

Cuprins

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | TRIUNGHIURI REMARCABILE | 11 |
| 1.1 | Triunghiul ortic | 11 |
| 1.2 | Triunghiul median | 23 |
| 1.3 | Triunghiul de contact | 29 |
| 1.4 | Triunghiul extanġential | 36 |
| 1.5 | Triunghiul cotanġentic | 40 |
| 1.6 | Triunghiul podar | 44 |
| 1.7 | Triunghiul antipodar | 56 |
| 1.8 | Triunghiul tanġential | 60 |
| 1.9 | Triunghiul anticomplementar | 67 |
| 1.10 | Triunghiul antisuplementar | 70 |
| 1.11 | Triunghiul ciclocevian | 75 |
| 1.12 | Triunghiul I - pedal | 77 |
| 1.13 | Triunghiuri altimediale | 80 |
| 1.14 | Triunghiurile lui Brocard | 82 |
| 1.15 | Triunghiul antiparalel determinat de o direcġie în raport cu un triunghi | 90 |
| 1.16 | Triunghi automedian | 92 |
| 1.17 | Triunghi circumpedal | 97 |
| 1.18 | Triunghiul simedian | 106 |
| 1.19 | Triunghiul Δ_{60° | 108 |
| 1.20 | Triunghiul medianelor | 112 |
| 1.21 | Triunghiuri omologice | 114 |
| 1.22 | Triunghiuri ortopolare | 116 |
| 1.23 | Triunghiuri ortologice | 123 |
| 1.24 | Triunghiuri bilogice | 127 |
| 1.25 | Triunghiuri biortologice. Triunghiuri triortologice | 130 |
| 1.26 | Triunghiuri paralogice | 131 |
| 1.27 | Triunghiuri înscrise | 134 |
| 1.28 | Triunghiuri înscrise izotomice | 136 |
| 1.29 | Triunghiuri coparalele | 139 |
| 1.30 | Triunghiuri pseudoisoscele | 143 |
| 1.31 | Triunghiuri cosimediane | 148 |
| 1.32 | Triunghiul celor trei imagini | 152 |
| 1.33 | Triunghiuri izoliniare | 154 |
| 1.34 | Triunghiuri metaparalele | 155 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 1.35 | Triunghiul pedal | 157 |
| 1.36 | Triunghiul anticevian | 160 |
| 1.37 | Triunghiuri ortogonale | 161 |
| 1.38 | Triunghiul lui Țițeica - Carnot | 163 |
| 1.39 | Triunghiul lui Lucas | 171 |
| 1.40 | Triunghiul lui Fuhrmann | 175 |
| 1.41 | Triunghiul lui Lionnet | 181 |
| 1.42 | Triunghiurile lui Morley | 183 |
| 1.43 | Triunghiul lui Grebe | 190 |
| 1.44 | Triunghiul lui Malfatti | 192 |
| 1.45 | Triunghiul lui Schroeter | 199 |
| 1.46 | Triunghiurile lui Napoleon. Punctele lui Fermat | 200 |
| 1.47 | Triunghiurile lui Vecten | 210 |
| 1.48 | Triunghiurile Sharygin | 218 |
| 1.49 | Triunghiurile lui Caspary | 222 |
| 2 | INEGALITĂȚI GEOMETRICE REMARCABILE | 224 |
| 2.1 | Inegalitatea fundamentală a triunghiului (Inegalitățile lui Blundon) . . | 224 |
| 2.2 | Inegalitatea lui Euler | 247 |
| 2.3 | Inegalitatea lui Gerretsen | 248 |
| 2.4 | Inegalitatea lui Doucet | 249 |
| 2.5 | Inegalitatea triunghiului | 249 |
| 2.6 | Inegalitatea lui Mitrinović | 250 |
| 2.7 | Inegalitatea lui Leibniz | 251 |
| 2.8 | Inegalitatea lui Erdős – Mordell | 252 |
| 2.9 | Inegalitatea lui Barrow | 259 |
| 2.10 | Inegalitatea lui Finsler - Hadwiger | 260 |
| 2.11 | Inegalitatea lui Ionescu-Weitzenböck | 261 |
| 2.12 | Inegalitatea lui Breush | 265 |
| 2.13 | Inegalitatea lui Pedoe | 266 |
| 2.14 | Inegalitatea lui Oppenheim | 268 |
| 2.15 | Inegalitatea lui Klamkin | 269 |
| 2.16 | Inegalitatea lui Bothema | 270 |

Listă de figuri

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Triunghiul ortic | 11 |
| 1.2 | Raza cercului circumscris triunghiului ortic | 13 |
| 1.3 | Lungimile laturilor triunghiului ortic | 14 |
| 1.4 | Dreptele H_aA', H_bB', H_cC' sunt concurente | 18 |
| 1.5 | $O_aO_bO_c$ este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ | 19 |
| 1.6 | $A_{[ABC]} \geq 16 \cdot A_{[A'B'C']}$ | 20 |
| 1.7 | $H'_aH''_a$ este antiparală cu BC | 21 |
| 1.8 | Triunghiul median | 23 |
| 1.9 | Triunghi omotetic cu triunghiul median | 25 |
| 1.10 | N și N' aparțin dreptei M_aM_b | 26 |
| 1.11 | $B_1 \equiv C_b$ | 27 |
| 1.12 | Triunghiul ortic al triunghiului median | 28 |
| 1.13 | Triunghiul de contact | 29 |
| 1.14 | Centrul de greutate al triunghiului $C_aC_bC_c$ | 31 |
| 1.15 | $C_aC_bC_c$ și triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris | 33 |
| 1.16 | C_bI, C_aC_c și BM_b sunt concurente | 34 |
| 1.17 | Triunghiul ortic al triunghiului de contact | 34 |
| 1.18 | Perpendiculare concurente | 35 |
| 1.19 | Triunghiul extanșial | 36 |
| 1.20 | Raza cercului înscris în triunghiul extanșial | 38 |
| 1.21 | Triunghiul cotangenic | 40 |
| 1.22 | Triunghiul median al triunghiului cotangenic | 42 |
| 1.23 | $I_aA' \perp \tau_b\tau_c$ | 43 |
| 1.24 | Triunghiul podar | 45 |
| 1.25 | Teorema lui Oppenheim | 47 |
| 1.26 | Aria triunghiului podar $P_aP_bP_c$ | 48 |
| 1.27 | Perimetrul triunghiului podar | 50 |
| 1.28 | Centrul cercului circumscris triunghiului podar | 51 |
| 1.29 | Triunghiuri omologice | 52 |
| 1.30 | Triunghiul podar al unui punct aflat pe o bisectoare | 53 |
| 1.31 | Triunghiul antipodar | 56 |
| 1.32 | Triunghi omologic cu triunghiul antipodar | 57 |
| 1.33 | Triunghiul antipodar - triunghiul podar | 58 |
| 1.34 | Triunghiurile antipodare ale punctelor lui Fermat | 59 |
| 1.35 | Triunghiul tanșial | 60 |

| | | |
|------|--|-----|
| 1.36 | Triunghi omotetic cu triunghiul tangențial | 64 |
| 1.37 | Triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ sunt omologice | 65 |
| 1.38 | $T_A A', T_B B', T_C C'$ sunt concurente | 66 |
| 1.39 | Triunghiul anticomplementar | 67 |
| 1.40 | Dreptele $A' A'', B' B'', C' C''$ sunt concurente | 69 |
| 1.41 | Triunghiul antisuplementar | 71 |
| 1.42 | $B_2 \in M_a M_c$ | 73 |
| 1.43 | Triunghiul ciclocevian | 76 |
| 1.44 | Triunghiul I - pedal | 77 |
| 1.45 | Triunghiuri altimediale | 80 |
| 1.46 | Triunghiurile ABC și $I_1 I_2 I_3$ sunt omologice | 81 |
| 1.47 | Cercul lui Brocard | 83 |
| 1.48 | Punctele lui Brocard | 85 |
| 1.49 | Cerc adjunct | 89 |
| 1.50 | Triunghiul antiparalel determinat de o direcție în raport cu un triunghi | 91 |
| 1.51 | Triunghiul automedian | 95 |
| 1.52 | Punctele B, H_c, G, M_a sunt conciclice | 96 |
| 1.53 | Triunghi circumpedal | 97 |
| 1.54 | Triunghiul circumpedal și triunghiul podar sunt asemenea | 98 |
| 1.55 | $\overrightarrow{MO} = \frac{R}{r} \overrightarrow{MI}$ | 100 |
| 1.56 | Triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris | 101 |
| 1.57 | Dreptele MQ, NR și PS sunt concurente | 103 |
| 1.58 | Triunghiul circumpedal al unui punct al lui Brocard | 104 |
| 1.59 | Triunghiul circumpedal al centrului cercului circumscris | 105 |
| 1.60 | Triunghiul simedian | 106 |
| 1.61 | Triunghiul Δ_{60° | 108 |
| 1.62 | Triunghiul medianelor | 113 |
| 1.63 | Triunghiuri omologice | 115 |
| 1.64 | Triunghiuri ortopolare | 116 |
| 1.65 | Triunghiuri S | 118 |
| 1.66 | Procedeu de construcție a unui triunghi S (1) | 119 |
| 1.67 | Procedeu de construcție a unui triunghi S (2) | 120 |
| 1.68 | Procedeu de construcție a unui triunghi S (3) | 120 |
| 1.69 | Triunghiurile $S : H_a H_b H_c$ și $M_a M_b M_c$ | 121 |
| 1.70 | Triunghiuri ortologice | 123 |
| 1.71 | ΔABC și triunghiul podar al unui punct P sunt ortologice | 125 |
| 1.72 | Triunghiuri bilogice | 128 |
| 1.73 | Triunghiuri paralogice | 131 |
| 1.74 | τ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A' B' C'$ | 132 |
| 1.75 | Triunghiuri înscrise (1) | 135 |
| 1.76 | Triunghiuri înscrise (2) | 135 |
| 1.77 | Triunghiuri înscrise izotomice | 136 |
| 1.78 | $A_{[ABC]} = \frac{AM \cdot d}{2}, M \in (BC)$ | 139 |
| 1.79 | $A_{[ABC]} = A_{[AMC]} - A_{[AMB]}$ | 140 |
| 1.80 | $A_{[ABC]} = A_{[ABM]} - A_{[AMC]}$ | 140 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 1.81 | Triunghiuri coparalele | 141 |
| 1.82 | Triunghiuri pseudoisoscele | 143 |
| 1.83 | Triunghiuri cosimediane | 148 |
| 1.84 | Triunghiul celor trei imagini | 152 |
| 1.85 | Triunghiuri izoliniare | 154 |
| 1.86 | Triunghiuri metaparalele | 156 |
| 1.87 | Triunghiul pedal | 157 |
| 1.88 | Triunghiul anticevian | 160 |
| 1.89 | Drepte concurente în triunghiul anticevian | 161 |
| 1.90 | Triunghiuri ortogonale | 162 |
| 1.91 | Triunghiul lui Țițeica - Carnot | 163 |
| 1.92 | H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c | 166 |
| 1.93 | Tangente în H la cercurile lui Țițeica | 167 |
| 1.94 | Cercurile Țițeica-Carnot ale triunghiului de contact (1) | 168 |
| 1.95 | Cercurile Țițeica-Carnot ale triunghiului de contact (2) | 169 |
| 1.96 | Triunghiul lui Lucas | 171 |
| 1.97 | Cercurile lui Lucas | 173 |
| 1.98 | Cercurile lui Lucas sunt tangente două câte două | 174 |
| 1.99 | Triunghiul lui Fuhrmann | 175 |
| 1.100 | Cercuri cu centrele în vârfurile triunghiului Fuhrmann | 177 |
| 1.101 | $F_A F_B F_C$ triunghiul lui Fuhrmann | 180 |
| 1.102 | Triunghiul lui Lionnet | 181 |
| 1.103 | Triunghiurile lui Morley | 183 |
| 1.104 | Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi ascuțitunghic | 187 |
| 1.105 | Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi dreptunghic | 188 |
| 1.106 | Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi obtuzunghic | 189 |
| 1.107 | Triunghiul lui Grebe | 190 |
| 1.108 | Triunghiul lui Malfatti | 193 |
| 1.109 | Razele cercurilor Malfatti | 194 |
| 1.110 | Triunghiul lui Schroeter | 199 |
| 1.111 | Triunghiul exterior al lui Napoleon | 201 |
| 1.112 | Primul punct al lui Toricelli – Fermat | 202 |
| 1.113 | Al doilea punct Toricelli – Fermat | 203 |
| 1.114 | Triunghiul Vecten exterior | 210 |
| 1.115 | Triunghiul Vecten interior | 214 |
| 1.116 | Generalizarea teoremei lui Vecten | 217 |
| 1.117 | Primul triunghi Sharygin | 219 |
| 1.118 | Al doilea triunghi Sharygin | 220 |
| 1.119 | Triunghiurile lui Caspary | 223 |
| 2.1 | Inegalitățile lui Blundon | 227 |
| 2.2 | N se "mișcă" pe cercul de diametru $N_{\min}N_{\max}$ | 228 |
| 2.3 | O reprezentare geometrică a parametrului ϕ | 229 |
| 2.4 | Forma duală a inegalității lui Blundon | 232 |
| 2.5 | Configurația lui Blundon și punctul lui Nagel N | 236 |
| 2.6 | Distribuția triunghiurilor în familia $\mathcal{T}(R, r)$ | 238 |

| | | |
|------|--|-----|
| 2.7 | Inegalitatea triunghiului | 250 |
| 2.8 | Teorema lui Erdős – Mordell | 252 |
| 2.9 | Generalizarea teoremei lui Erdős - Mordell | 257 |
| 2.10 | Teorema lui Barrow | 259 |
| 2.11 | Inegalitatea lui Ionescu-Weitzenböck | 263 |
| 2.12 | Inegalitatea lui Breush | 265 |
| 2.13 | Inegalitatea lui Pedoe | 267 |
| 2.14 | Inegalitatea lui Klamkin | 269 |

Capitolul 1

TRIUNGHIURI REMARCABILE

1.1 Triunghiul ortic

„Matematica poate să descopere o anumită ordine chiar și în haos.” - Ch. Stein¹

În triunghiul ABC , fie H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor duse din vârfurile A, B , respectiv C pe laturile triunghiului ABC . Triunghiul $H_aH_bH_c$ se numește *triunghiul ortic* (sau *triunghiul ortocentric*) al triunghiului ABC .

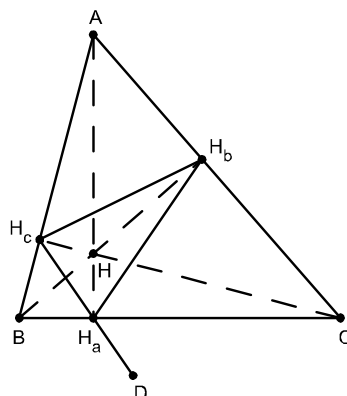


Figura 1.1: Triunghiul ortic

Observația 1 *Triunghiul ortic este triunghiul cevian al triunghiului ABC corespunzător ortocentrului. Triunghiul ortic este triunghiul podar al ortocentrului triunghiului ABC în raport cu triunghiul ABC .*

¹Charles Stein (1920 -) – matematician american, profesor la Universitatea Stanford, contribuții în statistica matematică

Teorema 2 *Triunghiurile $AH_bH_c, H_aBH_c, H_bH_aC$ sunt asemenea cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Deoarece patrulaterul BCH_bH_c este inscriptibil ($\sphericalangle BH_bC \equiv \sphericalangle BH_cC$) rezultă că $\sphericalangle AH_cH_b \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle AH_bH_c \equiv \sphericalangle ABC$, deci triunghiurile AH_cH_b și ACB sunt asemenea (Figura 1.1). Analog se arată că triunghiurile H_aBH_c și H_bH_aC sunt asemenea cu triunghiul ABC . \square

Teorema 3 *Dreptele H_aH_b, H_bH_c, H_cH_a sunt antiparalele cu dreptele AB, BC , respectiv CA .*

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă. \square

Teorema 4 *Semidreptele $[AH_a], [BH_b], [CH_c]$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic.*

Demonstrație. Deoarece $\sphericalangle BH_aH_c \equiv \sphericalangle BH_aH_b \equiv \sphericalangle BAC$ rezultă că

$$m(\sphericalangle H_cH_aA) = m(\sphericalangle H_bH_aA) = 90^\circ - m(\sphericalangle BAC),$$

iar AH_a este bisectoarea unghiului $\sphericalangle H_bH_aH_c$. Analog, BH_b și CH_c sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle H_aH_bH_c$, respectiv $\sphericalangle H_bH_cH_a$. \square

Teorema 5 *Ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ortic $H_aH_bH_c$.*

Demonstrație. Deoarece AH_a, BH_b, CH_c sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic rezultă că punctul de intersecție al lor (adică H) este centrul cercului înscris în triunghiul ABC . \square

Teorema 6 *Vârfurile triunghiului ABC sunt centrele cercurilor exînscrie triunghiului ortic $H_aH_bH_c$.*

Demonstrație. Fie $D \in H_cH_a$ astfel încât $H_a \in [H_cD]$ (Figura 1.1). Avem $\sphericalangle BH_aH_c \equiv \sphericalangle DH_aC \equiv \sphericalangle H_bH_aC$, deci H_aC este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle DH_aH_b$. Cum CH_c este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle H_aH_cH_b$, rezultă că punctul C este centrul cercului exînscriștriunghiului $H_aH_bH_c$ tangent laturii H_aH_b . \square

Teorema 7 *Cercul circumscris triunghiului ortic² al unui triunghi ABC este cercul lui Euler al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler” [15]. \square

Teorema 8 *Raza cercului circumscris triunghiului ortic are lungimea egală cu jumătate din lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .*

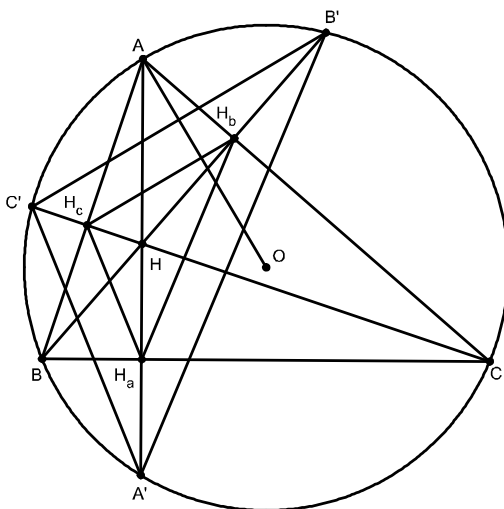


Figura 1.2: Raza cercului circumscris triunghiului ortic

Demonstrație. Fie A', B', C' punctele de intersecție dintre înălțimile triunghiului ABC (Figura 1.2) cu cercul circumscris triunghiului ABC . Deoarece A', B', C' sunt simetrice ortocentrului față de laturile triunghiului ABC , rezultă că triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$. Cum H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b sunt linii mijlocii în triunghiul $A'B'C'$ rezultă că raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$, deci $R' = \frac{R}{2}$ (R este raza cercului circumscris triunghiului ABC și R' raza cercului circumscris triunghiului ortic $H_aH_bH_c$). \square

Teorema 9 *Triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al ortocentrului H al triunghiului ABC , centrul de omotetie fiind ortocentrul triunghiului ABC*

Demonstrația rezultă din teorema precedentă. \square

Teorema 10 *Lungimile laturilor triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ sunt egale cu $a|\cos \sphericalangle A|$, $b|\cos \sphericalangle B|$ și $c|\cos \sphericalangle C|$, (a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB).*

Demonstrație. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci din asemănarea triunghiurilor ABC și $H_aH_bH_c$ rezultă

$$\frac{H_aH_b}{c} = \frac{H_bC}{a},$$

de unde

$$H_aH_b = \frac{c}{a} \cdot H_bC = \frac{c}{a} \cdot a \cos \widehat{C} = c \cdot \cos \widehat{C}.$$

Analog, $H_bH_c = a \cos \widehat{A}$ și $H_cH_a = b \cos \widehat{B}$. Fie triunghiul ABC obtuzunghic (Figura

² Arhimede este cel ce a numit triunghiul $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic corespunzător triunghiului ABC .

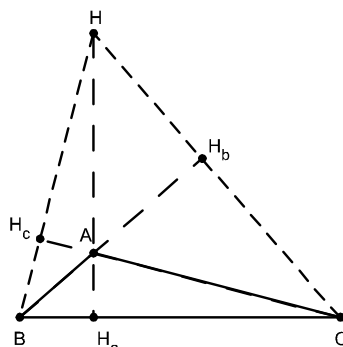


Figura 1.3: Lungimile laturilor triunghiului ortic

1.3) ($m(\widehat{A}) > 90^\circ$). Din asemănarea triunghiurilor ABC și AH_cH_b rezultă $\frac{H_bH_c}{a} = \frac{aH_b}{b}$, de unde $H_bH_c = \frac{a}{b} \cdot AH_b$. În triunghiul AH_bC avem

$$\cos(180^\circ - \widehat{BAC}) = \frac{AH_b}{b},$$

adică $AH_b = -b \cos \widehat{A}$, de unde:

$$H_bH_c = -a \cos \widehat{A} = a \left| \cos \widehat{A} \right|.$$

Analog, $H_aH_c = b \left| \cos \widehat{B} \right|$ și $H_aH_b = c \left| \cos \widehat{C} \right|$. □

Teorema 11 Perimetrul triunghiului ortic este egal cu $a |\cos A| + b |\cos B| + c |\cos C|$.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă.

Observația 12 Pentru un triunghi ascuțitunghic perimetrul triunghiului ortic este egal cu

$$p_o = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

Teorema 13 Fie p perimetrul unui triunghi ascuțitunghic ABC și p_o perimetrul triunghiului său ortic. Atunci,

$$\frac{p}{p_o} = \frac{R}{r},$$

unde R și r sunt razele cercului circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Avem $p_o = \frac{2A_{[ABC]}}{R} = \frac{rp}{R}$, sau $\frac{p}{p_o} = \frac{R}{r}$. □

Teorema 14 Dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi ascuțitunghic ABC , triunghiul ortic are perimetrul minim.

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Fagnano” [15]. □

Teorema 15 Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci

$$\begin{aligned} m(H_bH_aH_c) &= 180^\circ - 2m(\sphericalangle BAC), \\ m(H_aH_bH_c) &= 180^\circ - 2m(\sphericalangle ABC), \\ m(H_bH_cH_a) &= 180^\circ - 2m(\sphericalangle BCA). \end{aligned}$$

Demonstrație. Din $m(\sphericalangle BH_aH_c) = m(\sphericalangle H_bH_aC) = m(\sphericalangle BAC)$, rezultă $m(H_bH_aH_c) = 180^\circ - 2m(\sphericalangle BAC)$. Analog se arată și celelalte relații. \square

Teorema 16 Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic ($m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$), atunci $m(\sphericalangle H_bH_aH_c) = 2m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ$, $m(\sphericalangle H_aH_bH_c) = 2m(\sphericalangle BCA)$, $m(\sphericalangle H_bH_cH_a) = 2m(\sphericalangle ABC)$.

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle H_bH_aH_c) &= 180^\circ - 2m(\sphericalangle BH_aH_c) \\ &= 180^\circ - 2(180^\circ - m(\sphericalangle BAC)) \\ &= 2m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ \\ m(\sphericalangle H_aH_bH_c) &= m(\sphericalangle H_aH_bA) + m(\sphericalangle BH_bH_c) = 2m(\sphericalangle ACB) \end{aligned}$$

și $m(\sphericalangle H_bH_cH_a) = 2m(\sphericalangle ABC)$. \square

Teorema 17 Aria triunghiului ortic este egală cu

$$A_{[H_aH_bH_c]} = \frac{abc |\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C|}{2R}$$

(R este raza cercului circumscris triunghiului ABC).

Demonstrație. Avem $A_{[H_aH_bH_c]} = \frac{H_aH_c \cdot H_aH_b \cdot \sin \sphericalangle H_bH_aH_c}{2}$. Dar $H_aH_c = b \left| \cos \widehat{B} \right|$, $H_aH_b = c \left| \cos \widehat{C} \right|$. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic, atunci

$$\sin \sphericalangle H_bH_aH_c = \sin(180^\circ - 2\widehat{A}) = \sin(2\widehat{A}) = 2 \sin \widehat{A} \cdot \cos \widehat{A} = \frac{a}{R} \cdot \cos \widehat{A} = \frac{a}{R} \cdot \left| \cos \widehat{A} \right|,$$

de unde rezultă concluzia. Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic ($m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$), atunci

$$\sin \sphericalangle H_bH_aH_c = \sin(2\widehat{A} - 180^\circ) = -\sin(2\widehat{A}) = -2 \sin \widehat{A} \cdot \cos \widehat{A} = \frac{a}{R} \cdot (-\cos \widehat{A}) = \frac{a}{R} \cdot \left| \cos \widehat{A} \right|,$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 18 Fie $H_aH_bH_c$ triunghiului ortic al triunghiului ascuțitunghic ABC . Atunci:

$$A_{[H_aH_bH_c]} = 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot A_{[ABC]}.$$

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă, ținând cont că $A_{[ABC]} = \frac{abc}{4R}$. \square

Observația 19 Aria triunghiului ortic este maximă când produsul $2 \cos A \cos B \cos C$ este maxim, adică $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = 60^\circ$, caz în care triunghiul ortic coincide cu triunghiul median. Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic de exemplu $m(\sphericalangle A) > 90^\circ$, atunci

$$A_{[H_a H_b H_c]} = 2 \cos(\pi - A) \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot A_{[ABC]}.$$

Teorema 20 Aria triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC este egală cu:

$$A_{[H_a H_b H_c]} = \frac{|R^2 - OH^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]}$$

Demonstrație. Vezi „Triunghiul podar”. □

Teorema 21 Raza cercului înscris în triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ascuțitunghic ABC este egală cu $2R \cos A \cos B \cos C$.

Demonstrație. Deoarece în triunghiul ABC , $r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ (vezi „Cercul înscris” [15]), raza cercului circumscris triunghiului ortic este egală cu $\frac{R}{2}$, rezultă:

$$\begin{aligned} r_h &= 4 \cdot \frac{R}{2} \cdot \sin \frac{H_a}{2} \cdot \sin \frac{H_b}{2} \cdot \sin \frac{H_c}{2} \\ &= 2R \sin \frac{\pi - 2A}{2} \cdot \sin \frac{\pi - 2B}{2} \cdot \sin \frac{\pi - 2C}{2} = 2R \cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

□

Observația 22 Deoarece $A_{[ABC]} = \frac{abc}{4R}$, rezultă $A_{[H_a H_b H_c]} = 2A_{[ABC]} \cdot \cos A \cos B \cos C$.

Teorema 23 Laturile triunghiului ortic al triunghiului ABC sunt paralele cu tangentele la cercul circumscris triunghiului ABC duse prin vârfurile triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie (TA) tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC . Avem: $m(\sphericalangle TAB) = m(\sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle AC'B)$. Dar $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AH_c H_b$, deci $\sphericalangle TAH_c \equiv \sphericalangle AH_c H_b$, de unde rezultă $TA \parallel H_c H_b$. □

Teorema 24 Triunghiul ortic și triunghiul determinat de tangentele la cercul circumscris unui triunghi ABC în vârfurile triunghiului ABC sunt omotetice.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă. □

Teorema 25 Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC și $H_a H_b H_c$ triunghiul său ortic, atunci

$$HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b = HC \cdot HH_c.$$

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor $HH_b A$ și $HH_a B$, respectiv $HH_a C$ cu $HH_c A$ se obține: $HA \cdot HH_a = HB \cdot HH_b$ și $HA \cdot HH_a = HC \cdot HH_c$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 26 Dreptele ce unesc mijloacele laturilor triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ al unui triunghi ABC cu vârfurile corespunzătoare ale triunghiului ABC , sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Lemoine” [15]. □

Teorema 27 Dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic al triunghiului ABC cu proiecțiile ortocentrului triunghiului ABC pe laturile triunghiului ortic sunt concurente în punctul lui Gergonne al triunghiului ortic.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne” [15]. □

Teorema 28 Dreptele care unesc vârfurile triunghiului ortic al unui triunghi ABC cu punctele de intersecție dintre laturile triunghiului ortic și dreptele AO, BO , respectiv CO (unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC) sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ortic.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel” [15]. □

Teorema 29 Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Triunghiurile ABC, BHC, CHA și AHB au același triunghi ortic.

Demonstrație. Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Deoarece $HH_a \perp BC, CH_b \perp BH, BH_c \perp HC, H_a \in BC, H_b \in HB, H_c \in HC$ rezultă că triunghiul $H_aH_bH_c$ este triunghiul ortic al triunghiului ABC . Analog, se arată că triunghiurile CHA și AHB au același triunghi ortic. □

Teorema 30 Triunghiurile ortic și extangential corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul extangential”. □

Teorema 31 Razele cercurilor exînscrie corespunzătoare triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ascuțitunghic ABC au lungimile: $\rho_a = 2R \cos A \sin B \sin C$, $\rho_b = 2R \sin A \cos B \sin C$ și $\rho_c = 2R \sin A \sin B \cos C$.

Demonstrație. Într-un triunghi ABC , $r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ (vezi „Cercurile exînscrie” [15]). Deoarece ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$, raza cercului circumscris triunghiului este egală cu $\frac{R}{2}$ (vezi „Cercurile exînscrie” [15]). Avem: $\rho_a = 4 \frac{R}{2} \sin \frac{H_a}{2} \cos \frac{H_b}{2} \cos \frac{H_c}{2}$, de unde

$$\rho_a = 2R \sin \frac{\pi - 2A}{2} \cdot \cos \frac{\pi - 2B}{2} \cdot \cos \frac{\pi - 2C}{2} = 2R \cos A \sin B \sin C.$$

Analog se determină ρ_b și ρ_c . □

Observația 32 Dacă triunghiul ABC este obtuzunghic ($m(\sphericalangle BAC) > 90^\circ$) atunci

$$\rho_a = 2R \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \rho_b = 2R \sin A \sin B \cos C, \rho_c = 2R \sin A \cos B \sin C$$

($m(\sphericalangle H_bH_aH_c) = 2m(\sphericalangle BAC) - 180^\circ$, $m(\sphericalangle H_aH_bH_c) = 2m(\sphericalangle CBA)$, $m(\sphericalangle H_aH_cH_b) = 2m(\sphericalangle BCA)$).

Teorema 33 *Mediatoarele laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ascuțitunghic ABC intersectează laturile H_bH_c, H_cH_a , respectiv H_aH_b ale triunghiului ortic $H_aH_bH_c$ în punctele A', B' , respectiv C' . Dreptele H_aA', H_bB', H_cC' sunt concurente.*

Demonstrație. Fie P și Q proiecțiile punctelor H_c și H_b pe BC (Figura 1.4). Avem $\cos B = \frac{BP}{BH_c} = \frac{BH_c}{BC}$, de unde $BP = a \cos^2 B$ și

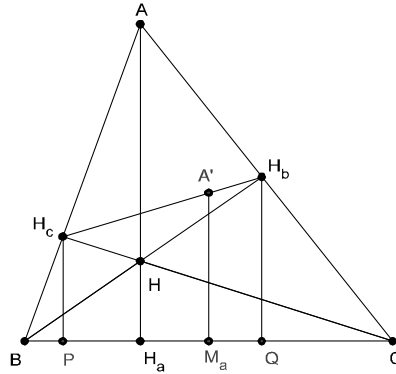


Figura 1.4: Dreptele H_aA', H_bB', H_cC' sunt concurente

$$M_aP = M_aB - M_aQ = \frac{a}{2}(1 - 2 \cos^2 B) = \frac{a}{2} \cos 2B$$

și analog obținem: $M_aQ = \frac{a}{2} \cos 2C$. Din teorema lui Thales avem:

$$\frac{A'H_b}{A'H_c} = \frac{M_aQ}{M_aP} = \frac{\cos 2C}{\cos 2B}.$$

Analog se arată că $\frac{B'H_c}{B'H_a} = \frac{\cos 2A}{\cos 2C}$ și $\frac{C'H_a}{C'H_b} = \frac{\cos 2B}{\cos 2A}$, deci $\frac{A'H_b}{A'H_c} \cdot \frac{B'H_c}{B'H_a} \cdot \frac{C'H_a}{C'H_b} = 1$, iar din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele H_aA', H_bB', H_cC' sunt concurente. \square

Teorema 34 *Fie O, O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BOC, COA , respectiv AOB . Triunghiul $O_aO_bO_c$ este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie R_a, R_b, R_c razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA , respectiv AOB . Deoarece $AO = BO = CO = R$ și $m(\sphericalangle BOO_a) = m(\sphericalangle A)$ rezultă $R_a = \frac{R}{2 \cos A}$ și analog

$$R_b = \frac{R}{2 \cos B}, R_c = \frac{R}{2 \cos C}$$

(Figura 1.5). Deoarece O_aO_b, O_bO_c, O_cO_a sunt mediatoarele segmentelor OC, OA , respectiv OB rezultă că O este centrul cercului înscris în triunghiul $O_aO_bO_c$. Întrucât unghiurile triunghiurilor $O_aO_bO_c$ și $H_aH_bH_c$ sunt respectiv congruente și $OO_a \parallel H_aH$,

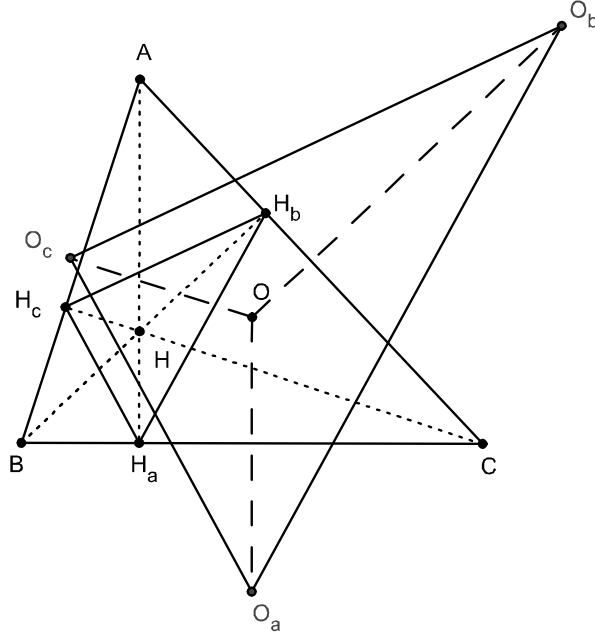


Figura 1.5: $O_aO_bO_c$ este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$

$OO_b \parallel H_bH$, $OO_c \parallel H_cH$ (H fiind centrul cercului înscris în triunghiul ortic) rezultă că triunghiurile $O_aO_bO_c$ și $H_aH_bH_c$ sunt omotetice. Cum punctele O și H se corespund în această omotetie rezultă că dreptele O_aH_a , O_bH_b , O_cH_c sunt concurente într-un punct P ce aparține dreptei HO . Deci, raportul de omotetie este:

$$k = \frac{PH}{PO} = \frac{r_h}{r_o} = \frac{2R \cos A \cos B \cos C}{R/2} = 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C,$$

unde $r_h = 2R \cos A \cos B \cos C$ este raza cercului înscris în triunghiul $H_aH_bH_c$ și $r_o = \frac{R}{2}$ este raza cercului $O_aO_bO_c$. \square

Teorema 35 Fie H ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic ABC , H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor duse din A, B, C și A', B', C' picioarele perpendicularelor duse din H pe H_bH_c, H_cH_a , respectiv H_aH_b . Atunci, $A_{[ABC]} \geq 16 \cdot A_{[A'B'C']}$.

Demonstrație. Deoarece patrulaterul $A'H_cB'H$ este inscriptibil (Figura 1.6), rezultă că

$$\widehat{A'B'H_c} \equiv \widehat{A'HH_c} \equiv \widehat{H_bH_cA} \equiv \widehat{B'H_cB},$$

deci $A'B' \parallel AB$. Analog, $B'C' \parallel BC$ și $A'C' \parallel AC$. Fie O, O_1, O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $ABC, H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ iar R, R_1 și R_2 razele acestora. Atunci, $R_1 = \frac{R}{2}$ (deoarece (O_1, R_1) este cercul lui Euler al triunghiului ABC), iar R_2 poate avea cel mult lungimea razei cercului lui Euler al triunghiului $H_aH_bH_c$, adică $R_2 \leq \frac{R}{4}$ și din asemănarea triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC rezultă $A_{[ABC]} \geq 16 \cdot A_{[A'B'C']}$.

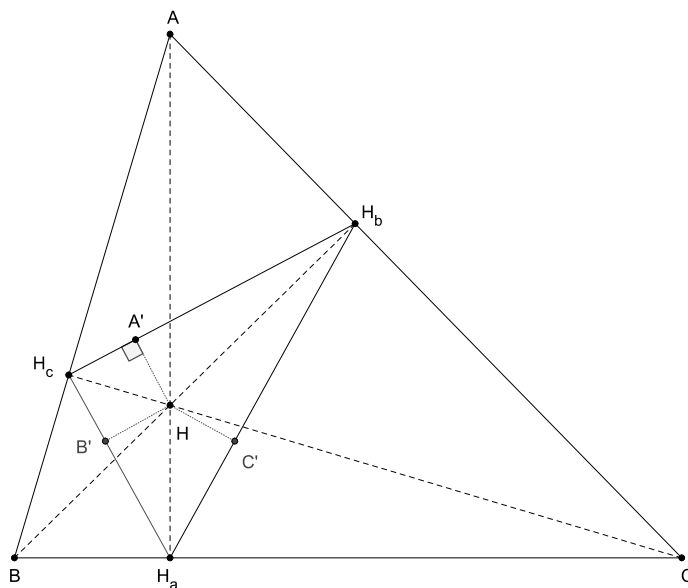


Figura 1.6: $A_{[ABC]} \geq 16 \cdot A_{[A'B'C']}$

Egalitatea are loc atunci când cercul lui Euler al triunghiului $H_aH_bH_c$ coincide cu cercul înscris în triunghiul $H_aH_bH_c$, adică când triunghiul $H_aH_bH_c$ este echilateral, adică când triunghiul ABC este echilateral. \square

Teorema 36 (Nagel) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Dreptele AO, BO, CO sunt perpendiculare pe laturile H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b ale triunghiului ortic.

Demonstrație. Din $m(\sphericalangle AH_cC) = m(\sphericalangle AH_aC) = 90^\circ$ rezultă că patrulaterul ACH_aH_c este inscriptibil, deci $\sphericalangle BH_cH_a \equiv \sphericalangle ACB$. Fie D punctul diametral opus lui B în cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.5). Atunci,

$$m(\sphericalangle ABD) = 90^\circ - m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ - m(\sphericalangle BH_cH_a),$$

de unde $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle BH_cH_a) = 90^\circ$, adică $BO \perp H_cH_a$. Analog, $AO \perp H_bH_c$ și $CO \perp H_aH_b$. \square

Observația 37 Perpendicularele din A, B, C pe H_bH_c, H_cH_a , respectiv H_aH_b sunt concurente în punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Teorema 38 Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC , $H'_a = pr_{AC}(H_a)$, $H''_a = pr_{AB}(H_a)$. Dreapta $H'_aH''_a$ trece prin mijloacele laturilor H_aH_b și H_aH_c .

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele laturilor H_bH_c, H_aH_c , respectiv H_bH_a (Figura 1.7). Deoarece $H'_aH''_a$ și H_bH_c sunt antiparalele cu BC rezultă $H'_aH''_a \parallel H_bH_c$, de unde

$$\sphericalangle H''_aH'_aH_b \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle H_aH_bC$$

și $\sphericalangle H_b H_a H'_a \equiv \sphericalangle H''_a H'_a H_a$ (complemente la unghiuri congruente). Atunci, $H'_a H''_a$ trece prin mijlocul ipotenuzei $H_a H_b$ a triunghiului dreptunghic $H_a H'_a H_b$. Cum $H'_a H''_a \parallel H_b H_c$ rezultă că $H'_a H''_a$ trece și prin mijlocul laturii $H_a H_c$. \square

Observația 39 Dacă $H'_b = pr_{AB}(H_b)$, $H''_b = pr_{BC}(H_b)$, $H'_c = pr_{BC}(H_c)$, $H''_c = pr_{AB}(H_c)$, atunci dreptele $H'_b H''_b$ și $H'_c H''_c$ trec prin mijloacele laturilor triunghiului ortic al triunghiului ABC . Punctele de intersecție dintre dreptele $H'_a H''_a$, $H'_b H''_b$ și $H'_c H''_c$ determină triunghiul median al triunghiului ortic al triunghiului ABC .

Teorema 40 Dacă H'_a și H''_a, H'_b și H''_b, H'_c și H''_c sunt proiecțiile punctelor H_a, H_b , respectiv H_c pe laturile triunghiului ABC , atunci dreptele $H'_a H''_a$, $H'_b H''_b$ și $H'_c H''_c$ sunt antiparalele dreptelor BC, CA , respectiv AB .

Demonstrație. Fie $H_a H_b H_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC (Figura 1.7). Din teorema lui Thales rezultă: $\frac{AH_c}{H_c H''_a} = \frac{AH}{H H_a}$ ($H H_c \parallel H_a H'_a$), $\frac{AH_b}{H_b H'_a} = \frac{AH}{H H_a}$ ($H H_b \parallel$

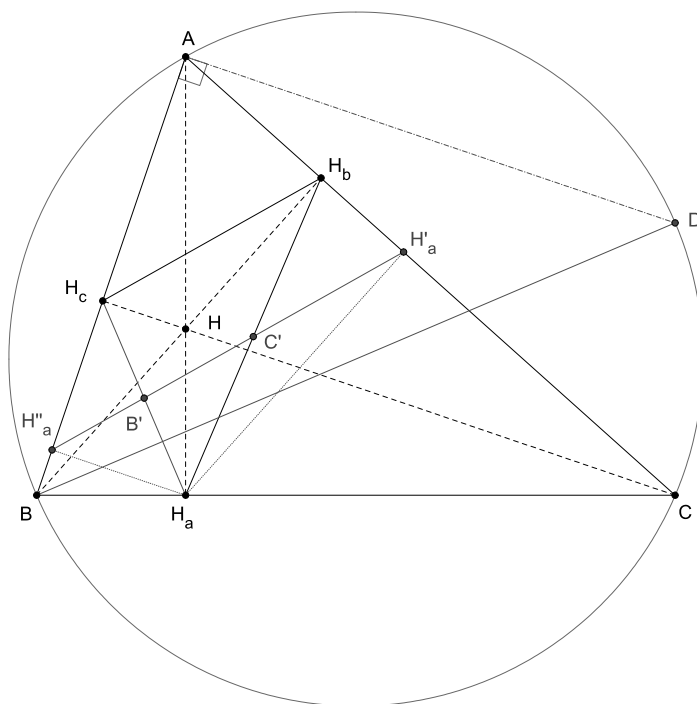


Figura 1.7: $H'_a H''_a$ este antiparală cu BC

$H_a H'_a$), de unde

$$\frac{AH_c}{H_c H''_a} = \frac{AH_b}{H_b H'_a},$$

adică $H_b H_c \parallel H'_a H''_a$. Cum $H_b H_c$ este antiparalelă cu BC rezultă că $H'_a H''_a$ este antiparalelă cu BC . \square

Teorema 41 Segmentele $H'_aH''_a, H'_bH''_b, H'_cH''_c$ sunt congruente.

Demonstrație. Avem

$$H'_aH''_a = H'_aC' + C'B' + B'H''_a = \frac{1}{2}H_aH_b + \frac{1}{2}H_bH_c + \frac{1}{2}H_aH_c = p'$$

(unde p' este semiperimetrul triunghiului ortic). Analog se arată că $H'_bH''_b \equiv H'_cH''_c$ ($= 2R \sin A \sin B \sin C$). \square

Teorema 42 Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic corespunzător triunghiului ABC , BB' bisectoarea interioară a unghiului ABC , $B' \in (AC)$ și B'' piciorul bisectoarei unghiului $\sphericalangle AH_bH_c$. Dreptele $B'B''$ și AB sunt perpendiculare.

Demonstrație. Patrulaterul BCH_bH_c fiind inscriptibil rezultă $\sphericalangle H_cH_bA \equiv \sphericalangle ABC$, deci

$$\sphericalangle B''H_bA \equiv \sphericalangle ABB' \left(= \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC) \right),$$

adică patrulaterul $BB''H_bB'$ este inscriptibil, de unde $m(\sphericalangle BB''B') = m(\sphericalangle BH_bB') = 90^\circ$. \square

Teorema 43 Fie $H_aH_bH_c$ și $C_aC_bC_c$ triunghiurile ortic, respectiv de contact ale triunghiului ABC . Triunghiul $C_aC_bC_c$ și triunghiul având vârfurile în centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AH_bH_c, BH_aH_c, CH_aH_b$ au aceeași dreaptă a lui Euler.

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler” [15]. \square

Teorema 44 Fie A'', B'', C'' punctele de intersecție dintre înălțimile triunghiului ABC cu laturile respective ale triunghiului ortic. Triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt ortologice.

Demonstrația este evidentă deoarece $A''H_a \perp BC, B''H_b \perp CA$ și $C''H_c \perp AB$, iar $A''H_a \cap B''H_b \cap C''H_c = \{H\}$, al doilea centru de ortologie fiind centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC . \square

Teorema 45 Perpendicularele coborâte din mijloacele laturilor triunghiului ortic ale unui triunghi ABC pe laturile respective ale triunghiului ABC sunt concurente.

Demonstrația rezultă din teorema lui Döttl [15]. \square

1.2 Triunghiul median

„Geometria e liniștea întâmplării.” – Nichita Stănescu³

Fie triunghiul ABC și M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, AC, AB . Triunghiul $M_aM_bM_c$ se numește *triunghi median* (sau *auxiliar*) (Figura 1.8).

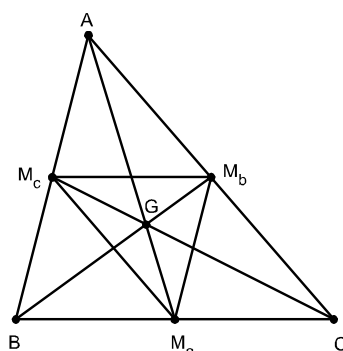


Figura 1.8: Triunghiul median

Teorema 46 *Triunghiul median $M_aM_bM_c$ este triunghiul cevian al centrului de greutate al triunghiului ABC .*

Demonstrația este evidentă deoarece medianele AM_a, BM_b, CM_c sunt concurente în G . \square

Teorema 47 *Triunghiul median este triunghiul podar al centrului cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Mediatoarele laturilor triunghiului ABC sunt concurente în O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC . \square

Teorema 48 *Triunghiul median $M_aM_bM_c$ al triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Laturile triunghiului median sunt linii mijlocii în triunghiul ABC , deci

$$\frac{M_aM_b}{AB} = \frac{M_bM_c}{BC} = \frac{M_cM_a}{CA} = \frac{1}{2},$$

de unde rezultă că triunghiurile $M_aM_bM_c$ și ABC sunt asemenea. \square

³Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

Observația 49

1) Laturile triunghiului median au lungimile: $a' = \frac{a}{2}, b' = \frac{b}{2}, c' = \frac{c}{2}$, unde am notat cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB .

2) Semiperimetrul triunghiului median este: $p' = \frac{a'+b'+c'}{2} = \frac{a+b+c}{4} = \frac{p}{2}$.

3) Măsurile unghiurilor triunghiului median sunt egale cu: $\widehat{M_a M_b M_c} \equiv \widehat{ABC}, \widehat{M_b M_c M_a} \equiv \widehat{BCA}, \widehat{M_c M_a M_b} \equiv \widehat{CAB}$.

4) Coordonatele baricentrice absolute ale vârfurilor triunghiului median sunt: $M_a (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), M_b (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ și $M_c (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

5) Triunghiul ABC și triunghiul median corespunzător au același centru de greutate.

Teorema 50 Aria triunghiului median este egală cu o pătrime din aria triunghiului ABC .

Demonstrație. Avem: $A_{[M_a M_b M_c]} = \frac{1}{4} A_{[ABC]}$, deoarece triunghiurile $M_a M_b M_c, AM_c M_b, M_c B M_a$ și $M_b M_a C$ sunt congruente. \square

Observația 51 Cercul înscris în triunghiul median se numește cercul Spieker, iar centrul acestui cerc se numește punctul lui Spieker.

Teorema 52 Raza cercului Spieker este jumătate din raza cercului înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Spieker” [15]. \square

Cercul circumscris triunghiului median se numește cerc medial (sau cercul celor nouă puncte).

Teorema 53 Orice triunghi omotetic cu triunghiul median al unui triunghi ABC în raport cu punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC , este omologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie $A'B'C'$ triunghiul obținut din triunghiul median $M_a M_b M_c$ prin omotetia de centru O și raport k . Fie $\{T\} = OH \cap AA'$ (Figura 1.9). Din asemănarea triunghiurilor AHT și TOA' rezultă:

$$\frac{TA'}{TA} = \frac{TO}{TH} = \frac{OA'}{AH} = \frac{kOM_a}{2OM_a} = \frac{k}{2}.$$

Analog, se arată că BB' și CC' trec tot prin punctul T care este centrul de omologie. \square

Observația 54 Centrul de omologie între triunghiul omotetic triunghiului median al triunghiului ABC și triunghiul ABC este situat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

Teorema 55 Proiecțiile unui vârf al unui triunghi ABC pe bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor din celelalte două vârfuri aparțin dreptelor ce trec prin vârfurile triunghiului median $M_a M_b M_c$.

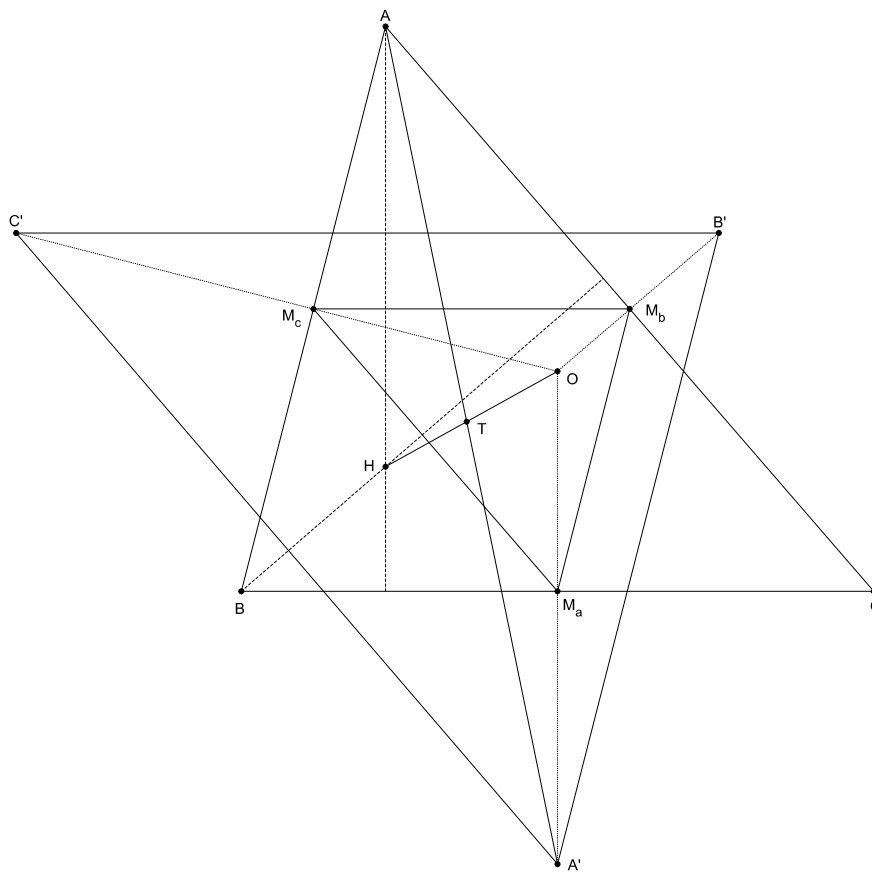


Figura 1.9: Triunghi omotetic cu triunghiul median

Demonstrație. Fie M , M' și N , N' proiecțiile vârfurilor B și C pe bisectoarea interioară, respectiv exterioară a unghiului A . Deoarece patrulaterul $BMAM'$ este dreptunghi, rezultă că $M_c \in MM'$. Fie $\{P\} = BM' \cap AC$. Triunghiul APB este isoscel deoarece AM' este bisectoare și înălțime, deci M' este mijlocul segmentului BP (Figura 1.10). Atunci, $M'M_c$ este linie mijlocie în triunghiul APB , deci $M'M_c \parallel AP$, adică $MM' \parallel AC$, de unde rezultă că punctele M și M' aparțin dreptei $M_a M_c$. Analog, se arată că punctele N și N' aparțin dreptei $M_a M_b$. \square

Teorema 56 *Triunghiul median $M_a M_b M_c$ și triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al unui triunghi ABC sunt omologice.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”. \square

Teorema 57 *Triunghiurile median și antisuplementar ale unui triunghi ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului antisuplementar.*

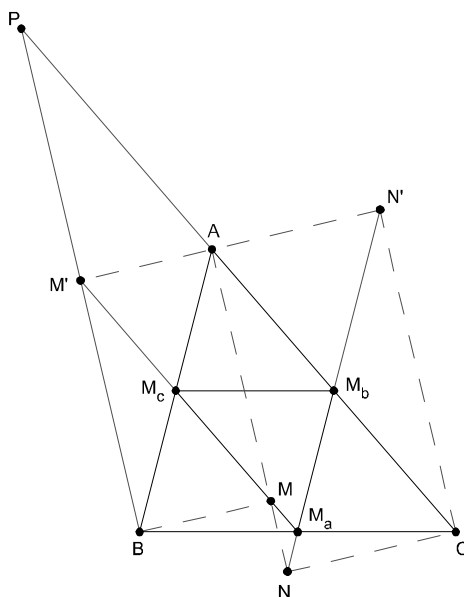


Figura 1.10: N și N' aparțin dreptei $M_a M_b$

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”. □

Teorema 58 *Triunghiul median al triunghiului cotangent al unui triunghi ABC este omologic cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul cotangent”. □

Teorema 59 *Fie $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC și I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC . Dreptele $I_a M_a, I_b M_b$ și $I_c M_c$ sunt concurente.*

Demonstrație. Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$; dreptele care unesc mijloacele laturilor triunghiului ortic corespunzător unui triunghi XYZ cu vârfurile corespunzătoare triunghiului XYZ sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului XYZ (vezi „Triunghiul ortic”), deci dreptele $I_a M_a, I_b M_b, I_c M_c$ sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului $I_a I_b I_c$. □

Teorema 60 *Triunghiurile median și antisuplementar ale unui triunghi ABC sunt omologice.*

Demonstrația rezultă din teorema anterioară. □

Teorema 61 *Bisectoarele interioare ale unui triunghi ABC intersectează laturile necorespunzătoare ale triunghiului median în șase puncte care determină trei drepte ce trec prin punctele de contact determinate de cercul înscris în triunghiul ABC și laturile triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie $\{A_1\} = A_2B_2 \cap BC$, $\{A_2\} = M_aM_c \cap AI$, $\{B_2\} = M_bM_c \cap BI$, $\{B_1\} = A_2B_2 \cap AC$, $M_cB_2 \parallel BC$. Avem $m(\sphericalangle M_cB_2B) = m(\sphericalangle A_1BB_2) = m(\sphericalangle M_cBB_2)$,

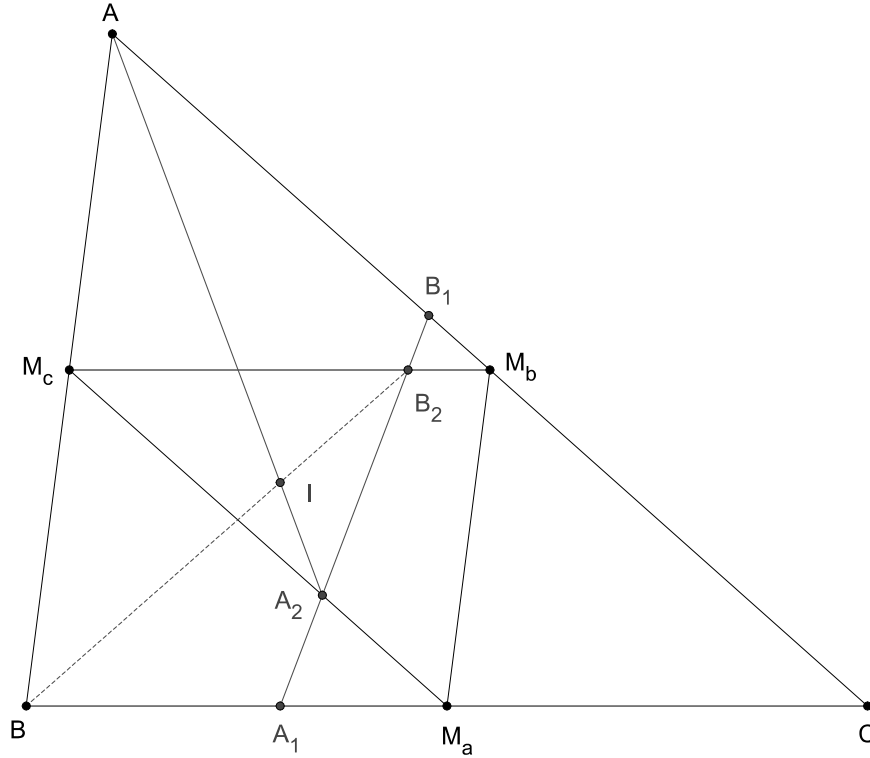


Figura 1.11: $B_1 \equiv C_b$

deci triunghiul BM_cB_2 este isoscel, deci $B_2M_c = BM_c = \frac{c}{2} = A_2M_c$. Mai mult $M_bB_1 \parallel A_2M_c$, de unde rezultă că triunghiul $M_bB_1B_2$ este isoscel, deci $M_bB_1 = M_bB_2 = \frac{c}{2} - \frac{a}{2}$ (Figura 1.11). Atunci, $B_1C = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a$, deci B_1 este un punct de contact al cercului înscris în triunghiul ABC cu latura AC . \square

Teorema 62 Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC , A', B', C' mijloacele segmentelor AO, BO , respectiv CO și $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Dreptele $A'M_a, B'M_b$ și $C'M_c$ sunt concurente în centrul cercului lui Euler al triunghiului median.

Demonstrație. Vezi "Cercul lui Euler" [15]. \square

Teorema 63 Fie $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC este adevărată relația:

$$\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Demonstrație. Teorema medianei scrisă sub formă vectorială aplicată în triunghiul MBC dă: $\overrightarrow{MM_a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$. Analog se obțin egalitățile: $\overrightarrow{MM_b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})$ și $\overrightarrow{MM_c} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA})$. Sumând aceste egalități rezultă concluzia. \square

Teorema 64 *Coordonatele baricentrice ale vârfurilor triunghiului median sunt: $M_a(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $M_b(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $M_c(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.*

Demonstrație. Din egalitatea $\overrightarrow{MM_a} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MC}$, rezultă $M_a(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Analog pentru celelalte vârfuri. \square

Teorema 65 *Triunghiul ortic al triunghiului median corespunzător unui triunghi ABC este omologic cu triunghiul ABC.*

Demonstrație. Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului median $M_aM_bM_c$

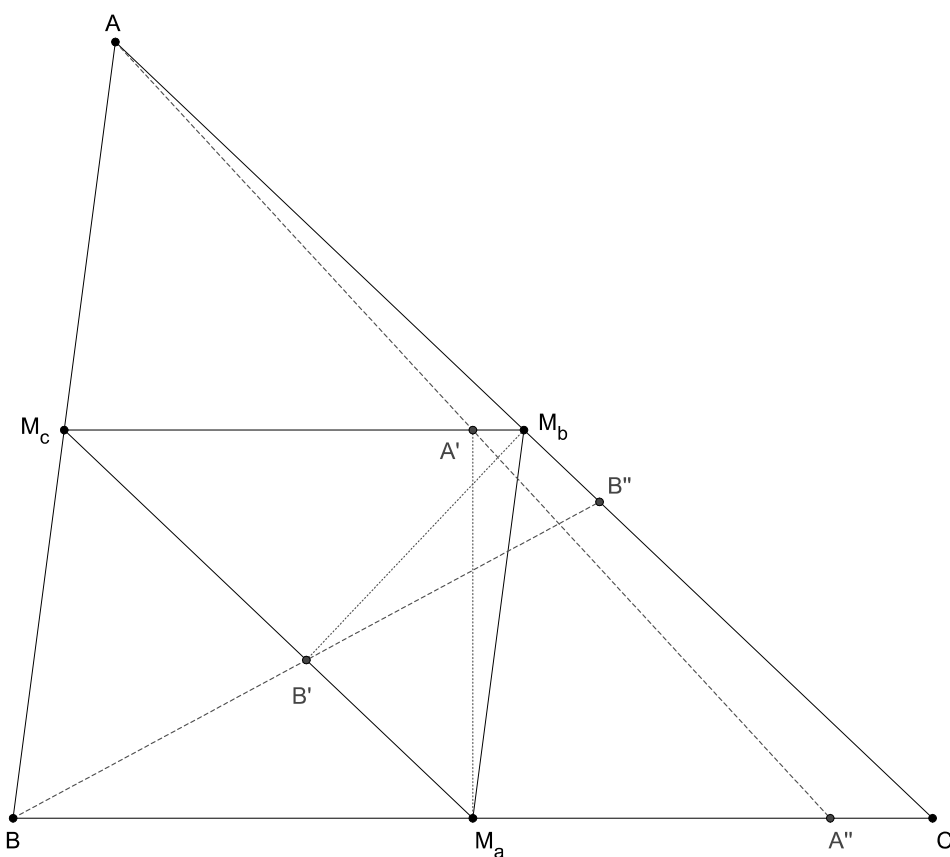


Figura 1.12: Triunghiul ortic al triunghiului median

(Figura 1.12) și $\{A''\} = AA' \cap BC$, $\{B''\} = BB' \cap CA$, $\{C''\} = CC' \cap AB$. Cum $M_bM_c \parallel BC$, rezultă că

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{M_cA'}{M_bA'} = \frac{M_cM_a \cos C}{M_bM_a \cos B} = \frac{b \cos C}{c \cos B}.$$

Analog, $\frac{CB''}{AB''} = \frac{c \cos A}{a \cos C}$ și $\frac{AC''}{BC''} = \frac{a \cos B}{b \cos A}$, de unde rezultă că $\frac{BA''}{CA''} \cdot \frac{CB''}{AB''} \cdot \frac{AC''}{BC''} = 1$ și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. \square

1.3 Triunghiul de contact

„O cameră fără cărți este un trup fără suflet.” - Pitagora⁴

Fie C_a, C_b, C_c punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile triunghiului. Triunghiul $C_aC_bC_c$ se numește *triunghiul de contact* al triunghiului ABC (sau *triunghiul Gergonne*).

Triunghiul de contact $C_aC_bC_c$ este triunghiul podar corespunzător centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC , în raport cu triunghiul ABC .

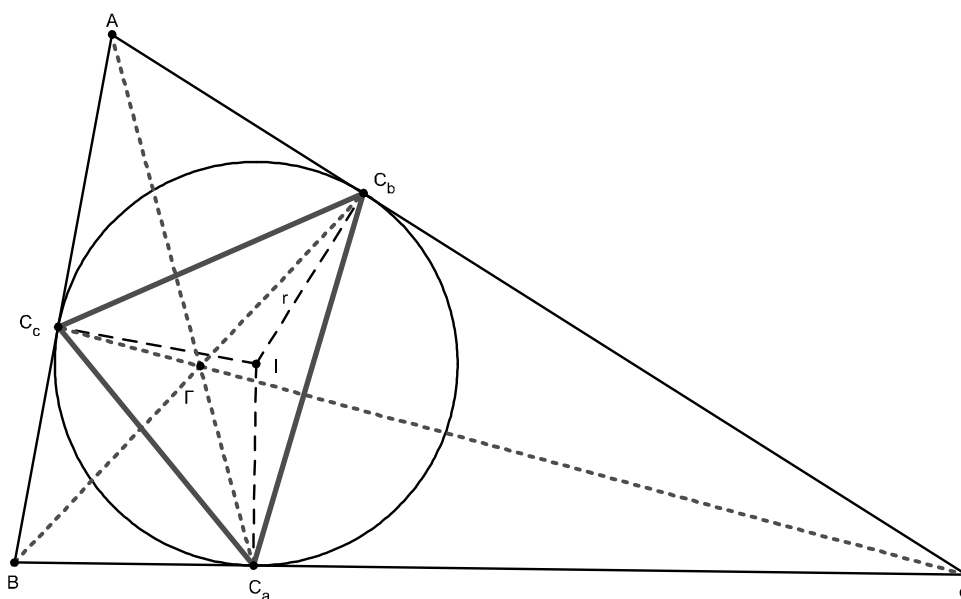


Figura 1.13: Triunghiul de contact

Teorema 66 *Unghiurile triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ corespunzător triunghiului ABC au măsurile egale cu: $90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$, respectiv $90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C})$.*

Demonstrație. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Deoarece patruleterele BC_aIC_c , CC_bIC_a sunt inscriptibile rezultă $m(\widehat{IC_aC_b}) = m(\widehat{IBC_c}) = \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ și $m(\widehat{IC_aC_b}) = m(\widehat{ICC_b}) = \frac{1}{2}m(\widehat{C})$. Atunci,

$$\begin{aligned} m(\widehat{C_cC_aC_b}) &= m(\widehat{C_cC_aI}) + m(\widehat{C_bC_aI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{B}) + \frac{1}{2}m(\widehat{C}) \\ &= \frac{1}{2}[180^\circ - m(\widehat{A})] = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A}). \end{aligned}$$

Analog se arată că $m(\widehat{C_aC_bC_c}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ și $m(\widehat{C_aC_cC_b}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C})$. □

⁴Pitagora (580-500 î.e.n.) – matematician grec

Teorema 67 Lungimile laturilor triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ sunt egale cu: $a' = (-a + b + c) \sin \frac{A}{2}$, $b' = (a - b + c) \sin \frac{B}{2}$, $c' = (a + b - c) \sin \frac{C}{2}$.

Demonstrație. În triunghiul isoscel $AC_b C_c$ avem:

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{a'/2}{p-a},$$

unde p reprezintă semiperimetrul triunghiului ABC , deci $a' = (-a + b + c) \sin \frac{A}{2}$. Analog se determină lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului $C_a C_b C_c$. \square

Teorema 68 Lungimile laturilor triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ sunt egale cu: $C_b C_c = 2r \cos \frac{A}{2}$, $C_c C_a = 2r \cos \frac{B}{2}$, $C_a C_b = 2r \cos \frac{C}{2}$.

Demonstrație. Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiul de contact se obține:

$$\frac{C_b C_c}{\sin(90^\circ - A/2)} = \frac{C_c C_a}{\sin(90^\circ - B/2)} = \frac{C_a C_b}{\sin(90^\circ - C/2)} = 2r,$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 69 Este adevărată egalitatea: $C_a C_b^2 + C_b C_c^2 + C_c C_a^2 = \frac{2r^2(4R+r)}{R}$.

Demonstrația rezultă din teorema anterioară. \square

Teorema 70 Segmentele determinate de punctele de contact ale cercului înscris pe laturile triunghiului ABC au lungimile $p - a$, $p - b$, respectiv $p - c$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Demonstrație. Fie $AC_b = AC_c = x$, $BC_a = BC_c = y$, $CC_a = CC_b = z$. Avem:

$$2(x + y + z) = a + b + c = 2p,$$

de unde $x + y + z = p$, deci $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$. \square

Teorema 71 Triunghiul de contact al unui triunghi ABC neisoscel și triunghiul ABC sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Gergonne al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne” [15]. \square

Teorema 72 Punctul lui Lemoine al triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ al triunghiului ABC coincide cu punctul lui Gergonne al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne” [15]. \square

Teorema 73 Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Atunci:

$$A_{[C_a C_b C_c]} = \frac{abc}{R(a+b+c)} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Demonstrație. Avem

$$\frac{A_{[AC_cC_b]}}{A_{[ABC]}} = \frac{AC_c^2}{bc}, \frac{A_{[BC_aC_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{(c - AC_c)^2}{ac}, \frac{A_{[CC_aC_b]}}{A_{[ABC]}} = \frac{(c - AC_c)^2}{ab}.$$

Cu relația $A_{[ABC]} = A_{[C_aC_bC_c]} + A_{[AC_bC_c]} + A_{[BC_aC_c]} + A_{[CC_aC_b]}$ și ținând cont că $AC_c = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}}$ sau $AC_c = \frac{r}{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}}$ rezultă

$$A_{[C_aC_bC_c]} = \frac{A_{[ABC]}}{2pR} = \frac{(pr)^2}{2pR}$$

sau $A_{[C_aC_bC_c]} = \frac{abc}{R(a+b+c)} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$. □

Observația 74 Aria triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ este maximă când triunghiul ABC este echilateral deoarece

$$A_{[C_aC_bC_c]} = \frac{pr^2}{2R} \leq \frac{pr^2}{2 \cdot 2r} = \frac{pr}{4} = \frac{A_{[ABC]}}{4}$$

(deoarece $R \geq 2r$). Cum relația $R = 2r$ are loc doar în triunghiul echilateral, atunci afirmația este demonstrată.

Consecința 75 Aria triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ este egală cu:

$$A_{[C_aC_bC_c]} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2R \cdot p} = \frac{r}{2R} \cdot A_{[ABC]}.$$

Demonstrația rezultă din teorema precedentă. □

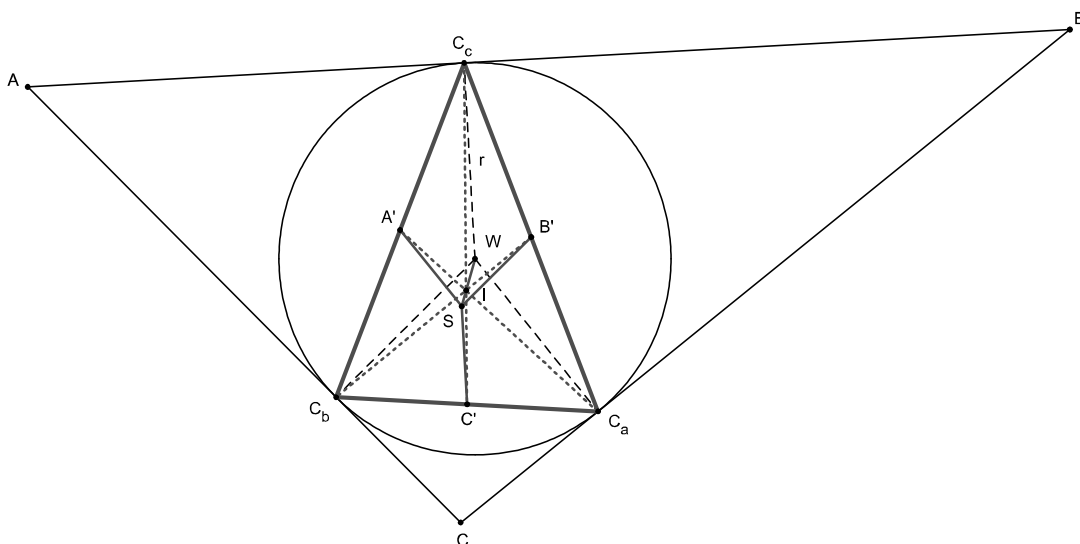


Figura 1.14: Centrul de greutate al triunghiului $C_aC_bC_c$

Teorema 76 *Perpendicularele duse din mijloacele laturilor triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ pe laturile opuse ale triunghiului ABC sunt concurente.*

Demonstrație. Fie W centrul de greutate al triunghiului $C_a C_b C_c$ și A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului $C_a C_b C_c$ (Figura 1.14). Punctele C_a, C_b, C_c se obțin din punctele A', B', C' printr-o omotetie de centru W și raport (-2) ($\overrightarrow{WC_a} = -2\overrightarrow{WA'}$). Printr-o omotetie o dreaptă se transformă într-o dreaptă paralelă cu cea dată. Atunci, dreapta $C_a I$ se transformă într-o dreaptă d_a ce trece prin A' și este paralelă cu $C_a I$, deci $d_a \perp BC$. Analog, dreptele IC_b și IC_c se transformă în dreptele d_b, d_c paralele cu IC_b , respectiv IC_c și $B' \in d_b, C' \in d_c$. Cum IC_a, IC_b, IC_c sunt concurente în I , rezultă că dreptele d_a, d_b, d_c sunt concurente și fie S punctul de concurență al lor.

Evident, punctul I se transformă prin omotetia de centru W și raport (-2) în punctul S , deci $2SI = WI$. □

Teorema 77 *Triunghiul de contact al triunghiului ABC și primul triunghi Sharygin al triunghiului ABC sunt omotetice.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul Sharygin”. □

Teorema 78 *Triunghiurile de contact $C_a C_b C_c$ al unui triunghi ABC este omotetic cu triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”. □

Teorema 79 *Triunghiurile de contact $C_a C_b C_c$ și antisuplementar $I_a I_b I_c$ corespunzătoare unui triunghi ABC au aceeași dreaptă a lui Euler OI .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”. □

Teorema 80 *Triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ și triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC sunt omotetice, centrul de omotetie fiind pe dreapta OI .*

Demonstrație. Fie A'', B'', C'' mijloacele arcelor BC, CA , respectiv AB (Figura 1.15). Cum $OA'' \parallel IC_a, OB'' \parallel IC_b, OC'' \parallel IC_c$ și $A''C_a \cap B''C_b \cap C''C_c = \{I\}$ rezultă că triunghiurile $A''B''C''$ și $C_a C_b C_c$ sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $\frac{R}{r}$, centrul omotetiei aparținând liniei centrelor celor două cercuri, adică dreptei OI . Dacă punctul M este centrul omotetiei considerate, atunci

$$MI = \frac{r\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$$

și

$$MO = \frac{R\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$$

(vezi „Triunghiul circumpedal”). □

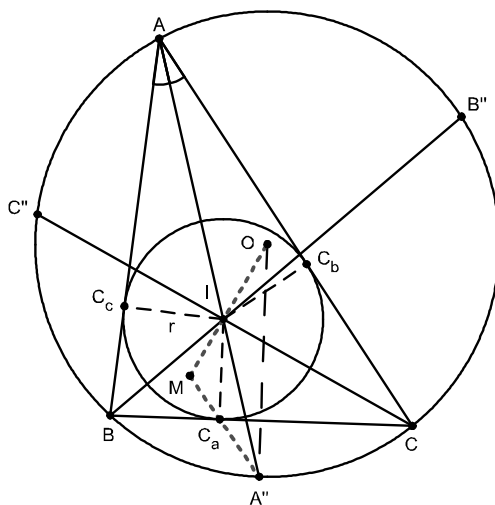


Figura 1.15: $C_a C_b C_c$ și triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris

Teorema 81 Dreapta lui Simson a punctului lui Feuerbach (φ) al triunghiului, în raport cu triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ al triunghiului ABC este paralelă cu dreapta $H_b M_c M_a$

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Simson” [15]. □

Teorema 82 Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC , I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Dreptele $C_b I$, $C_a C_c$ și BM_b sunt concurente.

Demonstrație. Fie H_b piciorul înălțimii din B a triunghiului ABC și $\{M\} = BM_b \cap C_b I$ (Figura 1.16). Din $MC_b \parallel BH_b$ rezultă

$$\frac{BM}{MM_b} = \frac{H_b C_b}{C_b M_b}.$$

Dar $H_b C_b = p - a - c \cdot \cos A$, $C_b M_b = \frac{b}{2} - (p - a)$, deci $\frac{BM}{MM_b} = \frac{a-b+c}{b}$. Fie $\{M'\} = C_a C_b \cap BM_b$. Atunci,

$$\frac{CC_a}{C_a B} \cdot M_b A + \frac{C_c A}{C_c B} \cdot M_b C = \frac{MM_b}{BM'} \cdot AC$$

(vezi „Relația lui Van-Aubel” [15]), adică

$$\frac{p-c}{p-b} \cdot \frac{b}{2} + \frac{p-a}{p-b} \cdot \frac{b}{2} = \frac{M' M_b}{BM'} \cdot b,$$

de unde $\frac{BM'}{M' M_b} = \frac{a-b+c}{b}$, deci $M \equiv M'$. □

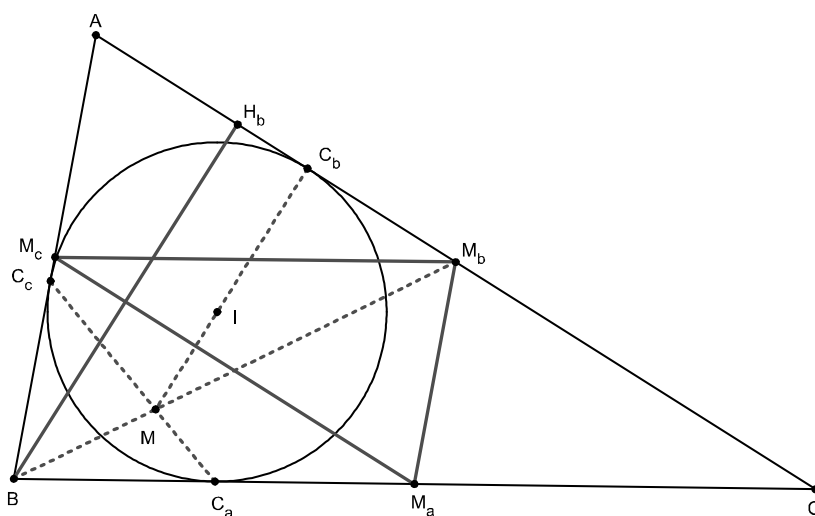


Figura 1.16: C_bI , C_aC_c și BM_b sunt concurente

Teorema 83 *Triunghiul ortic al triunghiului de contact al unui triunghi ABC este omotetic cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Fie H_1 ortocentrul triunghiului de contact și C_aA_1, C_bB_1, C_cC_1

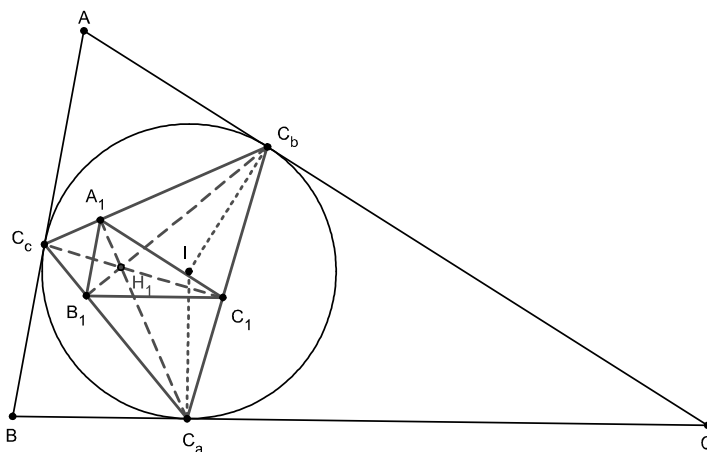


Figura 1.17: Triunghiul ortic al triunghiului de contact

înălțimile triunghiului de contact (Figura 1.17). Dar

$$m(\sphericalangle AC_cC_b) = m(\sphericalangle AIC_b) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B_1C_aC_1),$$

iar $m(\sphericalangle C_cA_1B_1) = m(\sphericalangle B_1C_aC_1)$ (deoarece patrulaterul $A_1B_1C_aC_b$ este inscriptibil,

deci

$$\sphericalangle AC_cC_b \equiv \sphericalangle C_cA_1B_1,$$

adică $AB \parallel A_1B_1$. Analog se arată că $BC \parallel B_1C_1, AC \parallel A_1C_1$ și cum triunghiul $C_aC_bC_c$ este ascuțitunghic, rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omotetice. \square

Teorema 84 Fie $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al unui triunghi ABC . Dreapta lui Euler a triunghiului $C_aC_bC_c$ trece prin centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler. Dreapta lui Euler” [15]. \square

Teorema 85 Fie M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, AC , respectiv AB ale triunghiului ABC și $C_aC_bC_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Perpendicularele din punctele M_a, M_b, M_c pe laturile C_bC_c, C_cC_a , respectiv C_aC_b sunt concurente.

Demonstrație. Fie P, Q, R picioarele perpendicularelor duse din M_a, M_b , respec-

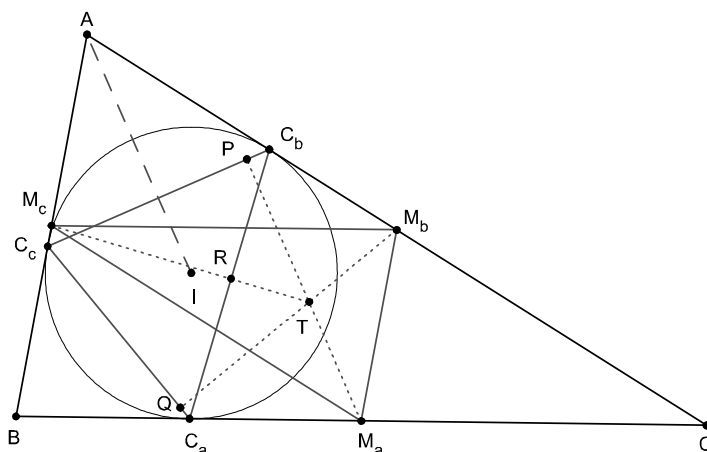


Figura 1.18: Perpendiculare concurente

tiv M_c pe laturile triunghiului $C_aC_bC_c$ (Figura 1.18). Deoarece AI este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ și $C_cA = C_bA$, rezultă

$$AI \perp C_bC_c.$$

Cum și $M_aP \perp C_bC_c$ rezultă că

$$AI \parallel M_aP.$$

Patrulaterul $M_aM_bAM_c$ este paralelogram, deci

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle M_cM_aM_b$$

și cum AI este bisectoarea unghiului A rezultă că M_aP este bisectoarea unghiului $\sphericalangle M_cM_aM_b$. Analog, se demonstrează că M_bQ și M_cR sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle M_aM_bM_c$, respectiv $\sphericalangle M_bM_cM_a$. Cum bisectoarele interioare ale unghiurilor unui triunghi sunt concurente, rezultă că dreptele M_aP, M_bQ și M_cR sunt concurente. \square

Teorema 86 *Triunghiurile de contact $C_aC_bC_c$ și median $M_aM_bM_c$ corespunzătoare unui triunghi ABC sunt ortologice.*

Demonstrația rezultă din proprietatea de mai sus. □

1.4 Triunghiul extanșential

„Omul pentru care faptul că $2+2 = 4$ e de la sine înțeles nu va deveni niciodată mare matematician.” - Bertolt Brecht⁵

Fie triunghiul ABC și I_a, I_b, I_c centrele cercurilor A -exînscris, B -exînscris, respectiv C -exînscris corespunzătoare triunghiului ABC . Tangentele comune cercurilor exînscrise (diferite de dreptele ce conțin laturile triunghiului ABC) determină triunghiul $T_aT_bT_c$ numit *triunghiul extanșential* al triunghiului ABC (Figura 1.19). Cercul circumscris triunghiului extanșential se numește *cercul extanșential*.

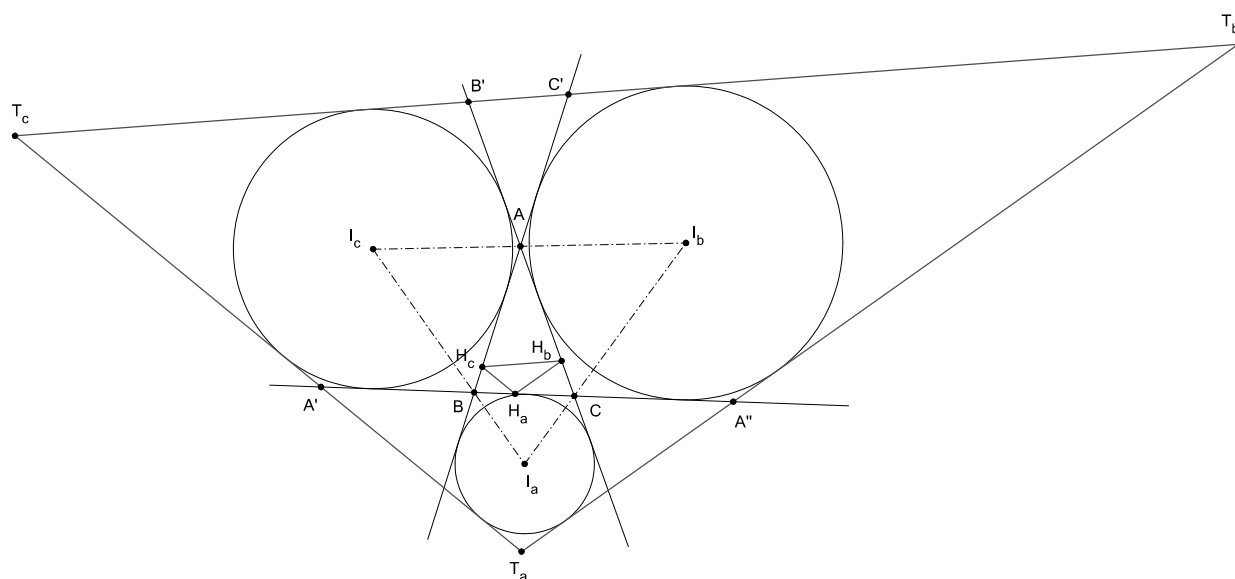


Figura 1.19: Triunghiul extanșential

Teorema 87 *Triunghiul extanșential $T_aT_bT_c$ corespunzător triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC .*

⁵Bertolt Brecht (1898-1956) – poet german

Demonstrație. Fie $\{C'\} = BA \cap T_bT_c$ și $\{B'\} = AC \cap T_bT_c$. Din congruența triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ rezultă că $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle AC'B'$. Dar H_aH_b este antiparalela laturii BC , deci $\sphericalangle AH_cH_b \equiv \sphericalangle ACB$, de unde rezultă $\sphericalangle B'C'A \equiv \sphericalangle AH_cH_b$ și $B'C' \parallel H_cH_b$, adică $T_cT_b \parallel H_cH_b$. Analog se arată că $T_cT_a \parallel H_cH_a$ și $T_aT_b \parallel H_aH_b$. Avem

$$m(\sphericalangle H_aH_bH_c) = 180^\circ - 2m(\sphericalangle A).$$

Fie $\{A'\} = BC \cap T_aT_c$ și $\{A''\} = BC \cap T_aT_b$. Atunci,

$$\sphericalangle H_cH_aA' \equiv \sphericalangle H_aA'T_a (= m(\sphericalangle BAC))$$

și $\sphericalangle H_bH_aC \equiv \sphericalangle H_aA''T_a (= m(\sphericalangle BAC))$ (alterne interne), de unde rezultă că

$$m(\sphericalangle T_cT_aT_b) = 180^\circ - 2m(\sphericalangle A),$$

deci $\sphericalangle H_cH_aH_b \equiv \sphericalangle T_cT_aT_b$. Analog, $\sphericalangle H_cH_bH_a \equiv \sphericalangle T_cT_bT_a$, unde rezultă că triunghiurile $T_aT_bT_c$ și $H_aH_bH_c$ sunt asemenea și deoarece au și laturile respective paralele rezultă că sunt omotetice. \square

Observația 88 Centrul de omotetie dintre triunghiurile $T_aT_bT_c$ și $H_aH_bH_c$ se numește punctul lui Clawson.

Teorema 89 Triunghiurile extangential $T_aT_bT_c$ și antisuplementar $I_aI_bI_c$ corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omologice.

Demonstrația este evidentă deoarece dreptele I_aT_a, I_bT_b, I_cT_c sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul $T_aT_bT_c$, fiind bisectoare în triunghiul extangential. \square

Teorema 90 Centrul cercului înscris în triunghiul extangential coincide cu centrul cercului triunghiului antisuplementar.

Demonstrație. Fie I_T centrul cercului înscris în triunghiul $T_aT_bT_c$; conform proprietății precedente rezultă: $\{I_T\} = I_aT_a \cap I_bT_b \cap I_cT_c$. Avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle T_aI_TT_c) &= 180^\circ - [m(\sphericalangle T_cT_aI_T) + m(\sphericalangle T_aT_cI_T)] \\ &= 180^\circ - [(90^\circ - m(\sphericalangle A)) + (90^\circ - m(\sphericalangle C))] \\ &= 180^\circ - m(\sphericalangle B) = 2m(\sphericalangle I_aI_bI_c). \end{aligned}$$

Analog se arată că $m(\sphericalangle T_aI_TT_b) = 2m(\sphericalangle I_aI_bI_c)$ și $m(\sphericalangle T_cI_TT_b) = 2m(\sphericalangle I_bI_aI_c)$, deci I_T este centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$. \square

Observația 91 Cum I_T este centrul cercului circumscris triunghiului $I_aI_bI_c$ rezultă că $I_TI_a \equiv I_TI_b \equiv I_TI_c$.

Teorema 92 Raza cercului înscris în triunghiul extangential corespunzător unui triunghi ABC , are lungimea egală cu $2R+r$, unde R și r sunt razele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC .

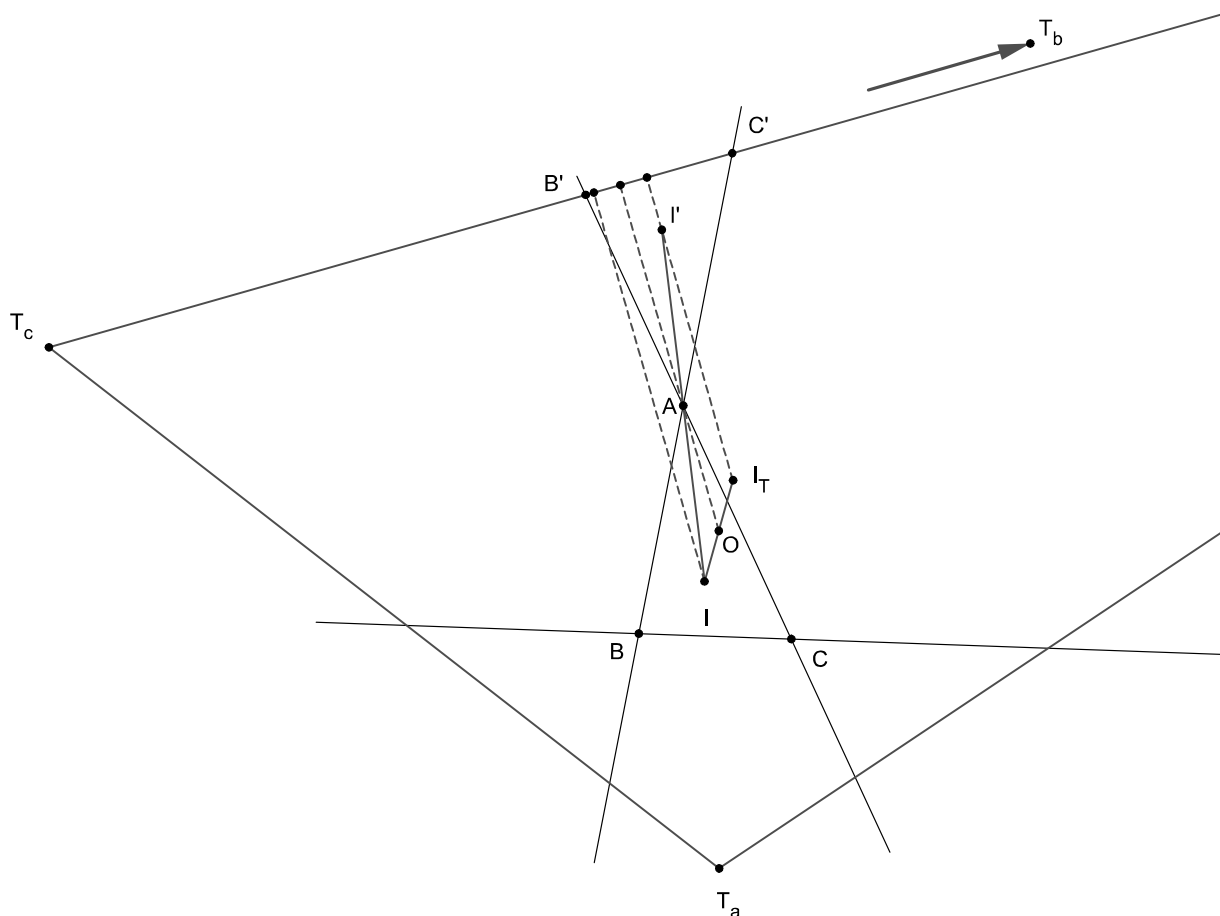


Figura 1.20: Raza cercului înscris în triunghiul extangential

Demonstrație. Fie $\{B'\} = AB \cap T_b T_c$ și $\{C'\} = AC \cap T_b T_c$. Deoarece triunghiurile ABC și $AB'C'$ sunt congruente (vezi „Cercuri exînscrise” [15]) rezultă că raza cercului înscris în triunghiul $AB'C'$ este egală cu r (Figura 1.20). Fie I' centrul cercului înscris în triunghiul $AB'C'$. Atunci, distanțele de la A și I' la $B'C'$ sunt egale cu h_a (înălțimea din vârful A a triunghiului ABC) și r . Cum A este mijlocul segmentului II' , atunci distanța de la I la $B'C'$ este egală cu $2h_a - r$. Fie I_T simetricul lui I față de O – centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Distanțele de la I și O la $T_b T_c$ sunt egale cu $2h_a - r$, respective $h_a + R$ (deoarece $AO = R$), deci distanța de la I_T la $T_b T_c$ este egală cu

$$2(R + h_a) - (2h_a - r) = 2R + r$$

(unde am aplicat teorema liniei mijlocii într-un trapez). Analog, se arată că distanțele de la punctul I_T la $T_a T_c$ și sunt egale tot cu $2R + r$, deci I_T este centrul cercului înscris în triunghiul extangential. Centrul cercului înscris în triunghiul extangential coincide cu centrul cercului triunghiului antisuplementar. \square

Observația 93 Deoarece $4R + 2r = r + r_a + r_b + r_c$, rezultă că raza cercului înscris în triunghiul extangential este egală cu

$$r_T = 2R + r = \frac{1}{2}(r + r_a + r_b + r_c).$$

Teorema 94 Centrul cercului înscris în triunghiul extangential al unui triunghi ABC este simetricul centrului cercului înscris în triunghiul ABC , față de centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Proprietatea este o consecință a aplicației precedente. \square

Observația 95 Simetricul centrului cercului înscris față de centrul cercului circumscris triunghiului ABC este mijlocul segmentului ce unește punctul lui Nagel cu punctul lui Longchamps.

Teorema 96 Triunghiurile extangential și tangential corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile extangential $T_aT_bT_c$ și tangential $T_AT_BT_C$ sunt omotetice cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC , iar relația de omotetie este tranzitivă, rezultă că și triunghiurile $T_aT_bT_c$ și $T_AT_BT_C$ sunt omotetice. \square

Observația 97 Din omotetia triunghiurilor $T_aT_bT_c$ și $T_AT_BT_C$ rezultă că cercurile înscrise în aceste triunghiuri sunt omotetice, deci raportul de omotetie este egal cu $\frac{2R+r}{R}$, unde $2R + r$ și R sunt lungimile razelor cercurilor înscrise în triunghiurile $T_aT_bT_c$ respectiv $T_AT_BT_C$.

Demonstrație. Fie $\{A_1\} = T_bT_c \cap BC$, $\{B_1\} = T_aT_c \cap AC$, $\{C_1\} = T_aT_b \cap AB$. Din teorema bisectoarei exterioare rezultă:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}, \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a}{c} \text{ și } \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a}.$$

Atunci,

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare, iar din reciproca teoremei lui Desargues rezultă că triunghiurile ABC și $T_aT_bT_c$ sunt omologice, dreapta de omologie fiind axa antiortică a triunghiului ABC . \square

Demonstrație.

1.5 Triunghiul cotangent

„Adevărul matematic indiferent unde, la Paris sau la Toulouse, este unul și același.” – Blaise Pascal⁶

Triunghiul $\tau_a\tau_b\tau_c$ care are ca vârfuri punctele de tangență dintre laturile BC , CA și AB ale unui triunghi ABC cu cercurile exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC , se numește *triunghiul cotangent* corespunzător triunghiului ABC (Figura 1.21).

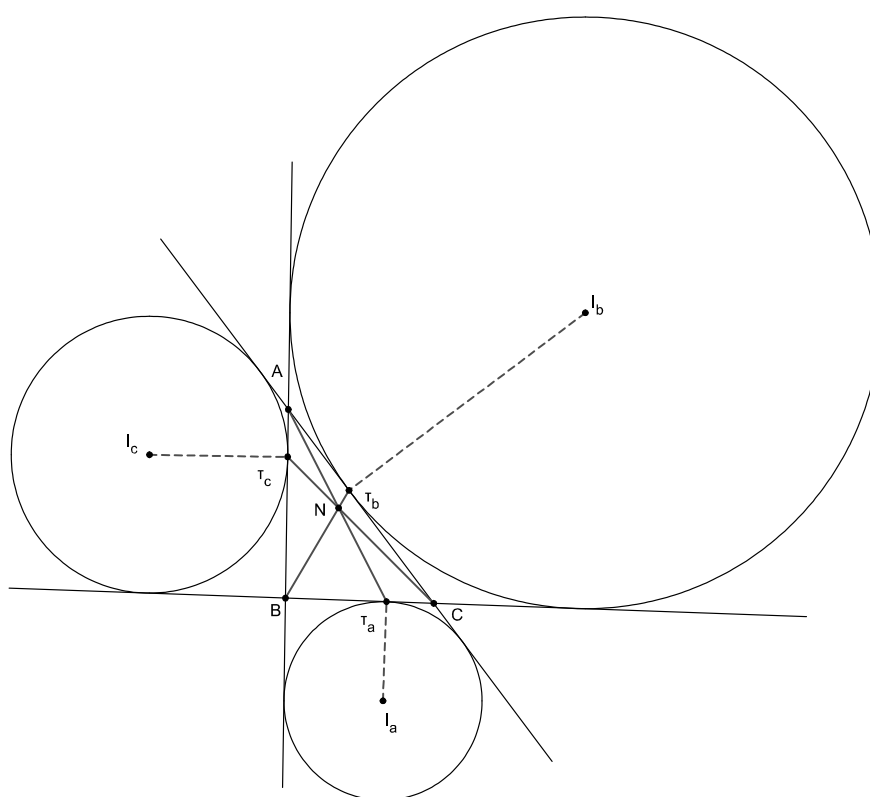


Figura 1.21: Triunghiul cotangent

Teorema 98 Dreptele $A\tau_a$, $B\tau_b$, $C\tau_c$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel” [15]. □

Observația 99 Triunghiul cotangent $\tau_a\tau_b\tau_c$ este triunghiul cevian al punctului lui Nagel în raport cu triunghiul ABC .

⁶Blaise Pascal (1623 – 1662) – matematician, fizician și filosof francez, contribuții în geometria proiectivă, algebră și teoria probabilităților

Teorema 100 *Triunghiul cotangentic $\tau_a\tau_b\tau_c$ este triunghiul podar al punctului lui Bevan al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Bevan” [15]. □

Teorema 101 *Laturile triunghiului cotangentic $\tau_a\tau_b\tau_c$ al triunghiului ABC au lungimile egale cu:*

$$\begin{aligned}\tau_b\tau_c &= \sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2 - 2(p-b)(p-c)\cos A}, \\ \tau_c\tau_a &= \sqrt{(p-c)^2 + (p-a)^2 - 2(p-c)(p-a)\cos B}, \\ \tau_a\tau_b &= \sqrt{(p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos C}.\end{aligned}$$

Demonstrație. În triunghiul $A\tau_b\tau_c$, din teorema cosinusului rezultă

$$\tau_b\tau_c^2 = A\tau_b^2 + A\tau_c^2 - 2A\tau_b \cdot A\tau_c \cdot \cos A,$$

adică $\tau_b\tau_c = \sqrt{(p-b)^2 + (p-c)^2 - 2(p-b)(p-c)\cos A}$. Analog se determină lungimile laturilor $\tau_b\tau_a$ și $\tau_a\tau_c$. □

Teorema 102 *Aria triunghiului cotangentic este egală cu $A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} = \frac{1}{2pR} \cdot A_{[ABC]}^2$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Avem

$$\frac{A_{[A\tau_b\tau_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{A\tau_c \cdot A\tau_b \cdot \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

și analoagele. Dar

$$A_{[ABC]} = A_{[A\tau_b\tau_c]} + A_{[B\tau_a\tau_c]} + A_{[C\tau_a\tau_b]} + A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]}$$

adică,

$$\frac{A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]}}{A_{[ABC]}} = 1 - \frac{(p-b)(p-c)}{bc} - \frac{(p-a)(p-c)}{ac} - \frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

și de aici rezultă

$$A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4abc} \cdot A_{[ABC]} = \frac{2r^2p}{abc} \cdot A_{[ABC]} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2pR}.$$

□

Observația 103 *Aria triunghiului cotangentic este egală cu aria triunghiului de contact.*

Teorema 104 *Aria triunghiului cotangentic este maximă când triunghiul ABC este echilateral.*

Demonstrație. Avem

$$A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} = \frac{pr^2}{2R} \leq \frac{pr^2}{2 \cdot 2r} = \frac{pr}{4} = \frac{A_{[ABC]}}{4}$$

(deoarece $R \geq 2r$). Cum relația $R = 2r$ are loc doar în triunghiul echilateral, rezultă că aria triunghiului cotangentic este maximă atunci când triunghiul ABC este echilateral. \square

Teorema 105 *Triunghiul neisoscel ABC și triunghiul său cotangentic $\tau_a\tau_b\tau_c$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Nagel al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece $A\tau_a \cap B\tau_b \cap C\tau_c = \{N\}$, unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC , rezultă că triunghiurile ABC și $\tau_a\tau_b\tau_c$ sunt omologice (consecință a teoremei lui Desargues). \square

Teorema 106 *Triunghiul median al triunghiului cotangentic al unui triunghi ABC este omologic cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $\tau_b\tau_c, \tau_a\tau_c$, respectiv $\tau_a\tau_b$ ale triunghiului cotangentic și $\{A''\} = AA' \cap BC, \{B''\} = BB' \cap AC, \{C''\} = CC' \cap AB$ (Figura 1.22). Considerând ceviana AA'' și transversala $\tau_b\tau_c$ avem:

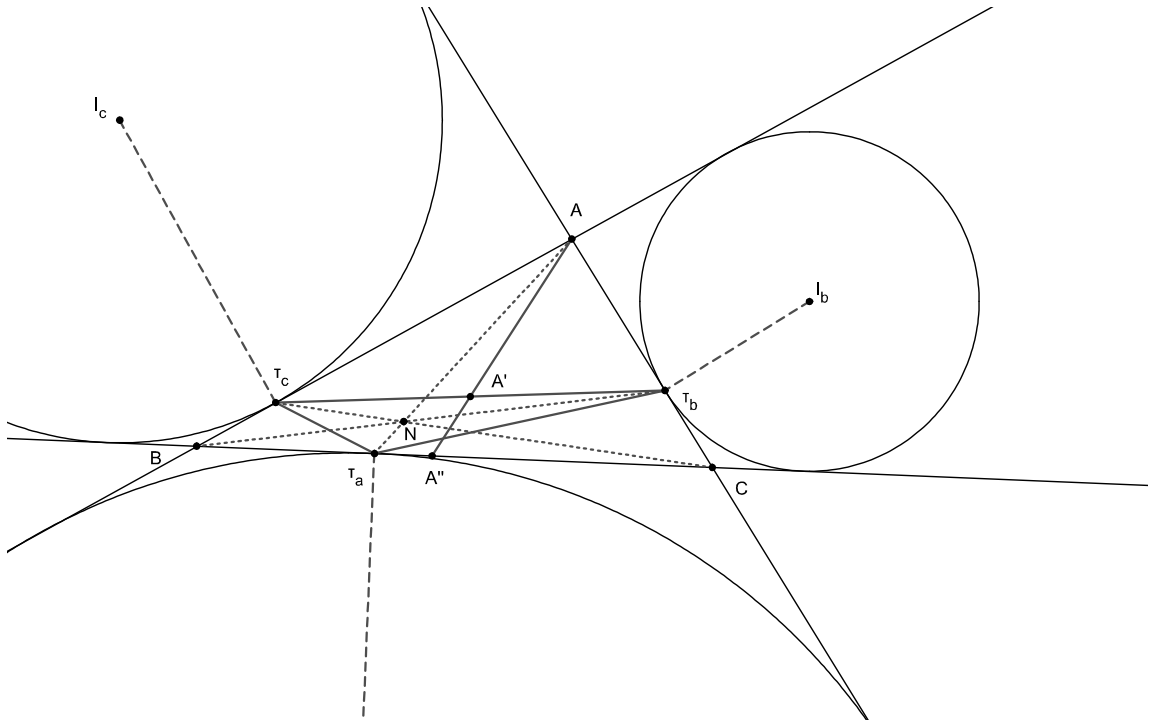


Figura 1.22: Triunghiul median al triunghiului cotangentic

$$\frac{A\tau_c}{AB} \cdot \frac{AC}{A\tau_b} \cdot \frac{A'\tau_b}{A'\tau_c} \cdot \frac{A''B}{A''C} = 1$$

(vezi „Relația lui Van-Aubel” [15]), deci

$$\frac{p-b}{c} \cdot \frac{b}{p-c} \cdot 1 \cdot \frac{A''B}{A''C} = 1$$

de unde $\frac{A''B}{A''C} = \frac{c(p-c)}{b(p-b)}$. Analog, $\frac{B''C}{B''A} = \frac{a(p-a)}{c(p-c)}$ și $\frac{C''A}{C''B} = \frac{b(p-b)}{a(p-a)}$, de unde

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente, deci triunghiurile ABC și $\tau_a\tau_b\tau_c$ sunt omologice. \square

Teorema 107 *Fie A' , B' , C' punctele diametral opuse vârfurilor A, B, C ale triunghiului ABC în cercul circumscris. Dreptele I_aA' , I_bB' , I_cC' sunt respectiv perpendiculare pe laturile triunghiului cotangentic al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Notăm cu z_x afixul punctului X . Alegem un reper complex cu

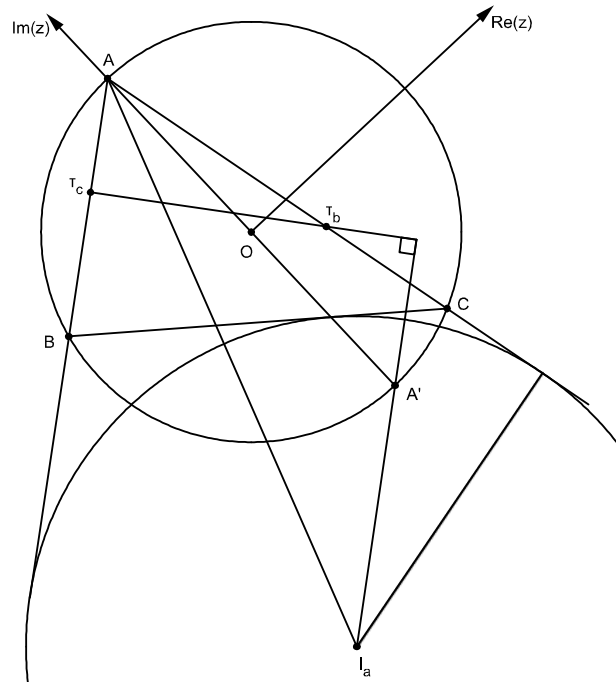


Figura 1.23: $I_aA' \perp \tau_b\tau_c$

vârful în centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC , iar punctul A situat pe axa imaginară (Figura 1.23). Atunci $z_A = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $z_{A'} = -i\alpha$. Din $BA' \perp AB$ și $CA' \perp CA$, rezultă că există $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_A - z_B} = i\beta \quad \text{și} \quad \frac{z_{A'} - z_C}{z_A - z_C} = i\gamma,$$

de unde $z_B = \frac{2\alpha\beta}{1+\beta^2} - i\alpha$ și $z_C = \frac{2\alpha\gamma}{1+\gamma^2} - i\alpha$ (1). Deoarece $\frac{\tau_b C}{\tau_b A} = \frac{p-a}{p-c}$ și $\frac{\tau_c A}{\tau_c B} = \frac{p-b}{p-a}$, rezultă

$$z_{\tau_b} = \frac{z_C(p-c) + z_A(p-a)}{b} \quad \text{și} \quad z_{\tau_c} = \frac{z_A(p-a) + z_B(p-b)}{c},$$

deci

$$z_{\tau_b} = \frac{2\alpha\gamma(p-c)}{(1+\gamma^2) \cdot b} + \frac{i\alpha(c-a)}{b} \quad \text{și} \quad z_{\tau_c} = \frac{2\alpha\beta(p-b)}{(1+\beta^2) \cdot c} + \frac{i\alpha(b-a)}{c}. \quad (2)$$

Fie $\{T\} = CI_a \cap AB$. Din teorema bisectoarei exterioare avem $\frac{TA}{TB} = \frac{b}{a}$, $\frac{CI_a}{I_a T} = \frac{BC}{BT}$. Astfel $TB = \frac{ac}{b-a}$, $\frac{CI_a}{I_a T} = \frac{b-a}{c}$, de unde

$$z_T = \frac{az_A + bz_B}{a+b} \quad \text{și} \quad z_{I_a} = \frac{z_C + \frac{b-a}{c} \cdot z_T}{1 + \frac{b-a}{c}} = \frac{cz_C + (b-a)z_T}{b+c-a}. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă

$$\frac{z_{I_a} - z_{A'}}{z_{\tau_b} - z_{\tau_c}} = i \cdot \theta,$$

unde $\theta \in \mathbb{R}^*$, deci $I_a A' \perp \tau_b \tau_c$. Analog se arată că $I_b B' \perp \tau_a \tau_c$ și $I_c C' \perp \tau_b \tau_a$. \square

1.6 Triunghiul podar

„Matematica este știința despre raporturile între formule, lipsite de oricare conținut.” - David Hilbert⁷

Fie P un punct interior triunghiului ABC . Se numește triunghi podar al punctului P , triunghiul $A'B'C'$ care are ca vârfuri picioarele perpendicularelor duse din P pe laturile triunghiului ABC (Figura 1.24). Punctul P se numește *punct podar*. Cercul circumscris triunghiului podar al punctului P se numește *cercul podar* al punctului P . Dacă punctul P aparține unei laturi a triunghiului, atunci dreapta care unește picioarele perpendicularelor din P pe celelalte două laturi ale triunghiului se numește *dreaptă podară*. Dacă punctul P se găsește pe cercul circumscris triunghiului ABC , atunci triunghiul podar al acestui punct se transformă în dreapta lui Simson corespunzătoare punctului P .

Teorema 108 *Punctul podar P aparține cercurilor circumscrise patrulaterelor $AB'PC'$, $BC'PA'$, $CA'PB'$.*

Demonstrația este evidentă, deoarece patrulateralele $AB'PC'$, $BC'PA'$, $CA'PB'$ sunt inscriptibile. \square

⁷David Hilbert (1862-1943) – matematician german, profesor la Universitatea din Göttingen, contribuții remarcabile în geometrie și analiza matematică

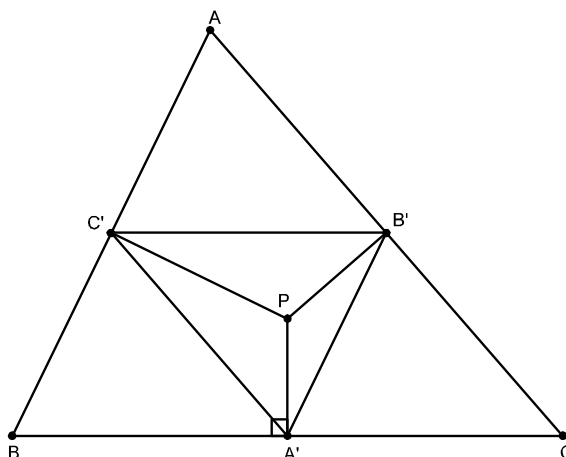


Figura 1.24: Triunghiul podar

Teorema 109 Dacă x, y, z sunt distanțele de la punctul podar P la vârfurile triunghiului ABC , atunci laturile triunghiului podar au lungimile $a' = \frac{ax}{2R}, b' = \frac{by}{2R}, c' = \frac{cz}{2R}$ (a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC și R raza cercului circumscris triunghiului ABC).

Demonstrație. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $AC'B'$ și ABC ne dă: $\frac{B'C'}{\sin A} = AP$ și $\frac{a}{\sin A} = 2R$, de unde rezultă:

$$B'C' = a \cdot \frac{AP}{2R}.$$

Analog, $C'A' = b \cdot \frac{BP}{2R}$ și $A'B' = c \cdot \frac{CP}{2R}$. □

Observația 110 Dacă $x = y = z$, atunci punctul P coincide cu centrul cercului circumscris ABC și deci $x = R$.

Teorema 111 Triunghiul podar $A'B'C'$ al unui punct P și triunghiul ABC sunt ortologice.

Demonstrația rezultă din definiția triunghiurilor ortologice. □

Teorema 112 Triunghiul podar al centrului cercului circumscris triunghiului ABC este triunghiul median al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă. □

Teorema 113 Triunghiul podar al ortocentrului triunghiului ABC este triunghiul ortic al triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă. □

Teorema 114 *Cercul lui Euler este cercul podar al ortocentrului triunghiului ABC (sau al centrului cercului circumscris triunghiului ABC).*

Demonstrație. Vezi „Cercul lui Euler” [15]. □

Teorema 115 *Triunghiul podar al centrului cercului înscris este triunghiul de contact al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul de contact”. □

Teorema 116 *Cercul podar al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC este cercul înscris în triunghiul ABC .*

Demonstrația este evidentă. □

Teorema 117 *Triunghiurile podare ale punctelor Brocard ale triunghiului ABC sunt congruente.*

Demonstrație. Vezi „Punctele lui Brocard” [15]. □

Teorema 118 *Triunghiurile podare ale punctelor izodinamice ale triunghiului ABC sunt echilaterale.*

Demonstrație. Vezi „Punctele izodinamice” [15]. □

Teorema 119 *Punctul lui Lemoine al triunghiului ABC este centrul de greutate al propriului triunghi podar.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Lemoine” [15]. □

Teorema 120 *(Teorema celor 6 puncte) Fie P' și P'' două puncte izogonale în raport cu triunghiul ABC și $A'B'C'$ și $A''B''C''$ triunghiurile lor podare în raport cu triunghiul ABC . Punctele $A', B', C', A'', B'', C''$ sunt conciclice.*

Demonstrație. Vezi „Drepte izogonale” [15]. □

Observația 121 *Centrul cercului pe care se găsesc punctele $A', B', C', A'', B'', C''$ este mijlocul segmentului $P'P''$ (vezi „Drepte izogonale” [15]).*

Teorema 122 *Triunghiul podar al unui punct P în raport cu un triunghi ABC este asemenea cu triunghiul circumpedal al punctului P .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul circumpedal”. □

Teorema 123 *Triunghiul podar al ortocentrului triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul tangențial al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”. □

Teorema 124 Fie P un punct nesituat pe cercul circumscris al unui triunghi ABC și $A'B'C'$ triunghiul podar al lui P în raport cu triunghiul ABC . Perpendicularele din A, B, C pe $B'C', A'C'$ respectiv $A'B'$ sunt concurente într-un punct P' , izogonalul punctului P în raport cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Vezi „Drepte izogonale” [15]. □

Teorema 125 (Oppenheim) Al treilea triunghi podar este asemenea cu triunghiul original.

Demonstrație. Punctul P aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1 ,

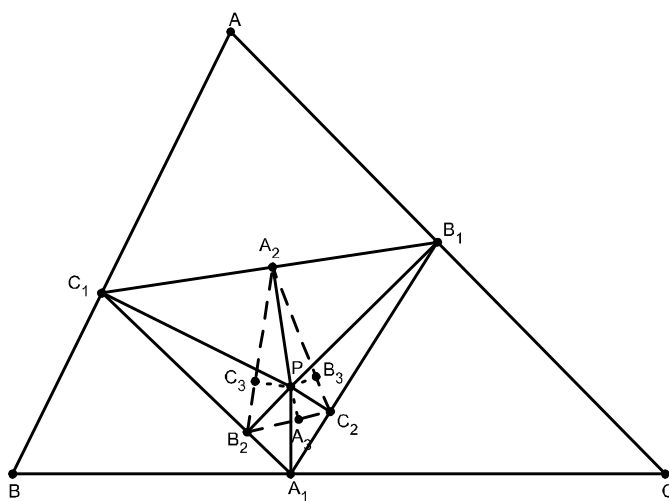


Figura 1.25: Teorema lui Oppenheim

$A_2B_1C_2, A_3B_3C_2, A_2B_2C_1$ și $A_3B_2C_3$ (Figura 1.25). Avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle C_1AP) &= m(\sphericalangle C_1B_1P) = m(\sphericalangle A_2B_1P) = m(\sphericalangle A_2C_2P) = m(\sphericalangle B_3C_2P) = m(\sphericalangle B_3A_3P), \\ m(\sphericalangle PAB_1) &= m(\sphericalangle PC_1B_1) = m(\sphericalangle PC_1A_2) = m(\sphericalangle PB_2A_2) = m(\sphericalangle PB_2C_3) = m(\sphericalangle PA_3C_3), \end{aligned}$$

de unde rezultă că $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle B_3A_3C_3)$. Analog se arată că $m(\sphericalangle BCA) = m(\sphericalangle B_3C_3A_3)$, de unde rezultă că triunghiurile ABC și $A_3B_3C_3$ sunt asemenea. □

Teorema 126 Aria triunghiului podar $P_aP_bP_c$ al unui punct P în raport cu un triunghi ABC este egală cu $\frac{|R^2 - OP^2|}{2} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, unde R reprezintă lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC și O centrul cercului circumscris acestui triunghi.

Demonstrație. Fie D al doilea punct de intersecție dintre dreapta AP și cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.26). Avem: $m(\sphericalangle DBC) = m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle PP_cP_b)$ și $m(\sphericalangle PBP_a) = m(\sphericalangle P_aP_cP)$, de unde rezultă că

$$m(\sphericalangle DBP) = m(\sphericalangle P_aP_cP_b).$$

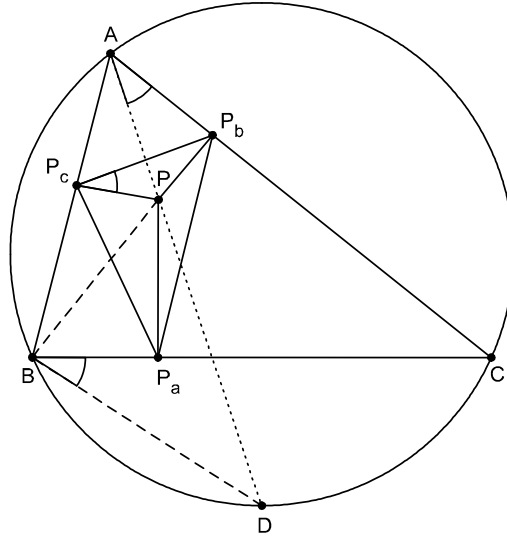


Figura 1.26: Aria triunghiului podar $P_aP_bP_c$

Din teorema sinusurilor în triunghiul BPD avem:

$$\frac{\sin \sphericalangle PBD}{PD} = \frac{\sin \sphericalangle BDP}{BP} = \frac{\sin \sphericalangle ACB}{BP} \quad (1)$$

(unde am folosit faptul că $\sphericalangle BDP \equiv \sphericalangle ACB$). Deoarece PC este diametru în cercul circumscris patrulaterului PP_aCP_b avem $P_aP_b = PC \cdot \sin \widehat{ACB}$ și analog se obțin relațiile $P_bP_c = PA \cdot \sin \widehat{A}$, $P_aP_c = PB \cdot \sin \widehat{B}$ (2). Din relațiile (1) și (2) obținem:

$$\begin{aligned} A_{[P_aP_bP_c]} &= \frac{P_aP_c \cdot P_bP_c \cdot \sin \widehat{P_aP_cP_b}}{2} \\ &= \frac{PB \cdot PA \cdot \sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{DBP}}{2} \\ &= \frac{PA \cdot PD \cdot \sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} \cdot \sin \widehat{C}}{2}. \end{aligned}$$

Utilizând puterea punctului față de un cerc rezultă $PA \cdot PD = |R^2 - OP^2|$ și atunci

$$A_{[P_aP_bP_c]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{2} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

□

Observația 127

1) Ținând cont că $A_{[ABC]} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ relația precedentă devine:

$$A_{[P_aP_bP_c]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]}.$$

2) Dacă $P \equiv O$, atunci aria triunghiului podar al centrului cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu

$$A_{[O_aO_bO_c]} = \frac{1}{4} \cdot A_{[ABC]},$$

($O_aO_bO_c$ este de fapt triunghiul median al triunghiului ABC).

3) Dacă $P \equiv G$, atunci aria triunghiului podar al centrului de greutate al triunghiului ABC este egală cu

$$A_{[G_aG_bG_c]} = \frac{|R^2 - OG^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{a^2+b^2+c^2}{9} \cdot A_{[ABC]} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{36R^2} \cdot A_{[ABC]}.$$

4) Dacă $P \equiv H$, atunci aria triunghiului podar al ortocentrului triunghiului ABC devine:

$$\begin{aligned} A_{[H_aH_bH_c]} &= \frac{|R^2 - OH^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{|R^2 - [9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} \\ &= \frac{|8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} \end{aligned}$$

5) Dacă $P \equiv I$, atunci aria triunghiului de contact este egală cu:

$$A_{[I_aI_bI_c]} = \frac{|R^2 - OI^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{2Rr}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{r}{2R} \cdot A_{[ABC]}.$$

6) Dacă $P \equiv K$, atunci aria triunghiului podar al punctului simedian al triunghiului ABC este egală cu

$$A_{[K_aK_bK_c]} = \frac{|R^2 - OK^2|}{4R^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{3a^2b^2c^2}{4R^2(a^2+b^2+c^2)^2} \cdot A_{[ABC]} = \frac{3a^2b^2c^2}{4R^2(a^2 + b^2 + c^2)^2} \cdot A_{[ABC]}.$$

7) Dacă notăm lungimile segmentelor PP_a , PP_b , PP_c cu x , y respectiv z , atunci

$$A_{[P_aP_bP_c]} = A_{[PP_bP_c]} + A_{[PP_cP_a]} + A_{[PP_aP_b]} = \frac{yz \sin A + xz \sin B + xy \sin C}{2}.$$

Teorema 128 Fie P un punct ce variază pe un cerc \mathfrak{C} ce are centrul în punctul O - centrul cercului circumscris unui triunghi ABC . Triunghiurile podare ale punctelor de pe cercul \mathfrak{C} , în raport cu triunghiul ABC , au aceeași arie.

Demonstrație. Deoarece $A_{[P_aP_bP_c]} = \frac{|R^2 - OP^2|}{2} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, când P se plimbă pe cerc, segmentul OP are aceeași lungime fiind rază în cercul \mathfrak{C} , rezultă concluzia. \square

Teorema 129 Dacă $P_aP_bP_c$ este triunghiul podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC atunci:

$$\frac{P_aP_b}{AB \cdot CP} = \frac{P_bP_c}{BC \cdot AP} = \frac{P_aP_c}{CA \cdot BP}.$$

Demonstrație. În cercul circumscris triunghiului AP_bP_c punctul P este punctul diametral opus punctului A . Teorema sinusurilor ne dă $P_bP_c = AP \sin A = AP \cdot \frac{BC}{2R}$ și de aici $\frac{P_bP_c}{BC \cdot AP} = \frac{1}{2R}$ (unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC). Analog se arată că $\frac{P_aP_b}{AB \cdot CP} = \frac{P_aP_c}{CA \cdot BP} = \frac{1}{2R}$. \square

Teorema 130 Fie P un punct interior triunghiului ABC și x, y, z distanțele de la P la laturile triunghiului BC, CA , respectiv AB . Notăm cu p perimetrul triunghiului podar al punctului P . Atunci,

$$\sum (x + y) \cos \frac{C}{2} \leq p.$$

Demonstrație. Fie a', b', c' lungimile laturilor triunghiului podar $P_aP_bP_c$ (Figura 1.27). Avem: $c'^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(180^\circ - C)$ sau

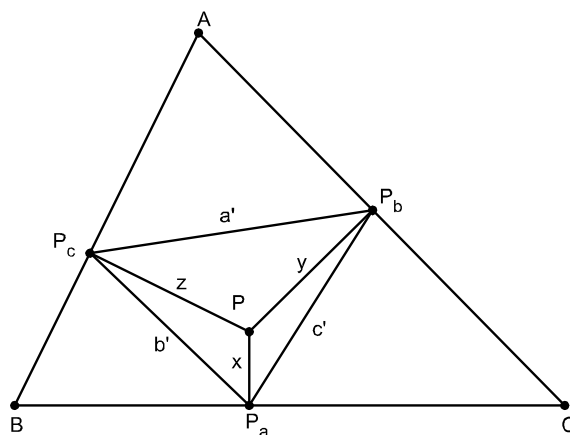


Figura 1.27: Perimetrul triunghiului podar

$$c'^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos C = (x - y)^2 + 4xy \cos^2 \frac{C}{2} \geq [(x - y)^2 + 4xy] \cdot \cos^2 \frac{C}{2}$$

sau $c'^2 \geq (x + y)^2 \cos^2 \frac{C}{2}$ de unde $c' \geq (x + y) \cos \frac{C}{2}$ cu egalitate dacă și numai dacă $x = y$. Atunci,

$$p = \sum c' \geq \sum (x + y) \cos \frac{C}{2}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$. \square

Teorema 131 Fie $A'B'C'$ triunghiul podar al unui punct P în raport cu un triunghi ABC . Notăm cu d_a dreapta ce trece prin mijloacele segmentelor PA și $B'C'$. Analog definim dreptele d_b, d_c . Dreptele d_a, d_b, d_c sunt concurente.

Demonstrație. Mijlocul segmentului PA este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, deci dreapta d_a este mediatoarea segmentului $B'C'$. Analog, d_b, d_c sunt mediatoarele segmentelor $C'A'$, respectiv $A'B'$, deci dreptele d_a, d_b, d_c sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului podar $A'B'C'$. \square

Teorema 132 *Triunghiul podar al ortocentrului H al triunghiului ABC în raport cu triunghiul ortic al triunghiului ABC este omotetic cu triunghiul ABC , centrul de omotetie fiind punctul lui Gob.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gob” [15]. □

Teorema 133 *Triunghiul podar al punctului lui Lemoine al triunghiului automedian ABC este asemenea cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul automedian”. □

Teorema 134 *Proiecția pe bisectoarea unghiului A a unui triunghi ABC a unui punct arbitrar P de pe cercul circumscris triunghiului BIC - unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC - este centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Fie P' simetricul lui P față de bisectoarea din A (Figura 1.28). Deoarece centrul cercului circumscris triunghiului BIC aparține bisectoarei din A și este mijlocul arcului \widehat{BC} al cercului circumscris triunghiului ABC (vezi „Cercuri exînscrie” [15]) rezultă că P' aparține cercului circumscris triunghiului, iar cum $\sphericalangle PBI \equiv \sphericalangle P'BI$ și $\sphericalangle PCI \equiv \sphericalangle P'CI$, rezultă că punctele P și P' sunt puncte izogonale.

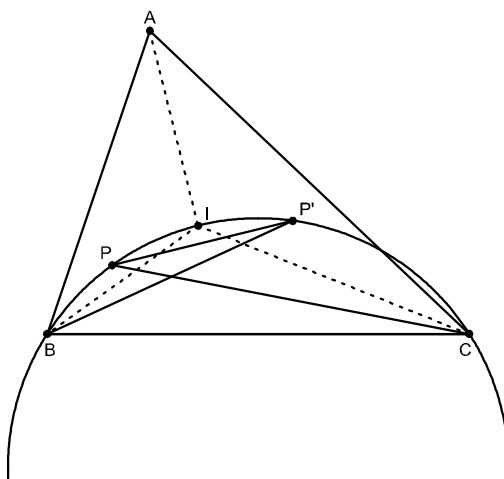


Figura 1.28: Centrul cercului circumscris triunghiului podar

Proiecțiile punctelor izogonale P și P' pe laturile triunghiului ABC sunt conciclice pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului PP' , deci proiecția lui P pe bisectoarea din A este centrul cercului circumscris triunghiului podar al punctului P în raport cu triunghiul ABC . □

Teorema 135 *Triunghiul podar al unui punct P de pe un cerc al lui Apollonius, în raport cu triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstrație. Vezi „Cercurile lui Apollonius” [15]. □

Teorema 136 Fie $A'B'C'$ triunghiul podar al unui punct P în raport cu un triunghi ABC și A'' al patrulea vârf al paralelogramului $B'PC'A''$. Analog se construiesc punctele B'' și C'' . Triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul izogonal conjugat al punctului P .

Demonstrație. Arătăm că dreptele PA și AA'' sunt izogonale. Fie $\{X\} = CA'' \cap AC$ și $\{Y\} = BA'' \cap AB$ (Figura 1.29). Deoarece patrulaterul $PB'AC'$ este inscriptibil,

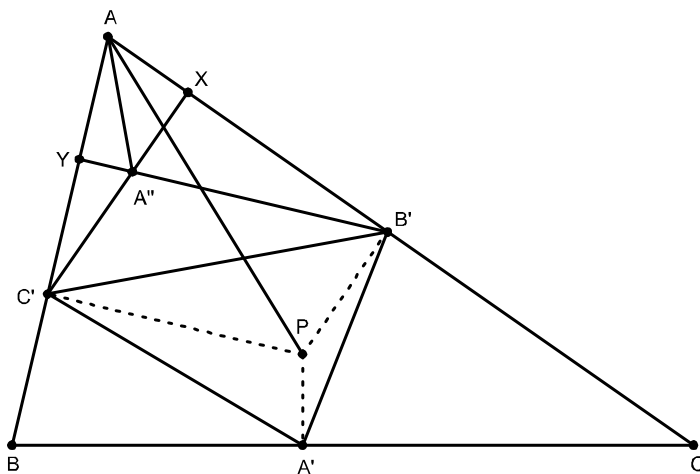


Figura 1.29: Triunghiuri omologice

rezultă

$$\sphericalangle B'C'A \equiv \sphericalangle B'PA \text{ și } \sphericalangle B''AP \equiv \sphericalangle B''C'P.$$

Cum

$$m(\sphericalangle B'AP) + m(\sphericalangle BPA) = 90^\circ$$

și

$$m(\sphericalangle B'C'A) + m(\sphericalangle A''AC') = 90^\circ,$$

rezultă că $\sphericalangle PAB' \equiv \sphericalangle A''AC'$ (A'' fiind ortocentrul triunghiului $B'C'A$). Analog, se arată că dreptele PB și BB'' , respectiv PC și CC'' sunt izogonale, deci triunghiurile ABC și $A''B''C''$ sunt omologice, centrul de omologie fiind izogonalul lui P . □

Teorema 137 Fie $A'B'C'$ triunghiul podar al unui punct P , aflat pe bisectoarea unghiului A , în raport cu un triunghi ABC . Mediana care pleacă din vârful A , dreapta $B'C'$ și dreapta PA' sunt concurente.

Demonstrație. Fie $\{Q\} = AP \cap BC$, $\{R\} = A'P \cap B'C'$ (Figura 1.30). Din asemănarea triunghiurilor $C'PR$ și ABQ , $B'PR$ și ACQ rezultă:

$$\frac{RC'}{PC'} = \frac{AQ}{AB} \text{ și } \frac{RB'}{PB'} = \frac{AQ}{AC}.$$

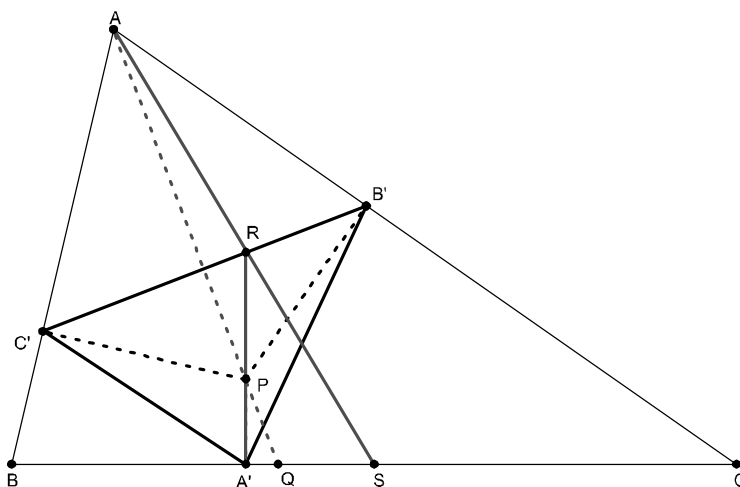


Figura 1.30: Triunghiul podar al unui punct aflat pe o bisectoare

Deoarece $PB' = PC'$ rezultă

$$\frac{RB'}{RC'} = \frac{AB}{AC}.$$

Notăm cu y și z lungimile perpendicularelor RR' și RR'' duse din punctul R pe laturile AC și AB . Din asemănarea triunghiurilor $RB'R'$ și $RC'R''$ rezultă

$$\frac{RB'}{RC'} = \frac{y}{z} = \frac{AB}{AC},$$

deci distanțele de la punctul R la laturile AC și AB sunt invers proporționale cu lungimile acestor laturi, ceea ce înseamnă că punctul R aparține medianei din vârful A a triunghiului ABC . \square

Teorema 138 Dacă punctele M și M' împart o coardă a cercului circumscris triunghiului ABC , în mod armonic, atunci ariile triunghiurilor podare ale acestor puncte față de triunghiul ABC , sunt proporționale cu distanțele lor la mijlocul corzii.

Demonstrație. Fie că punctele M și M' împart armonic coarda DE a cercului circumscris triunghiului ABC . Notând cu Δ și Δ' ariile triunghiurilor podare corespunzătoare punctelor M și M' rezultă

$$\frac{\Delta}{A_{[ABC]}} = \frac{OM^2 - R^2}{4R^2}, \quad \frac{\Delta'}{A_{[ABC]}} = \frac{R^2 - OM'^2}{4R^2}.$$

Dacă O' este mijlocul corzii DE , atunci $O'M \cdot O'M' = O'D^2$ și $R^2 = O'D^2 + O'O^2$, de unde rezultă

$$\begin{aligned} OM^2 - R^2 &= OM^2 - O'O^2 - O'D^2 = (OM^2 - O'O^2) - O'M \cdot O'M' \\ &= O'M^2 - O'M \cdot O'M' = O'M(O'M - O'M') = O'M \cdot MM' \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} R^2 - OM'^2 &= O'D^2 + O'O^2 - OM'^2 = O'M \cdot O'M' - (OM'^2 - OO'^2) \\ &= O'M \cdot O'M' - O'M'^2 = O'M'(O'M - O'M') = O'M' \cdot MM'. \end{aligned}$$

Astfel,

$$\frac{\Delta}{A_{[ABC]}} = \frac{O'M \cdot MM'}{4R^2}, \quad \frac{\Delta'}{A_{[ABC]}} = \frac{O'M' \cdot MM'}{4R^2},$$

de unde

$$\frac{\Delta}{O'M} = \frac{\Delta'}{O'M'} = \frac{MM'}{4R^2} \cdot A_{[ABC]}.$$

□

Consecința 139 Dacă dreapta MM' trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci

$$\frac{1}{\Delta'} - \frac{1}{\Delta} = \frac{4}{A_{[ABC]}}.$$

Demonstrație. În cazul de față punctele O și O' coincid, deci $O'M \cdot O'M' = OM \cdot OM'^2$, de unde

$$\frac{\Delta}{A_{[ABC]}} = \frac{MM'}{4OM'} \quad \text{și} \quad \frac{\Delta'}{A_{[ABC]}} = \frac{MM'}{4OM},$$

iar de aici rezultă

$$\frac{MM'}{\Delta'} - \frac{MM'}{\Delta} = \frac{4(OM - OM')}{A_{[ABC]}} = \frac{4MM'}{A_{[ABC]}}$$

sau

$$\frac{1}{\Delta'} - \frac{1}{\Delta} = \frac{4}{A_{[ABC]}}.$$

□

Teorema 140 Ariile triunghiurilor podare ale punctelor izogonale ale unui triunghi ABC , sunt proporționale cu produsele distanțelor de la punctele respective la laturile triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie următoarele notații: $B_1C_1 = a_1, C_1A_1 = b_1, A_1B_1 = c_1$; $B_2C_2 = a_2, C_2A_2 = b_2, A_2B_2 = c_2$; $M_1A_1 = x_1, M_1B_1 = y_1, M_1C_1 = z_1$; $M_2A_2 = x_2, M_2B_2 = y_2, M_2C_2 = z_2$. Deoarece perechile de triunghiuri $(M_1B_1C_1, M_2C_2B_2)$, $(M_1C_1A_1, M_2A_2C_2)$, $(M_1A_1B_1, M_2B_2A_2)$ sunt asemenea (vezi „Puncte izogonale” [15]), rezultă

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{y_1}{z_2} = \frac{z_1}{y_2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{z_1}{x_2} = \frac{x_1}{z_2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{x_1}{y_2} = \frac{y_1}{x_2}.$$

Astfel, se obține

$$\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[M_2C_2B_2]}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{y_1z_1}{y_2z_2}$$

și

$$\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[ABC]}} = \frac{M_1B_1 \cdot M_1C_1}{AB \cdot AC} = \frac{y_1z_1}{bc}$$

și alte patru relații analoage. Atunci, $\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[M_1C_1A_1]}} = \frac{ay_1}{bx_1}$ și cum $x_1x_2 = y_1y_2$ rezultă

$$\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[M_1C_1A_1]}} = \frac{ax_2}{by_2} = \frac{A_{[M_2BC]}}{A_{[M_2CA]}}$$

și relațiile analoage. Avem:

$$\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[M_2BC]}} = \frac{A_{[M_1C_1A_1]}}{A_{[M_2CA]}} = \frac{A_{[M_1A_1B_1]}}{A_{[M_2AB]}} = \frac{A_{[A_1B_1C_1]}}{A_{[ABC]}}$$

și

$$\frac{A_{[M_2B_2C_2]}}{A_{[M_1BC]}} = \frac{A_{[M_2C_2A_2]}}{A_{[M_1CA]}} = \frac{A_{[M_2A_2B_2]}}{A_{[M_1AB]}} = \frac{A_{[A_2B_2C_2]}}{A_{[ABC]}}$$

de unde

$$\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[M_2B_2C_2]}} \cdot \frac{A_{[M_1BC]}}{A_{[M_2BC]}} = \frac{A_{[A_1B_1C_1]}}{A_{[A_2B_2C_2]}};$$

cum

$$\frac{A_{[M_1B_1C_1]}}{A_{[M_2B_2C_2]}} = \frac{y_1z_1}{y_2z_2} \text{ și } \frac{A_{[M_1BC]}}{A_{[M_2BC]}} = \frac{x_1}{x_2},$$

rezultă

$$\frac{A_{[A_1B_1C_1]}}{A_{[A_2B_2C_2]}} = \frac{x_1y_1z_1}{x_2y_2z_2}.$$

□

1.7 Triunghiul antipodar

„Am fost un lucrător conștiincios, nu am fost superficial, am muncit până acum la bătrânețe. Spiritul meu a fost geometric, m-a fermecat varietatea și frumusețea figurii.” – Alexandru Miller⁸

Fie P un punct în planul unui triunghi ABC . Triunghiul $A'B'C'$ format de perpendicularele duse prin vârfurile A, B, C pe cevienele PA, PB , respectiv PC , se numește *triunghiul antipodar* al punctului P (Figura 1.31). Punctul P se numește *punct an-*

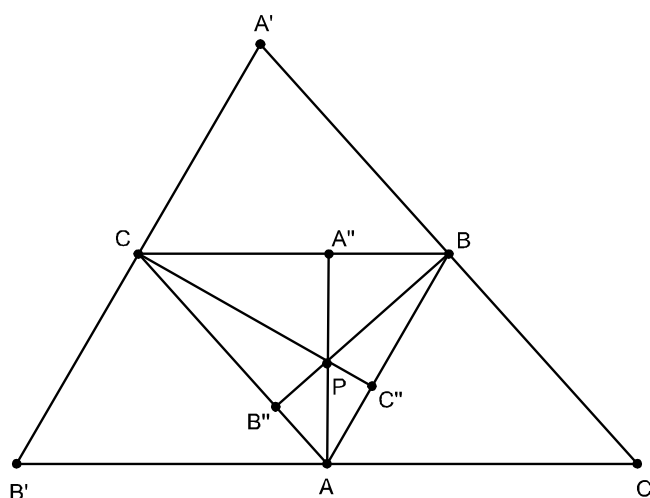


Figura 1.31: Triunghiul antipodar

tipodar. Dacă punctul P se găsește pe cercul circumscris triunghiului ABC , atunci triunghiul antipodar corespunzător lui se reduce la punctul diametral opus lui P . Triunghiul ABC este triunghiul podar al punctului P în triunghiul $A'B'C'$.

Teorema 141 *Triunghiul antipodar al ortocentrului H al triunghiului ABC este triunghiul anticomplementar.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul anticomplementar”. □

Teorema 142 *Triunghiul antipodar al centrului cercului înscris în triunghiul ABC este triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”. □

Teorema 143 *Triunghiul antipodar al centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC este triunghiul tangențial corespunzător triunghiului ABC .*

⁸Alexandru Miller (1879-1965) – matematician român, membru al Academiei Române

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”. □

Teorema 144 *Triunghiul antipodar al unui punct P este ortologic cu triunghiul pedal al punctului P în raport cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Fie $A''B''C''$ triunghiul pedal corespunzător punctului P în raport cu triunghiul ABC (Figura 1.31). Deoarece $A''A \perp B'C'$, $B''B \perp A'C'$, $C''C \perp A'B'$ și $A''A \cap B''B \cap C''C = \{P\}$ rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt ortologice. □

Teorema 145 *Triunghiul antipodar al unui punct P este ortologic cu triunghiul anticevian al punctului P .*

Demonstrație. Triunghiul anticevian al punctului P este triunghiul ABC . Cum $AP \perp B'C'$, $BP \perp A'C'$, $CP \perp A'B'$, $AP \cap BP \cap CP = \{P\}$ rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt ortologice. □

Teorema 146 *Fie L, M, N punctele diametral opuse vârfurilor A, B , respectiv C ale unui triunghi ABC în cercul circumscris acestuia. Triunghiul LMN este omologic cu triunghiul antipodar al oricărui punct aflat în interiorul triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie l, m, n dreptele ce trec prin A, B, C și sunt perpendiculare pe dreptele PA, PB , respectiv PC și D, E, F al doilea punct de intersecție dintre dreptele l, m, n și cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.32). Deoarece $m(\sphericalangle ADL) =$

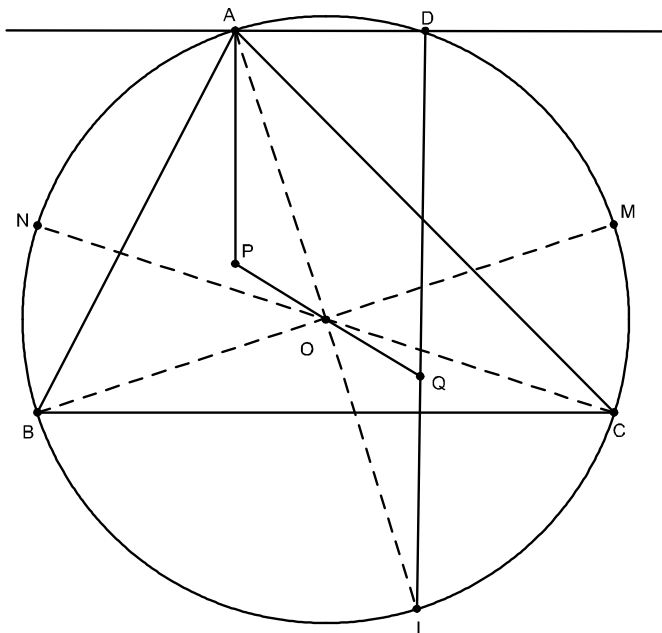


Figura 1.32: Triunghi omologic cu triunghiul antipodar

90° , rezultă $PA \parallel DL$. Dacă $\{Q\} = PO \cap DL$, din congruența triunghiurilor APO și LQO rezultă $PO \equiv OQ$. Analog, se arată că dreptele EM, FN trec prin Q , de unde rezultă că

$$QD \cdot QL = QE \cdot QM = QF \cdot QN = p^2$$

relații ce arată că punctele L, M și N sunt polii dreptelor l, m și n în raport cu cercul având centrul în Q și raza p . \square

Teorema 147 *Triunghiul antipodar al unui punct P și triunghiul podar al izogonalului său P' sunt omotetice.*

Demonstrație. Fie $A''B''C''$ triunghiul podar al lui P' . Deoarece $B''C'' \perp AP$ (vezi „Drepte izogonale” [15]) și $B'C' \perp AP$ rezultă $B'C' \parallel B''C''$ (Figura 1.33). Analog,

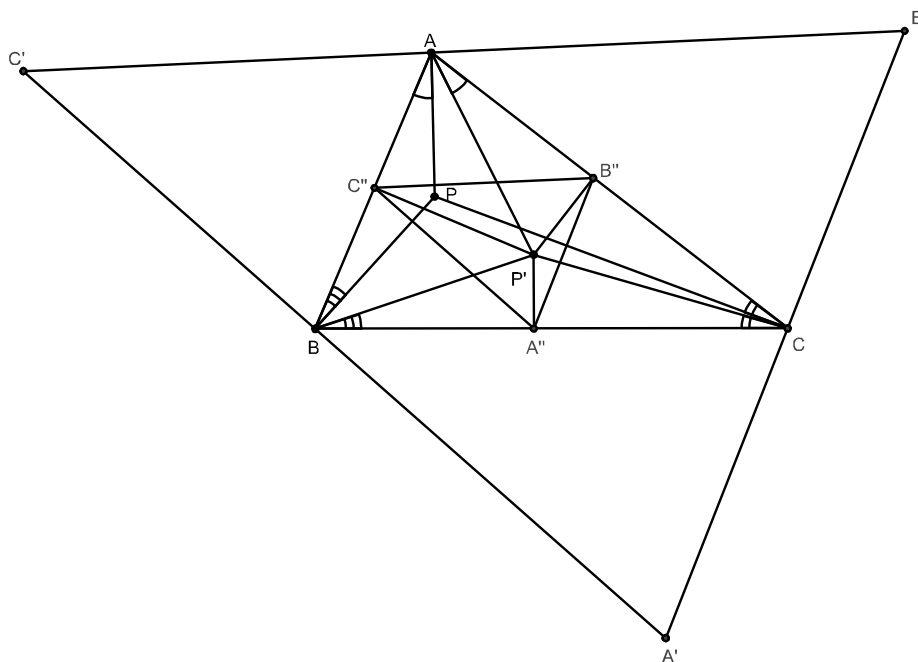


Figura 1.33: Triunghiul antipodar - triunghiul podar

$A'B' \parallel A''B''$ și $A'C' \parallel A''C''$. Deoarece patrulaterul $PBA'C$ este inscriptibil rezultă

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BA'C) &= 180^\circ - m(\sphericalangle BPC) = m(\sphericalangle PBC) + m(\sphericalangle PCB) \\ &= m(\sphericalangle P'BA) + m(\sphericalangle P'CB'') \\ &= m(\sphericalangle C''A''P') + m(\sphericalangle P'A''B'') = m(\sphericalangle C''A''B''). \end{aligned}$$

Deci $\sphericalangle C'A'B' \equiv \sphericalangle C''A''B''$ și analog $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle A''B''C''$, de unde rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt asemenea. Deoarece triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ au laturile paralele și sunt asemenea rezultă că ele sunt omotetice. \square

Teorema 148 *Triunghiurile antipodare ale punctelor lui Fermat corespunzătoare unui triunghi ABC sunt echilaterale.*

Demonstrație. Fie F_1 primul punct al lui Fermat - Toricelli (Figura 1.34). Deoarece

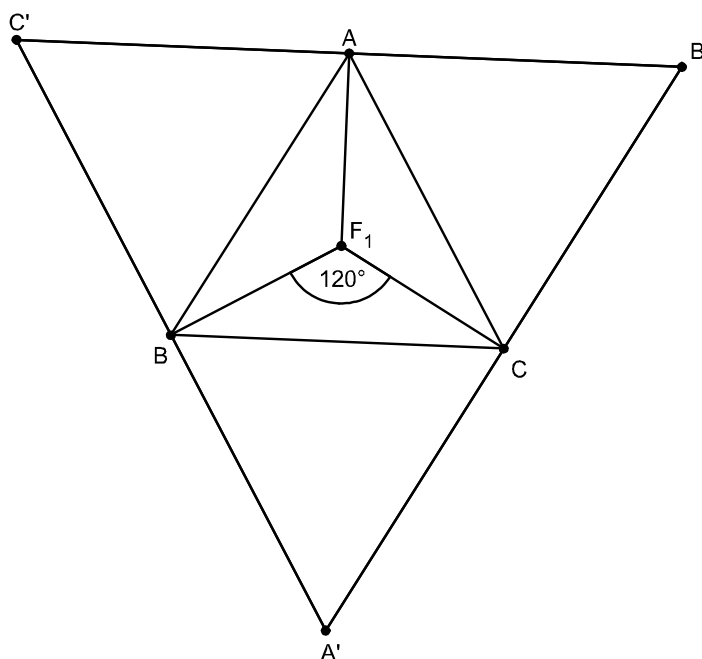


Figura 1.34: Triunghiurile antipodare ale punctelor lui Fermat

$$m(\sphericalangle AF_1B) = m(\sphericalangle BF_1C) = m(\sphericalangle CF_1A) = 120^\circ$$

(vezi „Punctele lui Fermat” [15]), iar patrulateralele BF_1AC' , CF_1BA' și AF_1CB' sunt inscriptibile, rezultă că

$$m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle CB'A) = m(\sphericalangle AC'B) = 60^\circ,$$

deci triunghiul $A'B'C'$ este echilateral. Analog se arată că și triunghiul antipodar al celui de-al doilea punct Fermat (F_2) este echilateral. \square

1.8 Triunghiul tangențial

„Totul ar fi trebuit sa fie sfere, dar n-a fost, n-a fost asa.

Totul ar fi trebuit sa fie linii,

dar n-a fost, n-a fost asa.” - Nichita Stănescu⁹

Triunghiul $T_A T_B T_C$ determinat de tangentele duse la cercul circumscris triunghiului ABC în vârfurile acestuia se numește *triunghiul tangențial* al triunghiului ABC . Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC este triunghiul antipodar al centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC în raport cu triunghiul ABC .

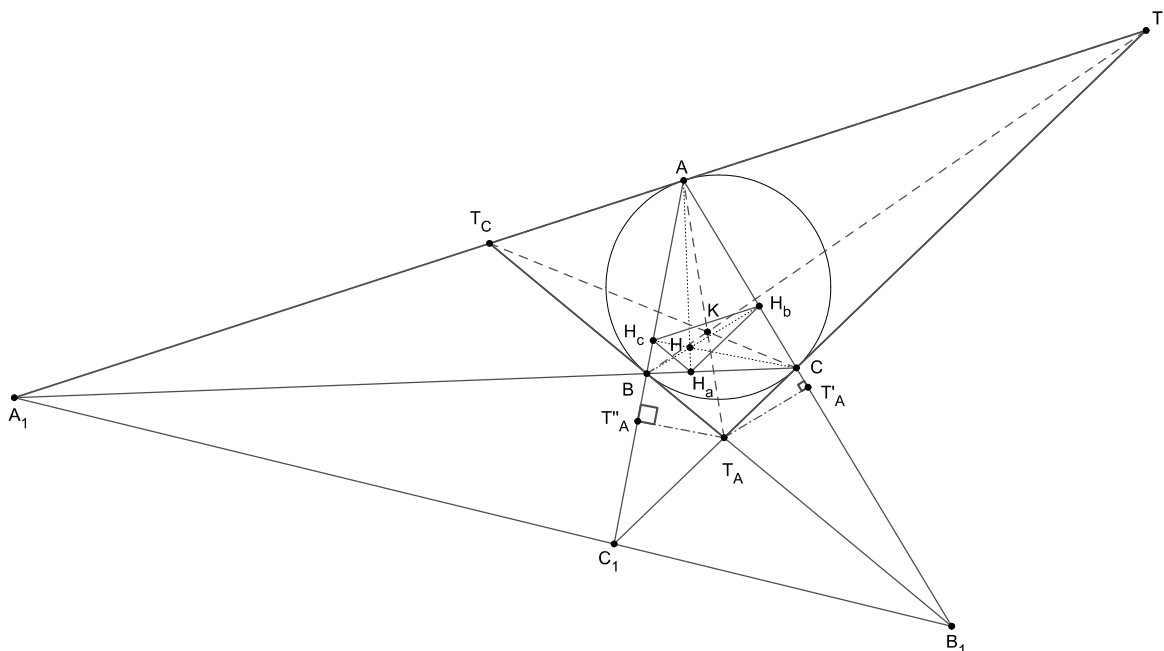


Figura 1.35: Triunghiul tangențial

Teorema 149 *Dreptele AT_A, BT_B și CT_C sunt concurente.*

Demonstrație. Deoarece $T_A B \equiv T_A C, T_B A \equiv T_B C, T_C A \equiv T_C B$ avem:

$$\frac{AT_A}{AT_C} \cdot \frac{BT_C}{BT_A} \cdot \frac{CT_A}{CT_B} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AT_A, BT_B și CT_C sunt concurente. Fie K punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C (Figura 1.35).

□

⁹Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

Teorema 150 Dreptele AT_A, BT_B, CT_C sunt simedianele triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $A' = pr_{BC}(A)$, $T'_A = pr_{AC}(T_A)$ și $T''_A = pr_{AB}(T_A)$ (Figura 1.35). Cum $m(\widehat{ABA'}) = m(\widehat{T_ACT'_A}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AC})$ și $m(\widehat{AA'B}) = m(\widehat{CT'_AT_A}) = 90^\circ$ rezultă că triunghiurile ABA' și $T_ACT'_A$ sunt asemenea, deci

$$\frac{T_AT'_A}{AA'} = \frac{T_AC}{AB}. \quad (1)$$

Analog din asemănarea triunghiurilor $AA'C$ și $T_ABT''_A$ rezultă

$$\frac{T_AT''_A}{AA'} = \frac{T_AB}{AC}. \quad (2)$$

Împărțind relațiile (1) și (2) membru cu membru rezultă

$$\frac{T_AT'_A}{T_AT''_A} = \frac{T_AC}{AB} \cdot \frac{CA}{BT_A} = \frac{CA}{AB},$$

unde am utilizat $BT_A = CT_A$, relație ce arată că punctul T_A aparține simedianei din A a triunghiului ABC . Analog se arată că BT_B și CT_C sunt simediane. \square

Observația 151 Punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC este punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C , adică punctul lui Gergonne al triunghiului tangențial. Punctul lui Lemoine este centrul de omologie dintre triunghiul ABC și triunghiului său tangențial.

Teorema 152 Dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC este axa de omologie dintre triunghiul ABC și triunghiul său tangențial $T_AT_BT_C$.

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție dintre tangentele la cercul circumscris ABC , vârfurile acestuia și laturile opuse. Din teorema lui Lemoine rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare (punctele aparțin dreptei lui Lemoine). Avem

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2. \quad (1)$$

Fie $\{C'\} = AB \cap T_AT_B$, $\{B'\} = AC \cap T_AT_C$, $\{A'\} = BC \cap T_BT_C$. Să arătăm că punctele A', B', C' aparțin dreptei A_1C_1 . Fie $\{K_A\} = AT_A \cap BC$, $\{K_B\} = BT_B \cap CA$, $\{K_C\} = CT_C \cap AB$, iar K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC (Figura 1.35). Deoarece AK_A este simediană în triunghiul ABC , rezultă

$$\frac{BK_A}{CK_A} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$\frac{BK_A}{CK_A} = \frac{BA_1}{CA_1},$$

adică punctele A_1 și K_A sunt conjugate armonic față de punctele B și C . Analog, se arată că și perechile de puncte $(B_1, K_B), (C, K_C)$ sunt conjugate armonic față de (C, A) , respectiv (A, B) , ceea ce demonstrează teorema. \square

Consecința 153 Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ este triunghiul anticevian al punctului lui Lemoine corespunzător triunghiului ABC .

Teorema 154 Laturile triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC sunt respectiv paralele cu laturile triunghiului tangențial $T_A T_B T_C$.

Demonstrație. Din $m(\widehat{T_C A B}) = m(\widehat{A H_c H_b}) = m(\widehat{A C B})$, rezultă că $T_C T_B \parallel H_c H_b$. Analog $T_A T_B \parallel H_a H_b$ și $T_A T_C \parallel H_a H_c$. \square

Teorema 155 Triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC și triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC sunt omotetice.

Demonstrație. Avem $\widehat{T_C A B} \equiv \widehat{T_C B A} \equiv \widehat{A C B}$, deci $m(\widehat{A T_C B}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$. Dar $m(\widehat{H_b H_c H_a}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$, deci $\widehat{T_B T_C T_A} \equiv \widehat{H_b H_c H_a}$ și analog $\widehat{T_A T_B T_C} \equiv \widehat{H_a H_b H_c}$. Atunci triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $H_a H_b H_c$ sunt asemenea și deoarece triunghiurile au laturile paralele (vezi proprietatea precedentă) rezultă că triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $H_a H_b H_c$ sunt omotetice. \square

Observația 156 Centrul omoteticii dintre triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ și triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC (vezi „Dreapta lui Euler” [15]) și se numește punctul lui Gob.

Teorema 157 Fie A^*, B^*, C^* mijloacele laturilor $H_b H_c, H_c H_a$, respectiv $H_a H_b$ ale triunghiului ortic al triunghiului ABC și $T_A T_B T_C$ triunghiul său tangențial. Punctele $A, A^*, T_A; B, B^*, T_B$; respectiv C, C^*, T_C sunt coliniare.

Demonstrație. Deoarece A^* este mijlocul antiparalelei $H_b H_c$ la BC , rezultă că aparține simedianei din A , adică dreptei AT_A , de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 158 Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ și triunghiul median al triunghiului ortic corespunzător unui triunghi ABC sunt omotetice, punctul lui Lemoine al triunghiului ABC fiind centrul de omotetie.

Demonstrația rezultă din proprietatea de mai sus. \square

Teorema 159 Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ și triunghiul median al triunghiului ortic corespunzător unui triunghi ABC sunt ortologice, centrele de ortologie fiind ortocentrul triunghiului tangențial și centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $A^* B^* C^*$ triunghiul median al triunghiului ortic $H_a H_b H_c$. Deoarece $O_9 A^* \perp H_b H_c$ și $T_C T_B \parallel H_c H_b$ rezultă

$$O_9 A^* \perp T_C T_B.$$

Analog, se arată că $O_9 B^* \perp T_C T_A$ și $O_9 C^* \perp T_A T_B$, deci triunghiurile $A^* B^* C^*$ și $T_A T_B T_C$ sunt ortologice, unul dintre centre fiind centrul cercului lui Euler O_9 . Deoarece $T_A H_x \perp T_B T_C$ și $T_B T_C \parallel B^* C^*$ rezultă

$$T_A H_x \perp B^* C^*$$

(unde H_x este ortocentrul triunghiului tangențial), analog $T_B H_x \perp A^* C^*$, deci H_x este al doilea centru de ortologie. \square

Teorema 160 *Aria triunghiului tangențial este egal cu:*

$$A_{[T_A T_B T_C]} = \frac{a^2 \operatorname{tg} A + b^2 \operatorname{tg} B + c^2 \operatorname{tg} C}{4} + A_{[ABC]},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC .

Demonstrație. În triunghiul isoscel $BT_A C$ ($m(\widehat{T_A B C}) = m(\widehat{T_A C B}) = m(\widehat{A})$) avem $\cos \widehat{A} = \frac{a}{2CT_A}$, de unde $CT_A = \frac{a}{2 \cos A}$. Atunci,

$$A_{[T_A B C]} = \frac{BC \cdot CT_A \cdot \sin \widehat{B C T_A}}{2} = \frac{a^2 \sin A}{4 \cos A} = \frac{a^2 \operatorname{tg} A}{4}.$$

Analog, $A_{[T_B A C]} = \frac{b^2 \operatorname{tg} B}{4}$ și $A_{[T_C B A]} = \frac{c^2 \operatorname{tg} C}{4}$, de unde

$$\begin{aligned} A_{[T_A T_B T_C]} &= A_{[T_A A C]} + A_{[T_B A C]} + A_{[T_C B A]} + A_{[ABC]} \\ &= \frac{a^2 \operatorname{tg} A + b^2 \operatorname{tg} B + c^2 \operatorname{tg} C}{4} + A_{[ABC]}. \end{aligned}$$

□

Observația 161 *Dar triunghiul ABC este obtuzunghic, de exemplu $m(\widehat{A}) > 90^\circ$, atunci $A_{[T_A B C]} = \frac{a^2}{4} \cdot |\operatorname{tg} A|$.*

Teorema 162 *Centrul cercului circumscris triunghiului tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC .*

Demonstrație. Dreapta determinată de centrul cercului circumscris, respectiv înscris într-un triunghi XYZ este dreapta lui Euler a triunghiului de contact al triunghiului XYZ (vezi „Dreapta lui Euler” [15]). Cum triunghiul ABC este triunghiul de contact corespunzător triunghiului tangențial rezultă că dreapta lui Euler a triunghiului ABC trece prin centrul cercului circumscris triunghiului tangențial $T_A T_B T_C$. □

Teorema 163 *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Centrele O_A, O_B, O_C ale cercurilor circumscrise triunghiurilor BCO, ACO , respectiv BAO determină un triunghi omotetic cu triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC , centrul de omotetrie fiind punctul O .*

Demonstrație. Deoarece $OC \perp O_A O_B$ și $OC \perp T_A T_B$, rezultă $O_A O_B \parallel T_A T_B$ (Figura 1.36). Analog, $O_B O_C \parallel T_B T_C$ și $O_C O_A \parallel T_C T_A$. Deoarece $OO_A \perp BC$ și $T_A O \perp BC$ (triunghiul $T_A B C$ fiind isoscel), rezultă că punctele O, O_A și T_A sunt coliniare. Analog O, O_B și T_B respectiv O, O_C și T_C sunt coliniare. Atunci, triunghiurile $O_A O_B O_C$ și $T_A T_B T_C$ sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul O . □

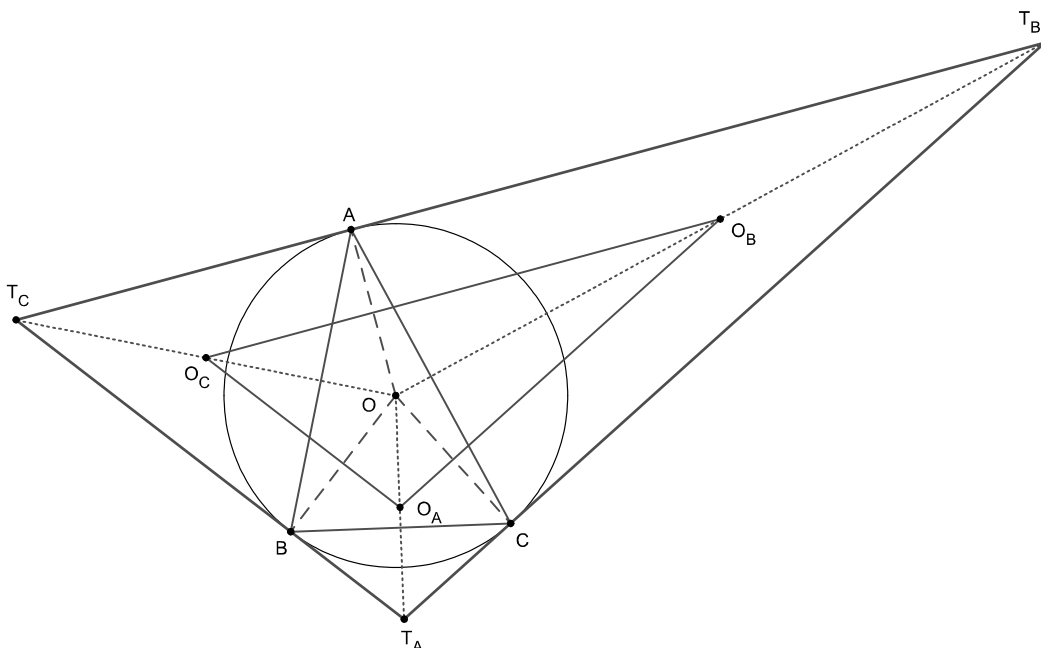


Figura 1.36: Triunghi omotetic cu triunghiul tangențial

Teorema 164 *Triunghiul tangențial al triunghiului ABC și triunghiul circumpedal al centrului de greutate al triunghiului ABC sunt omologice.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Exeter” [15]. □

Teorema 165 *Triunghiurile tangențial și extangențial corespunzătoare unui triunghi ABC sunt omotetice, raportul de omotetie fiind $\frac{2R+r}{R}$.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul extangențial”. □

Teorema 166 *Fie $T_A T_B T_C$ triunghiul tangențial, $N_a N_b N_c$ și $N'_a N'_b N'_c$ triunghiurile lui Napoleon ale unui triunghi ABC . Punctele N_a, N'_a, T_A sunt coliniare.*

Demonstrația este evidentă deoarece punctele N_a, N'_a, T_A aparțin mediatoarei segmentului BC . □

Teorema 167 *Triunghiul tangențial $T_A T_B T_C$ al triunghiului ABC și triunghiul median $M_a M_b M_c$ al triunghiului ABC sunt omologice.*

Demonstrație. Deoarece $BT_A \equiv CT_A, AT_B \equiv CT_B, AT_C \equiv BT_C$ (Figura 1.37) rezultă că $M_a T_A, M_b M_B, M_c M_C$ sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC , deci ele sunt concurente în centrul cercului circumscris O al triunghiului ABC , deci triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ sunt omologice. □

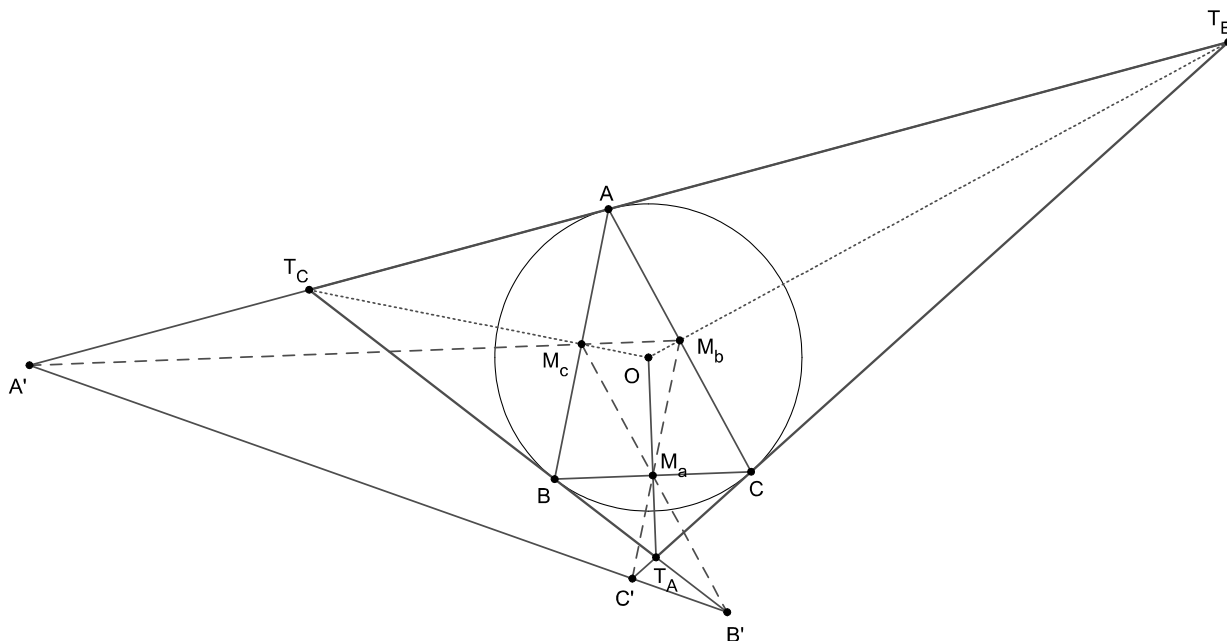


Figura 1.37: Triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ sunt omologice

Observația 168 Centrul cercului circumscris triunghiului ABC este polul de omologie al triunghiului $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$.

Teorema 169 Axa de omologie dintre triunghiurile tangențial și median ale unui triunghi ABC este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $A'B'C'$ axa de omologie dintre triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ (Figura 1.37). Deoarece $M_b M_c \parallel BC$, atunci

$$\widehat{A'AC} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{AM_c M_b},$$

de unde rezultă că triunghiurile $AM_b A'$ și $M_c A A'$ sunt asemenea, deci

$$\frac{AA'}{A'M_c} = \frac{A'M_b}{AA'}$$

egalitate echivalentă cu $AA'^2 = A'M_b \cdot A'M_c$. Cum $A'M_c$ este secantă la cercul lui Euler, rezultă că A' are aceeași putere față de cercul circumscris triunghiului ABC și de cercul lui Euler al triunghiului ABC , deci A' aparține axei radicale a acestor cercuri. Analog se arată că B' și C' aparțin acestei axe, deci axa de omologie este axa radicală a cercului circumscris triunghiului ABC și a cercului lui Euler al triunghiului ABC . Deoarece axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor OO_9 , adică pe dreapta lui Euler, rezultă că axa de omologie dintre triunghiurile $T_A T_B T_C$ și $M_a M_b M_c$ este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC . \square

Teorema 170 Prin inversiunea de centru O și raport R^2 , cercul circumscris triunghiului tangențial $T_A T_B T_C$ se transformă în cercul lui Euler al triunghiului ABC .

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor BOM_a și $T_A O B$ rezultă:

$$\frac{OM_a}{R} = \frac{R}{OT_A},$$

adică $OM_a \cdot OT_A = R^2$. Analog, se arată că $OM_b \cdot OT_B = OM_c \cdot OT_c = R^2$, relații ce arată că prin inversiunea (O, R^2) cercul circumscris triunghiului tangențial se transformă în cercul circumscris triunghiului median, adică cercul lui Euler al triunghiului ABC . \square

Teorema 171 Fie \mathcal{C} cercul circumscris triunghiului ABC , A', B', C' punctele de intersecție dintre înălțimile din A, B respectiv C și laturile triunghiului ABC cu \mathcal{C} , iar $T_A T_B T_C$ triunghiul tangențial al triunghiului ABC . Dreptele $T_A A', T_B B', T_C C'$ sunt concurente într-un punct ce aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 punctele diametral opuse în \mathcal{C} ale punctelor A, B respectiv C , iar X punctul de intersecție dintre cercul T_A -exînscriș, corespunzător triunghiului $T_A T_B T_C$ cu latura $T_B T_C$ (Figura 1.38). Analog se definesc prin punctele Y

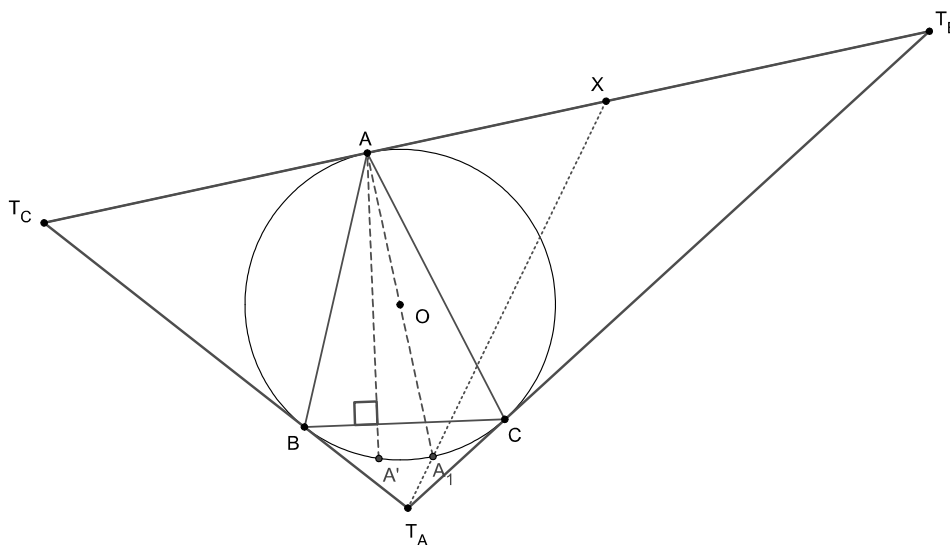


Figura 1.38: $T_A A', T_B B', T_C C'$ sunt concurente

și Z . Deoarece în triunghiul ABC , AA' și AA_1 sunt izogonale (vezi „Drepte izogonale” [15]) rezultă că dreptele $T_A A'$ și $T_A A_1$ sunt izogonale conjugate în triunghiul tangențial. Deoarece T_A este centrul de asemănare dintre cercurile și cercul T_A -exînscriș, rezultă că punctele T_A , A_1 și X sunt coliniare. Deoarece dreptele $T_A X, T_B Y$ și $T_C Z$ sunt concurente în punctul lui Nagel al triunghiului $T_A T_B T_C$, rezultă că și izogonalele lor - adică dreptele $T_A A', T_B B', T_C C'$ sunt concurente într-un punct S care este centrul de asemănare dintre cercurile \mathcal{C} și cercul circumscris triunghiului $T_A T_B T_C$, deci S aparține dreptei lui Euler a triunghiului ABC . \square

1.9 Triunghiul anticomplementar

„Geometrii se servesc de figuri vizibile și fac judecăți asupra acestora, deși ei nu se gândesc la aceste figuri, ci la altele care se aseamănă, dar care nu pot fi sesizate decât cu mintea.”- Platon¹⁰

Triunghiul anticomplementar (sau *antimediana*) al triunghiului ABC este triunghiul $A'B'C'$ determinat de paralelele duse prin vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse (Figura 1.39).

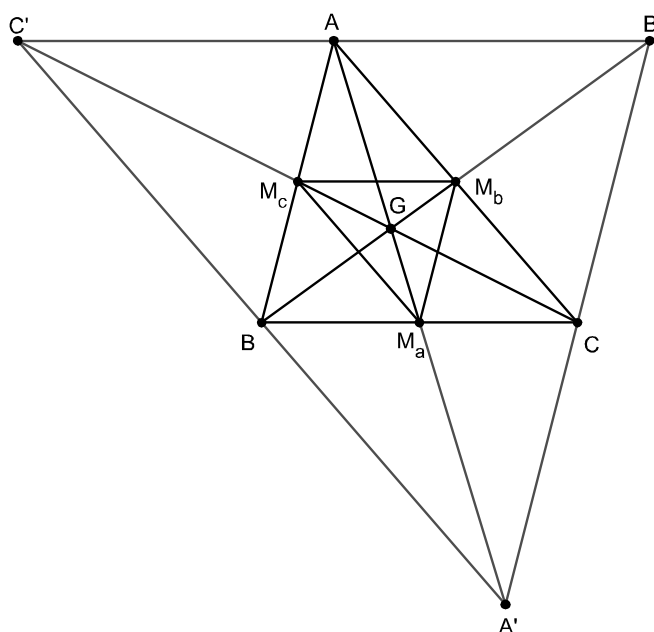


Figura 1.39: Triunghiul anticomplementar

Numim *exmediană* a unui triunghi o dreaptă ce trece prin vârful unui triunghi și este paralelă cu latura opusă. Triunghiul anticomplementar este determinat de intersecțiile exmedianelor triunghiului ABC . Vârfurile triunghiului anticomplementar se numesc *puncte exmedianale*.

Observația 172 *Triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC dacă triunghiul ABC este triunghiul său median.*

Teorema 173 *Centrul de greutate al triunghiului anticomplementar al triunghiului ABC este centru de greutate și pentru triunghiul ABC .*

Demonstrație. Fie G centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și $M_a M_b M_c$ triunghiul său median. Deoarece patrulaterul $ABA'C$ este paralelogram rezultă că

¹⁰Platon (428-348) – filosof, logician, matematician grec

diagonalele BC și AA' se înjumătățesc, deci AM_a este mediană în triunghiul ABC . Analog se arată că BM_b este mediană, deci G este centrul de greutate al triunghiului ABC . \square

Observația 174 *Triunghiul anticomplementar $A'B'C'$ este triunghiul anticevian al triunghiului ABC corespunzător centrului de greutate G al acestuia.*

Teorema 175 *Aria triunghiului anticomplementar $A'B'C'$ este egală cu: $A_{[A'B'C']} = 4A_{[ABC]}$.*

Demonstrație. Deoarece patrulateralele $ABA'C$, $ACB'B'$ și $AC'BC$ sunt paralelograme, rezultă că

$$A_{[ABC]} = A_{[BCA']} = A_{[ACB']} = A_{[ABC']},$$

de unde $A_{[A'B'C']} = 4 \cdot A_{[ABC]}$. \square

Cercul circumscris triunghiului anticomplementar se numește *cerc anticomplementar*.

Teorema 176 *Centrul cercului anticomplementar este ortocentrul triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie $AH_a \perp BC$. Din $BC \parallel B'C'$ rezultă că $AH_a \perp B'C'$, cum A este mijlocul segmentului $B'C'$ obținem că AH_a este mediatoarea segmentului $B'C'$. Analog se arată că înălțimea BH_b este mediatoarea segmentului $A'C'$, deci punctul de concurență al înălțimilor triunghiului ABC este centrul cercului circumscris triunghiului anticomplementar. \square

Teorema 177 *Raza cercului anticomplementar este egală cu dublul razei cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC și R_A raza cercului circumscris triunghiului anticomplementar $A'B'C'$. Atunci:

$$R_A = \frac{a' \cdot b' \cdot c'}{4A_{[A'B'C']}} = \frac{2a \cdot 2b \cdot 2c}{4 \cdot 4 \cdot A_{[ABC]}} = 2 \cdot \frac{abc}{4A_{[ABC]}} = 2R.$$

\square

Teorema 178 *Fie $A'B'C'$ triunghiul anticomplementar al triunghiului ABC și A'' , B'' , C'' simetricele punctelor A , B respectiv C față de ortocentrul H al triunghiului ABC . Dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sunt concurente.*

Demonstrație. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC . Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare (Figura 1.40). Atunci $O(o)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $H(a + b + c)$, de unde rezultă

$$h = \frac{a + a''}{2} = \frac{b + b''}{2} = \frac{c + c''}{2}$$

și de aici

$$a'' = a + 2b + 2c, b'' = 2a + b + 2c, c'' = 2a + 2b + c.$$

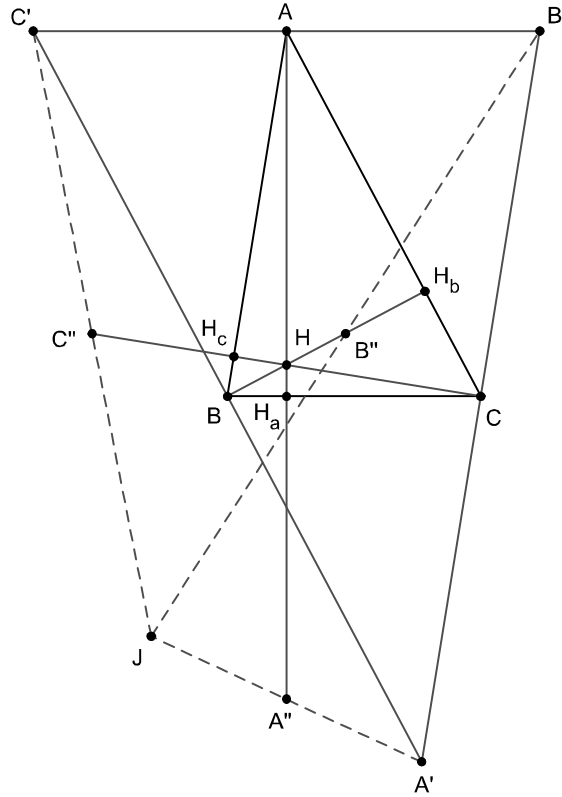


Figura 1.40: Dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sunt concurente

Deoarece $a = \frac{c'+b'}{2}$, $b = \frac{a'+c'}{2}$, $c = \frac{a'+b'}{2}$, rezultă $a + b + c = a' + b' + c'$, deci $2a = a + b + c - a'$, de unde $a' = b + c - a$ și analog, $b' = a + c - b$, $c' = b + a - c$. Ecuația dreptei $A'A''$ este:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ a' & \bar{a}' & 1 \\ a'' & \bar{a}'' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$z(2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) + \bar{z}(b + c - 2a) + 3[(b\bar{a} - a\bar{b}) + (c\bar{a} - a\bar{c})] = 0. \quad (1)$$

Analog ecuațiile dreptelor $B'B''$ și $C'C''$ sunt: $(B'B'') : z(2\bar{b} - \bar{a} - \bar{c}) + \bar{z}(a + c - 2b) + 3[(a\bar{b} - b\bar{a}) + (c\bar{b} - b\bar{c})] = 0$ (2), respectiv $(C'C'') : z(2\bar{c} - \bar{a} - \bar{b}) + \bar{z}(a + b - 2c) + 3[(a\bar{c} - c\bar{a}) + (b\bar{c} - c\bar{b})] = 0$ (3). Sumând ecuațiile (1)-(3) obținem o egalitate ceea ce arată că dreptele $A'A''$, $B'B''$ și $C'C''$ sunt concurente. \square

Teorema 179 *Cercul circumscris triunghiului anticomplementar al triunghiului ABC este tangent cercurilor circumscrise triunghiurilor BHC, CHA și AHB, unde H este ortocentrul triunghiului ABC.*

Demonstrație. Deoarece patrulaterul $HBA'C$ este inscripabil, iar $m(\widehat{HBA'}) = 90^\circ$ rezultă că HA' este diametrul în cercul circumscris patrulaterului $HBA'C$. Cum

HA' este raza în cercul circumscris triunghiului anticomplementar rezultă cercul circumscris triunghiului BHC este tangent interior în A' cercului anticomplementar. Analog se arată că cercurile circumscrise triunghiurilor CHA și AHB sunt tangente interior cercului anticomplementar. \square

Teorema 180 *Punctul lui Lemoine al triunghiului anticomplementar al unui triunghi ABC este retrocentrul triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Retrocentrul unui triunghi” [15]. \square

Teorema 181 *Într-un triunghi ABC , dreapta ON , care unește centrul cercului circumscris cu punctul lui Nagel, al triunghiului ABC , trece prin punctul lui Feuerbach al triunghiului anticomplementar.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel” [15]. \square

Teorema 182 *Ortocentrul triunghiului anticomplementar al unui triunghi ABC este punctul lui Longchamps al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Longchamps” [15]. \square

Consecința 183 *Triunghiul antipodar al ortocentrului H al triunghiului ABC este triunghiul anticomplementar.*

Demonstrația rezultă din cele de mai sus. \square

1.10 Triunghiul antisuplementar

„Definițiile și proprietățile drepte, ca și dreptele paralele au ajuns să fie stâncile sau, ca să spunem altfel, scandalul elementelor de geometrie.” - D’Alembert¹¹

Triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ al unui triunghi ABC este triunghiul determinat de bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC (Figura 1.41).

Teorema 184 *Triunghiul $I_aI_bI_c$ având vârfurile în centrele cercurilor exînscrie este triunghiul antisuplementar al triunghiului ABC .*

Demonstrația este evidentă ținând cont că punctele I_a, I_b, I_c aparțin bisectoarelor exterioare ale triunghiului ABC . \square

Teorema 185 *Unghiurile triunghiului antisuplementar au măsurile egale cu $90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A), 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B), 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$.*

¹¹Jean d’Alembert (1717-1783) – matematician și fizician francez, contribuții importante în algebră și analiza matematică

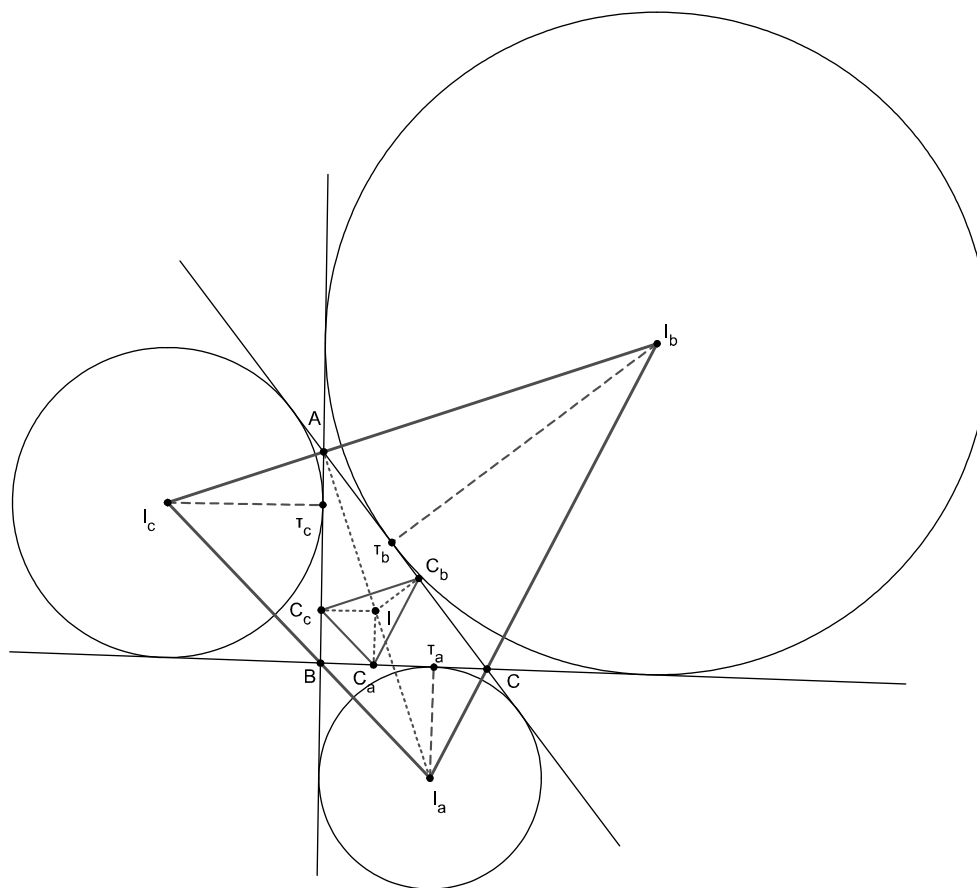


Figura 1.41: Triunghiul antisuplementar

Demonstrație. În triunghiul BCI_a ,

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BI_a C) &= 180^\circ - [m(\sphericalangle I_a BC) + m(\sphericalangle I_a CB)] \\ &= 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B) + 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C) \right] \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A). \end{aligned}$$

Analog, $m(\sphericalangle AI_b C) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B)$ și $m(\sphericalangle AI_c B) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C)$. □

Observația 186 *Triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC este triunghiul anticevian corespunzător centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC .*

Teorema 187 *Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului antisuplementar.*

Demonstrație. Deoarece AI_a, BI_b, CI_c sunt înălțimile triunghiului $I_a I_b I_c$ (vezi „Cercul exînscrie” [15]) rezultă că triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$. □

Observația 188 *Triunghiurile ABC și antisuplementar sunt omologice. Axa ortică a triunghiului antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC este axa ortică a triunghiului ABC .*

Teorema 189 *Cercul circumscris al unui triunghi ABC este cercul lui Euler al triunghiului antisuplementar al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$ rezultă că cercul circumscris triunghiului ABC este cercul lui Euler al triunghiului $I_a I_b I_c$. \square

Teorema 190 *Fie A', B', C' punctele de intersecție dintre bisectoarele unghiurilor $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}$, respectiv \widehat{BCA} cu cercul circumscris triunghiului ABC . Dacă A'', B'', C'' sunt punctele diametral opuse punctelor A', B', C' în cercul circumscris triunghiului ABC , atunci punctele A'', B'', C'' aparțin laturilor triunghiului antisuplementar.*

Demonstrație. Din teorema lui Beltrami (vezi „Cercuri exînscrișe” [15]) rezultă că A' este mijlocul segmentului $[II_a]$. Atunci, $A'A''$ este diametru în cercul lui Euler corespunzător triunghiului antisuplementar, rezultă că al doilea punct de intersecție dintre dreapta $I_b I_c$ și cercul circumscris triunghiului ABC este mijlocul segmentului $I_b I_c$, deci A'' este mijlocul segmentului $I_b I_c$. Analog se arată că B'' și C'' sunt mijloacele segmentelor $I_c I_a$, respectiv $I_a I_b$. \square

Teorema 191 *Dreapta care unește centrele cercurilor înscris și circumscris ale unui triunghi ABC este dreapta lui Euler a triunghiului antisuplementar.*

Demonstrație. Centrul cercului înscris I al triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului antisuplementar, iar centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC este centrul cercului lui Euler al triunghiului antisuplementar, deci dreapta OI este dreapta lui Euler a triunghiului antisuplementar. \square

Observația 192 *Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ au aceeași dreaptă a lui Euler OI .*

Teorema 193 *Dreptele OI_a, OI_b, OI_c sunt dreptele lui Euler ale triunghiurilor $II_b I_c, II_a I_c$, respectiv $II_a I_b$.*

Demonstrația este analoagă celei precedente. \square

Teorema 194 *Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul cevian $I_1 I_2 I_3$ al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice, dreapta lui Euler a triunghiului $I_a I_b I_c$ fiind axa de ortologie.*

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler” [15]. \square

Teorema 195 *Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul de contact $C_a C_b C_c$ al unui triunghi ABC sunt omotetice.*

Demonstrație. Deoarece $C_bC_c \perp AI$ și $I_bI_c \perp AI$ rezultă că $C_bC_c \parallel I_bI_c$ (Figura 1.41). Analog, $C_aC_c \parallel I_aI_c, C_aC_b \parallel I_aI_b$, de unde rezultă că triunghiurile $I_aI_bI_c$ și $C_aC_bC_c$ sunt omotetice. \square

Teorema 196 Centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar este mijlocul segmentului ce unește punctele lui Nagel și Longchamps corespunzătoare triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul extanșial”. \square

Consecința 197 Centrul de greutate al triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$ coincide cu centrul de greutate al triunghiului NIL , unde N și L sunt punctele lui Nagel și Longchamps, iar I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Teorema 198 Laturile triunghiului median $M_aM_bM_c$ al unui triunghi ABC trec prin proiecțiile vârfurilor triunghiului ABC pe laturile triunghiului antisuplementar $I_aI_bI_c$.

Demonstrație. Fie B_1, B_2 proiecțiile lui B pe laturile I_cI_b și I_aI_b ale triunghiului antisuplementar și $\{P\} = BB_1 \cap AC$. Triunghiul APB este isoscel deoarece AB este

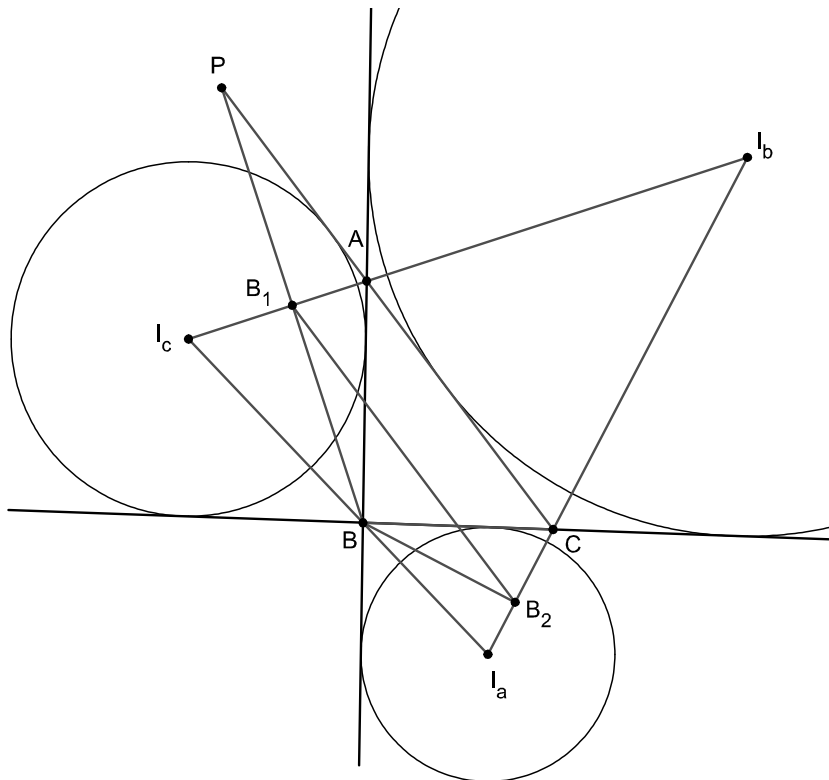


Figura 1.42: $B_2 \in M_aM_c$

bisectoare și înălțime, deci B_1 este mijlocul segmentului PB . În triunghiul APB , M_cB_1 este linie mijlocie, deci $M_cB_1 \parallel AP$ adică $M_cB_1 \parallel AC \parallel M_aM_c$. Astfel, rezultă că $B_1 \in M_aM_c$; analog se arată că $B_2 \in M_aM_c$. \square

Consecința 199 *Laturile triunghiului median al triunghiului ortic trec prin proiecțiile picioarelor înălțimilor pe laturile triunghiului dat.*

Demonstrația este evidentă ținând cont că ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$. \square

Teorema 200 *Centrul cercului circumscris triunghiului antisuplementar al unui triunghi ABC este simetricul cercului înscris în triunghiul ABC față de centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul cotangent” \square

Teorema 201 *Fie $M_a M_b M_c$ triunghiul median și $I_a I_b I_c$ triunghiul antisuplementar al triunghiului ABC . Dreptele $I_a M_a, I_b M_b, I_c M_c$ sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului antisuplementar.*

Demonstrație. Vezi „Cercul exînscrie” [15]. \square

Consecința 202 *Triunghiurile antisuplementar și median ale triunghiului ABC sunt omoloage, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului antisuplementar.*

Teorema 203 *Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul cevian al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice.*

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler” [15]. \square

Teorema 204 *Aria triunghiului antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC este egală cu $2pR$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC și R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Soluția1.

$$\begin{aligned} A_{[I_a I_b I_c]} &= A_{[I_a BC]} + A_{[I_b AC]} + A_{[I_c AB]} + A_{[ABC]} \\ &= \frac{ar_a}{2} + \frac{br_b}{2} + \frac{cr_c}{2} + A_{[ABC]} \\ &= \frac{aA_{[ABC]}}{2(p-a)} + \frac{bA_{[ABC]}}{2(p-b)} + \frac{cA_{[ABC]}}{2(p-c)} + A_{[ABC]} = 2pR. \end{aligned}$$

Soluția2. Triunghiul ABC este triunghiul ortic al triunghiului $I_a I_b I_c$. Dar

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BI_a C) &= 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle BAC), m(\sphericalangle AI_b C) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC), \\ m(\sphericalangle BI_c A) &= 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle BCA) \\ &= 2A_{[I_a I_b I_c]} \cdot \cos I_a \cdot I_b \cdot I_c \\ &= 2A_{[I_a I_b I_c]} \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = A_{[I_a I_b I_c]} \cdot \frac{A_{[ABC]}}{2pR}, \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 205 *Între ariile triunghiurilor antisuplementar, cotangentice și aria triunghiului de referință ABC există relația : $A_{[ABC]}^2 = A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]} \cdot A_{[I_aI_bI_c]}$.*

Demonstrație. Avem:

$$A_{[I_aI_bI_c]} = \frac{A_{[ABC]}}{2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{A_{[ABC]}^2}{2A_{[ABC]} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{A_{[ABC]}^2}{A_{[\tau_a\tau_b\tau_c]}}.$$

□

Teorema 206 *Triunghiul antipodar al centrului cercului înscris în triunghiul ABC este triunghiul antisuplementar corespunzător triunghiului ABC .*

Demonstrația este evidentă deoarece $AI \perp I_bI_c$, $BI \perp I_cI_a$, $CI \perp I_aI_b$. □

Teorema 207 *Axa ortică a triunghiului $I_aI_bI_c$ este dreapta determinată de picioarele bisectoarelor exterioare ale triunghiului ABC .*

Demonstrație. Evident, deoarece triunghiul ortic al triunghiului $I_aI_bI_c$ este triunghiul ABC și I este ortocentrul triunghiului $I_aI_bI_c$. □

Observația 208 *Deoarece axa ortică a unui triunghi este perpendiculară pe dreapta lui Euler a triunghiului rezultă că dreapta care unește picioarele bisectoarelor exterioare ale unui triunghi ABC este perpendiculară pe OI .*

1.11 Triunghiul ciclocevian

„Matematica este alfabetul după care Dumnezeu a scris Universul.” - Galileo Galilei¹²

Teorema 209 *Fie cevienele AA' , BB' , CC' și P punctul lor de concurență. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ intersectează fiecare latură în două puncte (nu neapărat distincte): A', A'' ; B', B'' și C', C'' . Dreptele AA'' , BB'' și CC'' sunt concurente.*

Demonstrație. Din teorema lui Carnot rezultă

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

adică

$$\left(\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} \right) \cdot \left(\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \right) = 1. \quad (1)$$

¹²Galileo Galilei (1564-1642) – matematician, fizician, astronom și filosof italian

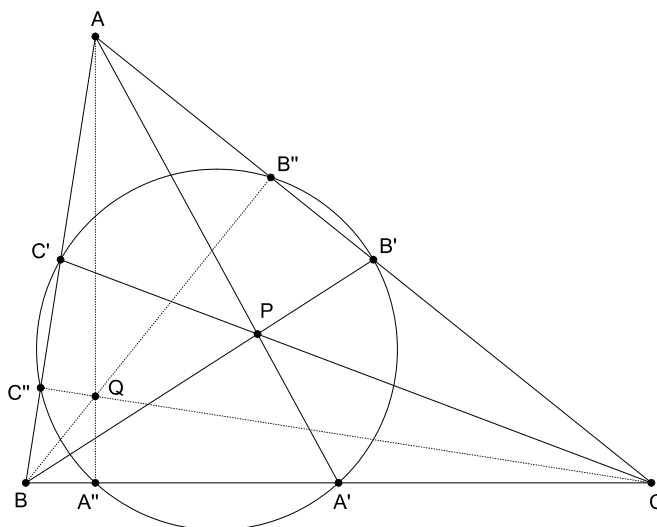


Figura 1.43: Triunghiul ciclocevian

Deoarece AA', BB', CC' sunt concurente (Figura 1.43), din teorema lui Ceva rezultă

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{B''C}{B''A} \cdot \frac{C''A}{C''B} = 1$ și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AA'', BB'' și CC'' sunt concurente. \square

Punctul Q de concurență al dreptelor AA'', BB'' și CC'' se numește *ciclocevianul* punctului P . Triunghiul $A''B''C''$ se numește *triunghiul ciclocevian* al triunghiului ABC , corespunzător punctului P .

Teorema 210 *Ortocentrul H și centrul de greutate G al unui triunghi sunt puncte cicloceviene.*

Demonstrație. Punctele $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c$ aparțin cercului lui Euler al triunghiului ABC (vezi „Cercul lui Euler” [15]). \square

Observația 211 *Triunghiul median este triunghiul ciclocevian al triunghiului ABC corespunzător ortocentrului triunghiului ABC . Triunghiul ortic este triunghiul ciclocevian al triunghiului ABC corespunzător centrului de greutate al triunghiului ABC .*

Teorema 212 *Punctul lui Gergonne Γ al triunghiului ABC este propriul său punct ciclocevian.*

Demonstrație. Evident, deoarece cercul circumscris triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ este tangent laturilor triunghiului ABC . Triunghiul ciclocevian corespunzător punctului lui Gergonne este triunghiul de contact al triunghiului ABC . \square

1.12 Triunghiul I - pedal

„Ați observat că cine este capabil la matematică are cunoștințe perfecte domeniul tuturor științelor legate de studierea naturii?” - Platon¹³

Triunghiul $I_1I_2I_3$ determinat de picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC se numește *triunghiul I - pedal*. Triunghiul $I_1I_2I_3$ este triunghiul cevian al triunghiului ABC corespunzător centrului cercului înscris în triunghiul ABC .

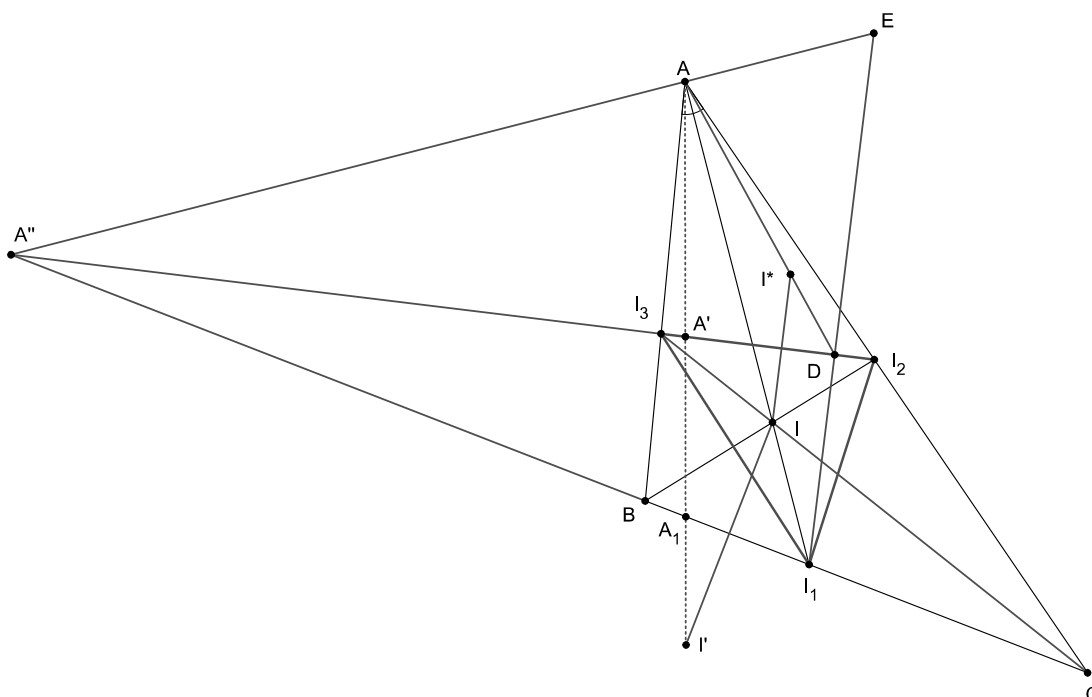


Figura 1.44: Triunghiul I - pedal

Teorema 213 *Laturile triunghiului I - pedal $I_1I_2I_3$ au lungimile:*

$$a' = \frac{abc\sqrt{3 + 2(-\cos A + \cos B + \cos C)}}{(a + b)(a + c)},$$

$$b' = \frac{abc\sqrt{3 + 2(\cos A - \cos B + \cos C)}}{(b + c)(b + a)},$$

$$c' = \frac{abc\sqrt{3 + 2(\cos A + \cos B - \cos C)}}{(c + a)(c + b)},$$

(unde am notat cu a', b', c' lungimile laturilor I_2I_3, I_3I_1 , respectiv I_1I_2 și cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC).

¹³Platon (428-348) – filosof, logician, matematician grec

Demonstrație. Din teorema bisectoarei rezultă $\frac{AI_2}{I_2C} = \frac{c}{a}$, de unde $AI_2 = \frac{bc}{a+c}$ și analog se obține $AI_3 = \frac{bc}{a+b}$ (Figura 1.44). Teorema cosinusului aplicată în triunghiul AI_2I_3 ne dă:

$$I_2I_3^2 = AI_2^2 + AI_3^2 - 2AI_2 \cdot AI_3 \cdot \cos A,$$

sau

$$\begin{aligned} a'^2 &= \frac{b^2c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2} - 2 \cdot \frac{bc}{a+c} \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} [(a+b)^2bc + (a+c)^2bc - b^2 - c^2 + a^2] \\ &= \frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \cdot [3 + 2(-\cos A + \cos B + \cos C)] \end{aligned}$$

și de aici rezultă: $a' = \frac{abc\sqrt{3+2(-\cos A+\cos B+\cos C)}}{(a+b)(a+c)}$. Analog se determină și lungimile celorlalte două laturi. \square

Teorema 214 *Aria triunghiului I - pedal este egală cu:*

$$A_{[I_1I_2I_3]} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot A_{[ABC]}.$$

Demonstrație. Din teorema bisectoarei avem:

$$\frac{BI_1}{I_1C} = \frac{c}{b}, \frac{CI_2}{I_2A} = \frac{a}{c}, \frac{AI_3}{I_3C} = \frac{b}{a}.$$

Atunci,

$$\frac{A_{[AI_2I_3]}}{A_{[ABC]}} = \frac{AI_2 \cdot AI_3}{AB \cdot AC} = \frac{AI_2}{AC} \cdot \frac{AI_3}{AB} = \frac{c}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}, \quad (1)$$

analog $\frac{A_{[BI_1I_3]}}{A_{[ABC]}} = \frac{ac}{(b+a)(b+c)}$ (2) și $\frac{A_{[CI_2I_1]}}{A_{[ABC]}} = \frac{ab}{(c+a)(c+b)}$ (3), iar

$$A_{[I_1I_2I_3]} = A_{[ABC]} - A_{[AI_2I_3]} - A_{[BI_1I_3]} - A_{[CI_2I_1]}. \quad (4)$$

Din relațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă concluzia. \square

Teorema 215 *Triunghiul cevian $I_1I_2I_3$ al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC și triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ și sunt ortologice.*

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler” [15]. \square

Teorema 216 *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC , $I_1I_2I_3$ triunghiul cevian al punctului I , I' simetricul lui I față de latura BC , $\{A_1\} = AI' \cap BC$, $\{A'\} = AI_1 \cap I_2I_3$. Dreptele $A'A_1$ și BC sunt perpendiculare.*

Demonstrație. Deoarece AA' și AI_1 sunt bisectoare în triunghiurile AI_2I_3 și ABC rezultă:

$$AA' = \frac{2bc}{2a+b+c} \cos \frac{A}{2}, AI_1 = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Din teorema bisectoarei rezultă $\frac{AI}{I_1} = \frac{c}{BI_1} = \frac{b+c}{a}$, de unde $AI = \frac{2bc}{a} \cos \frac{A}{2}$ și

$$A'I = AI - AA' = 2bc \cos \frac{A}{2} \cdot \frac{a+b+c}{a(2a+b+c)}.$$

Atunci, $\frac{AA'}{AI_1} = \frac{IA'}{II_1}$, deci punctele A, I, I', I_1 sunt conjugate armonice (Figura 1.44). Atunci A' și I_1 sunt picioarele bisectoarelor interioare, respectiv exterioare ale unghiului A_1 al triunghiului AA_1I , deci $A'A_1 \perp BC$. \square

Teorema 217 Fie $I_1I_2I_3$ triunghiul cevan al centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC , I^* simetricul punctului I față de I_2I_3 , $\{D\} = AI^* \cap I_2I_3$. Dreptele I_1D și I_2I_3 sunt perpendiculare.

Demonstrație. Deoarece punctele A, A', I, I_1 sunt conjugate armonice (cf. teoremei 215), atunci considerând fasciculul $(D; A, I, A', I_1)$ rezultă că DA' este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle IDA$ și DI_1 bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle IDA$, deci $DA' \perp DI_1$. \square

Teorema 218 Fie $I_1I_2I_3$ triunghiul I - cevan al triunghiului oarecare ABC , D piciorul înălțimii din I_1 pe I_2I_3 , I' simetricul lui I față de BC și $\{A_1\} = AI' \cap BC$. Punctele A_1, I și D sunt coliniare.

Demonstrație. Fie $\{A'\} = AI_1 \cap I_2I_3$, $\{A''\} = I_2I_3 \cap BC$ și $\{E\} = AA'' \cap AA'$ (Figura 1.44). Deoarece AA'' este bisectoarea unghiului BAC (vezi „Dreapta antiortotică” [15]) rezultă că $AA'' \perp AI_1$. Din $EA_1 \perp BC$, $I_1D \perp I_2I_3$ rezultă că A' este ortocentrul triunghiului $I_1A''E$, deci $A''D \perp I_1E$. Deoarece $I_1D \perp A''D$ rezultă că punctele E, D și I_1 sunt coliniare. Fie $\{Y\} = DA_1 \cap A'I_1$. Deoarece $A'I_2$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle ADA_1$, I_1D bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle ADA_1$ rezultă că punctele A, J, A', I_1 sunt conjugate armonice, deci

$$\frac{AA'}{AI_1} = \frac{JA'}{JI_1}.$$

Dar $\frac{AA'}{AI_1} = \frac{IA'}{IA_1}$ de unde $\frac{JA'}{JI_1} = \frac{IA'}{IA_1}$ și cum $I, J \in (AI_1)$ rezultă $I \equiv J$. Deci, punctele A_1, I și D sunt coliniare. \square

Observația 219 Fie $\{A_2\} = AD \cap BC$. Analog se demonstrează că punctele A_2, I, A' sunt coliniare.

Teorema 220 Fie $I_1I_2I_3$ triunghiul I cevan al triunghiului ABC , D piciorul înălțimii din I_1 pe latura I_2I_3 și I' simetricul lui I față de BC . Dreptele AI' și AD sunt izogonale.

Demonstrație. Punctele A_1, I, D sunt coliniare (conform proprietății precedente) și A_2, I, A' sunt coliniare. Din teorema lui Pappus aplicată patrulaterului $A_1A'DA_2$ rezultă că punctele A'', I_1, A_1 și A_2 sunt conjugate armonice și deoarece $AA'' \perp AI_1$ rezultă că AI_1 este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A'AD$, deci dreptele AA' și AD sunt izogonale. \square

1.13 Triunghiuri altimediale

„Poetul nu este al sieși !
 Viața lui este un cântec
 un plâns pe buzele fiecăruia
 dăruindu-se el se multiplică la infinit
 și intră în toate chipurile, în toate sufletele!
 Nu-l învățați pe Poet pe dinafară
 El se află înlăuntru vostru,
 ascultați – !” - Radu Cârneli¹⁴

Fie M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC și H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor sale. Triunghiurile $H_aM_bM_c, H_bM_cM_a$ și $H_cM_aM_b$ se numesc *triunghiuri altimediale* (Figura 1.45).

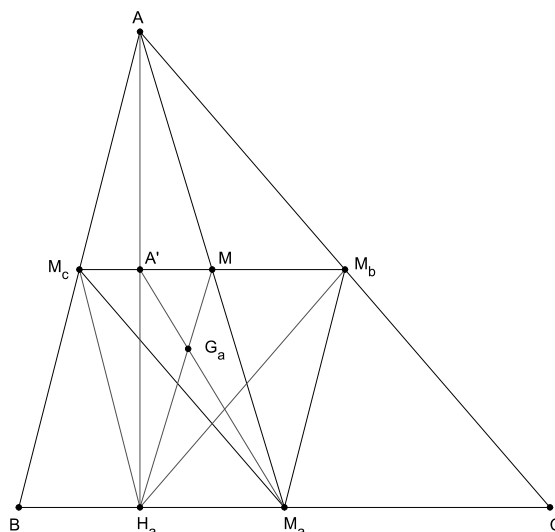


Figura 1.45: Triunghiuri altimediale

Teorema 221 *Triunghiurile altimediale $H_aM_bM_c, H_bM_cM_a$ și $H_cM_aM_b$ sunt congruente cu triunghiul median $M_aM_bM_c$.*

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic AH_aB , H_aM_c este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci

$$M_cH_a = \frac{AB}{2} = M_aM_b.$$

Analog, $H_aM_b = \frac{AC}{2} = M_cM_a$, de unde rezultă că $\triangle H_aM_bM_c \equiv \triangle M_aM_bM_c$. Analog se arată că și triunghiurile altimediale $H_cM_aM_b$ și $H_bM_cM_a$ sunt congruente cu triunghiul median $M_aM_bM_c$. \square

¹⁴Radu Cârneli- (1928 - 2018) – poet român

Teorema 222 Dacă G_a, G_b, G_c sunt centrele de greutate ale triunghiurilor altimediale $H_aM_bM_c, H_bM_cM_a,$ respectiv $H_cM_aM_b,$ atunci dreptele M_aG_a, M_bG_b, M_cG_c sunt concurente în punctul lui Lemoine (K) al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie M mijlocul segmentului M_bM_c și $\{A'\} = M_aG_a \cap AH_a$. Din teorema lui Menelaus aplicată pentru transversala (M_a, B_a, A') în triunghiul AH_aM obținem:

$$\frac{A'A}{A'H_a} \cdot \frac{MM_a}{M_aA} \cdot \frac{G_aH_a}{G_aM} = 1,$$

de unde $\frac{A'A}{A'H_a} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$, adică $A'A \equiv A'H_a$, deci A' este mijlocul înălțimii $A'H_a$, rezultă că $A'H_a$ este o dreaptă Schwatt (Figura 1.45). Analog, se arată că M_bG_b și M_cG_c , sunt drepte Schwatt și conform teoremei lui Schömilch, dreptele M_aG_a, M_bG_b, M_cG_c sunt concurente în punctul lui Lemoine (K) al triunghiului ABC . \square

Teorema 223 Centrele cercurilor înscrise în triunghiurilor altimediale ale triunghiului ABC determină un triunghi omologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie I_1, I_2, I_3 centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $H_aM_bM_c, H_bM_cM_a, H_cM_aM_b,$ $\{A'\} = AI_1 \cap BC, \{B'\} = BI_2 \cap AC, \{C'\} = CI_3 \cap AB,$ $m(\sphericalangle M_cI_1A'') = \alpha, m(\sphericalangle M_bI_1A'') = \beta$ (Figura 1.46). Deoarece $M_cM_b \parallel BC$ rezultă

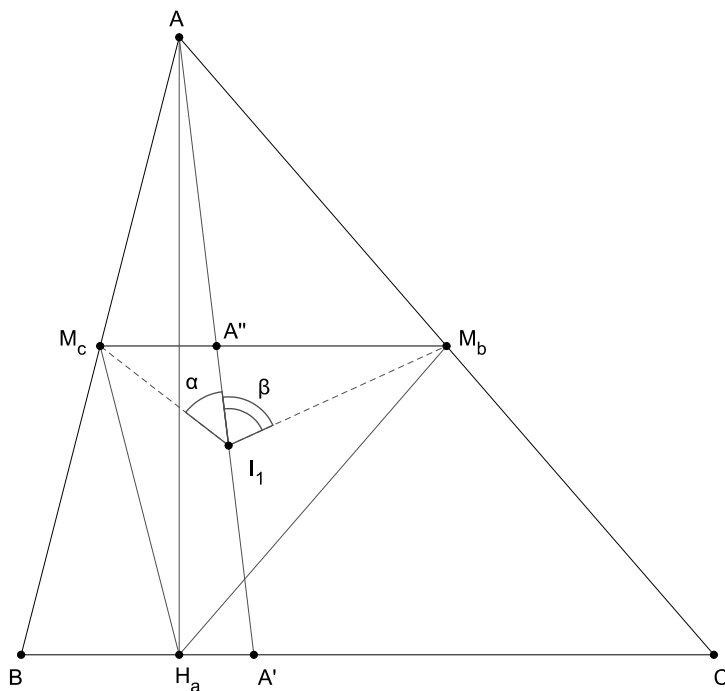


Figura 1.46: Triunghiurile ABC și $I_1I_2I_3$ sunt omologice

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{M_cA''}{M_bA''}. \tag{1}$$

Din teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile $M_cA''I_1$ și $M_bA''I_1$ rezultă:

$$\frac{M_cA''}{\sin \alpha} = \frac{A''I_1}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \frac{M_bA''}{\sin \beta} = \frac{A''I_1}{\sin \frac{C}{2}},$$

de unde

$$\frac{M_cA''}{M_bA''} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}}. \quad (2)$$

Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile AM_cI_1 și AM_bI_1 ne dă:

$$\frac{\sin \alpha}{AM_c} = \frac{\sin \frac{3B}{2}}{AI_1}, \quad \frac{\sin \beta}{AM_b} = \frac{\sin \frac{3C}{2}}{AI_1},$$

de unde

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{3B}{2}}{\sin \frac{3C}{2}} \cdot \frac{c}{b}. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă $\frac{BA'}{A'C} = \frac{\sin \frac{3B}{2}}{\sin \frac{3C}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{c}{b}$. Analog, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{\sin \frac{3C}{2}}{\sin \frac{3A}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \cdot \frac{a}{c}$ și $\frac{AC'}{C'B} = \frac{\sin \frac{3A}{2}}{\sin \frac{3B}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{b}{a}$, de unde

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AI_1, BI_2, CI_3 sunt concurente, deci triunghiurile ABC și $I_1I_2I_3$ sunt omologice.

1.14 Triunghiurile lui Brocard

„Operele matematice robesc și încântă tocmai ca operele pasiunii și imaginației.” - Ion Barbu

Fie K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC . Paralele duse prin K la laturile BC, CA, AB intersectează mediatoarele acestor laturi în punctele A_1, B_1 , respectiv C_1 . Triunghiul $A_1B_1C_1$ se numește **primul triunghi al lui Brocard**¹⁵. Fie A_2, B_2, C_2 proiecțiile punctului O - centrul cercului circumscris triunghiului ABC - pe simedianele duse din vârfurile A, B, C . Triunghiul $A_2B_2C_2$ se numește **al doilea triunghi al lui Brocard**. Cercul având diametru segmentul OK se numește **cercul lui Brocard** (Figura 1.47).

Observația 224 Două triunghiuri care au același unghi Brocard se numesc echibrocardiene. Bisectoarele interioare și exterioare ale unghiurilor AGA_1, BGB_1, CGC_1 se numesc axele lui Steiner (G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC).

¹⁵Henri Brocard (1845-1922) - matematician francez, contribuții importante în geometrie

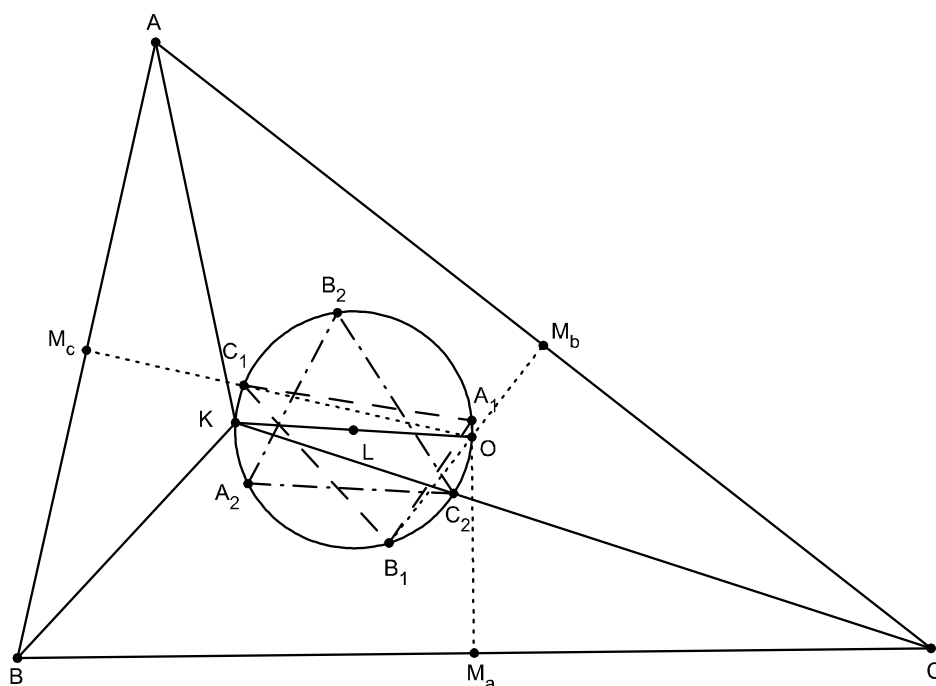


Figura 1.47: Cercul lui Brocard

Teorema 225 *Cercul lui Brocard este circumscris triunghiurilor lui Brocard.*

Demonstrație. Deoarece $m(\sphericalangle KA_1O) = m(\sphericalangle KB_1O) = m(\sphericalangle KC_1O) = 90^\circ$, rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 aparțin cercului lui Brocard. Analog pentru punctele A_2, B_2, C_2 . \square

Teorema 226 *Triunghiurile AB_1C, BC_1A, CA_1B sunt isoscele și asemenea.*

Demonstrație. Deoarece punctele A_1, B_1, C_1 aparțin mediatoarelor laturilor triunghiului ABC , rezultă că triunghiurile AB_1C, BC_1A, CA_1B sunt isoscele. Deoarece A_1M_a, B_1M_b, C_1M_c sunt egale cu distanțele de la K la laturile BC, CA, AB , rezultă

$$\frac{A_1M_a}{a} = \frac{B_1M_b}{b} = \frac{C_1M_c}{c}$$

(unde M_a, M_b, M_c sunt mijloacele laturilor BC, CA, AB), adică $\frac{A_1M_a}{BM_a} = \frac{B_1M_b}{CM_b} = \frac{C_1M_c}{AM_c}$ și cum

$$m(\sphericalangle BM_aA_1) = m(\sphericalangle CM_bB_1) = m(\sphericalangle AM_cC_1) = 90^\circ,$$

rezultă că triunghiurile BM_aA_1, CM_bB_1 și AM_cC_1 sunt asemenea. Atunci, triunghiurile BA_1C, CB_1A și AC_1B sunt asemenea. \square

Teorema 227 *Dreptele A_1B, B_1C și C_1A sunt concurente într-un punct Brocard.*

Demonstrație. În triunghiul BA_1M_a avem:

$$tg(\sphericalangle A_1BM_a) = \frac{A_1M_a}{BM_a} = \frac{KK_1}{BC/2} = tg\omega,$$

(unde K_1 este proiecția lui K pe BC), deci $\sphericalangle A_1BM_a$ este egal cu unghiul lui Brocard ω , de unde rezultă că A_1B, B_1C, C_1A sunt ceviane ce determină unul dintre punctele lui Brocard. \square

Teorema 228 Dreptele AB_1, BC_1, CA_1 sunt concurente într-un punct Brocard.

Demonstrație. În triunghiul AB_1M_b avem:

$$tg(\sphericalangle B_1AM_b) = \frac{B_1M_b}{AM_b} = \frac{KK_2}{AC/2} = tg\omega$$

(unde K_2 este proiecția lui K pe AC), deci $\sphericalangle B_1AM_b$ este egal cu unghiul lui Brocard, adică A_1B, B_1C, C_1A sunt ceviane ce determină unul din punctele lui Brocard. \square

Observația 229 Dacă $\{\Omega\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$, atunci $\{\Omega'\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$; dacă $\{\Omega\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$, atunci $\{\Omega'\} = A_1B \cap B_1C \cap C_1A$.

Teorema 230 Dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Demonstrație. Fie $\{B'\} = KA_1 \cap AC$, $\{C'\} = KA_1 \cap AB$, L mijlocul segmentului OK . Deoarece punctele B' și C' sunt puncte pe al doilea cerc al lui Lemoine (cu centrul în punctul L) rezultă că proiecția lui L pe coarda $B'C'$ este punctul A'' - mijlocul acestui segment (i). În triunghiul dreptunghic KOA_1 , ($m(\sphericalangle KA_1O) = 90^\circ$), LA'' este linie mijlocie, deci A'' este și mijlocul segmentului KA_1 (ii). Din relațiile (i) și (ii) obținem că $C'K = A_1B'$, deci dreapta AA_1 este dreapta izotomică simedianei AK . Analog se arată că BB_1 și CC_1 sunt izotomicile simedianelor concurente în punctul izotomic punctului lui Lemoine Ω'' . \square

Observația 231

i) Punctul de concurență al dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 se numește *al treilea punct al lui Brocard* corespunzător triunghiului ABC .

ii) Din cele prezentate mai sus se poate spune că primul triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$ este triomologic cu triunghiul ABC , centrele de omologie fiind punctele lui Brocard Ω, Ω' și izotomicul punctului lui Lemoine (al treilea punct al lui Brocard Ω'').

iii) $\Omega\Omega'$ se numește *dreapta lui Brocard*.

Consecința 232 Vârfurile primului triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$ se găsesc pe dreptele izotomice ale simedianelor triunghiului ABC .

Teorema 233 Primul triunghi Brocard $A_1B_1C_1$ al triunghiului ABC este asemenea cu triunghiul ABC .

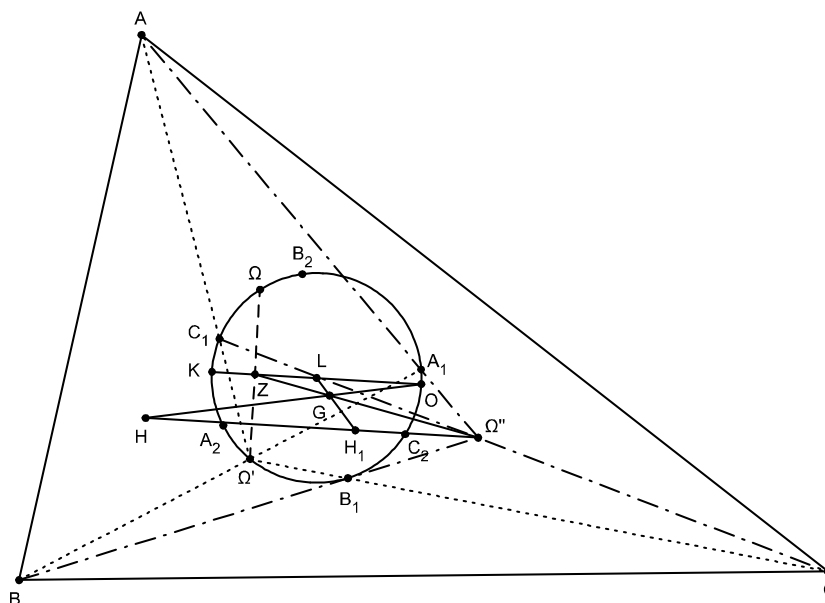


Figura 1.48: Punctele lui Brocard

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle A\Omega B) = 180^\circ - m(\sphericalangle B)$ (vezi „Punctele lui Brocard”), deci $m(\sphericalangle C_1\Omega A_1) = m(\sphericalangle C_1B_1A_1) = m(\sphericalangle B)$ (i); $m(\sphericalangle B\Omega C) = 180^\circ - m(\sphericalangle C)$, de unde:

$$m(\sphericalangle B_1\Omega A_1) = m(\sphericalangle B_1C_1A_1) = m(\sphericalangle C). \quad (\text{ii})$$

Din relațiile (i) și (ii) rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea. \square

Teorema 234 *Primul triunghi al lui Brocard al unui triunghi ABC , triunghiul $\Omega\Omega'\Omega''$ și triunghiul ABC au același centru de greutate.*

Demonstrație. Vezi [15, § III.21]. \square

Teorema 235 *Cercul lui Brocard trece prin punctele Brocard Ω și Ω' ale triunghiului ABC .*

Demonstrație. Din proprietatea 226 rezultă că triunghiul A_1M_aC și B_1M_bA sunt asemenea, astfel

$$\sphericalangle M_aA_1C \equiv \sphericalangle M_bB_1A \equiv \sphericalangle OB_1\Omega',$$

deci patrulaterul $A_1OB_1\Omega'$ este inscriptibil. Atunci, Ω' aparține cercului lui Brocard. Analog, se arată că Ω aparține cercului lui Brocard. \square

Teorema 236 *Punctele lui Brocard Ω și Ω' ale triunghiului ABC sunt simetrice față de diametrul OK .*

Demonstrație. Avem

$$m(\sphericalangle\Omega OK) = m(\sphericalangle\Omega B_1 K) = \frac{1}{2}m(\widehat{KA_2\Omega})$$

și deoarece $KB_1 \parallel AC$ rezultă $m(\sphericalangle\Omega B_1 K) = m(\sphericalangle\Omega CA) = \omega$, deci $m(\sphericalangle\Omega OK) = \omega$ (Figura 1.48). Analog, $m(\sphericalangle\Omega' OK) = m(\sphericalangle\Omega' A_1 K) = m(\sphericalangle\Omega' CB) = \omega$, deci $\sphericalangle\Omega OK \equiv \sphericalangle\Omega' OK$, adică punctele Ω și Ω' sunt simetrice față de dreapta OK . \square

Teorema 237 Raza cercului lui Brocard este egală cu

$$R_\omega = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega}.$$

Demonstrație. În triunghiul dreptunghic $K\Omega O$ avem:

$$KO = \frac{\Omega O}{\cos\omega} = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{\cos\omega} = 2R_\omega,$$

de unde raza cercului Brocard este egală cu $R_\omega = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\omega}}{2\cos\omega}$. \square

Teorema 238 Raza cercului lui Brocard este egală cu

$$R_\omega = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}.$$

Demonstrație. Deoarece $OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ (vezi „Punctul lui Lemoine” [15]), rezultă $R_\omega = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}}$. \square

Teorema 239 Fie H ortocentrul triunghiului ABC și Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC . Atunci, $H\Omega'' \parallel OK$.

Demonstrație. Fie $\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$ (Figura 1.48). Deoarece G este centrul de greutate al triunghiurilor ABC și $\Omega\Omega'\Omega''$ rezultă $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$ și $\frac{GZ}{G\Omega''} = \frac{1}{2}$, de unde obținem $H\Omega'' \parallel OK$. \square

Teorema 240 Fie H ortocentrul triunghiului ABC și Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC . Atunci,

$$H\Omega'' = 2R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}.$$

Demonstrație. Fie $\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$. Din triunghiul $O\Omega Z$ rezultă $OZ = O\Omega\cos\omega = R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}$, deci $H\Omega'' = 2OZ = 2R\cos\omega\sqrt{1-4\sin^2\omega}$. \square

Teorema 241 Ortocentrul primului triunghi Brocard aparține dreptei $H\Omega''$.

Demonstrație. Fie L centrul cercului lui Brocard și $\{H_1\} = LG \cap H\Omega''$. Deoarece L este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ și G centrul său de greutate rezultă că dreapta LG este dreapta lui Euler a primului triunghi Brocard. Cum

$$\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2} = \frac{LG}{GH_1},$$

rezultă că H_1 este ortocentrul primului triunghi al lui Brocard $A_1B_1C_1$. □

Consecința 242 *Patrulaterul KOH_1H este paralelogram.*

Demonstrație. Deoarece $HH_1 \parallel OK$ și $HH_1 = 2LO = OK$ rezultă că KOH_1H este paralelogram. □

Consecința 243 *Centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC aparține dreptei KH_1 .*

Demonstrație. Deoarece într-un paralelogram diagonalele se înjumătățesc rezultă concluzia. □

Teorema 244 *Punctul lui Tarry, centrul de greutate și centrul cercului lui Brocard corespunzător unui triunghi ABC sunt coliniare.*

Demonstrație. Din asemănarea poligoanelor $TACSB$ și $OA_1C_1KB_1$ (vezi „Punctul lui Tarry”), punctele G, O, T se corespund cu punctele G, L , respectiv O și de aici rezultă $\widehat{OGT} \equiv \widehat{LGO}$, deci punctele T, L, G sunt coliniare. □

Teorema 245 *Fie L centrul cercului lui Brocard, G centrul de greutate, T punctul lui Tarry și O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC . Atunci,*

$$OG^2 = GL \cdot GT.$$

Demonstrație. Deoarece punctele G, O, T respectiv G, L, O formează figuri omoloage, rezultă $\frac{GO}{GL} = \frac{GT}{GO}$, de unde $OG^2 = GL \cdot GT$. □

Teorema 246 *Fie L centrul cercului lui Brocard, G centrul de greutate, T punctul lui Tarry și O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC . Atunci,*

$$GT = \frac{R \cos \omega}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}} \cdot GO.$$

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor GLO și GOT rezultă

$$\frac{GO}{GT} = \frac{GL}{GO} = \frac{LO}{OT} = \frac{R_\omega}{R},$$

deci $GT = \frac{R}{R_\omega} \cdot GO = \frac{R \cos \omega}{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}} \cdot GO$. □

Teorema 247 *Al treilea punct Brocard Ω'' aparține dreptei ce unește punctele lui Steiner și Tarry corespunzătoare unui triunghi ABC .*

Demonstrație. Fie H_1 ortocentrul primului triunghi al lui Brocard și $\{Z\} = \Omega\Omega' \cap OK$ (Figura 1.48). Atunci,

$$\frac{H_1\Omega''}{ZL} = \frac{H_1G}{GL} = 2,$$

iar

$$\begin{aligned} ZL &= OZ - OL \\ &= R \cos \omega \sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega} - \frac{R\sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}}{2 \cos \omega} \\ &= \frac{R\sqrt{1 - 4 \sin^2 \omega}}{2 \cos \omega} \cdot \cos 2\omega \end{aligned}$$

și de aici $H_1\Omega'' = 2LZ$. Avem:

$$\frac{H_1T}{LT} = \frac{TG + 2GL}{GT - LG},$$

din $\frac{GT}{GL} = \frac{R^2}{R_\omega^2}$, rezultă

$$\frac{TG + 2GL}{GL} = \frac{R^2 + 2R_\omega^2}{R_\omega^2}$$

și

$$\frac{TG - GL}{GL} = \frac{R^2 - R_\omega^2}{R_\omega^2},$$

de unde

$$\frac{H_1T}{LT} = \frac{R^2 + 2R_\omega^2}{R^2 - R_\omega^2} = 2 \cos 2\omega.$$

Dar $\frac{H_1\Omega''}{LO} = 2 \cos 2\omega$, deci $\frac{H_1\Omega''}{LO} = \frac{H_1T}{LT}$ și cum $H_1\Omega'' \parallel LO$ rezultă că Ω'' aparține dreptei TO . \square

Teorema 248 Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și Ω'' al treilea punct al lui Brocard al triunghiului ABC . Atunci, $O\Omega'' = R(2 \cos 2\omega - 1)$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor $\Omega''H_1T$ și OLT rezultă $\frac{T\Omega''}{TO} = \frac{H_1T}{LT} = 2 \cos 2\omega$ și de aici $\frac{T\Omega'' - TO}{TO} = 2 \cos 2\omega - 1$ sau $O\Omega'' = R(2 \cos 2\omega - 1)$. \square

Teorema 249 Dreapta $O\Omega$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Din $O\Omega'' \cdot OS = R^2(2 \cos 2\omega - 1) = O\Omega^2$, rezultă concluzia. \square

Teorema 250 Dreapta $O\Omega'$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $S\Omega'\Omega''$, unde S este punctul lui Steiner corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Din $O\Omega'' \cdot OS = R^2(2 \cos 2\omega - 1) = O\Omega'^2$ rezultă concluzia. \square

Teorema 251 *Punctele A_2, B_2, C_2 aparțin cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, AOB .*

Demonstrație. Deoarece două simediane exterioare și o simediana interioară ale unui triunghi sunt concurente (vezi „Simediana exterioară” [15]), atunci simediana AK și tangentele în B , respectiv C la cercul circumscris triunghiului ABC sunt concurente în punctul T_A (Figura 1.49). Deoarece $m(\sphericalangle OCT_A) = 90^\circ$ rezultă că OT_A este diametru

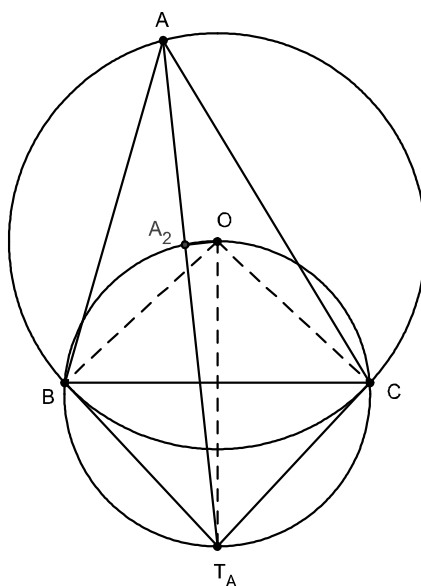


Figura 1.49: Cerc adjunct

în cercul circumscris triunghiului BOC . Deoarece $OA_2 \perp AT_A$ rezultă $m(\sphericalangle OA_2T_A) = 90^\circ$, adică A_2 este punct pe cercul circumscris triunghiului BOC . Analog se arată că B_2 și C_2 sunt pe cercurile circumscrise triunghiurilor COA , respectiv AOB . \square

Observația 252 *Un cerc care trece prin două vârfuri ale unui triunghi și este tangent la una din laturile triunghiului se numește cerc adjunct.*

Teorema 253 *Punctul A_2 se află la intersecția cercurilor adjuncte vârfului A .*

Demonstrație. Deoarece $\sphericalangle BA_2T_A \equiv \sphericalangle BCT_A \equiv \sphericalangle BAC$ rezultă că cercul circumscris triunghiului BA_2A este tangent în A laturii AC . Analog, cercul circumscris triunghiului CA_2A este tangent în A laturii AB . \square

Observația 254 *Punctele B_2 și C_2 se află la intersecția cercurilor adjuncte vârfulor B , respectiv C . Vârfulurile celui de-al doilea triunghi Brocard al triunghiului ABC sunt intersecțiile dintre cercurile adjuncte corespunzătoare vârfulor A, B, C .*

Triunghiul antiparalel determinat de o direcție în raport cu un triunghi⁹⁰

Teorema 255 *Coordonatele unghiulare ale vârfurilor celui de al doilea triunghi Brocard $A_2B_2C_2$ sunt:*

$$\begin{aligned} & (180^\circ - m(\sphericalangle A), 2m(\sphericalangle A), 180^\circ - m(\sphericalangle A)), \\ & ((180^\circ - m(\sphericalangle B), 180^\circ - m(\sphericalangle B), 2m(\sphericalangle B)), \\ & (2m(\sphericalangle C), 180^\circ - m(\sphericalangle C), 180^\circ - m(\sphericalangle C)). \end{aligned}$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BA_2A) &= 180^\circ - m(\sphericalangle BA_2T_A) = 180^\circ - m(\sphericalangle A), m(\sphericalangle CA_2A) \\ &= 180^\circ - m(\sphericalangle T_AA_2C) = 180^\circ - m(\sphericalangle A), \end{aligned}$$

iar $m(\sphericalangle BA_2C) = 360^\circ - [m(\sphericalangle BA_2A) + m(\sphericalangle CA_2A)] = 2m(\sphericalangle A)$. Analog se determină coordonatele unghiulare ale vârfurilor B_2 și C_2 . \square

Teorema 256 *Cercul Brocard și primul cerc Lemoine sunt concentrice.*

Demonstrație. Deoarece ambele cercuri au centrul în punctul L , mijlocul segmentului OK , rezultă concluzia. \square

1.15 Triunghiul antiparalel determinat de o direcție în raport cu un triunghi

„Mă stimez mai mult ca practicant al matematicilor și prea puțin ca poet, și numai atât cât poezia amintește de geometrie. Oricât ar părea de contradictorii acești doi termeni la prima vedere, există undeva, în domeniul înalt al geometriei, un loc luminos unde se întâlnește cu poezia.” – Ion Barbu¹⁶

În triunghiul ABC , fie A', B', C' proiecțiile punctelor A, B , respectiv C pe o dreaptă oarecare d , $\{D\} = BC \cap d$, $\{E\} = AC \cap d$, $\{F\} = BA \cap d$, iar M și M' , N și N' , P și P' proiecțiile punctelor A', B', C' pe laturile AC și AB , BA și BC , respectiv CB și CA (Figura 1.50).

Teorema 257 *Perpendicularele $B'N$ și $C'P'$, $C'P$ și $A'M'$, $A'M$ și $B'N'$ sunt respectiv concurente în punctele coliniare A_1, B_1, C_1 .*

Demonstrație. Fie ω ortopolul dreptei d față de triunghiul ABC . Atunci $\omega A' \parallel B'N' \parallel C'P$, $\omega B' \parallel C'P' \parallel A'M$, $\omega C' \parallel A'M' \parallel B'N$. Deoarece patrulaterul $\omega A'B_1C'$ este paralelogram (având laturile opuse paralele două câte două), atunci punctul B_1 este simetricul ortopolului ω față de mijlocul segmentului $A'C'$. Procedând analog pentru punctele A_1 și C_1 rezultă că punctele A_1, B_1, C_1 aparțin unei drepte d_1 paralele cu dreapta d . \square

¹⁶Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din București, contribuții în algebră și geometrie

Triunghiul antiparalel determinat de o direcție în raport cu un triunghi

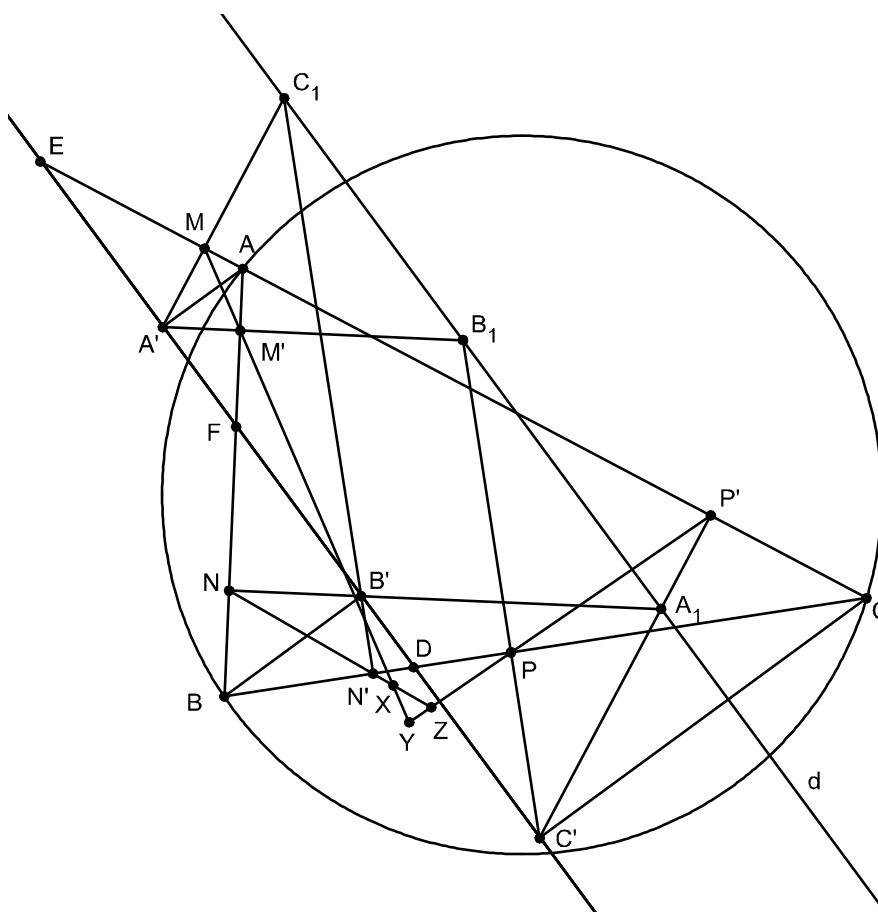


Figura 1.50: Triunghiul antiparalel determinat de o direcție în raport cu un triunghi

Consecința 258 Dreapta d se situează la o egală distanță de ortopolul său ω în raport cu triunghiul ABC și cu dreapta d_1 .

Demonstrație. Perpendicularele duse din A, B și C pe antiparalelele MM', NN' , respectiv PP' sunt izogonale perpendicularelor AA', BB' și CC' pe d , față de unghiurile triunghiului ABC (patrulateralele $AM'A'M, BN'B'N, CP'PC'$ fiind inscriptibile). Cum $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ rezultă că perpendicularele pe antiparalelele considerate sunt concurente. Deoarece antiparalelele determină triunghiul XYZ , rezultă că triunghiurile ABC și XYZ sunt invers asemenea (după orientarea vârfurilor cu unghiuri egale ale celor două triunghiuri) și în același timp ortologice. \square

Teorema 259 Cercurile de diametre AA_1, BB_1 și CC_1 trec prin câte un vârf al triunghiului antiparalel XYZ , iar linia centrelor este o dreaptă d' , perpendiculară pe d .

Demonstrație. Cercul de diametru BB_1 conține punctele M' și P . Dacă $\{Y\} = MM' \cap PP'$ și cum $\sphericalangle PYZ \equiv \sphericalangle ABC$ rezultă că patrulaterul $BPYM'$ este inscriptibil,

adică Y aparține cercului de diametru BB_1 . Analog, cercurile de diametre AA_1 și CC_1 trec respectiv prin punctele X și Z . Evident, proiecțiile A'', B'', C'' ale punctelor A, B , respectiv C pe dreapta d_1 aparțin – câte unul – cercurilor considerate. Deoarece $d \parallel d_1, A'C_1 \parallel C'A_1, A'A'' \parallel C'C''$ rezultă $C_1A'' \equiv A_1C''$, adică segmentele A_1A'' și C_1C'' au același mijloc. Analog, se arată că mijlocul segmentului B_1B'' coincide cu mijlocul segmentului A_1A'' . Rezultă că linia centrelor este o dreaptă d perpendiculară pe d_1 , trecând prin mijlocul segmentelor A_1A'', B_1B'' și C_1C'' . \square

1.16 Triunghi automedian

„Există printre matematicieni o convingere intimă și puternică, care-i susține în cercetările lor abstracte, anume că niciuna dintre problemele lor nu pot rămâne fără răspuns.” – Gh. Țițeica¹⁷

Se notează cu a, b, c lungimile laturilor BC, AC , respectiv AB ale triunghiului ABC și cu m_a, m_b, m_c lungimile medianelor corespunzătoare acestora. Triunghiul ABC ($AB \neq AC$) se numește automedian dacă

$$2a^2 = b^2 + c^2,$$

sau $2b^2 = c^2 + a^2$, sau $2c^2 = a^2 + b^2$. În cele ce urmează vom considera cazul în care $2a^2 = b^2 + c^2$.

Teorema 260 *Să se arate că un triunghi ABC este automedian dacă și numai dacă $bm_b = cm_c$.*

Demonstrație. Relația $2a^2 = b^2 + c^2$ este echivalentă cu $(2a^2 - b^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0$ (deoarece $b \neq c$) sau

$$b^2(2a^2 + 2c^2 - b^2) = c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

sau $bm_b = cm_c$. \square

Observația 261 *Un triunghi este automedian dacă și numai dacă*

$$\frac{m_b}{1/b} = \frac{m_c}{1/c}.$$

Ținând cont de proprietatea anterioară putem da următoarea definiție: „Un triunghi în care medianele și laturile corespunzătoare sunt invers proporționale se numește *automedian*.”

¹⁷Gheorghe Țițeica (1873-1939) – matematician român, profesor la Universitatea din București, membru al Academiei Române, contribuții importante în geometrie

Teorema 262 *Triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă $2m_a = a\sqrt{3}$.*

Demonstrație. Din $2a^2 = b^2 + c^2$ rezultă $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 3a^2$, egalitate echivalentă cu $2m_a = a\sqrt{3}$. \square

Teorema 263 *Dacă triunghiul ABC este automedian, atunci $2m_b = c\sqrt{3}$ și $2m_c = b\sqrt{3}$.*

Demonstrație. Din formula medianei avem: $4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 = 3c^2$, de unde rezultă $2m_b = c\sqrt{3}$; analog se arată că $2m_c = b\sqrt{3}$. \square

Observația 264 *Din proprietățile precedente rezultă că într-un triunghi automedian este adevărată relația:*

$$\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_c} = \frac{c}{m_b}.$$

Teorema 265 *Într-un triunghi automedian avem: $2m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.*

Demonstrație. Deoarece într-un triunghi automedian sunt adevărate egalitățile $2m_b = c\sqrt{3}$, $2m_c = b\sqrt{3}$ și $2m_a = a\sqrt{3}$, atunci condiția $2a^2 = b^2 + c^2$ devine $2m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. \square

Teorema 266 *Un triunghi automedian având lungimile laturilor numere întregi nu poate avea mediane de lungimi numere întregi.*

Demonstrație. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_c} = \frac{c}{m_b} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, de unde rezultă că medianele au valori iraționale. \square

Teorema 267 *Un triunghi automedian având lungimile laturilor numere întregi nu poate avea aria egală cu un număr întreg.*

Demonstrație. Din formula lui Heron rezultă:

$$16S^2 = 2(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4.$$

Utilizând faptul că $2a^2 = b^2 + c^2$, relația de mai sus devine: $16S^2 = 4a^2b^2 - 2a^4 - b^4$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $(a, b) = 1$. Atunci, din relația precedentă rezultă $2 \mid b$, deci $b = 2b_1, b_1 \in \mathbb{Z}$. Astfel, obținem $8S^2 = 8a^2b_1^2 - a^4 - 8b_1^4$, de unde rezultă $2 \mid a$, contradicție cu $(a, b) = 1$. \square

Teorema 268 *Triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă $2ctgA = ctgB + ctgC$.*

Demonstrație. Avem:

$$ctgA = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) \cdot R}{abc}$$

și analogele. Atunci, relația $2ctgA = ctgB + ctgC$ este echivalentă cu

$$2(b^2 + c^2 - a^2) = (a^2 + c^2 - b^2) + (b^2 + c^2 - a^2)$$

sau $2a^2 = b^2 + c^2$. \square

Teorema 269 Într-un triunghi automedian ABC este adevărată relația:

$$tg\omega = \frac{1}{3}tgA,$$

unde ω este unghiul lui Brocard al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece triunghiul ABC este automedian rezultă $2ctgA = ctgB + ctgC$ și cum $ctg\omega = ctgA + ctgB + ctgC$ (vezi „Punctele lui Brocard” [15]) avem: $ctg\omega = 3ctgA$ sau $tg\omega = \frac{1}{3}tgA$. \square

Observația 270 Dacă $2a^2 = b^2 + c^2$, atunci

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{abc}{4R} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{abc}{R \cdot 2a^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{abc}{R \cdot (b^2 + c^2 - a^2)} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \sin A \cdot \frac{1}{\cos A} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot tgA \end{aligned}$$

Teorema 271 Într-un triunghi automedian ABC este adevărată relația:

$$(r_a - r)(r_b + r_c) = 2(r_b r_c - r r_a).$$

Demonstrație. Se utilizează egalitățile: $2a^2 = b^2 + c^2$, $r_a r_b = p(p - c)$, $r r_a = (p - b)(p - c)$ și relațiile analoage. \square

Teorema 272 Un triunghi isoscel automedian este echilateral.

Demonstrație. Dacă, de exemplu, $a = c$ rezultă $2a^2 = b^2 + a^2$, deci $a^2 = b^2$, de unde $a = b$, adică triunghiul este echilateral. Analog se tratează și celelalte cazuri. \square

Teorema 273 Să se arate că triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă centrul de greutate G al triunghiului ABC este mijlocul segmentului AD , unde D este punctul în care mediana corespunzătoare laturii BC intersectează cercul circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $AG \equiv GD$. Din puterea punctului G față de cercul circumscris triunghiului ABC , avem:

$$R^2 - OG^2 = AG^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}.$$

Utilizând relația $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$, obținem: $2a^2 = b^2 + c^2$, adică triunghiul ABC este automedian (Figura 1.51). Reciproc, dacă triunghiul ABC este automedian rezultă $2a^2 = b^2 + c^2$. Avem: $R^2 - OG^2 = AG \cdot GD$, sau

$$\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{2}{3}m_a \cdot GD,$$

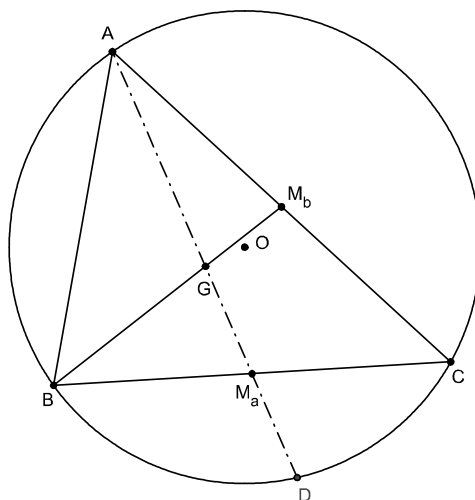


Figura 1.51: Triunghiul automedian

deci $\frac{3a^2}{9} = \frac{2}{3}m_a \cdot GD$, de unde rezultă

$$GD = \frac{a^2}{2m_a} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}m_a = AG.$$

□

Teorema 274 Dacă AM_a și BM_b sunt mediane în triunghiul automedian ABC , atunci $m(\widehat{BAM_a}) = m(\widehat{CBM_b})$.

Demonstrație. Avem $m(\widehat{BAM_a}) = m(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BD}) = m(\widehat{CBM_b})$, unde D este punctul de intersecție dintre mediana AM_a și cercul circumscris triunghiului ABC . □

Consecința 275 Într-un triunghi automedian ABC , $BM_b \parallel CD$, unde D este punctul de intersecție dintre mediana AM_a și cercul circumscris triunghiului ABC .

Teorema 276 Triunghiul ABC este automedian dacă și numai dacă ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe mediana AM_a , $M_a \in (BC)$, în centrul de greutate (G) al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Avem $OM_a^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$, $GM_a^2 = \left(\frac{1}{3}m_a\right)^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{36}$ (1). Folosind ipoteza $b^2 + c^2 = 2a^2$ și faptul că punctele H, G, O sunt coliniare rezultă: $OG^2 = R^2 - \frac{a^2}{3}$, $GM_a^2 = \frac{a^2}{12}$, $OM_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$, de unde

$$OG^2 + GM_a^2 = R^2 - \frac{a^2}{4} = OM_a^2,$$

adică triunghiul M_aGO este dreptunghic, deci H se proiectează pe mediana AM_a în G . Reciproc, dacă H se proiectează pe AM_a în G , atunci GM_aO este dreptunghic, adică $OM^2 = GO^2 + GM^2$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă $b^2 + c^2 = 2a^2$, adică triunghiul ABC este automedian. \square

Teorema 277 Într-un triunghi automedian ABC ($2a^2 = b^2 + c^2$) dreapta lui Euler este perpendiculară pe mediana din A a triunghiului ABC .

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă, deoarece $HG \perp AM_a$. \square

Teorema 278 În triunghiul ABC fie mediana AM_a , înălțimea CH_c , ($H_c \in AB$) și G centrul de greutate. Dacă triunghiul ABC este automedian, atunci cercul circumscris triunghiului BM_aH_c conține punctul G .

Demonstrație. Cum triunghiul ABC este automedian avem: $2a^2 = b^2 + c^2$ (Figura 1.52). Din teorema lui Pitagora generalizată rezultă:

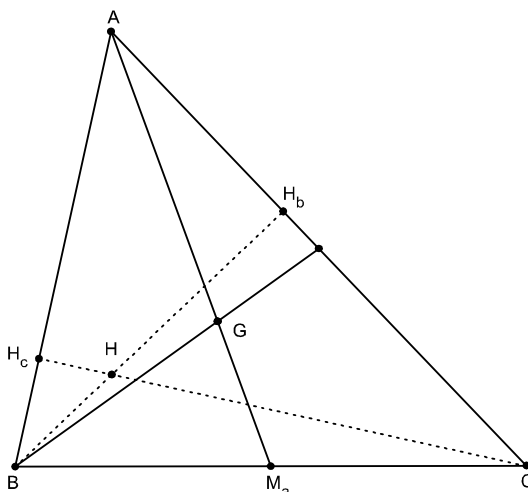


Figura 1.52: Punctele B, H_c, G, M_a sunt conciclice

$$AH_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{2a^2 - a^2}{2c} = \frac{a^2}{2c}.$$

Atunci, $AB \cdot AH_c = \frac{a^2}{2}$. Dar,

$$AG \cdot AM_a = \frac{2}{3} \cdot AM_a^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot a^2,$$

adică $AB \cdot AH_c = AG \cdot AM_a$ relație care arată că punctele B, H_c, G, M_a sunt conciclice. \square

Teorema 279 În triunghiul ABC , fie H_b, H_c picioarele înălțimilor duse din B , respectiv C și M_a piciorul medianei din A . Dacă triunghiul ABC este automedian, atunci centrul de greutate al triunghiului ABC aparține cercului circumscris triunghiului CM_aH_b .

Demonstrație. Dreptele H_bH_c și BC fiind antiparalele rezultă: $AC \cdot AH_b = AB \cdot AH_c = AG \cdot AM_a$ (vezi aplicația precedentă) de unde rezultă concluzia. \square

1.17 Triunghi circumpedal

„Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte.” – Henri Poincaré¹⁸

Fie D un punct în planul triunghiului ABC . Numim triunghi *circumpedal* (sau *metaarmonic*) al punctului D în raport cu triunghiul ABC , triunghiul a cărui vârfuri sunt punctele de intersecție ale cevianelor AD, BD și CD cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.53).

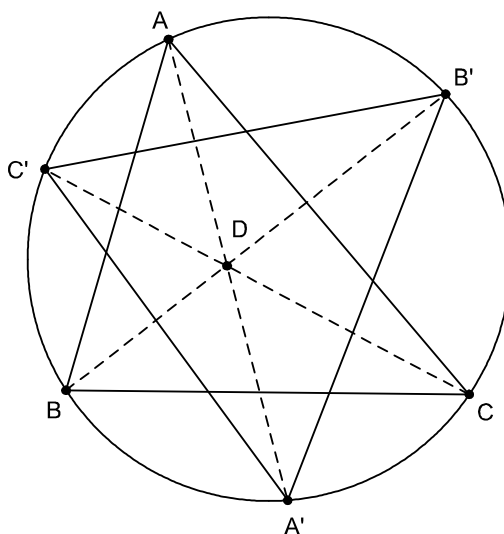


Figura 1.53: Triunghi circumpedal

Teorema 280 Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ și triunghiul podar $A''B''C''$ al unui punct D în raport cu un triunghi ABC sunt asemenea.

Demonstrație. Patrulateralele $DA''BC''$, $DA''CB'$, $ABA'B'$ și $ACA'C'$ sunt in-

¹⁸Henri Poincaré (1854 -1912) – matematician și fizician francez, contribuții importante în toate ramurile matematicii

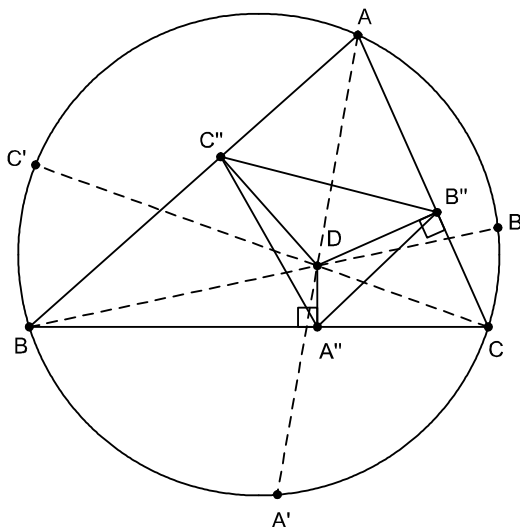


Figura 1.54: Triunghiul circumpedal și triunghiul podar sunt asemenea

scriptibile (Figura 1.54), deci

$$\sphericalangle DA''B'' \equiv \sphericalangle DCB'' \equiv \sphericalangle C'CA \equiv \sphericalangle AA'C'$$

și

$$\sphericalangle DA''C'' \equiv \sphericalangle DBC'' \equiv \sphericalangle B'BA \equiv \sphericalangle BA'A.$$

Dar $m(\sphericalangle DA''C') + m(\sphericalangle DA''B'') = m(\sphericalangle B''A''C')$, iar $m(\sphericalangle B'A'A) + m(\sphericalangle C'A'A) = m(\sphericalangle B'A'C')$, adică $m(\sphericalangle B''A''C'') = m(\sphericalangle B'A'C')$. Analog se arată că $m(\sphericalangle A''B''C'') = m(\sphericalangle A'B'C')$, adică triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt asemenea. \square

Teorema 281 Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al unui punct D în raport cu un tringhi ABC , iar $A''B''C''$ triunghiul podar al acestui punct. Atunci:

$$A_{[A'B'C']} = 2R^2 \sin A'' \sin B'' \sin C''.$$

Demonstrație. Deoarece triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea, rezultă

$$B'C' = 2R \sin \widehat{B'A'C'} = 2R \sin \widehat{B''A''C''}, \quad C'A' = 2R \sin \widehat{A''B''C''}, \quad A'B' = 2R \sin \widehat{A''C''B''}$$

(Figura 1.54). Atunci, $A_{[A'B'C']} = \frac{B'A' \cdot A'C' \sin \widehat{B'A'C'}}{2} = 2R^2 \sin A'' \sin B'' \sin C''$. \square

Teorema 282 Fie triunghiul ABC și $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC . Atunci,

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[A'B'C']}} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{2r}{R}$$

(unde r este raza cercului înscris, iar R raza cercului circumscris în triunghiul ABC).

Demonstrație. Punctele A', B', C' sunt punctele de intersecție dintre bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC cu cercul circumscris. Deoarece $m(\sphericalangle C'A'B') = \frac{1}{2}[m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)]$ și analogele, avem:

$$A_{[A'B'C']} = 2R^2 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{A+C}{2} \sin \frac{A+B}{2} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Cum

$$A_{[ABC]} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 16R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

rezultă concluzia. \square

Teorema 283 Fie triunghiul ABC , $A''B''C''$ triunghiul circumpedal al ortocentrului triunghiului ABC . Atunci

$$\frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = \frac{2r''}{R},$$

unde r'' este lungimea razei cercului înscris în triunghiul $A''B''C''$.

Demonstrație. Avem:

$$A_{[A''B''C'']} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 16R^2 \sin A \sin B \sin C \cos A \cos B \cos C,$$

deci $\frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = 8 \cos A \cos B \cos C$. Observând că $A''A$, $B''B$ și $C''C$ sunt bisectoarele triunghiului $A''B''C''$, din teorema precedentă rezultă concluzia. \square

$$A_{[A''B''C'']} \leq A_{[ABC]} \leq A_{[A'B'C']},$$

unde $A'B'C'$ și $A''B''C''$ reprezintă triunghiurile circumpedale ale centrului cercului înscris, respectiv al ortocentrului triunghiului ABC .

Demonstrație. Din inegalitatea lui Euler, $2r \leq R$ și relațiile

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[A'B'C']}} = \frac{2r}{R}, \quad \frac{A_{[A''B''C'']}}{A_{[ABC]}} = \frac{2r''}{R}$$

obținem $A_{[A''B''C'']} \leq A_{[ABC]} \leq A_{[A'B'C']}$ și de asemenea inegalitatea remarcabilă într-un triunghi $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$. \square

Teorema 284 Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al ortocentrului H al unui triunghi ABC este omotetic cu triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC , centrul de omotetie fiind ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ sunt asemenea și deoarece $H_aA' \cap H_bB' \cap H_cC' = \{H\}$ rezultă că triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ omologice. Cum $HH_a \equiv H_aA'$, $HH_b \equiv H_bB'$, $HH_c \equiv H_cC'$ rezultă că H_aH_b , H_bH_c , H_cH_a sunt linii mijlocii în triunghiurile $A'B'H$, $B'C'H$, respectiv $C'A'H$ rezultă $H_aH_b \parallel A'B'$, $H_bH_c \parallel B'C'$, respectiv $H_cH_a \parallel C'A'$, deci triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $A'B'C'$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind punctul H , iar raportul de omotetie egal cu 2. \square

Teorema 285 Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC și $C_aC_bC_c$ triunghiul său de contact. Atunci, dreptele $A'C_a, B'C_b, C'C_c$ sunt concurente.

Demonstrație. Fie M un punct pe dreapta IO astfel încât

$$\overrightarrow{MO} = \frac{R}{r}\overrightarrow{MI}.$$

Prin omotetia de centru M și raport $\frac{R}{r}$ cercul (I, r) se transformă în cercul (O, R) (Figura 1.55). Atunci I se transformă în O și dreapta IC_a se transformă în dreapta

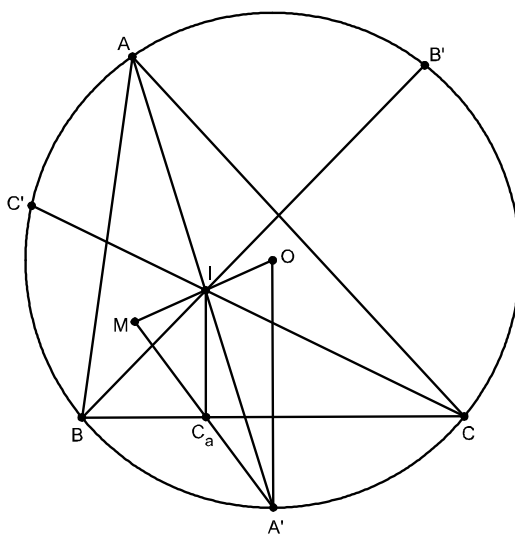


Figura 1.55: $\overrightarrow{MO} = \frac{R}{r}\overrightarrow{MI}$

paralelă OA' , de unde rezultă că punctul A' este omoteticul punctului C_a prin omotetia considerată. Analog prin omotetia $H(M, \frac{R}{r})$ se corespund punctele B' și C_b respectiv C' și C_c , deci dreptele $A'C_a, B'C_b, C'C_c$ sunt concurente în punctul M . \square

Consecința 286 Avem: $MI = \frac{r\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}$ și $MO = \frac{R\sqrt{R^2-2Rr}}{R-r}$.

Demonstrație. Deoarece $MO = \frac{R}{r}MI, OI = MO - MI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (relația lui Euler) avem:

$$MI = \frac{r}{R-r}OI \text{ și } MO = \frac{R}{R-r}OI,$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 287 Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris în triunghiul ABC și A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC . Atunci,

$$\frac{1}{\sqrt{A'A_1}} + \frac{1}{\sqrt{B'B_1}} + \frac{1}{\sqrt{C'C_1}} \geq \sqrt{\frac{18}{R}}.$$

Demonstrație. Din puterea punctului A_1 față de cercul circumscris rezultă $A_1A' \cdot A_1A = A_1B \cdot A_1C$, de unde

$$A_1A' = \frac{a^2 l_a}{(b+c)^2 - a^2}$$

unde $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2} (= AA_1)$ (Figura 1.56). Atunci,

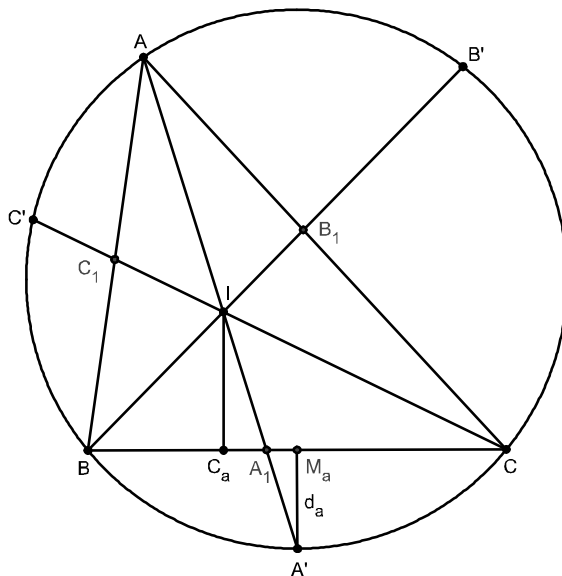


Figura 1.56: Triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris

$$\frac{A_1A'}{AA_1} = \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2},$$

de unde $\frac{A_1A'}{AA_1} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2$, deci

$$\sqrt{A'A_1} = \frac{a}{b+c} \sqrt{AA_1} \leq \frac{a}{b+c} \sqrt{2R}.$$

Avem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A'A_1}} + \frac{1}{\sqrt{B'B_1}} + \frac{1}{\sqrt{C'C_1}} &\geq \frac{1}{2R} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+c}{c} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2R}} \left[\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right] \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \\ &\geq \frac{6}{\sqrt{2R}} = \sqrt{\frac{18}{R}}. \end{aligned}$$

□

Teorema 288 Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC . Atunci, $IA \cdot IC = 2r \cdot IB'$ și $IA' \cdot IC' = R \cdot IB$.

Demonstrație. Deoarece B' este centrul cercului circumscris triunghiului AIC (vezi „Teorema lui Beltrami”-Cecuri exînscrie [15]) rezultă

$$IA = 2IB' \cdot \sin \widehat{ACI} = 2IB' \cdot \frac{r}{IC},$$

deci $IA \cdot IC = 2r \cdot IB' = r \cdot II_a$ (unde I_a este centrul cercului exînscriș). Deoarece

$$m(\widehat{IBC'}) = m(\widehat{BIC'}) = 180^\circ - m(\widehat{BIC}), m(\widehat{BC'I}) = m(\widehat{BAC})$$

rezultă

$$\frac{IC'}{BC} = \frac{BI}{BC} \cdot \frac{IC'}{BI} = \frac{\sin \widehat{BCI}}{\sin \widehat{BIC}} \cdot \frac{\sin \widehat{IBC'}}{\sin \widehat{BC'I}} = \frac{\sin \widehat{BCI}}{\sin \widehat{BAC}}$$

și cum $IB = 2IA' \cdot \sin \widehat{BCM}$ obținem $IA' \cdot IC' = R \cdot IB$. \square

Teorema 289 Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris (I) în triunghiul ABC în raport cu acest triunghi și d_a, d_b, d_c distanțele dintre punctele A', B', C' respectiv la dreptele BC, CA, AB și r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscriș corespunzătoare triunghiului ABC . Atunci,

$$\frac{d_a}{r_a} + \frac{d_b}{r_b} + \frac{d_c}{r_c} = 1.$$

Demonstrație. Deoarece A' este mijlocul arcului BC , avem $A'B \equiv A'C$, de unde rezultă că proiecția lui A' pe BC este punctul M_a , mijlocul segmentului BC (Figura 1.56). Din teorema sinusurilor rezultă $A'B = 2R \sin \frac{A}{2}$, $M_a A' = A'B \sin \widehat{A'BM_a} = A'B \sin \frac{A}{2} = 2R \sin^2 \frac{A}{2} = d_a$. Cum $r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ avem:

$$\frac{d_a}{r_a} = \frac{2R}{p} \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{R \sin A}{p},$$

de unde:

$$\frac{d_a}{r_a} + \frac{d_b}{r_b} + \frac{d_c}{r_c} = \frac{R \sin A + R \sin B + R \sin C}{p} = 1.$$

\square

Teorema 290 Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al centrului cercului înscris I în triunghiul ABC , $\{N\} = A'B' \cap BC$, $\{M\} = A'C' \cap BC$, $\{P\} = A'B' \cap AC$, $\{S\} = A'C' \cap AB$, $\{R\} = B'C' \cap AB$, $\{Q\} = B'C' \cap AC$. Dreptele MQ, NR și PS sunt concurente.

Demonstrație. Patrulaterul $ABA'C$ fiind inscriptibil (Figura 1.57), din teorema lui Ptolemeu obținem

$$AA' \cdot BC = BA' \cdot AC + A'C \cdot AB$$

și cum $BA' \equiv A'C$ rezultă

$$\frac{AA'}{BA'} = \frac{AB + AC}{BC}. \quad (1)$$

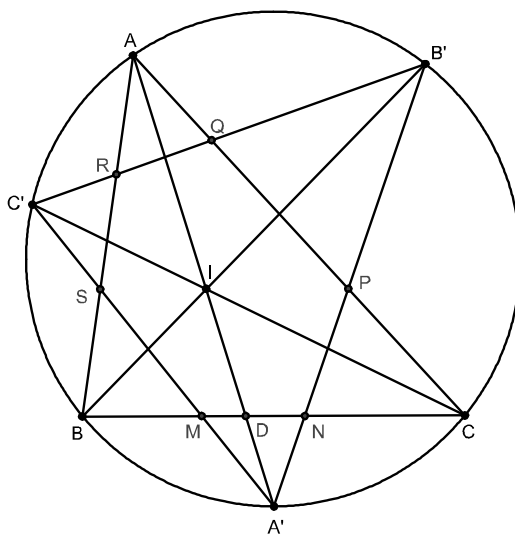


Figura 1.57: Dreptele MQ , NR și PS sunt concurente

Dacă $\{D\} = AA' \cap BC$ din teorema bisectoarei în triunghiul ABD , obținem:

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD}.$$

Cum $BD = \frac{BC \cdot AB}{AB + AC}$, rezultă $\frac{AI}{ID} = \frac{AB + AC}{BC}$. Din teorema bisectoarei pentru triunghiul $AA'B$ avem:

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AA'}{BA'} = \frac{AB + AC}{BC}$$

(din relația 1), de unde $\frac{AI}{ID} = \frac{AS}{BS}$, deci $SI \parallel BC$. Analog $IP \parallel BC$, deci $I \in SP$. La fel se arată că punctul I aparține dreptelor RN și MQ . \square

Teorema 291 *Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al punctului lui Lemoine al triunghiului ABC are aceleași simediane ca triunghiul ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri cosimediane”. \square

Teorema 292 *Triunghiul circumpedal $A'B'C'$ al punctului lui Lemoine al triunghiului ABC are laturile proporționale cu medianele triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri cosimediane”. \square

Teorema 293 *Triunghiul circumpedal al unui punct al lui Brocard al triunghiului ABC este congruent cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Fie $A'B'C'$ triunghiul circumpedal al punctului Ω al lui Brocard al triunghiului ABC (Figura 1.58). Deoarece $m(\widehat{C'A'A}) = m(\widehat{C'CA}) = m(\widehat{B'BC})$ și

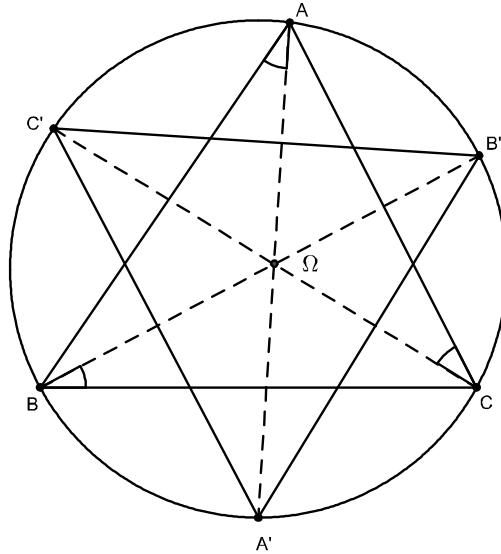


Figura 1.58: Triunghiul circumpedal al unui punct al lui Brocard

$m(\widehat{B'A'A}) = m(\widehat{B'BA})$ rezultă că

$$m(\widehat{C'A'B'}) = m(\widehat{CBA}),$$

deci $B'C' \equiv AC$. Analog se arată că $C'A' \equiv AB$ și $A'B' \equiv BC$, deci triunghiurile ABC și $C'A'B'$ sunt congruente. \square

Teorema 294 Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul circumpedal al centrului cercului circumscris (O) al unui triunghi ABC în raport cu acest triunghi, $M_aM_bM_c$ triunghiul median al triunghiului ABC . Dacă punctele S_a, S_b, S_c împart segmentele orientate $\overrightarrow{A_1M_a}, \overrightarrow{B_1M_b}, \overrightarrow{C_1M_c}$ în același raport $k \in \mathbb{R} \setminus \{1; 4/3\}$, atunci dreptele AS_a, BS_b, CS_c sunt concurente într-un punct situat pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Considerăm un reper cartezian cu originea în O (Figura 1.59). Avem:

$$\overrightarrow{OS_a} = \frac{\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OM_a}}{1 - k} = \frac{1}{k - 1} \left[\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right].$$

Fie un punct Q pe dreapta AS_a astfel încât $\frac{QA}{QS_a} = l$. Avem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{1 - l} \left[\overrightarrow{OA} - l\overrightarrow{OS_a} \right] \\ &= \frac{1}{1 - l} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{(1 - l)(k - 1)} \left[\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \right] \\ &= \frac{1 + l - k}{(1 - l)(1 - k)} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{lk}{2(1 - l)(1 - k)} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{lk}{2(1 - l)(1 - k)} \cdot \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

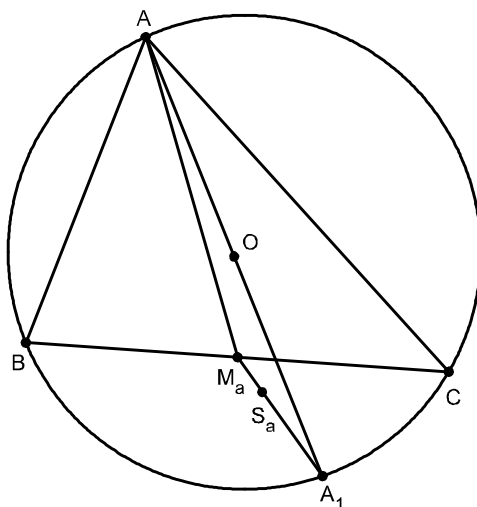


Figura 1.59: Triunghiul cicumpedal al centrului cercului circumscris

Determinăm pe $l \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât \vec{OQ} să aibă o scriere simetrică în raport cu vectorii $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$. Atunci, $2(1 + l - k) = lk$, sau

$$l = \frac{2 - 2k}{k - 2}$$

(cu $l = 1$ dacă și numai dacă $k = 4/3$). Pentru $l = \frac{2-2k}{k-2}$ obținem:

$$\vec{OQ} = \frac{k}{3k - 4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

Considerăm $Q' \in BS_b, Q'' \in CS_c$ care împart vectorii corespunzători în același raport l , rezultă $\vec{OQ}' = \vec{OQ}'' = \vec{OQ}$, adică $Q \equiv Q' \equiv Q''$, deci există un punct comun dreptelor AS_a, BS_b, CS_c dacă $\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$, rezultă că punctele Q, O și G sunt coliniare. \square

Observația 295 Dacă $k = \frac{4}{3}$ dreptele AS_a, BS_b, CS_c sunt paralele cu dreapta lui Euler. Dacă $k = 2$, atunci $S_a \equiv S_b \equiv S_c \equiv H$ și Q este ortocentrul triunghiului.

1.18 Triunghiul simedian

„Natura vorbește în limba matematicii: literele sunt cercurile, triunghiurile și alte figuri geometrice.” – Galileo Galilei¹⁹

Triunghiul $K_aK_bK_c$ determinat de intersecțiile simedianelor cu laturile triunghiului ABC se numește *triunghi simedian*. Punctul de intersecție al simedianelor unui triunghi ABC se numește *punctul lui Lemoine* (K) corespunzător triunghiului ABC .

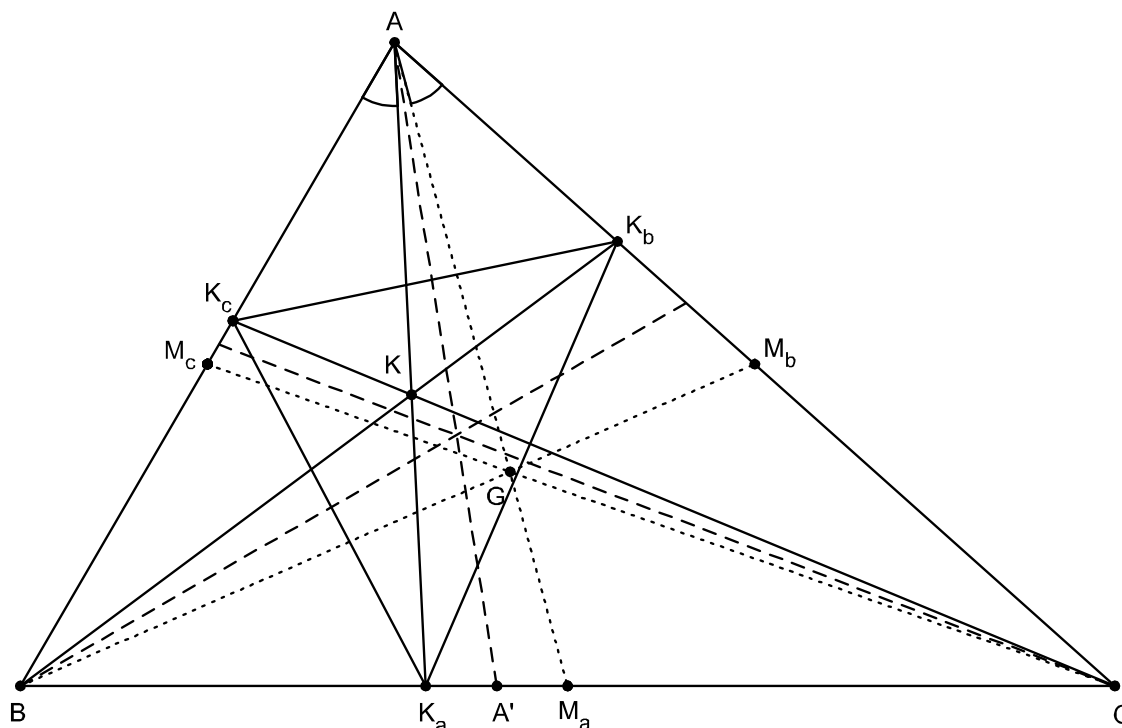


Figura 1.60: Triunghiul simedian

Teorema 296 Dacă K este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC și $K_aK_bK_c$ triunghiul simedian al acestuia, atunci

$$\frac{AK}{KK_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Demonstrație. Din teorema lui Van-Aubel rezultă:

$$\frac{AK}{KK_a} = \frac{AK_c}{K_cB} + \frac{AK_b}{K_bC} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

□

¹⁹ Galileo Galilei (1564-1642) – matematician, fizician, astronom și filosof italian

Observația 297 Prin permutări circulare se obțin relațiile: $\frac{BK}{KK_b} = \frac{a^2+b^2}{b^2}$ și $\frac{CK}{KK_c} = \frac{b^2+a^2}{c^2}$.

Teorema 298 Aria triunghiului simedian $K_aK_bK_c$ este egală cu:

$$A_{[K_aK_bK_c]} = \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \cdot A_{[ABC]}.$$

Demonstrație. Avem

$$\frac{A_{[AK_aK_b]}}{A_{[ABC]}} = \frac{AK_b \cdot AK_c \cdot \sin A}{AB \cdot AC \cdot \sin A} = \frac{AK_b \cdot AK_c}{AB \cdot AC} = \frac{b^2 - c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \quad (1)$$

Analog,

$$\frac{A_{[BK_aK_c]}}{A_{[ABC]}} = \frac{a^2b^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \quad (2)$$

și

$$\frac{A_{[CK_aK_b]}}{A_{[ABC]}} = \frac{a^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)},$$

iar

$$A_{[K_aK_bK_c]} = A_{[ABC]} - A_{[AK_bK_c]} - A_{[K_aBK_c]} - A_{[K_aK_bC]}. \quad (4)$$

Din relațiile (1) - (4) rezultă concluzia. \square

Teorema 299 Aria triunghiului simedian ABC este maximă, atunci când triunghiul ABC este echilateral.

Demonstrație. $A_{[K_aK_bK_c]}$ este maximă, atunci când raportul $\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$ este maxim. Utilizând inegalitatea mediilor $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$, pentru $x, y \geq 0$, obținem:

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \leq \frac{2a^2b^2c^2}{8a^2b^2c^2} = \frac{1}{4}.$$

Egalitatea se obține pentru $a = b = c$, dacă triunghiul ABC este echilateral și $K_aK_bK_c$ este triunghiul median al triunghiului ABC . \square

Observația 300 Coordonatele triliniare ale vârfurilor triunghiului simedian $K_aK_bK_c$ sunt: $K_a(0, b, c)$, $K_b(a, 0, c)$, $K_c(a, b, 0)$. (vezi [26]).

1.19 Triunghiul Δ_{60°

„În zadar vor matematicienii să ascundă: ei nu demonstrează, ci combină și numai izbindu-se dintr-o parte în alta ajung la adevăr.”- Evariste Galois²⁰

Notăm cu Δ_{60° un triunghi ABC care are un unghi de 60° , ($m(\widehat{A}) = 60^\circ$), H_a, H_b, H_c proiecțiile vârfurilor A, B, C pe laturi; A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare, M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC , O centrul cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 1.61).

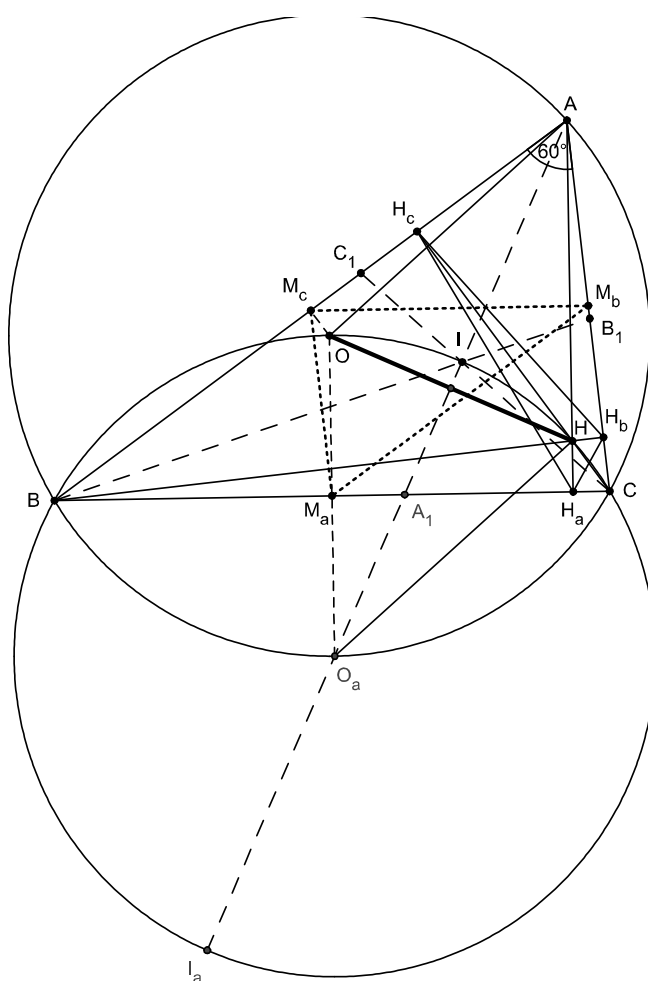


Figura 1.61: Triunghiul Δ_{60°

Teorema 301 Într-un triunghi Δ_{60° avem: $m(\widehat{H_c M_a H_b}) = 60^\circ$.

²⁰Evariste Galois (1811 – 1832) – matematician francez, contribuții remarcabile în algebră

Demonstrație. Deoarece $H_cM_a \equiv H_bM_a (= \frac{BC}{2})$, rezultă că triunghiul H_cM_aB este isoscel, deci

$$m(\widehat{H_cM_aB}) = 180^\circ - 2m(\widehat{B}),$$

dar cum $m(\widehat{H_bH_aH_c}) = 180^\circ - 2m(\widehat{B})$, avem că $\widehat{H_cM_aB} \equiv \widehat{H_bH_aH_c}$, adică patrulaterul $H_cH_aM_aH_b$ este inscribit, atunci

$$m(\widehat{H_cM_aH_b}) = m(\widehat{H_cH_aH_b}).$$

Dar

$$m(\widehat{H_bH_aH_c}) = 180^\circ - 2m(\widehat{A}) = m(\widehat{A}) = 60^\circ,$$

deci $m(\widehat{H_cM_aH_b}) = 60^\circ$. \square

Teorema 302 *Triunghiurile $M_aH_bH_c$, AM_bH_c și AH_bM_c sunt echilaterale.*

Demonstrație. Deoarece $m(\widehat{H_cM_aH_b}) = 60^\circ$, iar $H_cM_a \equiv H_bM_a (= \frac{BC}{2})$ rezultă că triunghiul $M_aH_bH_c$ este echilateral. Analog pentru celelalte două triunghiuri. \square

Teorema 303 *Proiecția unei laturi care formează unghiul de 60° pe cealaltă este egală cu jumătate din latura proiectată.*

Demonstrație. Triunghiurile AM_bH_c, AH_bM_c fiind echilaterale, rezultă $AH_c = AM_b = \frac{AC}{2}$, $AH_b = AM_c = \frac{AB}{2}$. \square

Teorema 304 *Lungimea segmentului AH (H este ortocentrul $\Delta_{60^\circ}ABC$) este egală cu lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Avem $AH = 2R \cos A = 2R \cos 60^\circ = R$. \square

Teorema 305 *Patrulaterul B_1IC_1A este inscribit (I este centrul cercului înscris în $\Delta_{60^\circ}ABC$).*

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle B_1IC_1) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle A)$. \square

Teorema 306 *Lungimea segmentului AI este egală cu diametrul cercului înscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Din $r = AI \sin \frac{A}{2} = AI \sin 30^\circ$, rezultă $AI = 2r$. \square

Teorema 307 *Punctele B, C, O, H, I, I_a aparțin unui cerc simetric cercului circumscris triunghiului $\Delta_{60^\circ}ABC$ în raport cu latura BC (unde I_a este centrul cercului A -exînscris).*

Demonstrație. Centrul cercului circumscris triunghiului BIC - punctul O_a - se află pe mijlocul arcului BC al cercului circumscris triunghiului ABC și trece prin punctul I_a . Raza acestui cerc este egală cu R - raza cercului circumscris triunghiului $\Delta_{60^\circ}ABC$ - (triunghiul O_aBC fiind echilateral). Avem:

$$O_aB = O_aC = O_aO = O_aI = O_aI_a = R,$$

deci O este punct pe cercul cu centrul în O_a și raza R . Deoarece

$$m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle A) = 120^\circ$$

și

$$m(\sphericalangle BHC) = m(\sphericalangle H_b H H_c) = 180^\circ - m(\sphericalangle A) = 120^\circ,$$

rezultă că $\widehat{BOC} \equiv \widehat{BHC}$, deci patrulaterul $BHOC$ este inscriptibil, deci și punctul H aparține cercului pe care se află punctele B, C, O, I și I_a . \square

Teorema 308 *Punctele A, H_b, H_c, H, O_9 (O_9 este centrul cercului lui Euler al triunghiului $\Delta_{60^\circ} ABC$) aparțin unui cerc de rază $R/2$.*

Demonstrație. Punctele A, H_b, H_c, H aparțin cercului cu centrul în punctul M_1 -mijlocul segmentului AH – și de rază $R/2$. Deoarece $M_1 O_9 = \frac{R}{2}$ (linie mijlocie în triunghiul OAH) rezultă că O_9 aparține și el cercului de mai sus. \square

Teorema 309 *Patrulaterul AHO_aO este romb.*

Demonstrație. Avem: $AH = HO_a = O_aO = OA = R$. Diagonalele rombului sunt bisectoarea unghiului A și dreapta lui Euler a $\Delta_{60^\circ} ABC$ (O_a fiind mijlocul arcului BC al cercului circumscris ΔABC). \square

Teorema 310 *Centrul cercului lui Euler al triunghiului $\Delta_{60^\circ} ABC$ este mijlocul segmentului AO_a .*

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă. \square

Teorema 311 *Bisectoarea exterioară a unghiului A și dreapta lui Euler a triunghiului $\Delta_{60^\circ} ABC$ sunt perpendiculare.*

Demonstrația rezultă din proprietățile precedente. \square

Teorema 312 *Triunghiul OI_aH este isoscel.*

Demonstrație. Deoarece $AI_a \perp OH$, punctele I, O_a, I_a sunt coliniare, rezultă $I_aO \equiv I_aH$. \square

Teorema 313 *Triunghiul OIH este isoscel.*

Demonstrație. Deoarece I este mijlocul arcului OH în cercul circumscris rezultă $OI = IH$. \square

Teorema 314 În triunghiul $\Delta_{60^\circ} ABC$ sunt adevărate relațiile:

$$\begin{aligned} i) \quad a^2 &= b^2 + c^2 - bc, \\ ii) \quad p &= (R + r)\sqrt{3}, \\ iii) \quad bc &= 4r(R + r), \\ iv) \quad h_a &= 2r \left(1 + \frac{r}{R}\right), \\ v) \quad A_{[ABC]} &= 4A_{[AH_b H_c]}, \end{aligned}$$

unde $h_a = AH_a$.

Demonstrație. i) Din teorema cosinusului în triunghiul $\Delta_{60^\circ} ABC$, rezultă

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc.$$

ii) Deoarece $OI = IH$ rezultă $R(R - 2r) = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$, de unde $p = (R + r)\sqrt{3}$.

iii) Avem:

$$A_{[ABC]} = \frac{h_a \cdot a}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{4} = pr = r(R + r)\sqrt{3},$$

de unde $bc = 4r(R + r)$.

iv) Din $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2a} = \frac{bc\sqrt{3}}{4R \sin A} = \frac{bc}{2R} = \frac{4r(R+r)}{2R}$, rezultă $h_a = 2r \left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

v) Din $AH_c = b \cos A = \frac{b}{2}$, $AH_b = c \cos A = \frac{c}{2}$ rezultă

$$A_{[AH_b H_c]} = \frac{AH_b \cdot AH_c \cdot \sin A}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{16},$$

deci $A_{[ABC]} = 4A_{[AH_b H_c]}$. □

Teorema 315 Într-un triunghi Δ_{60° triunghiul ortic, triunghiul de contact, triunghiul tangențial și triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ sunt triunghiuri Δ_{60° .

Demonstrație. Deoarece

$$m(\widehat{H_b H_a H_c}) = 180^\circ - 2m(\widehat{A}) = m(\widehat{A}) = 60^\circ$$

rezultă că triunghiul ortic este un triunghi Δ_{60° . Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Avem

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle C_c C_a C_b) &= m(\sphericalangle C_c C_a I) + m(\sphericalangle C_b C_a I) \\ &= m(\sphericalangle C_c B I) + m(\sphericalangle C_b C I) \\ &= \frac{1}{2}[m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)] = 60^\circ, \end{aligned}$$

deci triunghiul $C_a C_b C_c$ este un triunghi Δ_{60° . Deoarece triunghiurile ortic ($H_a H_b H_c$) și tangențial ($T_A T_B T_C$) ale unui triunghi sunt omotetice, rezultă că

$$m(\widehat{T_B T_A T_C}) = 180^\circ - 2m(\widehat{A}) = m(\widehat{A}) = 60^\circ,$$

deci $T_A T_B T_C$ este un triunghi Δ_{60° . În triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ avem:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle I_b I_a I_c) &= 180^\circ - [m(\sphericalangle I_a B C) + m(\sphericalangle I_a C B)] \\ &= 180^\circ - \left[\left(90^\circ - \frac{1}{2} m(\sphericalangle B) \right) + \left(90^\circ - \frac{1}{2} m(\sphericalangle C) \right) \right] = 60^\circ, \end{aligned}$$

deci $I_a I_b I_c$ este triunghi Δ_{60° . □

Observația 316 *Triunghiul Δ_{60° se mai numește triunghi semiregulat în unghiuri.*

Teorema 317 *Fie triunghiul Δ_{60° , H ortocentrul său. Mediatoarele segmentelor BH , CH intersectează dreptele AB , respectiv, AC în punctele M și N . Punctele M , H și N sunt coliniare.*

Demonstrație. Fie M_1 și N_1 mijloacele segmentelor BH , respectiv CH . Deoarece: $m(\sphericalangle B H H_c) = 60^\circ$, iar triunghiul $M B H$ fiind isoscel rezultă

$$m(\sphericalangle M B H) = m(\sphericalangle M H B) = 30^\circ,$$

de unde $m(\sphericalangle M H H_c) = 30^\circ$, adică punctul M aparține bisectoarei unghiului $\widehat{H_c H B}$. Analog se arată că punctul N aparține bisectoarei unghiului $\widehat{H_b H C}$, de unde rezultă concluzia. □

1.20 Triunghiul medianelor

„Geometria este arta de a judeca pe desene rău efectuate.” - Niels H. Abel²¹

Teorema 318 *Să se arate că se poate construi un triunghi având laturile de lungimi egale cu lungimile medianelor unui triunghi ABC .*

Demonstrație. Fie AM_a , BM_b , CM_c medianele triunghiului ABC și G centrul său de greutate. Prin punctele C și M_c ducem paralele la medianele BM_b , respectiv AM_a și fie C' punctul de intersecție dintre aceste paralele, iar $\{D\} = AM_a \cap CC'$, $\{E\} = M_c C' \cap BC$ (Figura 1.62). Evident $GM_a \equiv M_a D$, și deoarece $M_c C' \parallel GD$, avem

$$\frac{GC}{M_c C} = \frac{GD}{M_c C'} = \frac{2}{3},$$

de unde rezultă

$$M_c C' = \frac{3}{2} GD = \frac{3}{2} AG = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot AM_a = AM_a. \tag{1}$$

²¹Niels H. Abel (1802-1829) – matematician norvegian, contribuții fundamentale în algebră

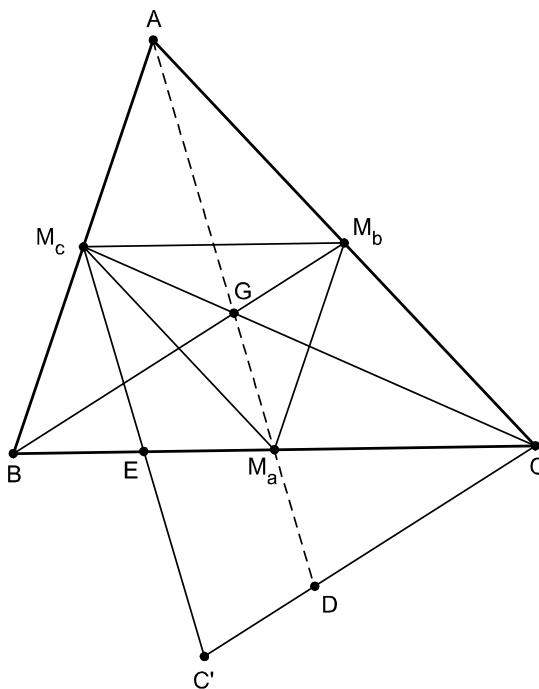


Figura 1.62: Triunghiul medianelor

Deoarece M_a este mijlocul segmentului GD și $M_cC' \parallel GD$, rezultă că CE este mediană în triunghiul M_cCC' . Din

$$\frac{M_cG}{GC} = \frac{EM_a}{M_aC} = \frac{1}{2}$$

rezultă că M_a este centrul de greutate al triunghiului M_cCC' . Din congruența triunghiurilor BGM_a și CDM_a rezultă că $BG \equiv CG$, de unde

$$\frac{2}{3}MM_b = \frac{2}{3}CC',$$

adică $MM_b \equiv CC'$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiul M_cCC' are laturile de lungimi egale cu cele ale medianelor triunghiului ABC . \square

Observația 319 *Triunghiul având laturile de lungimi egale cu lungimile medianelor unui triunghi ABC se numește triunghiul medianelor corespunzător triunghiului ABC .*

Teorema 320 *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC , atunci medianele triunghiului medianelor corespunzător triunghiului ABC au lungimile egale cu: $3a/4, 3b/4$, respectiv $3c/4$.*

Demonstrație. Din aplicația precedentă, rezultă

$$CE = \frac{3}{2}CM_a = \frac{3}{4}BC, M_cM'_c = \frac{3}{2}M_aM_c = \frac{3}{4}AC \text{ și } C'C'' = \frac{3}{4}AB,$$

(unde M'_c și C'' sunt mijloacele laturilor CC' , respectiv M_cC). \square

Teorema 321 *Unghiurile triunghiului medianelor au măsurile egale cu suplementele coordonatelor unghiulare ale centrului de greutate al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece $CC' \parallel BM_b$ și $C'M_c \parallel AM_a$ rezultă că

$$\begin{aligned} m(\widehat{M_cC'D}) &= m(\widehat{M_aGB}) = 180^\circ - m(\widehat{AGB}), \\ m(\widehat{C'M_cC}) &= m(\widehat{M_aGC}) = 180^\circ - m(\widehat{AGC}), \\ m(\widehat{M_cCC'}) &= 180^\circ - m(\widehat{BGC}). \end{aligned}$$

\square

1.21 Triunghiuri omologice

„Geometria este cea mai bună și mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecății și rațiunii.” – Denis Diderot²²

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc *omologice* dacă dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente. Punctul O de concurență al dreptelor AA' , BB' și CC' se numește *centrul de omologie* al triunghiurilor ABC și $A'B'C'$; vârfurile A și A' , B și B' , C și C' se numesc *omoloage*, iar dreptele BC și $B'C'$, CA și $C'A'$, AB și $A'B'$ se numesc *omoloage* (Figura 1.63). Fie $\{L\} = BC \cap B'C'$, $\{M\} = AC \cap A'C'$ și $\{N\} = AB \cap A'B'$. Triunghiurile date sunt *triomologice* dacă admit trei centre de omologie.

Teorema 322 *Punctele de intersecție ale dreptelor omologe, a două triunghiuri omologe coplanare, sunt coliniare.*

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Desargues”. [15] \square

Observația 323 *Dreapta ce conține punctele L, M, N se numește axă de omologie. Dacă triunghiul $A'B'C'$ este înscris în triunghiul ABC , atunci dreapta LMN se numește polară triliniară, iar O se numește pol triliniar.*

Observația 324 *Dreapta ce unește picioarele bisectoarelor exterioare este polara triliniară a centrului cercului înscris.*

Teorema 325 (Casey) *Fie triunghiurile ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ două câte două omologice, O centrul comun de omologie $\{M\} = AB \cap A'B'$, $\{M'\} = AC \cap A'C'$, $\{N\} = AB \cap A''B''$, $\{N'\} = AC \cap A''C''$, $\{P\} = A'B' \cap A''B''$, $\{P'\} = A'C' \cap A''C''$. Dreptele MM' , NN' și PP' sunt concurente.*

²²Denis Diderot (1713-1784) – scriitor și filosof francez

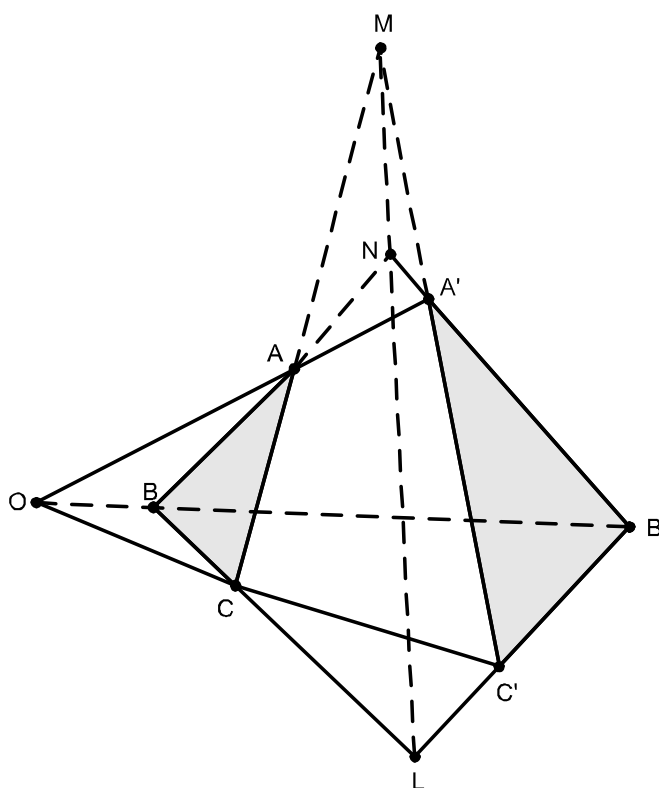


Figura 1.63: Triunghiuri omologice

Demonstrație. Arătăm că triunghiurile MNR și $M'N'P'$ sunt omologice cu ajutorul reciprocei teoremei lui Desargues. Astfel, deoarece $MN \cap M'N' = \{A\}$, $PM \cap P'M' = \{A'\}$, și $NP \cap N'P' = \{A''\}$, iar punctele A, A', A'' sunt coliniare, rezultă că dreptele MM', NN' și PP' sunt concurente. \square

Teorema 326 Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu proprietatea că există punctele L, M, N astfel încât $\{L\} = BC \cap B'C'$, $\{M\} = AC \cap A'C'$ și $\{N\} = AB \cap A'B'$, iar dreptele AA' și BB' nu sunt paralele. Dacă punctele L, M și N sunt coliniare, atunci dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente.

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Desargues” [15] \square

1.22 Triunghiuri ortopolare

„Moisil a fost mai mult decât un savant, a fost mai mulți savanți întruniți în sesiune permanentă sau luându-și locul unul altuia în cicluri succesive mari, reprezentate de temele fundamentale pe care le-a abordat. A fost până în ultimele zile deschizător de drumuri, inovator. În această aventură spirituală nu a admis dilentatismul superficial.” – Mircea Malița

Teorema 327 (Lalescu²³) Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri înscrise în același cerc. Dacă dreapta Simson a vârfului A' în raport cu ABC este perpendiculară pe dreapta $B'C'$, atunci: i) această proprietate este valabilă pentru toate vârfurile triunghiului $A'B'C'$; ii) Dreptele Simson ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC .

Demonstrație. i) Fie N proiecția lui A' pe BC și A'' al doilea punct de intersecție dintre $A'N$ cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.64). Cum dreapta lui

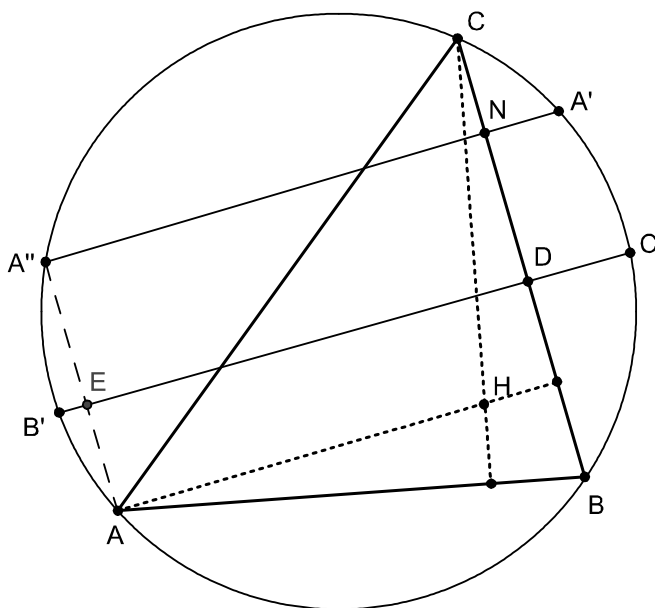


Figura 1.64: Triunghiuri ortopolare

Simson ($s_{A'}$) a punctului A' în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu AA'' , atunci pentru ca $s_{A'} \perp B'C'$ trebuie ca $B'C' \perp AA''$ și fie $\{E\} = B'C' \cap AA''$, $\{D\} = B'C' \cap BC$. Patrulaterul $A''EDN$ este inscripșibil și atunci $\sphericalangle AA''A' \equiv \sphericalangle B'DB$, deci

$$m(\widehat{AA'}) = m(\widehat{B'B}) + m(\widehat{CC'}).$$

²³Traian Lalescu (1882-1929) – matematician român, contribuții importante în geometrie

Egalitatea precedentă este echivalentă cu: $m(\widehat{AA'}) + m(\widehat{B'B}) + m(\widehat{CC'}) = 0(\text{mod}360^\circ)$ (1) (unde am evaluat măsurile arcelor în sens trigonometric). Proprietatea i) este verificată pentru toate vârfurile triunghiului $A'B'C'$ deoarece permutarea ciclică a cuplurilor $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ nu modifică relația (1). ii) Relația (1) nu se modifică dacă se inversează tripletele (A, B, C) și (A', B', C') , atunci drepte lui Simson ale triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ sunt perpendiculare pe laturile triunghiului ABC . \square

Observația 328 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ cu proprietatea de mai sus se numesc triunghiuri S^{24} (sau ortopolare) unul în raport cu altul.*

Teorema 329 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt triunghiuri S dacă și numai dacă*

$$m(\widehat{AA'}) + m(\widehat{B'B}) + m(\widehat{CC'}) = 0(\text{mod}360^\circ).$$

Demonstrația rezultă din teorema lui Lalescu. \square

Teorema 330 *Dacă ABC și $A'B'C'$ sunt două triunghiuri S , atunci drepte lui Simson ale vârfurilor triunghiului $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC și ale vârfurilor triunghiului ABC în raport cu triunghiul $A'B'C'$ trec prin același punct care se află la mijlocul segmentului ce unește ortocentrele celor două triunghiuri.*

Demonstrație. Fie H și H' ortocentrele triunghiurilor ABC , respectiv $A'B'C'$; M, N și P mijloacele segmentelor HA', HB' , respectiv HC' (Figura 1.65). Triunghiurile MNP și $A'B'C'$ au laturile paralele. Deoarece drepte lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC sunt perpendiculare pe $B'C', A'C'$ respectiv $A'B'$ și ele trec prin punctele M, N , respectiv P (vezi „Dreapta lui Simson” [15]). Drepte lui Simson ale punctelor A', B', C' în raport cu triunghiul ABC sunt înălțimile triunghiului MNP , deci concurente în ortocentrul acestuia, punct care este mijlocul segmentului HH' . Schimbând rolurile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ rezultă că drepte Simson ale vârfurilor triunghiul $A'B'C'$ în raport cu triunghiul ABC sunt concurente tot în mijlocul segmentului HH' . \square

Consecința 331 *Dacă H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor S , ABC și $A'B'C'$, atunci triunghiul omotetic triunghiului ABC prin omotetia $(H', 1/2)$ și triunghiul omotetic triunghiului $A'B'C'$ prin omotetia $(H, 1/2)$ au același ortocentru în punctul comun al dreptelor lui Simson.*

Teorema 332 *Fie $(ABC, \alpha\beta\gamma)$ și $(ABC, \alpha'\beta'\gamma')$ două perechi de triunghiuri S înscrise în același cerc. Triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt triunghiuri S unul față de celălalt.*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile ABC și $\alpha\beta\gamma$ sunt triunghiuri S rezultă:

$$m(\widehat{A\alpha}) + m(\widehat{B\beta}) + m(\widehat{C\gamma}) = 0(\text{mod}360^\circ), \tag{1}$$

²⁴Denumirea a fost dată de Traian Lalescu

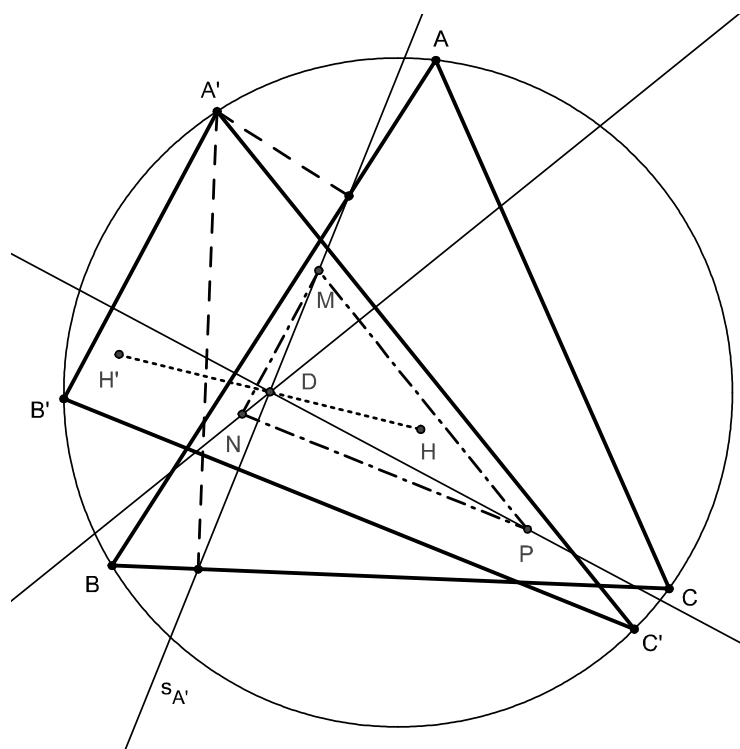


Figura 1.65: Triunghiuri S

iar din faptul că triunghiurile ABC și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt triunghiuri S rezultă

$$m(\widehat{A\alpha'}) + m(\widehat{B\beta'}) + m(\widehat{C\gamma'}) = 0(\text{mod}360^\circ). \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$m(\widehat{\alpha\alpha'}) + m(\widehat{\beta\beta'}) + m(\widehat{\gamma\gamma'}) = 0(\text{mod}360^\circ),$$

adică triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha'\beta'\gamma'$ sunt triunghiuri S . □

Consecința 333 În cercul circumscris unui triunghi ABC se pot înscrie o infinitate de triunghiuri S în raport cu triunghiul ABC .

Observația 334 Toate aceste triunghiuri înscrise în cercul circumscris triunghiului ABC , împreună cu triunghiul ABC determină o familie de triunghiuri S .

Teorema 335 Dreapta lui Simson a unui punct M în raport cu triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ înscrise în același cerc cu triunghiul ABC , față de care sunt triunghiuri S , păstrează o direcție fixă.

Demonstrație. Considerăm o coardă NP în cercul circumscris triunghiului ABC , astfel încât triunghiul MNP este un triunghi S față de familia de triunghiuri considerată. Atunci, dreptele lui Simson ale punctului M în raport cu triunghiurile considerate sunt perpendiculare pe dreapta NP . □

Observația 336 *Proprietatea precedentă poate fi reformulată astfel: dreptele lui Simson ale unui punct M în raport cu triunghiurile S sunt paralele între ele.*

Teorema 337 *Două triunghiuri înscrise în același cerc care au un vârf comun și laturile opuse paralele, sunt triunghiuri S .*

Demonstrație. Fie A vârful comun triunghiurilor ABC și $AB'C'$. Deoarece $B'C' \parallel BC$, rezultă $m(\widehat{B'B}) = m(\widehat{C'C})$, de unde $m(\widehat{B'B}) + m(\widehat{C'C}) = 0$, unde arcele $B'B$ și $C'C$ au fost măsurate în sens trigonometric. Rezultă că triunghiurile ABC și $AB'C'$ sunt triunghiuri S . \square

Consecința 338 *Dacă unuia dintre triunghiurile unei familii S deplasăm o latură paralelă cu ea însăși, triunghiurile rămân, de asemenea, triunghiuri S .*

Din cele de mai sus se pot deduce diferite procedee de construcție a unui triunghi S în raport cu un triunghi dat, când i se cunosc două vârfuri. Astfel, fie triunghiul ABC și punctele B' și C' pe cercul circumscris triunghiului ABC .

i) Construim dreapta lui Simson $d_{B'}$ a punctului B' în raport cu triunghiul ABC . Punctul de intersecție dintre perpendiculara dusă din C' pe $d_{B'}$ și cercul circumscris triunghiului ABC este cel de-al treilea vârf al triunghiului cerut (Figura 1.66).

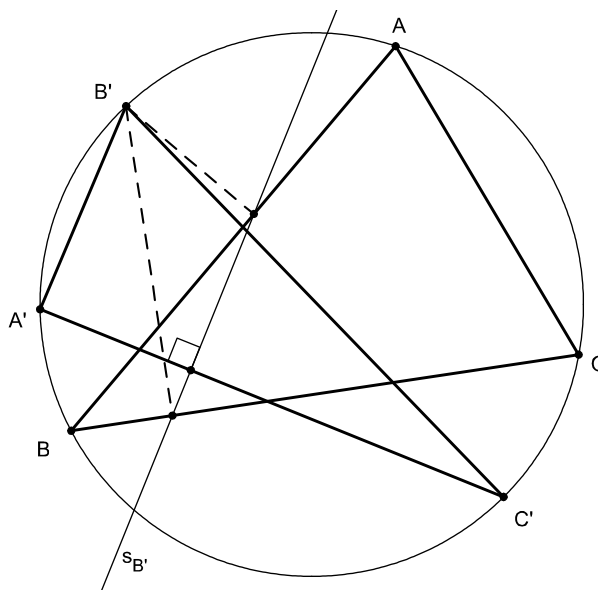


Figura 1.66: Procedeu de construcție a unui triunghi S (1)

ii) Prin vârful A al triunghiului ABC construim o paralelă la dreapta $B'C'$ care intersectează din nou cercul în A^* . Punctul de intersecție dintre paralela dusă din A^* la BC cu cercul circumscris triunghiului ABC este vârful A' al triunghiului căutat (Figura 1.67).

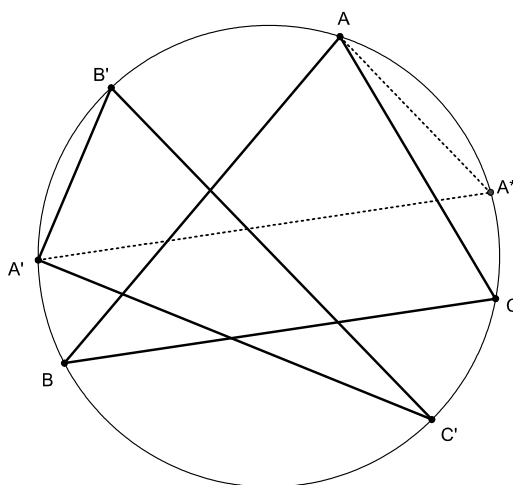


Figura 1.67: Procedeu de construcție a unui triunghi S (2)

iii) Prin vârful A al triunghiului ABC construim perpendiculara pe coarda $B'C'$ care intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în A^* . Perpendiculara din A^* pe BC intersectează cercul în A' - punctul căutat (Figura 1.68).

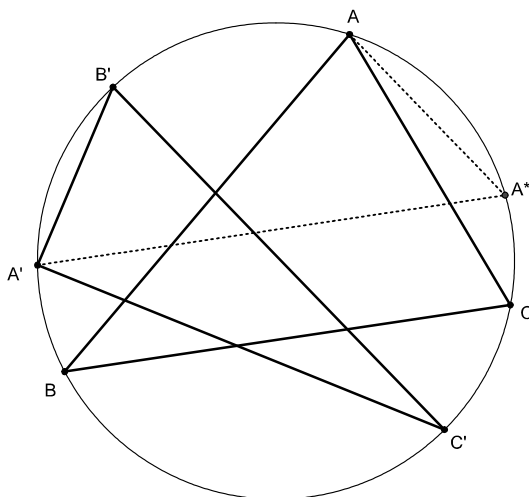


Figura 1.68: Procedeu de construcție a unui triunghi S (3)

Teorema 339 *Triunghiurile ortice $H_aH_bH_c$ și median $M_aM_bM_c$ ale unui triunghi sunt triunghiuri S în cercul lui Euler al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Perpendiculara din punctul M_a pe latura H_bH_c a triunghiului ortic intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC în punctul eulerian

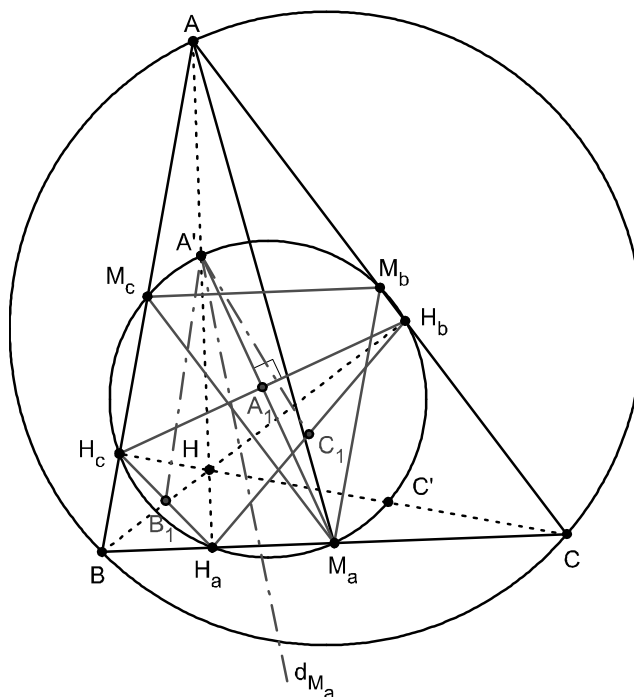


Figura 1.69: Triunghiurile $S : H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$

A' (mijlocul segmentului AH) (Figura 1.69). Întrucât perpendiculara din A' pe latura M_bM_c a triunghiului median cade în punctul H_a rezultă - conform observațiilor precedente - că triunghiurile median și ortic ale triunghiului ABC sunt triunghiuri S în cercul lui Euler al triunghiului ABC . \square

Teorema 340 *Mijlocul segmentului ce unește ortocentrele triunghiurilor median și ortic ale unui triunghi ABC este punctul lui Spieker al triunghiului ortic.*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$ sunt triunghiuri S vom arăta că punctul lui Spieker al triunghiului ortic este punctul de întâlnire al dreptelor lui Simson ale vârfurilor triunghiului $M_aM_bM_c$ în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ (Figura 1.69). Segmentul $A'M_a$ este diametru în cercul lui Euler, $A'M_a \perp H_bH_c$ și fie $\{A_1\} = H_bH_c \cap A'M_a$, A_1 fiind mijlocul segmentului H_bH_c (vezi “Cercul lui Euler” [15]), deci dreapta lui Simson d_{M_a} a punctului M_a în raport cu triunghiul $H_aH_bH_c$ trece prin A_1 .

Deoarece $H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$ sunt triunghiuri S , rezultă că $d_{M_a} \perp M_bM_c$, deci $d_{M_a} \perp AH_a$. Fie B_1 și C_1 mijloacele segmentelor H_aH_c , respectiv H_aH_b . Cum $A'H_a$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle H_cH_aH_b$ și $B_1A_1 \parallel H_aH_b$, $A_1C_1 \parallel H_aH_c$ rezultă că d_{M_a} este bisectoarea unghiului $\sphericalangle B_1A_1C_1$. Analog se arată că dreapta lui Simson d_{M_b} a punctului M_b este bisectoarea unghiului $\sphericalangle A_1B_1C_1$, deci punctul de concurență al dreptelor lui Simson - mijlocul segmentului ce unește ortocentrele triunghiurilor S , $H_aH_bH_c$ și $M_aM_bM_c$ - este punctul lui Spieker al triunghiului ortic $H_aH_bH_c$. \square

Teorema 341 *Triunghiul $A'B'C'$, determinat de punctele euleriene ale triunghiului ABC și triunghiul $A''B''C''$, având ca vârfuri punctele unde mediatoarele triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC , sunt două triunghiuri S .*

Demonstrație. Dacă $O_aO_bO_c$ este triunghiul lui Carnot al triunghiului ABC , atunci triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul median al triunghiului $O_aO_bO_c$, iar triunghiul $A''B''C''$ este triunghiul ortic al aceluiași triunghi (vezi „Triunghiul Carnot”) și conform proprietăților precedente, rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sunt triunghiuri S . \square

Teorema 342 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortopolare dacă și numai dacă $abc = a'b'c'$ (unde cu x am notat afixul punctului X).*

Demonstrație. Fie P, Q, R picioarele perpendicularelor duse din punctul A' pe dreptele BC, CA , respectiv AB .

Lemă. Fie X un punct în interiorul unui triunghi ABC și P proiecția lui X pe BC . Afixul punctului P este egal cu

$$p = \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \bar{x} + b + c \right),$$

unde cu a, b, c, x am notat afixele punctelor A, B, C , respectiv X , iar R este raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație lemă. Ecuațiile dreptelor BC și XP sunt:

$$(z - b)(\bar{c} - \bar{b}) - (\bar{z} - \bar{b})(c - b) = 0,$$

respectiv

$$(z - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{z} - \bar{x})(c - b) = 0.$$

Deoarece punctul P aparține dreptelor BC și XP rezultă

$$(2p - b - x)(\bar{c} - \bar{b}) + (\bar{b} - \bar{x})(c - b) = 0,$$

de unde

$$p = \frac{1}{2} \left[b + x + \frac{c - b}{\bar{c} - \bar{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right] = \frac{1}{2} \left[b + x \frac{c - b}{\frac{R^2}{c} - \frac{R^2}{b}} (\bar{x} - \bar{b}) \right]$$

sau

$$p = \frac{1}{2} \left[b + x - \frac{bc}{R^2} (\bar{x} - \bar{b}) \right] = \frac{1}{2} \left(x - \frac{bc}{R^2} \cdot \bar{x} + b + c \right).$$

Demonstrația teoremei. Avem:

$$p = \frac{1}{2} \left(a' - \frac{bc}{R^2} \bar{a}' + b + c \right), q = \frac{1}{2} \left(a' - \frac{ca}{R^2} \bar{a}' + c + a \right), r = \frac{1}{2} \left(a' - \frac{ab}{R^2} \bar{a}' + a + b \right).$$

Dacă A' nu coincide cu un vârf al triunghiului ABC , atunci condiția de perpendicularitate dintre PQ și $B'C'$ este echivalentă cu

$$(\bar{p} - \bar{q})(b' - c') + (p - q)(\bar{b}' - \bar{c}') = 0$$

sau

$$(\bar{b} - \bar{a})(R^2 - \bar{c}a')(b' - c'^2 - c \cdot \bar{a}')(\bar{b}' - \bar{c}) = 0$$

sau mai departe

$$\left(\frac{R^2}{b} - \frac{R^2}{a}\right) \left(R^2 - \frac{R^2}{c}a'\right) (b' - c') + (b - a) \left(R^2 - c\frac{R^2}{a'}\right) \left(\frac{R^2}{b'} - \frac{R^2}{c'}\right) = 0,$$

de unde rezultă că $(abc - a'b'c')(a - b)(c - a')(b' - c') = 0$, deci $abc = a'b'c'$.

Dacă A' coincide - de exemplu - cu vârful A , atunci dreapta lui Simson a lui A' este perpendiculara din A pe BC . Dreptele $A'P$ și $B'C'$ sunt perpendiculare dacă și numai dacă $BC \parallel B'C'$, adică $bc = b'c'$ sau $abc = a'b'c'$ (deoarece $a = a'$). \square

1.23 Triunghiuri ortologice

„Orice număr este zero înaintea infinitului.” – Victor Hugo²⁵

Triunghiul ABC este *ortologic* cu triunghiul $A'B'C'$ dacă perpendicularele din A, B, C pe $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ sunt concurente (Figura 1.70). Punctul de concurență se numește *centrul* acestei ortologii.

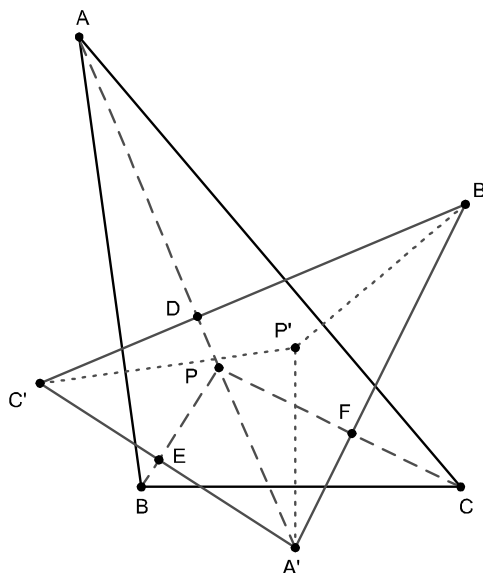


Figura 1.70: Triunghiuri ortologice

²⁵Victor Hugo (1802-1885) – scriitor francez

Teorema 343 Dacă triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$, atunci și triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul ABC .

Demonstrație. Soluția 1. Fie D, E, F proiecțiile punctelor A, B și C pe laturile $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ (Figura 1.70). Avem:

$$\begin{aligned} B'A^2 - B'D^2 &= C'A^2 - C'D^2 = DA^2, \\ C'B^2 - C'E^2 &= A'B^2 - A'E^2 = BE^2, \\ A'C^2 - A'F^2 &= B'C^2 - B'F^2 = CF^2. \end{aligned}$$

Din relațiile precedente prin sumare obținem: $(B'A^2 + C'B^2 + A'C^2) - (B'D^2 + C'E^2 + A'F^2) = (A'B^2 + B'C^2 + C'A^2) - (A'E^2 + B'F^2 + C'D^2)$ (*). Din teorema lui Carnot rezultă că

$$B'A^2 + C'B^2 + A'C^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2.$$

Relația (*) devine: $B'D^2 + C'E^2 + A'F^2 = A'E^2 + B'F^2 + C'D^2$ (**). Condiția ca triunghiul ABC să fie ortologic cu triunghiul $A'B'C'$ este dată de relația (**). Pentru ca triunghiul $A'B'C'$ să fie ortologic cu triunghiul ABC este suficient să permutăm în relația (**) rolurile triunghiului ABC cu cel al lui $A'B'C'$, prin această permutare se obține tot relația (**), ceea ce arată că și triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul ABC .

Soluția 2. Notăm cu P punctul de concurență al perpendicularelor din A, B, C pe laturile triunghiului $A'B'C'$ și cu P' punctul de intersecție al perpendicularelor din A' și B' pe BC , respectiv AC . Avem:

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{P'C'} - \overrightarrow{P'B'}, \quad \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{P'A'} - \overrightarrow{P'C'}, \quad \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{P'B'} - \overrightarrow{P'A'}.$$

Folosind aceste relații obținem

$$0 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{P'C'} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{P'B'} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{P'A'} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Cum $P'B' \perp AC$ și $P'A' \perp BC$, avem $\overrightarrow{P'B'} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{P'A'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, deci $\overrightarrow{P'C'} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$, de unde rezultă $P'C' \perp AB$. Prin urmare perpendicularele din A', B', C' pe laturile triunghiului ABC sunt concurente în P' . \square

Observația 344 Două triunghiuri care satisfac proprietățile de mai sus se numesc ortologice. Fie P și P' cele două centre de ortologie ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Dacă centrele de ortologie P și P' coincid, atunci triunghiurile se numesc bilogice.

Teorema 345 Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice dacă și numai dacă este adevărată relația: $B'A^2 + C'B^2 + A'C^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2$.

Demonstrația rezultă de mai sus. \square

Teorema 346 Triunghiul ABC și triunghiul podar al unui punct P sunt ortologice, centrele de ortologie fiind P și izogonalul său P' .

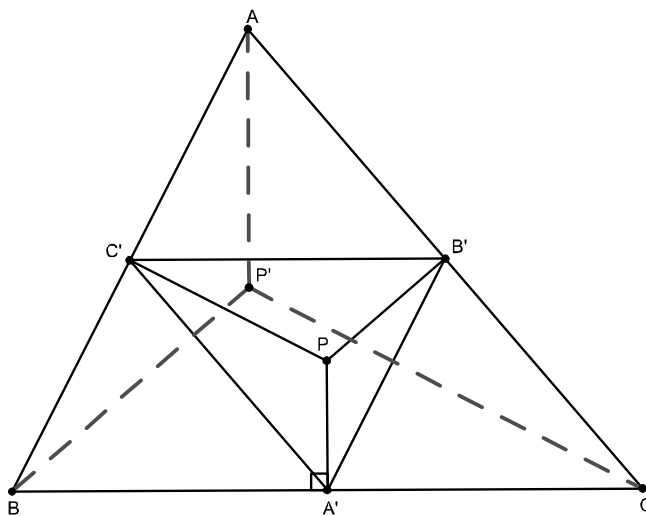


Figura 1.71: $\triangle ABC$ și triunghiul podar al unui punct P sunt ortologice

Demonstrație. Triunghiul $A'B'C'$ este ortologic cu triunghiul ABC , centrul acestei ortologii fiind P (Figura 1.71). Conform teoremei de ortologie, triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul $A'B'C'$, centrul acestei ortologii fie că este punctul P' . Patrulaterul $BA'PC'$ fiind inscriptibil rezultă:

$$m(\sphericalangle ABP') = 90^\circ - m(\sphericalangle A'C'B) = 90^\circ - m(\sphericalangle BPA') = m(\sphericalangle PBA') = m(\sphericalangle PBC),$$

deci $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle P'BC$, adică dreptele BP și BP' sunt izogonale. Analog se arată că dreptele AP și AP' sunt izogonale, deci punctele P și P' sunt izogonale. \square

Teorema 347 *Triunghiul antipodar al unui punct P este ortologic cu triunghiul cevian al punctului P în raport cu triunghiul ABC .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antipodar”. \square

Teorema 348 *Triunghiul antisuplementar $I_aI_bI_c$ și triunghiul cevian al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice.*

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler” [15]. \square

Teorema 349 *Dacă triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice având centrele de ortologie P și P' , atunci coordonatele baricentrice ale lui P în raport cu triunghiul ABC sunt egale cu coordonatele baricentrice ale lui P' în raport cu triunghiul $A'B'C'$.*

Demonstrație. Deoarece $A'P' \perp BC$, $B'P' \perp AC$, $C'P' \perp AB$ rezultă:

$$\sin \widehat{B'P'C'} = \sin \widehat{A}, \quad \sin \widehat{P'B'C'} = \sin \widehat{PAC} \quad \text{și} \quad \sin \widehat{P'C'B'} = \sin \widehat{PAB}$$

(Figura 1.71). Din teorema sinusurilor în triunghiul $P'B'C'$ rezultă

$$\frac{P'B'}{\sin \widehat{P'C'B'}} = \frac{P'C'}{\sin \widehat{P'B'C'}},$$

de unde:

$$\frac{\sin \widehat{PAC}}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{P'C'}{P'B'}. \quad (1)$$

Atunci,

$$\frac{A_{[PAC]}}{A_{[PAB]}} = \frac{b \cdot PA \cdot \sin \widehat{PAC}}{c \cdot PA \cdot \sin \widehat{PAB}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin \widehat{PAC}}{\sin \widehat{PAB}} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\frac{b}{P'B'} : \frac{c}{P'C'} = \frac{A_{[PAC]}}{A_{[PAB]}}. \quad (3)$$

Analog se arată că $\frac{a}{P'A'} : \frac{b}{P'B'} = \frac{A_{[PBC]}}{A_{[PCA]}}$ (4). Relațiile (3) și (4) dau coordonatele baricentrice ale punctului P' în raport cu triunghiul ABC :

$$\begin{aligned} A_{[P'B'C']} &: A_{[P'C'A']} : A_{[P'A'B']} = \\ &= [P'B' \cdot P'C' \cdot \sin A] : [P'C' \cdot P'A' \cdot \sin B] : [P'A' \cdot P'B' \cdot \sin C] \\ &= \frac{a}{P'A'} : \frac{b}{P'B'} : \frac{c}{P'C'} = A_{[PBC]} : A_{[PAC]} : A_{[PAB]}. \end{aligned}$$

□

Observația 350 *Proprietatea de mai sus ne arată că dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci P' este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.*

Teorema 351 *Triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului nedreptunghic ABC și triunghiului ABC sunt ortologice, centrele de ortologie fiind ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Perpendicularele din vârfurile A, B, C ale triunghiului nedreptunghic pe laturile $B'C', C'A'$, respectiv $A'B'$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC (vezi „Triunghiul ortic” [15]). □

Teorema 352 *Triunghiul ABC și triunghiul său median sunt ortologice, centrele lor de ortologie fiind ortocentrul și centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrația este evidentă. □

Teorema 353 *Fie $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC , H'_a, H'_b, H'_c punctele diametral opuse punctelor H_a, H_b , respectiv H_c în cercul lui Euler al triunghiului ABC . Triunghiurile ABC și $H'_aH'_bH'_c$ sunt ortologice.*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile $H_aH_bH_c$ și $H'_aH'_bH'_c$ sunt omotetice, rezultă - conform proprietății precedente - $OA \perp H'_cH'_b$, $OB \perp H'_aH'_c$ și $OC \perp H'_aH'_b$, adică triunghiurile ABC și $H'_aH'_bH'_c$ sunt ortologice, centrul cercului circumscris triunghiului ABC fiind unul dintre centrele de ortologie. \square

Teorema 354 Două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ simetrice față de o dreaptă sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece $AB' \equiv BA'$, $BC' \equiv CB'$ și $CA' \equiv AC'$, relația $B'A^2 + C'B^2 + A'C^2 = A'B^2 + B'C^2 + C'A^2$ este evident adevărată, deci triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice. \square

Teorema 355 Fie A' , B' , C' simetricele vârfurilor A , B , C ale unui triunghi ABC față de dreapta lui Euler a triunghiului ABC . Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt ortologice.

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă. \square

Teorema 356 Triunghiul ABC și primul său triunghi al lui Brocard sunt ortologice, centrele lor de ortologie fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC și punctul lui Tarry corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiurile lui Brocard”. \square

1.24 Triunghiuri bilogice

„Crucea pusă lângă numele unora mulți o iau drept plus.” - S. E. Lec²⁶

Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ se numesc *bilogice* dacă sunt *ortologice* și au aceleși *centru de ortologie*.

Teorema 357 Două triunghiuri bilogice sunt omologice.

Demonstrație. Fie $\{D\} = AO \cap B'C'$, $\{E\} = BO \cap C'A'$, $\{F\} = CO \cap A'B'$ (Figura 1.72). Atunci: $AD \perp B'C'$, $BE \perp A'C'$, $CF \perp A'B'$ și $A'O \perp BC$, $B'O \perp CA$, $C'O \perp AB$.

Fie $\{B''\} = BE \cap A'B'$, $\{C''\} = CF \cap A'C'$. Deoarece O este ortocentrul triunghiului $A'B''C''$, rezultă $A'O \perp B''C''$; cum $A'O \perp BC$ rezultă $BC \parallel B''C''$. Atunci,

$$m(\sphericalangle B''C''F) = m(\sphericalangle BCF) \quad (\text{unghiuri corespondente})$$

și cum $m(\sphericalangle B''C''F) = m(\sphericalangle B''EF)$ (deoarece patrulaterul $B''C''EF$ este inscriptibil) rezultă

$$m(\sphericalangle BCF) = m(\sphericalangle BEF),$$

²⁶Stanislaw Lec (1909-1966) – poet polonez

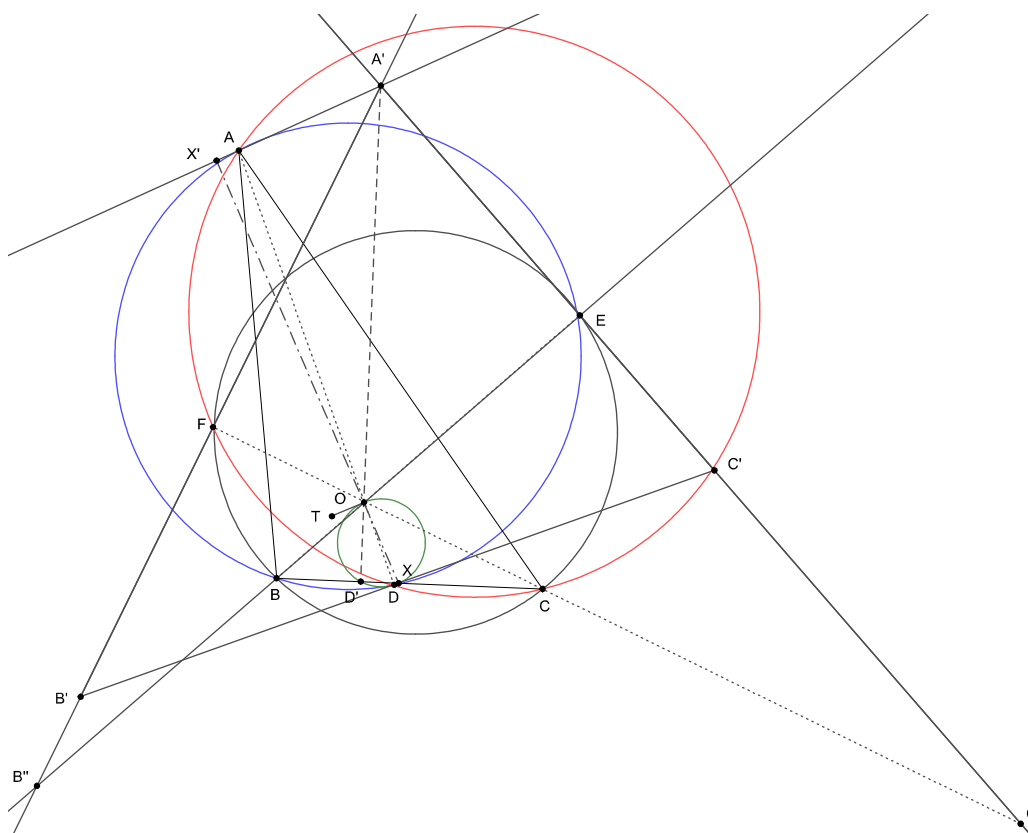


Figura 1.72: Triunghiuri bilogice

deci patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil. Analog se arată că punctele C, A, F, D respectiv A, B, D și E sunt conciclice. Dacă $\{X\} = BC \cap B'C'$, $\{Y\} = AC \cap C'A'$, $\{Z\} = AB \cap A'B'$ atunci conform teoremei lui Dergiades [15] rezultă că punctele X, Y și Z sunt coliniare; deci, conform reciprocei teoremei lui Desergues triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omologice. \square

Teorema 358 *Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri bilogice. Picioarele perpendicularelor duse din vârfurile B și C pe laturile $A'C'$ respectiv $A'B'$ și punctele B și C sunt conciclice.*

Demonstrația rezultă din teorema precedentă. \square

Teorema 359 *Fie XYZ axa de omologie dintre triunghiurile bilogice ABC și $A'B'C'$, iar O centrul comun de ortologie. Dreptele OX și AA' sunt perpendiculare.*

Demonstrație. Fie $\{D'\} = A'O \cap BC$, $\{E'\} = B'O \cap AC$. Conform proprietății precedente punctele A', B', D', E' aparțin unui cerc \mathcal{C}_1 . Din puterea punctului O față de cercul \mathcal{C}_1 rezultă

$$OA' \cdot OD' = OB' \cdot OE'. \tag{1}$$

Patrulaterul $B'CE'F$ fiind inscriptibil ($m(\sphericalangle BE'C) = m(\sphericalangle BFC) = 90^\circ$) rezultă

$$OB' \cdot OE' = OC \cdot OF. \quad (2)$$

Dacă $\{D\} = AO \cap B'C'$, atunci patrulaterul $AFDC$ este inscriptibil (conform proprietății precedente) de unde rezultă

$$OC \cdot OF = OA \cdot OD. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă $OA \cdot OD = OA' \cdot OD'$, adică punctele A, A', D și D' sunt conciclice, de unde

$$m(\sphericalangle AA'D') = m(\sphericalangle ADD'). \quad (4)$$

Fie OT tangenta în O la cercul (\mathfrak{C}) circumscris patrulaterului $OD'DX$ ($m(\sphericalangle OD'X) = m(\sphericalangle ODX) = 90^\circ$). Atunci,

$$m(\sphericalangle TOD') = m(\sphericalangle ODD'). \quad (5)$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă $m(\sphericalangle AA'O) = m(\sphericalangle TOD')$, deci $AA' \parallel OT$. Cum $OX \perp OT$ (ca diametru în cercul \mathfrak{C}) rezultă $OX \perp AA'$. \square

Observația 360 Analog se arată că $OY \perp BB'$ și $OZ \perp CC'$.

Teorema 361 Fie P centrul de omologie și XYZ axa de omologie dintre triunghiurile bilogice ABC și $A'B'C'$, iar O centrul comun de ortologie. Dreptele OP și XZ sunt perpendiculare.

Demonstrație. Fie $\{D'\} = A'O \cap BC$, $\{E'\} = B'O \cap AC$, $\{X'\} = OX \cap AA'$ și $\{Y'\} = OY \cap BB'$. Conform proprietății precedente $XX' \perp AA'$, deci patrulaterul $A'X'D'X$ este inscriptibil. Din puterea punctului O față de cercul circumscris patrulaterului $A'X'D'X$, rezultă

$$OX \cdot OX' = OA' \cdot OD'. \quad (1)$$

Punctele A', B', D', E' fiind conciclice – din puterea punctului O față de acest cerc – rezultă

$$OA' \cdot OD' = OB' \cdot OE'. \quad (2)$$

Deoarece $OY \perp BB'$ rezultă $m(\sphericalangle YY'B) = 90^\circ = m(\sphericalangle BEY)$, deci punctele B, Y', E', Y sunt conciclice, de unde $OB' \cdot OE' = OY' \cdot OY$ (3). Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă

$$OX \cdot OX' = OY \cdot OY',$$

adică punctele X, X', Y și Y' sunt conciclice. Dacă \mathfrak{C}_2 este cercul de diametru OP , atunci OP este perpendiculară pe tangenta OT în O la \mathfrak{C}_2 , iar $OT \parallel XY$ (analog cu demonstrația din teorema precedentă), de unde $OP \perp XY$. \square

1.25 Triunghiuri biortologice. Triunghiuri triortologice

„Matematica seamăna cu o moară: dacă veți turna în ea boabe de grâu, veți obține făină, dar dacă veți turna în ea tărâțe, tărâțe veți obține.” - Aldous Huxley²⁷

Triunghiul ABC se numește *biortologic* cu triunghiul $A'B'C'$, dacă el este ortologic în același timp cu triunghiul $A'B'C'$ și cu triunghiul $B'C'A'$. Triunghiul ABC se numește *triortologic* cu triunghiul $A'B'C'$, dacă triunghiul ABC este ortologic în același timp cu triunghiurile $A'B'C'$, $B'C'A'$ și $C'A'B'$.

Teorema 362 (*Pantazi*) *Dacă un triunghi ABC este ortologic în același timp cu triunghiurile $A'B'C'$ și $B'C'A'$, atunci triunghiul ABC este ortologic și cu triunghiul $C'A'B'$.*

Demonstrație. Fie $D_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ecuația dreptei BC și $D_2 = a'_1x + b'_1y + c'_1 = 0$ ecuația dreptei $B'C'$. Analog, se definesc ecuațiile dreptelor ce conțin vârfurile triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Fie Aa, Bc, Cc perpendicularele duse din A, B, C pe $B'C', A'C'$, respectiv $A'B'$. Avem:

$$\begin{aligned} (Aa) &: D_2 - \frac{a_2a'_1 + b_2b'_1}{a_3a'_1 + b_3b'_1} D_3 = 0, \\ (Bb) &: D_3 - \frac{a_3a'_2 + b_3b'_2}{a_1a'_2 + b_1b'_2} D_1 = 0, \\ (Cc) &: D_1 - \frac{a_1a'_3 + b_1b'_3}{a_2a'_3 + b_2b'_3} D_2 = 0. \end{aligned}$$

Condiția ca triunghiurile ABC și $A'B'C'$ să fie ortologice este:

$$\frac{a_2a'_1 + b_2b'_1}{a_3a'_1 + b_3b'_1} \cdot \frac{a_3a'_2 + b_3b'_2}{a_1a'_2 + b_1b'_2} \cdot \frac{a_1a'_3 + b_1b'_3}{a_2a'_3 + b_2b'_3} = 1,$$

egalitate echivalentă cu

$$(a_1a'_2 + b_1b'_2)(a_2a'_3 + b_2b'_3)(a_3a'_1 + b_3b'_1) = (a_1a'_3 + b_1b'_3)(a_2a'_1 + b_2b'_1)(a_3a'_2 + b_3b'_2). \quad (1)$$

Ținând seama de relația precedentă, pentru ca perpendicularele duse din A', B', C' pe laturile triunghiului ABC să fie concurente, este necesar ca:

$$(a'_1a_2 + b'_1b_2)(a'_2a_3 + b'_2b_3)(a'_3a_1 + b'_3b_1) = (a'_1a_3 + b'_1b_3)(a'_2a_1 + b'_2b_1)(a'_3a_2 + b'_3b_2), \quad (2)$$

care este chiar relația (1). Dacă perpendicularele duse din vârfurile triunghiului ABC pe laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt concurente, atunci și perpendicularele duse din vârfurile triunghiului $A'B'C'$ pe laturile triunghiului ABC sunt concurente. Pentru ca triunghiurile ABC și $B'C'A'$ să fie ortologice, trebuie ca:

$$(a_1a'_3 + b_1b'_3)(a_2a'_1 + b_2b'_1)(a_3a'_2 + b_3b'_2) = (a_1a'_1 + b_1b'_1)(a_2a'_2 + b_2b'_2)(a_3a'_3 + b_3b'_3). \quad (3)$$

²⁷ Aldous Huxley (1894-1963) – scriitor englez

Din relațiile (1) și (3) rezultă:

$$(a_1a'_1 + b_1b'_1)(a_2a'_2 + b_2b'_2)(a_3a'_3 + b_3b'_3) = (a_1a'_2 + b_1b'_2)(a_2a'_3 + b_2b'_3)(a_3a'_1 + b_3b'_1),$$

relație echivalentă cu faptul că triunghiurile ABC și $C'A'B'$ sunt ortologice. Astfel, dacă două triunghiuri sunt biortologice, atunci ele sunt triortologice. \square

Consecința 363 Dacă triunghiul ABC este ortologic cu triunghiurile $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_4$, ..., respectiv $M_{n-1}M_nM_1$, atunci triunghiul ABC este ortologic și cu triunghiul $M_nM_1M_2$.

1.26 Triunghiuri paralogice

„Nimeni să nu intre aici dacă nu știe geometrie.” - Platon²⁸ „

Fie M, N, P punctele de intersecție dintre dreapta d cu laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC . Punctele de intersecție dintre perpendicularele ridicate în punctele M, N, P pe dreptele BC, CA , respectiv AB sunt vârfurile unui triunghi $A'B'C'$ numit *triunghiul paralogic (ortoologic)* al triunghiului ABC .

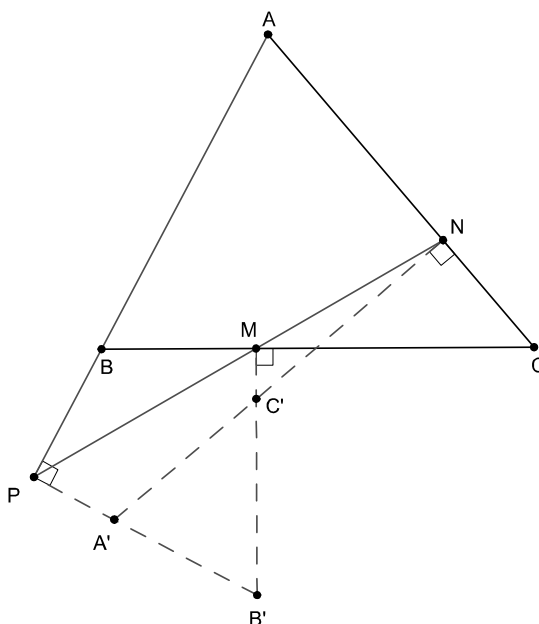


Figura 1.73: Triunghiuri paralogice

²⁸Platon (428-348) – filosof, logician, mathematician grec

Teorema 364 *Triunghiul paralogic $A'B'C'$ și triunghiul ABC sunt asemenea.*

Demonstrație. Patrulaterul $PMB'P$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle PB'M) = m(\sphericalangle ABC)$, adică $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle ABC$ (1). Patrulaterul $APA'N$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{B'A'N}) = m(\widehat{PAN})$, deci $\widehat{B'A'C'} \equiv \widehat{BAC}$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt asemenea (Figura 1.73). \square

Teorema 365 *Triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt omologice, dreapta d fiind axa de omologie.*

Demonstrație. Deoarece $\{P\} = AB \cap A'B'$, $\{M\} = BC \cap B'C'$, $\{N\} = AC \cap A'C'$ iar punctele M, N, P sunt coliniare, rezultă din teorema lui Desargues că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente, deci triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt omologice, dreapta d fiind axa de omologie. \square

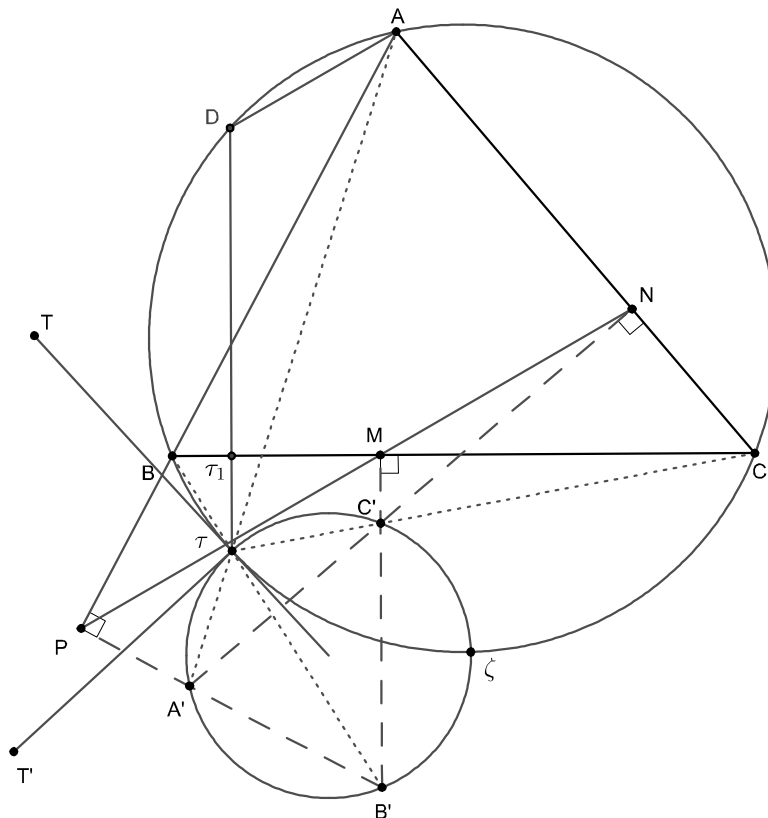


Figura 1.74: τ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A'B'C'$

Teorema 366 *Centrul de omologie (τ) dintre triunghiul ABC și triunghiul paralogic $A'B'C'$ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A'B'C'$.*

Demonstrație. Avem $\{\tau\} = AA' \cap BB' \cap CC'$ (Figura 1.74). Patrulateralele $PB'MB$ și $B'MNC$ fiind inscriptibile: $\sphericalangle NMC \equiv \sphericalangle NCC' \equiv \sphericalangle A'C'\tau$ și $\sphericalangle PMB \equiv \sphericalangle PB'B$, iar cum $\sphericalangle PMB \equiv \sphericalangle NMC$ (unghiuri opuse la vârf) avem: $\sphericalangle \tau C'A' \equiv \sphericalangle A'B'\tau$, adică patrulaterul $\tau A'B'C'$ este inscriptibil (1). Atunci

$$\sphericalangle A'\tau B' \equiv \sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B\tau A,$$

deci patrulaterul $B\tau CA$ este inscriptibil (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că τ aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. \square

Teorema 367 *Cercurile circumscrise triunghiurilor $A'B'C'$, ABC sunt ortogonale.*

Demonstrație. Fie \mathfrak{C} și \mathfrak{C}' cercurile circumscrise triunghiurilor ABC , respectiv $A'B'C'$, iar $T\tau$ și $T'\tau$ tangentele în punctul τ (centrul omologiei) la \mathfrak{C} , respectiv \mathfrak{C}' (Fig. 437). Atunci $m(\sphericalangle T\tau B) = m(\sphericalangle BA\tau)$,

$$m(\sphericalangle PA'\tau) = m(\sphericalangle A'B'\tau) + m(\sphericalangle T'\tau A') + m(\sphericalangle A'B'\tau) = m(\sphericalangle T'\tau B'),$$

de unde rezultă că:

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle T'\tau T) &= 180^\circ - [m(\sphericalangle T\tau B) + m(\sphericalangle T'\tau B')] \\ &= 180^\circ - [m(\sphericalangle PA\tau) + m(\sphericalangle PA'\tau)] \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \end{aligned}$$

deci cercurile \mathfrak{C} și \mathfrak{C}' sunt ortogonale. \square

Teorema 368 *Dreptele lui Simson ale punctului τ față de triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt paralele cu dreapta d .*

Demonstrație. Fie τ_1 proiecția lui τ pe BC și D punctul de intersecție dintre $\tau\tau_1$ cu cercul circumscris triunghiului ABC . Dreapta lui Simson corespunzătoare punctului τ în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu dreapta AB (vezi „Dreapta lui Simson” [15]) arătăm că $AD \parallel d$. Patrulateralele $ADBE$ și $BPB'M$ fiind inscriptibile, rezultă

$$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{D\tau B}) = 90^\circ - m(\widehat{\tau B\tau_1}) = 90^\circ - m(\widehat{MPB'}) = m(\widehat{BPM}),$$

deci $\widehat{DAP} \equiv \widehat{APM}$, adică $DA \parallel PM$. Atunci, dreapta lui Simson a punctului τ în raport cu triunghiul ABC este paralelă cu dreapta d . Analog se arată că dreapta lui Simson a punctului τ în raport cu triunghiul paralogic $A'B'C'$ este paralelă cu dreapta d . \square

Teorema 369 *Al doilea punct de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC este centrul de similitudine al triunghiurilor $A'B'C'$ și ABC .*

Demonstrație. Pentru ca punctul ζ să fie centrul de similitudine dintre triunghiurile omologice și asemenea $A'B'C'$ și ABC trebuie ca punctul ζ să fie pentru ambele

triunghiuri propriul său omolog, adică triunghiurile ζAC și $\zeta A'C'$ trebuie să fie asemenea. Avem:

$$\begin{aligned}\sphericalangle \zeta AC &\equiv \sphericalangle \zeta BC \equiv \sphericalangle CT\zeta \equiv \sphericalangle CA'\zeta, \\ \sphericalangle A\zeta C &\equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle A'\zeta C',\end{aligned}$$

deci triunghiurile ζAC și $\zeta A'C'$ sunt asemenea. \square

Observația 370 Analog se arată că triunghiurile ζAB și $\zeta A'B'$, respectiv ζBC și $\zeta B'C'$ sunt asemenea.

Teorema 371 Dacă H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor ABC și $A'B'C'$ atunci axa de omologie trece prin mijlocul segmentului HH' .

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Sondat” [15]. \square

1.27 Triunghiuri înscrise

Ușor nu e nici cântecul. Zi
și noapte – nimic nu-i ușor pe pământ,
căci roua e sudoarea privighetorilor
ce s-au ostenit toată noaptea cântând.” - Lucian Blaga ²⁹

Triunghiul $A'B'C'$ este înscris în triunghiul ABC , dacă pe fiecare latură a triunghiului ABC se află câte un singur vârf al triunghiului $A'B'C'$, ($A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$).

Teorema 372 Triunghiul $A'B'C'$ înscris în triunghiul ABC are laturile paralele cu trei ceviane concurente ale triunghiului ABC dacă și numai dacă:

$$\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1$$

sau

$$\frac{CA'}{BC} + \frac{AB'}{AC} + \frac{BC'}{AB} = 1.$$

Demonstrație. Fie AA_1, BB_1, CC_1 cevianele concurente. Laturile triunghiului $A'B'C'$ fiind paralele cu cevianele AA', BB', CC' rezultă că sunt posibile două ordonări:

- i) $B - A' - A_1 - C$, $C - B' - B_1 - A$, $A - C' - C_1 - B$ (Figura 1.75)
- ii) $B - A_1 - A' - C$, $C - B_1 - B' - A$, $A - C_1 - C' - B$ (Figura 1.76)

²⁹Lucian Blaga (1895-1961) - filozof, umanist, jurnalist, poet, dramaturg, traducător, profesor universitar și diplomat român, membru titular al Academiei Române

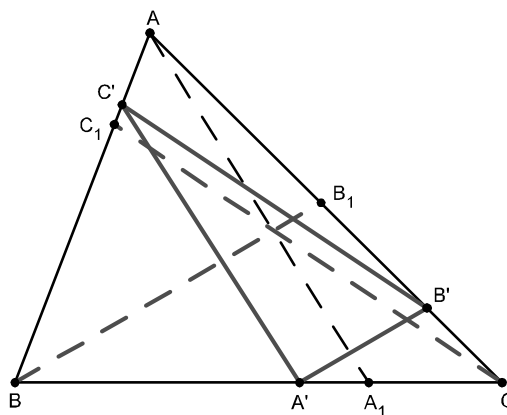


Figura 1.75: Triunghiuri înscrise (1)

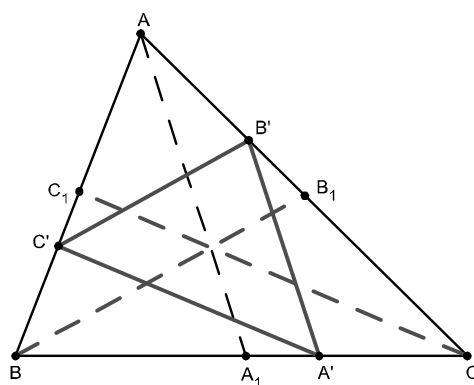


Figura 1.76: Triunghiuri înscrise (2)

i) Din reciproca teoremei lui Ceva rezultă

$$\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A} = 1. \tag{1}$$

Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB și cu $x = \frac{BA'}{BC}$, $y = \frac{CB'}{CA}$, $z = \frac{AC'}{AB}$, $x, y, z \in (0, 1)$. Din teorema lui Thales rezultă $\frac{AC'}{AB} = \frac{A_1A'}{A_1B}$, de unde

$$z = 1 - \frac{BA'}{A_1B} = 1 - \frac{ax}{A_1B}$$

adică $\frac{a}{A_1B} = \frac{1-z}{x}$, deci

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{1-x-z}{x}. \tag{2}$$

Analog, $\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{1-x-y}{y}$ (3) și $\frac{C_1B}{C_1A} = \frac{1-y-z}{z}$ (4). Fie $1-x-y-z = t$. Din relațiile (1) - (4) rezultă

$$t[t^2 + (x + y + z) \cdot t + (xy + yz + zx)] = 0,$$

adică

$$(1 - x - y - z)[(1 - x)(1 - y)(1 - z) + xyz] = 0.$$

Deoarece $(1 - x)(1 - y)(1 - z) + xyz > 0$, rezultă că $x + y + z = 1$, relație echivalentă cu

$$\frac{BA'}{BC} + \frac{CB'}{CA} + \frac{AC'}{AB} = 1.$$

Cazul ii) se tratează analog. □

1.28 Triunghiuri înscrise izotomice

„Pitagora a sacrificat pe altarul lui Zeus o sută de boi și acesta numai pentru un singur adevăr geometric. Dar dacă în zilele noastre am proceda în același fel, este puțin probabil că am putea găsi atâtea vite cornute pe întreg globul pământesc.” - M. V. Lomonosov³⁰

Fie M și M' ; N și N' ; P și P' puncte izotomice pe laturile triunghiului ABC . Triunghiurile MNP și $M'N'P'$ se numesc *izotomice*.

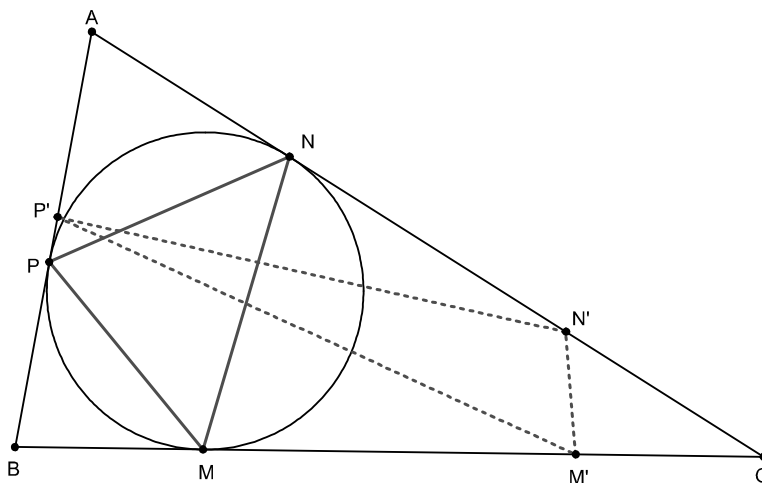


Figura 1.77: Triunghiuri înscrise izotomice

Teorema 373 *Triunghiurile de contact și cel cotangentic corespunzătoare unui triunghi ABC sunt izotomice.*

³⁰Mikhailo Lomonosov (1711-1765) – chimist rus

Demonstrație. Deoarece $BM = CM' = p - b$, $CN = AN' = p - c$ și $AP = BP' = p - a$ (Figura 1.77) rezultă că triunghiurile de contact și cotangentice ale triunghiului ABC sunt izotomice, unde a, b, c și p lungimile laturilor, respectiv semiperimetrul triunghiului ABC . \square

Teorema 374 *Triunghiurile izotomice înscrise într-un triunghi au arii egale.*

Demonstrație. Soluția 1. Fie $x = AP' = BP$, $y = AN' = CN$, $z = BM = CM'$, $\alpha = MM'$, $\beta = NN'$, $\gamma = PP'$. Avem:

$$A_{[MNP]} = A_{[ABC]} - [A_{[PAN]} + A_{[BMP]} + A_{[NCM]}]$$

și

$$A_{[M'N'P']} = A_{[ABC]} - [A_{[P'AN']} + A_{[BM'P']} + A_{[N'CM']}].$$

Arătăm că

$$A_{[PAN]} + A_{[BMP]} + A_{[NCM]} = A_{[P'AN']} + A_{[BM'P']} + A_{[N'CM']}.$$

Egalitatea precedentă este echivalentă cu

$$\begin{aligned} & \frac{(x + \gamma)(y + \beta) \sin A}{2} + \frac{xz \sin B}{2} + \frac{(\alpha + z)y \sin C}{2} \\ = & \frac{xy \sin A}{2} + \frac{(x + \gamma)(z + \alpha) \sin B}{2} + \frac{z(y + \beta) \sin C}{2}, \end{aligned}$$

adică:

$$\begin{aligned} & x\alpha \sin B + \gamma z \sin B + \gamma\alpha \sin B + z\beta \sin C \\ = & x\beta \sin A + \gamma y \sin A + \gamma\beta \sin A + \alpha y \sin C \end{aligned}$$

și utilizând teorema sinusurilor obținem

$$x\alpha b + \gamma z b + \gamma\alpha b + z\beta c = x\beta a + \gamma y a + \gamma\beta a + \alpha y c.$$

Cum $a = 2z + \alpha$, $b = 2y + \beta$, $c = 2x + \gamma$, egalitatea precedentă devine evidentă, deci

$$A_{[MNP]} = A_{[M'N'P']}.$$

Soluția 2. Fie MNP și $M'N'P'$ două triunghiuri izotomice înscrise în triunghiul ABC și $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{1-m}$, $\frac{CN}{NA} = \frac{n}{1-n}$, $\frac{AP}{PA} = \frac{p}{1-p}$. Afixele punctelor M, N și P sunt:

$$\begin{aligned} z_M &= (1 - m) \cdot z_B + m \cdot z_C, \\ z_N &= (1 - n) \cdot z_C + n \cdot z_A, \\ z_P &= (1 - p) \cdot z_A + p \cdot z_B. \end{aligned}$$

Atunci, aria triunghiului MNP este egală cu:

$$\begin{aligned} A_{[MNP]} &= \frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_M & \bar{z}_M & 1 \\ z_N & \bar{z}_N & 1 \\ z_P & \bar{z}_P & 1 \end{vmatrix} \\ &= [mnp + (1 - m)(1 - n)(1 - p)] \cdot \frac{i}{4} \cdot \begin{vmatrix} z_A & \bar{z}_A & 1 \\ z_B & \bar{z}_B & 1 \\ z_C & \bar{z}_C & 1 \end{vmatrix} \quad (*) \\ &= [mnp + (1 - m)(1 - n)(1 - p)] \cdot A_{[ABC]}. \end{aligned}$$

Analog, $\frac{BM'}{M'C} = \frac{1-m}{m}$, $\frac{CN'}{N'A} = \frac{1-n}{n}$ și $\frac{AP'}{P'B} = \frac{1-p}{p}$, iar

$$\begin{aligned}z_{M'} &= (1-m) \cdot z_C + m \cdot z_B, \\z_{N'} &= (1-n) \cdot z_A + n \cdot z_C, \\z_{P'} &= (1-p) \cdot z_B + p \cdot z_A.\end{aligned}$$

Aria triunghiului $M'N'P'$ se obține înlocuind în relația (*) pe m, n și p cu $1-m, 1-n$, respectiv $1-p$, obținându-se aceeași expresie, deci

$$A_{[MNP]} = A_{[M'N'P']}.$$

□

Teorema 375 *Centrul de greutate a două triunghiuri izotomice MNP și $M'N'P'$ înscrise în triunghiul ABC sunt simetrice față de centrul de greutate al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Din aplicația precedentă rezultă că afixul centrului de greutate al triunghiului MNP este

$$z_{G_1} = \frac{z_M + z_N + z_P}{3} = \frac{(1+n-p)z_A + (1+p-m)z_B + (1+m-n)z_C}{3},$$

iar afixul centrului de greutate al triunghiului $M'N'P'$ este egal cu:

$$z_{G_2} = \frac{z_{M'} + z_{N'} + z_{P'}}{3} = \frac{(1-n+p)z_A + (1-p+m)z_B + (1-m+n)z_C}{3},$$

de unde

$$\frac{z_{G_1} + z_{G_2}}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = z_G,$$

adică tocmai afixul centrului de greutate al triunghiului ABC . □

Observația 376 *Centrul de greutate al triunghiului ABC este mijlocul segmentului ce unește centrele de greutate al triunghiului de contact, respectiv cotangentic corespunzătoare triunghiului ABC .*

1.29 Triunghiuri coparalele

„Expresia, conform căreia cel care nu cunoaște sau îi este străină geometria nu are dreptul să între în școala filozofului, deloc nu înseamnă, că este necesar să fii matematician, pentru a deveni înțelept.” - J. W. von Goethe³¹

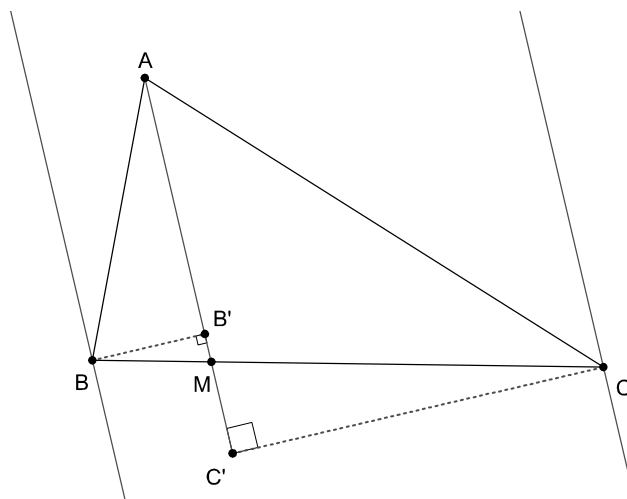


Figura 1.78: $A_{[ABC]} = \frac{AM \cdot d}{2}$, $M \in (BC)$

Teorema 377 Dacă M este un punct ce aparține laturii BC a triunghiului ABC , iar d este distanța dintre paralelele duse la AM prin B și C , atunci $A_{[ABC]} = \frac{AM \cdot d}{2}$.

Demonstrație. Fie B' și C' proiecțiile punctelor B și C pe dreapta AM . Dacă $M \in (BC)$ - Figura 1.78 - atunci

$$A_{[ABC]} = A_{[ABM]} + A_{[AMC]} = \frac{AM \cdot BB'}{2} + \frac{AM \cdot CC'}{2} = \frac{AM \cdot d}{2}.$$

Dacă $M \in BC \setminus (BC)$ - Figura 1.79 și Figura 1.80 - avem:

$$A_{[ABC]} = |A_{[ABM]} - A_{[AMC]}| = \left| \frac{AM \cdot BB'}{2} - \frac{AM \cdot CC'}{2} \right| = \frac{AM \cdot d}{2}.$$

□

³¹J. W. von Goethe (1739-1832) - scriitor german

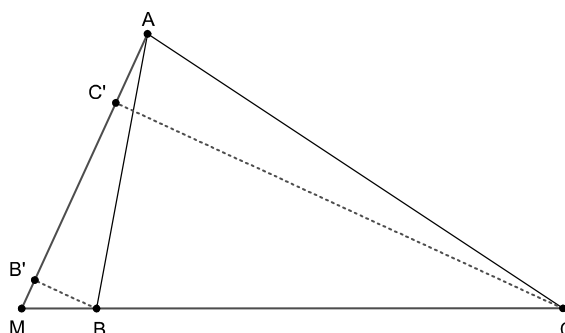


Figura 1.79: $A_{[ABC]} = A_{[AMC]} - A_{[AMB]}$

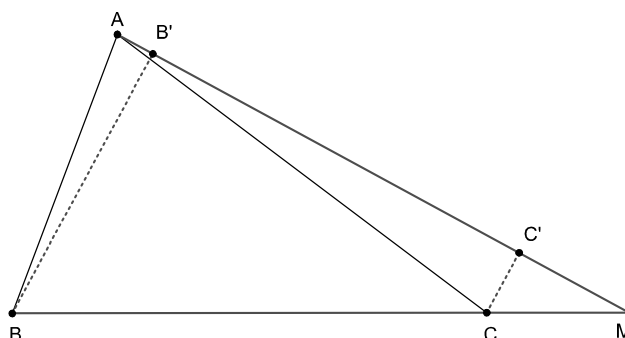


Figura 1.80: $A_{[ABC]} = A_{[ABM]} - A_{[AMC]}$

Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ se numesc *coparalele* dacă $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

Teorema 378 Fie ABC și $A_1B_1C_1$ două triunghiuri coparalele. Dacă înălțimile vârfulor A și A_1 ale celor două triunghiuri sunt necongruente, atunci există punctele $M \in BC$ și $M_1 \in B_1C_1$ astfel încât

$$\frac{BM}{BC} = \frac{B_1M_1}{B_1C_1} \text{ și } \frac{AM}{A_{[ABC]}} = \frac{A_1M_1}{A_{[A_1B_1C_1]}}.$$

Demonstrație. Evident cazurile $AA_1 \parallel BC$ și $AA_1 \parallel B_1C_1$ nu convin deoarece în fiecare dintre acestea rezultă că înălțimile din A și A_1 ar fi congruente (Figura 1.81). Fie $\{M\} = AA_1 \cap BC$ și $\{M_1\} = AA_1 \cap B_1C_1$. Astfel, din $BB_1 \parallel MM_1 \parallel CC_1$ rezultă

$$\frac{BM}{BC} = \frac{B_1M_1}{B_1C_1},$$

iar din proprietatea precedentă avem $A_{[ABC]} = \frac{AM \cdot d}{2}$ și $A_{[A_1B_1C_1]} = \frac{A_1M_1 \cdot d}{2}$ (d fiind distanța dintre BB_1 și CC_1) de unde se obține:

$$\frac{AM}{A_{[ABC]}} = \frac{A_1M_1}{A_{[A_1B_1C_1]}}.$$

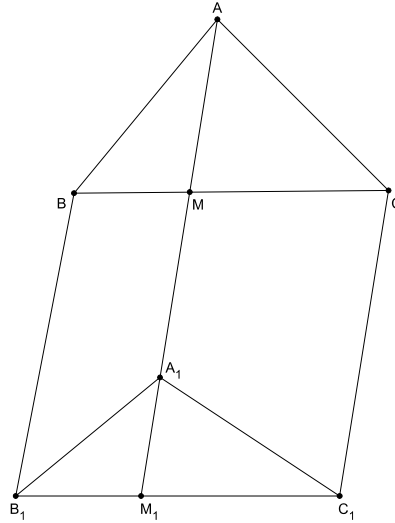


Figura 1.81: Triunghiuri coparalele

□

Teorema 379 Dacă triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt coparalele, a, b, c respectiv a_1, b_1, c_1 sunt lungimile laturilor lor, atunci

$$(b^2 + c^2 - a^2) \cdot a_1^2 + (c^2 + a^2 - b^2) \cdot b_1^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot c_1^2 \geq 8(A_{[ABC]}^2 + A_{[A_1B_1C_1]}^2). \quad (*)$$

Demonstrație. Dacă înălțimile duse din vârfurile A și A_1 au lungimi diferite ($h_a \neq h_{a_1}$), atunci utilizând proprietatea precedentă fie $\frac{BM}{BC} = \frac{B_1M_1}{B_1C_1} = x$, deci $BM = x \cdot BC$ și $B_1M_1 = x \cdot B_1C_1$. Din teorema lui Stewart în triunghiul ABC rezultă:

$$b^2 \cdot BM + c^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC = BM \cdot MC \cdot BC,$$

relație echivalentă cu

$$AM^2 = x \cdot b^2 + (1 - x) c^2 - x(1 - x) a^2.$$

Analog se arată că:

$$A_1M_1^2 = x \cdot b_1^2 + (1 - x) c_1^2 - x(1 - x) a_1^2.$$

Atunci din

$$\frac{AM^2}{A_{[ABC]}^2} = \frac{A_1M_1^2}{A_{[A_1B_1C_1]}^2}$$

și relațiile precedente rezultă:

$$\left(\frac{a^2}{A_{[ABC]}^2} - \frac{a_1^2}{A_{[A_1B_1C_1]}^2} \right) \cdot x^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{A_{[ABC]}^2} - \frac{a_1^2 - b_1^2 + c_1^2}{A_{[A_1B_1C_1]}^2} \right) \cdot x + \frac{c^2}{A_{[ABC]}^2} - \frac{c_1^2}{A_{[A_1B_1C_1]}^2} = 0. \quad (1)$$

Ecuția (1) are rădăcini reale dacă și numai dacă $\Delta \geq 0$, (unde Δ este discriminantul ecuației (1)). Utilizând relațiile

$$(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 = -16A_{[ABC]}^2$$

și

$$(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2)^2 - 4a_1^2c_1^2 = -16A_{[A_1B_1C_1]}^2, \Delta \geq 0,$$

rezultă concluzia. Dacă $h_a = h_{a_1}$, atunci din considerente de simetrie concluzia este adevărată și în cazurile $h_b \neq h_{b_1}$ și $h_c \neq h_{c_1}$. În cazul rămas de studiat - $h_a = h_{a_1}, h_b = h_{b_1}, h_c = h_{c_1}$ - cele două triunghiuri sunt congruente, iar inegalitatea de demonstrat se verifică ca egalitate. \square

Teorema 380 Două suprafețe triunghiulare cu aceeași arie sunt coparalele.

Demonstrație. Dacă $A_{[ABC]} = A_{[A_1B_1C_1]}$ atunci inegalitatea (*) se transformă în inegalitatea lui Pedoe:

$$(b^2 + c^2 - a^2) \cdot a_1^2 + (c^2 + a^2 - b^2) \cdot b_1^2 + (a^2 + b^2 - c^2) \cdot c_1^2 \geq 16 \cdot A_{[ABC]} \cdot A_{[A_1B_1C_1]}$$

(vezi „Teorema lui Pedoe” [15]). \square

Teorema 381 Două suprafețe triunghiulare ABC și $A_1B_1C_1$ cu $BC = B_1C_1$ sunt coparalele.

Demonstrație. Utilizând faptul că $a = a_1$ în egalitățile

$$(a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 = -16A_{[ABC]}^2$$

și

$$(a_1^2 - b_1^2 + c_1^2)^2 - 4a_1^2c_1^2 = -16A_{[A_1B_1C_1]}^2,$$

demonstrate anterior, obținem $(b^2 - c^2 - b_1^2 + c_1^2)^2 \geq 0$. \square

1.30 Triunghiuri pseudoisoscele

„Multe capitole ale matematicii mi-au fost dragi. Matematica e una.” - Gr. Moisil³²

Triunghiul ABC , în care bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C sunt egale, triunghiul ABC nefiind isoscel, se numește *pseudoisoscel*.

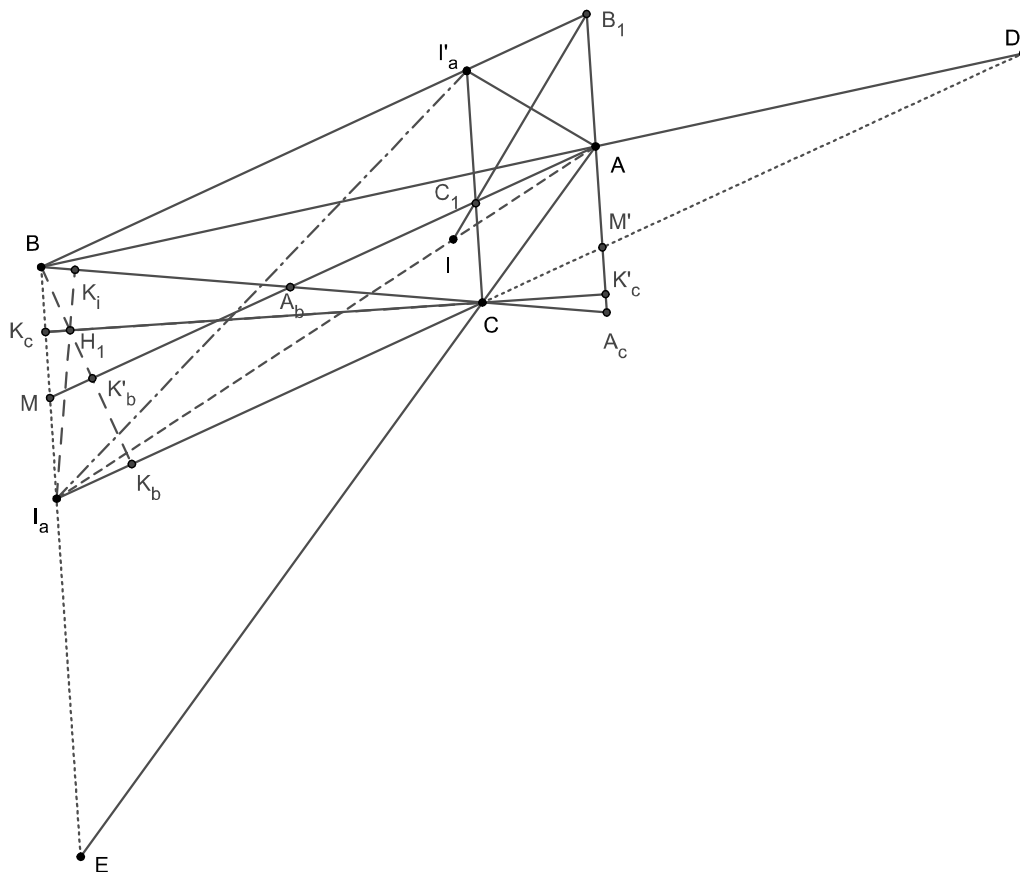


Figura 1.82: Triunghiuri pseudoisoscele

Teorema 382 Dacă în triunghiul pseudoisoscel ABC , I'_a este simetricul punctului I_a - centrul cercului A - exînscriș al triunghiului ABC față de mijlocul laturii BC , atunci centrul cercului înscris (I) al triunghiului ABC aparține mediatoarei segmentului AI'_a .

Demonstrație. Fie BE și CD cele două bisectoare exterioare egale ($E \in AC, D \in AB$), (Figura 1.82) $AA_b \parallel CD, A_b \in BC, AA_c \parallel BE, A_c \in BC, K_i, K_b, K_c$ picioarele

³²Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iași, membru al Academiei Române

înălțimilor duse din I_a , B , respectiv C , în triunghiul BCI_a , $\{K'_b\} = BK_b \cap AA_b$, $\{K'_c\} = CK_c \cap AA_c$, $\{M\} = AA_b \cap BE$, $\{M'\} = AA_c \cap CD$. Avem:

$$A_{[ABC]} = A_{[BCE]} - A_{[BAE]} = A_{[CAD]} - A_{[BCD]},$$

$A_{[DCE]} = \frac{BE \cdot CK_c}{2}$. Deoarece $AK'_c \parallel BE$, rezultă că distanța de la A la BE este egală cu $K_cK'_c$, de unde

$$A_{[BAE]} = \frac{BE \cdot K_cK'_c}{2}$$

și astfel:

$$A_{[ADC]} = \frac{BE(CK_c - K_cK'_c)}{2} = \frac{BE \cdot CK'_c}{2}. \quad (1)$$

Analog

$$A_{[ABC]} = A_{[CAD]} - A_{[BCD]} = \frac{BD \cdot BK'_b}{2}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $BK'_b = CK'_c$. Unghiurile triunghiurilor I_aBC au măsurile $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A})$; $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{B})$; $90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{C})$. Atunci,

$$\begin{aligned} m(\widehat{K_cCI_a}) &= m(\widehat{K_bBI_a}) = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A})) = \frac{1}{2}m(\hat{A}), \\ m(\widehat{K'_cCM'}) &= m(\widehat{K'_bBM}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BAC}), \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\Delta BK'_bM \equiv \Delta CK'_cM'$, și de aici

$$BM \equiv CM'. \quad (3)$$

Fie $CC_1 \parallel BE$, $C_1 \in AA_b$, $BB_1 \parallel DC$, $B_1 \in AA_c$, $\{I'_a\} = BB_1 \cap CC_1$. Patrulaterul $BI_aCI'_a$ și BH_1CI sunt paralelograme, (unde H_1 este ortocentrul triunghiului BI_aC). Deci I'_a și I sunt simetricile punctelor I_a și H_1 față de BC . Fie $I'_aK'_i \perp BC$, $K'_i \in BC$. Avem

$$m(\widehat{BI'_aK'_i}) = m(\widehat{CI'_aH_1}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ACB}).$$

Cum patrulaterul BI_aCI este inscriptibil rezultă că

$$m(\widehat{BI_aI}) = m(\widehat{BCI}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ACB}).$$

Dar $\widehat{BI_aI} \equiv \widehat{M'AI_a}$ (ca unghiuri alterne interne), deci

$$m(\widehat{M'AI_a}) = m(\widehat{BI'_aK'_i}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ACB}). \quad (4)$$

Din $I'_aC_1 \equiv BM$, $C_1A \equiv CM'$ și relația (3) rezultă $I'_aC_1 \equiv C_1A \equiv AB_1$, adică patrulaterul $AB_1I'_aC_1$ este romb. Deci, $\widehat{AI'_aB_1} \equiv \widehat{I'_aAB_1}$ relație care împreună cu (4) dau $\widehat{IAI'_a} \equiv \widehat{II'_aA}$, adică triunghiul IAI'_a este isoscel, deci

$$AI = II'_a = I_aH_1 \quad (5)$$

și punctele C_1, B_1, I sunt coliniare deoarece dreapta IC_1 este perpendiculară pe segmentul $[AI'_a]$ în mijlocul acestuia. \square

Consecința 383 Distanțele de la ortocentrul triunghiului I_aBC la vârfurile acestuia sunt respectiv egale cu distanțele de la centrul cercului înscris I la vârfurile triunghiului ABC .

Teorema 384 Triunghiul ortic al triunghiului I_aBC este pseudoisoscel.

Demonstrație. Triunghiul ortic $K_bK_cK_i$ al triunghiului I_aBC are unghiurile de măsuri

$$180^\circ - 2 \left[90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) \right] = m(\sphericalangle A),$$

respectiv $m(\hat{B})$, $m(\hat{C})$ și atunci triunghiurile $K_bK_cK_i$ și ABC sunt asemenea; deci triunghiul ortic al triunghiului I_aBC este pseudoisoscel. \square

Teorema 385 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația: $AI = r_a - r$, (r_a este raza cercului A -exînscris și r raza cercului înscris în triunghiul ABC).

Demonstrație. Avem $AI = I'_aI = I'_aK'_i - IK'_i = r_a - r$ (6). \square

Teorema 386 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația: $\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{a-c}{b-a}$.

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor CA_cM' și CBI_a , respectiv a triunghiurilor BA_aM și BCI_a rezultă:

$$\frac{CI_a}{CM'} = \frac{CB}{CA_c} \text{ și } \frac{BI_a}{BM} = \frac{BC}{BA_b},$$

de unde $CI_a \cdot CA_c = CM' \cdot CB = BM \cdot BC = BI_a \cdot BA_b$ (unde am folosit relația (3)) și de aici

$$\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{CA_c}{BA_b}. \tag{7}$$

Dar, $AB = BA_c = c$, deci $CA_c = a - c$ și analog $BA_b = b - a$. Astfel relația (7) devine:

$$\frac{BI_a}{CI_a} = \frac{a - c}{b - a}. \tag{8}$$

\square

Teorema 387 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația:

$$AI^2 = BI \cdot CI.$$

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor ABI și BH_1I_a rezultă

$$\frac{BI_a}{AB} = \frac{I_aH_1}{BI} = \frac{BH_1}{AI},$$

dar $I_aH_1 = II'_a = AI$ și $BH_1 = CI_1$, deci

$$\frac{BI_a}{AB} = \frac{AI}{BI} = \frac{CI}{AI}. \tag{9}$$

Analog, $\frac{CI_a}{AC} = \frac{AI}{CI} = \frac{BI}{CI}$ (10), de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 388 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată relația:

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

Demonstrație. Înlocuind relația cunoscută $AI = 4R \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ și analoagele în egalitatea $AI^2 = BI \cdot CI$ rezultă concluzia. \square

Teorema 389 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC ,

$$II_a^2 = II_b \cdot II_c.$$

Demonstrație. Deoarece $II_a = 4R \sin \frac{A}{2}$, $II_b = 4R \sin \frac{B}{2}$, $II_c = 4R \sin \frac{C}{2}$, egalitatea de demonstrat este echivalentă cu $\sin^2 \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$, demonstrată anterior. \square

Teorema 390 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC este adevărată egalitatea:

$$AI = \frac{BI_a \cdot CI_a}{AI_a}.$$

Demonstrație. Din relațiile (9) și (10) rezultă $BI_a \cdot CI_a = b \cdot c$. Cum în orice triunghi ABC avem $AI \cdot AI_a = b \cdot c$, rezultă $BI_a \cdot CI_a = AI \cdot AI_a$, de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 391 Într-un triunghi ABC pseudoisoscel,

$$a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0.$$

Demonstrație. Din relațiile (9) și (10) rezultă

$$\frac{BI}{CI} = \frac{CI_a}{BI_a} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{b-a}{a-c} \cdot \frac{c}{b}. \quad (11)$$

Din asemănarea triunghiurilor BIK'_i și $CK'_c A_c$, respectiv CIK'_i și $BK'_b A_b$ rezultă

$$\frac{CA_c}{CI} = \frac{BK'_b}{CK'_i}.$$

Cum $BK'_b = CK'_c$ rezultă:

$$\frac{BI}{CI} = \frac{CA_c}{BA_c} \cdot \frac{BK'_i}{CK'_i}.$$

Dar, $BK'_i = CK'_i = p - b$, $CK'_i = BK'_i = p - c$ (unde $p = \frac{a+b+c}{2}$), deci:

$$\frac{BI}{CI} = \frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{p-b}{p-c}. \quad (12)$$

Din relațiile (11) și (12) rezultă legătura dintre laturile unui triunghi pseudoisoscel:

$$\frac{a-c}{b-a} \cdot \frac{p-b}{p-c} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b-a}{a-c}$$

adică $a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0$ (13). \square

Observația 392 Relația precedentă poate fi obținută direct plecând de la egalitatea bisectoarelor exterioare CD și BE .

Teorema 393 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC ,

$$a^2 + bc = 4Rr_a.$$

Demonstrație. Relația $a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0$ este echivalentă cu

$$\frac{2abc}{b+c-a} = a^2 + bc$$

și cum $Rr_a = \frac{abc}{2(b+c-a)}$ (vezi “Cercurile exînscrie” [15]) rezultă concluzia. \square

Teorema 394 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC ,

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{bc} = 0.$$

Demonstrație. Relația $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{1}{bc} = 0$ este echivalentă cu $a^3 - (b+c)a^2 + 3abc - bc(b+c) = 0$. \square

Teorema 395 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC ,

$$II_a = \frac{(r_a - r)^2}{r}.$$

Demonstrație. Din asemănarea triunghiurilor AIR și AI_aR' - unde R și R' sunt proiecțiile punctelor I și I'_a pe latura AC - rezultă

$$\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a},$$

iar de aici

$$\frac{AI}{AI_a - AI} = \frac{r}{r_a - r}$$

și utilizând relația (6) obținem concluzia. \square

Consecința 396 Într-un triunghi pseudoisoscel ABC ,

$$AI_a = \frac{AI \cdot r_a}{r} = \frac{(r_a - r) \cdot r_a}{r}.$$

1.31 Triunghiuri cosimediane

„Nu s-ar putea oare reprezenta muzica drept matematica simțurilor și matematica drept muzică a rațiunii? Căci muzicianul simte matematica, iar matematicianul concepe muzica. Muzica-i vis, matematica este viața practică.”- James Sylvester³³

Fie A', B', C' punctele de intrecție ale simedianelor triunghiului ABC cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.83).

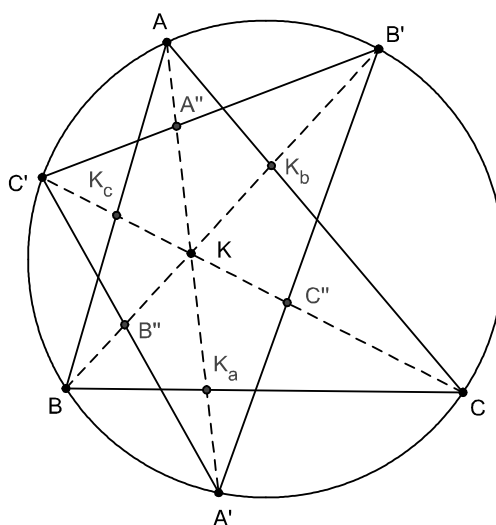


Figura 1.83: Triunghiuri cosimediane

Teorema 397 *Laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt proporționale cu medianele triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie a', b', c' lungimile laturilor triunghiului $A'B'C'$, iar K punctul lui Lemoine al triunghiului ABC . Avem:

$$m(\sphericalangle AA'C') = m(\sphericalangle ACC') = \frac{1}{2}m(\widehat{AC'})$$

și

$$m(\sphericalangle AA'B') = m(\sphericalangle ABB') = \frac{1}{2}m(\widehat{AB'})$$

de unde

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle B'A'C') &= m(\sphericalangle ABK) + m(\sphericalangle KCA) \\ &= m(\sphericalangle CBG) + m(\sphericalangle BCG) \\ &= 180^\circ - m(\sphericalangle BGC). \end{aligned}$$

³³James Sylvester (1814-1897) – matematician englez, profesor la Universitatea din Oxford, contribuții importante în algebră

Analog, $m(\sphericalangle A'B'C') = 180^\circ - m(\sphericalangle AGC)$, $m(\sphericalangle A'C'B') = 180^\circ - m(\sphericalangle AGB)$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile BCM_c și BGC ne dă:

$$\frac{c/2}{\sin \sphericalangle GCB} = \frac{m_c}{\sin B}$$

și

$$\frac{(2/3) \cdot m_b}{\sin \sphericalangle GCB} = \frac{a}{\sin \sphericalangle BGC},$$

de unde $\sin \widehat{GCB} = \frac{bc}{4Rm_c}$ și $\sin \widehat{CGB} = \frac{3abc}{8Rm_cm_b}$. Atunci,

$$a' = 2R \sin(180^\circ - \widehat{BGC}) = 2R \sin \widehat{BGC} = \frac{3abc}{4m_b m_c}.$$

Analog $b' = \frac{3abc}{4m_a m_c}$ și $c' = \frac{3abc}{4m_a m_b}$, deci

$$\frac{a'}{m_a} = \frac{b'}{m_b} = \frac{c'}{m_c}.$$

Analog se arată că $\frac{a}{m_{a'}} = \frac{b}{m_{b'}} = \frac{c}{m_{c'}}$. □

Teorema 398 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ admit aceleași simediane AA', BB', CC' .*

Demonstrație. Fie K_a, K_b, K_c intersecțiile dintre simediane cu laturile opuse, A'', B'', C'' intersecțiile simedianelor AA', BB', CC' cu laturile $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{C'A''}{A''B'} &= \frac{A_{[A'A''C']}}{A_{[A'A''B']}} = \frac{A'C' \cdot AA'' \sin \alpha}{A'B' \cdot A'A'' \sin \beta} \\ &= \left(\frac{3abc}{4m_a m_b} \cdot \sin \alpha \right) : \left(\frac{3abc}{4m_a m_b} \cdot \sin \beta \right) \\ &= \frac{m_b}{m_c} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $\alpha = m(\widehat{A''A'C''})$, $\beta = m(\widehat{A''A'B'})$ și $m(\sphericalangle C'CA) = \alpha \left(= \frac{1}{2}m(\widehat{C'A}) \right)$, $m(\sphericalangle ABB') = \beta \left(= \frac{1}{2}m(\widehat{AB'}) \right)$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiul ACK_c și ABK_b dă:

$$\frac{\sin \alpha}{AK_c} = \frac{\sin A}{CK_c}, \quad \frac{\sin \beta}{AK_b} = \frac{\sin A}{BK_b}. \tag{2}$$

Deoarece BK_b și CK_c sunt simediane rezultă:

$$\frac{K_c A}{K_c B} = \left(\frac{b}{a} \right)^2, \quad \frac{K_b A}{K_b C} = \left(\frac{c}{a} \right)^2,$$

de unde rezultă $K_c A = \frac{cb^2}{a^2+b^2}$, $AK_b = \frac{bc^2}{a^2+c^2}$, iar $BK_b = \frac{2acm_b}{a^2+c^2}$, $CK_c = \frac{2abm_c}{a^2+b^2}$ (3) (vezi „Simediane” [15]). Din relațiile (2) și (3) rezultă:

$$\sin \alpha = \frac{bc}{4Rm_c} \quad \text{și} \quad \sin \beta = \frac{bc}{4Rm_b}. \tag{4}$$

Din relațiile (1) și (4) rezultă

$$\frac{C'A''}{A''B'} = \left(\frac{m_b}{m_c}\right)^2 = \left(\frac{b'}{c'}\right)^2$$

deci AA'' este simediană în triunghiul $A'B'C'$. Analog se arată că BB'' și CC'' sunt simediane în triunghiul $A'B'C'$. \square

Observația 399 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ care admit aceleași simediane se numesc triunghiuri cosimediane.*

Teorema 400 *Triunghiul circumpedal al punctului lui Lemoine al unui triunghi ABC și triunghiul ABC sunt triunghiuri cosimediane.*

Demonstrație. Proprietatea este o reformulare a teoremei 397. \square

Teorema 401 *Două triunghiuri cosimediane au același punct al lui Lemoine.*

Demonstrația rezultă din faptul că triunghiurile admit aceleași simediane. \square

Teorema 402 *Două triunghiuri cosimediane sunt omologice, centrul de omologie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .*

Demonstrația este evidentă. \square

Teorema 403 *Cercurile lui Apollonis ale triunghiului ABC intersectează cercul circumscris al triunghiului ABC în vârfurile triunghiului cosimedian.*

Demonstrație. Vezi „Cercurile lui Apollonius” [15]. \square

Teorema 404 *Între unghiurile triunghiurilor cosimediane ABC și $A'B'C'$ au loc relațiile:*

$$ctgA + ctgA' = ctgB + ctgB' = ctgC + ctgC' = \frac{2}{3}ctg\omega$$

(ω este unghiul lui Brocard).

Demonstrație. Avem:

$$ctgA + ctgA' = ctgA + ctg(\pi - \sphericalangle BGC) = ctgA - ctg(\sphericalangle BGC),$$

G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC . Teorema cosinusului aplicată în triunghiul BGC dă:

$$a^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}m_b \cdot \frac{2}{3}m_c \cdot \cos \sphericalangle BGC$$

sau: $\cos \widehat{BGC} = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{8m_b m_c}$, de unde

$$ctg \widehat{BGC} = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{8m_b m_c} \cdot \frac{8Rm_b m_c}{3abc} = \frac{(b^2 + c^2 - 5a^2) \cdot R}{3abc},$$

iar $ctgA = \frac{b^2+c^2-a^2}{abc} \cdot R$. Avem

$$ctgA + ctgA' = \frac{R}{abc} \left[b^2 + c^2 - a^2 - \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{abc} \cdot (b^2 + c^2 + a^2).$$

Ținând cont că:

$$ctg\omega = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4 \cdot A_{[ABC]}} = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{abc} \cdot R$$

rezultă: $ctgA + ctgA' = \frac{2}{3}ctg\omega$. Analog se arată că $ctgB + ctgB' = ctgC + ctgC' = \frac{2}{3}ctg\omega$.
□

Teorema 405 Două triunghiuri cosimediane au același unghi Brocard.

Demonstrație. Fie ω' unghiul lui Brocard al triunghiului $A'B'C'$. Atunci,

$$\begin{aligned} ctgA + ctgA' &= \frac{2}{3}ctg\omega, \\ ctgA' + ctgA &= \frac{2}{3}ctg\omega', \end{aligned}$$

de unde $ctg\omega = ctg\omega'$ și cum $\omega \leq 30^\circ, \omega' \leq 30^\circ$ (vezi „Punctele lui Brocard” [15]) rezultă $\omega = \omega'$. □

Teorema 406 Două triunghiuri cosimediane au același cerc Brocard.

Demonstrație. Cercul lui Brocard este cercul ce are ca diametru segmentul determinat de centrul cercului circumscris triunghiului și punctul lui Lemoine al aceleiași triunghi. Deoarece triunghiurile cosimediane au același cerc circumscris și același punct al lui Lemoine rezultă că au și același cerc Brocard. □

Teorema 407 Două triunghiuri cosimediane au aceleași puncte Brocard.

Demonstrație. Deoarece cercul lui Brocard trece prin punctele lui Brocard Ω și Ω' ale triunghiului ABC , Ω și Ω' sunt simetrice față de diametrul OK (vezi „Cercul lui Brocard” [15]), iar triunghiurile cosimediane au același cerc Brocard, rezultă concluzia. □

Teorema 408 Două triunghiuri cosimediane au același al doilea triunghi Brocard.

Demonstrația este evidentă deoarece vârfurile celui de-al doilea triunghi Brocard sunt picioarele perpendicularelor duse din centrul cercului circumscris triunghiului de referință pe simedianele triunghiului. □

1.32 Triunghiul celor trei imagini

„Matematica este o monstruoasă tautologie.” - Bernard Shaw³⁴

Triunghiul $A^*B^*C^*$ ale cărui vârfuri sunt obținute prin simetria vârfurilor triunghiului ABC față de laturile opuse se numește *triunghiul celor trei imagini* al triunghiului ABC (Figura 1.84).

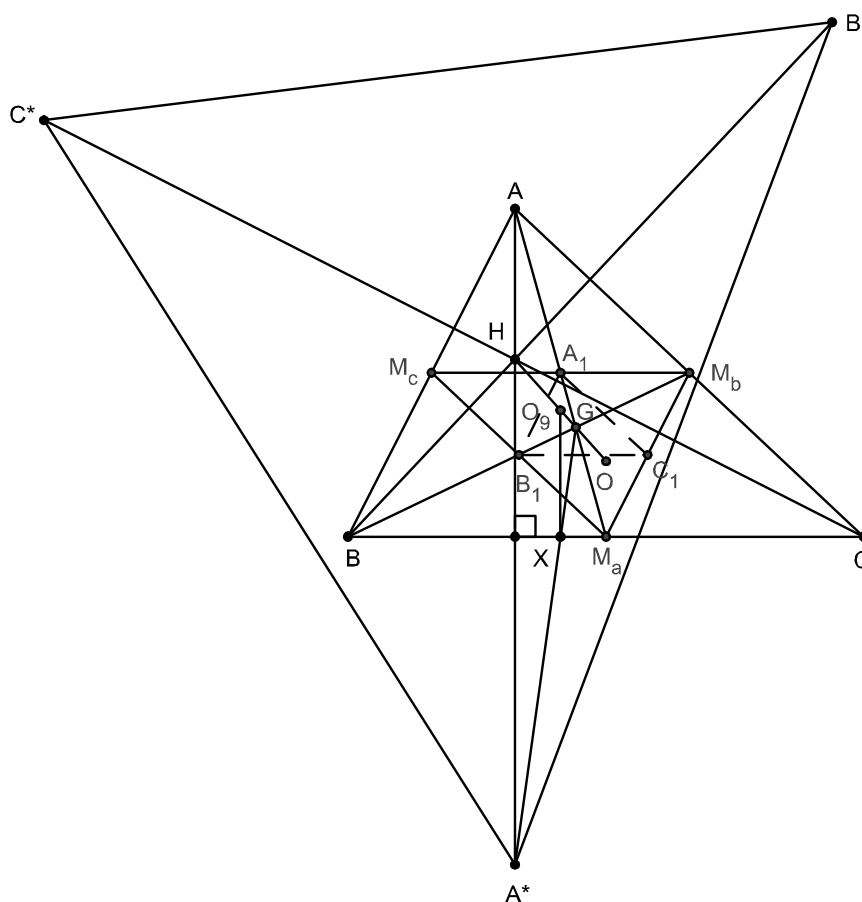


Figura 1.84: Triunghiul celor trei imagini

Teorema 409 *Triunghiurile ABC și $A^*B^*C^*$ sunt omologice centrul de omologie fiind ortocentrul triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece dreptele AA^* , BB^* și CC^* sunt perpendiculare pe laturile BC , CA , respectiv AB , rezultă că ele sunt concurente în ortocentrul triunghiului

³⁴Bernard Shaw (1856 -1950) – scriitor irlandez, laureat al Premiului Nobel pentru Literatură în 1925

ABC , deci conform teoremei lui Desargues triunghiurile ABC și $A^*B^*C^*$ sunt omologice. \square

Teorema 410 *Centrul cercului circumscris triunghiului celor trei imagini $A^*B^*C^*$ corespunzător unui triunghi ABC este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului ABC față de punctul lui Coșniță.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Coșniță” [15]. \square

Teorema 411 *Cercurile circumscrise triunghiurilor AB^*C^* , A^*BC^* , A^*B^*C trec prin inversul punctului lui Coșniță față de cercul circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Coșniță” [15]. \square

Teorema 412 *Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și $A^*B^*C^*$ triunghiul celor trei imagini corespunzător triunghiului ABC . Cercurile circumscrise triunghiurilor AOA^* , BOB^* și COC^* se întâlnesc într-un punct care este inversul punctului izogonal conjugat al centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Teorema lui Musselman” [15]. \square

Teorema 413 (Boutte) *Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Triunghiul celor trei imagini $A^*B^*C^*$ este obținut prin omotetia de centrul G și raport $\frac{1}{4}$ a triunghiului podar al centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor BC, CA , respectiv AB și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor M_bM_c, M_cM_a , respectiv M_aM_b . Evident, triunghiul $A_1B_1C_1$ se obține din triunghiul ABC prin omotetia de centru G și raport $\frac{1}{4}$. Fie X omoteticul lui A^* prin $H(G, \frac{1}{4})$. Arătăm că X este proiecția centrului cercului lui Euler (O_9) al triunghiului ABC pe BC . Cum

$$\frac{GA_1}{GA} = \frac{GX}{GA^*} = \frac{1}{4}$$

din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $A_1X \parallel AA^*$. Dar $AA^* \perp M_bM_c$ de unde rezultă că $A_1X \perp M_bM_c$, deci $A_1X \perp BC$. Cu alte cuvinte $X \in BC$. Evident, X este simetricul punctului A_1 față de B_1C_1 (care este linie mijlocie în triunghiul $M_aM_bM_c$); cu alte cuvinte punctul X aparține cercului circumscris triunghiului $M_aM_bM_c$, adică cercului lui Euler. Urmează că X este proiecția lui O_9 pe BC . Analog se demonstrează că imaginile punctelor B^* și C^* prin omotetia $H(G, \frac{1}{4})$ sunt proiecțiile lui O_9 pe CA , respectiv AB . \square

Observația 414 *Dacă $O_9^aO_9^bO_9^c$ este triunghiul podar al centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC , atunci*

$$\frac{GA^*}{GO_9^a} = \frac{GB^*}{GO_9^b} = \frac{GC^*}{GO_9^c} = 4.$$

1.33 Triunghiuri izoliniare

„Cel mai fericit om este acela care face fericiți un număr cât mai mare de oameni.” - Lev Tolstoi³⁵

Teorema 415 Fie două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ în același plan. Dacă paralelele duse prin A, B, C la laturile $B'C', C'A'$ respectiv $A'B'$ intersectează laturile opuse în trei puncte coliniare α, β, γ atunci și paralelele duse prin A', B', C' la BC, CA , respectiv AB întâlnesc laturile opuse $B'C', C'A'$ și $A'B'$ în trei puncte coliniare α', β', γ' .

Demonstrație. Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul determinat de dreptele $A\alpha, B\beta$ și $C\gamma$, iar $A_1B_1C_1$ triunghiul determinat de dreptele $A'\alpha', B'\beta'$ și $C'\gamma'$ (Figura 1.85). Din

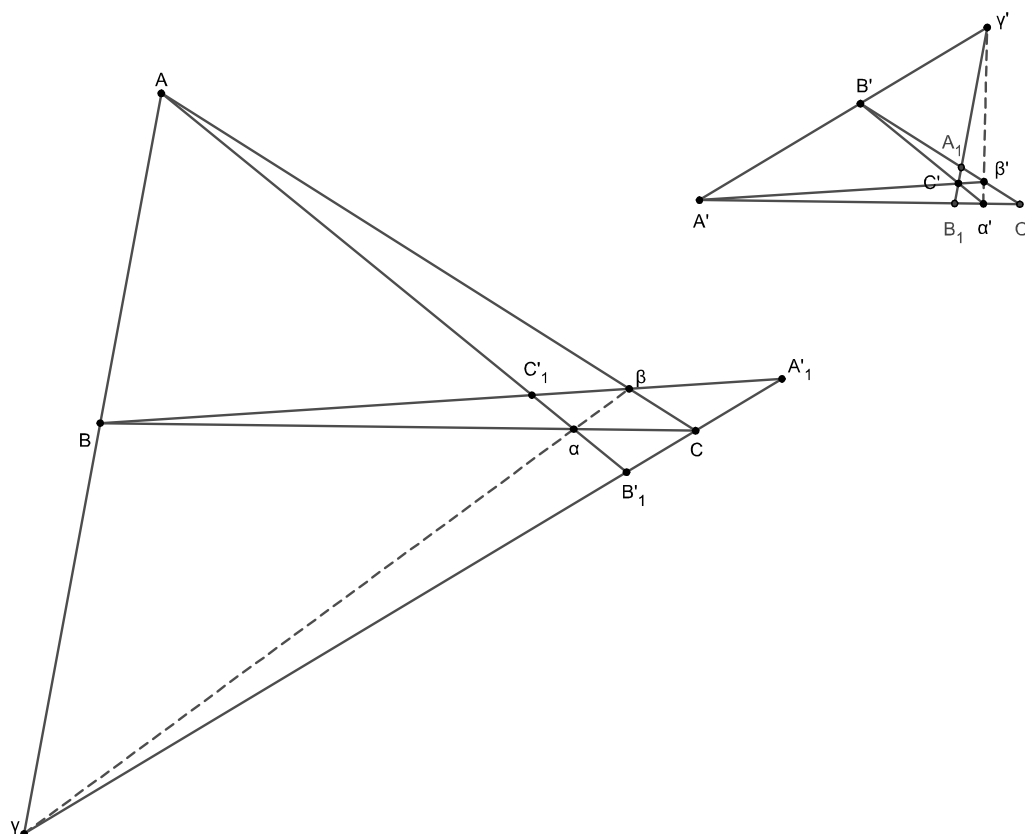


Figura 1.85: Triunghiuri izoliniare

asemănarea triunghiurilor $A'B'\alpha'$ cu $CB_1\alpha$, respectiv $C'\alpha'A'$ cu $C_1\alpha B$ (triunghiuri cu laturile paralele două câte două) rezultă:

$$\frac{\alpha'B'}{\alpha B_1} = \frac{A'\alpha'}{\alpha C} \text{ și } \frac{\alpha'C'}{\alpha C_1} = \frac{A'\alpha'}{\alpha B}.$$

³⁵ Lev Tolstoi (1828-1910) – scriitor rus

Prin împărțirea relațiilor precedente se obține:

$$\frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} = \frac{\alpha B'_1 \cdot \alpha B}{\alpha C'_1 \cdot \alpha C'}$$

Analog, se arată egalitățile:

$$\frac{\gamma' A'}{\gamma' B'} = \frac{\gamma A'_1 \cdot \gamma A}{\gamma B'_1 \cdot \gamma B} \quad \text{și} \quad \frac{\beta' C'}{\beta' A'} = \frac{\beta C'_1 \cdot \beta C}{\beta A'_1 \cdot \beta A},$$

de unde rezultă că

$$\frac{\alpha' B'}{\alpha' C'} \cdot \frac{\beta' C'}{\beta' A'} \cdot \frac{\gamma' A'}{\gamma' B'} = \left(\frac{\alpha B'_1}{\alpha C'_1} \cdot \frac{\beta C'_1}{\beta A'_1} \cdot \frac{\gamma A'_1}{\gamma B'_1} \right) \cdot \left(\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

(unde s-a aplicat teorema lui Menelaus triunghiurilor $A'_1 B'_1 C'_1$ și ABC cu transversala $\alpha\beta\gamma$) și din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul $A'B'C'$ rezultă că punctele α', β', γ' sunt coliniare. \square

Observația 416 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ ce îndeplinesc condițiile de mai sus se numesc izoliniare.*

1.34 Triunghiuri metaparalele

„Azi facem matematica ce va fi folosită mâine și mai ales poimâine. Dacă n-am face-o azi, poimâine ar trebui s-o importăm.” – Gr. Moisil³⁶

Teorema 417 *Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Dacă paralelele duse din A, B, C la $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ sunt concurente într-un punct D , atunci paralelele duse din A', B', C' la $BC, CA,$ respectiv AB sunt concurente într-un punct D' .*

Demonstrație. Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), A'(x'_1, y'_1), B'(x'_2, y'_2), C'(x'_3, y'_3)$. Ecuațiile paralelelor duse din A, B, C la dreptele $B'C', C'A',$ respectiv $A'B'$ sunt:

$$\begin{aligned} x(y'_3 - y'_2) - y(x'_3 - x'_2) &= x_1(y'_3 - y'_2) - y_1(x'_3 - x'_2), \\ x(y'_1 - y'_3) - y(x'_1 - x'_3) &= x_2(y'_1 - y'_3) - y_2(x'_1 - x'_3), \\ x(y'_2 - y'_1) - y(x'_2 - x'_1) &= x_3(y'_2 - y'_1) - y_3(x'_2 - x'_1). \end{aligned}$$

Condiția de concurență este echivalentă cu:

$$x_1(y'_3 - y'_2) + x_2(y'_1 - y'_3) + x_3(y'_2 - y'_1) = y_1(x'_3 - x'_2) + y_2(x'_1 - x'_3) + y_3(x'_2 - x'_1),$$

³⁶Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iași, membru al Academiei Române

adică

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Simetria relației precedente demonstrează teorema . □

Observația 418 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ ce au proprietățile de mai sus se numesc metaparalele sau paralelogice, iar punctele D și D' se numesc centre de metaparalelism (Figura 1.86). Vom nota cu $ABC \parallel A'B'C'$ faptul că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt metaparalele.*

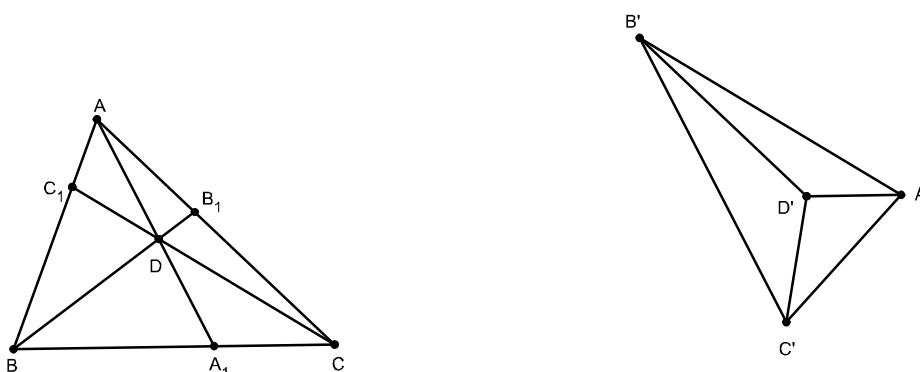


Figura 1.86: Triunghiuri metaparalele

Teorema 419 *Dacă $ABC \parallel A'B'C'$, $ABC \parallel B'C'A'$, atunci $ABC \parallel C'B'A'$.*

Demonstrație. Utilizând teorema precedentă relațiile $ABC \parallel A'B'C'$ și $ABC \parallel B'C'A'$ sunt echivalente cu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

respectiv

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_2 & y'_3 & y'_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_2 & x'_3 & x'_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Din egalitățile precedente rezultă:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y'_3 & y'_2 & y'_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_3 & x'_2 & x'_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

adică $ABC \parallel C'B'A'$. □

Teorema 420 Dacă $ABC \parallel M_1M_2M_3$, $ABC \parallel M_2M_3M_4$, ... , $ABC \parallel M_{n-1}M_nM_1$, atunci $ABC \parallel M_nM_1M_2$.

Demonstrația proprietății se realizează utilizând relația (*). □

1.35 Triunghiul pedal

„Cea mai mare dorință a mea este să comunic și altora pasiunea mea pentru matematică.” – Miron Nicolescu³⁷

Dacă M este un punct în planul triunghiului ABC , picioarele cevienelor AM , BM , CM sunt vârfurile unui triunghi $M_1M_2M_3$ numit *triunghiul pedal* al lui M (Figura 1.87).

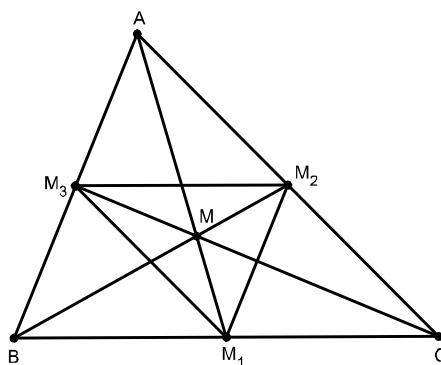


Figura 1.87: Triunghiul pedal

Teorema 421 Triunghiul pedal al centrului de greutate al unui triunghi ABC este triunghiul median corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul median”. □

Teorema 422 Triunghiul pedal al ortocentrului unui triunghi ABC este triunghiul ortic corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Triunghiul ortic”. □

Teorema 423 Triunghiul pedal al punctului lui Gergonne al unui triunghi ABC este triunghiul de contact corespunzător triunghiului ABC .

³⁷Miron Nicolescu (1903-1975) – matematician român, membru al Academiei Române, contribuții în analiza matematică

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Gergonne” [15]. □

Teorema 424 *Triunghiul pedal al punctului lui Nagel al unui triunghi ABC este triunghiul cotangentic corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Nagel” [15]. □

Teorema 425 *Fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al centrului cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci,*

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A}, \frac{BO}{OB'} = \frac{\sin 2C + \sin 2A}{\sin 2B}, \frac{CO}{OC'} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}.$$

Demonstrație. Vezi „Centrul cercului circumscris unui triunghi” [15]. □

Teorema 426 *Dacă $\Omega_a\Omega_b\Omega_c$ este triunghiul pedal al primului punct al lui Brocard Ω corespunzător unui triunghi ABC, $\Omega_a \in (BC)$, $\Omega_b \in (CA)$, $\Omega_c \in (AB)$, atunci*

$$\frac{B\Omega_a}{\Omega_a C} = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \frac{C\Omega_b}{A\Omega_b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{și} \quad \frac{A\Omega_c}{B\Omega_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Demonstrație. Vezi „Punctele lui Brocard” [15]. □

Teorema 427 *Dacă $\Omega'_a\Omega'_b\Omega'_c$ este triunghiul pedal al celui de-al doilea punct Brocard, $\Omega'_a \in (BC)$, $\Omega'_b \in (CA)$, $\Omega'_c \in (AB)$, atunci*

$$\frac{B\Omega'_a}{\Omega'_a C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2, \frac{C\Omega'_b}{\Omega'_b A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{A\Omega'_c}{\Omega'_c B} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Demonstrație. Vezi „Punctele lui Brocard” [15]. □

Teorema 428 *Triunghiul pedal al retrocentului R al unui triunghi ABC este triunghiul podar al punctului lui Longchamps corespunzător triunghiului ABC.*

Demonstrație. Vezi „Retrocentrul unui triunghi” [15]. □

Teorema 429 *Triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ și triunghiul pedal al centrului cercului înscris într-un triunghi ABC sunt ortologice.*

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler” [15]. □

Teorema 430 *În triunghiul ABC, fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al unui punct Q, astfel încât $\frac{BA'}{A'C} = \frac{p}{n}$, $\frac{CB'}{B'A} = \frac{m}{p}$ și $\frac{AC'}{C'B} = \frac{n}{m}$. Dacă z_A, z_B, z_C sunt afixele punctelor A, B, C, atunci afixul punctului Q este*

$$z_Q = \frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m + n + p}.$$

Demonstrație. Afixele punctelor A', B', C' sunt

$$z_{A'} = \frac{nz_B + pz_C}{n+p}, \quad z_{B'} = \frac{mz_A + pz_C}{m+p} \quad \text{și} \quad z_{C'} = \frac{mz_A + nz_B}{m+n}.$$

Fie punctul $Q' \left(\frac{mz_A + nz_B + pz_C}{m+n+p} \right)$. Utilizând condiția de coliniaritate a trei puncte $D(z_D)$, $E(z_E)$ și $F(z_F)$ - anume:

$$\begin{vmatrix} z_D & \bar{z}_D & 1 \\ z_E & \bar{z}_E & 1 \\ z_F & \bar{z}_F & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultă fără dificultate că punctele A, A', Q' ; B, B', Q' ; respectiv C, C', Q' sunt coliniare, iar cum punctul Q' aparține celor trei ceviane AA', BB', CC' , rezultă că $Q \equiv Q'$. \square

Teorema 431 În triunghiul ABC , fie $A'B'C'$ triunghiul pedal al unui punct P , astfel încât $\frac{BA'}{A'C} = \nu$, $\frac{AB'}{B'C} = \mu$ și $\frac{AC'}{C'B} = \lambda$. Atunci, pentru orice punct din planul triunghiului ABC este adevărată relația:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MA} + \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MB} + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MC}.$$

Demonstrație. Din teorema lui Ceva avem: $\lambda \cdot \nu \cdot \frac{1}{\mu} = 1$, deci $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$ (1). Din teorema lui Van - Aubel obținem: $\frac{PA}{PA'} = \lambda + \mu$, de unde rezultă

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MA} + \frac{\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu} \overrightarrow{MA'}. \quad (2)$$

Din $\frac{BA'}{A'C} = \nu$ rezultă

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{1+\nu} \overrightarrow{MB} + \frac{\nu}{1+\nu} \overrightarrow{MC}. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă concluzia. \square

Consecința 432 Cazuri particulare:

1) Dacă $P \equiv G$, atunci

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{MC}.$$

2) Dacă $P \equiv I$, atunci

$$\overrightarrow{MI} = \frac{a}{a+b+c} \overrightarrow{MA} + \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{MB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{MC}.$$

3) Dacă $P \equiv O$, atunci

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} (\sin 2A \cdot \overrightarrow{MA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{MB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{MC}).$$

4) Dacă $P \equiv H$, atunci

$$\overrightarrow{MH} = \frac{tgA}{tgA + tgB + tgC} \overrightarrow{MA} + \frac{tgB}{tgA + tgB + tgC} \overrightarrow{MB} + \frac{tgC}{tgA + tgB + tgC} \overrightarrow{MC}$$

(pentru un triunghi nedreptunghic).

1.36 Triunghiul anticevian

„O teoremă de geometrie este o legătură organică între părțile unei figuri.” – Gh. Țițeica³⁸

Fie P un punct din planul triunghiului ABC . Triunghiul anticevian $A'B'C'$ al triunghiului ABC corespunzător punctului P este obținut astfel: $A \in B'C'$, $B \in A'C'$, $C \in B'A'$, iar $AA' \cap BB' \cap CC' = \{P\}$ (Figura 1.88). Punctul P se numește *punct anticevian*. Triunghiul ABC este triunghiul cevian al punctului P în raport cu triunghiul $A'B'C'$.

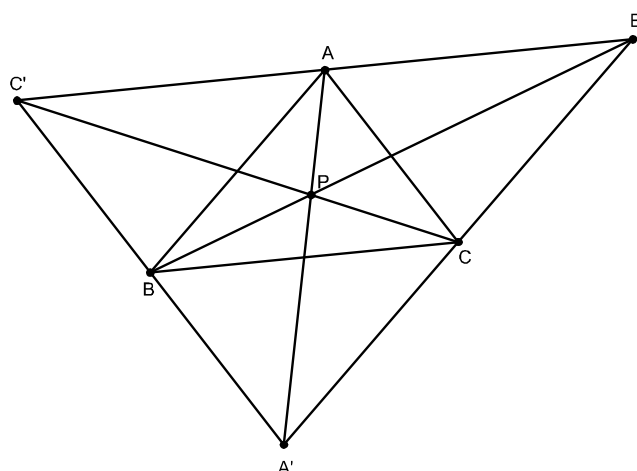


Figura 1.88: Triunghiul anticevian

Teorema 433 *Triunghiul anticevian corespunzător centrului cercului înscris (I) în triunghi este triunghiul antisuplementar.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antisuplementar”. □

Teorema 434 *Triunghiul anticevian corespunzător centrului de greutate (G) este triunghiul anticomplementar.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul anticomplementar”. □

Teorema 435 *Triunghiul anticevian corespunzător punctului lui Lemoine este triunghiul tangențial.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul tangențial”. □

³⁸Gheorghe Țițeica (1873-1939) – matematician român, profesor la Universitatea din București, membru al Academiei Române, contribuții importante în geometrie

Teorema 436 Fie $A'B'C'$ triunghiul anticevian al unui punct P în raport cu un triunghi ABC . Bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$ intersectează laturile BC , CA și AB în punctele A'' , B'' , respectiv C'' . Dreptele AA'' , BB'' și CC'' sunt concurente.

Demonstrație. Din teorema bisectoarei rezultă $\frac{BA''}{A''C} = \frac{BA'}{A'C}$, $\frac{CB''}{B''A} = \frac{CB'}{B'A}$ și $\frac{AC''}{C''B} = \frac{AC'}{C'B}$ (Figura 1.89). Din teorema lui Ceva aplicată în triunghiul anticevian $A'B'C'$,

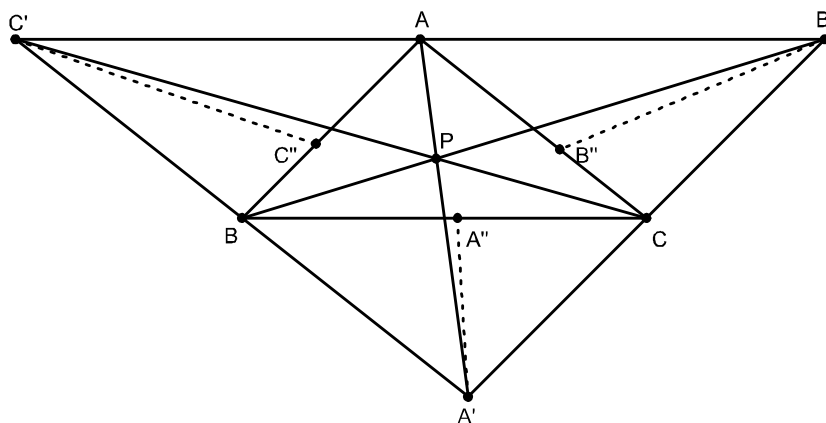


Figura 1.89: Drepte concurente în triunghiul anticevian

rezultă $\frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{CA'} = 1$, de unde se obține:

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Ceva aplicată în triunghiul ABC , rezultă că dreptele AA'' , BB'' și CC'' sunt concurente. \square

1.37 Triunghiuri ortogonale

„Am închis ușile ca să nu intre greșeala. Atunci adevărul m-a întrebat: pe unde voi intra eu?”
- R. Tagore³⁹

Două triunghiuri se numesc *ortogonale* dacă au laturile două câte două perpendiculare una pe alta (Figura 1.90).

Teorema 437 Să se construiască triunghiul $A'B'C'$ având vârfurile pe dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC astfel încât cele două triunghiuri să fie ortogonale.

³⁹Rabindranath Tagore (1861-1941) – scriitor și filosof indian, laureat al Premiului Nobel pentru Literatură

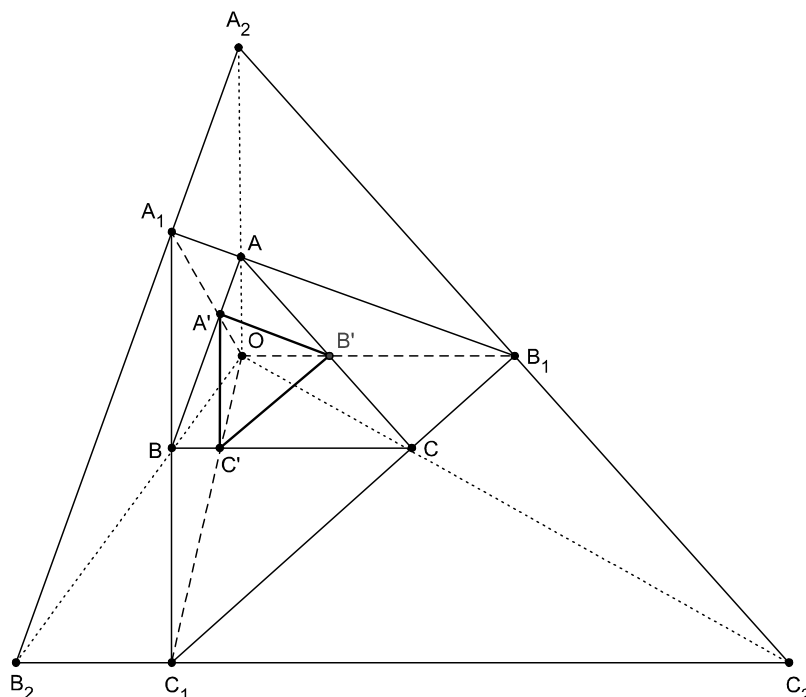


Figura 1.90: Triunghiuri ortogonale

Demonstrație. Presupunem că triunghiul $A'B'C'$ astfel încât $A'C' \perp AC, A'B' \perp AB, B'C' \perp BC, A' \in AC, B' \in AB, C' \in BC$. Construim perpendicularele pe laturile triunghiului ABC în vârfurile acestui triunghi și fie $A_1B_1C_1$ triunghiul obținut prin intersecțiile acestor perpendiculare. Avem $A_1C_1 \perp AC, A_1B_1 \perp AB, B_1C_1 \perp BC$.

Repetând procedeul de mai sus, obținem triunghiul $A_2B_2C_2$ cu $A_2C_2 \perp A_1C_1, A_2B_2 \perp A_1B_1, B_2C_2 \perp B_1C_1$. Se observă $A_2C_2 \parallel AC, A_2B_2 \parallel AB, B_2C_2 \parallel BC$. Se poate considera că triunghiul $A_2B_2C_2$ se obține din triunghiul ABC printr-o omotetie. Fie O centrul acestei omotetii, centru care se află la intersecția dreptelor AA_2, BB_2, CC_2 . În mod analog se observă că $A_1B_1C_1$ se poate obține din $A'B'C'$ printr-o omotetie și deoarece

$$\frac{OA}{OA_2} = \frac{OA'}{OA_1}$$

rezultă că omotetia are același centru O .

Din cele prezentate rezultă procedeul de construcție a două triunghiuri ortogonale:

- i) se construiește triunghiul $A_1B_1C_1$;
- ii) se construiește triunghiul $A_2B_2C_2$;
- iii) unim A cu A_2, B cu B_2 și se determină centrul omotetiei O ;
- iv) unim apoi O cu A_1, B_1, C_1 și la intersecția cu dreptele suport ale laturilor ABC găsim punctele A', B', C' care sunt vârfurile triunghiului căutat.

Construcția de mai sus este valabilă indiferent de natura triunghiului. □

1.38 Triunghiul lui Țițeica - Carnot

„Țițeica era plin de vioiciune, fericit să-mi vorbească despre căminul său, radiind, cu privirea sa luminoasă și discretă, aceeași magnifică sănătate morală... Înțelegeam că în el se reuneau continuu preocuparea datoriei de împlinit și o euforie izvorâtă din conștiința datoriei împlinite...”
– Henri Lebesgue⁴⁰

Fie H ortocentrul triunghiului ABC și O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCH, ACH, ABH . $\Delta O_a O_b O_c$ se numește *triunghiul Țițeica - Carnot*, iar cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC, AHB se numesc *cercurile Țițeica*⁴¹ - Carnot $(\tau_a), (\tau_b), (\tau_c)$.

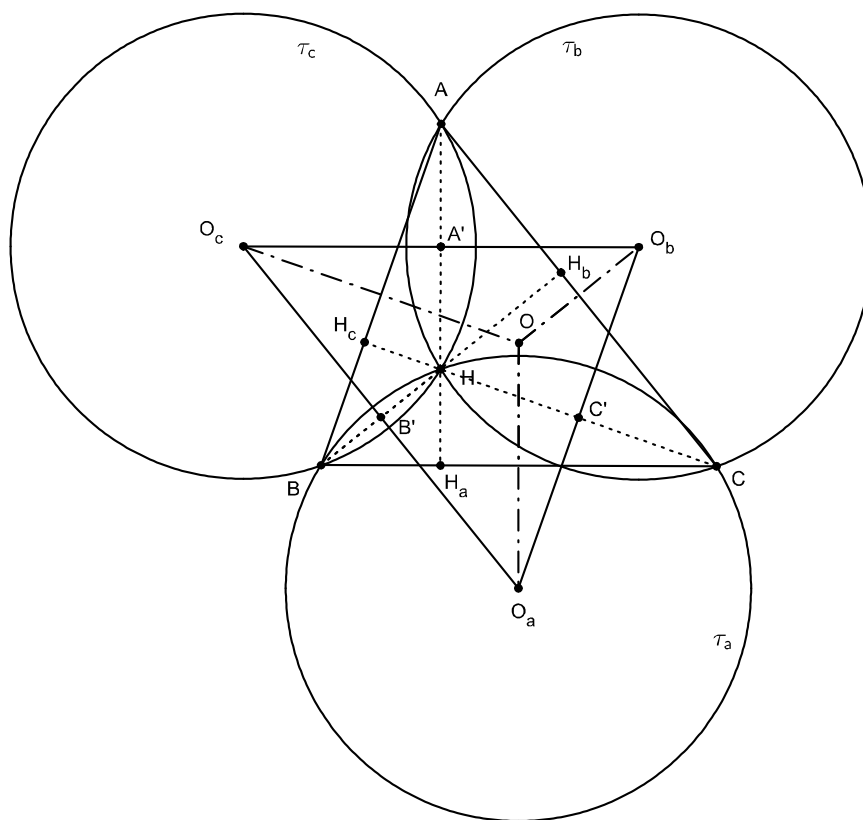


Figura 1.91: Triunghiul lui Țițeica - Carnot

Teorema 438 *Cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC și AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC .*

⁴⁰ Henri Lebesgue (1875-1941) – matematician francez, contribuții importante în analiza matematică

⁴¹ Gheorghe Țițeica (1873 – 1939) - matematician, membru titular al Academiei Române din 1913.

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor $AH, BH, CH, H_a, H_b, H_c$ picioarele înălțimilor triunghiului ABC , O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și O'_a simetricul lui O față de BC (Figura 1.91). Atunci,

$$AH \equiv OO'_a \text{ și } AH \parallel OO'_a$$

de unde rezultă că patrulaterul OO_aHA este paralelogram. Deci,

$$HO'_a \equiv OA (= R) \tag{i}$$

și cum OCO_aB este romb rezultă că

$$O'_aC = O'_aB = OC = OB (= R). \tag{ii}$$

Din relațiile (i) și (ii) rezultă că

$$O'_aC = O'_aB = O'_aH (= R),$$

deci O'_a este centrul cercului circumscris triunghiului BHC , adică

$$O'_a \equiv O_a.$$

Analog, O_b și O_c sunt simetricile lui O în raport cu laturile AC , respectiv AB . Cercul circumscris triunghiului BHC este congruent cu cercul circumscris ABC . Analog, cercurile circumscrise triunghiurilor AHC și AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC . \square

Observația 439 Laturile triunghiului Țițeica conțin punctele lui Euler (A', B', C') ale triunghiului ABC . Distanțele de la centrul cercului circumscris triunghiului ABC la centrele O_a, O_b, O_c sunt egale cu AH, BH , respectiv CH . Centrele cercurilor Țițeica sunt simetricile centrului cercului circumscris (O) al triunghiului ABC față de laturile triunghiului ABC . Punctul H este centrul cercului circumscris triunghiului Țițeica.

Teorema 440 Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt congruente.

Demonstrație. Cum BO_aCO și $AOCO_b$ sunt romburi rezultă: $BO_a \parallel OC \parallel AO_b$ și $BO_a = OC = AO_b (= R)$, deci patrulaterul ABO_aO_b este paralelogram, adică $AB = O_aO_b$. Analog, $AC = O_aO_c$ și $BC = O_bO_c$, triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt congruente. \square

Teorema 441 Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt omotetice.

Demonstrație. *Soluția 1.* Fie O_9 mijlocul segmentului OH . Atunci, triunghiul $O_aO_bO_c$ se obține prin omotetia de centru O_9 și raport -1 , a triunghiului ABC .

Soluția 2. Deoarece $O_aO_b \parallel AB, O_bO_c \parallel BC$ și $O_aO_c \parallel AC$, iar triunghiul ABC și $O_aO_bO_c$ sunt congruente, rezultă că triunghiurile sunt omotetice. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , $O(0)$. Notăm cu $a, b, c, h, o_1, o_2, o_3, o_9$ afixele punctelor A, B, C, H, O_a, O_b , respectiv O_c . Atunci, $H(a + b + c)$, iar centrul cercului lui Euler $O_9 \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$. Patrulaterele AO_cHO_b, BO_aHO_c ,

CO_bHO_a fiind paralelograme rezultă $a + h = o_3 + o_2, b + h = o_1 + o_3, c + h = o_1 + o_2$, de unde $o_1 + o_2 + o_3 = 2(a + b + c) = 4o_9, o_1 = 4o_9 - (a + 2o_9) = 2o_9 - a = b + c, o_2 = 2o_9 - b = a + c, o_3 = 2o_9 - c = a + b$. Deoarece $\frac{a-o_9}{o_1-o_9} = -1 \in R$ rezultă ca punctele A, O_9, O_1 sunt coliniare. Analog, B, O_9, O_2 și C, O_9, O_3 sunt coliniare, deci centrul de omotetie dintre triunghiurile $ABC, O_1O_2O_3$ este centrul lui Euler. \square

Teorema 442 Centrul cercului lui Euler al triunghiului ABC este mijlocul segmentelor AO_a, BO_b, CO_c .

Demonstrație. Din $\frac{a-o_9}{o_{a1}-o_9} = -1$ rezultă $|a - o_9| = |o_a - o_9|$, adică $AO_9 \equiv O_9O_a$. Analog, $BO_9 \equiv O_9O_b$ și $CO_9 \equiv O_9O_c$. \square

Teorema 443 Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC au același cerc al lui Euler și aceeași dreaptă a lui Euler.

Demonstrație. În triunghiul $O_aO_bO_c, O$ este ortocentrul său, iar H este centrul cercului circumscris, deci are aceeași dreaptă Euler cu triunghiul ABC și evident același cerc al lui Euler. \square

Teorema 444 Cercurile lui Țițeica-Carnot sunt simetrice cercului circumscris triunghiului dat în raport cu laturile corespunzătoare.

Demonstrație. Deoarece H aparține cercului circumscris triunghiului BHC , simetricul lui H față de BC aparține cercului circumscris triunghiului ABC , iar cercurile circumscrise triunghiurilor BHC și ABC sunt congruente, rezultă că cele două cercuri sunt simetrice față de BC . \square

Teorema 445 Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecție dintre bisectoarele interioare ale triunghiurilor A, B , respectiv C cu cercul circumscris triunghiului ABC . Triunghiul $O_1O_2O_3$, având vârfurile în centrele cercurilor Țițeica-Carnot ale triunghiului $A_1B_1C_1$ este omologic cu triunghiul ABC , centrul de omologie fiind un punct al lui Kariya al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Kariya” [15]. \square

Teorema 446 Fie H ortocentrul unui triunghi $ABC, (\tau_a), (\tau_b), (\tau_c)$ cercurile Țițeica-Carnot corespunzătoare triunghiului ABC , iar A_b și A_c al doilea punct de intersecție dintre cercul (τ_a) cu laturile AC respectiv AB . Analog se definesc punctele B_c și B_a , respectiv C_a și C_b determinate de intersecțiile cercurilor (τ_b) , respectiv (τ_c) cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC . Ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercurilor circumscrise triunghiurilor $AA_bA_c, BB_cB_a, CC_aC_b$.

Demonstrație. Avem

$$m(\widehat{HAH_c}) = 90^\circ - m(\widehat{H_cHA}) = 90^\circ - m(\widehat{H_aHC}) = m(\widehat{HCH_a}) \tag{i}$$

În cercul (τ_a) ,

$$m(\widehat{BA_cH}) = m(\widehat{HCB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BH}) \tag{ii}$$

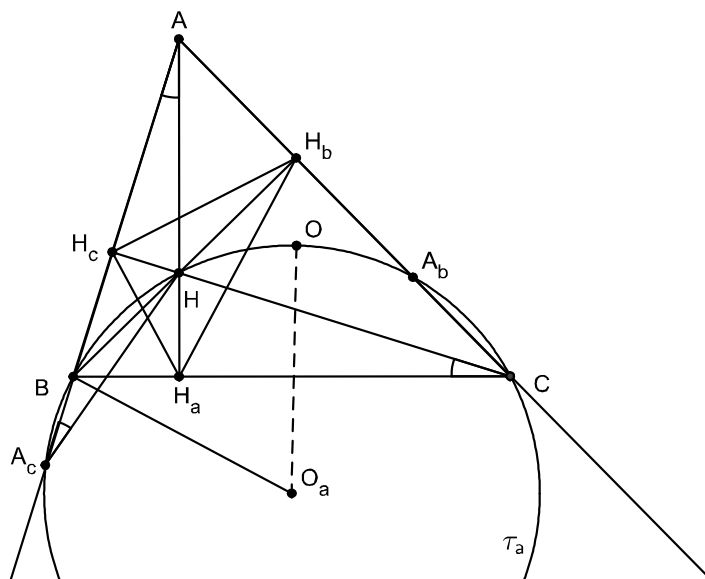


Figura 1.92: H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c

Din relațiile (i) și (ii) rezultă $\widehat{HAB} \equiv \widehat{AA_cH}$, deci triunghiul AHA_c este isoscel, de unde $AH \equiv HA_c$ (iii). Analog se arată că $AH \equiv HA_b$ (iv). Din relațiile (iii) și (iv) rezultă

$$AH \equiv HA_c \equiv HA_b,$$

deci H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c . Analog, se arată că H este centrul cercului circumscris triunghiurilor BB_cB_a și CC_aC_b (Figura 1.92). \square

Teorema 447 Fie O_a centrul cercului Țițeica-Carnot (τ_a) și $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Atunci: $BO_a \perp H_aH_b$ și $CO_a \perp H_aH_c$.

Demonstrație. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci $OC \perp H_aH_b$ (i) (vezi [15, § III.1]) (Figura 1.92). Patrulaterul $BOCO_a$ fiind un romb - datorită faptului că O_a este simetricul lui O față de BC - rezultă $BO_a \parallel OC$ (ii). Din relațiile (i) și (ii) rezultă că $BO_a \perp H_aH_b$. Analog, se arată $CO_a \perp H_aH_c$. \square

Observația 448 Analog se arată că $AO_b \perp H_bH_a$, $CO_b \perp H_bH_c$, $AO_c \perp H_cH_a$, $BO_c \perp H_cH_b$.

Teorema 449 Tangentele duse în ortocentrul H al unui triunghi ABC la cercurile Țițeica-Carnot (τ_a), (τ_b), (τ_c) intersectează laturile BC , CA , respectiv AB în trei puncte coliniare.

Demonstrație. Fie A', B', C' punctele determinate de intersecțiile dintre tangentele și laturile triunghiului, iar A'', B'', C'' al doilea punct de intersecție dintre dreptele AH , BH , CH cu cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 1.93). Avem

$$m(\sphericalangle BCC'') = m(\sphericalangle BB''C'') = \frac{1}{2}m(\widehat{BC''})$$

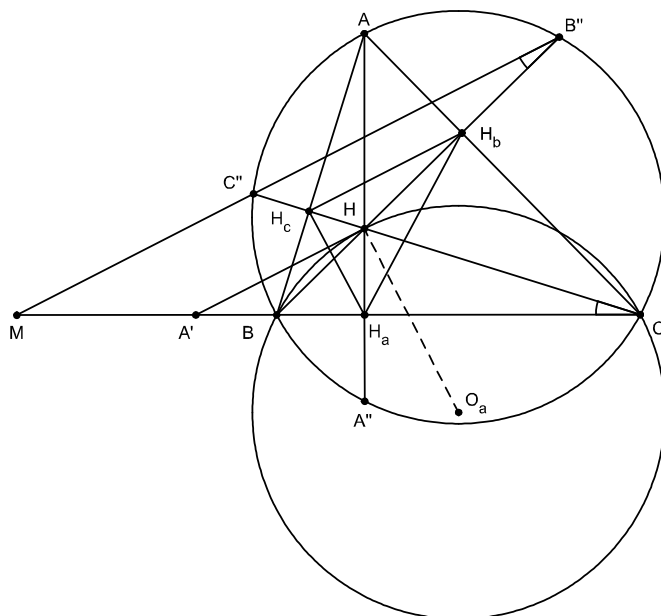


Figura 1.93: Tangente în H la cercurile lui Țițeica

și cum $A'H$ este tangentă cercului (C_a) rezultă $m(\sphericalangle A'HB) = m(\sphericalangle HCB)$, de unde $\sphericalangle A'HB \equiv \sphericalangle C''B''B$, deci dreptele $A'H$ și $B''C''$ sunt paralele. Fie $\{M\} = B''C'' \cap BC$. Din asemanarea triunghiurilor $A'BH$ cu MBB'' și $A'HC$ cu MCC'' rezultă: $\frac{A'B}{MA'} = \frac{BH}{HB''}$ și $\frac{A'C}{MA'} = \frac{HC}{HC''}$, de unde

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BH}{HC} \cdot \frac{HC''}{HB''}.$$

Analog, se arată că

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CH}{HA} \cdot \frac{HA''}{HC''} \quad \text{și} \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{AH}{HB} \cdot \frac{HB''}{HA''}.$$

Atunci $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, deci punctele A', B', C' sunt coliniare. □

Teorema 450 Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Ortocentrele triunghiurilor $AC_b C_c$, $BC_a C_c$, $CC_a C_b$ sunt centrele cercurilor Țițeica-Carnot ale triunghiului $C_a C_b C_c$.

Demonstrație. Fie $C_c C'_c$ și $C_b C'_b$ înălțimi în triunghiul $AC_b C_c$ și H_1 ortocentrul triunghiului $AC_b C_c$. Atunci $C_c C'_c \parallel IC_b$ și $C_b C'_b \parallel IC_c$, deci patrulaterul $IC_b H_1 C_c$ este paralelogram (Figura 1.94). Cum $IC_c \equiv IC_b$ rezultă că patrulaterul $IC_b H_1 C_c$ este romb, deci H_1 este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului de contact față de latura $C_b C_c$, ceea ce arată că H_1 este centrul cercului Carnot corespunzător laturii $C_b C_c$. Analog, se arată că ortocentrele triunghiurilor $BC_a C_c$ și $CC_a C_b$ sunt centrele cercurilor Țițeica-Carnot corespunzătoare laturilor $C_a C_c$, respectiv $C_b C_a$. □

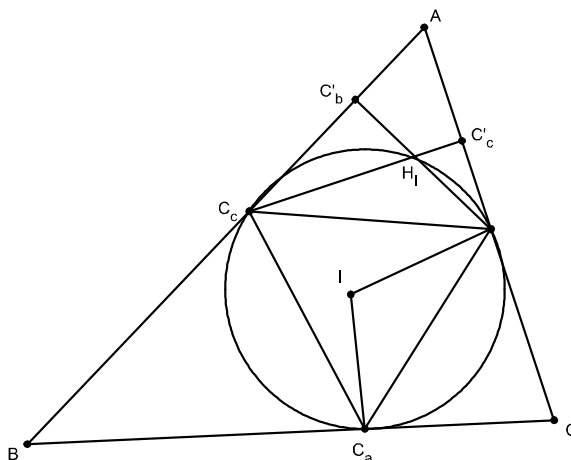


Figura 1.94: Cercurile Țițeica-Carnot ale triunghiului de contact (1)

Teorema 451 Fie H ortocentrul unui triunghi ABC , $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic $\{H_1\} = AH_a \cap H_bH_c, \{H_2\} = BH_b \cap H_aH_c, \{H_3\} = CH_c \cap H_aH_b$. Dreptele H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 sunt axe radicale dintre cercul lui Euler al triunghiului ABC și respectiv cercurile Țițeica-Carnot $(\tau_a), (\tau_b), (\tau_c)$.

Demonstrație. Vezi „Dreapta lui Euler” [15]. □

Teorema 452 Triunghiul având vârfurile în centrele cercurilor Țițeica-Carnot și triunghiurile având vârfurile în punctele unde înălțimea triunghiului dat intersectează cercul său circumscris sunt omologice, centrul de omologie aparținând acestui cerc circumscris.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Kariya” [15]. □

Teorema 453 Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC și $H_aH_bH_c$ triunghiul său ortic. Centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b$ sunt centrele cercurilor Țițeica-Carnot corespunzătoare triunghiului de contact $C_aC_bC_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie M proiecția lui B pe bisectoarea CI și $\{A_1\} = H_cM \cap AI$. Avem:

$$\widehat{AH_cH_b} \equiv \widehat{ACB} \text{ și } \widehat{MH_cA} \equiv \widehat{MCB} (= \frac{1}{2}m(\widehat{ACB}))$$

(deoarece patrulateralele H_cH_bCB și H_cMCB sunt inscriptibile) (Figura 1.95) de unde rezultă că

$$m(\widehat{AH_cA_1}) = m(\widehat{AH_cM}) = \frac{1}{2}m(\widehat{AH_cH_b}),$$

deci H_cA_1 este bisectoarea unghiului $\widehat{AH_cH_b}$. Cum AA_1 este bisectoarea unghiului A , rezultă că A_1 este centrul cercului înscris în triunghiul AH_cH_b . Dar

$$m(\widehat{IA_1M}) = m(\widehat{A_1AH_c}) + m(\widehat{A_1H_cA}) = \frac{1}{2}m(\hat{A}) + \frac{1}{2}m(\hat{C})$$

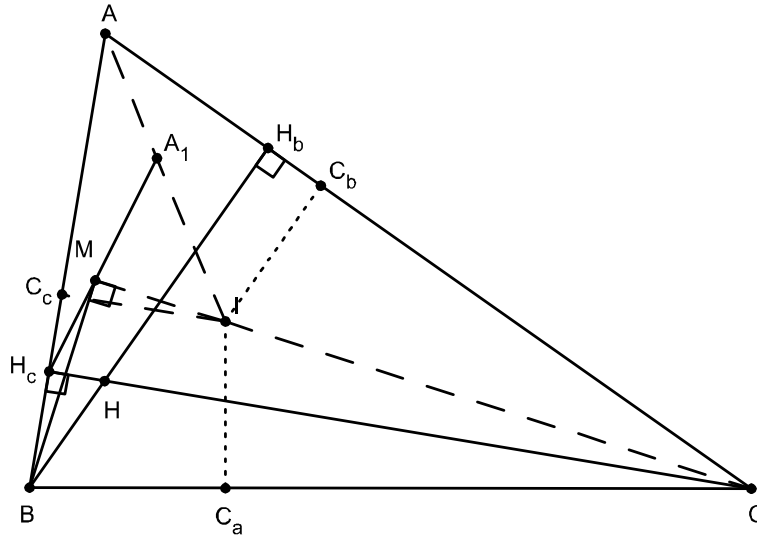


Figura 1.95: Cercurile Țițeica-Carnot ale triunghiului de contact (2)

și

$$m(\widehat{MIA_1}) = m(\widehat{MIA}) = m(\widehat{IAC}) + m(\widehat{ICA}) = \frac{1}{2}m(\hat{A}) + \frac{1}{2}m(\hat{C}),$$

de unde rezultă că

$$\widehat{IA_1M} \equiv \widehat{MIA_1}.$$

Arătăm că punctul M aparține dreptei C_cC_b . Fie $\{M_1\} = CI \cap C_cC_b$. Avem:

$$m(\widehat{BIM_1}) = \frac{1}{2}[m(\hat{B}) + m(\hat{C})]$$

(ca unghi exterior triunghiului BIC), $m(\widehat{BIM_1}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\hat{A})$. Patrulaterul IC_cAC_b este inscriptibil, deci $m(\widehat{IC_cC_b}) = \frac{1}{2}m(\hat{A})$, de unde

$$m(\widehat{BC_cM_1}) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\hat{A}).$$

Astfel,

$$m(\widehat{BC_cM_1}) + m(\widehat{MIB}) = 180^\circ,$$

adică patrulaterul BC_cM_1I este inscriptibil, deci

$$m(\widehat{BM_1I}) = m(\widehat{BC_cI}) = 90^\circ,$$

de unde rezultă că M_1 este proiecția lui B pe bisectoarea C_1 , adică $M_1 \equiv M$. Deoarece $AI \perp C_bC_c$, $M \in C_bC_c$ și triunghiul MA_1I este isoscel, rezultă că punctele A_1 și I sunt simetrice față de latura C_cC_b , deci A_1 este centrul cercului Țițeica-Carnot corespunzător laturii C_cC_b a triunghiului de contact. \square

Teorema 454 *Triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul median al triunghiului lui Țițeica-Carnot $O_aO_bO_c$.*

Demonstrație. Deoarece $AA' \equiv A'H$ și

$$O_cA \equiv O_cH \equiv O_bA \equiv O_bH$$

rezultă că patrulaterul AO_cHO_b este romb, deci

$$O_cA' \equiv A'O_b,$$

adică A' este mijlocul segmentului O_cO_b . Analog, se arată că B' și C' sunt mijloacele segmentelor O_aO_c și O_aO_b . \square

Teorema 455 *Triunghiul $A''B''C''$ având ca vârfuri punctele unde mediatoarele laturilor triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC este triunghiul ortic al triunghiului lui Țițeica-Carnot.*

Demonstrație. Deoarece $BC \parallel O_bO_c$ și $M_aA'' \perp BC$, iar $A'' \in O_bO_c$ (vezi „Cercul lui Euler” [15]), rezultă că O_aA'' este înălțime în triunghiul lui Țițeica-Carnot. Analog se arată că O_bB'' și O_cC'' sunt înălțimi în triunghiul $O_aO_bO_c$. \square

Teorema 456 *Triunghiul $A'B'C'$ (determinat de punctele euleriene ale triunghiului ABC) și triunghiul $A''B''C''$ (având ca vârfuri punctele unde mediatoarele triunghiului ABC intersectează a doua oară cercul lui Euler al triunghiului ABC) sunt două triunghiuri S .*

Demonstrație. Vezi „Triunghiuri Ortopolare”. \square

Teorema 457 *Triunghiul având vârfurile în centrele cercurilor Țițeica-Carnot și triunghiurile având vârfurile în punctele unde înălțimea triunghiului dat intersectează cercul său circumscris sunt omologice, centrul de omologie aparținând acestui cerc circumscris.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Kariya” [15]. \square

Teorema 458 *Fie $O_aO_bO_c$ triunghiul lui Țițeica-Carnot al unui triunghi ABC și $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Dreptele O_aH_a, O_bH_b, O_cH_c sunt concurente.*

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Hexyl” [15]. \square

1.39 Triunghiul lui Lucas

„Matematica reprezintă în sine o colecție de rezultate, care pot fi aplicate la orice.” - Bertrand Russell⁴²

Pe latura BC a triunghiului ABC în exterior se construiește pătratul BCC_1B_1 . Fie $\{M\} = AB_1 \cap BC$ și $\{N\} = AC_1 \cap BC$. Fie P și Q punctele de intersecție dintre perpendicularele ridicate din N și M pe latura BC și laturile AC , respectiv AB (Figura 1.96).

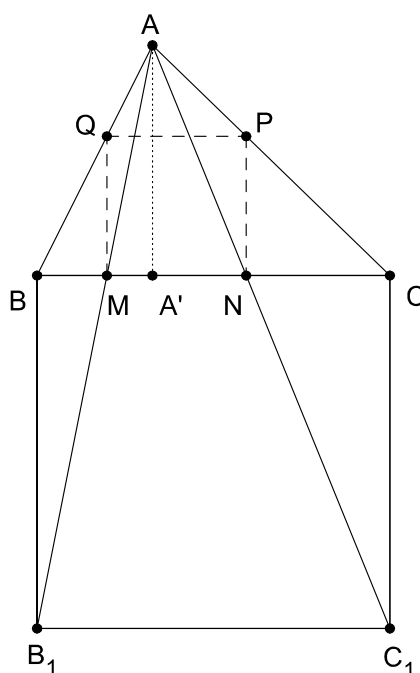


Figura 1.96: Triunghiul lui Lucas

Teorema 459 *Patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.*

Demonstrație. Din asemănările triunghiurilor AQM și ABB_1 ; APN și ACC_1 ; APN și AB_1C_1 rezultă:

$$\frac{AM}{AB_1} = \frac{MQ}{BB_1} = \frac{AQ}{AB}, \quad \frac{AN}{AC_1} = \frac{NP}{CC_1} = \frac{AP}{AC}, \quad \frac{MN}{B_1C_1} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AN}{AC_1}, \quad (1)$$

⁴²Bertrand Russell (1872 - 1970) – filosof, logician și matematician englez, laureat al Premiului Nobel pentru literatură

de unde $\frac{MQ}{BB_1} = \frac{NP}{CC_1}$ și cum $BB_1 \equiv CC_1$, rezultă $MQ \equiv NP$. Deoarece $MQ \parallel NP$ și $MQ \perp BC, NP \perp BC$ rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi. Atunci,

$$PQ \parallel BC \text{ și } PQ \equiv MN. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{QP}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{QM}{BB_1}$$

(și cum $BC \equiv BB_1$), de unde $MN \equiv QM$, deci patrulaterul $MNPQ$ este pătrat. \square

Observația 460 *Cercul circumscris triunghiului APQ se numește $A - Lucas$ ⁴³. Analog, se definesc cercurile $B - Lucas$ și $C - Lucas$. Fie L_A, L_B, L_C centrele cercurilor Lucas. Triunghiul $L_A L_B L_C$ se numește triunghiul lui Lucas.*

Teorema 461 *Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC și R raza cercului circumscris acestui triunghi. Pătratul $MNPQ$ are latura de lungime egală cu $\frac{a}{1 + \frac{2aR}{bc}}$.*

Demonstrație. Fie A' piciorul înălțimii duse din A (Figura 1.96). Din asemănarea triunghiurilor AQP și ABC rezultă:

$$\frac{AQ}{c} = \frac{AP}{b} = \frac{QP}{a},$$

de unde $AQ = \frac{c}{a}l, AP = \frac{b}{a}l, (PQ = l)$, iar din asemănarea triunghiurilor BQM și BAA' rezultă $\frac{BQ}{AB} = \frac{QM}{AA'}$, de unde

$$\frac{c - \frac{c}{a}l}{c} = \frac{l}{h_a}$$

și de aici

$$l = \frac{a \cdot h_a}{a + h_a}.$$

Dar $h_a = \frac{2 \cdot A_{[ABC]}}{a} = \frac{2 \cdot abc}{a \cdot 4R} = \frac{bc}{2R}$, de unde rezultă

$$l = \frac{a}{1 + \frac{2aR}{bc}}.$$

Teorema 462 *Razele cercurilor $A - Lucas, B - Lucas$ și $C - Lucas$ sunt egale cu: $R_A = \frac{R}{1 + \frac{2aR}{bc}}, R_B = \frac{R}{1 + \frac{2bR}{ac}},$ respectiv $R_C = \frac{R}{1 + \frac{2cR}{ab}}$.*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile APQ și ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul A și raportul de omotetie fiind egal cu

$$\frac{l}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2aR}{bc}}$$

(conform proprietății precedente) rezultă că $\frac{R_A}{R} = \frac{l}{a}$, de unde

$$R_A = \frac{R}{1 + \frac{2aR}{bc}}.$$

Analog se determină lungimile celorlalte două raze. \square

⁴³Francois Lucas (1842-1891) – matematician francez, contribuții în teoria numerelor

Teorema 463 *Cercul circumscris triunghiului ABC și cercurile lui Lucas sunt tangente interior.*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile AQP și ABC sunt omotetice (Figura 1.97),

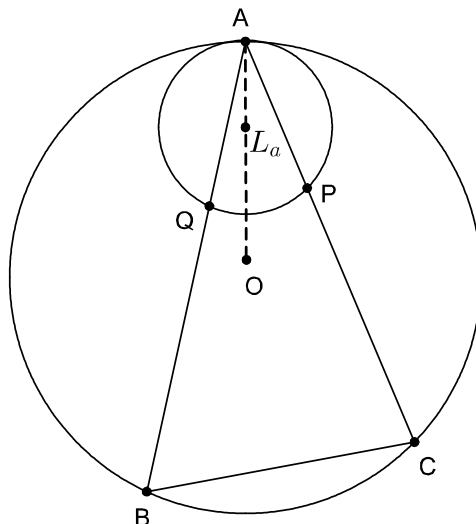


Figura 1.97: Cercurile lui Lucas

prin omotetia de centru A și raport $\frac{1}{1 + \frac{2aR}{bc}}$, rezultă că cercurile circumscrise acestor două triunghiuri se corespund prin omotetia considerată, deci cercurile sunt tangente interior. \square

Observația 464 *Raportul de omotetie poate fi considerat și sub forma $\frac{R_A}{R}$. Analog se arată că cercurile $B - Lucas$ și $C - Lucas$ sunt tangente interior cercului circumscris triunghiului ABC .*

Teorema 465 *Cercurile lui Lucas sunt tangente două câte două.*

Demonstrație. Avem: $OL_B = OB - L_BB = R - R_B$, $OL_C = R - R_C$ și $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle BAC)$ (Figura 1.98). Aplicând teorema cosinului în triunghiul $OL_B L_C$ rezultă:

$$L_B L_C^2 = OL_B^2 + OL_C^2 - 2OL_B \cdot OL_C \cdot \cos(\sphericalangle L_B O L_C).$$

Cum $OL_B = R - \frac{R}{1 + \frac{2bR}{ac}}$, $OL_C = R - \frac{R}{1 + \frac{2cR}{ab}}$ și

$$\cos(\sphericalangle L_B O L_C) = \cos \widehat{2A} = 2 \cos^2 \widehat{A} - 1 = 2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) - 1$$

rezultă

$$L_B L_C = \frac{2R(abc + b^2 R + c^2 R) \cdot a}{(ac + 2bR)(ab + 2cR)} = R_B + R_C,$$

deci cercurile $B - Lucas$ și $C - Lucas$ sunt tangente. Analog, se arată că cercurile $A - Lucas$ și $C - Lucas$, respectiv $B - Lucas$ și $A - Lucas$ sunt tangente. \square

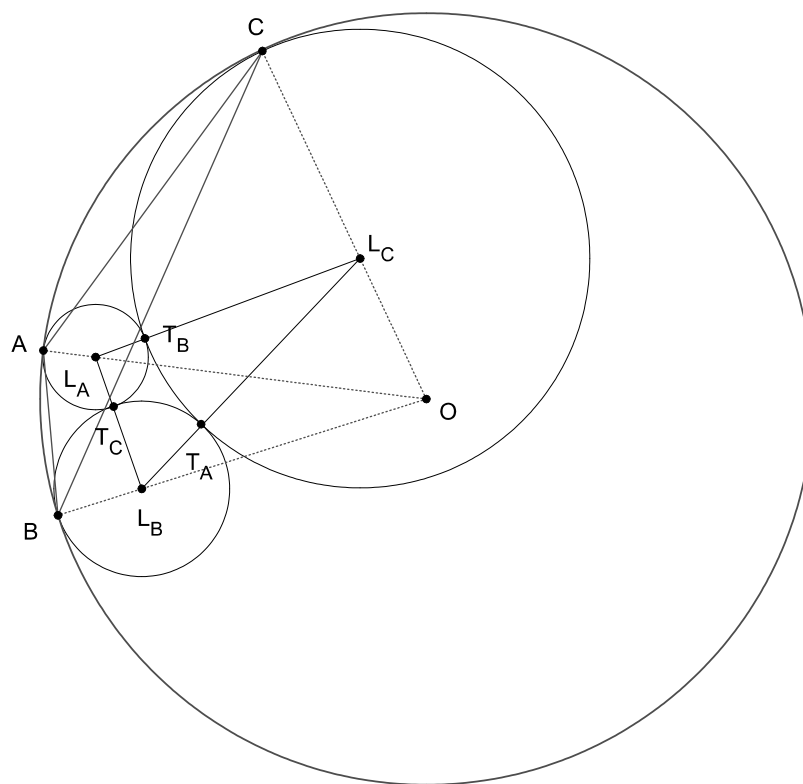


Figura 1.98: Cercurile lui Lucas sunt tangente două câte două

Teorema 466 *Laturile triunghiului Lucas au lungimile $R_A + R_B, R_B + R_C, R_C + R_A$.*

Demonstrația este o consecință a proprietății precedente. □

Observația 467 *Fie T_A, T_B, T_C punctele de tangență dintre cercurile lui Lucas. Triunghiul $T_A T_B T_C$ se numește triunghiul tangențelor Lucas. Cercul circumscris triunghiului $T_A T_B T_C$ se numește cercul radical al cercurilor Lucas.*

1.40 Triunghiul lui Fuhrmann

„Dacă cineva vrea să determine cu un cuvânt laconic și expresiv esența matematicii, acela trebuie să spună, că este o știință despre infinit.” - Henri Poincaré⁴⁴

Fie \mathcal{C} cercul circumscris triunghiului ABC . Triunghiul lui Fuhrmann al triunghiului ABC este triunghiul $F_A F_B F_C$ ale cărui vârfuri sunt simetricele mijloacelor arcelor BC, AC , respectiv AB , considerate în cercul \mathcal{C} , față de laturile triunghiului ABC (Figura 1.99). Cercul circumscris triunghiului lui Fuhrmann se numește *cercul lui Fuhrmann*. Centrul cercului lui Fuhrmann (\mathcal{F}) se numește *punctul lui Fuhrmann* (F). Fie A', B', C' mijloacele arcelor BC, AC , respectiv AB și M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor triunghiului ABC , iar O centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

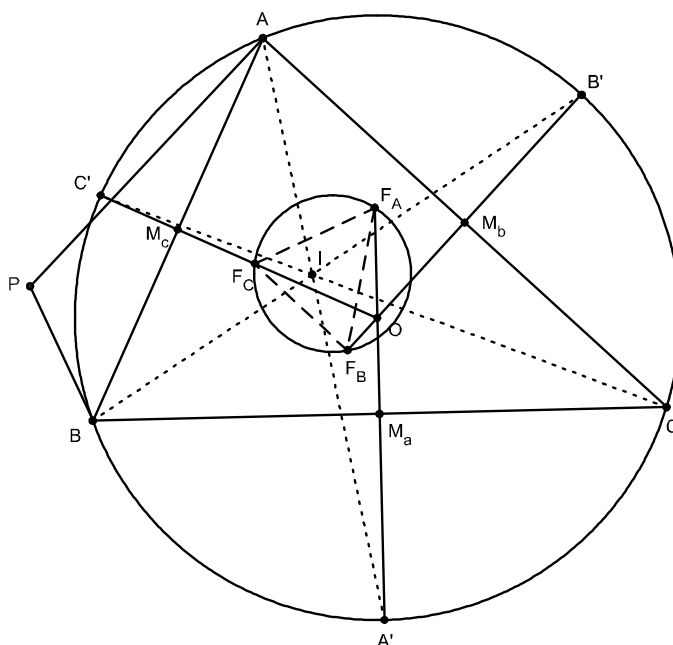


Figura 1.99: Triunghiul lui Fuhrmann

Teorema 468 Dreptele $A'F_A, B'F_B, C'F_C$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $OA' \perp BC$ rezultă că $F_A A' \perp BC$, deci $O \in A'F_A$. Analog $O \in B'F_B$ și $O \in C'F_C$. □

Teorema 469 Triunghiul ABC și triunghiul Fuhrmann $F_A F_B F_C$ al triunghiului ABC sunt ortologice.

⁴⁴Henri Poincaré (1854 -1912) – matamatician și fizician francez, contribuții importante în toate ramurile matematicii

Demonstrație. Deoarece $F_AA' \perp BC$, $F_BB' \perp AC$ și $F_CC' \perp AB$, iar F_AA' , F_BB' , F_CC' sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , rezultă că triunghiul $F_AF_BF_C$ este ortologic cu triunghiul ABC . \square

Teorema 470 *Perpendicularele duse din A , B și C pe laturile F_BF_C , F_AF_C , respectiv F_BF_A ale triunghiului Fuhrmann sunt concurente într-un punct P .*

Demonstrație. Deoarece relația de ortologie dintre două triunghiuri este simetrică, rezultă (conform proprietății precedente) că triunghiul ABC este ortologic cu triunghiul Fuhrmann, deci perpendicularele duse din A , B și C pe laturile F_BF_C , F_AF_C , respectiv F_BF_A sunt concurente într-un punct P . \square

Teorema 471 *Cercurile având centrele în vârfurile F_A , F_B , F_C și trec prin punctele B și C , C și A , respectiv A și B sunt concurente în punctul P .*

Demonstrație. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Fie $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ cercurile circumscrise triunghiurilor BIC, CIA respectiv AIB , iar $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ cercurile având centrele în punctele F_A, F_B, F_C și trec prin punctele B și C , C și A , respectiv A și B (Figura 1.100).

Conform teoremei lui Catalan, centrele cercurilor $\zeta_a, \zeta_b, \zeta_c$ sunt mijloacele arcelor BC, AC , respectiv AB ale cercului circumscris triunghiului ABC . Cercurile ζ_a și ζ'_a sunt simetrice față de BC ; ζ_b și ζ'_b sunt simetrice față de CA ; ζ_c și ζ'_c sunt simetrice față de AB . Atunci conform teoremei lui Schoute cercurile $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ sunt concurente într-un punct Q , linia centrelor fiind perpendiculară pe axa radicală a cercurilor; rezultă că F_CF_B, F_AF_C, F_AF_B sunt mediatoarele segmentelor AQ, BQ, CQ și conform teoremei precedente rezultă că punctele P și Q coincid, deci cercurile $\zeta'_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ sunt concurente în punctul P . \square

Teorema 472 *Fie I_a centrul cercului A - exînscriș corespunzător triunghiului ABC , I'_a simetricul lui I_a față de BC . Dacă P este punctul de concurență al cercurilor $\zeta_a, \zeta'_b, \zeta'_c$ (având centrele în vârfurile triunghiului Fuhrmann și trec prin punctele (B, C) , (C, A) respectiv (A, B)), atunci punctele P, A și I'_a sunt coliniare.*

Demonstrație. Fie A' mijlocul arcului BC al cercului circumscris triunghiului ABC și I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Punctele A, I, A' și I_a sunt coliniare (vezi "Cercurile exînscrișe" [15]) iar A' este centrul cercului circumscris patrulaterului $BICI_a$ (adică cercul ζ_a) (Figura 1.100). Cum cercurile ζ_a și ζ'_a sunt simetrice față de latura BC , rezultă că punctul I'_a aparține cercului ζ'_a . Fie H_A și H_C ortocentrele triunghiurilor IBC , respectiv IAB , iar A'' al doilea punct de intersecție dintre cercul ζ'_c și dreapta BC .

Conform proprietății prin care simetricele ortocentrului unui triunghi față de laturile acestuia aparțin cercului circumscris triunghiului, rezultă că simetricul lui H_A față de BC aparține lui ζ_a și deci H_A aparține lui ζ'_a . Analog $H_c \in \zeta'_c$. Evident I este ortocentrul triunghiului AH_cB . Simetricul său față de AB aparține cercului ζ'_c . Avem:

$$\sphericalangle AH_cB \equiv \sphericalangle AA''B \left(= \frac{1}{2}m(\widehat{APB}) \right), \quad (1)$$

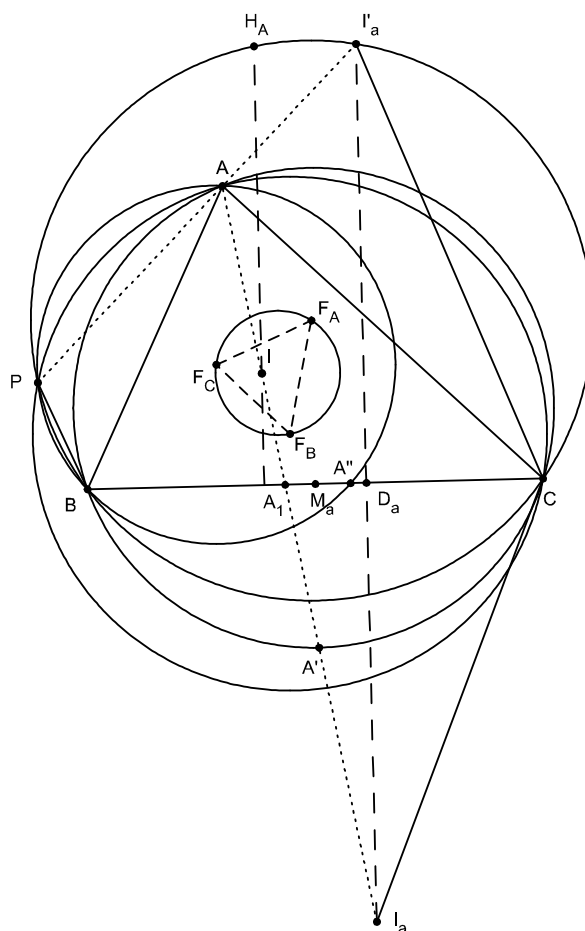


Figura 1.100: Cercuri cu centrele în vârfurile triunghiului Fuhrmann

iar unghiurile $\sphericalangle AH_cB$ și $\sphericalangle AIB$ sunt suplementare (I fiind ortocentrul lui AH_cB). Datorită simetriei rezultă $\sphericalangle I'_aCB \equiv \sphericalangle BCI_a$, iar în ζ_a avem: $\sphericalangle BCI_a \equiv \sphericalangle BII_a$ (2), de unde $\sphericalangle BCI'_a \equiv \sphericalangle BII_a$. Cum

$$m(\sphericalangle AH_cB) + m(\sphericalangle AIB) = 180^\circ$$

și

$$m(\sphericalangle BIA) + m(\sphericalangle BII_a) = 180^\circ$$

rezultă $m(\sphericalangle AH_cB) = m(\sphericalangle BII_a)$, adică $\sphericalangle AH_cB \equiv \sphericalangle BII_a$ (3). Din relațiile (1) - (3) rezultă

$$\sphericalangle AA''B \equiv \sphericalangle BCI'_a,$$

adică $AA'' \parallel CI'_a$, relație care arată că punctele P, A și I'_a sunt coliniare (deoarece în ζ'_c și ζ'_a avem

$$m(\sphericalangle BPA) = 180^\circ - m(\sphericalangle BA''A) = 180^\circ - m(\sphericalangle BCI_a) = m(\sphericalangle BPI'_a),$$

iar cum A și I'_a se află în același semiplan față de PB rezultă P, A și I'_a coliniare). \square

Observația 473 Analog se arată că simetricile I'_b și I'_c ale centrelor cercurilor B -exînscriș, respectiv C -exînscriș față de CA și AB sunt coliniare cu punctele P și B , respectiv P și C .

Teorema 474 (Stevanovic) Ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Păstrând notațiile de mai sus, fie $\{A_1\} = AI_a \cap BC$, M_a mijlocul laturii BC și $\{D_a\} = I_a I'_a \cap BC$ (Figura 1.100). Datorită simetriei față de BC , rezultă că punctele A_1 , F_A și I'_a sunt coliniare. Dar $IM_a \parallel AD_a$ (vezi „Punctul lui Gergonne”- teorema lui Poncelet [15]) și $M_a F_A \parallel D_a I'_a$. Din reciproca teoremei lui Desargues aplicată triunghiurilor $IF_A M_a$ și $A'_a I'_a D_a$ având centrul de omologie A_1 - rezultă $A'_a I'_a \parallel IF_A$. Conform teoremei 470 rezultă $PI'_a \perp F_B F_C$, adică $IF_A \perp F_B F_C$, analog $IF_B \perp F_A F_C$, deci I este ortocentrul triunghiului lui Fuhrmann. \square

Teorema 475 Dacă afixul cercului circumscris triunghiului ABC este în originea reperului complex, atunci afixul punctului lui Fuhrmann este egal cu

$$z_F = \frac{z_A(2p - a) + z_B(2p - b) + z_C(2p - c)}{2p}.$$

Demonstrație. Notăm cu z_X afixul punctului X . Afixul centrului cercului A -exînscriș este

$$z_{I_a} = \frac{c(a + b)z_C + (b - a)[az_A + bz_B]}{(a + b)(b + c - a)} \quad (1)$$

(vezi „Triunghiul cotangent” [15]), iar afixul centrului cercului înscris în triunghiul ABC este

$$z_I = \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c}. \quad (2)$$

Deoarece A' este mijlocul segmentului II_a (vezi „Cercurile exînscrișe” [15]) rezultă $z_{A'} = \frac{z_I + z_{I_a}}{2}$ (3). Cum M_a este mijlocul segmentului $A'F_A$ rezultă

$$z_{F_A} = 2z_{M_a} - z_{A'} = z_B + z_C - \frac{z_I + z_{I_a}}{2}.$$

Analog se determină afixele punctelor F_B și F_C , de unde rezultă afixul centrului de greutate al triunghiului $F_A F_B F_C$:

$$z_{G_F} = \frac{z_{F_A} + z_{F_B} + z_{F_C}}{3} = \frac{z_A(4p - a) + z_B(4p - b) + z_C(4p - c)}{6p}.$$

Deoarece I este ortocentrul triunghiului $F_A F_B F_C$ rezultă $IG_F = 2G_F F$ (unde F este centrul cercului lui Fuhrmann), deci $z_{G_F} = \frac{z_I + 2z_F}{3}$, de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 476 Centrul cercului lui Fuhrmann corespunzător unui triunghi ABC este mijlocul segmentului HN , unde H și N sunt ortocentrul, respectiv punctul lui Nagel al triunghiului ABC .

Demonstrație. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Atunci,

$$\begin{aligned} z_H &= z_A + z_B + z_C, \\ z_F &= \frac{z_A(2p - a) + z_B(2p - b) + z_C(2p - c)}{2p}, \\ z_N &= \frac{z_A(p - a) + z_B(p - b) + z_C(p - c)}{p}. \end{aligned}$$

Deoarece $\frac{z_H + z_N}{2} = z_F$ rezultă concluzia. \square

Teorema 477 Punctul lui Nagel și ortocentrul unui triunghi ABC aparțin cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $|z_H - z_F| = |z_N - z_F| = |z_F - z_{F_A}|$, adică $HF = NF = FF_A$ rezultă că H și N aparțin cercului lui Fuhrmann. \square

Observația 478 Punctele H și N sunt diametral opuse în cercul lui Fuhrmann.

Teorema 479 Raza cercului lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC are lungimea egală cu lungimea segmentului OI , unde O și I sunt centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Deoarece $HN \parallel OI$ și $HN = 2OI$ (vezi „Punctul lui Nagel” [15]), rezultă

$$R_F = \frac{1}{2}HN = OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

\square

Observația 480 Patrulaterul $IONF$ este paralelogram.

Teorema 481 Centrele cercurilor lui Euler ale triunghiului ABC și triunghiului lui Fuhrmann coincid.

Demonstrație. Alegem un reper complex cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , deci $z_O = 0$. Atunci, afixul centrului cercului lui Euler al triunghiului ABC este

$$z_{O_9} = \frac{z_H + z_O}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}.$$

Afixul centrului lui Euler al triunghiului lui Fuhrmann este $z_{O_9^F} = \frac{z_I + z_F}{2} = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}$. \square

Consecința 482 Raza cercului lui Euler a triunghiului lui Fuhrmann este egală cu jumătate din lungimea segmentului OI .

Teorema 483 Fie $F_A F_B F_C$ triunghiul lui Fuhrmann corespunzător unui triunghi ABC . Cercurile circumscrise triunghiurilor $F_A B C$, $F_B C A$, $F_C A B$, $F_A F_B F_C$ sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie H_1 simetricul ortocentrului H față de BC (Figura 1.101); punctul H_1 aparține cercului circumscris triunghiului ABC . Deoarece patrulaterul

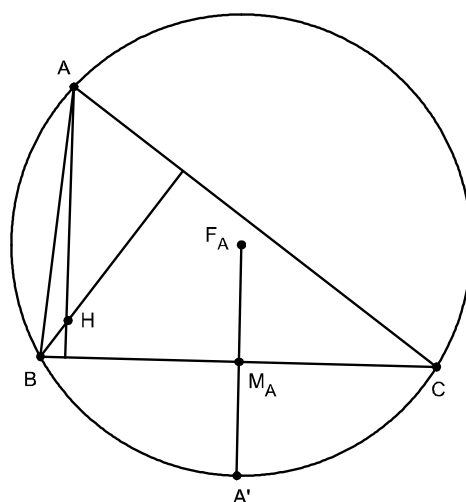


Figura 1.101: $F_A F_B F_C$ triunghiul lui Fuhrmann

$BH F_A C$ și $BH_1 A' C$ sunt congruente, iar $BH A' C$ este inscriptibil rezultă că și patrulaterul $BH F_A C$ este inscriptibil, H aparține cercului circumscris triunghiului $F_A B C$. Analog se arată că H aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor $F_B C A$ și $F_C A B$. Cum H aparține și cercului circumscris triunghiului $F_A F_B F_C$, rezultă concluzia. \square

Teorema 484 Simetricul centrului cercului circumscris unui triunghi ABC față de punctul lui Spieker al triunghiului ABC este punctul lui Fuhrmann.

Demonstrație. Vezi „Punctul lui Spieker” [15]. \square

1.41 Triunghiul lui Lionnet

„Științele matematice, științele naturale și științele umanitare pot fi numite, respectiv și științe supranaturale, științe naturale și științe nenaturale.” - L. D. Landau⁴⁵

Teorema 485 *Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile $A'BC$, $AB'C$, ABC' asemenea cu ABC . Cercurile circumscrise acestor triunghiuri au un punct comun D .*

Demonstrație. Din condiția de asemănare rezultă

$$m(\sphericalangle BA'C) = m(\sphericalangle BAC), m(\sphericalangle CBA') = m(\sphericalangle CBA), m(\sphericalangle ACB) = m(\sphericalangle AC'B).$$

Fie D punctul de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor ABC' și $AB'C$ (Figura 1.102). Atunci, $m(\sphericalangle ADB) = 180^\circ - m(\sphericalangle C), m(\sphericalangle ADC) = 180^\circ - m(\sphericalangle B)$

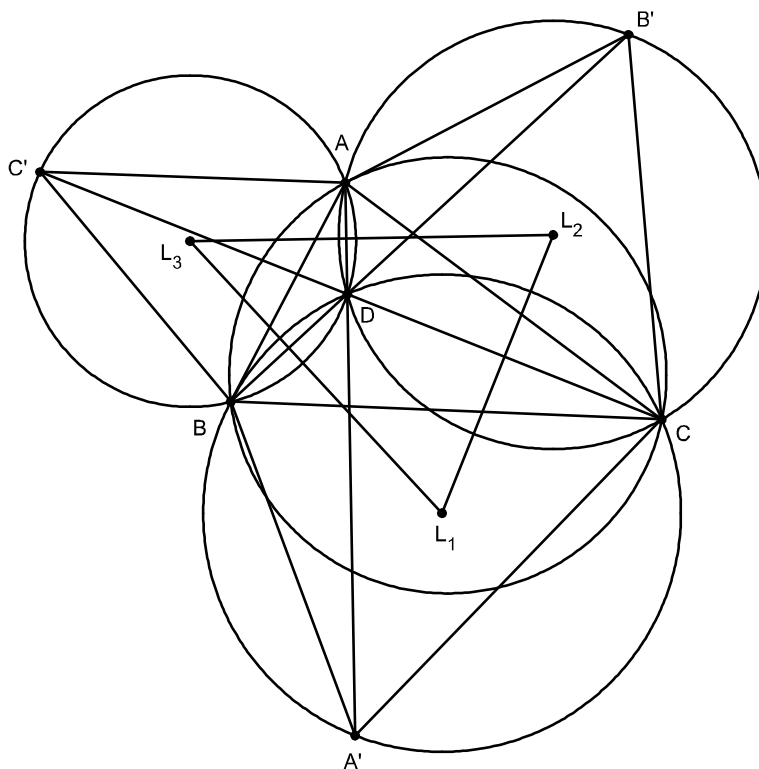


Figura 1.102: Triunghiul lui Lionnet

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BDC) &= 360^\circ - [180^\circ - m(\sphericalangle C) + 180^\circ - m(\sphericalangle B)] \\ &= m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ - m(\sphericalangle A) \\ &= 180^\circ - m(\sphericalangle BA'C) \end{aligned}$$

⁴⁵L. D. Landau (1908-1968) –fizician rus, laureat al Premiului Nobel pentru Fizică în anul 1962

deci punctul D aparține cercului circumscris triunghiului $BA'C$. \square

Fie L_1, L_2, L_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $A'BC, AB'C, ABC'$. Triunghiul $L_1L_2L_3$ se numește *triunghiul lui Lionnet* corespunzător triunghiului ABC . Cercul circumscris triunghiului $L_1L_2L_3$ se numește *cercul lui Lionnet*.

Teorema 486 *Triunghiurile $A'B'C'$ și $L_1L_2L_3$ sunt omologice.*

Demonstrație. Deoarece $m(\sphericalangle BDA) = 180^\circ - m(\sphericalangle C)$, $m(\sphericalangle BDA') = m(\sphericalangle BCA') = m(\sphericalangle C)$, rezultă că

$$m(\sphericalangle BDA) + m(\sphericalangle BDA') = 180^\circ,$$

deci punctele A, D, A' sunt coliniare. Analog se arată că B, D, B' , respectiv C, D, C' sunt coliniare, deci D este centrul de omologie dintre triunghiurile ABC și $A'B'C'$. \square

Teorema 487 *Triunghiurile $A'B'C'$ și $L_1L_2L_3$ sunt ortologice.*

Demonstrație. Deoarece AD este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor $AB'C$ și ABC' rezultă $AD \perp L_2L_3$ deci $AA' \perp L_2L_3$. Analog, $BB' \perp L_1L_3$ și $CC' \perp L_1L_2$, iar cum $AA' \cap BB' \cap CC' = \{D\}$, rezultă că D este un centru de ortologie, celălalt fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC . \square

Teorema 488 *Triunghiului lui Lionnet $L_1L_2L_3$ este asemenea cu triunghiul $A'B'C'$.*

Demonstrație. Deoarece $BD \perp L_1L_3$, $CD \perp L_1L_2$ rezultă că

$$m(\widehat{L_2L_1L_3}) = 180^\circ - m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BA'C}) = m(\widehat{B'A'C'}) = m(\widehat{BAC}),$$

și analog $m(\widehat{L_1L_2L_3}) = m(\widehat{A'B'C'})$, deci triunghiurile $A'B'C'$ și $L_1L_2L_3$ sunt asemenea. \square

Teorema 489 *Triunghiul lui Lionnet $L_1L_2L_3$ este asemenea cu triunghiul ABC .*

Demonstrația rezultă din proprietatea precedentă. \square

Teorema 490 *Punctele D și O sunt izogonale în triunghiul lui Lionnet, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece DL_1 și perpendiculara din D pe BC sunt drepte izogonale în raport cu unghiul $\sphericalangle BDC$, ($m(\widehat{L_1DB}) = 90^\circ - m(\widehat{BCD})$), rezultă că DL_1 și L_1O sunt izogonale în raport cu unghiul $\widehat{L_3L_1L_2}$, deoarece $BD \perp L_1L_3$, $CD \perp L_1L_2$. \square

1.42 Triunghiurile lui Morley

„Arta de a rezolva probleme geometrice seamănă cu trucurile iluzioniștilor – uneori, chiar știind soluția problemei, nu-i clar cum s-ar putea ajunge la ea.” - I. D. Novikov⁴⁶

Teorema 491 (Morley⁴⁷) *Trisectoarele unghiurilor unui triunghi se intersectează în trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi echilateral.*

Demonstrație. Fie triunghiul ABC și L, M, N intersecțiile trisectoarelor (Figura 1.103). Avem:

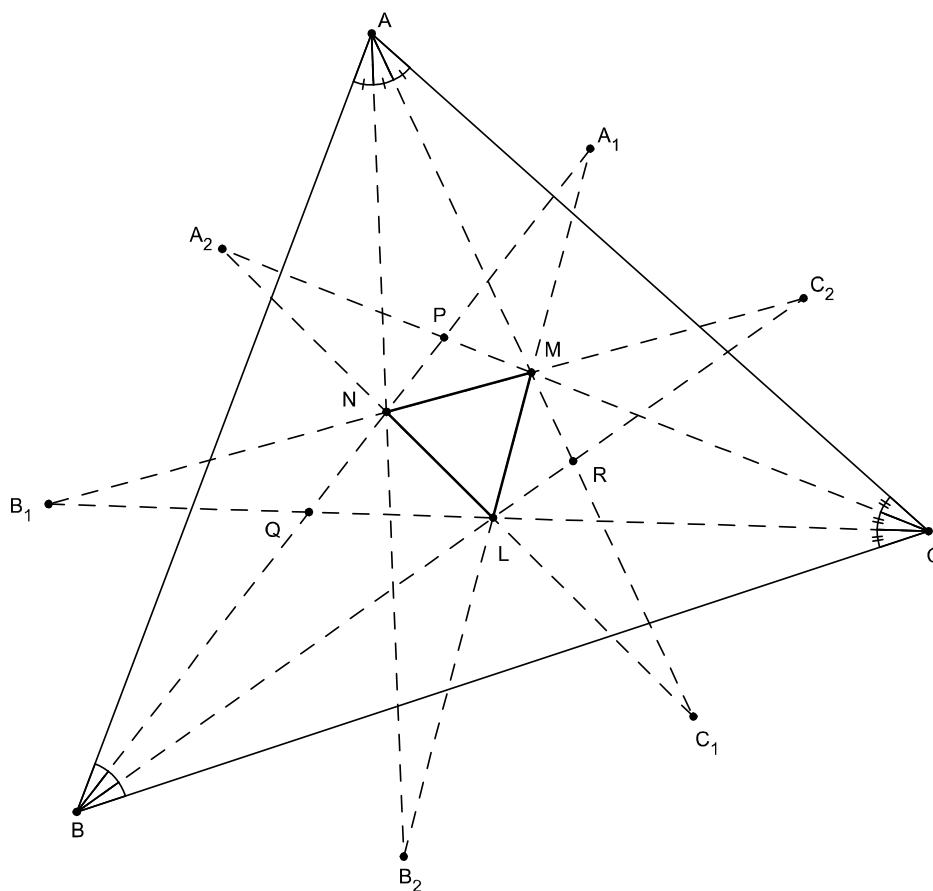


Figura 1.103: Triunghiurile lui Morley

⁴⁶Igor Dovicov (1935-) – fizician rus

⁴⁷Frank Morley (1860-1937) – matematician englez, profesor la Universitatea Johns Hopkins, contribuții în algebră și geometrie

$$\begin{aligned} m(\sphericalangle BAN) &= m(\sphericalangle NAM) = m(\sphericalangle MAC) = \frac{1}{3}m(\sphericalangle A), \\ m(\sphericalangle NBA) &= \frac{1}{3}m(\widehat{B}), \quad m(\sphericalangle MCA) = \frac{1}{3}m(\widehat{C}). \end{aligned}$$

Teorema sinusurilor în triunghiul ANB dă:

$$\frac{AN}{\sin \frac{B}{3}} = \frac{AB}{\sin \frac{A+B}{3}}$$

adică,

$$\begin{aligned} AN &= \frac{c \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi-C}{3}} = \frac{2R \sin C \sin \frac{B}{3}}{\sin \left(\frac{\pi-C}{3}\right)} = \frac{2R \sin(\pi-C) \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{\pi-C}{3}} = \frac{2R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{\pi-C}{3} (3 - 4 \sin^2 \frac{\pi-C}{3})}{\sin \frac{\pi-C}{3}} \\ &= 2R \sin \frac{B}{3} \left(3 - 2 \left(1 - \cos \frac{2\pi-2C}{3}\right)\right) = 2R \sin \frac{B}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi-2C}{3}\right) \\ &= 4R \sin \frac{B}{3} \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi-2C}{3}\right) = 4R \sin \frac{B}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi-2C}{3}\right) \\ &= 8R \sin \frac{B}{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{3}\right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right) = 8R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right). \end{aligned}$$

Analog se obține:

$$AM = 8R \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right).$$

Teorema cosinusurilor în triunghiul ANM ne dă: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \frac{A}{3}$ și utilizând relațiile precedente obținem:

$$\begin{aligned} MN^2 &= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{B}{3}\right) \cos \frac{A}{3} \right] \\ &= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[\frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{6} - \frac{2C}{3}\right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{6} - \frac{2B}{3}\right)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{A}{3} \left(\cos \frac{\pi - B - C}{3} + \cos \frac{B - C}{3} \right) \right] \\ &= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left[1 + \cos \frac{\pi - B - C}{3} + \cos \frac{B - C}{3} - \cos \frac{A}{3} \left(\cos \frac{\pi - B - C}{3} + \cos \frac{B - C}{3} \right) \right] \\ &= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \left(1 + \cos \frac{A}{3} \cos \frac{B - C}{3} - \cos^2 \frac{A}{3} - \cos \frac{A}{3} \cos \frac{B - C}{3} \right) \\ &= 64R^2 \sin^2 \frac{B}{3} \sin^2 \frac{C}{3} \sin^2 \frac{A}{3}. \end{aligned}$$

Așadar, $MN = 8R \sin \frac{A}{3} \sin \frac{B}{3} \sin \frac{C}{3}$. Simetria în A, B, C a relației precedente asigură valabilitatea enunțului. \square

Observația 492 *Triunghiul LMN determinat de trisectoarele interioare ale unghiurilor triunghiului ABC se numește triunghiul interior al lui Morley.*

Fie NML triunghiul lui Morley al triunghiului ABC și $\{A_1\} = LM \cap NB$, $\{A_2\} = NL \cap MC$, $\{B_1\} = MN \cap LC$, $\{B_2\} = LM \cap NA$, $\{C_1\} = NL \cap MA$, $\{C_2\} = MN \cap LB$, $\{P\} = BN \cap MC$, $\{Q\} = CL \cap NA$, $\{R\} = AM \cap LB$, $\{A'\} = BB_1 \cap CC_2$, $\{B'\} = CC_1 \cap AA_2$, $\{C'\} = AA_1 \cap BB_2$, iar razele cercului circumscris triunghiurilor $A'BC$, $AB'C$, ABC' le vom nota cu R'_1, R'_2, R'_3 . Fie $m(\sphericalangle BAP) = \alpha$, $m(\sphericalangle LBC) = \beta$, $m(\sphericalangle MCA) = \gamma$.

Teorema 493 *Pentagoanele $AA_1MNA_2, BB_1NLB_2, CC_1LMC_2$ sunt inscripibile.*

Demonstrație. Deoarece $MN \perp PL$ și PL este bisectoare în triunghiul BPC avem

$$m(\sphericalangle BPC) = 60^\circ + 2\alpha$$

și de aici $m(\sphericalangle LPC) = 30^\circ + \alpha$. Dar

$$m(\sphericalangle PA_1L) = m(\sphericalangle NPL) - m(\sphericalangle PLA_1) = \alpha$$

și analog $m(\sphericalangle PA_1L) = \alpha$, adică pentagonul AA_1MNA_2 este inscriptibil. Analog, se arată că pentagoanele BB_1NLB_2 respectiv CC_1LMC_2 sunt inscriptibile. \square

Teorema 494 *Fie R'_1, R'_2, R'_3 razele cercurilor circumscrise pentagoanelor $AA_1MNA_2, BB_1NLB_2, CC_1LMC_2$. Atunci, $a \cdot \frac{R_1}{R'_1} = b \cdot \frac{R_2}{R'_2} = c \cdot \frac{R_3}{R'_3}$ (unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC).*

Demonstrație. Deoarece $BLNB_1$ este patrulater inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle B_1BL \equiv \sphericalangle LNM$ și de aici obținem:

$$m(\sphericalangle B_1BC) = m(\sphericalangle B_1BL) + m(\sphericalangle LBC) = 60^\circ + \beta.$$

Analog, $m(\sphericalangle C_2CB) = 60^\circ + \gamma$, de unde

$$m(\sphericalangle BA'C) = 180^\circ - (60^\circ + \beta) - (60^\circ + \gamma) = \alpha.$$

Teorema sinusurilor aplicată triunghiurilor $A'BC$, respectiv ANM ne dă:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R'_1, \quad \frac{NM}{\sin \alpha} = 2R_1,$$

de unde $\frac{R_1}{R'_1} = \frac{NM}{a}$, adică

$$NM = a \cdot \frac{R_1}{R'_1}.$$

Analog, $NL = b \cdot \frac{R_2}{R'_2}$, $LM = c \cdot \frac{R_3}{R'_3}$ și cum $NM = NM = LM$ rezultă concluzia. \square

Teorema 495 *Perechile de triunghiuri $(A'BC, ANM), (B'CA, BLN), (C'AB, CMN)$ sunt respectiv asemenea.*

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle B'AC) = m(\sphericalangle NAM) = \alpha, m(\sphericalangle LPC) = 30^\circ + \alpha$.
Atunci,

$$m(\sphericalangle ANM) = m(\sphericalangle NQM) + m(\sphericalangle NMQ) = 60^\circ + \beta = m(\sphericalangle B_1BC),$$

deci triunghiurile $A'BC$ și ANM sunt asemenea. Analog se arată și celelalte două asemănări. \square

Teorema 496 *Triunghiurile PQR și LMN sunt omologice.*

Demonstrație. Dreptele PL, MQ , respectiv NR sunt mediatoarele laturilor triunghiului echilateral LMN , deci sunt concurente, ceea ce arată că triunghiurile PQR și LMN sunt omologice. \square

Teorema 497 *Laturile triunghiului ABC și ale triunghiului Morley corespunzător LMN , sunt antiparalele în raport cu unghiurile sub care se văd laturile respective ale triunghiului ABC din vârfurile omoloage ale triunghiului LMN .*

Demonstrație. Avem $m(\sphericalangle NB_1L) = m(\sphericalangle LBC) = \beta$, deci patrulaterul BB_1C_2C este inscriptibil, adică dreptele B_1C_2, BC sunt antiparalele în raport cu unghiul $\sphericalangle BLC$. Analog se arată că C_1A_2 este antiparalelă cu CA față de unghiul $\sphericalangle CMA$ și A_1B_2 este antiparalelă cu AB față de unghiul $\sphericalangle ANB$. \square

Teorema 498 *Dacă R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , atunci lungimea laturii triunghiului lui Morley corespunzător este egală cu $8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$.*

Demonstrație. Soluția 1. O primă demonstrație rezultă chiar din teorema lui Morley.

Soluția 2. Avem $m(\sphericalangle BNL) = 60^\circ + \alpha, m(\sphericalangle BLC) = 120^\circ + \alpha$, de unde

$$\frac{NL}{\sin \beta} = \frac{BL}{\sin \gamma}, \frac{BL}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(120^\circ + \alpha)} = \frac{2R \sin 3\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)},$$

deci:

$$NL = \frac{2R \sin 3\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{4R \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) \sin \beta \sin \gamma}{\cos 2\alpha - \cos 120^\circ},$$

de unde rezultă că $NL = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$. \square

Teorema 499 *Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi ABC determină un triunghi echilateral.*

Demonstrație. Vom demonstra teorema considerând următoarele cazuri:

a) triunghiul ABC este ascuțitunghic. Pe laturile triunghiului echilateral PQR construim triunghiurile isoscele $P'QR, Q'RP, R'PQ$ având unghiurile de la bază de măsură $60^\circ + \alpha, 60^\circ + \beta$ respectiv $60^\circ + \gamma$ astfel încât

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ \text{ și } \alpha < 30^\circ, \beta < 30^\circ, \gamma < 30^\circ.$$

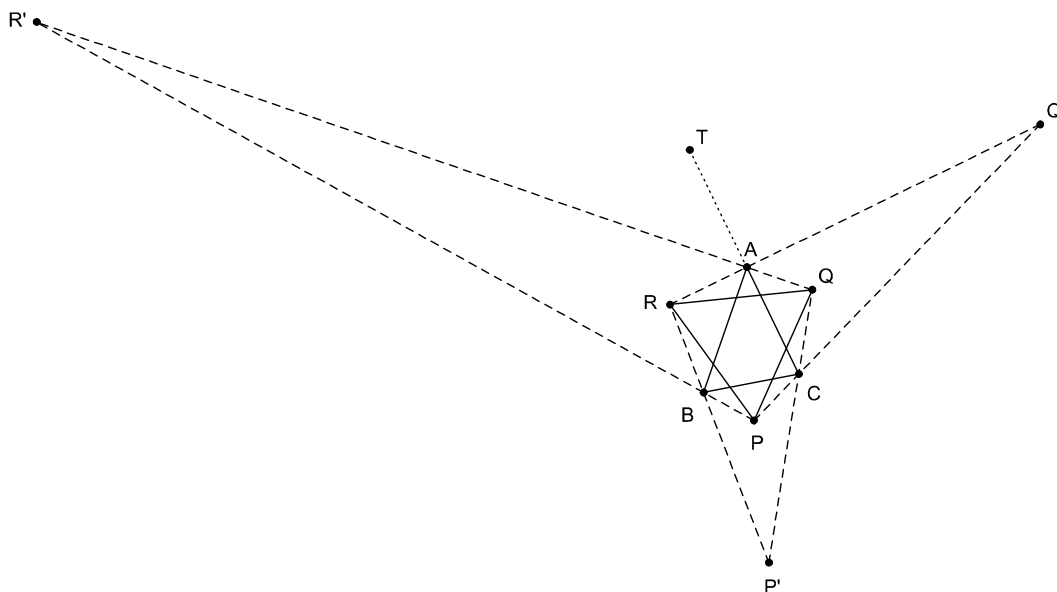


Figura 1.104: Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi ascuțitunghic

Intersecțiile laturilor triunghiurilor $P'QR, Q'RP, R'PQ$ determină vârfurile unui triunghi ABC (Figura 1.104). Arătăm că laturile celor trei triunghiuri isoscele sunt trisectoarele exterioare ale unghiurilor triunghiului ABC . Avem:

$$m(\sphericalangle PR'Q) = 180^\circ - (120^\circ + 2\gamma) = 60^\circ - 2\gamma,$$

de unde rezultă că $\frac{1}{2}m(\sphericalangle PR'Q) = 30^\circ - \gamma$,

$$m(\sphericalangle ARB) = 60^\circ + \alpha + \beta = 120^\circ - \gamma = 90^\circ + (30^\circ - \gamma) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle BR'A).$$

Datorită simetriei și a ultimului rezultat avem că R este centrul cercului înscris în triunghiul $AR'B$. Analog, se arată că Q și P sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AQ'C$ și $BP'C$. Atunci,

$$\sphericalangle BAR \equiv \sphericalangle RAB' \equiv \sphericalangle R'AT,$$

adică RA și $R'A$ sunt trisectoarele exterioare ale unghiului $\sphericalangle BAC$.

Avem:

$$m(\sphericalangle R'RQ) = 180^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle PR'Q) - \gamma = 180^\circ - (30^\circ - \gamma) - \gamma = 150^\circ,$$

$$m(\sphericalangle RAR') = 180^\circ - (30^\circ - \gamma) - (150^\circ - \beta) = 60^\circ - \alpha,$$

de unde $A = 3\alpha, B = 3\beta$ și $C = 3\gamma$. Deoarece $\alpha < 30^\circ, \beta < 30^\circ, \gamma < 30^\circ$ rezultă că triunghiul ABC este ascuțitunghic.

b) Fie triunghiul echilateral PQR . Unghiurile de la baza triunghiurilor isoscele satisfac relațiile:

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ, \alpha = 30^\circ.$$

Triunghiul $BP'C$ considerăm că are vârful P' la infinit (Figura 1.105). Avem:

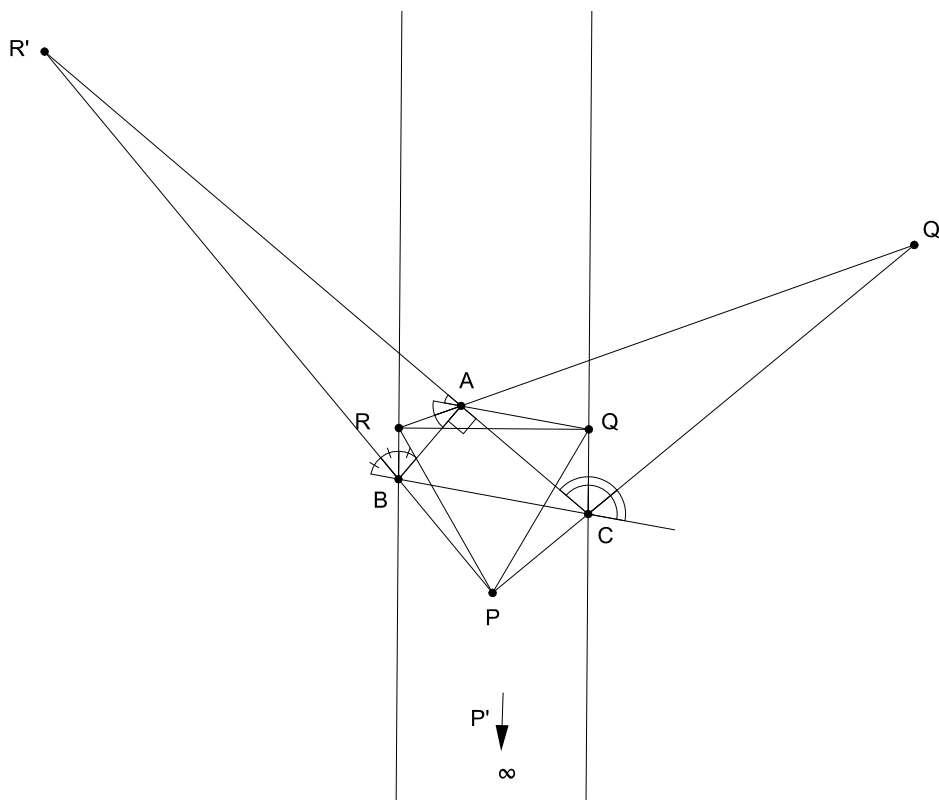


Figura 1.105: Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi dreptunghic

$$m(\sphericalangle BPC) = 60^\circ + \alpha + \beta = 90^\circ = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\sphericalangle BP'C)$$

(unde $m(\sphericalangle BP'C) = 0^\circ$), relație care arată că P este centrul cercului înscris în triunghiul $BP'C$. Analog ca în cazul precedent se arată că R și Q sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AR'B$, respectiv $AQ'C$. Deoarece $A = 3\alpha = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic.

c) Pe laturile triunghiului echilateral PQR construim triunghiurile isoscele $PQ'R$, $Q'RP$, $R'PQ$ care au unghiurile de la bază de măsuri $120^\circ - \alpha$, $60^\circ + \beta$, $60^\circ + \gamma$, astfel încât

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ, \alpha > 30^\circ, \beta + \gamma < 30^\circ$$

(Figura 1.106). Avem:

$$m(\sphericalangle RP'Q) = 2\alpha - 60^\circ, \frac{1}{2}m(\sphericalangle RP'Q) = \alpha - 30^\circ,$$

$$m(\sphericalangle BPC) = \gamma + 60^\circ + \beta = 120^\circ - \alpha = 90^\circ - (\alpha - 30^\circ) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle BP'C).$$

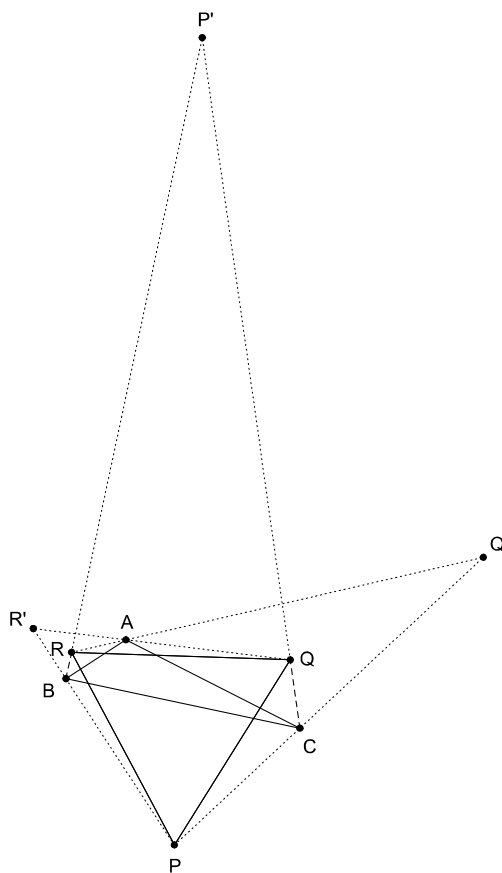


Figura 1.106: Trisectoarele unghiurilor exterioare ale unui triunghi obtuzunghic

Ultima ecuație arată că punctul P este centrul cercului exînscriș corespunzător punctului P' al triunghiului $BP'C$. Deci, laturile triunghiurilor isoscele sunt trisectoarele unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC . \square

Observația 500 *Triunghiul PQR determinat de trisectoarele exterioare ale triunghiului ABC se numește triunghiul Morley exterior.*

1.43 Triunghiul lui Grebe

„Două linii paralele se întâlnesc la infinit – cred și ele în aceasta.” - S.Lec⁴⁸

Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior pătratele $BCA_C A_B$, $ACB_C B_A$ și $ABC_B C_A$. Fie $\{A'\} = B_C B_A \cap C_A C_B$, $\{B'\} = C_A C_B \cap A_B A_C$ și $\{C'\} = A_B A_C \cap B_A B_C$. Triunghiul $A'B'C'$ se numește *triunghiul lui Grebe* (Figura 1.107).

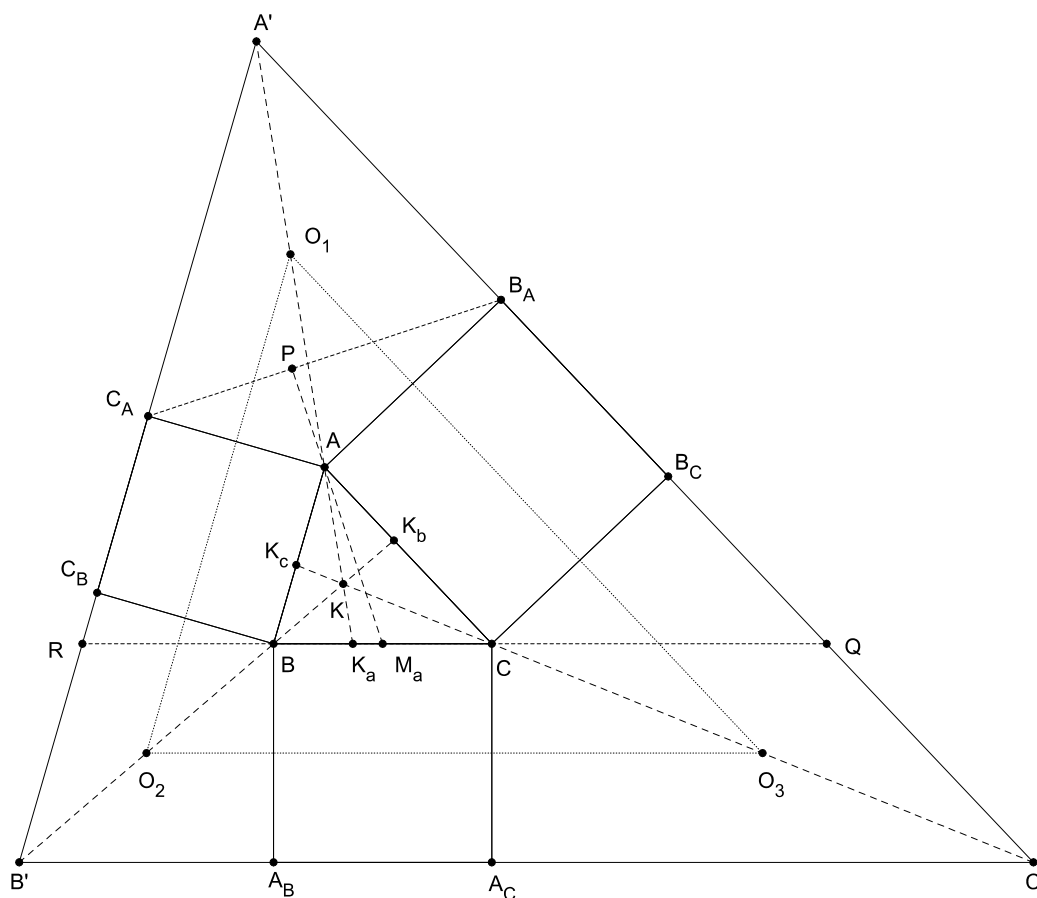


Figura 1.107: Triunghiul lui Grebe

Teorema 501 *Dreptele AA' , BB' și CC' sunt concurente în punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie M_a mijlocul laturii BC , $\{P\} = AM_a \cap B_A C_A$ și $\{K_a\} = AA' \cap BC$. Este cunoscut faptul că $AM_a \perp B_A C_A$ (vezi „Triunghiurile Vecten”). Patrulaterul $AB_A A' C_A$ fiind inscripabil (deoarece $m(\sphericalangle AB_A A') + m(\sphericalangle AC_A A') = 180^\circ$) rezultă

$$\sphericalangle AA' C_A \equiv \sphericalangle C_A B_A A. \tag{1}$$

⁴⁸Stanislaw Lec (1909-1966) – poet polonez

Cum $AB \parallel A'B'$ rezultă

$$\sphericalangle BAK_a \equiv \sphericalangle B'A'A \equiv \sphericalangle C_A A'A. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle AB_A C_A \equiv \sphericalangle BAK_a$ (3). În triunghiul APB_A avem:

$$m(\sphericalangle PAA') + m(\sphericalangle A'AB_A) + m(\sphericalangle AB_A P) = 90^\circ. \quad (4)$$

Din $\sphericalangle K_a AM_a \equiv \sphericalangle PAA'$ (5) (unghiuri opuse la vârf) și $m(\sphericalangle B_A AC) = 90^\circ$ rezultă

$$m(\sphericalangle A'AB_A) + m(\sphericalangle K_a AM_a) + m(\sphericalangle M_a AC) = 90^\circ. \quad (6)$$

Din relațiile (4) - (6) rezultă $m(\sphericalangle AB_A C_A) \equiv m(\sphericalangle M_a AC)$, care împreună cu relația (3) dă:

$$m(\sphericalangle BAK_a) = m(\sphericalangle M_a AC),$$

relație care arată că AK_a este simediană în triunghiul ABC . Deci, dreapta AA' trece prin punctul K al lui Lemoine al triunghiului ABC . Analog se arată că dreptele BB' și CC' trec prin punctul K . \square

Teorema 502 *Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omotetice, centrul de omotetie fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C'$ și $AA' \cap BB' \cap CC' = \{K\}$ rezultă că triunghiul ABC și triunghiul lui Grebe sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC . \square

Consecința 503 *Centrul cercului circumscris triunghiului Grebe aparține axei Brocard a triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt omotetice, rezultă că prin omotetia considerată cercurile lor circumscrise se corespund, deci centrul cercului circumscris triunghiului Grebe este coliniar cu centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ABC și cu centrul omotetiei, punctul lui Lemoine (K). Cu alte cuvinte, centrul cercului circumscris triunghiului Grebe aparține axei Brocard OK a triunghiului ABC . \square

Teorema 504 *Fie O_1, O_2, O_3 centrele circumscrise triunghiurilor $AB_A C_A$, $BC_B A_B$, respectiv $CA_C B_C$. Triunghiurile $O_1 O_2 O_3$ și ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece A aparține cercului circumscris triunghiului $AB_A C_A$ și $m(\sphericalangle AB_A A') = 90^\circ$, rezultă că O_1 se află la mijlocul segmentului AA' . Analog, O_2 și O_3 sunt mijloacele segmentelor BB' , respectiv CC' . Astfel, $O_1 O_2$, $O_2 O_3$ și $O_3 O_1$ sunt linii mijlocii în trapezele $ABB'A'$, $BCC'B'$, respectiv $ACC'A'$, deci $O_1 O_2 \parallel AB$, $O_2 O_3 \parallel BC$ și $O_3 O_1 \parallel AC$, iar cum $O_1 A \cap O_2 B \cap O_3 C = \{K\}$, rezultă că triunghiurile $O_1 O_2 O_3$ și ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine K . \square

Consecința 505 *Triunghiurile $O_1 O_2 O_3$ și triunghiul lui Grebe al triunghiului ABC sunt omotetice, centrul omotetiei fiind punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .*

Demonstrația rezultă din teoremele precedente, ținând cont că relația de omoteticie este tranzitivă. \square

Teorema 506 *Triunghiul lui Grebe $A'B'C'$ și triunghiul ortic $H_aH_bH_c$ al triunghiului ABC sunt omologice.*

Demonstrație. Fie $\{A''\} = A'H_a \cap B'C'$, $\{B''\} = B'H_b \cap A'C'$, $\{C''\} = C'H_c \cap A'B'$, $\{R\} = BC \cap A'B'$, $\{Q\} = BC \cap A'C'$. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{A''B'}{C'A''} &= \frac{RH_a}{H_aQ} = \frac{RB + BH_a}{H_aC + CQ} = \frac{\frac{c}{\sin B} + c \cos B}{b \cos C + \frac{b}{\sin C}} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{1 + \sin B \cdot \cos B}{1 + \sin C \cdot \cos C} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{2 + \sin 2B}{2 + \sin 2C}. \end{aligned}$$

Analog se arată că:

$$\frac{B''C'}{A'B''} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{2 + \sin 2C}{2 + \sin 2A} \quad \text{și} \quad \frac{C''A'}{B'C''} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{2 + \sin 2A}{2 + \sin 2B}.$$

Atunci,

$$\frac{A''B'}{C'A''} \cdot \frac{B''C'}{A'B''} \cdot \frac{C''A'}{B'C''} = 1$$

și din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele $A'H_a, B'H_b, C'H_c$ sunt concurente, deci triunghiurile $A'B'C'$ și $H_aH_bH_c$ sunt omologice. \square

1.44 Triunghiul lui Malfatti

„Este suficient să arăți, că un lucru oarecare este imposibil, că îndată se va găsi matematicianul care-l va face.” - W. W. Sawyer⁴⁹

Trei cercuri aflate în interiorul unui triunghi ABC astfel încât fiecare este tangent la celelalte două și la două laturi ale triunghiului se numesc *cercuri Malfatti*⁵⁰. Fie $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ centrele cercurilor Malfatti și T_A, T_B, T_C punctele de tangență dintre cercurile Malfatti (Figura 1.108). Triunghiul $\Gamma_A\Gamma_B\Gamma_C$ se numește *triunghiul Malfatti*. Dacă r_1, r_2, r_3 sunt razele cercurilor Malfatti, atunci laturile triunghiului Malfatti au lungimile $r_1 + r_2, r_2 + r_3, r_3 + r_1$.

Teorema 507 *Dreptele $A\Gamma_A, B\Gamma_B, C\Gamma_C$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

⁴⁹Warwick Sawyer (1911-) – matematician englez, profesor la Universitatea din Toronto.

⁵⁰Gian Francesco Malfatti (1731-1806) – matematician italian, profesor la Universitatea din Ferrara, contribuții în geometrie, algebră și teoria probabilităților

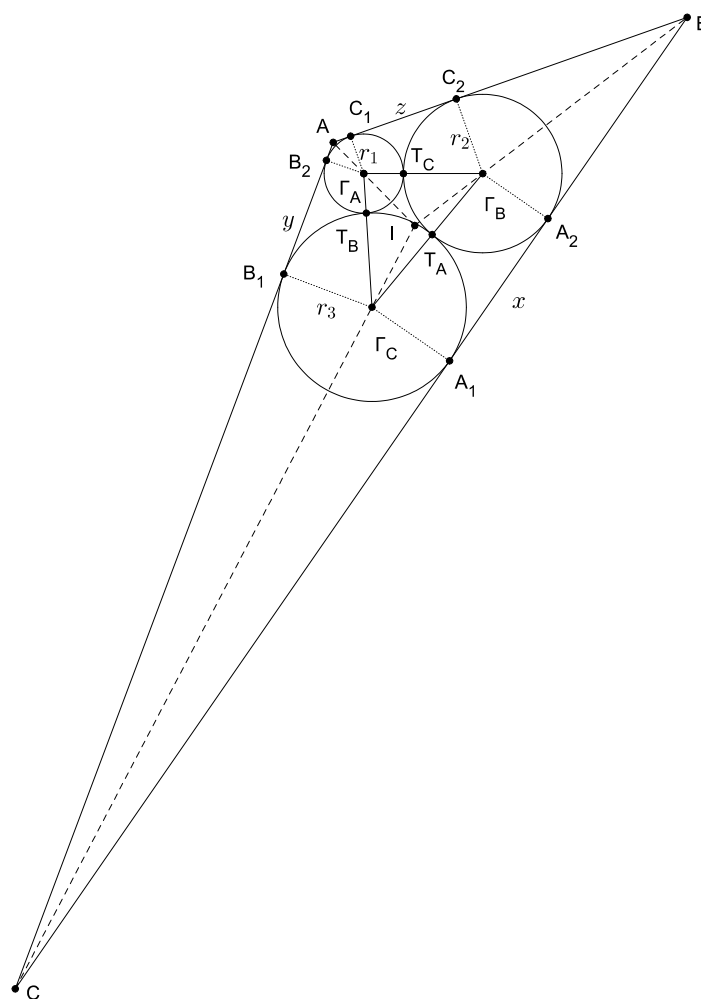


Figura 1.108: Triunghiul lui Malfatti

Demonstrație. Deoarece cercurile sunt tangente la câte două laturi ale triunghiului rezultă că dreptele $A\Gamma_A, B\Gamma_B, C\Gamma_C$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC , deci sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC . \square

Teorema 508 *Dreptele $\Gamma_A T_A, \Gamma_B T_B, \Gamma_C T_C$ sunt concurente.*

Demonstrație. Deoarece

$$\frac{T_A \Gamma_B}{T_A \Gamma_C} \cdot \frac{T_B \Gamma_C}{T_B \Gamma_A} \cdot \frac{T_C \Gamma_A}{T_C \Gamma_B} = \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1,$$

rezultă din reciproca teoremei lui Ceva că dreptele $\Gamma_A T_A, \Gamma_B T_B, \Gamma_C T_C$ sunt concurente. \square

Teorema 509 Razele cercurilor Malfatti au lungimile:

$$r_1 = \frac{(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4})(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4})}{1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4}} \cdot \frac{r}{2}, \quad r_2 = \frac{(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4})(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4})}{1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4}} \cdot \frac{r}{2}, \quad r_3 = \frac{(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{4})(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{4})}{1 + \operatorname{tg} \frac{C}{4}} \cdot \frac{r}{2}.$$

Demonstrație. Fie $A_1A_2 = x, B_1B_2 = y, C_1C_2 = z$. Din trapezul dreptunghic $\Gamma_B A_1 A_2 \Gamma_C$ (Figura 1.109) rezultă

$$x^2 + (r_3 - r_2)^2 = (r_3 + r_2)^2,$$

de unde $x^2 = 4r_2r_3$ și analog $y^2 = 4r_1r_3, z^2 = 4r_1r_2$, iar de aici

$$r_1 = \frac{yz}{2x}, \quad r_2 = \frac{xz}{2y}, \quad r_3 = \frac{xy}{2z}.$$

Fie C_a, C_b, C_c punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile

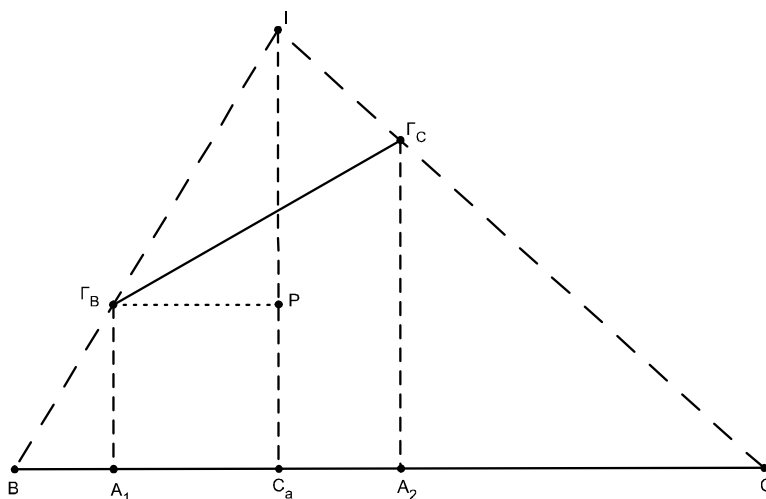


Figura 1.109: Razele cercurilor Malfatti

BC, CA , respectiv AB . Din $x + y + z = 2(A_1C_a + B_1C_b + C_1C_c)$ și $B_1C_a + C_1C_c = B_1C_b + C_bB_2 = y$, rezultă

$$A_1C_a = \frac{x - y + z}{2}.$$

Fie P proiecția punctului Γ_B pe IC_a . Din triunghiul dreptunghic $IP\Gamma_B$ rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{2(r - r_2)}{x - y + z} = \frac{2ry - xz}{y(x - y + z)}$$

Analog se obțin egalitățile: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{2rx - yz}{x(-x + y + z)}$ și $\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{2rz - xy}{z(x + y - z)}$. Folosind relațiile precedente și egalitatea

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

obținem:

$$2r^2(x + y + z) - 2r(xy + yz + zx) + xyz = 0$$

sau $\frac{2rx - yz}{-x + y + z} = \frac{2r(x - r)}{x(2r - x)}$, de unde

$$tg \frac{A}{2} = \frac{2r(x - r)}{x(2r - x)}.$$

Din egalitatea precedentă rezultă ecuația

$$x^2 \cdot tg \frac{A}{2} + 2r \left(1 - tg \frac{A}{2}\right) \cdot x - 2r^2 = 0$$

care are singura soluție acceptabilă: $x = r \left(1 + tg \frac{A}{4}\right)$. Analog, $y = r \left(1 + tg \frac{B}{4}\right)$ și $z = r \left(1 + tg \frac{C}{4}\right)$. Din relațiile de mai sus rezultă concluzia. \square

Teorema 510 Dacă r_a, r_b, r_c sunt razele cercurilor exînscrise corespunzătoare triunghiului ABC , atunci:

$$r_a - r_1 = \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}}}{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}}\right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_1 r_2}\right)}, r_b - r_2 = \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}}}{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}}\right)}, r_c - r_3 = \frac{\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}}{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}}\right) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}}\right)}.$$

Demonstrație. Fie $tg \frac{A}{4} = t_1$, $tg \frac{B}{4} = t_2$, $tg \frac{C}{4} = t_3$. Din $tg \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{C}{4}\right) = 1$ rezultă

$$1 - t_1 - t_2 - t_3 - t_1 t_2 - t_2 t_3 - t_3 t_1 + t_1 t_2 t_3 = 0,$$

care împreună cu expresiile razelor scrise în aplicația precedentă ne dau:

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} = \frac{t_1}{1 + t_1} \cdot \frac{2}{r} \quad (*)$$

și analogele. Dar,

$$r_a = \frac{p}{p - a} \cdot r = ctg \frac{B}{2} \cdot ctg \frac{C}{2} \cdot r = \frac{(1 - t_2^2)(1 - t_3^2)}{4t_2 t_3} \cdot r,$$

de unde se obține egalitatea

$$r_a - r_1 = (1 + t_2)(1 + t_3) \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{2t_1}{2t_2 t_3 (1 + t_1)} = \frac{t_1}{1 + t_1} \cdot \frac{t_2}{1 + t_2} \cdot \frac{t_3}{1 + t_3} \cdot \frac{r}{2}$$

și utilizând relațiile (*) rezultă concluzia. \square

Teorema 511 Raza cercului înscris în triunghiul ABC în funcție de razele cercurilor Malfatti este egală cu:

$$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}.$$

Demonstrație. Din expresiile razelor r_1, r_2, r_3 rezultă:

$$tg \frac{A}{4} = \frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1, tg \frac{B}{4} = \frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r} - 1, tg \frac{C}{4} = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} - 1.$$

Ținând seama de egalitatea $tg \left(\frac{A}{4} + \frac{B}{4} \right) = tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{4} \right)$ rezultă

$$\sum tg \frac{A}{4} + \sum tg \frac{A}{4} \cdot tg \frac{B}{4} = 1 + tg \frac{A}{4} \cdot tg \frac{B}{4} \cdot tg \frac{C}{4}$$

adică

$$\begin{aligned} & \sum \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} - 1 \right) + \sum \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1 \right) \\ &= 1 + \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1 \right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{r_1 r_3}}{r} - 1 \right), \end{aligned}$$

deci:

$$\frac{2r_1 r_2 r_3}{r^2} - \frac{2}{r} \sqrt{r_1 r_2 r_3} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) + \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1} = 0$$

de unde obținem

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \pm \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}.$$

Deoarece $tg \frac{A}{4} = \frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r} - 1$, atunci

$$tg \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} \pm \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{\sqrt{r}}$$

și deoarece $tg \frac{A}{4} \leq 1$ rezultă

$$tg \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1}}$$

$$\text{și } \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}. \quad \square$$

Teorema 512 Fie X, Y și Z mijloacele segmentelor $A_1 A_2, B_1 B_2$, respectiv $C_1 C_2$. Dreptele AX, BY, CZ sunt concurente.

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} BX &= \frac{1}{2}(a - BA_1 + A_2 C) = \frac{1}{2} \left[a + \frac{r_2}{r}(p - b) - \frac{r_3}{r}(p - c) \right] = \frac{1}{2}(a + IB - IC) \\ &= \frac{1}{2} \left(2R \sin A + \frac{r}{\sin \frac{B}{2}} - \frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \right) = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{4} \sin \frac{C}{4} \cos \frac{B+C}{4}. \end{aligned}$$

Procedând analog se obține: $XC = \frac{1}{2}(a - BA_1 + A_2 C) = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{4} \cos \frac{B+C}{4}$, de unde

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\cos \frac{B}{4} \sin \frac{C}{4}}{\sin \frac{B}{4} \cos \frac{C}{4}} = \frac{tg \frac{C}{4}}{tg \frac{B}{4}}.$$

Analog se arată că $\frac{CY}{YA} = \frac{tg \frac{A}{4}}{tg \frac{C}{4}}$ și $\frac{AZ}{ZB} = \frac{tg \frac{B}{4}}{tg \frac{A}{4}}$. Deoarece $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$, din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AX, BY, CZ sunt concurente. \square

Teorema 513 Dacă X, Y și Z sunt mijloacele segmentelor A_1A_2, B_1B_2 , respectiv C_1C_2 atunci dreptele T_AX, T_BY și T_CZ sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul lui Malfatti.

Demonstrație. Tangenta comună cercurilor (Γ_B, r_2) și (Γ_C, r_3) trece prin mijlocul segmentului A_1A_2 (adică prin punctul X) și totodată prin centrul cercului înscris I_μ în triunghiul lui Malfatti, deoarece $I_\mu T_A = I_\mu T_B = I_\mu T_C$. \square

Observația 514 Triunghiul $T_AT_BT_C$ este triunghiul de contact al triunghiului lui Malfatti. Din proprietatea 508 rezultă că dreptele $\Gamma_AT_A, \Gamma_BT_B, \Gamma_CT_C$ sunt concurente în punctul lui Gergonne al triunghiului lui Malfatti. Punctul I_μ este centrul radical al cercurilor lui Malfatti.

Teorema 515 Pentru orice punct M din planul triunghiului ABC sunt adevărate relațiile:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M\Gamma_A} &= \frac{r_a - r_1}{r_a} \overrightarrow{MA} + \frac{r_1}{r_a} \overrightarrow{MI_a}, \\ \overrightarrow{M\Gamma_B} &= \frac{r_b - r_2}{r_b} \overrightarrow{MB} + \frac{r_2}{r_b} \overrightarrow{MI_b}, \\ \overrightarrow{M\Gamma_C} &= \frac{r_c - r_3}{r_c} \overrightarrow{MC} + \frac{r_3}{r_c} \overrightarrow{MI_c}, \end{aligned}$$

(unde I_a, I_b, I_c sunt centrele cercurilor exînscrie corespunzătoare triunghiului ABC și r_a, r_b , respectiv r_c razele lor).

Demonstrație. Avem: $\frac{A\Gamma_A}{AI_a} = \frac{r_1}{r_a}$, de unde $\frac{A\Gamma_A}{\Gamma_A I_a} = \frac{r_1}{r_a - r_1}$, deci $\overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{r_a - r_1}{r_a} \overrightarrow{MA} + \frac{r_1}{r_a} \overrightarrow{MI_a}$. Analog se arată celelalte egalități. \square

Observația 516 Ținând cont că $r_a = \frac{rp}{p-a}$ putem scrie

$$\frac{1}{r_1} \overrightarrow{M\Gamma_A} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) \overrightarrow{MA} + \frac{p-a}{rp} \overrightarrow{MI_a}.$$

Teorema 517 Coordonatele baricentrice absolute ale centrelor cercurilor lui Malfatti corespunzătoare triunghiului ABC sunt: $\Gamma_A \left(2rp \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) - a; b; c \right)$, $\Gamma_B \left(a; 2rp \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \right) - b; c \right)$, respectiv $\Gamma_C \left(a; b; 2rp \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right) - c \right)$.

Demonstrație. Deoarece coordonatele baricentrice absolute ale centrului cercului A - exînscriu sunt $I_a \left(-\frac{a}{2(p-a)}; \frac{b}{2(p-a)}; \frac{c}{2(p-a)} \right)$ rezultă că pentru orice punct M este adevărată relația:

$$\frac{1}{r_1} \cdot \overrightarrow{M\Gamma_A} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) \overrightarrow{MA} + \frac{p-a}{rp} \left[\frac{-a}{2(p-a)} \overrightarrow{MA} + \frac{b}{2(p-a)} \overrightarrow{MB} + \frac{c}{2(p-a)} \overrightarrow{MC} \right]$$

sau

$$\frac{2rp}{r_1} \overrightarrow{M\Gamma_A} = \left[2rp \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) - a \right] \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC},$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 518 *Coordonatele baricentrice absolute ale punctelor de tangență dintre cercurile lui Malfatti sunt: $T_A \left(\frac{a}{rp}; \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b}; \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right)$, $T_B \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a}; \frac{b}{rp}; \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right)$, respectiv $T_C \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a}; \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b}; \frac{c}{rp} \right)$.*

Demonstrație. Deoarece $\frac{\Gamma_B \Gamma_A}{\Gamma_A \Gamma_C} = \frac{r_2}{r_3}$ rezultă că pentru orice punct M din planul triunghiului ABC avem: $\overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{r_3 \overrightarrow{M\Gamma_B} + r_2 \overrightarrow{M\Gamma_C}}{r_2 + r_3}$ sau ținând cont de proprietatea precedentă:

$$\frac{(r_2 + r_b)}{r_2 r_b} \overrightarrow{M\Gamma_A} = \frac{a}{rp} \overrightarrow{MA} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \right) \overrightarrow{MB} + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right) \overrightarrow{MC}$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 519 *Dreptele AT_A, BT_B, CT_C sunt concurente.*

Demonstrație. Ecuația dreptei AT_A în coordonate baricentrice este:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{rp} & \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \end{vmatrix} = 0$$

sau $y \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right) - z \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \right) = 0$. Analog ecuațiile dreptelor BT_B și CT_C sunt: $x \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) - z \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \right) = 0$ respectiv $x \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \right) - y \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) = 0$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} & \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} \\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} & 0 & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_c} \\ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_b} & -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_a} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă că dreptele AT_A, BT_B și CT_C sunt concurente. \square

Observația 520 *Punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C se numește primul punct al lui Malfatti (μ_1). Triunghiurile ABC și $T_A T_B T_C$ sunt omologice, centrul de omologie fiind primul punct al lui Malfatti.*

Teorema 521 *Dreptele $I_a T_a, I_b T_b, I_c T_c$ sunt concurente.*

Demonstrație. Ținem cont de coordonatele baricentrice ale centrelor cercurilor exînscrie $I_a \left(-\frac{a}{2(p-a)}, \frac{b}{2(p-a)}, \frac{c}{2(p-a)} \right)$, $I_b \left(\frac{a}{2(p-a)}, \frac{-b}{2(p-a)}, \frac{c}{2(p-a)} \right)$, $I_c \left(\frac{a}{2(p-a)}, \frac{b}{2(p-a)}, \frac{-c}{2(p-a)} \right)$ și scriem ecuațiile dreptelor $I_a T_a, I_b T_b$ și $I_c T_c$. Utilizând condiția de concurență a trei drepte (d_i): $a_i x + b_i y + c_i z = 0$ $i = \overline{1, 3}$ și anume

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă concluzia. \square

Observația 522 *Punctul de concurență al dreptelor AT_A, BT_B, CT_C se numește al doilea punct al lui Malfatti (μ_2).*

1.45 Triunghiul lui Schroeter

„Atâtea clăile de fire stângi
 Găsi-vor gest închis să le rezume,
 Să nege, dreapta, linia ce frângi
 Ochi în virgin triunghi tâiat spre lume?”
 Ion Barbu⁵¹

Teorema 523 Fie $M_aM_bM_c$ și $H_aH_bH_c$ triunghiurile median, respectiv ortic ale unui triunghi neisoscel și nedreptunghic ABC , $\{A^*\} = M_bM_c \cap H_bH_c$, $\{B^*\} = M_cM_a \cap H_cH_a$, $\{C^*\} = M_aM_b \cap H_aH_b$. Dreptele AA^* , BB^* , CC^* sunt paralele între ele și perpendiculare pe dreapta lui Euler a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie C_1 cercul lui Euler al triunghiului ABC , C_2 cercul circumscris patrulaterului H_aHH_bC și C_3 cercul circumscris patrulaterului M_aOM_bC (O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC), iar $\{D\} = C_2 \cap C_3$ (Figura 1.110). Evident, $H_a, H_b \in C_1 \cap C_2$, $M_a, M_b \in C_1 \cap C_3$ și $C, D \in C_2 \cap C_3$. Atunci H_aH_b, M_aM_b

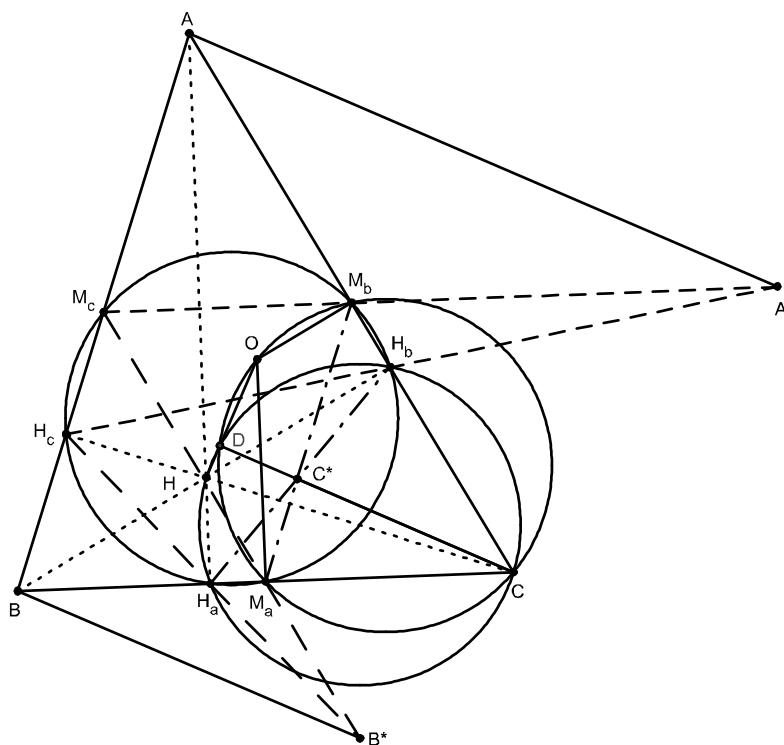


Figura 1.110: Triunghiul lui Schroeter

⁵¹Ion Barbu (1895-1961) – matematician român, profesor la Universitatea din București, contribuții în algebră și geometrie

și CD sunt concurente fiind axele radicale corespunzătoare perechilor de cercuri considerate. Fie $\{C^*\} = H_aH_b \cap M_aM_b \cap CD$. Atunci,

$$m(\sphericalangle M_aOD) = m(\sphericalangle H_aHD) = 180^\circ - m(\sphericalangle BCD)$$

și cum $HH_a \parallel OM_a$ rezultă că punctele H, O și D sunt coliniare. Deoarece patrulaterul HH_aCD este inscriptibil rezultă

$$m(\sphericalangle HDC) = 180^\circ - m(\sphericalangle HH_aC) = 90^\circ,$$

deci $HO \perp CC^*$. Analog se arată că $AA^* \perp HO$ și $BB^* \perp HO$, deci $AA^* \parallel BB^* \parallel CC^*$. \square

Triunghiul $A^*B^*C^*$ se numește *triunghiul lui Schroeter*⁵².

1.46 Triunghiurile lui Napoleon. Punctele lui Fermat

„The last thing we want from you, general Lagrange, is a lesson in a geometry.” - Napoleon⁵³

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale A_1BC , AB_1C și ABC_1 , cercurile lor circumscrise având centrele N_a , N_b și N_c . Triunghiul $N_aN_bN_c$ se numește *triunghiul exterior al lui Napoleon*. Dacă triunghiurile echilaterale A_2BC , AB_2C și ABC_2 se construiesc în interiorul triunghiului ABC , atunci centrele lor N'_a , N'_b și N'_c sunt vârfurile unui triunghi numit *triunghiul interior al lui Napoleon*. Triunghiul $A_1B_1C_1$ se numește *primul triunghi al lui Fermat*⁵⁴ (Figura 1.111), iar triunghiul $A_2B_2C_2$ se numește *al doilea triunghi al lui Fermat* (Figura 1.113).

Teorema 524 *Segmentele AA_1, BB_1, CC_1 sunt congruente.*

Demonstrație. Din congruența triunghiurilor ABA_1 și C_1BC ($AB \equiv BC_1$, $BA_1 \equiv BC$ și $\widehat{ABA_1} \equiv \widehat{CBC_1}$) rezultă că $AA_1 \equiv CC_1$ (1). Din congruența triunghiurilor ACA_1 și BCB_1 rezultă că $AA_1 \equiv BB_1$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia. \square

Teorema 525 *Cercurile circumscrise triunghiului A_1BC , AB_1C și ABC_1 au un punct comun.*

⁵²Heinrich Schroeter (1829-1892) – matematician german, contribuții în geometrie

⁵³Napoleon Bonaparte (1769-1821) – cel mai important om politic și militar după Revoluția franceză, proclamat în 1804 drept Împărat al francezilor

⁵⁴Pierre de Fermat (1601-1665) – matematician francez, contribuții în teoria probabilităților și teoria numerelor

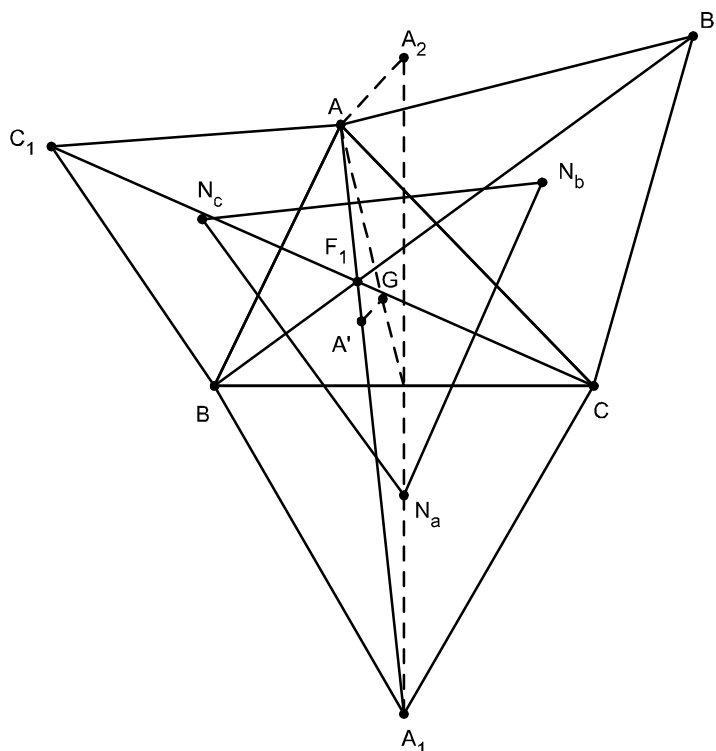


Figura 1.111: Triunghiul exterior al lui Napoleon

Demonstrație. Fie F_1 al doilea punct de intersecție dintre cercurile circumscrise triunghiurilor BA_1C și CB_1A . Avem

$$\begin{aligned} m(\widehat{BF_1C}) &= 180^\circ - m(\widehat{BA_1C}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \\ m(\widehat{AF_1C}) &= 180^\circ - m(\widehat{CB_1A}) = 120^\circ. \end{aligned}$$

Atunci, $m(\widehat{AF_1B}) = 360^\circ - [m(\widehat{BF_1C}) + m(\widehat{CF_1A})] = 120^\circ$, deci $m(\widehat{AF_1B}) + m(\widehat{AC_1B}) = 180^\circ$, adică F_1 aparține și cercului circumscris triunghiului ABC_1 . \square

Punctul F_1 se numește *primul punct al lui Toricelli – Fermat*.

Teorema 526 Dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 sunt concurente în punctul F_1 .

Demonstrație. Deoarece

$$m(\widehat{BF_1A_1}) = m(\widehat{BCA_1}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BA_1}) = 60^\circ$$

și $m(\widehat{BF_1A_1}) = 120^\circ$, rezultă $m(\widehat{AF_1B}) + m(\widehat{BF_1A_1}) = 180^\circ$, adică punctele A , F_1 , A_1 sunt coliniare, deci dreapta AA_1 trece prin punctul F_1 . Analog se arată că dreptele BB_1 și CC_1 trec prin F_1 . \square

Teorema 527 *Coordonatele unghiulare ale punctului F_1 sunt egale cu 120° , dacă unghiurile triunghiului ABC au măsura mai mică de 120° .*

Demonstrația rezultă din cele de mai sus. □

Teorema 528 *Dacă $m(\widehat{BAC}) > 120^\circ$, atunci $m(\widehat{AF_1C}) = m(\widehat{BF_1A}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{BF_1C}) = 120^\circ$.*

Demonstrație. În cercul circumscris patrulaterului ACB_1F_1 avem: $m(\widehat{AF_1C}) =$

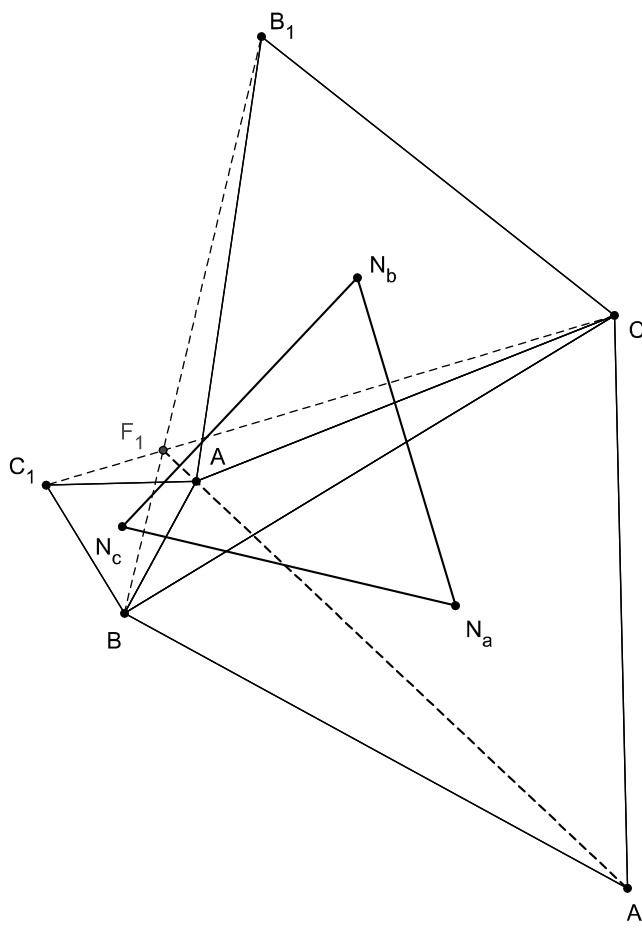


Figura 1.112: Primul punct al lui Toricelli – Fermat

$m(\widehat{AB_1C}) = 60^\circ$, iar în cercul circumscris patrulaterului ABC_1F_1 avem $m(\widehat{AF_1B}) = m(\widehat{AC_1B}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{BF_1C}) = 180^\circ - m(\widehat{BF_1C_1}) = 120^\circ$ (Figura 1.112). □

Teorema 529 *Triunghiul exterior al lui Napoleon este echilateral.*

Demonstrație. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC, CA , respectiv AB . Avem:

$$AN_c = \frac{2}{3} \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{c\sqrt{3}}{3}, AN_b = \frac{b\sqrt{3}}{3},$$

iar $m(\widehat{N_bAN_c}) = m(\widehat{BAC}) + 60^\circ$. Din teorema cosinusului în triunghiul N_bAN_c avem

$$N_bN_c^2 = AN_b^2 + AN_c^2 - 2AN_b \cdot AN_c \cdot \cos(A + 60^\circ) = \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{2bc}{3} \left[\frac{1}{2} \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right],$$

adică

$$N_bN_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{3} - \frac{1}{6}(b^2 + c^2 - a^2) + 2 \cdot A_{[ABC]} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot A_{[ABC]}.$$

Simetria rezultatului precedent ne conduce la concluzia $N_aN_b = N_bN_c = N_cN_a$, deci triunghiul exterior al lui Napoleon este echilateral. \square

Teorema 530 *Cercurile circumscrise triunghiurilor A_2BC , AB_2C , ABC_2 au un punct comun F_2 .*

Demonstrație. Fie F_2 al doilea punct de intersecție dintre cercurile circumscrise

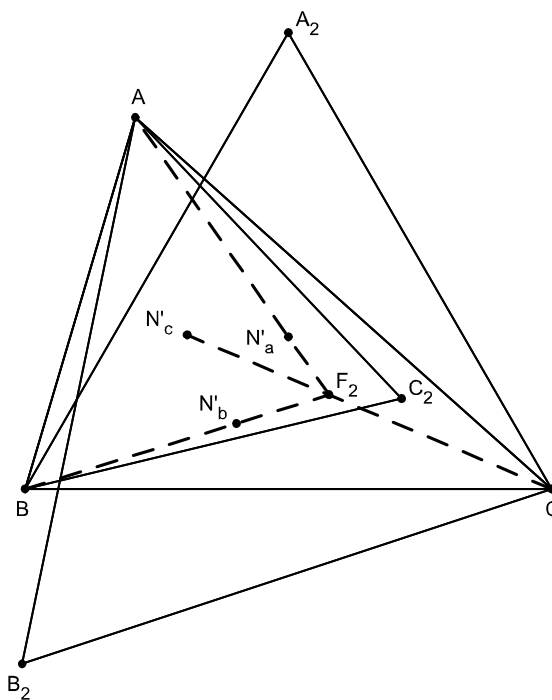


Figura 1.113: Al doilea punct Toricelli – Fermat

triunghiurilor BA_2C și AB_2C . Atunci, $m(\widehat{CF_2B}) = m(\widehat{BA_2C}) = 60^\circ$, $m(\widehat{B_2F_2C}) = m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ de unde rezultă că punctele F_2, B și B_2 sunt coliniare. Analog se arată că punctele F_2, A și A_2 sunt coliniare. Atunci, $m(\widehat{BF_2A}) = 120^\circ$, deci $m(\widehat{BF_2A}) + m(\widehat{BC_2A}) = 180^\circ$, adică F_2 aparține cercului circumscris triunghiului ABC_2 . \square

Observația 531 *Punctul F_2 se numește al doilea punct Toricelli – Fermat.*

Teorema 532 Dreptele AA_2 , BB_2 și CC_2 sunt concurente în punctul F_2 .

Demonstrație. Din aplicația precedentă $\{F_2\} = AA_2 \cap BB_2$. Deoarece patrulaterul BC_2AF_2 este inscriptibil rezultă $\widehat{BC_2F_2} \equiv \widehat{BAF_2}$. Din congruența triunghiurilor BC_2C și BAA_2 rezultă $\widehat{BC_2C} \equiv \widehat{BAA_2}$ de unde

$$m(\widehat{BC_2F_2}) + m(\widehat{BC_2C}) = m(\widehat{BAA_2}) + m(\widehat{BAF_2}) = 180^\circ,$$

deci punctele F_2 , C_2 , C sunt coliniare. □

Teorema 533 Segmentele AA_2 , BB_2 și CC_2 sunt congruente.

Demonstrație. Din congruența triunghiurilor ACA_2 și B_2CB (deoarece $AC \equiv B_2C$, $A_2C \equiv BC$ și $m(\widehat{ACA_2}) = m(\widehat{B_2CB}) = 60^\circ - m(\widehat{C})$) rezultă $AA_2 \equiv BB_2$ (1), iar congruența triunghiurilor AA_2B și CC_2B , rezultă $AA_2 \equiv CC_2$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că $AA_2 \equiv BB_2 \equiv CC_2$. □

Teorema 534 Triunghiul interior al lui Napoleon $N'_a N'_b N'_c$ este echilateral.

Demonstrație. Avem $AN'_c = \frac{c\sqrt{3}}{3}$, $AN'_b = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, iar $m(\widehat{N'_b AN'_c}) = \left| m(\widehat{BAC}) - 60^\circ \right|$. Din teorema cosinusului în triunghiul $N'_b AN'_c$ rezultă:

$$N'_b N'_c{}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot A_{[ABC]}.$$

Simetria relației precedente conduce la $N'_a N'_b = N'_b N'_c = N'_c N'_a$. □

Observația 535 Inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot A_{[ABC]}$ este echivalentă cu $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$, evident adevărată (unde am folosit formulele lui Heron în exprimarea ariei triunghiului ABC).

Teorema 536 Primul punct Fermat verifică egalitatea:

$$F_1A_1 + F_1B_1 + F_1C_1 = 2(F_1A + F_1B + F_1C).$$

Demonstrație. Deoarece patrulaterul F_1BA_1C , F_1CB_1A și F_1AC_1B sunt inscriptibile, din relația lui Schooten rezultă $F_1A_1 = F_1B + F_1C$, $F_1B_1 = F_1A + F_1C$ și $F_1C_1 = F_1A + F_1B$, relații care prin sumare dau $F_1A_1 + F_1B_1 + F_1C_1 = 2(F_1A + F_1B + F_1C)$. □

Teorema 537 Dreptele A_1N_a , B_1N_b și C_1N_c sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrația este evidentă deoarece A_1N_a , B_1N_b și C_1N_c sunt mediatoarele laturilor BC , CA respectiv AC . □

Teorema 538 Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.

Demonstrație. Deoarece $A_1N_a \perp BC, B_1N_b \perp AC, C_1N_c \perp AB$ și $A_1N_a \cap B_1N_b \cap C_1N_c = \{O\}$ rezultă că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt ortologice, O fiind un centru de ortologie. \square

Teorema 539 *Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_aN_bN_c$ și triunghiul $A_1B_1C_1$ sunt ortologice.*

Demonstrația rezultă de mai sus. \square

Teorema 540 *Dreptele $A_2N'_a, B_2N'_b, C_2N'_c$ sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrația este evidentă deoarece $A_2N'_a, B_2N'_b, C_2N'_c$ sunt mediatoarele laturilor triunghiului ABC . \square

Teorema 541 *Triunghiurile antipodare ale punctelor lui Fermat corespunzătoare unui triunghi ABC sunt echilaterale.*

Demonstrație. Vezi „Triunghiul antipodar”. \square

Teorema 542 *Dreptele AN_a, BN_b și CN_c sunt concurente.*

Demonstrație. *Soluția 1.* Fie $\{A'\} = AN_a \cap BC, \{B'\} = BN_b \cap AC, \{C'\} = CN_c \cap BA$. Atunci,

$$\begin{aligned} \frac{BA'}{A'C} &= \frac{A_{[ABN_a]}}{A_{[ACN_a]}} = \frac{AB \cdot BN_a \cdot \sin(B + 30^\circ)}{AC \cdot CN_a \cdot \sin(C + 30^\circ)} = \frac{AB \cdot \sin(B + 30^\circ)}{AC \cdot \sin(C + 30^\circ)}, \\ \frac{CB'}{B'A} &= \frac{BC \cdot \sin(C + 30^\circ)}{BA \cdot \sin(A + 30^\circ)}, \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{CA \cdot \sin(A + 30^\circ)}{CB \cdot \sin(B + 30^\circ)}, \end{aligned}$$

de unde rezultă $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$, iar conform reciprocei teorema lui Ceva rezultă că AN_a, BN_b și CN_c sunt concurente.

Soluția 2. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $A_1 = \mathfrak{R}_C^{60^\circ}(B), B_1 = \mathfrak{R}_A^{60^\circ}(C), C_1 = \mathfrak{R}_B^{60^\circ}(A)$, (unde prin $\mathfrak{R}_X^{60^\circ}(Y)$ am notat rotația de centru X și unghi 60° a punctului Y). Atunci,

$$a_1 = c + \omega(b - c), b_1 = a + \omega(c - a), c_1 = b + \omega(a - b),$$

unde $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ și

$$n_a = \frac{b + c + a_1}{3} = \frac{b + 2c + \omega(b - c)}{3}, \tag{1}$$

$$n_b = \frac{a + c + b_1}{3} = \frac{c + 2a + \omega(c - a)}{3}, \tag{2}$$

$$n_c = \frac{a + b + c_1}{3} = \frac{a + 2b + \omega(a - b)}{3}. \tag{3}$$

Ecuatiile dreptelor AN_a, BN_b, CN_c sunt:

$$(AN_a) : (\bar{a} - \overline{n_a})z - (a - n_a)\bar{z} + a\overline{n_a} - \bar{a}n_a = 0, \quad (4)$$

$$(BN_b) : (\bar{b} - \overline{n_b})z - (b - n_b)\bar{z} + b\overline{n_b} - \bar{b}n_b = 0, \quad (5)$$

$$(CN_c) : (\bar{c} - \overline{n_c})z - (c - n_c)\bar{z} + c\overline{n_c} - \bar{c}n_c = 0. \quad (6)$$

Sumând ecuațiile (4) - (6) - ținând seama de relațiile (1) - (3) precum și de: $\omega + \bar{\omega} = 1$, $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, $\omega^3 = -1$ - rezultă o identitate, ceea ce arată că dreptele sunt concurente. \square

Teorema 543 Dacă $\{P_1\} = N_a N_c \cap BC$, $\{P'_1\} = N_a N_b \cap BC$, $\{Q_1\} = N_b N_a \cap CA$, $\{Q'_1\} = N_b N_c \cap CA$, $\{R_1\} = N_c N_b \cap AB$, $\{R'_1\} = N_c N_a \cap AB$, atunci punctele $P_1, P'_1, Q_1, Q'_1, R_1$ și R'_1 sunt pe aceeași conică.

Demonstrație. Deoarece triunghiurile ABC și $N_a N_b N_c$ sunt omologice, atunci utilizând teorema lui Salmon: „Punctele de intersecție ale laturilor neomoloage a două triunghiuri omologice, sunt șase puncte care se găsesc pe o aceeași conică”, rezultă concluzia. \square

Teorema 544 Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_a N_b N_c$ și triunghiul $A_1 B_1 C_1$ sunt ortologice.

Demonstrație. Utilizând notațiile din teorema precedentă rezultă

$$n_b - n_c = \frac{3c - 3b + i\sqrt{3}(c - 2a + b)}{3}$$

și

$$a_1 - a = \frac{b - 2a + c + i\sqrt{3}(b - c)}{2} = \frac{i\sqrt{3}(c - 2a + b) + 3c - 3b}{2i\sqrt{3}},$$

de unde

$$\frac{n_b - n_c}{a_1 - a} = \frac{i\sqrt{3}}{3} \in iR^*,$$

deci $N_b N_c \perp AA_1$. Analog se arată că $N_a N_b \perp CC_1$ și $N_a N_c \perp BB_1$ și cum $A_1 A \cap B_1 B \cap C_1 C = \{F_1\}$ rezultă concluzia. \square

Teorema 545 Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_a N_b N_c$ și triunghiul antipodar al primului punct al lui Fermat sunt omotetice.

Demonstrație. Fie $A'' B'' C''$ triunghiul antipodar corespunzător punctului F_1 . Deoarece $AF_1 \perp B'' C''$ și $N_b N_c \perp AF_1$ (cf. teoremei precedente) rezultă că $N_b N_c \parallel B'' C''$. Analog se arată că $N_b N_a \parallel B'' A''$ și $N_a N_c \parallel A'' C''$, rezultă că triunghiurile $N_a N_b N_c$ și $A'' B'' C''$ sunt omotetice. \square

Teorema 546 Triunghiurile ABC și $N_a N_b N_c$ au același centru de greutate.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $n_a = \frac{b+c+a_1}{3}$, $n_b = \frac{a+c+b_1}{3}$, $n_c = \frac{a+b+c_1}{3}$, de unde rezultă

$$n_a + n_b + n_c = \frac{2(a+b+c) + a_1 + b_1 + c_1}{3} = \frac{2(a+b+c) + a+b+c}{3} = a+b+c$$

(unde am utilizat proprietatea precedentă). □

Observația 547 Din proprietățile precedente rezultă că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $N_aN_bN_c$ au același centru de greutate.

Teorema 548 Triunghiurile ABC și $N'_aN'_bN'_c$ au același centru de greutate.

Demonstrație analoagă celei precedente. □

Teorema 549 Triunghiurile lui Napoleon interior și exterior au același centru de greutate.

Demonstrația rezultă din proprietățile precedente. □

Observația 550 Din cele de mai sus rezultă că triunghiurile lui Napoleon și triunghiurile lui Fermat au același centru de greutate.

Teorema 551 Aria triunghiului Napoleon exterior $N_aN_bN_c$ este egală cu:

$$A_{[N_aN_bN_c]} = \frac{1}{2} \cdot A_{[ABC]} + \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstrație. Avem $A_{[N_aN_bN_c]} = \frac{N_aN_b \cdot \sqrt{3}}{4} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot A_{[ABC]} + \frac{a^2+b^2+c^2}{6} \right] \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, de unde rezultă concluzia. □

Teorema 552 Aria triunghiului Napoleon interior $N'_aN'_bN'_c$ este egală cu:

$$A_{[N'_aN'_bN'_c]} = -\frac{1}{2} \cdot A_{[ABC]} + \frac{\sqrt{3}}{24} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstrație analoagă precedentei. □

Observația 553 Din proprietățile precedente rezultă $A_{[N_aN_bN_c]} - A_{[N'_aN'_bN'_c]} = A_{[ABC]}$.

Teorema 554 Fie $N_aN_bN_c$ și $N'_aN'_bN'_c$ triunghiurile lui Napoleon, $T_AT_BT_C$ triunghiul tangențial al unui triunghi ABC . Punctele N_a, N'_a, T_A sunt coliniare.

Demonstrația este evidentă deoarece punctele N_a, N'_a, T_A aparțin mediatoarei segmentului BC . □

Observația 555 Analog se arată că punctele N_b, N'_b, T_B , respectiv N_c, N'_c, T_C sunt coliniare.

Teorema 556 *Izogonalele punctelor F_1 și F_2 ale lui Fermat sunt punctele izodinamice S și S' ale triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Puncte izodinamice” [15]. □

Teorema 557 *Triunghiul exterior al lui Napoleon $N_aN_bN_c$ este omotetic cu triunghiul podar $S_aS_bS_c$ al primului punct izodinamic S al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Puncte izodinamice” [15]. □

Teorema 558 *Triunghiul interior al lui Napoleon este omotetic cu triunghiul podar al celui de al doilea punct izodinamic al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Vezi „Puncte izodinamice” [15]. □

Teorema 559 *Fie $A_1B_1C_1$ primul triunghi al lui Fermat al unui triunghi ABC și punctele $A' \in (AA_1)$, $B' \in (BB_1)$, $C' \in (CC_1)$ astfel încât $A'A_1 = 2AA'$, $B'B_1 = 2BB'$ și $C'C_1 = 2CC'$. Triunghiurile $A'B'C'$ și al doilea triunghi al lui Napoleon $N'_aN'_bN'_c$ sunt congruente.*

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare (Figura 1.111). Atunci, $A_1 = R_C^{60^\circ}(B)$, $B_1 = R_A^{60^\circ}(C)$, $C_1 = R_B^{60^\circ}(A)$ (unde $R_X^\varphi(Y)$ înțelegem rotația de centru X și unghi φ a punctului Y), de unde $a_1 = c + \theta(b - c)$, $b_1 = a + \theta(c - a)$ și $c_1 = a + \theta(a - b)$ - unde $\theta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$. Deoarece $A'A_1 = 2AA'$ rezultă

$$a' = \frac{c + \theta(b - c) + 2a}{3}.$$

Analog,

$$b' = \frac{a + \theta(c - a) + 2b}{3} \quad \text{și} \quad c' = \frac{b + \theta(a - b) + 2c}{3}.$$

Deoarece A_2 este simetricul lui A_1 față de BC rezultă

$$a_2 = b + c - a_1 = b - \theta(b - c)$$

de unde

$$n'_a = \frac{b + c + a_2}{3} = \frac{2b + c - \theta(b - c)}{3}.$$

Analog, $n'_b = \frac{2c + a - \theta(c - a)}{3}$ și $n'_c = \frac{2a + b - \theta(a - b)}{3}$. Deoarece $|a' - b'| = |n'_a - n'_b|$, $|a' - c'| = |n'_a - n'_c|$ și $|b' - c'| = |n'_b - n'_c|$ rezultă că $A'B'C' \equiv N'_aN'_b$, $A'C' \equiv N'_aN'_c$ și $B'C' \equiv N'_bN'_c$ adică triunghiurile $A'B'C'$ și $N'_aN'_bN'_c$ sunt congruente. □

Observația 560 *Deoarece triunghiul $N'_aN'_bN'_c$ este echilateral rezultă că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.*

Teorema 561 *Triunghiul $A'B'C'$ și al doilea triunghi al lui Napoleon au același centru de greutate.*

Demonstrație. Deoarece $a' + b' + c' = n'_a + n'_b + n'_c = a + b + c$, rezultă că centrele de greutate ale triunghiurilor $A'B'C'$ și $N'_a N'_b N'_c$ coincid. \square

Observația 562 Centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ coincide cu centrul de greutate (G) al triunghiului ABC .

Teorema 563 Sunt adevărate relațiile: $GA' \parallel AA_2, GB' \parallel BB_2, GC' \parallel CC_2, GA' \equiv GB' \equiv GC'$ și $GA' = \frac{1}{3}AA_2, GB' = \frac{1}{3}BB_2, GC' = \frac{1}{3}CC_2$.

Demonstrație. Din $\frac{g-a'}{a-a_2} = -\frac{1}{3} \in R$ rezultă că $GA' \parallel AA_2$ și $\left| \frac{g-a'}{a-a_2} \right| = \frac{1}{3}$, adică $GA' = \frac{1}{3}AA_2$ (Figura 1.111). Deoarece $AA_2 \equiv BB_2 \equiv CC_2$ rezultă $GA' \equiv GB' \equiv GC'$. \square

Teorema 564 Hexagonul $A'N'_c C'N'_a B'N'_b$ este regulat.

Demonstrația este evidentă deoarece $A'N'_c \equiv N'_c C'$. \square

Consecința 565 Punctele A', B', C' aparțin cercului circumscris celui de-al doilea triunghi al lui Napoleon corespunzător triunghiului ABC .

Teorema 566 Primul punct al lui Fermat (F_1) corespunzător unui triunghi ABC aparține cercului circumscris al celui de-al doilea triunghi al lui Napoleon al triunghiului ABC .

Demonstrație. Din $m(\sphericalangle A_1 F_1 B_1) = m(\sphericalangle A' F_1 B') = 120^\circ$ și $m(\sphericalangle A' C' B') = 60^\circ$ rezultă $m(\sphericalangle A' F_1 B') + m(\sphericalangle A' C' B') = 180^\circ$, adică patrulaterul $F_1 A' C' B'$ este inscribibil, deci F_1 aparține cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ și conform proprietății precedente – aparține cercului circumscris triunghiului $N'_a N'_b N'_c$. \square

Teorema 567 Al doilea punct al lui Fermat (F_2) corespunzător unui triunghi ABC aparține cercului circumscris primului triunghi al lui Napoleon al triunghiului ABC .

Demonstrația este analoagă cu precedentă. \square

Teorema 568 Fie $A'' \in (AA_2), B'' \in (BB_2), C'' \in (CC_2)$ astfel încât $A''A_2 = 2AA'', B''B_2 = 2BB''$. Punctele A'', B'', C'' aparțin cercului circumscris primului triunghi al lui Napoleon.

Demonstrație. Patrulateralele $AA'GA'', BB'GB'', CC'GC''$ sunt paralelograme (deoarece $GA' \parallel AA'', GA' = \frac{1}{3}AA_2 = AA''$), de unde $GA'' \parallel AA_1$ și $GA'' = \frac{1}{3}AA_1$ (Figura 1.111). Analog, $GB'' = \frac{1}{3}BB_1$ și $GC'' = \frac{1}{3}CC_1$. Cum $AA_1 \equiv BB_1 \equiv CC_1$ rezultă că $GA'' \equiv GB'' \equiv GC''$. Deoarece $|g - a''| = |g - n_a|$, rezultă că punctele A'', B'', C'' aparțin cercului circumscris triunghiului $N_a N_b N_c$. \square

Teorema 569 Triunghiul $A''B''C''$ este echilateral și congruent cu primul triunghi al lui Napoleon $N_a N_b N_c$ corespunzător triunghiului ABC .

Demonstrație. Se arată fără dificultate că $|a'' - b''| = |n_a - n_b|$ și $|a'' - c''| = |n_a - n_c|$, adică $A''B'' \equiv N_a N_b$ și $A''C'' \equiv N_a N_c$. \square

1.47 Triunghiurile lui Vecten

„Desenul corupe raționamentul” – Ion Barbu

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior pătratele $BCA_C A_B$, $ACB_C B_A$ și $ABC_B C_A$ care au centrele O_A , O_B , respectiv O_C . Triunghiul $O_A O_B O_C$ determinat de centrele acestor pătrate se numește *triunghiul Vecten exterior* (Figura 1.114).

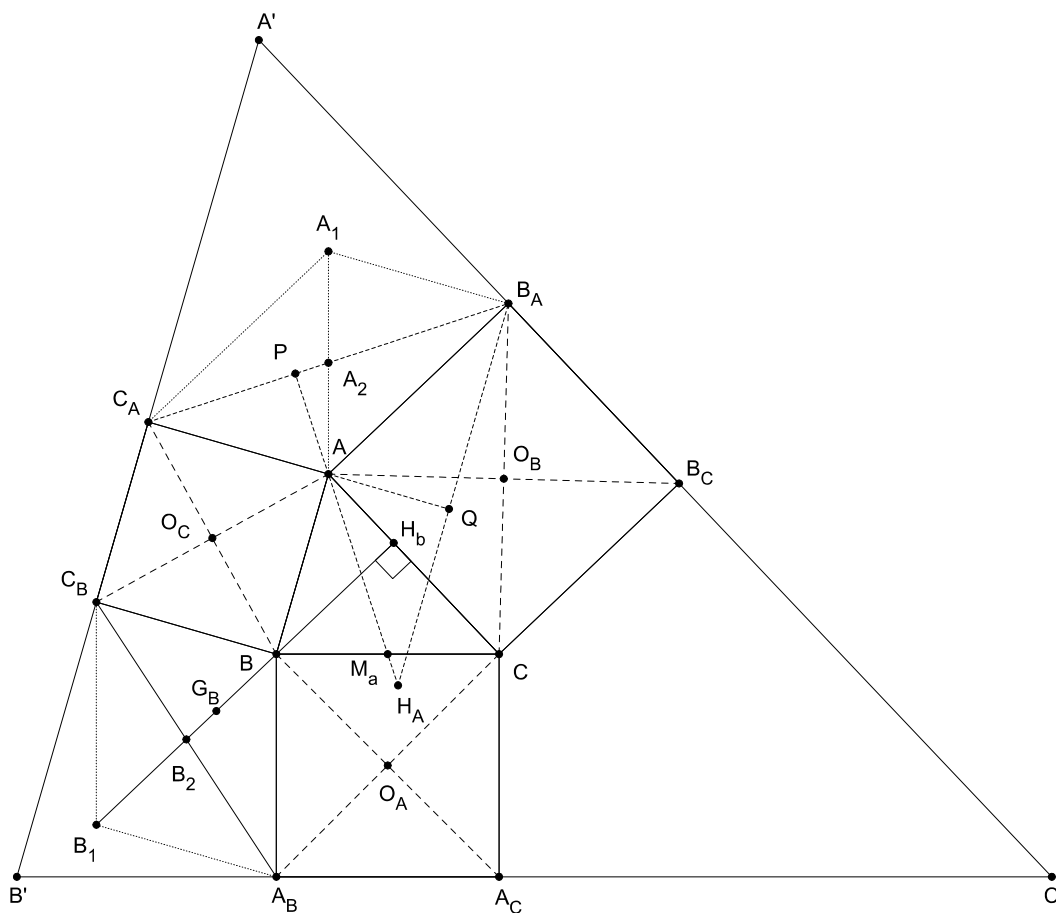


Figura 1.114: Triunghiul Vecten exterior

Teorema 570 *Dreptele AO_A, BO_B, CO_C sunt concurente .*

Demonstrație. Triunghiurile dreptunghice isoscele ACO_B și ABO_C sunt asemenea, atunci

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AO_C}{AO_B},$$

de unde $AB \cdot AO_B = AC \cdot AO_C$ și de aici

$$AB \cdot AO_B \cdot \sin \widehat{BAO_B} = AC \cdot AO_C \cdot \sin \widehat{CAD_C}$$

(deoarece $\widehat{BAO_B} \equiv \widehat{CAO_C}$), deci $A_{[ABO_B]} = A_{[ACO_C]}$. Analog se arată că $A_{[BCO_C]} = A_{[BAO_A]}$ și $A_{[CAO_A]} = A_{[CBO_B]}$ (1). Fie $\{A_1\} = AO_A \cap BC$, $\{B_1\} = BO_B \cap AC$ și $\{C_1\} = CO_C \cap AB$. Atunci,

$$\frac{A_{[ABO_A]}}{A_{[ACO_A]}} = \frac{AO_A \cdot h_1}{AO_A \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

(unde h_1 și h_2 sunt lungimile înălțimilor duse din B și C pe latura AO_A în triunghiurile ABO_A , respectiv ACO_A). Analog,

$$\frac{A_{[O_BBC]}}{A_{[O_BBA]}} = \frac{B_1C}{B_1A} \quad \text{și} \quad \frac{A_{[O_CCA]}}{A_{[O_CCB]}} = \frac{C_1A}{C_1B}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă: $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$ și conform reciprocei teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AO_A , BO_B și CO_C sunt concurente. \square

Observația 571 *Punctul de concurență al dreptelor AO_A , BO_B și CO_C se numește punctul lui Vecten exterior (V_1).*

Teorema 572 *Sunt adevărate relațiile: $AO_A \perp O_BO_C$, $BO_B \perp O_CO_A$, $CO_C \perp O_AO_B$.*

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Prin rotația de centru O_C și unghi $\frac{\pi}{2}$, punctul B ajunge în A , deci $A = \mathfrak{R}_{O_C}^{\frac{\pi}{2}}(B)$, de unde $a = o_C + \omega(b - o_C)$, unde $\omega = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, adică

$$o_C = \frac{a - ib}{1 - i}.$$

Analog, $B = \mathfrak{R}_{O_A}^{\frac{\pi}{2}}(C)$ și $C = \mathfrak{R}_{O_B}^{\frac{\pi}{2}}(A)$, de unde $o_A = \frac{b-ic}{1-i}$ și $o_B = \frac{c-ia}{1-i}$. Atunci,

$$\frac{a - o_A}{o_C - o_B} = -i \in i \cdot \mathbb{R}^*,$$

adică $OO_A \perp O_BO_C$. Analog se arată că $BO_B \perp O_CO_A$ și $CO_C \perp O_AO_B$. \square

Observația 573 *Ortocentrul triunghiului $O_AO_BO_C$ este punctul de intersecție al dreptelor AO_A , BO_B și CO_C .*

Teorema 574 *Sunt adevărate relațiile: $AO_A \equiv O_BO_C$, $BO_B \equiv O_CO_A$, $CO_C \equiv O_AO_B$.*

Demonstrație. Din $\frac{a-o_A}{o_C-o_B} = -i$ rezultă $\left| \frac{a-o_A}{o_C-o_B} \right| = |-i| = 1$, adică $|a - o_A| = |o_C - o_B|$, de unde $AO_A \equiv O_BO_C$. Analog se arată că $BO_B \equiv O_CO_A$ și $CO_C \equiv O_AO_B$. \square

Observația 575 *Cu segmentele AO_A , BO_B și CO_C se poate construi un triunghi congruent cu triunghiul $O_AO_BO_C$.*

Teorema 576 *Triunghiurile AB_ACA , BA_BCB , CA_CB_C și ABC au aceeași arie.*

Demonstrație. Avem

$$A_{[AB_A C_A]} = \frac{AC_A \cdot AB_A \cdot \sin \widehat{C_A A B_A}}{2}.$$

Deci $AC_A = AB = c$, $AB_A = AC = b$ și

$$\sin(\widehat{C_A A B_A}) = \sin(360^\circ - 180^\circ - \widehat{A}) = \sin(180^\circ - \widehat{A}) = \sin \widehat{A},$$

deci $A_{[AB_A C_A]} = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2} = A_{[ABC]}$. Analog se arată că $A_{[AB_A C_A]} = A_{[C_A C_B C]} = A_{[ABC]}$.
□

Teorema 577 *Laturile triunghiului Vecten exterior au lungimile*

$$a' = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}, b' = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}, c' = \sqrt{\frac{b^2 + a^2 + 4A_{[ABC]}}{2}},$$

unde a', b', c' sunt lungimile laturilor $O_B O_C$, $O_A O_C$, respectiv $O_A O_B$.

Demonstrație. Din teorema cosinusului în triunghiul $AO_B O_C$ obținem

$$O_B O_C^2 = O_B A^2 + O_C A^2 - 2O_B A \cdot O_C A \cdot \cos \widehat{O_B A O_C}.$$

Dar $O_B A = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $O_C A = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $m(\widehat{O_B A O_C}) = 90^\circ + m(\widehat{B A C})$, deci

$$a'^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + 2 \cdot \frac{bc \cdot \sin \widehat{A}}{2},$$

adică $a' = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}$. Analog, $b' = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}$ și $c' = \sqrt{\frac{b^2 + a^2 + 4A_{[ABC]}}{2}}$. □

Teorema 578 *Este adevărată relația:*

$$B_A C_A^2 + C_B A_B^2 + A_C B_C^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Demonstrație. Teorema cosinusului în triunghiul $AB_A C_A$ ne dă:

$$\begin{aligned} B_A C_C^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{B_A A C_A}, \\ \cos \widehat{B_A A C_A} &= \cos(180^\circ - \widehat{A}) = -\cos \widehat{A} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}, \end{aligned}$$

de unde $B_A C_A^2 = b^2 + c^2 - (a^2 - b^2 - c^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Analog, $C_B A_B^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$ și $A_C B_C^2 = 2b^2 + 2a^2 - c^2$, de unde $B_A C_A^2 + C_B A_B^2 + A_C B_C^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$. □

Teorema 579 *Dreptele AA_C și BB_C sunt perpendiculare.*

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $A_C = \Re_C^{\frac{\pi}{2}}(B)$ și $B_C = \Re_C^{-\frac{\pi}{2}}(A)$, deci $a_C = c + i(b - c)$ și $b_C = c - i(a - c)$. Atunci:

$$\frac{a - a_C}{b - b_C} = \frac{-i[b - c + i(a - c)]}{b - c + i(a - c)} = -i \in i \cdot \mathbb{R}^*,$$

deci $AA_C \perp BB_C$. □

Observația 580 Analog se arată că $AA_B \perp CC_B$ și $BB_A \perp CC_A$.

Teorema 581 Fie G_A, G_B, G_C , centrele de greutate ale triunghiurilor $AB_A C_A, BC_B A_B$ respectiv $CA_C B_C$. Dreptele AG_A, BG_B și CG_C sunt concurente în ortocentrul H al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie B_1 al patrulea vârf al paralelogramului $BC_B B_1 A_B$ și $\{H_B\} = BB_1 \cap AC$. Deoarece $m(\widehat{A_B B C_B}) = 180^\circ - m(\widehat{B})$, rezultă $m(\widehat{B A_B B_1}) = m(\widehat{B})$. Atunci triunghiul ABC și $B_1 A_B B$ sunt congruente ($m(\widehat{B A_B B_1}) = m(\widehat{B})$, $AB \equiv BC_B \equiv B_1 A_B$, $BC \equiv B A_B$), deci

$$m(\widehat{B B_1 A_B}) = m(\widehat{B A C}) = m(\widehat{B_1 B C_B}).$$

Deoarece

$$m(\widehat{B_1 B C_B}) + m(\widehat{A B H_b}) = 180^\circ - m(\widehat{C B A}) = 90^\circ$$

deci $m(\widehat{B A H_b}) + m(\widehat{A B H_b}) = 90^\circ$, de unde rezultă că $BH_b \perp AC$ (1). Deoarece într-un paralelogram diagonalele se înjumătățesc, rezultă că BB_2 este mediană în triunghiul $B A_B C_B$, deci $G_B \in B_1 B$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $G_B B \perp AC$. Analog, $AG_A \perp BC$ și $CG_C \perp AB$, de unde rezultă că BG_B, CG_C sunt dreptele suport ale înălțimilor triunghiului ABC , deci sunt concurente în ortocentrul triunghiului ABC . \square

Teorema 582 Fie H_A, H_B, H_C ortocentrele triunghiurilor $AB_A C_A, B A_B C_B$ respectiv $CA_C B_C$. Dreptele AH_A, BH_B și CH_C sunt concurente în centrul de greutate al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie A_1 cel de-al patrulea vârf al paralelogramului $C_A A B A_1, AP \perp B A C_A, BQ \perp A C_A, (P \in B A C, Q \in A C_A)$ și $\{M_a\} = AP \cap BC$. Cum $\widehat{B A C_A Q} \equiv \widehat{A H_A B}$, $C_A A \perp AB$ și $C_A A \perp H_A Q$ rezultă $AB \parallel H_A Q$, deci $\widehat{B A M_a} \equiv \widehat{A H_a Q}$ (alterne interne). Deoarece $\triangle A A_1 C_A \equiv \triangle B C A$ (vezi proprietatea anterioară) rezultă $\widehat{C_A A A_2} \equiv \widehat{A B C}$, deci triunghiurile ABM_a și $C_A A A_2$ sunt congruente, de unde

$$BM_a = AA_2 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}BC,$$

deci M_a e mijlocul segmentului BC , adică AM_a este mediană în triunghiul ABC , adică G - centrul de greutate al triunghiului ABC - aparține dreptei AH_a . Analog, $G \in BH_B$ și $G \in CH_C$. \square

Observația 583 Din congruența triunghiurilor ABM_a și $C_A A A_2$ rezultă $AM_a = C_A A_2 = \frac{1}{2}B A C_A$, deci $B A C_A = 2AM_a = 2m_a$. Analog $A B C_B = 2m_b$ și $A C B_C = 2m_c$ (unde m_a, m_b, m_c sunt lungimile medianelor triunghiului ABC). Atunci

$$B A C_A^2 + A B C_B^2 + A C B_C^2 = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Observația 584 Dacă pe laturile triunghiului ABC se construiesc spre interior pătratele $BCA'_C A'_B, ACB'_C B'_A, BAC'_A C'_B$ având centrele O'_A, O'_B respectiv O'_C , triunghiul $O'_A O'_B O'_C$ se numește triunghiul Vecten interior (Figura 1.115).

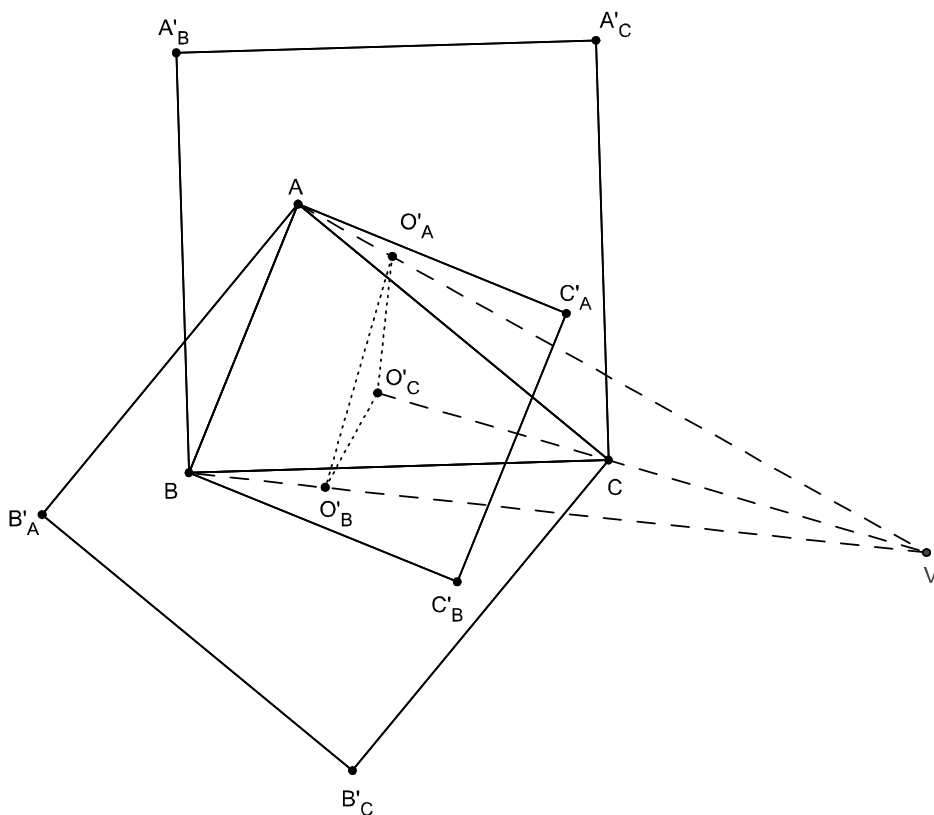


Figura 1.115: Triunghiul Vecten interior

Teorema 585 Sunt adevărate relațiile: $AO'_A \perp O'_B O'_C$, $BO'_B \perp O'_A O'_C$, $CO'_C \perp O'_B O'_A$.

Demonstrație. Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare. Avem: $A = \Re_{O'_B}^{\frac{\pi}{2}}(C)$, $B = \Re_{O'_C}^{\frac{\pi}{2}}(A)$, $C = \Re_{O'_A}^{\frac{\pi}{2}}(B)$, deci $o'_B = \frac{a-ic}{1-i}$, $o'_C = \frac{b-ia}{1-i}$, $o'_A = \frac{c-ib}{1-i}$, de unde

$$\frac{a - o'_A}{o'_B - o'_C} = \frac{-i(a + ai - ic - b)}{a + ai - ic - b} = -i \in i \cdot \mathbb{R}^*,$$

de unde rezultă $AO'_A \perp O'_B O'_C$. Analog, $BO'_B \perp O'_A O'_C$ și $CO'_C \perp O'_B O'_A$. □

Teorema 586 Sunt adevărate relațiile: $AO'_A \equiv O'_B O'_C$, $BO'_B \equiv O'_A O'_C$ și $CO'_C \equiv O'_B O'_A$.

Demonstrație. Din

$$\frac{a - o'_A}{o'_B - o'_C} = -i$$

rezultă $\left| \frac{a - o'_A}{o'_B - o'_C} \right| = |-i| = 1$, de unde $|a - o'_A| = |o'_B - o'_C|$, adică $AO'_A \equiv O'_B O'_C$. Analog se arată că $BO'_B \equiv O'_A O'_C$ și $CO'_C \equiv O'_B O'_A$. □

Observația 587 Cu lungimile segmentelor AO'_A , BO'_B , CO'_C se poate construi un triunghi congruent cu triunghiul Vecten interior.

Teorema 588 Dreptele AO'_A , BO'_B , CO'_C sunt concurente.

Demonstrație. Dreptele AO'_A , BO'_B , CO'_C fiind perpendiculare pe dreptele $O'_B O'_C$, $O'_A O'_C$, $O'_B O'_A$, sunt dreptele suport ale triunghiului $O'_A O'_B O'_C$, deci sunt concurente în ortocentrul triunghiului Vecten interior. \square

Observația 589 Punctul de concurență al dreptelor $O'_B O'_C$, $O'_A O'_C$, $O'_B O'_A$ se numește punctul Vecten interior.

Teorema 590 Triunghiurile ABA'_B și BCC'_B ; BCB'_C și ACA'_C , respectiv ABB'_A și ACC'_A au aceeași arie.

Demonstrație. Notăm cu a, b, c lungimile laturilor BC , CA respectiv AB . Din $\widehat{ABA'_B} \equiv \widehat{CBC'_B}$ (unghiuri cu laturile perpendiculare două câte două) rezultă

$$A_{[ABA'_B]} = \frac{AB \cdot BA'_B \cdot \sin \widehat{ABA'_B}}{2} = \frac{BA'_B \cdot BC \cdot \sin \widehat{CBC'_B}}{2} = A_{[CBC'_B]}.$$

Analog se arată că $A_{[BCB'_C]} = A_{[ACA'_C]}$ și $A_{[ABB'_A]} = A_{[ACC'_A]}$. \square

Teorema 591 Dreptele BB_C , CC_B și înălțimea din A a triunghiului ABC sunt concurente.

Demonstrație. Fie AH_a înălțimea din A , notăm $m(\widehat{BAH_a}) = \alpha_1$, $m(\widehat{H_a AC}) = \alpha_2$, $m(\widehat{CBB_C}) = \beta_1$, $m(\widehat{B_C BA}) = \beta_2$, $m(\widehat{ACC_B}) = \gamma_1$, $m(\widehat{C_B CB}) = \gamma_2$. Din teorema sinusurilor avem:

$$\frac{CB_C}{\sin \beta_1} = \frac{BB_C}{\sin(90^\circ + C)} \text{ și } \frac{AB_C}{\sin \beta_2} = \frac{BB_C}{\sin(45^\circ + A)},$$

de unde $\sin \beta_1 = \frac{b \cos C}{BB_C}$ și $\sin \beta_2 = \frac{b\sqrt{2} \sin(A+45^\circ)}{BB_C}$, deci

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\cos C}{\sqrt{2} \sin(A + 45^\circ)}. \tag{1}$$

Analog se arată că

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\sqrt{2} \sin(A + 45^\circ)}{\cos B}.$$

Dar $\sin \alpha_1 = \sin(90^\circ - B) = \cos B$ și $\sin \alpha_2 = \sin(90^\circ - C) = \cos C$, de unde $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$, și din reciproca teoremei lui Ceva sub formă trigonometrică rezultă concurența dreptelor BB_C , CC_B și AH_a . \square

Observația 592 Dacă triunghiul nu este ascuțitunghic, rezultatul se păstrează, dar calculele suferă unele modificări.

Teorema 593 Fie $\{A'\} = C_A C_B \cap B_A B_C, \{B'\} = C_A C_B \cap A_B A_C$ și $\{C'\} = A_B A_C \cap B_A B_C$. Triunghiul ABC și triunghiul ortic al triunghiului ABC sunt omologice.

Demonstrație. Vezi „Triunghiul lui Grebe”. □

Teorema 594 Triunghiul Vecten exterior $O_A O_B O_C$ are aria egală cu

$$A_{[O_A O_B O_C]} = A_{[ABC]} + \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{8},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, AB .

Demonstrație. Alegem un sistem cartezian cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Notăm cu litere mici afixele punctelor corespunzătoare, iar prin $Z = \mathfrak{R}_X^\varphi(Y)$ înțelegem că punctul Z se obține printr-o rotație de centru X și unghi φ a punctului Y . Avem: $B = \mathfrak{R}_{O_A}^{\frac{\pi}{2}}(C), C = \mathfrak{R}_{O_B}^{\frac{\pi}{2}}(A), A = \mathfrak{R}_{O_C}^{\frac{\pi}{2}}(B)$, de unde rezultă $o_A = \frac{b-ic}{1-i}, o_B = \frac{c-ia}{1-i}, o_C = \frac{a-ib}{1-i}$. Atunci: $A_{[O_A O_B O_C]} = |\Delta|$, unde

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{i}{4} \begin{vmatrix} o_A & \bar{o}_A & 1 \\ o_B & \bar{o}_B & 1 \\ o_C & \bar{o}_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{8} \begin{vmatrix} b-ic & \bar{b}+i\bar{c} & 1 \\ c-ia & \bar{c}+i\bar{a} & 1 \\ a-ib & \bar{a}+i\bar{b} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2i}{8} [(b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} - a\bar{c} - b\bar{a} - c\bar{b}) - i(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}) + i(b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b})], \end{aligned} \tag{1}$$

iar

$$A_{[ABC]} = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} [b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} - a\bar{c} - b\bar{a} - c\bar{b}] \tag{2}$$

și

$$\begin{aligned} BC^2 + CA^2 + AB^2 &= |c-b|^2 + |a-c|^2 + |b-a|^2 \\ &= (c-b)(\bar{c}-\bar{b}) + (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) \\ &= 2[3R^2 - (b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b})], \end{aligned}$$

deci

$$b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b} = 3R^2 - \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2} \tag{3}$$

(unde $|a| = |b| = |c| = R$ - raza cercului circumscris triunghiului ABC). Din relațiile (1) - (3) rezultă:

$$\begin{aligned} A_{[O_A O_B O_C]} &= A_{[ABC]} + \frac{1}{4} [3R^2 - (b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + c\bar{b})] \\ &= A_{[ABC]} + \frac{1}{4} \cdot \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2} = A_{[ABC]} + \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{8}. \end{aligned}$$

□

Teorema 595 *Triunghiul Vecten interior $O'_A O'_B O'_C$ are aria egală cu*

$$A_{[O'_A O'_B O'_C]} = A_{[ABC]} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor BC, CA, AB .

Demonstrația este analoagă celei precedente.

Teorema 596 (*Generalizarea teoremei lui Vecten*) *Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile asemenea BCA_1, B_1CA și BC_1A , astfel încât $\widehat{C_1BA} \equiv \widehat{CBA_1}$, $\widehat{BCA_1} \equiv \widehat{ACB_1}$, $\widehat{B_1AC} \equiv \widehat{BAC_1}$. Dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente.*

Demonstrație. Notăm cu α, β, γ măsurile unghiurilor $\widehat{A_1BC}, \widehat{BCA_1}$, respectiv

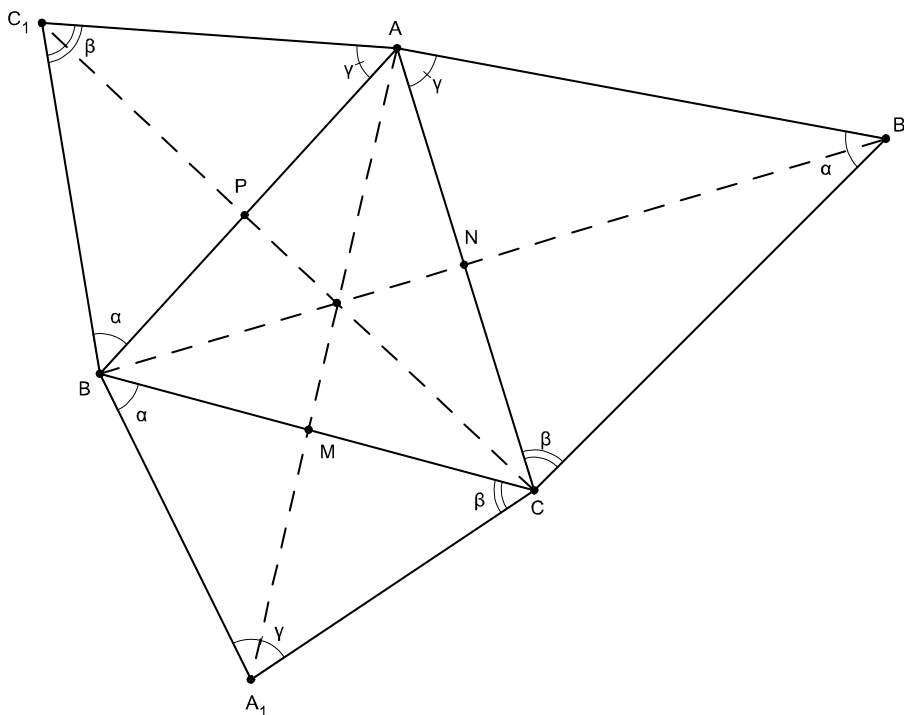


Figura 1.116: Generalizarea teoremei lui Vecten

$\widehat{C_1AB}$ și fie $\{M\} = AA_1 \cap BC$, $\{N\} = BB_1 \cap CA$, $\{P\} = CC_1 \cap AB$ (Figura 1.116).
Avem:

$$\begin{aligned} \frac{BM}{MC} &= \frac{A_{ABA_1}}{A_{ACA_1}} = \frac{AB \cdot BA_1 \cdot \sin(B + \alpha)}{AC \cdot CA_1 \cdot \sin(C + \beta)}, \\ \frac{CN}{NA} &= \frac{A_{BCB_1}}{A_{ABB_1}} = \frac{BC \cdot CB_1 \cdot \sin(C + \beta)}{AB \cdot AB_1 \cdot \sin(A + \gamma)}, \\ \frac{AP}{PB} &= \frac{A_{ACC_1}}{A_{BCC_1}} = \frac{AC \cdot AC_1 \cdot \sin(A + \gamma)}{BC \cdot BC_1 \cdot \sin(B + \alpha)}. \end{aligned}$$

Înmulțind relațiile precedente obținem:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1}. \quad (1)$$

Din asemănările triunghiurilor BCA_1, B_1CA și BC_1A rezultă:

$$\frac{B_1A}{BA_1} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{A_1C}{C_1A} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{B_1C}{BC_1} = \frac{AC}{AB}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1,$$

din reciproca teoremei lui Ceva rezultă concluzia. \square

1.48 Triunghiurile Sharygin

”...poezia nu este lacrimă,
ea este însuși plânsul,
plânsul unui ochi neinventat,
lacrima ochiului celui care trebuie să fie frumos,
lacrima celui care trebuie să fie fericit.” - Nichita Stănescu⁵⁵

În triunghiul ABC fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare și A'', B'', C'' picioarele bisectoarelor exterioare. Punctele de intersecție ale mediatoarelor segmentelor AA', BB', CC' sunt vârfurile *primului triunghi Sharygin*. Mediatoarele segmentelor AA'', BB'', CC'' se intersectează în trei puncte care sunt vârfurile celui de-al doilea *triunghi Sharygin*.

Teorema 597 *Triunghiul de contact al triunghiului ABC și primul triunghi Sharygin al triunghiului ABC sunt omotetice.*

Demonstrație. Fie $S_a S_b S_c$ primul triunghi Sharygin al triunghiului ABC , $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC (Figura 1.117). Deoarece triunghiul $AC_b C_c$ este isoscel rezultă că $C_c C_b \perp AI$; cum și $S_b S_c \perp AI$ rezultă $C_c C_b \parallel S_c S_b$. Analog $C_a C_b \parallel S_a S_b$ și $C_a C_c \parallel S_a S_c$ (1). Fie M_1, M_2, M_3 mijloacele bisectoarelor AA', BB', CC' . Fie $\{A_1\} = S_a S_c \cap BC$ și $\{A_2\} = S_a S_b \cap BC$. Avem

$$\begin{aligned} m(\widehat{A_1 S_a A_2}) &= 180^\circ - [m(\widehat{S_a A_1 A_2}) + m(\widehat{S_a A_2 A_1})] \\ &= 180^\circ - [m(\widehat{B A_1 M_2}) + m(\widehat{M_3 A_2 C})] \\ &= 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B}) + 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C}) \right] \\ &= \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] \\ m(\widehat{C_b C_a C_c}) &= m(\widehat{C_b C_a I}) + m(\widehat{C_c C_a I}) = m(\widehat{C_b C I}) + m(\widehat{C_c C I}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{C}) + m(\widehat{B})], \end{aligned}$$

⁵⁵Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

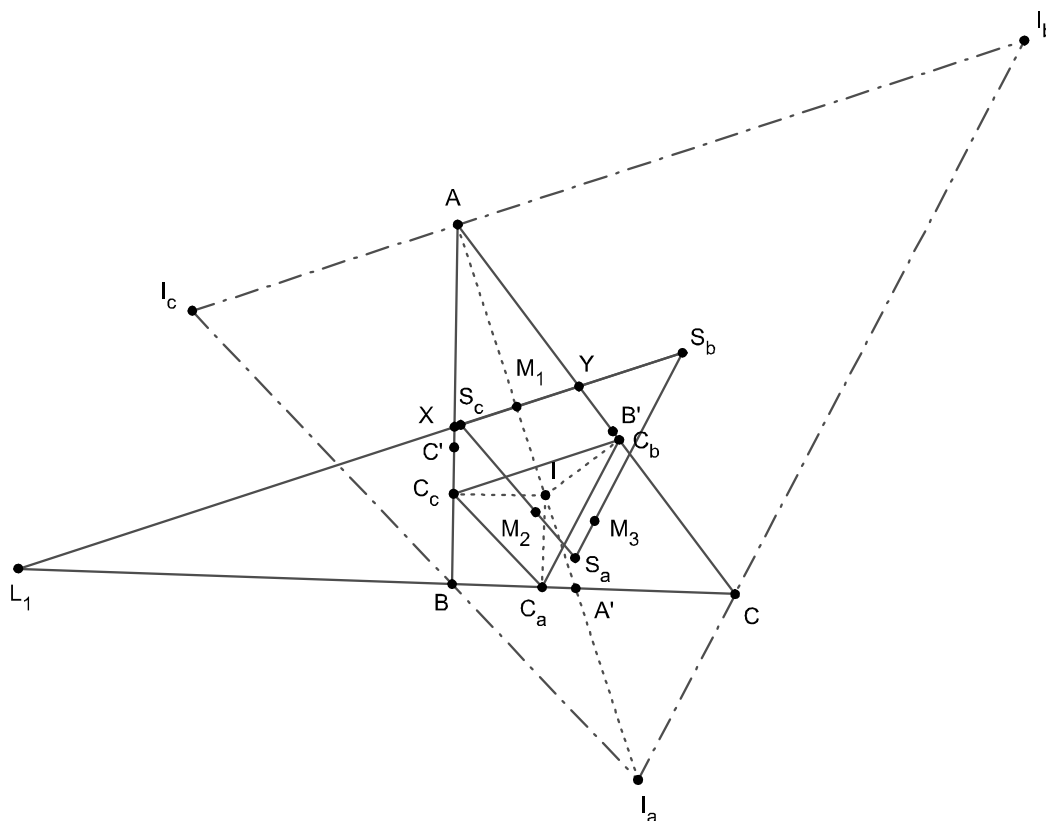


Figura 1.117: Primul triunghi Sharygin

deci $\widehat{S_b S_a S_c} \equiv \widehat{C_b C_a C_c}$. Analog, $\widehat{S_a S_b S_c} \equiv \widehat{C_a C_b C_c}$, adică triunghiurile $S_a S_b S_c$ și $C_a C_b C_c$ sunt asemenea (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că triunghiurile $S_a S_b S_c$ și $C_a C_b C_c$ sunt omotetice. \square

Consecința 598 *Unghiurile primului triunghi Sharygin $S_a S_b S_c$ corespunzător triunghiului ABC au măsurile egale cu $90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$, $90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$, respectiv $90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C})$.*

Demonstrație. În proprietatea precedentă am arătat că

$$m(\widehat{S_c S_a S_b}) = \frac{1}{2}[m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})] = \frac{1}{2} [180^\circ - m(\widehat{A})] = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A}).$$

Analog se arată că $m(\widehat{S_a S_b S_c}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ și $m(\widehat{S_a S_c S_b}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C})$. \square

Teorema 599 *Triunghiurile Sharygin sunt asemenea.*

Demonstrație. Fie $S'_a S'_b S'_c$ cel de-al doilea triunghi Sharygin, A'', B'', C'' picioarele bisectoarelor exterioare și M'_1, M'_2, M'_3 mijloacele segmentelor AA'', BB'' respectiv CC'' , $\{P\} = S'_b S'_a \cap BC$, $\{R\} = S'_b S'_c \cap BC$ (Figura 1.118). Avem:

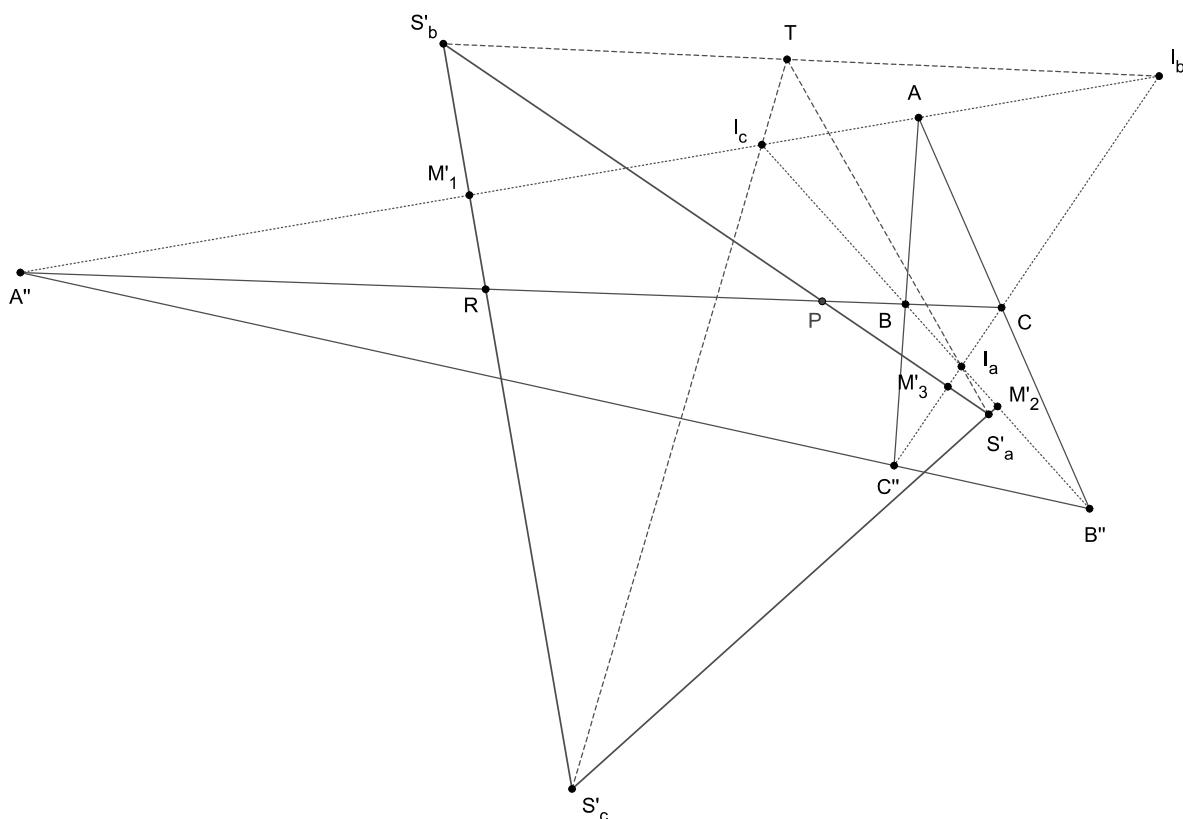


Figura 1.118: Al doilea triunghi Sharygin

$$m(\widehat{A''RS'_b}) = m(\widehat{M'_1RB}) = 360^\circ - \left[90^\circ + (180^\circ - m(\widehat{B})) + \left(90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A}) \right) \right]. \quad (1)$$

Din triunghiul PM_3C avem: $m(\widehat{M'_3PC}) = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B}) \right) = \frac{1}{2}m(\widehat{C})$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că

$$m(\widehat{PS'_bR}) = 180^\circ - [m(\widehat{S'_bPR}) + m(\widehat{S'_bRP})] = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B}).$$

Atunci, $m(\widehat{S'_a S'_b S'_c}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ și analog se arată că $m(\widehat{S'_b S'_a S'_c}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$, $m(\widehat{S'_a S'_c S'_b}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C})$. Din relațiile de mai sus și consecința precedentă rezultă că triunghiurile lui Sharygin $S_a S_b S_c$ și $S'_a S'_b S'_c$ sunt asemenea. \square

Observația 600 *Unghiurile celui de-al doilea triunghi Sharygin corespunzător triunghiului ABC au măsurile egale cu*

$$90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A}), 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B}), 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{C}).$$

Teorema 601 *Primul triunghi Sharygin $S_a S_b S_c$ al triunghiului ABC și triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC sunt omotetice.*

Demonstrație. Deoarece $m(\widehat{I_c A I}) = 90^\circ$ (Figura 1.117) rezultă $I_c I_b \perp AI$ și cum $S_c S_b \perp AI$, rezultă $I_c I_b \parallel S_c S_b$. Analog, $I_a I_b \parallel S_a S_b$ și $I_a I_c \parallel S_a S_c$ (1). Cum $m(\widehat{B I_a C}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$, $m(\widehat{C I_b A}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{ABC})$ și $m(\widehat{A I_c B}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{ACB})$ rezultă că triunghiurile $I_a I_b I_c$ și $S_a S_b S_c$ sunt asemenea și utilizând relațiile (1) rezultă că triunghiurile $I_a I_b I_c$ și $S_a S_b S_c$ sunt omotetice. \square

Teorema 602 Al doilea triunghi Sharygin $S'_a S'_b S'_c$ al triunghiului ABC este asemenea și omologic cu triunghiul antisuplementar $I_a I_b I_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Deoarece $m(\widehat{B I_a C}) = m(\widehat{S'_a S'_b S'_c}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$ și $m(\widehat{C I_b A}) = m(\widehat{S'_a S'_b S'_c}) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ rezultă că triunghiurile $S'_a S'_b S'_c$ și $I_a I_b I_c$ sunt asemenea. Deoarece punctele A'', B'', C'' sunt coliniare (ele aparținând axei ortice a triunghiului ABC), atunci M'_1, M'_2, M'_3 sunt mijloacele patrulaterului complet $B'' A'' B A C'' C$ și conform teoremei lui Gauss sunt coliniare (aparțin dreptei lui Gauss). Deoarece $\{M'_1\} = I_b I_c \cap S'_b S'_c$, $\{M'_2\} = I_a I_c \cap S'_a S'_c$ și $\{M'_3\} = I_a I_b \cap S'_b S'_a$ din reciproca teoremei lui Desarguss rezultă că dreptele $I_a S'_a, I_b S'_b$ și $I_c S'_c$ sunt concurente, triunghiurile $S'_a S'_b S'_c$ și $I_a I_b I_c$ fiind astfel omologice. \square

Teorema 603 Triunghiurile Sharygin ale triunghiului ABC sunt omologice cu triunghiul ABC , axa de omologie fiind dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie $\{X\} = S_b S_c \cap BA$, $\{Y\} = S_b S_c \cap AC$, $\{L_1\} = S_b S_c \cap BC, A'$ piciorul bisectoarei din A (Figura 1.117). Deoarece $S_c S_b$ este mediatoarea segmentului AA' și AA' este bisectoarea unghiului BAC , rezultă că patrulaterul $AXA'Y$ este romb. Din teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABC și transversala L_1, X, Y avem:

$$\frac{L_1 B}{L_1 C} \cdot \frac{X A}{X B} \cdot \frac{Y C}{Y A} = 1,$$

unde $\frac{L_1 B}{L_1 C} = \frac{X B}{Y C}$ (deoarece $XA \equiv YA$) (1). Deoarece $XA' \parallel AC$ rezultă $\frac{X B}{A B} = \frac{B A'}{B C}$, adică

$$X B = \frac{a c}{b + c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^2}{b + c}, \tag{2}$$

iar din $YA' \parallel AB$ rezultă

$$\frac{Y C}{Y A} = \frac{C A'}{B C}, Y C = \frac{a b}{b + c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{b + c}. \tag{3}$$

Din relațiile (1) - (3) rezultă $\frac{L_1 B}{L_1 C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$. Analog, dacă $\{L_2\} = S_a S_c \cap AC$, $\{L_3\} = S_a S_b \cap AB$ rezultă $\frac{L_2 C}{L_2 A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2$ și $\frac{L_3 A}{L_3 B} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, de unde

$$\frac{L_1 B}{L_1 C} \cdot \frac{L_2 C}{L_2 A} \cdot \frac{L_3 A}{L_3 B} = 1,$$

iar din reciproca teoremei lui Menelaus rezultă că punctele L_1, L_2 și L_3 sunt coliniare deci triunghiurile $S_a S_b S_c$ și ABC sunt omologice. Tangenta în A la cercul circumscris

triunghiului ABC intersectează dreapta BC într-un punct A_1 care are proprietatea $\frac{A_1B}{A_1C} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$. Atunci, $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{L_1B}{L_1C}$ de unde:

$$\frac{A_1B}{A_1C - A_1B} = \frac{L_1B}{L_1C - L_1B},$$

adică $\frac{A_1B}{BC} = \frac{L_1B}{BC}$ egalitate echivalentă cu $A_1B = L_1B$ și deoarece A_1 și L_1 sunt de aceeași parte a lui B pe dreapta BC , rezultă că punctele A_1 și L_1 coincid, deci L_1 aparține dreptei lui Lemoine a triunghiului ABC . Analog se arată că L_2 și L_3 aparțin dreptei lui Lemoine, deci axa de omologie dintre primul triunghi Sharygin și triunghiul ABC este dreapta lui Lemoine a triunghiului ABC . Analog se arată că triunghiul ABC este omologic și cu cel de-al doilea triunghi Sharygin. \square

1.49 Triunghiurile lui Caspary

„Geometria este cea mai bună și mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecății și rațiunii.” – Denis Diderot⁵⁶

Teorema 604 *Dacă X și Y sunt două puncte conjugate izotomic ale triunghiului ABC și paralelele, duse prin X la laturile BC, CA, AB , intersectează dreptele AY, BY, CY în punctele A_1, B_1 , respectiv C_1 , atunci triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omologice și au trei centre de omologie.*

Demonstrație. Notăm cu A' și A'' , B' și B'' , C' și C'' punctele de intersecție ale dreptelor conjugate izotomic AX și AY, BX și BY, CX și CY cu laturile triunghiului ABC (Figura 1.119). Evident triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt omologice, punctul Y fiind un centru de omologie. Fie $\{a\} = AB_1 \cap BC$, $\{b\} = BC_1 \cap CA$ și $\{c\} = CA_1 \cap AB$. Atunci, $A'b \parallel AB$, $B'c \parallel BC$, $C'a \parallel CA$, de unde

$$\frac{aB}{aC} = \frac{C'B}{C'A}, \frac{bC}{bA} = \frac{A'C}{A'B}, \frac{cA}{cB} = \frac{B'A}{B'C}.$$

Din teorema lui Ceva avem:

$$\frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{A'C}{A'B} \cdot \frac{B'A}{B'C} = 1$$

sau $\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1$, deci dreptele AB_1, BC_1, CA_1 sunt concurente într-un punct Z . Analog se arată că dreptele AC_1, BA_1, CB_1 sunt concurente într-un punct notat cu Z' , de unde rezultă concluzia. \square

Triunghiul $A_1B_1C_1$ de mai sus se numește *primul triunghi Caspary*. Dacă dreptele A_1G, B_1G, C_1G care unesc vârfurile primului triunghi Caspary $A_1B_1C_1$ cu centrul de greutate G al triunghiului ABC , intersectează dreptele AX, BX și CX în punctele A_2, B_2 , respectiv C_2 , atunci triunghiul $A_2B_2C_2$ se numește *al doilea triunghi al lui Caspary*.

⁵⁶ Denis Diderot (1713-1784) – filosof și scriitor francez, figură complexă a iluminismului francez

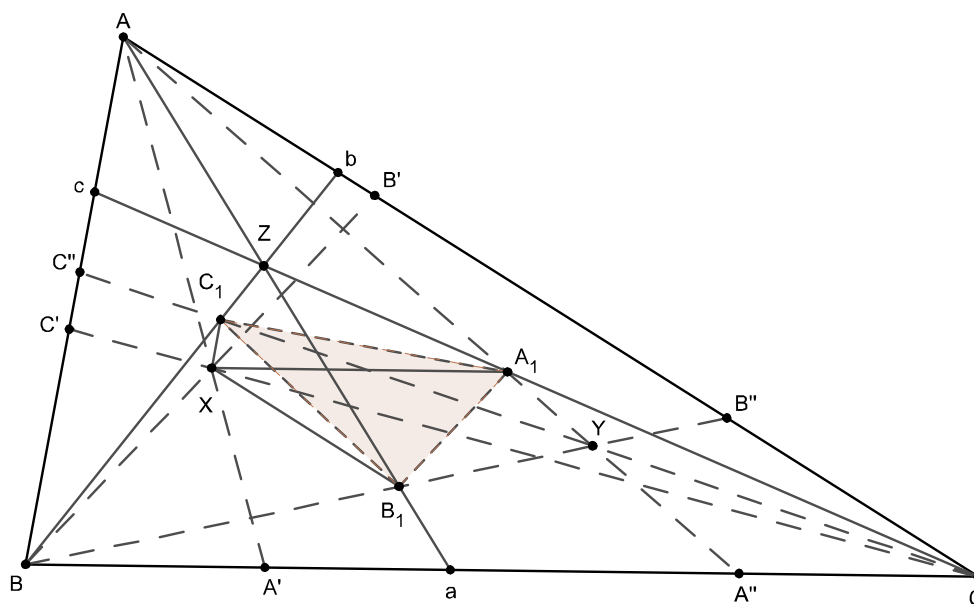


Figura 1.119: Triunghiurile lui Caspary

Observația 605 Al doilea triunghi al lui Caspary $A_2B_2C_2$ este omologic cu triunghiul ABC , centrul de omologie al acestor triunghiuri fiind punctul X , conjugatul izotomic al centrului de omologie Y al triunghiului ABC cu primul triunghi al lui Caspary $A_1B_1C_1$. Primul și al doilea triunghi ale lui Caspary sunt omologice, centrul lor de omologie fiind centrul de greutate al triunghiului ABC .

Capitolul 2

INEGALITĂȚI GEOMETRICE REMARCABILE

2.1 Inegalitatea fundamentală a triunghiului (Inegalitățile lui Blundon)

„Ușor nu e nici cântecul. Zi
și noapte – nimic nu-i ușor pe pământ,
căci roua e sudoarea privighetorilor
ce s-au ostenit toată noaptea cântând.” - Lucian Blaga¹

Într-un triunghi ABC , fie O centrul cercului circumscris, I centrul cercului înscris, G centrul de greutate, N punctul lui Nagel, s semiperimetrul, R raza cercului circumscris și r raza cercului înscris. În cele ce urmează prezentăm o demonstrație geometrică a inegalității fundamentale a triunghiului. Această relație conține de fapt două inegalități și a fost demonstrată pentru prima oară de către E. Rouché [101] în 1851, răspunzând unei întrebări a lui Ramus referitoare la condiții necesare și suficiente pentru a exista un triunghi având date numerele reale pozitive s, R, r (vezi Teorema 607). O demonstrație relativ simplă a inegalității fundamentale a triunghiului a fost dată de W.J. Blundon [26] și se bazează pe următoarea proprietate algebrică a rădăcinilor unei ecuații de gradul trei: Rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

sunt laturile unui triunghi dacă și numai dacă, următoarele condiții sunt verificate: i) $18a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2 - 27a_3^3 - 4a_2^3 - 4a_1^3a_3 > 0$; ii) $-a_1 > 0, a_2 > 0, -a_3 > 0$; iii) $a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3 > 0$. Mai multe detalii se pot găsi în monografia scrisă de către D. Mitrinović, J. Pečarić și V. Volenec [84], precum și în articolele lui C. Niculescu [91], [92], R.A. Satnoianu [104], S. Wu [119]. Menționăm că G. Dospinescu, M. Lascu,

¹Lucian Blaga (1895-1961) - filosof, umanist, jurnalist, poet, dramaturg, traducător, profesor universitar și diplomat român, membru titular al Academiei Române

C. Pohoăță și M Tetiva [56] au dat o demonstrație algebrică unei forme mai slabe a inegalității lui Blundon $s \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$. Această inegalitate este o consecință a inegalității fundamentale a triunghiului.

Reamintim câteva distanțe importante ce au loc într-un triunghi ABC . Faimoasa formulă pentru distanța OI este numită *relația lui Euler* și este dată de

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \tag{2.1}$$

O demonstrație standard a acestei relații găsim în H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer [51] și T. Lalescu [73]. O demonstrație cu ajutorul numerelor complexe întâlnim în T. Andreescu și D. Andrica [5]. Următoarea distanță de care avem nevoie este ON și este dată de

$$ON = R - 2r \tag{2.2}$$

Relația (2.2) ne dă o demonstrație geometrică a inegalității lui Euler $R \geq 2r$ și joacă un rol important în obținerea rezultatelor noastre. O demonstrație cu ajutorul numerelor complexe întâlnim în T. Andreescu și D. Andrica [5]. O altă distanță utilă este OG dată de:

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}, \tag{2.3}$$

unde a, b și c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC . Demonstrația standard a relației (2.3) utilizează relația lui Leibniz (vezi [5]).

Suma $a^2 + b^2 + c^2$ poate fi scrisă în funcție de s, R, r astfel:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr) \tag{2.4}$$

Demonstrația acestei formule se găsește, de exemplu, în [84]. Rezultatele ce urmează au fost publicate în [7].

Următorul rezultat conține o demonstrație geometrică simplă a inegalității fundamentale a triunghiului.

Teorema 606 (*D. Andrica, C. Barbu [7]*) *Dacă ABC nu este un triunghi echilateral, atunci următoarea relație este adevărată:*

$$\cos \widehat{ION} = \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \tag{2.5}$$

Demonstrație. Este cunoscut faptul că punctele N, G, I sunt coliniare, aparținând dreptei lui Nagel, iar $NI = 3GI$ (vezi [6] sau [71]). Aplicând relația lui Stewart în triunghiul ION , obținem:

$$ON^2 \cdot GI + OI^2 \cdot NG - OG^2 \cdot NI = GI \cdot GN \cdot NI,$$

sau

$$ON^2 \cdot GI + OI^2 \cdot 2GI - OG^2 \cdot 3GI = 6GI^3,$$

relație echivalentă cu

$$ON^2 + 2 \cdot OI^2 - 3 \cdot OG^2 = 6GI^2,$$

de unde

$$\begin{aligned} GI^2 &= \frac{1}{6} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - 8Rr + 4r^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{2(p^2 - r^2 - 4Rr)}{3} - 8Rr + 4r^2 \right). \end{aligned}$$

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ION și ținând seama de egalitatea $NI^2 = 9GI^2 = 5r^2 + p^2 - 16Rr$, obținem:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ION} &= \frac{ON^2 + OI^2 - NI^2}{2ON \cdot OI} \\ &= \frac{(R - 2r)^2 + (R^2 - 2Rr) - (5r^2 + p^2 - 16Rr)}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\ &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \end{aligned}$$

Dacă triunghiul este echilateral, atunci punctele I, O, N coincid, deci triunghiul ION degenerază într-un punct. \square

Teorema 607 (*Blundon–Rouché*) *Condiția necesară și suficientă pentru a exista un triunghi având elementele p, R și r este:*

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}. \quad (2.6)$$

Demonstrație. Dacă $R = 2r$, atunci triunghiul este echilateral și inegalitățile sunt evidente. Dacă $R \neq 2r$, atunci inegalitățile (2.6) sunt o consecință directă a faptului că $-1 \leq \cos \widehat{ION} \leq 1$. \square

Observația 608 (*D. Andrica, C. Barbu [7]*) *În cazul trivial, când triunghiul este echilateral, obținem egalitatea în (2.6). Presupunând că triunghiul nu este echilateral, atunci avem $R \neq 2r$. Notăm cu $\mathcal{T}(R, r)$ familia triunghiurilor având aceeași rază a cercului circumscris R și aceeași rază r . Inegalitatea (2.6) ne dă intervalul exact în care se "mișcă" p pentru toate triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r)$. Avem $p_{\min}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$ și $p_{\max}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$. Dacă fixăm punctele O și I astfel încât $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, atunci triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ cu semiperimetrul minim, corespunde cazului $\cos \widehat{ION} = 1$, ceea ce înseamnă că punctele I, O, N sunt coliniare, iar punctele I și N aparțin aceleiași raze având originea în O . Deoarece punctele O, G, H sunt coliniare, aparținând dreptei lui Euler a triunghiului, rezultă că punctele O, I, G sunt coliniare, deci în acest caz triunghiul ABC este isoscel. În Figura 2.1 acest triunghi este notat cu $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$. De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ cu semiperimetrul maxim, corespunde cazului $\cos \widehat{ION} = -1$, ceea ce înseamnă că punctele I, O, N sunt coliniare, iar O este situat între I și N . Utilizând dreapta lui Euler rezultă că triunghiul ABC este isoscel. În Figura 2.1 acest triunghi este notat cu $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Notăm faptul că $B_{\min}C_{\min} > B_{\max}C_{\max}$. Triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R, r)$ sunt "situate" între aceste două cazuri extreme. În concordanță cu teorema de închidere a lui Poncelet, aceste triunghiuri sunt înscrise în același cerc $\mathcal{C}(O; R)$, iar laturile lor sunt tangente exterioare la același cerc $\mathcal{C}(I; r)$.*

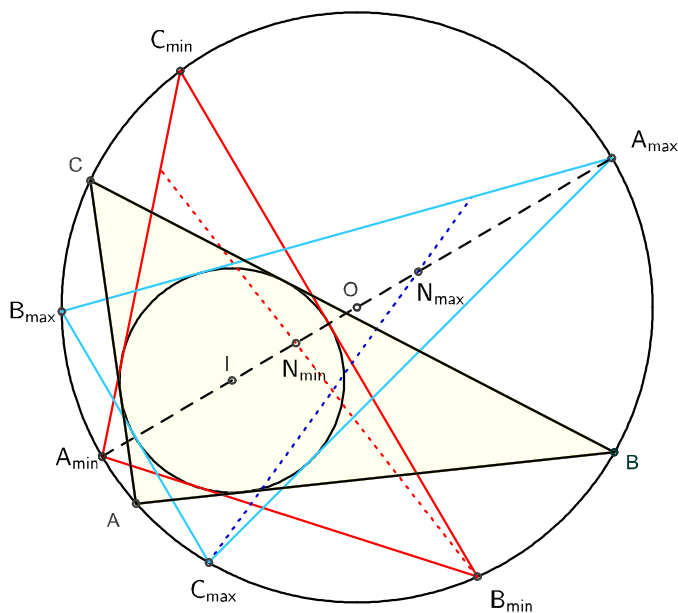


Figura 2.1: Inegalitățile lui Blundon

Observația 609 (D. Andrica, C. Barbu [7]) Rezultă o cale naturală de construcție a unui triunghi ABC în care se dau centrul cercului înscris I , centrul cercului circumscris O și punctul lui Nagel N . Ținând cont de faptul că punctele I, G, N sunt coliniare, aflându-se pe dreapta lui Nagel a triunghiului ABC , găsim centrul de greutate G pe segmentul IN astfel încât $IG = \frac{1}{3}IN$. Apoi, utilizând faptul că punctele O, G, H sunt coliniare, determinăm ortocentrul H pe raza $(OG$ astfel încât $OH = 3OG$. Am redus astfel construcția cerută la faimoasa problemă a lui Euler de construcție a unui triunghi în care știm I, O și H [60]. Problema de construcție a lui Euler a fost studiată de către B.Scimemi [105], G.C.Smith [109], și P. Yiu [121].

Notăm cu N_{\min} și N_{\max} punctele lui Nagel corespunzătoare triunghiurilor $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$, respectiv $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Deoarece distanța ON este constantă, fiind egală cu $ON = R - 2r$, punctul lui Nagel N se "mișcă" pe cercul de diametru $N_{\min}N_{\max}$, iar măsura unghiului \widehat{ION} variază între 0 și 180° . S. Wu în [119] a dat o nouă versiune a inegalității lui Blundon introducând un parametru, după cum urmează: pentru orice triunghi $A_1A_2A_3$, următoarele inegalități au loc:

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \cos \phi \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \cos \phi. \quad (2.7)$$

unde $\phi = \min_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i - A_j|$. Rezultatul ce urmează a fost publicat în [7].

Teorema 610 (D. Andrica, C. Barbu [7]) În orice triunghi ABC sunt adevărate inegalitățile:

$$-\cos \phi \leq \cos \widehat{ION} \leq \cos \phi, \quad (2.8)$$

unde $\phi = \min\{|A - B|, |B - C|, |C - A|\}$, cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Observația 611 (*D. Andrica, C. Barbu [7]*) Inegalitățile 2.7 și 2.8 sunt echivalente.

Demonstrație. În cele ce urmează vom da o demonstrație geometrică a inegalității (2.8). Mai întâi vom da o demonstrație geometrică pentru inegalitatea din dreapta:

$$\cos \widehat{ION} \leq \cos \phi.$$

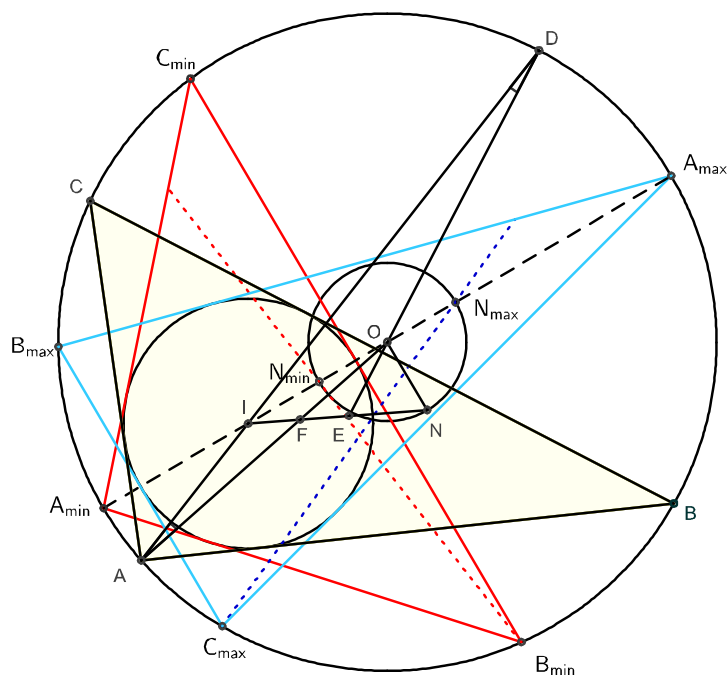


Figura 2.2: N se "mișcă" pe cercul de diametru $N_{\min}N_{\max}$

Vârfulurile celor două triunghiuri extremale $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$ și $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$ determină șase arce pe cercul circumscris triunghiului, fiecare dintre acestea corespunzând unei anumite ordini a unghiurilor triunghiului ABC . Fără a pierde din generalitate presupunem că $A > C > B$ (adică $a > c > b$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC) și vârfurile triunghiului ABC se mișcă în sens trigonometric pe cercul circumscris. În acest caz, A este situat între A_{\min} și C_{\max} , B este între B_{\min} și A_{\max} , iar C este între C_{\min} și B_{\max} (Figura 2.2).

În cazul de față $\min\{|A - B|, |B - C|, |C - A|\} = |B - C|$, deci $\phi = C - B$. Fie D punctul de intersecție dintre dreapta AI și cercul circumscris triunghiului ABC (Figura 2.3). Notăm cu E și F punctele de intersecție dintre dreapta lui Nagel NI cu dreptele DO , respectiv AO . Triunghiul AOD este isoscel, deci $\widehat{ADO} = \widehat{DAO}$. Avem $\widehat{AOC} = 2\widehat{B}$ și $\widehat{COD} = \widehat{A}$, de unde rezultă că

$$\widehat{ADO} = \frac{180^\circ - (\widehat{AOC} + \widehat{COD})}{2} = \frac{180^\circ - (2\widehat{B} + \widehat{A})}{2} = \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2},$$

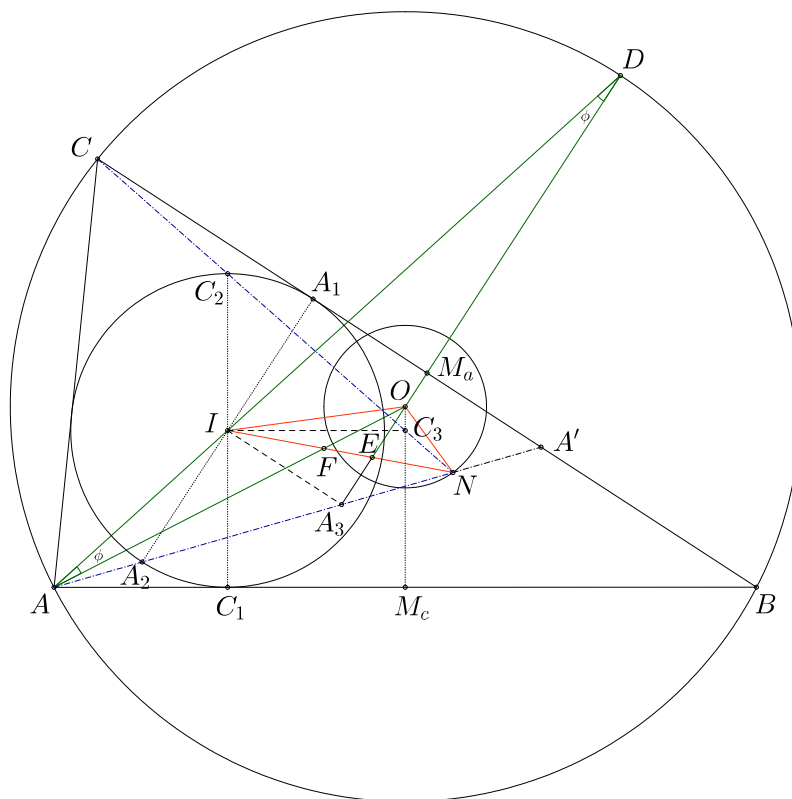


Figura 2.3: O reprezentare geometrică a parametrului ϕ

sau

$$\phi = 2\widehat{ADO}. \tag{2.9}$$

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele perpendicularelor duse din I pe laturile triunghiului ABC , A_2 punctul diametral opus lui A_1 în cercul înscris în triunghiul ABC , $\{A'\} = AN \cap BC$, I_a centrul cercului exînscriș corespunzător laturii BC , iar r_a raza cercului A -exînscriș. Deoarece dreptele IA_1 și $A'I_a$ sunt perpendiculare pe BC , rezultă că $IA_1 \parallel A'I_a$. Deoarece cercul înscris și cercul A -exînscriș sunt omotetice, prin omotetia de centru A și raport $\frac{r_a}{r}$, avem $\frac{A'I_a}{IA_2} = \frac{r_a}{r}$. Rezultă că punctele A' și A_2 se corespund prin această omotetie, deci $A_2 \in AN$.

Fie $\{A_3\} = AN \cap OM_a$, $\{C_3\} = CN \cap OM_c$, unde M_a și M_c sunt mijloacele laturilor BC , respectiv AC . Deoarece $BA' = CA_1 = p - c$, rezultă că M_a este mijlocul segmentului $A'A_1$, deci M_aA_3 este linie mijlocie în triunghiul A_1A_2A' . Cum $IA_1 = IA_2$, rezultă că IA_3 este linie mijlocie în triunghiul A_1A_2A' . Din $IA_3 \parallel M_aA_1$, $M_aA_3 \parallel IA_1$ și $\widehat{IA_1M_a} = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $IA_1M_aA_3$ este dreptunghi. Analog se arată că patrulaterul ICM_cC_3 este dreptunghi. Din condiția $a > c > b$ avem că $OM_a < OM_c < OM_b < IA_1 = r$.

În funcție de poziția lui N față de mediatoarea laturii BC , avem următoarele trei situații:

1) punctul N este în același semiplan cu punctul B față de OM_a , adică $N \in [AA_3] \setminus [AA_3]$. Atunci, $\widehat{ION} > \widehat{IOA_3} = \widehat{IOE} > \widehat{FOE}$.

2) punctul $N \equiv A_3 \equiv E$. Atunci, $\widehat{ION} = \widehat{IOE} > \widehat{FOE}$.

3) punctul N este în același semiplan cu punctul A față de OM_a , adică $N \in [AA_3]$. Acest caz nu convine deoarece $N \in CC_3$, iar $C_3 \in OM_c$.

În toate cazurile posibile considerate mai sus obținem

$$\widehat{FOE} \leq \widehat{ION}. \tag{2.10}$$

Deoarece

$$2\widehat{ADO} = \widehat{AOE} = \widehat{FOE}, \tag{2.11}$$

din relațiile (2.9)-(2.11), obținem $\phi \leq \widehat{ION}$ și de aici rezultă

$$\cos \widehat{ION} \leq \cos \phi.$$

Dăm acum o demonstrație geometrică pentru inegalitatea

$$-\cos \phi \leq \cos \widehat{ION} \tag{2.12}$$

Dacă $\widehat{ION} < 90^\circ$, atunci inegalitatea (2.12) este trivială, deoarece numerele $\cos \phi$ și $\cos \widehat{ION}$ sunt pozitive. Dacă $\widehat{ION} > 90^\circ$, atunci inegalitatea (2.12) este echivalentă cu

$$-2 \sin \frac{\alpha + \phi}{2} \sin \frac{\alpha - \phi}{2} \leq 0$$

sau

$$\sin \frac{\alpha + \phi}{2} \sin \frac{\alpha - \phi}{2} \geq 0.$$

unde am notat măsura unghiului \widehat{ION} cu α . Inegalitatea precedentă este adevărată deoarece $\frac{\alpha + \phi}{2}, \frac{\alpha - \phi}{2} \in (0, 90^\circ)$. \square

Observația 612 Numărul ϕ împarte triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R, r)$ în funcție de poziția punctului A pe cercul $O(R)$.

Apelând la inegalitatea lui Gerretsen [7]:

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \tag{2.13}$$

după câteva calcule simple obținem:

$$|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2| \leq 2(R^2 - 3Rr + 2r^2). \tag{2.14}$$

Din inegalitățile (2.8) obținem

$$|\cos \widehat{ION}| \leq \cos \phi \leq \frac{R - r}{\sqrt{R^2 - 2Rr}} \cos \phi.$$

Acum, utilizând relația (2.5) găsim:

$$\frac{|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2|}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \leq \frac{R - r}{\sqrt{R^2 - 2Rr}} \cos \phi.$$

Calculare elementare conduc la o îmbunătățire a inegalității lui Gerretsen în funcție de parametrul ϕ .

Consecința 613 (*D. Andrica, C. Barbu [7]*) În orice triunghi ABC au loc următoarele inegalități:

$$|p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2| \leq 2(R^2 - 3Rr + 2r^2) \cos \phi. \quad (2.15)$$

În cele ce urmează notăm cu I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrie și cu N_a, N_b, N_c punctele adjuncte corespunzătoare punctului lui Nagel N . Definiții și caracterizări al punctelor N_a, N_b, N_c găsim în lucrarea lui D.Andrica și K.L.Nguyen [12]. Fie p, R, r, r_a, r_b, r_c respectiv semiperimetrul, raza cercului circumscris, raza cercului înscris și razele cercurilor exînscrie corespunzătoare triunghiului ABC . Cunoaștem faptul că punctele N_a, G, I_a sunt coliniare și $N_a I_a = 3GI_a$. Proprietăți analoge se dau pentru tripletele de puncte N_b, G, I_b și N_c, G, I_c . Sunt adevărate următoarele relații similare cu (2.1) și (2.2):

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a, OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b, OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c \quad (2.16)$$

și

$$ON_a = R + 2r_a, ON_b = R + 2r_b, ON_c = R + 2r_c \quad (2.17)$$

Demonstrații ale relațiilor (2.16) și (2.17) se pot găsi în [12].

Teorema 614 (*D. Andrica, C. Barbu [7]*) Următoarea relație este adevărată:

$$\cos \widehat{I_a O N_a} = \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}}, \quad (2.18)$$

unde $\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$.

Demonstrație. Aplicând relația lui Stewart în triunghiul $I_a O N_a$, obținem:

$$ON_a^2 \cdot GI_a + OI_a^2 \cdot N_a G - OG^2 \cdot N_a I_a = GI_a \cdot GN_a \cdot N_a I_a,$$

sau

$$ON_a^2 \cdot GI_a + OI_a^2 \cdot 2GI_a - OG^2 \cdot 3GI_a = 6GI_a^3,$$

relație echivalentă cu

$$ON_a^2 + 2 \cdot OI_a^2 - 3 \cdot OG^2 = 6GI_a^2.$$

Deoarece $N_a I_a = 3GI_a$ rezultă:

$$\begin{aligned} I_a N_a^2 = 9GI_a^2 &= \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 8Rr_a + 4r_a^2 \right) = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 12Rr_a + 6r_a^2 = 2\alpha + 12Rr_a + 6r_a^2. \end{aligned}$$

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul $I_a O N_a$ obținem:

$$\begin{aligned} \cos \widehat{I_a O N_a} &= \frac{ON_a^2 + OI_a^2 - N_a I_a^2}{2ON_a \cdot OI_a} = \frac{R^2 + 2Rr_a + (R + 2r_a)^2 - N_a I_a^2}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}} \\ &= \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}}. \end{aligned}$$

Relații analoge se pot da pentru r_b și r_c . □

Teorema 615 (D. Andrica, C. Barbu [7]) *Următoarele inegalități sunt adevărate:*

$$0 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}. \quad (2.19)$$

(Forma duală a inegalității lui Blundon)

Demonstrație. Inegalitatea din stânga este evidentă. Cum $-1 \leq \cos \widehat{I_a O N_a} \leq 1$, rezultă

$$R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \leq \alpha \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}, \quad (2.20)$$

unde $\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$. Inegalitatea din dreapta a relației (2.19) rezultă din inegalitatea din dreapta a relației (2.20). \square

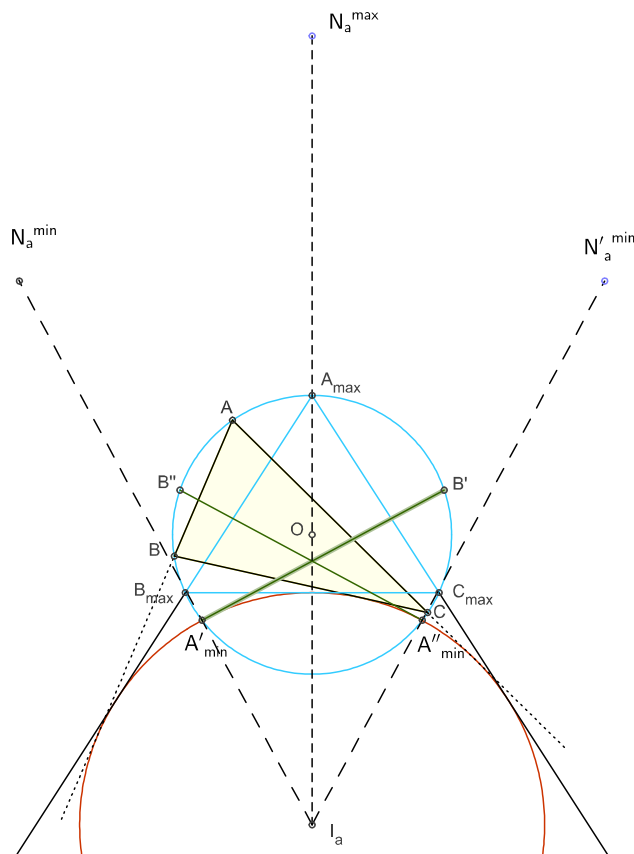


Figura 2.4: Forma duală a inegalității lui Blundon

Observația 616 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) *Notăm cu $\mathcal{T}(R, r_a)$ familia triunghiurilor având aceeași rază a cercului circumscris R și aceeași exrază r_a . Inegalitatea (2.19) ne dă intervalul exact în care se "mișcă" α pentru toate triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$. Avem $\alpha_{min} = 0$ și $\alpha_{max} = R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}$. Dacă*

fixăm punctele O și I_a astfel încât $OI_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a}$, atunci triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ ce au valoarea α minimă degenerază într-un punct și se corespund punctelor de intersecție dintre cercurile $\mathcal{C}(O; R)$ și $\mathcal{C}(I_a; r_a)$. În Figura 2.4 aceste puncte sunt notate cu A'_{\min} și A''_{\min} . De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ pentru care valoarea lui α este maximă, corespunde cazului $\cos \widehat{I_aON_a} = -1$, ceea ce înseamnă că punctele I_a, O, N_a sunt coliniare, iar O este situat între I_a și N_a . În Figura 2.4 acest triunghi este notat cu $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Utilizând dreapta lui Euler rezultă că triunghiul $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$ este isoscel. În concordanța cu teorema de închidere exterioară a lui Poncelet, triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R, r_a)$ sunt "situate" între aceste două cazuri extreme.

Observația 617 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) Din Teorema 614 rezultă o cale naturală de construcție a unui triunghi ABC în care se dau centrul cercului înscris I_a , centrul cercului circumscris O și punctul lui Nagel adjunct N_a . Ținând cont de faptul că punctele I_a, G, N_a sunt coliniare, găsim centrul de greutate G pe segmentul I_aN_a astfel încât $I_aG = \frac{1}{3}I_aN_a$. Apoi, utilizând faptul că punctele O, G, H sunt coliniare, determinăm ortocentrul H pe raza (OG astfel încât $OH = 3OG$). Am redus astfel construcția cerută la faimoasa problemă a lui Euler de construcție a unui triunghi în care știm I, O și H .

Observația 618 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) Din Teorema 614 apare întrebarea firească: care este expresia lui α în funcție de p, R, r_a ? Pentru a răspunde la această întrebare vom arăta mai întâi că:

$$ab + bc + ca = \frac{s^6 + r_a(4R + 3r_a)s^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)s^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(s^2 + r_a^2)^2}$$

Deoarece $\tan \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p}$, putem scrie

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{\tan^2 \frac{A}{2} + 1} = \frac{2 \frac{r_a}{p}}{\frac{r_a^2}{p^2} + 1} = \frac{2r_a p}{r_a^2 + p^2}.$$

și de aici

$$a = 2R \cdot \sin A = \frac{4r_a p}{r_a^2 + p^2}.$$

Dacă K este aria triunghiului ABC , din $\frac{abc}{4R} = K = (p - a)r_a$, obținem

$$\begin{aligned} bc &= \frac{4(p - a)Rr_a}{a} = 4Rr_a \cdot \left(\frac{p}{a} - 1\right) \\ &= 4Rr_a \cdot \frac{r_a^2 + p^2 - 4Rr_a}{4Rr_a} = r_a^2 + p^2 - 4Rr_a. \end{aligned}$$

Combinând aceste rezultate rezultă:

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= a(b + c) + bc = a(2p - a) + bc \\ &= \frac{4r_a p}{r_a^2 + p^2} \cdot \left(2p - \frac{4r_a s}{r_a^2 + s^2}\right) + r_a^2 + p^2 - 4Rr_a \\ &= \frac{p^6 + r_a(4R + 3r_a)p^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)p^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(p^2 + r_a^2)^2}, \end{aligned}$$

iar de aici obținem:

$$\begin{aligned}
 4\alpha &= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\
 &= 4p^2 - 2 \cdot \frac{p^6 + r_a(4R + 3r_a)p^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)p^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(p^2 + r_a^2)^2} \\
 &= \frac{2[p^6 - r_a(4R - r_a)p^4 + r_a^2(16R^2 - r_a^2)p^2 - r_a^5(r_a - 4R)]}{(p^2 + r_a^2)^2}. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Formula (2.21) ne dă o expresie complicată a lui α în funcție de p, R, r_a . Din $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, găsim $p^2 = 2\alpha + 4Rr + r^2$, de unde:

$$\begin{aligned}
 \cos \widehat{ION} &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - p^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\
 &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\alpha - 4Rr - r^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\
 &= \frac{R^2 + 3Rr - r^2 - \alpha}{(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Teorema 619 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) În orice triunghi având semiperimetrul p următoarele inegalități au loc:

$$-2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \leq p^2 - (2R^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr_a - 2r_a^2) \leq 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}. \tag{2.23}$$

Demonstrație. Deoarece $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$, din relația (2.22) rezultă concluzia. Expresii similare se pot obține pentru r_b și r_c . □

Observația 620 Utilizând faptul că $r < r_a$ și inegalitatea din dreapta a relației (2.23) obținem

$$\begin{aligned}
 p^2 &\leq 2R^2 + r^2 + 4Rr - 6Rr_a - 2r_a^2 + 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \\
 &< 2R^2 + r_a^2 + 4Rr_a - 6Rr_a - 2r_a^2 + 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \\
 &= 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}
 \end{aligned}$$

sau

$$p^2 < 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}. \tag{2.24}$$

Teorema 621 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) În orice triunghi având semiperimetrul p următoarele inegalități au loc:

$$p^2 < \min\{4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2, 4R^2 + 4Rr_b + 3r_b^2, 4R^2 + 4Rr_c + 3r_c^2\}.$$

Demonstrație. Utilizând relația (2.24) putem scrie

$$\begin{aligned}
 p^2 &< 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \\
 &< 2R^2 - 2Rr_a - r_a^2 + 2(R + 2r_a)(R + r_a) \\
 &= 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2.
 \end{aligned}$$

Expresii similare se pot obține pentru r_b și r_c . □

Consecința 622 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) În orice triunghi următoarele inegalități au loc:

$$a^2 + b^2 + c^2 < \min\{8R^2 + 4r_a^2, 8R^2 + 4r_b^2, 8R^2 + 4r_c^2\}.$$

Demonstrație. Din Teorema 615 obținem

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \\ &< R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)(R + r_a) = 2R^2 + r_a^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. Expresii similare se pot obține pentru r_b și r_c . □

Teorema 623 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$p^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_a)r_a$$

Demonstrație. Avem

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2 = (2R + r_a)^2 + 2r_a^2 \leq 2\sqrt{(2R + r_a)^2 \cdot 2r_a^2},$$

de unde rezultă concluzia. □

Observația 624 Analog se obțin inegalitățile: i) $p^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_b)r_b$ și ii) $p^2 \leq 2\sqrt{2}(2R + r_c)r_c$.

Teorema 625 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea:

$$p^2 \leq 2\sqrt{3}R(R + 2r_a).$$

Demonstrație. Avem

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr_a + 3r_a^2 \leq 4R^2 + 4Rr_a + 4r_a^2 = 3R^2 + (R + 2r_a)^2,$$

de unde

$$p^2 \leq 3R^2 + (R + 2r_a)^2 \leq 2\sqrt{3R^2 \cdot (R + 2r_a)^2} = 2\sqrt{3}(R^2 + 2Rr_a).$$

□

Analog se obțin inegalitățile: $p^2 \leq 2\sqrt{3}R(R + 2r_b)$ și $p^2 \leq 2\sqrt{3}R(R + 2r_c)$.

Observația 626 Deoarece $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, inegalitatea din teorema precedentă poate fi rescrisă astfel: $p^2 \leq 2\sqrt{3} \cdot OI_a^2$ sau $p \leq \sqrt[4]{12} \cdot OI_a$.

Teorema 627 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) În orice triunghi este adevărată inegalitatea: $p \leq 2 \cdot OI_a$.

Demonstrație. Avem $p \leq \sqrt[4]{12}OI_a \leq 2OI_a$. □

Teorema 628 (Andrica, D., Barbu, C. [8]) *În orice triunghi este adevărată inegalitatea:*

$$p^2 \leq \min\{12Rr_a, 12Rr_b, 12Rr_c\}.$$

Demonstrație. Avem

$$p^2 \leq 4(R^2 + Rr_a + r_a^2) \leq 12\sqrt[3]{R^2 \cdot Rr_a \cdot r_a^2} = 12Rr_a$$

sau $p \leq 2\sqrt{3Rr_a}$. □

Triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R, r)$ având aceeași rază R și aceeași rază r sunt "situate" între cele două triunghiuri extreme $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$ și $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$ determinate de p_{\min} și p_{\max} . Aceste triunghiuri sunt isoscele în raport de vârfurile A_{\min} și A_{\max} . Inegalitatea lui Blundon ne dă intervalul exact în care se "mișcă" p pentru toate triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r)$. Avem

$$p_{\min}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \tag{2.25}$$

și

$$p_{\max}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}. \tag{2.26}$$

Triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ cu semiperimetrul minim, corespunde cazului $\widehat{ION} =$

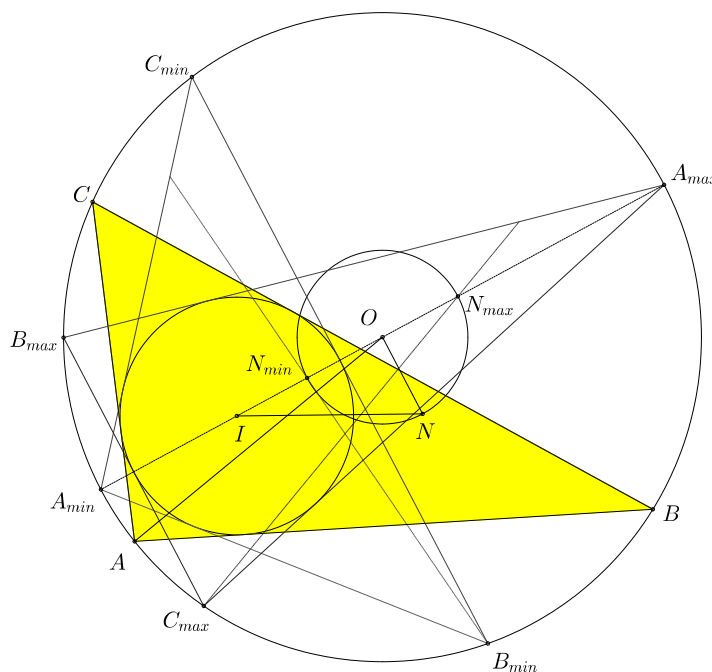


Figura 2.5: Configurația lui Blundon și punctul lui Nagel N

1, ceea ce înseamnă că punctele I, O, N sunt coliniare, iar punctele I și N aparțin aceleiași raze având originea în O . Deoarece punctele O, G, H sunt coliniare, aparținând dreptei lui Euler a triunghiului, rezultă că punctele O, I, G sunt coliniare, deci în acest

caz triunghiul ABC este isoscel. De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ cu semi-perimetrul maxim, corespunde cazului $\widehat{ION} = -1$, ceea ce înseamnă că punctele I, O, N sunt coliniare, iar O este situat între I și N . Utilizând dreapta lui Euler rezultă că triunghiul ABC este isoscel.

Vom numi configurația lui Blundon, imaginea prezentată în Figura 2.5.

Teorema 629 (Andrica, D., Barbu, C., Pișcoran, L., [11]) Familia $\mathcal{T}(R, r)$ conține numai două triunghiuri isoscele, și anume: $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$ și $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$.

Demonstrație. Triunghiul ABC în $\mathcal{T}(R, r)$ este isoscel cu $AB = AC$ dacă și numai dacă OI este perpendiculară pe BC . Deoarece $B_{\min}C_{\min}$ și $B_{\max}C_{\max}$ sunt perpendiculare pe OI , de unde rezultă concluzia. \square

Observația 630 Deoarece $OD \geq 0$, urmează că $OI \geq r$, deci

$$R \geq r(1 + \sqrt{2}),$$

sau

$$r \leq (\sqrt{2} - 1)R.$$

Aceasta este o scurtă demonstrație geometrică a inegalității lui A.Emmerich [84], adevărată pentru orice triunghi obtuzunghic.

Dăm în continuare câteva consecințe ale inegalităților lui Blundon.

Lema 631 (Andrica, D., Barbu, C., Pișcoran, L., [11]) Fie P un punct situat în interiorul cercului $\mathcal{C}(O; R)$. Dacă $P \neq O$, atunci funcția $A \mapsto PA$ este strict crescătoare pe semicercul $\widehat{M_0M_1}$, unde M_0, M_1 sunt punctele de intersecție dintre OP cu cercul \mathcal{C} astfel încât $P \in (OM_0)$.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că O este originea unui sistem cartezian xOy cu P situat pe axa pozitivă. În acest caz avem $P(x_0, 0)$, $x_0 > 0$, $A(R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, \pi]$ și

$$PA^2 = (R \cos t - x_0)^2 + (R \sin t)^2 = R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos t.$$

Deoarece funcția cosinus este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$ și $x_0 > 0$, obținem că funcția $A \mapsto PA^2$ este strict crescătoare, de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 632 (Andrica, D., Barbu, C., Pișcoran, L., [11]) În configurația Blundon, funcția $A \mapsto \angle BAC$ este strict crescătoare pe semicercul $\widehat{A_{\max}A_{\min}}$.

Demonstrație. Avem $\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{IA}$. Din Lema 631, pentru $P = I$, funcția $A \mapsto IA$ este strict descrescătoare pe semicercul $\widehat{A_{\max}A_{\min}}$. Deci pentru două puncte $A_1, A_2 \in \widehat{A_{\max}A_{\min}}$, avem $IA_1 > IA_2$, sau $\sin \frac{A_1}{2} = \frac{r}{IA_1} < \frac{r}{IA_2} = \sin \frac{A_2}{2}$, de unde $\angle B_1A_1C_1 < \angle B_2A_2C_2$ (Figura 2.6). \square

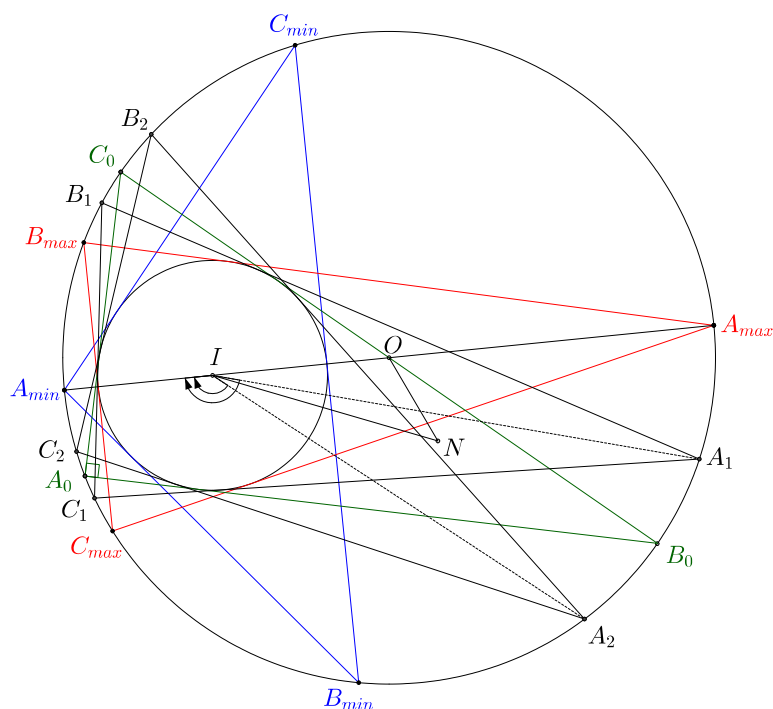


Figura 2.6: Distribuția triunghiurilor în familia $\mathcal{T}(R, r)$

Din teorema sinusurilor, pentru triunghiurile familiei $\mathcal{T}(R, r)$, avem $a = 2R \sin A$. Din relația $r = (p - a) \tan \frac{A}{2}$, rezultă:

$$p = \frac{r + a \tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2}}.$$

Pe de altă parte, $bc = \frac{4rRp}{a}$ și $b + c = 2p - a$, deci b, c sunt rădăcinile ecuației

$$x^2 - (2p - a)x + \frac{4rRp}{a} = 0,$$

adică

$$\frac{2p - a \pm \sqrt{4p^2 - 4ap + a^2 - \frac{16rRp}{a}}}{2}.$$

Rezultatele de mai sus arată că familia $\mathcal{T}(R, r)$ este perfect determinată până la o congruență de unghi A . În acest mod obținem:

Consecința 633 Distribuția triunghiurilor în familia $\mathcal{T}(R, r)$ este în perechi $(ABC, A'B'C')$ astfel încât triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente și simetrice față de diametrul OI .

Consecința 634 În configurația Blundon, funcția $A \mapsto BC$ este strict crescătoare pe arcul $\widehat{A_{\max}A_0}$ și strict descrescătoare pe arcul $\widehat{A_0A_{\min}}$, unde A_0 este pe semicercul $\widehat{A_{\max}A_{\min}}$ astfel încât $\angle B_0A_0C_0 = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 635 (Andrica, D., Barbu, C., Pișcoran, L., [11]) (Forma tare a inegalităților lui Blundon) În configurația Blundon, funcția $A \mapsto p(A)$ este strict descrescătoare pe arcul $A_{\max} \widehat{B_{\min}}$, unde $p(A)$ reprezintă semiperimetrul triunghiului ABC , adică

$$p(A_{\max}) \geq p(A) \geq p(B_{\min}).$$

Demonstrație. Evident, $p(A_{\max}) = p_{\max}$ (semiperimetrul triunghiului $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$) și $p(A_{\min}) = p_{\min}$ (semiperimetrul triunghiului $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$). Când A se mișcă pe arcul $A_{\max} \widehat{B_{\min}}$, de la A_{\max} la B_{\min} , unghiul $\angle ION$ descrește de la π la 0, adică funcția $A \mapsto \angle ION$ este strict descrescătoare. Presupunând că avem ordinea $A_{\max}, A_1, A_2, B_{\min}$, din relația (2.26) obținem $s^2(A_1) > s^2(A_2)$, de unde rezultă concluzia. \square

Fie P un punct în planul triunghiului ABC , iar DEF triunghiul cevian corespunzător punctului P în raport cu triunghiul ABC . Dacă P are coordonatele baricentrice $t_1 : t_2 : t_3$, atunci coordonatele baricentrice ale vârfurilor triunghiului DEF sunt: $D(0 : t_2 : t_3), E(t_1 : 0 : t_3), F(t_1 : t_2 : 0)$. Coordonatele baricentrice au fost introduse de către Möbius în 1927. Enumerăm câteva lucrări despre coordonatele baricentrice ale lui C. Bradley [36], C. Coandă [46], C. Coșniță [50], C. Kimberling [72], O. Bottema [33], J. Scott [106] și P. Yiu [122].

C. Barbu și N. Minculete [17] au introdus noțiunea de *cevină de rang* (k, l, m) astfel: Dacă D este un punct pe latura (BC) a unui triunghi neisoscel ABC , astfel încât:

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{p-c}{p-b}\right)^l \cdot \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^m$$

$k, l, m \in \mathbb{R}$, atunci AD o vom numi *cevină de rang* (k, l, m) , iar dacă $D \in BC \setminus [BC]$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{p-c}{p-b}\right)^l \cdot \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^m$, $k, l, m \in \mathbb{R}^*$, atunci AD o vom numi *excevină de rang* (k, l, m)

C. Barbu și N. Minculete [17] au arătat că cevienele de rang (k, l, m) sunt concurente într-un punct $I(k, l, m)$ numit *punct cevină de rang* (k, l, m) , iar coordonatele baricentrice ale lui $I(k, l, m)$ sunt: $a^k(p-a)^l(b+c)^m : b^k(p-b)^l(a+c) : c^k(p-c)^l(a+b)^m$.

Observația 636 Dacă M este un punct din planul unui triunghi ABC , atunci următoarea egalitate are loc:

$$(t_1 + t_2 + t_3)\overrightarrow{MP} = t_1\overrightarrow{MA} + t_2\overrightarrow{MB} + t_3\overrightarrow{MC}. \tag{2.27}$$

Pentru cazul particular $M \equiv P$, egalitatea (2.27) devine

$$t_1\overrightarrow{PA} + t_2\overrightarrow{PB} + t_3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Teorema 637 Dacă M este un punct din planul unui triunghi ABC , atunci următoarea egalitate are loc:

$$(t_1+t_2+t_3)^2 MP^2 = (t_1MA^2+t_2MB^2+t_3MC^2)(t_1+t_2+t_3) - (t_2t_3a^2+t_3t_1b^2+t_1t_2c^2). \tag{2.28}$$

Demonstrație. Din relația (2.27) și produsul scalar a doi vectori rezultă:

$$(t_1 + t_2 + t_3)^2 MP^2 = t_1^2 MA^2 + t_2^2 MB^2 + t_3^2 MC^2 + \\ 2t_1 t_2 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2t_1 t_3 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 2t_2 t_3 \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

sau

$$(t_1 + t_2 + t_3)^2 MP^2 = t_1^2 MA^2 + t_2^2 MB^2 + t_3^2 MC^2 + \\ t_1 t_2 (MA^2 + MB^2 - AB^2) + t_1 t_3 (MA^2 + MC^2 - AC^2) + t_2 t_3 (MB^2 + MC^2 - BC^2),$$

de unde,

$$(t_1 + t_2 + t_3)^2 MP^2 = (t_1 MA^2 + t_2 MB^2 + t_3 MC^2)(t_1 + t_2 + t_3) - (t_2 t_3 a^2 + t_3 t_1 b^2 + t_1 t_2 c^2),$$

unde am folosit faptul că

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2MA \cdot MB \cos \angle AMB = 2MA \cdot MB \cdot \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2MA \cdot MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2.$$

□

Observația 638 (Barbu, C., Minculete, N.[17]) Dacă t_1, t_2, t_3 și $t_1 + t_2 + t_3$ sunt nenule, atunci (2.28) poate fi rescrisă astfel:

$$MP^2 = \frac{t_1 MA^2 + t_2 MB^2 + t_3 MC^2}{t_1 + t_2 + t_3} - \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right). \quad (2.29)$$

Consecința 639 (Barbu, C., Minculete, N.[17]) Următoarea egalitate are loc:

$$R^2 - OP^2 = \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right), \quad (2.30)$$

cu $t_1, t_2, t_3 > 0$.

Demonstrație. Egalitatea se obține din (2.29) pentru $M \equiv O$. □

Teorema 640 (Barbu, C., Minculete, N.[17]) În orice triunghi ABC având semi-perimetrul p , următoarea egalitate are loc:

$$R^2 - OP^2 \geq \frac{4p^2 t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^3},$$

cu $t_1, t_2, t_3 > 0$.

Demonstrație. Din inegalitatea lui Bergström - dacă $x_k \in \mathbb{R}$ și $a_k > 0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, atunci

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n},$$

cu egalitate dacă și numai dacă

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n},$$

și relația (2.30) rezultă:

$$R^2 - OP^2 \geq \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Egalitatea are loc pentru $P \equiv I$ (unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC). □

C. Coșniță [50] a formulat următoarea teoremă: *dacă punctele P și Q au coordonatele baricentrice $t_1 : t_2 : t_3$, respectiv $u_1 : u_2 : u_3$, în raport cu un triunghi ABC , atunci*

$$PQ^2 = -\alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right), \tag{2.31}$$

unde

$$\alpha = \frac{u_1}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_1}{t_1 + t_2 + t_3}; \beta = \frac{u_2}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3}; \gamma = \frac{u_3}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Teorema 641 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) *Dacă punctele P și Q au coordonatele baricentrice $t_1 : t_2 : t_3$, respectiv $u_1 : u_2 : u_3$, în raport cu un triunghi ABC , atunci*

$$\cos \widehat{POQ} = \frac{2R^2 - \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right) - \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3} \right) + \alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right)}{2\sqrt{\left[R^2 - \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right) \right] \cdot \left[R^2 - \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3} \right) \right]}} \tag{2.32}$$

cu

$$\alpha = \frac{u_1}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_1}{t_1 + t_2 + t_3}; \beta = \frac{u_2}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3}; \gamma = \frac{u_3}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

iar t_i și u_i , $i = \overline{1, 3}$, sunt nenule.

Demonstrație. Din (2.29) avem:

$$OP^2 = R^2 - \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right)$$

și

$$OQ^2 = R^2 - \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3} \right)$$

Aplicând teorema cosinusului în triunghiul POQ avem

$$\cos \widehat{POQ} = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2OP \cdot OQ}.$$

Din relațiile precedente rezultă concluzia. □

Teorema 642 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) *Următoarele inegalități au loc:*

$$\begin{aligned}
 & -2\sqrt{\left[R^2 - \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right)\right]} \cdot \left[R^2 - \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3}\right)\right] \leq \\
 & \alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}\right) + 2R^2 - \left[\frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right) + \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3}\right)\right] \leq \\
 & 2\sqrt{\left[R^2 - \frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3}\right)\right]} \cdot \left[R^2 - \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3}\right)\right]
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

cu

$$\alpha = \frac{u_1}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_1}{t_1 + t_2 + t_3}; \beta = \frac{u_2}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3}; \gamma = \frac{u_3}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{t_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

iar t_i și u_i , $i = \overline{1, 3}$, sunt nenule.

Demonstrație. Inegalitățile sunt consecința faptului că $\widehat{POQ} \in [-1, 1]$. Egalitatea din dreapta are loc dacă și numai dacă $\widehat{POQ} = 0$, adică punctele O, P, Q sunt coliniare în ordinea O, P, Q sau O, Q, P . Egalitatea din stânga are loc dacă și numai dacă $\widehat{POQ} = \pi$, adică punctele O, P, Q sunt coliniare în ordinea P, O, Q sau Q, O, P . \square

Consecința 643 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) *Condiția necesară și suficientă pentru a exista un triunghi având elementele s, R și r este:*

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

(Inegalitățile lui Blundon)

Demonstrație. Coordonatele baricentrice ale punctelor I și N sunt $(t_1, t_2, t_3) = (a, b, c)$, respectiv $(u_1, u_2, u_3) = (p - a, p - b, p - c)$. Avem:

$$u_1 + u_2 + u_3 = p - a + p - b + p - c = p, \quad u_1 u_2 u_3 = (p - a)(p - b)(p - c) = r^2 p, \tag{2.34}$$

și

$$t_1 + t_2 + t_3 = 2p, \quad t_1 t_2 t_3 = abc = 4Rrp. \tag{2.35}$$

Din relația (2.33) rezultă

$$\alpha = \frac{p - a}{p} - \frac{a}{2p} = \frac{2p - 3a}{2p}, \quad \beta = \frac{2p - 3b}{2p}, \quad \gamma = \frac{2p - 3c}{2p},$$

iar de aici

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma}\right) &= \sum \beta\gamma a^2 = \sum \left(1 - \frac{3b}{2p}\right) \left(1 - \frac{3c}{2p}\right) a^2 \\
 &= \sum a^2 - \frac{3}{2p} \sum [a^2(a + b + c) - a^3] + \frac{9abc}{4p^2} \sum a \\
 &= \sum a^2 - 3 \sum a^2 + \frac{3}{2p} \sum a^3 + \frac{9abc}{2p} \\
 &= -2(2p^2 - 2r^2 - 8Rr) + 3(p^2 - 3r^2 - 6Rr) + 18Rr
 \end{aligned}$$

sau

$$\alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right) = -p^2 - 5r^2 + 16Rr.$$

Cum

$$\frac{t_1 t_2 t_3}{(t_1 + t_2 + t_3)^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right) = \frac{4Rrp}{4p^2} \cdot 2p = 2Rr$$

și

$$\begin{aligned} \frac{u_1 u_2 u_3}{(u_1 + u_2 + u_3)^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3} \right) &= \frac{r^2 p}{p^2} \left(\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} \right) \\ &= \frac{r^2}{p} \cdot \frac{\sum a^2 (p-b)(p-c)}{r^2 p} \\ &= \frac{1}{p^2} \{ p^2 \sum a^2 - p \sum [a^2(a+b+c) - a^3] + abc \sum a \} \\ &= \frac{1}{p^2} (p \sum a^3 - p^2 \sum a^2 + 8Rrp^2) \\ &= \frac{1}{p^2} [2p^2(p^2 - 3r^2 - 6Rr) - p^2(2p^2 - 2r^2 - 8Rr) + 8Rrp^2] \\ &= 4Rr - 4r^2. \end{aligned}$$

Utilizând teorema precedentă rezultă concluzia. □

Vom da în continuare, utilizând coordonatele baricentrice, o nouă demonstrație teoremei 614.

Teorema 644 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) *Următoarea relație este adevărată:*

$$\cos \widehat{I_a O N_a} = \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}}, \tag{2.36}$$

unde $\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$.

Demonstrație. Coordonatele baricentrice ale centrului cercului A -exînscriș I_a sunt $(t_1, t_2, t_3) = (-a, b, c)$, iar cele ale punctului lui Nagel adjunct N_a sunt $(u_1, u_2, u_3) = (p, c - p, b - p)$. Avem

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = p - a, \quad u_1 u_2 u_3 = p(p - b)(p - c)$$

și

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 2(p - a), \quad t_1 t_2 t_3 = -abc = -4Rrp.$$

Obținem

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2p + a}{2(p - a)} = 1 + \frac{3a}{2(p - a)}, \\ \beta &= \frac{2c - 2p - b}{2(p - a)} = 1 - \frac{3b}{2(p - a)}, \\ \gamma &= \frac{2b - 2p - c}{2(p - a)} = 1 - \frac{3c}{2(p - a)}. \end{aligned}$$

Urmează că

$$\frac{t_1 t_2 t_3}{t^2} \left(\frac{a^2}{t_1} + \frac{b^2}{t_2} + \frac{c^2}{t_3} \right) = \frac{-4Rrp}{4(p-a)^2} \cdot 2(p-a) = -2Rr_a, \quad (2.37)$$

și

$$\begin{aligned} \frac{u_1 u_2 u_3}{u^2} \left(\frac{a^2}{u_1} + \frac{b^2}{u_2} + \frac{c^2}{u_3} \right) &= \frac{p(p-c)(p-b)}{(p-a)^2} \left(\frac{a^2}{p} - \frac{b^2}{p-c} - \frac{c^2}{p-b} \right) = \\ &= - \left(-a^2 \cdot \frac{p-b}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-a} + b^2 \cdot \frac{p}{p-a} \cdot \frac{p-b}{p-a} + c^2 \cdot \frac{p}{p-a} \cdot \frac{p-c}{p-a} \right) = \\ &= - \left(-a^2 \cdot \frac{r_a}{r_b} \cdot \frac{r_a}{r_c} + b^2 \cdot \frac{r_a}{r} \cdot \frac{r_a}{r_b} + c^2 \cdot \frac{r_a}{r} \cdot \frac{r_a}{r_c} \right) = \\ &= -r_a^2 \left(\frac{-a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r r_b} + \frac{c^2}{r r_c} \right) = -r_a^2 \left(\frac{4R}{r_a} + 4 \right) = -4Rr_a - 4r_a^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

unde am utilizat relația $\frac{-a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r r_b} + \frac{c^2}{r r_c} = \frac{4R}{r_a} + 4$ ([12]). Acum, calculăm expresia:

$$\begin{aligned} E &= \alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \\ &= a^2\beta\gamma + \frac{a^2}{2} + b^2\alpha\gamma + \frac{b^2}{2} + c^2\alpha\beta + \frac{c^2}{2} = \\ &= a^2 \left[1 - \frac{3(b+c)}{2(p-a)} + \frac{9bc}{4(p-a)^2} \right] + \frac{a^2}{2} + \\ &= b^2 \left[1 + \frac{3(a-c)}{2(p-a)} - \frac{9ca}{4(p-a)^2} \right] + \frac{b^2}{2} + \\ &= c^2 \left[1 + \frac{3(a-b)}{2(p-a)} - \frac{9ab}{4(p-a)^2} \right] + \frac{c^2}{2}, \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} E &= a^2 \left[\frac{-3p}{2(p-a)} + \frac{9bc}{4(p-a)^2} \right] + b^2 \left[\frac{3(p-c)}{2(p-a)} - \frac{9ca}{4(p-a)^2} \right] + c^2 \left[\frac{3(p-b)}{2(p-a)} - \frac{9ab}{4(p-a)^2} \right] = \\ &= \frac{3}{2(p-a)} [-a^2 p + b^2(p-c) + c^2(p-b)] + \frac{9abc}{4(p-a)^2} (a-b-c) = \\ &= \frac{3}{2(p-a)} [p(-a^2 + b^2 + c^2) - bc(b+c)] - 18Rr_a. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Avem:

$$\begin{aligned} p(-a^2 + b^2 + c^2) - bc(b+c) &= 2pbc \cos A - 2bcp + abc = \\ &= 2pbc(\cos A - 1) + abc = abc - 4pbc \sin^2 \frac{A}{2} = \\ &= abc - 4p(p-b)(p-c) = abc - 4Kr_a = 4K(R - r_a), \end{aligned} \quad (2.40)$$

unde cu K am notat aria triunghiului ABC . Din relațiile (2.39) și (2.40) găsim

$$E = \frac{3}{2(p-a)} \cdot 4K(R-r_a) - 18Rr_a = 6r_a(R-r_a) - 18Rr_a = -12Rr_a - 6r_a^2,$$

de unde

$$\alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right) = -12Rr_a - 6r_a^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \tag{2.41}$$

Utilizând relațiile (2.37), (2.38) și (2.41) în (2.32) obținem concluzia. □

Observația 645 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) Fie I_1, I_2 două puncte ceviane având coordonatele baricentrice:

$$I_i[a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i} : b^{k_i}(p-b)^{l_i}(a+c)^{m_i} : c^{k_i}(p-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}], \quad i = 1, 2.$$

Notăm cu: $t_i^1 = a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}$, $t_i^2 = b^{k_i}(p-b)^{l_i}(a+c)^{m_i}$, $t_i^3 = c^{k_i}(p-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}$, $i = 1, 2$. Din relația (2.32) obținem:

$$\cos \widehat{I_1 O I_2} = \frac{2R^2 - \frac{t_1^1 t_1^2 t_1^3}{(T_1)^2} \left(\frac{a^2}{t_1^1} + \frac{b^2}{t_1^2} + \frac{c^2}{t_1^3} \right) - \frac{t_2^1 t_2^2 t_2^3}{(T_2)^2} \left(\frac{a^2}{t_2^1} + \frac{b^2}{t_2^2} + \frac{c^2}{t_2^3} \right) + \alpha\beta\gamma \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right)}{2\sqrt{\left[R^2 - \frac{t_1^1 t_1^2 t_1^3}{(T_1)^2} \left(\frac{a^2}{t_1^1} + \frac{b^2}{t_1^2} + \frac{c^2}{t_1^3} \right) \right] \cdot \left[R^2 - \frac{t_2^1 t_2^2 t_2^3}{(T_2)^2} \left(\frac{a^2}{t_2^1} + \frac{b^2}{t_2^2} + \frac{c^2}{t_2^3} \right) \right]}}, \tag{2.42}$$

unde $T_1 = t_1^1 + t_1^2 + t_1^3$, $T_2 = t_2^1 + t_2^2 + t_2^3$, iar pentru $i = 1, 2$, avem:

$$\frac{t_i^1 t_i^2 t_i^3}{(T_i)^2} \left(\frac{a^2}{t_i^1} + \frac{b^2}{t_i^2} + \frac{c^2}{t_i^3} \right) = \frac{\prod_{cyc} a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}}{\sum_{cyc} a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}} \sum_{cyc} \frac{a^2}{a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}},$$

și

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a^{k_1}(p-a)^{l_1}(b+c)^{m_1}}{\sum_{cyc} a^{k_1}(p-a)^{l_1}(b+c)^{m_1}} - \frac{a^{k_2}(p-a)^{l_2}(b+c)^{m_2}}{\sum_{cyc} a^{k_2}(p-a)^{l_2}(b+c)^{m_2}}, \\ \beta &= \frac{b^{k_1}(p-b)^{l_1}(a+c)^{m_1}}{\sum_{cyc} a^{k_1}(p-a)^{l_1}(b+c)^{m_1}} - \frac{b^{k_2}(p-b)^{l_2}(a+c)^{m_2}}{\sum_{cyc} a^{k_2}(p-a)^{l_2}(b+c)^{m_2}}, \\ \gamma &= \frac{c^{k_1}(p-c)^{l_1}(a+b)^{m_1}}{\sum_{cyc} a^{k_1}(p-a)^{l_1}(b+c)^{m_1}} - \frac{c^{k_2}(p-c)^{l_2}(a+b)^{m_2}}{\sum_{cyc} a^{k_2}(p-a)^{l_2}(b+c)^{m_2}}. \end{aligned}$$

Consecința 646 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) Dacă I_1, I_2 sunt puncte ceviane de ordine k_1 , respectiv k_2 , atunci (2.42) devine:

$$\cos \widehat{I_1 O I_2} = \frac{2R^2 - (abc)^{k_1} \frac{S_{2-k_1}}{(S_{k_1})^2} - (abc)^{k_2} \frac{S_{2-k_2}}{(S_{k_2})^2} + \sum_{cyc} \left(\frac{b^{k_1}}{S_{k_1}} - \frac{b^{k_2}}{S_{k_2}} \right) \left(\frac{c^{k_1}}{S_{k_1}} - \frac{c^{k_2}}{S_{k_2}} \right) a^2}{2\sqrt{\left[R^2 - (abc)^{k_1} \frac{S_{2-k_1}}{(S_{k_1})^2} \right] \left[R^2 - (abc)^{k_2} \frac{S_{2-k_2}}{(S_{k_2})^2} \right]}}, \tag{2.43}$$

unde $S_l = a^l + b^l + c^l$.

Consecința 647 Pentru $k_1 = 0$ și $k_2 = 1$ obținem coordonatele baricentrice ale centrului de greutate $G(1; 1; 1)$, respectiv ale centrului cercului înscris $I(a; b; c)$. Formula (2.43) devine:

$$\cos \widehat{GOI} = \frac{6R^2 - p^2 - r^2 + 2Rr}{2\sqrt{9R^2 - 2p^2 + 2r^2 + 8Rr} \cdot \sqrt{R^2 - 2Rr}}, \quad (2.44)$$

unde $abc = 4pRr$, $S_0 = 3$, $S_1 = 2p$, $S_2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.

Consecința 648 Pentru $k_2 = 2$ obținem coordonatele baricentrice ale punctului lui Lemoine $L(a^2; b^2; c^2)$ și atunci

$$\cos \widehat{GOL} = \frac{6R^2 S_2 - S_2^2 + S_4}{2\sqrt{9R^2 - S_2} \cdot \sqrt{R^2 S_2^2 - 48(Rrp)^2}}, \quad (2.45)$$

unde $S_4 = S_2^2 - 2[(p^2 + r^2 + 4Rr)^2 - 16Rrp^2]$, iar

$$\cos \widehat{IOL} = \frac{RS_2 + rS_2 - 4rp^2}{2\sqrt{R^2 - 2Rr} \cdot \sqrt{S_2^2 - 48r^2 p^2}}. \quad (2.46)$$

Fiecare dintre relațiile (2.44), (2.45), (2.46) generează inegalități tip Blundon, dar acestea nu au interpretări geometrice frumoase.

Observația 649 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) Fie I_1, I_2, I_3 trei puncte ceviene de rang (k, l, m) având coordonatele baricentrice:

$$I_i[a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i} : b^{k_i}(p-b)^{l_i}(a+c)^{m_i} : c^{k_i}(p-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}], \quad i = \overline{1, 3}.$$

Pentru $i = \overline{1, 3}$, $a^{k_i}(p-a)^{l_i}(b+c)^{m_i}$, $b^{k_i}(p-b)^{l_i}(a+c)^{m_i}$, $c^{k_i}(p-c)^{l_i}(a+b)^{m_i}$ notăm cu t_i^1, t_i^2 , respectiv t_i^3 . Fie

$$\alpha_{ij} = \frac{t_j^1}{t_j^1 + t_j^2 + t_j^3} - \frac{t_i^1}{t_i^1 + t_i^2 + t_i^3},$$

$$\beta_{ij} = \frac{t_j^2}{t_j^1 + t_j^2 + t_j^3} - \frac{t_i^2}{t_i^1 + t_i^2 + t_i^3}$$

și

$$\gamma_{ij} = \frac{t_j^3}{t_j^1 + t_j^2 + t_j^3} - \frac{t_i^3}{t_i^1 + t_i^2 + t_i^3}$$

pentru $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Utilizând relația (2.31) obținem:

$$I_i I_j^2 = -\alpha_{ij} \cdot \beta_{ij} \cdot \gamma_{ij} \cdot \left(\frac{a^2}{\alpha_{ij}} + \frac{b^2}{\beta_{ij}} + \frac{c^2}{\gamma_{ij}} \right)$$

pentru $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Din teorema cosinusului în triunghiul $I_1 I_2 I_3$ obținem

$$\cos \widehat{I_1 I_2 I_3} = \frac{I_1 I_2^2 + I_2 I_3^2 - I_3 I_1^2}{2I_1 I_2 \cdot I_2 I_3} =$$

$$\frac{-a^2(\beta_{12}\gamma_{12} + \beta_{23}\gamma_{23} - \beta_{31}\gamma_{31}) - b^2(\gamma_{12}\alpha_{12} + \gamma_{23}\alpha_{23} - \gamma_{31}\alpha_{31}) + c^2(\alpha_{12}\beta_{12} + \alpha_{23}\beta_{23} - \alpha_{31}\beta_{31})}{2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2 - \gamma_{12}\alpha_{12}b^2 - \alpha_{12}\beta_{12}c^2} \cdot \sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2 - \gamma_{23}\alpha_{23}b^2 - \alpha_{23}\beta_{23}c^2}}$$

Teorema 650 (Andrica, D, Barbu, C., Minculete, N.[9]) Următoarele inegalități au loc:

$$\begin{aligned}
 & -2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2-\gamma_{12}\alpha_{12}b^2-\alpha_{12}\beta_{12}c^2} \cdot \sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2-\gamma_{23}\alpha_{23}b^2-\alpha_{23}\beta_{23}c^2} \leq \\
 & -a^2(\beta_{12}\gamma_{12}+\beta_{23}\gamma_{23}-\beta_{31}\gamma_{31}) - b^2(\gamma_{12}\alpha_{12}+\gamma_{23}\alpha_{23}-\gamma_{31}\alpha_{31}) + c^2(\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{23}\beta_{23}-\alpha_{31}\beta_{31}) \leq \\
 & 2\sqrt{-\beta_{12}\gamma_{12}a^2-\gamma_{12}\alpha_{12}b^2-\alpha_{12}\beta_{12}c^2} \cdot \sqrt{-\beta_{23}\gamma_{23}a^2-\gamma_{23}\alpha_{23}b^2-\alpha_{23}\beta_{23}c^2}
 \end{aligned}$$

Demonstrație. Inegalitățile sunt consecința faptului că $\cos \widehat{I_1 I_2 I_3} \in [-1, 1]$. \square

2.2 Inegalitatea lui Euler

„Am fost un lucrător conștiincios, nu am fost superficial, am muncit până acum la bătrânețe. Spiritul meu a fost geometric, m-a fermecat varietatea și frumusețea figurii.” – Alexandru Miller²

Teorema 651 Fie R și r razele cercului circumscris, respectiv cercului înscris într-un triunghi ABC . Atunci, $R \geq 2r$.

Demonstrație. Soluția 1. Fie O și I centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC . Din egalitatea lui Euler (vezi [15]), $OI^2 = R^2 - 2Rr$, utilizând faptul evident că $OI^2 \geq 0$, rezultă concluzia. Egalitatea $R = 2r$ are loc pentru un triunghi echilateral.

Soluția 2. (Elias Lampakis, *Am Math Monthly*, 122 (9)) Fie r_a raza cercului A -exînscriș. Avem:

$$\begin{aligned}
 4rr_a &= 4 \frac{A_{[ABC]}^2}{p(p-a)} = 4(p-b)(p-c) \\
 &= (a+c-b)(a+b-c) = a^2 - (b-c)^2 \leq a^2.
 \end{aligned}$$

Analog se arată că $4rr_b \leq b^2$ și $4rr_c \leq c^2$. Atunci,

$$\begin{aligned}
 64r_a r_b r_c &\leq a^2 b^2 c^2, \\
 64r^3 A_{[ABC]}^3 &\leq 16R^2 A_{[ABC]}^2 (p-a)(p-b)(p-c), \\
 4r^4 p &\leq R^2 (p-a)(p-b)(p-c), \\
 4r^4 p^2 &\leq R^2 A_{[ABC]}^2 = R^2 p^2 r^2, \\
 4r^2 &\leq R^2,
 \end{aligned}$$

de unde rezultă concluzia. \square

²Alexandru Miller (1879-1965) – matematician român, membru al Academiei Române

2.3 Inegalitatea lui Gerretsen

„Gândirea este o pasăre a înălțimilor care, în colivia cuvintelor, izbutește doar să-și desfășoare aripile, dar nu poate zbura.” - Kahlil Gibran³

Teorema 652 (Gerretsen [63]) *Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv circumscris corespunzătoare unui triunghi ABC și p semiperimetrul triunghiului, atunci*

$$16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Demonstrație. Soluția 1. Folosind inegalitatea lui Blundon

$$p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr},$$

este suficient să demonstrăm că

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

sau

$$2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq 2R^2 - 6Rr + 4r^2,$$

de unde

$$(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq (R - 2r)(R - r).$$

Cum $R \geq 2r$, ultima inegalitate este echivalentă cu $r^2 \geq 0$, ceea ce este evident. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $R = 2r$, adică pentru un triunghi echilateral.

Soluția 2. Dacă I , H și G sunt centrul cercului înscris, ortocentrul, respectiv centrul de greutate corespunzătoare triunghiului ABC , atunci

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - \frac{(a + b + c)^2}{4}, \quad (1)$$

$$9IG^2 = \frac{(a + b + c)^2}{4} - 16Rr + 5r^2. \quad (2)$$

(vezi [13]). Din relațiile (1) și (2), deoarece $IH^2 \geq 0$ și $IG^2 \geq 0$, rezultă concluzia. Egalitatea are loc pentru un triunghi echilateral. \square

³Kahlil Gibran (1883-1931) – poet libanez

2.4 Inegalitatea lui Doucet

„Geometria reprezintă eterna sclipire în mintea lui Dumnezeu. Împărțășirea acesteia și omului reprezintă motivul pentru care omul este imaginea lui Dumnezeu.” – Johannes Kepler⁴

Teorema 653 *Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv circumscris corespunzătoare unui triunghi ABC și p semiperimetrul triunghiului, atunci*

$$4R + r \geq p\sqrt{3}.$$

Demonstrație. (Soluție - K. Soto, Peru) Din inegalitatea lui Gerretsen

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

rezultă

$$3p^2 \leq 12R^2 + 12Rr + 12r^2 \leq 16R^2 + 8Rr + r^2 \quad (1)$$

de unde rezultă concluzia. Inegalitatea

$$12R^2 + 12Rr + 12r^2 \leq 16R^2 + 8Rr + r^2$$

este echivalentă cu

$$4R^2 - 4Rr - 8r^2 \geq 0$$

sau

$$4(R - 2r)(R + r) \geq 0,$$

adică $R \geq 2r$ (Inegalitatea lui Euler). □

2.5 Inegalitatea triunghiului

„Noi venerăm Grecia antică drept leagăn al culturii, acolo lumea a asistat pentru prima oară la miracolul unui sistem logic în care pașii se succed cu o asemenea precizie încât propozițiile lui apăreau ca absolut indubitabile – am în vedere geometria lui Euclid.” – Albert Einstein⁵

Teorema 654 *În orice triunghi, suma lungimilor oricăror două laturi este mai mare decât lungimea celei de-a treia.*

Demonstrație. Arătăm că $b + c > a$. Construim punctul D pe dreapta AB astfel încât $A \in (BD)$ și $AD = b$ (Figura 2.7). Astfel, $BD = b + c$. Evident

$$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{DCA}) + m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ADC}),$$

de unde obținem $BD > BC$, adică $b + c > a$. □

⁴Johannes Kepler (1571-1630) – matematician și astronom german, considerat precursor al calculului integral

⁵Albert Einstein (1879-1955) – fizician german, profesor universitar la Berlin și Princeton, laureat al Premiului Nobel

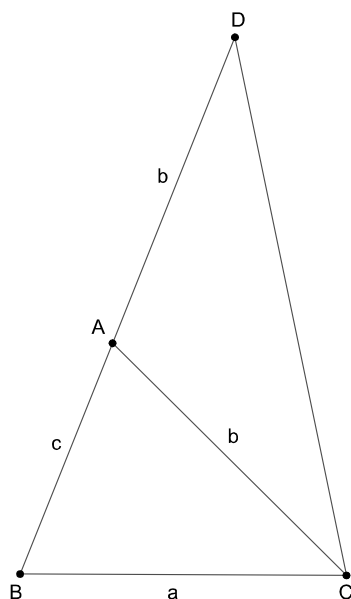


Figura 2.7: Inegalitatea triunghiului

Observația 655 *Evident avem $|b - c| < a < b + c$.*

Observația 656 *Trei numere reale pozitive sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă $a < b + c$, $b < c + a$ și $c < a + b$.*

2.6 Inegalitatea lui Mitrinović

"Geometry is knowledge of the eternally existent." - Pitagora

Teorema 657 *Dacă r este raza cercului înscris într-un triunghi ABC și p semi-perimetrul triunghiului, atunci:*

$$p \geq 3\sqrt{3}r.$$

Demonstrație. Soluția 1. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Exprimând AI în două moduri obținem:

$$p - a = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Analog obținem $p - b = r \cdot ctg \frac{B}{2}$ și $p - c = r \cdot ctg \frac{C}{2}$, de unde

$$ctg \frac{A}{2} + ctg \frac{B}{2} + ctg \frac{C}{2} = \frac{p}{r}. \quad (1)$$

Deoarece funcția ctg este convexă pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, din inegalitatea lui Jensen, rezultă:

$$ctg \frac{A}{2} + ctg \frac{B}{2} + ctg \frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia.

Soluția 2. Utilizând inegalitatea mediilor, avem:

$$2p = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{4Rrp},$$

sau

$$8p^3 \geq 27(4Rrp) \geq 27(8r^2p),$$

deoarece $R \geq 2r$. Urmează, $p \geq 3\sqrt{3}r$. □

2.7 Inegalitatea lui Leibniz

„O notație bună are o subtilitate și o sugestivitate care uneori o face să pară un profesor viu.”
- Bertrand Russel⁶

Teorema 658 *Dacă R este raza cercului circumscris a unui triunghi ABC și a, b, c lungimile laturilor triunghiului, atunci:*

$$9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Demonstrație. Din teorema lui Leibniz [15] avem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{3} + 3MG^2, \quad (1)$$

oricare ar fi M un punct din planul triunghiului ABC (G centrul de greutate al triunghiului ABC). Dacă M coincide cu O - centrul cercului circumscris triunghiului ABC - atunci relația (1) devine: $3OA^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 3OG^2$, adică

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Cum $OG^2 \geq 0$, rezultă concluzia. □

⁶Bertrand Russel (1872-1970) - matematician și logician englez

2.8 Inegalitatea lui Erdős – Mordell

„Nu poate exista un limbaj mai universal și mai simplu, mai lipsit de greșeli și de confuzii, adică mai demn de a exprima raporturile invariabile dintre realitățile naturale. Matematica este tot atât de cuprinzătoare ca însăși natura. Ea definește toate raporturile sensibile, măsoară timpul, spațiile, forțele și temperaturile. Știința aceasta dificilă se formează cu încetul, dar păstrează toate principiile odată ce și le-a însușit. Ea crește și se consolidează fără încetare, în mijlocul atâtor erori ale spiritului uman.” - Baptiste Joseph Fourier ⁷

Teorema 659 Dacă P este un punct în interiorul unui triunghi ABC , atunci

$$PA + PB + PC \geq 2(PA_1 + PB_1 + PC_1),$$

unde A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile punctului P pe laturile BC, AC, BA ale triunghiului ABC .

Demonstrație. *Soluția 1.* Notăm cu a', b', c' lungimile segmentelor PA, PB, PC și cu x, y, z lungimile segmentelor PA_1, PB_1, PC_1 (Fig. 2.8). Din teorema cosinusului

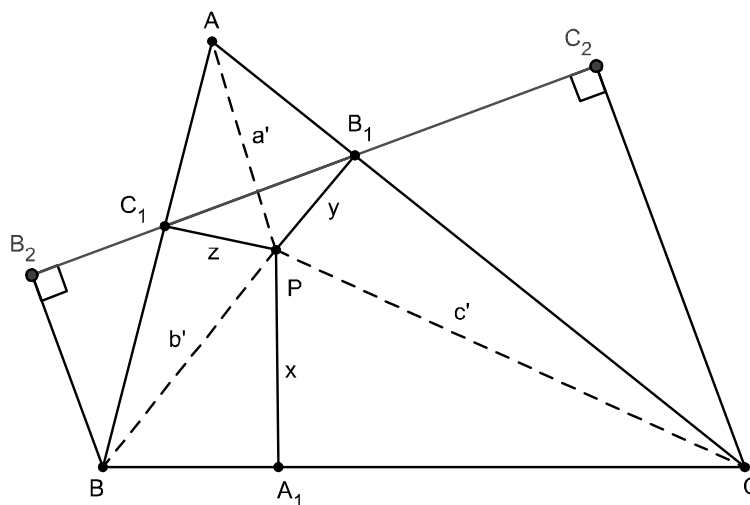


Figura 2.8: Teorema lui Erdős – Mordell

în triunghiul PB_1C_1 rezultă:

$$B_1C_1 = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz \cos A}. \tag{1}$$

Cum patrulaterul AC_1PB_1 este inscriptibil, rezultă

$$\sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle APC_1. \tag{2}$$

⁷Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) – matematician și fizician francez, membru al Academiei Franceze, contribuții în toate domeniile matematicii

Deoarece $\sin \sphericalangle APC_1 = \frac{AC_1}{AP}$, atunci $PA = a' = \frac{B_1C_1}{\sin A}$, de unde

$$a' = \frac{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz \cos A}}{\sin A}.$$

Analog se arată că $b' = \frac{\sqrt{x^2 + z^2 + 2xz \cos B}}{\sin B}$, $c' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos C}}{\sin C}$, de unde rezultă:

$$PA + PB + PC = a' + b' + c' = \frac{\sqrt{(y \sin C + z \sin B)^2 + (y \cos C - z \cos B)^2}}{\sin A} + \frac{\sqrt{(z \sin A + x \sin C)^2 + (z \cos A - x \cos C)^2}}{\sin B} + \frac{\sqrt{(x \sin B + y \sin A)^2 + (x \cos B - y \cos A)^2}}{\sin C}$$

și de aici avem:

$$a' + b' + c' \geq \frac{y \sin C + z \sin B}{\sin A} + \frac{z \sin A + x \sin C}{\sin B} + \frac{x \sin B + y \sin A}{\sin C},$$

adică

$$a' + b' + c' \geq y \left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C} \right) + z \left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} \right) + x \left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \right),$$

deci $a' + b' + c' \geq 2(x + y + z)$ (unde am utilizat inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \forall x, y > 0$), cu egalitate dacă triunghiul ABC este echilateral.

Soluția 2. Fie B_2 și C_2 proiecțiile punctelor B și C pe dreapta B_1C_1 . Avem

$$BC \geq B_2C_2 = B_2C_1 + C_1B_1 + B_1C_2'. \quad (1)$$

Cum $\sphericalangle B_2C_1B = \sphericalangle AC_1P = \sphericalangle APB_1$, rezultă că triunghiurile dreptunghice BB_2C_1 și AB_1P sunt asemenea, de unde rezultă că

$$B_2C_1 = PB_1 \cdot \frac{BC_1}{AP} \quad (2)$$

și analog se arată că $B_1C_2 = PC_1 \cdot \frac{B_1C}{AP}$ (3). Cum patrulaterul AC_1PB_1 este inscriptibil, din inegalitatea lui Ptolemeu rezultă: $AC_1 \cdot PB_1 + AB_1 \cdot PC_1 = AP \cdot B_1C_1$, de unde

$$B_1C_1 = AC_1 \cdot \frac{PB_1}{AP} + AB_1 \cdot \frac{PC_1}{AP}. \quad (4)$$

Din relațiile (1), (2), (3) și (4) rezultă:

$$BC \geq BC_1 \cdot \frac{PB_1}{AP} + AC_1 \cdot \frac{PB_1}{AP} + AB_1 \cdot \frac{PC_1}{AP} + B_1C \cdot \frac{PC_1}{AP},$$

de unde:

$$BC \cdot AP \geq PB_1(BC_1 + C_1A) + PC_1(AB_1 + B_1C)$$

inegalitate echivalentă cu $BC \cdot AP \geq PB_1 \cdot AB + PC_1 \cdot AC$, deci

$$AP \geq PB_1 \cdot \frac{AB}{BC} + PC_1 \cdot \frac{AC}{BC}. \quad (5)$$

Urmărind același raționament se obțin inegalitățile:

$$BP \geq PA_1 \cdot \frac{BA}{AC} + PC_1 \cdot \frac{BC}{AC}, \quad (6)$$

$$PC \geq PA_1 \cdot \frac{AC}{AB} + PB_1 \cdot \frac{BC}{AB}. \quad (7)$$

Sumând inegalitățile (5), (6), (7) și ținem cont de inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \forall x, y > 0$, rezultă:

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &\geq \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) \cdot PA_1 + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}\right) \cdot PB_2 + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{CA}\right) \cdot PC_2 \\ &\geq 2(PA_1 + PB_1 + PC_1) \end{aligned}$$

□

Consecința 660 Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și H este ortocentrul triunghiului ABC , atunci

$$HA + HB + HC \geq 6r,$$

unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și P coincide cu ortocentrul H al triunghiului ABC din inegalitatea lui Erdős obținem:

$$HA + HB + HC \geq 2(HA_1 + HB_1 + HC_1). \quad (1)$$

Dacă h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului ABC , atunci (1) devine:

$$HA + HB + HC \geq 2(h_a - HA + h_b - HB + h_c - HC),$$

adică

$$HA + HB + HC \geq \frac{2}{3}(h_a + h_b + h_c),$$

de unde se obține inegalitatea

$$HA + HB + HC \geq \frac{2}{3} \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \right) = \frac{4S}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Aplicând inegalitatea mediilor rezultă:

$$HA + HB + HC \geq \frac{4S}{3} \cdot \frac{9}{a + b + c} = \frac{12S}{2p} = 6r,$$

deci: $HA + HB + HC \geq 6r$.

□

Consecința 661 Într-un triunghi ascuțitunghic ABC ,

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Demonstrație. Dacă P coincide cu centrul cercului circumscris (O) al triunghiului ascuțitunghic ABC , avem:

$$3R \geq 2(OA_1 + OB_1 + OC_1) = 2 \left[\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} \right],$$

adică:

$$3R \geq \sqrt{4R^2 - a^2} + \sqrt{4R^2 - b^2} + \sqrt{4R^2 - c^2},$$

inegalitate echivalentă cu $3R \geq 2R(\cos A + \cos B + \cos C)$, de unde rezultă concluzia (am ținut cont de $a = 2R \sin A$ și de relațiile analoge). \square

Consecința 662 Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și H este ortocentrul triunghiului atunci $HA + HB + HC \leq 3R$.

Demonstrație. Avem: $HA + HB + HC = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 2R \cdot 3/2 = 3R$. \square

Consecința 663 În orice triunghi ABC este adevărată relația: $2r \leq R$ (Relația lui Euler).

Demonstrație. Din consecințele precedente rezultă $6r \leq HA + HB + HC \leq 3R$, de unde obținem concluzia. \square

Consecința 664 Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , atunci

$$6r \leq AI + BI + CI \leq 4R - 2r.$$

Demonstrație. Dacă P coincide cu centrul cercului înscris I al triunghiului ABC , atunci relația lui Erdős devine:

$$AI + BI + CI \geq 6r. \tag{1}$$

Cu $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ și analogele rezultă

$$\begin{aligned} AI + BI + CI &= r \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) \\ &= r \left(\frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} \right). \end{aligned}$$

Ținând cont că $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ și de inegalitatea $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ rezultă:

$$\begin{aligned} AI + BI + CI &\leq r \frac{4R}{r} \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= 4R \left[\frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} \right], \end{aligned}$$

de unde:

$$AI + BI + CI \leq 2R[3 - (\cos A + \cos B + \cos C)] = 2R \left[3 - 1 - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right],$$

deci

$$AI + BI + CI \leq 2R \left(2 - \frac{r}{R} \right) = 4R - 2r. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă concluzia. \square

Teorema 665 Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci

$$GA + GB + GC \geq 6r.$$

Demonstrație. Dacă punctul P coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC , relația lui Erdős devine: $GA + GB + GC \geq 2(GA_1 + GB_1 + GC_1)$. Ținând cont de faptul că $GA_1 = \frac{1}{3}h_a$ și de relațiile analoage avem:

$$GA + GB + GC \geq \frac{2}{3}(h_a + h_b + h_c) = \frac{2}{3} \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \right),$$

adică:

$$GA + GB + GC \geq \frac{4S}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{4S}{3} \cdot \frac{9}{a+b+c} = \frac{12S}{2p} = 6r.$$

\square

Consecința 666 Dacă P este un punct în interiorul unui triunghi ABC , atunci

$$PA^m + PB^m + PC^m \geq 2(PA_1^m + PB_1^m + PC_1^m), \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

unde A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile punctului P pe laturile BC, AC, BA ale triunghiului ABC .

Demonstrație. Din teorema lui Erdős rezultă: $PA \geq y \frac{\sin C}{\sin A} + z \frac{\sin B}{\sin A}$ și analoagele. Obținem:

$$\begin{aligned} PA^m + PB^m + PC^m &\geq x^m \left(\frac{\sin^m C}{\sin^m A} + \frac{\sin^m A}{\sin^m C} \right) + y^m \left(\frac{\sin^m C}{\sin^m B} + \frac{\sin^m B}{\sin^m C} \right) \\ &\quad + z^m \left(\frac{\sin^m B}{\sin^m A} + \frac{\sin^m A}{\sin^m B} \right) \geq 2(x^m + y^m + z^m), \forall m \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

unde am aplicat inegalitatea dintre media aritmetică și geometrică. \square

Teorema 667 (Generalizarea teoremei lui Erdős - Mordell) Fie P un punct arbitrar în planul triunghiului ABC și a', b', c' distanțele de la P la vârfurile A, B , respectiv C și x, y, z distanțele de la P la laturile BC, CA , respectiv AB . Atunci,

$$a' + b' + c' \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) x + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) y + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) z,$$

cu egalitate dacă P este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie h_1 lungimea înălțimii duse din A pe latura BC . Avem:

$$2A_{[ABC]} = a \cdot h_1 = ax + by + cz.$$

Evident, $a' + x \geq h_1$ cu egalitate dacă și numai dacă punctul P aparține înălțimii din A . Avem $aa' + ax \geq ah_1 = ax + by + cz$, de unde $aa' \geq by + cz$ (1). Fie $AB'C'$ simetricul triunghiului ABC față de bisectoarea unghiului A (Fig. 2.9). Atunci,

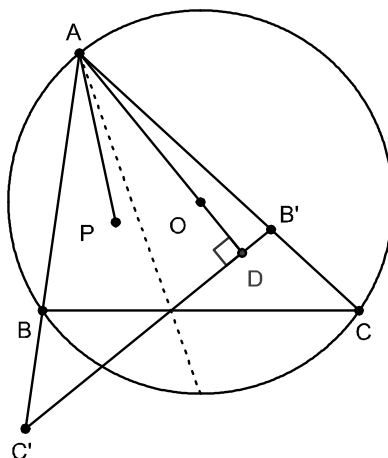


Figura 2.9: Generalizarea teoremei lui Erdős - Mordell

aplicând inegalitatea (1) pentru triunghiul $AB'C'$ obținem: $aa' \geq cy + bz$, adică

$$a' \geq \frac{c}{a}y + \frac{b}{a}z, \tag{2}$$

cu egalitate dacă punctul P aparține înălțimii din A a triunghiului $AB'C'$, dreaptă ce trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Analog, se obțin relațiile:

$$b' \geq \frac{a}{b}z + \frac{c}{b}x, \tag{3}$$

$$c' \geq \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}y. \tag{4}$$

Sumând inegalitățile (2), (3) și (4) rezultă concluzia. □

Observația 668 Dacă P este un punct interior triunghiului ABC , $x, y, z > 0$, avem: $a' + b' + c' \geq 2(x + y + z)$ (unde am utilizat faptul că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0$) care este inegalitatea lui Erdős-Mordell. Egalitatea are loc dacă $a = b = c$, adică dacă triunghiul ABC este echilateral și P este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Teorema 669 (Generalizare a teoremei lui Erdős⁸) Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R_+$ și $t \in [0, 1]$, iar P un punct în interiorul triunghiului ABC . Se notează distanțele PA, PB, PC cu

⁸Paul Erdős (1913-1996) – matematician ungar, profesor la Universitatea Notre Dame, contribuții importante în teoria numerelor și matematici discrete

x_1, x_2 , respectiv x_3 și cu d_1, d_2, d_3 distanțele de la laturile AB, BC , respectiv CA .
Atunci:

$$\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \lambda_3 x_3^t \geq 2^t \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{d_1^t}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{d_2^t}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{d_3^t}{\sqrt{\lambda_3}} \right),$$

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{\lambda_1}{a^{2t}} = \frac{\lambda_2}{b^{2t}} = \frac{\lambda_3}{c^{2t}}$ și P este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Se cunoaște că

$$x_1 \geq \frac{c}{a} d_1 + \frac{b}{a} d_3, x_2 \geq \frac{a}{b} d_3 + \frac{c}{b} d_1, x_3 \geq \frac{b}{c} d_1 + \frac{a}{c} d_2.$$

Pentru $0 < t < 1$ rezultă

$$x_1^t \geq 2^t \left(\frac{\frac{c}{a} d_1 + \frac{b}{a} d_3}{2} \right)^t \geq 2^t \cdot \frac{\left(\frac{c}{a}\right)^t \cdot d_1^t + \left(\frac{b}{a}\right)^t \cdot d_3^t}{2}$$

și analogele. Utilizând inegalitatea $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pentru $x > 0$ rezultă:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \lambda_3 x_3^t \geq \\ & 2^t \left[\frac{\left(\frac{c}{b}\right)^t \cdot \lambda_2 + \left(\frac{b}{c}\right)^t \cdot \lambda_3}{2} \cdot d_1^t + \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^t \cdot \lambda_3 + \left(\frac{c}{a}\right)^t \cdot \lambda_1}{2} \cdot d_2^t + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t \cdot \lambda_1 + \left(\frac{a}{b}\right)^t \cdot \lambda_2}{2} \cdot d_3^t \right] \geq \\ & 2^t (\sqrt{\lambda_2 \lambda_3} \cdot d_1^t + \sqrt{\lambda_3 \lambda_1} \cdot d_2^t + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \cdot d_3^t). \end{aligned}$$

□

Observația 670 Dacă $t > 1$, atunci,

$$\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \lambda_3 x_3^t \geq 2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{d_1^t}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{d_2^t}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{d_3^t}{\sqrt{\lambda_3}} \right).$$

Consecința 671

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{d_1^t} + \frac{\lambda_2}{d_2^t} + \frac{\lambda_3}{d_3^t} & \geq 2^t \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1} x_1^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2} x_2^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3} x_3^t} \right) \\ \frac{\lambda_1}{(x_1 d_1)^t} + \frac{\lambda_2}{(x_2 d_2)^t} + \frac{\lambda_3}{(x_3 d_3)^t} & \geq \frac{2^t \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}{(x_1 x_2 x_3)^t} \left(\frac{x_1^t}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{x_2^t}{\sqrt{\lambda_2}} + \frac{x_3^t}{\sqrt{\lambda_3}} \right) \\ \lambda_1 (x_1 d_1)^t + \lambda_2 (x_2 d_2)^t + \lambda_3 (x_3 d_3)^t & \geq 2^t \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (d_1 d_2 d_3)^t \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1} d_1^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2} d_2^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3} d_3^t} \right) \\ \lambda_1 d_1^t + \lambda_2 d_2^t + \lambda_3 d_3^t & \geq 2^t \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} (d_1 d_2 d_3)^t \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1} d_1^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2} d_2^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3} d_3^t} \right) \end{aligned}$$

Consecința 672 Dacă P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , atunci $d_1 = d_2 = d_3 = r$ și $x_1 = r \cos \frac{A}{2}, x_2 = r \cos \frac{B}{2}, x_3 = r \cos \frac{C}{2}$. Din consecința precedentă pentru $t \in (0, 1]$ și utilizând egalitatea $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ obținem:

$$\lambda_1 \sin^t \frac{A}{2} + \lambda_2 \sin^t \frac{B}{2} + \lambda_3 \sin^t \frac{C}{2} \geq \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\frac{2}{2R} \right)^t \left[\frac{1}{\lambda_1} \cos^t \frac{A}{2} + \frac{1}{\lambda_2} \cos^t \frac{B}{2} + \frac{1}{\lambda_3} \cos^t \frac{C}{2} \right].$$

Consecința 673 Dacă P este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci $d_i = \frac{h_i}{3}$ ($h_i, i = \overline{1,3}$ reprezintă înălțimile triunghiului ABC) și $x_1 = AG = \frac{2}{3}m_a$, $x_2 = \frac{2}{3}m_b$, $x_3 = \frac{2}{3}m_c$. Din consecința 671 pentru $t \in (0, 1]$ rezultă:

$$\frac{\lambda_1}{h_1^t} + \frac{\lambda_2}{h_2^t} + \frac{\lambda_3}{h_3^t} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}m_a^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}m_b^t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}m_c^t} \right).$$

Dacă înlocuim $\lambda_i = \lambda_i^t$ obținem: $\left(\frac{\sqrt{h_2h_3}}{m_a}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{h_3h_1}}{m_b}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{h_1h_2}}{m_c}\right)^t \leq 3$.

2.9 Inegalitatea lui Barrow

„Geometria e liniștea întâmplării.” – Nichita Stănescu⁹

Teorema 674 (Barrow) Dacă P este un punct interior triunghiului ABC , atunci

$$PA + PB + PC \geq 2(PA' + PB' + PC'),$$

unde PA', PB', PC' sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BPC, \sphericalangle CPA, \sphericalangle APB$ ($A' \in (BC), B' \in (AC), C' \in (AB)$).

Demonstrație. Notăm cu a, b, c lungimile segmentelor PA, PB , respectiv PC și cu α, β, γ măsurile unghiurilor $\sphericalangle BPC, \sphericalangle CPA$, respectiv $\sphericalangle APB$ (Fig. 2.10). Prin

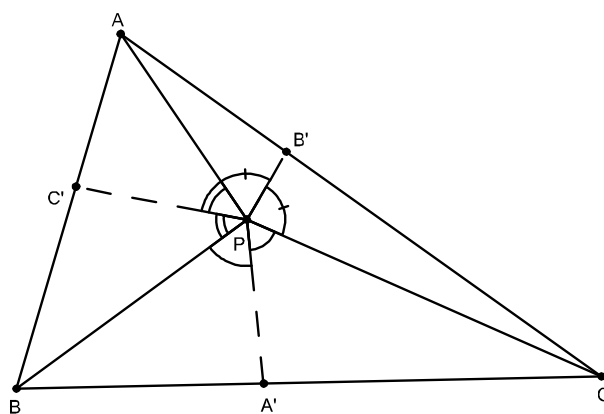


Figura 2.10: Teorema lui Barrow

$A_{[XYZ]}$ înțelegem aria triunghiului XYZ . Din $A_{[PBC]} = A_{[PBA']} + A_{[PCA']}$ rezultă:

$$PB \cdot PC \sin \alpha = PB \cdot PA' \sin \frac{\alpha}{2} + PC \cdot PA' \sin \frac{\alpha}{2},$$

⁹Nichita Stănescu (1933 – 1983) – eseist, poet român, ales postum membru al Academiei Române

deci $PA' = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$. Utilizând inegalitatea $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$, $x, y > 0$, rezultă

$$PA' \leq \sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2}$$

și analogele. Atunci,

$$2(PA' + PB' + PC') \leq 2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{ca} \cos \frac{\beta}{2} + 2\sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2} \quad (*)$$

Rămâne să demonstrăm că

$$a + b + c \geq 2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{ac} \cos \frac{\beta}{2} + 2\sqrt{bc} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Deoarece $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ rezultă

$$\cos \frac{\gamma}{2} = -\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = -\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2},$$

inegalitatea de mai sus fiind echivalentă cu:

$$\left(\sqrt{a} \sin \frac{\beta}{2} - \sqrt{b} \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{a} \cos \frac{\beta}{2} - \sqrt{b} \cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt{c} \right)^2 \geq 0,$$

ceea ce este adevărat. Egalitatea din (*) se obține pentru $a = b = c$, adică P este centrul cercului circumscris triunghiului. \square

2.10 Inegalitatea lui Finsler - Hadwiger

„Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte.” – Henri Poincaré¹⁰

Teorema 675 (Finsler - Hadwiger) În orice triunghi ABC având lungimile laturilor a, b, c și aria S este adevărată inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Demonstrație. Din egalitatea

$$(xy + yz + zx)^2 = 3xyz(x + y + z) + \frac{1}{2} [x^2(y - z)^2 + y^2(z - x)^2 + z^2(x - y)^2],$$

rezultă inegalitatea

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)}, \quad \forall x, y, z \geq 0. \quad (1)$$

¹⁰Henri Poincaré (1854 -1912) – matematician și fizician francez, contribuții importante în toate ramurile matematicii

În inegalitatea precedentă înlocuind pe x, y, z cu $p - a, p - b$, respectiv $p - c$, obținem:

$$(ab + bc + ca) - p^2 \geq S\sqrt{3},$$

sau

$$4(ab + bc + ca) - 4p^2 \geq 4S\sqrt{3}. \quad (2)$$

Dar

$$4(ab + bc + ca) - 4p^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]. \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă concluzia. \square

Observația 676 *Inegalitatea lui Finsler - Hadwiger este echivalentă cu inegalitatea lui Doucet, $4R + r \geq p\sqrt{3}$.*

2.11 Inegalitatea lui Ionescu-Weitzenböck

„Cea mai mare dorință a mea este să comunic și altora pasiunea mea pentru matematică.” – Miron Nicolescu¹¹

Teorema 677 (Ionescu-Weitzenböck [118]) *În orice triunghi ABC având lungimile laturilor a, b, c și aria S este adevărată inegalitatea:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S. \quad (1)$$

Demonstrație. Din formula medianei $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, obținem:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{1}{2} [2(b^2 + c^2) - a^2 + 3a^2] = \frac{1}{2} [4m_a^2 + 3a^2] \geq \\ 2\sqrt{3}am_a &\geq 2\sqrt{3}ah_a = 4\sqrt{3}S. \end{aligned}$$

\square

Vom da în continuare câteva generalizări ale inegalității lui Ionescu-Weitzenböck.

Teorema 678 (Stoica, Minculete, Barbu [111]) *În orice triunghi ABC are loc inegalitatea:*

$$xa^2 + yb^2 + yc^2 \geq 4\sqrt{2xy + y^2}S, \quad (2)$$

unde x și y sunt numere reale pozitive.

¹¹Miron Nicolescu (1903-1975) – matematician român, membru al Academiei Române, contribuții în analiza matematică

Demonstrație. Avem:

$$\begin{aligned} xa^2 + yb^2 + yc^2 &= \frac{1}{2} \{y [(2(b^2 + c^2) - a^2)] + (2x + y)a^2\} = \\ &= \frac{1}{2} [4ym_a^2 + (2x + y)a^2] \geq 2\sqrt{(2x + y)y}am_a = 2\sqrt{2xy + y^2}am_a \end{aligned}$$

de unde

$$xa^2 + yb^2 + yc^2 \geq 2\sqrt{2xy + y^2}am_a \geq 2\sqrt{2xy + y^2}ah_a \geq 4\sqrt{2xy + y^2}S.$$

(unde cu m_a și h_a am notat lungimile medianei, respectiv înălțimii din A). □

Teorema 679 (Stoica, Minculete, Barbu [111]) *În orice triunghi ABC are loc inegalitatea:*

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta \geq 2(m_a^2 - h_a^2). \tag{3}$$

Demonstrație. Utilizând formula medianei $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, inegalitatea de demonstrat devine:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S \geq 2 \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} - 2h_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} - 2h_a^2,$$

sau $\frac{3a^2}{2} + 2h_a^2 \geq 4\sqrt{3}S$, inegalitate adevărată deoarece

$$\frac{3a^2}{2} + 2h_a^2 \geq 2\sqrt{\frac{3a^2}{2} \cdot 2h_a^2} = 2\sqrt{3}ah_a = 4\sqrt{3}S.$$

□

Teorema 680 (Stoica, Minculete, Barbu [111]) *Inegalitățile lui Ionescu-Weitzenböck și Finsler-Hadwiger sunt echivalente.*

Demonstrație. Este evident faptul că inegalitatea Finsler - Hadwiger implică inegalitatea Ionescu-Weitzenböck.

Arătăm că inegalitatea lui Ionescu-Weitzenböck implică inegalitatea lui Finsler - Hadwiger. Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC , A_1, B_1, C_1 mijloacele arcelor BC, CA , respectiv AB ale cercului circumscris triunghiului ABC . Notăm cu a_1, b_1, c_1 lungimile laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$, p_1 perimetrul triunghiului $A_1B_1C_1$, S_1 aria sa, iar cu r_1 și R_1 razele cercurilor înscris, respectiv circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ (Figura 2.25). Evident $R_1 = R$. În triunghiul $A_1B_1C_1$ avem:

$$m(\widehat{BA_1C}) = \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},$$

de unde

$$a_1 = 2R \cos \frac{A}{2} = 2R \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = 2R \sqrt{\frac{p}{abc}} \sqrt{a(p-a)} = \sqrt{\frac{R}{r}} \sqrt{a(p-a)}. \tag{4}$$

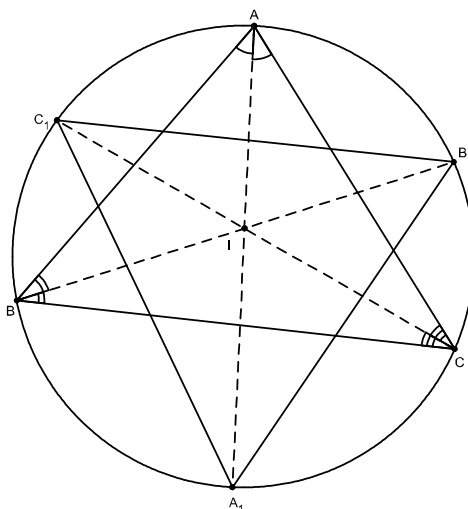


Figura 2.11: Inegalitatea lui Ionescu-Weitzenböck

Analog, obținem $b_1 = \sqrt{\frac{R}{r}} \sqrt{b(p-b)}$ și $c_1 = \sqrt{\frac{R}{r}} \sqrt{c(p-c)}$. Atunci,

$$\begin{aligned} \sum a_1^2 &= \sum \left(\sqrt{\frac{R}{r}} \sqrt{a(p-a)} \right)^2 = \frac{R}{r} \sum a(p-a) \\ &= \frac{R}{2r} \left[\sum a^2 - \sum (a-b)^2 \right] \end{aligned} \tag{5}$$

și

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{a_1 b_1 c_1}{4R_1} = \frac{8R^3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4R} \\ &= 2R^2 \prod_{cyclic} \cos \frac{A}{2} = 2R^2 \frac{p}{4R} = \frac{R}{2r} S. \end{aligned} \tag{6}$$

Aplicând inegalitatea lui Ionescu-Weitzenböck în triunghiul $A_1B_1C_1$, obținem

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geq 4\sqrt{3}S_1,$$

iar de aici, utilizând relațiile (5) și (6), rezultă:

$$\sum a_1^2 = \frac{R}{2r} \left[\sum a^2 - \sum (a-b)^2 \right] \geq 4\sqrt{3}S_1 = \frac{R}{2r} 4\sqrt{3}S,$$

adică

$$\sum_{cyclic} a^2 - \sum_{cyclic} (a-b)^2 \geq 4\sqrt{3}S,$$

care este de fapt inegalitatea Finsler-Hadwiger. □

Dăm o rafinare a inegalității lui Finsler-Hadwiger.

Teorema 681 În orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4Rr \sin^2 \frac{B-C}{2}.$$

Demonstrație. Aplicând inegalitatea (3) în triunghiul $A_1B_1C_1$, obținem:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4\sqrt{3}S_1 \geq 2(m_{a_1}^2 - h_{a_1}^2). \quad (2.47)$$

Deoarece

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

și

$$\begin{aligned} 4a^2m_a^2 - 4a^2h_a^2 &= 2a^2b^2 + 2c^2a^2 - a^4 - 16S^2 \\ &= b^4 - 2b^2c^2 + c^4 = (b^2 - c^2)^2, \end{aligned}$$

astfel,

$$2(m_a^2 - h_a^2) = \frac{(b^2 - c^2)^2}{2a^2}.$$

Pentru triunghiul $A_1B_1C_1$ avem:

$$\begin{aligned} 2(m_{a_1}^2 - h_{a_1}^2) &= \frac{(b_1^2 - c_1^2)^2}{2a_1^2} = \frac{4R^4(\cos B - \cos C)^2}{8R^2 \cos^2 \frac{A}{2}} \\ &= 2R^2 \sin^2 \frac{B-C}{2}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Din relațiile (2.47), (2.48) și egalitatea

$$\sum_{cyclic} a_1^2 - 4\sqrt{3}\Delta_1 = \frac{R}{2r} \left[\sum_{cyclic} a^2 - \sum_{cyclic} (a-b)^2 - 4\sqrt{3}\Delta \right],$$

obținem concluzia. □

2.12 Inegalitatea lui Breush

„Matematica va fi limba latină a viitorului, obligatorie pentru toți oamenii de știință, tocmai pentru că matematica permite accelerarea maximă a circulației ideilor științifice.” – Grigore Moisil¹²

Teorema 682 Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ astfel încât $m(\widehat{A}_1) = 2\alpha_1$, $m(\widehat{A}_2) = 2\alpha_2$, $m(\widehat{B}_1) = 2\beta_1$, $m(\widehat{B}_2) = 2\beta_2$, $m(\widehat{C}_1) = 2\gamma_1$, $m(\widehat{C}_2) = 2\gamma_2$ și $B_1C_1 = B_2C_2$. Atunci $p(A_1B_1C_1) \geq p(A_2B_2C_2)$ dacă și numai dacă

$$tg\beta_1 \cdot tg\gamma_1 \geq tg\beta_2 \cdot tg\gamma_2,$$

unde am notat cu $p(XYZ)$ perimetrul triunghiului XYZ .

Demonstrație. Avem:

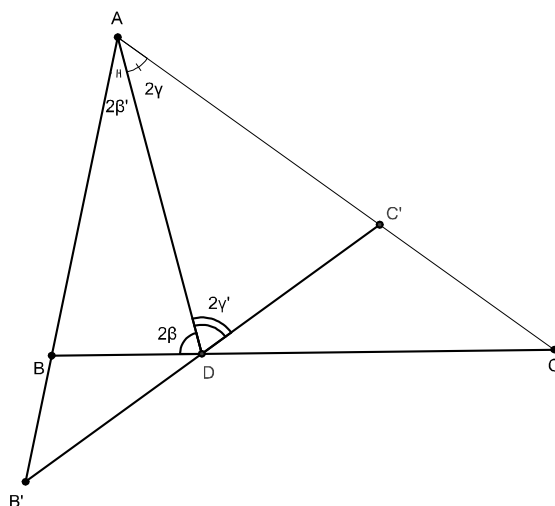


Figura 2.12: Inegalitatea lui Breush

$$\begin{aligned} \frac{p(A_1B_1C_1)}{B_1C_1} &= 1 + \frac{A_1B_1 + A_1C_1}{B_1C_1} = 1 + \frac{\sin 2\gamma_1 + \sin 2\beta_1}{\sin \alpha_1} \\ &= 1 + \frac{2 \sin(\gamma_1 + \beta_1) \cdot \cos(\gamma_1 - \beta_1)}{2 \sin(\gamma_1 + \beta_1) \cdot \cos(\gamma_1 + \beta_1)} \\ &= \frac{2 \cos \gamma_1 \cdot \cos \beta_1}{\cos \gamma_1 \cdot \cos \beta_1 - \sin \gamma_1 \cdot \sin \beta_1} \\ &= \frac{2}{1 - tg\gamma_1 \cdot tg\beta_1} \end{aligned}$$

¹²Grigore Moisil (1906-1973) – matematician român, profesor la Universitatea din Iași, membru al Academiei Române

(Fig. 2.12) și analog,

$$\frac{p(A_2B_2C_2)}{B_2C_2} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\beta_2}.$$

Condiția $p(A_1B_1C_1) \geq p(A_2B_2C_2)$ este echivalentă cu

$$\frac{2}{1 - \operatorname{tg}\gamma_1 \cdot \operatorname{tg}\beta_1} \geq \frac{2}{1 - \operatorname{tg}\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\beta_2},$$

adică $\operatorname{tg}\gamma_1 \cdot \operatorname{tg}\beta_1 \geq \operatorname{tg}\gamma_2 \cdot \operatorname{tg}\beta_2$.

Consecința 683 (Teorema lui Urquhart - Pedoe) În triunghiul ABC , fie transversala $B' - D - C'$ astfel încât $B \in (B'A)$, $D \in (BC)$, $C' \in (AC)$. Să se arate că $AB + BD = AC' + C'D$ dacă și numai dacă $AB' + B'D = AC + CD$.

Demonstrație. Fie $m(\widehat{BAD}) = 2\beta'$, $m(\widehat{BDA}) = 2\beta$, $m(\widehat{DAC'}) = 2\gamma$, $m(\widehat{ADC'}) = 2\gamma'$. Din inegalitatea lui Breusch rezultă că $p(AB'D) = p(ACD)$ dacă și numai dacă

$$\operatorname{tg}\beta' \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma') = \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \beta),$$

adică

$$\operatorname{tg}\beta' \cdot \operatorname{ctg}\gamma' = \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

sau $\operatorname{tg}\beta' \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\gamma'$, condiție echivalentă cu $p(ABD) = p(AC'D)$, ceea ce trebuia demonstrat. \square

2.13 Inegalitatea lui Pedoe

„Nici un om nu se întărește citind un tratat de gimnastică, ci făcând exerciții; nici un om nu se învață a judeca citind judecățile scrise de alții, ci judecând singur și dându – și singur seama de natura lucrurilor.” – Mihai Eminescu¹³

Teorema 684 Fie triunghiul ABC și $A'B'C'$ situate în același plan. Dacă laturile lor au lungimile a, b, c , respectiv a', b', c' , atunci:

$$a^2(-a'^2 + b'^2 + c'^2) + b^2(a'^2 - b'^2 + c'^2) + c^2(a'^2 + b'^2 - c'^2) \geq 16S \cdot S',$$

cu egalitate dacă triunghiurile sunt asemenea (unde cu S și S' am notat ariile triunghiurilor ABC , respectiv $A'B'C'$).

¹³Mihai Eminescu (1850-1889) – poet, jurnalist român, considerat cel mai important scriitor român din literatura română

Demonstrație. Pe latura BC se construiește triunghiul $A''BC$ asemenea cu ABC (Fig. 2.13), de unde:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA''}{C'A'} = \frac{A''B}{A'B'}$$

adică $\frac{a}{a'} = \frac{CA''}{b'} = \frac{A''B}{c'}$, deci:

$$A''C = \frac{ab'}{a'}. \tag{1}$$

Din teorema cosinusului în triunghiul $A''CA$ rezultă:

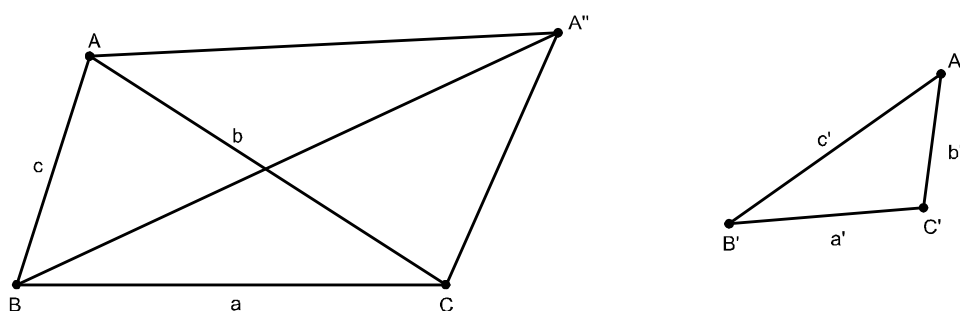


Figura 2.13: Inegalitatea lui Pedoe

$$A''A^2 = b^2 + A''C^2 - 2b \cdot A''C \cdot \cos \sphericalangle ACA''. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$A''A^2 = b^2 + \left(\frac{ab'}{a'}\right)^2 - 2b \frac{ab'}{a'} \cdot \cos(\widehat{A'C'B'} - \widehat{ACB})$$

egalitate echivalentă cu

$$a'^2 \cdot A''A^2 = a'^2 b^2 + a^2 b'^2 - 2aa'bb' \left[\cos \widehat{C} \cdot \cos \widehat{C'} + \sin \widehat{C} \cdot \sin \widehat{C'} \right] \geq 0. \tag{3}$$

Dar

$$S \cdot S' = \frac{ab \sin \widehat{C}}{2} \cdot \frac{a'b' \sin \widehat{C'}}{2} 4SS' = aa'bb' \sin \widehat{C} \cdot \sin \widehat{C'}, \tag{4}$$

iar

$$\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \cos \widehat{C'} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'}. \tag{5}$$

Din relațiile (3), (4) și (5) rezultă concluzia. Egalitatea are loc atunci când $A''A^2 = 0$, adică $A \equiv A''$, deci când triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea. \square

Observația 685

1) Dacă triunghiul $A'B'C'$ este echilateral, atunci inegalitatea devine:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S.$$

2) Dacă triunghiul $A'B'C'$ este CBA , deci $a' = b, b' = c, c' = a$, atunci $S = S'$ și inegalitatea devine

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2.$$

3) Dacă triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic în A' , atunci:

$$b^2c'^2 + c^2b'^2 \geq 8SS'.$$

2.14 Inegalitatea lui Oppenheim

"Tot ceea ce este frumos și nobil este rezultatul rațiunii și al calculului." - Ch. Baudelaire

Teorema 686 Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x + y > 0, y + z > 0, z + x > 0$ și $xy + yz + zx > 0, S$ este aria unui triunghi ABC , iar a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, atunci

$$xa^2 + yb^2 + zc^2 \geq 4S\sqrt{xy + yz + zx}, \tag{1}$$

cu egalitate dacă și numai dacă

$$\frac{x}{-a^2 + b^2 + c^2} = \frac{y}{a^2 - b^2 + c^2} = \frac{z}{a^2 + b^2 - c^2}. \tag{2}$$

Demonstrație. (Soluție - Marcel Chiriță) Fie $k = 4\sqrt{xy + yz + zx}$. Din teorema cosinusului $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ și $S = \frac{ab \sin C}{2}$, inegalitatea (1) poate fi rescrisă astfel:

$$2(x + z)a^2 + 2(y + z)b^2 \geq (4z \cos C + k \sin C)ab. \tag{3}$$

Din inegalitatea mediilor obținem că

$$2(x + z)a^2 + 2(y + z)b^2 \geq 4\sqrt{(x + z)(y + z)ab} = \sqrt{16z^2 + k^2}ab. \tag{4}$$

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz avem $(4z \cos C + k \sin C)^2 \leq (16z^2 + k^2)(\sin^2 C + \cos^2 C)$, adică

$$\sqrt{16z^2 + k^2} \geq 4z \cos C + k \sin C. \tag{5}$$

Din inegalitățile (4) și (5) rezultă (3). Egalitatea are loc (din inegalitatea mediilor și Cauchy) dacă și numai dacă

$$\frac{a^2}{y + z} = \frac{b^2}{z + x} = \frac{c^2}{x + y} = t.$$

Atunci, $-a^2 + b^2 + c^2 = 2tx, a^2 - b^2 + c^2 = 2ty$ și $a^2 + b^2 - c^2 = 2tz$, de unde rezultă concluzia. □

Observația 687 Din teorema cosinusului relațiile 2 pot fi rescrise astfel:

$$\frac{xa}{\cos A} = \frac{yb}{\cos B} = \frac{zc}{\cos C}.$$

Din relațiile precedente deducem că x, y, z sunt toate numere reale pozitive, sau un număr este negativ și celelalte două pozitive.

2.15 Inegalitatea lui Klamkin

„Geometria este limbaajul omului... de la nașterea sa, omul nu a acționat decât pe fundamentul geometriei, pe care a pătruns-o cu atâta claritate încât putem admite că ea este aceea care ne condiționează.” - Charles le Corbusier¹⁴

Teorema 688 Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ABC , iar m_a, m_b, m_c sunt lungimile medianelor triunghiului, atunci

$$4m_b \cdot m_c \leq 2a^2 + bc.$$

Demonstrație. Fie D și E simetricele punctelor B și C față de mijloacele laturilor AC , respectiv AB . Astfel, $DE = 2a$, $BD = 2m_b$ și $CE = 2m_c$ (Figura 2.14). Aplicând

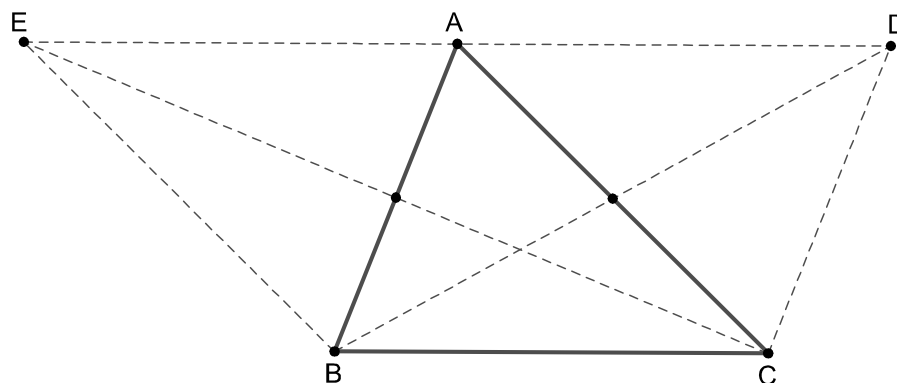


Figura 2.14: Inegalitatea lui Klamkin

inegalitatea lui Ptolemeu în patrulaterul $BCDE$, obținem:

$$BC \cdot DE + BE \cdot CD \geq BD \cdot CE,$$

cea ce trebuia demonstrat. □

¹⁴Charles le Corbusier (1877-1965) – arhitect, pictor francez de origine elvețiană

2.16 Inegalitatea lui Bothema

"Pune măcar puțină dragoste în toate:
În trandafiri, în pietre, în lumină;
în apa din fântână ce setea ți-o alină
și-n iarba ce odihnește îți dă cu pietate." - Lucian Blaga

Teorema 689 Dacă x, y, z sunt numere reale pozitive, R este raza cercului circumscris într-un triunghi ABC , iar a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, atunci

$$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \leq R^2(x + y + z)^2, \quad (1)$$

cu egalitate dacă și numai dacă

$$\frac{x}{\sin 2A} = \frac{y}{\sin 2B} = \frac{z}{\sin 2C}.$$

Demonstrație. În inegalitatea lui Oppenheim, înlocuim pe x, y, z cu $x/a^2, y/b^2$, respectiv z/c^2 și obținem:

$$x + y + z \geq 4S \sqrt{\frac{xy}{a^2b^2} + \frac{yz}{b^2c^2} + \frac{zx}{c^2a^2}}.$$

Teorema sinusurilor și formula $S = \frac{abc}{4R}$, aplicate în inegalitatea precedentă ne dau:

$$x + y + z \geq \frac{1}{R} \sqrt{yza^2 + zxb^2 + xyc^2},$$

adică tocmai (1). Pentru cazul de egalitate, din teorema lui Oppenheim, avem

$$\frac{x/a^2}{-a^2 + b^2 + c^2} = \frac{x}{2a^2bc \cos A} = t \frac{x}{\sin 2A},$$

unde $t = \frac{1}{2Rabc}$. □

Bibliografie

- [1] ADLER, C. F., *Modern geometry*, Mc. Graw-Hill, New York, 1958.
- [2] ALASIA, C., *Geometria del triangolo*, Citta di Castello, 1900.
- [3] ALBU, A.C., ș.a., *Geometrie pentru perfecționarea profesorilor*, E.D.P., București, 1983.
- [4] ALSINA, C., NELSEN, R., *Geometric proofs of the Weitzenböck and Finsler-Hadwiger inequality*, Math. Mag., 81 (2008), 216-219.
- [5] ANDRICA, D., ANDREESCU, T., *Complex number from A to..Z*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 2006.
- [6] ANDRICA, D., *O inegalitate în triunghi și aplicațiile acesteia*, Gazeta Matematică, Seria B, București, no. 1, 1986, 2-4.
- [7] ANDRICA, D., BARBU, C., *A geometric proof to Blundon's inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, 15 (2012), No. 2, 361-370.
- [8] ANDRICA, D., BARBU, C., PIȘCORAN, L., *The geometric proof to a sharp version of Blundon's inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, 10 (4) (2016), 1137-1143.
- [9] ANDRICA, D., BARBU, C., MINCULETE, N., *A geometric way to generate Blundon type inequalities*, Acta Universitatis Apulensis, 31 (2012), 96-106.
- [10] ANDRICA, D., BARBU, C., LUPESCU, *A Note on the adjoint Spieker points*, International Journal of Geometry, 6 (2) (2017), 61-66.
- [11] ANDRICA, D., BARBU, C., PIȘCORAN, L., *The geometry of Blundon's configuration*, Journal of Inequalities and Applications, 2017.
- [12] ANDRICA, D., ș.a., *A note on the Nagel and Gergonne points*, Creative Math.& Inf., 17 (2008).
- [13] ANDRICA, D., *Teme pentru perfecționarea profesorilor de matematică*, Ed. Casa cărții de știință, Cluj-Napoca, 2017.
- [14] BARBILIAN, D., *Opera didactică*, Ed. Tehnică, București, 1958.

- [15] BARBU, C., *Teoreme fundamentale din geometria triunghiului*, Ed. Unique, Bacău, 2008.
- [16] BARBU, C., *Variations of Coşniţă's point*, *Gazeta Matematică*, 4 (2010), 180-184.
- [17] BARBU, C., MINCULETE, N., *Cevians of rank $(k; l; m)$ in a triangle*, *International Journal of Geometry*, 1 (2) (2012), 67- 79.
- [18] BARBU, C., MINCULETE, N., *About the area of triangle determined by cevians of rank $(k; l; m)$* , *Scientific Studies and Research Bacău*, 21 (1) (2011), 139-148.
- [19] BARBU, C., *Numere complexe*, Ed. Grafic, Bacău, 2005.
- [20] BARBU, C., PĂTRAŞCU, I., *Some properties of the Newton-Gauss line*, *Forum Geometricorum*, 12 (2012), 149-152.
- [21] BARBU, C., PĂTRAŞCU, I., *Two new demonstrations of Goormaghtigh's theorem*, *International Journal of Geometry*, 1 (1) (2012), 10-19.
- [22] BARBU, C., PĂTRAŞCU, I., *The point of Cosniţă*, *Octogon Mathematical Magazine*, 19 (2) (2011), 379-385.
- [23] BARBU, C., *Puncte, drepte și puncte remarcabile din geometria triunghiului*, Ed. Cibernet, Bacău, 2017.
- [24] BARBU, C., MINCULETE, N., STOICA, E., *New aspects of Ionescu-Weitzenböck's inequality*, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 21 (2) 2016, 95-101.
- [25] BARBU, C., MINCULETE, N., *Inradii and Diagonals*, 11714, *American Mathematical Monthly*, 122 (6) 2016, 607-608.
- [26] BLUNDON, W., *Inequalities associated with the triangle*, *Canad. Math. Bull.*, 8 (1965), 615-626.
- [27] BĂLUNĂ, M., ș.a., *Zece lecții alese de matematică elementară*, Ed. S.S.M., București, 1998.
- [28] BĂTINEȚU, D.M., STANCIU, N., *Ionescu-Weitzenböck's type inequalities*, *Gazeta Matematică Seria B (Romanian)*, 118, 1 (2013), 1-10.
- [29] BĂTINEȚU, D.M., MINCULETE, N, STANCIU, N., *Some geometric inequalities of Ionescu-Weitzenböck type*, *Int. Journal of Geometry*, 2 (2013), 68-74.
- [30] BECHEANU, M., ș.a., *Probleme de algebră, analiză și geometrie*, Ed. Cartea Românească, București, 1991.
- [31] BENCZE, M., MINCULETE, N., POP, O. T., *Certain aspects of some geometric inequalities*, *Creative Math. & Inf.*, 19, 2 (2010), 122-129.
- [32] BOTEZ, Șt., *Probleme de geometrie*, Ed. Tehnică, București, 1976.

- [33] BOTTEMA, O., *Topics in elementary geometry*, Springer, New York, 2008
- [34] BOTTEMA, O., *On the area of a triangle in barycentric coordinates*, *Cru. Math.*, 8 (1982), 228-231.
- [35] BOTTEMA, O., ș.a., *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.
- [36] BRADLEY, C.J., *The algebra of geometry: Cartesian, areal and projective coordinates*, Bath: Highperception, 2007.
- [37] BRÂNZEI, D., *Geometrie circumstanțială*, Ed. Junimea, Iași, 1984.
- [38] BRÂNZEI, D., *Bazele raționamentului geometric*, Ed. Academiei, București, 1983.
- [39] BRÂNZEI, D., ș.a., *Competență și performanță în geometrie*, Ed. Paralela 45, Pitești, 1999 (vol I, II).
- [40] BRÂNZEI, D., ș.a., *Geometrie*, Ed. Paralela 45, Pitești, 1997.
- [41] BRÂNZEI, D., *Măsuri în geometrie*, Univ. A.I. Cuza, Iași, 2002.
- [42] CALVET, R.G., *Treatise of plane geometry through geometric algebra*, electronic edition, 2001.
- [43] CASEY, J., A., *Treatise on the analytical geometry*, Ed. Hodges & Figgis, Dublin, 1893.
- [44] CHIRIȚĂ, M., *The Inequality of A. Oppenheim*, *Mathematical Excalibur*, 5 (17) 2013, 1-4.
- [45] CINDREA, I., *Matematica de drag*, Ed. Compania, București, 2003.
- [46] COANDĂ, C., *Geometrie analitică în coordonate baricentrice*, Ed. Reprograph, Craiova, 2005.
- [47] COCEA, C., *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral*, Ed. Gh. Asachi, Iași, 1992.
- [48] COOLIDGE, D., *A Treatise on the circle and the sphere*, Clarendon Press, Oxford, 1916.
- [49] COURT, N.A., *Modern pure solid geometry*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New-York, 1964.
- [50] COȘNIȚĂ, C., *Coordonnées barycentriques*, Librairie Vuibert, Paris, 1941.
- [51] COXETER, H., *Introduction to geometry*, 2nd ed., Willey & Sons, New York 1969.
- [52] COXETER, H., *Geometry revisited*, Random House, New York 1967.

- [53] CUCOANEȘ, M., *A new proof to the theorem of Coșniță*, IJG, Vol 6 (2017), No. 1, 24-26.
- [54] DEAU, R., *Compléments de géométrie plane*, Maison d'Édition A De Boeck 265, Bruxelles, 1945.
- [55] DEAUX, R., *Introduction to the geometry of complex numbers*, Dover Publications, New York, 2008.
- [56] DOSPINESCU, G., LASCU, M., ș. a., *An Elementary proof of Blundon's Inequality*, JIPAM, 9 (2008).
- [57] DUPUIS, F., *Elementary synthetic geometry of the point, line and circle in the plane*, Mac Millan and Co., New York, 1889.
- [58] DURELL, C., *Modern geometry*, London, 1920.
- [59] EFREMOV, D., *A new geometry of triangle*, Odesa, 1902.
- [60] EULER, L., *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum*, Novi Comm. Acad. Scie. Petropolitanae, 11 (1765), 139-157.
- [61] FLOREA, C., *Abordare globală a geometriei triunghiului cu implicații creative*, Ed. ALL, București, 1996.
- [62] GALLATY, W., *Modern geometry of the triangle*, Ed. Francis Hogson, Londra, 1889.
- [63] GERRETSEN, J.C.H., *Ongelijkheden in de driehoek*, Nieuw Tijdschr, 41 (1953), 1-7.
- [64] GODFREY, Ch., *Modern geometry*, University Press, Cambridge, 1908.
- [65] GUICHARD, C., *Traité de géométrie*, Librairie Vuibert, Paris, 1923.
- [66] HADAMARD, J., *Lecții de geometrie plană*, Ed. Tehnică, București, 1965.
- [67] HAHN, L., *Complex numbers and geometry*, Library of Congress, Washinton, 1994.
- [68] HARDY, G., *A course of pure mathematics*, Ed. University Press, Cambridge, 1921.
- [69] HONSBERGER, R., *Episodes in nineteenth and twentieth century Euclidean geometry*, Washinton, 1995.
- [70] IANUȘ, S., *Probleme de geometrie și trigonometrie*, E.D.P., București, 1983.
- [71] JOHNSON, R., *Advanced Euclidian geometry*, Dover, 1971.
- [72] KIMBERLING, C., *Encyclopedia of triangle center*, 2008.
- [73] LALESCU, T., *Geometria triunghiului*, Ed, Tineretului, București, 1958.

- [74] LEGENDRE, M., *Eléments de géométrie*, Librairie de Firmin, Paris, 1849.
- [75] LONEY, S.L., *The elements of coordinate geometry*, London, Macmillan, 1962.
- [76] MARINESCU, D.S., MONEA, M., OPINCARIU, M., STROE, M., Note on Hadwiger-Finsler's Inequalities, *Journal of Mathematical Inequalities*, 6, 1 (2012), 57-64.
- [77] MICULIȚA, M., ș.a., *Analogii triunghi – tetraedru*, Ed. Paralela 45, Pitești, 2000.
- [78] MIHALESCU, C., *Geometria elementelor remarcabile*, Ed. Tehnică, București, 1959.
- [79] MIHĂILEANU, N.N., *Complemente de geometrie sintetică*, E.D.P., București, 1965.
- [80] MIHĂILEANU, N.N., *Lecții complementare de geometrie*, E.D.P., București, 1970.
- [81] MIHĂILEANU, N.N., *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Ed. Tehnică, București, 1968
- [82] MINCULETE, N., *Teoreme și probleme specifice de geometrie*, Editura Eurocarpatica, Sfântu Gheorghe, 2007.
- [83] MIRON, R., ș. a., *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Ed. Academiei, București, 1983.
- [84] MITRINOVIC, D., PECARIC, J., VOLONEC, V., *Recent advances in geometric inequalities*, Kluwer Acad. Publ., Amsterdam, 1989.
- [85] MOISE, E., *Geometrie elementară din punct de vedere superior*, E.D.P., București, 1980.
- [86] MORTICI, C., *Sfaturi matematice*, Ed. Minus, Târgoviște, 2007.
- [87] MUSSELMAN, J., GOORMAGHTIGH, R., *Advanced Problem 3928*, Amer. Math. Monthly, 46 (1939), 601; solution, 48 (1941), 281 - 283.
- [88] NEAGU, Gh., *Metode de rezolvare a problemelor de matematică școlară*, Ed. Plumb, Bacău, 1997.
- [89] NELSON, R., *Proof without words*, The Mathematical Association of America, 1993.
- [90] NICOLESCU, L., ș. a., *Probleme practice de geometrie*, Ed. Tehnică, București, 1990.
- [91] NICULESCU, C.P., *A new look at Newton's inequality*, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 1 (2), article 17, 2000.

- [92] NICULESCU, C.P., *On the algebraic character of Blundon's inequality*, *Inequality Theory and Applications*, 3 (2003), 139-144.
- [93] NICULA, V., *Geometrie plană*, Ed. Gil, Zalău, 2002.
- [94] NICULA, V., ș.a., *Diviziune armonică*, Ed. Gil, Zalău, 2007.
- [95] ONISORU, I., *Omotetia și inversiunea*, 2008.
- [96] PANAITOPOL, M., ș. a., *Probleme de geometrie rezolvate trigonometric*, Ed. Gil, Zalău, 1994.
- [97] PANAITOPOL, L., *Probleme calitative de geometrie plană*, Ed. Gil, Zalău, 1996.
- [98] PĂTRAȘCU, E., *Probleme de concurență și coliniaritate*, Ed. Neuron, Focșani, 1995.
- [99] PEDOE, D., *A course of geometry*, Univ. Press, Cambridge, 1970.
- [100] PRASOLOV, V., *Problems in plane and solid geometry*, Nauka, Moscow, 2001
- [101] ROUCHÉ, E., *Elements de géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1912.
- [102] RUSU, E., *Vectori*, Ed. Albatros, București, 1976.
- [103] SASTRY, K., *A Gergonne analogue of Steiner - Lehmus theorem*, *Forum Geometricorum*, 5 (2005), 191-195.
- [104] SATNOIANU, R.A., *General power inequalities between the sides and the circumscribed and inscribed radii related to the fundamental triangle inequality*, *Math. Inequal. Appl.*, 5 (4), 2002, 747-751.
- [105] SCIMEMI, B., *Paper-folding and Euler's theorem revisited*, *Forum Geom.* 2, (2002), 93-104.
- [106] SCOTT, J.A., *Some examples of the use of areal coordinates in triangle geometry*, *The Mathematical Gazette*, 11 (1999), 472-477.
- [107] SIMIONESCU, Gh., *Probleme de sinteză de geometrie plană și în spațiu*, Ed. Tehnică, București, 1978.
- [108] SMARANDA, D., ș. a., *Transformări geometrice*, Ed. Academiei, București, 1988.
- [109] SMITH, W., *Introductory modern geometry of point, ray, and circle*, Ed. Macmillan, New York, 1892.
- [110] SONDAT, P., *L'intermédiaire des mathématiciens*, 1894, 10 [question 38, solved by Sollerstinsky, 94].
- [111] STOICA, E., MINCULETE, N., BARBU, C., *New aspects of Ionescu-Weitzenbock's inequality*, *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, .21.(2) 2016, 95-101.

- [112] TANNER, H.W., *Areal coordinates*, The Mathematical Gazette, 28 (1901).
- [113] THEBAULT, V., *Perspective and orthologic triangles and tetrahedrons*, Amer. Math. Monthly, 59 (1952), 24-28.
- [114] ȚIȚEICA, Gh., *Culegere de probleme de geometrie*, Ed. Tehnică, București, 1965.
- [115] ȚIU, C.I., *Aplicații în trigonometrie*, Ed. Academiei, București, 1992.
- [116] VODĂ, Gh., *Triunghiul cu trei colțuri*, Ed. Albatros, București, 1979.
- [117] VODĂ, Gh., *Vraja geometriei demodate*, Ed. Albatros, București, 1983.
- [118] WEITZENBÖCK, R., *Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie*, Mathematische Zeitschrift, 5, 1-2 (1919), 137-146.
- [119] WU, S., *A sharpened version of the fundamental triangle inequality*, Math. Inequalities Appl., 11 (3), 2008, 477-482.
- [120] WU, S., CHU, Y., *Geometric interpretation of Blundon's inequality and Ciamberlini's inequality*, Journal of Inequalities and Applications (2014), 381.
- [121] YIU, P., *Introduction to the geometry of the triangle*, Florida University, 2001.
- [122] YIU, P., *The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane Euclidean geometry*, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 31(2000), 569-578.
- [123] * * * - American Mathematical Monthly.
- [124] * * * - Bulletin de la S. M. F.
- [125] * * * - Cardinal, Craiova.
- [126] * * * - Crux Mathematicorum
- [127] * * * - Gazeta matematică, București.
- [128] * * * - Forum Geometricorum.
- [129] * * * - Mathesis.
- [130] * * * - Revista matematică din Timișoara.
- [131] * * * - Recreații matematice, Iași.
- [132] * * * - Să înțelegem matematica, Bacău.
- [133] [http:// pagesperso-orange.fr](http://pagesperso-orange.fr)