° Calculer en fonction de a , le côté AE et la hauteur AH du triangle AEF.
- 3° Calculer l'aire du quadrilatère BCFE.

273. On considère un triangle isocèle ABC. On prolonge le côté AC d'une longueur CD égale à la base BC. On joint BD. En supposant que $AB = 10$ cm, on demande de calculer BD :

- 1° Quand l'angle $\widehat{A} = 90^\circ$.
- 2° Quand l'angle $\widehat{A} = 60^\circ$.
- 3° Quand l'angle $\widehat{A} = 36^\circ$.

Les 2 premières parties se font par le calcul, la troisième en se servant des propriétés géométriques simples de la figure, dues à la valeur particulière de l'angle. (D. E.)

274. On considère un triangle équilatéral ABC et un point M sur le côté AB. Par M on mène les parallèles MD à BC (D sur AC) et ME à AC (E sur BC).

- 1° Comparer les triangles MAE et MDB.
- 2° Les droites AE et BD se coupent en P, calculer l'angle \widehat{APB} .
- 3° Calculer les aires des triangles ABC, AMD, MBE et l'aire du quadrilatère ADEB en fonction de $AB = a$ et $AM = b$.

275. On donne un triangle ABC dans lequel $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$. On prolonge BA et sur ce côté, de part et d'autre de A, on porte une longueur égale à AC; soit $AE = AD$ (E entre A et B).

- 1° Comparer les angles \widehat{BAC} et \widehat{BDC} .
- 2° Calculer la différence $\widehat{BEC} - \frac{\widehat{BAC}}{2}$.

3° Si $\widehat{BAC} = 120^\circ$, calculer, en fonction de $AC = a$, les segments : CD, CE, CH (hauteur du triangle CAD), puis l'aire du triangle ECD.

4° Application numérique : Calculer les mêmes dimensions si a est le côté d'un carré de 12 cm^2 de surface.

276. On donne un triangle équilatéral ABC, inscrit dans un cercle O de rayon r . On prend les milieux D et E des arcs \widehat{AB} et \widehat{AC} et on trace DE qui coupe AB en I et AC en K, puis AD et AE.

- 1° Démontrer que les triangles ADI et AKE sont 2 triangles isocèles égaux; en déduire que $DI = IK = KE$.
- 2° DE n'est-il pas le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle? Quelle est sa valeur?
- 3° Trouver l'aire du triangle ADE.

277. D'un point A situé sur un cercle et de part et d'autre du centre O, on porte 2 cordes, l'une AB égale au côté du carré inscrit, l'autre AC égale au côté du triangle équilatéral inscrit.

- 1° Expliquer la construction de la figure.
- 2° Calculer les angles du triangle ABC.
- 3° Donner, en fonction de R, la longueur de AB, AC et de AH, hauteur du triangle ABC.
- 4° Calculer ensuite le côté BC et les hauteurs du triangle issues de B et de C.

278. On donne un triangle ABC dans lequel $AB > AC$. Sur AB et sur son prolongement on porte $AE = AD = AC$ (D sur le prolongement).

- 1° Démontrer que $\widehat{BDC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$.
- 2° Démontrer que $\widehat{BEC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + 1$ droit.
- 3° On donne $AC = a$ et $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Calculer :
 - a) le rapport $\frac{CD^2}{CE^2}$.
 - b) les longueurs CD, CE et CH (perpendiculaire menée de C sur BD).
 - c) l'aire du triangle ECD. (B. E.)

279. On donne un point P extérieur au cercle de centre O, de rayon $R = 6$ cm et tel que $PO = 10$ cm.

- 1° Quel est le lieu géométrique du milieu des cordes déterminées par les sécantes issues de P?
- 2° L'une de ces sécantes fait un angle de 30° avec PO et coupe le cercle en C et D. Soit M le milieu de CD. Calculer OM, PM, PC et PD.
- 3° Soit T le point de contact sur le cercle O de la tangente issue de P. Calculer PT en utilisant les longueurs des segments PC et PD.

280. Sur les côtés d'un triangle ABC rectangle en A, on construit extérieurement au triangle, les triangles équilatéraux $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$.

- 1° Démontrer que les droites AA' , BB' , CC' sont égales.
- 2° Démontrer que l'aire du triangle équilatéral $BA'C$ construit sur l'hypoténuse BC est égale à la somme des aires des 2 autres.
- 3° Si l'un des angles du triangle rectangle mesure 30° , calculer, en fonction de l'hypoténuse a , l'aire du polygone $AB'CA'BC'$.

281. On donne un angle \widehat{xAy} de 75° et un point D sur Ax, tel que $AD = a$ (a étant une longueur donnée).

- 1° Construire un cercle tangent à la fois au côté Ax en D et au côté Ay.
- 2° Montrer que toute tangente au petit arc limité par les côtés de l'angle détermine, en rencontrant ces côtés, un triangle ABC dont le périmètre est constant.

3° Construire un triangle ABC de périmètre $2a$, sachant que l'angle \hat{A} mesure 75° et que la bissectrice AI est mesurée par une longueur donnée l .

4° Dans le triangle ainsi obtenu et en supposant $\hat{B} = 60^\circ$ et $AB = c$, calculer BC en fonction de c . (B. E.)

282. Les côtés d'un rectangle ABCD sont donnés par les relations $AD = a$ et $AB = a\sqrt{2}$, a étant une longueur donnée.

1° Indiquer — et justifier — la construction graphique du rectangle ABCD (faire la figure en prenant $a = 4$ cm).

2° Calculer, en fonction de a , la diagonale BD du rectangle ABCD.

3° On mène AH et CK respectivement perpendiculaires sur la diagonale BD.

a) Calculer DH et KB en fonction de a . Conséquences de ce calcul au point de vue du partage de la diagonale BD par les points H et K?

b) Calculer AH en fonction de a .

c) Trouver la nature du quadrilatère AHCK et calculer le rapport de sa surface à celle du rectangle ABCD.

(B. E. P. C.)

283. On donne un angle droit xOy un point A mobile sur Ox et un point B mobile sur Oy. Soit D un point quelconque entre O et A. Sur le côté AB du triangle rectangle OAB et de l'autre côté de AB par rapport à O, on construit un triangle ABC rectangle en A et tel que $\widehat{ABC} = \widehat{OBA}$. Sur le segment BD et de l'autre côté de BD par rapport à O on construit aussi un triangle BDE rectangle en D et tel que $\widehat{DBE} = \widehat{OBA}$.

1° Citer les triangles semblables de la figure.

2° Sur quelle ligne se déplace le point E lorsque D décrit OA?

3° Si $OB = a$ et $\widehat{OBA} = 60^\circ$, donner l'aire du triangle BDE lorsque $\widehat{OBD} = 30^\circ$; lorsque $\widehat{OBD} = 45^\circ$; lorsque $OD = \frac{3}{2}a$.

284. On donne un losange ABCD dont l'angle B mesure 60° .

1° Le côté du losange ayant pour mesure a , calculer les longueurs des diagonales.

2° Une droite menée par D, ne traversant pas le losange, coupe la droite AB en E et la droite BC en F. Montrez que les triangles ADE et CFD sont semblables.

3° En déduire que AC est moyenne proportionnelle entre AE et CF et que les triangles ACE et CFA sont semblables.

4° M étant le point commun aux droites CE et AF montrez que $CA^2 = CM \times CE$.

5° En déduire que si la direction de EF varie, le centre du cercle circonscrit au triangle AME est sur une droite fixe passant par A. (B. E. P. C.)

285. Soit un cercle de centre O et de rayon R. Deux cordes parallèles de ce cercle sont situées d'un même côté du centre : l'une, AB, est égale au côté du triangle équilatéral inscrit, l'autre, D'D, est égale au côté du carré inscrit, les points A et D' étant placés d'un même côté de la médiatrice commune des 2 cordes.

1° Donner une construction précise de la figure et calculer en fonction de R la hauteur du trapèze isocèle AD'DB.

2° M désignant le milieu du segment AB et C la seconde intersection de la droite D'M et du cercle donné, on demande de préciser la nature du triangle MDD', de montrer que la droite AB est bissectrice de l'angle \widehat{CMD} et que : $MC \times MD = MA^2 = MB^2 = \frac{AB^2}{4}$.

3° Montrer que les trois triangles CMA, AMD et CBD sont semblables entre eux. En déduire que dans le quadrilatère convexe ACBD le produit de 2 côtés opposés est égal au demi-produit des diagonales. (B. E. P. c.)

286. Dans un cercle de centre O et de rayon R, on mène deux diamètres perpendiculaires, AB et CD. Une corde issue de A coupe le segment de droite CD en P et le cercle en M.

1° Déterminer la valeur de l'angle AMB. En déduire que le quadrilatère OBMP est inscrit. Préciser la position du centre I du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

2° Démontrer que les triangles AOP et AMB sont semblables. En déduire la valeur du produit $AP \times AM$ en fonction de R.

3° On suppose que le point P décrit le segment CD et l'on demande de déterminer :

a) la plus grande valeur que peut prendre le segment AP (en fonction de R).

b) la position et la longueur du segment de droite décrit par le centre I du cercle circonscrit au quadrilatère OBMP. (B. E. P. c.)

287. On donne, dans un cercle de centre O et de rayon R, une corde AB égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. Sur le plus grand des deux arcs \widehat{AB} , on prend un point M, que l'on joint aux points A et B. Puis on porte sur MA une longueur $MC = MB$.

1° Montrer que le triangle MBC est équilatéral.

2° Par M on mène la parallèle à BC, qui coupe le cercle en un second point, P. Évaluer l'angle \widehat{AMP} . En déduire que P reste fixe lorsque M décrit l'arc \widehat{AB} .

3° Montrer que le triangle PAB est équilatéral.

4° Calculer en fonction de R l'aire du quadrilatère BAPM lorsque le point M se trouve au milieu de l'arc BP. (B. E. P. c.)

288. Soit un triangle isocèle ABC dont l'angle au sommet A est aigu et soit O le centre du cercle circonscrit au triangle. La hauteur issue de A rencontre BC en H et le cercle circonscrit en D.

1° Établir la relation $4 AH \times HD = BC^2$.

2° On pose $BC = 2a$, $AH = h$.

Calculer en fonction de a et h les segments HD, AD, OH, ainsi que les segments OT et AT, le point T étant l'intersection de AH avec la tangente au cercle au point B.

3° Trouver la relation qui lie h et a si le point H est au milieu de OD. Que dire alors du triangle ABC? (B. E. P. c.)

289. Dans le triangle BAC, l'angle \hat{A} est égal à 60° . Les bissectrices des angles \hat{B} et \hat{C} se rencontrent en O.

1° Calculer l'angle \widehat{BOC} .

2° On mène de C la perpendiculaire, CD, à BO, qui coupe le prolongement de BO en D. Calculer les angles du triangle ODC.

3° On suppose que $BO = 1$ cm et $CO = 2$ cm (ou que $BO = 2$ cm et $CO = 1$ cm selon la figure tracée). Calculer OD et CD.

4° Calculer la longueur de BC. (B. E. P. c.)

290. On considère un triangle équilatéral ABC de côté a . Sur le côté AB on prend un point M et sur le prolongement de AB un point N tels que les triangles ACM et ANC soient semblables.

1° Vérifier que le produit $AM \times AN$ est constant.

2° Montrer que le côté AC du triangle ABC est tangent au cercle circonscrit au triangle CMN.

3° Démontrer que le côté BC est bissectrice de l'angle \widehat{MCN} .

4° En déduire la détermination du point N, la position de M sur AB étant donnée.

5° Dans le cas où M est au milieu de AB, calculer les segments AN, MN, CM, CN en fonction de a .

291. On donne un cercle de centre O, de rayon R, et une corde fixe AB. Un point M décrit le plus petit des deux arcs \widehat{AB} .

1° Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{AMB} passe par un point fixe D du cercle.

2° MD coupe AB en E. Composer les triangles DMB et DBE. En déduire la relation $DB^2 = DM \cdot DE$. Préciser la position de la droite DB par rapport au cercle circonscrit au triangle MEB.

3° On désigne par H l'orthocentre du triangle AMB, par H' le deuxième point d'intersection du cercle (O) et de la hauteur issue de M dans le triangle AMB. Montrer que H et H' sont symétriques par rapport à AB. Sur quelle courbe fixe se déplace H quand le point M décrit l'arc \widehat{AB} ?

4° Dans le cas particulier où $AB = R\sqrt{3}$ et $AM = R$, calculer l'aire du quadrilatère AMBD en fonction de R. (B. E.)

292. 1° Dans un cercle de centre O et de rayon R, inscrire un triangle équilatéral ABC.

2° Calculer le côté AB en fonction de R.

3° Extérieurement au triangle, sur AC et BC construire les carrés ACDE et BCFG. Démontrer que si on prolonge EA et GB, ils se coupent en P sur le cercle O et que si on prolonge ED et GF, ils se coupent en Q sur le prolongement du diamètre QC.

4° Quelle est la nature du triangle QEG? Calculer son aire en fonction de R.

293. On considère un angle \widehat{xAy} de 60° . Sur le côté Ax on porte les segments successifs égaux AB et BC . Le cercle de diamètre AB coupe Ay en M . La droite CM recoupe le cercle en N . Soit P la projection de M sur Ax . Calculer en fonction de R ($AB = BC = 2R$) :

1° les segments AM , MB , AP , MP .

2° les segments CM et CN .

3° En déduire la longueur de la corde MN et sa distance au centre du cercle de diamètre AB .

294. Un triangle équilatéral ABC a pour côté a . On prolonge, dans le même sens, chacun des côtés d'une longueur égale à a . On obtient les segments $AA' = AB + BA' = 2a$, $BB' = BC + CB' = 2a$; $CC' = CA + AC' = 2a$.

1° Montrer que le triangle ABB' est rectangle en A . Calculer AB' .

2° Indiquer la nature du triangle $A'B'C'$ et donner la longueur de ses côtés.

3° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC . Montrer que O est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

295. On donne un triangle équilatéral ABC . On désigne par I l'intersection de la perpendiculaire à AB en B avec la perpendiculaire à AC en C .

1° Montrer que $IB = IC$.

2° M désignant un point quelconque du plus petit arc \widehat{BC} de la circonférence de centre I , de rayon IB , on trace BM qui coupe AC en D , et l'on trace CM qui coupe AB en E .

Montrer que l'on a $AD = BE$. Que peut-on dire de la somme $AD + AE$ lorsque M décrit l'arc \widehat{BC} ?

3° Calculer la grandeur en degrés de l'angle \widehat{BMC} . Montrer que le quadrilatère $ADME$ est inscriptible. (B. E. P. C.)

296. Dans un cercle O , de rayon R , tracer une corde égale au côté du triangle équilatéral inscrit. Soit C un point quelconque du petit arc \widehat{AB} . Mener la bissectrice CD de l'angle \widehat{ACB} et par le point B tracer la parallèle BE à cette bissectrice (D et E sont sur le cercle O); CD coupe AB en M et AE en N .

1° Indiquer la nature du triangle ACN .

2° Montrer que le quadrilatère $BCNE$ est un parallélogramme et que $CD = CA + CB$.

3° Établir la similitude des triangles ACD et MCB et en déduire la relation : $CA \cdot CB = CD \cdot CM$.

4° Calculer l'aire du quadrilatère $ACBD$ en fonction de R en supposant que C est au milieu de l'arc AB .

297. On donne un cercle O , de rayon R , et un point P situé à une distance de $2R$ de O . Par P on mène le diamètre PAB et diverses cordes.

1° Lieu géométrique du milieu M de ces cordes. Utiliser ce lieu pour indiquer la construction des tangentes issues de P .

2° Soit PT une de ces tangentes. Quelle est la valeur de l'angle

\widehat{OPT} ? de la longueur AT ? De quel polygone régulier inscrit AT est-il le côté?

3° Du point B on mène la parallèle à OT , qui rencontre PT en I . Calculer en fonction de R les longueurs IB et IT (B. E.)

298. Soit un cercle de centre O et de rayon R . Par un point P tel que $OP = d$, on mène une droite qui coupe le cercle en A et B et telle que $AB = R$.

1° Expliquer la construction.

2° Les tangentes au cercle en A et B se coupent en M . Calculer les segments PA , MA , MI .

3° Étudier les conditions de possibilité du problème.

299. On considère un cercle O de rayon R et un point A de ce cercle. Un angle de 60° pivote autour de A et ses côtés coupent le cercle en B et C .

1° Montrer que BC a une longueur constante. Quelle est cette longueur?

2° Les hauteurs du triangle ABC , issues de B et de C se coupent en H et coupent le cercle en B' et C' . Démontrer que B' et C' sont fixes.

3° Quelle ligne décrit le point H lorsque l'angle \widehat{BAC} pivote autour de A ?

4° Donner la nature, calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC : a) lorsque B est en C' .

b) lorsque BC est parallèle à $B'C'$.

300. Une sécante xy coupe en A et C un cercle de centre O et de rayon R . On trace l'une des tangentes au cercle O perpendiculaires à xy ; elle est tangente au cercle en D et coupe xy en E . La perpendiculaire en A à xy coupe le cercle en B et BD coupe xy en F .

1° Montrer que $DA = DB$.

2° Comparer DE et AB en direction et en grandeur.

3° Donner la nature du triangle CBF . En déduire la ligne décrite par le point F lorsque xy tourne autour du point C .

4° Si $\widehat{AFB} = 30^\circ$, évaluer l'aire du quadrilatère $ABDE$ en fonction de R .

301. Un carré $ABCD$ a pour côtés $AB = BC = CD = DA = a$. On prolonge chacun de ses côtés d'une même longueur x dans les 2 sens. En joignant les points obtenus on forme un octogone $EFGHIJKL$.

1° Quelle doit être cette longueur x pour que l'octogone obtenu soit régulier?

2° Indiquer la construction géométrique de cette longueur x .

3° Calculer la surface de l'octogone régulier.

302. 1° Dans un cercle de rayon R inscrire un quadrilatère $ABCD$ tel que AB soit égal au côté de l'hexagone inscrit, AD et BC soient égaux chacun au côté du carré inscrit.

- 2° Quelle est la nature de ce quadrilatère convexe ABCD?
 3° Comparer les diagonales AC et BD. Montrer qu'elles sont perpendiculaires.
 4° Soient M, N, P et Q les milieux des côtés AB, BC, CD et AD. Quelle est la nature du quadrilatère MNPQ?
 5° Calculer CD en fonction de R.
 6° Calculer, en fonction de R, la surface du quadrilatère MNPQ.

303. On considère un demi-cercle de diamètre AB = 2 R de centre O. On le partage en 3 arcs égaux : $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$.

- 1° Expliquez la construction.
 2° On prolonge AC d'une longueur CE = AC et AD d'une longueur DF = AD. On joint BF. Démontrer que le quadrilatère ABFE est un losange.
 3° F se projette en K sur AB; calculer, en fonction de R, l'aire du triangle AKF et la comparer à celle de l'hexagone inscrit dans le cercle.
 4° Calculer l'aire du triangle BAF.

304. On considère une circonférence de centre O, de rayon R, un point fixe A et un point B variable sur cette circonférence; la perpendiculaire en A à AB recoupe la circonférence en C.

- 1° Que peut-on dire des 2 points B et C? Trouver le lieu géométrique du pied H de la perpendiculaire menée de A sur BC.
 2° On donne $AH = \frac{R}{2}$. Construire le triangle ABC correspondant. Quel est le polygone régulier inscrit dont le côté a la même longueur que le petit côté de l'angle droit de ce triangle?
 3° Calculer en fonction de R les segments BH, CH, AB, AC (B. E. P. C.)

305. Sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC, comme hypoténuses, et extérieurement à ce triangle, on construit des triangles rectangles isocèles : ABC', BCA', ACB'.

- 1° Démontrer que les droites AA', BB', CC' sont concourantes.
 2° Le côté du triangle équilatéral étant a , calculer les côtés, les angles et la surface du polygone AC'BA'CB'.
 3° Le polygone obtenu AC'BA'CB' est-il un hexagone régulier?

306. Dans un cercle de centre O, de rayon R, on trace une corde BC égale au côté du triangle équilatéral inscrit. Soit un point A mobile sur le grand arc que sous-tend la corde BC. La bissectrice de l'angle BAC coupe le côté BC en D et le cercle en E.

- 1° Expliquer la construction de BC.
 2° Démontrer que l'angle \widehat{BAC} est constant. Quelle est sa mesure?
 3° Démontrer que le point E est fixe.
 4° Établir la similitude des triangles ACE et CDE. En déduire la relation $EC^2 = ED \cdot EA$.

5° Dans le cas où AB est diamètre du cercle O avec toujours la corde BC égale au côté du triangle équilatéral inscrit, calculer AE et l'aire du triangle ABC en fonction de R .

307. On donne un demi-cercle de centre O , de diamètre $AB = 2R$. On trace une corde $AC = R$ et un angle au centre $\widehat{COB} = 90^\circ$. Les diagonales du quadrilatère $ACDB$ se coupent en I .

1° Calculer CD et BC .

2° Montrer que les triangles CAI et DBI sont isocèles et semblables. Calculer CI , IB , ID , BD , AI , AD .

3° De quel polygone régulier inscrit BD est-il le côté?

4° AC et BD se coupent en E . Si \widehat{COB} pivote autour de O (AC étant quelconque) montrer que \widehat{AEB} est constant et indiquer sur quelle ligne se déplace le point E .

308. Dans un cercle de centre O , de rayon R on trace, de part et d'autre de O , puis du même côté de O , deux cordes parallèles AB et CD .

1° Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

2° Calculer, en fonction de R , la hauteur et les côtés égaux du trapèze :

a) si $AB = R$ et $CD = R\sqrt{2}$.

b) si $AB = R$ et $CD = R\sqrt{3}$.

c) si $AB = R\sqrt{2}$ et $CD = R\sqrt{3}$.

309. On donne un demi-cercle de centre O , de diamètre $AD = 2R$. On marque 2 points B et C sur ce demi-cercle tels que l'angle au centre $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Les cordes AB et CD se coupent en P , AC et BD se coupent en Q .

1° Étudier la nature des triangles BAQ , CDQ , CAP , BDP .

2° Montrer que PQ est perpendiculaire sur AD .

3° Si l'arc $\widehat{AB} = 60^\circ$, calculer les segments BD , BQ , QD et CD en fonction de R .

310. Dans un cercle de centre O et de rayon R on considère deux diamètres perpendiculaires, AOB et COD . Du point A on mène une corde variable, AMN , qui coupe le cercle en M et le diamètre CD en N . Dans tout le problème on suppose que le point M décrit l'arc BD seulement.

1° Montrer que les triangles AOM et ANB sont semblables. En déduire que le produit $AM \times AN$ reste constant et donner la valeur de cette constante en fonction de R .

2° Montrer que le quadrilatère $OBMN$ est inscriptible dans un cercle, dont on construira le centre I avec le compas et la règle. Sur quelle ligne se déplace le point I lorsque M décrit l'arc \widehat{BD} ? Limiter.

3° a) Sur quelle ligne se déplace le milieu P, de la corde AM lorsque M décrit l'arc \widehat{BD} ? Limiter.

b) Dans le cas où la distance OP est $\frac{R}{2}$, on calculera en fonction de R, les longueurs des segments : BM, AM, NP, ON.

(B. E. P. C.)

311. Soit un cercle de centre O, de diamètre

$$PQ = 2R = 24 \text{ cm.}$$

On trace la corde AB médiatrice du rayon OP. Le cercle de diamètre AB coupe OQ en M. Les cordes AM et BM coupent le cercle O respectivement en C et D.

1° Montrer que AB, CD, AD et BC sont les côtés de polygones réguliers inscrits dans le cercle O et donner leur valeur en fonction de R.

2° Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Calculer ses angles (en degrés) et ses diagonales (en fonction de R).

3° Calculer l'aire du quadrilatère ABCD.

312. On considère un cercle de centre O, de diamètre
 $AB = 2R$. Une sécante coupe AB en I et le cercle en P et Q, Q étant le milieu de l'un des demi-cercles déterminés par AB. Soient M et N les projections respectives de A et de B sur PQ.

1° Comparer les triangles APM et BPN. Montrer que OM est médiatrice de AP.

2° Si P décrit le demi-cercle \widehat{AB} , Q restant fixe, sur quelles lignes se déplacent M et N?

3° Si $AP = R$, calculer en fonction de R, les segments PB, PM, PN, MN.

En déduire la valeur de R pour que $MN = \sqrt{2}$.

313. Dans un trapèze rectangle, la petite base AB est égale
 au côté oblique : $AB = BC = a$ et l'angle \widehat{ABC} est égal à 135° .

1° Calculer la hauteur du trapèze.

2° Calculer son aire.

3° Les bissectrices des angles \widehat{B} et \widehat{D} coupent la diagonale AC en M et N. Calculer MN.

314. Soient la circonférence de centre O et de rayon R, A un point fixe de cette circonférence, B un point fixe du diamètre AA' (On fera la figure dans le cas où A et B sont de part et d'autre de O et où $OB = \frac{R}{4}$).

On considère un diamètre mobile MM' . Les droites AM et BM' se coupent en P. La parallèle menée de P à MM' coupe AB en I.

1° Que peut-on dire des triangles BIP et BOM'? des triangles AIP et AOM'?

2° Montrer que le rapport $\frac{IA}{IB}$ est constant. En déduire que I est fixe.

3° Quel est le lieu géométrique de P? Le situer de façon précise par rapport à la circonférence.

4° A, O, B ayant la disposition déjà indiquée et $OB = \frac{R}{4}$, on considère la position particulière du point M pour laquelle les diamètres MM' et AA' sont perpendiculaires. Calculer, en fonction de R les longueurs AP, BP, $M'P$ et la hauteur issue de A dans le triangle $AM'P$. (B. E. P. C.)

315. Soit un triangle équilatéral ABC de côté a; M, le milieu de BC.

1° Mener, parallèlement à BC, un segment DE (D sur AB, entre A et B, E sur AC entre A et C) tel que ce segment soit la diagonale d'un carré dont l'un des sommets coïncide avec le point M.

2° Soit N le 4^e sommet du carré, O, le centre du carré et G le centre du triangle, H le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur BM. Indiquer la forme des triangles DHB et DHM, Comparer DB et BH; DH, HM et OM.

Calculer OM, AN et OG et l'aire du triangle ADN.

(B. E.)

316. Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2 R. On trace les cordes AC et CD respectivement égales aux côtés du carré inscrit et de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle (D entre C et B). Soit H la projection de D sur le diamètre AB.

1° Évaluer les angles du quadrilatère ACDB.

2° Calculer DH, OH, HB, DB, AD.

3° Soit I l'intersection de AD et CB. Que vaut l'angle \widehat{AIB} ? Comparer les segments ID et IB les segments IC et IA. Calculer IB et IC et la valeur du produit $IC \times IB$.

(B. E. P. C.)

317. Soit BC un diamètre fixe d'un cercle de centre O et de rayon R.

1° On prend un point M variable sur le cercle. La bissectrice intérieure de l'angle BMC coupe BC en D et le cercle en E. La bissectrice extérieure de l'angle BMC coupe le cercle en E'. Précisez la position des points E et E'.

2° On désigne par I le centre du cercle inscrit au triangle BMC. Calculez l'angle \widehat{BIC} et trouvez le lieu géométrique de I.

3° La parallèle à ME, menée par le point C, coupe le prolongement de BM en N. Calculez l'angle \widehat{MNC} et trouvez le lieu géométrique de N.

4° On fixe le point M de telle façon que $CM = R$. Calculez en fonction de R la longueur BM, le rapport $\frac{DB}{DC}$, puis les longueurs DB et DC. (B. E. P. C.)

318. Deux droites parallèles coupent un cercle de part et d'autre du centre O et déterminent les cordes AB , égale au côté de l'hexagone inscrit, et CD égale au côté du triangle équilatéral inscrit.

1° Indiquer la nature du quadrilatère $ABDC$ et la mesure en degrés des arcs \widehat{AC} et \widehat{BD} .

2° Donner la mesure de l'angle formé par les 2 diagonales.

3° Calculer le périmètre et la surface de quadrilatère $ABDC$.

319. On donne un cercle de centre O , de rayon R . A partir d'un point A de la circonférence, on prend un arc \widehat{AB} de 60° ; à la suite, un arc \widehat{BC} de 90° et enfin un arc \widehat{CD} de 120° .

1° Quelle est la valeur de l'arc \widehat{DA} ? Précisez la nature du quadrilatère $ABCD$. Donner la valeur des côtés en fonction de R .

2° Montrer que les diagonales sont perpendiculaires. Soit I le point de rencontre des diagonales, M et N les milieux des côtés AB et CD . Montrer que la perpendiculaire élevée au milieu de AB passe par I et O . En déduire que les 4 points M, I, O, N sont en ligne droite.

3° Calculer les segments déterminés par I sur les diagonales et l'aire du quadrilatère $ABCD$. (B. E.)

320. Dans un cercle de centre O et de rayon R , on inscrit un trapèze isocèle tel que la grande base AB est égale au côté du triangle équilatéral inscrit et les côtés non parallèles AD et BC sont égaux au côté du carré inscrit.

1° Expliquer la construction.

2° Évaluer la mesure de l'arc \widehat{CD} et celle des angles du trapèze.

3° Démontrer que les diagonales sont perpendiculaires en M .

4° Calculer le périmètre et l'aire du trapèze.

5° Calculer les aires des triangles AMB et BMC .

321. On donne un triangle ABC dans lequel $AB = a$; $\hat{A} = 105^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$.

1° Construire ce triangle et le segment capable de l'angle \hat{C} en justifiant ces tracés. (Tracer complètement le cercle O auquel appartient ce segment.)

2° Dans le cercle O , on mène la corde CD parallèle à AB et on joint DB ; que dire de la figure $ABCD$ et de ses côtés? Calculer son périmètre et sa surface, en fonction du rayon R du segment de cercle.

3° Démontrer que les diagonales AD et BC sont perpendiculaires. Si N est leur point commun, calculer les longueurs NA, NB, NC et ND .

4° Démontrer que les milieux des côtés $ABCD$ sont sur une même circonférence et calculer son rayon. (B. E.)

322. Sur 2 droites perpendiculaires en O on porte sur la première, de part et d'autre de O , les longueurs $OA = a\sqrt[3]{3}$ et

$OB = 2a\sqrt{3}$ et sur la deuxième, de part et d'autre de O , les longueurs $OC = a$, $OD = 6a$.

a) Montrer que le quadrilatère $ACBD$ est inscriptible dans un cercle. En construire le centre.

b) Calculer le périmètre et la surface du quadrilatère $ACBD$.

c) Si x désigne l'angle BCD , calculer en fonction de x les angles du quadrilatère $ACBD$.

d) Démontrer que la hauteur OH du triangle COA passe par le milieu, M , du côté BD . (B. E. P. c.)

323. Dans un triangle ABC on trace le cercle inscrit de centre I . La perpendiculaire en I à AI coupe AB en E et AC en D .

1° Démontrer la similitude des triangles BIC , BEI et IDC . En déduire la relation $EI^2 = BE \cdot CD$.

2° Si $\widehat{BAC} = 90^\circ$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$, calculer en fonction de $AB = a$.

a) le rayon du cercle inscrit au triangle.

b) les segments IA , ID , IE , CD , BE .

c) les aires des triangles BIC , BEI , IDC .

324. On donne 3 points A , B , C dans cet ordre situés sur une droite et tels que $AB = 2BC$. On décrit un cercle de diamètre AB et en C on élève la perpendiculaire Cx à la droite AC . Une sécante coupe le cercle en A et P et la perpendiculaire Cx en Q .

1° Démontrer la relation $AB \cdot AC = AP \cdot AQ$.

2° Démontrer que le quadrilatère $BCQP$ est inscriptible dans un cercle.

3° Quelle ligne décrit le centre O de ce cercle lorsque la sécante AP tourne autour de A ?

4° Dans le cas où $AB = BQ$, calculer AP en fonction de $AB = 2R$. Comment, peut-on construire le point P ?

325. On donne un triangle ABC rectangle en A dans lequel le côté $AB = a$ et le côté $AC = a\sqrt{3}$.

1° Calculer le côté BC et donner la valeur des angles B et C .

2° Les perpendiculaires à BC élevées en B et en C coupent les prolongements des côtés CA et BA respectivement en \widehat{D} et \widehat{E} . Calculer les périmètres des triangles ABD et ACE .

3° On trace les cercles circonscrits aux triangles ABD et ACE .

Démontrer que ces cercles sont tangents à BC l'un en B , l'autre en C et qu'ils sont tangents entre eux en A .

326. On donne un cercle de centre O , de rayon R et une corde AB de ce cercle. Soit un point C situé sur le grand arc \widehat{AB} du cercle O .

1° Construire 2 cercles qui soient tangents au cercle O en C et à la corde AB ou à son prolongement; l'un de centre O_1 sera tangent intérieurement et l'autre, de centre O_2 , sera tangent extérieurement au cercle O .

2° On suppose que AB est le côté du triangle équilatéral inscrit

et que BC est le côté de l'hexagone inscrit. Calculer, en fonction de R, les rayons r' et r'' des cercles O_1 et O_2 puis l'aire du quadrilatère O_1MNO_2 (M et N étant les points de contact des cercles O_1 et O_2 avec AB).

327. On considère un triangle ABC rectangle en A. Soit AH la hauteur de ce triangle, issue de A. On prend le symétrique D de H par rapport à AB, puis le symétrique E de H par rapport à AC.

1° Montrer que les 3 points D, A, E sont en ligne droite.

2° Montrer que le quadrilatère DBCE est un trapèze rectangle, et que la circonférence ayant DE pour diamètre est tangente en H à BC.

3° On pose $AC = b$ et $AB = c$.

Exprimer en fonction des longueurs b et c l'aire du trapèze DBCE, le côté BC de ce trapèze et sa hauteur DE.

4° Quel doit être le rapport des longueurs b et c pour que l'angle $\widehat{DBC} = 60^\circ$? (B. E. P. C.)

328. Deux cercles l'un de centre O et de rayon R, l'autre de centre O' et de rayon R', se coupent en A et B. On marque le point C diamétralement opposé à A dans le cercle O et le point D diamétralement opposé à A dans le cercle O'. La perpendiculaire abaissée de C sur AD coupe le cercle O en F et la perpendiculaire abaissée de D sur AC coupe le cercle O' en E.

1° Montrer que CD passe par B.

2° Comparer en grandeur et en direction les segments OO' et CD.

3° Démontrer que les droites AB, CF et DE sont concourantes en un point H.

4° Dans le cas où $\widehat{ACF} = 30^\circ$, calculer en fonction de R les segments AF et CF, puis en fonction de R' les segments AE et DE.

329. Soient Ax et By les perpendiculaires élevées aux extrémités A et B d'un segment AB et du même côté de ce segment. On considère un angle droit \widehat{zMt} qui pivote autour d'un point fixe M situé sur AB entre A et B; Mz coupe Ax en C et Mt coupe By en D.

1° Comparer les triangles AMC et BDM. Montrer que le produit $AC \times BD$ est constant.

2° En déduire la construction de l'angle \widehat{zMt} pour la position duquel CD est parallèle à AB.

3° Dans le cas où $\widehat{AMz} = 60^\circ$, calculer le périmètre et l'aire du trapèze ABCD en fonction de $AM = a$ et $MB = \frac{a}{3}$.

330. On donne un cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$. En A on mène la tangente à ce cercle sur laquelle on port $AP = AB$. Une sécante issue de P coupe le cercle en M et N.

1° Calculer, en fonction de R, le segment PO et le produit $PM \times PN$.

2° Si M est le milieu de PN, calculer PM, PN et la distance OH du centre à la sécante PMN. Que peut-on dire dans ce cas du triangle OMN?

3° Construire, à la règle et au compas, les sécantes PMN telles que M soit le milieu de PN. Montrer que l'une d'elles passe par B.

331. 1° En prolongeant les côtés d'un carré de longueurs égales, construire un octogone régulier convexe.

2° En utilisant le cercle dans le même carré, tracez un octogone régulier inscrit dans ce carré. Montrez que ses côtés sont parallèles à ceux du premier.

3° Calculez le côté et l'apothème de chacun de ces polygones et l'aire qu'ils limitent.

Côté du carré : 5 cm.

(B. E. P. C.)

332. Soit un segment de droite AB. Construire une circonférence passant par A et B. Soient O son centre, C un point de cette circonférence, C' le point diamétralement opposé, H le point de concours des hauteurs du triangle ABC, I le milieu de AB.

1° Étudier le quadrilatère ABHC'. Quelle propriété ont les points H, I, C'? Calculer CH en fonction de OI.

2° Construire un triangle ABC, tel que $AB = 8$ cm, $CH = 6$ cm, $CI = 7$ cm. Si le problème admet plusieurs solutions, préciser leurs relations. AB et CH gardant les valeurs données, entre quelles limites doit être comprise la longueur de CI pour que le problème soit possible? Pour quelles valeurs de CI l'angle \hat{C} est-il aigu ou obtus?

3° AB restant égal à 8 cm, calculer CH pour que $\hat{C} = 60^\circ$.

(B. E.)

333. On considère un cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$. Une corde CD, mobile, est perpendiculaire à AB en P et P se déplace de A à O. Une sécante issue de A coupe CD en M et le cercle en N; l'arc BN mesure 60° .

1° Établir la relation $AM \cdot AN = AB \cdot AP$.

2° Démontrer que le quadrilatère MNBP est inscrit dans un cercle de centre I. Sur quelle ligne se déplace le centre I lorsque CD varie?

3° Calculer BN et AN. Lorsque $AP = \frac{R}{2}$, calculer AM, PM et BM.

334. Soit un carré ABCD de côté $a = 34,14$ mm. On porte, sur les côtés, à partir de chaque sommet des longueurs égales

$AA' = AA'' = BB' = BB'' = CC' = CC'' = DD' = DD''$.

1° Démontrer que si on joint et qu'on prolonge $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$, on obtient un carré EFIK.

2° Prouver que les points A' , B'' , $B' C''$, $C' D''$, D' , A'' sont sur un même cercle

3° Quelle doit être la valeur de $AA' = x$ pour que l'on ait :
 $A''A' = A'B'' = B''B' = B''C'' = C''C' = C'D'' = D''D' = D''A''$?
 Que peut-on dire dans ce cas de l'octogone $A'B''B'C''C'D''D'A''$?
 (B. E.)

335. On considère un triangle ABC rectangle et isocèle ($AB = AC = a$). D'un point O situé sur AB, pris comme centre, on décrit un cercle de rayon OA et qui coupe AB en M. On mène la tangente CT à ce cercle. La corde AT coupe OC en I.

1° Indiquer la nature du triangle CAT. Que représente la droite CI pour le triangle?

2° Comparer les triangles CIT et ATM, puis les triangles MAC et MTI.

3° Préciser la position du point O lorsque le point T se trouve sur BC. Dans ce cas calculer AM en fonction de a.

336. 1° Construire un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et que la hauteur BH relative à AC soit égale à 3 cm.

2° Mener en B une perpendiculaire à AB. Cette perpendiculaire coupe AC en D. Quelles remarques faites-vous au sujet des triangles ABH et ADB?

3° Calculer les longueurs des segments BD et AD.

4° Montrer que l'angle \widehat{ABC} est un angle obtus inférieur à 105° .

5° Calculer la hauteur CH' du triangle ABC, le côté BC et la hauteur AH''.

337. Un triangle équilatéral ABC est inscrit dans une circonférence de centre O et de rayon R. On désigne par I le point de cette circonférence diamétralement opposé à A.

Sur BA, de B vers A, et sur le prolongement de AC au-delà de C on porte 2 longueurs égales $BM = CN = b$.

1° Démontrer que $IB = IC$ et que $IM = IN$.

2° Évaluer en degrés l'angle \widehat{MIN} et montrer que le quadrilatère AMIN est inscrit dans une circonférence.

3° Sur quelle ligne se déplace le centre de cette circonférence quand on fait varier b? Construire celle de ces circonférences qui est tangente à AB. Évaluer en fonction de R la longueur b correspondante.

4° La droite MN coupe BC en un point K. Que pensez-vous du quadrilatère MBIK? Montrer que K est le milieu de MN.

(E. N.)

338. 1° On considère, dans le même sens de parcours, sur une circonférence (C) de centre O, de rayon R, les points A, B, C, D, tels que les cordes AB, BC, CD soient respectivement les côtés de l'hexagone régulier inscrit, du carré inscrit du triangle équilatéral inscrit. Que peut-on dire de la corde AD? Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Quelles sont les longueurs des côtés de ce quadrilatère, que l'on désigne, par la suite, par la lettre (T)?

2° Les triangles AOB, BOC, COD, DOA qui composent (T) peuvent être détachés de la figure, puis replacés sur celle-ci, le

point O reprenant sa place, les sommets des côtés opposés à O revenant sur la circonférence (C), mais ces triangles se succédant dans un ordre quelconque. Utilisant tous les ordres possibles, on obtient un certain nombre de quadrilatères inscrits dans la circonférence (C). Démontrer que ces quadrilatères ne sont pas tous différents, qu'ils sont égaux, soit à (T), soit à un autre quadrilatère (Q) que l'on précisera.

3° Calculer, en fonction de R, pour chacun des quadrilatères (T) et (Q) la surface et les diagonales. Comparer les aires obtenues : le résultat pouvait-il être prévu? Vérifier dans chacun des deux cas que le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. (E. N.)

339. Soit un cercle de centre O, de rayon $R = 4$ cm. La médiatrice du rayon OM coupe le cercle en A et B. Les tangentes au cercle menées en A et B se coupent en S. Soit un point P de AB. La perpendiculaire à OP coupe SA en C et SB en D.

1° Montrer que les quadrilatères OBDP et OCAP sont inscriptibles.

2° Montrer que les triangles OAB et OCD sont semblables et calculer leurs angles.

3° On suppose : $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$. Évaluer les segments : OP, PC, PD,

OC, OD.

4° Montrer que le quadrilatère OCSD est inscriptible.

340. Deux cercles O et O' de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. On mène par A une sécante quelconque BAB' qui coupe le cercle O en B et le cercle O' en B'.

1° Démontrer que les rayons OB et O'B' sont parallèles.

2° On prolonge BO jusqu'à son deuxième point d'intersection C avec la circonférence O. Démontrer que CB' coupe la ligne des centres OO' en un point fixe S.

3° Calculer les segments SO et SO'.

4° On considère le cas particulier où $R = 3R'$. Quelle doit être la position de la sécante BAB' pour que CB'S soit tangente commune aux deux circonférences?

5° Calculer dans ce cas la longueur CB' de la tangente commune. (B. E.)

341. On donne 2 cercles de centres O et O', de rayons R et R' tangents extérieurement en M. Une tangente commune extérieure touche le cercle O en A, le cercle O' en B et coupe la droite des centres en I, la tangente commune intérieure coupe AB en N. AM coupe ON en P et BM coupe O'N en Q.

1° Démontrer que les triangles ONO' et AMB sont rectangles.

2° Établir la relation $AB^2 = 4RR'$.

3° On mène le diamètre AA' du cercle O et le diamètre BB' du cercle O'. Démontrer que les points A, M, B' puis les points B, M, A' sont alignés.

4° Dans le cercle O, C est diamétralement opposé à M et dans

le cercle O , D est diamétralement opposé à M , démontrer la relation $CD^2 = AB'^2 + BA'^2$.

5° Calculer, en fonction de R et de R' les segments MN , AB , ON , $O'N$, OI , $O'I$.

6° Si $R = 3R'$: a) Quelle est la mesure en degrés de l'angle \widehat{AOI} .

b) Calculer l'aire du quadrilatère $MPNQ$ en fonction de R .

342. On donne 2 cercles O et O' de rayons R et R' tangents extérieurement en M . On mène 2 rayons parallèles OA et $O'B$ de même sens.

1° Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M .

2° AB et OO' se coupent en I . Démontrer que I est fixe quel que soit A sur le cercle O . Calculer IO .

3° Soit B' diamétralement opposé à B dans le cercle O' ; démontrer que les 3 points A , M et B' sont alignés.

4° Si $R = 3R'$ et $\widehat{MOA} = 60^\circ$, quelle est la position particulière de AB et quelle est la longueur du segment AB ?

343. Deux cercles égaux, de rayon $R = 5$ cm, sont tels que la distance des centres $OO' = 5$ cm. Ils se coupent en A et B . Les prolongements de OO' coupent le cercle O en C et le cercle O' en D .

1° Montrer que les triangles ABC et ABD sont équilatéraux. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$? Calculer l'aire de ce quadrilatère.

2° Par un point P du petit arc \widehat{AC} du cercle O on mène la corde PA qui coupe le cercle O' en E , la corde PB qui coupe le cercle O' en F et la corde PO' qui coupe le cercle O' en I et en J . Calculer les angles BPO' et $AP'O'$.

3° Nature du quadrilatère $AFBE$ et de la droite PO' pour ce quadrilatère.

4° Démontrer que I est le centre du cercle inscrit au triangle PAB .

344. Deux cercles de centres respectifs O et O' et de rayons R et R' ($R < R'$) sont tangents extérieurement en A . On trace une tangente commune extérieure qui touche le cercle O en T et le cercle O' en T' . La tangente commune intérieure coupe TT' en B .

1° Donner le caractère du quadrilatère $OTT'O'$. Montrer que le triangle OBO' est rectangle en B et qu'il est équivalent à la moitié du quadrilatère $OTT'O'$.

2° Calculer les segments TT' , OB , OB' et vérifier la relation

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{O'B}^2.$$

3° On veut que l'angle $\widehat{AOT} = 120^\circ$; quelle doit être la relation entre R et R' ?

345. Dans l'intérieur de l'angle A d'un triangle isocèle ABC ($AB = AC$) on mène une demi-droite AEF , rencontrant la base BC en E et le cercle circonscrit à ABC en F .

1° Montrer que les triangles ABE et AFB sont semblables. En

déduire que le produit $AE \times AF$ reste constant quand E parcourt BC.

2° Montrer que les cercles circonscrits à BEF et à EFC sont tangents respectivement à AB et à AC.

3° La droite CH, perpendiculaire à AF, rencontre FB en I. Montrer que AF est médiatrice de CI. En déduire le lieu du point I lorsque E décrit le côté CB du triangle fixe ABC.

4° On suppose que $AC = 6$ cm et que, l'angle \hat{A} étant supérieur à 30° , l'angle \widehat{CAF} vaut 30° . Évaluer l'aire du triangle AIC.
(B. E. P. C.)

346. 1° Soient ABC un triangle équilatéral de côté 6 cm et (O) son cercle circonscrit, de centre O, dont on calculera le rayon R.

2° Soit M un point de l'arc \widehat{AB} du cercle (O). Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BMC} ? Montrer que la bissectrice intérieure de BMC passe, quel que soit le point M, par un point fixe et qu'il en est de même pour sa bissectrice extérieure.

3° Soient H l'orthocentre du triangle BMC (point d'intersection des hauteurs) et K le point où se coupent les perpendiculaires BK à BM et CK à CM. Quelle est la nature du quadrilatère BHCK? Montrer que K est sur le cercle (O) et indiquer la position relative des points M, O, K.

4° Lorsque M décrit l'arc AB, quel est le lieu géométrique du point K? Montrer que le milieu du segment HK est un point fixe. Déduire le lieu géométrique du point H du lieu de K.
(B. E. P. C.)

347. Dans un cercle de centre O, on mène 2 diamètres perpendiculaires AB et CD. On prend un point I variable sur OC. On trace AI, qui recoupe le cercle en E.

1° Montrer que le quadrilatère OBEI est inscriptible dans un cercle.

2° Sur quelle ligne se déplace le centre O de ce cercle quand I décrit OC?

3° Montrer que les triangles AOI et AEB sont semblables et calculer, en fonction du rayon R du cercle O, les segments AI, AE, EB dans le cas où I est le milieu de OC.

4° Calculer ces mêmes segments dans le cas où l'angle $\widehat{IAB} = 30^\circ$
(B. E. P. C.)

348. Un triangle ABC est tel que le côté $BC = 6$ cm est fixe et que l'angle \hat{A} mesure 30° .

1° Quel est le lieu géométrique du sommet A? Construire ce lieu.

2° Dans le cas où $\hat{B} = 60^\circ$, construire et calculer la hauteur CK relative au côté AB.

3° Dans le cas où \hat{B} est quelconque, soit BH la hauteur relative au côté AC, quelle est la propriété du quadrilatère BHCK? Éva-

luer les angles et les côtés du triangle MHK (M étant le milieu de BC).

4° En déduire que la droite HK reste tangente à un cercle fixe. Donner le centre et le rayon de ce cercle.

349. On donne un carré ABCD de côté a . Par les sommets opposés A et C, on trace, extérieurement au carré, les parallèles mn et pq ; par les sommets opposés B et D, on trace les parallèles rs et xy perpendiculaires à mn et à pq . On détermine ainsi un quadrilatère EFGH.

1° Comment peut-on tracer, avec la règle et l'équerre, les droites mn , pq , rs et xy ?

2° Démontrer que le quadrilatère EFGH est un carré. Par quels points passent les 4 cercles décrits sur chacun des côtés du carré ABCD comme diamètres?

3° Calculer, en fonction de a , la longueur du côté, celle de la diagonale et la surface du carré EFGH dans les 2 cas suivants :

a) l'angle \widehat{EAB} vaut un demi-droit.

b) l'angle \widehat{EAB} vaut deux tiers de droit. (B. E.)

350. On donne un carré ABCD de côté a . On prolonge les côtés BC et CD dans le sens BCx et CDy et l'on porte $BM = b$ ($b > a$) et $DN = b$, sur ces prolongements. On joint AN et AM et l'on construit le parallélogramme AMFN.

1° Démontrer que ce parallélogramme est un carré.

2° Démontrer que F est situé sur la bissectrice de l'angle \widehat{xCy} et que l'angle \widehat{ACF} est égal à un droit.

Réciproquement, connaissant F sur la bissectrice de l'angle \widehat{xCy} , déterminer la position de M et construire le carré.

3° Soit O le milieu de AF, établir que la figure BOFC est un trapèze dont on calculera les bases, la surface et la diagonale BF en fonction de a et de b . (B. E.)

351. On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ et un point M variable sur ce demi-cercle. On construit le triangle ABM. On prolonge AM d'une longueur $MC = MB$.

1° Quelle est la nature du triangle MBC?

2° Sur quelle ligne se déplace le point C lorsque M varie? Construire cette ligne.

3° Lorsque C est équidistant de A et de B, calculer la hauteur relative au côté AB du triangle ABC.

352. Soient 2 cercles concentriques (C) et (C') de rayons respectifs a et $2a$ (a longueur donnée). P étant un point situé à l'extérieur de (C), on trace le cercle de centre P et passant par O. Ce cercle coupe (C') en 2 points M et M'.

1° Démontrer que la hauteur issue de P dans le triangle OPM est tangente à (C).

2° Cette hauteur coupe (C') en E et F. Calculer la longueur du segment EF en fonction de a .

3° On mène de E et F la tangente autre que EF à (C). Ces 2 nouvelles tangentes se coupent en G. Montrer que le point G est sur le cercle (C'). Quelle est la nature du triangle EFG?

4° On mène la tangente FT en F au cercle (C'). Montrer que le point P' symétrique du point P par rapport à la droite FM est sur FT. (E. N.)

353. On donne un triangle isocèle ABC rectangle en A. Un point P mobile sur BC, entre B et C, se projette en B' sur AC et en C' sur AB.

1° Quelle est la nature du quadrilatère AB'PC'? Montrer que le cercle circonscrit à ce quadrilatère passe par le milieu M du côté BC. Sur quelle ligne se déplace le centre O de ce cercle quand P varie sur BC?

2° Montrer que le triangle MB'C' est semblable au triangle ABC. Soit D le symétrique de A par rapport à BC. Montrer que MA = MD. Comparer en grandeur et en direction DP, et la médiane du triangle MB'C' issue de M. En déduire que DP est perpendiculaire à B'C'.

3° Si $BC = a$ et $BP = \frac{3a}{4}$, calculer en fonction de a , les longueurs PB' PC', B'C', l'aire du triangle AB'C' et l'aire du quadrilatère BCB'C'.

354. On donne un cercle de centre O, de diamètre AB = 2 R. On mène une corde BD égale au côté de l'hexagone régulier inscrit dans ce cercle. Soit C le milieu de AO. La médiatrice de AO coupe BD en F et AD en E.

1° Montrer que le quadrilatère BCED est inscriptible dans un cercle. Calculer, en fonction de R, les segments AE, CE et ED.

2° Établir la similitude des triangles ADB et FCB et en déduire les segments FB et FC en fonction de R.

3° Montrer que BE est perpendiculaire à AF.

4° Une corde DM pivote autour de D dans l'angle ADB. Sur quelle ligne se déplace le milieu de la corde DM?

355. Soit un triangle isocèle ABC (AB = AC) inscrit dans un cercle O de rayon R. On prend un point D quelconque sur l'arc \widehat{BC} opposé à A. On mène AD et de C on mène CH perpendiculaire à AD.

1° Démontrer que la distance du point H au milieu M de AC est constante, quel que soit D. Lieu du point H.

2° On construit le symétrique de C par rapport à AD. Soit G ce point. Quel est son lieu géométrique?

3° Démontrer que les points D, G, B sont en ligne droite.

4° AD et BC se coupent en I. Trouver dans la figure un triangle semblable au triangle ADC et en déduire que le produit $AD \times AI$ reste constant quelle que soit la position de D. Quelle est la valeur de ce produit, en fonction de R, si $\widehat{BAC} = 90^\circ; 60^\circ; 120^\circ$ (E. N.)

356. On donne un triangle équilatéral ABC de côté a . Les 3 hauteurs sont concourantes en O . Le prolongement de BO coupe en E la perpendiculaire élevée en C à BC .

1° Montrer que le triangle EAC est isocèle. Calculer ses angles puis les segments CE et BE .

2° Montrer que E est sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

3° Déterminer le centre I du cercle inscrit au quadrilatère $ABCE$ et calculer le rayon r de ce cercle inscrit, en fonction de a puis en fonction du rayon R du cercle circonscrit.

357. On considère un cercle de centre O , de rayon R , et deux diamètres perpendiculaires AB et CD . Un point M décrit l'arc \widehat{AC} . Les droites AM et BM coupent CD respectivement en P et I .

1° Démontrer que les quadrilatères $AOIM$ et $BOMP$ sont inscriptibles chacun dans un cercle dont on précisera les centres respectifs O_1 et O_2 .

2° Le point M parcourant l'arc AC , sur quelles lignes se déplacent chacun des centres O_1 et O_2 des cercles précédents?

3° Calculer, en fonction de R , les rayons de chacun de ces cercles lorsque l'arc \widehat{AM} est égal à 60° .

358. Sur une droite xy on porte les segments $BC = 9$ cm et $BP = 12$ cm (C entre B et P).

1° Quel est le lieu des centres des cercles passant par B et C ?

2° Soit O le centre de l'un de ces cercles. Construire les tangentes PA et PA' au cercle O . Quel est le lieu de A et de A' ?

3° Trouver le centre O' du cercle tangent intérieurement au cercle O en A et en D à la droite BC . Montrer que D est un point fixe. En déduire le lieu de O' .

4° La droite AD coupe le cercle O en E . Comparer les triangles OAE et $O'AD$. En déduire que AE est bissectrice de l'angle BAC .

5° Si AB est diamètre du cercle O , calculer les angles \widehat{ABP} , \widehat{APB} et les segments AB , AC , BD , DC .

359. Un triangle équilatéral de grandeur constante se déplace de manière que B et C décrivent une droite fixe (Δ) .

1° Sur quelle ligne se déplace le sommet A ?

2° On donne un point fixe, O , sur (Δ) et de O on mène les perpendiculaires OD à AC et OE à AB ; montrer que ces perpendiculaires sont fixes, que les quadrilatères tels que $AEDO$ sont inscriptibles, que les centres de ces quadrilatères se déplacent sur une droite fixe.

3° Déterminer la position de AFC pour que le triangle BAO soit rectangle en A .

4° En fonction de $BC = a$, calculer pour cette position, OA , OD , puis DK perpendiculaire à AB . Montrer que DK passe par le milieu de BC . (E. N.)

360. Étant donné un demi-cercle de centre O , de diamètre $AB = 2R$, on élève en O le rayon OC perpendiculaire à AB et en B la perpendiculaire Bz à AB . Une sécante issue de A coupe OC en M et le demi-cercle en N .

1° Montrer que si M décrit OC on a toujours $AM \times AN = \text{constante}$.

2° La tangente au demi-cercle menée par N coupe OC en P et Bx en Q. Démontrer :

a) que $PM = PN$.

b) que le quadrilatère OMNQ est un trapèze isocèle.

c) que les triangles ONP et QMP sont égaux.

d) Limiter la ligne sur laquelle se déplace le point Q quand M décrit OC?

3° Démontrer que le point de concours I des diagonales du trapèze OMNQ est le centre d'un cercle tangent en M à OC et en N à PQ.

Si $\widehat{BAN} = 30^\circ$, calculer le rayon de ce cercle.

361. Soit un point M mobile entre les extrémités A et B d'un segment AB. D'un même côté de AB on construit le triangle équilatéral AMC et en B on élève la perpendiculaire Bx à AB. La perpendiculaire à MC en C coupe Bx en D.

1° Démontrer que le quadrilatère BMCD est inscriptible dans un cercle de centre O.

2° Quels sont les lieux géométriques de C et de O?

3° Les droites AC et Bx se coupent en E. Quelle est la nature du triangle DCE?

4° Démontrer que le périmètre du quadrilatère BMCD est constant. Calculer ce périmètre.

5° Suivant la position de M sur AB, étudier la variation de l'angle \widehat{ABC} . Préciser la position de C lorsque $\widehat{MDC} = 45^\circ$.

362. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.

1° Soient MB' et MC' les distances respectives aux côtés AB et AC d'un point M du segment BC. Montrer que la somme $MB' + MC'$ reste invariable quand M décrit le segment BC.

2° On prolonge le côté BC au-delà de C d'une longueur $CF = BC$ et au-delà de B d'une longueur $BD = CB$. On joint AD et AE.

a) Étudier les angles de la figure ainsi obtenue.

b) Construire les projections respectives D', E' de M sur AD et AE. Que peut-on dire du polygone AD'B'MC'E'? Étudier successivement les groupes de points AB'ME', AD'MC', D'B'C'E'.

Étudier les segments E'C' et D'B' et exprimer chacun d'eux en fonction de la longueur AM.

Étudier comment varie le périmètre du polygone AD'B'MC'E' quand M se déplace sur le segment BC de B en C.

(E. N.)

363. Dans un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$, on mène le rayon OC perpendiculaire à AB puis MD perpendiculaire au milieu de AO.

1° Calculer, en fonction de R, le périmètre du quadrilatère ABCD, ses diagonales AC et BD et sa surface.

2° Donner la mesure des 4 angles du quadrilatère.

3° Les diagonales se coupent en E et E se projette en F sur AB. Les côtés AD et BC se coupent en G. Montrer que G, E et F sont

alignés. Si $GF = x$, calculer AF et BF en fonction de x , puis calculer x en fonction de R .

364. On donne un quadrilatère convexe $ABCD$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R . La diagonale AC est un diamètre du cercle et les côtés opposés AB et CD , d'une part, BC et DA , d'autre part, se coupent respectivement en E et F . On désigne par M le second point d'intersection (autre que C) des cercles de diamètre CE et CF .

1° Démontrer que les 3 points E, M, F sont en ligne droite; qu'il en est de même pour A, C, M . Que peut-on en déduire pour les cercles circonscrits aux triangles ADE et ABF ?

2° Évaluer, en fonction de $\widehat{BAD} = \alpha$, les angles \widehat{BME} et \widehat{DMF} . En déduire que la droite MCA est bissectrice de l'angle \widehat{BMD} .

3° I étant le milieu de EF et J celui de BD , étudier la nature du triangle IBD . En déduire que les points O, I, J sont en ligne droite et qu'il existe un cercle tangent aux 4 côtés du quadrilatère $OBID$.

4° On suppose maintenant que AB et AD sont respectivement les côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans le cercle O . Évaluer, en fonction de R , les longueurs $BE = x$ et $DF = y$.

(E. N.)

365. Soit un cercle de centre O et de diamètre $AB = 2R$.

1° On mène une corde AC égale au côté du carré inscrit, puis les tangentes en C et B , qui se coupent en D . Les droites AD et CB se coupent en I . Démontrer que les triangles CID et AIB sont semblables et donner la valeur de leur rapport de similitude; utiliser le résultat obtenu pour calculer en fonction de R la longueur des segments IA, IB, IC, ID et l'aire du triangle DIB .

2° Par le point C , on mène une droite quelconque Cx , qui coupe AB en M , et l'on construit le parallélogramme $CMPO$. Trouver la ligne décrite par le point P lorsque le point M parcourt toute la droite AB .

3° On trace une corde BF , qu'on prolonge de $FG = BF$. Quelle ligne décrit le point G lorsque F varie sur la circonférence?

(B. E. P. C.)

366. Sur les côtés d'un angle droit xOy on porte 2 longueurs égales $OA = OB = a$ (A sur Ox et B sur Oy). Un cercle de centre P variable sur AB et de rayon PO coupe Ox en M , Oy en N et la bissectrice Oz de \widehat{xOy} en C .

1° Indiquer la nature du triangle CMN . En déduire que CP est perpendiculaire sur MN .

2° Montrer l'égalité des segments AM et BN . Évaluer la somme $OM + ON$ en fonction de a .

3° Comparer les triangles AMC et IPC (I , point de concours de AB et de Oz). En déduire la valeur du rapport $\frac{AM}{IP}$.

4° Soit Q le point diamétralement opposé à C sur le cercle de centre P . Sur quelle ligne se déplace le point Q quand P décrit AB ?

5° Calculer l'aire du quadrilatère $OMCN$.

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUE D'UN ANGLE

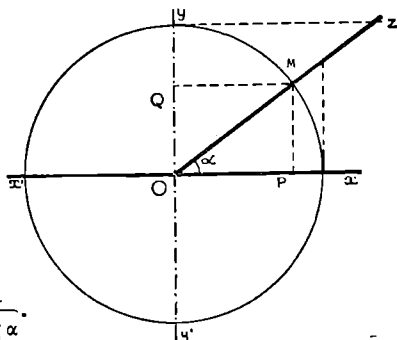
$$\widehat{xOz} = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{PM}{OM}$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{OP}{PM} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$



**Angles
supplémentaires**

$$\sin \alpha = \sin (180 - \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos (180 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} (180 - \alpha)$$

**Angles
complémentaires**

$$\sin \alpha = \cos (90 - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \sin (90 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} (90 - \alpha)$$

- Relations entre les rapports trigonométriques d'un angle

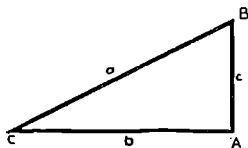
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

- Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

$$b = a \sin \widehat{B} = a \cos \widehat{C} = c \operatorname{tg} \widehat{B}$$

$$c = a \sin \widehat{C} = a \cos \widehat{B} = b \operatorname{tg} \widehat{C}$$



angle α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
0	0	1	0	∞
$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞	0

RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

367. On considère un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ et de rayon OC perpendiculaire à AB . Un point M variable décrit l'arc \widehat{BC} . Les droites AM et OC se coupent en D . La médiatrice de CM coupe AM en I .

1° Montrer que le quadrilatère $AOIC$ est inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre.

2° Sur quelle ligne se déplace le point I lorsque M décrit l'arc \widehat{BC} ? Limiter.

3° Établir que le produit $AD \times AM$ est constant et donner la valeur de cette constante en fonction de R .

4° Établir l'égalité : $\frac{ID}{IM} = \frac{OD}{OM}$ et montrer que chacun de ces rapports est égal à $\text{tg } \widehat{OAD}$.

5° Si D est au milieu de OC , calculer en fonction de R , les segments AD , AM , MB , DM , ID , IM .

368. On considère 2 cercles de centres O et O' , de rayons respectifs R et $\frac{R}{2}$, tangents extérieurement en un point A . Soient BC un diamètre quelconque du cercle (O) et $B'C'$ le diamètre du cercle (O') parallèle à BC et du même sens.

1° Montrer que les points B , A , C' sont en ligne droite.

2° BB' coupe la droite OO' en S . Quelle est la position du point S sur OO' ? En déduire les valeurs des segments SO , SO' et SA en fonction de R .

3° La droite SB' coupe le cercle (O') en B' , puis en un autre point, D ; elle coupe le cercle (O) en B , puis en un autre point, E . Les droites OB et $O'D$ se coupent en I . Montrer que le triangle IBD est isocèle et qu'il existe un cercle tangent en B et D aux 2 cercles donnés.

Existe-t-il un résultat analogue pour les points B' et E ?

4° On suppose maintenant que le rayon OB est perpendiculaire à OO' . Calculer le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle BSO .
(B. E. P. C.)

369. Un triangle ABC rectangle en A est tel que $AB = 2a$, $AC = a$. De part et d'autre de la perpendiculaire à BC élevée en C on porte $CD = CE = \frac{BC}{2}$ (D du même côté que A par rapport à BC).

1° Calculer les rapports trigonométriques de l'angle \widehat{ABC} . Montrer que les points B , A , D sont alignés. Calculer le périmètre au triangle BDE .

2° On trace le cercle circonscrit au triangle BCE . Quel est son rayon? Ce cercle coupe AB en F . Démontrer que AC est tangente à ce cercle. Calculer AF , AD et EF .

3° EF coupe BC en G. Montrer que DG est perpendiculaire à BE.

4° Évaluer les rapports $\frac{GC}{GB}$ et $\frac{GF}{GE}$.

370. On considère un triangle ABC tel que BC = 7,5 cm, CA = 4,5 cm, AB = 6 cm.

1° Démontrer que le triangle est rectangle en A. Calculer la hauteur AH relative à l'hypoténuse.

2° Soit un triangle MBC variable dont le sommet M reste du même côté que A par rapport à BC et dont l'aire est égale à celle du triangle ABC.

Calculer la longueur de la hauteur issue de M. Sur quelle ligne se déplace le point M?

3° Par H on mène la parallèle à MB, qui coupe MC en E, et la parallèle à MC, qui coupe MB en F.

Calculer les rapports de similitude des triangles FBH et MBC, EHC et MBC.

4° Dans le cas où le triangle MBC est isocèle, MB étant égal à MC, calculer la tangente, le sinus et le cosinus des angles \hat{B} et \hat{C} .
(B. E. P. C.)

371. Sur une demi-droite Ax, on prend deux points fixes H et H' tels que AH = 4 cm et AH' = 9 cm et un point variable B tel que AB = x.

On trace un demi-cercle de diamètre AB qui coupe les perpendiculaires à Ax menées par H et H' respectivement en M et M'.

1° Le point B peut-il être choisi de façon quelconque sur Ax? Calculer AM et AM' en fonction de x.

Quelle est la valeur du rapport $\frac{AM}{AM'}$?

Que peut-on en conclure lorsque le point B varie sur Ax?

2° On mène la bissectrice intérieure Ay de l'angle $\widehat{MAM'}$, qui coupe MM' en I, puis, par M et M', on mène les perpendiculaires à Ay qui coupent cette droite en N et N'.

Que peut-on dire des triangles AMN et AM'N'? Calculer les rapports $\frac{MN}{M'N'}$ et $\frac{IM}{IM'}$.

La perpendiculaire menée par I à Ax coupe Ax en K.

Quelle est la valeur du rapport $\frac{KH}{KH'}$?

3° On suppose que x = 13 cm. Calculer :

a) le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{HMH'}$.

b) l'aire du quadrilatère AMM'B. (B. E.)

372. On donne un cercle de rayon R et de centre O.

1° Calculer le côté AB et l'apothème OH de l'octogone régulier inscrit.

2° Calculer les rapports trigonométriques de l'angle $\alpha = 22^{\circ}30'$.

373. On donne un cercle de centre O , 2 rayons perpendiculaires OA et OB et un point M sur le plus petit des arcs \widehat{AB} . La tangente en M coupe OA en C , OB en D . La tangente en A coupe OM en P , la tangente en B coupe OM en Q . Le point M se projette en I sur OA et en J sur OB .

1° Démontrer que $MD = BQ$; $OQ = OD$; $MC = AP$; $OC = OP$.

2° On suppose $OA = R = 1$ et $\widehat{AOM} = \alpha$, variable. Si M décrit l'arc \widehat{AB} , calculer en fonction de α , les segments OI , OJ , AP , BQ , OC , OD , BD , MP , CD .

374. On donne un triangle ABC et la médiane AM .

1° On suppose le triangle MAB semblable au triangle ABC . Quels sont les angles égaux? Justifier. Montrer que l'on a

$$BC = AB\sqrt{2}.$$

2° Réciproquement, si l'on a la relation précédente, les triangles MBA et ABC sont-ils semblables?

3° Si le triangle ABC remplit la condition précédente, peut-il être rectangle? De combien de manières? Dans chaque cas, sachant que l'on a $AB = \sqrt{2}$, calculer BC , CA , AM , $\sin \hat{C}$, $\cos \hat{C}$, $\text{tg} \hat{C}$.

375. I. On considère un angle aigu $\widehat{xOy} = \alpha$ tel que $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

a) sans se servir des tables, calculer $\cos \alpha$ et $\text{tg} \alpha$.

b) construire géométriquement \widehat{xOy} .

II. Soit encore $\widehat{xOy} = \alpha$. On prend un point O' , quelconque sur Ox et l'on décrit le cercle de centre O' qui passe par O , coupe Ox en B et Oy en C ($OO' = R$).

Le rayon $O'D$ perpendiculaire à la corde BC coupe cette corde en E .

a) Démontrer que l'on a :

$$DE = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \text{puis : } \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

b) En déduire le cosinus de l'angle de 60° sachant que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ et calculer le sinus de l'angle de $22^\circ 30'$ sachant que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

376. Soit un cercle de centre O et de rayon $2a$. Sur le prolongement de l'un de ses rayons OR , on mène la perpendiculaire en un point H tel que $OH = 4a$. Sur cette perpendiculaire, de part et d'autre de H , on considère les points variables M et N , tels que $HM \times HN = 12a^2$. L'angle MOH sera désigné par α . Soit aussi le point A sur OR tel que $OA = a$.

1° Montrer que $HM \times HN = HA \times HO$. En déduire la similitude des triangles OHM et NHA .

2° I étant le point d'intersection des droites OM et AN, quelle est la valeur de l'angle \widehat{OIA} ? Lieu de I.

3° La droite AN coupe le cercle O en B et C. En fonction de α et des fonctions trigonométriques de l'angle α , calculer OM, AN, OI, IA, IB et IN.

Vérifier la relation : $IB^2 = IA \times IN$

4° La droite MB est-elle sécante ou tangente au cercle O?
(E. N.)

377. Soit un triangle rectangle ABC dont l'hypoténuse est BC. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

1° On envisage les cercles S_1 de diamètre BC, S_2 de diamètre CA, S_3 de diamètre AB. Où se coupent S_1 et S_2 ? S_1 et S_3 ? S_2 et S_3 ? Calculer les aires S_1, S_2, S_3 de ces cercles et vérifier que $S_1 = S_2 + S_3$.

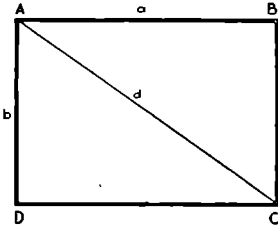
2° Une droite D passe par A sans traverser le triangle ABC et recoupe S_1 en E, S_2 en F, S_3 en G. Montrer que les triangles AFC, BGA, BEC sont semblables.

3° On désigne par α l'angle aigu \widehat{CAF} ; calculer, en utilisant a, b, c et les rapports trigonométriques de l'angle α les côtés de ces triangles, puis leurs aires et vérifier que l'aire du triangle BEC est la somme des 2 autres.
(B. E. P. c.)



AIRES

• Rectangle

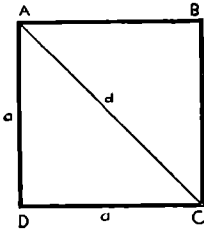


$$\text{périmètre} = 2(a + b)$$

$$\text{aire} = S = ab$$

Si 2 rectangles ont un côté égal,
le rapport de leurs aires est égal au
rapport de leurs côtés inégaux.

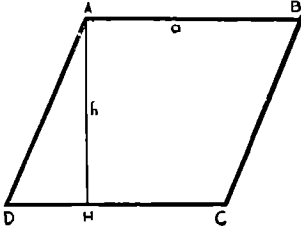
• Carré



$$\text{périmètre} = 4a$$

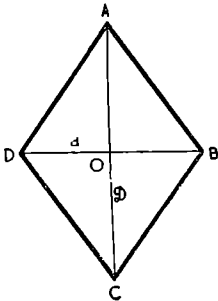
$$\text{aire} = S = a^2.$$

• Parallélogramme



$$\text{aire} = S = bh.$$

• Losange



$$\text{aire} = S = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{2a}{2}.$$

• Triangle

$$1^{\circ} \text{ aire} = S = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$2^{\circ} \quad S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}.$$

$$3^{\circ} \quad bc = 2 Rh; \quad S = \frac{abc}{4R}$$

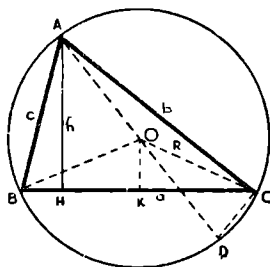
$$4^{\circ} \quad AB + AC + BC = 2p \\ S = pr = (p - a)r_a$$

$$5^{\circ} \quad h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$



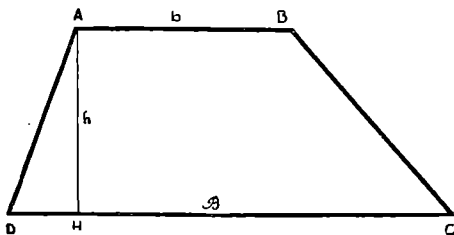
REMARQUES :

1^o Si 2 triangles ont même base (ou même hauteur), le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs hauteurs (ou de leurs bases).

2^o Si 2 triangles sont semblables, le rapport de leurs aires est égal au carré de leur rapport de similitude.

• Trapèze

$$\text{aire} = S = \frac{a + b}{2} \times h.$$



● Polygones

aire d'un polygone régulier = $S = \frac{1}{2}$ périmètre \times apothème = $\frac{pa}{2}$.

Le rapport des aires de 2 polygones semblables est égal au carré de leur rapport de similitude.

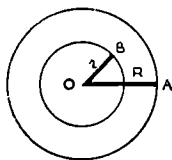
aire du triangle équilatéral de côté $a = S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

● Cercle

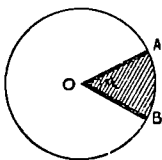
$\pi = \frac{c}{2R} \approx 3,1416 \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113}$; π radians = $180^\circ = 200$ gr

circonférence = $c = 2\pi R = \pi D$; arc $l = \frac{\pi R n}{180}$

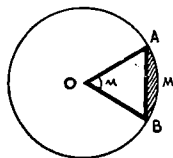
aire cercle = $S = \pi R^2$.



aire couronne = $S = \pi R^2 - \pi r^2$
 $= \pi (R^2 - r^2)$.



aire secteur = $S = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ}$.



aire segment AMB
 $= a \cdot$ secteur OAMB $- a \cdot$ triangle OAB.

AIRES

378. On donne un trapèze ABCD rectangle en A et D, de grande base $AB = a = 8$ cm. Les 2 côtés non parallèles AD et BC se coupent en E, le triangle ABC est équilatéral. Calculer :

- 1° le périmètre et la surface du trapèze.
- 2° le périmètre et la surface du triangle EAB.

379. On donne un segment de droite $AB = 5$ cm de milieu O. On trace 3 demi-droites Ax, Oz et By, perpendiculaires à AB et de même sens. On porte sur Oz un segment $OE = \frac{2AB}{3}$, puis, par E, on trace une sécante variable qui coupe la demi-droite Ax en C et la demi-droite By en D.

- 1° Construire, sans commentaires, la figure ($AB = 5$ cm.)
- 2° Nature des quadrilatères ABDC.
- 3° Montrer que les aires de ces quadrilatères ont même valeur.
- 4° Ces quadrilatères n'ont pas tous le même périmètre. Comment faut-il choisir la sécante CED pour que le périmètre ait la plus grande valeur possible et ensuite la plus petite valeur possible? Calculer le périmètre dans ces 2 cas. (B. E. P. C.)

380. On donne un triangle ABC rectangle en A. Une droite issue de B coupe le côté AC en D et la perpendiculaire CE abaissée de C sur BD coupe BA en F.

- 1° Comparer les triangles ABD et ECD.
 - 2° Montrer que le quadrilatère ABCE est inscritible dans un cercle dont on précisera le centre.
 - 3° Si $\widehat{ACB} = 30^\circ$ et $AB = AD = a$, calculer AC, la hauteur AH relative à BC, l'aire du triangle ABC.
- Donner la nature et l'aire du triangle CAF puis l'aire du triangle BCF.

381. Deux cercles de centres O et O', de rayons R et R', sont tangents extérieurement en A. On mène les tangentes communes extérieures BB' et CC' aux 2 cercles, (B et C sur le cercle O, B' et C' sur le cercle O') et les cordes de contact BC et B'C'.

- 1° Quelle est la nature du quadrilatère BB'C'C?
- 2° Calculer, en fonction de R et de R', le périmètre puis l'aire de ce quadrilatère.

382. Les bases d'un trapèze mesurent 80 m et 40 m; ses côtés non parallèles mesurent 50 m et 30 m.

- 1° Montrer que ce trapèze est rectangle.

2° Les diagonales AC et BD se coupent en I. Démontrer que I est situé au $\frac{1}{3}$ de chacune de ces diagonales.

3° Calculer l'aire du trapèze et celle de chacun des 4 triangles formés par les diagonales.

383. Soient un triangle ABC, CH et BK deux de ses hauteurs.

1° Démontrer que le quadrilatère BHKC est inscriptible dans une circonférence dont on précisera le centre. Tracer cette circonférence.

2° Établir que $AH \cdot AB = AK \cdot AC$. En conclure que les triangles AHK et ABC sont semblables.

3° B et C restant fixes et A variable, déterminer les lieux de H et K.

4° Si $\widehat{KBC} = \widehat{HCB} = 30^\circ$, calculer les côtés des triangles ABC et AHK et l'aire du quadrilatère BHKC en fonction de $BC = a$. (B. E.)

384. On donne deux demi-droites Ox et Oy perpendiculaires en O. On décrit un cercle de centre O, de rayon R, qui coupe Ox en A et Oy en B. La perpendiculaire à Ox passant par le milieu E de OA coupe en C la tangente au cercle (O, R) menée par B.

1° Indiquer une construction simple de la deuxième tangente au cercle (O, R) issue de C. Cette deuxième tangente CK coupe Oy en S.

2° Montrer que $OE = CK$ et que les points O, B, C, K, E, sont sur un même cercle.

3° Démontrer que $SK = 2 SB$. Évaluer SB et SK en fonction de R.

4° Calculer le rapport des aires des triangles SBC et BCK.

385. On donne un triangle ABC rectangle en A et un point D sur le côté AC. Soit E le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur BD. Les droites BA et CE se coupent en F.

1° Établir les relations : $AD \times CD = BD \times DE$
et $AF \times FB = FE \times FC$.

2° Montrer que le quadrilatère ABCE est inscriptible dans un cercle.

3° Si $BC = 2a$, $AD = a$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$, donner la nature du triangle ACF, calculer le côté AC, l'aire du triangle ABC, la hauteur AH relative à l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, l'aire du triangle ACF et l'aire du triangle BCF.

386. On donne un cercle de centre O, de rayon R et un point P extérieur au cercle tel que $OP = d$. Soit MN un diamètre quelconque du cercle.

1° Préciser la position M_1N_1 pour laquelle le triangle PM_1N_1 est rectangle en M_1 . Calculer la surface de ce triangle en fonction de R et de d.

2° On abaisse de P la perpendiculaire PH sur le diamètre variable MN. Quel est le lieu de H?

3° Préciser la position M_2N_2 pour laquelle les 2 angles \widehat{M}_2 et \widehat{N}_2 du triangle PM_2N_2 sont égaux.

4° Montrer que, parmi tous les triangles MNP, celui qui a la plus grande surface est le triangle PM_2N_2 et calculer cette surface.

5° Calculer, en fonction de R et de d, le rayon R' du cercle circonscrit au triangle PM_2N_2 . (B. E. P. C.)

387. 1° Indiquer sans la justifier, la construction de l'hexagone régulier inscrit.

2° Soit un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle de rayon R; en E, on élève la perpendiculaire à DE, qui coupe le prolongement de CD en G :

a) Quelle est la nature du quadrilatère EBCG?

b) Calculer EG, GD (en fonction de R); trouver le périmètre de EBCG.

c) Calculer l'aire du quadrilatère EBCG.

3° On joint FG. Aire du triangle FEG?

(B. E. P. C.)

388. Soit PQ le diamètre d'un cercle de centre O et de rayon R. On trace la corde AB perpendiculaire au milieu de OP.

1° Montrer que AB est le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle.

2° Le cercle de diamètre AB coupe OQ en M; les cordes AM et BM coupent le cercle O respectivement en D et C. Indiquer la nature du quadrilatère ABDC. Calculer ses angles. Montrer que AC et CD sont les côtés de polygones réguliers inscrits.

3° Calculer AD et l'aire du quadrilatère ABDC. Préciser cette surface en cm^2 si $R = 12 \text{ cm}$.

389. On donne un angle droit xOy et un point fixe H sur la bissectrice de cet angle. Soit C le centre d'un cercle variable passant par O et H, coupant Ox en A et Oy en B.

1° Lorsque le cercle varie, quel est le lieu géométrique du milieu de AB?

2° La perpendiculaire menée de H à AB coupe de nouveau le cercle en M. Quel est le lieu géométrique du point M?

3° Dans le cas où $\widehat{OAB} = 30^\circ$, le rayon du cercle C mesurant 5 cm, évaluer l'aire du quadrilatère OAHB. (B. E. P. C.)

390. On considère un triangle rectangle et isocèle ABC ($\widehat{A} = 90^\circ$; $AB = AC$). Le cercle de diamètre AB (centre O) coupe BC en I.

1° Montrer que CA est tangente au cercle O et mener la deuxième tangente CT à ce cercle. Établir la similitude des triangles CAT et OBT. Si $AB = 2R$, calculer AT et BT.

2° Comparer les aires des triangles OAT et OBT. Calculer les aires des triangles ABT et OBT et du quadrilatère ABTC.

3° Montrer que AI est médiane du triangle ABC. AT et OC se coupent en H. Soit K le milieu de CH. Montrer que le segment TK passe par I.

391. Soit un cercle de centre O et dont le rayon $R = 5$ cm. 1° Indiquer le moyen de mener une corde AB telle que l'arc qu'elle sous-tend soit égal à 150° (ne pas se servir du rapporteur)

2° Sur le plus grand des 2 arcs \widehat{AB} , déterminer un point C tel que, si l'on abaisse la perpendiculaire CH sur AB, on ait $AH = CH$.

3° Calculer les arcs CB, AC, les 3 côtés et la surface du triangle ABC.

4° La droite CO coupe la droite AB en D et l'arc AB en E. Calculer l'angle \widehat{ACE} . Démontrer que les triangles ADE et ACB sont semblables. (B. E. P. C.)

392. Soit un demi-cercle de centre O, de rayon R, de diamètre AB. A l'intérieur de ce demi-cercle, on trace un autre demi-cercle de centre O', milieu de AO, et de diamètre AO. Une corde mobile, issue de A, coupe le demi-cercle O' en C' et le demi-cercle O en C.

1° Démontrer que les triangles AOC et AO'C' sont semblables et que leur rapport de similitude est constant.

2° Démontrer que OC' est médiane du triangle AOC et que les tangentes en C' au demi-cercle O' et en C au cercle O sont parallèles.

3° Sur quelle droite fixe se déplace le centre du cercle circonscrit au triangle AO'C'?

4° On mène la tangente BT au demi-cercle O'. Calculer BT et les aires des triangles BTO' et AO'T. (B. E. P. C.)

393. Soit un cercle de centre O et de rayon R.

1° Tracer une corde BA égale au côté du carré inscrit, puis une corde AC égale au côté du triangle équilatéral inscrit (O est à l'intérieur de l'angle BAC). Justifier les tracés.

2° Tracer BC et donner la valeur des angles du triangle BAC
3° Calculer la hauteur AH au triangle ABC, puis le côté BC et l'aire de ce triangle en fonction de R.

4° Prolonger AH jusqu'à son intersection A' avec le cercle. Quelle est la nature du quadrilatère ABA'C'? Évaluer ses côtés et son aire en fonction de R. (B. E. P. C.)

394. 1° Construire un trapèze ABCD tel que la grande base CD mesure $4a$, le côté AD mesure a , l'angle \widehat{D} mesure 60° et l'angle \widehat{C} mesure 45° .

2° Calculer l'aire de ce trapèze.

3° Par un point M de CD tel que $CM = \frac{5a}{2}$, on mène une droite MN (N sur AB) qui partage le trapèze en 2 parties équivalentes. Évaluer BN en fonction de a .

395. Soit un segment de droite AB de longueur $2l$. Soit M un point de la droite AB situé entre A et B. D'un certain côté de la droite AB (choisi une fois pour toutes), on construit le triangle équilatéral AMD. La perpendiculaire menée en D à MD rencontre en C la perpendiculaire en B à la droite AB.

1° Que peut-on dire du quadrilatère MBCD?

2° On prolonge BC d'une longueur $CE = CD$. Que peut-on dire des 3 points A, D, E? En déduire que le quadrilatère MBCD a un périmètre qui ne varie pas quand M se déplace sur le segment AB. Calculer ce périmètre invariable en fonction de l .

3° Calculer, en fonction de l , l'aire du quadrilatère MBCD dans le cas particulier où M est au milieu de AB. Application numérique : $l = 3$ m. (B. E.)

396. Soit le triangle équilatéral ABC de côté a . Sur la hauteur AH on détermine le point D tel que $DH = \frac{AD}{2}$. La droite BD coupe en E la perpendiculaire Cx élevée en C au côté BC. F est l'intersection de BD avec le côté AC.

1° Que peut-on dire du triangle AEC?

2° Montrer que le quadrilatère ABCE est inscriptible. Dire où se trouve le centre O de la circonférence circonscrite à ce quadrilatère et calculer le rayon en fonction de a .

3° Calculer la surface du quadrilatère ABCE.

4° Déterminer la position du centre O' du cercle inscrit dans ce quadrilatère. (B. E. P. C.)

397. On considère sur une droite 3 points A, B, C, dans cet ordre, tels que $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm. On trace le cercle de diamètre AB et la perpendiculaire en C à la droite ABC.

Sur cette perpendiculaire, on prend un point variable M; la droite AM coupe le cercle de diamètre AB en N, la droite BN coupe CM en P et les droites BM et AP se coupent en Q.

1° Montrer que B est le point de concours des hauteurs du triangle AMP. Que peut-on en conclure pour le point Q?

2° Montrer que les quadrilatères MCBN et PCBQ sont inscriptibles. Que peut-on en conclure pour le quadrilatère MNQP?

3° Montrer que les triangles MBC et APC sont semblables et calculer le produit $CM \times CP$.

4° Sachant que $CM = 15$ cm, calculer AM, CP, AN, AQ et l'aire du quadrilatère ANBQ. (B. E.)

398. Soient MN et PQ deux diamètres quelconques d'un cercle de centre O et de rayon R. Par les points M, N, P, Q on mène les tangentes au cercle et on obtient le quadrilatère ABCD.

1° Quelle est la nature de ce quadrilatère.

2° Établir les relations :

a) $AC \cdot BD = 4 R \cdot AB.$

b) $\frac{1}{4 R^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{BD^2}.$

399. 1° Soit un trapèze $ABCD$. On prolonge la grande base AB d'une longueur BE égale à la petite base. Étudie la figure $BECD$.

2° Construire un trapèze isocèle dont la grande base AB mesure 100 mm; la petite base CD , 42 mm; et la diagonale BD , 99 mm.

3° Calculer : la hauteur CH à 0,1 mm près; la surface du trapèze en cm^2 à 1 mm^2 près; les côtés AD et BC à 0,1 mm près.

(B. E. P. C.)

400. Étudier un trapèze (T) , de sommets A, B, C, D , caractérisé par les propriétés suivantes : $AB = 6$ cm; les angles \hat{A} et \hat{B} sont droits; la somme des bases est égale à 12 cm. On désigne par u et v les bases AD et BC , par O le milieu de AB .

1° Établir que l'aire du trapèze (T) est équivalente à celle d'un carré, que l'on définira.

2° Montrer que, lorsque u et v varient, le côté CD passe par un point fixe I .

3° Préciser la ligne sur laquelle se déplace la projection, M , du point O sur la droite CD .

4° Construire un trapèze (T) tel que CD soit double de la différence des bases.

5° Calculer alors le périmètre du trapèze obtenu.

(B. E. P. C.)

401. Étant donné un triangle ABC rectangle en A , on trace la circonférence (C) , qui a pour diamètre la hauteur AH relative à l'hypoténuse. Cette circonférence coupe le côté AB en A et en un deuxième point appelé D . Elle coupe le côté AC en A et en un deuxième point appelé E .

1° Quelle est la nature du quadrilatère $ADHE$?

2° Montrer que le triangle ADE est semblable au triangle ABC .

3° On désigne par M l'intersection avec BC de la tangente à (C) en D et par N l'intersection avec BC de la tangente à (C) en E .

Montrer que l'on a : $MN = \frac{BC}{2}$, aire $DMNE = \frac{\text{aire } ABC}{2}$.

(B. E.)

402. On donne un triangle rectangle ABC dans lequel l'hypoténuse $BC = a$ et $\hat{C} = 30^\circ$.

1° Calculer, en fonction de a , les côtés AB, AC , la hauteur AH , BH et CH et l'aire du triangle ABC .

2° Soit AD la bissectrice de \widehat{BAC} (D sur l'hypoténuse BC), DE et DF les perpendiculaires sur AC et AB . Démontrer la similitude des triangles DEC et BFD . Calculer BD et CD .

3° Nature et surface du quadrilatère $AEDF$?

4° Nature et surface du quadrilatère $BDEF$?

403. Deux droites xx' et yy' se coupent à angle droit en un point O . On porte sur Ox un segment $OA = 24$ mm et sur Oy' un segment OA' de 16 mm, puis on trace la circonférence de cen-

tre A et de rayon 48 mm, qui coupe la demi-droite Oy en B et la circonférence de centre A' de rayon 32 mm qui coupe la demi-droite Ox' en B' .

1° Démontrer que les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables.

2° a) On trace la médiane OM du triangle OAB dont le prolongement coupe $A'B'$ en un point P; démontrer que OP est la hauteur du triangle $OA'B'$.

b) On trace la hauteur OH du triangle OAB dont le prolongement coupe $A'B'$ en un point Q; démontrer que OQ est la médiane du triangle $OA'B'$.

3° Que peut-on dire du quadrilatère $ABB'A'$? Quelle est son aire?

(B. E. P. C.)

404. On donne un triangle ABC rectangle en A. Un cercle variable de centre O, passant par B et C coupe AB en D et AC en E. La hauteur AH relative à l'hypoténuse coupe DE en I.

1° Montrer que les triangles AID et AIE sont isocèles et que I est le milieu de DE.

2° Montrer que la hauteur AK du triangle rectangle ADE passe par M milieu de BC. Indiquer la nature du quadrilatère AMOI.

3° Déterminer le centre O' du cercle variable passant par B et C lorsque I est milieu de AH. Dans ce cas, comparer les aires des triangles BOC et DOE et montrer que les cercles O' de diamètre BH et O'' de diamètre CH sont tangents à DE.

(D'après B. E.)

405. 1° Construire un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse $BC = 10$ cm et le côté $AB = 6$ cm.

Calculer AC, la hauteur AH, les segments BH et CH et les médianes du triangle ABC.

2° Construire la bissectrice intérieure de l'angle A. Elle coupe BC en D et le cercle circonscrit en E. Calculer $\frac{DB}{DC}$, BD, DC. Que peut-on dire du point E?

3° Soit I le centre du cercle inscrit. Trouver l'angle BIC et calculer le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

(B. E.)

406. 1° On considère un trapèze quelconque dont la petite base AB mesure 4 cm, la grande base CD, 6 cm et la hauteur, 5 cm.

I étant l'intersection des diagonales AC et BC, évaluer les aires des 4 triangles de sommet I ainsi formés.

2° Prouver par des considérations géométriques indépendantes de tout calcul effectif d'aire :

a) que les triangles AID et BIC sont équivalents.

b) que leur aire est la moyenne proportionnelle des aires des triangles AIB et CID.

3° Dans l'hypothèse où le trapèze est isocèle, calculer son périmètre. Montrer que ce trapèze est inscritible dans un cercle. Construire géométriquement le centre de ce cercle.

4° Dans l'hypothèse où ce trapèze isocèle a comme bases le côté de l'hexagone régulier et le côté du triangle équilatéral inscrits dans un cercle de rayon R , dont le centre est extérieur au trapèze, calculer en fonction de R :

- a) l'aire du trapèze.
 b) l'aire du cercle comprise entre les 2 bases. (B. E.)

407. On donne un cercle de centre O et un point A intérieur à la circonférence. Soit BAC une sécante quelconque.

1° Déterminer les centres D et E des 2 cercles passant respectivement par A et B et par A et C et tangents respectivement à la circonférence O en B et en C .

2° Montrer que le quadrilatère $ODAE$ est un parallélogramme.

3° Quelles conditions doivent remplir le point A et BC pour que ce quadrilatère soit un losange? un rectangle? un carré?

4° DE coupe OA en I . Valeur de $\frac{OI}{IA}$? En déduire le lieu géométrique du deuxième point d'intersection P des cercles D et E .

5° Quelle est, en fonction de R , l'aire du quadrilatère $ODAE$ lorsque BC et BA sont respectivement égaux aux côtés du triangle équilatéral et de l'hexagone régulier inscrits dans le cercle O de rayon R ? (E. N.)

408. Sur une demi-droite Ax , on prend 3 points B, C, D tels que $AB = a, AC = 2a, AD = 3a$. On mène par B la perpendiculaire à Ax , sur laquelle on prend un point P tel que $BP = a$. La perpendiculaire menée par C à la droite PD rencontre cette droite en H .

1° Montrer que les quatre points P, B, C, H se trouvent sur un cercle (O) , que la droite AP est tangente à ce cercle et que la droite HB est la bissectrice de l'angle \hat{H} du triangle PHC .

2° Calculer PD, HP et HC en fonction de a .

3° Par le point P , on mène la parallèle à Ax , qui coupe le cercle (O) en Q , et l'on désigne par R l'intersection des droites PD et QC . Montrer que les droites QD et PC sont parallèles.

Calculer l'aire du quadrilatère $PARQ$ en fonction de a . (B. E. P. C.)

409. Un triangle ABC est rectangle en A . $AB = c, AC = b, BC = a, b > c$, AH est la hauteur issue de A . On construit les circonférences de diamètres AB et AC , dont les centres respectifs sont D et E . On trace par A une sécante variable MAN qui coupe en M la première circonférence, en N la seconde.

1° Montrer que les triangles MAB et NAC sont semblables et que le triangle MHN est rectangle.

2° MN tournant autour de A , indiquer la nature du quadrilatère $MBCN$ et ses formes particulières. Quand il est convexe, pour quelle position de MN a-t-il l'aire maximum?

3° Montrer que le sommet A , le milieu K de BC , le milieu F de MN sont équidistants du milieu I de DE . Par quels points de la figure passe le cercle de centre I et de rayon IA ?

(E. N.)

410. Tracer 2 cercles O et O' tangents extérieurement en T et de rayons OT = 4 cm, O'T = 2 cm. Tracer dans le cercle O une corde quelconque TM (qui ne soit pas diamètre).

1° Construire dans ce même cercle O — avec la règle seulement — la corde TN perpendiculaire à la corde TM.

2° TN prolongé rencontre le cercle O' en M'. Que peut-on dire des rayons OM et OM'?

3° O'M' recoupe le cercle O' en N'. Que peut-on dire des points M, T, N'?

4° Étudier le point S, intersection de MM' et NN'. Calculer SO et SO'.

5° Construire la droite MM' de façon que l'aire du quadrilatère MNN'M' soit égale à 36 cm². Cette construction serait-elle possible si l'on se donnait une aire autre que 36 cm²?

(B. E.)

411. Soit \widehat{AB} un quart de cercle de centre O, de rayon OA = OB = R. On porte sur la tangente en B et dans le même sens que OA un segment BC = $\frac{R}{2}$.

1° Construire d'une façon simple la deuxième tangente issue de C au quart de cercle. On appellera K le point de contact. La tangente CK coupe OB en S.

2° Démontrer que le quadrilatère OBCK est inscritible et que, si E est le deuxième point d'intersection de OA avec le cercle circonscrit à ce quadrilatère, les segments EK et OE sont égaux.

3° Démontrer que les triangles SBC et SKO sont semblables. On pose SB = x; montrer que SK = 2x, puis, en utilisant le triangle SKO, calculer x en fonction de R et évaluer le rapport des aires des triangles SBC et BCK.

(B. E. P. C.)

412 1° Construire un triangle connaissant les 3 médianes de ce triangle.

2° Démontrer que l'aire du triangle ayant pour côtés les 3 médianes d'un triangle est les $\frac{3}{4}$ de l'aire de ce triangle.

413. Sur la demi-droite Ox, on prend les points A et B tels que OA = 2a et OB = 3a. Au point B, on élève la perpendiculaire (D) à Ox. Une demi-droite issue de O coupe (D) en M. On prend sur cette demi-droite le point N entre O et M tel que ON × OM = 6a².

1° Montrer que le quadrilatère ABMN est inscritible. Quel est le lieu de N quand M décrit la droite (D)? Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit au quadrilatère AMNB?

2° La droite AN coupe (D) en P. Montrer que la droite MA est perpendiculaire à OP. Soit A' le symétrique de A par rapport à (D). Montrer que le quadrilatère OMA'P est inscritible.

3° On suppose BM = 2a. Calculer, en fonction de a, l'aire du quadrilatère ANMB.

(E. N.)

RAPPORT DES AIRES

414. On donne un trapèze ABCD dont les diagonales AC et BD se coupent en O. L'aire du triangle OAB est égale à 18 cm^2 et AC partage BD dans le rapport $\frac{2}{3}$.

1° Calculer l'aire du triangle OCD.

2° Calculer les aires des triangles BOC et AOD.

3° En déduire l'aire du trapèze ABCD.

415. Un trapèze ABCD est tel que la diagonale AC est perpendiculaire en C au côté oblique BC, la petite base CD est égale à BH, projection du côté oblique sur la grande base AB. Par le point d'intersection I de AC et de DH on mène la parallèle aux bases qui coupe AD en M et CH en N.

1° Quelle est la nature du triangle CIH?

2° Établir la relation $HC^2 = BC \cdot IH$.

3° Démontrer que $MI = IN$.

4° Démontrer que les triangles DMI et CIN sont équivalents.

416. On considère un carré ABCD de côté a . On porte sur AD puis sur DC les longueurs $AE = DF = \frac{a}{3}$. Les droites AF et BE se coupent en I.

1° Comparer les triangles ABE et DAF. Calculer leurs côtés et leur surface.

2° Démontrer que AF et BE sont perpendiculaires.

3° Établir le rapport des aires des triangles AIE et BIA. Calculer les aires des triangles IAE, IBA et des quadrilatères IEDF et IBCF.

417. Soient un cercle de centre O et de diamètre $AB = 2R$ et, sur le prolongement de AB, au-delà de B, un point C tel que $BC = 4R$. Sur une droite variable passant par A et coupant de nouveau le cercle O en D, on prend un point M tel que

$$AM \times AD = AO \times AC.$$

a) Étudier les triangles ADO et AMC.

b) Quelle particularité présente le quadrilatère ODMC?

c) Montrer que, lorsque la droite AD tourne autour du point A, le point M se déplace sur la médiatrice de AC.

d) Construire la figure, sachant que $R = 2 \text{ cm}$ et $AM = 9 \text{ cm}$, et calculer alors la surface du quadrilatère ODMC.

(B. E. P. C.)

418. On donne un segment de droite de longueur $AB = a$ et on mène de part et d'autre de AB les perpendiculaires Ax et By à AB . On joint un point quelconque M de Ax à un point N de By . MN coupe la droite AB en I .

1° Déterminer I pour que $\frac{AM}{BN} = \frac{1}{3}$.

2° Calculer AI pour que : $\frac{\text{aire } AMI}{\text{aire } BNI} = \frac{1}{16}$.

3° On mène de I la perpendiculaire à MB qui coupe la droite Ax en C . Démontrer que CB et MN sont perpendiculaires.

(B. E.)

419. On donne un cercle de rayon R , on mène le diamètre AB et une corde CD parallèle à AB , puis on trace les cordes AC et BD , qu'on prolonge jusqu'à leur intersection E .

1° Montrer que le trapèze $ABDC$ et le triangle AEB sont isocèles.

2° Calculer en fonction de R la longueur que doit avoir la corde CD pour que l'aire du triangle CED soit équivalente à la moitié de celle du triangle AEB . Déduire du résultat que cette corde est le côté d'un polygone régulier inscrit dans le cercle. Quel est ce polygone?

3° CD est la longueur que l'on vient de calculer, quelle est, en fonction de R , la surface du trapèze $ABDC$?

(B. E.)

420. On considère un angle aigu xAy . Sur le côté Ax on porte une longueur AB et sur le côté Ay une longueur $AC = \frac{AB}{2}$ puis une longueur $AD = 2AB$.

1° Démontrer que l'on a : $\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

2° Comparer les triangles ABC et ADB . Montrer l'égalité des angles \widehat{ABC} et \widehat{ADB} .

3° Prouver que le côté Ax est tangent en B au cercle circonscrit au triangle BCD .

4° Évaluer le rapport des aires des triangles ABC et ADB .

421. Soit ABC un triangle rectangle en A . On mène la hauteur AH et l'on trace le cercle de centre A et de rayon AH . De B on mène au cercle la tangente BD et de C la tangente CE .

1° Montrer que les points D, A, E sont en ligne droite et que les tangentes BD et CE sont parallèles.

2° Montrer que l'on a la relation $BD \times CE = \frac{DE^2}{4}$.

3° Montrer que les 2 triangles ABC et DHE sont semblables.

4° Calculer la surface au triangle DHE , sachant que $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm.

(B. E. P. C.)

422. On donne un cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$ et un point P sur le cercle. Les tangentes en A et P à ce cercle se coupent en C; AB et PC se coupent en D; les droites AC et OP se coupent en E.

1° Le point P variant sur le cercle, montrer que OC et DE sont perpendiculaires et que le triangle CDE est isocèle.

2° Dans le cas où $\widehat{AOP} = 120^\circ$, calculer, en fonction de R, les segments AC, PC, CO, CD, OD.

3° Établir la similitude des triangles CAP et CED et calculer le rapport de leurs aires si $\widehat{AOP} = 120^\circ$.

423. On donne un segment $AB = a$ et M son milieu. On trace un demi-cercle de diamètre AM et de centre O. Des points M et B on mène les tangentes à ce demi-cercle. Ces tangentes se coupent en D. La tangente issue de B touche le demi-cercle en C.

1° Expliquer la construction de ces tangentes.

2° Calculer BC.

3° Établir la similitude des triangles BCO et BMD et donner leur rapport de similitude.

4° Montrer que $BD = 3MD$.

5° Calculer le rapport des aires des 2 triangles BCO et BMD.

424. On donne un demi-cercle de centre O et de diamètre $AD = 2R$. On construit la corde $AB = R$, puis l'angle $\widehat{BOC} = 90^\circ$, les points A, B, C, D étant situés dans cet ordre sur le demi-cercle. Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en I.

1° Calculer, en fonction de R, BC et BD.

2° Démontrer que les triangles ABI et ICD sont isocèles et en déduire la longueur des segments BI, ID et CD. Calculer le rapport des aires de ces 2 triangles.

3° On suppose que la corde AB a une longueur variable, l'angle BOC restant toujours égal à 90° et les points B et C restant sur la demi-circonférence. Quelle ligne décrit alors le point I.

(B. E. P. C.)

425. Tracer un cercle O, de rayon R, et deux diamètres perpendiculaires AB et CD. Une corde issue de A coupe le cercle en un deuxième point N et le diamètre CD en un point M, entre O et D.

1° Montrer que le quadrilatère OMNB est inscriptible dans un cercle de centre I. Préciser la position de I. Si le point N décrit le quart de cercle DB, montrer que I reste équidistant de 2 points fixes. En déduire son lieu, qu'on limitera avec précision.

2° Évaluer le produit $AM \times AN$ en fonction de R.

3° Le point M étant pris au milieu de OD, calculer AM et BN en fonction de R. Quel est le rapport des aires des triangles AOM et ANB?

(B. E. P. C.)

426. On considère un cercle de centre O et de diamètre $AB = 2R$. On mène une corde AT égale au côté du triangle équi-

téral inscrit. Sur la tangente en A au cercle O on porte $AP = AT$.
 es droites PT et AB se coupent en C.

1° Démontrer que PT est tangente au cercle O. Calculer en
 fonction de R les segments OP, PC et AC.

2° Établir la relation $AT^2 = AO \times AC$. On décrit le cercle
 de diamètre OC. Quelle est la position de AT par rapport à ce
 cercle?

3° Calculer les aires des triangles PAT et OAT. Donner le
 rapport de ces aires. Peut-on établir ce rapport sans avoir au
 préalable calculé les aires?

4° Les droites OT et AP se coupent en D. Démontrer que le
 triangle PCD est équilatéral et que CD est tangente au cercle O.

427. On donne un triangle ABC rectangle en A et la hauteur
 H. Le point H se projette en D sur AB et en E sur AC.

1° Calculer, en fonction de $CH = b'$ et $BH = c'$, les longueurs
 es segments AH, DE, AB et AC.

2° Calculer le rapport de l'aire de chacun des triangles BDH,
 EH, et ADE à l'aire du triangle ABC.

Montrer que l'aire du triangle ADE est moyenne proportionnelle
 entre les aires des triangles BDH et CEH.

3° Démontrer que la droite DE est tangente en D au cercle de
 diamètre BH et en E au cercle de diamètre CH.

428. On donne un triangle ABC rectangle en A. On décrit
 un cercle de centre A tangent à BC en H. On mène BD et CE les
 tangentes à ce cercle.

1° Montrer que BD et CE sont parallèles.

2° Établir la relation $DE^2 = 4 BD \cdot CE$.

3° HD et HE coupent respectivement AB en P et AC en Q.
 Comparer AH et PQ.

4° Si $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm, calculer l'aire du trapèze BDEC
 et l'aire du triangle DHE.

429. On donne un cercle de centre O et de diamètre $AB = 2R$
 On trace le cercle de centre J, de diamètre OB et la médiatrice
 de OA qui coupe OA en I et le cercle de centre O en M et N. On
 mène la tangente IT au cercle de diamètre OB.

1° Démontrer que le triangle IMT est isocèle.

2° Donner la nature du triangle OJT. En déduire la similitude
 des 2 triangles OJT et IMT. Donner leur rapport de similitude
 et le rapport de leurs aires.

3° Montrer que les 3 points M, T, B sont sur une même droite
 et indiquer la nature du triangle BMN.

430. On donne un cercle O de rayon R et une corde AB
 gale au côté du carré inscrit. Par M, milieu de AB, on trace une
 corde CD égale au côté du triangle équilatéral inscrit (le point C
 tant sur le grand arc AB).

1° Expliquer la construction.

2° Donner la valeur des angles formés en M.

3° Calculer en fonction de R les segments AM, MB, MO, CM, MD et AC.

4° Donner en fonction de R la longueur de l'arc \widehat{AC} et calculer le rapport des aires des triangles AIC et DMB.

431. Soient un cercle de centre O et de diamètre AB = 2R et, sur le prolongement de AB au-delà de B, un point C tel que BC = 4 R. Sur une droite variable passant par A et coupant de nouveau le cercle O en D, on prend un point M, tel que

$$\overline{AM} \times \overline{AD} = \overline{AO} \times \overline{AC}.$$

1° Étudier les 2 triangles ADO et AMC.

2° Quelle particularité présente le quadrilatère ODMC?

3° La droite AD tournant autour du point A, quel est le lieu géométrique du point M?

4° Soit α la mesure de l'angle OAD. Pour quelle valeur de α les droites OD et CM sont-elles parallèles?

5° Pour quelle valeur de α les droites sont-elles perpendiculaires? Calculer dans ce cas, en fonction de R, l'aire du quadrilatère ODMC.

(B. E. P. C.)

432. On considère un rectangle ABCD de côtés AB = 2 a et BC = a. On construit extérieurement à ce rectangle, sur ses côtés comme hypoténuse, des triangles rectangles isocèles AEB, BFC, CGD, DHA.

1° Montrer que EFGH est un carré et calculer le rapport des aires des quadrilatères ABCD et EFGH.

2° La circonférence circonscrite au rectangle ABCD coupe chaque côté du carré EFGH en un deuxième point, soit J sur EH et L sur FG ces deuxièmes points. Démontrer que JBLD est un carré et calculer le rapport des aires de JBLD et de ABCD.

3° JD coupe AB en P. Calculer le rapport des aires des triangles JPB et APD.

(E. N.)

433. Trois cercles de centres O_1, O_2, O_3 sont tangents intérieurement en A. Les diamètres respectifs des 3 cercles sont AB, AC, AD.

1° Que peut-on dire des points A, O_1, O_2, O_3, B, C, D ?

2° On mène des cordes parallèles, BE dans le cercle O_1 , CF dans le cercle O_2 , DG dans le cercle O_3 . Démontrer que les 4 points A, E, F, G sont alignés.

3° $AO_1 = 30$ mm, $AO_2 = 40$ mm, $AO_3 = 50$ mm. Établir le rapport des aires du triangle ABE et du quadrilatère DCGF. Qu'en déduit-on?

434. Soit MN une corde d'un cercle O et I le milieu de cette corde. Par un point P extérieur au cercle et sur le prolongement de MN (M compris entre P et N) on mène les tangentes PA et PB au cercle O. La droite AB coupe PO en C et MN en D.

1° Démontrer que le quadrilatère OCDI est inscriptible dans un cercle. Tracer ce cercle.

2° Établir la relation $PA^2 = PD \cdot PI$.

3° Si $PM = a$ et $MN = \frac{2a}{3}$, calculer PA , PD , MD . Démontrer que le point D est fixe lorsque le cercle O varie en passant toujours par les points fixes M et N .

4° Si $PM = 12$ cm, $MN = 8$ cm, $OI = 3$ cm, calculer le rapport des aires des triangles PCD et PIO puis l'aire du quadrilatère $OCDI$.

435. On trace les diamètres perpendiculaires AB et CD d'un cercle de centre O et de rayon R . Une corde issue de A coupe CD en P et le cercle en M .

1° Montrer que le quadrilatère $OBMP$ est inscritible dans un cercle. Sur quelle ligne se déplace le centre I de ce cercle lorsque la corde AM pivote autour de A ?

2° Démontrer que le produit $AP \times AM$ est constant. Si $R = 4$ cm et $OP = 3$ cm, calculer les côtés des triangles AOP et AMB . Donner le rapport des aires de ces 2 triangles.

3° Si P décrit le diamètre CD , déterminer en fonction de $R = 4$ cm :

a) la plus grande valeur du segment AP .

b) la longueur du segment décrit par I , centre du cercle circonscrit au quadrilatère $OBMP$.

436. On donne un triangle ABC rectangle en A , la hauteur AH relative à l'hypoténuse et la circonférence de diamètre AH , qui coupe le côté AB en B' et le côté AC en C' .

En B' et en C' on mène les tangentes à cette circonférence. Elles coupent BC en M et en N .

1° Dire ce qu'est le quadrilatère $AB'HC'$ et le démontrer.

2° Démontrer que les triangles ABC et $AB'C'$ sont semblables.

3° Démontrer que $MN = \frac{BC}{2}$.

4° Démontrer que l'aire du trapèze $B'MNC'$ est la moitié de celle du triangle ABC .

5° Si $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm, calculer BC , AH et les aires du trapèze $B'MNC'$ et du triangle $AB'C'$. (B. E. P. C.)

437. Un triangle ABC est rectangle en A , son hypoténuse $BC = a$ et $\hat{B} = 60^\circ$. Soient Bx et Bx' les bissectrices intérieure et extérieure de \hat{B} . De A on abaisse la perpendiculaire sur Bx qui coupe Bx en P et BC en M , puis la perpendiculaire sur Bx' qui coupe Bx' en Q et BC en N .

1° Évaluer, en fonction de a , les côtés AB et AC .

2° Indiquer la nature du quadrilatère $APBQ$, du triangle AMN . Préciser la longueur de PQ , en fonction de a , ainsi que sa direction.

3° Établir la similitude des triangles PAB et ABC . Calculer PA et PB et le rapport des aires de ces triangles.

4° Comparer les aires du triangle ABM et du quadrilatère $APBQ$.

5° Le triangle ABC est toujours rectangle en A mais l'angle \hat{B} varie. Indiquer selon cette variation, la position de M sur BC.

438. On donne un triangle isocèle ABC, tel que

$$AB = AC = 3a, \quad BC = 2a$$

(a étant une longueur donnée). O étant le milieu de BC, on prend un point D sur AB, un point E sur AC, tels que l'angle $\widehat{DOE} = \hat{B}$.

1° Montrer que les triangles OBD et OEC sont semblables.

2° En déduire que OB est moyenne proportionnelle entre BD et CE.

3° Montrer que le triangle ODE est semblable aux triangles BDO et COE.

4° En déduire que OD est bissectrice de \widehat{BDE} et que OE est bissectrice de \widehat{CED} .

5° L'angle \widehat{DOE} étant toujours égal à \hat{B} , construire DE parallèle à BC, puis montrer que $BD = a$ et calculer l'aire du trapèze BDEC. (D'après B. E.)

439. Dans un triangle isocèle où $AB = AC$ on mène la hauteur AH. Par un point L de AH on trace la parallèle MN à BC. On pose $BC = b$ et $AH = h$.

1° Donner le rapport des aires des triangles AMN et ABC, en déduire l'aire du triangle AMN et l'aire du triangle MNC en fonction de b et de h lorsque $\frac{AL}{AH} = \frac{1}{3}$.

2° Donner la position du point L pour que les aires des triangles AMN et MNC soient équivalentes.

3° On prend un point quelconque E sur BC. On trace EP parallèle à AC et EQ parallèle à AB, indiquer la forme du quadrilatère EPAQ et indiquer le lieu géométrique parcouru par le milieu R de la droite PQ quand le point E se déplace de B en C. (B. E.)

440. 1° Construire (à la règle et au compas) un trapèze ABCD tel que :

a) sa grande base CD ait pour mesure 10 cm.

b) ses côtés AD et AB soient égaux.

c) sa diagonale BD soit perpendiculaire au côté BC.

d) le côté BC ait pour mesure 6 cm.

2° Calculer DB et la distance des 2 bases.

3° Soit E le milieu de BD et F le milieu de BC. Démontrer que le quadrilatère ABFE est un parallélogramme et calculer la longueur de AB.

4° S désignant le point commun aux droites AD et BC, on demande de calculer les rapports :

$$\frac{\text{aire ASB}}{\text{aire DSC}}, \quad \frac{\text{aire ABD}}{\text{aire BDC}}, \quad \frac{\text{aire ABCD}}{\text{aire BDC}}$$

puis chacun des termes de ces rapports.

(B. E.)

441. On donne un trapèze ABCD dans lequel AB est la grande base, CD la petite base. O est le point de concours des diagonales. On désigne par m le rapport $\frac{CD}{AB}$, par s l'aire du triangle AOB, par s' l'aire de COD.

1° Montrer que $\frac{s'}{s} = m^2$.

2° Montrer que les triangles AOD et BOC sont équivalents et que la surface de l'un d'eux est moyenne proportionnelle entre s et s' .

3° Soient a et b les côtés des carrés ayant respectivement s et s' pour surface. Calculer l'aire du trapèze en fonction de a et b .

4° Soit I le point commun aux côtés non parallèles. Calculer en fonction de a et de b les surfaces des triangles IAB et ICD. (B. E.)

442. Deux cercles, l'un de centre O et de rayon R, l'autre de centre O' et de rayon R', sont tangents extérieurement en A. De O on mène la tangente OT' au cercle O' et de O' on mène la tangente O'T au cercle O. Les 2 tangentes OT' et O'T se coupent en B.

1° Vérifier la relation $OB \cdot BT = O'B \cdot BT$.

2° Démontrer que le quadrilatère OTT'O' est inscriptible.

3° Calculer, en fonction de R et de R' l'aire des triangles OO'T, OO'T'.

4° Si R = 10 cm et R' = 5 cm, calculer les aires des triangles OBT et O'BT'.

443. On donne 3 points alignés A, B, C dans cet ordre et la perpendiculaire xy élevée en C au segment AC. Un point M est mobile sur xy .

1° Montrer que le cercle de diamètre BM passe par C. Sur quelle ligne se déplace son centre O lorsque M décrit xy ?

2° On trace AM qui coupe le cercle O en N. Sur quelle ligne se déplace le point N lorsque M décrit xy ?

3° Établir la relation $AM \cdot AN = AB \cdot AC$.

4° Dans le cas où $AB = BC = CM = a$, calculer en fonction de a , le rayon et l'aire du cercle de diamètre BM. En déduire l'aire du triangle ABN.

444. Sur une droite indéfinie, on place dans l'ordre, les cinq points A, O, B, O', A' tels que $AO = OB = 3a$, $BO' = O'A' = 2a$, (a étant une longueur donnée). On trace le cercle (O) de diamètre AB et le cercle (O') de diamètre BA'. Soient C et D deux points quelconques du cercle (O), les droites BC et BD recoupent le cercle (O') respectivement en C' et D'.

1° Calculer le rapport $\frac{BC'}{BC}$.

2° Calculer le rapport $\frac{C'D'}{CD}$.

3° On suppose l'angle $\widehat{CBD} = 30^\circ$. Calculer, en fonction de α , l'aire du segment de cercle (O) limité par la corde CD. Calculer de même l'aire du segment de cercle (O') limité par la corde C'D'. Calculer le rapport de ces deux aires. Pouvait-on prévoir le résultat?

N. B. — Dans la 3° question, on étudiera les 2 segments de cercle qui sont inférieurs à un demi-cercle. (B. E. P. C.)

445. On donne un segment de droite BC :

1° Construire — en justifiant la construction — une perpendiculaire (L) à la droite BC dont le pied H sur cette droite ne soit pas extérieur au segment BC.

2° Construire — en justifiant la construction — un triangle isocèle ABC, rectangle en A.

3° La perpendiculaire (L) rencontre AB en D et AC en E. Étudier le triangle ADE. Pour quelles positions de H l'aire de ADE est-elle le quart de celle de ABC?

4° Étudier les hauteurs du triangle DBC et en déduire la ligne que décrit l'intersection M de BE et de CD quand H décrit le segment BC de B en C.

5° Étudier le cercle de diamètre DE et en déduire une construction simple de la tangente en M à la ligne que décrit ce point quand H varie. (B. E.)

446. On donne un cercle de centre O et de rayon R. Sur la tangente Ax en un point A de ce cercle on porte le segment $AB = 3R$. On mène le rayon OC parallèle à AB et de même sens. La droite BC recoupe le cercle O en D.

1° Établir la similitude des triangles ABC et DBA et donner la longueur des segments AC, BC, BD, AD puis le rapport des aires des 2 triangles précédents.

2° Le point A se projette en K sur BC. Calculer AK.

3° Calculer à $\frac{1}{1000}$ près les sinus des angles du triangle ABC.

4° Le point B variant sur la tangente Ax (à partir de A), quelle ligne décrit le point K?

447. On donne un cercle de diamètre $AB = 20$ cm, de centre O et un point C sur le prolongement de AB et tel que $BC = 10$ cm. En C on élève une perpendiculaire à AC. Un point M décrit cette perpendiculaire. La droite AM coupe le cercle de diamètre AB en N. La droite BN coupe en P la perpendiculaire élevée en C à AC.

1° Montrer que les droites BM et AP sont perpendiculaires en Q.

2° Démontrer que les quadrilatères BCMN, BCPQ et MPQN sont inscrits. Sur quelles lignes se déplacent les centres des cercles circonscrits lorsque M varie?

3° Montrer que le produit $CM \cdot CP$ est constant. Calculer ce produit.

4° Dans le cas où $CM = 15$ cm, calculer AM, CP, AN, AQ et l'aire du quadrilatère ANBQ.

448. Soit un cercle de centre O de diamètre $AB = 2R$. Sur la tangente en A au cercle, on porte une longueur $AC = 2R$.

1° Construire la deuxième tangente, CT, menée de C au cercle. Démontrer que les triangles ACT et BOT sont semblables. Quel est le rapport de similitude? Calculer en fonction de R les longueurs AT et BT.

2° Montrer que les triangles AOT et BOT ont même aire. Calculer en fonction de R les aires des triangles ABT et BOT et celle du quadrilatère ABTC.

3° OC coupe AT en H. On désigne par K le milieu de CH et par I le milieu de l'arc \widehat{AB} situé dans l'angle \widehat{BAC} . Démontrer que les 3 points B, I, C sont alignés et que I est le milieu de BC.

Démontrer que les 3 points K, I, T sont alignés. (B. E. P. C.)

449. Soit un segment $AB = 10,5$ cm.

1° Indiquer une construction géométrique du point I qui divise intérieurement AB dans le rapport $\frac{IA}{IB} = \frac{3}{4}$.

2° Calculer les segments IA et IB.

3° On trace le demi-cercle de diamètre IB, puis on porte la corde $IC = \frac{IB}{2}$. On achève ensuite le parallélogramme AICD.

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD? Calculer son côté BC, les angles \hat{B} et \hat{A} puis sa hauteur.

4° Soit E le point d'intersection des droites AD et BC. Quel est le rapport des aires des triangles BAE et BIC?

5° On suppose maintenant que, les points A, I, B étant fixes, le point C décrit le demi-cercle \widehat{IB} . Trouver le lieu géométrique du point E. (B. E. P. C.)

450. 1° Soit un triangle équilatéral ABC de 4 cm de côté. Sur le prolongement de BC, au-delà de C, on porte un segment CD égal à AB. Que dire des triangles ACD et ABD? Quelle est la longueur de AD?

2° Le cercle ayant pour centre le milieu E de AD et passant par C coupe AD en F et G (F étant entre E et A), recoupe AC en H et CD en I. Le cm étant l'unité, calculer les mesures des rayons de ce cercle et des segments AF et AG; calculer le produit $AF \cdot AG$ des mesures de ces 2 segments et trouver les mesures des segments AH et DI.

3° Démontrer que la droite EH coupe AB en son milieu J.

4° Le cm^2 étant pris pour unité de surface, évaluer les aires des triangles ABC et ACD. Quel est le rapport des aires des triangles AEJ et ABD? En déduire l'aire du quadrilatère BDEJ.

(B. E. P. C.)

451. On construit un hexagone ABCDEF inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R. On prolonge chaque côté dans le même sens d'une longueur égale à $\frac{R}{2}$ tels que

$$'BA' = 'CB' = \dots = \frac{R}{2}.$$

1° Montrer que les points obtenus A', B', C', D', E', F' sont également distants de O et évaluer cette distance en fonction de R .

2° Montrer que les angles formés par 2 segments consécutifs OA', OB', OC', \dots sont égaux.

3° Quelle est la nature du polygone $A'B'C'D'E'F'$? Calculer le rapport des aires des 2 polygones $A'B'C'D'E'F'$ et $ABCDEF$.

452. On donne un cercle de centre O , de rayon R . D'un point P extérieur au cercle, on mène 2 sécantes PAB et PCD . Soient M le milieu de AD et N le milieu de BC .

1° Montrer la similitude des triangles PAD et PCB puis celle des triangles PBN et PDM .

2° Si l'arc AC mesure 60° , $BC = 2R$ et $AD \perp BC$ en I :

a) étudier la nature du triangle CBP .

b) calculer en fonction de R les segments PA, PB, PC, PD et vérifier la relation $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

c) calculer OI et ID en fonction de R .

d) établir une relation entre les aires des triangles OBP, OIP et IDP . Dans le cas où l'aire $OIP = 20 \text{ cm}^2$, calculer les aires des triangles OBP et IDP .

453. On donne un angle $\alpha Oy = 30^\circ$ et, sur Oy , le point A tel que $OA = 8 \text{ cm}$.

1° On trace un cercle de centre A et de rayon R . Entre quelles valeurs doit être compris R , pour que le cercle coupe la demi-droite Ox en deux points M et M' ?

2° On construit les cercles circonscrits aux triangles OAM et OAM' :

a) Expliquer la construction.

b) Montrer que ces cercles sont égaux au cercle de centre A .

3° Sur quelle ligne se déplacent les centres E et F de chacun de ces cercles quand R varie entre les valeurs trouvées dans la 1^{re} question? Préciser les positions limites de E et de F .

4° Évaluer, en fonction de R , le rapport des aires des triangles OAM et OAM' .

Calculer R pour que l'une de ces aires soit le double de l'autre et calculer dans ce cas particulier OM, OM' et EF . (E. N.)

454. On donne un triangle ABC et M le milieu de la médiane AD . La droite BM coupe AC en P et CM coupe AB en Q . La parallèle menée par D à AC coupe BP en P' et la parallèle menée par D à AB coupe CQ en Q' .

1° Comparer les segments AP et DP' . Calculer les rapports $\frac{DP'}{CP}, \frac{AP}{CP}, \frac{AP}{AC}$ et $\frac{AQ}{AB}$.

2° Comparer en direction les segments PQ et BC . Calculer les rapports $\frac{PQ}{BC}$ et $\frac{MP}{MB}$.

3° Comparer les aires des triangles BAM et BMD , CAM et CMD , MBD et MDC . Calculer le rapport des aires des triangles MBD et ABC , MAP et MAC , puis MAP et ABC .

455. Soit un trapèze rectangle convexe ABCD de bases AB et CD et de hauteur AD. On suppose $AB = a$ et $CD = AD = 2a$ (a étant une longueur donnée).

1° Soit I le milieu de AD. Démontrer que le triangle BIC est isocèle. Calculer ses côtés en fonction de a .

2° Soit O le point d'intersection des diagonales AC et BD. Démontrer que les triangles AOD et BOC sont équivalents. Calculer les aires des triangles AOB, BOC, COD et DOA.

3° Même question qu'au 2°, en supposant que ABCD est un trapèze convexe quelconque, de bases b et B et de hauteur h .

(E. N.)

456. On considère un triangle ABC tel que les angles B et C soient aigus. Soit K un point fixe du segment BC. On donne $KB = b$, $KC = c$. La parallèle à AB menée par K coupe AC en C'. La parallèle à AC menée par K coupe AB en B'. On suppose que A se déplace en restant à une distance constante h du segment BC et toujours du même côté de BC.

1° Lieux de B', de C' et de I milieu de B'C'?

2° Montrer que l'aire du parallélogramme AC'KB' est constante. La calculer en fonction de b , c , h .

3° L'angle BAC peut-il être droit? On supposera que l'on est dans le cas de possibilité. On a alors généralement 2 points A_1 et A_2 tels que $\widehat{BA_1C} = \widehat{BA_2C} = 1$ dr.

Soient $KC_1A_1B_1$, $KC_2A_2B_2$ les parallélogrammes correspondants. Montrer que : $KA_1 = B_1C_1$ et $KA_2 = B_2C_2$.

4° Montrer que les angles C_1KB_2 et C_2KB_1 ont même système de bissectrices.

(E. N.)



CIRCONFÉRENCE. CERCLE

457. On donne une circonférence de centre O, de diamètre $AB = 2R$. On prend un point C entre A et B tel que $AC = 2a$. On trace les circonférences O_1 de diamètre AC et O_2 de diamètre CB.

1° Démontrer que la circonférence O est égale à la somme des circonférences O_1 et O_2 .

2° Trouver le rapport k des longueurs des circonférences O_1 et O_2 . Donner la valeur de k pour $a = \frac{R}{3}$, puis la valeur de a pour

$$k = \frac{3}{4}.$$

3° Montrer que si l'on porte successivement sur une droite le côté du carré inscrit, puis le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon R, on obtient approximativement la longueur de la demi-circonférence de rayon R.

458. Étant donné un triangle ABC rectangle en A et tel que $AB = 3,26$ m et $AC = 4$ m, on construit un rectangle ABDE sur le côté AB, extérieurement au triangle ABC, de telle manière que l'aire du trapèze rectangle BDEC soit égale à $11,084$ m².

- 1° Calculer les longueurs BC, AE et CD.
- 2° Évaluer l'aire du triangle BCD.
- 3° Calculer le rayon de la circonférence dont la longueur serait égale à celle du périmètre du trapèze BDEC.

459. Deux poulies ont pour rayons respectifs R et 4 R et la distance des centres OO' est 6 R. Elles sont reliées par une courroie sans fin non croisée.

- 1° Calculer la longueur de la courroie en fonction de R.
Application : $R = 0,3$ cm.
- 2° Indiquer la construction des tangentes communes à 2 cercles extérieurs.

460. Aux extrémités A et B d'un segment de droite $AB = 2a$, et d'un même côté de AB, on élève les perpendiculaires Ax et By . Une droite mobile coupe Ax en D et By en C de telle manière que l'aire du trapèze ABCD reste constante et égale à $2a^2\sqrt{3}$.

- 1° Démontrer que le milieu H de CD est fixe.
- 2° Indiquer les positions extrêmes que peut prendre CD et l'angle qu'elles forment entre elles.
- 3° Le milieu I de AB se projette en K sur CD. Quel est le lieu de K? Calculer la longueur de ce lieu.

461. On donne 2 demi-droites perpendiculaires Ox et Oy . On décrit un quart de cercle de centre O, de rayon R limité sur Ox en A et sur Oy en B. On trace le demi-cercle de diamètre OA. La médiatrice de OA coupe le demi-cercle de diamètre OA en N et le quart de cercle de centre O en M.

- 1° Évaluer les angles \widehat{AOM} et \widehat{BOM} .
- 2° Calculer la longueur de la ligne mixte OBMNO.
- 3° Calculer l'aire intérieure à la ligne précédente.

462. On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ et de centre O. On trace Ax tangente au demi-cercle. On considère un point P mobile sur Ax . La droite BP coupe le demi-cercle en C.

- 1° Montrer que le produit $BC \times BP$ est constant.
- 2° Sur quelles lignes se déplacent M et N, milieux respectifs de AC et de BC lorsque P décrit Ax ?
- 3° Préciser la position du point E sur le demi-cercle lorsque $BP = 2AP$. Calculer dans ce cas l'aire de la portion du triangle BAP extérieure au cercle.

463. On donne un cercle de centre O, de rayon R. Soient AB un diamètre fixe de ce cercle, AC une corde quelconque. On trace les tangentes en C et B à ce cercle et l'on désigne par P leur point de rencontre.

1° Montrer que AC et OP sont parallèles.

2° Dans le cas où $AC = R$, calculer en fonction de R les longueurs CP et OP ainsi que l'aire du quadrilatère OBPC et celle du triangle curviligne CPB extérieur au cercle.

3° On prolonge la corde AC, supposée quelconque, d'une longueur CD égale à elle-même. Sur quelle courbe se déplace le point D lorsque le point C décrit le cercle O?

Préciser le point de concours E des médianes du triangle AOD et trouver sur quelle courbe se déplace ce point E lorsque C décrit le cercle O. (B. E. P. c.)

464. Soit un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$, de centre O, et un point C du demi-cercle tel que $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

1° Donner le caractère du triangle ABC et calculer AC et BC.

2° On prolonge CB et extérieurement au triangle ABC on construit le triangle isocèle BAD tel que $BA = BD$. On trace le cercle de centre I circonscrit à ce triangle. Calculer son rayon et montrer qu'il est tangent à AC en A.

3° Calculer l'aire de la portion du triangle ABC extérieure au cercle I.

465. On donne une circonférence de centre O, de rayon R. Par un point A, extérieur à cette ligne, on mène une sécante variable qui rencontre la circonférence en M et M'. Sur cette sécante, on porte dans le sens AM une longueur MP égale à AM'.

1° Étudier le triangle AOP et en déduire la ligne que décrit le point P quand la sécante prend toutes les positions possibles.

2° Calculer la longueur de cette ligne dans le cas où $OA = 2R$. Application numérique : $R = 3$ m. (B. E.)

466. Deux circonférences O et O' de rayons R et R' ($R < R'$) sont tangentes intérieurement en A. Une demi-droite Ax pivote autour de A et effectue un demi-tour. D'abord tangente en A aux 2 circonférences, elle devient sécante et coupe la circonférence de centre O en B, la circonférence de centre O' en B'.

1° Démontrer que dans toutes les positions de Ax la mesure de l'arc \widehat{AB} décrit par B sur le cercle de centre O est égale à la mesure de l'arc $\widehat{AB'}$ décrit par B' sur le cercle de centre O'. Comparer la longueur des 2 arcs.

2° Démontrer que les tangentes en B et B' aux 2 circonférences sont parallèles.

3° Démontrer que, si on mène 2 rayons parallèles et de même sens, OP et O'Q, les points P et Q sont situés sur une des demi-droites Ax.

4° La tangente en B' à la circonférence de centre O coupe OO' en E. Construire les demi-droites Ax telles que le triangle ABE soit isocèle. (E. N.)

467. Un point A décrit le demi-cercle \widehat{BAC} appartenant au cercle de centre O et de rayon R.

1° Lieu géométrique du point G de rencontre des médianes du triangle ABC?

2° Lieu géométrique du point de concours, I, des bissectrices intérieures. On calculera d'abord l'angle \widehat{BIC} .

Construire ce lieu. Calculer, en fonction de R, le rayon du cercle qui porte ce lieu.

3° On marque sur le demi-cercle donné le point A tel que $\widehat{CBA} = 30^\circ$. Calculer, en fonction de R, AC, AB, la hauteur AH, l'aire de chacun des 2 segments de cercle déterminés par AB et AC. (B. E. P. c.)

468. On considère un cercle de diamètre AB = a. Sur chacun des 2 demi-cercles déterminés par AB, on prend deux arcs égaux \widehat{AC} et \widehat{AD} . La tangente au cercle de diamètre AB menée par B coupe AC en F et AD en G.

1° Établir la relation $AB^2 = AC \cdot AF$.

2° Démontrer que BD est tangente au cercle de diamètre AF.

3° Le point C parcourt le demi-cercle de diamètre AB. Sur quelle ligne se déplace le point O milieu de AF?

4° Si $\widehat{AC} = \widehat{AD} = 120^\circ$, calculer BC, AC, AF, BF et l'aire comprise entre le demi-cercle de diamètre AF et le triangle ABF. Valeur approchée de cette aire pour $a = 10$ cm.

469. On donne un triangle ABC rectangle en A et tel que les côtés de l'angle droit sont $AB = a$ et $AC = a\sqrt{3}$. La perpendiculaire à BC élevée en B coupe AC en D et la perpendiculaire à la même droite BC élevée en C coupe AB en E.

1° Donner en fonction de a l'hypoténuse BC, exprimer la mesure des angles B et C du triangle ABC et calculer en fonction de a les segments BD, AD, CE, AE.

2° Montrer que les cercles de diamètre BD (centre O) et CE (centre O') sont circonscrits respectivement aux triangles ABD et ACE, tangents à BC et tangents entre eux en A.

3° Calculer en fonction de a, l'aire du quadrilatère BCO'O et l'aire du segment de cercle circonscrit au triangle ACE et limité par la corde AC.

470. Le côté d'un triangle équilatéral ABC est mesuré par a. Soit I le centre du cercle inscrit dans ce triangle.

1° Exprimer en fonction de a le rayon de ce cercle inscrit, son aire et la portion de l'aire du triangle ABC extérieure au cercle inscrit.

2° On considère les cercles tangents au côté BC en son milieu M, qui coupent les côtés AB et AC, et dont les centres sont situés à l'intérieur du triangle ABC. Quel est le lieu géométrique de leurs centres? Quelles sont les expressions, en fonction de a, des rayons du plus petit et du plus grand de ces cercles?

3° Soit T le point de contact, autre que M, d'une tangente menée de B à l'un de ces cercles. Exprimer BT en fonction de a. Quel est le lieu géométrique du point T? Donner l'expression, en fonction de a, de la longueur de ce lieu géométrique.

(B. E. P. c.)

471. On donne un cercle O de rayon R et un point fixe A de ce cercle. On mène la tangente Ax à ce cercle.

1° Où faut-il prendre le point M sur Ax pour que, si on mène de M la 2° tangente MB au cercle, le triangle MAB soit équilatéral? Quelle est alors l'aire totale limitée par le grand arc AB et les 2 tangentes?

2° On prend maintenant $AM = 2R$. Quelle est, dans ce cas, l'aire du triangle ABM et la distance de B à Ax (MB est encore la 2° tangente menée de M)?

3° Déterminer le centre C du cercle circonscrit à ABM et le centre I du cercle inscrit dans ce même triangle. Lieux géométriques de ces 2 centres lorsque M se déplace sur Ax ? (E. N.)



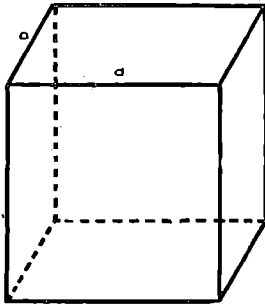
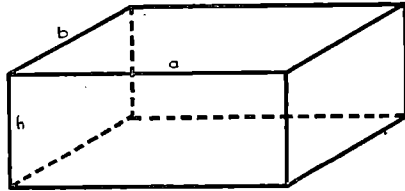
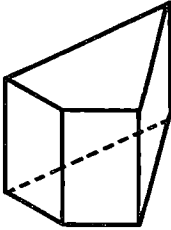
LES VOLUMES

• Prisme et parallépipède droits :

aire latérale = périmètre de base \times hauteur

aire totale = aire latérale + aire des 2 bases

volume = surface de base \times hauteur.



• Cube :

aire latérale = $4 a^2$

aire totale = $6 a^2$

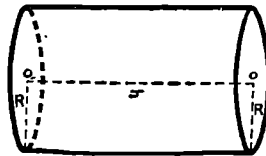
volume = a^3 .

• Cylindre droit

aire latérale = $2 \pi R h$

aire totale = $2 \pi R h + 2 \pi R^2 = 2 \pi R (h + R)$

volume = $\pi R^2 h$.

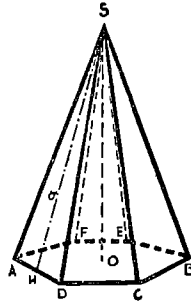


● **Pyramide**

aire latérale = périmètre de base $\times \frac{a}{2}$

aire totale = a.latérale + a.base

volume = $\frac{1}{3}$ aire base \times hauteur.

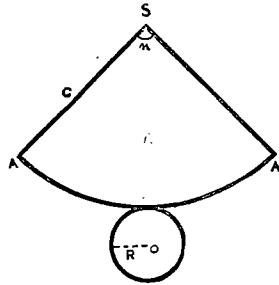
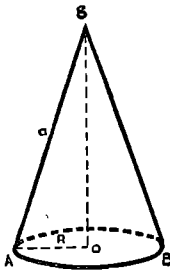


● **Cône droit**

$\widehat{AA'} = \frac{2\pi an}{360}$

$\widehat{AA'} = 2\pi R$

$n = 360 \times \frac{R}{2}$



aire latérale = πRa

aire totale = $\pi Ra + \pi R^2 = \pi R(a + R)$

volume = $\frac{1}{3} \pi R^2 h$.

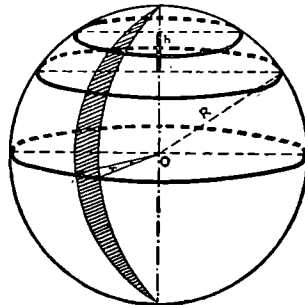
● **Sphère**

aire = $4\pi R^2$.

aire fuseau = $\frac{\pi R^2 n}{90}$

aire calotte = $2\pi Rh$

volume = $\frac{4}{3} \pi R^3$.



VOLUMES : PRISME, PYRAMIDE, CYLINDRE, CÔNE

472. La base $BC = 2a$ d'un triangle isocèle ABC est double de la hauteur AH . Sa surface est égale à 6 cm^2 .

1° Calculer ses côtés en fonction de a .

2° Sur le triangle ABC comme base on construit un prisme triangulaire droit de surface totale égale à 24 cm^2 . Calculer le volume de ce prisme.

473. Une pyramide $ABCD$ a pour base et pour faces des triangles équilatéraux de côté a .

1° Démontrer que la droite qui joint les milieux de 2 arêtes opposées est perpendiculaire à ces arêtes.

2° Calculer la surface totale de la pyramide.

3° Calculer la hauteur de la pyramide.

4° Calculer le volume de la pyramide.

474. On considère un cercle de centre O , de diamètre $AB = 2R$. Par A et par B on mène 2 cordes parallèles AP et BQ .

1° Montrer que PQ est un diamètre.

2° Si $AP = R$, calculer l'aire du segment de cercle AMP .

3° On élève en O une perpendiculaire au plan du cercle donné. On porte une longueur $OS = AQ$ sur cette perpendiculaire. Calculer en fonction de R , le volume de la pyramide $SAPBQ$ (on a toujours $AP = R$)

475. On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ et de centre O . Les points C et D partagent le demi-cercle en 3 arcs égaux.

1° Donner le caractère du quadrilatère $ABCD$.

2° Les diagonales se coupent en I . Préciser la position du point I sur ces diagonales.

3° Calculer les aires des triangles AIB , CID , AID et ADB .

4° En D , on élève une perpendiculaire au plan du quadrilatère et sur cette perpendiculaire on porte $DS = R$. Évaluer la surface latérale puis le volume de la pyramide $SABD$.

476. On donne un angle xOy égal à 30° et sur Oy deux points A et B , tels que $OA = 4 \text{ cm}$ et $OB = 9 \text{ cm}$. Par A et par B , on fait passer une circonférence tangente à Ox ; soit C le point de contact :

1° Calculer la longueur OC .

2° Calculer la longueur CD de la perpendiculaire abaissée de C sur Oy .

3° Calculer la surface latérale du solide engendré par OC en tournant autour de Oy , puis le volume engendré par le triangle OCD tournant également autour de Oy .

(B. E.)

477. Dans un trapèze isocèle ABCD les côtés non parallèles sont égaux à la petite base $AB = 12$ cm. Les angles C et D adjacents à la grande base mesurent 60° .

1° Calculer la hauteur BH, la diagonale BD, l'aire du trapèze.

2° Démontrer que le triangle CBD est rectangle.

3° Évaluer le volume du solide engendré par la révolution du trapèze autour de la grande base CD.

478. Sur une droite on porte les segments successifs $AB = a$

$BC = b$. Sur ces segments comme côtés on construit, du même côté de la droite, les triangles équilatéraux ABD et BCE. La droite DE coupe AC en F.

1° Calculer, en fonction de a et de b , les aires de chacun des triangles ABD, BCE, BED et l'aire du quadrilatère ADEC.

2° Soit H la projection de D sur AB, calculer FC, FB et FH.

3° Évaluer le volume du solide engendré par la révolution du triangle FDH tournant autour de FH.

479. On donne un cercle de centre O, de rayon R. On prolonge le rayon OA d'une longueur $AB = 3R$. De B on mène les tangentes BM et BN au cercle O; MN coupe OB en C.

1° Calculer BM, MC, BC, OC en fonction de R.

2° La figure tournant autour de OB, on obtient un cône circonscrit à une sphère :

a) calculer l'aire latérale de ce cône.

b) calculer le volume du solide engendré par le triangle OMB

480. Un angle xOy mesure 60° . Sur le côté Ox on porte $OA = 4$ cm et $OB = 16$ cm; sur le côté Oy on porte $OC = 8$ cm.

1° Calculer AC et BC. Comparer les triangles AOC, COB et ACB.

2° Démontrer que la droite OC est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

3° Le triangle ABC tourne autour de AB. Calculer l'aire et le volume du solide engendré par la révolution du triangle.

481. On décrit un demi-cercle de centre O, de diamètre

$AB = a$. On détermine le point C, entre A et B, tel que $AC = \frac{AB}{3}$.

La perpendiculaire à AB, élevée en C coupe le demi-cercle en D. Le rayon OH perpendiculaire sur AD coupe CD en E.

1° Exprimer la construction du point C.

2° Calculer CD, OH en fonction de a .

3° On joint BD. Trouver les triangles semblables au triangle ADC. Montrer que le quadrilatère OCHD est inscriptible.

4° Calculer le volume engendré par le triangle ADB tournant autour de AB.

482. Soit un triangle équilatéral ABC, dont la hauteur AH mesure 24 cm; soit un arc \widehat{DIE} de centre A et tel que D soit situé sur AB, I sur AH et E sur AC et que le secteur ADIE soit le

développement de la surface latérale d'un cône dont le cercle de base soit construit sur le diamètre IH.

- 1° Calculer le rayon et l'apothème (ou génératrice) du cône
- 2° Faire le tracé à l'échelle $\frac{1}{3}$, hachurer la partie du triangle non comprise dans la surface totale du cône.
- 3° Calculer l'aire de cette partie hachurée (en vraie grandeur) (B. E.);

483. On considère un angle $\widehat{xAy} = 60^\circ$. Sur Ax on port $AC = a$ et on construit le cercle tangent en C à Ax et en B à Ay

- 1° Indiquer la construction de ce cercle. Calculer son rayon en fonction de a .
- 2° Construire la tangente B'C' à ce cercle, parallèle à BC (B' entre A et B). Construire le cercle inscrit au triangle AB'C' et calculer son rayon en fonction de a .
- 3° Le triangle AB'C' tourne autour de la bissectrice de \widehat{xAy} . Calculer le volume du cône engendré.

484. Un cône circulaire droit dont la génératrice fait avec l'axe un angle de 30° est circonscrit à une sphère dont le rayon est 2 dm.

- 1° Calculer, en dm, la distance du sommet de ce cône au centre de la sphère.
- 2° Calculer, en cm, à 1 cm près, le rayon du cercle de contact du cône et de la sphère.
- 3° Calculer en cm^2 , à 1 cm^2 près, la surface de la portion de la sphère qui est vue du sommet du cône.
- 4° Calculer en cm^3 , à 1 cm^3 près, le volume du cône dont la base est le cercle de contact de la sphère et du cône donné et dont le sommet est le sommet du cône donné. (B. E.)

485. Deux cercles, l'un de centre O et de rayon R, l'autre de centre O' et de rayon R' sont tangents extérieurement en A. Une tangente commune extérieure touche le cercle O en B, le cercle O' en C. La tangente commune intérieure coupe BC en I.

- 1° Démontrer que les triangles ABC et OIO' sont rectangles
- 2° Calculer en fonction de R et de R' les segments AI et BI
- 3° La figure tournant autour de l'axe OO', calculer le volume engendré par le triangle IOO'.

486. On considère un demi-cercle de centre O, de diamètre AB = 2 R. On trace un demi-cercle de diamètre AO, de centre O'. Une sécante issue de A coupe le cercle O' en C et le cercle O en D.

- 1° Démontrer que OC est bissectrice de l'angle \widehat{AOD} .
- 2° Par C et par D on mène des tangentes respectivement au cercle O' et au cercle O. Démontrer que ces tangentes sont parallèles.
- 3° Construire la sécante ACD de manière que la tangente en C

au cercle O' passe par B. Le point C se projette en H sur AB. Calculer AH.

4° La tangente en C passant par B, calculez le volume engendré par le triangle $O'CB$ tournant autour de AB.

487. On donne le losange ABCD, dans lequel $AB = a$, — l'angle \hat{A} vaut 60° .

1° Calculez les diagonales BD, AC et la surface de ce losange.

2° On mène une droite quelconque xAy ne traversant pas le losange. Des points B, C, D, on mène les perpendiculaires DE, CG, BH à cette droite xAy . Démontrer que $CG = DE + BH$.

3° On fait tourner le losange autour de AC. Quel est le solide engendré? Calculez sa surface et son volume.

On fait tourner le losange autour du côté AB. Quel est, dans ce cas, le volume du solide obtenu? (B. E.)

488. La surface latérale développée d'un cône forme un secteur de n degrés et dépasse de m unités de surface la surface de la base du cône.

1° Calculez le rayon, l'apothème et la hauteur du cône en fonction de n et de m .

2° Application numérique : $n = 252^\circ$; $m = 264 \text{ cm}^2$; $\pi = \frac{22}{7}$.

(B. E.)

489. On donne un cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$ et une corde CD perpendiculaire à AB en I.

1° Évaluez en fonction de R la somme $IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2$.

2° Si $AB = 5 \text{ m}$ et $OI = 0,7 \text{ m}$, calculez :

a) le périmètre du quadrilatère ABCD.

b) l'aire et le volume du solide engendré par le quadrilatère ABCD tournant autour de AB.

3° Démontrer que la médiane IM du triangle IAD est perpendiculaire à CB.

4° On considère maintenant une corde CD non perpendiculaire à AB, soit P l'intersection de BD et CA et Q celle de DA et BC. Démontrer que BA est perpendiculaire à PQ. (B. E.)

490. On donne un cercle de centre O, de rayon R. On mène un rayon OA et on trace le cercle de diamètre OA, soit O' son centre. Par un point B quelconque du cercle O on mène une tangente BM au cercle O' , cette tangente recoupe le cercle O en C. La perpendiculaire abaissée de O sur BC coupe le cercle O en N.

1° Démontrer que les points A, M et N sont alignés.

2° Montrer que AM est bissectrice de l'angle \hat{BAC} .

3° Quelle est, en fonction de R, la valeur de BC lorsque cette droite est parallèle à OA?

4° Dans ce cas, calculez le volume engendré par le triangle OMA lorsque la figure tourne autour de l'axe OA.

491. Dans un trapèze isocèle, la petite base AB mesure 6 cm et est égale à la moitié de la grande base CD; les angles égaux en C et D mesurent 60° .

1° Calculer les côtés non parallèles, la hauteur AH et l'aire du trapèze.

2° Quelle est la particularité de la diagonale BD par rapport à l'angle \widehat{ADC} et au côté BC. Calculer cette diagonale.

3° Les diagonales se coupent en E. Calculer AE et EC.

4° Calculer l'aire et le volume du solide engendré par la révolution du trapèze autour de la base CD.



SPHÈRE

492. Un cône creux est posé sur une sphère de centre O, de rayon R. La distance du centre O au sommet S du cône de révolution est d. Calculer le volume compris entre le cône et la sphère.

493. On considère un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 2R$. Intérieurement à ce demi-cercle on décrit les cercles, l'un de diamètre AO, de centre O_1 , l'autre de diamètre OB, de centre O_2 , puis le cercle de centre I tangent aux 3 cercles O, O_1 et O_2 .

1° Préciser la position de OI par rapport à AB.

2° Évaluer, en fonction de R, le rayon du cercle I.

3° Calculer l'aire intérieure au demi-cercle O et extérieure aux cercles O_1 , O_2 et I.

4° La figure tournant autour de AB, calculer la différence entre le volume engendré par la révolution du demi-cercle O et le volume engendré par le triangle IO_1O_2 .

494. On donne un demi-cercle de centre O, de diamètre $AB = 40$ cm. On trace deux rayons OC et OD tels que $\widehat{AOC} = 45^\circ$ et $\widehat{BOD} = 30^\circ$. On fait tourner le demi-cercle autour de AB.

Calculer : 1° la surface engendrée par le secteur circulaire OCD.

2° le volume engendré par le même secteur.

495. Dans un cercle de centre O et de rayon R on trace un angle $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Soit C le symétrique de B par rapport à OA. Du côté opposé à B par rapport à OA on mène le rayon OD perpendiculaire à OA.

1° Étudier la nature du quadrilatère OBCD.

2° Exprimer la longueur de BD en fonction de R.

3° Exprimer, en fonction de R, la surface totale et le volume du solide engendré par la révolution autour de OA du secteur AOB.

496. On donne une pyramide régulière de sommet S à base carrée ABCD. Le centre O de la sphère circonscrite à la pyramide est sur la hauteur SH et $OS = OA = OB = OC = OD$.

D'autre part $SH = AB = 2a$.

- 1° Calculer le rayon R de la sphère circonscrite.
- 2° Calculer le rapport entre le volume de la sphère et celui de la pyramide.
- 3° Calculer la surface totale de la pyramide

497. On considère une circonférence de diamètre $AB = 2R$ et, dans cette circonférence, le triangle équilatéral inscrit ACD , ainsi que le carré inscrit $MNPQ$ (les côtés NP et QM étant parallèles à AB). On fait tourner la figure autour du diamètre AB .

1° Évaluer la surface totale du cylindre et du cône engendrés, ainsi que la surface de la sphère. Vérifier que la surface totale du cylindre est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphère et la surface totale du cône.

2° Évaluer le volume du cylindre, du cône et de la sphère. Vérifier que le volume du cylindre est moyen proportionnel entre le volume du cône et le volume de la sphère. (B. E.)

498. On donne un triangle isocèle ABC tel que

$$AB = AC = 10 \text{ cm} \quad \text{et} \quad BC = 12 \text{ cm.}$$

1° Calculer la hauteur AH . Préciser la position du point I centre du cercle inscrit.

2° Soient H , D et E les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC , AC et AB . Calculer le rayon r du cercle inscrit.

3° La figure tourne autour de AH . Calculer le volume des solides engendrés par la révolution du triangle ABC et par celle du cercle inscrit.

499. Soit un cercle de centre O , de rayon R , de diamètre AB . De part et d'autre de AB , on construit des angles BOC et BOD égaux à 45° (C et D sur le cercle). Les tangentes au cercle en C et D se coupent en S .

1° Démontrer que S est sur le prolongement de AB . Calculer BS en fonction de R .

2° Calculer l'aire comprise entre l'arc \widehat{BC} et la ligne brisée BSC .

3° La figure tournant autour de AS , calculer l'aire du solide engendré par la révolution de l'arc \widehat{AC} et de la droite CS .

500. On donne un cercle de diamètre $AB = 2R$. On prolonge AB d'une longueur $BC = R$. Du point C on mène la tangente au cercle qui le touche en T . La droite CT coupe les tangentes en A et B respectivement en A' et B' .

1° Calculer les segments CT , CH (H , pied de la perpendiculaire abaissée de T sur AB), TH , AA' , BB' , CA' , CB' .

2° Quelle est la nature du triangle $A'OB'$? Calculer les aires des 2 triangles $A'OB'$ et ACA' .

3° La figure tourne autour de AC . Calculer :

- a) la surface totale du solide de révolution obtenu.
- b) le volume du solide engendré par la surface comprise entre le triangle ACA' et le demi-cercle de diamètre AB .



TABLE DES MATIÈRES

Revision de la classe de 4°	1
Classe de 3°	
<i>Premiers lieux géométriques</i>	17
<i>Angles inscrits</i>	19
<i>Arc capable</i>	20
<i>Quadrilatère inscriptible</i>	21
<i>Lieux géométriques</i>	23
<i>Constructions géométriques</i>	32
<i>Rapports de 2 segments. Théorème de Thalès</i>	32
<i>Triangles semblables</i>	35
<i>Homothétie</i>	51
<i>Relations métriques dans le triangle rectangle</i>	53
<i>Relations métriques dans le cercle</i>	75
<i>Polygones réguliers</i>	85
<i>Rapports trigonométriques</i>	111
<i>Aires</i>	116
<i>Rapport des aires</i>	128
<i>Circonférence. Cercle</i>	139
<i>Volumes : prisme, pyramide, cylindre, cône</i>	144
<i>Sphère</i>	150



