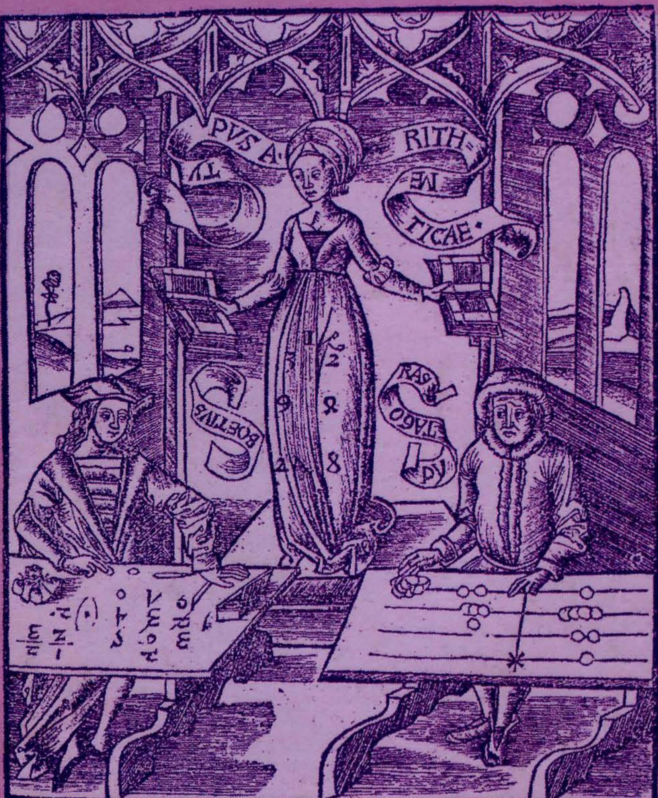
учебник XXI века



П.В. Грес

Математика для гуманитариев

Учебное пособие

П. В. Грес

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям группы гуманитарных и социальных наук подготовки бакалавров и магистров и гуманитарно-социальным специальностям подготовки дипломированных специалистов

МОСКВА • «ЛОГОС» • 2007

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
Г 806

Грес П.В.
Г806 Математика для гуманитариев. Учебное пособие. – М.: Университетская книга, Логос, 2007. - 160 с.: ил.
ISBN 978-5-98704-094-9

Содержит краткий курс математики. Рассмотрены предмет математики, ее методологические проблемы и принципы, а также элементы теории множеств, дискретной математики и математической логики. Представлены важнейшие разделы математического анализа. Изложены математические методы, используемые в рамках теории вероятностей, математической статистики, математического моделирования и принятия решений. Даны основные определения, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям социально-гуманитарных наук.

ББК 22.11я73

ISBN 978-5-98704-094-9

Оглавление

У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.

Ч. Дарвин

Предисловие

Математика — слово греческого происхождения. То, что греки назвали mathema — познание, наука, было известно до них и, по-видимому, задолго. Греки смогли впервые понять и по достоинству оценить это знание, придать ему системный характер и включить в исходное понятие философии — понятие «бытие», через которое они выражали идею единства мира. Математика, наряду с астрономией, медициной, архитектурой, стоит у истоков современной науки, о чем свидетельствуют, в частности, «Начала» Евклида, книга о геометрии, написанная им в III в. до н.э. Используя математику, Г. Галилей и И. Ньютон создали первую научную механическую теорию.

Становление гуманитарных наук по времени совпадает с историей математики. Развитие гуманитарных знаний и математики не было параллельным движением, оно неоднократно пересекалось: И. Ньютон, Б. Спиноза, Г. Лейбниц, Ф. Энгельс. В XX в. ранее крайне неустойчивый союз математики и гуманитарных наук укрепился настолько, что появилась насущная потребность учитывать его наличие в вузовском образовании. Во многом эта метаморфоза объясняется принципиальным изменением мнения о познавательном потенциале математики. Длительное время математику рассматривали только в технологическом ракурсе, в качестве инструментария. Эвристическая функция математики раскрылась на рубеже XIX и XX вв.

В гуманитарных науках значение математики так же огромно. Почему? Математика имеет дело с возможными мирами структур, упорядоченными совокупностями объектов. Любая гуманитарная наука изучает некоторую общность объектов, свойства и отношения, присущие им. Таким образом математика раздвигает область своего приложения и актуализирует ее. К исследовательскому аппарату гуманитарных наук подключаются огромнейшие резервы математики, накопленные ею за тысячелетия.

Математика решающим образом способствует установлению упорядоченности гуманитарных структур. Математику можно уподобить оптическому прибору, позволяющему рассмотреть невидимое для обычного зрения. Она открывает нам структурные отношения объектов социального познания и предоставляет исключительно эффективный математический аппарат. Тот, кто не владеет математикой, не способен проникнуть в глубинные структурные отношения сложных динамически меняющихся объектов.

Начиная с древности, математику широко использовали в социальной практике людей, например, в строительном, военном искусстве. И тем не менее включение математики в практическую социокультуру оставалось ограниченным. Оно становится по-настоящему эффективным лишь тогда, когда осуществляется математизация самосознания. Математизация гуманитарных наук способствует познанию, управлению, прогнозированию и профилактике кризисных явлений, которыми насыщена современная историческая ситуация.

В сочетании с информатикой и ЭВМ математика становится междисциплинарным инструментарием, выполняющим две основные функции: во-первых, позволяет определять цели поступков людей и условия их достижения; во-вторых, анализировать широкий спектр возможных ситуаций и намечать оптимальные решения посредством использования математических моделей. Математическое моделирование признается обязательным этапом, предшествующим принятию ответственного решения в экономике, финансовых и банковских операциях, в планировании развития, определении структуры и ориентации социальных подразделений, в избирательных кампаниях.

Математизация гуманитарного образования ориентирована не только на обучение математическому мышлению, но и на развитие с помощью математики самого профессионального мышления гуманитариев. В соответствии с чем приоритетной задачей обучения математике в гуманитарных вузах становится не изучение основ математической науки как таковой, а общеинтеллектуальное развитие — формирование у студентов в процессе изучения математики мышления, необходимого для полноценного функционирования человека в современном обществе. Конкретные математические знания выступают базой организации полноценной в интеллектуальном и идейном отношении деятельности.

Содержание пособия находится с строгом соответствии с действующим государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования второго поколения. Оно учитывает особенности подготовки бакалавров по всем гуманитарным и социально-экономическим направлениям.

Автор выражает глубокую благодарность доктору философских наук, профессору В.А. Канке: его ценные предложения и замечания способствовали совершенствованию настоящего издания.

Автор учтет все замечания к книге и рекомендации по ее улучшению, которые просит направлять в издательство.

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

Предисловие к первому изданию

В принципе математику можно рассматривать как разновидность уточненной, усовершенствованной логики. Замечательно, что, построив правила этой логики и выучив их, человек получил орудие гораздо более мощное, чем обыкновенный «здравый смысл», основанный на традиционной, «домашней» логике. Тенденция ко все большей общности сопровождается ростом требований, предъявляемых к логической строгости. Однако в заботе о логической безупречности легко хватить через край, заменив словесные рассуждения потоком логических символов и слепым применением стандартных приемов. В этом направлении можно далеко зайти и вместо того, чтобы углубить понимание, совсем его потерять.

В настоящее время наблюдается разделение культуры на гуманитарную и естественно-научную. «Гуманитарное» преподавание математики невозможно без изучения ее истории. Сюда входят и краткие сведения о возникновении тех или иных математических понятий и идей, о жизни выдающихся ученых.

Другая сторона математического образования — изучение приложений математики. В настоящее время создается система примеров и задач, ориентированных на гуманитарные приложения.

Гуманитарный потенциал математики раскрывается по следующим направлениям:

1. Математика изучает математические модели реальных процессов. Это позволит человеку, владеющему математическим языком, глубже проникнуть в суть реальных процессов, правильно ориентироваться в окружающей действительности.

2. Математика «ум в порядок приводит». Известно влияние математики на формирование мышления и личностных черт человека.

3. Человек, формулирующий математическое утверждение, проводящий математическое доказательство, оперирует не обыденной, а предметной речью, строящейся по определенным законам (краткость, четкость, лаконичность, минимизация и т.д.). Предметная речь оказывает существенное влияние и на развитие литературной речи.

4. Изучая математику, человек постоянно осознает свое развитие, «поумнение». Осознанность процесса обучения — один из краеугольных принципов теории развивающего обучения. Если взять за основу пять дидактических принципов теории развивающего обучения — обучение на достаточно высоком уровне трудности, быстрый темп обучения, приоритет теории, дифференцированный подход к учащимся плюс упомянутый выше принцип осознанности процесса обучения, то нетрудно убедиться, что обучение математике наиболее адекватно соответствует системе этих принципов.

Математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки бакалавра. Обусловлено это тем, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры.

Современная математика в сочетании с информатикой и ЭВМ становится как бы междисциплинарным инструментарием, который выполняет две основные функции: обучает специалиста-профессионала формулировать цель того или иного процесса, определять условия достижения этой цели; позволяет анализировать, т.е. «проигрывать» возможные ситуации и получать оптимальные решения с помощью модели. Математическое моделирование должно стать обязательным этапом, предшествующим принятию любого решения.

Всеобщая компьютеризация не только не уменьшила важность математического образования, но и, наоборот, поставила перед ним новые задачи. Снижение уровня математического образования и математической культуры общества может превратить человека из хозяина компьютера в его прислугу и даже раба. Компьютерная наркомания – весьма распространенная болезнь, поразившая подрастающие поколения. Деформировалось правовое пространство. Уже сегодня мы стоим на пороге своеобразной компьютерной диктатуры, а может, и религии. Придуманный в древности «бог из машины» в конце XX в. реализовался в виде непогрешимой «богомашины». Математическое образование должно помочь сохраниться на Земле виду homo sapiens, не дать ему переродиться в homo computericus.

Одна из основных целей курса «Математика» — развитие мышления, прежде всего абстрактного, способности к абстрагированию, и умения «работать» с абстрактными, «неосязаемыми» объектами. В процессе изучения математики в более чистом виде может быть сформировано логическое (дедуктивное) мышление, алгоритмическое мышление, многие качества мышления, такие, как сила и гибкость, конструктивность и критичность. Эти качества сами по себе не связаны с каким-либо математическим содержанием и с математикой вообще, но обучение математике вносит в их формирование специфическую компоненту, которая не может быть эффективно реализована даже всей совокупностью остальных дисциплин.

В то же время конкретные математические знания, лежащие за пределами, условно говоря, арифметики натуральных чисел и первичных основ геометрии, не являются предметом первой необходимости для большинства людей и, следовательно, не могут составлять целевую основу обучения математике как предмету общего образования.

Именно поэтому в качестве основополагающего принципа математического образования в аспекте «Математика для гуманитариев» на первый план выдвигается принцип приоритета развивающей функции в обучении. Иными словами, обучение математике ориентировано не столько на собственно математическое образование, в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики. В соответствии с этим принципом главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки как таковой, а общеинтеллектуальное развитие – формирование у студентов в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе и динамичной адаптации человека к этому обществу.

С точки зрения приоритета развивающей функции, конкретные математические знания в аспекте «Математика для гуманитариев» рассматриваются не столько как цель обучения, сколько как база, «полигон» для организации полноценной в интеллектуальном отношении деятельности. Для формирования личности, достижения высокого уровня ее развития именно эта деятельность, как правило, оказывается более значимой, чем те конкретные математические знания, которые послужили базой.

И еще одно важное обстоятельство, присущее именно математике: она воспитывает такой склад ума, который требует критической проверки и логического обоснования тех или иных положений и точек зрения. Элемент сомнения — это здоровое рациональное зерно, присущее процессу математического мышления, — нигде и никогда не помешает любому профессионалу.

Настоящее учебное пособие – не учебник, а именно пособие, т.е. учебное издание, дополняющее или частично заменяющее учебник. По определению, учебник должен содержать систематическое изложение учебной дисциплины, соответствующее учебной программе. Однако следует учесть, что до настоящего времени учебников, предназначенных именно для студентов-гуманитариев, нет, поэтому студенты вынуждены пользоваться учебниками для «технарей» или общего, широкого профиля, в которых необходимые вопросы рассматриваются либо слишком углубленно, либо не затрагиваются вообще.

Анализ учебной работы ряда вузов по гуманитарным направлениям показывает, что наибольшие трудности в практике реализации трех составляющих естественно-научного блока – математики, информатики, естествознания – связаны, прежде всего, с введением в учебный процесс курса математики. Надеемся, что данная работа окажет помощь студентам при изучении дисциплины «Математика» в рамках гуманитарного профиля по направлениям и специальностям «Философия», «Религиоведение», «Культурология», «Теология», «Филология», «Лингвистика», «Журналистика», «Книжное дело», «История», «Политология», «Социальная работа», «Регионоведение», «Юриспруденция», «Искусство», «Востоковедение, африканистика», «Конфликтология», а также «Психология», «Социология», «Физическая культура» и др.

Пособие написано на основе практических занятий и лекций, читавшихся автором в течение нескольких лет студентам юридического и психолого-педагогического факультетов Новосибирского гуманитарного института. Объем курса определен в соответствии с действующим государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Математика – это орудие, специально приспособленное для того, чтобы иметь дело с отвлеченными понятиями любого вида, и в этой области нет предела ее могуществу.

П. Дирак

I. Методологические проблемы математики

Предмет математики нельзя ни подменять формальными логическими схемами, ни низводить до уровня коллекции разрозненных фактов. Математика есть учение об общих формах, свойственных реальному бытию, она создает постоянно развивающиеся теории, пригодные для самых различных запросов естествознания и техники. Именно это позволяет применять математические методы, разработанные при решении задач одной области науки, к совершенно непохожим на них задачами, относящимся к совсем иным областям знания.

1.1. Предмет математики

Известны два подхода к определению предмета математики. Одно определение дано Ф.Энгельсом, другое — коллективом французских математиков под общим псевдонимом Н.Бурбаки.

Согласно Ф. Энгельсу, «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевывать его происхождение из внешнего мира». Хотя это нельзя считать полным определением математики, поскольку оно не раскрывает метод и цели изучения математики, но тем не менее оно отражает, что объект изучения создан умом человека не произвольно, а в связи с реальным миром.

Второй подход отражает методологические установки Н. Бурбаки, которые также определяют не математику, а только объекты ее исследования.

Прежде чем привести их определение, отметим, что новый подход к объектам исследования в математике связан с «революцией в аксиоматике». Суть ее состоит в переходе от конкретной содержательной аксиоматики к аксиоматике сначала абстрактной, а затем полностью формализованной.

В конкретной содержательной аксиоматике, подобной аксиоматике Евклида, исходные понятия и аксиомы в качестве интерпретации имеют единственную систему хотя и идеализированных, но конкретных объектов. В противоположность этому абстрактная аксиоматика допускает бесчисленное множество интерпретаций. Формализованная аксиоматика возникает на основе абстрактной и отличается, во-первых, точным заданием правил вывода, во-вторых, вместо содержательных рассуждений использует язык символов и формул, в результате чего содержательные рассуждения сводятся к преобразованию одних формул в другие, т. е. к особого рода исчислениям. В соответствии с этим одни и те же аксиомы могут описывать свойства и отношения самых различных по своему конкретному содержанию объектов.

Эта фундаментальная идея лежит в основе понятия абстрактной структуры. Н. Бурбаки выделяют три основных типа структур, которые играют важную роль при построении современной математики.

Алгебраические структуры. Примерами таких структур являются группы, кольца и поля. Основные характеристики алгебраической структуры: задание на некотором множестве A конечного числа операций с соответствующими свойствами, описываемых системой аксиом. В качестве элементов множества A могут выступать как математические объекты (числа, матрицы, перемещения, векторы), так и нематематические.

Структуры порядка характеризуются тем, что на рассматриваемом множестве задается отношение порядка (сравнение на числовых множествах), для которого выполняются следующие свойства: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Топологические структуры. Множество *M* обладает топологической структурой, если каждому его элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из *M,* называемых окрестностями этого элемента, причем эти окрестности должны удовлетворять определенным аксиомам (аксиомам топологических структур). С помощью топологических структур точно определяются такие понятия, как «окрестность», «предел», «непрерывность».

Кроме основных трех типов структур (порождающих), в математике приходится рассматривать сложные структуры, где порождающие структуры органически связываются с помощью объединяющей системы аксиом. Например, множество действительных чисел является сложной структурой, в которую одновременно входят три основные порождающие структуры.

Общей чертой различных понятий, объединенных родовым названием «математическая структура», является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Построить аксиоматическую теорию структуры — это значит вывести логические следствия из аксиом структуры, отказавшись от каких-либо других предложений относительно рассматриваемых элементов, от всяких гипотез относительно их «природы».

На основе сказанного Н. Бурбаки делают вывод: «В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм — математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм».

Итак, по Н. Бурбаки, математика — это «скопление математических структур», не имеющих к действительности никакого отношения. Следует сказать, что этот взгляд на математику разделялся многими учеными, которые считали, что определение Ф. Энгельса устарело.

Сопоставление двух подходов к определению объектов изучения математики можно провести только с позиции анализа истории развития математического знания. Академик А. Колмогоров выделил четыре основных периода развития математики.

Период зарождения математики, который продолжался до VI–V вв. до н. э., т. е. до того времени, когда математика стала самостоятельной наукой, имеющей собственный предмет и метод.

Еще за три тысячелетия до новой эры вавилоняне умели решать квадратные уравнения и знали теорему, которая ныне носит название теоремы Пифагора. Древние владели достаточно большим набором не связанных между собой правил и формул для решения многих практических задач: измерение земельных участков, составление календарей, строительство и т.д. К сожалению, до нас не дошли источники, по которым можно было бы судить, каким образом люди получили использованные ими в то время математические сведения.

Второй период развития математики — период *элементарной математики*: от VI–V вв. до н. э. до XVI в. н. э. включительно. Математика как логический вывод и средство познания природы — творение древних греков (VI–V вв. до н. э.). Не сохранилось документов, которые бы могли рассказать, что заставило древних греков прийти к новому пониманию математики и ее роли. А.Колмогоров считает, что изменение характера математической науки можно объяснить более развитой общественно-политической и культурной жизнью греческих государств, характеризовавшейся высоким развитием диалектики, искусством ведения спора. У греков к этому времени сложилось определенное миропонимание того, что Природа устроена рационально, а все ее явления протекают по точному и неизменному плану, который в конечном счете является математическим. Пифагорейцы (VI в. до н. э.) усматривали сущность вещей и явлений в числе и числовых соотношениях. Число для них было первым принципом в описании природы, оно же считалось материей и формой мира. Начала дедуктивного, аксиоматического метода были заложены также древнегреческими математиками.

Первые математические теории, абстрагированные из конкретных задач, создали необходимые и достаточные предпосылки для осознания самостоятельности и своеобразия математики. Это побудило античных математиков к систематизации и логической последовательности изложения ее основ. К IV в. до н.э. были выдвинуты принципы построения дедуктивной науки как логической системы, в основе которой лежат определенные начала — аксиомы. Развитие дедуктивной теории в первую очередь связано с именем Аристотеля (384–322 гг. до н.э.). Первое систематизированное дедуктивное изложение математики (геометрии) принадлежит Евклиду (около 300 г. до н.э.). Геометрическая система, известная под названием «Начала» Евклида, была блестящим, непревзойденным в течение свыше 20 веков (вплоть до XIX в.) образцом логической строгости, аксиоматического метода. Хотя на протяжении двух тысячелетий и вскрывались логические пробелы в системе исходных положений Евклида, однако первые реальные успехи в создании аксиом геометрии были достигнуты только к концу XIX в. Пашем (1882), Пеано (1889), Пиери (1889).

Таким образом, в Древней Греции произошел постепенный переход от практической геометрии к теоретической.

Третий период — период создания *математики переменных величин* (XVII, XVIII вв.—начало XIX в.) знаменуется введением переменных величин в аналитической геометрии Р. Декарта (1596–1650) и созданием дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона (1642–1727) и Г. Лейбница (1646–1716). Основными направлениями научной деятельности Ньютона были физика, механика, астрономия и математика. Математика в системе научных взглядов Ньютона была частью общей науки о природе, орудием физических исследований. Разработанный им метод флюксий служил математическим аппаратом для изучения движения и связанных с ним понятий скорости и ускорения.

Математические работы Лейбница также тесно были связаны с его философскими воззрениями, в частности с созданием универсального метода научного познания, «всеобщей характеристикой». Математику Лейбниц мыслил как науку об отражении всевозможных связей, зависимостей элементов, отношений в виде формул, особого исчисления — дифференциального. Основой построения нового исчисления было понятие бесконечно малой величины, которое понималось, прежде всего, на уровне интуитивных представлений.

Несмотря на недостаточно разработанное исчисление бесконечно малых в школах Ньютона и Лейбница, оно позволяло решать многие важнейшие задачи геометрии, механики, физики и прикладных наук. Лишь во второй половине XIX в., когда была создана теория действительного числа, стало возможным построить здание математического анализа на строго логической основе.

Приведенное выше высказывание Ф. Энгельса отражает развитие математической науки от ее зарождения до середины XIX в. Основным источником развития математики до этого времени были запросы практики и физики (в основном механики и оптики). Математические теории отражали количественные (метрические) характеристики процессов.

Подход к объектам математического исследования, по Н. Бурбаки, обусловлен **четвертым, современным периодом в развитии математики**, который начинается со второй половины XIX в. Состояние математики, сложившееся к этому времени, имеет следующие особенности.

Накопленный в XVII и XVIII вв. огромный фактический материал привел к необходимости углубленного логического анализа и объединения его с новых точек зрения. Связь математики с естествознанием приобретает все более сложные формы. Новые теории стали возникать не только в результате непосредственных запросов практики, естествознания и техники, но также из внутренних потребностей самой математики. Наиболее важные из них: развитие теории функций, теории групп, связанной с исследованием проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, создание неэвклидовых геометрий.

Вторая особенность этого периода развития математики связана со значительным расширением области ее приложений. Если до этого математика применялась в таких разделах физики, как механика и оптика, то теперь ее результаты находят приложение в электродинамике, теории магнетизма, термодинамике. Резко возросли потребности техники в математике: баллистика, машиностроение и др.

Третья особенность математики XIX в. обусловлена усиленным вниманием к вопросам обоснования, критического пересмотра исходных положений (аксиом), построению строгой системы определений и доказательств, а также к критическому рассмотрению логических приемов, употребляемых при этих доказательствах. Г. Рузавин пишет о математике этого периода: «Если раньше основным предметом ее изучения были метрические количественные отношения между величинами и пространственными формами, то начиная с середины XIX в. она все больше и больше обращается к анализу взаимосвязей неметрической природы». Такое расширение области исследования математики сопровождалось возрастанием абстрактности ее понятий и теорий.

Революционный переворот во взглядах на математику был связан как раз с ее обоснования, новым пониманием аксиоматического метода. Открытие в 1826 г. Н. Лобачевским (1792–1856) того, что замена пятого постулата Евклида о параллельных его отрицанием («Через точку вне прямой проходит более одной прямой, не пересекающей данную»), и выводы из системы аксиом абсолютной геометрии (где выполняются все аксиомы Евклида, кроме аксиомы параллельности) и аксиомы параллельности Лобачевского не привели к логическим погрешностям.

Это развило столь же стройную и богатую содержанием геометрию, как и геометрия Евклида, послужило толчком в изменении взглядов на математику. Сразу встал вопрос о необходимости обоснования новой геометрии, исследовании ее непротиворечивости (из данной системы аксиом нельзя получить двух взаимоисключающих выводов). В этой связи получает дальнейшее развитие аксиоматический метод: 1) решается проблема непротиворечивости, полноты и независимости системы аксиом; 2) появляется новый взгляд на аксиоматическую теорию как бессодержательную, формально-логическую систему. Решение этих проблем было предложено Д. Гильбертом (1862–1943).

Сущность аксиоматического метода состоит в том, что все объекты исследования, достигшие уровня зрелости, достаточного для оформления в теорию, прибегают к аксиоматическому методу, а через него, хотя и косвенно, к математике. Это можно описать следующим образом:

1. Строится абстрактная теория. В ее основании лежат термины двоякого рода: одни обозначают элементы одного или нескольких множеств (например, «точки», «прямые» и т.д.), другие — отношения между этими элементами (например, «лежать», «между» и т.д.). Этим терминам пока не приписывают содержательный смысл, они — только слова.

Устанавливаются аксиомы, которым должны удовлетворять термины. Из аксиом выводятся логические следствия (теоремы). Для сокращения речи вводятся новые термины с помощью определений.

2. Терминам абстрактной теории приписывается содержательный смысл. Теперь их роль меняется, они выражают понятия, имеющие более или менее наглядное, осязательное содержание. Следует проверить, соблюдаются ли для этих понятий аксиомы абстрактной теории.

Система, полученная путем приписывания содержательного смысла абстрактной теории, называется моделью или интерпретацией этой теории.

Если каждая аксиома системы бессодержательной теории выполняется в построенной интерпретации, то этим доказывается относительная непротиворечивость исходной теории. Доказать непротиворечивость математической теории внутренними средствами математики невозможно. Так, для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского была построена французским математиком А. Пуанкаре (1854—1912) модель исходящая из предположения, что геометрия Евклида непротиворечива. Вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида был сведен Д. Гильбертом к непротиворечивости арифметики. Доказанные в 30-е годы XX в. теоремы приводят к выводу о том, что доказать непротиворечивость арифметики математическими средствами нельзя.

Новый взгляд на аксиоматический метод в корне изменил прежние представления о геометрии как полуэмпирической науке. Из открытий неэвклидовых геометрий и построения их интерпретаций следовало, что евклидова и неэвклидовы геометрии не представляют непосредственное описание эмпирических свойств реального физического пространства, а являются абстрактными системами утверждений, истинность которых может быть проверена после соответствующей конкретной интерпретации.

Таким образом, подход Н. Бурбаки к определению математики как «скоплению абстрактных, бессодержательных, математических структур» был предопределен новым пониманием аксиоматического метода.

Однако подход Н. Бурбаки встретил и негативное отношение, поскольку они не считали нужным выяснять отношение рассматриваемых структур к действительному миру. Не имея возможности описать различные оценки философов и математиков и позиции Н. Бурбаки, остановимся на точке зрения ведущих отечественных математиков А. Колмогорова, А. Александрова, В. Гнеденко. Они считают, что во времена Энгельса математика изучала количественные отношения между величинами и пространственными формами. Теперь она поднялась до изучения абстрактных структур и категорий. Но на этом основании нельзя считать, что объект изучения математики стал иным, что вместо количественного аспекта действительного мира математика стала исследовать нечто принципиально иное, что современный этап ее развития не связан с предшествующими этапами.

В действительности дело заключается в том, что качественные изменения, происшедшие в математике, дают ей возможность исследовать количественные отношения глубже и шире. А. Колмогоров приходит к выводу о том, что круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, чрезвычайно расширяется: в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, все разнообразие форм пространств любого числа измерений и т.п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» определение математики как науки о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира применимо и на современном этапе ее развития.

Эту позицию разделяет и А. Александров: в математике рассматриваются не только формы и отношения, непосредственно абстрагированные из действительности, но и логически возможные, определяемые на основе уже известных форм и отношений. Б. Гнеденко обращает внимание на то, что, хотя любая ветвь современной математики действительно изучает математические структуры, данное Н. Бурбаки определение отнюдь не находится в антагонистических отношениях с определением Ф. Энгельса, а лишь с определенных позиций его дополняет.

Подводя итог сказанному, можно заключить, что подход к определению математики через математические структуры представляет собой выражение определенного этапа математического познания. Математика была и остается определенным «инструментом» познания мира, его пространственных форм и количественных отношений. В настоящее время, как уже отмечалось, этот «инструмент» проникает в изучение все более сложных процессов и явлений, в том числе и неметрической природы. Без осознания этого фундаментального философского, методологического положения не может быть сформировано целостное представление об общей картине мира.

Математика претендует на статус «особой» науки, изначально превышающей все прочие по уровню точности, истинности и непротиворечивости своих фундаментальных положений. В сфере *конечных величин* математика действительно относительно точна и непротиворечива; этого достаточно для более или менее адекватного количественного моделирования самых различных конечных по размерности предметных областей. Что же касается сферы бесконечного, то здесь у современной математики есть свои противоречия, которые могут быть преодолены лишь совместными усилиями математиков, философов и логиков.

1.2. Математический язык: особенность, становление и развитие

Математика подобно любой науке многомерна. На когнитивном уровне она выступает как мышление, на перцептуальном — как чувствование, на лингвистическом — как язык. Лингвистическое измерение математики заслуживает особого рассмотрения. Дело в том, что лишь благодаря ему математике придается интерсубъективный, общезначимый для всех людей характер. Мышление и чувствование всегда индивидуально. Язык же является достоянием всех.

Как известно, язык — это система условных знаков, принятых в некотором сообществе и обеспечивающая коммуникацию его членов. Язык математики удовлетворяет этому определению. Подобно любому языку он состоит из совокупности высказываний (предложений). Особенность математического языка заключается в том, что в нем широко используются математические символы, объединяемые формулой. Учитывая это, часто говорят, что математика — это язык символов и формул. Впрочем, язык математики не сводится к символьным записям и утверждениям. В любом математическом труде используются такие слова и обороты речи, позаимствованные из естественных языков: «предположим, что...», «и будем исходить из следующих аксиом», «математика — это наука о...» и т.п. Но в контексте математики этим словам и оборотам речи придается специфическое значение, которое сопрягается со смыслом формализованных утверждений.

Язык математики — это язык людей, имеющих дело с математическими структурами. В одних случаях речь идет непосредственно об этих структурах, в других на их основе разрешаются те или иные конкретные ситуации.

Язык математики часто сравнивают с естественным языком. При этом, как правило, в восторженных тонах дается характеристика одного из них. Следует учитывать, что речь идет о *различных* языках. В случае математических структур для их описания необходим язык математики; на его фоне естественный язык громоздок и двусмыслен. В житейских ситуациях естественный язык имеет преимущества перед математическим языком и ясно почему: здесь можно обойтись без детальных знаний о математических структурах. Естественный язык не нуждается в его замене математическим языком. Существенно другое — не усвоивший язык математики не воспользовался благоприятнейшей возможностью своего личного развития. Самое интересное состоит в том, что в общении друг с другом людям то и дело приходится переходить с естественного языка на язык математики и обратно. С различными языковыми переходами связаны также междисциплинарные функции математики.

До тех пор пока исследователь находится в пределах чистой математики он обходится математическим языком. При это ему нет нужды обращаться к каким либо другим языкам. Ситуация редко изменяется, когда строятся так называемые математические *модели* тех или иных (физических, биологических, социальных и т.д. явлений). Математические модели строятся из терминов, интерпритированных на конкретную объектную область, являющуюся предметом той или иной конкретной науки. Использование математических моделей переводит чистую математику в прикладную. Например, рассуждая о евклидовой геометрии, мы пользуемся языком геометрии. В случае обсуждения свойств физического макропространства на основе ньютоновской механики используется язык механики, а не математики. Если речь заходит о евклидовской модели физического пространства, то приходится, устанавливая соответствие между геометрией и механикой, одновременно использовать два языка, математический и физический.

Итак, в математике как таковой используется математический язык. В конкретной науке используется язык данной науки (в физике — язык физики, в экономике — язык экономики). В прикладной математике, т.е. в случае математических моделей, используются два языка: математический язык плюс язык конкретной науки.

Как же устроен математический язык? Прежде всего язык абстрактный, в противоположность нашим конкретным языкам, где каждое слово имеет конкретное значение. Язык математических формул и знаков обладает большей универсальностью и используется во всех сферах человеческой деятельности. Система математических знаков является достоянием всего человечества, она вырабатывалась на протяжении тысячелетий. Математический язык — это результат совершенствования естественного языка по различным направлениям: устранение громоздкости и двусмысленности естественного языка, расширение его выразительных возможностей. Он употребляется как средство выражения математической мысли.

Язык в широком смысле — это словарь, грамматика, рассказы, повести, пьесы и романы, написанные на этом языке. Что же в математическом языке является аналогом слов и грамматики, а что — рассказов и повестей? Аналог слов и грамматики — математическая операционная система, а рассказов, повестей и прочего — математические модели (рис. 1).

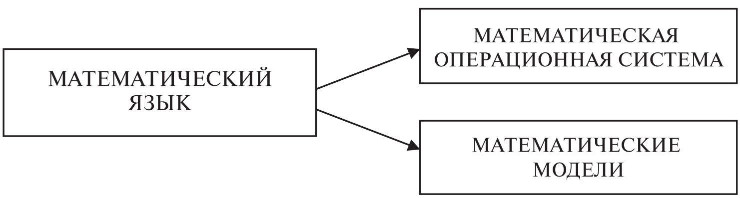


Рис. 1

Овладение математическим языком предполагает сознательное усвоение содержания математических понятий, отношений между ними (аксиом, теорем) и умение рационально и грамотно выразить математическую мысль в устной и письменной форме с помощью средств математического языка, а также свободное оперирование математическими знаниями, умениями и навыками на практике.

Овладение математическим языком формирует навыки рационального выражения мысли: последовательность, точность, ясность, лаконичность, выразительность, экономность, информированность. Сознательное и свободное владение математическим языком является условием и средством овладения математической культурой (рис. 2).

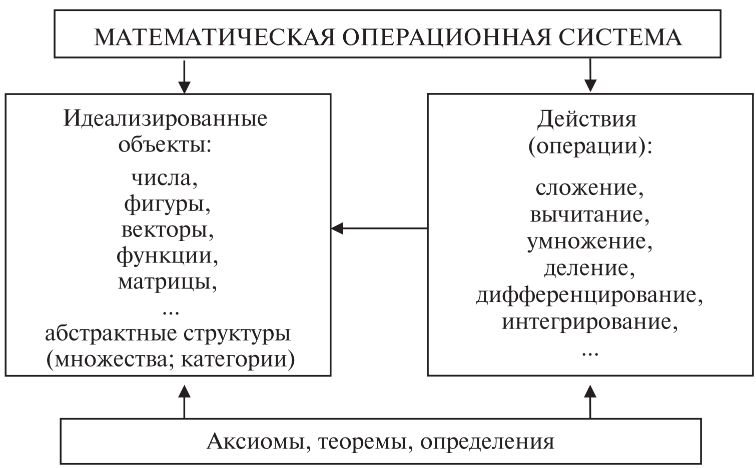


Рис. 2

Недостатки языка:
- специфичность;
- ограниченная возможность отображения.

Достоинства языка:

• позволяет с помощью символов выражать мыслительные операции в сокращенном и свернутом виде;

• отличается большой прогностической силой.

Множество абстрактных элементов и действий с ними образует то, что можно назвать **операционной системой**: *элементы* — это числа, векторы, функции, матрицы...; *действия* (операции) — сложение, вычитание, умножение, деление, дифференцирование, интегрирование...

У операционной системы есть четкие внутренние побудительные мотивы развития и цели: это расширение и выполнимость операций, охват всего, что мы хотим описать. Проиллюстрируем эти мотивы на примере истории становления и развития математической операционной системы. При этом будем придерживаться не хронологии событий, а логики их следования.

Все начиналось с целых чисел. Затем возникли действия с ними: сложение и обратное действие — вычитание; умножение и деление. Невыполнимость деления была преодолена введением дробных чисел, вычитания — отрицательных чисел.

Действительные числа — камень преткновения древних греков — получили обоснование, успокоившее математиков, только в сечениях рациональных чисел Дедекинда и сходящихся их последовательностей Вейерштрасса. Так пришли к действительным числам, с которыми выполнимы операции сложения, вычитания, умножения, деления, нахождения предела, которые обозначаются соответственно знаками «+», «–», «×», «:», «lim» (исключения с делением на нуль и пределом неограниченно возрастающей последовательности не в счет: на то и исключения, хотя и их избегают в так называемом нетрадиционном математическом анализе).

После действительных чисел появились комплексные — как замыкание операции решения квадратных уравнений. С их введением любое алгебраическое уравнение стало разрешимым. Затем

Гамильтон (1805–1865) придумал кватернионы как расширение комплексных чисел. Они не привились, но их частный случай — векторы и действия с ними (сложение, вычитание, скалярное и векторное произведения) вошли в широкий обиход математики.

Потребность в описании эволюционных процессов изменения привела к появлению переменных величин, а затем и функций от них, дифференциального и интегрального исчислений, дифференциальных уравнений.

Возникли множества и действия с ними (объединение, пересечение, дополнение, произведение) и многое-многое другое.

Как общий прием расширения операционной системы, помимо отмеченного уже расширения для выполнимости операций, можно указать перевод функций как операций в элементы, операций над функциями-элементами опять в элементы, с которыми, в свою очередь, также можно производить операции. Так операционная система пополнилась современным функциональным анализом и теорией операторов, причем операционная система обрела, исходя из своих внутренних законов развития, теорию линейных операторов раньше, чем она потребовалась физике для описания явлений микромира.

Помимо принципиальной выполнимости операций, огромное значение имеет фактическая выполнимость, простота и доступность этой выполнимости. Так, древние греки с трудом вычисляли произведение, например, наших чисел 473 и 328 потому, что записывали их в виде CDLXXIII и CCCXXVIII.

Оливер Хевисайд (1850—1925), не признанный современниками, сделал операцию интегрирования легко выполнимой и сводимой к делению на комплексное число. Это позволило ему решить очень много задач, не решенных ранее. Хевисайд был великим ученым: предсказал наличие в верхних слоях атмосферы ионизированного слоя, отражающего радиоволны; подсчитал излучение движущегося электрона; указал формулу, известную в науке как знаменитая формула Эйнштейна.

Современные ЭВМ и методы вычислений и программирования в обсуждаемом плане следует рассматривать как новые, эффективные средства реализации трудных операций математической операционной системы.

1.3. Геометрия Евклида — первая естественно-научная теория

Исторический обзор обоснования геометрии. Основным методом современной математики, в частности геометрии, является аксиоматический метод, который берет свое начало от «Оснований геометрии» Д. Гильберта. Геометрия, прежде чем стать аксиоматической теорией, прошла долгий путь эмпирического развития.

Первые сведения о геометрии были получены цивилизациями Древнего Востока — в Египте, Китае, Индии — в связи с развитием земледелия, ограниченностью плодородных земель и др. В этих странах геометрия носила эмпирический характер и представляла собой набор отдельных «рецептов-правил» для решения конкретных задач. Уже во II тысячелетии до н.э. египтяне умели точно вычислить площадь треугольника, объем усеченной пирамиды, площадь круга, а вавилоняне знали теорему Пифагора. Заметим, что доказательств не было, а указывались правила для вычислений.

Греческий период развития геометрии начался в VII–VI вв. до н. э. под влиянием египтян. Отцом греческой математики считается знаменитый философ Фолес (640–548 гг. до н.э.). Фолесу, точнее его математической школе, принадлежат доказательства свойств равнобедренного треугольника, вертикальных углов. В дальнейшем геометром Древней Греции были получены результаты, охватывающие почти все содержание современного школьного курса геометрии.

Философская школа Пифагора (570–471 гг. до н.э.) открыла теорему о сумме углов треугольника, доказала теорему Пифагора, установила существование пяти типов правильных многогранников и несоизмеримых отрезков. Демокрит (470–370 гг. до н.э.) открыл теоремы об объемах пирамиды и конуса. Евдокс (410–356 гг. до н.э.) создал геометрическую теорию пропорций (т. е. теорию пропорциональных чисел).

Менехм и Аполлоний изучили конические сечения. Архимед (289-212 гг. до н.э.) открыл правила вычисления площади поверхности и объема шара и других фигур. Он же нашел приближенное значение числа π.

Особая заслуга древнегреческих ученых состоит в том, что они первыми поставили проблему строгого построения геометрических знаний и решили ее в первом приближении. Проблему поставил Платон (428–348 гг. до н.э.). Аристотелю (384–322 гг. до н.э.) — крупнейшему философу, основателю формальной логики принадлежит четкое оформление идеи построения геометрии в виде цепи предложений, которые вытекают одно из другого на основе лишь правил логики.

Эту задачу пытались решить многие греческие ученые (Гиппократ, Федий).

Евклид (330–275 гг. до н. э.) — крупнейший геометр древности, воспитанник школы Платона, жил в Египте (в Александрии). Составленные им «Начала» дают систематическое изложение начал геометрии: выполненно на таком научном уровне, что многие века преподавание геометрии велось по его сочинению. «Начала» состоят из 13 книг (глав):

I–VI — планиметрия;

VII–IX — арифметика в геометрическом изложении;

X — несоизмеримые отрезки;

XI–XIII — стереометрия.

Замечание 1. В «Начала» были включены не все сведения, известные в геометрии. Например, в эти книги не вошли: теория конических сечений, кривые высших порядков.

Замечание 2. Каждая книга начинается с определения тех понятий, которые в ней встречаются. Например, в книге 1 даны 23 определения. Приведем определения первых четырех понятий:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Границы линии суть точки.
4. Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.

Евклид приводит предложения, принимаемые без доказательства, разделяя их на постулаты и аксиомы. Постулатов у него пять, а аксиом — семь. Вот некоторые из них.

Постулаты

⟨...⟩ IV. И чтобы все прямые углы были равны.

V. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

Аксиомы

I. Равные порознь третьему равны между собой.

II. И если к равным прибавить равные, то получим равные.

⟨...⟩ VII. И совмещающиеся равны.

Замечание 1. Евклид не указал, в чем заключается различие между постулатами и аксиомами. До сих пор нет окончательного решения этого вопроса.

Замечание 2. Евклид излагает теорию геометрии так, как требовали греческие ученые, особенно Аристотель, т.е. теоремы расположены так, что каждая следующая доказывается только на основе предыдущих. Иначе говоря, Евклид развивает геометрическую теорию *строго логическим путем*. В этом и заключается историческая заслуга Евклида перед наукой.

«Начала» Евклида сыграли огромную роль в истории математики и всей человеческой культуры. Эти книги переведены на все основные языки мира, после 1482 г. они выдержали около 500 изданий.

Недостатки системы Евклида. С точки зрения современной математики изложение «Начал» следует признать несовершенным. Назовем основные недостатки этой системы:

1) многие понятия включают такие понятия, которые, в свою очередь, должны быть определены (например, в определениях 1–4 главы 1 используются понятия ширины, длины, границы, которые, в свою очередь, должны быть определены);

2) список аксиом и постулатов недостаточен для построения геометрии строго логическим путем. Например, в этом списке нет аксиом порядка, без которых нельзя доказать многие теоремы геометрии; заметим, что на это обстоятельство обратил внимание Гаусс. В указанном списке отсутствуют также определения понятия движения (совмещения) и свойств движения, т.е. аксиом движения. В списке не хватает также аксиомы Архимеда (од-

ной из двух аксиом непрерывности), которая играет важную роль в теории измерений длин отрезков, площадей фигур и объектов тел. Заметим, что на это обратил внимание современник Евклида Архимед;

3) постулат IV явно лишний, его можно доказать как теорему.

Особо отметим пятый постулат. В книге I «Начал» первые 28 предложений доказаны без ссылок на пятый постулат. Попытка минимизировать список аксиом и постулатов, в частности доказать постулат V как теорему, проводилась со времен самого Евклида. Прокл (V в. н. э.). Омар Хайям (1048–1123), Валлис (XVII в.), Саккери и Ламберт (XVIII в.), Лежандр (1752–1833) также пытались доказать постулат V как теорему. Их доказательства были ошибочными, но они привели к положительным результатам — к рождению еще двух геометрий (Римана и Лобачевского).

Неевклидовы геометрические системы. Н. Лобачевский (1792-1856), который открыл новую геометрию — геометрию Лобачевского, также начал с попытки доказательства постулата V.

Николай Иванович развил свою систему до объема «Начал» в надежде получить противоречие. Не получил, но сделал (1826) правильный вывод: существует геометрия, отличная от геометрии Евклида.

На первый взгляд этот вывод кажется недостаточно обоснованным: может быть, развивая его дальше, можно прийти к противоречию. Но этот же вопрос относится и к геометрии Евклида. Иначе говоря, обе геометрии равноправны перед вопросом о логической непротиворечивости. Дальнейшие исследования показали, что из непротиворечивости одной следует непротиворечивость другой геометрии, т. е. имеет место равноправие логических систем.

Лобачевский был первым, но не единственным, сделавшим вывод о существовании другой геометрии. Гаусс (1777–1855) высказал эту идею еще в 1816 г. в частных письмах, но в официальных публикациях заявление не сделал.

Три года спустя после публикации результатов Лобачевского (1829), т. е. в 1832 г., вышла работа венгра Я. Бойяи (1802–1860), который в 1823 г. пришел к выводу о существовании другой геометрии, но опубликовал идею позже и в менее развитом, чем у Лобачевского, виде. Поэтому справедливо, что эта геометрия носит имя Лобачевского.

Общему признанию геометрии Лобачевского в значительной степени способствовали работы геометров после Лобачевского. В 1868 г. итальянский математик Э. Бельтрами (1825–1900) доказал, что на поверхности постоянной отрицательной кривизны (так называемая псевдосфера) имеет место геометрия Лобачевского. Уязвимым местом доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, основанного на интерпретации Бельтрами, было то, что, как показал Гильберт (1862–1943), в евклидовом пространстве не существует полной поверхности постоянной отрицательной кривизны без особенностей. Поэтому на поверхности постоянной отрицательной кривизны можно интерпретировать только часть плоской геометрии Лобачевского.

Этот недостаток был устранен Пуанкаре (1854–1912) и Клейном (1849–1925).

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского было вместе с тем и доказательством независимости пятого постулата от остальных. Действительно, в случае зависимости геометрия Лобачевского была бы противоречивой, так как она содержала бы два взаимно исключающих утверждения.

Дальнейшие исследования евклидовой геометрии показали неполноту системы аксиом и постулатов Евклида. Исследование аксиоматики Евклида завершил в 1899 г. Гильберт.

Аксиоматика Гильберта состоит из пяти групп:

- аксиомы связи (принадлежности);
- аксиомы порядка;
- аксиомы конгруэнтности (равенства, совпадения);
- аксиомы непрерывности;
- аксиома параллельности.

Эти аксиомы (всего 20) относятся к объектам трех родов: точек, прямых, плоскостей, а также к трем отношениям между ними: принадлежит, лежит между, конгруэнтен. Конкретный смысл точек, прямых, плоскостей и отношений не указан. Они косвенно определены через аксиомы. Благодаря этому построенная на основе аксиом Гильберта геометрия допускает различные конкретные реализации.

Геометрическая система, построенная на перечисленных аксиомах, называется *евклидовой геометрией*, так как совпадает с геометрией, изложенной Евклидом в «Началах».

Геометрические системы, отличные от евклидовой, называются *неевклидовыми геометриями*. Согласно общей теории относительности, в пространстве ни та, ни другая не являются абсолютно точными, однако в малых масштабах (земные масштабы являются также достаточно «малыми») они вполне пригодны для описания пространства. Причиной того, что на практике применяются евклидовы формулы, является их простота.

Гильберт всесторонне исследовал свою систему аксиом, показал, что она непротиворечива, если не противоречива арифметика (т. е. на самом деле доказана содержательная или, так называемая, внешняя непротиворечивость). Он завершил многовековые исследования геометров по обоснованию геометрии. Эта работа была высоко оценена и в 1903 г. отмечена премией имени Лобачевского.

В современном аксиоматическом изложении геометрии Евклида не всегда пользуются аксиомами Гильберта: учебники по геометрии построены на различных модификациях этой системы аксиом.

В XX в. было обнаружено, что геометрия Лобачевского не только имеет важное значение для абстрактной математики, как одна из возможных геометрий, но и непосредственно связана с приложениями математики. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая в работах А. Эйнштейна и других в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского.

1.4. Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории, в том числе в гуманитарных науках

Роль математики в общечеловеческой культуре огромна. Обращаясь к истории философии, следует отметить, что ученые, создававшие математику нового времени, рассматривали математическую науку как составную часть философии, которая служила средством познания мира (рис. 3).

Место математики в жизни и в науке определяется тем, что она позволяет перевести «общежитейские», интуитивные подходы к действительности, базирующиеся на чисто качественных (а значит, приблизительных) описаниях, на язык точных определений и формул, из которых возможны количественные выводы. Не случайно говорят, что степень научности той или иной дисциплины измеряется тем, насколько в ней применяется математика.

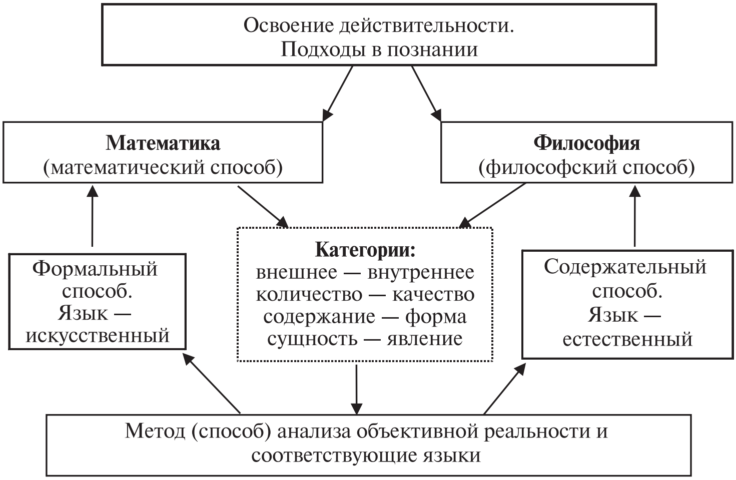


Рис. 3

Математика является частью общечеловеческой культуры. На протяжении нескольких тысячелетий развития человечества шло накопление математических фактов, что привело около двух с половиной тысяч лет тому назад к возникновению математики как науки. Квадривий, изучавшийся в Древней Греции, включал арифметику, геометрию, астрономию и музыку. О значении математики для человечества говорит тот факт, что «Начала» Евклида издавалась наибольшее число раз (не считая Библии).

Математика способствует выработке научного мировоззрения и достижению необходимого общекультурного уровня. История зарождения великих математических идей, судьбы выдающихся математиков (Архимед, Галуа, Паскаль, Галилей, Гаусс, Эйлер, Ковалевская, Чебышев и др.) дают пищу для ума и сердца, примеры беззаветного служения науке, приводят к философским размышлениям и нравственным поискам.

Математические рассуждения позволяют правильно устанавливать причинно-следственные связи, что безусловно должен уметь каждый человек. Стиль изложения математики, ее язык влияет на речь. Каждый культурный человек должен иметь представление об основных понятиях математики, таких, как число, функция, математическая модель, алгоритм, вероятность, оптимизация, величины дискретные и непрерывные, бесконечно малые и бесконечно большие. Речь идет именно об основных понятиях и идеях, а не о наборе конкретных формул и теорем.

Человек, знающий математику лишь по школьному курсу, вряд ли сознает, сколь мизерное (но предельно необходимое) количество знаний, накопленных задолго до начала XX в., сообщается в школе. А ведь в наши дни в мире ежемесячно выходят сотни математических журналов, публикующих тысячи новых теорем с трудными, порой многостраничными доказательствами. И это не считая публикаций по приложениям математики. Следует отметить тесную взаимосвязь между расширением ее фронта, усилением активности и изменением представлений математиков о предмете своей науки (хотя полного единодушия во взглядах нет).

Сейчас не удивишь словосочетаниями «математическая лингвистика», «математическая биология», «математическая экономика» и т.п.

Какую дисциплину ни взять, вряд ли кому-нибудь покажется невозможным присоединение к ее наименованию эпитета «математический». Математика занимает сегодня видное место в жизни общества.

Тем не менее повсеместный триумф математики некоторым кажется загадочным, даже подозрительным. В самом деле, не вызывает сомнений право на всеобщее признание, например, физики или химии. Физика открывает нам новые источники энергии, новые средства быстрой связи. Химия создает искусственные ткани, а сейчас пытается создать искусственную пищу. Неудивительно, что эти науки, помогающие человеку в его извечных поисках энергии, связи, одежды и еды, прочно вошли в нашу жизнь.

Что же дает математика, которая не открывает новых способов передвижения, как физика, и не создает новых вещей, как химия? Почему появление в какой-либо отрасли науки и техники математических методов означает и достижение в этой отрасли определенного уровня зрелости, и начало нового этапа развития?

Еще не давно ответ на эти вопросы состоял в том, что математика дает возможность хорошо вычислять и тем самым позволяет осуществлять математическую обработку цифровых данных, связанных с тем или иным изучаемым процессом. Однако при всей важности вычислительного аспекта математики, особенно в последние годы в связи с бурным ростом вычислительной техники, он оказывается неглавным при попытке объяснить причины математизации современного мира.

Главная причина этого процесса такова: математика предлагает весьма общие и достаточно четкие логические модели для изучения окружающей действительности в отличие от менее общих и более расплывчатых моделей, предлагаемых другими науками. Такие модели математика дает с помощью своего особого языка — языка чисел, различных символов. Объектами исследования математики служат логические модели, построенные для описания явлений в природе, технике, обществе. Математической моделью изучаемого объекта (явления, процесса и т.п.) называется логическая конструкция, отражающая геометрические формы этого объекта и количественные соотношения между его числовыми параметрами. При этом математическая модель, отображая и воспроизводя те или иные стороны рассматриваемого объекта, способна замещать его так, что исследование модели даст новую информацию об объекте, опирающуюся на принципы математической теории, сформулированные математическим языком законы природы. Если математическая модель верно отражает суть данного явления, то она позволяет находить и не обнаруженные ранее закономерности, давать математический анализ условий, при которых возможно решение теоретических или практических задач, возникающих при исследовании этого явления.

Возникает один общий вопрос: нужна ли математика гуманитарию вообще и юристу в частности?

Известно, что математика является частью общечеловеческой культуры, такой же неотъемлемой и важной как право, медицина, естествознание и многое другое. Все лучшие достижения человеческой мысли, человеческих рук и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Исходя из этого, для студента-гуманитария математика прежде всего *общеобразовательная дисциплина,* как, например, право для студента-математика.

Но значение математики этим не исчерпывается. Напомним слова М. Ломоносова: «Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит». Математика влияет на упорядочение ума общностью и абстрактностью своих конструкций. Математика полна всякого рода правил, общих, строго определенных методов решения различных классов однотипных задач. Решая любую задачу, человек должен строго следовать точному предписанию (алгоритму) о том, какие действия и в каком порядке надо выполнить. Нередко изучающему математику приходится составлять подобные предписания, т. е. находить алгоритм.

Можно утверждать, что математика учит точно формулировать разного рода правила, предписания, инструкции и строго их исполнять (не последнее качество, необходимое, например, любому юристу). В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, цель которых — *выявить истину*. Любой правовед, как и математик, должен уметь рассуждать логически, применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Поэтому, занимаясь математикой, будущий правовед формирует свое *профессиональное мышление*.

Кроме того, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. Существенную роль играют статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала.

Мы живем в век математики. С начала XX в. она активно проникает во все области человеческих знаний, подтверждая слова К. Маркса: «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой». В настоящий момент одни науки уже безоговорочно приняли математику на вооружение, другие только начали ее применять. Гуманитарии, например, относятся к последним. Среди них немало еще сомневающихся в перспективности использования математических методов. Однако в настоящее время большая их часть спорит уже не о том, «нужно ли применять», а о том – «где и как лучше применять»[1].

---

[1] См., например: *Миронов Б. Н., Степанов З. В.* Историк и математика. Л.: Наука, 1975; *Биркгоф Г.* Математика и психология. М.: Сов. радио, 1977; *Моисеев Н. Н.* Математика в социальных науках // Математические методы в социологическом исследовании. М., 1981; *Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М.* Математика: Учебный курс для юристов. М.: Юрайт, 1999.

Математика — это феномен общемировой культуры, в ней отражена история развития человеческой мысли. Математика, с ее строгостью и точностью, формирует личность, предоставляет в ее распоряжение важнейшие ресурсы, столь необходимые для обеспечения наилучшего будущего.

Итак, математическое образование важно с различных точек зрения:

логической — изучение математики является источником и средством активного интеллектуального развития человека, его умственных способностей;

познавательный — с помощью математики познается окружающий мир, его пространственные и количественные отношения;

прикладной — математика является той базой, которая обеспечивает готовность человека как к овладению смежными дисциплинами, так и многими профессиями, делает для него доступным непрерывное образование и самообразование;

исторической — на примерах из истории развития математики прослеживается развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом;

философской — математика помогает осмыслить мир, в котором мы живем, сформировать у человека развивающиеся научные представления о реальном физическом пространстве.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Приведите 2—3 распространенных в литературе определения понятия «математика».

2. Какие аксиомы и постулаты привел Евклид в своих «Началах» в III в. до н.э.?

3. Определите основные этапы становления современной математики.

4. В чем состоят достоинства и недостатки математического языка?

5. В чем особенность математической индукции?

6. В чем заключается сущность аксиоматического метода?

Сегодня мы знаем, что, логически говоря,
возможно вывести почти всю современную математику
из единого источника – теории множеств.

Н. Бурбаки

2. Теория множеств

Одним из методов математики является метод применения абстракции, при которой не принимаются во внимание некоторые конкретные обстоятельства. Это неизбежно приводит к возникновению понятия множества – основного понятия математики. Язык теории множеств, включающий большое число различных понятий и связей между ними, все глубже проникает в литературу. Поэтому надо понимать этот язык и уметь им пользоваться.

Было бы неправильно переоценивать теорию множеств: это всего-навсего удобный язык, и, если вы в совершенстве владеете им и больше ничего из математики не знаете, едва ли от этого будет прок. Наоборот, если вы знаете «много математики» и совсем незнакомы с теорией множеств, вы, возможно, достигнете успехов. Но если вы знаете *что-то* и из теории множеств, вы будете значительно лучше понимать язык математики.

2.1. Множества. Операции над множествами

Понятие множества является ключевым в математике, без которого невозможно изложение ни одного из ее разделов. Подсознательно первые представления о множестве у человека начинают формироваться с рождения, когда он погружается в удивительно многообразный мир окружающих его объектов и явлений. В нем уже генетически заложены возможности ускоренно воспроизвести весь опыт общения с этим миром, накопленный человечеством за многовековую историю. Уникальность этого генетического потенциала прежде всего и отличает человека от других существ. С первых же шагов мы не просто пополняем список знакомых нам объектов и явлений, а начинаем дифференцировать и классифицировать (горячие и холодные, сладкие и горькие, тяжелые и легкие, красные и зеленые и т.п.), объединяя тем самым объекты в некоторые совокупности. Первый же опыт общения с ними убеждает нас и в том, что каждый объект имеет сложную структуру (кто из нас не ломал ни одной игрушки, пытаясь выяснить из чего она состоит), представляет собой как бы определенную совокупность других объектов, из которых, как из составляющих, состоит сам.

Множество — первичное понятие математики, т. е. это понятие не определяется через другие, а только поясняется. Создатель теории множеств Г. Кантор (1845–1918) определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью», а также «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основании которого строятся остальные понятия математики, т.е. множество является основным строительным материалом математики.

Множество — это совокупность каких-либо объектов. Так, можно говорить о множестве целых чисел, о множестве точек на прямой, о множестве жителей города и т.д. Объекты, входящие в данное множество, называются *элементами множества*. Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, числа, функции, точки, углы, люди и т.д. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и ее приложимость к очень многим областям знания.

Множества, состоящие из конечного числа элементов (причем неважно, известно это число или нет, главное, оно существует), называются *конечными,* а множества, состоящие из бесконечного числа элементов, — *бесконечными.*

Множества обычно обозначаются большими буквами A, B, X, а их элементы малыми a, b, x.

Запись $x \in X$ означает, что объект x есть элемент множества X. Если x не принадлежит множеству X, то пишут $x \notin X$.

Запись $A \subset B$ (множество A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A принадлежит B. В этом случае множество A называют *подмножеством* множества B.

Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если $B \subset A$ и $A \subset B$. Например, множества $A = \{3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{7, 3, 9, 5\}$ равны, так как состоят из одинаковых элементов.

Если множество не содержит ни одного элемента, то его называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Совокупность допустимых объектов называют *основным (универсальным)* множеством (обычно $\boldsymbol{U}$). Множество задают либо *перечислением* его элементов, либо *описанием свойств* множества, которые четко определяют совокупность его элементов. При втором способе множество обычно определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают свойством α. В этом случае используют обозначение $A = \{x \in T\colon \alpha(x)\}$.

Например, множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ равно $A = \{x \in \mathbf{N}\colon x<6\}$ и $A=\{x \in \mathbf{N}\colon 0{,}5< x <5{,}9\}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Упражнения

1. Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой, если:

A – множество всех квадратов;

B – множество всех прямоугольников;

C – множество всех четырехугольников с прямыми углами;

D – множество всех прямоугольников с равными сторонами;

F – множество всех ромбов с прямыми углами.

Ответ. $A = D = F$; $B = C$.

2. Для каждого из слов: «сосна», «осколок», «насос», «колос» составьте множество его различных букв. Имеются ли среди них равные?

Ответ. $A = \{$с, о, н, а$\}$, $B = \{$о, с, к, л$\}$, $C = \{$н, а, с, о$\}$, $D = \{$к, о, л, с$\}$; $A = C$, $B = D$.

Алгебраические операции над множествами и их свойства излагаются, обычно, с применением *кругов Эйлера* или *диаграмм Венна* (рис. 4), а бинарные отношения иллюстрируются на *матрицах и графах*. Благодаря этому основные понятия теории множеств можно представить в табличной или графической форме.

Множества можно определять также при помощи *операций* над некоторыми другими множествами. Пусть имеются два множества A и B.

Объединение (сумма) $A \cup B$ есть множество всех элементов, принадлежащих A или B, т. е.

$$A \cup B = \{x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пересечение (произведение) $A \cap B$ есть множество всех элементов, принадлежащих как A, так и B, т. е.

$$A \cap B = \{x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$. Множества, не имеющие общих элементов ($A \cap B = \varnothing$), называют *непересекающимися* (расчлененными).

Разность $A \setminus B$ есть множество, состоящее из всех элементов A, не входящих в B, т. е.

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Например, $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$. Ее можно рассматривать как *относительное дополнение* B до A.

Симметрическая разность (дизъюнктивная сумма) $A \Delta B$ есть множество всех элементов, принадлежащих или A, или B (но не обоим вместе), т. е.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Например, {1, 2, 3} Δ {2, 3, 4}={1, 4}. Дизъюнктивная сумма получается объединением элементов множеств за исключением тех, которые встречаются дважды.

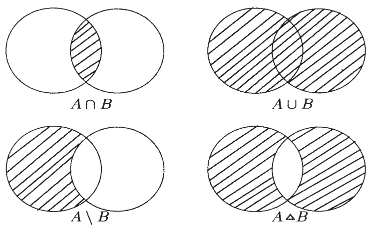


Рис. 4

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Являются ли эти множества равными? Определите пересечение, объединение, разности этих двух множеств. Одинаковы ли множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

Решение. Множества A и B не равны друг другу, так как содержат разные элементы. Между элементами этих множеств может быть установлено однозначное соответствие, поэтому множества являются эквивалентными. Пересечение множеств $A \cap B$ включает только те элементы, которые содержатся в обоих множествах, поэтому $A \cap B = \{2, 4\}$. Объединение $A \cup B$ включает все элементы, содержащиеся хотя бы в одном из множеств A или B, таким образом, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Разность $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$, а разность $B \setminus A = \{6, 8, 10\}$. Очевидно, что $A \setminus B$ и $B \setminus A$ не равны. Симметрическая разность $A \Delta B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$.

Упражнения

1. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Найти объединение, пересечение, разности этих множеств.

Ответ. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12\}$; $A \cap B = \{3, 6\}$; $A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$; $B \setminus A = \{9, 12\}$. $A \Delta B = \{1, 2, 4, 5, 9, 12\}$.

2. По данным промежуткам $A = (-7; 1]$ и $B = [-3; 4]$ на числовой прямой определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

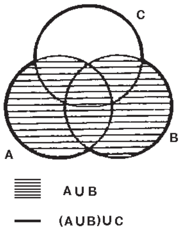
Ответ. $A \cup B = (-7; 4]$; $A \cap B = [-3; 1]$; $A \setminus B = (-7; -3)$; $B \setminus A = (1, 4]$; $A \Delta B = (-7; -3) \cup (1; 4]$.

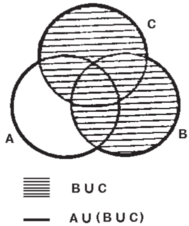
3. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

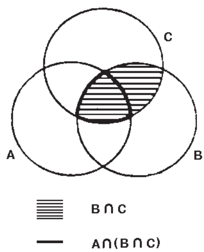
Задайте списком множество $(A \cap B) \cup (C \cap D)$.

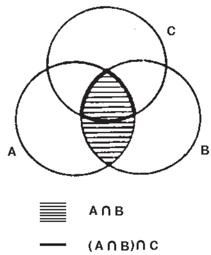
Ответ. $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

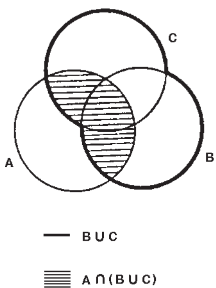
Примеры (с использованием кругов Эйлера):

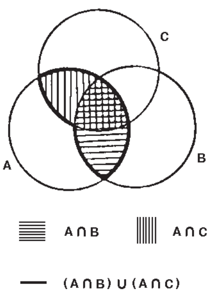


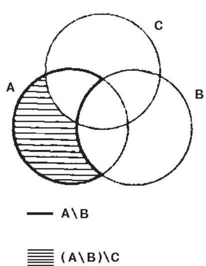


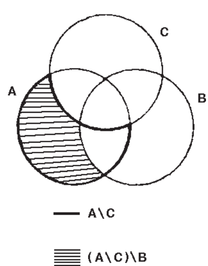












2.2. Множества и отношения

Центральное место занимает *теория отношений*, которая оказалась простым и удобным аппаратом для самых разнообразных задач. На ее основе обобщается понятие функции, применимое не только к числовым множествам, но и к множествам объектов любой природы. В самом общем смысле отношение означает какую-либо связь между предметами или понятиями (рис. 5).

Отношения		
Унарные (одноместные)	Бинарные (двуместные)	*n*-мерные (многоместные)

⇩

Эквивалентность	Упорядоченность	Толерантность

Рис. 5

Отношения между парами объектов называют *бинарными* (двуместными). Например, отношения принадлежности $\alpha \in A$ и включения $A \subset B$. Первое из них определяет связь между множеством и элементами, а второе – между двумя множествами. Примерами бинарных отношений являются равенство (=), неравенства (< или ≤), а также такие выражения как «быть братом», «делиться (на какое-то число)», «входить в состав (чего-либо)» и т.п.

Примеры

1. Отношение ≤ выполняется для пар (5, 7) и (5, 5), но не выполняется для пары (7, 5).

2. Отношение «иметь общий делитель, отличный от единицы», выполняется для пар (4, 2), (6, 9), но не выполняется для пары (7, 8).

3. Отношения на множестве людей: «быть знакомым», «быть сыном», «учиться в одном вузе».

СПОСОБЫ представления отношений	ОПЕРАЦИИ над ними
Сечения (фактор-множество)	Все теоретико-множественные
Матрица отношений (таблица)	Обращение (симметризация)
Граф отношений (стрелки)	Композиция

Общие свойства отношений. Отношение может быть (табл. 1):

рефлексивно (от лат. *reflexivus* — повернутый назад, т.е. если каждый элемент множества связан этим отношением сам с собой, например: равенство, равновеликость, ≤, ≥, самообслуживание, «иметь общий делитель») или *антирефлексивно* (<, >, «быть старше»);

симметрично (равенство, равновеликость, расстояние между двумя точками, «быть братом»), *антисимметрично* (нестрогое неравенство, включение) или *асимметрично* (строгое включение, «быть отцом») [если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно];

транзитивно (от лат. *transeo* – перехожу: равенство, ≤, «быть делителем», «быть родственником»).

Таблица 1

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЙ		
Рефлексивность (от лат. *reflexivus* – повернутый назад) антирефлексивность	Симметричность асимметричность антисимметричность	Транзитивность (от лат. *transitivus* – переходный)

Особо выделяются три типа бинарных отношений: *эквивалентность, упорядоченность и толерантность*, которые наиболее часто встречаются в практике.

Отношение *эквивалентности* представляет собой экспликацию (перевод интуитивных представлений в ранг строгих математических понятий) таких слов, как «одинаковость», «неразличимость», «взаимозаменяемость». Другими словами, отношение эквивалентности является обобщением понятия равенства. Ясно, что в реальности тождественных элементов не бывает. Наоборот, каждый элемент наделен индивидуальными признаками, среди которых имеются как существенные так и несущественные. Эквивалентность можно рассматривать как совпадение элементов только по части (существенных) признаков. Эквивалентность удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности и обычно обозначается знаком «~». Свойства эквивалентности записывают следующим образом: 1) $x \sim x$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) из $x \sim y$ и $y \sim z$ следует $x \sim z$ (транзитивность).

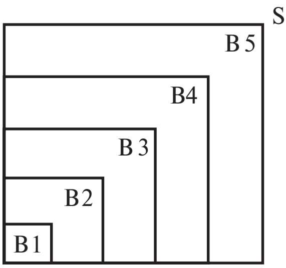


Рис. 6

Важнейшее значение эквивалентности состоит в том, что это отношение определяет признак, который допускает *разбиение* множества на непересекающиеся подмножества, называемые *классами эквивалентности* (рис. 6). Наоборот, всякое разбиение множества на непересекающиеся подмножества определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Другими словами, задание на исследуемом множестве объектов отношения эквивалентности позволяет эти объекты определенным образом классифицировать, т. е. относить каждый конкретный объект к той или иной группе (классу). У этой процедуры есть название – операция факторизации, а сам результат называется – фактор-множество.

Например, отношение «проживать в одном доме» в множестве жителей города является эквивалентностью и разбивает это множество на непересекающиеся подмножества людей, являющихся соседями по дому. Примерами отношений эквивалентности могут служить подобие или равенство треугольников на плоскости, параллельность прямых, утверждение «быть таким же» и т.п. Множество слов в русском языке можно разбить на классы эквивалентности: по первой букве (именно так составляются словари), по количеству букв и т.д. Множество студенческих групп является фактормножество, получаемым в результате введения на множестве студентов данного курса отношения эквивалентности (студент $a \sim$ студент b, если они из одной группы). Если отношение эквивалентности на множестве студентов строится по результатам сдачи экзаменов, то соответствующее фактормножество строится из четырех элементов $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}, \{5\}$.

Отношение *порядка* обладает свойствами транзитивности и антисимметричности (табл. 2). Если между элементами множества может быть установлено отношение «старшинства», «важности», «первичности» или «предшествования», говорят об *упорядоченном* множестве. Например, студенты какой-либо группы могут быть упорядочены по возрасту, успеваемости, алфавиту. Примером абсолютно *неупорядоченного* множества является набор монет одинакового достоинства в кошельке.

Если между любыми тремя элементами множества a, b, c установлено отношение $a < b$, $b < c$, из которого следует, что $a < c$, множество называют *линейно упорядоченным*. Например, линейно упорядоченными являются точки прямой, отрезка, произвольной кривой линии.

Таблица 2

Свойства отношений порядка (иерархии)	
Строгий порядок ($x < y$)	*Нестрогий порядок* ($x \leq y$)
Антирефлексивность	Рефлексивность
Асимметричность	Антисимметричность
Транзитивность	

Различают отношение *нестрогого порядка* (оно рефлексивно), например, отношения «быть не старше» на множестве людей, «быть не больше» на множестве натуральных чисел, и отношение *строгого порядка* (оно антирефлексивно), например, отношения «быть прямым потомком», «быть моложе» на множестве людей, результаты жеребьевки.

Множество, на котором задано отношение порядка, может быть *полностью упорядоченным* (если любые два элемента сравнимы по отношению порядка) или, в противном случае, *частично упорядоченным*. Например, отношение «быть не старше» задает полный порядок на множестве людей; отношение «быть начальником» задает на множестве сотрудников организации частичный порядок, так как, например, для пары сотрудников одного отдела данное отношение не выполняется: они не сравнимы по данному отношению.

Отношение *толерантности* удовлетворяет свойствам рефлексивности и симметричности. Для этого отношения, в отличие от эквивалентности, транзитивность не обязательна, и значит эквивалентность есть частный случай толерантности. Отношение толерантности представляет собой экспликацию интуитивных представлений о сходстве и неразличимости. Каждый объект неразличим сам с собой (рефлексивность), а сходство двух объектов не зависит от того, в каком порядке они сравниваются (симметричность). В то же время, если один объект сходен с другим, а другой сходен с третьим, то это вовсе не означает, что все они обязательно сходны между собой, т. е. свойство транзитивности может не выполняться.

Свойства отношений толерантности (похожести):
рефлексивность
симметричность

Сходство между различными объектами имеет точный смысл только тогда, когда указана совокупность признаков, относительно которой это сходство устанавливается. Два объекта считаются толерантными, если обладают хотя бы одним общим признаком. Например, если определить отношение между словами как наличие хотя бы одной общей буквы, то толерантными будут пересекающиеся слова кроссворда.

Пример. Определив отношение толерантности как сходство между четырехбуквенными словами, если они отличаются только одной буквой, можно «превратить муху в слона»:

муха – мура – тура – тара – кара – каре – кафе – кафр – каюр – каюк – крюк – крок – срок – сток – стон – *слон*.

Отношение может быть определено не только для пар объектов, но и для троек, четверок и т.д. (n-местное отношение). Примерами трехместных (тернарных) отношений являются: арифметические операции над числами, отношение между родителями и детьми (отец, мать, ребенок) и т.п. Пропорция $x : y = z : u$ иллюстрирует четырехместное отношение.

Мощность множеств. Пусть X и Y— два произвольных множества. Естественно поставить вопрос о сравнении множеств по числу элементов.

Если множества X и Y конечны, то поставленная задача может быть решена двумя способами:

1. Пересчитаем число элементов в каждом из множеств и сравним результаты. Это позволит установить равенство числа элементов в множествах или указать, в каком из множеств элементов больше. Однако можно поступить иначе.

2. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие один и только один элемент $y \in Y$.

Если при этом оказывается, что каждый элемент $y \in Y$ ставится в соответствие одному и только одному элементу $x \in X$, то говорят, что между элементами множеств X и Y установлено взаимно-однозначное соответствие. Очевидно, что для конечных множеств взаимно-однозначное соответствие можно установить только тогда, когда число элементов в этих множествах одинаково.

Очевидно, что в то время, как первый способ (подсчет числа элементов) возможен лишь для сравнения конечных множеств, второй способ (установление взаимно-однозначного соответствия) в одинаковой мере применим как для конечных, так и для бесконечных множеств.

Ясно, что взаимно-однозначное соответствие двух множеств — это частный случай отображения (функции) одного множества на другое, при котором разным элементам первого множества отвечают разные элементы второго.

Если между множествами X и Y установлено взаимно-однозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны* (или равномощны) и записывают $X \sim Y$. Отсюда следует, что если два конечных множества эквивалентны, то они равночисленны. Таким образом, понятие эквивалентности множеств есть обобщение понятия равночисленности на случай бесконечных множеств.

Приведем пример попарно эквивалентных множеств.

Пусть множество $X = \{1, 2, ..., n, ...\}$, т.е. множество натуральных чисел, а $Y = \{-1, -2, \ldots, -n, \ldots\}$, т.е. множество целых отрицательных чисел. Тогда $X \sim Y$, так как между ними устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Как уже отмечалось, отношение эквивалентности множеств рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому совокупность всех множеств распадается на *классы* эквивалентных множеств.

Понятие эквивалентности — далеко идущее обобщение понятия равночисленности.

Пусть в множестве X имеется собственное подмножество, равномощное Y, но в Y нет собственного подмножества, равномощного X. Тогда говорят, что *мощность множества* X больше мощности Y.

Например:

1. Множество **N** всех натуральных чисел имеет бSольшую мощность, чем множество $Y = \{1, 2, 3\}$.

2. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{9, 13, 5\}$.

Рассмотрим собственное подмножество $X_1 = \{1, 2, 3\}$ множества X. Оно очевидно равномощно множеству Y. Ни одно из собственных подмножеств множества Y не может быть равномощно всему множеству X. Таким образом, мощность множества X больше, чем мощность множества Y.

Для *конечного множества* его мощность есть число элементов этого множества. Мощность *любого бесконечного множества* больше мощности любого конечного.

Среди бесконечных множеств наименьшей мощностью обладает множество **N** всех натуральных чисел и все множества, ему равномощные (так называемые счетные множества). Мощность множества **R** всех действительных чисел (так называемая мощность континуума) больше, чем мощность счетного множества.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Как называется: множество точек плоскости, удаленных от данной точки О на расстояние r;

множество цветов, стоящих в вазе;

множество людей, обучающихся в вузе;

множество букв А, Б, В, Г...

2. Выпишите все подмножества множества $B = \{1,2,3\}$.

3. Запишите множество А перечислением его элементов. Пусть $\mathrm{A} = \{k \in \mathrm{N}\colon 1{,}4 < k < 8\}$, здесь N — множество натуральных чисел.

4. Приведите пример квадратного уравнения, множество корней которого яляется пустым.

5. Пусть A — множество людей, населяющих Европу; B — множество людей, населяющих Азию, C — множество людей, населяющих Евразию. Укажите иерархию этих множеств. В каких случаях каждое множество может выступить в роли основного множества?

6. Даны два множества: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Запишите множества, представляющие:

пересечение $A \cap B$;

объединение $A \cup B$;

разность $A \setminus B$;

симметрическую разность $A \Delta B$.

7. Даны два множества: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ и $\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$. Запишите $A \cap B$; $A \cup B$;

$A \setminus B$; $A \Delta B$.

8. Даны три множества A, B и C (см. рис.). Покажите (штриховкой)

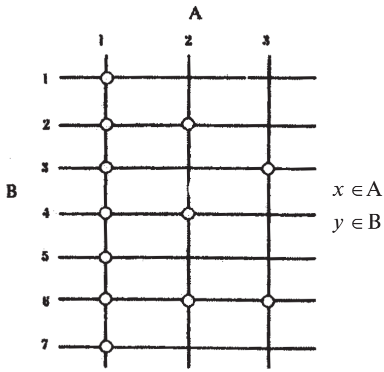
$$A \cap B \cap C$$

9. Дайте перечень элементов множества, являющегося пересечением двух множеств A и B, где A — множество с критерием принадлежности «месяц продолжительностью меньше,

чем 31 день»; *В* — множество с критерием принадлежности понятию «месяц минимум 30 дней».

10. Дайте определение понятию «бинарное отношение». Приведите примеры.

11. Задано отношение y/x на множестве $M = \{y/x$ — целое, $1 \leq y \leq 7$; $1 \leq x \leq 3\}$ (см. рис.). Построить соответствующую матрицу или таблицу, имеющую *А* столбцов и *В* строк, и отметить в ней единицами элементы, удовлетворяющие заданному отношению, а нулями — все остальные. Построить также стрелочную диаграмму отношения y/x.



12. Каковы свойства отношения эквивалентности? Запишите их.

13. В чем заключается значение эквивалентности?

14. Дана совокупность множеств J; $J=\{A,B,C,D,E,F\}$, где $A=\{1, 2, 3\}$; $B=\{a,b\}$; $C=\{m,n,k\}$; D — множество натуральных чисел; E — множество четных чисел; F — множество нечетных чисел. На сколько классов эквивалентности множеств можно разбить совокупность J ?

15. Какие отношения выражает фраза: «Каждый Охотник Желает Знать Где Сидят Фазаны»

16. Превратите «муху в слона» (отношение толерантности определяется сходством между четырехбуквенными словами, если они отличаются только одной буквой):

муха – мура – тура – ____________________ – кафе – ____________________ – крюк – ____________________ – слон.

Число, место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи.

Дж. Сильвестр

3. Элементы дискретной математики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Другими словами, это раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке. Например: сколько различных четырехзначных чисел можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 без повторения цифр?

3.1. Элементы комбинаторики

3.1.1. Основные правила комбинаторики

Правило сложения

Пример. Из пункта A в пункт B можно добраться самолетом, поездом и автобусом, причем между этими пунктами существуют 2 авиамаршрута, 1 — железнодорожный и 3 — автобусных. Следовательно, общее число маршрутов между пунктами A и B равно $2 + 1 + 3 = 6$. Обобщая этот пример, можно сформулировать правило сложения.

Если выбор каждого из объектов a_i ($i = 1, 2, ..., k$) можно выполнить n_i способами, то выбор «или a_1, или a_2,..., или a_k» можно произвести $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Правило умножения

Пример. Сколькими способами можно распределить четыре шара по двум лункам, в которые помещается только один шар. Очевидно, первую лунку можно заполнить четырьмя способами, так как при выборе первой лунки имеется четыре шара. Вторую лунку можно заполнить тремя шарами, так как после заполнения первой лунки осталось три шара.

Заметим, что с каждым из четырех способов заполнения первой лунки может совпасть любой из трех способов заполнения второй. Поэтому общее число способов распределения двух лунок равно 4×3 = 12.

Запишем правило умножения в общем виде.

Если выбор каждого из k объектов a_i $(i = 1,2,...,k)$ можно осуществить n_i способами, то выбор «и a_1, и a_2,..., и a_k» можно произвести $N = \prod_{i=1}^{k} n_i$ способами.

3.1.2. Размещения

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по k $(0 \le k \le n)$ элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее k различных элементов данного множества. Эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения. Но число элементов во всех этих подмножествах равно k.

Для определения числа A_n^k размещений из n элементов по k учтем, что первый элемент подмножества может быть взят n способами, второй — $(n—1)$ способом,..., k-й элемент — $(n—(k—1))$ способами. Отсюда, используя правило умножения, получаем

$$A_n^k = n(n-1)...(n-(k-1)) =$$

$$= \frac{[n(n-1)...(n-(k-1))][(n-k)...1]}{[(n-k)(n-(k+1))...1]} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n—1)n$ и $(n—k)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n—k)$.

Условимся считать $0! = 1$, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Пример. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места, т. е. необходимо найти число всех подмножеств, состоящих из трех элементов, отличающихся составом (номерами команд) или порядком их размещения (подмножества № 1, № 2, № 3 и № 2, № 1, № 3 являются разными). Таким образом, имеем дело с размещением. Тогда искомое число равно

$$A_{16}^{3} = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13} =$$

$$= 14\cdot15\cdot16 = 3360.$$

3.1.3. Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают P_n:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!\text{ , т.е. } P_n = n!\,.$$

Пример. Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на одной полке?

Искомое число способов равно

$$P_6 = 6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720.$$

Действительно, первую книгу можно выбрать шестью способами, вторую — пятью способами и т.д., последнюю — одним способом. По правилу умножения общее число способов равно $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$.

3.1.4. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по k $(0 \le k \le n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит k различных элементов данного множества. Таким образом, различными подмножествами считаются только те, которые отличаются составом элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k. Так как число перестановок из k равно $k!$, то число размещений из n элементов по k — A_n^k будет в $k!$ раз больше, чем число сочетаний из n элементов по k — C_n^k, т. е. $A_n^k = k!\,C_n^k$, отсюда $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Пример. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырех для работы на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами:

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!\,4!} = \frac{25!}{21!\,4!} = \frac{21!\,22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{21!\,4!} = \frac{22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 12\,650.$$

Упражнения

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Ответ. 20.

2. Из 9 человек надо выбрать 4 человека и разместить их на четырех занумерованных стульях (по 1 человеку на стуле). Сколькими способами это можно сделать?

Ответ. 3024.

3. Сколькими способами можно составить команду из 4 человек для соревнования по бегу, если имеется 7 бегунов?

Ответ. 35.

4. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани шести различных цветов и все стулья должны быть разного цвета?

Ответ. 720.

3.2. Элементы теории графов

Происхождение графов. Многие задачи сводятся к рассмотрению совокупности объектов, существенные свойства которых описываются связями между ними. Например, глядя на карту автомобильных дорог, можно интересоваться только тем, имеется ли связь между некоторыми населенными пунктами, отвлекаясь от конфигурации и качества дорог, расстояний и других подробностей. Ин-терес могут представлять связи и отношения между людьми, событиями, состояниями и вообще между любыми объектами.

В подобных случаях удобно рассматриваемые объекты изображать точками, называемыми *вершинами*, а связи между ними — линиями (произвольной конфигурации), называемыми *ребрами*. Множество вершин, связи между которыми определены множеством ребер, называют *графом*.

Первая работа по графам была опубликована двадцатилетним Леонардом Эйлером в 1736 г., когда он работал в Российской академии наук. Она содержала решение задачи о кенигсбергских мостах: можно ли совершить прогулку таким образом, чтобы, выйдя из любого места города, вернуться в него, пройдя один раз по каждому мосту? С тех пор поток задач с применением графов нарастал подобно снежной лавине. Наряду с многочисленными головоломками и играми на графах, рассматривались проблемы, многие из которых требовали использования математических методов. Уже в середине XIX в. Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей.

Однако теория графов как математическая дисциплина сформировалась только к середине 30-х годов XX в. Теория графов располагает мощным аппаратом решения прикладных задач из самых различных областей науки и техники. Сюда относятся, например, анализ и синтез цепей и систем, сетевое планирование и управление, исследование операций, выбор оптимальных маршрутов и потоков в сетях, моделирование жизнедеятельности организмов, исследование случайных процессов и многие другие задачи. Теория графов тесно связана с разделами математики: теория множеств, теория матриц, математическая логика и теория вероятностей. В разделах графы применяют для представления различных математических объектов, и в то же время сама теория графов широко использует аппарат родственных разделов математики.

Ориентированные графы. Часто связи между объектами характеризуются вполне определенной ориентацией. Например, на некоторых улицах допускается только одностороннее автомобильное движение, отношения между людьми могут определяться подчиненностью или старшинством. Ориентированные связи характеризуют переход системы из одного состояния в другое, результаты встреч между командами в спортивных состязаниях, отношения между числами (неравенство, делимость). Для указания направления связи между вершинами графа соответствующее ребро отмечается стрелкой. Ориентированное таким образом ребро называют дугой, а граф с ориентированными ребрами — *ориентированным графом*.

Взвешенные графы. Дальнейшее обобщение отображения связей между объектами с помощью графов состоит в приписывании ребрам и дугам некоторых количественных значений, качественных признаков или характерных свойств, называемых *весами*. В простейшем случае это может быть порядковая нумерация ребер и дуг, указывающая на очередность при их рассмотрении (приоритет или иерархия). Вес ребра или дуги может означать длину (пути сообщения), количество набранных очков (турниры), характер отношений между людьми (сын, брат, отец, подчиненный, учитель) и т.п. Вес можно приписывать не только ребрам и дугам, но и вершинам. Например, вершины, соответствующие населенным пунктам на карте автомобильных дорог, могут характеризоваться количеством мест в кемпингах, пропускной способностью станций техобслуживания. Вообще, вес вершины означает любую характеристику соответствующего ей объекта (цвет изображаемого вершиной предмета, возраст человека и т.п.).

Типы конечных графов. Если множество вершин графа конечно, то он называется *конечным графом*. Для ориентированного ребра (дуги) различают *начальную вершину*, из которой дуга исходит, и *конечную вершину*, в которую дуга заходит. Ребро, граничными вершинами которого является одна и та же вершина, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми граничными вершинами параллельны и называются *кратными*. В общем случае граф может содержать *изолированные вершины*, которые не являются концами ребер и не связаны между собой или с другими вершинами.

Маршруты. Нередко задачи на графах требуют выделения различных маршрутов, обладающих определенными свойствами и характеристиками. *Маршрут* длины m определяется как последовательность m ребер графа (не обязательно различных) таких, что граничные вершины двух соседних ребер совпадают. *Замкнутый маршрут* приводит в ту же вершину, из которой он начался. Маршрут, все ребра которого различны, называется *цепью*, а маршрут, для которого различны все вершины — *простой цепью*. Замкнутая цепь называется циклом, а простая цепь — *простым циклом*. Маршрут, не содержащий повторяющихся дуг, называется *путем*, а не содержащий повторяющихся вершин, — *простым* *путем*. Замкнутый путь называется *контуром*, а простой замкнутый путь — *простым контуром*. Граф называется *циклическим (контурным)*, если он содержит хотя бы один цикл (контур).

Деревья и лес. Особый интерес представляют связные ациклические графы, называемые *деревьями* (рис. 7). Дерево на множестве p вершин всегда содержит $q = p - 1$ ребер, т. е. минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы граф был связным. Действительно, две вершины связываются одним ребром, и для связи каждой последующей вершины с предыдущими требуется ребро, следовательно, для связи p вершин необходимо и достаточно $p - 1$ ребер. При добавлении в дерево ребра образуется цикл, а при удалении хотя бы одного ребра дерево распадается на компоненты, каждая из которой представляет собой также дерево или изолированную вершину. Несвязный граф, компоненты которого являются деревьями, называется *лесом*.

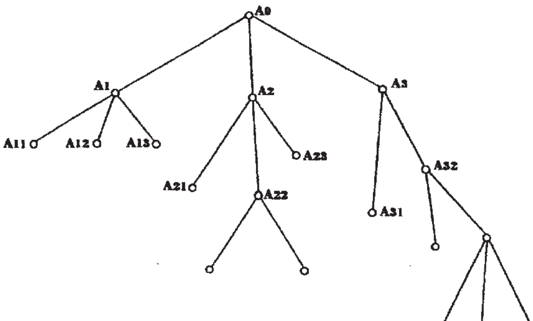


Рис. 7

Примерами древовидной структуры являются генеалогический граф (родословное дерево), а также совокупность всех файлов, размещенных на жестком диске компьютера или дискете. Логический диск имеет каталог и называется главным или корневым. Он имеет оглавление, подобное оглавлению книги. В оглавлении корневого каталога перечислено содержимое диска: имена файлов этого каталога и других каталогов, вложенных в него.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Как называются числовые множества на замкнутом и открытом промежутках? Запишите их в символах теории множеств и изобразите на числовой оси.

2. Вычислите $n!$, при $n = 1, 2, \ldots, 8$.

3. Сколькими способами можно распределить между четырьмя отпускниками четыре путевки в различные дома отдыха.

4. Из 10 рабочих нужно выделить 4 для определенной работы. Сколькими способами это можно сделать?

5. Сколько различных двухзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, если каждую цифру в двухзначном числе можно использовать лишь один раз?

6. Каким образом основные свойства отношений (симметричность, рефлексивность и транзитивность) можно изобразить с помощью графов?

7. Нарисуйте фрагмент (3 поколения) генеологического графа (родословного дерева) гипотетической семьи.

8. Многие информационные системы построены по принципу дерева. Изобразите типичную структуру файловой системы.

Высшее назначение математики — находить порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

4. Элементы математической логики

Начало науки о законах и формах мышления связывают с именем Аристотеля. Прошло два тысячелетия, прежде чем Г. Лейбниц предложил ввести в логику математическую символику и использовать ее для общих логических построений. Эту идею последовательно реализовал в XIX в. Дж. Буль и тем самым заложил основы математической (символической) логики.

4.1. Сущность математической логики

Логика является началом любой научной теории. Даже в Библии сказано, что «сначала было слово». Логика как наука о способах мышления, приводящих к истине, возникла в глубокой древности. Ее основы заложены древнегреческими философами Перменидом, Зеноном, Протагором, Сократом, сведения о которых дошли до нас благодаря Платону. Им были также выявлены некоторые принципы и схемы рассуждений (отчасти). Но только Аристотель решительно отделил их от содержания рассуждений и создал чистую систему силлогизмов правил вывода, что привело к возникновению теории логики.

Правила вывода позволяют преобразовывать исходные утверждения подобно тому, как тождественные преобразования в математике дают возможность решать различные системы уравнений. Следующим шагом формализации логики являлось появление специальной символики для точной и компактной записи утверждений и определения операций над ними.

Идея перенесения тех методов, которые обычно применяются в математике, на логику постепенно реализуется Б. Паскалем (1623—1662), Г. Лейбницем, Дж. Булем (1815—1864), О. де Морганом (1806—1871), Г. Фреге (1848—1925), Б. Расселом (1872—1970), Д. Гильбертом, А. Марковым (1903—1979) и др. Так появился язык математической логики как логическое продолжение языка математики.

Языковыми формами этого языка являются математические понятия абстрактные объекты. В отличие от объектов реального мира, абстрактные объекты лишены материальной сущности. Например, бильярдный шар, лишенный материальной сущности, это бесконечное множество точек трехмерного евклидова пространства, расстояние от которых до некоторой особой точки не превышает величины R — радиуса этого шара. Из таких математических объектов можно строить объекты, процессы и явления реального мира.

Получаемые при этом подобия называют математическими моделями. Компьютер «оживляет» эти подобия, и они начинают вести себя в некотором замкнутом пространстве (в единичном гиперкубе, который создается устройством памяти компьютера) подобно тому, как ведут себя в реальном мире исследуемые объекты, процессы и явления. При этом без риска исследователь может осуществлять любые эксперименты над этими подобиями. Результаты экспериментов не выйдут за проделы замкнутой компьютерной памяти, не потревожат экологическую систему реального мира и его обитателей. Исследователь лишь получит ответ на вопрос: что же в действительности может произойти, если?..

С появлением языка математической логики стало возможным составлять алгоритмы логического вывода. Заговорили о создании «искусственного интеллекта», и встал вопрос: нельзя ли создать универсальный алгоритм логического вывода (суперинтеллект), позволяющий доказать или опровергнуть любое утверждение? В свое время такой суперинтеллект пытались создать Б. Паскаль, Г. Лейбниц. Программа Д. Гильберта была последней попыткой реализации этого универсального алгоритма, но и она закончилась неудачей. Оказалось, что создание такого суперинтеллекта невозможно даже теоретически. В 1931 г. австрийский математик Курт Гедель доказал, что всякая достаточно богатая формальная система неполна, т.е. в ней найдутся содержательно истинные утверждения, не доказуемые в этой системе.

В последние десятилетия логика находит все более широкое применение в технике при исследовании и разработке вычислительных машин, дискретных автоматов. Ее методы используются в теории преобразования и передачи информации, теории вероятностей и комбинаторном анализе. Математическая логика начинает внедряться в такие нематематические области, как экономика, биология, медицина, психология, языкознание, право. Интенсивно развиваются специальные разделы математической логики, призванные обслуживать конкретные области науки и техники.

Столь энергичный выход математической логики за пределы математики объясняется тем, что ее аппарат легко распространяется на объекты самой общей природы, необходимо лишь, чтобы они характеризовались конечным числом состояний.

Двузначная логика имеет дело с объектами, которые принимают одно из двух возможных значений (истинное или ложное высказывание, наличие или отсутствие заданного признака у объекта и т.п.). Объекты, которые могут принимать значения из конечного множества, содержащего больше двух элементов, называют *многозначными*. Они либо сводятся каким-нибудь способом к двузначным объектам, либо обслуживаются аппаратом *многозначной логики*.

Устоявшееся представление о математической логике как науке, изучающей законы мышления с применением аппарата математики, главным образом, для нужд самой математики, в современных условиях становится слишком узким. С расширением областей применения и дальнейшим развитием математической логики изменяется и взгляд на нее. Объектами математической логики являются любые дискретные конечные системы, а ее главная задача — структурное моделирование таких систем.

4.2. Особенности математической логики

Математическая логика сделала возможным совершенствование аксиоматического метода и сама совершенствовалась с помощью этого метода.

Термин «математическая логика» может быть истолкован двояко.

С одной стороны, эта отрасль науки строится как математическая теория, в ней используются математические методы, т.е. в этом смысле она представляет собой «математику логики». С другой стороны, разрабатывая точный логический язык математики, она служит «логикой математики». Тщательный анализ соотношения предметов математики и логики связан с глубокими философскими проблемами и не может быть предметом нашего рассмотрения.

Одна из характерных особенностей математической логики — использование математического языка символов и формул.

В математическом языке, так же как в обычном, мы пользуемся именами предметов, т. е. условными языковыми выражениями, ко-торыми обозначаются эти предметы, различая при этом имя предмета и сам предмет, обозначаемый этим именем.

Так, мы отличаем число пять как общее свойство («инвариант») класса множеств, эквивалентных, например, множеству пальцев человеческой руки, от слова «пять», которым это число обозначается на русском языке, от английского «*five*», от знаков «5», «101», «V» и т.п., которыми оно обозначается в различных системах нумерации.

Язык хорошо приспособлен к точному описанию некоторой области предметов, если в нем: 1) для каждого предмета, свойства предмета и отношения между предметами этой области есть имя; 2) различные предметы, свойства, отношения имеют различные имена. Если не выполняется первое условие, то язык беден, недостаточен для описания данной области предметов; если не выполняется второе условие, то язык оказывается двусмысленным. Такой двусмысленностью, в силу различных, исторически обусловленных причин, обладают естественные языки. Наличие омонимов (одинаковых слов), служащих именами различных предметов (коса, лук и т.п.), нарушает условие 2. Математический язык, является результатом усовершенствования обычного языка, в частности устраняет двусмысленность.

К языку обычно не предъявляется требование: различные имена обозначали различные предметы, т. е. разрешаются синонимы. Это относится и к математическому языку. Можно, например, считать, что «1+2» и «3» — различные имена одного и того же числа.

В элементарной алгебре буквами обозначают в основном числа. В логике буквами обозначаются логические объекты, например предложения. Под предложением понимают то, что обычно понимают под этим термином в грамматике любого естественного языка, а именно языковое выражение или соединение слов, имеющее самостоятельный смысл.

В процессе рассуждения (не только в математике) мы из одних предложений формируем другие, преобразуя их с помощью частицы *не* или соединяя их с помощью союзов *и, или, если..., то, если и только если* и др., обозначающих логические связи между предложениями.

Для выяснения структуры сконструированных таким образом сложных предложений удобно исходные предложения обозначать буквами, отвлекаясь от их конкретного содержания.

Одна из особенностей математического языка состоит в применении переменных различных типов, благодаря чему такой язык способен выражать абстрактные формы, которые могут заполняться конкретным содержанием. Понятие это всем нам хорошо знакомо — с ним мы часто встречаемся, заполняя различные стандартные бланки.

Под переменной мы понимаем символ, вместо которого можно подставить имена элементов некоторого множества.

Предметы, имена которых разрешается подставить вместо переменной, называют ее *значениями*, а множество этих предметов — *областью значений* этой переменной.

В элементарной алгебре используется один тип переменных, а именно переменные, значениями которых служат числа; такие переменные называют *числовыми переменными*.

С помощью этих переменных, имен конкретных чисел и знаков операций образуются формы, которые при подстановке вместо переменных их значений обращаются в числа.

Предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что его содержание истинно или ложно, будем называть *высказыванием*.

Предложение, содержащее переменную, не является высказыванием.

Например, «$x < 3$», очевидно, не является высказыванием, так как не имеет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Если на место переменной x подставить какое-нибудь число (ее значение), то получим высказывание, истинное или ложное в зависимости от того, какое число подставлено.

В математической логике используются и другие типы переменных, значениями которых являются не числа, а логические объекты, например высказывания.

Потребность в использовании таких переменных возникает в логике, например, при выяснении вопроса о следовании одного сложного высказывания из другого. Под сложным понимают высказывание, допускающее расчленение на другие высказывания.

Если никакая часть высказывания сама уже не является высказыванием (или по крайней мере не рассматривается как таковое), то его называют *элементарным*.

Совокупность и порядок логических связей (или операций), с помощью которых сложное высказывание образовано из элементарных, составляют логическую структуру сложного высказывания.

Операции над высказываниями являются предметом наиболее элементарной части математической логики, называемой логикой (или алгеброй) высказываний.

Можно использовать оба термина («логика высказываний» и «алгебра высказываний») как синонимы, обозначающие одну и ту же часть логики с разных точек зрения: это и логика (по своему предмету) и алгебра (по своему методу).

Чтобы различать эти два построения, сохранено для первого название «логика (алгебра) высказываний», а для второго — термин «исчисление высказываний».

В табл. 3 приводятся символы, обозначающие некоторые логические операции.

Таблица 3

Символ	*Название символа, смысл*	*Как следует читать*
$\neg$	Отрицание	$\neg p$ не p
$\Rightarrow$	Импликация (логическое следствие)	$p \Rightarrow q$ если p, то q
$\Leftrightarrow$	Эквивалентность	$p \Leftrightarrow q$ p тогда и только тогда, когда q
$\wedge$	Конъюнкция (логическое произведение)	$p \wedge q$ p и q
$\vee$	Дизъюнкция (логическая сумма)	$p \vee q$ p или q
$\forall$	Квантор всеобщности (от англ. *all* — любой)	$\forall x\, P(x)$ для всякого (для каждого) x, обладающего свойством $P(x)$
$\exists$	Квантор существования (от англ. *existence* — существование)	$\exists\, x \in X$ существует элемент x множества X

Для проведения доказательств применяют так называемые **истинностные таблицы** (табл. 4, 5):

Таблица 4

p	$\neg p$
истина	ложь
ложь	истина

Таблица 5

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
истина	истина	истина	истина	истина	истина
истина	ложь	ложь	истина	ложь	ложь
ложь	истина	ложь	истина	истина	ложь
ложь	ложь	ложь	ложь	истина	истина

Из приведенных в таблицах результатов здравому смыслу противоречат только результаты импликации $p \Rightarrow q$. Поясним содержание следующим примером: «Если идет дождь (p), дороги влажные (q)» — импликация $p \Rightarrow q$ — истинна, что отражено в первой строке таблицы.

«Если идет дождь (p), дороги сухие ($\neg q$)» — ложному q соответствует, согласно второй строке, ложная импликация.

«Если нет дождя ($\neg p$), дороги влажные (q)» q — истинно, и импликация — истинна, если дороги, например, политы.

«Если нет дождя ($\neg p$), дороги сухие ($\neg q$)» — согласно четвертой строке импликация истинна.

В качестве упражнения поясните результаты импликации $p \Rightarrow q$, приняв p — солнце встало, q — на улице светло.

Примеры. 1. Доказать (с помощью истинностных таблиц) закон ложного положения $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
истина	истина	ложь	ложь	*истина*	*истина*
истина	ложь	ложь	истина	*ложь*	*ложь*
ложь	истина	истина	ложь	*истина*	*истина*
ложь	ложь	истина	истина	*истина*	*истина*

2. Проверить с помощью истинностных таблиц тождество:

$$p \wedge (p \vee q) = p.$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	p
истина	истина	истина	*истина*	*истина*
истина	ложь	истина	*истина*	*истина*
ложь	истина	истина	*ложь*	*ложь*
ложь	ложь	ложь	*ложь*	*ложь*

Упражнение. Проверьте с помощью истинностных таблиц следующее тождество: $p \vee (\neg p) \wedge q = p \vee q$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите (для $\wedge$ и $\vee$) закон поглощения и перестановочный (коммутативный) закон.

2. В чем суть закона противоречия и закона исключенного третьего.

3. Докажите один из законов поглощения $p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$.

4. Докажите справедливость законов де Моргана:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q;$$
$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

5. Докажите, что нижеприведенные формулы всегда истинны:

$$(((p \vee (q \wedge r)) \vee (\neg q)) \vee (\neg p));$$
$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q.$$

Математический анализ не менее всеобъемлющ,
чем сама природа; он определяет все ощутимые взаимосвязи,
измеряет времена, пространства, силы, температуры...
Его главный атрибут — ясность; в нем совершенно не имеется
знаков для выражения туманных понятий.

Ж. Фурье

5. Введение в математический анализ

Возникновение высшей математики, т. е. дифференциального и интегрального исчисления, явилось переломным моментом в истории человеческой культуры. Сегодня, когда современная наука раздвинула рамки видимого мира, понятия производной и интеграла стали необходимым элементом. Без этих понятий невозможно описывать и исследовать переменные величины и функции, характеризующие зависимости одних величин от других.

5.1. Понятие функции

Пусть X и Y — произвольные непустые множества (рис. 8).

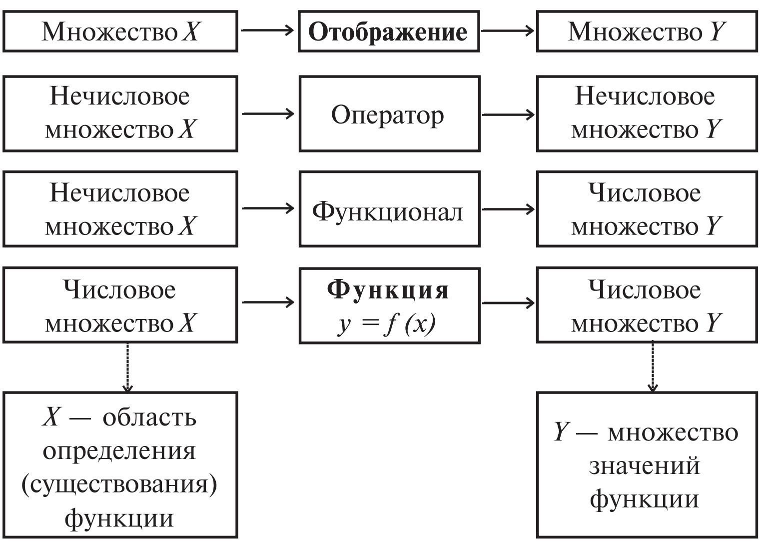


Рис. 8: $x \in X$ – независимая переменная (аргумент);
$y \in Y$ – зависимая переменная (функция)

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ по какому-то правилу f поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y.

В случае, когда множества X и Y нечисловые, отображение называется *оператором*; отображение нечислового множества X в числовое множество Y — *функционалом*; отображение числового множества X в числовое множество Y — *функцией*.

Определение. Отображение числового множества X в числовое множество Y называется функцией и обозначается $y = f(x)$.

Множество X называется *областью определения* (существования) функции, а множество Y — *множеством ее значений*; $x \in X$ — *независимой переменной*, или *аргументом*, $y \in Y$ — *зависимой переменной*, или *функцией*.

Способы задания функции:

- аналитический;
- графический;
- табличный;
- алгоритмический.

Типы функций:

- четные и нечетные;
- периодические;
- монотонные;
- ограниченные.

Множество точек плоскости $(x, f(x))$, где $x \in X$, называется *графиком функции* $y = f(x)$.

Функция считается заданной, если известно правило f, по которому каждому значению аргумента $x \in X$ можно найти соответствующее значение функции y. Наиболее распространенным заданием функции является *аналитическое* задание, т. е. выражение правила f некоей формулой или группой формул.

Иногда функция задается *графиком* или *таблицей*. Ясно, что формула «сильнее» любой таблицы. Формула содержит не только сведения, приведенные в данной таблице, но и позволяет найти значения функции также и при значениях независимой переменной, не содержащихся в таблице. Однако таблица удобнее формулы, так как с ее помощью можно быстрее найти значение y при данном x, если значение x есть в таблице. Таблица нагляднее сложной формулы, по которой зачастую трудно оценить значения, принимаемые функцией; однако простая формула позволяет быстрее представить себе ход функции, чем невыразительный ряд чисел (таблица).

Часто встречается такое положение, когда теории интересующего нас явления еще нет, но есть результаты опытов (экспериментов, проб); при этом результаты опытов занесены таблицу. В этом случае практически всегда (даже «вручную», а с использованием компьютера тем более) можно подобрать приближенную формулу, которая правильно описывает функциональную зависимость и не дает больших ошибок при *интерполяции*[1], т. е. при переходе от известных значений аргумента к новым, промежуточным между уже имеющимися. При этом найденную зависимость называют эмпирически найденным законом, или *эмпирической формулой*[2]. Однако эмпирическая формула нуждается в проверке: погрешность, получаемая при ее использовании, может оказаться довольно значи-тельной (ясно, что надежность эмпирической формулы будет тем выше, чем чаще сетка наблюдаемых значений переменной, исходя из которых подбирали данную формулу). И совсем нежелательно использование эмпирической формулы за пределами исследованного интервала значений независимой переменной (такое продолжение формулы

[1] С лат. *interpolare* — подновлять.

[2] Прилагательное «эмпирический» (от гр. *empeiria* — опыт) означает опытный, полученный опытным путем.

называется экстраполяцией (от лат. частицы *ex*, — вне): это может привести к большим ошибкам.

5.2. Предел функции

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, исключая, может быть, саму эту точку, и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такое число $\delta > 0$, что из выполнения неравенства $|x - x_0| < \delta$ ($x \neq x_0$) следует выполнимость неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 9).

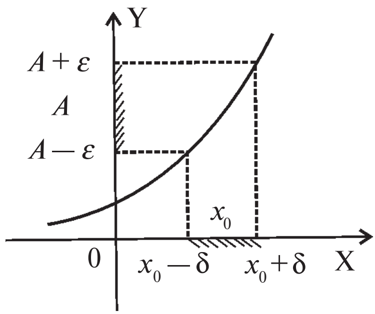


Рис. 9

Если число A является пределом функции f (x) при $x \to x_0$, пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В практике вычисления пределов большое место занимают так называемые 1-й и 2-й замечательные пределы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(здесь x — радианная мера угла) и

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \tfrac{1}{x})^x = e,$$

где e = 2,71828... — иррациональное число, служащее основанием натуральных логарифмов, обозначаемых $\ln x$.

Предел — важнейшее понятие математики. Понятие предела опирается на интуитивное представление о процессе изменения и неограниченного приближения. Точное математическое определение предела оформилось в математике лишь в начале XIX в. В связи с этим потребовалось уяснить понятие функции, а также развить теорию действительного числа. До этого почти два столетия в математике существовало интуитивное представление о пределе, однако и оно оказалось чрезвычайно плодотворным, так как внесло в математику совершенно новый метод рассуждений — метод пределов. Применение и развитие метода пределов привели к созданию дифференциального и интегрального исчислений, и математического анализа.

Суть метода состоит в том, что для определения неизвестной величины находят ее приближения, при этом не одно-два, а неограниченное число приближений. Если эти приближения становятся все более точными, отличаются от определяемой величины все меньше и меньше, то сама величина находится как предел этих приближений.

Подобных рассуждений древнегреческая математика не знала. Если в ней и рассматривались приближения, как, например, у Евдокса и Архимеда в их «методе исчерпывания» при определении площадей и объемов, то число этих приближений было невелико, и, кроме того, установление равенства между искомой и уже известной площадью (или объемом) проводилось элементарными геометрическими методами. Теперь же, в методе пределов, строятся бесконечные приближения и неизвестная величина определяется как предел.

Метод пределов не возник в математике сам собой, он оформился постепенно, как результат труда многих математиков, которые начали рассматривать новые для своего времени задачи, не решаемые элементарными методами. Это были задачи определения размеров тел и центра их тяжести, нахождения длин кривых, построения касательных к кривым, установления мгновенной скорости при неравномерном движении. Постепенно накапливался опыт и вырабатывались решения подобных задач в общей постановке, например задач, когда требовалось определить мгновенную скорость не в данном конкретном движении, а в любом, если только была известна зависимость пути от времени. Это привело к формированию на основе понятия предела новых понятий интеграла и производной, созданию математического анализа. Очевидно, что применение метода пределов потребовало развития способов вычисления пределов, установления правил действий с пределами, т. е. создания теории пределов. Основным в этой теории стало понятие бесконечно малой — переменной, предел которой равен нулю. В этот период математический анализ назывался анализом бесконечно малых.

lim — это первые буквы латинского слова *limes*, которое означает «предел». Слово limes для обозначения предела впервые употребил И. Ньютон, символ lim ввел французский ученый С. Люилье в 1786 г., а выражение $\lim\limits_{n\to\infty}$ первым записал англичанин У. Гамильтон в 1855 г.

Примеры. 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+4}{x^2+3}$.

Используя теоремы о пределах, находим

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+4}{x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x+4)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}4}{\lim\limits_{x\to 3}x^2+\lim\limits_{x\to 3}3}=\frac{2\cdot 3+4}{3^2+3}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}.$$

2. Если предел знаменателя равен нулю, а предел числителя не равен нулю, то предел дроби равен бесконечности:

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x^2+5}{x-3}=\frac{4\cdot 3^2+5}{3-3}=\infty.$$

Если имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, необходимы преобразования.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x = 1$ равны 0. Выполним тождественные преобразования:

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4); \quad x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2);$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 2)}.$$

Функции $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$ и $\dfrac{x - 4}{x - 2}$ совпадают в окрестности точки $x = 1$, $(x \neq 1)$, поэтому их пределы равны при $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 4}{x - 2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4x + 5}{7x^2 + 8x - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x + 5}{7x^2 + 8x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{7 + \frac{8}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{7 + 0 - 0} = \frac{3}{7}.$$

Упражнения. 1. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x + 4}{x - 3}$.

Ответ. 7.

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + x}{3 - x^3}$.

Ответ. 0.

3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{5x^2 - 16x + 3}$.

Ответ. $\dfrac{4}{7}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{-x^2-4x+1}$.

Ответ. -2.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какая функция называется четной, а какая нечетной? Какова особенность в расположении графиков этих функций?

2. Каким образом можно получить график обратной функции? Приведите пример.

3. Найдите область определения функции $y=\sqrt{4-x}$.

4. Перечислите основные классы элементарных функций. Приведите примеры.

5. Сформулируйте определение предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному пределу и бесконечности.

6. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$.

7. Запишите два замечательных предела.

8. Приведите пример, когда предел не существует.

Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям.

Ж. Л. Лагранж

6. Дифференциальное исчисление

Дифференциальное исчисление — это раздел математического анализа, связанный главным образом с понятиями производной и дифференциала функции. В дифференциальном исчислении изучаются правила вычисления производных (законы дифференцирования) и применение производных к исследованию свойств функций.

Центральные понятия дифференциального исчисления — производная и дифференциал — возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них — физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой.

6.1. Производная. Правила и формулы дифференцирования

Производная функции f в точке x_0 есть *скорость изменения* функции f в этой точке.

Геометрическое толкование производной. Производная функции f в точке x_0 определяется тангенсом угла наклона касательной, проведенной к графику функции f в точке $x = x_0$.

Исходя из этого, выражение «производная от моего настроения по времени положительна» на обычный язык переводится как «мое настроение улучшается».

Задача-шутка. Какой знак имеет производная от настроения по расстоянию до кресла зубного врача?

Легко показать, что, приравнивая к нулю производную, можно найти те значения независимой переменной, при которых функция может иметь *максимум* или *минимум*, т. е. *экстремум*.

В «критических« (подозрительных на максимум и минимум) точках, где функция достигает максимума, производная переходит от положительных значений к отрицательным (или вторая производная — производная от производной — отрицательна); для минимума все наоборот.

Операцию получения функции $f'(x)$ из функции $f(x)$ называют *дифференцированием* функции $f(x)$.

Техника нахождения производных (или, как часто говорят, техника дифференцирования) сравнительно простое и более легкое дело, чем, например, решение алгебраических уравнений. Формулы для производных нередко оказываются даже проще (или, во всяком случае, не сложнее), чем формулы для самих исходных функций.

Основные правила дифференцирования

$(C)' = 0$, здесь C — const; $(CU)' = CU'$; $(U + V)' = U' + V'$;

$(UV)' = U'V + UV'$; $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - V'U}{V^2}$; «цепное правило».

Для нахождения производных не надо ждать вдохновения; здесь не нужны изобретательность, выдумка, озарение, ибо задача всегда решается с помощью ряда простых правил.

Основные формулы для производных:

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$(\sin x)' = \cos x\ ;$$
$$(\cos x)' = -\sin x\ ;$$
$$(\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\ ;$$
$$(\text{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\ .$$

Примеры. 1. Пусть $y = 3x^2 - 6x + 5$.

Тогда $y' = (3x^2)' - (6x)' + (5)' = 3 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 6x - 6$.

2. Пусть $y = -4x^3 + 2x^{-2} - 3$.

Тогда $y' = -4 \cdot 3x^2 + 2 \cdot (-2)x^{-3} - 0 = -12x^2 - 4x^{-3}$.

3. Найти y', если $y = \dfrac{7x^3 + 5}{x - 2}$.

Положив $U = 7x^3 + 5,\ V = x - 2$ и используя приведенную выше формулу, имеем

$$y' = \left(\frac{7x^3 + 5}{x - 2}\right)' = \frac{(x-2)(7x^3+5)' - (7x^3+5)(x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{(x-2)(7 \cdot 3x^2) - (7x^3+5) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{21x^3 - 42x^2 - 7x^3 - 5}{(x-2)^2} =$$

$$\frac{14x^3 - 42x^2 - 5}{(x-2)^2}.$$

4. Пусть $f = (3x^2 + 5)(2x - 4)$;
требуется найти $f'(x)$, и в частности $f'(0)$.

Здесь $U = 3x^2 + 5$, $V = 2x - 4$.

Тогда $U' = 3 \cdot 2x + 0 = 6x$, $V' = 2 - 0 = 2$.

Поэтому
$$f'(x) = UV' + VU' = (3x^2 + 5) \cdot 2 + (2x - 4) \cdot 6x = 18x^2 - 24x + 10,$$
в частности
$$f'(0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=0} = 10.$$

Упражнения. Найти производные функций:

1. $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5.$

   Ответ. $y' = 12x^2 - 4x + 1.$

2. $y = (x - 1)(2x + 3).$

   Ответ. $y' = 4x + 1.$

3. $y = 3x - 5(x + 2)(3 - x).$

   Ответ. $y' = 10x - 2.$

4. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2}.$

   Ответ. $y' = -\dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x^2 + 2)^2}.$

5. $y = \dfrac{2x - 3}{4 - 5x}$ при $x = 1.$

   Ответ. $y'(1) = -7.$

6.2. Приложения производной

6.2.1. Исследования на экстремум

Исследование функций	
Первая производная	
Аналитические признаки возрастания и убывания	Исследования на экстремум
Вторая производная	
Аналитические признаки выпуклости и вогнутости	Исследование на точки перегиба

Пример. Число 64 разбить на две части, которые в произведении давали максимум.

Обозначим две искомые части a и b. Тогда $a + b = 64$. Требуется найти максимум произведения, т. е. исследовать на экстремум функцию $y = ab$, или $y = a(64 - a)$.

Возьмем производную $y' = 64 - 2a$ и приравняем ее к нулю:

$64 - 2a = 0$ откуда $a = 32$. Тогда $b = 64 - a = 64 - 32 = 32$, а $y_{max} = ab = 32 \cdot 32 = 1024$.

Упражнения. 1. Нужно огородить с трех сторон участок прямоугольной формы, прилегающей к длинной стене. Из имеющегося материала можно сделать забор длиной 120 м.

Каковы должны быть размеры забора, чтобы площадь, обнесенная им, была наибольшей?

Ответ. 30 и 60 м.

2. Прямоугольный участок площадью 600 м^2 требуется огородить забором. Вследствие дополнительной отделки каждый погонный метр забора, выходящего на улицу, в два раза дороже метра забора, отделяющего участок от соседей.

При какой длине забора, выходящего на улицу, стоимость его будет минимальной?

Ответ. 20 м.

3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$.

Ответ. $y_{min} = y(4) = 4$; $y_{max} = y(2) = 8$.

6.2.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \text{ на отрезке } [-4, 4].$$

Найдем критические точки, лежащие внутри отрезка [–4, 4]. Производная $y' = 3x^2 - 6x - 9$. Решив уравнение $3x^2 - 6x - 9 = 0$, найдем критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Значения функции в критических точках:

$$y(-1) = 40, \ y(3) = 8.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка [–4, 4]:

$$y(-4) = -41; \ y(4) = 15.$$

Сравнивая вычисленные значения функции, отметим, что наибольшее значение функции на отрезке $[-4, 4]$ равно 40 и достигает в критической точке $x = -1$, а наименьшее значение равно -41 при $x = -4$.

Замечание. Если критическая точка оказывается вне исследуемого отрезка, то, естественно, из дальнейшего анализа она исключается.

Упражнения. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1. $y = x^2 - 4x + 3$;
2. $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$ на отрезке [0, 3].

Ответ. 1. $y_{\text{наим}} = y(2) = -1$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 3$;

2. $y_{\text{наим}} = y(2) = -10$; $y_{\text{наиб}} = y(0) = 10$.

6.2.3. Вычисление пределов: раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Пример. Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$.

При $x = 2$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, воспользуемся правилом Лопиталя и получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x^2-4)'} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 2} x = 3.$$

Упражнение. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$.

Ответ. ln 2.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
2. Найдите производную функции $y = e^3 \cos x$
3. Найдите производную многочлена $y = x^5 - 4x^2 + 2x^{-3} + 7$.
4. Найдите производную функции $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$; вычислить $f'(1)$.
5. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$.
6. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
7. Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.
8. Приведите пример, показывающий, что обращение производной в нуль не является достаточным условием экстремума функций.

Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!
В. Брюсов

7. Интегральное исчисление

Интегральное исчисление — это раздел математического анализа, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с дифференциальным исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа.

Интегральное исчисление возникло после рассмотрения большого числа задач естествознания и математики. Важнейшие из них — физическая задача определения пройденного за данное время пути по известной, но, быть может, переменной скорости движения и значительно более древняя задача вычисления площадей и объемов геометрических фигур.

Центральным в интегральном исчислении является понятие интеграла, которое, однако, имеет две различные трактовки, приводящие соответственно к понятиям неопределенного и определенного интегралов. Рассматриваемая в интегральном исчислении математическая операция (обратная к дифференцированию) называется интегрированием или, точнее, неопределенным интегрированием.

7.1. Неопределенный интеграл. Методы интегрирования

Интегрирование функции $f(x)$ — это операция отыскания (для данной функции $f(x)$) так называемой *первообразной* функции.

Первообразной является такая функция $F(x)$ по отношению к которой исходная функция $f(x)$ производна, т. е. $f(x) = F'(x)$.

Например, для функции $f(x)=2x^2-3x$ первообразной будет $F(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2$, точнее, *семейство* первообразных $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что

$$\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C\right)' = 2x^2-3x .$$

Переход $f(x) \to [F(x) + C]$ есть *операция интегрирования* функции $f(x)$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Геометрически неопределенный интеграл представляет семейство плоских кривых, смещенных друг относительно друга вдоль вертикальной оси.

Таблица основных интегралов получается из основных формул дифференциального исчисления путем прямого их обращения.

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C ;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C ;$$

$$\int e^x dx = e^x + C ;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C ;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C ;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C .$$

Таблица 6

Методы интегрирования	
Метод разложения	$\int f(x)dx \Rightarrow$ сумма табличных интегралов
Метод подстановки (замены переменной)	$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$
Метод интегрирования по частям	$\int UdV = UV - \int VdU$

Замечания

• Интегрирование, как правило, значительно сложнее дифференцирования. Оно не является механическим, требует большей практики и изобретательности.

• Интегрирование действие, обратное дифференцированию, и его можно проверить дифференцированием.

• Некоторые обратные действия в математике не однозначны и не всегда выполнимы; здесь это приводит к существованию так называемых *неберущихся* интегралов.

Примеры

Метод разложения:

$$\int (x^2+7x-5)dx = \int x^2 dx + \int 7x dx - \int 5dx = \frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-5x+C.$$

Проверка: $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-5x+C\right)' = \frac{3x^2}{3}+\frac{14x}{2}-5 = x^2+7x-5.$

Метод подстановки (замены переменной):

Найти $\int (4x-3)^2 dx$.

Введем новую переменную, положив $u = 4x-3$, $du = $ $= (4x-3)'dx = 4dx$,

Внесем эти выражения в интеграл

$$\int u^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^2 du = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+C.$$

Сделаем обратную замену

$$\frac{1}{4}\frac{u^3}{3}+C = \frac{(4x-3)^3}{12}+C.$$

Проверка: $\left(\frac{(4x-3)^3}{12}+C\right)' = \frac{3(4x-3)^2 4}{12} = (4x-3)^2.$

Интегрирование по частям:

Требуется найти интеграл $\int xe^x dx$.

Положим

$$U = x,\ dV = e^x\,dx.\ \text{Тогда}\ dU = dx\ ,\ V = e^x$$

и

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Проверка: $(xe^x - e^x + C)' = xe^x + e^x - e^x = xe^x$.

Упражнения. Найти:

1. x^6dx; 2. $\int (x - x^3)dx$; 3. $\int x^2(x^2+3)dx$; 4. $\int \sin 7x dx$;
5. $\int \cos(3x+7)dx$; 6. $\int x \ln x\, dx$ $(U = \ln x)$.

Ответ. 1. $\frac{x^7}{7} + C$; 2. $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$; 3. $\frac{x^5}{5} + x^3 + C$;

4. $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$; 5. $\frac{1}{3}\sin(3x+7) + C$; 6. $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

7.2. Определенный интеграл

Интеграл можно определить как предел интегральных сумм.

Таблица 7

Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке [a, b]	$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$
Геометрический смысл определенного интеграла	

С помощью интегральных сумм можно приближенно вычислять самые разные величины (рис. 10).

Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции: $F(b)—F(a)$ — (формула Ньютона — Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

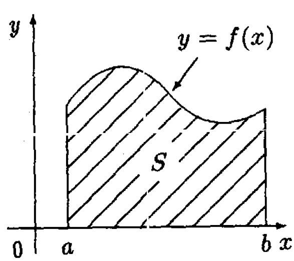


Рис. 10

Примеры. Вычислить: 1. $\int_1^2 x^2\,dx$;

2. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx.$

Решение.

1. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}.$

2. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})dx = \int_0^8 \sqrt{2x}\,dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^8 + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{16^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{3}0 + \frac{3}{4}8^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}0 = \frac{100}{3}.$$

Упражнение. Найти числа, получающиеся при использовании в интеграле $\int_1^2 f(x)dx$ следующих функций:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2};$ 2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}.$

Ответ. 1. $\dfrac{1}{2};$ 2. $\dfrac{3}{8}.$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \sin x$ и осью абсцисс, если

Для ответа на поставленный вопрос следует вычислить интеграл

$$S = \int_0^\pi \sin x\ dx = -\cos x\ \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -((-1)-1) = 2 \text{ ед.}^2.$$

Упражнение. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 4$.

Ответ. 24.

Пример. *Интегрирование по частям* в определенном интеграле:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\ dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0) + \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Здесь

$$U = x,\ dU = dx,\ dV = \sin x\, dx,\ V = -\cos x.$$

Упражнения. 1. $\int\limits_1^e x^2 \ln x dx$; 2. $\int\limits_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$.

Ответ. 1. $\dfrac{2e^3+1}{9}$; 2. $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите свойства первообразной.

2. Выпишите основные табличные интегралы по схеме $\int f(u)du = F(u) + C$.

3. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

4. Найдите: а) $\int (x+1)dx$; б) $\int \sin(2x+3)dx$; в) $\int \ln x\, dx$.

5. Дайте определение определенного интеграла. Каков его геометрический смысл?

6. Сформулируйте и запишите основные свойства определенного интеграла.

7. Вычислите $\int\limits_2^3 (2x-1)^3 dx$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$. Сделайте чертеж.

Математик, оперируя множеством символов, явно имея дело с чисто формальными истинами, тем не менее может достичь бесконечно важных результатов для описания физического мира.

К. Пирсон

8. Дифференциальные уравнения

Многочисленные задачи естествознания, техники и других областей знания сводятся к тому, что по заданным свойствам некоторого процесса или явления необходимо найти математическую модель самого процесса в виде формулы, связывающей переменные величины, т.е. в виде функциональной зависимости. Уравнения, в которых содержатся производные или дифференциалы искомых функций, называются дифференциальными. Они являются мощным средством познания окружающего нас мира. Дифференциальное уравнение — это как бы мгновенный снимок процесса в данный момент времени; интегрируя дифференциальное уравнение, мы по мгновенным снимкам восстанавливаем течение процесса в целом.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в котором неизвестной является функция одного независимого переменного, причем в уравнение входят производные различных порядков. В самом общем виде ДУ записывается так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком* уравнения. Решением ДУ называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Пример. Функция $y = Cx + x^2$ является решением уравнения $y' - \frac{y}{x} = x$, так как она обращает это уравнение в тождество.

Дифференциальные уравнения *первого* порядка $F(x, y, y') = 0$		
Формы записи		
$y' = f(x, y)$	$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$
Основные типы		
Уравнения с разделяющимися переменными	Однородные уравнения	Линейные уравнения

График решения называется интегральной кривой, а процесс нахождения решений — интегрированием ДУ. Следует отметить, что методы решения ДУ разнообразны и зависят от вида (порядка первого, второго, ...), типа (с разделяющимися переменными, однородные, линейные, ...) и т.д.

Использование операции интегрирования связано с появлением произвольной постоянной. Если действие повторяется *n* раз, то, очевидно, и в решении будет содержаться *n* произвольных постоянных.

Общим решением ДУ называется функция вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$.

Пример. Уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$ имеет общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ (проверьте!).

Если постоянным C_i придать конкретные числовые значения, то полученная функция носит название *частное решение*.

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *задачей Коши* (по имени французского математика).

Пример. *Задача о законе естественного роста.*

Закон естественного роста это закон, при котором скорость роста вещества прямо пропорциональна его количеству. Найдем формулу для определения изменения количества вещества y в зависимости от времени x, считая, что в начальный момент при $x = 0$ количество вещества было y_0. Используя физический смысл производной, этот закон можно записать так:

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Уравнение описывает многие процессы «размножения». Решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y = y_0$ при $x = 0$, имеет вид $y = y_0 e^{kx}$. Представляет интерес то, что по этой формуле, выражающей закон «естественного роста», происходит и «размножение» числа нейтронов в ядерных реакциях, и размножение числа бактерий, и рост населения и т.п.

Упражнения. Найдите частные решения уравнений:

1. $xdx = dy$, $y(1) = 0$ т. е. при $x = 1, y = 0$.
2. $yy' - x = 0$, $y(2) = 1$.

Ответ. 1. $y = \frac{x^2 - 1}{2}$; 2. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = \frac{3}{2}$.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Что называется порядком дифференциального уравнения?

2. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое — часным? Каков их геометрический смысл?

3. Определите порядок указанных ниже дифференциальных уравнений. Сколько независимых произвольных постоянных должно входить в общие решения этих уравнений?

а) $y^4 y'' = xy' + 3$; б) $y^2 + 5y' + 4 = 0$; в) $2y'' - y^3 = x^2$.

4. Показать, что функция $y = (C_1 + C_2 x)\, e^x$ есть решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$.

5. Решите задачу Коши: $yy' - x = 0$; $y = 4$, при $x = -2$.

Существует еще одна причина высокой репутации математики: именно математика дает... наукам определенную меру уверенности в выводах, достичь которой без математики они не могут.

А. Эйнштейн

9. Основы теории вероятностей и математической статистики

Теорию вероятностей можно определить как раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Методы теории вероятностей широко применяются при математической обработке результатов измерений, а также экономике, статистике, страховом деле, массовом обслуживании.

Математическая статистика — это наука, занимающаяся разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений.

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс). Следующий этап развития связан с именем Я. Бернулли. Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана А. Муавру, П. Лапласу, К. Гауссу, С. Пуассону и др. Наиболее плодотворный период связан с именами П. Чебышева и его учеников А. Маркова и А. Ляпунова, последующее развитие с именами С. Бернштейна, А. Хинчина, А. Колмогорова, В. Романовского, Н. Смирнова, Б. Гнеденко и др.

Концепция детерминированного подхода к явлениям окружающего мира долгое время преобладала как в организации научных исследований, так и в представлении их результатов. В основе этой концепции лежит механистическое представление о том, что при сохранении неизменными внешних условий, повторении некоторых определенных действий неизбежно можно прийти к прежнему результату. Эксперимент называется детерминированным, если его повторение не приводит к новым результатам. В противном случае, если повторение эксперимента приводит к другому результату, эксперимент называется случайным. Такое название связано с тем, что типичными экспериментами, в которых имеет место указанное явление (повторные действия могут давать разные результаты), являются эксперименты, заключающиеся в подбрасывании монеты или игрального кубика, раздачи колоды карт и т.п. В каждом из них мы сталкиваемся с неоднозначностью результата эксперимента. Так, монета может упасть вверх «гербом» или «решкой», а кубик — любой из шести граней, причем невозможно заранее предугадать, что конкретно произойдет при подбрасывании. Поэтому говорят, что результат зависит от случая, отсюда и название эксперимента.

Задача теории вероятностей заключается в построении вероятностных моделей случайных экспериментов. Вероятностная модель позволяет придать строгий математический смысл таким словам, как «случайность», «событие», «вероятность», «правдоподобный» и т.п., и оценить шансы на появление различных результатов, возможных в данном случайном эксперименте.

Конечно, надо отдавать себе отчет в том, что, как всякая модель, и вероятностная модель тоже, является некоторой идеализацией описываемого эксперимента — она не предназначена для воспроизведения всех деталей, а воплощает лишь основные черты явления. В частности, при подбрасывании монеты мы предполагаем, что результатом эксперимента не может быть пропажа монеты или приземление ее на ребро. Кроме того, чрезвычайно важным в теории вероятностей является предположение о принципиальной возможности многократного повторения случайного эксперимента. Если такой возможности нет, то построение вероятностной модели не имеет смысла. Можно сказать, что конкретная информация о самых разных ситуациях, которые могут возникнуть в данном случайном эксперименте, содержащаяся в вероятностной модели, «разворачивается» лишь при многократном повторении этого эксперимента. Так, можно утверждать, что если подбросить «правильную» монету 1000 раз, то число выпадений герба будет мало отличаться от 500.

9.1. Событие и вероятность: основные понятия, определение вероятности

9.1.1. Понятие о случайном событии

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытанием*. Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика).

Результат (исход) испытания называется *событием*. Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

События бывают трех видов: *достоверные, случайные* и *невозможные*.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Ответ на вопрос, считать ли данное событие случайным, зависит от имеющейся информации. Например, появление поезда на станции в промежутке времени от 18.00 до 18.10 — событие случайное с точки зрения пассажира, не знающего расписания, и неслучайное для пассажира, знающего расписание. При бросании монеты, если знать с достаточной точностью массу, начальные координаты и скорость монеты, можно (в принципе) рассчитать ее траекторию и, следовательно, предсказать, которой из двух сторон она упадет на стол.

Определение. Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Пример. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление трех очков, событие B — появление нечетного числа очков. События A и B совместные.

Определение. Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение «герба», событие B — выпадение цифры. Эти события несовместны, так как появление одного из них исключает появление другого.

Или, например, при одном бросании кости появление не менее трех очков и при этом появление четной грани — события совместные, а появление цифры 3 и при этом появление четной грани — события несовместные.

Определение. Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\neg A$.

Пример. Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение «герба», событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A=\neg B$ или $\neg A=B$.

Определение. Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

Пример. Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Следует отметить, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Достоверное событие не может не произойти (например, выпадение не менее одного очка при бросании кости); невозможное событие не может произойти (например, выпадение семи очков).

Определение. Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

Пример. Событие A_4 — выпадение четырех очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но оно может и не наступить в данном испытании.

9.1.2. Определение вероятности

С понятием вероятности случайных событий мы встречаемся в повседневной деятельности, когда оцениваем шансы появления такого рода событий (рис. 11).

Вероятность события A — число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события. По определению, $0 \leq P(A) \leq 1$. Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах.

В некоторых простейших ситуациях вероятность случайного события можно указать сразу: при бросании (симметричной!) монеты естественно считать оба возможных исхода (герб или цифра) имеющими равную вероятность, т. е. 0,5, или 50%. При бросании игральной кости появление любой цифры от 1 до 6 — равновероятные события, с вероятностью 1/6 каждое.

Вообще, если данный опыт может иметь n исходов и нет оснований считать появление какого-либо исхода более вероятным, чем другие, полагают вероятность каждого исхода равной $1/n$. Если событие A происходит в результате одного из m равновероятных исходов, то $P(A) = m/n$.

Определения вероятности		
⇓	⇓	⇓
Классическое $P(A) = \frac{M}{N}$	Статистическое $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n}$	Геометрическое $P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}$

Рис. 11

Например, появление нечетной грани при бросании кости (событие A) происходит при выпадении 1, или 3, или 5, т. е. здесь $m = 3$, поэтому $P(A) = 3/6 = 1/2$. Рассчитанную таким образом вероятность называют *априорной*. В более сложных ситуациях расчет вероятностей случайных событий может производиться на основании предположений о законах, управляющих деталями соответствующих процессов.

Пример. Из колоды карт наудачу выбирают одну карту. Найти вероятность того, что это карта пиковой масти.

Считая, что в колоде 36 карт, общее число исходов имеем $n = 36$. Всего карт пиковой масти 9, поэтому $m = 9$.

Итак, $P(A) = m/n = 9/36 = 1/4$.

Наряду с классическим определением, используется так называемое статистическое определение вероятности. Отношение $p = m/n$ числа m появлений события A при n испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом n частота события в определенном смысле приближается к вероятности P этого события. Пусть производятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность события A неизменна. Справедливо утверждение, называемое *законом больших чисел* или *теоремой Бернулли*. Оно означает, что если число испытаний достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отличие частоты события A от его вероятности меньше любого наперед заданного положительного числа. Так, много раз бросая монету, мы «почти наверняка» будем получать примерно равные частоты выпадений «герба» и цифры.

Увеличение неопределенности события		*Увеличение определенности события*
$P = 0$	$\longleftarrow P = 0{,}5 \longrightarrow$	$P = 1$
Невозможность		Определенность

9.1.3. Алгебра событий

Определение. *Суммой* событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B (табл. 8). Аналогично определяется сумма большего числа событий. Например, появление четной грани кости есть сумма трех событий: выпадения 2, или 4, или 6.

Таблица 8

Теорема сложения вероятностей	
Для несовместных событий	Для совместных событий
$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$	$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Пример. Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

Определение. *Произведением* событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B (табл. 9).

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется событие $A = A_1A_2, \ldots, A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

Таблица 9

Теорема умножения вероятностей	
Для независимых событий $P(A \text{ и } B) = P(AB) =$ $= P(A) \times P(B)$	Для зависимых событий $P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) =$ $= P(B) \times P_B(A)$

В предыдущем примере произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Произведение несовместных событий — событие невозможное. Сумма и произведение событий аналогичны соответственно объединению и пересечению множеств (см. гл. 2). Вероятность суммы $A + B$ несовместных событий A и B равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Пример. Два стрелка стреляют в одну цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым — 0,5.

Стрелки стреляют по команде (т. е. одновременно) один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков?

Пусть A — попадание в цель первым стрелком, B — вторым стрелком, $A + B$ — поражение цели хотя бы одним стрелком, AB — поражение цели обоими стрелками. По формуле имеем

$$P\ (A + B) = 0{,}8 + 0{,}5 - P\ (AB).$$

В данном примере можно считать события A и B независимыми, поэтому

$$P\ (AB) = P\ (A) \times P\ (B) = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4.$$

Тогда $P\ (A + B) = 0{,}9$.

Условная вероятность — вероятность появления события A при условии, что произошло событие B, обозначается $P_B\ (A)$. Вероятность произведения событий вычисляется с помощью условных вероятностей по формуле

$$P\ (A \text{ и } B) = P\ (A) \times P_A\ (B) = P\ (B) \times P_B\ (A).$$

Пример. В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара черные?

Появление первого черного шара (событие A) имеет, очевидно, вероятность $P\,(A) = 5/12$. Если первый шар оказался черным, то условная вероятность события B — появления второго черного шара (при условии, что первый шар был черным) — равна $P_A\ (B) = 4/11$, так как перед выниманием второго шара осталось 11 шаров, из них 4 черных. Вероятность вынуть два черных шара можно рассчитать по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} \approx 0{,}152.$$

События A и B называются *независимыми,* если условная вероятность $P_B\ (A)$ равна вероятности $P\ (A)$. Другими словами, для независимых событий появление одного не влияет на вероятность появления другого. Так, в предыдущем примере вероятность появления второго черного шара не зависела бы от цвета вынутого первого шара, если, вынув первый шар, мы положили бы его обратно в ящик. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P\ (A \text{ и } B) = P\ (A) \times P\ (B).$$

На практике независимые события встречаются очень часто, так как причинная связь явлений во многих случаях отсутствует или несущественна.

Пример. Производят n бросаний монеты. Результат каждого бросания — случайное событие, вероятность которого считаем не зависящей от результатов других бросаний, поэтому результаты этих n испытаний можно считать независимыми событиями.

Формула полной вероятности	$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$	$\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$
Формула Байеса (теорема гипотез)	$P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$	

Упражнения

А. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Игральную кость подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что: а) шестерка не появится ни разу; б) шестерка появится хотя бы 1 раз?

Ответ. а) 0,579; б) 0,421.

2. Из 40 экзаменационных вопросов студент выучил 30. Какова вероятность того, что он ответит: а) на три заданных вопроса; б) на 2 из 3 заданных вопросов?

Ответ. а) 0,411; б) 0,440.

3. Из урны с 5 белыми и 7 черными шарами наугад берут

4 шара. Найти вероятности событий: а) взято 2 белых шара; б) взято белых шаров больше, чем черных.

Ответ. а) 0,424; б) 0,162.

4. Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Найти вероятности следующих событий: а) все карты имеют одну масть; б) все карты красные; в) все карты — тузы.

Ответ. а) 0,00856; б) 0,0519; в) 0,0000170.

5. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

Ответ. 15/28.

Б. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Из урны с 8 белыми и 4 черными шарами последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность вынуть три белых шара?

Ответ. 0,255.

2. В первой урне 4 белых и 6 синих шаров, во второй — 5 белых и 3 синих. Наугад из каждой урны берут по 2 шара. Найти вероятности событий: а) все шары белые; б) все шары одного цвета; в) два шара белые.

Ответ. а) 0,0476; б) 0,0833; в) 0,419.

3. Двое поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет «герб». Какова вероятность выигрыша для каждого из игроков?

Ответ. 2/3 — для начинающего; 1/3 — для второго.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Сколько независимых выстрелов необходимо произвести, чтобы вероятность поражения мишени была больше: а) 0,95; б) 0,99; в) 0,999?

Ответ. а) 3; б) 4; в) 5.

9.2. Случайные величины

Схематично основные понятия представлены на рис. 12.

Случайная величина — переменная величина, конкретное значение которой зависит от случая. Например, температура воздуха в 12 ч. дня 1 июля в Новосибирске; номер грани, выпадающий при бросании кости; скорость автомобиля в данный момент времени и т.д.

Для характеристики случайной величины необходимо знать множество возможных значений этой величины и вероятности, с которыми она может принимать эти значения. Эти данные образуют *закон распределения* случайной величины. Например, распределение числа очков при бросании игральной кости описывается равными вероятностями 1/6 для каждого значения от 1 до 6.

Случайная величина	
Дискретная	Непрерывная

Математическое ожидание	Дисперсия

Основные законы распределения	
Дискретные величины	*Непрерывные величины*
Равномерное распределение	Равномерное (прямоугольное) распределение
Биноминальное распределение	Экспоненциальное (показательное) распределение
Распределение Пуассона	Нормальное распределение

Рис. 12

Множество возможных значений *дискретной* случайной величины конечно (или счетно). Встречаются также *непрерывные* случайные величины, возможные значения которых заполняют всю числовую ось (или некоторые интервалы).

Непрерывную случайную величину A следует задавать не указанием вероятностей ее отдельных значений, а непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией, называемой *плотностью распределения* вероятностей случайной величины A.

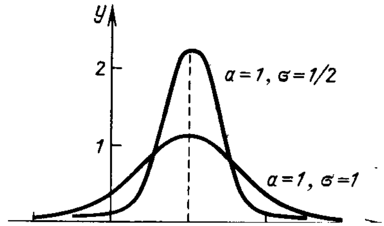


Рис. 13

Часто встречается *нормальное распределение* или *распределение Гаусса*. На рис. 13 показаны два варианта плотности нормального распределения.

Дискретной случайной называют величину X, которая принимает отдельные значения x_i с вероятностями p_i. Ее законом распределения называют соответствие между возможными значениями x_i и их вероятностями p_i. Следует заметить, что $\Sigma p_i = 1$. Важные характеристики случайной величины — математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание $\mathrm{M}(X)$ определяется как среднее взвешенное по формуле

$$\mathrm{M}(X) = \Sigma\, x_i p_i.$$

Термин «математическое ожидание» связан с представлением о среднем или наиболее ожидаемом выигрыше в теории азартных игр.

Пример. Пусть в некоторой лотерее на каждый билет вероятность выиграть 100 р. — 3%, 1000 р. — 0,5%, 10 000 р. — 0,01%, других выигрышей нет.

Каков средний выигрыш в лотерее (на один билет)?

Средний выигрыш подсчитать по формуле математического ожидания

$$0{,}03\times100 + 0{,}005\times1000 + 0{,}0001\times10\,000 = 9 \text{ р.}$$

Дисперсия[1] $\mathrm{D}(X)$ случайной величины X характеризует разброс возможных ее значений относи-

[1] Термин «дисперсия» происходит от латинского *dispengo* – рассыпать, рассеивать, разбрасывать.

тельно математического ожидания и определяется по формуле

$$D(X) = M\,[X - M\,(X)]^2.$$

Для детерминированной величины, принимающей только одно значение x_0, математическое ожидание равно x_0, а дисперсия равна нулю.

Понятие случайного (стохастического) процесса является расширением понятия случайной величины. Можно сказать, что случайный процесс — это семейство случайных величин, эволюционирующих во времени.

9.3. Основные понятия математической статистики

Термин «статистика» в настоящее время употребляется в разных значениях, однако зачастую под ним понимают науку, изучающую массовые явления для выявления закономерностей и получения некоторых обобщенных показателей, кратко характеризующих полученные данные. Как правило, статистика имеет дело с числовыми значениями, которые определяются влиянием множества различных причин, одни из которых — существенные, а другие — случайные. Основная задача статистики состоит в абстрагировании от случайного и выявлении типичного, характерного и закономерного.

Сам термин «статистика» произошел от латинского слова status, что означает политическое состояние и первоначально статистикой называли изучение государственных дел, а видных политических деятелей, хорошо осведомленных и потому способных делать обоснованные политические выводы — statists. Позднее под словом «статистика» стали подразумевать числовые данные, на основе которых государственные деятели делали выводы, а еще позже стали применять и для числовых данных вообще и постепенно пришли к современному значению.

Без статистики невозможно изучать явления и процессы, происходящие в производстве, экономике и т.д. Статистическое изучение тех или иных явлений предполагает в качестве первого шага *сбор сведений* или статистическое наблюдение. В результате такого наблюдения получается беспорядочная груда сырого материала, нуждающегося в систематизации и обработке.

В основе научной статистики лежит метод группировок. *Группировкой* называется расчленение совокупности сведений по какому-либо признаку. Благодаря группировкам материал наблюдений принимает упорядоченный (систематизированный) вид. Группировочные признаки могут иметь количественное выражение — заработная плата, успеваемость и т.д. или качественное — пол, должность, семейное положение и т.п.

Следующий этап обработки собранных данных — вычисление *обобщающих показателей*. В качестве таких показателей широко известны средние величины. Необходимость вычисления средних величин всегда возникает при изучении массовых явлений. Роль средних величин велика, так как в каждом явлении имеет место сочетание случайности и закономерности. При вычислении средних в силу действия закона больших чисел случайности взаимопоглощаются и уравновешиваются, поэтому появляется возможность переходить от единичного к общему, от случайного – к закономерному.

Характеристики и параметры статистической совокупности

В результате непосредственных наблюдений, измерений или регистрации фактов получается множество данных, которые образуют статистическую совокупность и нуждаются в обработке, которая включает систематизацию и классификацию, расчет параметров, характеризующих эту совокупность, а также составление таблиц, графиков и других материалов, иллюстрирующих процесс.

Основным этапом обработки экспериментальных данных является *группировка,* т. е. разделение статистической совокупности на группы (классы), однородные по какому-то признаку. Благодаря группировке собранный материал приобретает систематизированный вид, поэтому выделение тех или иных групп должно быть не формальным, а обоснованным исходя из целей исследования.

Сведения, собранные за какой-то период, могут быть систематизированы по времени. Получаемые при этом данные называются *временнSыми рядами* или *рядами динамики.* Путем экстраполяции, т. е. продолжения за измеренные значения, могут быть использованы для прогнозирования развития исследуемой системы в будущем. Если элементы совокупности систематизируются по характерному признаку, например, по виду технологических процессов, типу оборудования, маркам исходных материалов, квалификации операторов и т.п., то образуются *ряды распределения.*

Когда признаки количественные, то, расположив их в порядке возрастания или убывания и подсчитав число элементов, соответствующих каждому значению признака, получают *вариационный ряд.* Варьирующие признаки могут выражаться в виде дискретных целых чисел или принимать любые значения. Для непрерывных признаков вариационные ряды строятся как интервальные, т. е. значения признаков в них выражаются в виде «от... до...».

Вариационный ряд представляет собой таблицу распределения: несколько столбцов, в одном из которых приводятся значения признака, а в другом — числа, показывающие, сколько раз встречается данное значение в исследуемой совокупности. В других столбцах той же таблицы могут быть относительные числа, плотности и другие расчетные величины. Вариационные ряды приобретают большую наглядность, если изображаются графически. Для этого в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают интервалы вариационного ряда, а по оси ординат — соответствующие абсолютные числа или относительные частоты. Полученная диаграмма, состоящая из сомкнутых прямоугольников, называется *гистограммой*.

Наиболее полную характеристику статистической совокупности дает функция распределения вероятностей случайной величины. Однако на практике часто используют ограниченное количество числовых характеристик, называемых *параметрами распределения*. Эти параметры можно разделить на три класса, которые характеризуют: центр группирования; величину рассеяния (степень вариации); форму распределения вероятностей.

Центр группирования. Одной из основных характеристик статистической совокупности, дающей представление о том, вокруг какого центра группируются все значения, является среднее арифметическое.

Величина рассеяния. Статистические совокупности могут иметь близкие или даже одинаковые значения центра группирования, однако отдельные значения величин могут существенно отличаться. Происходит это из-за того, что разброс значений относительно центра бывает неодинаковый: в одних случаях большой, в других — малый. Поэтому необходимо количественно измерять эти разбросы или вариации.

Самой элементарной характеристикой рассеяния является вариационный размах, представляющий собой разность максимальных и минимальных значений изучаемой совокупности.

Вариационный размах не всегда характерен, так как учитывает только крайние значения, которые могут в большой степени отличаться от всех других значений. Более точно рассеяние определяется с помощью показателей, учитывающих отклонение всех значений от среднего арифметического, т. е. среднее линейное и среднее квадратическое отклонения.

Среднее линейное отклонение основано на учете индивидуальных отклонений отдельных значений от среднего арифметического данного ряда и определяется как среднее арифметическое этих отклонений.

Вторым показателем степени вариации вокруг среднего является *среднее квадратическое отклонение* или, как его часто называют, *основное отклонение*.

Основное отклонение наиболее распространенный и общепринятый показатель вариации. Среднее арифметическое из квадратов отклонений от среднего значения называется *дисперсией*. Дисперсия имеет самостоятельное значение в математической статистике и относится к числу важнейших показателей вариации.

Для характеристики формы распределения обычно используют ту математическую модель, которая наилучшим образом приближает к виду кривой распределения вероятностей, полученной при анализе экспериментально полученных данных.

Статистические модели. В качестве математических моделей статистических распределений используют теоретические кривые распределения. Теоретическая кривая — это зависимость, которая описывается математически, т. е. может быть выражена уравнением с определенными параметрами. Известно значительное количество различных распределений: число потенциально возможных статистических моделей еще больше. Однако на практике применяют лишь некоторые из них, обычно те, которые более удобны для описания какой-либо ситуации или обладают необходимыми математическими свойствами.

Статистические методы анализа широко используются в компьютерных программах. В настоящее время для статистического анализа данных используются, в основном, пакеты STADIA и STATGRAPHICS[1].

Например, методы статистики в литературоведении характеризуют стиль разных авторов не только качественно, но и количественно. Спорные вопросы об авторстве (а это уже юриспруденция!) тогда можно решать с помощью чисел. Так решился вопрос об авторстве (или соавторстве?) «Илиады»: подсчеты на ЭВМ всех ритмических особенностей каждой главы произведения показали, что автором поэмы мог быть только один человек — все главы имеют общее ритмическое единство.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Дайте определение суммы, произведения двух событий. Какое событие называют противоположным данному? Проиллюстрируйте определения диаграммами Эйлера – Венна.

2. Приведите классическое и статистическое определения вероятности.

3. В чем состоит особенность геометрического подхода к определению вероятности?

4. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

5. Сформулируйте следствия из теоремы сложения вероятностей.

6. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное

[1] См.: *Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.* Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М, 1998.

число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

7. Дайте определение зависимых и независимых событий. Приведите примеры.

8. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров. Во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

9. Дайте определение случайной величины. Когда случайную величину называют дискретной?

10. Запишите свойства функции распределения.

11. Каковы основные способы задания закона распределения дискретной случайной величины?

12. Дайте определения математического ожидания и дисперсии случайной величины.

13. Каков смысл параметров α и β функции плотности нормального распределения? Как изменяется график функции $f(x)$ при изменении этих параметров?

14. Сформулируйте содержание основных задач математической статистики.

15. Что называется выборкой и в чем состоит ее назначение?

16. Что такое статистический и интервальный ряды; полигон и гистограмма?

17. Что называют выборочной средней; выборочной дисперсией?

Хотя аналогия часто вводит в заблуждение,
это наименьшее из того, что вводит нас в заблуждение.
С. Батлер

10. Математическое моделирование и принятие решений

Если проблему удастся перенести на язык формул, то она упрощается. Математический подход прост еще и потому, что подчиняется вполне определенным жестким правилам, которые нельзя отменить указом или иным способом. Сложность нашей жизни состоит в том, что все, что в ней случается, свободно от пут условностей.

Математика имеет дело с упрощенными моделями явлений. Природные корни некоторых математических наук скрыты от нас паутиной времени, в других, более молодых, они видны. По существу, формула (или совокупность формул) представляет собой определенный этап в построении математической модели.

10.1. Математические методы и моделирование в целенаправленной деятельности

Под **моделью** (от лат. *modulus* – мера, образец, норма) понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты. Процесс построения и использования модели называется **моделированием**.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений. С математическими моделями непосредственно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов.

Соотношение между элементами a, b и c, выражаемое формулой $a + b = c$, — это математическая модель. Она изоморфно отображает операцию объединения двух куч камней с их числами a и b в общую кучу камней, которых окажется $c = a + b$. В этом смысле операция сложения отвечает объединению двух куч в одну, а модель $a + b = c$ изоморфна этому слиянию. При этом, не объединяя кучи и не считая в ней камней, можно предсказать, что их будет ровно c.

Этот пример поясняет общий математический метод познания. Он состоит в построении для объекта, процесса или явления изоморфной математической модели (на основе элементов и операций операционной системы), изучении этой математической модели (для чего требуется выполнимость используемых в ней операций) и переносе в силу изоморфизма результатов, полученных для модели, на исходный изучаемый объект.

В этом направлении математика не только создала разнообразные внутренние модели алгебры, геометрии, функции комплексного переменного, дифференциальных уравнений и т.д., но и помогла естествознанию построить математические модели механики, электродинамики, термодинамики, химической кинетики, микромира, пространства — времени и тяготения, вероятностей, передачи сообщений, управления, логического вывода и др. Созданием моделей математика часто опережала потребности естествознания и техники (рис. 14).

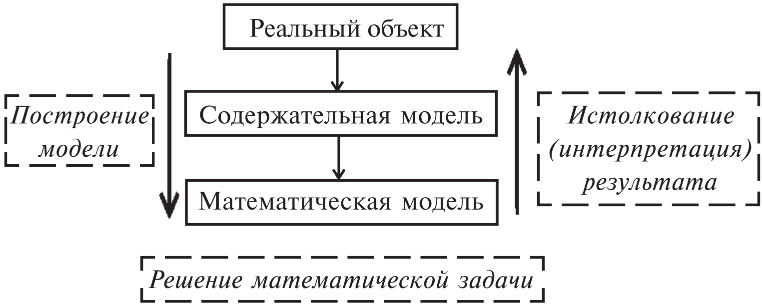


Рис. 14

Если раньше основная задача науки была в том, чтобы понять поведение изучаемой системы, то теперь актуальной является возможность *оценить различные стратегии, обеспечивающие достижение цели.*

Реализация универсального математического метода познания и есть, по-видимому, *основная цель и задача современной математики*. Она включает, в первую очередь, построение новых, неведомых математических моделей, в частности в биологии, для познания жизни и деятельности мозга, мироздания и микромира, новых, фантастических технологий и техники, а также познание экономических и социальных явлений также с помощью математических моделей различными математическими методами.

Не следует забывать о дальнейшем расширении и обогащении операционной системы и ее реальных возможностей, гигантски усиливаемых вычислительными методами, вычислительными машинами и средствами программирования. Одним из мощных программных средств обеспечения математического моделирования систем любого назначения является интегрированный пакет *Math-CAD*; есть и другие автоматизированные системы численных и аналитических расчетов, обладающие дружественным к пользователю интерфейсом и большими вычислительными возможностями. Пример математических пакетов: *Derive*, *MATLAB, Maple*, *Mathematica*, *SPSS*, *Statistica*. Кроме того имеется много узкоспециализированных или менее известных пакетов.

В современном мире управление — дело отнюдь не легкое, поскольку политическая, экономическая и социальная структуры общества являются сложными и постоянно усложняются еще больше. И то же время для эффективного управления необходимо учитывать характер взаимоотношений между различными элементами организации, а также все ее взаимодействия с окружающей средой. Один из мощных инструментов анализа — моделирование. Однако создание новой модели – *процесс творческий*, близкий к искусству. Но анализ адекватной математической модели дает в руки менеджеров, управляющих и других руководителей эффективный инструмент, который может использоваться для предсказания поведения систем и сравнения получаемых результатов. Таким образом, моделирование позволяет логическим путем прогнозировать последствия альтернативных действий и достаточно уверенно показывает, какому из них следует отдать предпочтение. Применение моделей дает руководителям и менеджерам метод, повышающий эффективность их суждений и интуиции (табл. 10).

Таблица 10

Классификация математических моделей		
Элементы модели		
исходные данные	искомые переменные	зависимости
детерминированные случайные	непрерывные дискретные	линейные нелинейные

В настоящее время нет предпосылок выделять «самые элементарные» и «неделимые» кирпичики мироздания. Поэтому можно утверждать, что любой объект исследования является бесконечно сложным и характеризуется бесконечным числом параметров. При построении модели исследователь всегда исходит из *целей* исследования и учитывает только наиболее важные для достижения поставленных целей факторы. Поэтому любая модель не тождественна объекту-оригиналу и, следовательно, *неполна*, поскольку при ее построении исследователь выделил только наиболее существенные с его точки зрения факторы. Отброшенные факторы, несмотря на свое относительно малое влияние на поведение объекта по сравнению с факторами, выбранными в качестве существенных, все же в совокупности могут приводить к значительным различиям между объектом и его моделью. «Полная» модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу. Данную мысль хорошо отражает фраза, что «наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше — тот же самый кот». С другой стороны, при моделировании должно «исключаться какое бы то ни было самоотнесение, ничто не может быть моделью самого себя».

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель *адекватна* (от лат. *adaequatus* — приравненный) объекту. При этом адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Учитывая заложенную при создании неполноту модели, можно утверждать, что идеально адекватная модель принципиально невозможна.

Математическая модель может использоваться традиционным способом, т. е. для получения какого-то частного решения, но в сфере управления она успешнее применяется для *имитационного моделирования*. Имитация (от лат. *imitatio* — подражание) — это воспроизведение на модели той или иной реальной ситуации, ее исследование и в конечном счете нахождение наиболее удачного решения.

Имитационное моделирование основывается, главным образом, на теории сложных систем, теории вероятностей и математической статистике. Но в то же время имитационное моделирование и экспериментирование, как и само управление, во многом остаются творческими процессами. Собственно имитационное моделирование состоит из конструирования математической модели реальной системы и постановки на ней экспериментов, чтобы оценить (с точки зрения потребности в ресурсах, например) различные стратегии, обеспечивающие достижение цели данной системы.

При проектировании сложных технических систем, управлении промышленным или сельскохозяйственным производством, руководстве военными действиями, большое значение имеет опыт, позволяющий выделить наиболее существенные факторы, охватить ситуацию в целом и выбрать оптимальный путь достижения поставленной цели. Опыт помогает также найти аналогичные случаи в прошлом и по возможности избежать ошибочных действий.

Под опытом подразумевается не только собственная практика, но и опыт, описанный в книгах, монографиях, обобщенный в инструкциях, рекомендациях и других руководящих материалах. Поэтому, прежде чем принимать решение, полезно изучить опыт, расспросить знающих людей, посмотреть, как поступали в подобных случаях раньше. Естественно, что когда решение апробировано, т.е. известно, какое именно решение наилучшим образом удовлетворяет поставленным целям, проблемы принятия решения и оптимального управления попросту не существует — решение известно наперед.

Однако практически не бывает совершенно одинаковых ситуаций, поэтому принимать решения и осуществлять управление приходится в условиях неполной и недостаточной информации. В таких случаях недостающую информацию пытаются получить, используя догадки, предположения, результаты научных исследований и особенно изучение на моделях. Научно обоснованная теория управления фактически представляет собой набор методов пополнения недостающей информации об управляемом процессе, а точнее говоря, о том, как поведет себя объект управления при выбранном воздействии.

Получается, что для успешного управления надо предсказывать поведение системы в будущем. Человечество всегда хотело знать будущее, поэтому с древнейших времен создавались различные методы предсказаний. Одни из них с позиций сегодняшнего дня кажутся наивными, например гадание на кофейной гуще или по потрохам черного петуха. Другие не поняты до сих пор, несмотря на огромные усилия ученых, например возможность предсказания стихийных бедствий (извержение вулканов, цунами), наблюдая за поведением некоторых животных (рыб, муравьев и др.). Наконец, третьи получили четкое обоснование и широко используются в научной и инженерной практике. Это методы математического прогнозирования.

Следует учитывать, что некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом. Недопустимы, например, эксперименты с экономикой страны или со здоровьем населения. Принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым какого-то государства или народа («История не терпит сослагательного наклонения»). Невозможно (по крайней мере, в настоящее время) провести эксперимент по прямому исследованию структуры звезд. Многие эксперименты неосуществимы из-за своей дороговизны или рискованности для человека и/или среды его обитания.

В зависимости от вида системы и конкретных целей, которые ставятся при анализе, используют разные методы описания систем, т. е. существует различные подходы к математическому моделированию и системному анализу. В основе каждого подхода лежат те или иные представления, какой-то основной набор идей и теоретических предпосылок или, как сейчас принято говорить, *определенная концепция*.

Итак, модель нужна для того, чтобы:

понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;

научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;

прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

10.2. Исследование операций и принятие решений

В настоящее время, когда последствия принимаемых решений оказывают большое влияние на все стороны социальной и общественной жизни, затрагивают интересы всего населения страны, необходимы рекомендации по правильному и научно обоснованному управлению. В самых разных областях — организация промышленного или сельскохозяйственного производства, эксплуатация транспорта, образование, здравоохранение, бытовое обслуживание населения, телефонная и почтовая связь, торговля и общественное питание — возникают сходные по постановке задачи, обладающие рядом общих признаков и решаемые сходными методами.

Типичная ситуация такова: организуется какое-то мероприятие, которое можно осуществить тем или иным способом, т.е. выбрать решение из ряда возможных вариантов. Какой из вариантов выбрать? Каждый вариант обладает как преимуществами, так и недостатками. Причем в силу сложности обстановки не ясно, какой из всех возможных лучше других. Для этого проводится серия математических расчетов. Их задача — помочь ответственным за принятие решения, сделать обоснованный выбор. Впервые научные методы обоснования принимаемых решений были применены в военном деле. Так, в годы Второй мировой войны для облегчения принятия решения командующим штабы осуществляли основанные на математических расчетах исследования, показывающие возможные результаты различных военных операций. Поэтому эти методы получили название *исследование операций*. В дальнейшем стало ясно, что операции, представляющие собой ряд целенаправленных действий, имеют место не только в военном деле, но и в промышленности, на транспорте, в сельском хозяйстве, бытовом обслуживании населения и т.д.

Под термином «**исследование операций**» понимают *применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях человеческой деятельности.*

Операцией называют комплекс мероприятий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение поставленной цели. Операция является управляемым мероприятием (табл. 11).

Таблица 11

Основные вопросы постановки задачи			
Набор независимых параметров (переменных)	Определение условий их изменения	Выбор количественного критерия	Формулировка задачи поиска

При всем многообразии содержания конкретных работ по исследованию операций каждое операционное исследование проходит последовательно следующие этапы: 1) постановка задачи; 2) построение математической модели; 3) нахождение метода решения; 4) проверка и корректировка модели; 5) реализация найденного решения на практике.

Постановка задачи — это чрезвычайно ответственный этап операционного исследования. Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Такая постановка задачи обычно не окончательная. Во время анализа исследуемой системы задача постепенно уточняется. На этом этапе роль операционной группы состоит в проведении тщательного обследования объекта, изучении множества факторов, влияющих на результаты исследуемого процесса.

После сбора и анализа данных операционная группа выделяет совокупность существенных факторов, проводит консультации с заказчиками и окончательно уточняет содержательную (словесную) постановку задачи.

Для выяснения упущенных факторов и их взаимосвязей при необходимости проводят дополнительное обследование объекта.

Построение математической модели. Получив достаточно строгую и логически непротиворечивую, содержательную постановку задачи, необходимо построить ее математическую модель. Этот процесс называется формализацией задачи.

В самом общем случае математическая модель задачи имеет вид: найти max (или min) *целевой функции* (показатель качества или эффективность системы) при заданных ограничениях. Совокупность всех ограничений, каждое из которых представляет собой уравнение или неравенство, называется *системой ограничений*. Целевая функция и ограничения математически выражаются через *параметры* (характеристики, значения которых не зависят от принимаемого решения) и *управляемые переменные* (характеристики, значения которых определяются принимаемым решением). Среди управляемых переменных выделяют те, значения которых определяются непосредственно решением, и называют их *переменными решения*. Остальные управляемые переменные, являющиеся функциями переменных решений и параметров, называют *зависимыми переменными*.

Множество всех значений переменных решения, удовлетворяющих каждому ограничению, называется *множеством допустимых решений* (планов); задача исследования операций называется допустимой, если она имеет непустое множество допустимых решений. *Оптимальным* называется допустимое решение, доставляющее оптимальное значение (максимальное или минимальное — в зависимости от поставленной цели) целевой функции задачи.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ	
Детерминированные модели ⇓ Линейное программирование Целочисленное программирование Потоки в сетях Геометрическое программирование Нелинейное программирование Оптимальное управление	Стохастические (вероятностные) модели ⇓ Теория массового обслуживания Теория полезности Теория принятия решений Теория игр Имитационное моделирование Динамическое программирование

Рис. 15

Нахождение метода решения. Для нахождения оптимального решения задачи в зависимости от структуры целевой функции и ограничений применяют те или иные методы теории оптимальных решений, называемые методами математического программирования[1].

Многообразие методов лишний раз подтверждает сложность решаемых задач (рис. 15). Следует также подчеркнуть, что эти методы, положенные в основу алгоритмов поиска оптимальных решений, предполагают, в основном, компьютерную реализацию[2].

Проверка и корректировка модели. В сложных системах модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса.

Проверку и корректировку модели можно производить, например, по логической схеме: если величина ошибки превышает допустимое значение отклонения (его выбирают исходя из требуемой степени адекватности модели), то это свидетельствует о том, что упущены некоторые важные факторы и взаимосвязи. В этом случае производят корректировку модели.

Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры математической модели, многочисленных изменений переменных модели. Таким образом четыре названные выше этапа повторяют многократно до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное соответствие между выходами объекта и модели.

---

[1] Термин «программирование» заимствован из зарубежной литературы и означает «планирование». Его не следует путать с термином, означающим составление программ для ЭВМ.

[2] См., например: *Курицкий Б.* Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV — СПб, 1997; *Матвеев Л. А.* Компьютерная поддержка решений: Учебник. СПб.: Специальная литература, 1998

Реализация найденного решения на практике является важнейшим этапом, завершающим операционное исследование. Внедрение можно рассматривать как самостоятельную задачу, применив к ней системный подход и анализ. Полученное предварительно математическое решение облекается в соответствующую содержательную форму и представляется в виде инструкций и рекомендаций.

Само **принятие решения** выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица (или группы лиц), которому предоставлено право окончательного выбора. При этом выборе он может учитывать наряду с рекомендациями, вытекающими из математического расчета, еще ряд соображений, не учтенных этим расчетом.

В зависимости от того, какой информацией обладают руководитель и сотрудники, подготавливающие решения (его штаб), условия принятия решений меняются и изменяются математические методы, применяемые для выработки рекомендаций. Если известны все действующие в системе факторы, т.е. отсутствуют случайные воздействия, то это будет *принятие решений в условиях определенности.*

Когда решение может привести не к определенному исходу, а к одному из множества возможных с разными вероятностями их осуществления, то принимающий решение рискует получить не тот результат, на который рассчитывает. Поскольку исход каждой конкретной реализации случаен и потому заранее непредсказуем, метод называют *принятием решений в условиях риска*.

Если исход операции зависит не только от стратегии, избранной руководителем, но и от ряда факторов, не известных в момент принятия решения, например погодных условий, действий, которые предпримет конкурент, противник и т.п., то такая задача называется *принятием решений в условиях неопределенности.*

В общем случае цель операции выражается в стремлении к достижению максимального значения критерия эффективности. При наличии неопределенности это уже не строго математическая задача, которая дает однозначное решение. Теперь нет уверенности в том, что можно получить решение, а если оно будет получено, то нет гарантии, что оно будет единственно правильным. Именно поэтому в формулировке задачи приходится делать оговорку *«по возможности»*.

Таким образом, при решении проблем, возникающих в реальной жизни, математическая теория и научно обоснованные методы не дают точного решения. Причина этого в том, что когда нет точных данных, т. е. *нет полной информации, то остается лишь предполагать и строить догадки,* но было бы наивно считать, что все предположения обязательно сбудутся.

И все-таки решение, принятое в условиях неопределенности, но на основании математических расчетов, будет лучше, чем взятое наугад первое попавшееся. Задача исследования операций заключается в том, чтобы это решение в возможно большей степени содержало черты разумности, именно в этом смысле надо понимать определение «по возможности оптимальное».

Один из зарубежных специалистов так определил исследование операций: это *искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые другими методами ответы даются еще худшие*. Действительно, любой конструктивный или технологический вариант, выбранный в условиях неопределенности, вполне вероятно может оказаться хуже, выбранного в условиях, когда известны все факторы и причины, влияющие на функционирование.

Но все же лучше проанализировать предположения и догадки, чем наобум взять случайно попавшийся вариант. Это необходимо учитывать при разработке модели операции: нет надобности разрабатывать точную и подробную модель, поскольку решение все равно будет приближенным.

Сложность задач принятия решений в условиях неопределенности зависит от природы неизвестных факторов. По этому признаку они делятся на два класса:

стохастические задачи исследования операций, когда неизвестные факторы представляют собой случайные величины, для которых известны законы распределения вероятностей и другие статистические характеристики;

неопределенные задачи исследования операций, когда неизвестные факторы не могут быть описаны статистическими методами.

Приведем пример стохастической задачи исследования операций. Пусть организуется работа кафе, столовой или другого предприятия общественного питания. Какое количество посетителей придет в него за день, нам не известно. Точно так же не известно, сколько времени будут обслуживать каждого посетителя. Однако характеристики этих случайных величин могут быть получены статистическим путем. Показатель эффективности, зависящий от случайных факторов, тоже будет случайной величиной.

Первое, что приходит в голову, — взять в качестве показателя эффективности не саму случайную величину, а ее среднее значение и выбрать такое решение, при котором это среднее значение обращается в максимум (или минимум). Именно так и поступают, т.е. выбирают в качестве показателя эффективности операции, исход которой зависит от случайных факторов, среднее значение. Таким образом получают «средний доход» за единицу времени, «среднее время простоя» и т.д.

Характерные черты операционного подхода			
ориентация на принятие решения	оценка на основе критериев экономической эффективности	доверие к математической модели	необходимость использования ЭВМ

Что такое теория принятия решений? Теория принятия решений представляет собой набор понятий и систематических методов, позволяющих всесторонне анализировать проблемы принятия решений в условиях неопределенности. Совершенствование процесса принятия решений — цель рассматриваемой теории. В основе теории принятия решений лежит предположение о том, что выбор альтернатив *должен* определяться двумя факторами:

представлениями лица, принимающего решение, о вероятностях различных возможных исходов (последствий), которые могут иметь место при выборе того или иного варианта решения;

предпочтениями, отдаваемыми им различным возможным исходам.

Оба фактора формально входят в теорию принятия решений, и, чтобы их учесть, потребуется представить в виде цифр: суждения о возможных последствиях (опираясь на понятие субъективной вероятности) и высказывания о предпочтениях (используя теорию полезности).

«Разделяй и властвуй» — вот девиз теории принятия решений. Согласно методике этой теории, рассматриваемую проблему необходимо разбить на части, которые следует изучать и анализировать отдельно, а затем построить общую модель для принятия решений.

Для удобства следует выделить следующие этапы в процессе принятия решений.

1. *Определение альтернативных способов действия.* Должен быть задан подходящий набор целей и указаны соответствующие меры эффективности; это дает возможность определить степень, с которой заданные цели могут быть достигнуты с помощью различных способов действия. Для каждого способа действия возможные исходы описываются в единицах принятых мер эффективности. Кроме того, необходимо указать, как изучаемый процесс (задача) развивается во времени, и описать способ сбора информации.

2. *Описание вероятностей возможных исходов* требует, чтобы неопределенность, связанная с альтернативными решениями, была выражена численно через распределение вероятностей. В результате такой операции становится известной вероятность каждого возможного исхода для каждого принятого решения.

3. *Ранжировка предпочтений возможных исходов через их полезность.* Для этого выбирают меру эффективности, а затем с ее помощью представляют в числовой форме как отношение лица, принимающего решение, к последствиям (исходам), так и вероятности возможных исходов.

4. *Рациональный синтез информации, полученной на первых трех этапах.* Следует проанализировать и эффективно использовать всю полученную информацию, чтобы решить, какой из возможных альтернатив следует отдать предпочтение. Данный этап включает также анализ чувствительности.

Эти этапы являются основой подхода к принятию решений с точки зрения здравого смысла. Отличительная черта процесса принятия решений — степень формализации каждого этапа.

Значение теории принятия решений. Теория принятия решений предписывает нормы поведения лицу, принимающему решение, которым он должен следовать, чтобы не вступить в противоречие с собственными суждениями и предпочтениями. Теория не дает метода описания того, как фактически отдельные лица должны себя вести. Она помогает лицу, принимающему решение, вооружая методологией для принятия сложных решений, которые включают элементы субъективизма, однако не заменяют его. Характерно, что с усложнением задачи уменьшается способность человека к неформальной обработке всей информации в соответствии с его собственными суждениями и предпочтениями. В такой ситуации теория принятия решений имеет преимущества перед другими аналитическими подходами, поскольку включает в формализованном виде многие субъективные аспекты проблемы. Первая попытка применения теории принятия решений может потребовать значительных усилий, но они того же порядка, что для любого метода анализа сложной ситуации.

Круг задач, стоящих перед теорией принятия решений. Типичные задачи принятия решений имеют много особенностей, которые можно проанализировать и лучше понять с помощью теории принятия решений. Перечислим основные из них.

1. *Многоцелевой характер.* В большинстве сложных задач приходится стремиться к достижению различных целей. Эти цели почти всегда противоречивы, т.е. продвижение по пути достижения некоторой цели обычно сопровождается ухудшением результатов по другим. Таким образом, лицо, принимающее решение, неизбежно оказывается перед необходимостью выбора между противоречивыми целями.

2. *Воздействие фактора времени.* Все важные последствия решения задачи не проявляются сразу, и нельзя указать конкретный момент времени, когда можно

наблюдать то или иное последствие. Например, при производстве нового товара иногда приходится рисковать значительными суммами в течение многих лет.

3. *Неформализуемые понятия*. Такие понятия, как «добрая воля», «престиж», «волнение», «шутка», «страдание», «политические действия» и т.д., являются примерами очень важных неформализуемых понятий, которые существенно усложняют задачу.

4. *Неопределенность*. Как уже отмечалось, маловероятно, что в момент принятия решения (т. е. выбора альтернативного действия) известны последствия каждой из альтернатив. Такое утверждение становится особенно убедительным в свете описанных выше особенностей задачи.

5. *Возможности получения информации*. Часто удается получить информацию, помогающую решить, какую из альтернатив следует выбрать. Например, можно проанализировать рыночную конъюнктуру, чтобы оценить спрос на новый вид продукции. Однако получение такой информации может потребовать больших затрат времени и денег, и к тому же она может быть не вполне достоверной.

6. *Динамические аспекты процесса принятия решений*. После того как некоторое решение выработано (выбрана альтернатива), может оказаться, что задача не исчерпана до конца и потребуется принять очередное решение через несколько лет. Сегодняшнее решение может «захлопнуть дверь» перед некоторыми возможными действиями и «распахнуть пошире» перед другими. Важно распознать заранее такие динамические аспекты проблемы и увидеть, какие возможности могут открыться в будущем благодаря данному решению.

7. *Влияние решений на группы*. Некоторая выбранная альтернатива может повлиять на большое количество различных групп, особенно это относится к правительственным решениям. Очевидно, что

в такой ситуации были бы полезны любые сведения, способные оказать помощь лицу, ответственному за принятие решения.

8. *Коллективное принятие решений.* Зачастую ответственность за выбор альтернативы несет не отдельное лицо, а целая группа. Фактически для определенного круга задач нельзя четко разграничить функции и ответственность лиц, принимающих решение по некоторому кругу вопросов.

Большинство задач не обладает перечисленными особенностями, однако их вполне достаточно для того, чтобы сделать задачу трудноразрешимой. Теория принятия решений позволяет анализировать эти вопросы независимо и дает схему для последующего синтеза информации с целью выработки наилучшего способа действия.

Для более детального изучения вопросов данного раздела можно рекомендовать следующие работы[1].

Контрольные вопросы и упражнения

1. Абстракция есть атрибут применения математических методов. Как вы понимаете этот термин?

2. Что такое метод экспертных оценок?

3. Какова роль весовых множителей в математических моделях?

4. Что такое многокритериальность и какие существуют основные подходы при принятии решений в таких случаях?

5. Принятие решений — это процесс. Что является конечным результатам этого процесса?

6. Цель при принятии решений может быть сформулирована:

а) в виде целевой функции;

б) в виде отношения предпочтения.

Какой способ позволяет построить более адекватную модель при изучении сложных систем? Поясните с помощью понятий теорий и множеств.

---

[1] См. *Эддоус М., Стэнсфилд Д.* Методы принятия решений. М.: Аудит: ЮНИТИ, 1997; *Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П.* Введение в системный анализ. М.: Высш. шк., 1989.

7. Когда и в связи с чем появился термин «исследование операций»? Каково его современное понимание?

8. Перечислите типичные задачи, решаемые с помощью метода исследования операций.

9. Что вкладывается в понятие «целевая функция»? Приведите примеры.

10. Как в общем случае можно записать задачу поиска оптимального решения в условиях определенности?

* * *

В заключение хочется подчеркнуть, что дальнейшее освоение математических методов возможно при самостоятельной работе, причем как с помощью учебников по математике и статистике, так и с конкретным материалом, для анализа которого используются математические методы. Это чрезвычайно интересно и плодотворно, хотя нелегко. Как выразился У. Шекспир: «Если бы делать было бы столь же легко, как знать, что надо делать, — часовни были бы соборами, хижины — дворцами».

В применении математических методов в гуманитарных науках много нового, неизведанного, поскольку это одно из новых, молодых направлений науки. И для каждого, кто пожелает здесь приложить свои силы, открывается широкое поле деятельности; а профессионализм, как известно, приобретают на практике.

Известно, что для ученого и инженера математика — это орудие, для математика-профессионала — религия, а для обычного человека — камень преткновения. Будем надеяться, что данный курс помог по-другому взглянуть на математику, вскрыть ее внутреннюю логику и связи.

Как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А.Н. Крылов, человек обращается к математике «не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами». Ему, прежде всего, нужно ознакомиться со «столетиями испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть».

Я слышу, и я забываю.
Я вижу, и я запоминаю.
Я делаю, и я понимаю.

Китайская пословица

Варианты заданий для самостоятельной работы

Задание 1

Задача 1. Заданы два множества: A и B (см. таблицу). Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$.

Вариант	*Множество A*	*Множество B*
1	{1, 5, 7, 11}	{5, 9, 11, 15}
2	{1, 3, 5, 7, 11}	{3, 5, 9}
3	{2, 4, 6, 9}	{1, 2, 3, 6}
4	{4, 6, 10, 16}	{6, 10, 12, 18}
5	{4, 6, 10, 12}	{4, 8, 12, 16}
6	{1, 3, 5, 9}	{3, 5, 7, 11, 13}
7	{2, 4, 9, 13}	{4, 6, 9}
8	{1, 3, 9, 11}	{2, 3, 5, 6, 7}
9	{2, 4, 8, 12}	{3, 4, 5, 8, 10}
10	{1, 3, 6, 8}	{3, 4, 5, 6}

Задача 2. По данным промежуткам A и B на числовой прямой, определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Вариант	*A*	*B*
1	(0; 3]	(3; 6)
2	[0; 5)	[1; ∞)
3	(0; 3)	[1; 4]
4	[2; ∞)	(1; 7]
5	(–6; –3]	[–5; –s1)

Окончание

Вариант	*A*	*B*
6	$[-4;-0,5)$	$(-\infty;-2)$
7	$(-\infty;\ 1]$	$(-2;\ \infty)$
8	$[-6;\ 7]$	$(0;\ 10)$
9	$(-6;\ 2]$	$[-2;\ 3]$
10	$(0;\ 2)$	$[1;\ 5)$

Задача 3. Найти пределы функции $\lim\limits_{x \to a} y$ при различных значениях a (не применяя правила Лопиталя).

Вариант	*y*	*a*
1	$\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$	$2;\ 3;\ \infty$
2	$\dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$	$0;\ 2;\ \infty$
3	$\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$	$3;\ -3;\ \infty$
4	$\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$	$-3;\ -2;\ \infty$
5	$\dfrac{3x^2+14x+8}{2x^2-7x-4}$	$2;\ 4;\ \infty$
6	$\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$	$2;\ 5;\ \infty$
7	$\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$	$1;\ -4;\ \infty$
8	$\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$	$5;\ -5;\ \infty$
9	$\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$	$-2;\ 1;\ \infty$
10	$\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$	$-2;\ -1;\ \infty$

Задание 2

Задача 1. Вычислить производную функций.

Вариант	y	y
1	$3x^{-2}+4x^{3}-1$	$\sin(x)\cdot(2x^{5}+5x-5)$
2	$-3x^{-5}+4x^{2}-3$	$\mathrm{arctg}(x)\cdot(x^{5}-x-3)$
3	$-x^{-2}-x^{4}+1$	$\mathrm{ctg}(x)\cdot(5x^{3}+4x+2)$
4	$-x^{-3}+4x^{3}-2$	$\ln(x)\cdot(3x^{2}-3x+4)$
5	$-3x^{-6}+2x^{5}+4$	$\mathrm{tg}(x)\cdot(3x^{3}-2x-3)$
6	$-2x^{-3}+4x^{3}+3$	$\sin(x)\cdot(-3x^{3}+2x-1)$
7	$5x^{-6}+2x^{4}-3$	$\mathrm{arcctg}(x)\cdot(4x^{5}-5x-3)$
8	$-2x^{-5}-2x^{3}-1$	$\cos(x)\cdot(-2x^{4}+x+1)$
9	$4x^{-4}-3x^{5}-2$	$\ln(x)\cdot(2x^{4}-3x+2)$
10	$2x^{-2}+5x^{3}+5$	$\arccos(x)\cdot(3x^{2}-2x+4)$

Задача 2. Вычислить y' в точке x_1.

Вариант	y	x_1
1		5
2	$\frac{-3x-1}{2x+3}$	-5
3	$\frac{-2x+5}{4x-5}$	2
4	$\frac{-x-1}{-x+2}$	0
5	$\frac{2x-1}{4x+3}$	-5
6	$\frac{5x-5}{5x+2}$	3
7	$\frac{-4x-4}{5x+5}$	5
8	$\frac{-2x+2}{-5x+4}$	3
9	$\frac{-2x+4}{3x-1}$	-5
10	$\frac{-4x+3}{3x-4}$	3

З а д а ч а 3. Найти экстремумы функции.

Вариант	*y*
1	$2x^3 - 27x^2 + 108x + 5$
2	$2x^3 + 6x^2 - 90x - 2$
3	$2x^3 + 6x^2 - 48x + 5$
4	$2x^3 - 3x^2 - 36x - 3$
5	$2x^3 + 15x^2 + 24x - 3$
6	$2x^3 - 3x^2 - 36x + 3$
7	$2x^3 - 18x^2 + 48x + 4$
8	$2x^3 + 12x^2 + 18x - 4$
9	$2x^3 - 15x^2 + 36x - 1$
10	$2x^3 + 12x^2 - 30x - 3$

З а д а ч а 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции у на отрезке.

Вариант	*y*	*Отрезок*
1	$-5x^2 + 40x + 3$	$[0, 7]$
2	$4x^2 - 24x + 5$	$[2, 5]$
3	$4x^2 + 32x + 4$	$[-6, -3]$
4	$3x^2 + 24x - 2$	$[-6, -3]$
5	$-5x^2 - 50x - 2$	$[-6, -1]$
6	$3x^2 + 30x - 2$	$[-6, -2]$
7	$2x^2 - 20x + 2$	$[2, 9]$
8	$2x^2 - 20x + 5$	$[1, 8]$
9	$2x^2 - 12x - 1$	$[2, 6]$
10	$4x^2 + 32x - 4$	$[-8, -3]$

З а д а ч а 5. Вычислить $\lim\limits_{x \to a} y$.

Вариант	*y*	*a*
1	$\dfrac{4x^2-8x+4}{4x^2+12x-16}$	1
2	$\dfrac{-4x^2-24x-32}{5x^2+10x}$	− 2
3	$\dfrac{3x^2+9x+6}{-2x^2-12x-10}$	− 1
4	$\dfrac{-3x^2-15x-18}{5x^2+15x}$	− 3
5	$\dfrac{5x^2-10x-15}{-3x^2+12x+15}$	− 1
6	$\dfrac{-5x^2-10x-5}{-2x^2+6x+8}$	− 1
7	$\dfrac{-2x^2-4x+6}{3x^2+18x+27}$	− 3
8	$\dfrac{2x^2-14x+24}{-24x^2+8x-6}$	3
9	$\dfrac{-3x^2-18x-15}{5x^2+50x+125}$	− 5
10	$\dfrac{2x^2+10x+12}{4x^2+4x-24}$	− 3

Задание 3

З а д а ч а 1. Вычислить следующие интегралы.

Вариант	*а*	*б*	*в*
1	$\int \dfrac{-8x^2-4x-2}{-5x}dx$	$\int \sin(-2x+5)dx$	$\int x^2 \ln x \, dx$
2	$\int \dfrac{4x^2+5x-5}{-3x}dx$	$\int \sin(2x+3)dx$	$\int x^7 \ln x \, dx$

Окончание

Вариант	*а*	*б*	*в*
3	$\int \frac{-4x^2-2x-2}{-x}dx$	$\int \cos(3x-4)dx$	$\int x^5 \ln x\ dx$
4	$\int \frac{-10x^2+4x+5}{3x}dx$	$\int \sin(-2x+5)dx$	$\int x^8 \ln x\ dx$
5	$\int \frac{-4x^2-2x-1}{-2x}dx$	$\int \cos(-3x+3)dx$	$\int x^7 \ln x\ dx$
6	$\int \frac{8x^2+2x-5}{5x}dx$	$\int \sin(-5x+3)dx$	$\int x^4 \ln x\ dx$
7	$\int \frac{10x^2-5x+5}{-3x}dx$	$\int \sin(3x-1)dx$	$\int x^8 \ln x\ dx$
8	$\int \frac{-4x^2-5x-5}{-5x}dx$	$\int \sin(-2x-3)dx$	$\int x^6 \ln x\ dx$
9	$\int \frac{6x^2+4x-5}{-4x}dx$	$\int \cos(5x+3)dx$	$\int x^9 \ln x\ dx$
10	$\int \frac{10x^2-5x-4}{4x}dx$	$\int \sin(2x-3)dx$	$\int x^3 \ln x\ dx$

Задача 2. Вычислить следующие определенные интегралы.

Вариант	*а*	*б*
1	$\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx$	$\int_{e}^{4} x\ln x dx$
2	$\int_{-1}^{0}(x^3+2x)dx$	$\int_{0}^{\pi/2} x\cos x dx$
3	$\int_{-2}^{3}(4x^3-3x^2+2x+1)dx$	$\int_{0}^{1} xe^x dx$
4	$\int_{1}^{2}(3x^4+2x^2-5)dx$	$\int_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$
5	$\int_{0}^{1}\sqrt[3]{x}dx$	$\int_{0}^{1} xe^x dx$

Окончание

Вариант	*а*	*б*
6	$\int_{-2}^{3}(2x^3 + x^2 - 5)dx$	$\int_{0}^{\pi} x\cos x dx$
7	$\int_{-2}^{2}(x^3 + 4x)dx$	$\int_{1}^{2} x^{-5}\ln x dx$
8	$\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}dx$	$\int_{0}^{\pi} x^2\cos x dx$
9	$\int_{1}^{4}(x^2 + 0,5)dx$	$\int_{1}^{2} x^2\ln x dx$
10	$\int_{0}^{2}(2x + 4)dx$	$\int_{-1}^{1} xe^x dx$

Задание 4

З а д а ч а 1. Решить дифференциальное уравнение.

Вариант	*Уравнение*
1	$y' = (y-5)(8x+1)$
2	$y' = (y-3)(-8x+4)$
3	$y' = (y+5)(8x-3)$
4	$y' = (y-2)(8x+4)$
5	$y' = (y-3)(8x-2)$
6	$y' = (y+4)(4x-1)$
7	$y' = (y-4)(-6x-3)$
8	$y' = (y+5)(10x-1)$
9	$y' = (y-4)(4x+5)$
10	$y' = (y+3)(-2x-3)$

Задача 2. Решить задачу Коши.

Вариант	*Уравнение*	*Начальное условие*
1	$y' = -15x^2 - 4x - 3$	$y(0) = -3$
2	$y' = -6x^2 - 4x - 1$	$y(0) = -1$
3	$y' = -12x^2 + 8x + 4$	$y(0) = 4$
4	$y' = -6x^2 - 4x + 5$	$y(0) = -5$
5	$y' = -12x^2 - 6x - 2$	$y(0) = 3$
6	$y' = 15x^2 - 2x - 3$	$y(0) = 5$
7	$y' = -9x^2 - 4x + 5$	$y(0) = -5$
8	$y' = 15x^2 + 4x + 3$	$y(0) = -1$
9	$y' = -9x^2 + 10x - 1$	$y(0) = -5$
10	$y' = -6x^2 + 8x - 1$	$y(0) = 3$

Задача 3

1. Из урны с 7 красными и 3 синими шарами берут наугад 5 шаров. Какова вероятность того, что все взятые шары окажутся красными?

2. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превысит 6.

3. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что 2 очка не выпадут ни на одной кости.

4. В урне лежат 8 пронумерованных шаров. Наугад берут 4 шара. Найти вероятность того, что среди взятых шаров 3 будут иметь четные номера.

5. Колода из 36 карт раскладывается случайным образом на две равные части. Какова вероятность того, что все тузы будут в одной части?

6. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры. Помня лишь, что все цифры различны, он набирает их наугад. Какова вероятность того, что будут набраны нужные цифры?

7. Имеются 4 ящика, в которые наугад бросают шарики. Всего шариков 4. Какова вероятность того, что все шарики окажутся в одном ящике?

8. 6 студентов условились ехать в одном электропоезде, но не договорились о вагоне. Какова вероятность того, что все поедут в одном вагоне, если в поезде 10 вагонов?

9. Телефонный номер содержит 5 цифр. Какова вероятность того, что все цифры различны?

10. В ящике лежат 16 лампочек, из которых 6 перегоревших. Наугад берут 4 лампы. Какова вероятность того, что взятые лампы окажутся хорошими?

Задача 4

1. Из урны, содержащей 4 синих, 3 красных и 2 зеленых шара, наугад выбирают 2 шара. Какова вероятность выбрать 2 шара одного цвета?

2. Из партии в 60 деталей, содержащей 5% брака, наугад выбирают 3 детали. Какова вероятность того, что в выборку попадет не более одной бракованной детали?

3. Из колоды в 32 карты наугад берут 3 карты. Какова вероятность того, что не менее двух карт будут иметь одну масть?

4. В партии 30 деталей, из них 5 нестандартных. Наугад взято 4 детали. Какова вероятность того, что среди взятых деталей более двух стандартных?

5. Из колоды в 52 карты наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что среди взятых карт не меньше двух тузов?

6. В лотерее 30 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность получить более одного выигрышного билета, взяв наудачу 4 билета?

7. Из урны с 4 белыми, 2 синими и 5 черными шарами берут наугад 4 шара. Какова вероятность того, что среди взятых больше половины шаров окажутся черными?

8. Из урны, содержащей 6 белых и 6 черных шаров, наугад берут 4 шара. Какова вероятность того, что белых шаров окажется больше, чем черных?

9. Из партии в 100 деталей, содержащей 5% брака, берут для проверки 5 деталей. Партия принимается, если среди проверяемых не более одной бракованной детали. Найти вероятность приема партии.

10. Из ящика, в котором лежат 3 красных, 5 зеленых и 5 синих шаров, наугад берут 3 шара. Какова вероятность того, что выбранные шары не будут одного цвета?

Удивительная учительница в искусстве направлять мысли приводить в порядок неупорядоченное, выкорчевывать глупости, фильтровать грязное и давать ясность. Но она — тот деликатный цветок, который произрастает не на всякой почве и распускается так, что никто не знает как.

Ж.А. Фабр

Программа курса

Тема 1. Предмет математики. Методологические проблемы и принципы

Место и роль математики в современном мире, мировой культуре и истории, в том числе в гуманитарных науках. Геометрия Евклида как первая естественно-научная теория. Значение «Начал» Евклида для общечеловеческой культуры. Основные этапы становления и структура современной математики, принципы математических рассуждений и доказательств. Математическое мышление, индукция и дедукция. Теоремы, аксиомы, определения, аксиоматический метод. Достоинства и недостатки математического языка.

Тема 2. Теория множеств

Понятие «множество», элементы множества. Пустое множество. Подмножество, равные множества. Универсальное множество. Круги Эйлера. Основные операции над множествами. Множества и отношения. Бинарные отношения. Способы представления отношений и операции над ними. Общие свойства отношений. Отношения эквивалентности, порядка и толерантности. Основные структуры на множестве.

Тема 3. Элементы дискретной математики

Числа. Основные правила и формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.

Основы теории графов: типы графов; вершины, ребра, дуги; деревья; сетевые графики.

Тема 4. Элементы математической логики

Основные понятия и функции математической логики. Логические операции и формулы. Исчисление высказываний.

Тема 5. Введение в математический анализ

Понятие «функция». Область изменения и область определения функции: определение, графическое изображение. Способы задания функции. Типы функций. Классификация элементарных функций. Теория пределов и техника их вычисления. Два замечательных предела.

Тема 6. Дифференциальное исчисление

Определение производной. Ее геометрический и физический смысл. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Разрывы. Правила и формулы дифференцирования. Приложения производной. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функций на замкнутом интервале.

Тема 7. Интегральное исчисление

Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования. Таблица основных интегралов. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Определенный интеграл: свойства и геометрический смысл. Формула Ньютона — Лейбница. Приложения определенного интеграла.

Тема 8. Дифференциальные уравнения

Понятие «дифференциальное уравнение». Общее и частное решения. Порядок уравнения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Задача Коши.

Тема 9. Основы теории вероятностей и математической статистики

Случайные события и их алгебра. Различные определения вероятности. Вычисление вероятностей. Формула полной вероятности и формула Байеса. Случайные величины. Функции и законы распределения. Основы математической статистики. Статистические гипотезы.

Тема 10. Математическое моделирование и принятие решений

Принципы построения математических моделей. Математические методы в целенаправленной деятельности. Общая постановка задачи о принятии решения. Основные понятия исследования операций, типы задач и методы их решения. Частные случаи: выбор оптимального решения, многокритериальная оптимизация. Методы оптимизации.

Из ТРЕБОВАНИЙ государственного образовательного стандарта к образованности бакалавра гуманитарных и социально-экономических направлений высшего профессионального образования

После освоения математических и естественно-научных дисциплин бакалавр *должен иметь представление:*

• о месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории;

• математическом мышлении, индукции и дедукции в математике, принципах математических рассуждений и математических доказательств;

• логических, топологических и алгебраических структурах на множестве;

• неевклидовых геометрических системах;

• математическом моделировании;

• роли математики и информатики в гуманитарных исследованиях.

Основные вопросы по математике, определяемые стандартом (например, для специальностей «Философия», «Религиоведение» и др.):

• геометрия Евклида как первая естественно-научная теория;

• аксиоматический метод;

• основные этапы становления современной математики;

• структура современной математики;

• основные черты математического мышления;

• математические доказательства;

• элементы, множества, отношения, отображения;

• числа;

• комбинаторика;

• конечные и бесконечные множества;

• основные структуры на множестве;

• неевклидовы геометрии;

• геометрия микро- и макромира;

• основные идеи математического анализа;

• дифференциальные уравнения;

- общая постановка задачи о принятии решения;
- математические методы в целенаправленной деятельности;
- математика случайного;
- элементы теории вероятностей;
- основные понятия математической статистики;
- математические методы проверки гипотез;
- роль математики в гуманитарных науках.

Очевидно, что стандарт введен с целью содействовать лучшему пониманию предмета математики взамен бездумного манипулирования символами. Нетрудно убедиться, что спектр вопросов достаточно широк и нетрадиционен.

Библиографический список

Богомолов Н. В. Практические занятия по математике. М.: Высш. шк., 1997.

Бородин А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб.: Лань, 1998.

Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1980.

Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 2001.

Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. М.: Высш. шк., 1996.

Дорофеева А. В. Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов. М.: Изд-во МГУ, 1971.

Зайцев И. А. Высшая математика. М.: Высш. шк., 1998.

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики. М.: АСТ: Астрель, 2001.

Лихтарников Л. М., Поволоцкий А. И. Основы математического анализа. СПб.: Лань, 1997.

Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г. М. Глейзер. М.: Изд-во JPAO, 2001.

Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энцикл., 1988.

Москинова Г. И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях. М.: Логос, 2000.

Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. М.: Физматлит, 1994.

Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб.: Лань, 1997.

Очерки по истории математики / Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Изд-во МГУ, 1997.

Рассолов М. М., Чубукова С. Г., Элькин В. Д. Элементы высшей математики для юристов. М.: Юристъ, 1999.

Стойлова Л. П. Математика. М.: Академия, 1997.

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.

Тихомиров Н. Б., Шелехов А. М. Математика: Учебный курс для юристов. М.: Юрайт, 1999.

Турецкий В. Я. Математика и информатика. М.: ИНФРА-М, 2000.

Шипачев В. С. Основы высшей математики. М.: Высш. шк., 1998.

Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. Т. 1, 2. М.: Высш. шк., 1978.

Эддоус М., Стэнсфилд Д. Методы принятия решений. М.: Аудит: ЮНИТИ, 1997.

Юшкевич А. П. Математика и ее история. М.: Янус, 1996.

Учебное издание

Павел Власович Грес

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Учебное пособие

Редактор *Л. И. Кузнецова*
Оформление *Е. Молчанова и С. Носова*
Компьютерная верстка *Т.В. Клейменова*
Корректор *Г.Б. Абудеева, Д. Андриевская*

Изд. лиц. ИД № 01670 от 24.04.2000

Подписано в печать 17.09.2003. Формат 84x108/32
Бумага офсетная. Печать офсетная
Печ. л. 5. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательско-книготорговый дом «Логос»
105318, Москва, Измайловское ш., 4

Отпечатано с готовых диапозитивов во ФГУП ИПК
«Ульяновский Дом печати» 432980, г. Ульяновск,
ул. Гончарова, 14