MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Cristian Voica Mihaela Singer Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M4

Filiera vocațională
Profil pedagogic
• toate specializările

Filiera vocațională
Profil sportiv
• toate specializările

SIGMA

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Cristian Voica Mihaela Singer Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M4

Filiera vocațională

Profil pedagogic: toate specializările

Filiera vocațională

Profil sportiv: toate specializările

SIGMA

Manual a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Cercetării și Tineretului nr. 1561-45 din 23.07.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al Ministrului Educației și Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.

Referenți: *lector dr.* Daniel Stănică
asist. univ. dr. Marius Vlădoiu

Redactor: Dana Florina Năstase
Tehnoredactor: Camelia Cristea
Coperta: Camelia Cristea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
SINGER, MIHAELA
Matematică M4 : clasa a XII-a / Mihaela Singer, Cristian Voica, Mihai Sorin Stupariu. - București : Sigma, 2007
ISBN 978-973-649-366-9

I. Voica, Cristian
II. Stupariu, Sorin

51(075.35)

ISBN 978-973-649-366-9

Editura SIGMA

Sediul central:
Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:
Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Anticariat:
e-mail: comenzi_anticar@editurasigma.ro; web: www.anticar.ro

CUPRINS

Introducere

Toate domeniile culturii se dezvoltă astăzi în strânsă interdependență cu matematica. În societatea contemporană, dinamică și aflată într-un proces de globalizare, matematica devine tot mai mult un instrument necesar pentru studiul și înțelegerea fenomenelor sociale. Domeniul artistic și cel spiritual tind și ele să fructifice achiziții din domeniul matematicii. De aceea, am construit demersul didactic al acestui manual cu scop deopotrivă cultural și pragmatic, urmărind atât formarea de competențe specifice matematicii, cât și transferul de tehnici și metode către alte domenii.

Manualul se adresează elevilor de la filiera *vocațională*, profil *pedagogic* (toate specializările), precum și celor de la filiera *vocațională*, *profil sportiv* (toate specializările).

Fiecare unitate de învățare începe cu un test preliminar de autoevaluare, ce sintetizează cunoștințele de bază necesare pentru parcurgerea capitolului respectiv.

În corpul fiecărei lecții, am evidențiat etapele demersului didactic prin expresiile: ***Să observăm!***, ***Să comparăm!***, ***Să analizăm!***, ***Să aplicăm!***.

Concluziile unei etape de raționament sau de observare, finalizate printr-un enunț general, sunt evidențiate cu ajutorul expresiei „**În general**” și sunt marcate prin chenar.

Pentru a facilita conexiunile între conținuturile cu caracter strict matematic din lecție și aplicațiile acestora, am grupat în benzile laterale ale paginilor manualului: atenționări, exemplificări și exerciții necesare pentru fixarea noțiunilor prezentate.

Întregul demers de construcție și dezvoltare a manualului a avut în vedere formarea acelor competențe care să permită identificarea relațiilor între noțiunile matematice studiate, interpretarea datelor de diverse tipuri, utilizarea unor algoritmi și concepte matematice în situații diverse, exprimarea caracteristicilor matematice ale unei situații concrete și analiza de situații-problemă în scopul optimizării soluțiilor practice. De aceea, informația conținută în programa școlară a fost structurată și detaliată astfel încât acest deziderat să fie realizat cu succes.

Testele de evaluare de la sfârșitul fiecărui capitol oferă modalități de verificare a nivelului la care s-au format competențele vizate.

Ne exprimăm speranța că manualul de față va oferi un instrument util de lucru tuturor acelora care sunt dornici să înțeleagă, să explice și să acționeze eficient în lumea în care trăim.

Cum se utilizează acest manual?

Chenarul indică un enunț obținut prin extrapolarea unor exemple sau proprietăți particulare. Acest enunț poate fi o definiție sau o teoremă.

Acest simbol marchează secvența avută în vedere în cadrul unității de învățare.

Observăm și explorăm!

♦ **Ce este o matrice?**

Pentru a ține evidența vânzărilor, administratorul unei papetării completează săptămânal un tabel din care redăm mai jos doar o secvență.

	Pixuri	Creioane	Caiete
L	300	200	50
M	150	200	125
M	225	75	200
J	89	234	145
V	200	150	70

În acest tabel, fiecare element este caracterizat de poziția lui pe coloană (vertical – sortimentul de produse) și pe linie (orizontal – ziua din săptămâna când s-a efectuat vânzarea).

Pentru a simplifica scrierea, la matematică notăm tabelul anterior astfel:

$$\begin{pmatrix} 300 & 200 & 50 \\ 150 & 200 & 125 \\ 225 & 75 & 200 \\ 89 & 234 & 145 \\ 200 & 150 & 70 \end{pmatrix}.$$

Acest tabel se numește *matrice* cu 5 linii și 3 coloane.

Aplicațiile imediate sunt corelate cu explicațiile sau exemplele din corpul lecției, în dreptul cărora sunt situate.

❶ *Caracterizează poziția numărului 145 în tabelul cu evidența vânzărilor.*

Comentariile și atenționările sunt marcate prin acest semn.

⚠ *O matrice în care numărul de linii este egal cu numărul de coloane se numește matrice pătratică. Mulțimea matricelor pătratice de tip (m, m) cu elemente din E, se notează $\mathcal{M}_m(E)$; m se mai numește și ordinul acestor matrice.*

În general

Fie E o mulțime de numere reale. Vom numi *matrice de tipul (m, n) cu elemente din mulțimea E*, orice tabel de forma următoare, în care numerele a_{ij} sunt numere din mulțimea E.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Putem folosi pentru matricea de mai sus și notația $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$.

Dacă tipul matricei este precizat, putem nota pe scurt $A = (a_{ij})$.

[redacted]

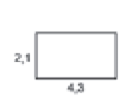
Subtitlurile punctează etape ale demersului didactic.

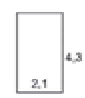
• *O a doua proprietate: comutativitatea*

Să analizăm!

Dreptunghiurile din figură sunt congruente, deci au arii egale.

De aceea $4{,}3 \times 2{,}1 = 2{,}1 \times 4{,}3$.





$$\underbrace{A \overset{4,3}{\text{———}} \overset{2,1}{\text{——}} B}_{4,3+2,1} \quad = \quad \underbrace{C \overset{2,1}{\text{——}} \overset{4,3}{\text{———}} D}_{2,1+4,3}$$

Segmentele AB și CD sunt congruente, deci au lungimi egale. De aceea: $4{,}3 + 2{,}1 = 2{,}1 + 4{,}3$.

Să demonstrăm!

Abaterea medie liniară, respectiv abaterea medie pătratică ale unor valori statistice sunt egale cu zero dacă și numai dacă toate valorile statistice date sunt egale.

[redacted]

Această expresie evidențiază tipul de activitate care urmează.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ valorile unei variabile statistice, $\bar{x}$ media acestor valori și τ, respectiv σ abaterile lor medii.

Deoarece $\tau = \dfrac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + \dots + |x_n-\bar{x}|}{n}$, iar $\sigma = \sqrt{\dfrac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}}$, avem:

$\tau = 0 \Leftrightarrow |x_i - \bar{x}| = 0$ pentru orice $i \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \bar{x}$ ...

$\sigma = 0 \Leftrightarrow (x_i - \bar{x})^2 = 0$ pentru orice $i \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots =$ ...

Simbolul ... atenționează asupra faptului că anumite justificări au fost omise în cadrul demonstrației. Ele trebuie formulate de către cititor, pentru a participa activ la înțelegerea textului.

* Textele scrise cu corp de literă mai mic au doar rolul de exemplu. Ele se pot regăsi în paginile acestui manual.

Unitatea de învățare 1

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Efectuează:
a) $-15 + 23$; b) $(-4 - 2) \cdot (4 + 2)$; c) $2 \cdot 0 + 3 \cdot (1 - 2)$;
d) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{25} : \frac{3}{2}$; e) $6{,}72 - (2{,}53 - 4{,}41)$; f) $3\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})$.

Proprietățile operațiilor cu numere

2. Calculează, folosind metoda factorului comun:
a) $2007 \cdot 2008 - 2007 \cdot 2007$
b) $(4 + 6 + 8 + 10) : 2$.

3. Efectuează calculele, apoi stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:
a) $(1 + 4) + 5 = 1 + (4 + 5)$; b) $(1 - 4) - 5 = 1 - (4 - 5)$;
c) $(1 \cdot 4) \cdot 5 = 1 \cdot (4 \cdot 5)$; d) $(1 : 4) : 5 = 1 : (4 : 5)$.

Procente

4. Calculează:
a) cât reprezintă 25% din 1400;
b) cât va costa un produs de 20 lei după o ieftinire de 15%;
c) cât la sută din 800 reprezintă 250.

Calcul algebric

Alege răspunsurile corecte!

5. $(x - 1)^2$ este egal cu:
a) $x^2 - 2x + 1$; b) $x^2 - 1$; c) $x^2 + 2x + 1$; d) $x^2 + 1$.

6. $x^2 - 3x + 2$ este egal cu:
a) $(x - 3)(x + 2)$; b) $(x + 1)(x + 2)$; c) $(x - 1)(x - 2)$; d) $(x + 2)^2$.

Inegalități

7. Stabilește care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:
a) $4 \cdot 2 < 4 \cdot 3$; b) $(-4) \cdot 2 < (-4) \cdot 3$; c) $(-4) \cdot (-2) \leqslant (-4) \cdot 0$;
d) $1234 \cdot (-3) \geqslant 1234 \cdot (-4)$; e) $1234 \cdot 1233 \geqslant 1233 \cdot 1234$.

Intervale

8. Afirmațiile următoare se referă la numere reale.
Identifică afirmațiile false și propune câte un contraexemplu.
a) $x \leqslant a$ și $y \leqslant b \Rightarrow x + y \leqslant a + b$;
b) $x + y > a + b \Rightarrow x > a$ și $y > b$;
c) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$;
d) $x \leqslant a$ și $y \leqslant b \Rightarrow x \cdot y \leqslant a \cdot b$;
e) $x \leqslant y \Rightarrow a \cdot x \leqslant a \cdot y$.

9. a) Scrie mulțimile de mai jos sub formă de interval și reprezintă-le apoi pe axă.
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 2\}$.
b) Determină mulțimile: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus C$.

Ecuații și sisteme liniare

Situații cotidiene care conduc la ecuații

Ne amintim și explorăm!

Uneori în viața de zi cu zi ne confruntăm cu probleme care conțin în enunțul lor cantități necunoscute. Pentru determinarea acestora trebuie, mai întâi, „să punem problema în ecuație”, cu alte cuvinte să identificăm relații matematice care descriu situația din enunț.

Cea mai veche problemă cunoscută apare într-un papirus egiptean scris acum 3000 de ani. Problema cere să se afle o cantitate necunoscută, dacă știm că șeptimea ei împreună cu ea toată dau 19.

Să analizăm!

Exemplul 1

Doamna Georgescu dorește să-și cumpere un palton din Magazinul „Flora”. Pentru că inițial i s-a părut cam scump, a mai așteptat o lună. Între timp, paltonul s-a ieftinit cu 20 lei, apoi s-a mai aplicat încă o reducere de 15% și a ajuns astfel la prețul de 238 lei. Deoarece a uitat vechiul preț, doamna Georgescu ar vrea să-l calculeze pentru a vedea ce economie a făcut cumpărându-l mai târziu.

Notând cu p acest preț, doamna Georgescu a obținut:

$$p-20-\frac{15}{100}(p-20)=238.$$

❶ Explică diferența dintre scăderea prețului unui produs cu 10% și scăderea prețului unui produs cu 10 bani.

Exemplul 2

Domnul Popescu a fost numit administrator al unui bloc cu 30 de apartamente, în care fiecare apartament are 2 sau 3 camere. Știind că în total sunt 78 de camere, dl. Popescu și-a propus să afle câte apartamente cu 2 camere și câte cu 3 camere sunt în bloc.

Pentru aceasta a notat cu d numărul apartamentelor cu două camere și cu t numărul celor cu 3 camere și a raționat astfel:

„Pe de o parte știu câte apartamente sunt în bloc, iar pe de altă parte știu câte camere sunt în bloc. Am, așadar, următoarele două relații: $d + t = 30$ și $2d + 3t = 78$.”

❷ Explică în ce mod a obținut dl. Popescu aceste relații.

Exemplul 3

Întrebat de niște colegi ce vârste au copiii săi, domnul Gheorghiu le-a răspuns printr-o problemă: „Băiatul este cu 4 ani mai mare decât fata, iar anul viitor vor avea, împreună, 30 de ani.”

Primul prieten a gândit astfel: „Notez cu x vârsta fetei, deci vârsta băiatului este $x + 4$. Anul viitor cei doi copii vor avea vârstele $(x + 1)$, respectiv $(x + 5)$ și suma lor este 30, deci am relația: $(x + 1) + (x + 5) = 30$.”

Cel de-al doilea coleg a raționat în alt mod: „Să presupunem că vârsta fetei este f, iar vârsta băiatului este b. Despre f și b știu, așadar, că verifică două relații:

$b = f + 4$ și $(f + 1) + (b + 1) = 30$.”

Uneori aceeași problemă poate fi pusă în ecuație în mai multe moduri diferite.

Exemplul 4

Domnul Andronache este directorul unei firme. Făcând o estimare pentru luna în curs, a constatat că firma va avea cheltuieli în valoare de 21 000 de lei. Pe de altă parte, 25% din veniturile lunare sunt alocate pentru taxe și dezvoltare.

Dl. Andronache și-a pus problema ce venituri trebuie să obțină firma pentru a avea profit. Notând cu v aceste venituri, a observat mai întâi că suma rămasă după efectuarea tuturor plăților este egală cu $v-21000-\frac{25}{100}v$, iar pentru a nu avea pierderi

❸ *Explică de ce în acest exemplu nu obținem o ecuație.*

❹ *Construiește, folosind doar rigla și compasul, un triunghi care să aibă laturile egale cu 3 cm, 4 cm și 5 cm. Poți construi, folosind același procedeu, un triunghi având laturile de 3 cm, 4 cm și 8 cm? Explică!*

❺ *Pune în evidență acești doi pași în fiecare dintre exemplele anterioare.*

trebuie ca această sumă să fie mai mare decât 0, deci să aibă loc relația $v - 21000 - \frac{25}{100}v > 0$. În acest caz, modelul matematic asociat problemei este o inecuație.

În fiecare dintre exemplele analizate mai sus, am transpus enunțul problemei sub forma unor relații matematice. Am obținut astfel: ecuații, inecuații, sisteme de ecuații.

În general

Pentru a transpune enunțul unei probleme sub forma unor relații matematice, procedăm astfel:

Etapa I: **alegerea necunoscutei**

- Citim enunțul cu atenție.
- Ne imaginăm situația descrisă cât mai exact posibil.
- Separăm ceea ce „se dă” de ceea ce „se cere”.
- Identificăm mărimile necunoscute.
- Analizăm enunțul și căutăm mărimea necunoscută cea mai potrivită pentru a fi notată cu o literă.

Etapa a II-a: **punerea problemei în ecuație**

- Căutăm să exprimăm cât mai simplu legături între date și cerințe.
- Stabilim un plan de acțiune.
- Efectuăm calcule parțiale și evaluăm natura rezultatului.

Exerciții și probleme

Scrie ecuațiile, respectiv inecuațiile prin care se exprimă matematic următoarele probleme:

1. Dacă, pentru a îndeplini un contract de livrare, o uzină ar fabrica zilnic 18 mașini, la termenul stabilit ar lipsi 4 mașini. Dacă uzina ar fabrica zilnic câte 20 de mașini, la termenul stabilit ar fi cu 10 mai multe decât prevede contractul. Câte mașini au fost comandate prin contract și în cât timp este prevăzut a fi fabricate?

2. Află numerele naturale cu proprietatea că diferența dintre triplul fiecăruia și jumătatea sa este mai mică decât 10.

3. Perimetrul unui dreptunghi este de 220 m. Dacă micșorezi lungimea sa cu 20 m, cu cât ar trebui mărită lățimea pentru ca perimetrul să rămână același?

4. Perimetrul unui dreptunghi este de 70 dm și lățimea este de 40% din lungime. Determină aria dreptunghiului.

5. Întrebat odată ce oră este, Pitagora a răspuns: „Până la sfârșitul zilei a rămas de două ori $\frac{2}{5}$ din cât a trecut de la începutul ei.” Ce oră este?

6. Dintr-un coș cu mere, Dănuț ia $\frac{5}{8}$ din numărul lor, apoi vine Ana și ia $\frac{4}{5}$ din numărul merelor rămase. Au rămas 15 mere. Câte mere au fost la început în coș?

7. Determină soluția fiecărei ecuații:

a) $3(x + 2) + 5 = 2x - 8$;

b) $5(x - 1) - (x + 2) = 12$;

c) $\frac{x}{4} + 5{,}7 = \frac{3}{4} - 2x$;

d) $x + 2(3x + 1) = 12 - 4(x - 2)$;

e) $x + 3(3x + 1) = 12 - 5(x + 2)$;

f) $2(x - 1) - 4(1 - x) = 5(2 - 3x)$.

Analizăm și generalizăm!

Problemele formulate în prima parte a acestei unități de învățare ne-au condus la diverse relații care conțin cantitățile necunoscute. Vom determina, pentru fiecare problemă în parte, mulțimile ale căror elemente verifică ipotezele problemei.

♦ Ce este o ecuație?

Să ne amintim!

O *ecuație* este o propoziție în care apare o singură dată semnul egal. O ecuație are doi *membri*. În cei doi membri ai unei ecuații apar variabile, numite *necunoscute*. Aceste necunoscute pot lua valori dintr-o mulțime, numită *domeniul de definiție* al ecuației.

În cazul în care domeniul de definiție *D* nu este precizat, acesta trebuie determinat, punând condiția ca pentru orice element al lui *D* expresiile care apar în cei doi membri ai ecuației să aibă definită valoarea.

O *soluție* a unei ecuații este un element al domeniului de definiție cu proprietatea că, înlocuit în ecuație, conduce la o propoziție adevărată.

Cuvântul ecuație provine din latinescul „aequatio” și înseamnă egalare.

Exemple

1) $2(x + 1) + (2x - 3) = x - (-1 - x)$ este o ecuație având necunoscuta x. Cum ambii membri ai ecuației au sens pentru orice număr real x, domeniul de definiție este mulțimea $\mathbb{R}$.

Înlocuind x cu 1, rezultă propoziția adevărată 3 = 3. Deci 1 este soluție a acestei ecuații. Pe de altă parte, înlocuind x cu 0, se obține propoziția falsă $-1 = 1$. Deci numărul 0 nu este soluție a acestei ecuații.

❶ Stabilește dacă numărul −1 este o soluție a ecuației $x + 2(1 - x) = 5$.

2) $\frac{x^2-1}{x-1} = 4$ este o ecuație având necunoscuta x. Pentru ca numitorul care apare în membrul din stânga să fie diferit de 0 (împărțirea prin 0 nu are sens!) trebuie ca x să fie diferit de 1. Deci domeniul de definiție al ecuației este $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Numărul 3 este soluție a acestei ecuații.

3) $2x - y + 3 = 0$ este o ecuație având două necunoscute x și y, al cărei domeniu de definiție este $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

❷ Identifică necunoscutele și domeniile de definiție pentru ecuațiile:

$\lg(x+1) + \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}$;

$\sqrt{2x-2} + y - 3 = 2$.

Să analizăm!

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi mulțimea tuturor soluțiilor acesteia.

Să considerăm, de exemplu, ecuația $2(x + 1) + (2x - 3) = x + (1 + x)$. Am văzut că numărul 1 este o soluție a acestei ecuații. Problema care se pune este dacă aceasta este singura soluție sau mai există și altele.

În general, pentru a determina toate soluțiile unei ecuații încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă efectuând transformări echivalente ale acesteia.

În cazul ecuației menționate procedăm astfel:

Efectuăm calculele și reducem termenii asemenea în cei doi membri	$2x + 2 + 2x - 3 = x + 1 + x$ $4x - 1 = 2x + 1$
Adunăm în ambii membri ai ecuației $-2x$ (sau scădem $2x$)	$(4x - 1) - 2x = (2x + 1) - 2x$
Folosim asociativitatea și comutativitatea adunării	$(4x - 2x) - 1 = (2x - 2x) + 1$ $2x - 1 = 1$

❸ Identifică proprietățile operațiilor cu numere utilizate în aceste calcule.

❹ Explică de ce a fost util să adunăm $(-2x)$ la ambii membri. Ce s-ar fi întâmplat dacă adunam $(-4x)$?

❺ *Verifică faptul că numărul 1 este soluție a tuturor ecuațiilor care apar prin transformări echivalente din ecuația dată.*

❻ *Explică de ce toate aceste transformări nu au modificat mulțimea soluțiilor ecuației.*

❼ *Ce se întâmplă dacă înmulțim cu 0 ambii membri ai unei ecuații? De ce nu este aceasta o transformare care păstrează mulțimea soluțiilor?*

❽ *Rezolvă ecuația* $x \cdot (x - 2) + 3 \cdot (x - 2) = 0$. *Ce transformări echivalente ai folosit?*

Adunăm 1 în ambii membri

$$2x - 1 + 1 = 1 + 1$$
$$2x = 2$$

Înmulțim ambii membri cu $\frac{1}{2}$ și folosim faptul că 1 este element neutru pentru înmulțire.

$$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$1 \cdot x = 1$$
$$x = 1$$

În urma tuturor acestor transformări am ajuns la concluzia că ecuația dată are aceeași mulțime de soluții cu ecuația $x = 1$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = \{1\}$.

În general

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă folosind transformări care nu schimbă mulțimea de soluții ale acesteia. Obținem astfel ecuații *echivalente* cu cea dată.

Transformările utilizate de obicei sunt:
- efectuarea de calcule algebrice în fiecare membru al ecuației;
- adunarea sau scăderea aceluiași termen în ambii membri ai ecuației;
- înmulțirea sau împărțirea ambilor membri cu același număr real nenul.

♦ Ce este o ecuație liniară?

Să analizăm!

În ecuațiile prezentate mai sus am întâlnit situații în care necunoscuta sau necunoscutele apăreau doar la puterea întâi, cum ar fi, de exemplu:

$2 \cdot (x + 1) + (2x - 3) = x - (-1 - x)$ sau

$2x - y + 3 = 0$.

În schimb, în ecuația $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$ necunoscuta x apare la numitorul unei fracții, iar numărătorul acesteia conține termenul x^2.

În general

❾ *Scrie o ecuație liniară cu necunoscutele* x, y *și* z.

O ecuație care conține numai termeni de gradul întâi (adică termeni de forma $a \cdot x$, cu a număr real nenul și x necunoscută) și/sau termeni liberi (adică termeni care nu conțin necunoscute) se numește *ecuație liniară* (sau *ecuație de gradul întâi*).

♦ Cum rezolvăm ecuații liniare cu o necunoscută?

Să analizăm!

❿ *Exprimă în cuvinte transformările utilizate pentru rezolvarea ecuației* $p - 2(p - 1) = 5$.

În unul dintre exemplele anterioare am obținut ecuația liniară cu necunoscuta p:

$$p - 20 - \frac{15}{100}(p - 20) = 238.$$

Utilizând transformări echivalente, obținem succesiv următoarele ecuații, care au aceleași mulțimi de soluții ca și ecuația inițială:

$$\frac{17}{20}p - 255 = 0.$$

$$\frac{17}{20}p = 255.$$

$$p = 300.$$

Deci ecuația inițială are ca soluție numărul 300.

În general

Orice ecuație liniară cu necunoscuta x poate fi adusă, prin transformări echivalente, la o ecuație de forma $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

În rezolvarea unei ecuații de forma $ax + b = 0$ putem folosi un algoritm care precizează mulțimea soluțiilor ecuației.

Să demonstrăm!

Despre mulțimea S a soluțiilor ecuației $ax + b = 0$, $(a, b \in \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$, putem spune că:

- $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$, dacă $a \neq 0$.
- $S = \varnothing$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$
- $S = \mathbb{R}$, dacă $a = 0$ și $b = 0$.

11 Stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere sunt utilizate în algoritmul de rezolvare a ecuației $3x + 7 = 0$.

Adunând $-b$ la ambii membri, deducem că ecuația $ax + b = 0$ este echivalentă cu ecuația $ax = -b$.

• Dacă $a \neq 0$, înmulțind cu inversul numărului a (deci cu $\frac{1}{a}$), obținem ecuația echivalentă $x = -\frac{b}{a}$. De aceea, pentru $a \neq 0$, mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

• Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, ecuația $ax = -b$ se rescrie $0x = -b$. Cum pentru orice număr real x avem $0x = 0 \neq -b$, rezultă că ecuația $0x = -b$ nu are soluții. Deci $S = \varnothing$.

• Dacă $a = 0$ și $b = 0$, ecuația $ax = -b$ devine $0x = 0$. Cum orice număr real x verifică această relație, deducem că în acest caz avem $S = \mathbb{R}$.

♦ Cum rezolvăm sisteme de ecuații liniare?

Să ne amintim!

Un *sistem de ecuații* se obține prin operația logică „și” din două sau mai multe ecuații. O *soluție* a sistemului este o soluție comună a tuturor ecuațiilor acestuia. *A rezolva* un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor sale. Dacă toate ecuațiile care alcătuiesc un sistem sunt liniare, atunci sistemul se numește *sistem de ecuații liniare* (sau *sistem de gradul întâi*).

Exemple

1. Sistemul $\begin{cases} 2x + 4y - 3 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y.

2. Sistemul $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații cu necunoscutele x și y. Cum prima ecuație nu este liniară, acesta nu este un sistem de ecuații liniare.

12 Formează un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y care să conțină ecuația $2x - y - 1 = 0$.

În continuare, vom fi interesați de rezolvarea sistemelor de gradul întâi. Am văzut că orice ecuație de gradul întâi cu necunoscuta x poate fi adusă, prin transformări echivalente, la forma $ax + b = 0$. Există oare o formă simplă la care putem aduce, prin transformări echivalente, un sistem de ecuații liniare, fără a schimba mulțimea soluțiilor?

Am mai văzut că, în funcție de valorile lui a și b, mulțimea de soluții a ecuației $ax + b = 0$ poate avea un element, o infinitate de elemente, sau poate fi mulțimea vidă. Regăsim oare aceste trei situații în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare?

Să analizăm!

Considerăm sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x și y:

$$\begin{cases} x+2y+1=6-x+3y \\ 2x-3y-3=1+x-y \end{cases}.$$

Adunând la ambii membri ai primei ecuații termenul (x – 3y – 1) și reducând termenii asemenea se obține o ecuație echivalentă cu ea:

$2x - y = 5$.

În mod analog, cea de-a doua ecuație este echivalentă cu $x - 2y = 4$.

13 Explică ce transformare a fost efectuată asupra celei de-a doua ecuații.

Transformările efectuate au avut ca scop obținerea unor ecuații echivalente cu cele inițiale, dar care conțin în membrul stâng numai termeni în care apar necunoscutele, iar în membrul drept termenul liber.

În concluzie, sistemul dat este echivalent cu sistemul: $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-2y=4 \end{cases}.$

În general

14 Scrie forma mai simplă la care poate fi adus un sistem liniar cu trei ecuații și trei necunoscute.

Prin efectuarea unor transformări echivalente convenabile ale ecuațiilor componente, orice sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y poate fi adus la forma $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}.$

Să ne amintim!

Putem determina mulțimea soluțiilor unui sistem liniar prin **metoda reducerii**. Aplicăm această metodă în cazul sistemului $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-2y=4 \end{cases}.$

15 Explică de ce am înmulțit a doua ecuație a sistemului cu –2.

16 Rezolvă sistemul prin reducerea necunoscutei y.

Prima ecuaţie o lăsăm neschimbată (o înmulţim cu 1), iar pe cea de-a doua ecuaţie o înmulţim cu –2.	$\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-2y=4 \end{cases} \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \end{array}$
Adunăm ecuaţiile membru cu membru. În acest fel, reducem necunoscuta x şi obţinem o ecuaţie care are doar necunoscuta y.	$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -2x+4y=-8 \end{cases}$ $/ \quad 3y=-3$
Înlocuim a doua ecuaţie a sistemului cu ecuaţia cu o singură necunoscută obţinută la pasul anterior. Obţinem un sistem echivalent cu cel dat.	$\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3y=-3 \end{cases}$
Rezolvăm cea de-a doua ecuaţie a noului sistem, determinând valoarea lui y.	$\begin{cases} 2x-y=5 \\ y=-1 \end{cases}$
Înlocuim valoarea lui y în prima ecuaţie şi calculăm pe x.	$\begin{cases} 2x-(-1)=5 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} 2x=4 \\ y=-1 \end{cases}$
Scriem soluţia sistemului.	$S = \{(2; -1)\}$

Să aplicăm!

În unul dintre exemplele anterioare (referitor la numărul de apartamente cu două, respectiv cu trei camere ale unui bloc de locuințe), am obținut sistemul de ecuații liniare: $\begin{cases} x+y=30 \\ 2x+3y=78 \end{cases}.$

Pentru a rezolva acest sistem prin metoda reducerii, este necesar să corelăm coeficienții variabilei x. Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu 2 și pe cea de-a doua cu –1, apoi adunăm ecuațiile astfel obținute. Rezultă sistemul echivalent: $\begin{cases} x+y=30 \\ -y=-18 \end{cases}.$

Cea de-a doua ecuație a acestui sistem are soluția unică y = 18. De aceea, sistemul considerat are, la rândul său, mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element, și anume perechea (12, 18).

În general

Unele sisteme de ecuații liniare au o singură soluție.
Un sistem de ecuații liniare care are mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element se numește *compatibil determinat*.

Aplicând metoda reducerii unui sistem compatibil determinat, se ajunge la o ecuație de tip $a \cdot x = b$, cu $a \neq 0$.

Exemplul 2

Am văzut că ecuația $0 \cdot x = 0$ are ca mulțime a soluțiilor ℝ, deci admite o infinitate de soluții. Apare în mod natural întrebarea: există oare sisteme de două ecuații cu două necunoscute care să aibă, la rândul lor, mai multe soluții?

Să analizăm!

Considerăm sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, în care prima și cea de-a doua ecuație coincid.

Perechile (1, 0); (0, 1); (2, –1); $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aparțin mulțimii soluțiilor acestui sistem. De aceea, sistemul dat are o infinitate de soluții.

Să analizăm ce se întâmplă atunci când aplicăm metoda reducerii sistemului $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 4x-6y=-2 \end{cases}$. Înmulțind prima ecuație cu –2 și adunând ecuațiile astfel obținute, obținem ecuația 0 = 0. Sistemul dat este deci, echivalent cu sistemul $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 0=0 \end{cases}$.

Acest sistem admite o infinitate de soluții. De aceea, aceeași proprietate o are și sistemul inițial.

17 Găsește y astfel încât perechea (3, y) să fie soluție a sistemului $\begin{cases} x+y=2 \\ -x-y=-2 \end{cases}$. Stabilește apoi dacă $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ aparține mulțimii soluțiilor.

18 Explică ce legătură este între ecuațiile sistemului $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$. Găsește apoi trei elemente diferite ale mulțimii soluțiilor.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare au o infinitate de soluții.
Un sistem de ecuații liniare care admite o infinitate de soluții se numește *compatibil nedeterminat*.

Aplicând metoda reducerii unui sistem compatibil nedeterminat, se ajunge la o ecuație de tip $0 \cdot x = 0$.

19 Formează un sistem compatibil nedeterminat care să conțină ecuația $4x - 2y = -8$.

Ultima situație întâlnită în cazul ecuațiilor liniare a fost cea a ecuației incompatibile $0 \cdot x = b$, cu $b \neq 0$, care are mulțimea soluțiilor vidă. Apare în mod natural întrebarea: există oare sisteme liniare de două ecuații care nu admit soluții?

Să analizăm!

Sistemul $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$ nu admite soluții. Într-adevăr, înmulțind prima ecuație cu –2 și adunând ecuațiile, obținem sistemul echivalent $\begin{cases} x+2y=2 \\ 0 \cdot y=1 \end{cases}$.

Cum egalitatea 0 = 1 nu poate avea loc pentru nici o valoare a lui x și y, rezultă că sistemul considerat nu are soluție.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare nu au soluție.
Un sistem de ecuații liniare care nu admite nici o soluție se numește *incompatibil*.

Aplicând metoda reducerii unui sistem incompatibil, se ajunge la o ecuație de tip $0 \cdot x = b$, cu $b \neq 0$.

Exerciții și probleme

1. Rezolvați ecuațiile de mai jos, unde $x \in \mathbb{R}$:

a) $4x = 8$;
b) $6x = 3$;
c) $-2x = 1$;
d) $0,5x = -1,25$;
e) $3x - 1 = 5$;
f) $1 - 3x = 4x + 2$;
g) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$;
h) $3(x + 1) = 3x$;
i) $2(x - 1) + 3x = 4(2x + 1)$;
j) $5(1 - x) - 2(1 - 3x) = 0$;
k) $(\sqrt{2}-1)x = 2+\sqrt{2}$;
l) $4(x - 1) - 2x = 2(x + 3)$;
m) $2x + 2(1 - x) = 2$;
n) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{6} = 0$.

2. Un călător are de transportat 20 kg de bagaje. El dispune de un rucsac și de un geamantan. Pentru comoditate, călătorul vrea să distribuie bagajele astfel încât cu rucsacul să transporte cu 4 kg mai mult decât cu geamantanul. Câte kilograme va cântări încărcătura geamantanului?

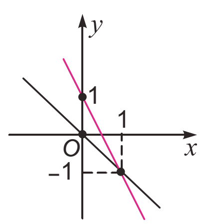
3. Determină mulțimile de soluții ale sistemelor:

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x=y \\ x+y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x-y=2-x \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$.

4. Scrie un sistem care are ca soluție (–1; 1). Mai poți scrie încă un astfel de sistem?

5. În figura alăturată sunt reprezentate dreptele de soluții ale ecuațiilor unui sistem. Care este soluția sistemului?



6. Adaugă încă o ecuație sistemului $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$, astfel ca noul sistem obținut să devină

a) compatibil; b) incompatibil.

7. Determină numerele reale a și b știind că (1; 3) este soluție a sistemului:

a) $\begin{cases} x-ay=4 \\ bx+y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+ay-1=0 \\ 3x-y=b \end{cases}$;

c) $\begin{cases} ax-by=3 \\ bx+y=2 \end{cases}$

8. Folosind reprezentarea pe hârtie milimetrică, aproximează soluțiile sistemelor:

a) $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-y+0,5=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y=1,3 \\ 2x-y=0,6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x-y=\sqrt{2} \\ x+y=\sqrt{3} \end{cases}$; d) $\begin{cases} x=2 \\ x+3y=1 \end{cases}$.

Verifică dacă astfel ai obținut soluții ale sistemelor date.

9. Reprezintă grafic dreptele de soluții ale ecuațiilor ce compun sistemele următoare, apoi determină soluțiile sistemelor:

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x-3y=-13 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+7=0 \\ 3x-y+1=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 7x+5y=-1 \\ -5x+y=-13 \end{cases}$

10. Folosind proprietățile numerelor reale, rescrie sub forma unui sistem ecuațiile:

a) $(x - y)^2 + (2x + y - 1)^2 = 0$;
b) $|x-y+1|+|2x-3y|=0$;
c) $\sqrt{x-2y}+\sqrt{x+y+1}=0$;
d) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1 = 0$.

11. Determină numărul de soluții ale sistemelor:

a) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+y=4 \\ x+y-3=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x+y=1 \\ -x+2y-1=0 \end{cases}$.

12. Determină numerele reale a și b știind că sistemele de mai jos au aceeași soluție:

$\begin{cases} x-y=2 \\ x+by=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} ax-3y=1 \\ x+y=8 \end{cases}$.

Metoda grafică în studiul ecuațiilor și al inecuațiilor liniare

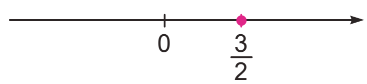
Aplicăm și dezvoltăm!

Să ne amintim!

Mulțimea soluțiilor unei ecuații sau a unei inecuații de gradul întâi poate fi reprezentată pe axa numerelor reale.

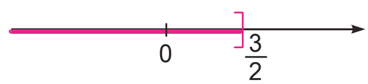
Astfel, în cazul ecuației $2x - 3 = 0$, mulțimea soluțiilor este $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$; acestei mulțimi îi corespunde, pe axa numerelor reale, un punct:

❶ Reprezintă pe axa numerelor mulțimile de soluții pentru:
a) $4x + 1 = 0$
b) $4x + 1 > 0$
c) $4x + 1 < 0$.



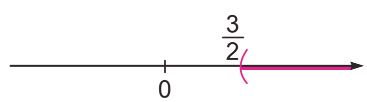
$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

În schimb, considerând inecuația $2x - 3 \leqslant 0$, mulțimea soluțiilor este intervalul $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$, căruia îi corespunde pe axa numerelor reale o semidreaptă:



$S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

Analog, mulțimea soluțiilor inecuației $2x - 3 > 0$ este intervalul $\left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, căruia îi corespunde pe axa numerelor reale o semidreaptă:



$S = \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$.

În lecțiile următoare vom reprezenta grafic și mulțimile de soluții ale unor ecuații, inecuații și sisteme mai generale.

♦ Cum interpretăm grafic ecuații de gradul întâi cu două necunoscute?

Să analizăm!

Am văzut că în cazul ecuațiilor și inecuațiilor de gradul întâi cu o necunoscută putem reprezenta mulțimile de soluții pe axa numerelor reale. Ne propunem în continuare să găsim o reprezentare și pentru soluțiile ecuațiilor și inecuațiilor de gradul întâi cu două necunoscute. În acest caz, vom folosi reprezentări grafice într-un plan în care a fost ales un reper cartezian.

Să considerăm, de exemplu, ecuația de gradul întâi cu necunoscutele x și y:

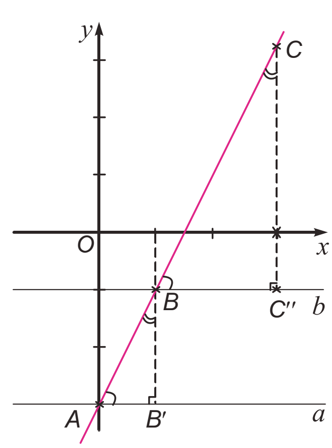
$2x - y - 3 = 0$

Observăm mai întâi că această ecuație admite mai multe soluții.

Astfel, $(0; -3)$, $(1; -1)$, precum și $(3; 3)$ sunt soluții ale ecuației date.

Fixăm în plan un reper cartezian xOy în care reprezentăm punctele $A(0; -3)$, $B(1; -1)$ și $C(3; 3)$ corespunzătoare soluțiilor indicate mai sus.

Desenul sugerează că cele trei puncte sunt situate pe o aceeași dreaptă. Acest fapt trebuie însă demonstrat riguros.



❷ Găsește trei soluții ale ecuației $2x - y + 3 = 0$.

Să demonstrăm!

Punctele $A(0; -3)$, $B(1; -1)$ și $C(3; 3)$ sunt coliniare.

❸ *Exprimă vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ în funcție de versorii axelor. Ce poți spune despre acești vectori?*

Vom face o construcție auxiliară: prin A și B ducem paralele a și b la dreapta suport a axei Ox, iar prin B, respectiv C, ducem paralele la axa Oy care intersectează dreptele a și b în B', respectiv C'. Acestea au coordonatele $B'(1, -3)$, respectiv $C''(3, -1)$. Pentru a arăta că punctele A, B, C sunt coliniare este suficient să demonstrăm că $m(\widehat{ABB'}) + m(\widehat{B'BC''}) + m(\widehat{C''BC}) = 180°$.

Unghiul $\widehat{B'BC''}$ este drept, deci $m(\widehat{B'BC''}) = 90°$. Pentru a obține informații legate de celelalte două unghiuri, studiem triunghiurile $AB'B$ și $BC''C$. Remarcăm că acestea sunt dreptunghice, în B', respectiv C'', iar catetele lor au lungimile egale cu

$AB' = 1$; $B'B = 2$; $BC'' = 2$; $C''C = 4$.

Observăm că aceste lungimi sunt proporționale, deci $\Delta AB'B \sim \Delta BC''C$ (deoarece $\widehat{AB'B} \equiv \widehat{BC''C}$ și $\frac{AB'}{BC''} = \frac{B'B}{C''C}$).

❹ *Calculează lungimea segmentului PQ, dacă:*
a) $P(1; 2)$, $Q(1; 4)$;
b) $P(1; 2)$, $Q(-5; 2)$.

Deducem că $m(\widehat{BAB'}) = m(\widehat{CBC''})$, deci $m(\widehat{ABB'}) + m(\widehat{B'BC''}) + m(\widehat{C''BC}) = m(\widehat{ABB'}) + 90° + m(\widehat{BAB'}) = 180°$, ceea ce probează afirmația făcută.

❺ *Verifică faptul că $(4; 5)$ este o soluție a ecuației $2x - y + 3 = 0$ și arată că A, B și D sunt coliniare, unde D este punctul de coordonate $(4; 5)$.*

Am arătat, așadar, că punctele A, B și C, corespunzătoare celor trei soluții $(0; -3)$; $(1; -1)$, respectiv $(3; 3)$, sunt coliniare.

În general, dacă $(x_0; y_0)$ este o soluție a ecuației $2x - y - 3 = 0$, punctul $P(x_0; y_0)$ este situat pe dreapta AB determinată de punctele de mai sus. Ne întrebăm dacă și reciproca este adevărată, deci dacă orice punct de pe această dreaptă corespunde unei soluții a ecuației considerate.

Să demonstrăm!

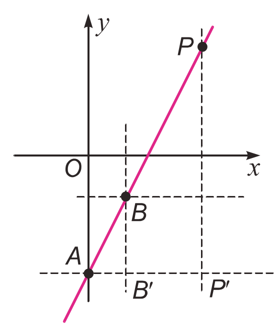
❻ *Determină mijlocul M al segmentului AB. Arată apoi că x_M și y_M (coordonatele lui M) verifică ecuația $2x_M - y_M - 3 = 0$.*

Dacă $P(x_0; y_0)$ este situat pe dreapta determinată de punctele $A(0; -3)$ și $B(1; -1)$, atunci $2x_0 - y_0 - 3 = 0$, deci $(x_0; y_0)$ este soluție a ecuației $2x - y - 3 = 0$.

Considerăm un punct $P(x_0, y_0)$ aflat pe dreapta AB.

Paralela prin P la Oy intersectează a în P'. Din asemănarea triunghiurilor $AP'P$ și $AB'B$ deducem:

$\frac{AP'}{AB'} = \frac{PP'}{BB'}$, deci $\frac{x_0}{1} = \frac{y_0 + 3}{2}$, adică $2x_0 - y_0 - 3 = 0$.



În concluzie am stabilit o legătură între mulțimea soluțiilor ecuației $2x - y - 3 = 0$ și mulțimea punctelor din plan situate pe dreapta AB.

În general

Mulțimea soluțiilor unei ecuații de gradul întâi cu necunoscutele x și y se reprezintă, într-un plan în care a fost fixat un reper cartezian xOy, printr-o dreaptă. Această dreaptă este determinată de două puncte corespunzând unor soluții particulare ale ecuației.

Reciproc, orice dreaptă din acest plan este reprezentarea grafică a soluțiilor unei ecuații de gradul întâi cu două necunoscute.

❼ *Scrie ecuația dreptei PQ, unde $P(1, 1)$ și $Q(-2, 3)$. Determină coordonatele altor trei puncte ale acestei drepte.*

♦ Cum interpretăm grafic sisteme de ecuații liniare?

Să analizăm!

Am demonstrat că mulțimea soluțiilor unei ecuații liniare cu două necunoscute se reprezintă în plan printr-o dreaptă. Aceasta înseamnă că în cazul unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, fiecăreia dintre ecuații îi corespunde o dreaptă. Știm că două drepte din plan pot fi concurente, confundate sau paralele. Pe de altă parte, am arătat că sistemele de ecuații liniare pot fi compatibil determinate sau compatibil nedeterminate sau incompatibile. Ne propunem să investigăm legătura dintre compatibilitatea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute și poziția relativă a dreptelor corespunzătoare ecuațiilor sistemului.

Exemplul 1

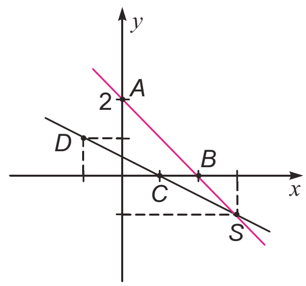
Considerăm sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x și y: $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$.

Acesta este un sistem compatibil determinat, având soluția (3; –1).

Vrem să determinăm grafic soluția acestui sistem. Pentru aceasta, reprezentăm dreptele corespunzătoare ecuațiilor sale.

Prima ecuație admite soluțiile (0; 2) și (2; 0). De aceea, punctele A(0; 2) și B(2; 0) determină dreapta corespunzătoare ecuației $x + y - 2 = 0$.

Analog, mulțimea soluțiilor ecuației $x + 2y - 1 = 0$, este reprezentată de dreapta determinată de punctele C(1; 0) și D(–1; 1). Reprezentând ambele drepte în reperul cartezian xOy, observăm că ele sunt concurente în punctul S(3; –1), ale cărui coordonate reprezintă chiar soluția sistemului considerat.



12 *Rezolvă sistemul $\begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=1 \end{cases}$ prin metoda reducerii și verifică faptul că (3; –1) este soluția sa unică.*

13 *Determină intersecțiile cu axele de coordonate ale dreptei de ecuație*

$x + 2y - 1 = 0$.

14 *Explică de ce punctul de intersecție a dreptelor corespunde soluției sistemului.*

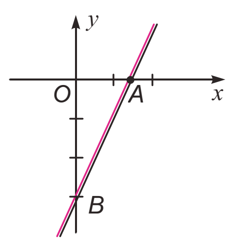
În general

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute este compatibil determinat dacă și numai dacă dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului sunt concurente. Coordonatele punctului de intersecție a celor două drepte reprezintă soluția sistemului dat.

Exemplul 2

Sistemul $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=6 \end{cases}$ este compatibil nedeterminat: cea de-a doua ecuație se obține din prima prin înmulțire cu 2.

Dreapta corespunzătoare primei ecuații are ca intersecție cu axa Ox punctul $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, iar ca intersecție cu axa Oy punctul B(0, –3). Pe de altă parte, dreapta corespunzătoare celei de-a doua ecuații are aceleași puncte de intersecție cu cele două axe. Deoarece aceste două drepte au în comun punctele A și B, deducem că ele coincid.



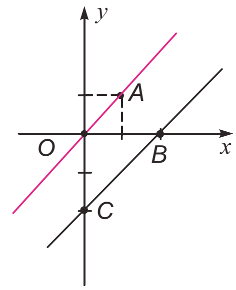
15 *Explică ce legătură există între faptul că sistemul are o infinitate de soluții și faptul că dreptele ce reprezintă ecuațiile sistemului coincid.*

În general

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute este compatibil nedeterminat dacă și numai dacă dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului coincid.

Exemplul 3

Sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ este incompatibil.



Prima ecuație admite soluțiile particulare (0; 0) și (1; 1), deci mulțimea soluțiilor acestei ecuații se reprezintă prin dreapta determinată de punctele $O(0;\ 0)$ și $A(1;\ 1)$. Analog, mulțimea soluțiilor celei de-a doua ecuații se reprezintă prin dreapta BC, unde $B(2;\ 0)$ și $C(0;\ -2)$. Reprezentând cele două drepte în același sistem de axe, putem constata că ele sunt paralele.

16 Putea fi găsită dreapta corespunzătoare primei ecuații din exemplul 3, folosind intersecția cu axele?

17 Ce s-ar fi întâmplat dacă dreptele erau concurente?

În general

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute este incompatibil dacă și numai dacă dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului sunt paralele.

Legătura dintre compatibilitatea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute și poziția relativă a dreptelor asociate ecuațiilor poate fi sistematizată în următorul tabel:

	Cazul I	*Cazul II*	*Cazul III*
Forma ecuaţiilor (exemple)	$\begin{cases} -2x + 7y = -11 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 6y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$
Numărul soluţiilor	una singură	o infinitate	nici una
Mulţimea de soluţii	S = {(2; –1)}	$S = \{(x;\ y) \mid x - 3y = 2\}$	S = ∅
Compatibilitatea sistemului	Sistem compatibil determinat	Sistem compatibil nedeterminat	Sistem incompatibil
Interpretarea grafică a sistemului	două drepte care se intersectează într-un punct ale cărui coordonate formează soluţia sistemului	două drepte care coincid; mulţimea punctelor acestor drepte identice reprezintă mulţimea de soluţii a sistemului	două drepte paralele distincte; intersecţia nu conţine nici un punct

Să aplicăm!

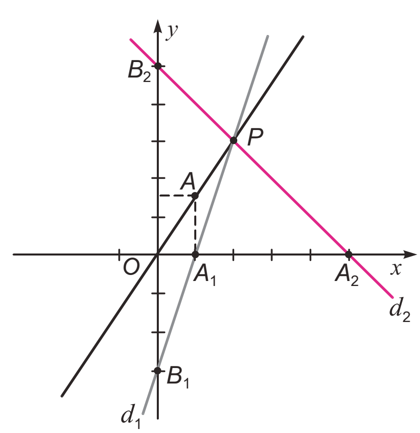
Metoda grafică poate fi utilizată și pentru interpretarea sistemelor de trei ecuații cu două necunoscute. De această dată, vom avea trei drepte în plan; poziția lor relativă ne va da informații cu privire la compatibilitatea sistemului. Mai precis: sistemul este compatibil dacă și numai dacă toate dreptele trec printr-un același punct.

Exemplu

Considerăm sistemul de trei ecuații cu două necunoscute: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Reprezentăm grafic dreptele d_1, d_2 și d_3 corespunzătoare celor trei ecuații. Obținem astfel dreptele A_1B_1, A_2B_2 și OA, unde $A_1(1;\ 0)$; $B_1(0;\ -3)$, $A_2(5;\ 0)$, $B_2(0;\ 5)$, $A\left(1;\ \frac{3}{2}\right)$. Obținem, în concluzie, reprezentare grafică alăturată.

Desenul indică faptul că cele trei drepte au un punct comun, și anume punctul $P(2;\ 3)$. Aceasta înseamnă că sistemul considerat admite soluția (2; 3). Deci sistemul dat este compatibil.



18 Rezolvă sistemul din exemplul 4 folosind metoda reducerii.

Exerciții și probleme

1. Alege pentru fiecare sistem soluția lui:

a) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-4y=16 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y=7 \\ -11x+5y=31 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 5x-10y=5 \end{cases}$.

i) (4; –1); ii) (1; 0); iii) (–1; 4).

2. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ -x+2y-3=0 \end{cases}$. Perechea (1; 2) este soluție a acestui sistem? Dar perechea (–1; 2)?

3. Reprezintă dreptele de soluții ale ecuațiilor ce compun sistemele următoare și apoi determină soluțiile acestora:

a) $\begin{cases} 2y-1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 2x-y=7 \end{cases}$.

4. Rezolvă ecuațiile:

a) $(x + 1)^2 = (x - 2)^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{x^2+x}{x}=1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Rezolvă sistemul: $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$.

6. Determină mulțimile de soluții pentru:

a) $(2x - 1)(3x + 1) = 0$

b) $(2x - 1)(3x + 1) > 0$

c) $(2x - 1)(3x + 1) < 0$.

Ce relație există între mulțimile găsite la punctele a), b) și c)?

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- să recunosc ecuații, inecuații și sisteme liniare
- să asociez unei probleme o ecuație, inecuație sau sistem
- să aplic algoritmii de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor sau sistemelor
- să stabilesc compatibilitatea unor sisteme de ecuații liniare?

Test de verificare

1. Dintre propozițiile următoare, identifică ecuațiile, inecuațiile și sistemele de gradul întâi:

a) $x^2 + x - 1 = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{2x+1}{9}=\dfrac{-x+6}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

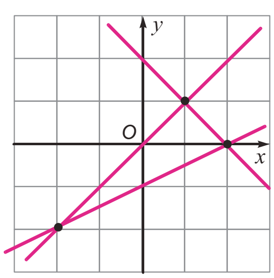
c) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-y^2=2 \end{cases}$ d) $2x + 1 \geqslant x + 3$.

2. Scrie ecuația corespunzătoare următoarei probleme: Determină un număr natural de șase cifre care are cifra unităților egală cu 4 și care se mărește de patru ori atunci când ultima cifră este mutată la începutul numărului.

3. Precizează dacă sistemul următor este compatibil:

$\begin{cases} 2x-z=3 \\ 4x+5z=4 \end{cases}$.

4. Cele trei ecuații ale unui sistem cu necunoscutele x și y sunt reprezentate geometric în figura alăturată. Precizează numărul soluțiilor sistemului. Este acest sistem compatibil determinat?



Lectură

Printre popoarele antice, egiptenii ocupă un loc aparte. Realizările lor au intrigat și fascinat în egală măsură oamenii de cultură sau simplii turiști. Monumentalele piramide de la Gisech au condus la ideea că egiptenii aveau temeinice cunoștințe matematice. În sprijinul acestei presupuneri vine și papirusul Rhind, descifrat la sfârșitul al XIX-lea, ce conține informații importante despre cunoștințele matematice ale egiptenilor. Aceste cunoștințe erau, în majoritatea lor, algoritmice: metodele de rezolvare nu erau justificate prin raționament, ci fixate și transmise sub formă de „reguli".

În acest papirus apare cea mai veche problemă cunoscută până acum, problemă ce se poate rezolva cu ajutorul ecuațiilor: ea cere să se afle o cantitate, dacă șeptimea ei și întregul fac 19. Modul de rezolvare indicat în papirus pentru această problemă diferă mult de tipul de algoritm utilizat astăzi, dar rezultatul obținut este corect.

Unitatea de învățare 2

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități.

Calcul numeric

1. Efectuează:
   a) $2{,}3 + 1{,}75$
   b) $4{,}15 - 2{,}91$
   c) $3{,}1 \cdot 2{,}53$
   d) $2{,}(7) + 1{,}(2)$
   e) $3{,}5 + 1{,}62$
   f) $6{,}28 - 2{,}83$
   g) $1{,}5 \cdot 3{,}24$
   h) $3{,}(6) + 1{,}(3)$

Aproximări

2. Aproximează prin rotunjire la ordinul sutimilor:
   a) $4{,}318 + 2{,}754$
   b) $29 : 7$
   c) $35{,}8 : 11$
   d) $\sqrt{5}$
   e) $3{,}681 + 2{,}367$
   f) $32 : 11$
   g) $27{,}5 : 7$
   h) $\sqrt{6}$

Calcul procentual

3. Calculează:
   a) Cât reprezintă 20% din 145?
   b) Cât la sută din 640 reprezintă 128?
   c) Cât va costa un costum de 120 lei, după o scumpire cu 20%?
   d) Care este procentul de ieftinire al unei cărți care înainte costa 6 lei, iar după ieftinire are prețul de 5,1 lei?

Regula de trei simplă

4. Rezolvă și argumentează:
   a) Dacă 4 m de mătase costă 58 lei, cât costă 7 m din același material?
   b) Dacă aria unui sector de cerc, determinat de un unghi la centru cu măsura de 120°, este de 18 m^2, ce arie are un sector al aceluiași cerc, determinat de un unghi la centru cu măsura de 40°?
   c) Dacă 4 automate identice îmbuteliază 600 l apă minerală în 20 de minute, în cât timp vor îmbutelia 5 automate aceeași cantitate de apă?
   d) Dacă 180 de elevi au folosit 500 de coli de scris la un examen, câte coli se estimează că vor folosi 405 000 de elevi la un examen de același fel?

Reprezentări grafice

5. Reprezintă grafic într-un sistem de axe:
   a) punctele $A(-2; -1)$, $B(3; 0)$, $C(0; -4)$ și $D(-3; 3)$.
   b) funcția $f : \{-2; -1; 0; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$
   c) funcția $f : \{-1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x$
   d) funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.

Culegerea, clasificarea şi reprezentarea datelor statistice

Surse de date statistice

Ne amintim şi explorăm!

♦ **Surse pentru obținerea de informații**

O caracteristică a societății contemporane este nevoia de informare. Orice persoană, orice unitate economică, orice organizație folosește informații ce se pot obține în diverse moduri. Pentru a accesa mai ușor diferite informații s-au căutat moduri variate de catalogare: cărțile de telefon, atlasele, enciclopediile sunt exemple în acest sens.

Din ce în ce mai folosite sunt adresele web. Accesând o pagină pe Internet, se pot găsi rapid informații organizate pe baza unor criterii clare. Iată câteva exemple:

Adresa	Conţinut
http://www.bcub.ro	Biblioteca Centrală Universitară
http://www.mnir.ro	Muzeul Naţional de Istorie
http://www.unibuc.ro/CLASSICA	Lucrări ale unor autori clasici
http://www.bibnat.ro/menu.php	Biblioteca Naţională
http://www.inmh.ro	Administraţia Naţională de Meteorologie
http://www.antipa.ro	Muzeul Grigore Antipa
http://www.eminescu.petar.ro/index.html	Opera Eminescu
http://www.gov.ro	Guvernul României
http://www.bcu.ro/FILIALE/FIZICA.html	Biblioteca de fizică şi chimie
http://www.ici.ro/romania/cultura/plastice.html	Arte plastice
http://www.art-links.md/art1.html	Arte plastice şi arhitectură

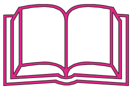
Aceste surse de informații conțin date cunoscute și catalogate.

Există numeroase situații în care informațiile trebuie culese și organizate pentru a putea fi folosite cu ușurință.

Exemplul 1: Organizarea activităților comerciale

O editură intenționează să lanseze o colecție de cărți pe teme de cultură și civilizație. Pentru a estima succesul acestei inițiative, conducerea editurii are nevoie de informații privind preferințele cititorilor și ofertele de carte de pe piață în domeniul respectiv. De asemenea, editorul trebuie să dispună de informații care să permită stabilirea unor prețuri convenabile (un preț prea mic riscă să nu acopere cheltuielile, iar un preț prea mare poate împiedica vânzarea). Pentru a obține aceste informații, directorul a adresat un chestionar vizitatorilor unui târg de carte.

❶ *Găsește și alte procedee de testare a preferințelor cititorilor de carte.*



Iată răspunsurile înregistrate de la 100 de persoane la întrebarea: „Câte cărți ați cumpărat în ultima lună?“

1	0	2	5	7	1	3	3	3	1	7	4	2	4	3	3	1	6	2	2
4	2	1	3	2	4	3	1	3	2	0	4	3	1	3	3	5	2	4	5
1	3	3	2	7	2	0	2	3	4	1	2	6	2	0	7	3	2	3	1
3	2	0	3	3	0	4	3	0	3	2	4	2	4	3	5	1	3	0	3
2	3	2	3	1	3	7	2	2	3	1	7	3	2	1	5	2	0	4	6

Constatăm că, pentru a putea fi utilizate, aceste informații trebuie prelucrate și redate într-o formă mai sintetică.

Pe de altă parte, chestionarea a 100 de persoane nu oferă suficiente informații pentru a anticipa comportamentul întregii populații în raport cu aceasta problemă. Procedeul oferă însă informații orientative ce permit directorului editurii să ia decizii pertinente în privința dezvoltărilor ulterioare.

❷ *Observă datele și răspunde:*
a) Câte persoane nu au cumpărat cărți în ultima lună?
b) Câte persoane au cumpărat 6 cărți în ultima lună?

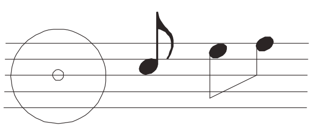
❸ *Să notăm $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, ..., $x_8 = 7$ și cu n_i numărul de persoane care au cumpărat x_i cărți în ultima lună. Determină n_1, n_2, ..., n_8.*

În matematică, estimarea comportării unei funcții pentru care nu se cunosc decât câteva valori particulare se numește ***extrapolare****.*

Exemplul 2: *Conducerea activităților comerciale*

Un studio de înregistrări vrea să lanseze pe piață câteva DVD-uri muzicale. Managerul studioului știe că dacă se fixează prețul unui DVD la o valoare prea mică, nu se acoperă cheltuielile de producție, iar dacă prețul este prea mare nu se vor face vânzări. De aceea, el are nevoie de informații despre impactul muzicii înregistrate de studio asupra posibililor cumpărători. Studioul a organizat câteva concerte și a inițiat un concurs cu premii, în colaborare cu postul local de radio. În acest fel a fost testată dorința publicului pentru achiziționarea DVD-urilor înregistrate în studio. Desigur, informațiile obținute sunt doar orientative; pentru a avea date mai exacte, ar trebui chestionați toți locuitorii orașului, ceea ce este extrem de costisitor și complicat. Totuși, firma își poate direcționa activitatea utilizând doar datele obținute.

❹ *Imaginează și alte procedee de testare a preferințelor muzicale ale ascultătorilor.*



♦ Sondaje statistice

În domeniile socio-economic și politic este adeseori necesar să fie cunoscută opinia populației asupra unor probleme de interes general. De aceea, în scopul lansării unor programe socio-economice adaptate situației reale ca, de exemplu: programe de protecție socială, programe privind dezvoltarea zonelor defavorizate, a meseriilor și a specializărilor deficitare, se fac periodic sondaje statistice. În acest caz, deși procesul de culegere a datelor nu implică întreaga populație, datele obținute sunt suficiente pentru conturarea unor politici la nivelul întregii populații.

Acest procedeu, de anticipare a comportamentului general al unui sistem, atunci când știm un număr suficient de cazuri particulare, se numește *extrapolare*.

❺ *Folosește un dicționar explicativ pentru a determina toate sensurile cuvântului „extrapolare“.*

Sondajele se aplică de obicei unui eșantion format din aproximativ 1 000 de persoane. Pentru a putea extinde rezultatele la întreaga populație, specialiștii stabilesc un **eșantion național reprezentativ,** asupra căruia sunt aplicate instrumentele de analiză (chestionare, discuții organizate pe grupuri, interviuri). Stabilirea eșantionului reprezentativ se face în funcție de criterii precum: vârstă, sex, nivel de pregătire profesională, zonă geografică, mediu social, mediu familial, nivel de cultură etc.

Pe baza datelor obținute de la un eșantion național reprezentativ, se pot estima răspunsurile ce ar putea să fie date de întreaga populație.

Astfel, dacă dintr-un eșantion reprezentativ de 1000 de persoane, 374 au afirmat că preferă să își facă cumpărăturile la un supermarket, putem estima, prin extrapolare, că 37,4% din populația României se aprovizionează de la supermarketuri.

Exemplu

În cadrul unui sondaj de opinie a fost adresată persoanelor intervievate întrebarea:

„Unde intenționați să vă petreceți vacanța?“

Rezultatele sondajului, așa cum au fost prezentate într-o revistă de specialitate, apar în tabelul alăturat.

Datele reliefează diferențe semnificative între mediul urban și mediul rural. Alături de alte studii, și acesta contribuie la întărirea ideii că este nevoie de politici consecvente de dezvoltare în mediul rural.

Locul	Populație mediu urban %	Populație mediu rural %
La munte	24,3	10,5
La mare	0,6	0,6
La țară	69	1,2
În străinătate	2,9	1,2
Acasă	39,5	41,1
În stațiune	0,3	0,8
În altă parte	2,4	0,8
Nu voi avea vacanță	24,0	43,8

SURSA: MEMRB INTERNATIONAL RESEARCH & CONSULTANCY GROUP

Baza: 1 200 de persoane

6 *Exprimă numeric date redate procentual în sondajul alăturat, pentru o populație de 20 milioane:*

– Câte persoane din mediul rural intenționează să petreacă vacanța de iarnă: a) la munte; b) într-o stațiune de odihnă; c) acasă?

– Câte persoane intenționează să petreacă vacanța la mare sau la munte?

7 *Formulează alte două întrebări folosind datele din tabelul alăturat.*

Exerciții și probleme

Tabelul alăturat o parte a clasamentului final pe medalii de la Jocurile Olimpice de vară, Atena 2004.

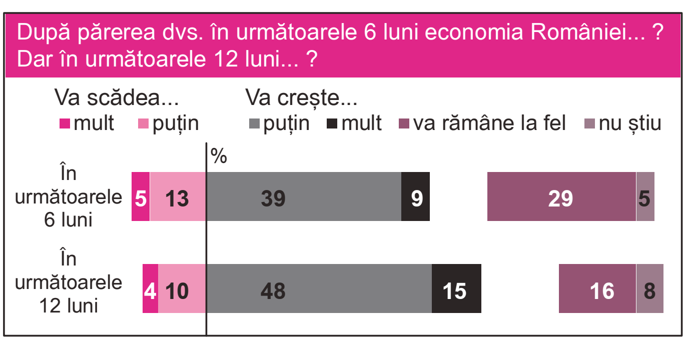
Loc clas.	Țara	Medalii		
		Aur	Argint	Bronz
10	Marea Britanie	9	9	12
11	Cuba	9	7	11
12	Ucraina	9	5	9
13	Ungaria	8	6	3
14	România	8	5	6
15	Grecia	6	6	4
16	Norvegia	5	0	1
17	Olanda	4	9	9
18	Brazilia	4	3	3
19	Suedia	4	1	2
20	Spania	3	11	5

Sursa: www.onlinegallery.ro/news_olimpiada_atena.html

1. Cu câte medalii a obținut mai multe România decât:
   a) Ungaria; b) Grecia; c) Suedia?
2. De câte ori este mai mare numărul total de medalii obținute de România față de cel obținut de:
   a) Brazilia; b) Norvegia; c) Grecia?
3. Compară numărul de medalii de aur și numărul total de medalii obținute de România la Olimpiada de la Atena cu numărul celor obținute de celelalte țări de pe listă, folosind o raportare procentuală. Trece datele obținute într-un tabel.
4. Tabelul alăturat indică numărul de turiști străini în câteva dintre cele mai vizitate țări din lume în anii 2004 și 2005.
   a) Cum variază numărul turiștilor în cele 5 țări în 2004 față de 2005: Este mai mare; este mai mic? Cu cât? De câte ori?
   b) Ce procent din turismul practicat în cele 5 țări în 2004 reprezintă turismul practicat în Franța? Dar în China?
   c) Aceeași întrebare de la b), pentru anul 2005.

	Franța	Spania	SUA	Italia	China
2004	75,6	47,9	50,9	41,2	31,2
2005	76,5	49,5	44,5	39,1	33,2

5. În cadrul unui sondaj de opinie, realizat la cererea Agenției pentru Strategii Guvernamentale, pe un eșantion de 512 manageri de firme, au fost adresate întrebările reproduse în imaginea de mai jos.



a) Observă modul de înregistrare a răspunsurilor și transpune datele procentuale într-un tabel.
b) Completează într-un alt tabel numărul (aproximativ) de respondenți din fiecare categorie.

Analizăm şi generalizăm!

♦ Termeni specifici analizei statistice a datelor

În viața cotidiană operăm cu foarte multe categorii de informații.

Unele informații sunt certe: ele sunt catalogate și pot fi accesate în diverse moduri. Astfel de informații sunt, de exemplu: codul poștal al străzilor, numerele abonaților unui serviciu telefonic, orele de plecare și de sosire a trenurilor, orarul magazinelor etc.

Alte informații sunt estimative; ele se obțin de exemplu prin extinderea rezultatelor unor sondaje de opinie și, de aceea, au o doză de nesiguranță și de hazard. Informațiile de acest tip se pot referi, de exemplu, la: preferințe față de o anume activitate, nivelul veniturilor, gradul de pregătire profesională, dorința de a achiziționa anumite bunuri etc.

Astfel de date, culese în urma unor sondaje de opinie, sunt *date statistice*.

În studiile statistice următorii termeni specifici au o importanță deosebită:

– *populația statistică*: este mulțimea de indivizi (persoane) luată în considerare pentru efectuarea analizelor statistice;

– *eșantionul*: este o submulțime a populației statistice căreia i se aplică instrumentul de analiză (chestionar, interviu, dezbatere etc.);

– *eșantionul reprezentativ*: un eșantion selectat după o listă de criterii care permit extrapolarea rezultatelor;

– *caracteristica (variabila) statistică*: este un criteriu în funcție de care se catalogează numeric anumite informații.

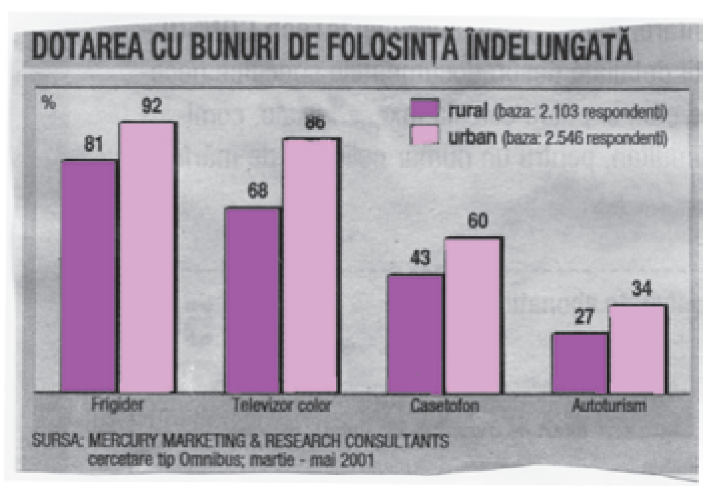
Exemplu: *Studiul statistic referitor la dotarea cu bunuri de folosință îndelungată efectuat în 2001*

– Populația statistică este populația României;

– Eșantionul este format din 4 649 de persoane (dintre care 2 103 din mediul rural și 2 546 din mediul urban).

– Variabilele statistice se referă la deținerea de frigidere, televizoare color, casetofoane, respectiv autoturisme.

❶ *Observă datele redate în imaginea alăturată. Menționează procentul celor care:*
a) dețin televizoare color în mediul rural;
b) dețin autoturisme în mediul urban.



❷ *Știind că au răspuns 4 649 de persoane, care este numărul de respondenți care:*
a) dețin casetofoane;
b) dețin autoturisme?

♦ Cum se obțin informații referitoare la o populație statistică?

Un studiu statistic nu se poate desfășura la întâmplare. El necesită o activitate de pregătire, se concretizează prin obținerea de date și prelucrarea lor și se finalizează prin interpretarea rezultatelor. De aceea, în desfășurarea unui studiu statistic trebuie parcurse câteva etape. Exemplificăm aceste etape pentru studiul realizat în România, în decembrie 2001, de către o companie specializată, cu privire la locul unde preferă adolescenții să urmărească filmele.

1. *Elaborarea instrumentelor de analiză:* – se identifică obiectivele cercetării; – se stabilește ce tip de instrument va fi aplicat; – se formulează, într-un limbaj accesibil și clar, întrebările ce vor fi adresate și se catalogează categoriile de răspunsuri posibile.	– Cum se poate optimiza distribuția de filme? – Chestionar – Unde preferați să urmăriți un film? Răspunsuri posibile: *La televizor / La cinema / Pe video / Pe CD / Rareori mă uit la filme.*
2. *Culegerea datelor:* – se identifică un eșantion reprezentativ, căruia i se aplică instrumentul elaborat.	– Studiul a fost efectuat pe un eșantion de 940 de adolescenți, fete și băieți.
3. *Prelucrarea statistică a datelor:* – se centralizează în tabele răspunsurile primite; – pentru fiecare întrebare, se determină frecvența cu care se repetă un anumit răspuns.	– De exemplu: Numărul celor care preferă să vadă filme la televizor este: Fete: 305; Băieți: 295 **UNDE PREFERĂ ADOLESCENȚII SĂ URMĂREASCĂ FILMELE** **Suport – Fete – Băieți** Televizor – 61% – 59% Cinema – 24% – 24% Video – 8% – 8% CD – 3% – 7% Rareori mă uit la filme – 4% – 2% SURSA: LEO BURNETT&TARGET
4. *Analiza și interpretarea rezultatelor:* – se reprezintă grafic datele obținute, într-o formă cât mai sugestivă; – se generalizează la întreaga populație rezultatele obținute; – se formulează concluzii.	– Dintr-un total estimat de 1 500 000 de adolescenți, aproximativ 457 500 de fete și 442 500 de băieți preferă să vadă filmele la televizor.

3 *Corelează datele studiului alăturat pentru a determina câte fete, respectiv câți băieți au fost cuprinși în eșantionul ales.*

4 *Să presupunem că ești director de programe de televiziune. Ce decizii ai lua cunoscând rezultatele studiului, pentru a mări audiența?*

♦ Cum se clasifică variabilele statistice?

Să comparăm!

În mod regulat cotidianele naționale comandă instituțiilor specializate sondaje de audiență pentru a măsura cota lor de piață. În cadrul unui astfel de studiu statistic au fost adresate câteva întrebări la care se poate răspunde prin marcarea unui semn distinctiv în spațiul corespunzător răspunsului ales. Trei dintre aceste întrebări au fost:

1) Pe care dintre cotidianele următoare le-ați menționa pe lista primelor trei preferințe:

Adevărul, Cotidianul, Evenimentul Zilei, Jurnalul Național, Libertatea, România Liberă, Ziua?

2) Ce studii aveți?

elementare	medii	superioare

3) Ce vârstă aveți?

sub 15 ani	între 15 și 25 ani	între 25 și 35 ani	între 35 și 45 ani	între 45 și 55 ani	peste 55 ani

Cele trei întrebări sunt diferite atât prin conținutul lor, cât și prin natura răspunsurilor.
Astfel, prima întrebare vizează o opțiune subiectivă, cea de-a doua presupune încadrarea într-o categorie (din mai multe posibile), pe când cea de-a treia presupune încadrarea respondentului într-un interval de valori.

În general

Variabilele statistice au natură *cantitativă* sau *calitativă*, după cum pot fi sau nu exprimate printr-un număr.
Variabilele cantitative sunt *discrete* (adică pot lua doar valori izolate) sau *continue* (adică pot lua toate valorile dintr-un interval).

Exemplu

Notele de la o teză, numărul de frați și/sau surori ale unei persoane dintr-o populație statistică, numărul de spectatori la operă, sunt *variabile cantitative discrete*.
Înălțimea, greutatea, lungimea părului persoanelor din eșantion sunt *variabile cantitative continue*.
Luna de naștere, grupa sanguină, culoarea ochilor, intențiile de vot ale unei persoane dintr-o populație statistică sunt *variabile calitative*.
Variabilele calitative pot fi transformate în variabile cantitative prin atribuirea unui cod numeric. De exemplu, locul nașterii (care are natură calitativă) poate fi indicat prin codul poștal al localității respective (care are natură cantitativă).
În anumite situații, valorile luate de o variabilă discretă pot fi grupate în clase. De exemplu, aceasta se face în cazul tranșelor de vârstă.

5 Formulează trei întrebări, analoage celor de mai sus, schimbând tematica acestora.

6 Informează-te și răspunde! Ce semnificație are codul numeric personal al unui cetățean român? De ce crezi că a fost nevoie de introducerea acestui cod?

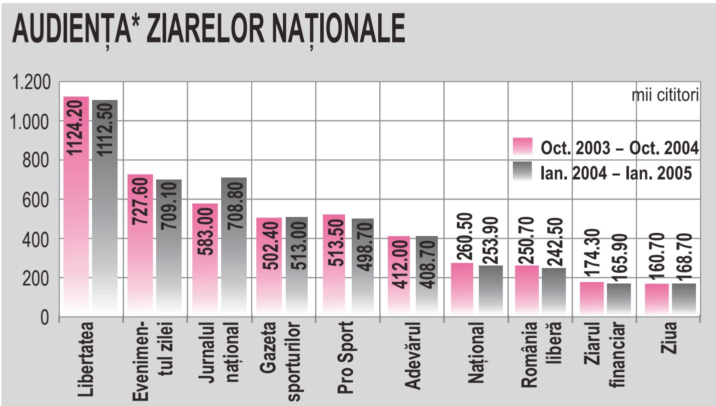
♦ Cum se pot organiza reprezentările grafice?

Să analizăm!

Reprezentările datelor statistice transmit într-o formă accesibilă și sintetică rezultatele unui studiu statistic. O reprezentare grafică adecvată ne permite să interpretăm rapid situația prezentată.
Există diverse tipuri de reprezentări grafice; alegerea uneia dintre ele depinde de natura datelor din situația concretă pe care o avem de reprezentat.

Exemplul 1: Reprezentarea prin diagrame cu bare

Rezultatele a două studii privind audiența unor ziare sunt prezentate în imaginea de mai jos.



Sursă: Capital, 16/2005/pag. 20

*** Populația statistică a acestui studiu vizează persoane cu vârsta între 14 și 64 de ani, ce locuiesc în orașe cu mai mult de 50000 de locuitori.**

Rezultatele sondajului sunt prezentate sub forma unui grafic cu bare. Această reprezentare permite analiza informațiilor studiului statistic, deoarece înălțimea benzilor, care indică frecvența, este proporțională cu numărul de cititori.

În general

Numărul de indivizi asociat fiecărei valori a variabilei se numește *efectiv*. Suma tuturor efectivelor este *efectivul total*.

Prin împărțirea efectivului unei variabile (caracteristici) la efectivul total, se obține *frecvența*. În cele mai multe cazuri, frecvența este exprimată procentual.

Să aplicăm!

Pentru studiul prezentat în diagrama de mai sus:

• efectivul total pentru perioada octombrie 2003 – octombrie 2004 este de 4708900 cititori;

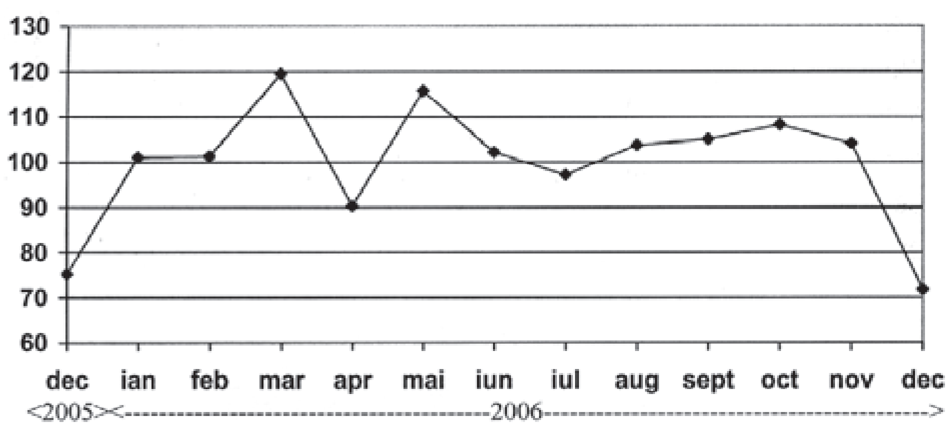
• efectivul variabilei „cititori ai Gazetei sporturilor“ în aceeași perioadă (octombrie 2003 – octombrie 2004), este de 502400 cititori;

• frecvența variabilei „cititori ai Prosport“ este de 10,90%.

Exemplul 2: Reprezentarea evoluției în timp a unor date

De obicei, datele care evoluează în timp se reprezintă într-un sistem de axe în același fel în care se reprezintă grafic funcțiile numerice.

De exemplu, dinamica producției industriale lunare în județul Bistrița-Năsăud, se reprezintă grafic astfel:



Audiența reprezintă numărul mediu zilnic de persoane care au citit un articol din ziar în perioada menționată și se măsoară pe un eșantion reprezentativ pentru populația în vârstă de peste 6 ani.

7 *Calculează efectivul total, efectivul variabilei „cititori ai Gazetei sporturilor” și frecvența variabilei „cititori ai Prosport” pentru perioada ianuarie 2004 – ianuarie 2005.*

Frecvența se exprimă prin valori subunitare, iar suma tuturor frecvențelor este 1 (sau 100%).

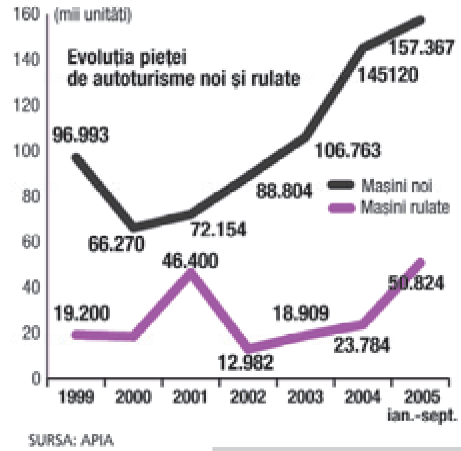
În reprezentarea grafică a variației în timp a unei mărimi, ne interesează numai regiunea din plan în care are relevanță informația analizată.

De aceea, o astfel de reprezentare grafică este raportată unui reper a cărei origine nu are neapărat coordonatele (0;0).

8 *Observă graficul și precizează cea mai lungă perioadă de timp pentru care producția industrială este crescătoare.*

Evoluția pieței de autoturisme noi, respectiv rulate, se poate reprezenta grafic așa cum indică imaginea de mai jos.

9 *Observă graficele privind evoluția pieței de autoturisme.*
a) Reprezintă graficele separat, fiecare într-un sistem de coordonate.
b) De ce crezi că ambele grafice au fost reprezentate în același sistem de axe?



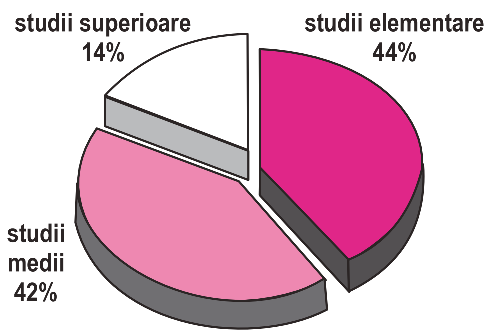
Sursă: Capital /2005/ România în 2006, pag. 83

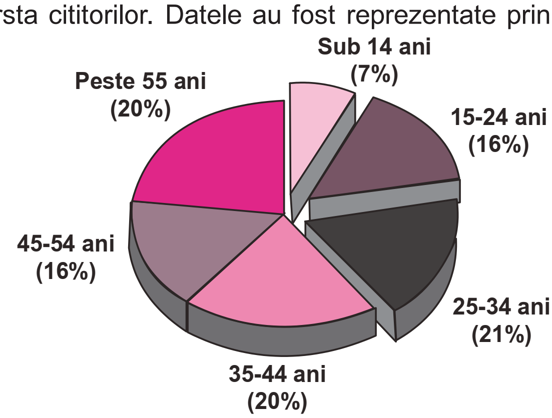
În general

Reprezentările într-un sistem de axe evidențiază cel mai bine variația în timp a unor date numerice.

Exemplul 3: Reprezentarea prin diagrame circulare

Pentru unul dintre cotidianele centrale au fost obținute date privitoare la nivelul de studii al cititorilor săi, respectiv vârsta cititorilor. Datele au fost reprezentate prin diagramele circulare de mai jos.





Amplitudinea unei clase este lungimea intervalului corespunzător clasei respective!

Informațiile din a doua diagramă circulară se pot reprezenta sub forma unui tabel de frecvențe, în care efectivul este repartizat în clase de vârstă cu amplitudinea de 10 ani.

Vârsta cititorilor	sub 15 ani	între 15-25 ani	între 25-35 ani	între 35-45 ani	între 45-55 ani	peste 55 ani
frecvenţe relative	7%	16%	21%	20%	16%	20%
frecvenţe cumulate crescător	7%	23%	44%	64%	80%	100%

10 *Exprimă procentual numărul cititorilor ziarului care au vârsta peste 35 de ani.*

Prin calculul frecvențelor cumulate crescător putem evidenția, de exemplu, că 64% dintre cititori au vârsta până în 45 de ani și 23% au vârsta până în 25 de ani.

Putem estima procentul de cititori care au *peste* o anumită vârstă, calculând frecvențele cumulate descrescător.

În general

Pentru a calcula *frecvența cumulată crescător* se însumează frecvențele (procentuale sau numerice) ale efectivelor tuturor claselor anterioare. Frecvența cumulată crescător este utilă pentru a estima procentual datele mai mici decât o anumită valoare.

Datele obținute prin măsurarea unei variabile continue pot lua orice valori într-un interval considerat. Pentru a simplifica înregistrarea datelor, se împarte intervalul considerat în subintervale, numite *clase statistice*. În acest caz, după culegerea datelor, o informație particulară este selectată și înregistrată în clasa corespunzătoare.

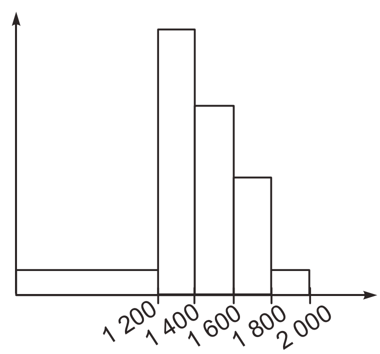
Exemplul 4: Reprezentarea valorilor unor variabile continue

Primăria unui oraș a făcut un studiu privind modernizarea traficului rutier. Pentru aceasta, serviciul specializat al primăriei a făcut o statistică a numărului de autoturisme, grupate după capacitatea cilindrică a acestora.

Clasele de repartiție după capacitatea cilindrică sunt: până la 1 200 cm^3, între 1 201 și 1 400 cm^3, între 1 401-1 600 cm^3, între 1 601-1 800 cm^3, între 1 801 și 2 000 cm^3. Aceste clase au, cu excepția primeia, amplitudini egale cu 200 cm^3.

În acest exemplu, variabila analizată (capacitatea cilindrică) este variabilă continuă. Pentru reprezentarea grafică a datelor analizate se poate alege o histogramă.

Capacitate cilindrică (cm^3)	**Număr de autovehicule**
până la 1200	12 410
1201 - 1400	65 140
1401 – 1600	41 217
1601 – 1800	18 490
1801 - 2000	3 148



În cazul în care clasele de repartiție au amplitudini egale, înălțimile dreptunghiurilor din histogramă sunt proporționale cu efectivele.

Reprezentarea grafică din dreapta este o histogramă.

Pe axa orizontală sunt reprezentate clasele de repartiție după capacitatea cilindrică. Dreptunghiurile din desen transmit sintetic ideea că autovehiculele dintr-o clasă se distribuie omogen în clasa respectivă.

În general

Pentru o variabilă cantitativă continuă se utilizează ca reprezentare grafică *histograma*. Într-o histogramă, ariile dreptunghiurilor prin care se reprezintă datele sunt proporționale cu frecvența.

Să aplicăm!

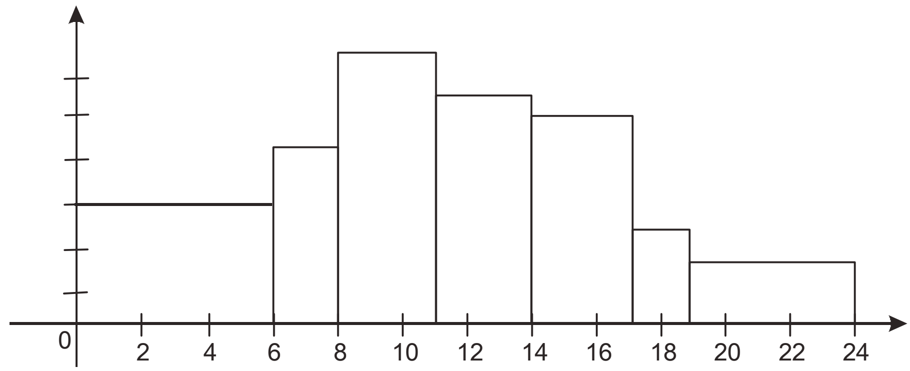
La un punct de trecere a frontierei s-a constatat următoarea frecvență de intrare în vamă a autovehiculelor în ziua de 11.04.06:

interval de timp	[0,6)	[6,8)	[8,11)	[11,14)	[14,17)	[17,19)	[19,24)
nr. de vehicule	18	8	19	16	15	5	9

11 Clasa [11,14) are amplitudinea 3. Au toate clasele aceeași amplitudine?

Histograma seriei statistice este reprezentată în figura următoare:

Pe ordonată nu se consideră nici o unitate de măsură. Amplitudinea claselor este diferită.



12 Verifică dacă datele au fost corect reprezentate prin histogramă. Care este frecvența relativă a fiecărei variabile?

Aria fiecărui dreptunghi este proporțională cu efectivul clasei (numărul de vehicule din acel interval de timp).

În general

Variabilele statistice calitative și variabilele statistice cantitative discrete se pot reprezenta prin tabele, prin grafice cu bare (batoane, coloane), prin diagrame circulare sau prin dreptunghiuri comparative.

Variabilele statistice cantitative continue se pot reprezenta prin histograme.

Exerciții și probleme

1. Alina a folosit factura detaliată de telefon și a grupat convorbirile efectuate de ea în clase statistice, obținând tabelul următor:

Intervalul de durată (min.)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12]
Număr de convorbiri	12	15	22	9	14	6

a) Reprezintă aceste date printr-o histogramă.
b) Regrupăm datele în clasele statistice [0; 4), [4; 8) și [8; 12]. Trasează histograma corespunzătoare noii situații pe aceeași figură, folosind un creion colorat.
c) Compară cele două histograme. Formulează asemănări și deosebiri.

2. a) Completează tabelul următor, referitor la notele obținute la un concurs.

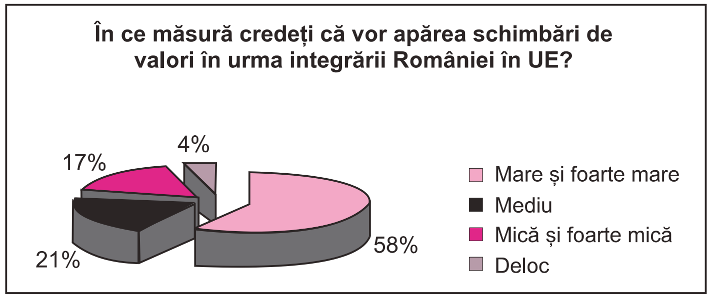
Nota	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Total**
Efectivul	30	50			40	200
Frecvența %			28%			

b) Reprezintă printr-o diagramă circulară datele din tabelul anterior.

3. În tabelul alăturat sunt prezentate dobânzile de referință pentru împrumuturi în lei, practicate de băncile comerciale între septembrie 2005 și aprilie 2006.
a) Asociază acestui tabel o reprezentare grafică cât mai sugestivă.
b) Domnul Popescu a împrumutat de la o bancă, în august 2005, 43000 RON. El achită lunar câte 1000 RON, la care se adaugă dobânda la suma rămasă. Înregistrează într-un tabel sumele totale plătite de domnul Popescu în fiecare lună, din septembrie până în aprilie. Exprimă în RON suma totală plătită din împrumut până la sfârșitul lunii aprilie 2006.

Luna	**Dobânda**
aprilie 2006	8,50
martie 2006	8,47
februarie 2006	7,50
ianuarie 2006	7,50
decembrie 2005	7,50
noiembrie 2005	7,50
octombrie 2005	7,72
septembrie 2005	8,25

4. Pentru a studia impactul integrării României în UE, sociologii au aplicat un sondaj privind percepția populației asupra posibilelor schimbări de mentalitate. În figura alăturată apar rezultatele la întrebarea: „*În ce măsură credeți că vor apărea schimbări de valori?*“



a) Estimează câți dintre cei 20 000 000 de locuitori ai României cred că schimbările de valori vor fi mari și foarte mari.
b) Realizează un sondaj printre colegii tăi și înregistrează răspunsurile lor la această întrebare. Compară cu estimările făcute de specialiști.

5. Institutul Național de Statistică a dat publicității datele privind mișcarea naturală a populației în perioada 2000 - 2003 (în mii de persoane).
a) Reprezintă printr-o diagramă cu bare datele privitoare la căsătorii.
b) Exprimă procentual decesele la o vârstă de sub 1 an, raportat la numărul total al deceselor. Care a fost anul cel mai rău, din această perspectivă?
c) Cum se calculează sporul natural al populației?
d) Descrie evoluția populației în anii 2001 - 2003, considerând ca bază de referință populația României în 2000. Reprezintă adecvat această evoluție.

	2000	**2001**	**2002**	**2003**
Născuţi-vii	234,5	220,4	210,5	212,5
Decese	255,8	259,6	269,7	266,6
Decese la o vârstă sub 1 an	4,4	4,1	3,6	3,5
Sporul natural	-21,3	-39,2	-59,2	-54,1
Căsătorii	135,8	129,9	129,0	134,0
Divorţuri	30,7	31,1	31,8	33,1

6. Un club sportiv a înregistrat înălțimile copiilor cuprinși în diverse activități ale clubului în tabelul următor:

Înălțimea	între 85 și și 95 cm	între 95 și 105 cm	între 105 și 115 cm	între 115 și 125 cm	între 125 și 135 cm	între 135 și 145 cm
Efectivul	34	27	149	213	53	18

a) Reprezintă cu ajutorul unei histograme aceste date.
b) Distribuie copiii în clasele statistice: [85; 105); [105; 135); [135; 145] și realizează o nouă histogramă.
c) Identifică avantaje și dezavantaje ale utilizării unor clase statistice de lungimi diferite în analiza rezultatelor unui studiu clasic.
d) Precizează posibile clase statistice pentru un studiu privind rezultatele de la Bacalaureat.

7. Tabelul următor redă structura populației pe grupe de vârste la recensământul din 1992 și cel din 2000.
a) Reprezintă prin histograme structura populației pe grupe de vârste conform recensământului din 1992, respectiv 2000.
b) Regrupează datele statistice în tranșele de vârste 0-60 ani și peste 60 ani.
c) Calculează frecvența cumulată crescător pentru tranșele de vârstă din cei doi ani analizați.

Perioadă	**Număr locuitori (mii)**				**În % faţă de total**		
	Total	**0 – 14 ani**	**15 – 59 ani**	**60 ani şi peste**	**0 – 14 ani**	**15 – 59 ani**	**60 ani şi peste**
1992	22 810,0	5 182,0	13 886,0	3 742,0	22,7	60,8	16,5
2000	22 435,2	4 098,1	14 117,1	4 220,0	18,2	62,9	18,9

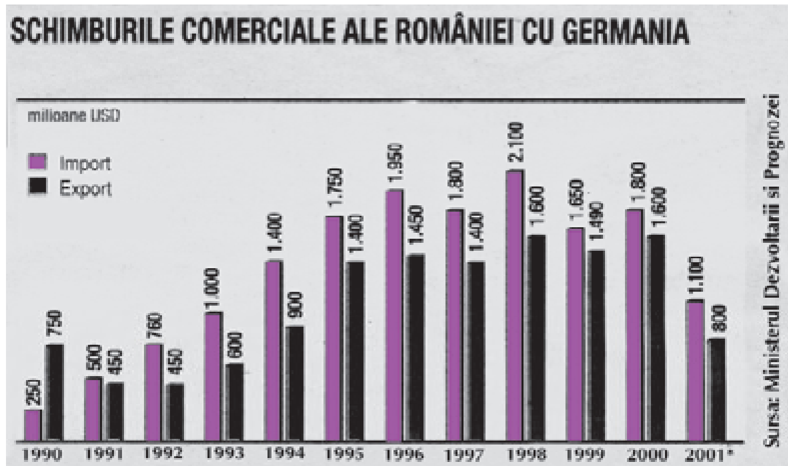
Aplicăm şi dezvoltăm!

♦ Legătura dintre reprezentarea grafică și tipul de interpretare

Pentru realizarea unui referat, Alexandra a trebuit să se informeze asupra evoluției în ultimii ani a schimburilor comerciale dintre România și Germania. Ea a găsit într-o revistă de specialitate reprezentarea grafică de mai jos:

❶ *În ce an a atins valoarea maximă volumul exporturilor produselor românești în Germania? Dar importurile?*

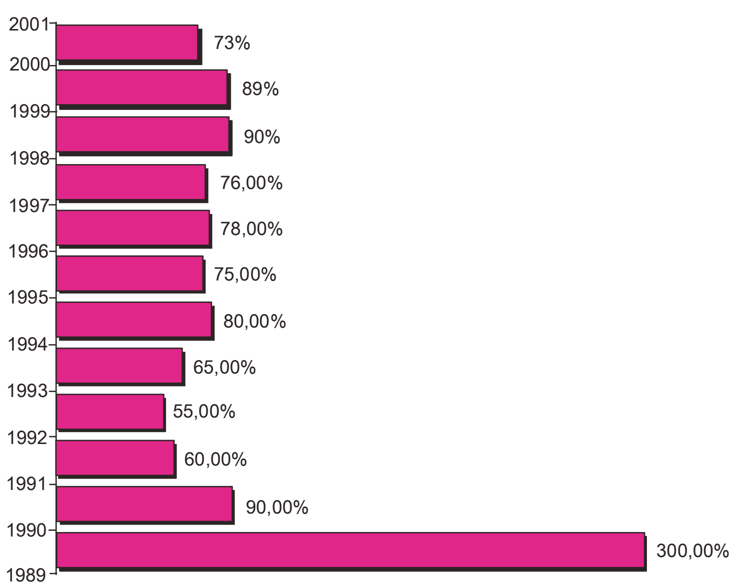
❷ *În ce an volumul importurilor a avut valoare minimă? Dar volumul exporturilor?*



Pentru a interpreta datele obținute, Alexandra a utilizat și alte moduri de reprezentare grafică a acestora.

♦ Balanța schimburilor comerciale

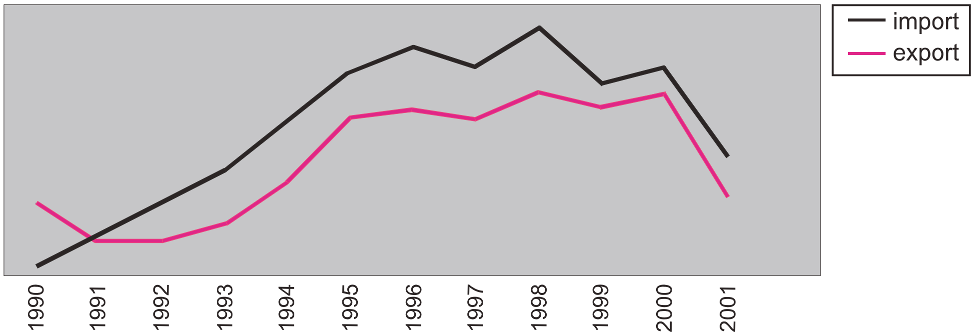
Alexandra a exprimat prin procente raportul dintre export și import pentru fiecare an în parte și a reprezentat această evoluție printr-un grafic cu benzi orizontale.



Ea a concluzionat că anii cei mai buni pentru comerțul României cu Germania, în perioada analizată, au fost, în afară de 1989 și 1990, anii 1998 și 1999.

Alexandra a reprezentat prin puncte volumul exporturilor și importurilor și a trasat graficele evoluției acestora.

Schimburile comerciale ale României cu Germania



♦ Relația import-export

Un indicativ al schimburilor comerciale din perioada analizată este raportul dintre volumul total al importurilor și cel al exporturilor.

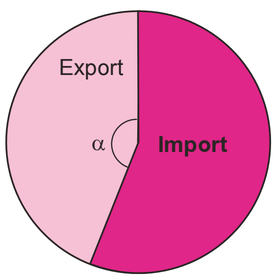
Folosind datele inițiale, Alexandra a calculat:

– valoarea exporturilor între 1990 și 2001: 12 890 milioane $

– valoarea importurilor între 1990 și 2001: 16 060 milioane $

– valoarea totală a schimburilor comerciale: 28 950 milioane $.

Reprezentarea acestor date printr-o diagramă circulară este:



❸ *Verifică toate calculele făcute de Alexandra.*

⚠ *Determinarea unghiurilor la centru ale sectoarelor din diagrama circulară se face cu regula de trei simplă. Pentru exemplul dat:*

$$\alpha^0 = \frac{12890}{28950} \cdot 360°.$$

Fiecare tip de reprezentare a scos în evidență anumite aspecte ale variabilei studiate. De aceea, în cadrul unui studiu statistic, este foarte important să alegem acel tip de reprezentare care evidențiază cel mai bine proprietățile semnificative.

❹ *Compară cele patru tipuri de reprezentări. Ce avantaje are fiecare? Dar dezavantaje?*

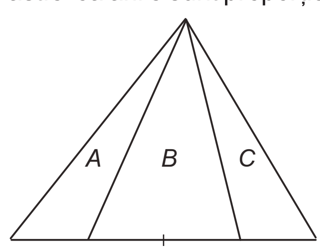
Exerciții și probleme

1. Datele unui studiu statistic privind oaspeții unui hotel din Mamaia sunt cuprinse în tabelul următor.

Turişti (ţara de proveninţă)	Franţa	Germania	Italia	Austria
Efectiv	100	225	400	484

Valentin a reprezentat variabila „turiști din Franța" sub forma unui pătrat cu latura de 2 cm. Continuă reprezentarea, desenând pentru fiecare categorie pătrate cu aria proporțională cu efectivul.

2. În figură sunt reprezentate datele unui studiu statistic, astfel că ariile sunt proporționale cu efectivele.



Categoria A are efectivul 20.
Ce efective au celelalte categorii?

3. Tabelul de mai jos indică profitul și numărul de angajați pentru patru companii producătoare de instrumente muzicale, în anii 2003 – 2005.
a) Determină eficiența economică a fiecărei companii, calculând raportul dintre profit și numărul de angajați. Ce alte criterii
b) Stabilește un clasament privind eficiența economică a companiilor analizate, în anii 2003 și 2004.
c) Reprezintă grafic eficiența economică a celor patru companii, folosind un singur sistem de axe ortogonale.

	2003	2004	2005*
Genial Violins			
Profit (USD)	51.200	54.700	16.500
Nr. angajați	162	151	135
Gama Prodex			
Profit (USD)	340.000	65.500	17.000
Nr. angajați	162	161	114
Gems Impex			
Profit (USD)	197.000	25.400	38.200
Nr. angajați	128	142	149
Gliga Vasile Instrumente Muzicale			
Profit (USD)	285.400	123.400	2.880
Nr. angajați	76	50	39

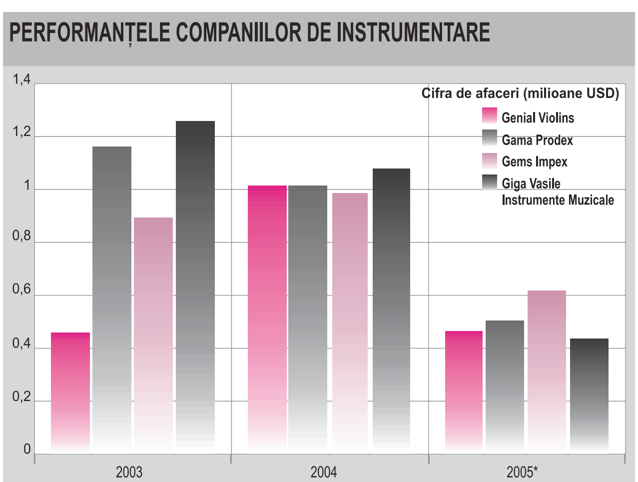
* ianuarie-iunie

Evoluția cursului valutar și creșterea cheltuielilor au afectat performanțele companiei în ultimul an. Prețul energiei electrice, al combustibilor în general, i s-au adăugat cheltuielile salariale, dat fiind faptul că mare parte a investiției în producerea de intrumente ține de manoperă.

SURSA: COMPANIA

Sursă: Capital, 35/2005/pag. 18

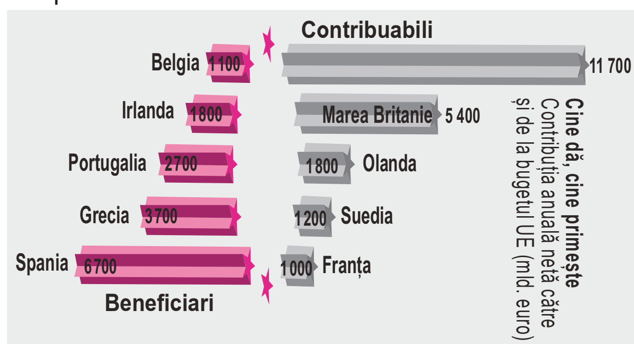
4. Imaginea de mai jos prezintă cifrele de afaceri ale unor companii care produc instrumente muzicale, în perioada 2003 – 2005.
a) Estimează cifrele de afaceri ale acestor companii.
b) Reprezintă pe câte o diagramă circulară repartiția cifrei de afaceri pentru cele patru firme analizate, în anul 2003, respectiv în 2004.
c) Analizează comparativ evoluția cifrei de afaceri în 2003 – 2004 pentru cele patru companii producătoare de instrumente. Descrie această evoluție într-un scurt eseu, cu cel mult 300 de cuvinte.



Sursă: Capital, 35/2005/pag. 18

5. Datele din problemele anterioare se referă la aceleași patru companii, pentru aceeași perioadă de timp.
a) În problema 3 de mai sus, am determinat eficiența companiilor, folosind raportul dintre profit și numărul de angajați. Putem evalua performanțele acestor companii, folosind și alte criterii? Propune un exemplu.
b) Raportează, pentru fiecare companie, cifra de afaceri la profit și reprezintă grafic rezultatele obținute.

6. a) Compară sumele care reprezintă contribuția anuală a statelor UE către bugetul UE cu sumele de care beneficiază unele state. Exprimă procentual diferența dintre cele două sume.
b) Exprimă prin diagrame circulare situația statistică prezentată.



7. Alcătuiește un referat privind datele despre consumul de înghețată, prezentate în tabelele de mai jos.

OCAZII DE CONSUM	
Ocazia	**Ponderea (%)**
Excursii	10
Vara	74
Iarna	4
Gustări	13
Mic dejun	5
Prânz	12
Cină	6

CANTITĂȚI PREFERATE	
Cantitatea	**Ponderea (%)**
Mai puțin de 100 g (cornet, băț)	52
100-300 g (pahar sau cutie plastic)	13
301-500 g (caserole, torturi)	16
Mai mult de 500 g	7
Nu știu	12

SURSA: ALIANȚA PENTRU PROMOVAREA EDUCAȚIONALĂ A LAPTELUI

Am reuşit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...
- să identific metode de colectare a datelor
- să interpretez date organizate în tabele sau histograme
- să înregistrez date alegând tipul de reprezentare optim
- să transpun în limbaj matematic prin mijloace statistice, probleme practice
- să caracterizez situații reale prin interpretarea datelor?

Test de verificare

1. Indică o modalitate aplicabilă de a estima numărul muzeelor de artă din țară.

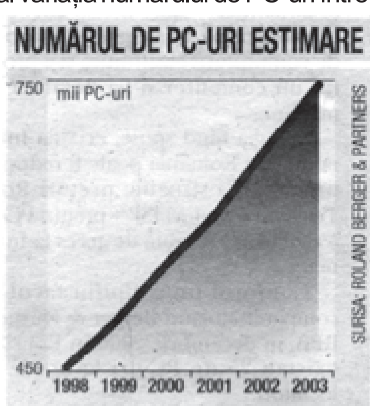
2. Tabelul de mai jos ilustrează prețurile și durata transportului de călători de la București către diferite destinații, în sistem feroviar și rutier.

Destinaţie	Transport feroviar		Transport rutier	
	Preţ bilet tren (RON)	Durata călătoriei	Preţ bilet (RON)	Durata călătoriei
Braşov	14,70	3h23′	10,00	3h
Caransebeş	24,80	7h33′	25,00	6h30′
Constanţa	17,00	2h46′	15,00	3h30′
Cluj-Napoca	24,80	8h14′	20,00	8h30′

Care mijloc de transport este mai convenabil? De ce?
Care este costul mediu al unei ore de călătorie cu trenul, respectiv cu autobuzul?

3. Prețul de producere al computerelor pe plan mondial a scăzut în 2006 cu 34%, față de anul anterior, comparativ cu o diminuare de numai 17% în 2000 față de 1999. Reprezintă cât mai sugestiv aceste scăderi de prețuri.

4. a) Exprimă procentual variația numărului de PC-uri între 1998 și 2003.
b) Aproximează numărul de PC-uri vândute în România în anul 1999.
c) Dă o estimare pentru numărul de computere care au fost vândute în România în 2004.



5. Tabelul de mai jos prezintă valorile medii ale dolarului american, respectiv euro, raportate la moneda națională a României. Pentru a proiecta strategia de export a firmei sale de mobilă, domnul Popescu trebuie să analizeze evoluția raportului dolar - euro, între 2000 și 2005. Întocmește pentru domnul Popescu un raport în acest sens!

Anul	USD	EURO
2000	2,17	1,99
2001	2,90	2,60
2002	3,30	3,12
2003	3,32	3,75
2004	3,26	4,05
2005	2,91	3,62

Lectură

Pe teritoriul țării noastre, lucrarea lui Dimitrie Cantemir „Descriptio Moldaviae” (1716) poate fi considerată ca o primă lucrare de statistică. Ea a fost scrisă la cererea Academiei din Berlin și conține toate cunoștințele acumulate în domeniu la acea dată.

După D. Cantemir, printre cei care au avut ca preocupare principală statistica, s-a remarcat N. Șuțu cu lucrarea de referință „Notații statistice asupra Moldovei” (1849).

Statistica tratată ca un capitol al matematicii se studiază începând din1835 la Academia Mihăileană și începând din 1850 în gimnaziile din Moldova.

Un moment important în dezvoltarea statisticii la noi în țară a fost înființarea la 12 iulie 1859, din ordinul domnitorului Al. I. Cuza, a Oficiului Central de Statistică Administrativă sub conducerea lui Dionisie Pop Marțian. Studiile efectuate sub egida Oficiului au permis domnitorului Al. I. Cuza să fundamenteze multe din reformele sale.

În 1936 a fost înființat în România Institutul Central de Statistică, care își continuă activitatea și astăzi.

Unitatea de învățare 3

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități.

Calcul numeric

1. Identifică propozițiile adevărate.

a) $4 + 4 \cdot (-7) = -32$

b) $(6 + 5 + 4) \cdot 0 = 19$

c) $6{,}25 + 2{,}31 = 8{,}56$

d) $7{,}53 - 4{,}54 = 3{,}09$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{6} = \sqrt{11}$

f) $2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

g) $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

h) $\sqrt{9 + 16} = 7$

Calcul procentual

2. Care este noul preț al unui produs care:

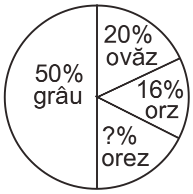
a) costă 25 RON și s-a ieftinit cu 10%?

b) costă 150 RON și s-a scumpit cu 3%?

c) costa 100 RON și s-a redus succesiv cu 5%, apoi cu 10%?

3. O suprafață agricolă de 500 ha a fost cultivată așa cum indică reprezentarea alăturată.

Care este aria suprafeței cultivate cu orez?



Calculul mediilor

Alege răspunsurile corecte!

4. Media aritmetică a numerelor 17, 22, 48 și 53 este:

a) 53; b) 35; c) 20.

5. Media ponderată a numerelor 8 și 36, cu ponderile 3, respectiv 2, este:

a) 19,2; b) 15; c) 12.

6. Media geometrică a numerelor 12 și 3 este:

a) 8; b) 6; c) $\frac{14}{3}$

Regula de trei simplă

7. a) La un drum de 200 km, o mașină consumă 12 l de benzină. Ce cantitate de benzină consumă la 350 km?

b) Un autobuz parcurge 70 km într-o zi. În câte ore parcurge 245 km, dacă merge cu aceeași viteză (medie)?

c) Un teren este arat în 7 ore folosind 2 tractoare. În cât timp poate fi arat un teren similar, dacă se folosesc 3 tractoare?

Reprezentări grafice

8. Reprezintă într-un sistem de axe:

a) punctele $A(2; 4)$, $B(2; -4)$, $C(-2; 4)$ și $D(2, -4)$

b) funcția $f : \{-1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$

c) funcția $f : \{-1; 0; 1; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 2$

d) funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

Interpretarea datelor statistice

Compararea datelor statistice

Ne amintim şi explorăm!

♦ **Utilitatea mediilor**

Compararea datelor unor studii statistice se poate face în diverse feluri. Uneori, pentru a reda sugestiv această comparare, este mai puțin importantă fiecare valoare în parte, în schimb are semnificație *media* valorilor.

Exemplul 1: Cursele de automobilism

La antrenamentele piloților de Formula 1 se înregistrează timpul de parcurgere al fiecărui tur. Fiecare dintre echipe este interesată să compare performanțele propriilor piloți cu cele ale adversarilor. Deoarece piloții parcurg un număr diferit de tururi, caracteristicile avute în vedere în momentul comparării sunt viteza maximă atinsă și *timpul mediu* de parcurgere al unui tur de pistă.

La cursele de automobilism se ating în mod frecvent viteze de peste 200 km/h.

❶ *Ce crezi că înseamnă afirmația: „Circuitul de la Monte Carlo este mai rapid decât cel de la Barcelona?“*

Exemplul 2: Recensământul populației

În urma recensământului populației desfășurat între 18 și 27 martie 2002, s-au obținut date despre toți locuitorii României; prelucrarea datelor a fost făcută de către specialiștii de la Institutul Național de Statistică și Studii Economice. Datele obținute folosesc la definirea *gospodăriei medii*, prin precizarea numărului de persoane, a condițiilor de locuit, a tipului de venituri, a vârstei, a numărului de copii și a nivelului de educație. Precizarea caracteristicilor gospodăriei medii folosește nu doar în compararea parametrilor economici și sociali ai diverselor zone ale țării sau în compararea României cu alte țări; aceste caracteristici medii reprezintă și o bază pentru identificarea unor eșantioane reprezentative la nivel național.

• În anumite situații, pentru a compara date statistice, este necesar să utilizăm efectiv valorile unor parametri.

Exemplul 3: Volumul brut de publicitate TV

Un studiu publicat în 2004 analizează publicitatea la televiziune, în 2003. Studiul precizează numărul de spoturi difuzate de posturile de televiziune românești și câștigurile realizate în acest mod.

Datele obținute prin monitorizarea posturilor de televiziune sunt prezentate în tabelul alăturat.

VOLUMUL BRUT DE PUBLICITATE TV - 2003*

Post TV	Nr. spoturi	Buget (mil. USD)
Prima TV	139.753	384,5
Pro TV	126.019	376,4
Antena 1	117.942	217,06
TV România 1	81.016	199,9
Acasă TV	73.063	89,8
B1 TV	47.886	76,5
MTV România	120.674	55,3
Realitatea TV	48.899	21,8
TVR 2	40.727	21,02
Național TV	7.138	8,7
Atomic TV	105.192	6,9

Sursă: Capital, 29 ian. 2004

❷ *Organizează datele:*
a) în ordinea descrescătoare a bugetelor de publicitate;
b) în ordinea descrescătoare a valorilor medii ale spoturilor difuzate.
Comentează și explică diferențele constatate între cele două tabele.

Pentru o analiză mai detaliată, este necesar să prelucrăm datele studiului considerat.

O primă analiză se poate face considerând *valorile medii* ale costurilor spoturilor publicitare difuzate. Obținem astfel următorul tabel comparativ:

❸ *Observă datele studiului prezentat. Cum comentezi datele statistice înregistrate de postul Atomic TV ?*

POSTUL TV	***Valoarea medie a unui spot (USD)***
Prima TV	2751
PRO TV	2989
Antena 1	1840
TV România 1	2467
Acasă TV	1229
B1 TV	1598
MTV România	458
Realitatea TV	449
TVR 2	516
Naţional TV	1219
Atomic TV	66

O a doua analiză a datelor studiului prezentat se poate realiza prin raportarea numărului de spoturi difuzate și a bugetelor obținute din publicitate ale fiecărui post TV, la valorile medii. Astfel, *în medie*:

- au fost difuzate 82 573,5 spoturi publicitare;
- s-au obținut 132,53 milioane USD.

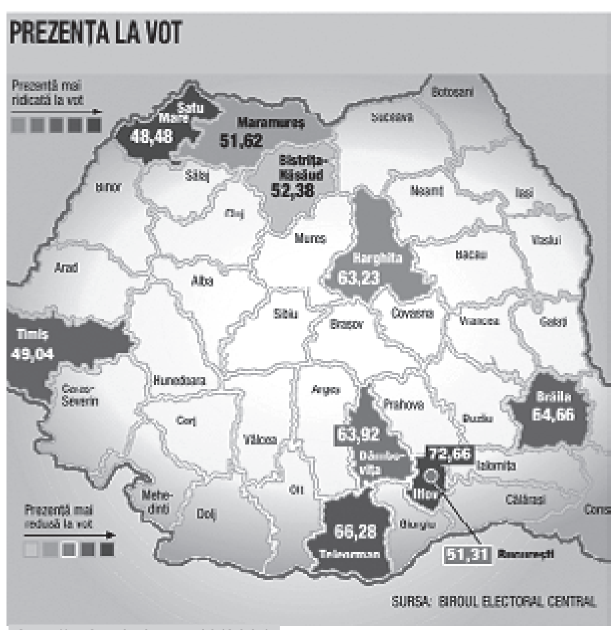
Valorile medii calculate anterior permit formularea câtorva concluzii.

Astfel, TVR 1 a difuzat un număr de spoturi publicitare apropiat de media celor 11 posturi TV, dar câștigurile înregistrate de TVR 1 din publicitate sunt cu mult peste medie. O explicație este oferită de valoarea medie a unui spot difuzat de TVR 1, care este a doua ca mărime; postul național de televiziune a practicat deci un tarif mai mare pentru publicitate (explicabil prin gradul de urmărire de către populație a acestui post).

Exemplul 4: *Prezența la vot*

În imaginea alăturată este indicată situația prezenței la vot în câteva județe, la alegerile generale din 2004. Vedem astfel că alegătorii din județul Ilfov au fost cei mai interesați de vot, prezența la urne fiind de 72,66%. Cel mai puțin interesați au fost alegătorii din Satu Mare, unde au participat la vot doar 48,48% dintre alegători. Pentru analiștii politici, prezintă însă interes *media* participării la vot, pentru întrega țară; aceasta a fost de 56,52%.

❹ *Alege modul de reprezentare cel mai adecvat pentru a evidenţia raportul dintre prezenţa la vot în fiecare judeţ marcat în imagine şi media participării la vot pe ţară. Desenează aceste diagrame.*



Sursă: Capital, nr. 49/2004

♦ Tipuri de medii

Să ne amintim!

• *Media aritmetică* a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$ se calculează cu formula:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

• *Media ponderată* a numerelor $x_1, x_2, ..., x_n$ cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$ se calculează cu formula:

$$m_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Exemplu

Media ponderată a numerelor 13,5; 2,4 și 7,2 cu ponderile 3; 2 și 5 este:

$$m_p = \frac{13{,}5 \cdot 3 + 2{,}4 \cdot 2 + 7{,}2 \cdot 5}{3 + 2 + 5} = 8{,}43.$$

Să demonstrăm!

Fie $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ numere reale.

Notăm cu *A* și cu *B* mediile aritmetice ale numerelor $x_1, ..., x_n$, respectiv $y_1, y_2, ... y_m$ și cu *M* media aritmetică a celor $m + n$ numere date. Atunci *M* este media ponderată a numerelor *A* și *B*, cu ponderile n, respectiv m.

Fie $m_p = \frac{A \cdot n + B \cdot m}{n + m}$ media ponderată a numerelor *A* și *B*, cu ponderile n, respectiv m.

Deoarece $n \cdot A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ și $m \cdot B = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$, deducem că

$$m_p = \frac{(x_1 + \ldots + x_n) + (y_1 + \ldots + y_m)}{m + n} = M.$$

• *Media geometrică* a două numere reale pozitive x_1 și x_2 se calculează cu formula:

$$m_g = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Observăm că $(m_g)^2 = x_1 \cdot x_2$.

Exemplu

Media geometrică a numerelor 6 și 24 este

$$m_g = \sqrt{6 \cdot 24} = 12.$$

$12^2 = 6 \cdot 24$.

În general

Media geometrică a numerelor reale pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ este numărul real pozitiv notat m_g pentru care $(m_g)^n = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$.

Media geometrică poate fi aproximată cu ajutorul logaritmilor zecimali.

Exemplu

Să aproximăm media geometrică a numerelor 15; 28 și 46.

Deoarece $(m_g)^3 = 15 \cdot 28 \cdot 46$, deducem că $\lg(m_g)^3 = \lg(15 \cdot 28 \cdot 46)$, deci $3\lg(m_g) = \lg 15 + \lg 28 + \lg 46$.

Folosind o tabelă de logaritmi zecimali, obținem

$$\lg(m_g) \simeq \frac{1{,}176 + 1{,}447 + 1{,}663}{3} = 1{,}429.$$

Utilizând din nou tabela de logaritmi, deducem că $m_g \simeq 26{,}8$.

⚠ *Putem calcula rapid media aritmetică a numerelor 55; 51; 58 și 52 folosind calculatorul de buzunar. Apăsăm tastele în succesiunea:*

MODE · SHIFT SAC 55 DATA 51 DATA 58 DATA 52 DATA SHIFT $\bar{x}$

Dacă este nevoie, putem afla numărul datelor înregistrate și suma acestora cu ajutorul tastelor:

SHIFT n , *respectiv* SHIFT $\sum x$.

⚠ *Putem calcula rapid media ponderată a numerelor 13,5; 2,4 și 7,2, cu ponderile 3; 2 și 5 apăsând tastele calculatorului de buzunar în ordinea:*

13,5 × 3 = M+ 2,4 × 2 = M+ 7,2 × 5 = M+ MR ÷ [(... 3 + 2 + 5 ...)] =

⚠ *Putem calcula media aritmetică a unor numere grupând convenabil numerele date și calculând mediile fiecărei grupe.*

⚠ *Putem calcula media geometrică a mai multor numere cu un calculator de buzunar care are funcția științifică $x^{1/n}$. Pentru a calcula media geometrică a numerelor 15; 28 și 46 apăsăm tastele în succesiunea:*

15 × 28 × 46 =

SHIFT $X^{1/n}$ 3 =

(3 este numărul de valori considerate)

❺ *Folosește calculatorul de buzunar pentru a calcula media geometrică a numerelor 12; 14; 20; 25 și 30.*

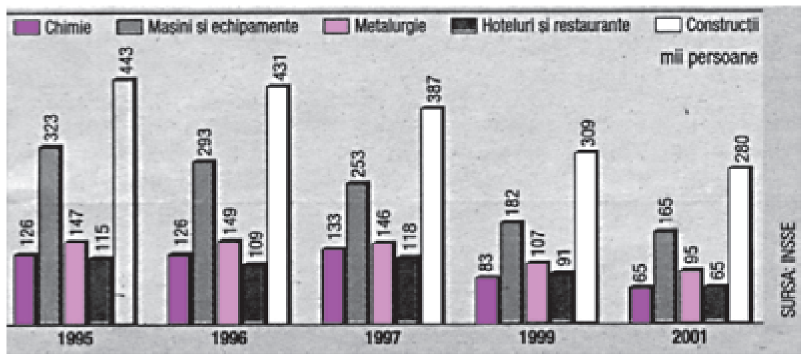
Exerciții și probleme

1. Două echipe de baschet au publicat următoarele tabele de valori medii:

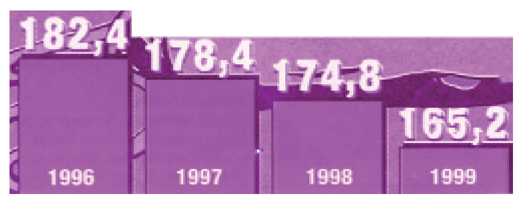
	Înălțime	Greutate	Puncte marcate pe meci	Aruncări ratate	Greșeli personale	Recuperări
L.A. Lakers	2,03	115	81,25	25,3	3,8	44,6
Utah	2,01	117,5	77,5	22,9	2,5	52,3

Observă datele referitoare la cele două echipe, apoi decide:
a) Care dintre cele două echipe are o apărare mai bună?
b) Pentru care dintre echipe apar mai multe situații de a arunca la coș?
c) Analizează datele fizice ale echipelor și corelează aceste date cu situația recuperărilor, apoi cu situația rezultatelor echipelor.

2. Diagrama alăturată prezintă evoluția numărului de salariați în diferite ramuri industriale, în perioada 1995-2001.
a) Ce procent reprezintă salariații din construcții, relativ la totalul angajaților din cele cinci ramuri, pentru anul 1996?
b) Reprezintă printr-o diagramă circulară situația anului 1996.
c) Calculează media numărului de salariați pentru fiecare dintre cele cinci ramuri industriale.



3. Un studiu statistic referitor la evoluția numărului de abonamente la telefonia fixă, efectuat în 2000, a constatat o scădere continuă a numărului de abonamente în perioada 1996-1999.
Rezultatele studiului, prin raportare a numărului de abonamente la mia de locuitori, sunt redate mai jos sub forma unui grafic cu bare.
a) Care este, în fiecare an, procentul de abonați la telefonia fixă, dintr-un total estimat de 15 milioane de adulți?
b) Formulează posibile explicații pentru procesul de scădere a numărului de abonamente la telefonia fixă.
c) Determină media numărului de abonamente din perioada analizată.



4. Folosește un calculator de buzunar sau o tablă de logaritmi pentru a aproxima:
a) media geometrică a numerelor 16, 18, 20 și 25;
b) media aritmetică a numerelor 12, 27, 59;
c) media geometrică a numerelor 1, 2, 3, ..., 10.

5. Tabelul alăturat redă numărul de pasageri care s-au deplasat în perioada 1996-2000, cu diferite mijloace de transport.
a) Calculează numărul mediu de pasageri în perioada 1996-2000, pentru fiecare tip de transport.
b) Realizează o diagramă cât mai sugestivă, pentru a compara dinamica numărului de pasageri transportați, pentru fiecare categorie de transport, în cei cinci ani analizați.
c) Calculează în două moduri media numărului de pasageri din transportul interurban și internațional, între 1996 și 2000.

Transportul de pasageri, pe moduri de transport

Transportul de pasageri, pe moduri de transport	1996	1997	1998	1999	2000
	date absolute				
Pasageri transportați (mii pers.)	22525	2785717	2446901	2390999	2404052
Transportul interurban și internațional de pasageri (mii pers.)	606113	569128	373992	324674	324895
- transport feroviar	212893	186615	146800	129339	117501
- transport rutier	389461	379444	224261	192633	205978
- transport fluvial	2399	2035	1923	1654	133
- transport aerian	1360	1034	1008	1048	1282

Sursa: ziarul infoSTAT, Bacău

Indicatori ai variabilelor cantitative

Analizăm şi generalizăm!

♦ Un indicator de poziție: media

Exemplul 1: Cazul unei variabile discrete

Notele obținute de 25 de elevi ai clasei a XII-a la o lucrare sunt redate în tabelul de mai jos.

Note	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv	1	0	2	5	8	6	2	1

Nota medie a clasei la această lucrare este:

$$m = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 2 + 6\cdot 5 + 7\cdot 8 + 8\cdot 6 + 9\cdot 2 + 10\cdot 1}{1+0+2+5+8+6+2+1} = 7$$

Exemplul 2: Cazul unei variabile continue

Seria statistică următoare redă gruparea pe înălțime a 100 de băieți din clasele a XI-a.

Înălţime	Efectiv	Centrul fiecărei clase statistice
[155; 160)	8	157,5
[160; 165)	12	162,5
[165; 170)	15	167,5
[170; 175)	18	172,5
[175; 180)	21	177,5
[180; 185)	14	182,5
[185; 190)	10	187,5
[190; 195)	2	192,5

În acest caz, pentru a putea reduce calculul mediei la situația variabilelor discrete, ne raportăm la centrul fiecărei clase.

Obținem:

$$m = \frac{157{,}5\cdot 8 + 162{,}5\cdot 12 + 167{,}5\cdot 15 + 172{,}5\cdot 18 + 177{,}5\cdot 21 + 182{,}5\cdot 14 + 187{,}5\cdot 10 + 192{,}5\cdot 2}{8+12+15+18+21+14+10+2}$$

m = 173,7

❶ *Folosește calculatorul de buzunar pentru a calcula media aritmetică a numerelor 21,5; 32,7; 11,4 și 2,8.*

❷ *Calculează media seriei statistice redate în tabelul de mai jos.*

Masă	Efectiv
[40; 45)	12
[45; 50)	7
[50; 55)	11
[55; 60]	14

♦ Cum folosim mediile în calculele statistice?

Exemplul 1

Datele din tabelul alăturat provin de la Ministerul Educației și Cercetării și se referă la populația școlară cuprinsă în licee sau facultăți, în perioada 2000-2004.

ÎNVĂȚĂMÂNT

	2000/2001	2001/2002	2002/2003	2003/2004
	Populaţia şcolară (mii persoane)			
Total	**4565**	**4554**	**4497**	**4473**
în învăţământul:				
liceal	688	711	741	759
superior	533	582	596	621

❸ *Compară procentual numărul de elevi cu numărul de studenți din cei patru ani școlari. Formulează concluzii.*

Calculând media acestor date, observăm că în învățământul liceal au fost cuprinși, în medie, 724.750 elevi, iar în învățământul superior – 583.000 de studenți. La o analiză superficială, am fi tentați să spunem că 80% dintre absolvenții de liceu urmează cursurile învățământului superior. Pentru aceasta, ar trebui însă să avem date și despre numărul de studenți din perioada 2004-2008 (atunci când toți elevii de liceu din perioada analizată ar putea deveni studenți).

Exemplul 2

Revista Capital a publicat in unul dintre numerele sale „Topul celor mai bune bănci comerciale pe anul 2003”. Punctajul acordat băncilor din acest clasament a fost obținut prin *media ponderată* a notelor primite de fiecare bancă. Notele s-au acordat pentru următoarele criterii: diversitatea creditelor, politica de constituire a depozitelor, extinderea serviciilor de carduri și accesibilitatea. Ponderile au fost de 0,3 pentru primele două criterii și de 0,2 pentru ultimele două. Lipsa anumitor produse din gama de servicii a băncii a influențat negativ nota acordată, deoarece această lipsă denotă faptul că banca are anumite probleme.

TOTUL CELOR MAI BUNE BĂNCI DE RETAIL

Banca	Nota
Banc Post	8,9
BCR	8,46
Volksbank	8,45
BRD	8,35
Raiffeisen	8,35
Transilvania	8,35
Banca Românească	8,07
Alpha Bank	7,51
HVB	6,68
Banca Țiriac	6,61
Piraeus Bank	6,56
Emporiki	6,36
CEC	6,23
ING Bank	3,22

Sursă: Capital, 17/2004/pag. 65

❹ *Folosind tabelul alăturat, calculează media aritmetică a notelor acordate băncilor. Determină câte bănci au note peste medie. Care sunt acestea?*

❺ *Să presupunem că banca ABC Bank a primit de la specialiștii revistei Capital notele: 7,56; 8,25; 6,34; 7,89. Ce medie a notelor are această bancă? Pe ce loc s-ar situa ea în clasamentul prezentat alăturat?*

Exemplul 3

Unul dintre premiile acordate în concursul „Cupa liceelor la baschet“ se oferă echipei cu media de vârstă cea mai mică.

Vârstele elevilor din echipa liceului „D. Cantemir“ sunt cele din tabelul de mai jos.

Vârsta (ani împliniți)	15	16	17	18	19
Numărul de jucători	1	4	6	2	1

Media de vârstă a echipei liceului este de (aproximativ) 16 ani și 10 luni. Ea se obține ca medie ponderată a vârstelor jucătorilor, având ca ponderi numărul de jucători cu o vârstă dată.

❻ *Verifică corectitudinea calculului pentru media de vârstă a echipei de baschet. Cum se modifică această medie, dacă în echipă mai vine un jucător de 15 ani?*

♦ Un alt indicator de poziție: mediana

Pentru datele statistice $x_1, x_2, ..., x_n$, putem defini *mediana*. Aceasta este un număr a cu proprietatea că există tot atâtea date mai mici decât a ca și cele mai mari decât a. Astfel:

- dacă n este impar avem $a = x_i$ și card $\{x_1, x_2, ..., x_{i-1}\}$ = card $\{x_{i+1}, ..., x_n\}$;
- dacă n este par, atunci mediana a este media aritmetică a elementelor din mijloc.

Exemplu

Punctajele celor 25 de elevi participanți la un concurs se distribuie crescător după cum urmează:

$$\underbrace{7;\ 7;\ 7;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 9;\ 9;\ 9;}_{12\ \text{elevi}}\ \underbrace{\boxed{9}}_{\text{mediana}};\ \underbrace{9;\ 10;\ 11;\ 11;\ 12;\ 12;\ 12;\ 13;\ 13;\ 14;\ 14;\ 15}_{12\ \text{elevi}}$$

O metodă de căutare a medianei este utilizarea *efectivelor cumulate*:

Punctaje	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Efectiv	3	6	5	1	2	3	2	2	1
Efectiv cumulat	3	9	14	15	17	20	22	24	25

Al 13-lea punctaj este 9.

Efectiv total

Efectivul cumulat 14 indică faptul că există 14 punctaje inferioare sau egale cu 9. Deoarece mediana este punctajul cu numărul 13, deducem că mediana este 9.

Să comparăm!

Pentru exemplul dat, media notelor este m = 10,04,
Constatăm că, pentru acest exemplu, media și mediana nu sunt egale.

♦ Ce este mai semnificativă: media sau mediana?

Exemplu

Considerăm următoarele serii statistice de salarii, exprimate în lei:
Seria A: 500; 540; 600; 650; 700; 760; 850; 890; 900.
Seria B: 500; 540; 600; 650; 700; 760; 850; 890; 2700.

Seria A
Salariul median: 700 lei
Salariul mediu: 710 lei

Seria B
Salariul median: 700 lei
Salariul mediu: 910 lei

Observăm că ultimul salariu din seria B alterează în mod semnificativ media, în timp ce mediana rămâne neschimbată.

⚠ *În anumite domenii, cum ar fi prețuri, salarii, vârste, etc. utilizarea medianei în interpretarea datelor dă informații mai semnificative decât utilizarea mediei. Aceasta din urmă este interpretată de multe ori abuziv.*

❼ *Explică în ce constă semnificația mediei și a medianei pentru exemplul alăturat.*

♦ Determinarea medianei printr-o metodă grafică

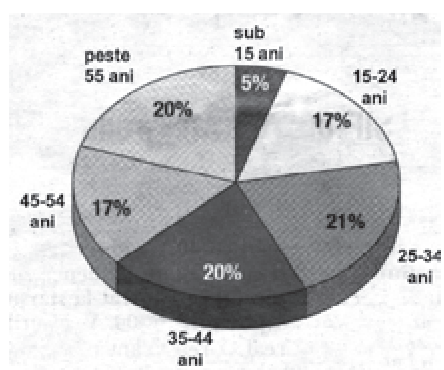
Pentru a determina mediana unei serii statistice prin metodă grafică, procedăm astfel:
- trasăm poligonul frecvențelor cumulate crescător (sau descrescător);
- mediana este abscisa punctului a cărui ordonată este 0,5 (sau 50%).

Exemplul 1

Conform rapoartelor de audiență efectuate de AUDIMAS, în luna august 2001, un număr al ziarului *Libertatea* a fost citit în medie de 491570 persoane. Sondajele de opinie realizate cu acest prilej au arătat că repartiția cititorilor pe grupe de vârstă se prezintă ca în tabelul următor:

Vârsta x (în ani)	Sub 15 ani	[15; 25)	[25; 35)	[35; 45)	[45; 55)	[55; 80)
Frecvența	5%	17%	21%	20%	17%	20%

⚠ *58% din cititorii ziarului au vârsta cuprinsă între 15 și 44 de ani.*



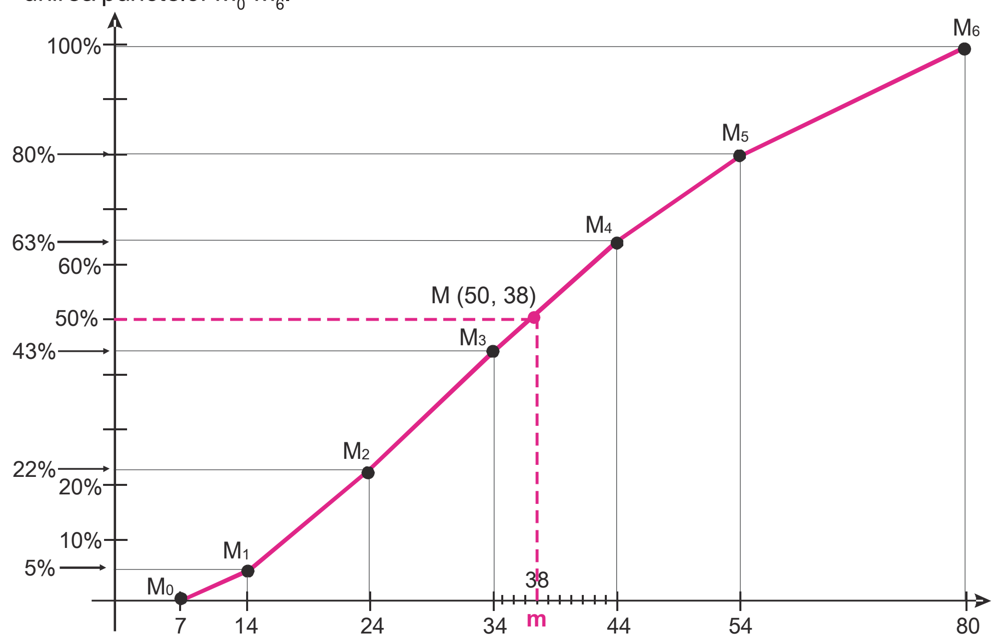
În acest tabel, pentru grupa de vârstă „sub 15 ani“ considerăm ca limită inferioară vârsta de 7 ani, iar pentru grupa de vârstă „peste 55 de ani“ considerăm ca limită superioară vârsta de 80 ani. (Peste această vârstă procentul de cititori este neglijabil.)

Pentru exemplul considerat, tabloul frecvențelor cumulate crescător este:

vârsta x	$7< x \leqslant 14$	$14< x \leqslant 24$	$24< x \leqslant 34$	$34< x \leqslant 44$	$44< x \leqslant 54$	$54< x \leqslant 80$
Frecvenţe cumulate	0 + 5 = 5	5 + 17 = 22	22 + 21 = 43	43 + 20 = 63	63 + 17 = 80	80 + 20 = 100

În studiile statistice se consideră ca vârstă numărul de ani împliniți. De exemplu, un adolescent de 14 ani și 11 luni este înregistrat în clasa statistică $7 \leqslant x \leqslant 14$.

Poligonul frecvențelor cumulate crescător este dat de linia frântă obținută prin unirea punctelor M_0-M_6.



Coordonatele acestor puncte sunt:

– abscisa – limita superioară de vârstă din fiecare clasă de vârstă;

– ordonata – frecvența cumulată crescător corespunzătoare acelei clase.

$M_0(7,\ 0)$; $M_1(14,\ 5)$, $M_2(24,\ 22)$, $M_3(34,\ 43)$; $M_4(44;\ 63)$; $M_5(54,\ 80)$; $M_6(80,\ 100)$

8 Din analiza poligonului frecvențelor cumulate crescător, se observă că 43% dintre cititori au vârsta mai mică sau egală cu 34 ani și 63% dintre aceștia au sub 45 de ani.
Ce procent de cititori au vârsta sub 24 de ani? Dar peste?

Mediana este abscisa punctului de pe grafic corespunzător frecvenței cumulate de 50%. Observăm că:

• Punctul M(50, m) aparține segmentelor M_3M_4.

• Mediana aparține intervalului (34, 44].

Acest interval se numește *clasa mediană*.

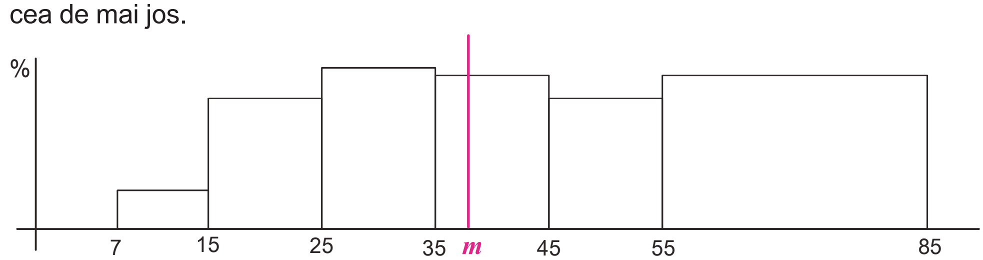
• Din lectura grafică se deduce abscisa (aproximativă) a medianei $m \approx 38$.

Semnificația statistică: 50% dintre cititorii ziarului au mai puțin de 38 de ani.

Exemplul 2

9 Cum au fost stabilite ariile dreptunghiurilor din histograma alăturată?

Pentru raportul de audiență analizat anterior, histograma corespunzătoare este cea de mai jos.



Ariile dreptunghiurilor plasate de o parte și de alta a dreptei verticale ce trece prin punctul de abscisă $m \approx 38$ sunt egale.

În general

• *Media* unor date statistice se obține calculând media aritmetică sau media ponderată.

• Media unor date grupate în clase statistice se obține prin *concentrarea* întregului efectiv al fiecărei clase în mijlocul intervalului corespunzător.

• Mediana unei serii statistice este acea valoare care împarte efectivul *în două părți de frecvențe egale*.

Mediana unor variabile statistice continue se poate determina grafic:

• cu ajutorul *poligonului frecvențelor cumulate*: determinăm abscisa punctului cu ordonata 50%

• cu ajutorul *histogramei*: determinăm dreapta verticală ce împarte suprafața în două părți de arii egale.

♦ Doi indicatori de dispersie: modulul și amplitudinea

Media și mediana dau informații semnificative asupra unei serii statistice. Totuși, acestea nu sunt suficiente pentru a descrie și compara seturi de date. Pentru a evidenția mai bine caracteristicile unor seturi de date, folosim, pe lângă indicatorii de poziție, și indicatori de dispersie.

Exemplu

Situația vânzărilor de mașini în România în primele zece luni ale anilor 2000 și respectiv, 2001 este prezentată în tabelul alăturat.

VÂNZĂRI CLASA MEDIE

Marca	2001 (zece luni)	2000 (zece luni)
1. Volkswagen Pasasat	1.208	458
2. Daewoo Nubira	545	826
3. Peugeot 406	252	171
4. Ford Mondeo	233	151
5. Mercedes clasa C	176	63
6. Opel Vectra	165	139
7. Renault Laguna	128	90
8. Volvo S40	128	82
9. Audi A4	108	58
10. BMW Seria 3	91	55

Aceste informații se pot organiza în tabele de efective, astfel:

Anul 2001

Marca (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv (n_i)	1208	545	252	233	176	165	128	128	108	91

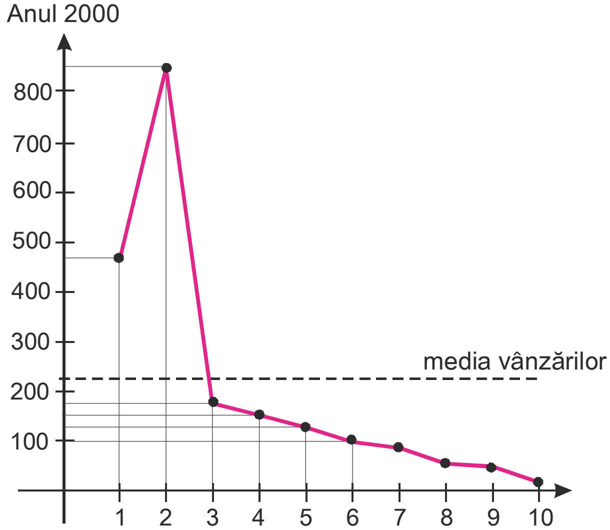
Anul 2000

Marca (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv (n_i)	458	826	171	151	63	139	90	82	58	55

Reprezentarea grafică a dinamicii vânzărilor pentru cele 10 mărci de autoturisme se prezintă sub forma unui poligon statistic al frecvențelor.

Observăm că numărul de vânzări este repartizat neuniform pe cele 10 mărci.

Anul 2000



10 *Verifică dacă media vânzărilor pentru cele zece mărci, în anul 2000, este de aproximativ 209 mașini.*

11 *Calculează media vânzărilor în anul 2001, pentru cele zece mărci de automobile.*

Diferența între cel mai vândut tip de mașină, Volkswagen, și cel mai puțin vândut tip, BMW, în 2000 este de 403. Aceasta reprezintă amplitudinea seriei statistice.

Media vânzărilor este de aproximativ 209 bucăți. Prin compararea efectivului vândut (pentru fiecare marcă) cu media vânzărilor anuale obținem un indicator de dispersie. Astfel, s-au vândut 458 bucăți de automobile Volkswagen Passat față de media de 209, adică cu 249 mai mult. Pentru această variabilă, modulul seriei statistice este 249.

12 *Compară amplitudinile celor două serii statistice, reprezentând vânzările de maxim în 2000 și 2001. Amplitudinea unei serii statistice reprezintă diferența dintre valoarea maximă și cea minimă a variabilei.*

În general

Amplitudinea unei serii statistice reprezintă diferența dintre valoarea maximă și cea minimă a variabilei.

Modulul se exprimă prin diferența dintre valoarea medie a efectivului și frecvența sa absolută.

♦ Un indicator de împrăștiere: abaterea medie liniară

Să analizăm!

13 *Reprezintă grafic distribuția notelor celor doi elevi și interpretează grafic relația între medie și abaterea notelor față de medie.*

Ioana și Dan au obținut la matematică aceeași medie: 8. În caracterizarea activității lor, profesorul de matematică a ținut cont de constanța notelor obținute de-a lungul întregului semestru.

Notele Ioanei: 8, 8, 7, 9. *Notele lui Dan*: 10, 5, 10, 7.

Astfel, se observă că Ioana a fost mult mai echilibrată în pregătire, pe când Dan a avut fluctuații mari. „Constanța“ sau „fluctuația“ pregătirii se pot exprima prin intermediul abaterilor absolute ale notelor celor doi elevi, față de medie.

14 *Calculează abaterea medie liniară a notelor obținute la matematică, în semestrul trecut, de către voi înșivă. Compară cu colegul de bancă constanța în pregătire.*

În situația analizată:

Notele Ioanei	8	8	7	9
Abaterea notelor față de medie	0	0	1	1

Notele lui Dan	10	5	10	7
Abaterea notelor față de medie	2	3	2	1

⚠ *Abaterea medie liniară măsoară gradul de împrăștiere a valorilor unor date statistice în jurul mediei.*

Media abaterilor notelor față de medie dă informații despre împrăștierea notelor în jurul mediei. Ea este notată de obicei cu τ (tau) și se numește abaterea medie liniară.

Pentru exemplele analizate:

$$\tau_1 = \frac{0+0+1+1}{4} = 0,5; \qquad \tau_2 = \frac{2+3+2+1}{4} = 2$$

În general

⚠ *Metoda de calcul pentru abaterea medie liniară a unor date grupate în clase statistice presupune că în fiecare clasă, datele sunt repartizate uniform.*

Fie x_1, x_2, ..., x_n valorile unei variabile statistice discrete și $\overline{x}$ media acestor valori.

Abaterea medie liniară se calculează cu formula:

$$\tau = \frac{\left|x_1-\overline{x}\right| + \left|x_2-\overline{x}\right| + \ldots + \left|x_n-\overline{x}\right|}{n}.$$

Să aplicăm!

⚠ *Considerarea altor clase statistice, pentru aceleași date, poate conduce la valori diferite ale abaterii medii liniare. Valorile obținute sunt cu atât mai bune, cu cât clasele statistice au lungimi mai mici.*

Pentru a calcula abaterea medie liniară a unor date grupate în clase statistice, concentrăm întreg efectivul unei clase statistice în mijlocul intervalului ce reprezintă clasa respectivă. De exemplu, pentru datele studiului privind greutatea elevilor unei clase, prezentate în tabelul de mai jos, obținem: $\overline{x} = 73$, $\tau = 8,8$.

Greutatea (în kg)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]
Efectivul	3	7	9	4	2

♦ Un alt indicator de împrăștiere: abaterea medie pătratică

Să reprezentăm rezultatele obținute de un grup de 20 de elevi la două teste succesive, prin trasarea poligoanelor efectivelor:

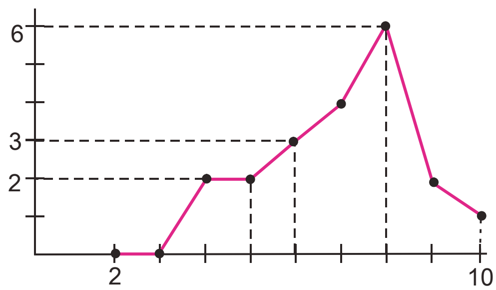
Testul A

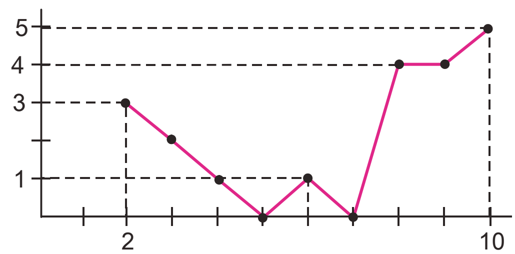
Note	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv	0	0	2	2	3	4	6	2	1

Testul B

Note	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Efectiv	3	2	1	0	1	0	4	4	5

15 *Care este mediana notelor le fiecare dintre aceste teste? Dar media?*





16 *Precizează coordonatele fiecărui punct marcat pe graficele alăturate.*

Să analizăm!

Rezultatele obținute la cele două teste au aceeași medie: 7. Configurația notelor în jurul mediei este însă foarte diferită. Pentru a exprima cantitativ această configurație, determinăm distanțele față de medie și exprimăm o „medie“ a pătratelor acestor distanțe. În acest fel, obținem dispersia și abaterea medie pătratică.

Avem:

17 *Compară rezultatele la cele două teste prin intermediul abaterii medii liniare.*

Testul A

Note	Efectiv	Distanţa faţă de medie	Pătratul distanţei
2	0	5	25
3	0	4	16
4	2	3	9
5	2	2	4
6	3	1	1
7	4	0	0
8	6	1	1
9	2	2	4
10	1	3	9

Testul B

Note	Efectiv	Distanţa faţă de medie	Pătratul distanţei
2	3	5	25
3	2	4	16
4	1	3	9
5	0	2	4
6	1	1	1
7	0	0	0
8	4	1	1
9	4	2	4
10	5	3	9

⚠ *Putem calcula abaterea medie pătratică a datelor 6; 6; 7; 8; 8; 8, folosind un calculator de buzunar. Apăsăm tastele în succesiunea:*

MODE · SHIFT SAC 6 DATA 6 DATA 7 DATA 8 DATA 8 DATA 8 DATA SHIFT σ_n

Dispersia se notează de obicei cu v (de la variație sau varianță).

Abaterea medie pătratică este rădăcina pătrată a dispersiei. Ea se notează de obicei cu σ (sigma).

Pentru exemplele date, obținem:

$$v_1 = \frac{25\cdot 0 + 16\cdot 0 + 9\cdot 2 + 4\cdot 2 + 1\cdot 3 + 0\cdot 4 + 1\cdot 6 + 4\cdot 2 + 9\cdot 1}{0+0+2+2+3+4+6+2+1} \approx 2{,}599$$
$$\sigma_1 = \sqrt{v_1} \approx 1{,}612$$
, respectiv
$$v_2 = \frac{25\cdot 3 + 16\cdot 2 + 9\cdot 1 + 4\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 4 + 4\cdot 4 + 9\cdot 5}{3+2+1+0+1+0+4+4+5} \approx 8{,}851$$
$$\sigma_2 = \sqrt{v_2} \approx 2{,}975.$$

În acest fel putem compara numeric împrăștierea datelor: cu cât dispersia și abaterea medie pătratică sunt mai mari, cu atât datele statistice analizate sunt mai împrăștiate.

18 Pentru fiecare dintre teste, împarte rezultatele în două clase: note sub 5 și note peste 5. Construiește apoi câte o histogramă și marchează pe ea mediana notelor.

Să observăm!

Abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică au același ordin de mărime (și aceeași unitate de măsură) ca și valorile statistice studiate.

În general

Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ valorile unei variabile statistice discrete și $\overline{x}$ media aritmetică a acestor valori.

Dispersia și *abaterea medie pătratică* măsoară gradul de împrăștiere a valorilor variabilei în jurul mediei. Acești indicatori se calculează cu formulele:

$$v = \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n},$$ respectiv
$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}}.$$

19 Stabilește o relație între dispersie și abaterea medie pătratică.

Să aplicăm!

Pentru a calcula abaterea medie pătratică a unor date grupate în clase statistice, putem proceda în același mod ca și pentru calculul mediei sau al abaterii medii liniare.

De exemplu, pentru studiul privind înălțimea elevilor cu vârsta între 15 și 19 ani, ale cărui rezultate sunt cele din tabelul de mai jos, abaterea medie pătratică este $\sigma \approx 11{,}82$.

⚠ Pentru studiul analizat, se consideră ca fiind nesemnificativ procentual numărul elevilor ce nu au înălțimea cuprinsă între 140 cm și 200 cm.

Înălţimea (în cm)	[140; 160)	[160; 170)	[170; 180)	[180; 190)	[190; 200]
Frecvenţa (%)	15	25	40	15	5

20 Justifică toate calculele făcute în exemplul alăturat.

Să demonstrăm!

Abaterea medie liniară, respectiv abaterea medie pătratică ale unor valori statistice sunt egale cu zero dacă și numai dacă toate valorile statistice date sunt egale.

Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ valorile unei variabile statistice, $\overline{x}$ media acestor valori și τ, respectiv σ abaterile lor medii.

Deoarece $\tau = \frac{|x_1-\overline{x}| + |x_2-\overline{x}| + \ldots + |x_n-\overline{x}|}{n}$, iar $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \ldots + (x_n-\overline{x})^2}{n}}$, avem:

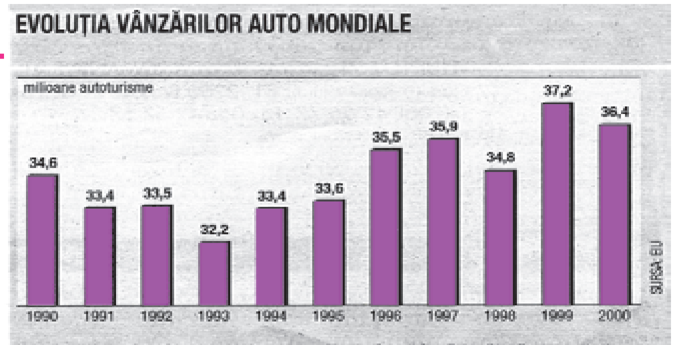
$\tau = 0 \Leftrightarrow |x_i - \overline{x}| = 0$ pentru orice $i \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = \overline{x}$ ...

$\sigma = 0 \Leftrightarrow (x_i - \overline{x})^2 = 0$ pentru orice $i \Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n = \overline{x}$ ...

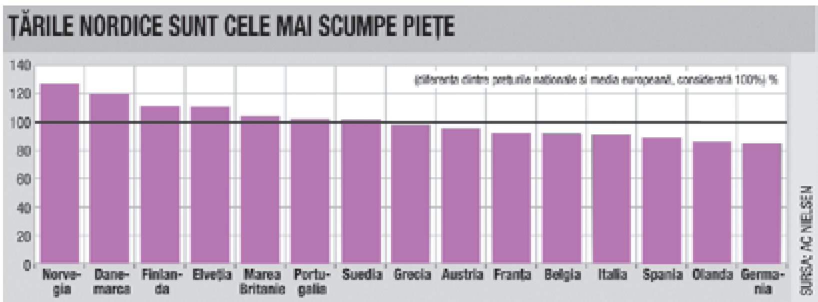
21 În primul semestru, un elev a primit la matematică trei note. În ce situație abaterea medie liniară, respectiv abaterea medie pătratică a acestor note sunt maxim posibile? Aceeași întrebare pentru cazul în care elevul ar fi primit patru note.

Exerciții și probleme

1. Diagrama alăturată prezintă evoluția vânzărilor mondiale de automobile în deceniul trecut.
a) Exprimă procentual datele privind evoluția vânzărilor de autovehicule pe piața mondială. Folosește un calculator de buzunar și treci datele obținute într-un tabel.
b) Determină media vânzărilor în perioadele: 1990-1995; 1996-2000; 1990-2000. Ce observi?
c) Calculează dispersia vânzărilor în perioadele 1990-1995; 1996-2000; 1990-2000.



Numărul de autovehicule produse anual este în strânsă legătură cu evoluția economiei mondiale, vârfurile de producție corespunzând anilor cu cea mai mare creștere economică.



Sursă: Capital, 50/2005/pag. 22

2. În imaginea alăturată sunt reprezentate prețurile alimentare în câteva țări prin raportare la media europeană.
a) Să presupunem că valoarea coșului lunar în Danemarca este de 450 Euro. Estimează cât alocă cetățenii celorlalte țări pentru aprovizionarea lunară.
b) Calculează abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică pentru seria statistică analizată.
c) Determină amplitudinea seriei statistice, prin raportare procentuală la medie.
d) Determină amplitudinea seriei statistice a prețurilor, folosind calculele despre valoarea coșului lunar.

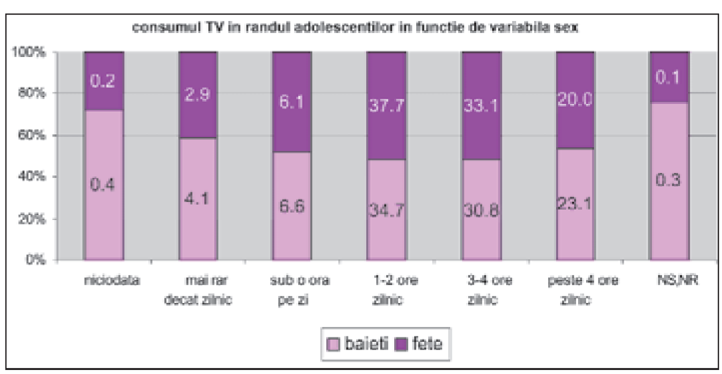
3. Institutul Național de Statistică a dat publicității datele privind populația României în perioada 2000-2003.
a) Calculează valorile medii ale întregii populații, respectiv ale populației masculine și feminine din România, din mediul urban sau din cel rural.
b) Pentru fiecare dintre seriile statistice din tabelul dat, calculează abaterea medie liniară și abaterea medie pătratică.

mii persoane

	2000	2001	2002	2003
Total	**22435,2**	**22408,4**	**21794,8**	**21733,6**
din care feminin	*11466,4*	*11458,9*	*111152,3*	*11127,3*
Urban	12244,6	12243,7	11608,7	11600,2
din care feminin	*6336,8*	*6340,2*	*6029,7*	*6033,8*
Rural	10190,6	10186,1	10186,1	10133,4
din care feminin	*5129,6*	*5118,7*	*5122,6*	*5093,6*

c) Reprezintă grafic într-o formă cât mai sugestivă variația populației României, între 2000 și 2004.

4. În graficul cu bare alăturat sunt evidențiate rezultatele unui sondaj statistic privind intervalul de timp pe care elevii de 15-18 ani îl petrec în fața televizorului.
Pe fiecare bară verticală a graficului sunt reprezentate simultan frecvența efectivelor de băieți, respectiv fete, care corespund unei anumite caracteristici.
Astfel, 34,7% dintre băieții intervievați și 37,7% dintre fete petrec în fața televizorului între 1 și 2 ore zilnic.



a) Calculează cât timp petrec în medie în fața televizorului fetele, respectiv băieții. Pentru aceasta, înlocuiește caracteristica „mă uit mai rar decât zilnic” cu intervalul [0; 0,25) și „mă uit mai mult de 4 ore zilnic” cu intervalul [4; 8].
b) Transformă diagrama dată într-un grafic cu bare duble. Reprezintă mediile pe acest nou grafic.

Aplicăm şi dezvoltăm!

Pentru a descrie o variabilă cantitativă (numerică) a unei populații statistice este necesar să identificăm câteva caracteristici ale valorilor ei numerice. Fiecare dintre aceste caracteristici oferă un anumit tip de informație. Astfel:

• caracteristicile de poziție: media, mediana dau informații asupra ordinului de mărime al observațiilor statistice;

• caracteristicile de dispersie: amplitudinea, modulul, abaterea medie liniară, dispersia, abaterea medie pătratică, dau informații despre gradul de împrăştiere a valorilor.

Variabilele discrete iau valori izolate.

Variabilele continue pot lua orice valori într-un interval dat.
Dacă variabilele discrete au valori suficient de multe în cadrul unei serii statistice, ele pot fi grupate în clase şi sunt considerate în analiza statistică a acelei serii drept valori continue.

❶ Calculează media clasei voastre la ultima lucrare scrisă la matematică.

♦ Interpretarea indicatorilor de poziție

Exemplul 1

Considerăm o serie statistică discretă dată de numărul de cărți citite într-o lună de fiecare dintre cei 75 de elevi ai clasei a XI-a din liceul „Matei Basarab”.

Număr de cărţi (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
Efectiv (n_i)	5	18	14	15	11	3	8
$n_i \cdot x_i$	0	18	28	45	44	15	48

Pentru această serie calculăm:

$$\text{media ponderată (valoarea medie)} = \frac{\text{suma produselor } n_i x_i}{\text{efectiv total}} = \frac{198}{75} = 2{,}64$$

În medie, fiecare elev a citit 2-3 cărți.

Observăm că media unei serii statistice poate să nu fie egală cu nici una dintre datele înregistrate.

Exemplul 2

O serie statistică continuă are ca variabilă vârsta elevilor dintr-un liceu.

Efectivele de elevi din liceu, pe toate cele 4 clase, se prezintă astfel:

Vârsta	15-16	16-17	17-18	18-19
Efectiv (n_i)	72	69	97	61
Centrul clasei (x_i)	15,5	16,5	17,5	18,5
$n_i \cdot x_i$	1116	1138,5	1697,5	1128,5

În cazul unei serii statistice continue, prin convenție, se consideră ca valori x_i centrul fiecărei clase statistice.
Calculul mediei s-a făcut astfel:

$$\frac{\text{suma produselor } n_i x_i}{\text{efectivul total}}$$

Vârsta medie a elevilor din liceu, conform cu această repartiție statistică este: $\frac{5080{,}5}{299} \approx 17$ ani.

În aceeaşi serie statistică, mediana aparține clasei de vârstă (17; 18). Folosind poligonul frecvențelor cumulate crescător sau reprezentarea datelor cu ajutorul histogramelor, obținem că mediana vârstelor elevilor este 17, 08, adică aproximativ 17 ani şi o lună.

Să aplicăm!

Vrem să determinăm care este vârsta medie a telespectatorilor ce urmăresc Jurnalul TVR, conform datelor sondajului prezentat în ziar.


DUMINICĂ – 3 MARTIE 2002

Sfârșitul week-end-ului aparține Jurnalului (TV România 1), cu un rating de 11,4% în marile orașe. Un Jurnal care a strâns în jurul său telespectatorii de peste 65 de ani, cu cea mai mare pondere - 27,5%, și grupa de vârstă 6 - 14 ani, cu a doua pondere din totalul telespectatorilor - 16,3%. Grupa de vârstă 15 - 24 de ani a fost cea mai slab reprezentată: 7%. De asemenea, 55,2% din telespectatori au fost femei și 51,9% au studii primare.

Poți considera că ultima clasă statistică din sondajul alăturat se referă la grupa de vârstă 65-85 ani.

Pentru aceasta, grupăm efectivele fiecărei clase statistice în mijlocul intervalului ce reprezintă clasa respectivă și calculăm media ponderată; obținem vârsta medie de aproximativ 46 ani.

Pentru aceleași date statistice, mediana este de aproximativ 47 ani. Altfel spus: 50% dintre telespectatorii Jurnalului au mai puțin de 47 de ani.

♦ Interpretarea indicatorilor de dispersie

Un antrenor trebuie să aleagă între doi sportivi pe cel care va reprezenta clubul la următorul concurs de natație.

El analizează performanțele sportivilor la ultimele 8 antrenamente.

Pentru a se putea decide, antrenorul va trebui să compare dispersia rezultatelor celor doi sportivi.

Iată cum a procedat:

Sportiv 1	30,2	29,7	29,9	29,3	29,4	30,1	30,2	29,6
Sportiv 2	30,1	29,8	29,2	29,8	30,2	29,9	29,9	29,5

❷ Calculează pentru fiecare dintre cei doi sportivi performanța medie și evidențiază, printr-o diagramă, cea mai bună și cea mai slabă performanță.

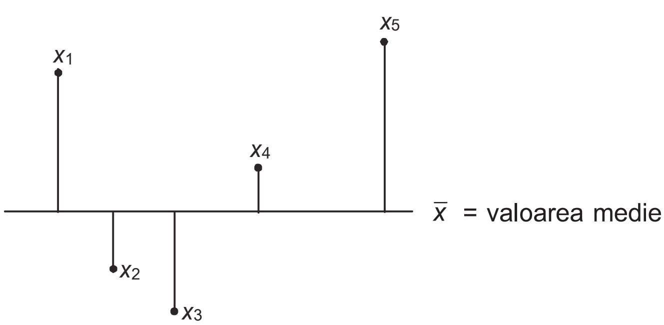
❸ Cum îl va alege antrenorul pe cel mai bun sportiv?

Calculând media performanțelor obținute de sportivi la cele 8 antrenamente, antrenorul constată că cei doi au obținut aceeași performanță medie ($\bar{x}$).

❹ Calculează mediile rezultatelor celor doi sportivi, folosind un calculator de buzunar.

Să observăm!

Două serii statistice pot avea aceeași medie, dar pot lua valori diferite.



❺ Comentează semnificația reprezentării grafice alăturate.

Pentru a da o semnificație numerică dispersiei valorilor, luăm în considerare abaterea fiecărei valori față de medie.

Pentru a calcula dispersia, procedăm astfel:

– calculăm diferența dintre fiecare valoare și medie, adică $|x_i - \overline{x}|$.

	Sportiv1	Sportiv 2
Antrenamentul 1:	$\lvert 30,2-29,8\rvert=0,4$	$\lvert 30,1-29,8\rvert=0,3$
Antrenamentul 2:	$\lvert 29,7-29,8\rvert=0,1$	$\lvert 29,8-29,8\rvert=0$
Antrenamentul 3:	$\lvert 29,9-29,8\rvert=0,1$	$\lvert 29,2-29,8\rvert=0,6$
Antrenamentul 4:	$\lvert 29,3-29,8\rvert=0,5$	$\lvert 29,8-29,8\rvert=0$
Antrenamentul 5:	$\lvert 29,4-29,8\rvert=0,4$	$\lvert 30,2-29,8\rvert=0,4$
Antrenamentul 6:	$\lvert 30,1-29,8\rvert=0,3$	$\lvert 29,9-29,8\rvert=0,1$
Antrenamentul 7:	$\lvert 30,2-29,8\rvert=0,4$	$\lvert 29,9-29,8\rvert=0,1$
Antrenamentul 8:	$\lvert 29,6-29,8\rvert=0,2$	$\lvert 29,5-29,8\rvert=0,3$

6 *Explică etapele de calcul listate alăturat, necesare în calculul dispersiei.*

– ridicăm la pătrat diferența $|x_i - x|$ între performanța obținută de fiecare sportiv la antrenament și media performanțelor;

– înmulțim această valoare cu efectivul corespunzător (numărul de antrenamente la care s-au obținut aceste rezultate);

– adunăm rezultatele obținute pentru fiecare valoare (performanță);

– împărțim la efectivul total (numărul total de antrenamente luate în calcul) pentru a obține dispersia valorilor față de medie, adică variația față de medie (v);

– calculăm abaterea medie pătratică: $\sigma = \sqrt{v}$.

Aceste etape de calcul se pot parcurge mai simplu prin completarea unui tabel.

Tabelele de calcul pentru dispersia performanțelor sportivilor față de performanța medie ($\overline{x} = 29,8$ sec.) sunt cele de mai jos.

7 *Urmărește datele din tabelul alăturat. Ce legătură este între coloana a treia și coloana a patra?*

Sportivul 1

x_i	n_i	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert$	$(x_i-\overline{x})^2$	$n_i(x_i-\overline{x})^2$
30,2	1	0,4	0,16	0,16
29,7	1	0,1	0,01	0,01
29,9	1	0,1	0,01	0,01
29,3	1	0,5	0,25	0,25
29,4	1	0,4	0,16	0,16
30,1	1	0,3	0,06	0,06
30,2	1	0,4	0,08	0,08
29,6	1	0,2	0,04	0,04

În cele 8 antrenamente, $v_1 = \dfrac{0,77}{8} \approx 0,096$.

Abaterea medie pătratică $\sigma_1 = \sqrt{v_1} = \sqrt{0,096} \approx 0,310$.

Sportivul 2

x_i	n_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
30,1	1	0,3	0,09	0,09
29,8	2	0	0	0
29,2	1	0,6	0,36	0,36
29,8	1	0	0	0
30,2	1	0,4	0,16	0,16
29,9	2	0,1	0,01	0,02
29,5	1	0,3	0,09	0,09

8 Calculează amplitudinea seriei de rezultate pentru Sportivul 2.

În cele 8 antrenamente $v_2 = \dfrac{0{,}72}{8} = 0{,}09$.

Abaterea medie pătratică $\sigma_2 = \sqrt{v_2} \approx 0{,}300$.

Pentru a calcula dispersia a două serii statistice, se calculează media și abaterea medie pătratică. Cu cât această valoare este mai mare, au atât seria este mai dispersată.

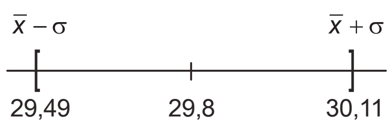
Calculând abaterile medii pătratice pentru performanțele celor doi sportivi, se constată că $v_2 < v_1$.

Performanțele celui de-al doilea sportiv sunt mai puțin dispersate față de medie, deci sunt șanse ca la concurs să obțină o performanță mai apropiată de medie.

Putem exprima „împrăștierea“ rezultatelor și prin situarea acestora față de intervalul $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$.

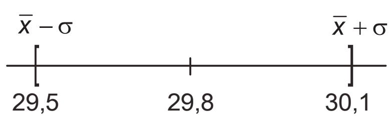
Pentru exemplul dat:

Sportivul 1



– 4 dintre valori, adică 50% dintre performanțele luate în calcul, sunt în afara intervalului.

Sportivul 2



– o singură valoare, adică 12,5% dintre performanțele luate în calcul este în afara intervalului.

9 Majoritatea valorilor unei serii statistice se situează în intervalul

$[\overline{x} - v;\ \overline{x} + v]$.

Verifică această afirmație în cazul exemplului dat și precizează care dintre valori se situează în interval.

Exerciții și probleme

1. Tabelul de mai jos a fost extras dintr-un studiu statistic privind transportul zilnic către locul de muncă.

Durata medie a transportului	15	45	75	105	135	165	95
Efectiv	175	392	267	127	168	120	63

Calculează media ponderată. Ce semnificație are aceasta?

2. Tabelul care urmează este extras din același studiu de mai sus, dar lipsesc câteva informații.

a) Explică, folosind limbajul statisticii, semnificația tabelului.

b) Calculează și completează datele care lipsesc.

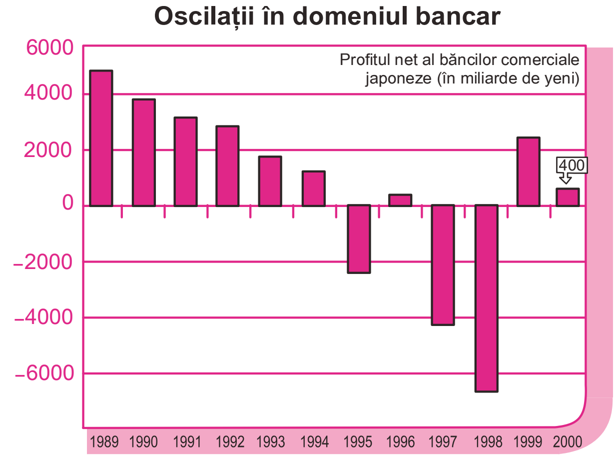
c) Reprezintă poligonul frecvențelor cumulate crescător și poligonul frecvențelor cumulate descrescător.

d) Calculează media și dispersia seriei statistice.

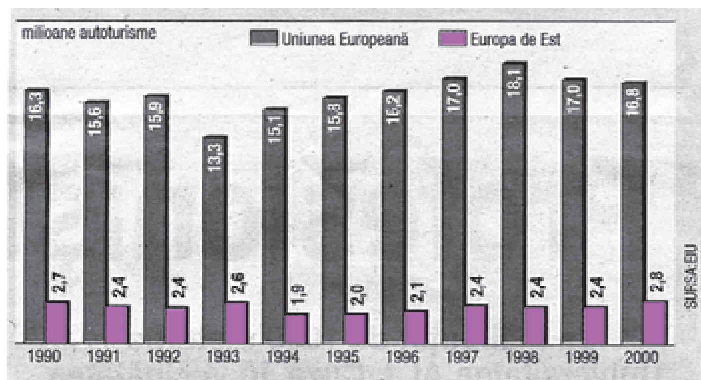
Timpul alocat transportului este mai mic de:	0	30	60	90	120	150	180	210
Frecvența	0	175		834	961	1129	1299	
Frecvența în procente	0%	13%	43%			86%		100%

e) Formulează câteva concluzii ale studiului.

3. Observă diagrama alăturată, care reprezintă oscilația profitului net al băncilor comerciale japoneze în perioada 1989-2000. Răspunde la întrebările următoare aproximând valorile pe baza graficului.
a) Cu cât a scăzut profitul băncilor nipone în 1995 față de 1989? Dar față de 1992? Dar față de 1994?
b) Comentează evoluția profitului: în 1997 față de 1994; în 1998 față de 1989; în 1998 față de 1997; în 2000 față de 1999; în 2000 față de 1998.
c) Care este media profitului în perioada 1989-1994? Dar în perioada 1995-2000? Dar în întreaga perioadă 1989-2000? Poți exprima printr-o formulă legătura dintre cele trei medii?
d) Determină mediana pentru fiecare dintre cele trei perioade considerate mai sus.
e) Determină dispersia profitului în perioada 1989-2000.

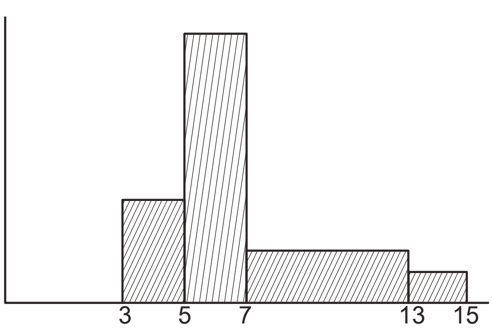


4. Diagrama alăturată indică dinamica producției de autovehicule în țările europene, între 1990 și 2000
a) Calculează media producției auto în țările din U.E. în perioada 1990-2000.
b) Calculează media producției auto în țările Europei Centrale și de Est în perioada 1990-2000.
c) Reprezintă poligonul frecvențelor în cele două cazuri. Marchează pe grafice mediana fiecărei serii.
d) Determină abaterea medie în fiecare caz.

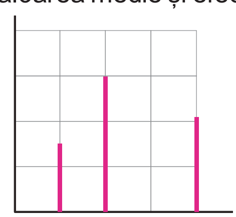


Dinamica producției de autovehicule în țările Europei Centrale și de Est nu urmărește întocmai evoluția din U.E. În ultimii șase ani, producția în țările aflate în tranziție se află în creștere ușoară dar continuă, în timp ce producția europeană este neliniară.

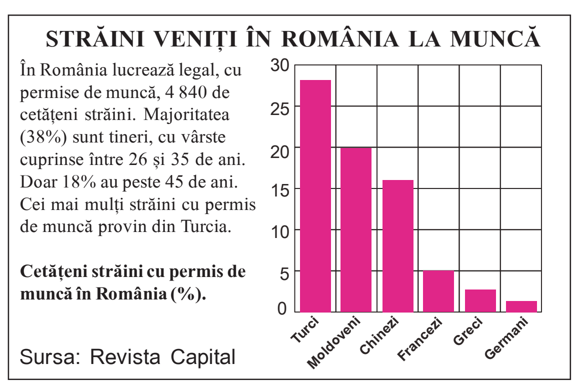
5. Determină media datelor reprezentate în histograma de mai jos.



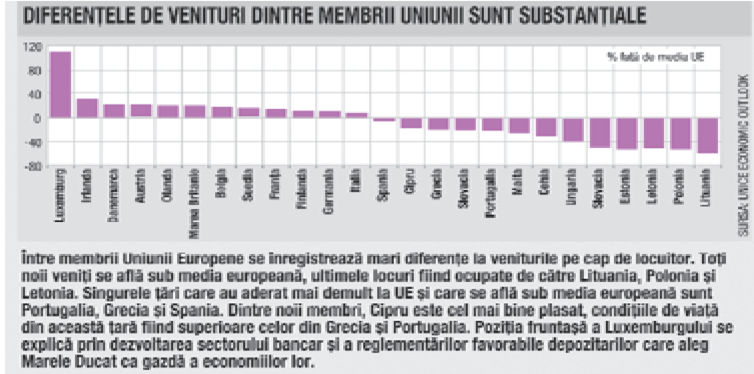
6. Datele unui studiu statistic sunt reprezentate în diagrama cu bare de mai jos. Reprezintă pe o diagramă separată valoarea medie și efectivul cumulat al acestor date.



7. O revistă de profil a publicat diagrama cu bare alăturată, care se referă la cetățenii străini veniți la muncă în România.
a) Pentru fiecare dintre categoriile prezentate, aproximează numărul de persoane aflate la muncă în România.
b) Calculează abaterea medie pătratică a datelor prezentate.



9. Reprezentarea grafică alăturată ilustrează diferențele de venituri între membrii Uniunii Europene, în anul 2004. Aceste diferențe sunt reprezentate procentual, prin raportare la media veniturilor pe locuitor.
Presupunând că venitul mediu pe locuitor al membrilor Uniunii era la acea dată de 1100 Euro, estimează amplitudinea acestui set de date și modulele corespunzătoare Ungariei și Danemarcei.



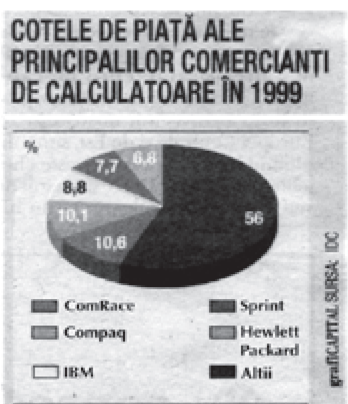
Sursă: Capital, 3/2005/pag. 15

Am reușit... ?!?

Prin parcurgerea acestei unități de învățare, am reușit....
- să reprezint datele unui studiu în diverse moduri
- să interpretez date, organizate în diferite moduri
- să utilizez formule în scopul corelării datelor
- să transpun în limbaj statistic probleme practice
- să estimez comportarea unui sistem, cunoscând câteva valori particulare?

Test de verificare

1. Reprezintă datele din diagrama circulară alăturată sub forma unui grafic cu bare.



2. Companiile de transport menționate mai jos au tarife diferite. Cu care dintre ele este convenabil să se facă deplasarea pe o distanță de 5 km, astfel încât costurile să fie minime?

Companie	Taxa de pornire (RON)	Taxa pe kilometru parcurs (RON)
MICRO	1,3	1,2
MACRO	1	1,3
MEGA	0,4	1,9
NANO	0,5	1,7

3. O anchetă statistică a analizat timpul pe care îl consumă pentru transportul zilnic cei 1 312 angajați ai unei întreprinderi. Rezultatele au fost grupate în clase cu amplitudine de 30 minute ca în tabloul de distribuție alăturat.
Determină media și dispersia acestei repartiții.

Clasa	[0, 30)	[30, 60)	[60, 90)	[90, 120)	[120, 150)	[150, 180)	[180, 210)
Efectiv	175	392	267	127	168	120	63

4. La un cabinet medical au fost înregistrate înălțimile unui grup de copii și apoi sintetizate într-un tabel:

Înălțime	Număr de copii
între 80 și 90 cm	4
între 90 și 95 cm	16
între 95și 100 cm	21
între 100 și 105 cm	17
între 105 și 110 cm	14
între 110 și 120 cm	3

a) Care este înălțimea medie în acest grup de copii?
b) Ce procentaj de copii au înălțimea cuprinsă între 90 și 110 cm?

5. Estimează categoriile de vârste ale copiilor cuprinși în eșantionul descris în problema **4**. Argumentează estimarea făcută.

Unitatea de învățare 4

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând problemele următoare îți vei aminti noțiuni necesare parcurgerii acestei unități:

Calcul numeric

1. Calculează:

a) $2 + 3 \cdot (-4)$
b) $(2 + 3 + 4) \cdot 3$
c) $2{,}75 + 1{,}29$
d) $4{,}81 - 1{,}99$
e) $(3{,}47 + 1{,}22) : 3$
f) $2{,}51 - 0{,}2 \cdot 4{,}7$
g) $15{,}2 : 0{,}25$
h) $11{,}4 + 11{,}4 \cdot 9$.

Exponențiale și logaritmi

2. Determină:

a) $(-2)^3$
b) 5^2
c) $\log_3 9$
d) $\log_2 0{,}5$
e) $\log_5 \sqrt[3]{5}$
f) $\lg 100$
g) 10^{-5}
h) $\lg(0{,}1)$.

3. Scrie într-o formă mai simplă:

a) $2^5 \cdot 2^7$
b) $(-5)^2 \cdot (-5)^4$
c) $\log_2 7 + \log_2 10$
d) $\lg 2 + \lg 5$.

Calcul procentual

4. Calculează:

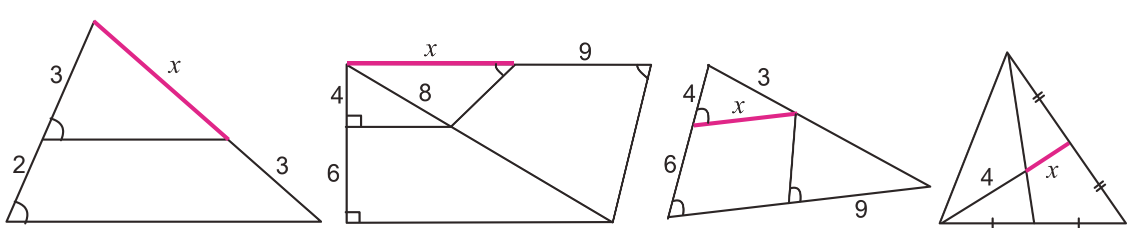
a) 20% din 180 m
b) 15% din 100 kg
c) 6% din 10% din 100 tone
d) 75% din 25% dintr-un kilolitru.

5. Precizează:

a) Care este diferența de preț la o scumpire cu 20% a unui produs care costa 54 lei?
b) Cât la sută reprezintă 60 m din 300 m?
c) Cu ce procent s-a micșorat costul unui obiect al cărui preț s-a înjumătățit?
d) Ce preț are un fular care costa 10 lei, și a fost scumpit cu 10%, apoi ieftinit cu același procent?

Proprietăți geometrice

6. Determină lungimile marcate cu x pe figurile următoare:



Studii de caz în statistică

Studii statistice

Ne amintim și explorăm!

♦ **Sondaje statistice**

În evaluările statistice, este nevoie ca specialiștii să dispună de date cât mai relevante.

Pentru actualizarea datelor se fac periodic sondaje statistice. În acest caz, deși procesul de culegere a datelor nu implică întreaga populație, datele obținute sunt suficiente pentru conturarea unor politici de perspectivă.

Sondajele se aplică de obicei unui eșantion format din aproximativ 1 000 de persoane. Pentru a putea extinde rezultatele la întreaga populație, specialiștii stabilesc un *eșantion național reprezentativ*, asupra căruia sunt aplicate instrumentele de analiză (chestionare, discuții organizate pe grupuri, interviuri). Stabilirea eșantionului reprezentativ se face în funcție de criterii precum: vârstă, sex, nivel de pregătire profesională, zonă geografică, mediu social, mediu familial, nivel de cultură etc.

Pe baza datelor obținute de la un eșantion național reprezentativ se pot estima răspunsurile ce ar putea să fie date de întreaga populație.

În matematică, estimarea comportării unei funcții pentru care nu se cunosc decât câteva valori particulare se numește extrapolare.

Exemplu

În cadrul unui sondaj de opinie au fost adresate persoanelor intervievate trei întrebări și anume:

a) Obișnuiți să citiți reviste?

b) Cât de des obișnuiți să vă uitați la televizor?

c) Atunci când vă uitați la televizor, ce gen de programe obișnuiți să urmăriți?

Rezultatele sondajului, așa cum au fost prezentate într-o revistă de specialitate, sunt cele de mai jos:

❶ Caută în ziare rezultatele unui sondaj de opinie. Ce temă are acesta? Ce întrebări au fost adresate? Cum au fost prezentate rezultatele?

a)

Nu – 46,8%	Da – 53,2%

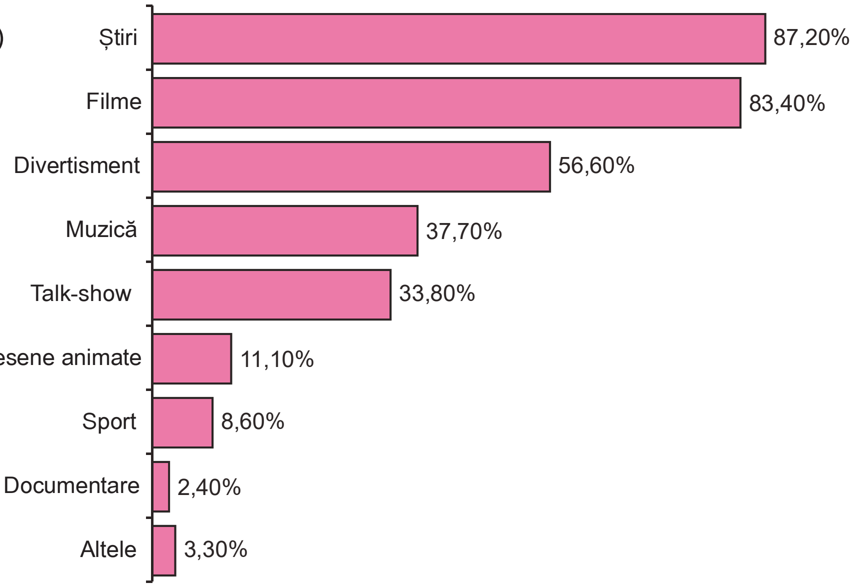
b)

Cât de des vă uitați la televizor?	Nr. răspunsuri
Mai rar de o dată pe săptămână	9
O dată pe săptămână	13
De 2-3 ori pe săptămână	37
De 4-6 ori pe săptămână	20
O dată pe zi	472
De 2-3 ori pe zi	352
Mai des de 3 ori pe zi	257
Nu mă uit la televizor	40

Baza: 1 200 de persoane

❷ Folosește datele sondajului prezentat pentru a răspunde!
– Câte persoane dintre cele intervievate au declarat că nu citesc reviste?
– De ce baza de calcul la întrebarea c) diferă de cea de la restul de întrebări?
– Câte persoane (dintr-un total estimat de 16 milioane care s-ar putea uita la televizor) preferă emisiunile de sport? Câte persoane nu se uită la televizor?

c)



Baza: 1160 de persoane

❸ *Adresează aceleași întrebări colegilor de clasă și prietenilor și compară rezultatele obținute cu cele ale sondajului. De ce crezi că apar diferențe între aceste rezultate?*

♦ Cum se utilizează datele statistice?

Rezultatele sondajelor dau informații asupra tendințelor ce apar în viața socială sau economică. În acest fel, pot fi luate din timp măsurile ce se consideră a fi necesare.

Exemplul 1

O revistă de specialitate a publicat rezultatele unor sondaje comparative, efectuate în luna ianuarie a anilor 2001 și 2002, privind gradul de pătrundere a tehnologiei informației în România.

Sondajul a avut în vedere câteva variabile, ce sunt prezentate în tabelul alăturat. Putem compara variația de la un an la altul examinând diferența sau raportul.

IT&C ÎN ROMÂNIA (LA 1.000 LOCUITORI)

	2001	2002
Adrese Internet	1,2	2
Utilizatori Internet	33	64
Computere	39	45
Linii telefonice	180	187
Telefoane mobile	162	195

SURSA: ROLAND BERGER

Astfel:

– în 2002, numărul de posesori ai unui telefon mobil a crescut cu 726 000 față de 2001;

– numărul de deținători de computere a crescut în 2002 cu 15,4% față de 2001;

– utilizatorii de Internet au fost de aproape două ori mai mulți în 2002 față de 2001.

Interesul crescut al populației față de aceste domenii a determinat, în planul politicilor sociale și economice:

– alocarea de fonduri pentru achiziționarea a 500 000 de calculatoare pentru unitățile școlare;

– introducerea orelor de educație tehnologică și de informatică în școlile generale și în licee;

– încurajarea specializărilor universitare în domeniul tehnologiei informației;

– diminuarea impozitului pe venit pentru specialiștii din informatică.

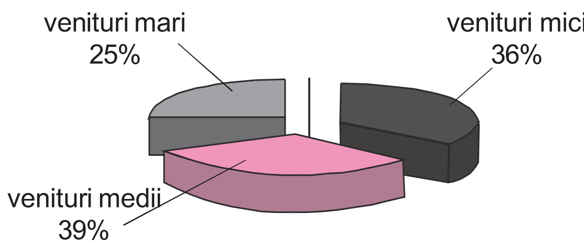
❹ *Informează-te și alcătuiește un scurt referat! Ce alte programe de interes național sau local au ca sursă de plecare studii care evidențiază expansiunea tehnologiei informației și a comunicațiilor?*

Exemplul 2

Un ziar a inițiat un studiu privind profilul-tip al cititorilor săi; studiul este necesar pentru orientarea materialelor publicate în ziar în direcția interesului cititorilor.

Una dintre întrebările studiului s-a referit la veniturile cititorilor ziarului, prin încadrarea în una dintre categoriile: venituri mici, venituri medii și venituri mari. Rezultatele sondajului, exprimate în procente, au fost publicate într-o revistă de specialitate și sunt cele prezentate în figura alăturată.

64% din cititorii ziarului au venituri medii și mari



❺ *Ce informații crezi că ar interesa categoriile sociale cu venituri mici?*

Dacă ai fi directorul / directoarea unui ziar orientat spre aceste categorii sociale, ce rubrici ai propune?

Redacția ziarului a hotărât să se orienteze spre categoriile sociale cu venituri medii și mari, publicând periodic informații despre:

– oportunități de afaceri;

– activitate bancară;

– politici economice;

– bursa locurilor de muncă.

Exerciții și probleme

Întrebările 1-4 se referă la rezultatele sondajului de opinie referitor la vizionarea programelor TV, prezentate în paginile anterioare. Folosește aceste date pentru a răspunde la următoarele întrebări:

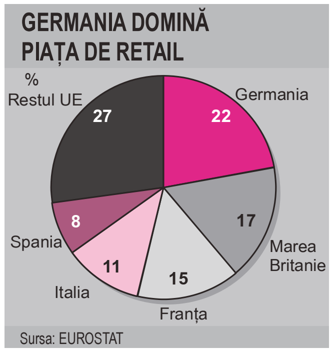
1. Cu cât este mai mic numărul celor care se uită la televizor o dată pe zi față de numărul celor care se uită de 2-6 ori pe săptămână?

2. Ce procent din numărul total de respondenți reprezintă numărul celor care se uită la televizor:
a) mai rar de o dată pe săptămână;
b) o dată pe zi;
c) de 4-6 ori pe săptămână;
d) de 2-3 ori pe zi?

3. Care este raportul dintre numărul celor care urmăresc:
a) programele de știri și programele de muzică;
b) filme și desene animate;
c) sport și documentare?

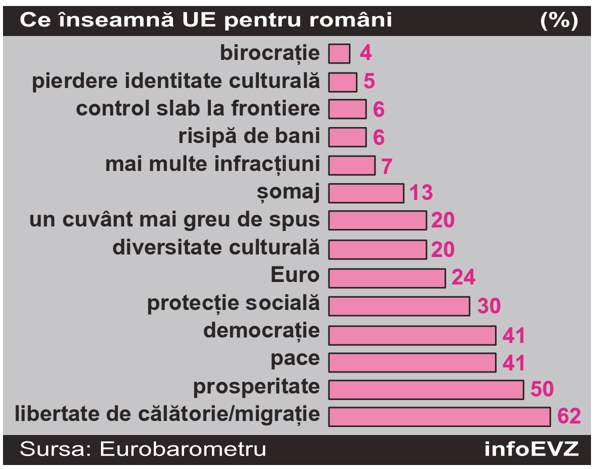
4. De câte ori este mai mare numărul celor care urmăresc programele de divertisment față de numărul celor care urmăresc talk-show-uri?

5. În imaginea alăturată este prezentată situația vânzărilor în supermarketurile din țările Uniunii Europene, în anul 2004.
a) Reprezintă printr-o diagramă cu bare aceleași informații.
b) Exprimă comparativ situația vânzărilor din aceste țări, prin raportare la vânzările din Germania.



Sursă: Capital, 50/2005/pag. 22

6. Rezultatele unui studiu statistic din 2006, referitor la percepția românilor privitoare la Uniunea Europeană, sunt prezentate sintetic în diagrama alăturată.



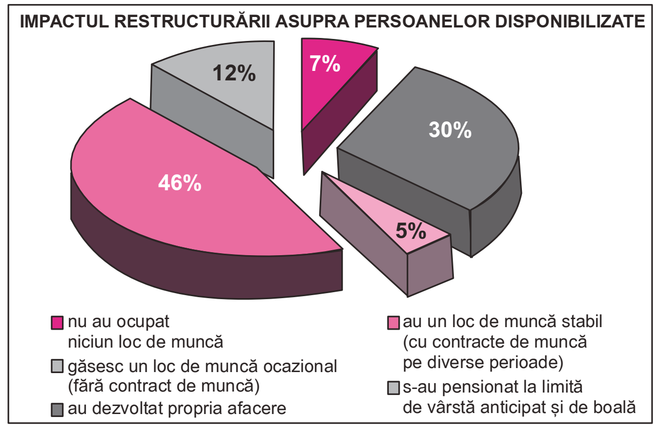
a) Într-un eseu de maxim două pagini, compară rezultatele acestui sondaj cu propriile așteptări privind integrarea României în UE.
b) La sondaj au participat 1200 de respondenți. Calculează câți respondenți au bifat fiecare item în parte.
c) În diagramă, apar percepții optimiste și percepții pesimiste. Realizează o diagramă circulară în care aceste tipuri (mai bine/mai rău) apar grupate.

7. Tabelul de mai jos, indică numărul de turiști străini în câteva dintre cele mai vizitate țări din lume în anii 2000 și 2001.

	Franța	Spania	SUA	Italia	China
2000	75,6	47,9	50,9	41,2	31,2
2001	76,5	49,5	44,5	39,1	33,2

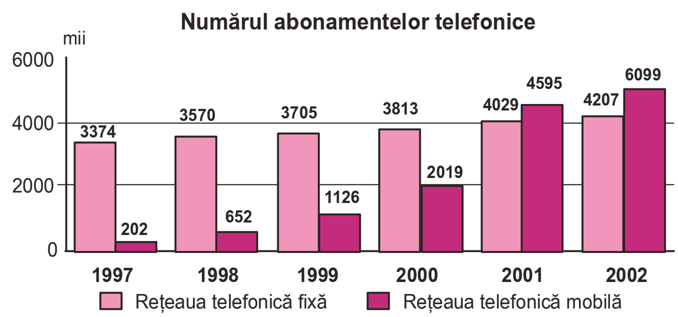
Reprezintă aceste date printr-un grafic cu bare duble.

8. Diagrama din imaginea de mai jos se referă la persoanele disponibilizate în perioada 1995-2005 din industria de prelucrare a metalelor neferoase.
a) Reprezintă aceleași informații printr-o diagramă cu bare.
b) Comentează distribuția frecvențelor diverselor categorii de personal disponibilizate.



Sursa: Săptămâna financiară

9. Într-o revistă de specialitate a apărut graficul cu bare de mai jos, referitor la evoluția numărului abonamentelor telefonice în 1997 și 2002.



a) Caracterizează procentual evoluția numărului de abonamente la telefonia fixă, respectiv la telefonia mobilă.
b) Folosește datele pentru a estima numărul abonamentelor la telefonia mobilă în 2008, dacă piața își păstrează aceeași tendință.
c) Să presupunem că ești președintele / președinta unei companii de telefonie mobilă. Ce politică de dezvoltare a companiei ai putea concepe pentru viitor, ținând cont de datele din reprezentarea de mai sus?

Analizăm și înțelegem!

♦ Modalități de comparare a datelor

Compararea datelor unor studii statistice se poate face în diverse feluri.

Uneori, pentru a reda sugestiv această comparare, este mai puțin importantă fiecare valoare în parte, în schimb are semnificație *media* valorilor.

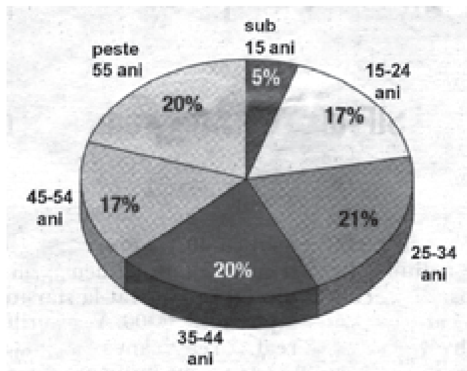
În numeroase situații, media dă o imagine pertinentă a ordinului de mărime al unei serii statistice.

Cuvântul „medie“ este adesea utilizat într-un sens diferit de cel strict cantitativ din statistică. El este sinonim cu „reprezentativ“, „uzual“, „normal“. De exemplu, cititorul mediu al revistei de automobilism este un bărbat de circa 45 de ani, sportiv, pasionat de curse și posesor de automobil.

Să analizăm!

Pentru a orienta mai bine specificul publicației, conducerea unui ziar este interesată de vârsta medie a cititorilor săi. Directorul general al ziarului cunoaște numărul zilnic de cititori și localitățile în care se distribuie cele mai multe exemplare. El a pus aceste date la dispoziția unui institut specializat și a solicitat efectuarea unui sondaj pe un eșantion reprezentativ de cititori. Rezultatele sondajului sunt cele prezentate în diagrama circulară alăturată, în care se consideră că grupa de vârstă „sub 14 ani“ are ca limită inferioară vârsta de 6 ani, iar grupa de vârstă „peste 55 ani“ are ca limită superioară vârsta de 85 de ani (în afara intervalului de vârstă [6; 85], procentul de cititori fiind practic neglijabil).

58% din cititorii ziarului au vârsta cuprinsă între 15 și 44 de ani.



Pentru unele serii statistice, media nu are nici o semnificație. Aceasta a generat și numeroase glume pe seama statisticii. De exemplu: „A.B. nu știa să înoate și s-a înecat într-un râu cu adâncimea medie de 30 cm. De ce? Era statician.“

Studiul nu precizează distribuția efectivelor în interiorul claselor statistice luate în calcul. Pentru a estima totuși vârsta medie a cititorilor ziarului, se face ipoteza că în fiecare clasă statistică cititorii sunt distribuiți uniform. În acest fel, media de vârstă a cititorilor ce se înscriu într-o clasă statistică este considerată ca fiind mijlocul intervalului ce determină clasa statistică respectivă.

❶ Verifică dacă informația menționată deasupra diagramei circulare alăturate este în concordanță cu datele de pe diagramă.

Ipoteza făcută trasformă datele cu caracter continuu ale studiului în următoarele date cu caracter discret:

Vârsta	10 ani	20 ani	30 ani	40 ani	50 ani	70 ani
Frecvența	5%	17%	21%	20%	17%	20%

Se obține în acest mod că media de vârstă a cititorilor ziarului este de (aproximativ) 40 de ani și 8 luni.

Exemplu: Managementul publicitar

Un ziar de publicitate, care se distribuie gratuit, trebuie să își atragă clienții pentru a nu fi tipărit în pierdere economică. De aceea, ziarul acordă facilități fiscale diverse (de exemplu, un anunț gratuit pentru alte 5 anunțuri plătite). Pentru a identifica ce alte facilități ar putea acorda, directorul ziarului are nevoie să definească „anunțul mediu“, din punctul de vedere al rândurilor conținute. El este hotărât ca, pentru anunțuri mai mari decât anunțul mediu, să stabilească o taxă mai mare prin comparație cu anunțurile mai scurte. În acest fel, un număr mai mare de oferte vor fi tipărite în fiecare număr al ziarului.

❷ Verifică toate calculele făcute pentru a determina media de vârstă a cititorilor ziarului, pe baza datelor din tabelul de frecvențe.

Pentru ultimele publicații s-a înregistrat următoarea situație:

Nr. de rânduri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. de anunțuri	15	27	81	96	72	51	42	18	3	1

Media pentru numărul de rânduri ocupate de anunțurile publicate este de 4,5. Având în vedere aceste calcule, redacția ziarului a fixat pentru patru apariții tarifele:

Nr. de rânduri	1 – 2	3 – 4	5 – 6	7 – 8	9 – 10
Preț (RON)	4	6	10	15	22

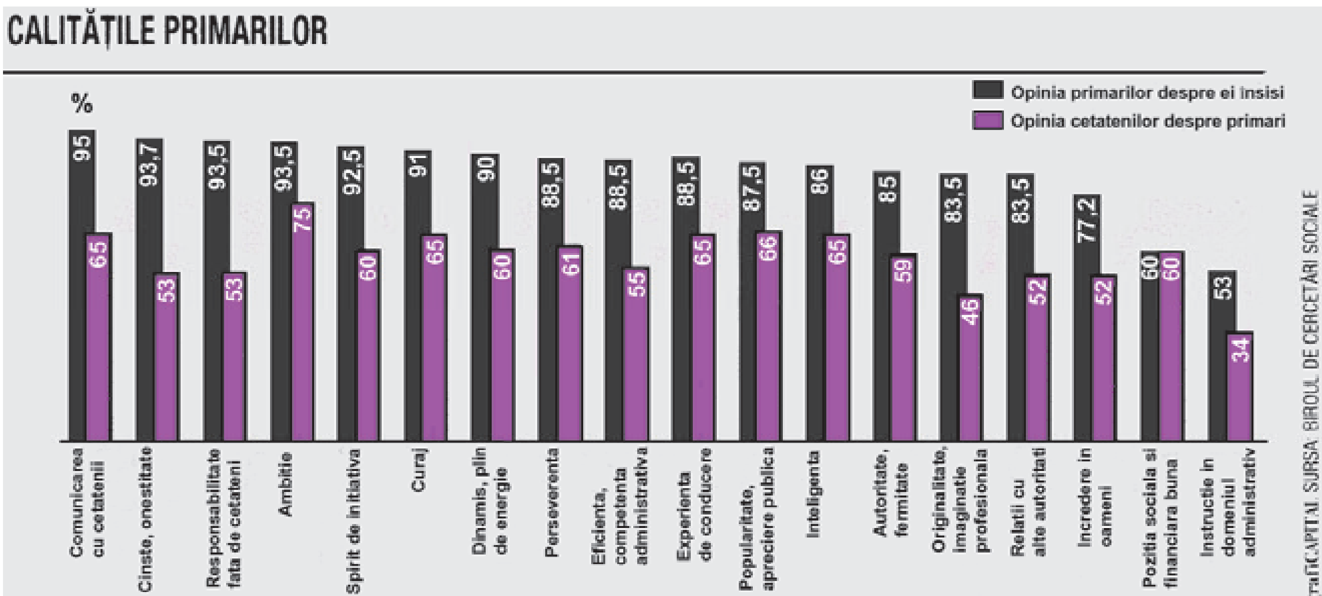
❸ Calculează media numărului de rânduri ale anunțurilor publicitare, pe baza datelor din tabel.

❹ Informează-te și răspunde! Care sunt tarifele pentru anunțuri la ziar? Care crezi că au fost criteriile pentru fixarea acestor tarife?

Să aplicăm!

În urma aplicării unor chestionare și a reprezentării grafice a datelor obținute, avem suficiente informații pentru a putea formula concluzii diverse. Această etapă de prelucrare a datelor statistice se dovedește a fi cea mai importantă din perspectiva utilității studiului.

Informațiile reprezentate mai jos au fost obținute în urma studiului „Atitudini și valori în administrația publică locală."



❺ Menționează populația statistică și eșantionul utilizate în acest studiu.

❻ Ce variabile au fost folosite?

❼ Completează un tabel în care notezi numărul de persoane din eșantion care au răspuns conform înregistrărilor din grafic.

❽ Transpune în câte o diagramă circulară răspunsurilor referitoare la spiritul de inițiativă.

❾ Alcătuiește un eseu în care să valorifici informațiile obținute din acest studiu. Stabilește un titlu cât mai interesant pentru acest eseu.

Prima etapă a studiului s-a bazat pe un sondaj de opinie în rândul cetățenilor, care a cuprins 1.372 de subiecți, selectați din 104 localități urbane și rurale din 38 de județe. A două etapă a constat dintr-un sondaj de opinie în rândul a 563 de reprezentanți ai autorităților publice locale. Ei provin din 120 de localități urbane și rurale din toate județele țării.

Pe baza datelor obținute putem formula următoarele concluzi:

1) În general, primarii au o altă percepție asupra calităților de care dau dovadă, față de percepția cetățenilor. De exemplu, 95% dintre primari cred că au o bună comunicare cu cetățenii, în timp ce doar 65% dintre cetățeni cred despre primarii lor acest lucru.

2) Atât primarii, cât și cetățenii, consideră că nu este nevoie ca reprezentanții lor să fie instruiți în domeniul administrativ.

Alte concluzii se pot formula răspunzând la următoarele întrebări:

În ce domeniu opiniile autorităților și ale cetățenilor coincid?

În ce domeniu opiniile autorităților și ale cetățenilor sunt cele mai distanțate?

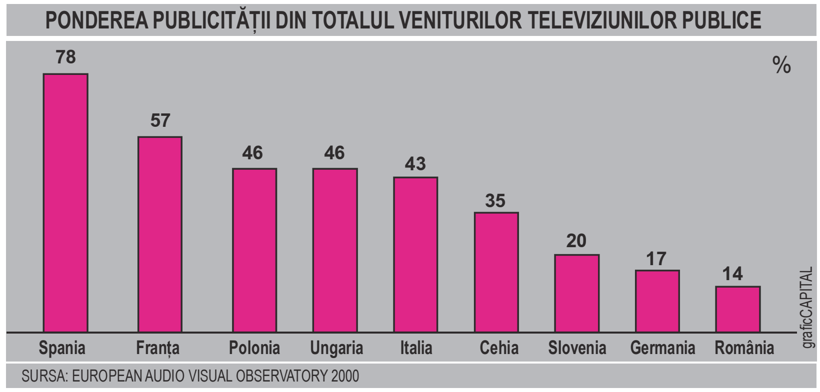
Care dintre calitățile primarilor este cea mai apreciată de către cetățeni? Dar de către primari?

Exerciții și probleme

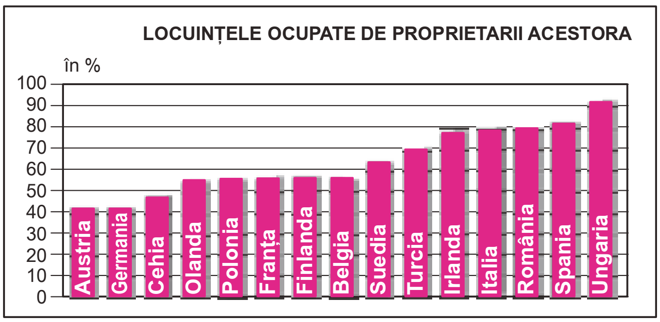
1. În ultima vreme se discută insistent despre ideea ca televiziunea publică să nu mai obțină venituri din publicitate. Pentru informarea opiniei publice despre acest subiect, un ziar a publicat studiul alăturat.

a) De câte ori este mai mare ponderea publicității la televiziunea din Italia, față de televiziunea din România?

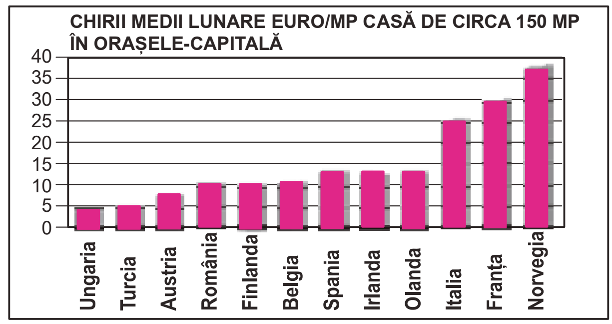
b) Sunt egale veniturile obținute din publicitate la televiziunile din Polonia și Ungaria?



2. În unul dintre ziarele cu profil financiar a apărut un studiu statistic privind piața imobiliară în câteva țări europene. Două dintre reprezentările comparative ale studiului apar și în imaginile de mai jos.



Sursa: Revista Capital



Sursa: Revista Capital

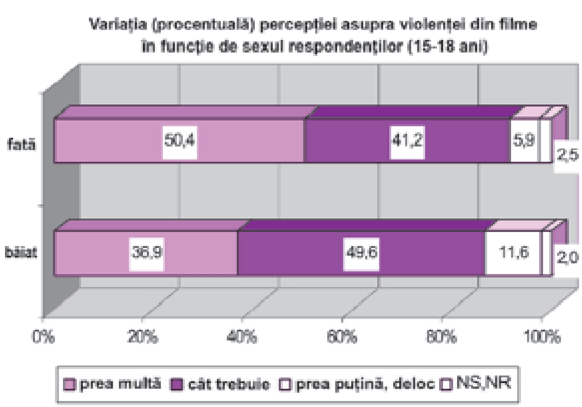
a) Calculează prețul mediu al unui apartament de 150 mp în capitalele țărilor ce apar în studiul prezentat.

b) Folosește diagramele pentru a reprezenta procentul de locuințe oferite spre închiriere, în țările analizate. Poți presupune că locuințele care nu sunt ocupate de proprietarii acestora, sunt oferite spre închiriere.

c) Corelează cele două diagrame și formulează două explicații ale prețurilor practicate.

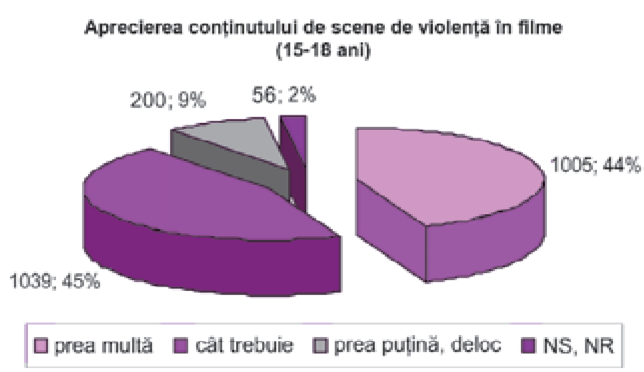
3. Un studiu comandat de CNA (Consiliul Național al Audiovizualului) a urmărit să determine imaginea pe care o au adolescenții în privința nivelului de violență din emisiunile de televiziune. Ca urmare a aplicării unui chestionar, pe un eșantion de 2300 de băieți și fete, cu vârste între 15 și 18 ani, s-au obținut datele reprezentate în diagrama cu bare de mai jos.

a) Reprezintă prin diagrame circulare opinia fetelor, respectiv a băieților, privind violența în emisiunile film.



b) Datele globale ale studiului au fost reprezentate în diagrama de mai jos.

Corelează reprezentările și află câți băieți și câte fete au participat la acest studiu.



Aplicăm și dezvoltăm!

Temele de statistică pot fi abordate prin intermediul proiectelor.

♦ Cum organizăm un proiect?

Proiectul începe în clasă, prin conturarea obiectivelor, formularea sarcinii de lucru și (dacă este cazul) precizarea echipei care îl realizează. În afara orelor de curs, dar sub îndrumarea profesorului, elevii stabilesc metodologiile de lucru, își definesc statutul și rolul în cadrul grupului și fixează termene pentru diferite etape ale proiectului. După colectarea datelor și organizarea materialului, proiectul se încheie în clasă, prin prezentarea rezultatelor.

❶ Informează-te și răspunde! Ce proiecte se derulează în liceul tău?

În realizarea unui proiect, este utilă parcurgerea următoarelor etape, în cadrul echipei de lucru.

1. Se stabilește o listă de întrebări esențiale, legate de tematica proiectului.
2. Se alcătuiește un plan de acțiune, în care apar termene și responsabilități. Este important ca fiecare membru al echipei să respecte, pe cât posibil, acest plan.
3. Se lucrează cât mai mult împreună cu colegii din grupul de lucru. Dincolo de scopurile științifice, un proiect are și un scop social – ne simțim minunat când echipa noastră „merge bine”!
4. Membrii echipei de lucru se documentează cât mai amănunțit asupra problematicii propuse, cer sfaturi, consultă specialiști în domeniu.
5. Se prelucrează și se organizează datele. Proiectul trebuie să se concretizeze într-un produs finit.
6. Se prezintă rezultatele și concluziile proiectului într-un mod cât mai clar, dar care reflectă atât personalitatea, cât și creativitatea echipei.

♦ Ce teme de proiecte putem dezvolta la Statistică?

Exemplul 1: Compararea rezultatelor obținute de clase diferite la un același test

Poți dezvolta un proiect ce vizează compararea performanțelor școlare a două clase diferite.

Pentru aceasta, este necesar ca populația statistică să fie pusă în situația de a răspunde acelorași stimuli: testele date claselor să conțină aceleași subiecte (sau subiecte foarte asemănătoare), să fie aplicate în același timp și să fie corectate după același barem de punctaj.

❷ Identifică situații în care compararea rezultatelor unor clase diferite este benefică pentru progresul colar al elevilor.

După colectarea și reprezentarea datelor, este util să compari performanțele colegilor din cele două clase folosind media, mediana, abaterea medie pătratică. Analizează motivele diferențelor constatate și formulează concluzii.

Exemplul 2: Preferințele colegilor

O altă temă pentru proiect își poate propune să investigheze preferințele muzicale, sportive, de petrecere a timpului liber etc., ale colegilor.

Pentru aceasta este necesar:

– să decizi forma de interacțiune cu respondenții; aceasta poate fi un chestionar, un interviu individual sau un interviu de grup
– să colectezi datele
– să reprezinți datele culese în forme cât mai adecvate, pentru a obține maximum de informații pertinente
– să analizezi datele obținute, folosind indicatori de poziție și indicatori de dispersie
– să formulezi concluzii
– să prezinți sintetic și accesibil activitatea desfășurată și rezultatele obținute.

♦ Cum proiectăm chestionarele?

În proiectarea unui chestionar, este necesar să ții cont de faptul că întrebările trebuie să fie clar formulate (adică să conțină toate atributele necesare pentru ca respondentul să înțeleagă bine cerința), să nu presupună ambiguități (adică sensul întrebării să fie univoc), să fie relativ scurte, vizând un singur aspect.

Se poate întâmpla ca întrebările la care te gândești să nu fie relevante sau de interes pentru populația statistică pe care o ai în vedere pentru proiect. De aceea, este util să aplici o formă preliminară a chestionarului pe câteva persoane, să prelucrezi răspunsurile primite și să reformulezi sau să completezi întrebările, astfel încât acestea să satisfacă mai bine scopul propus. De multe ori, pentru a elimina ambiguitățile unui chestionar, întrebările conțin variante posibile de răspuns.

Exemplu

În cadrul unui studiu statistic au fost adresate unor elevi de liceu câteva întrebări la care se poate răspunde prin marcarea unui semn distinctiv în spațiul corespunzător răspunsului ales. Trei dintre aceste întrebări au fost:

1) Care dintre materiile opționale din tabelul alăturat v-ar interesa mai mult?

Cultură și civilizație franceză	
Astronomie și astrologie	
Folclorul românesc	

2) Ce vârstă aveți?

15 ani	16 ani	17 ani	18 ani	19 ani	20 ani

3) Ce înălțime aveți?

sub 140 cm	între 140 și 160 cm	între 160 și 170 cm	între 170 și 180 cm	peste 180 cm

❸ *Notează într-un tabel oferta de opționale a liceului vostru. Întreabă colegii și completează un tabel cu opțiunile lor pentru clasa a XII-a. Care dintre opționale întrunesc cele mai multe „voturi“?*

❹ *Proiectează un chestionar pentru un proiect cu tema: „Preferințele artistice ale tinerilor”. Compară întrebările propuse de tine cu colegul/colega de bancă.*

Cele trei întrebări sunt diferite nu doar prin conținutul lor, dar și prin natura răspunsurilor ce pot să apară. În primul caz, fiecare elev răspunde practic cu DA sau NU la câteva întrebări succesive de tipul: „Vă interesează Cultura și civilizația franceză?”. Răspunsurile la a doua întrebare se exprimă printr-un număr și poate lua doar câteva valori, în timp ce răspunsurile la a treia întrebare pot lua, în principiu, orice valoare dintr-un interval dat.

♦ Cum desfășurăm interviurile?

În desfășurarea interviurilor, este util să pornești de la un plan prestabilit privind conținutul întrebărilor, pe care să-l adaptezi pe parcurs în funcție de intervențiile interlocutorului/interlocutoarei.

Rezervă suficient timp pentru fiecare interviu și, mai ales, ai grijă să nu induci răspunsul pe care l-ai dori, din propria perspectivă! Pentru aceasta, formulează întrebări cât mai neutre și întreabă tot timpul „De ce?”. De asemenea, nu te grăbi să aprobi sau să dezaprobi răspunsurile primite, chiar dacă respondentul cere explicit confirmări asupra corectitudinii opiniilor sale. Poți îndemna interlocutorul să continue, întrebându-l: „Tu cum crezi că este corect?” sau „De ce crezi așa?”. Pentru a valorifica interviurile cât mai bine, este util să le înregistrezi audio și, ulterior, să le transcrii.

Exerciții și probleme

1. Punctajele elevilor participanți la un concurs se distribuie crescător după cum urmează:

$$\underbrace{6;\ 7;\ 7;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 9;\ 9;\ 9;\ 10;}_{12\ \text{elevi}}\ \underbrace{\boxed{10}}_{\text{mediana}}\ ;\ \underbrace{10;\ 10;\ 11;\ 11;\ 12;\ 13;\ 13;\ 13;\ 14;\ 15;\ 15;\ 16}_{12\ \text{elevi}}$$

a) Calculează media punctajelor de la concurs.
b) Compară media cu mediana.
c) Reprezintă grafic datele din problemă.

2. Dezvoltă, împreună cu grupul tău de lucru, un proiect în care să investighezi ce tipuri de telefoane mobile și ce tip de abonament au colegii din clasele a XI-a. Compară seria statistică obținută cu o serie similară, realizată prin chestionarea colegilor de la clasele a XII-a.

3. Simulează desfășurarea unui interviu, în care se interesează percepția colegilor asupra utilității metodelor statistice. Identifică momentele în care interviul nu a decurs bine.

4. Dezvoltă, împreună cu grupul tău de lucru, un proiect de statistică. Alege una dintre temele următoare.
a) Opțiunile colegilor de liceu pentru viitoarea profesie.
b) Variante de petrecere a timpului liber, preferate de colegii din liceu.
c) Modalitatea de transport și durata drumului de acasă până la școală.
d) Mărci de mașini preferate de colegii din liceu.
e) Tipul de lectură preferată de colegii din liceu.
f) Personalități din România – opțiuni ale adolescenților.

5. Formulează șase variante posibile de răspunsuri la întrebarea următoare, adresată respondenților în cadrul unui sondaj: „Care este principala problemă cu care se va confrunta România, în primii ani după aderarea la Uniunea Europeană?”

6. Urmărește mass-media și găsește datele unui sondaj de opinie. Formulează aprecieri critice asupra modului în care au fost formulate întrebările sondajului.
Modifică eventual unele dintre întrebări și aplică același tip de chestionar colegilor tăi de liceu.
Compară rezultatele sondajului, așa cum apar în mass-media, cu propriile rezultate.

7. Într-un ziar de profil a apărut un comentariu privind pseudo-sondajele de opinie.

„CELEBRIZAREA” MESAJULUI ȘI A CANALULUI

Există o rețetă consacrată de decenii de mass-media occidentală, dar folosită preponderent în zona presei tabloide sau glossy. Rețeta este simplă: o revistă –FHM, de exemplu, își întreabă cititorii care sunt cele mai sexy vedete pe care le știu, iar pe baza acestui „sondaj” realizează un clasament al respectivelor personalități mondene. Clasament care, coroborat cu autoritatea publicației în rândul revistelor internaționale pentru bărbați, devine știre în sine, transmisă pe multe alte canale de informare. Nu contează că, după două săptămâni, o altă revistă de profil va veni cu un alt astfel de clasament, contează că „FHM zice că vedeta cutare este cea mai tare”.

Totul pornește chiar de la conceptul de celebritate. Potrivit unor lucrări de specialitate, precum studiul „High Visibility”, ale experților media și marketind Irving Rein, Philip Kotler și Martin Stoller, o vedetă este acea persoană faimoasă într-o societate, care atrage atenția presei și a publicului și care se menține acolo prin activitate intensă în zona divertismentului de masă. Iar unul dintre cele mai facile mijloace de a realiza acest lucru este să fie inclusă în miile de „sondaje” și clasamente prin care instituțiile de presă, apelând la propriii consumatori, încearcă să-și mențină profilul pe piață.

Potrivit unui alt studiu, „Understanding Media: Inside Celebrity”, al expertului media Jessica Evans, aceste lucrări sunt vitale pentru clădirea statutului de celebritate.

Costin Ionescu

a) Identifică în mass-media știri care se pot înscrie în direcția conturată de fragmentul reprodus mai sus.
b) Într-un eseu de 3 pagini, comentează critic concluziile la care a ajuns grupul tău de lucru, în desfășurarea unui proiect de statistică.

Am reușit... ?!?

Prin parcurgerea acestei unități de învățare, am reușit....

- să identific metode de colectare și interpretare a datelor
- să interpretez date statistice cu ajutorul graficelor și al diagramelor
- să utilizez date statistice pentru analiza de caz
- să transpun în limbaj matematic, cu mijloace statistice, probleme practice
- să caracterizez situații reale prin interpretarea statistică a datelor?

Test de verificare

1. Precizează două modalități prin care poți afla cu aproximație ce cantitate de apă minerală se consumă lunar în orașul vostru.

2. La ediția I a manifestării „Educația adulților: Clopoțelul sună și pentru cei mari", la care diverse firme au oferit oportunități de formare profesională, a fost adresată vizitatorilor întrebarea: „Ce cursuri dintre cele propuse vă interesează?". Răspunsurile primite sunt cuprinse în tabelul de mai jos. Care dintre cursuri a întrunit cele mai multe opțiuni? Dar cele mai puține?

Ce cursuri vă interesează? (%)	Da	Nu
Despre om și societate	31,48	68,52
Medicină și educație	25,93	74,07
Tehnico-aplicative	5,56	94,44
Formare profesională continuă	40,74	59,26
Cultură și civilizație	27,78	72,22
Literatură și artă	16,67	83,33
Științe naturale	5,56	94,44
Matematică, fizică, chimie	3,70	96,30
Limbi străine	42,59	57,41
Informatică	22,22	77,78

3. La un Târg al locurilor de muncă, ofertanții au fost întrebați dacă au mai participat la astfel de manifestări și în trecut. Răspunsurile lor, exprimate procentual, au fost:

Da 40%
Nu 60%

Reprezintă printr-o diagramă circulară aceste date.

4. Un studiu al Ministerului Transporturilor prezintă situația întârzierilor la sosirea în Brașov a trenurilor de călători. Reprezintă printr-o histogramă aceste date:

Întârzieri	între 0 și 15 min.	între 15 și 45 min.	între 45 min. și 3 ore
Nr. trenuri	720	45	21

5. Să presupunem că ești director de publicitate al unei firme și că dispui de 25.000 de dolari, pe care vrei să îi investești în publicitatea prin televiziune.
Într-un cotidian central citești următoarele date, obținute în urma unui sondaj de opinie efectuat de AGB Data Research.

> Pentru reclame în timpul emisiunilor de știri, taxa la Antena 1 este de 4.500 $ pe 30 secunde, iar la PROTV este de 6.000$ pe 30 de secunde.
>
> „Observatorul" de la Antena 1 are o contribuție importantă la mărirea audienței postului pe întreaga zi (cam 10%), în timp ce „Știrile" PROTV contribuie la audiența sa zilnică cu doar 8%.
>
> În săptămâna 18-24 martie „Știrile" PROTV au câștigat bătălia. Au o medie de 12,5%, în timp ce „Observatorul" are doar 11,4%.

La care dintre cele două televiziuni este mai indicat să investești, pentru ca reclama firmei la care lucrezi să fie urmărită de cât mai multe persoane? Argumentează răspunsul!

Lectură

Primele înregistrări statistice se pare că au apărut simultan cu inventarea scrierii, în urmă cu peste 6 milenii, în Egipt și China, unde conducătorii erau interesați să cunoască numărul populației, al celor apți să lupte, al sclavilor, al cantității de produse agricole, pentru stabilirea nivelului birurilor. În statul roman, pe vremea republicii (440 î.Hr.) a fost creată funcția de cenzor (census), care avea atribuții și în efectuarea recensământului populației. Sunt cunoscute recensămintele efectuate în 28 î. Hr. 8 d. Hr. 14 d. Hr., în perioada lui Octavian Augustus.

În Dacia Romană au fost efectuate recensăminte, asemănătoare cu cele din restul imperiului, numite census provincial.

Parcurgând axa timpului, găsim rădăcini ale gândirii statistice încă în perioada renascentistă. Astfel matematicianul L. Pacioli (1445-1514) încerca încă din 1494 să rezolve probleme statistice. Mai târziu, G. Cardano (1501-1576) și N. Tartaglia (1499-1557) au atacat și ei aceleași probleme, având meritul de a atrage atenția asupra necesității unui instrument și a unei noi gândiri matematice pentru rezolvarea lor. În ultima parte a vieții, J. Bernoulli studia probleme de demografie prin prisma teoriei probabilităților.

Unitatea de învățare 5

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Efectuează:
a) $2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 0$ b) $1{,}2 \cdot 3 + 0{,}4 \cdot 0 - 1{,}5 \cdot 2$
c) $-1{,}5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 5$

Calcul algebric

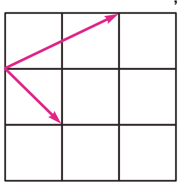
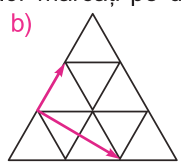
2. Scrie mai simplu:
a) $x + x + x + x$ b) $x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x$ c) $x^2 \cdot x - x \cdot x^2$

Poziționare în plan

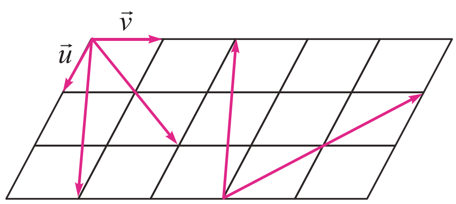
3. Desenează planul unei săli de spectacol, în care sunt 20 de rânduri cu câte 15 fotolii. Indică pe acest plan fotoliul corespunzător biletului pe care scrie: rândul 4, locul 7.

4. Reprezintă pe un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-1; 4)$; $B(3; 2)$; $C(1; 0)$; $D(0; -3)$.

Operații cu vectori

5. Desenează suma și diferența vectorilor marcați pe desen.
a) 
b) 

6. Exprimă vectorii marcați prin culoare în funcție de $\vec{u}$ și $\vec{v}$.



Proprietăți ale operațiilor cu numere

7. În imaginea alăturată apare rezultatul înmulțirii 2359×487, așa cum a fost el afișat pe ecranul unui calculator de buzunar. Precizează rezultatele următoarelor operații, fără să le mai efectuezi de fiecare dată.

a) 487×2359;   b) $2359 \times 400 + 2359 \times 87$;   c) $2300 \times 487 + 59 \times 487$.

8. Alege propozițiile adevărate!
a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$ b) $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y \neq y \cdot x$ c) $\forall z \in \mathbb{R},\ z \cdot 1 = z$.

Elemente de logică

9. Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții!
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ b) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y = y - x$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \neq y + x$ d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y \neq y \cdot x$.

10. Formulează propoziția obținută prin negarea enunțului: orice două numere reale x și y au proprietatea $x^2 + y^2 \geqslant 4$.

Matrice

Calcul tabelar

Ne amintim și explorăm!

♦ Cum operăm cu tabelele de date?

În multe situații din viața cotidiană este util să organizăm datele în tabele. În acest fel, avem o imagine globală asupra situației descrise și putem opera mai ușor cu datele înregistrate.

Exemplul 1: Evidența vânzărilor

Rețeaua de magazine „Simfonia” comercializează CD-uri muzicale. Pentru a putea compara eficiența echipelor de vânzări din două magazine, managerul firmei a cerut situația vânzărilor pentru fiecare articol în parte, în lunile noiembrie și decembrie. Iată o parte a tabelelor completate cu această ocazie.

Simfonia Brașov

Denumire produs / Luna	Beethoven *IX*	Beatles *Love Songs*	Bach *Arta fugii*	Berlioz *Fantastica*
noiembrie	48	86	121	27
decembrie	64	102	87	56

Simfonia Bacău

Denumire produs / Luna	Beethoven *IX*	Beatles *Love Songs*	Bach *Arta fugii*	Berlioz *Fantastica*
noiembrie	63	51	157	32
decembrie	56	92	149	40

❶ Informează-te și răspunde! Cine a fost Berlioz? La ce se referă „Fantastica”?

Tabelele oferă atât informații comparative, cât și posibilitatea de a obține un centralizator al vânzărilor. Pentru aceasta „adunăm” tabelele prin suprapunere și obținem:

48	86	121	27
6			

63	51	157	32
56	92	149	40

=

111	137	278	59
120	194	236	96

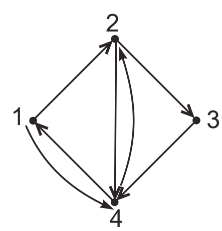
Avem astfel situația totală a vânzărilor, din cele două magazine.

❷ Câte CD-uri Beatles s-au vândut în total în cele două magazine?

❸ Ce reprezintă numărul 137 din ultimul tabel?

Exemplul 2: Codificarea grafurilor

În imaginea alăturată este desenat graful orientat corespunzător străzilor unui cartier. Pentru a înregistra sintetic informația în vederea determinării unor drumuri optime, o firmă de transport a preferat codificarea grafului printr-un tabel cu numere.



În tabel apare 1 în pătrățelul din linia i și coloana j dacă nodurile i și j sunt unite printr-un arc (de la i la j); dacă un astfel de arc nu există, atunci în tabel apare 0. Graful din imaginea de mai sus a fost deci codificat prin tabelul alăturat.

$$\begin{array}{r c} & \text{coloana 3} \downarrow \\ & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

linia 2 →

⚠ Pătrățelul marcat pe tabel este situat pe locul (2; 3).

❹ Identifică pătrățelul de pe locul (4; 2). Ce număr apare în acest loc?

❺ *Cum crezi că se poate codifica un graf neorientat?*

Din modul în care se face codificarea, putem deduce că:

- numărul de arce ale grafului corespunde numărului de apariții în tabel ale lui 1;
- numărul de arce care pleacă din nodul i corespunde aparițiilor lui 1 pe linia i;
- numărul de arce care sosesc în nodul j corespunde aparițiilor lui 1 pe coloana j.

Exemplul 3: Situația încasărilor

Firmele „Alfa”, „Beta” și „Gama” asamblează computere, pe care le vând prin magazinele firmei „Computers S.R.L.”. Pentru primele patru luni ale anului, serviciile specializate ale firmelor au întocmit următoarele situații:

Serviciul desfacere

Numărul de PC-uri vândute lunar

	Alfa	Beta	Gama
Magazinul 1	50	100	80
Magazinul 2	70	100	40

Serviciul marketing

Prețul unitar al PC-urilor (lei)

	I	F	M	A
Alfa	420	410	440	400
Beta	350	360	340	350
Gama	520	520	510	500

❻ *Ce reprezintă numărul 80 din primul tabel? Dar numărul 360 din al doilea tabel?*

La sfârșitul perioadei, serviciul contabilitate dorește să aibă o situație clară a încasărilor din cele două magazine, în fiecare dintre cele patru luni.

❼ *Explică modul de calcul al încasărilor din luna ianuarie în magazinul 1.*

De exemplu, încasările din magazinul 1 în ianuarie au fost de:

$50 \times 420 + 100 \times 350 + 80 \times 520 = 97\,600$ lei

Observăm că numerele care apar în acest calcul provin din prima linie, respectiv din prima coloană a celor două tabele.

❽ *Explică modul în care procedăm, pentru a afla valoarea vânzărilor din magazinul 2, în februarie.*

Analog, pentru a calcula încasările din magazinul 1 în luna martie, folosim numerele de pe linia „magazinul 1” din primul tabel și numerele de pe coloana „martie” din al doilea tabel:

$50 \times 440 + 100 \times 340 + 80 \times 510 = 96\,800$ lei

❾ *Completează tabelul încasărilor lunare cu datele care mai lipsesc. În ce lună s-au obținut cele mai mari încasări?*

Putem proceda în același mod pentru a calcula încasările lunare ale fiecărui magazin. Rezultatele calculelor au fost centralizate în tabelul alăturat.

Încasări lunare

	I	F	M	A
Magazinul 1	97600	98100	96800	
Magazinul 2	85200		85200	83000

Exerciții și probleme

1. Domnul Popescu a depus mai multe sume de bani la câteva bănci, pe timp de 1 an. Ratele dobânzilor anuale și sumele depuse sunt cuprinse în tabelul alăturat.
Ce dobândă totală va încasa domnul Popescu după 1 an?

Suma	3000	4000	2000
Rata dobânzii	20%	15%	17%

2. La o bancă se acordă o dobândă de 15% pentru depunerile pe termen de un an. Organizează într-un tabel situația conturilor la începutul și la sfârșitul anului pentru: Ana, Dragoș, Ștefan și Matei care au depus fiecare 3 400, 6 800, 7 200, respectiv 12 100 lei.

3. a) Care este prețul unui produs achiziționat de magazinul „Mega“ cu 145 lei, dacă i se aplică un adaos comercial de 20%?
b) Completează tabelul următor și reprezintă grafic variația prețului de vânzare în funcție de prețul de achiziție.

Denumire produs	Aparat ras	Oală bucătărie	Mănuşi menaj	Perie păr	Trusă voiaj	Agrafe
Preţ achiziţie (lei)	16,50	72,50			19,50	
Preţ de vânzare (lei)			1,80	4,44		1,16

4. Magazinul „Calculus“ vinde calculatoare de buzunar.
Folosește tabelele pentru a afla încasările în fiecare dintre cele două luni.

Tipul calculatorului	CASIO	SHARP	CITIZEN
Preţul unitar	35	30	40

Tipul calculatorului	Nr. de bucăţi vândute	
	Mai	Iunie
CASIO	100	50
SHARP	200	400
CITIZEN	250	150

Matrice și operații cu matrice

Analizăm și generalizăm!

♦ Ce este o matrice?

Pentru a ține evidența vânzărilor, administratorul unei papetării completează săptămânal un tabel din care redăm mai jos doar o secvență.

	Pixuri	Creioane	Caiete
L	300	200	50
M	150	200	125
M	225	75	200
J	89	234	145
V	200	150	70

În acest tabel, fiecare element este caracterizat de poziția lui pe coloană (vertical – sortimentul de produse) și pe linie (orizontal – ziua din săptămâna când s-a efectuat vânzarea).

❶ Caracterizează poziția numărului 145 în tabelul cu evidența vânzărilor.

Pentru a simplifica scrierea, la matematică notăm tabelul anterior astfel:

$$\begin{pmatrix} 300 & 200 & 50 \\ 150 & 200 & 125 \\ 225 & 75 & 200 \\ 89 & 234 & 145 \\ 200 & 150 & 70 \end{pmatrix}.$$

Acest tabel se numește *matrice* cu 5 linii și 3 coloane.

În general

Fie E o mulțime de numere reale. Vom numi *matrice de tipul (m, n) cu elemente din mulțimea E*, orice tabel de forma următoare, în care numerele a_{ij} sunt numere din mulțimea E.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Putem folosi pentru matricea de mai sus și notația $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

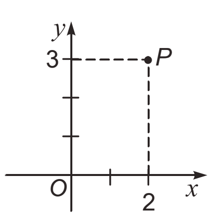
Dacă tipul matricei este precizat, putem nota pe scurt $A = (a_{ij})$.

❷ Scrie o matrice de tipul (2, 3) cu elemente din mulțimea $\mathbb{Q}$.

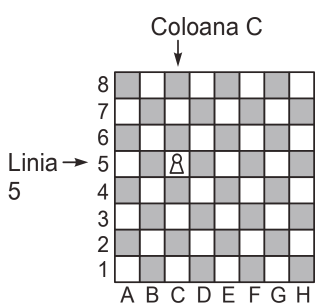
⚠ O matrice în care numărul de linii este egal cu numărul de coloane se numește matrice pătratică. Mulțimea matricelor pătratice de tip (m, m) cu elemente din E, se notează $\mathcal{M}_m(E)$; m se mai numește și ordinul acestor matrice.

Mulțimea tuturor matricelor de tip (m, n) cu elementele din mulțimea E se notează prin $\mathcal{M}_{m,n}(E)$.

Să observăm!



În sistemul ortogonal de axe, punctul P are cordonatele (2; 3).



Pe tabla de șah, pionul este așezat pe câmpul C5.

$$\begin{array}{cc} & \text{Coloana 2} \\ X = & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 10 \\ 6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow \text{Linia 3}$$

În matricea X, numărul -7 ocupă poziția (3; 2): $x_{3,2} = -7$.

❸ Observă asemănări și deosebiri între cele 3 moduri de raportare, sugerate în exemplele alăturate. Cât este $x_{2,3}$ în matricea X?

♦ Cum definim egalitatea matricelor?

Să comparăm!

Pentru un studiu statistic, Alina, Dan și Silviu au avut de completat un tabel cu temperaturile înregistrate în orașul lor, în câteva zile și la anumite ore, stabilite anterior. Iată cum arată tabelele lor de date:

Alina

	L	M	M	J
8^{00}	12°C	10°C	10°C	9°C
12^{00}	18°C	14°C	15°C	12°C
16^{00}	16°C	14°C	14°C	10°C

Dan

	L	M	M	J
8^{00}	12°C	10°C	10°C	9°C
12^{00}	18°C	16°C	15°C	12°C
16^{00}	16°C	14°C	14°C	10°C

Silviu

	L	M	M
8^{00}	12°C	10°C	10°C
12^{00}	18°C	14°C	15°C
16^{00}	16°C	14°C	14°C

Observăm că, deși înregistrează temperaturi în același oraș, la aceleași ore și în aceleași zile, primele două tabele nu sunt identice: înregistrările făcute marți, la ora 12^{00}, nu coincid. De aceea, deși celelalte date corespund, matricele obținute de Alina și de Dan nu sunt egale.

Ultimul tabel, completat de Silviu, confirmă înregistrările Alinei; Silviu a neglijat însă să consemneze temperaturile de joi. De aceea, nici matricele obținute de Alina și Silviu nu sunt egale.

❹ *Ce temperatură a înregistrat Alina miercuri, la ora 16^{00}? Când a înregistrat Dan temperatura minimă?*

În general

Două matrice sunt egale dacă au același număr de linii și de coloane și dacă elementele corespunzătoare sunt egale.

Altfel spus: matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ se numesc egale dacă $a_{ij} = b_{ij}$, pentru orice indici (i, j).

❺ *Află x și y dacă matricele $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ sunt egale.*

♦ Cum se adună matricele?

Să analizăm!

Firma *Aqua*, care produce trei sortimente de umbrele, își desface produsele prin două puncte de vânzare. Pentru lunile octombrie și noiembrie, situația vânzărilor este înregistrată în matricele următoare:

$$\begin{pmatrix} 214 & 108 & 156 \\ 312 & 154 & 171 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 81 & 45 & 71 \\ 92 & 57 & 83 \end{pmatrix}$$

primul magazin al doilea magazin

❻ *Explică ce reprezintă fiecare număr din matricele ce conțin situația vânzărilor de umbrele.*

Situația vânzărilor firmei Aqua în cele două luni, pentru fiecare dintre sortimente, se obține adunând termen cu termen matricele date. Matricea astfel obținută este *suma* matricelor date:

$$\begin{pmatrix} 214 & 108 & 156 \\ 312 & 154 & 171 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 81 & 45 & 71 \\ 92 & 57 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 & 153 & 227 \\ 404 & 211 & 254 \end{pmatrix}$$

În general

Două matrice se pot aduna numai dacă sunt de același tip, adică au același număr de linii și de coloane.

Suma matricelor $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$, unde $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, este matricea $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pentru orice indici (i, j).

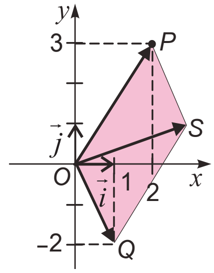
Notăm $C = A + B$.

❼ *Pentru $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculează $X + Y$ și $X + X$.*

Să aplicăm!

Într-un sistem de axe ortogonale, orice vector corespunde unei matrice de tip (2; 1), care exprimă descompunerea vectorului după cele două axe.

De exemplu, pentru vectorii din imagine, putem scrie:



$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, coordonatele lui S se obțin adunând matricele termenilor:

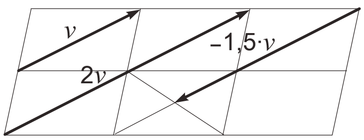
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deci S este punctul de coordonate (3; 1).

8 Exprimă în coordonate suma vectorilor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ și $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verifică prin desen corectitudinea calculelor.

♦ Cum definim produsul dintre o matrice și un scalar?

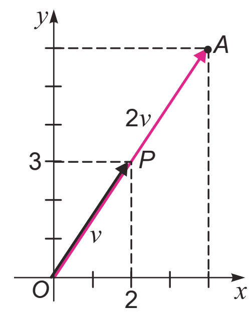
Să ne amintim!



În afară de adunarea vectorilor, am mai definit o operație importantă: înmulțirea unui vector cu un număr real.

Pentru vectorii din figura din dreapta, egalitatea $2 \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ se scrie matriceal:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



Observăm că elementele celei de-a doua matrice s-au obținut din elementele corespunzătoare ale primei matrice, prin înmulțire cu 2.

În general

Prin înmulțirea unei matrice cu un număr real se obține o matrice de același tip cu matricea inițială.

Produsul matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cu numărul real λ este matricea $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $p_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ pentru orice indici (i, j).

Notăm: $P = \lambda \cdot A$.

9 Desenează un vector $\vec{u}$, apoi reprezintă grafic vectorii: $2 \cdot \vec{u}$, $(-2) \cdot \vec{u}$, $0 \cdot \vec{u}$.

10 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determină o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X = 3 \cdot A$.

♦ Ce relație există între adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari?

Să comparăm!

Dacă a este un număr real, atunci $a + a + a = 3 \cdot a$.

Această relație se păstrează dacă $\vec{a}$ este un vector în plan: $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3 \cdot \vec{a}$.

Observăm că, în exemplele anterioare, este evidențiată o legătură între adunare (de numere sau de vectori) și înmulțire cu numere naturale. Această proprietate rămâne valabilă și pentru operațiile cu matrice: pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și orice număr natural r, avem $\underbrace{A + A + \ldots + A}_{r \text{ termeni}} = r \cdot A$.

Să aplicăm!

Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Atunci $X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad -3 \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

♦ Cum definim produsul a două matrice?

Să analizăm!

Pentru următorii ani, specialiștii în demografie apreciază că structura populației României se va modifica astfel:

Până în 2010: 20% din populația urbană se va muta la sat, iar 30% din populația rurală va pleca la oraș.

Între 2010 și 2015: 15% din populația urbană se va muta la sat, iar 25% din populația rurală se va muta la oraș.

11 Explică de unde provin coeficienții 0,8 și 0,3, din estimarea făcută pentru populația rurală în 2010.

Să presupunem că populația întregii țări nu variază în perioada analizată. Fie u și r populația urbană, respectiv rurală, în acest moment. Variația de populație urbană și rurală va fi, conform previziunilor:

2010: urban: $0{,}8 \cdot u + 0{,}3 \cdot r$

rural: $0{,}2 \cdot u + 0{,}7 \cdot r$

2015: urban: $0{,}85 \cdot (0{,}8 \cdot u + 0{,}3 \cdot r) + 0{,}25 \cdot (0{,}2 \cdot u + 0{,}7 \cdot r) =$
$= (0{,}85 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}2) \cdot u + (0{,}85 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7) \cdot r$

rural: $0{,}15 \cdot (0{,}8 \cdot u + 0{,}3 \cdot r) + 0{,}75 \cdot (0{,}2 \cdot u + 0{,}7 \cdot r) =$
$= (0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}75 \cdot 0{,}2) \cdot u + (0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}75 \cdot 0{,}7) \cdot r$

Putem organiza aceste date cu ajutorul matricelor astfel:

• notăm sintetic:

$$\text{DE LA} \longrightarrow \quad \begin{array}{c|c} & \text{oraș} \quad \text{sat} \\ \text{MERG LA} \downarrow \begin{array}{l}\text{oraș}\\ \text{sat}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} = A \end{array} \qquad \text{DE LA} \longrightarrow \quad \begin{array}{c|c} & \text{oraș} \quad \text{sat} \\ \text{MERG LA} \downarrow \begin{array}{l}\text{oraș}\\ \text{sat}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

• exprimăm matriceal variația de populație urbană și rurală:

$$\begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix} \xmapsto{\text{modul de variație până în 2010}} \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot u + 0{,}3 \cdot r \\ 0{,}2 \cdot u + 0{,}7 \cdot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ r' \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{modul de variație până în 2015}} \begin{pmatrix} 0{,}85 \cdot u' + 0{,}25 \cdot r' \\ 0{,}15 \cdot u' + 0{,}75 \cdot r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0{,}85 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}2) \cdot u + (0{,}85 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7) \cdot r \\ (0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}75 \cdot 0{,}2) \cdot u + (0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}75 \cdot 0{,}7) \cdot r \end{pmatrix}$$

.

Putem deci descrie variația de populație, între momentul actual și 2015, prin matricea:

12 Ce semnificație au u' și r', în exprimarea matriceală a variației de populație?

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}85 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 & 0{,}85 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 \\ 0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}75 \cdot 0{,}2 & 0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}75 \cdot 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Ce legătură este între matricea C și matricele A și B?

Observăm că în formula de calcul a fiecărui element din C apar elementele unei linii a matricei B și a unei coloane a matricei A.

$$\begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}25 \\ 0{,}15 & 0{,}75 \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0{,}85 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 & 0{,}85 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 \\ 0{,}15 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 & 0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}75 \cdot 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Spunem că matricea C este *produsul* matricelor B și A.

În general

⚠ Numărul de linii ale matricei $X \cdot Y$ este egal cu numărul de linii ale matricei X. Numărul de coloane ale matricei $X \cdot Y$ este egal cu numărul de coloane ale matricei Y.

Fie $X = (x_{ij})$ o matrice de tip (m, n) și $Y = (y_{ij})$ o matrice de tip (n, p).

Produsul matricelor X și Y (în această ordine!) este matricea $Z = (z_{ij})$, de tip (m, p), unde $z_{ij} = x_{i1} \cdot y_{1j} + x_{i2} \cdot y_{2j} + \ldots + x_{in} y_{nj}$, pentru orice pereche de indici (i, j).

Notăm $Z = X \cdot Y$.

Atenție! Putem calcula produsul a două matrice doar dacă numărul de coloane ale primei matrice este egal cu numărul de linii ale celei de-a doua matrice.

Să aplicăm!

Calculăm produsul matricelor $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Matricea $X \cdot Y$ are două linii și patru coloane. Pentru a calcula $X \cdot Y$:

• înmulțim pe rând prima linie a lui X cu coloanele lui Y:

$$(2 \quad 1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = \boxed{10}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{10} & \boxed{14} & \ldots & \ldots \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$(2 \quad 1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = \boxed{14}$$

13 *Explică modul în care au fost calculate toate elementele matricei $X \cdot Y$ din exemplul alăturat.*

• procedăm la fel cu a doua linie a lui X:

$$(0 \quad 5 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = \boxed{7}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 14 & 25 & 0 \\ \boxed{7} & \ldots & \boxed{10} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$(0 \quad 5 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = \boxed{10}$$

14 *Ce ar putea însemna pătratul unei matrice A? În ce caz s-ar putea calcula matricea A^2?*

• în final, obținem: $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 25 & 0 \\ 7 & 26 & 10 & -11 \end{pmatrix}$

15 *Calculează*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

♦ Ce proprietăți au operațiile cu matrice?

Să analizăm!

Știm că operația de adunare a vectorilor este asociativă, este comutativă și admite element neutru.

Prin raportare la un sistem de axe ortogonale, orice vector din plan corespunde unei matrice de tip (2; 1), astfel că suma a doi vectori corespunde matricei sumă.

Este oare adevărat că proprietățile adunării vectorilor, enumerate mai sus, se regăsesc la adunarea matricelor?

Pentru a răspunde, este util să considerăm un exemplu.

16 *Justifică geometric asociativitatea operației de adunare a vectorilor. Cine este elementul neutru pentru adunarea vectorilor?*

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 3+6 & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 6+3 & \ldots \end{pmatrix} = B + A.$$

17 *Efectuează toate calculele și convinge-te că egalitățile din exemplul alăturat sunt corecte.*

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} 1+4 & \ldots & \ldots \\ \ldots & 3+6 & \ldots \end{pmatrix} + C = \begin{pmatrix} (1+4)+2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & (3+6)+5 & \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(4+2) & \ldots & \ldots \\ \ldots & 3+(6+5) & \ldots \end{pmatrix} = A + (B+C)$$

Fie $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ matricea de tip (2; 3) în care toate elementele sunt egale cu zero. Atunci $A+O=\begin{pmatrix}1+0&...&...\\...&3+0&...\end{pmatrix}=A$.

În calculele de mai sus, am completat doar o parte dintre elementele matricelor obținute prin adunare. Ne putem însă convinge imediat că egalitățile sunt, într-adevăr, corecte.

În toate aceste calcule am folosit, de fapt, proprietățile adunării pe $\mathbb{R}$. De fiecare dată când adunăm matrice de același tip, calculele se reduc la operații cu numere reale. Ca urmare, putem afirma că proprietățile adunării matricelor evidențiate mai sus sunt universal valabile.

În general

Adunarea matricelor definește pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o operație algebrică asociativă și comutativă. Adunarea admite ca element neutru matricea nulă, adică matricea $O\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, în care toate elementele sunt egale cu zero.

Înmulțirea matricelor este o operație mai complicată și de aceea are nevoie de o discuție mai amplă.

Să observăm mai întâi că înmulțirea matricelor devine o operație algebrică doar dacă ne restrângem la matricele pătratice de ordin fixat. Pentru a determina ce proprietăți are această operație, este util să considerăm câteva exemple.

⚠ *Dacă X și Y sunt două matrice, putem efectua produsele X · Y și Y · X doar dacă X și Y sunt matrice de același ordin.*

Fie $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&0\\-1&7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}$.

1. Studiem comutativitatea înmulțirii:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0\\-1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot5+1\cdot(-1)&...\\...&...\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&7\\6&28\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}5&0\\-1&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}...&5\cdot1+0\cdot4\\...&...\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&5\\11&27\end{pmatrix}$$

Observăm că, pentru exemplul dat, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Verificăm alte două produse. Observăm că $A\cdot C=\begin{pmatrix}-1&3\\6&2\end{pmatrix}=C\cdot A$.

În concluzie, dacă schimbăm ordinea factorilor unui produs de matrice pătratice, uneori rezultatul se păstrează, alteori obținem rezultate diferite.

18 *Dacă* $X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ *și* $Y=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, *calculează X · Y și Y · X, apoi compară rezultatele obținute.*

19 *Găsește numere reale nenule* x, y, z, t, *diferite între ele, astfel încât* $x:y\neq y:x$, *dar* $z:t=t:z$.

2. Studiem asociativitatea înmulțirii:

$$(A\cdot B)\cdot C=\begin{pmatrix}14&7\\6&28\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14\\50&6\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5&5\\15&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14\\50&6\end{pmatrix}.$$

Observăm că $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

Verificăm alte produse. Obținem, de exemplu:

$$B\cdot(A\cdot C)=\begin{pmatrix}-5&15\\44&11\end{pmatrix}=(B\cdot A)\cdot C.$$

20 *Calculează* $C\cdot(B\cdot A)$ *și* $(C\cdot B)\cdot A$.

3. Observăm ce proprietăți are înmulțirea cu matricea unitate.

Fie $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea pătratică de ordinul 2 în care elementele de pe diagonala principală sunt egale cu 1, iar restul elementelor sunt egale cu 0. Atunci

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = B$$

Exemplele de mai sus nu reprezintă o demonstrație. Putem afirma totuși că proprietățile evidențiate sunt valabile pentru calculele cu matrice arbitrare.

În general

Înmulțirea matricelor definește pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o operație algebrică asociativă și necomutativă.

Înmulțirea matricelor de ordin n admite ca element neutru matricea unitate, adică matricea $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ în care toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu 1, iar restul elementelor sunt egale cu 0.

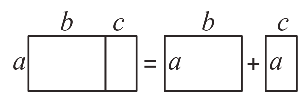
⚠ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21 *Scrie matricea I_4.*

♦ Ce legătură există între adunarea și înmulțirea matricelor?

Să comparăm!

În calculele cu numere reale folosim distributivitatea înmulțirii față de adunare: pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$ avem $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.



22 *Explică geometric distributivitatea, folosind figura alăturată.*

Această proprietate ne permite să efectuăm mai ușor unele calcule, prin utilizarea factorului comun. De exemplu:

$23 \cdot 6 + 23 \cdot 4 = 23 \cdot (6 + 4) = 230$

$$\frac{11+22+33+44}{111+222+333+444} = \frac{11\cdot(1+2+3+4)}{111\cdot(1+2+3+4)} = \frac{11}{111}.$$

Operațiile de adunare și de înmulțire au fost definite însă și pentru matrice pătratice de același ordin. Se păstrează oare și în acest caz proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare?

Să demonstrăm!

Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ și $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$. Atunci

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 (b_3 + c_3) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_3 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

23 *Completează spațiile marcate prin ... în demonstrația alăturată, apoi verifică egalitățile din enunț.*

Deoarece $a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_3 + c_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_3)$, deducem că $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Analog se demonstrează a doua egalitate din enunț.

24 *Explică de ce, în operațiile cu numere reale enunțăm o singură condiție privind distributivitatea înmulțirii față de adunare, în timp ce pentru operațiile cu matrice avem două astfel de condiții.*

În general

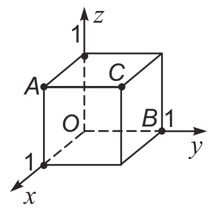
În operațiile cu matrice pătratice, putem folosi *distributivitatea înmulțirii față de adunare*: pentru orice matrice A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avem
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{și} \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

Exerciții și probleme

1. Determină numerele x, y și z astfel încât
$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & x+z \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Scrie două matrice X și Y din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, care au pe fiecare linie și pe fiecare coloană exact câte un element nenul.
b) Calculează $X + Y$ și $X \cdot Y$.

3. Observă desenul, apoi descrie matriceal egalitatea:
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.



4. Fie $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notăm $\bar{X}$ matricea obținută din X, prin înmulțirea tuturor elementelor primei linii cu 2. Ce relație există între matricea $X \cdot Y$ și matricea $\bar{X} \cdot Y$?

5. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculează:
$A + B$; $3 \cdot A$; $3 \cdot A + 2 \cdot B$; $A \cdot B$;
$A \cdot B + B \cdot A$; A^2; B^2.

6. Află numărul real a dacă
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Verifică pe câteva exemple dacă formula $X^2 - Y^2 = (X - Y) \cdot (X + Y)$ este valabilă pentru $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8. Fie $O \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricea nulă. Demonstrează că $O \cdot X = O$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Notăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrează că $A^3 = O$.

10. Fie $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Notăm $(Y \mid Z)$ matricea de tip $(2; 4)$, în care scriem mai întâi coloanele lui Y, apoi coloanele lui Z. Demonstrează că
$X \cdot (Y \mid Z) = (X \cdot Y \mid X \cdot Z)$.

11. Notăm $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Calculează $T \cdot A$.
b) Dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice oarecare, arată că $T \cdot X = 3 \cdot X$.

12. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
a) Calculează A^2, A^3, A^4.
b) Observă rezultatele obținute, apoi propune o formulă generală de calcul pentru A^n. Verifică formula pentru $n = 5$.

13. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determină x și y astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$.

14. Pentru o matrice pătratică $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notăm $\mathrm{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală. (Prescurtarea Tr provine din cuvântul „trace”, care înseamnă în limba engleză „urmă”.)
De exemplu, dacă $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, atunci $\mathrm{Tr}(X) = 1 + 5 + 7 = 13$.
a) Calculează $\mathrm{Tr}(Y)$, pentru $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
b) Alege două matrice pătratice X și Y, de ordinul 3, și verifică egalitățile:
$\mathrm{Tr}(X + Y) = \mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(Y)$; $\mathrm{Tr}(5 \cdot X) = 5 \cdot \mathrm{Tr}(X)$;
$\mathrm{Tr}(X \cdot Y) = \mathrm{Tr}(Y \cdot X)$.
c) Demonstrează proprietățile de la punctul b) în cazul unor matrice pătratice X și Y de ordinul n, dacă X este o matrice arbitrară, iar Y are doar elementul de pe poziția $(i; j)$ nenul.

15. Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Verifică dacă $(X + Y)^2 = X^2 + 2 \cdot X \cdot Y + Y^2$.

16. Ce condiții îndeplinesc, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, dacă
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & t \\ x & z \end{pmatrix} = O_2?$$

Utilizarea matricelor în practică

Aplicăm și dezvoltăm!

Matricele și operațiile cu matrice nu sunt importante doar pentru matematică. Multe situații cotidiene pot fi exprimate mai ușor matriceal.

♦ Cum folosim operațiile cu matrice în rezolvarea unor probleme practice?

Exemplu

Angajații unei firme de construcții au fost solicitați de câteva ori să lucreze peste program sau în zilele de week-end. Directorul firmei a decis ca, în aceste cazuri, angajații să fie plătiți cu 20 lei/oră, față de 10 lei/oră cât ar fi câștigat în cadrul programului normal de lucru. La această firmă, plata se face săptămânal, dar actele contabile se întocmesc la sfârșitul lunii. La sfârșitul primei săptămâni, contabilitatea a primit situația din tabelul alăturat.

Nume \ Ore lucrate	Program normal	Ore suplimentare
Popescu	40	5
Ionescu	40	15
Georgescu	20	0
Marinescu	36	7
Constantinescu	40	10

Drepturile salariale pentru prima săptămână pot fi calculate înmulțind, pentru fiecare angajat, numărul de ore din programul normal cu 10 și numărul de ore suplimentare cu 20. Putem formaliza acest calcul folosind operații cu matrice. Mai precis, drepturile salariale pot fi calculate efectuând produsul alăturat.

$$\begin{pmatrix} 40 & 5 \\ 40 & 15 \\ 20 & 0 \\ 36 & 7 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Aceeași regulă a fost păstrată în a doua săptămână. Situația numărului de ore lucrate este prezentată în tabelul următor, iar serviciul contabil a calculat drepturile salariale efectuând produsul matricelor de mai jos.

Nume \ Ore lucrate	Program normal	Ore suplimentare
Popescu	40	20
Ionescu	0	0
Georgescu	20	5
Marinescu	36	10
Constantinescu	40	5

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 0 & 0 \\ 20 & 5 \\ 36 & 10 \\ 40 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Patronul firmei a vrut să verifice corectitudinea înregistrărilor contabile. El a procedat însă altfel: a totalizat mai întâi orele lucrate de fiecare angajat în programul normal, respectiv ca ore suplimentare și apoi a calculat drepturile salariale totale:

$$\left(\begin{pmatrix} 40 & 5 \\ 40 & 15 \\ 20 & 0 \\ 36 & 7 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 0 & 0 \\ 20 & 5 \\ 36 & 10 \\ 40 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

La sfârșit, se obține același rezultat, deoarece înmulțirea matricelor este distributivă față de adunare: $X \cdot Z + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot Z$.

❶ *Cum poți exprima matriceal numărul total de ore lucrate de fiecare angajat?*

❷ *Explică de ce drepturile salariale săptămânale ale angajaților firmei pot fi calculate efectuând un produs de matrice.*

❸ *Cum ar fi trebuit organizate calculele, dacă muncitorii ar fi fost plătiți cu 10 lei/oră pentru zilele normale de lucru, cu 15 lei/oră pentru orele suplimentare din timpul săptămânii și cu 20 lei/oră pentru orele lucrate în week-end?*

❹ *Calculează în două moduri drepturile salariale ale angajaților firmei de construcții, în cele două săptămâni și verifică dacă obții aceleași rezultate.*

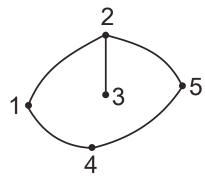
♦ Cum determinăm drumuri în grafuri?

❺ *Explică modul în care unui graf i se asociază o matrice.*

Un graf poate fi descris cu ajutorul unei matrice. Putem folosi matricea asociată pentru a determina și alte proprietăți ale grafului.

Exemplu

Graful din figura de mai jos corespunde următoarei matrice:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vrem să interpretăm numerele ce apar în matricea $B = A^2$ și să deducem proprietăți ale grafului dat. Să calculăm, de exemplu, numărul de pe poziția (2; 4) din B; conform definiției, acesta este egal cu:

$$b_{2,4} = a_{2,1} \cdot a_{1,4} + a_{2,2} \cdot a_{2,4} + a_{2,3} \cdot a_{3,4} + a_{2,4} \cdot a_{4,4} + a_{2,5} \cdot a_{5,4}$$

❻ *Calculează matricea A^2, unde A este matricea alăturată. Arată astfel că între nodurile 1 și 5 există două drumuri de lungime 2. Câte circuite de lungime 3 are graful dat?*

Observăm că termenii sumei anterioare pot fi doar 0 sau 1.

Termenul $a_{2,i} \cdot a_{i,4}$ este egal cu 1 dacă și numai dacă $a_{2,i} = a_{i,4} = 1$. Dar această condiție este echivalentă cu următoarea condiție: în graful dat, există muchii între nodurile 2 și i, respectiv i și 4. De aceea, $b_{2,4}$ reprezintă numărul de drumuri de lungime 2 între nodurile 2 și 4.

Analog, numerele ce apar în matricea A^3 precizează câte drumuri de lungime 3 există între două noduri date ale grafului, numerele din A^4 precizează câte drumuri de lungime 4 există între două noduri ale grafului, și așa mai departe.

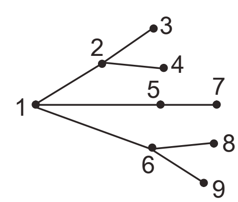
Exerciții și probleme

1. La un service auto, contabilitatea a sintetizat în tabele numărul de ore lucrate, după cum urmează:

Ore lucrate / Nume	Martie		Aprilie	
	Program normal	Ore suplimentare	Program normal	Ore suplimentare
Mihai	160	20	150	15
Gigi	160	0	160	10
Ștefan	0	0	160	5
Sandu	80	4	85	10

Fiecare oră din programul normal se plătește cu 15 lei, iar ora suplimentară cu 20 lei. Calculează în două moduri, cu ajutorul matricelor, sumele totale încasate de către angajați în cele două luni.

2. Asociază o matrice grafului din figura alăturată, apoi află câte drumuri de lungime 2 are acest graf.



3. Se dă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Asociază acestei matrice un graf adecvat.

Ce ordine au nodurile grafului? Verifică dacă ai desenat corect, calculând ordinele nodurilor doar pe baza elementelor matricei.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- să identific situații practice care necesită asocierea unor date cu reprezentarea lor matriceală
- să aplic algoritmi de calcul cu matrice
- să descriu matriceal modalități de calcul în situații cotidiene
- să interpretez rezultatele obținute prin calculul matriceal?

Test de verificare

1. Calculează: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. În cadrul unui sondaj de opinie, au fost adresate elevilor dintr-un liceu întrebările:
a) cât timp aloci zilnic pentru tema la matematică?
b) câte ore petreci zilnic în fața calculatorului?
Sondajul a fost realizat de trei elevi, care au prezentat rezultatele obținute sub forma tabelelor următoare:

Ana

Întrebare \ Timp	0 – 0,5 h	0,5 – 1 h	1 – 1,5 h	1,5 – 2 h	> 2 h
a)	15	12	3	1	0
b)	5	20	2	3	1

Bogdan

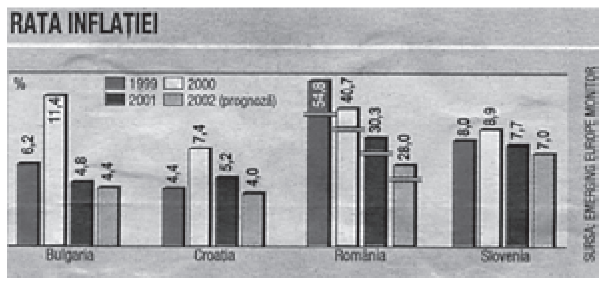
Întrebare \ Timp	0 – 0,5 h	0,5 – 1 h	1 – 1,5 h	1,5 – 2 h	> 2 h
a)	17	20	5	4	2
b)	8	24	10	5	1

Camelia

Întrebare \ Timp	0 – 0,5 h	0,5 – 1 h	1 – 1,5 h	1,5 – 2 h	> 2 h
a)	13	20	11	1	1
b)	21	15	2	4	4

Exprimă matriceal rezultatele totale ale sondajului.

3. Transpune într-o matrice datele reprezentate prin graficul cu bare de mai jos.



4. Bucătarul restaurantului „Poftă bună!“ dispune de două rețete pentru un anumit fel de mâncare. El a înregistrat cantitățile ingredientelor necesare în tabelul din dreapta, în care unitățile de măsură sunt cele standard.
Pentru aprovizionare, directorul restaurantului a cerut la trei firme comerciale oferte de prețuri. Acestea sunt înregistrate în tabelul alăturat.
Folosește calculul matriceal pentru a determina costul realizării fiecărei rețete, în cazul aprovizionării din unul dintre aceste magazine.

	Făină	Ulei	Roșii	Paste	Sare
Rețeta I	0,4	0,1	2	1	0,05
Rețeta II	0,3	0,1	3	1,2	0,06

	Făină	Ulei	Roșii	Paste	Sare
Magazin 1	12	35	30	14	2
Magazin 2	14	34,5	31	15	2
Magazin 3	13	36	29	16	2

Lectură

De-a lungul timpului, matematicienii au căutat modalități de a exprima cât mai sintetic calcule abstracte complexe. O notație simplă și clară simplifică și clarifică la rândul ei întregul raționament.

Noțiunea de matrice intervine în studiul sistemelor de ecuații liniare. Ea a fost introdusă de matematicianul englez Arthur Cayley (1821- 1895) în 1858. În 1913, C. E. Cullis propune notația $[a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, *iar în 1919, la sugestia lui M. Bôcher, s-a introdus notația* $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$.

Unitatea de învățare 6

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. $(-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = ...$
a) 4; b) 0; c) 2; d) –2

2. $-(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 = ...$
a) 12; b) 0; c) –6; d) 6.

Ecuații și sisteme

3. Care dintre următoarele perechi de numere sunt soluții ale sistemului $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$?

a) (2; 1); b) (2; 4); c) (0; 3); d) (1; 2)

4. Rezolvă sistemul: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$.

5. a) Reprezintă grafic, în același sistem de axe, mulțimile de soluții ale ecuațiilor: $x - y = 0$, respectiv $x + y = 4$.
b) Folosește reprezentarea grafică de la punctul a) pentru a rezolva sistemul

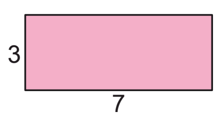
$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

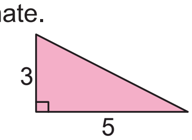
Calcul algebric

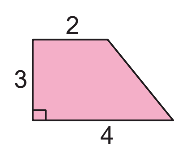
6. Exprimă printr-o formulă:
a) aria unui pătrat cu latura l;
b) volumul unui cub cu latura t;
c) soluția ecuației $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$);
d) soluțiile ecuației $x^2 + mx + 11 = 0$.

Elemente de geometrie

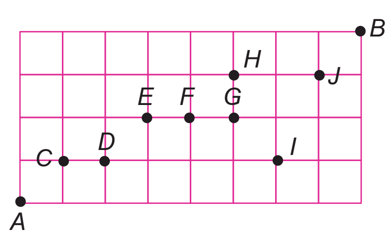
7. Calculează ariile figurilor desenate.

a) 

b) 

c) 

8. Precizează care dintre punctele marcate pe desen se găsesc:
a) pe dreapta *AB*; b) pe dreapta *CE;*
c) în interiorul triunghiului *AHI;* d) în interiorul unghiului *HCI*.



Determinanți și sisteme liniare

Rezolvarea sistemelor prin reducerea „în scară”

Ne amintim și explorăm!

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare se poate face prin mai multe metode. În oricare dintre acestea se urmărește, însă, transformarea sistemului dat într-un sistem echivalent cu el, astfel încât ecuațiile noului sistem să devină mai simple.

De exemplu, sistemul: (S) $\begin{cases} 3x+4y=9 \\ 3x+y=-6 \end{cases}$ este echivalent cu: (S′) $\begin{cases} 3x+4y=9 \\ 3y=15 \end{cases}$

❶ *Explică de ce sistemele (S) și (S′) sunt echivalente.*

Observăm că S′ se poate rezolva imediat, deoarece este un sistem „în scară” în care a doua ecuație a sistemului are o singură necunoscută. În general, putem transforma un sistem de ecuații liniare într-un sistem echivalent cu el, de tip scară. Această metodă de rezolvare este atribuită matematicianului german Karl Gauss.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Exemplul 1

Considerăm sistemul: $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ -3x+3y+5z=4 \\ 4x-y-3z=-2 \end{cases}$

Pentru a transforma sistemul dat într-un sistem scară, putem proceda astfel:

Pasul 1: Înmulțim ecuațiile cu numere nenule, alese convenabil, astfel încât coeficienții lui x să devină egali:

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 & \big|\cdot 6 \\ -3x+3y+5z=4 & \big|\cdot(-4) \\ 4x-y-3z=-2 & \big|\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+6y+6z=6 \\ 12x-12y-20z=-16 \\ 12x-3y-9z=-6 \end{cases}$$

❷ *În exemplul dat, pentru „a reduce” necunoscuta x, s-a obținut coeficientul comun 12. Ce coeficient comun ar trebui obținut pentru a-l reduce pe y? Dar pe z?*

Pasul 2: Scădem prima ecuație din celelalte două; în acest fel, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 12x+6y+6z=6 \\ -18y-26z=-22 \\ -9y-15z=-12 \end{cases}$$

⚠ *Pasul 2 realizează prima „treaptă” a scării.*

Pasul 3: Procedăm la fel cu ultimele două ecuații ale sistemului, urmărind termenii care conțin necunoscuta y:

$$\begin{cases} 12x+6y+6z=6 \\ -18y-26z=-22 \,\Big|\cdot\frac{1}{2} \\ -9y-15z=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+6y+6z=6 \\ -9y-13z=-11 \\ -9y-15z=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+6y+6z=6 \\ -9y-13z=-11 \\ -2z=-1 \end{cases}$$

⚠ *Pasul 3 construiește a doua „treaptă” a scării.*

Pasul 4: Aflăm succesiv necunoscutele sistemului, pornind de la ultima ecuație spre prima:

$$\boxed{\begin{matrix} -2z=-1 \\ z=\frac{1}{2} \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} -9y-13\cdot\frac{1}{2}=11 \\ y=-\frac{35}{18} \end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 12x+6\cdot\frac{-35}{18}+6\cdot\frac{1}{2}=6 \\ x=\frac{11}{9} \end{matrix}}$$

❸ *Rezolvă același sistem, construind o „scară” de forma celei din desen.*

Pentru aceasta, începe prin a reduce variabila z.

Exemplul 2

Să rezolvăm prin metoda lui Gauss sistemul: $\begin{cases} 3y+z\ =1 \\ 2x+y-z=2 \\ x-y+3z=0 \end{cases}.$

⚠ A doua ecuație a sistemului nu conține variabila x, deci nu este nevoie să fie modificată!

Observăm că prima ecuație nu conține variabila x. De aceea, pentru a aplica metoda lui Gauss, avem două posibilități: ori schimbăm ordinea ecuațiilor, ori schimbăm ordinea necunoscutelor!

Să alegem prima variantă:

$$\begin{cases} x-y+3z=0 \mid \cdot 2 \\ 3y+z\ =1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y+6z=0 \\ 3y+z\ \ =1 \\ 3y-7z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y+6z=0 \\ 3y+z\ \ =1 \\ -8z=1 \end{cases}$$

❹ Rezolvă sistemul dat prin metoda lui Gauss, scriind variabilele ecuațiilor în ordinea y, x, z.

În general

Un sistem de ecuații liniare se poate rezolva prin metoda lui Gauss. Pentru aceasta reducem necunoscutele sistemului, obținând un sistem „scară”, echivalent cu cel inițial.

Exerciții și probleme

1. Scrie un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute care admite ca soluție tripletul:
a) (1; 2; – 3); b) (0; 1; 2); c) (1; 0; 2); d) (0,2; 0,5; 0).

2. În sistemul de mai jos, înmulțește convenabil pentru a reduce:
a) mai întâi necunoscuta x; b) mai întâi necunoscuta y; c) mai întâi necunoscuta z.

$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 3x-\frac{3}{4}y+8z=6 \\ 6x-6y-7z=12 \end{cases}.$$

3. Rezolvă prin metoda lui Gauss sistemele următoare:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=2 \\ z=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4y+3z+1=0 \\ 5y+2z=4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ 6x+4y+3z=17 \\ 3x-6y+z=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x+2y-3z=7 \\ 3x-5y+4z=3 \\ 7x-4y+5z=8 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}-z=1 \\ 3x\sqrt{2}+y\sqrt{3}-2z=1 \\ 2x\sqrt{2}-y\sqrt{3}+z=-1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x-y\sqrt{5}+z\sqrt{7}=0 \\ 3x-2y\sqrt{5}+3z\sqrt{7}=14 \\ 5x+3y\sqrt{5}-2z\sqrt{7}=6 \end{cases}$.

4. Aplică metoda lui Gauss pentru sistemele următoare. Ce observi?

a) $\begin{cases} x+3y-4z=0 \\ 2x+2y-z=0 \\ 3x-y+6z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+4y-2z=2 \\ x+y+3z=6 \\ 6x+8y-4z=4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-3y+2z=6 \\ 2x-6y+4z=3 \\ 3x-9y+6z=5 \end{cases}$.

5. Aplică metoda reducerii în scară pentru a rezolva sistemele:

a) $\begin{cases} x+2y-z+3t=1 \\ 2x-y+z+t=2 \\ -x+y+2z+t=3 \\ x-y+3z-t=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x+y-z+2t=-1 \\ x-3y+3t=0 \\ -2y+2z+t=1 \\ x+y+z-t=2 \end{cases}$;

Analizăm și generalizăm!

♦ **Cum se obțin formulele de calcul pentru soluțiile unor ecuații sau sisteme?**

Să analizăm!

Considerăm ecuația $3x^2 + 7x + 2 = 0$.
Putem rezolva această ecuație prin descompunerea membrului stâng într-un produs.

$3x^2 + 7x + 2 = 0$

$\boxed{6x}\ \boxed{x}$

$(3x^2 + 6x) + (x + 2) = 0$
$3x(x + 2) + (x + 2) = 0$
$(x + 2)(3x + 1) = 0$

În acest fel, ecuația se reduce la rezolvarea a două noi ecuații, de gradul întâi:
$x + 2 = 0$ sau $3x + 1 = 0$

$x = -2$ sau $x = \frac{-1}{3}$.

Există însă situații în care descompunerea unui termen ca o sumă convenabilă de alți doi termeni nu este evidentă. De aceea, matematicienii au găsit un mod de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea, ce se poate aplica tuturor acestor ecuații. Observând cum rezolvăm ecuații date, ei au ajuns la o formulă generală de rezolvare.

$3x^2 + 7x + 2 = 0 \mid \cdot 3$
$9x^2 + 21x + 6 = 0$

$$\left(9x^2 + 21x + \frac{49}{4}\right) - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(3x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$3x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$ sau

$3x + \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$

$x = -\frac{1}{3}$ sau

$x = -2$

$ax^2 + bx + c = 0 \mid \cdot a,\ (a \neq 0)$
$a^2x^2 + abx + ac = 0$

$$\left(a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

$ax + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ sau

$ax + \frac{b}{2} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sau

$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Cum am putea oare obține o formulă de rezolvare pentru sistemele de ecuații liniare?

Să comparăm!

Rezolvăm sistemul următor prin metoda lui Gauss:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Generalizăm metoda de rezolvare pentru sisteme cu coeficienți literali:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

❶ *Descompune convenabil și scrie ca produs membrul întâi al ecuațiilor:*
$x^2 + 3x + 2 = 0$
$5x^2 + 16x + 3 = 0$.

⚠ *În formula de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea apare numărul $\Delta = b^2 - 4ac$. Formula se poate aplica doar dacă $\Delta \geqslant 0$.*

❷ *Aplică formula pentru a rezolva ecuațiile următoare:*
$x^2 + 3x + 1 = 0$
$6x^2 - 8x + 1 = 0$
$2x^2 - 3x + 2 = 0$.

Înmulțim convenabil ecuațiile, astfel încât coeficienții lui x să devină egali, apoi reducem variabila x:

$$\begin{cases} 4x+3y=6 \mid \cdot 5 \\ 5x+2y=1 \mid \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x+15y=30 \\ 20x+8y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+3y=6 \\ \quad -7y=-26 \end{cases}$$

Determinăm soluția sistemului:

$$y=\frac{26}{7},\ x=\frac{9}{7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \mid \cdot a_{21} \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \mid \cdot a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x+a_{12}a_{21}y=a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x+a_{22}a_{11}y=a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y \qquad\qquad = b_1 \\ \qquad (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \end{cases}$$

Determinăm soluția sistemului în cazul în care numărul $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ nu este zero:

$$y=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

❸ *Rezolvă sistemul*

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 4x-5y=-3 \end{cases}$$

aplicând direct formulele de calcul. Identifică mai întâi coeficienții.

♦ Ce sunt determinanții de ordinul doi?

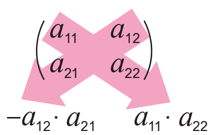
Formulele obținute par mult prea complicate; de aceea, este nevoie să înțelegem mai bine cum se obțin numărătorii și numitorii lui x și y, pornind de la coeficienții sistemului inițial.

Scriem sistemul $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ în forma matriceală: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Observăm că numărul $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ (care apare atât ca numitor al lui x, cât și ca numitor al lui y, în formulele de rezolvare) este calculat folosind elementele matricei

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

⚠ *Matricea M se numește matricea sistemului.*



Acest număr se obține făcând „înmulțiri în diagonală” ca în schema alăturată. Numărul astfel obþinut se nume°te *determinantul* matricei *M* și se notează

$$\det(M)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Numerele care apar la numărătorii lui x și respectiv y, în formulele de rezolvare de mai sus, pot fi și ele scrise ca determinanți ai unor matrice pătratice de ordinul 2.

Astfel, dacă înlocuim în matricea sistemului prima coloană (a coeficienților lui x), cu coloana termenilor liberi, apoi calculăm determinantul, obținem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\cdot a_{22}-b_2\cdot a_{12}.$$

De aceea, formulele de rezolvare ale sistemului literal $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$ pot fi scrise cu ajutorul unor determinanți de ordinul doi, sub forma:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

❹ *Exprimă soluția sistemului* $\begin{cases} 5x-4y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ *cu ajutorul determinanților.*

♦ Determinanți de ordinul trei

De ce ar fi așa de importante formulele de rezolvare scrise cu ajutorul determinanților? Avantajul este că ele pot fi aplicate analog în rezolvarea *oricărui* sistem compatibil de ecuații liniare. Pentru a înțelege cum se întâmplă acest lucru, este necesar să definim și determinanți de ordin mai mare decât 2.

Să analizăm!

Am văzut că în rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ am recurs la scrierea matriceală $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

În acest caz, determinantul de ordinul doi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ a apărut ca numitor comun al soluției $(x; y)$ a sistemului considerat. De aceea, ne putem aștepta ca determinanții de ordinul trei să poată fi descoperiți prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}.$$

Pentru a rezolva sistemul dat, reducem variabila x din ultimele două ecuații:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y + (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})z = b_2a_{11} - b_1a_{21} \\ (a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})y + (a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})z = b_3a_{11} - b_1a_{31} \end{cases}$$

Observăm că ecuațiile pe care le obținem în acest fel evidențiază câțiva determinanți de ordinul 2. Pentru ca acest lucru să fie mai clar, scriem a doua și a treia ecuație sub forma:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Este de așteptat ca soluțiile sistemului inițial să poată fi exprimate în funcție de determinanți de ordinul doi, de tipul celor de mai sus. Continuând rezolvarea obținem ca numitor comun al necunoscutelor sistemului, numărul:

$$a_{33} \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{32} \cdot (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{31} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),$$

care se mai poate scrie:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Observăm că acest număr se calculează folosind numai coeficienții necunoscutelor sistemului. De aceea este util să scriem sistemul în forma sa matriceală:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Prin analogie cu determinanții de ordinul 2, notăm determinantul matricei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ prin } \det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

❺ *Transcrie etapele de calcul alăturate pentru sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \end{cases}.$$

❻ *Identifică produsele* $a_{12}a_{23}a_{31}$ *și* $a_{13}a_{22}a_{31}$ *din determinantul*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 10 \end{vmatrix}.$$

⚠ *Pierre Frederic Sarrus a trăit între 1798 și 1861.*

Determinantul de ordinul trei se obține și el, ca și determinantul de ordinul doi, prin procedeul înmulțirilor în diagonală. Această regulă a fost descoperită de Sarrus.

Pentru a vizualiza mai ușor calculele repetăm primele două coloane ale matricei:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

În general

Unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute, scris în forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$, îi asociem determinantul de ordinul n, notat

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$. Acest număr este numitorul comun al soluțiilor sistemului.

⚠ *Determinanții sunt numere asociate doar matricelor pătratice. Ordinul unui determinant este numărul de linii sau coloane ale sale.*

Să aplicăm!

Pentru a calcula determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ prin regula lui Sarrus, procedăm astfel:

• repetăm primele două coloane ale determinantului și calculăm produsele de pe diagonalele „pozitive”:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \boxed{1 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1}$$

• scădem apoi produsele de pe diagonalele „negative”:

$$\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 \boxed{- (-1) \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5}$$

• obținem astfel valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -57$$

Analog, obținem:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [(3 \cdot 1 \cdot 2) + (-2) \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) \cdot 0] - [1 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) \cdot 2] = -85 \cdot$$

7 *Putem aplica regula lui Sarrus repetând primele două linii și aplicând regula diagonalelor „pozitive” sau „negative”:*

$$\begin{array}{|ccc|} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}$$

$$- \qquad +$$

Calculează, aplicând regula lui Sarrus,

determinantul $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

♦ Cum putem folosi determinanții în rezolvarea sistemelor?

La prima vedere, utilizarea determinanților în rezolvarea sistemelor pare foarte complicată. Importanța metodei constă în posibilitatea unei tratări unitare a rezolvării unor sisteme diferite ca număr de ecuații și de necunoscute.

Să verificăm!

Am văzut că soluția sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ poate fi calculată astfel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(dacă determinantul $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ este diferit de zero).

Vom arăta printr-un exemplu că aceleași formule se aplică și în cazul sistemelor liniare cu trei ecuații și trei necunoscute.

Considerăm sistemul: $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

Calculăm determinantul matricei sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 3$$

❽ *Explică schema:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Numărătorii rapoartelor prin care exprimăm soluția sistemului se obțin înlocuind în matricea sistemului, pe rând, coloana coeficienților fiecărei necunoscute cu coloana termenilor liberi. Obținem:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

⚠ *Determinantul Δ_x se obține înlocuind prima coloană a determinantului matricei sistemului, cu coloana termenilor liberi.*

❾ *Explică regula de formare a determinanților notați Δ_y și Δ_z.*

Soluția sistemului se obține calculând rapoartele de mai jos:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1 \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2.$$

❿ *Calculează determinanții, apoi verifică soluția sistemului prin înlocuiri în ecuațiile inițiale.*

Această metodă de rezolvare a sistemului a fost descoperită de Gabriel Cramer.

În general

Fie *M* o matrice pătratică de ordinul n, al cărei determinant (notat cu Δ) este diferit de zero.

Atunci soluția sistemului $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ poate fi exprimată prin formulele lui Cramer:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

unde Δ_{x_i} este determinantul obținut din Δ, prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi a sistemului.

Cramer, Gabriel (1704-1752)

♦ Ce proprietăți de calcul au determinanții?

Să observăm!

Sistemul $\begin{cases} x-5y+z=1 \\ 4x+3y-5z=0 \\ 3x-2y+4z=2 \end{cases}$ poate fi înlocuit cu un sistem echivalent (deci cu un sistem având aceleași soluții), folosind câteva tipuri de transformări.

Pe de altă parte, soluțiile sistemului pot fi calculate cu ajutorul unor determinanți.

Observăm că:

• schimbarea între ele a primelor două ecuații ale sistemului conduce la schimbarea între ele a două linii ale determinantului:

$$\begin{cases} 4x+3y-5z=0 \\ x-5y+z=1 \\ 3x-2y+4z=2 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

• rescrierea ecuațiilor, prin comutarea termenilor în y și z, conduce la schimbarea între ele a două coloane ale determinantului:

$$\begin{cases} x+z-5y=1 \\ 4x-5z+3y=0 \\ 3x+4z-2y=2 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

11 *Asupra determinantului* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ *aplică următoarele transformări:*

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$C_1 \leftrightarrow C_2$

$L_1 \leftrightarrow L_2+4$.

Calculează în fiecare caz determinantul obținut. Ce observi?

• înmulțirea primei ecuații cu 2 conduce la înmulțirea cu 2 a primei linii a determinantului:

$$\begin{cases} 2x-10y+2z=2 \\ 4x+3y-5z=0 \\ 3x-2y+4z=2 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \underset{L_1 \cdot 2}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 2 & -10 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

• adunarea primelor două ecuații conduce la adunarea primelor două linii ale determinantului:

$$\begin{cases} x-5y+z=1 \\ 5x-2y-4z=1 \\ 3x-2y+4z=2 \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \underset{L_2+L_1}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

În ce mod se schimbă oare valoarea determinantului inițial, în urma aplicării acestor transformări? Pentru a răspunde, calculăm:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 140$$

12 *Calculează determinanții Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, care apar în exemplul alăturat și verifică astfel proprietățile enunțate.*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -140$$

Δ_1 se obține din Δ schimbând între ele linia 1 cu linia 2. Deci: un determinant își schimbă semnul dacă schimbăm între ele două linii ale determinantului.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -140.$$

Δ_2 se obține din Δ schimbând între ele coloana 2 cu coloana 3. Deci: un determinant își schimbă semnul, dacă schimbăm între ele două coloane.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 280.$$

Δ_3 se obține din Δ înmulțind prima linie cu 2. Deci: înmulțind o linie a unui determinant cu un număr, determinantul se înmulțește cu acel număr.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4+1 & 3-5 & -4+1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 140 .$$

Δ_4 se obține din Δ, adunând prima linie la a doua linie. Deci: un determinant nu se schimbă dacă adunăm la o linie a sa o altă linie a determinantului.

În general

Un determinant își schimbă semnul dacă schimbăm între ele două linii sau două coloane. Dacă înmulțim o linie sau o coloană a unui determinant cu un număr, determinantul se înmulțește cu acel număr.

Un determinant nu se schimbă dacă adunăm la o linie (sau la o coloană) un multiplu al unei alte linii (sau al unei alte coloane).

Aceste proprietăți sunt valabile pentru determinanți de orice ordin. Determinanții au însă și alte proprietăți care se dovedesc foarte utile în calcule.

Să demonstrăm!

• Dacă un determinant are o linie (sau o coloană) cu toate elementele egale cu zero, atunci determinantul este egal cu zero.

• Dacă un determinant are două linii (sau două coloane) proporționale, atunci determinantul este egal cu zero.

• Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$; atunci $2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 0 & 2\cdot 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \Delta$, deci $\Delta = 0$.

• Să presupunem, de exemplu, că linia 1 și linia 2 din determinant sunt proporționale și factorul de proporționalitate este 3; atunci:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3\cdot a & 3\cdot b & 3\cdot c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 .$$

♦ Ce înseamnă matrice inversabilă?

Să comparăm!

$-2{,}5 + (2{,}5 + x) = -2{,}5 + 7{,}2$	$0{,}4 \cdot (2{,}5 \cdot x) = 0{,}4 \cdot 7{,}2$
$0 + x = 4{,}7$	$1 \cdot x = 2{,}88$
$x = 4{,}7$	$x = 2{,}88$

Ecuația $2{,}5 + x = 7{,}2$ se rezolvă adunând în ambii membri numărul real $-2{,}5$.

Ecuația $2{,}5 \cdot x = 7{,}2$ se rezolvă înmulțind ambii membri cu numărul real 0,4.

În cele două exemple de mai sus, am rezolvat două ecuații în mulțimea numerelor reale. În rezolvare, sunt folosite câteva proprietăți comune ale operațiilor de adunare și de înmulțire, și anume: asociativitatea, existența elementului neutru și existența opusului (sau inversului).

Știm că înmulțirea matricelor pătratice de ordin n este și ea o operație asociativă și că I_n este element neutru la înmulțire. De aceea, pentru a rezolva o ecuație de tipul $C \cdot X = T$, unde C este o matrice pătratică, este necesar să determinăm *inversa* matricei C.

În general

Spunem că o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este *matrice inversabilă* (sau *nesingulară*) dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.

Inversa unei matrice A (dacă există!) se notează A^{-1}.

13 *Compară valorile următorilor determinanți fără să îi calculezi efectiv:*

$$p = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad q = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad r = \begin{vmatrix} 3-5 & -1+4 & 0-4 \\ -5 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

14 *Explică toate transformările făcute în demonstrația proprietății alăturate. Menționează regulile aplicate.*

15 *Explică modul în care se rezolvă ecuația $3x + 0{,}4 = 1{,}6$.*

16 *Determină: opusul lui 2,5; inversul lui 2,5. Cum verifici dacă ai răspuns corect?*

⚠ *Dacă B este inversa matricei A, atunci A este inversa lui B.*

♦ Care matrice sunt inversabile?

Să comparăm!

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; vrem să justificăm dacă A este inversabilă și, în caz afirmativ, să calculăm inversa matricei A. Pentru aceasta, trebuie să argumentăm dacă există o matrice $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot X = I_2$ și $X \cdot A = I_2$.

Problema inversabilității unei matrice se pune doar pentru matricele pătratice.

Explicităm prima egalitate:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2z - t \\ x + 3y & z + 3t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} 2z - t = 0 \\ z + 3t = 1 \end{cases}.$$

Rezolvând cele două sisteme, obținem: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

17 *Fie $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Observă că $M \cdot N = I_2$. Putem deduce că $N = M^{-1}$?*

Un calcul direct ne arată că și $X \cdot A = I_2$. Deci A este matrice inversabilă și inversa ei este matricea X de mai sus.

Să aplicăm același procedeu de calcul pentru a justifica dacă matricea $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este inversabilă.

Conform definiției, B este matrice inversabilă dacă există o matrice $Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $B \cdot Y = I_2$ și $Y \cdot B = I_2$. Explicităm prima egalitate:

$$B \cdot Y = I_2 \Rightarrow \ \ldots \ \begin{cases} 2m - p = 1 \\ m - 0{,}5p = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} 2n - q = 0 \\ n - 0{,}5q = 1 \end{cases}.$$

18 *Compară sistemul obținute în calculul matricei Y cu sistemul obținut în calculul lui X. Ce asemănări observi? Prin ce se deosebesc ele?*

19 *Efectuează toate calculele și verifică dacă matricea B este inversabilă.*

Un calcul simplu ne arată că aceste sisteme sunt incompatibile, deci matricea B nu este inversabilă.

Matricele A și B sunt foarte asemănătoare: doar unul dintre elementele lor este diferit. Ce proprietate a acestor matrice ar putea oare să influențeze existența sau inexistența inversei?

Observăm că pentru determinarea inversei unei matrice încercăm să rezolvăm câteva sisteme de ecuații; inversa există dacă și numai dacă aceste sisteme sunt toate compatibile. Am învățat că, în rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, un rol important îl are matricea formată din coeficienții necunoscutelor. Mai precis, dacă această matrice este pătratică (adică dacă numărul de ecuații ale sistemului este egal cu numărul de necunoscute) și dacă determinantul matricei este diferit de zero, atunci sistemul are soluție. Aceasta explică de ce, în exemplul anterior, A este matrice inversabilă, iar B nu este inversabilă: deosebirea esențială constă în faptul că $\det(A) \neq 0$, dar $\det(B) = 0$.

În general

O matrice pătratică cu elemente numere reale este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este diferit de zero.

♦ Cum calculăm inversa unei matrice?

Să observăm!

Pentru a calcula inversa matricei $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, am rezolvat sistemele $\begin{cases}2x-y=1\\ x+3y=0\end{cases}$ și $\begin{cases}2z-t=0\\ z+3t=1\end{cases}$; soluțiile acestor sisteme sunt chiar coloanele matricei inverse A^{-1}.

Observăm că în cele două sisteme, ecuațiile au aceiași coeficienți. De aceea, putem rezolva cele două sisteme în același timp, făcând simultan aceleași transformări echivalente. Explicităm în continuare aceste rezolvări.

$\begin{cases}2x-y=1\\ x+3y=0\end{cases}$ | $\begin{cases}2z-t=0\\ z+3t=1\end{cases}$

Folosim „pivotul” 2 și reducem variabila x, respectiv z, din a doua ecuație. Codificăm transformarea prin: $L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1$.

⚠ *Notația $L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1$ înseamnă că din linia a doua scădem linia întâi înmulțită cu $\frac{1}{2}$ și scriem rezultatul pe linia a doua.*

$\begin{cases}2x-y=1\\ \frac{7}{2}y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ | $\begin{cases}2z-t=0\\ \frac{7}{2}t=1\end{cases}$

În fiecare sistem, rezolvăm a doua ecuație, prin împărțire cu $\frac{7}{2}$. Codificăm transformarea prin: $L_2 \leftarrow \frac{2}{7}L_2$

$\begin{cases}2x-y=1\\ y=-\frac{1}{7}\end{cases}$ | $\begin{cases}2z-t=0\\ t=\frac{2}{7}\end{cases}$.

Reducem variabila y, respectiv t, din prima ecuație a fiecărui sistem. Codificăm transformarea prin: $L_1 \leftarrow L_1+L_2$.

20 *Cum se codifică înmulțirea primei ecuații a unui sistem cu 4? Dar adunarea primelor două ecuații ale sistemului?*

$\begin{cases}2x=\frac{6}{7}\\ y=-\frac{1}{7}\end{cases}$ | $\begin{cases}2z=\frac{2}{7}\\ t=\frac{2}{7}\end{cases}$

În fiecare sistem, rezolvăm prima ecuație, prin împărțire cu 2. Codificăm transformarea prin: $L_1 \leftarrow 0,5L_1$.

21 *Ce crezi că înseamnă notația $L_1 \leftarrow L_1+5L_2$?*

$\begin{cases}x=\frac{3}{7}\\ y=-\frac{1}{7}\end{cases}$ | $\begin{cases}z=\frac{1}{7}\\ t=\frac{2}{7}\end{cases}$

Am obținut astfel soluțiile celor două sisteme, deci putem scrie matricea A^{-1}.

Transformările efectuate pentru rezolvarea celor două sisteme au urmărit inițial obținerea unui sistem „scară”, în care matricea asociată este cea alăturată. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

⚠ *Metoda de rezolvare folosită în determinarea soluțiilor celor două sisteme se numește „metoda eliminării totale”.*

Ulterior, am continuat transformările, pornind de la ultima ecuație, până când am rezolvat complet sistemele. În acel moment, matricea sistemelor obţinute a devenit I_2.

Aceste observații ne arată că putem organiza calculele în felul următor:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-0,5L_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -1 & 1 & 0\\ 1 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right)\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2:\frac{7}{2}}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{array}\right)$$

matricea A matricea I_2

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{2}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1:2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7}\end{array}\right)$$

matricea I_2 matricea A^{-1}

⚠ *Notația $L_1 \leftarrow L_1+L_2$ înseamnă că se înlocuiește linia întâi cu suma dintre L_1 și L_2.*

Să aplicăm!

Utilizăm procedeul descris mai sus pentru a calcula inversa matricei

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$ (În calculele făcute am marcat de fiecare dată „pivotul” folosit.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{4}} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 \cdot 4]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -9 & -1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 2 & -8 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 28 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 : 4]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

Am obținut: $X^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 2 & -8 \\ 7 & 1 & -3 \\ -9 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

22 Explică ce urmăresc transformările făcute la primul pas.

23 La ce concluzie ai ajunge dacă, după efectuarea câtorva transformări ai obține în partea stângă o linie formată doar din zerouri?

24 Verifică egalitățile: $X \cdot X^{-1} = I_3$ și $X^{-1} \cdot X = I_3$, care arată corectitudinea calculelor făcute.

În general

Inversa unei matrice pătratice nesingulare se poate calcula folosind metoda eliminării totale. Pentru aceasta, așezăm una lângă alta matricea dată și matricea unitate, într-un tabel cu două compartimente. Transformăm simultan liniile celor două matrice, până când în primul compartiment apare matricea unitate. În acest moment, inversa matricei date apare în al doilea compartiment al tabelului.

♦ Ce alte metode putem folosi pentru calculul inversei?

Să observăm!

⚠ În dezvoltarea unui determinant după o linie sau coloană se ține cont de „regula tablei de șah” în alegerea semnelor:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Determinantul unei matrice poate fi calculat prin dezvoltarea acestuia după o linie sau după o coloană. Astfel, dacă dezvoltăm după linia a doua un determinant de ordinul trei, obținem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Același determinant se dezvoltă după coloana a treia astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Observăm că, indiferent cum dezvoltăm un determinant (după o linie sau după o coloană), elementul a_{ij} se înmulțește cu determinantul obținut prin ștergerea liniei și coloanei lui a_{ij} în determinantul inițial. Determinantul astfel obținut se numește *minorul* corespunzător elementului a_{ij} și se notează, de obicei, A_{ij}.

De exemplu: în dezvoltarea după prima linie sau după a doua coloană, a_{12} se va înmulți cu $A_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, adică cu $A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Numărul $A_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$ este deci minorul corespunzător lui a_{12}.

Cu aceste notații, dezvoltarea determinantului după linia a treia se poate scrie:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{31}\cdot A_{31}-a_{32}\cdot A_{32}+a_{33}\cdot A_{33}\,.$$

Să demonstrăm!

Fie $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X=(a_{ij})$. Notăm $d=\det(X)$ și A_{ij} minorul corespunzător elementului a_{ij}. Atunci:

$a_{11}\cdot A_{11}-a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}=d$

$a_{21}\cdot A_{11}-a_{22}\cdot A_{12}+a_{23}\cdot A_{13}=0$

$a_{31}\cdot A_{11}-a_{32}\cdot A_{12}+a_{33}\cdot A_{13}=0.$

Prima relație reprezintă dezvoltarea determinantului după linia întâi.

Fie $Y=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, matricea obținută din X prin înlocuirea primei linii cu a doua linie. Știm că $\det(Y)=0$, deoarece Y are două linii egale. Pe de altă parte, prin dezvoltarea determinantului după prima linie obținem:

$$0=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}\cdot A_{11}-a_{22}\cdot A_{12}+a_{23}\cdot A_{13}\,.$$

Am demonstrat astfel a doua egalitate din enunț. Analog se demonstrează și a treia egalitate.

Să aplicăm!

Egalitățile anterioare conduc la un algoritm pentru calculul inversei unei matrice pătratice. Explicăm algoritmul pentru matricea $X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pas 1. Calculăm $\det(X)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\ldots=-7$.

Deoarece $\det(X)\neq 0$, matricea X este inversabilă. Continuăm algoritmul.

Pas 2. În matricea X, schimbăm între ele liniile cu coloanele. Obținem astfel *matricea transpusă* a lui X, notată X^t:

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow X^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pas 3. În matricea X^t înlocuim fiecare element cu minorul corespunzător, ținând cont de „regula tablei de șah” în alegerea semnelor. Obținem astfel *matricea adjunctă* a lui X, notată X^*.

$$X^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow X^*=\begin{pmatrix} -9 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -11 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

În X^t, 3 se înlocuiește cu $+\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, iar 0 se înlocuiește cu $-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$.

25 *Folosește notația A_{ij} pentru a descrie dezvoltarea determinantului după prima coloană. Explică modul în care sunt alese semnele termenilor.*

26 *În cele trei relații din enunț apar minorii A_{11}, A_{12}, A_{13}. Scrie alte trei relații de tipul celor din enunț, referitoare la minorii A_{12}, A_{22}, A_{32}. Va trebui să consideri dezvoltarea determinantului după o coloană.*

27 *Efectuează calculele pentru a justifica fiecare afirmație din demonstrația alăturată.*

28 *Justifică egalitatea $\det(X)=-7$. La ce concluzie ai fi ajuns dacă obțineam $\det(X)=0$?*

⚠ *Matricea X^t și matricea X sunt simetrice față de diagonala principală.*

29 *Pentru exemplul analizat, explică modul în care au apărut în X^* numerele -11 și -2.*

30 *Calculează $X \cdot X^{-1}$ și $X^{-1} \cdot X$, pentru a te convinge că am obținut într-adevăr matricea inversă.*

31 *Aplică algoritmul pentru o matrice pătratică X de ordinul 3, cu elementele a_{ij}. Explică de ce matricea obținută la sfârșit este inversa lui X.*

32 *Verifică afirmația: matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ este inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

33 *Observă modul de rezolvare din exemplul alăturat, apoi rezolvă ecuația $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Pas 4. Împărțim elementele matricei X^* la $\det(X)$ și obținem astfel *inversa matricei* X, notată X^{-1}. Obținem astfel:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

În general

Inversa unei matrice pătratice cu determinantul nenul se obține împărțind elementele matricei adjuncte la determinantul matricei inițiale. Calculul inversei se face după schema: $X \Rightarrow X^t \Rightarrow X^* \Rightarrow X^{-1}$.

♦ Cum se rezolvă ecuațiile matriceale?

Să comparăm!

Pentru a rezolva ecuația $2{,}5 \cdot x = 3$, $x \in \mathbb{R}$, înmulțim ambii membri ai ecuației cu numărul 0,4; acesta este inversul numărului 2,5 față de înmulțire:

$$0{,}4 \cdot (2{,}5 \cdot x) = 0{,}4 \cdot 3$$

$$(0{,}4 \cdot 2{,}5) \cdot x = 1{,}2$$

$$1 \cdot x = 1{,}2$$

$$x = 1{,}2$$

Pentru a rezolva ecuația $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, înmulțim *la stânga* ambii membri ai ecuației cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; aceasta este inversa matricei $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ față de înmulțire:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

În rezolvarea celor două ecuații, am folosit metode asemănătoare, deoarece operațiile de înmulțire a numerelor reale, respectiv de înmulțire a matricelor, au aceleași proprietăți: sunt asociative și admit elemente neutre. În ambele cazuri, am obținut o singură soluție. Rezolvarea a fost posibilă deoarece coeficienții necunoscutelor (adică numărul 2,5, din prima ecuație, respectiv matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, din a doua ecuație) sunt elemente inversabile față de înmulțire.

Exerciții și probleme

1. Afirmațiile următoare sunt false. Descoperă greșeala. Reformulează enunțurile astfel încât acestea să fie adevărate.
a) Ecuația $(x+2)^2 - 1 = (1-x)^2 + 3x$ are o soluție număr natural.
b) Ecuația $2(x-3)^2 - 5x = 2 - (3-x)^2$ are o infinitate de soluții.
c) Sistemul $\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ 6x-9y-2=0 \end{cases}$ are o infinitate de soluții reale.
d) Sistemul $\begin{cases} 2(x-4)+3(y+2)=3 \\ 3(x+2)+2(y-4)=3 \end{cases}$ nu are soluții reale.

2. Rezolvă sistemele folosind metoda reducerii.
a) $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-3y+z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 2x-3y+2z=4 \\ x-y-z=1 \\ 4x-2y+5z=2 \end{cases}$.

3. Scrie fiecare sistem în formă matriceală, apoi exprimă soluțiile folosind determinanți.
a) $\begin{cases} 2x-3y+2z=2 \\ x-y+z=2 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=5 \\ 2x_1+3x_2-2x_3=2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ -4x_1+x_2+2x_3=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$.

4. Calculează determinanții:
a) $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$;
c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;
e) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Calculează rapid, folosind proprietățile determinanților:
a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$;
c) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 5\sqrt{3} & 6\sqrt{3} \\ 4 & 10 & 1 \\ 6 & 15 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Calculează determinanții:
a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;
c) $\begin{vmatrix} -12 & -6 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Aplicând proprietățile determinanților, calculează și scrie punând rezultatul sub formă de produs:
a) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$;
b) $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x^2-1 \\ y-1 & y+1 & y^2-1 \\ z-1 & z+1 & z^2-1 \end{vmatrix}$;
c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$.

8. Rezolvă următoarele sisteme liniare prin metoda lui Cramer:
a) $\begin{cases} 12x-7y+6z=83 \\ 8x-4y-3z=24 \\ -2x+5y+13z=23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+8y-4z=23 \\ 6x+2y+7z=6 \\ -x+9y-5z=38 \end{cases}$.

9. Verifică dacă matricele următoare sunt inversabile. În caz afirmativ, calculează inversele lor.
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculul determinanților: aplicații

Aplicăm și dezvoltăm!

Determinanții au apărut în matematică din necesitatea de a identifica formule directe de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.

Ulterior, s-a constatat însă că putem utiliza determinanții și în rezolvarea altor probleme de matematică. Câteva dintre aceste aplicații sunt explicate în continuare.

❶ *Aria unui triunghi se calculează cu formula:*

$A = \dfrac{b \cdot î}{2}$.

Scrie formula pentru aria unui triunghi dreptunghic.

♦ Cum calculăm aria unui triunghi?

În clasele anterioare, am învățat mai multe formule de calcul pentru aria unui triunghi. Dacă triunghiul este trasat pe caietul de matematică (sau pe orice altă rețea de pătrățele), putem calcula aria acestuia mai simplu, folosind numai ariile unor dreptunghiuri sau triunghiuri dreptunghice.

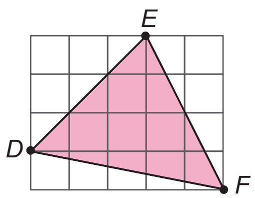
Să analizăm!

Considerăm o rețea de pătrate de latură 1.

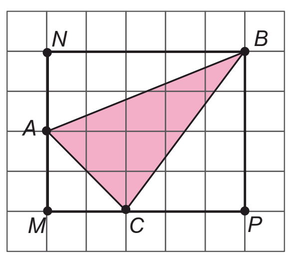
Pentru a calcula aria unui triunghi cu vârfurile în nodurile rețelei, putem proceda astfel:

- încadrăm triunghiul într-un dreptunghi
- scădem din aria acestui dreptunghi, ariile a trei triunghiuri dreptunghice.

❷ *Calculează aria triunghiului DEF din imaginea următoare.*



Exemplu



Pentru triunghiul din figură:

$A_{ABC} = A_{MNBP} - (A_{AMC} + A_{ANB} + A_{BPC})$

$$A_{ABC} = 5 \cdot 4 - \left(\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 3\right) = 7$$

Putem utiliza această metodă de calcul și pentru a determina aria unui triunghi, la care sunt precizate coordonatele vârfurilor în raport cu un sistem de axe.

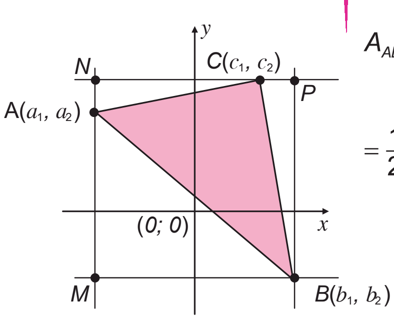
❸ *Observă figura de mai jos, apoi explică de ce $BM = b_1 - a_1$ și $AM = a_2 - b_2$. Identifică apoi toți termenii care apar în calculul A_{ABC}.*

Să demonstrăm!

Dacă vârfurile triunghiului *ABC* au coordonatele $A(a_1;\ a_2)$, $B(b_1;\ b_2)$, $C(c_1;\ c_2)$, atunci aria triunghiului se poate calcula cu formula:

$$A_{ABC} = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$, semnul fiind ales astfel ca rezultatul să fie pozitiv.

❹ *Ce arie are triunghiul DEF, ale cărui vârfuri au coordonatele D(2; 4), E(–3; 5), F(1; 6)?*



Încadrăm triunghiul *ABC* într-un dreptunghi. Dacă figura arată ca în imaginea alăturată, atunci:

$$A_{ABC} = (b_1 - a_1)(c_2 - b_2) - \left[\frac{1}{2}(b_1 - a_1)(a_2 - b_2) + \frac{1}{2}(b_1 - c_1)(c_2 - b_2) + \frac{1}{2}(c_1 - a_1)(c_2 - a_2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 c_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1 - a_2 b_1 - a_1 c_2) = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

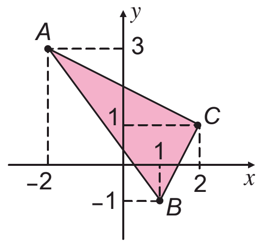
O analiză simplă conduce la concluzia că, în orice situație, unul dintre vârfurile triunghiului dat va coincide cu un vârf al dreptunghiului, iar celelalte două vârfuri vor fi pe laturile opuse acestuia. De aceea, formula demonstrată rămâne valabilă în orice situație.

Să aplicăm!

Pentru a calcula distanța de la $C(2; 1)$ la dreapta AB, unde $A(-2; 3)$ și $B(1; -1)$, putem proceda astfel:

- Calculăm $A_{ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$.
- Determinăm $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-1))^2} = 5$.
- Exprimăm $A_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h_c$

Deci: $d(C; AB) = h_c = 2$.



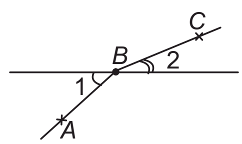
❺ *Calculează distanța de la A(1; 3) la dreapta ce trece prin B(3; 0) și C(2; 1).*

♦ Cum demonstrăm coliniaritatea unor puncte?

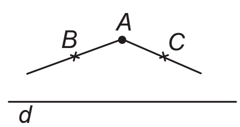
Trei sau mai multe puncte se numesc *coliniare* dacă se găsesc toate pe o dreaptă. În clasele anterioare, am învățat mai multe metode de demonstrare a coliniarității.

Să ne amintim!

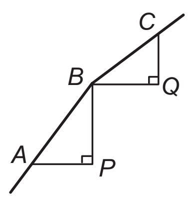
- Dacă $m(\hat{1}) = m(\hat{2})$, atunci A, B, C sunt coliniare.



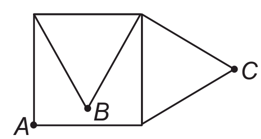
- Dacă $AB \parallel d$ și $AC \parallel d$, atunci A, B, C sunt coliniare.



- Dacă $\frac{AP}{BQ} = \frac{BP}{CQ}$, atunci A, B, C sunt coliniare.



❻ *În figură sunt desenate un pătrat și două triunghiuri echilaterale. Arată că A, B, C sunt puncte coliniare.*



❼ *Folosește metoda triunghiurilor asemenea pentru a verifica dacă A(−3; −1), B(−1; 1) și C(3; 5) sunt coliniare.*

Dacă punctele sunt raportate la un sistem de axe ortogonale, putem verifica mai simplu dacă acestea sunt coliniare.

Să analizăm!

Trei puncte sunt coliniare dacă și numai dacă aria triunghiului format de ele este egală cu zero.

Fie $A(-3; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(3; 5)$ trei puncte reprezentate în sistemul cartezian xOy.

Calculăm:

$$A_{ABC} = \pm\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

Deducem că A, B, C sunt coliniare.

❽ *Continuă calculele și arată că $A_{ABC} = 0$.*

În general

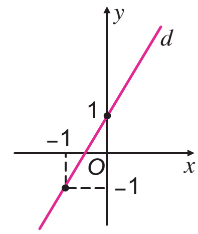
Punctele $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ și $C(x_3; y_3)$ sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

♦ Cum aflăm ecuația dreptei determinată de două puncte?

Am văzut că mulțimea soluțiilor unei ecuații de tipul $ax + by + c = 0$ se reprezintă într-un sistem cartezian xOy, printr-o dreaptă.

Reciproc, orice dreaptă din plan este reprezentarea geometrică a mulțimii soluțiilor unei ecuații de gradul I cu două necunoscute.



Exemplu

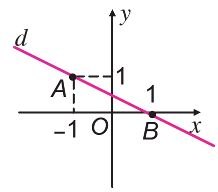
Mulțimea soluțiilor ecuației $2x - y + 1 = 0$ se reprezintă geometric prin dreapta d.

Spunem că d are ecuația $2x - y + 1 = 0$.

⑨ Reprezintă geometric mulțimea soluțiilor ecuației $x + y + 1 = 0$.

Să analizăm!

Fie $A(-1; 1)$ și $B(1; 0)$ două puncte în plan. Vrem să determinăm ecuația dreptei AB. Altfel spus: vrem să determinăm în ce condiții un punct $M(x; y)$ aparține dreptei AB.



Observăm că:

$M \in AB$ dacă și numai dacă M, A, B sunt coliniare.

Această ultimă condiție este echivalentă cu: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

adică $x + 2y - 1 = 0$. Ecuația dreptei AB este deci $x + 2y - 1 = 0$.

În general

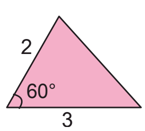
Ecuația dreptei determinată de punctele distincte $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ este:

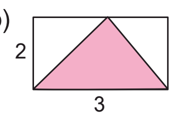
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

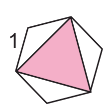
⑩ Scrie ecuația dreptei CD, unde C(1; 1), D(2; 3).

Exerciții și probleme

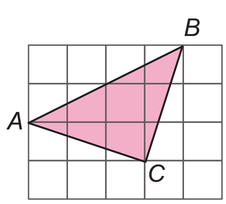
1. Calculează ariile triunghiurilor din figurile de mai jos.

a)


b)


c)


2. Pătratele din rețeaua alăturată au latura de 1. Calculează lungimile laturilor și aria triunghiului ABC. Ce măsură are unghiul A?



3. Fie $M(-1; 1)$, $N(1; 2)$, $P(3; -3)$.
a) Calculează aria triunghiului A_{MNP}.
b) Desenează perpendiculara din N pe MP și estimează, pe desen, distanța de la N la MP.
c) Calculează distanța de la N la MP. Compară rezultatul găsit cu estimarea de la punctul b).

4. Fie d dreapta de ecuație $x - y + 1 = 0$.
a) Arată că $A(1; 2)$ și $B(0; 1)$ aparțin lui d.
b) Calculează distanța de la $M(2; 0)$ la d.

5. a) Verifică dacă $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ și $C(5; 4)$ sunt puncte coliniare.
b) Determină numărul real m dacă punctele $M(m; 1)$, $P(1; -1)$, $Q(3; 0)$ sunt coliniare.

6. Următoarele puncte sunt raportate la sistemul de axe xOy: $A(6; 0)$, $B(6; 6)$, $C(0; 6)$, $D(4; 2)$, $E(6; 3)$.
a) Arată că $OABC$ este un pătrat.
b) Verifică afirmația: $D \in AC$ și $2 \cdot AD = DC$.
c) Demonstrează că E este mijlocul lui AB și că O, D, E sunt puncte coliniare.
d) Reformulează problema, făcând abstracție de sistemul de axe și de coordonatele punctelor date.

7. Într-un determinant de ordinul trei, toate cele 9 elemente sunt egale cu +1 sau cu −1. Arată că valoarea determinantului poate fi doar 0, 4 sau −4.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...
- să identific proprietăți ale determinanților
- să calculez determinanți de ordin cel mult 3
- să rezolv sisteme, folosind metode diferite de rezolvare, și să compar aceste rezolvări
- să utilizez determinanții în rezolvarea unor probleme de geometrie?

Test de verificare

1. *Completează cu răspunsul corect!*

Determinantul $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ este egal cu zero, deoarece ...

2. Considerăm determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) Transformă determinantul D după regula: $L_2 \leftarrow L_2 + 2 \cdot L_1$.
b) Dezvoltă determinantul obținut după prima coloană.
c) Aplică regula lui Sarrus pentru a calcula D. Compară rezultatele obținute.

3. Considerăm sistemul: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$. Rezolvă sistemul:

a) prin metoda reducerii;
b) folosind regula lui Cramer;
c) prin reprezentarea grafică a ecuațiilor sistemului.
Compară modurile de rezolvare. Care metodă ți se pare mai simplă? De ce?

4. Fie $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; -2)$.
a) Calculează aria triunghiului ABC.
b) Scrie ecuațiile dreptelor AB, AC și BC.
c) Justifică dacă sistemul format cu cele trei ecuații determinate la b) are soluție.

Lectură

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare este legată în mod fundamental de numele matematicianului elvețian Gabriel Cramer (1704-1752). Acesta a descoperit forma generală a soluției unice a unui sistem liniar de n ecuații liniare cu n necunoscute și condiția de existență a acesteia. Algoritmul de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare dezvoltat de matematicianul german Karl Friederich Gauss (1777-1855) se mai numește și rezolvarea prin eliminare. Acest algoritm se pretează la folosirea pe calculator, de aceea această metodă a căpătat o importanță tot mai mare în ultimii ani.

După cum știm, o ecuație liniară cu două necunoscute definește în plan o dreaptă. Ca urmare, două ecuații cu două necunoscute determină o pereche de drepte în plan și soluțiile, dacă există, trebuie să fie punctele de intersecție ale celor două drepte. Putem avea următoarele situații:

a) Există o infinitate de soluții și o infinitate de puncte de intersecție ale celor două drepte. În acest caz, cele două drepte coincid. Putem da o valoare arbitrară uneia dintre necunoscute, iar cealaltă este determinată în funcție de aceasta.

b) Sistemul admite soluție unică. În acest caz, dreptele se intersectează într-un singur punct.

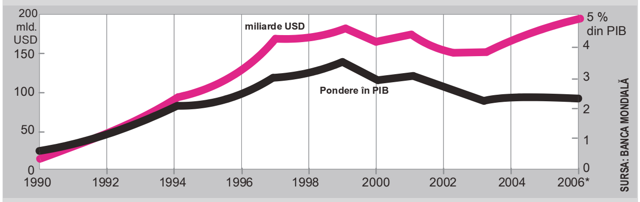
c) Sistemul nu are soluții. În acest caz, dreptele sunt distincte și paralele.

În mod similar, putem proceda în cazul unui sistem cu trei ecuații și trei necunoscute. Fiecare ecuație determină un plan în spațiul cu trei dimensiuni. Soluțiile sistemului se găsesc la intersecția celor trei plane.

Exerciții și probleme recapitulative

1. Imaginea alăturată prezintă valoarea netă a investițiilor străine în țări in curs de dezvoltare, precum și ponderea acestor investiții în produsul intern brut al acestor țări, în perioada 1990 – 2005.

INVESTIȚIILE STRĂINE DIRECTE ÎN ȚĂRILE AFLATE ÎN CURS DE DEZVOLTARE



Sfârșitul anilor '90 a marcat cea mai mare pondere a investițiilor străine directe (ISD) în produsul intern brut al țărilor în curs de dezvoltare, de trei procente. Analiștii prevăd că, în următorii ani, volumul ISD se va stabiliza la niveluri puțin mai ridicate de doi la sută. În termeni nominali, ISD vor cunoaște o creștere continuă în 2005 și 2006, urmând tendința începută acum doi ani. Asia va lua și de această dată „caimacul" investițiilor străine, China și, mai nou, India fiind preferatele companiilor occidentale și japoneze.

Sursă: Capital, 15/2005/pag. 15

a) Observă reprezentările grafice. Trasează cele două grafice în două sisteme de axe. (Atenție! Datele de pe cele două ordonate au semnificații diferite.)
b) Estimează valoarea medie a investițiilor străine, pentru perioada analizată.
c) Găsește cel puțin un argument pentru a explica de ce, în timp ce valoarea investițiilor străine a crescut, ponderea acestora în PIB a scăzut.

2. Folosind datele din tabelul de mai jos:

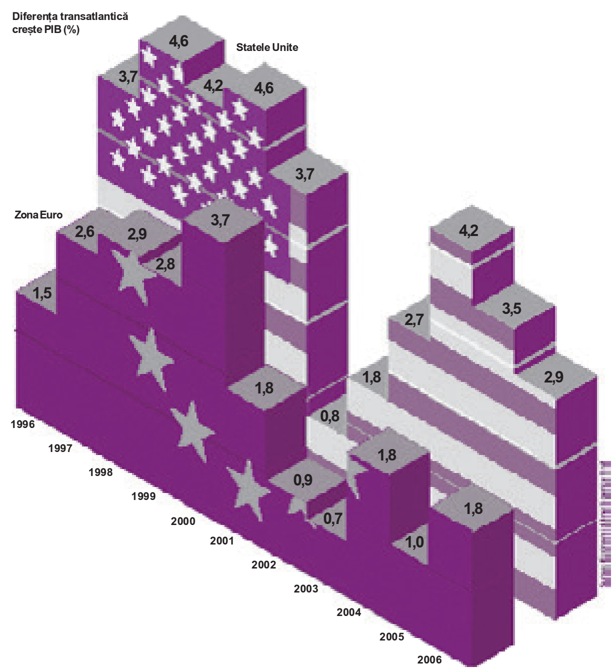
PIAȚA CARDURILOR VALIDE VISA ȘI MASTERCARD

Anul	Visa	MasterCard
1996	1.673	100
1997	12.953	26.500
1998	85.632	52.529
1999	178.544	215.000
2000	468.232	556.000
2001	1.045.984	1.108.000
2002	1.679.776	2.148.000
2003	2.164.671	2.549.375
2004 (sept)	2.576.115	2.872.719

Sursa: www.no-cash.ro; MASTERCARD & VISA

a) calculează dinamica creșterii numărului de carduri, de la un an la altul;
b) determină anul în care creșterea unuia dintre tipurile de carduri a fost cea mai spectaculoasă, prin raportare la anul anterior;
c) determină ponderea fiecărui tip de card, din totalul numărului de carduri, pentru anii 2001 – 2004; reprezintă printr-un grafic cu bare evoluția numărului de carduri în perioada 2000 – 2004.

3. În imagine este reprezentată variația indicatorului de creștere economică în raport cu anul anterior, din SUA și Uniunea Europeană.



a) Transpune datele din imagine într-un tabel.
b) Reprezintă grafic, într-un sistem de axe, variația din cele două cazuri.
c) Determină media variației pentru cele două entități economice.
d) Determină amplitudinea celor două serii statistice. Compară cele două evoluții folosind indicatorii statistici studiați (media, modulul, dispersia, amplitudinea).

4. Considerăm seria statistică a punctajelor obținute de concurenții unui concurs de șah:
2; 3; 3,5; 3,5; 3,5; 4; 5,5; 5,5; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8,5.
a) Organizează datele într-un tabel.
b) Reprezintă datele printr-o diagramă cu bare.
c) Determină modulul, media și mediana seriei date.

5. Calculează:
a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Pentru fiecare dintre următorii determinanți, folosește dezvoltarea după prima linie pentru a-i calcula.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Aplică regula lui Sarrus și calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

8. Folosește regula lui Cramer și rezolvă sistemele:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases}$

9. Decide dacă sistemele următoare sunt compatibile:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

10. La un magazin, într-o săptămână s-au obținut următoarele încasări (în milioane): luni: 10,5; marți: 12,1; miercuri: 10,2; joi: 9,5; vineri: 14; sâmbătă: 14,1.
a) Care este media și dispersia încasărilor obținute?
b) Magazinul are un adaos comercial (diferența între prețul de vânzare și cel de cumpărare a mărfii) de 20%. Cheltuielile zilnice se ridică la 1,3 milioane, de luni până sâmbătă, și la 2,6 milioane dacă se lucrează duminica. Care este media și dispersia profitului magazinului?
c) Să presupunem că duminică s-ar obține încasări de 12 milioane lei. Arată că media încasărilor de luni până duminică este mai mare decât media încasărilor de luni până sâmbătă, dar profitul este mai mic. Cum se explică aceasta?
d) Care ar trebui să fie nivelul încasărilor duminică, pentru ca patronul să aibă un cont brut de 0,5 milioane săptămânal, organizând activitatea și duminica?

11. Exprimă printr-o ecuație matriceală sistemele următoare, apoi rezolvă-le.

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$.

12. Decide care dintre matricele următoare sunt inversabile:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Justifică dacă matricele următoare sunt inversabile. În caz afirmativ, calculează inversele.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvă ecuațiile matriceale: $A \cdot X = B$; $Y \cdot A = B$; $B \cdot Z = A$; $T \cdot B = A$.

Răspunsuri

Pag. 6. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) 8; b) –36; c) –3; d) $\frac{4}{15}$; e) 8,6; f) $3\sqrt{2}$. **2.** a) 2007; b) 14. **3.** a) A; b) F; c) A; d) F. **4.** a) 350; b) 17 lei; c) 31,25%. **5.** a. **6.** c. **7.** a) A; b) F; c) F; d) A; e) A. **8.** a) A; b) F; c) F; d) F; e) A. **9.** a) $A = (-\infty; 3]$; $B = (1; +\infty)$; $C = [0; 2)$. b) $A \cap B = (1; 3]$; $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \setminus C = (-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

Pag. 19. Test de verificare. **1.** a) și d). **2.** $(10x + 4) \cdot 4 = 4 \cdot 10^5 + x$, $10^5 \leqslant x < 10^6$. **3.** Da, $S = \left\{\left(\frac{19}{14}, -\frac{2}{7}\right)\right\}$. **4.** Sistemul nu are soluții, deoarece dreptele reprezentate nu au toate un punct comun.

Pag. 20. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) 4,05; b) 1,24; c) 7,843; d) 4; e) 5,12; f) 3,45; g) 4,86; h) 5. **2.** a) 7,07; b) 4,14; c) 3,25; d) 2,24; e) 6,05; f) 2,91; g) 3,93; h) 2,50. **3.** a) 29; b) 20%; c) 144; d) 15%. **4.** a) 101,5; b) 6 m^2; c) 15 min; d) 1125000 coli.

Pag. 35. Test de verificare. **4.** a) 166,(6)%; b) aproximativ 60 mii; c) 810 mii.

Pag. 36. Test inițial de autoevaluare. **1.** c; f; g. **2.** a) 22,50; b) 154,50; c) 85,5. **3.** 70 ha. **4.** b. **5.** a. **6.** b. **7.** a) 21 l; b) 84 ore.

Pag. 55. Test de verificare. **2.** Micro. **4.** a) 100 cm; b) 90,(6)%.

Pag. 56. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) –10; b) 27; c) 4,04; d) 2,82; e) 1,56(3); f) 1,57; g) 60,8; h) 114. **2.** a) –8; b) 25; c) 2; d) –1; e) $\frac{1}{3}$; f) 2; g) 0,00001; h) –1. **3.** a) 2^{12}; b) 5^6; c) $\log_2 70$; d) 1. **4.** a) 36 m; b) 15 kg; c) 0,6 tone; d) 187,5 l. **5.** a) 10,8 lei; b) 20%; c) 50%; d) 9,9 lei. **6.** 4,5; 6; 6; 2.

Pag. 67. Test de verificare. **1.** Sondaj, evidență contabilă. **2.** Limbi străine; matematică, fizică, chimie. **5.** La Antena 1.

Pag. 68. Test inițial de autoevaluare. **1.** a) 14; b) 0,6; c) 5. **2.** a) $3x$; b) $3x^2$; c) 0. **6.** $3\vec{u} + \vec{v}$; $2\vec{u} + 2\vec{v}$; $-3\vec{u} - \vec{v}$; $-2\vec{u} + 2\vec{v}$. **7.** a) 1148833; b) 1148833; c) 1148833. **8.** a) A; b) F; c) A. **9.** a) A; b) A; c) F; d) F. **10.** Există două numere reale x și y cu proprietatea că $x^2 + y^2 < 4$.

Pag. 81. Test de verificare. **2.** Asociază fiecare tabel cu o matrice, apoi adună matricele respective. **4.** Scrie transpusa celei de-a doua matrice, apoi înmulțește matricele.

Pag. 82. Test inițial de autoevaluare. **1.** c. **2.** a. **3.** d. **4.** $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$. **5.** b) Determină coordonate punctului de intersecție; (2; 2). **6.** a) l^2; b) l^3; c) $-\frac{b}{a}$; d) $\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 44}}{2}$. **7.** a) 21; b) 7,5; c) 9. **8.** a) A, D, F și B; b) C, E, H; c) D, F și G; d) B, F, G, J.

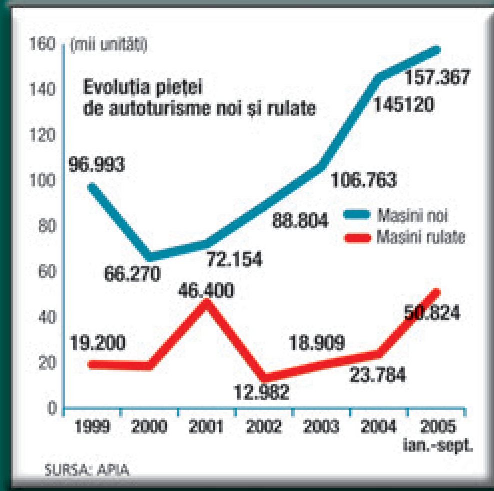
Pag. 101. Test de verificare. **1.** .... are două linii egale. **3.** S = {(1; 1)}. **4.** a) $A_{ABC} = 8{,}5$; b) $AB: 2x - 3y + 7 = 0$; $AC: 3x + 4y + 2 = 0$; $BC: 5x + y - 8 = 0$; c) Nu, deoarece AB, AC, BC nu sunt drepte concurente.

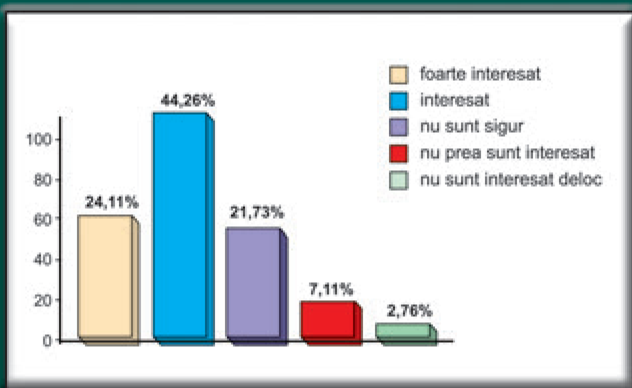
Bibliografie

1. Bell, E. T. , *Men of Mathematics,* Penguin Books, 1953
2. Ion, I. D. Radu, N., *Algebră*, EDP, București, 1981
3. Neagu, M., Singer, M., Voica, C., *Statistică și probabilități. Curs introductiv pentru elevi, studenți și profesori*, Ed. Sigma, 2003
4. Popescu, T., *Retrospectivă matematică - repere evolutive,* Ed. Litera, 1980
5. Rusu, E., *De la Thales la Einstein,* Ed. Albatros, 1971
6. *Colecția revistei „Capital”*
7. *Colecția revistei „Săptămâna financiară”*

Mulțumim revistelor „Capital” și „Săptămâna financiară” pentru acceptul de a folosi diagrame din aceste publicații.

Anul	Mașini rulate	Mașini noi
1999	19200	96993
2000	19200	66270
2001	46400	72154
2002	12982	88804
2003	18909	106763
2004	23784	145120
2005	50824	157367





	Făină	Ulei	Roșii	Paste	Sare
Magazin 1	12	35	30	14	2
Magazin 2	14	34,5	31	15	2
Magazin 3	13	36	29	16	2

$$\begin{pmatrix} 12 & 35 & 30 & 14 & 2 \\ 14 & 34{,}5 & 31 & 15 & 2 \\ 13 & 36 & 29 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$