Marius Stoka

Culegere de probleme de funcţii complexe

Editura tehnică

Marius Stoka

Culegere de probleme de funcţii complexe

Editura tehnică
Bucureşti — 1965

Lucrarea cuprinde probleme complet rezolvate din capitolele: Numere complexe. Funcţii de o variabilă complexă, Serii, Integrale, Transformări conforme. Problemele sînt bine alese şi variate; de asemenea sînt ordonate după gradul de dificultate la rezolvare, ceea ce a permis introducerea unor probleme mai grele — întîlnite în unele aplicaţii practice, îndeosebi din domeniul integralelor funcţiilor multiforme.

Lucrarea se adresează studenţilor de la institutele politehnice şi studenţilor de la facultăţile de matematică-mecanică şi de fizică ale universităţilor şi ale institutelor pedagogice; de asemenea, interesează pe inginerii de diferite specialităţi, care prin natura ocupaţiilor lor fac apel la teoria funcţiilor complexe.

Prefață

Una din ramurile matematicii care este foarte mult întrebuințată în tehnică este teoria funcțiilor de o variabilă complexă.

În hidrodinamică și aerodinamică, electrotehnică, statica construcțiilor etc., se lucrează curent cu funcții de o variabilă complexă.

Pentru aceasta, studenții de la facultățile de matematică mecanică, fizică, de la institutele tehnice și pedagogice trebuie să se deprindă cu tehnica de calcul a teoriei funcțiilor complexe și pentru aceasta să rezolve cît mai multe probleme. Pentru a veni în ajutorul studenților, inginerilor și a anumitor categorii de cadre didactice publicăm această culegere de probleme.

Problemele prezentate sînt complet rezolvate. La începutul fiecărui capitol am dat o scurtă parte introductivă care cuprinde teoreme și formule ce sînt folosite la rezolvarea problemelor din capitol. Am insistat în special asupra problemelor legate de integrala unei funcții complexe datorită largului domeniu de aplicații ale acestora.

AUTORUL

I. Numere complexe. Funcții de o variabilă complexă

Numărul complex este o pereche ordonată de numere reale (x, y) supusă următoarelor reguli de calcul:

1) $(x, y) = (x', y')$ dacă și numai dacă $x = x'$, $y = y'$;

2) $(1,0) = 1$;

3) $k(x, y) = (x, y)k = (kx, ky)$, pentru orice număr real k;

4) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;

5) $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

Pentru simplificarea scrierii vom nota $(0, 1) = i$. Cu această notație, din regulile de mai înainte rezultă

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0, 1) = x + iy.$$

Numărul complex $x + iy$ îl vom însemna cu z.

Din relația (5) deducem,

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \text{ adică } i^2 = -1.$$

Avînd în vedere relația (5) rezultă că putem efectua înmulțirea numerelor complexe $z = x + iy$ și $z' = x' + iy'$ după regulile obișnuite ale algebrei, avînd în vedere relația $i^2 = -1$.

Numărul $\bar{z} = x - iy$ se numește conjugatul numărului complex z.

Forma trigonometrică a unui număr complex este

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

iar forma exponențială,

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

unde modulul ρ și argumentul φ sînt dați de relațiile

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \arccos\frac{x}{\rho},\ \varphi = \arcsin\frac{y}{\rho}.$$

Două numere complexe sînt egale dacă au același modul, iar argumentele diferă prin $2k\pi$, adică $z_1 = z_2$ dacă $\rho_1 = \rho_2$ și $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ (k = întreg).

Operații cu numere complexe

Fie $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, două numere complexe. Din regulile de mai înainte rezultă

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Dacă numerele sînt scrise sub forma exponențială avem

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$z_1^n = \rho_1^n e^{in\varphi_1}, \quad \sqrt[n]{z_1} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi + \varphi_1}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots n-1).$$

Funcții de o variabilă complexă

Fie $Z = f(z)$ o funcție de variabila complexă $z = x + iy$. Această funcție poate fi pusă sub forma

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

unde $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt două funcții reale de variabilele reale x, y.

O funcție $f(z)$ definită în domeniul D este continuă în punctul $z_0 \in D$ dacă unui număr arbitrar $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\eta_{(\varepsilon)} > 0$ astfel încît

$$| f(z) - f(z_0) | < \varepsilon,$$

îndată ce

$$| z - z_0 | < \eta_{(\varepsilon)}.$$

Fie $f(z)$ o funcție definită într-un domeniu D și z_0 un punct din domeniu Dacă limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

există și este bine determinată, atunci această limită se notează $f'(z)$ și se numește derivata funcției $f(z)$ în z_0, iar funcția $f(z)$ se numește *monogenă* în z_0.

Monogenitatea funcției $f(z)$ în punctul $z \in D$ implică existența derivatelor parțiale de ordinul întîi ale funcțiilor $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ în raport cu x, y precum și relațiile

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

numite ecuațiile lui Cauchy-Riemann.

Dacă sînt satisfăcute ecuațiile lui Cauchy-Riemann și dacă derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ sînt funcții continue în punctul z, funcția $f(z)$ este monogenă în punctul z.

Dacă funcţia $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ este monogenă în z, atunci funcţiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sînt armonice, adică

$$\Delta P \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta Q \equiv \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

O funcţie $f(z)$ se numeşte *uniformă* dacă unei valori date lui z îi corespunde o singură valoare pentru $f(z)$. O funcţie care nu este uniformă se numeşte *multiformă*.

O funcţie $f(z)$ uniformă şi monogenă într-un domeniu D se numeşte *olomorfă* în acest domeniu.

În legătură cu funcţiile olomorfe avem

Teorema lui Rouché. Fie un domeniu D mărginit de o curbă închisă C şi două funcţii $f(z)$ şi $\varphi(z)$ olomorfe în $D \cup C$, $f(z)$ neavînd zerouri pe curba C. Dacă pentru valorile lui z de pe curba C avem

$$\left| \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right| < 1,$$

atunci ecuaţiile

$$f(z) = 0, \quad f(z) + \varphi(z) = 0$$

au acelaşi număr de rădăcini în domeniul D.

Funcţii elementare

Funcţia exponenţială este definită de relaţia

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Funcţia logaritmică este

$$\ln z = \ln \rho + i(2k\pi + \varphi), \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots),$$

unde ρ şi φ sînt modulul şi argumentul lui z.

Funcţiile circulare sînt

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Funcţiile hiperbolice sînt

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

1. *Să se arate că dacă* $|a| = 1$, $|b| \neq 1$, *atunci*

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1.$$

S o l u ţ i e

Să considerăm numărul complex

$$z = \frac{a-b}{1-\bar{a}b}.$$

Conjugatul lui este

$$\bar{z} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{1-a\bar{b}}.$$

Avem

$$z\bar{z} = \frac{a\bar{a}-\bar{a}b-a\bar{b}+b\bar{b}}{1-\bar{a}b-a\bar{b}+a\bar{a}b\bar{b}}.$$

Dar

$$a\bar{a} = |a|^2 = 1,$$

deci

$$z\bar{z} = 1$$

adică

$$|z| = 1.$$

2. *Folosind interpretările geometrice ale operaţiilor cu numere complexe, să se reprezinte grafic ecuaţiile*:

$1°.\ |z-2| = |z-2i|,$

$2°.\ |z-1| + |z+1| = 4,$

$3°.\ |z-3i| - |z+3i| = \pm 4.$

S o l u ţ i e

1°. Avînd în vedere interpretarea geometrică a scăderii numerelor complexe, rezultă că $|z-2|$ este segmentul care uneşte punctul 2 cu punctul z, iar $|z-2i|$ segmentul care uneşte punctul $2i$ cu punctul z. Egalitatea dată ne spune că aceste segmente sînt egale adică punctul z descrie mediatoarea segmentului determinat de punctele 2 și $2i$. Avînd în vedere că triunghiul determinat de origine și aceste două puncte este isoscel, rezultă că punctul z descrie bisectoarea întîia a axelor de coordonate (fig. 1).

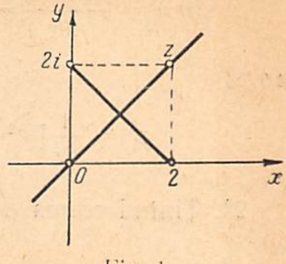

Fig. 1

2°. Dacă notăm cu F și F' imaginile numerelor 1 respectiv —1 și cu M imaginea lui z, relația dată se scrie

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = 4,$$

deci punctul M descrie o elipsă cu focarele în puncte $F(1)$, F' (—1) și avînd semiaxa mare $a = 2$ (fig. 2).

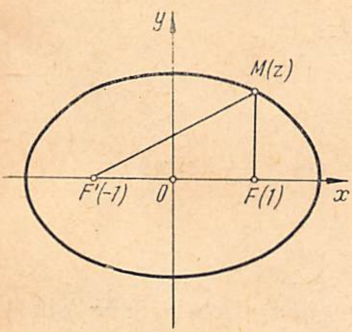

Fig. 2

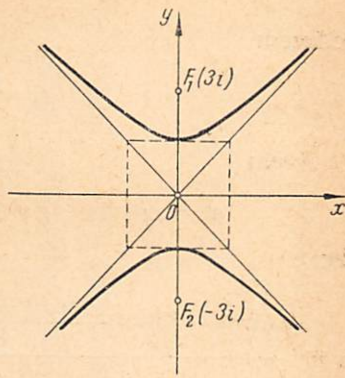

Fig. 3

3°. Notînd cu F_1 și F_2 imaginile numerelor și $3i$ respectiv $-3i$ și cu N imaginea lui z, relația dată devine

$$|\,\overline{NF_1} - \overline{NF_2}\,| = 4,$$

deci punctul N descrie o hiperbolă cu focarele în punctele F_1 ($3i$) și $F_2(-3i)$ și cu semiaxa mare $a = 2$ (fig. 3).

3. *Să se calculeze numerele complexe:*

1°. $z_1 = \sin(1 + i)$. 2°. $z_2 = \operatorname{sh}(1 - i)$. 3°. $z_3 = i^{\sqrt{2}}$. 4°. $z_4 = i^i$.

Soluție

1. Avem

$$z_1 = \sin 1 \cos i + \sin i \cos 1.$$

Avînd în vedere că

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

rezultă că

$$\sin i = \frac{e^{-1} - e}{2i} = \frac{i(e^2 - 1)}{2e}, \quad \cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e},$$

adică

$$z_1 = \frac{1}{2e}[(e^2 + 1)\sin 1 + i(e^2 - 1)\cos 1].$$

2°. Ţinînd seama de formula

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

deducem

$$z_2 = \frac{e^{1-i} - e^{i-1}}{2}.$$

Avem

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1, \quad e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1,$$

deci

$$z_2 = \frac{e(\cos 1 - i \sin 1) - \dfrac{\cos 1 + i \sin 1}{e}}{2} = \frac{1}{2e}[(e^2 - 1)\cos 1 - i(e^2 + 1)\sin 1].$$

3°. Aplicînd logaritmii egalităţii $z_3 = i^{\sqrt{2}}$, obţinem

$$\ln z_3 = \sqrt{2} \ln i = \sqrt{2} \ln e^{\left(i(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\, \pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) i,$$

deci

$$z_3 = e^{\sqrt{2}\,\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) i} \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

4°. Aplicînd logaritmii egalităţii $z_4 = i^i$, găsim

$$\ln z_4 = i \ln i = i \ln e^{i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = -\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right),$$

adică

$$z_4 = e^{-\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right)} \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots).$$

4. *Să se calculeze expresiile:*

1°. $z_1 = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 3\right)$. 2°. $z_2 = \operatorname{th}\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{4}\right)$.

Soluție

Avem $\operatorname{cotg} \alpha = i \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}$, deci

$$z_1 = i \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)}}.$$

Dar

$$e^{i\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 3\right)} = e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{\ln 3} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Rezultă

$$z_1 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) + \frac{2}{3\sqrt{2}(1+i)}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) - \frac{2}{3\sqrt{2}(1+i)}} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{3}(1-i)}{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i) - \frac{\sqrt{2}}{3}(1-i)} =$$

$$= \frac{11+7i}{7+11i} = \frac{77-36i}{85}.$$

2°. Folosim formula $\operatorname{th} \alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$. Avem

$$z_2 = \frac{e^{\ln 2 + \frac{\pi i}{4}} - e^{-\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{4}\right)}}{e^{\ln 2 + \frac{\pi i}{4}} + e^{-\left(\ln 2 + \frac{\pi i}{4}\right)}}.$$

Dar

$$e^{\ln 2 + \frac{\pi i}{4}} = e^{\ln 2} \cdot e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{2}(1+i),$$

adică

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}(1+i) - \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}}{\sqrt{2}(1+i) + \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}} = \frac{2(1+i)^2 - 1}{2(1+i)^2 + 1} = \frac{4i-1}{4i+1} = \frac{15+8i}{17}.$$

5. *Să se calculeze numerele complexe:*

$$1°.\ z_1 = \arccos (i\sqrt{3}),\ 2°.\ z_2 = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}\right).$$

Soluţie

1°. Avem

$$\arccos \zeta = -i \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}),$$

deci

$$z_1 = -i \ln(i\sqrt{3} + 2i) = -i \ln[(2+\sqrt{3})i] = -i\Big[\ln (2+\sqrt{3}) + i\Big(2k\pi + \frac{\pi}{2}\Big)\Big] = \frac{4k+1}{2}\pi - i \ln(2+\sqrt{3}).$$

2°. De asemenea

$$\operatorname{arc\,tg} \zeta = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+i\zeta}{1-i\zeta},$$

deci

$$z_2 = -\frac{i}{2} \ln \frac{2-\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{2+\sqrt{5}-i\sqrt{3}} = -\frac{i}{2} \ln \frac{-1+i\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}.$$

Avem

$$\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{3+\sqrt{5}},\ \arg\frac{-1+i\sqrt{3}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{3},$$

de unde rezultă

$$z_2 = -\frac{i}{2}\left[\ln \frac{2}{3+\sqrt{5}} + i\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{3k+1}{3}\pi - \frac{i}{2} \ln \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

6. *Să se demonstreze că avem relaţiile:*

$$1°.\ |\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y,$$
$$2°.\ |\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y,$$

unde $z = x + iy$.

Soluţie

1°. Avem

$$\sin z = \sin (x+iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x.$$

Dar

$$\cos iy = \operatorname{ch} y, \quad \sin iy = i \operatorname{sh} y,$$

deci

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

De aici deducem

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y.$$

Ținînd seama că

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1,$$

rezultă

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

2°. Analog avem

$$\cos z = \cos (x + iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy =$$
$$= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

deci

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y,$$

adică

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

7. *Să se demonstreze că, dacă $-\pi < a < \pi$ și n este un număr natural, atunci*

$$\left| \frac{\sin az}{\sin \pi z} \right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y} \quad \text{pentru} \quad z = \frac{2n+1}{2} + iy$$

și

$$\left| \frac{\sin az}{\sin \pi z} \right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} \dfrac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \dfrac{(2n+i)\pi}{2}} \quad \text{pentru} \quad z = x + \frac{2n+1}{2}\, i.$$

S o l u ț i e

Ținînd seama de problema 6, rezultă că, dacă $z = \frac{2n+1}{2} + iy$, avem

$$|\sin az|^2 = \sin^2 \frac{(2n+1)a}{2} + \operatorname{sh}^2 ay = \operatorname{ch}^2 ay - \cos^2 \frac{(2n+1)a}{2} \leqslant \operatorname{ch}^2 ay,$$

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} + \operatorname{sh}^2 \pi y = 1 + \operatorname{sh}^2 \pi y = \operatorname{ch}^2 \pi y.$$

De aici deducem

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right|^2 \leqslant \left(\frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}\right)^2$$

şi, avînd în vedere că $-\pi < a < \pi$, rezultă

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} ay}{\operatorname{ch} \pi y}.$$

Dacă $z = x + \frac{2n+1}{2} i$, avem

$$|\sin az|^2 = \sin^2 ax + \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)a}{2} =$$

$$= \operatorname{ch}^2 \frac{(2n+1)a}{2} - \cos^2 ax \leqslant \operatorname{ch}^2 \frac{(2n+1)a}{2}$$

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)\pi}{2} \geqslant \operatorname{sh}^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Deci

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right|^2 \leqslant \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}}\right]^2,$$

de unde

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)a}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2}}.$$

8. *Să se rezolve ecuaţiile binome*:

$1°.\ z^3 + 2 - 2i = 0,$

$2°.\ z^4 + 7 - 24i = 0.$

Soluţie

1.° Avem ecuaţia

$$z^3 = 2\ (-1 + i).$$

Modulul numărului complex $-1+i$ este $\sqrt{2}$, iar argumentul este $\frac{3\pi}{4}$, deci ecuaţia dată se scrie

$$z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Rădăcinile ei sînt

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right] (k = 0, 1, 2),$$

adică

$$z_1 = 1 + i,\ z_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i,\ z_3 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i.$$

2°. A doua ecuaţie se scrie

$$z^4 = -7 + 24i.$$

Notînd

$$\sqrt{-7+24i} = x + iy$$

deducem

$$x^2 - y^2 = -7,\ xy = 12.$$

Avînd în vedere că x şi y sînt numere reale, soluţiile acestui sistem sînt

$$x = \pm 3,\quad y = \pm 4,$$

adică

$$\sqrt{-7+24i} = \pm(3+4i).$$

Deci ecuaţia dată se descompune în două ecuaţii

$$z^2 = 3 + 4i,\quad z^2 = -(3+4i).$$

Ţinînd seama că

$$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i),$$

rezultă că rădăcinile ecuaţiei date sînt

$$z_{1,2} = \pm(2+i),\ z_{3,4} = \pm(1-2i).$$

9. *Se dau trei puncte A, B, C cu afixele α, β, γ. Să se construiască punctul M al cărui afix z să satisfacă relația*

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} : \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = -1. \tag{1}$$

[Th. Angheluță (2)]

Soluție.

Din relația (1) deducem

$$\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = \left|\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}\right|. \tag{2}$$

Din interpretarea geometrică a scăderii numerelor complexe rezultă că $|z-\alpha| = \overline{MA}$, deci relația (2) se scrie

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \text{const.}$$

De aici rezultă că punctul M se află pe cercul al cărui diametrul este determinat de picioarele bisectoarelor, interioară și exterioară, ale unghiului ACB (locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant).

De asemenea din (1) rezultă

$$\arg\frac{z-\alpha}{z-\beta} - \arg\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \arg(-1) = \pi. \tag{3}$$

Dar

$$\arg\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \arg(z-\alpha) - \arg(z-\beta) = \widehat{BMA}$$

și

$$\arg\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta} = \arg(\alpha-\gamma) - \arg(\gamma-\beta) = \widehat{BCA}.$$

Deci relația (3) devine

$$\widehat{BMA} + \widehat{BCA} = \pi,$$

adică punctul M se află pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Rezultă că punctul M se află la intersecția celor două cercuri.

10. *Să se determine punctele în care funcția*

$$f(z) = z^2 + z\bar{z} - \bar{z}^2 + 2z - \bar{z}$$

este monogenă și să se calculeze în acele puncte derivata funcției.

Soluție

Avem

$$f(z) = x^2 + y^2 + x + iy\,(4x + 3),$$

deci

$$P(x, y) = x^2 + y^2 + x, \quad Q(x, y) = y\,(4x + 3).$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile lui Cauchy-Riemann, obținem sistemul

$$2x + 1 = 4x + 3, \quad 2y = -4y,$$

care are soluția $x = -1$, $y = 0$.

Deci funcția dată este monogenă doar în punctul $z = -1$.

Avem

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = 2z\Delta z + (\Delta z)^2 + z\Delta\bar{z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\Delta\bar{z} -$$
$$- 2\bar{z}\Delta\bar{z} - (\Delta\bar{z})^2 + 2\Delta z - \Delta\bar{z}.$$

În punctul $z = -1$ avem $\bar{z} = -1$ și deci această expresie are valoarea

$$\Delta f = (\Delta z)^2 + \Delta z\,\Delta\bar{z} - (\Delta\bar{z})^2 - \Delta z$$

adică

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = -1 + \Delta z + \Delta\bar{z} - \frac{(\Delta\bar{z})^2}{\Delta z}.$$

Cînd $\Delta z \to 0$ avem $\Delta\bar{z} \to 0$ și deci

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = -1 - \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta\bar{z})^2}{\Delta z}.$$

Dar

$$\left|\frac{(\Delta\bar{z})^2}{\Delta z}\right| = \frac{|\Delta\bar{z}|^2}{|\Delta z|} = \frac{|\Delta z|^2}{|\Delta z|} = |\Delta z|$$

deci

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta\bar{z})^2}{\Delta z} = 0,$$

adică

$$[f'(z)]_{z=-1} = -1.$$

11. *Să se determine regiunile unde funcția*

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i\,|xy|$$

este monogenă.

2—830

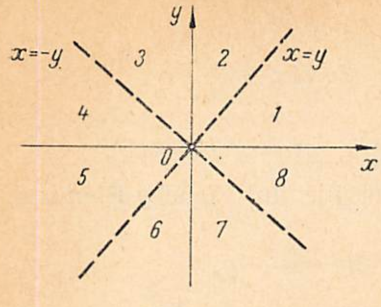

Fig. 4

Soluţie

Avem

$$P(x, y) = |x^2 - y^2|,$$
$$Q(x, y) = 2|xy|.$$

Numerotînd cu 1, ..., 8 cele opt octante în care este împărţit planul (fig. 4) de către axele de coordonate şi cele două bisectoare $x = \pm y$, avem

$$\begin{array}{lll}
\text{octantul } 1: & P(x, y) = x^2 - y^2, & Q(x, y) = 2xy, \\
\text{octantul } 2: & P(x, y) = y^2 - x^2, & Q(x, y) = 2xy, \\
\text{octantul } 3: & P(x, y) = y^2 - x^2, & Q(x, y) = -2xy, \\
\text{octantul } 4: & P(x, y) = x^2 - y^2, & Q(x, y) = -2xy, \\
\text{octantul } 5: & P(x, y) = x^2 - y^2, & Q(x, y) = 2xy, \\
\text{octantul } 6: & P(x, y) = y^2 - x^2, & Q(x, y) = 2xy, \\
\text{octantul } 7: & P(x, y) = y^2 - x^2, & Q(x, y) = -2xy, \\
\text{octantul } 8: & P(x, y) = x^2 - y^2, & Q(x, y) = -2xy.
\end{array}$$

În octantele 1, 3, 5 şi 7 funcţiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ satisfac ecuaţiile lui Cauchy-Riemann şi deci funcţia $f(z)$ este monogenă.

În octantele 1 şi 5 avem

$$f(z) = z^2, \qquad f'(z) = 2z,$$

iar în octantele 3 şi 7 avem

$$f(z) = -z^2, \qquad f'(z) = -2z.$$

12. *Să se determine constantele respective astfel încît următoarele funcţii să fie* monogene:

1°. $f_1(z) = x + ay + i(bx + cy)$,

2°. $f_2(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$,

3°. $f_3(z) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

Soluţie

1°. Avem

$$P(x, y) = y + ay, \qquad Q(x, y) = bx + cy.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile lui Cauchy-Riemann, obţinem

$$b = -a, \qquad c = 1,$$

deci funcţia $f_1(z)$ se scrie

$$f_1(z) = x + iy + a(y - ix)$$

sau

$$f_1(z) = (1 - ai)\, z.$$

2°. Avem

$$P(x, y) = x^2 + axy + by^2, \qquad Q(x, y) = cx^2 + dxy + y^2$$

şi ecuaţiile lui Cauchy-Riemann ne dau

$$a = d = 2, \qquad b = c = -1.$$

Funcţia $f_2(z)$ se scrie

$$f_2(z) = x^2 + 2xy - y^2 + i(-x^2 + 2xy + y^2).$$

Avînd în vedere că $z = x + iy$, dacă în această egalitate înlocuim pe y cu zero obţinem

$$f_2(x) = x^2(1 - i),$$

adică

$$f_2(z) = (1 - i)\, z^2.$$

3°. Avem

$$P(x, y) = \cos x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y), \qquad Q(x, y) = \sin x(\operatorname{ch} y + b\operatorname{sh} y).$$

Cu aceste valori ecuaţiile lui Cauchy-Riemann se scriu

$$-\sin x(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) = \sin x(\operatorname{sh} y + b \operatorname{ch} y)$$

$$\cos x(\operatorname{sh} y + a \operatorname{ch} y) = -\cos x(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$$

şi sînt identic verificate numai dacă $a = b = -1$.

În acest caz funcţia $f_3(z)$ se scrie

$$f_3(z) = \cos x(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) + i \sin x(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y).$$

Procedînd la fel ca la punctul 2° găsim

$$f_3(z) = \cos z + i \sin z$$

adică

$$f_3(z) = e^{iz}.$$

13. *Să se determine funcţia monogenă $f(z)$ a cărei parte imaginară este*

$$Q(x, y) = e^x \sin y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

şi care în punctul $z = 1$ ia valoarea e.

Soluție

Metoda 1. Dacă notăm cu $P(x, y)$ partea reală a funcției $f(z)$, atunci avînd în vedere ecuațiile lui Cauchy-Riemann rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} = e^x \cos y - \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Avem

$$dP = e^x(\cos y \cdot dx - \sin y \cdot dy) - \frac{(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Se verifică imediat că această formă diferențială este o diferențială totală exactă. Deci

$$P(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} e^x(\cos y \cdot dx - \sin y \cdot dy) - \\ - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Avînd în vedere că dP este o diferențială totală exactă, rezultă că integrala curbilinie nu depinde de drum, deci putem integra pe drumuri paralele cu axele (fig. 5).

Avem

$$P(x, y) = \int_{x_0}^{x} e^x \cos y_0\, dx - \int_{y_0}^{y} e^x \sin y\, dy - \int_{x_0}^{x} \frac{x^2 - y_0^2}{(x^2+y_0^2)^2}\, dx - \\ - \int_{y_0}^{y} \frac{2xy\,dy}{(x^2+y^2)^2} = \cos y_0 (e^x - e^{x_0}) + e^x(\cos y - \cos y_0) + \\ + \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y_0^2} - \frac{1}{y_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0} - \operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right) + \\ + 2y_0^2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^2+y_0^2)^2}.$$

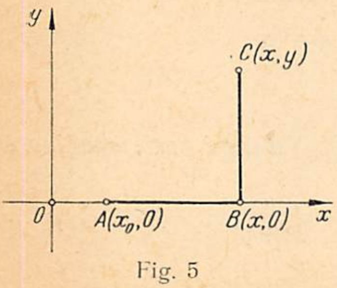

Fig. 5

Pentru a calcula ultima integrală derivăm în raport cu y_0 egalitatea

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2+y_0^2} = \\ = \frac{1}{y_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0} - \operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right),$$

obținem astfel

$$2y_0^2\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(x^2+y_0^2)^2}=\frac{1}{y_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y_0}-\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right)+$$

$$+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}. \tag{2}$$

Cu această valoare găsim

$$P(x, y)=e^x\cos y+\frac{x}{x^2+y^2}+k,$$

unde k este o constantă reală.

Avem deci

$$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)+\frac{x-iy}{x^2+y^2}+k$$

adică

$$f(z)=e^z+\frac{1}{z}+k.$$

Înlocuind aici pe z cu 1 și ținînd seama că $f(1)=e$ găsim $k=-1$ deci funcția căutată este

$$f(z)=e^z+\frac{1}{z}-1.$$

Metoda 2. Integrînd prima ecuație (1) în raport cu x și ținînd seama de (2), găsim

$$P(x, y)=e^x\cos y+\varphi(y).$$

Înlocuind această valoare în a doua ecuație (1) rezultă

$$\frac{d\varphi}{dy}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

de unde

$$\varphi(y)=\frac{x}{x^2+y^2}+k.$$

Deci

$$P(x, y)=e^x\cos y+\frac{x}{x^2+y^2}+k.$$

14. *Fie $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$, o funcție monogenă de variabila complexă z pentru care avem*

$$(dP)^2+(dQ)^2=\lambda^2(x, y)\,[(dx)^2+(dy)^2]. \tag{1}$$

Să se demonstreze că funcția ln $\lambda(x, y)$ este o funcție armonică, mai întîi printr-un calcul direct și apoi deducînd din proprietățile funcțiilor monogene.

Să se găsească funcțiile $f'(z)$ și $f(z)$ știind că $\lambda(x, y)$ este produsul unei funcții de x cu una de y.

S o l u ț i e

1.° Pentru derivata funcției $f(z)$ avem expresia

$$f'(z) = \frac{dP + idQ}{dx + idy} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

de unde deducem

$$dP + idQ = (dx + idy)\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Scriind că modulii numerelor complexe din cei doi membri ai acestei egalități sînt egali, găsim

$$(dP)^2 + (dQ)^2 = [(dx)^2 + (dy)^2]\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\right].$$

Comparînd această egalitate cu (1) deducem

$$\lambda^2(x, y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2,$$

sau, avînd în vedere ecuațiile lui Cauchy-Riemann,

$$\lambda^2(x, y) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2. \tag{2}$$

Funcția $P(x, y)$ este o funcție armonică, adică

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Punînd

$$\frac{\partial P}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = t,$$

ecuațiile (2) și (3) se scriu

$$\lambda^2 = p^2 + q^2, \tag{2'}$$

$$r + t = 0. \tag{3'}$$

Derivînd ecuația (2′) în raport cu x găsim

$$\lambda\frac{\partial \lambda}{\partial x} = pr + qs.$$

Împărţind această ecuaţie la ecuaţia (2') obţinem

$$\frac{\partial \ln \lambda}{\partial x}=\frac{pr+qs}{p^2+q^2}.$$

Derivînd această relaţie în raport cu x găsim

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial x^2}=\frac{\left(r^2+p\,\dfrac{\partial r}{\partial x}+s^2+q\,\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)(p^2+q^2)-2(pr+qs)^2}{(p^2+q^2)^2}.$$

Analog

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial y^2}=\frac{\left(s^2+p\,\dfrac{\partial s}{\partial y}+t^2+q\,\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)(p^2+q^2)-2(ps+qt)^2}{(p^2+q^2)^2}.$$

Adunînd aceste două egalităţi obţinem

$$(p^2+q^2)^2\left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial y^2}\right)=(p^2+q^2)\left[p\left(\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\right.$$

$$\left.+q\left(\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\right)\right]-(r+t)\,[4\,pqs+(p^2-q^2)\,(r-t)],$$

sau, avînd în vedere ecuaţia (3')

$$\lambda^2\left(\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial y^2}\right)=p\left(\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\right).$$

Avem

$$\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial^3 P}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 P}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)=0.$$

$$\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial^3 P}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3 P}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)=0,$$

deci

$$\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial y^2}=0,$$

adică, funcţia $\ln \lambda$ este armonică.

2°. Avînd în vedere relaţia (2) rezultă că

$$|f'(z)|=\lambda\,(x,\ y),$$

deci putem scrie

$$f'(z)=\lambda(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

de unde deducem

$$\ln f'(z)=\ln\lambda+i(\varphi+2k\pi). \tag{4}$$

Funcţia $\ln f'(z)$ este o funcţie monogenă a cărei parte reală este $\ln \lambda$. Avînd în vedere că partea reală a unei funcţii monogene este o funcţie armonică, rezultă că funcţia $\ln \lambda$ este o funcţie armonică.

3°. Dacă $\lambda(x, y)$ este produsul dintre o funcţie de x şi o funcţie de y, $\ln \lambda$ este suma dintr-o funcţie de x şi o funcţie de y. Putem deci scrie

$$\ln \lambda = X(x) + Y(y).$$

Dar funcţia $\ln \lambda$ este armonică, deci

$$X''(x) + Y''(y) = 0.$$

De aici rezultă că

$$X''(x) = - Y''(y) = 2a, \qquad (a = \text{const.})$$

adică

$$X(x) = ax^2 + bx + c, \qquad Y(y) = - ay^2 + b_1 y + c_1.$$

De aici obţinem

$$\ln \lambda = a(x^2 - y^2) + bx + b_1 y + c + c_1.$$

Cu această valoare, (4) se scrie

$$\ln f'(z) = a(x^2 - y^2) + bx + b_1 y + k + i\omega(x, y).$$

Scriind pentru această funcţie condiţiile lui Cauchy-Riemann obţinem

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 2ax + b, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2ay - b_1. \tag{5}$$

Integrînd prima ecuaţie în raport cu y găsim

$$\omega(x, y) = 2axy + by + \mu(x).$$

Înlocuind această valoare în a doua ecuaţie (5) rezultă

$$\mu(x) = - b_1 x + k_1,$$

adică

$$\omega(x,y) = 2axy - b_1 x + by + k_1$$

şi deci

$$\ln f'(z) = az^2 + \alpha z + \beta,$$

unde a este o constantă reală, iar α, β, constante complexe.

Rezultă că

$$f'(z) = e^{az^2+\alpha z+\beta}$$

și

$$f(z) = \int e^{az^2+\alpha z+\beta} dz$$

15. *Să se determine pentru ce valori ale constantei reale a există o funcție analitică*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

a cărei parte reală $P(x, y)$ să nu depindă decît de $x^2 + ay^2$. Să se dea expresia lui $f(z)$.

Soluție

Să punem $u = x^2 + ay^2$
și fie

$$P(x, y) = \varphi(u).$$

Problema constă mai întîi în a găsi toate funcțiile $\varphi(u)$ care să verifice ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Dar, avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x\varphi'(u), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2ay\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 2\varphi' + 4x^2\varphi'', \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 2a\varphi' + 4a^2 y^2 \varphi''.$$

Condiția (1) se scrie

$$(1 + a)\varphi' + 2(x^2 + a^2y^2)\varphi'' = 0$$

sau

$$(1 + a)\varphi' + 2[u + a(a - 1)y^2]\varphi'' = 0. \tag{2}$$

Această relație poate avea loc în următoarele trei cazuri:

1. $a = -1$, pentru care $u = x^2 - y^2$,
2. $a = 1$, pentru care $u = x^2 + y^2$,
3. $a = 0$, pentru care $u = x^2$.

Să vedem care sînt funcțiile $\varphi(u)$ astfel obținute

Cazul întîi. Din (2) rezultă $\varphi''(u) = 0$, adică

$$P(x, y) = a_1(x^2 - y^2) + a_2.$$

Funcția Q este atunci determinată prin condițiile lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Avem astfel

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2a_1 y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2a_1 x,$$

de unde deducem

$$Q = 2a_1 xy + a_3,$$

adică

$$f(z) = a_1(x^2 - y^2) + a_2 + 2ia_1 xy + ia_3,$$

sau

$$f(z) = a_1 z^2 + a_2 + ia_3,$$

a_1, a_2, a_3 fiind trei constante reale arbitrare.

Cazul al doilea. Din (2) avem $\varphi' = \frac{b_1}{u}$, adică

$$\varphi = b_1 \lg u + b_2$$

$$\text{cu } u = x^2 + y^2.$$

Deci

$$P = b_1 \lg (x^2 + y^2) + b_2.$$

Funcția Q este astfel încît

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2b_1 y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2b_1 x}{x^2 + y^2},$$

adică

$$dQ = 2b_1 \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

de unde

$$Q = 2b_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + b_3.$$

Rezultă

$$f(z) = b_1 \lg (x^2 + y^2) + b_2 + i\left(2b_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + b_3\right)$$

sau

$$f(z) = 2b_1 \lg z + b_2 + ib_3,$$

b_1, b_2, b_3 fiind trei constante reale arbitrare.

Cazul al treilea. Din (2) rezultă $\varphi'(u) = \frac{c_1}{2\sqrt{u}}$, adică

$$\varphi(u) = c_1\sqrt{u} + c_2.$$

Deci

$$P(x, y) = c_1 x + c_2.$$

Condițiile lui Cauchy-Riemann ne dau

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = c_1,$$

adică

$$Q(x, y) = c_1 y + c_3.$$

Deci funcția $f(z)$ este

$$f(z) = c_1 z + c_2 + ic_3.$$

16. *Să se determine o funcție analitică*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de variabila complexă z, știind că $P(x, y)$ este o funcție de $u = \sqrt{x^2 + y^2} + x$, și $Q(x, y)$ este o funcție de $v = \sqrt{x^2 + y^2} - x$.

Soluție

Fie

$$P = \varphi(u), \qquad Q = \psi(v),$$

funcțiile care trebuie determinate. Determinarea funcției $f(z)$ o facem cu ajutorul condițiilor clasice ale lui Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Notînd $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(1 + \frac{x}{r}\right)\varphi'(u) = \frac{u}{r}\varphi'(u), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{r}\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{x}{r} - 1\right)\psi'(v) = -\frac{v}{r}\psi'(v), \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{y}{r}\psi'(v).$$

Deci condițiile (1) se scriu

$$u\varphi'(u) = y\psi'(v), \qquad y\varphi'(u) = v\psi'(v) \tag{1'}$$

și se obține astfel, în realitate o condiție unică, deoarece

$$\frac{u}{y} = \frac{y}{v}.$$

Această condiție unică se poate altfel exprima sub forma

$$u\varphi'^2(u) = v\psi'^2(v), \tag{2}$$

obținută înmulțind membru cu membru relațiile (1').

Condiția (2) trebuind să fie verificată oricare ar fi u și v, cele două variabile fiind independente, este necesar și suficient ca expresiile $u\varphi'^2(u)$ și $v\psi'^2(v)$ să fie constante egale.

Punînd

$$\varphi'(u) = \frac{c}{2\sqrt{u}}, \qquad \psi'(v) = \frac{c}{2\sqrt{v}}$$

obținem

$$\varphi(u) = c\sqrt{u} + a, \qquad \psi(v) = c\sqrt{v} + b$$

deci avem funcția

$$f(z) = c\,[\sqrt{u} + i\sqrt{v}] + a + ib.$$

Dar $(\sqrt{u} + i\sqrt{v})^2 = u - v + 2i\sqrt{uv} = 2(x + iy)$.

Avem

$$f(z) = k\sqrt{z} + \alpha, \qquad (k = c\sqrt{2},\ \alpha = a + ib). \tag{3}$$

Luînd

$$\varphi'(u) = \frac{c}{2\sqrt{u}}, \qquad \psi(v) = -\frac{c}{2\sqrt{v}},$$

rezultă

$$P+iQ=c(\sqrt{u}-i\sqrt{v})+a_1+ib_1$$

și deoarece $(\sqrt{u}-i\sqrt{v})^2=u-v-2i\sqrt{uv}=2(x-iy)$, avem

$$f(z)=k\sqrt{\bar{z}}+\alpha_1$$

și funcția nu este monogenă.

Deci soluția problemei este funcția (3).

17. *Se consideră funcția*

$$f(z)=\varphi_1(x)\,\psi_1(y)+i\,\varphi_2(x)\,\psi_2(y)$$

și se cere să se determine funcțiile $\varphi_h(x)$, $\psi_h(y)$ $(h=1,2)$ *astfel încît funcția* $f(z)$ *să fie monogenă.*

S o l u ț i e.

Avem

$$P(x,y)=\varphi_1(x)\,\psi_1(y),\qquad Q(x,y)=\varphi_2(x)\,\psi_2(y).$$

Scriind că aceste funcții verifică ecuațiile lui Cauchy-Riemann rezultă

$$\begin{cases}\psi_1(y)\dfrac{d\varphi_1}{dx}=\varphi_2(x)\dfrac{d\psi_2}{dy},\\[2mm] \varphi_1(x)\dfrac{d\psi_1}{dy}=-\psi_2(y)\dfrac{d\varphi_2}{dx}\end{cases}$$

sau

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\varphi_2(x)}\dfrac{d\varphi_1}{dx}=\dfrac{1}{\psi_1(y)}\dfrac{d\psi_2}{dy},\\[2mm] \dfrac{1}{\varphi_1(x)}\dfrac{d\varphi_2}{dx}=-\dfrac{1}{\psi_2(y)}\dfrac{d\psi_1}{dy}.\end{cases}$$

Avînd în vedere că membrii întîi ai acestor ecuații sînt funcții de x și membrii doi funcții de y, aceste ecuații pot avea loc numai dacă avem

$$\frac{1}{\varphi_2(x)}\frac{d\varphi_1}{dx}=a,\quad \frac{1}{\varphi_1(x)}\frac{d\varphi_2}{dx}=b, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\psi_1(y)}\frac{d\psi_2}{dy}=a,\quad \frac{1}{\varphi_2(y)}\frac{d\psi_1}{dx}=-b, \tag{2}$$

a și b fiind constante reale.

Eliminînd pe $\varphi_2(x)$ între ecuațiile (1) obținem

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - ab\varphi_1 = 0. \tag{1'}$$

Analog, eliminînd pe $\psi_2(y)$ între ecuațiile (2) găsim

$$\frac{d^2\psi_1}{dy^2} + ab\psi_1 = 0. \tag{2'}$$

Dacă $ab > 0$, notînd $ab = k^2$, $(k \neq 0)$, din ecuațiile (1') și (2') rezultă

$$\varphi_1(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, \quad \psi_1(y) = c_3 \cos ky + c_4 \sin ky.$$

Înlocuind aceste valori în (1) și (2) deducem

$$\varphi_2(x) = \frac{k}{a}\,(c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}), \quad \psi_2(y) = \frac{a}{k}\,(c_3 \sin ky - c_4 \cos ky).$$

Funcția $f(z)$ este deci

$$f(z) = (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx})\,(c_3 \cos ky + c_4 \sin ky) +$$
$$+ i\,(c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx})\,(c_3 \sin ky - c_4 \cos ky).$$

Avînd în vedere că $z = x + iy$, rezultă că dacă înlocuim pe y cu 0 trebuie să-l înlocuim pe x cu z, adică

$$f(z) = c_3\,(c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}) - ic_4\,(c_1 e^{kz} - c_2 e^{-kz})$$

sau

$$f(z) = \alpha e^{kz} + \beta e^{-kz}, \tag{3}$$

α și β fiind constante complexe.

Dacă $ab < 0$, notînd $ab = -k^2$, $(k \neq 0)$, din ecuațiile (1') și (2') deducem

$$\varphi_1(x) = c_1' \cos kx + c_2' \sin kx, \quad \psi_1(y) = c_3' e^{ky} + c_4' e^{-ky}.$$

Cu aceste valori, din (1) și (2) rezultă

$$\varphi_2(x) = -\frac{k}{a}\,(c_1' \sin kx - c_2' \cos kx), \quad \psi_2(y) = \frac{a}{k}\,(c_3' e^{ky} - c_4' e^{-ky}).$$

Funcția $f(z)$ este deci

$$f(z) = (c_1' \cos kx + c_2' \sin kx)\,(c_3' e^{ky} +$$
$$+ c_4' e^{-ky}) - i\,(c_1' \sin kx - c_2' \cos kx)\,(c_3' e^{ky} - c_4' e^{-ky})$$

Procedînd la fel ca mai înainte obținem

$$f(z) = \alpha \cos kz + \beta \sin kz, \tag{4}$$

α și β fiind constante complexe.

Dacă $a = 0$, din (1) și (2) rezultă

$$\varphi_1(x) = c_1'', \ \varphi_2(x) = bc_1''x + c_2'', \ \psi_2(y) = c_3'', \ \psi_1(y) = -bc_3''y + c_4''.$$

Funcția $f(z)$ este

$$f(z) = c_1''(-bc_3''y + c_4'') + ic_3''(bc_1''x + c_2'')$$

adică

$$f(z) = icz + \alpha$$

unde c este o constantă reală, iar α o constantă complexă.

Dacă $b = 0$, obținem

$$f(z) = cz + \alpha,$$

c și α avînd aceeași semnificație ca mai înainte.

Avînd în vedere că

$$\cos kz = \frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2}, \ \sin kz = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

rezultă că funcția (4) este de forma (3) cu k pur imaginar.

Deci funcțiile monogene de forma cerută sînt

$$f(z) = \alpha e^{kz} + \beta e^{-kz}, \quad f(z) = kz + \alpha,$$

unde α și β sînt constante complexe, iar k o constantă reală sau pur imaginară.

18. *Să se demonstreze că există o funcție analitică $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de variabila z, care se anulează pentru $z = \frac{\pi}{2}$, astfel încît*

$$P - Q = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}}. \tag{1}$$

Să se determine funcțiile P și Q de x și y și $f(z)$.

Soluție

Între funcțiile P și Q de variabile x și y trebuie să avem

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Derivînd relaţia (1) în raport cu x respectiv y şi, ţinînd seama de (2), obţinem

$$\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2-(\cos x-\sin x)e^{y}-(\cos x+\sin x)e^{-y}}{(2\cos x-e^{y}-e^{-y})^{2}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{-2+(\cos x+\sin x)e^{y}+(\cos x-\sin x)e^{-y}}{(2\cos x-e^{y}-e^{-y})^{2}},$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{2-(e^{y}+e^{-y})\cos x}{(2\cos x-e^{y}-e^{-y})^{2}},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(e^{y}-e^{-y})\sin x}{(2\cos x-e^{y}-e^{-y})^{2}}. \tag{3}$$

Integrînd în raport cu y obţinem

$$P=\int\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\sin x}{2\cos x-e^{y}-e^{-y}}+\varphi(x).$$

Calculînd $\frac{\partial P}{\partial x}$ se găseşte $\varphi'(x)=0$, adică $\varphi(x)$ este o constantă.

Deci

$$P=\frac{\sin x}{2\cos x-e^{y}-e^{-y}}+k.$$

Înlocuind în (1) găsim

$$Q=\frac{e^{-y}-\cos x}{2\cos x-e^{y}-e^{-y}}+k.$$

Putem verifica că derivatele de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}$, şi $\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}$ deduse din expresiile (3) sînt egale; este condiţia ca problema să fie posibilă. Avem

$$f(z)=P+iQ=\frac{ie^{-y}-ie^{ix}}{e^{ix}+e^{-ix}-e^{y}-e^{-y}}+k(1+i)=$$

$$=\frac{i(e^{-y}-e^{ix})}{(e^{-y}-e^{ix})(e^{y-ix}-1)}+k(1+i)=\frac{i}{e^{-i(x+iy)}-1}+k(1+i).$$

Soluţia generală este

$$f(z)=\frac{i}{e^{-iz}-1}+k(1+i).$$

Trebuie să avem

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{i}{-i-1} + k(1+i) = 0,$$

adică

$$k = \frac{1}{2}\cdot$$

Deci

$$f(z) = \frac{i}{e^{-iz}-1} + \frac{1+i}{2} = \frac{1-i}{2}\,\frac{e^{iz}-i}{e^{iz}-1}\cdot$$

19. *Știind că partea reală P a unei funcții analitice $f(z) = P + iQ$ este de forma $P = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, să se determine această funcție.*

[N. M. Günther și R.O. Cuzmin[7]]

Soluție

Punem $\frac{y}{x} = u$, și reprezentăm prin φ' derivata lui φ în raport cu u. Funcția $Q(x, y)$ trebuie să verifice condițiile

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\varphi'}{x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\varphi'\frac{y}{x^2}\cdot$$

Fie $Q_1(x, u)$ funcția obținută înlocuind în Q variabila y prin ux. Avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{y}{x^2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial u}\cdot\frac{1}{x}$$

și prin urmare

$$\frac{\partial Q_1}{\partial u} = -\varphi' u, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{\varphi'}{x}(1+u^2). \tag{1}$$

Prima ecuație (1) ne arată că $Q_1(u)$ este de forma $Q_1(u) = F(u) + G(x)$. Cea de a doua ecuație (1) poate să se scrie sub forma

$$x\,G'(x) = -\varphi'(1+u^2)$$

egalitate care nu este posibilă decît dacă cei doi membri sînt constanți, adică avem

$$\varphi' = \frac{k}{1+u^2}, \qquad G'(x) = -\frac{k}{x},$$

sau

$$\varphi = k \operatorname{arctg} u + k_1, \qquad G(x) = -k \ln x + k_2.$$

Înlocuind aceste expresii în prima egalitate (1) rezultă

$$F'(u) = -\frac{ku}{1+u^2}$$

deci

$$F(u) = k \ln \sqrt{1+u^2} + k_3.$$

Funcţia analitică căutată este

$$f(z) = k(\operatorname{arctg} u - i \ln x\sqrt{1+u^2}) + \alpha =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - i \ln \sqrt{x^2+y^2} + \alpha = -ik \ln z + \alpha,$$

k fiind o constantă reală, iar α o constantă complexă.

20. *Să se determine funcţia analitică $f(z)$ a cărei parte reală este*

$$P(x, y) = \frac{\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$$

[T. Angheluţă, [1].]

Soluţie

Se poate determina $Q(x, y)$, partea imaginară a lui $f(z)$, deoarece din condiţiile lui Cauchy-Riemann deducem $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$. Avem de integrat o diferenţială totală exactă.

Vom determina însă pe $f(z)$ fără nici o cuadratură. În adevăr avem $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ şi deci $\overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y)$, $\overline{f(z)}$ fiind funcţia conjugată lui $f(z)$.

Se deduce egalitatea

$$2P(x, y) = f(z) + \overline{f(z)}. \tag{1}$$

Prin ipoteza $P(x, y)$ este armonică, adică

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

sau dacă întrebuinţăm variabilele z şi $\bar{z}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0.$

Deci membrul al doilea al egalităţii (1) se descompune într-o sumă de două funcţii: una de z şi alta de $\bar{z}$.

Pentru a găsi funcţia de z înlocuim în $P(x, y)$ pe x şi y în funcţii de z şi $\bar{z}$ şi obţinem

$$2P\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = f(z) + \overline{f(z)}. \tag{2}$$

Pentru a determina pe $f(z)$ vom pune membrul întîi al egalității (2) sub forma unei sume de două funcții, una în z și alta în $\bar{z}$. Funcția în z este funcția căutată.

În cazul problemei membrul întîi al egalității (2) devine

$$2P\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = 2\frac{\sin(z+\bar{z})}{e^{-i(z-\bar{z})} - 2\cos(z+\bar{z}) + e^{i(z-\bar{z})}} =$$

$$= 2\frac{\sin(z+\bar{z})}{2\cos(z-\bar{z}) - 2\cos(z+\bar{z})} = \frac{\sin(z+\bar{z})}{2\sin z \sin\bar{z}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{cotg} z + \operatorname{cotg}\bar{z}).$$

Prin urmare $f(z) = \frac{1}{2}\operatorname{cotg} z + Ai$, unde A este un număr real oarecare, căci punînd în (2) pe $f(z)$ în loc de $f(z) + Ai$, egalitatea nu se schimbă.

21. 1°. *Fiind date ecuațiile diferențiale de primul ordin*

$$(E_1):\ dy - f(x, y)\,dx = 0, \qquad (E_2):\ dx + f(x, y)\,dy = 0$$

se cere la ce condiție trebuie să satisfacă funcția $f(x, y)$ pentru ca primii membri ai celor două ecuații (E_1), (E_2) să admită un factor integrant comun $\mu(x, y)$?

2°. *Dacă această condiție este satisfăcută, există o funcție analitică $F(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de variabilă complexă $z = x + iy$ astfel ca cele două ecuații $P(x, y) = C$, $Q(x, y) = C_1$ să reprezinte respectiv integralele generale ale ecuațiilor (E_1), (E_2).*

3°. *Există de asemenea o funcție $F_1(z)$ a cărei parte reală este* arctg $[f(x, y)]$. *Care este relația între aceste două funcții analitice?*

4°. *Să se determine cele două funcții $F(z)$, $F_1(z)$ știind că $f(x, y)$ nu depinde decît de suma $x + y$, și satisfăcînd condițiile $f = 0$, $f'_x = 1$ pentru $x = y = 0$.*

(Th. Angheluță, [1].)

Soluție

1°. Cele două expresii

$$\mu(dy - f\,dx), \qquad \mu(dx + f\,dy)$$

sînt diferenţiale totale exacte. Deci, notînd cu p şi q derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$, condiţiile de integrabilitate sînt

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial x} + f\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu q = 0, \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} - f\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu p = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Rezolvînd în raport cu $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ şi $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, deducem

$$(1 + f^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\mu(q + fp),$$

$$(1 + f^2)\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(p - fq),$$

astfel încît scriind condiţia

$$\frac{\partial^2 \ln \mu}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \ln \mu}{\partial y\, \partial x}$$

avem relaţia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p - fq}{1 + f^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q + fp}{1 + f^2}\right) = 0.$$

Notînd $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ relaţia aceasta se scrie sub forma

$$(r + t)\,(1 + f^2) = 2f\,(p^2 + q^2). \tag{2}$$

2°. Deoarece funcţia $P(x, y) + iQ(x, y)$ este analitică, ea verifică condiţiile lui Cauchy-Riemann. Ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy = 0$$

ale căror integrale generale sînt $P(x, y) = C$, $Q(x, y) = C_1$ pot să se scrie sub formă

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,dx - \frac{\partial Q}{\partial x}\,dy = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = 0,$$

sau

$$\mu f dx - \mu dy = 0, \quad \mu dx + \mu f dy = 0.$$

Punînd

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\mu f, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}=\mu,$$

rezultă

$$P=\int \mu(f\mathrm{d}x-\mathrm{d}y), \quad Q=\int \mu(\mathrm{d}x+f\mathrm{d}y)$$

adică

$$F(z)=\int \mu(f+i)\ (\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y). \tag{3}$$

3°. Condiția necesară și suficientă de existență a funcției $F(z)$ este ca partea reală $P_1=\operatorname{arctg} f$ să verifice ecuația lui Laplace

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}=0. \tag{4}$$

Dar, avem

$$\frac{\partial P_1}{\partial x}=\frac{p}{1+f^2}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{q}{1+f^2},$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}=\frac{r}{1+f^2}-\frac{2fp^2}{(1+f^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}=\frac{t}{1+f^2}-\frac{2fq^2}{(1+f^2)^2}.$$

Se observă că ecuația (4) se poate scrie sub forma (2). Ținînd seama de (3) avem

$$F'(z)=\mu(f+i)$$

de unde

$$iF'(z)=\mu(-1+if).$$

Punînd

$$f=\operatorname{tg}\omega$$

avem

$$\cos\omega=-\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2(1+f^2)}}, \quad \sin\omega=-\frac{\mu f}{\sqrt{\mu^2(1+f^2)}}$$

și deci

$$iF'(z)=\sqrt{\mu(1+f^2)}\ (\cos\omega+i\sin\omega).$$

Rezultă că, dacă $\rho=\sqrt{\mu(1+f^2)}$ atunci $\ln[iF'(z)]=\ln\rho-$ $-i\omega$, deci funcția

$$i\ln[iF'(z)]=\omega-i\ln\rho,$$

care este analitică datorită lui $F(z)$, are ca parte reală $\omega=$ $\operatorname{arctg} f$. Aceasta este funcția $F_1(z)$ căutată, adică avem $\ln[i\,F'(z)]=$ $=-iF_1(z)$ sau

$$iF'(z)=e^{-iF_1(z)}.$$

Deci relaţia dintre F şi F_1 este

$$F(z) = -i\int e^{-iF_1(z)}\,dz.$$

4°. Dacă $f = \varphi(x+y) = \varphi(u)$ derivatele p, q, r, s, t au valorile

$$p = q = \varphi'(u),\quad r = s = t = \varphi''(u).$$

Ecuaţia (2) se scrie sub forma

$$2\varphi''(1+\varphi^2) = 4\varphi\varphi'^2$$

sau

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{2\varphi\varphi'}{1+\varphi^2}.$$

Rezultă

$$\ln\varphi' = \ln(1+\varphi^2) + \ln C$$

sau

$$\varphi' = C(1+\varphi^2)$$

de unde

$$\varphi = \operatorname{tg} Cu + C_1.$$

Din condiţiile iniţiale $\varphi = 0$, $\varphi' = 1$ pentru $u = 0$ deducem $C_1 = 0$, $C = 1$, adică $f = \operatorname{tg}(x+y)$. De aici rezultă

$$F_1 = x + y + iQ_1$$

cu

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = -1,\quad \frac{\partial Q_1}{\partial y} = 1$$

de unde

$$Q_1 = y - x.$$

Constanta de integrare poate fi luată egală cu zero fără a micşora generalitatea. Astfel avem

$$F_1(z) = (1-i)z$$

sau

$$-iF_1(z) = -(1+i)z = y - x - i(x+y)$$

şi

$$e^{-iF_1(z)} = e^{y-x}\,[\cos(x+y) - i\sin(x+y)].$$

De aici deducem

$$\int e^{-iF_1(z)}\,dz = \int e^{-(1+i)z}\,dz = \frac{i-1}{2}\,e^{-(1+i)z}$$

deci

$$F(z) = \frac{1+i}{2}\,e^{y-x}\,[\cos(x+y) - i\sin(x+y)] =$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{y-x}\,[\cos(x+y) + \sin(x+y) + i\cos(x+y) - i\sin(x+y)].$$

Ecuațiile

$$\frac{1}{2}\,e^{y-x}\,[\cos(x+y) + \sin(x+y)] = C,$$

$$\frac{1}{2}\,e^{y-x}\,[\cos(x+y) - \sin(x+y)] = C_1$$

reprezintă integralele generale ale ecuațiilor diferențiale

$$e^{y-x}\,[-\cos(x+y)\,dy + \sin(x+y)\,dx] = 0,$$

$$e^{y-x}\,[-\cos(x+y)\,dx - \sin(x+y)\,dy] = 0,$$

care rezultă din ecuațiile (E_1) și (E_2)

$$dy - \operatorname{tg}(x+y)\,dx = 0,\quad dx + \operatorname{tg}(x+y)\,dy = 0$$

cu ajutorul factorului integrant $\mu = -e^{y-x}\cos(x+y)$.

22. *Să se determine funcția analitică pentru care coeficientul părții imaginare este*

$$Q(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y.$$

[H. Cartan, [3]]

Soluție

Avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2,$$

deci, avînd în vedere ecuațiile lui Cauchy-Riemann, rezultă

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2x}{x^2+y^2} - 1,$$

adică,

$$dP = \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2\right)dx - \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + 1\right)dy.$$

Integrînd pe drumul din fig. 5, avem

$$P(x, y) = -2\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x - \int_0^y \left(\frac{2x}{x^2+y^2}+1\right)\mathrm{d}y =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 2x - y + C \quad (C = \text{const}).$$

Funcția căutată este deci

$$f(z) = -2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 2x - y + i\,[\ln(x^2+y^2) + x - 2y] + C.$$

Făcînd aici $y = 0$ obținem $z = x$ și deci

$$f(x) = 2i\ln x - (2-i)x + C,$$

de unde rezultă

$$f(z) = 2i\ln z - (2-i)\,z + C.$$

23. *Să se determine funcția monogenă* $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, *știind că funcțiile* P *și* Q *verifică relația*

$$2xyP + (y^2 - x^2)\,Q + 2xy(x^2+y^2)^2 = 0. \tag{1}$$

Soluție

Din relația (1) deducem

$$P = \frac{x^2-y^2}{2xy}Q - (x^2+y^2)^2. \tag{1'}$$

Funcția $f(z)$ fiind monogenă, rezultă că

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Înlocuind aici pe P cu valoarea dată de (1′) obținem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{y^2-x^2}{2xy}\cdot\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{x^2+y^2}{2x^2y}Q + 4x(x^2+y^2) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{x^2-y^2}{2xy}\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{x^2+y^2}{2xy^2}Q - 4y(x^2+y^2) = 0, \end{cases}$$

sau, rezolvînd în raport cu derivatele parțiale ale lui Q,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{x} + 8x^2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{Q}{y} - 8xy^2. \tag{2}$$

Derivînd prima ecuaţie (2) în raport cu y iar a doua în raport cu x şi, ţinînd seama de ecuaţiile (2), obţinem

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x},$$

deci problema este posibilă.

Avînd în vedere ecuaţiile (2) rezultă

$$\mathrm{d}Q = \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{xy}Q + 8xy(x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y),$$

adică

$$\mathrm{d}Q = \frac{\mathrm{d}(xy)}{xy}Q + 4xy\,\mathrm{d}(x^2 - y^2)$$

de unde

$$\frac{xy\mathrm{d}Q - Q\,\mathrm{d}(xy)}{x^2 y^2} = 4\mathrm{d}(x^2 - y^2)$$

sau

$$\mathrm{d}\left(\frac{Q}{xy}\right) - 4\mathrm{d}(x^2 - y^2) = 0.$$

De aici rezultă

$$\frac{Q}{xy} - 4(x^2 - y^2) = 2k,$$

adică

$$Q(x, y) = 4xy(x^2 - y^2) + 2kxy,$$

unde k este o constantă reală.

Înlocuind această valoare din (1') găsim

$$P(x, y) = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 + k(x^2 - y^2).$$

Deci funcţia căutată este

$$f(z) = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4 + k(x^2 - y^2) + i(4x^3 y - 4xy^3 + 2kxy)$$

sau

$$f(z) = z^4 + kz^2.$$

24. *Să se determine funcţia analitică a cărei parte reală este*

$$P(x, y) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$$

şi care în origine ia valoarea 0.

S o l u ț i e

Fie $f(z)$ o funcție analitică într-un domeniu care conține originea. Această funcție este deci dezvoltată în serie Taylor în jurul originii, adică avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Funcția conjugată cu $f(z)$ este

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n,$$

deci

$$\bar{f}(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2), rezultă că, dacă notăm cu $P(x, y)$ partea reală a funcției $f(z)$, avem

$$2P(x, y) = f(z) + \bar{f}(\bar{z}), \tag{3}$$

unde

$$z = x + iy, \ \bar{z} = x - iy.$$

Dacă înlocuim aici pe x cu $\frac{t}{2}$, iar pe y cu $\frac{t}{2i}$, rezultă că pe z trebuie să-l înlocuim cu t iar pe $\bar{z}$ cu 0. Deci relația (3) se scrie

$$2P\left(\frac{t}{2}, \ \frac{t}{2i}\right) = f(t) + \bar{f}(0),$$

de unde, revenind la variabila complexă z,

$$f_1(z) = 2P\left(\frac{z}{2}, \ \frac{z}{2i}\right) - \bar{f}(0). \tag{4}$$

În cazul problemei noastre avem

$$P\left(\frac{z}{2}, \ \frac{z}{2i}\right) = \frac{\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{z}{2i}}.$$

Dar $\operatorname{sh}\frac{z}{2i} = i\sin\frac{z}{2}$, deci

$$P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}}$$

adică

$$P\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{\operatorname{tg} z}{2}.$$

Cu această valoare relația (4) devine

$$f(z) = \operatorname{tg} z - \bar{f}(0).$$

Ținînd seama că $f(0) = 0$, de aici obținem $\bar{f}(0) = 0$, deci

$$f(z) = \operatorname{tg} z.$$

25. *Să se arate că dacă $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt două funcții armonice într-un domeniu D, condiția necesară și suficientă ca funcția $f(z) = u + iv$ să fie o funcție monogenă este ca funcția*

$$\varphi(x, y) = \ln[(u + \lambda)^2 + (v + \mu)^2]$$

să fie armonică oricare ar fi constantele λ și μ.

[N. Ciorănescu, [4].]

Soluție

Să calculăm derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției $\varphi(x, y)$. Avem

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2\,\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (u+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (v+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2} -$$

$$-4\left[\frac{(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial x}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2}\right]^2,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2\,\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + (u+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (v+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2} -$$

$$-4\left[\frac{(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial y}}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2}\right]^2.$$

Funcțiile u și v sînt armonice, deci

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

și, ținînd seama de (1), rezultă

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2\, \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2} -$$

$$-4\, \frac{\left[(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial x}\right]^2 + \left[(u+\lambda)\frac{\partial u}{\partial y} + (v+\mu)\frac{\partial v}{\partial y}\right]^2}{[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]^2} =$$

$$= 2\, \frac{[-(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]}{[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]^2} -$$

$$\frac{-4(u+\lambda)(v+\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{[(u+\lambda)^2 + (v+\mu)^2]^2}. \tag{2}$$

Dacă funcția $f(z)$ este monogenă avem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

deci $\Delta\varphi = 0$, adică funcția φ este armonică oricare ar fi λ și μ.

Dacă funcția φ este armonică oricare ar fi λ și μ, din relația (2) rezultă

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

de unde deducem condițiile (3), adică condițiile de monogenitate.

26. *Să se studieze funcţia multiformă*

$$w = \ln \frac{z-1}{z+1}.$$

S o l u ţ i e

Dacă notăm

$$z-1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \qquad z+1 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

funcţia w se scrie

$$w = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} + i(2k\pi + \theta_1 - \theta_2).$$

Avînd în vedere reprezentarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe, rezultă că ρ_1 este segmentul care uneşte punctul 1 cu z, iar θ_1 unghiul dintre axa reală şi acest segment, în sens direct. Analog ρ_2 este segmentul ce uneşte punctul -1 cu z, iar θ_2 unghiul dintre axa reală şi acest segment în sens direct.

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zAz_1 (fig. 6) funcţia w ia valoarea

$$w_1 = \ln \frac{\rho_1'}{\rho_2'} + i(2k\pi + \theta_1' - \theta_2').$$

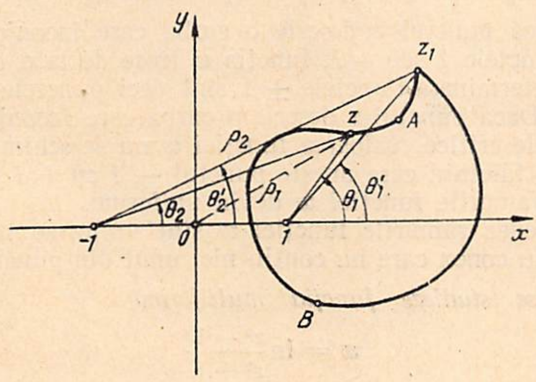

Fig. 6

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zBz_1, care înconjoară punctul *1* fără a înconjura punctul -1, funcţia w ia valoarea

$$w_2 = \ln \frac{\rho_1'}{\rho_2'} + i(2k\pi + 2\pi + \theta_1' - \theta_2').$$

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zCz_1 (fig. 7) funcţia w ia valoarea

$$w_3 = \ln \frac{\rho_1'}{\rho_2'} + i(2k\pi + \theta_1' - \theta_2' - 2\pi).$$

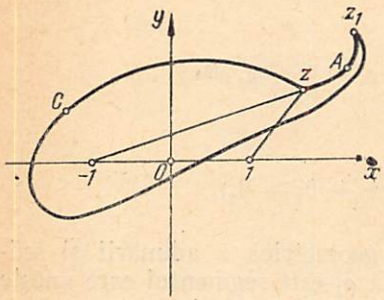

Fig. 7

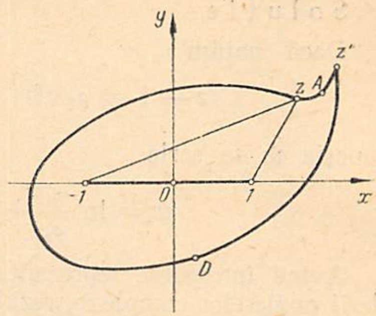

Fig. 8

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zDz_1 (fig. 8) care înconjoară ambele puncte 1 şi -1, funcţia w ia valoarea

$$w_4 = \ln \frac{\rho_1'}{\rho_2'} + i(2k\pi + 2\pi + \theta_1' - \theta_2' - 2\pi).$$

Avem

$$w_2 = w_1 + 2\pi i, \quad w_3 = w_1 - 2\pi i, \quad w_4 = w_1.$$

Deci, dacă punctul z descrie o curbă care înconjoară numai unul din punctele 1 sau -1, funcţia w trece de la o determinare la o altă determinare. Punctele ± 1 sînt deci punctele critice ale funcţiei w. Dacă punctul z descrie o curbă care înconjoară amîndouă punctele critice, valoarea funcţiei w nu se schimbă.

Făcînd o tăietură care uneşte punctul -1 cu $+1$ de-a lungul axei reale, ramurile funcţiei w devin uniforme.

De asemenea ramurile funcţiei w sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţin nici unul din punctele critice.

27. *Să se studieze funcţia multiformă*

$$w = \ln \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}.$$

Soluţie

Dacă notăm

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad z - i = \rho_3 e^{i\theta_3}, \quad z + i = \rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcţia w se scrie

$$w = \ln \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_3 \rho_4} + i(2k\pi + \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4).$$

Modulul ρ_1 este segmentul care unește punctul *1* cu punctul z, iar θ_1 unghiul pe care axa reală îl face cu acest segment. Semnificațiile geometrice ale numerelor ρ_2, θ_2, ρ_3, θ_3, ρ_4, θ_4 se obțin înlocuind punctul *1* respectiv -1, i, $-i$, (fig. 9).

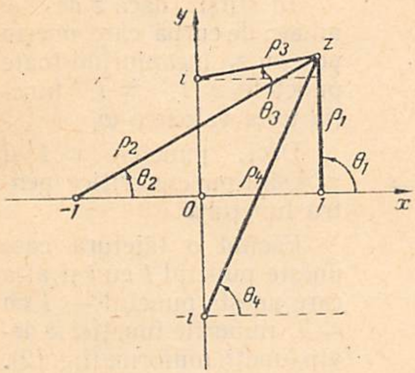

Fig. 9

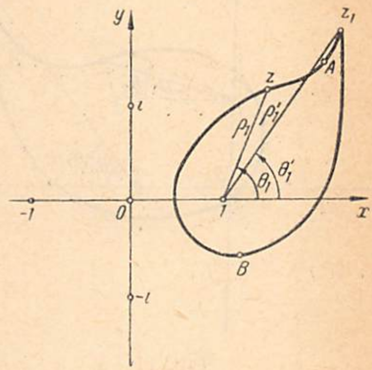

Fig. 10

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zAz_1 (fig. 10) funcția w ia valoarea

$$w_1 = \ln\frac{\rho_1'\rho_2'}{\rho_3'\rho_4'} + i(2k\pi + \theta_1' + \theta_2' - \theta_3' - \theta_4').$$

Dacă punctul z descrie arcul de curbă zBz_1, care înconjoară punctul *1* fără a înconjura nici unul din punctele -1, $\pm i$, funcția w ia valoarea

$$w_2 = w_1 + 2\pi i.$$

Analog, dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd punctul -1 fără a înconjura nici unul din punctele 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea w_2.

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd punctul i sau $-i$ fără a înconjura nici unul din celelalte trei puncte, funcția w ia valoarea

$$w_3 = w_1 - 2\pi i.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd unul din punctele ± 1 și unul din punctele $\pm i$ fără a înconjura nici unul din celelalte două puncte (de exemplu înconjoară numai punctele 1 și i, vezi fig. 11) funcția w ia valoarea w_1.

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd numai trei din cele patru puncte ± 1, $\pm i$, funcția w ia una din valorile w_2 sau w_3.

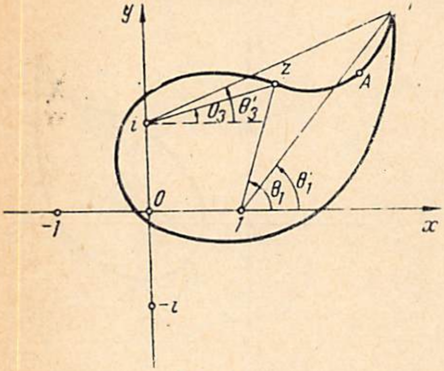

Fig. 11

În sfîrșit, dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd toate punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea w_1.

Deci, punctele ± 1 și $\pm i$ sînt puncte critice pentru funcția w.

Făcînd o tăietură care unește punctul 1 cu i și alta care unește punctul -1 cu $-i$, ramurile funcției w devin funcții uniforme (fig. 12).

De asemenea ramurile funcției w sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice (fig. 13).

28. *Să se studieze funcția multiformă*

$$w = \ln (z^4 - 1).$$

S o l u ț i e

Notînd

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1},\ z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2},\ z - i = \rho^3 e^{i\theta_3},\ z + i = \rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcția w se scrie

$$w = \ln (\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4) + i\,(2k\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4).$$

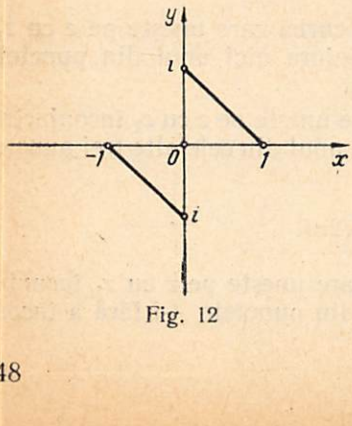

Fig. 12

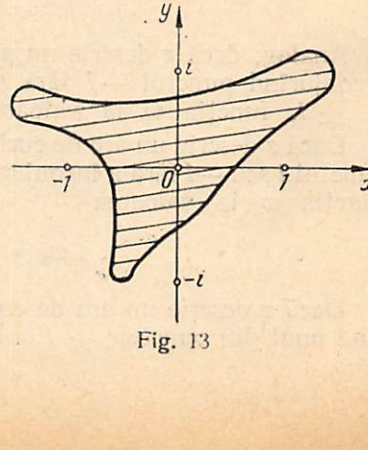

Fig. 13

Semnificațiile geometrice ale numerelor ρ_h, θ_h, $(h = 1, 2, 3, 4)$ sînt cele date în problema 27.

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea

$$w_1 = \ln(\rho_1' \rho_2' \rho_3' \rho_4') + i(2k\pi + \theta_1' + \theta_2' + \theta_3' + \theta_4').$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește punctul z cu z_1, înconjurînd numai unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea $w_2 = w_1 + 2\pi i$.

Dacă z descrie un arc de curbă care unește punctul z cu z_1, înconjurînd două din punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea $w_3 = w_1 + 4\pi i$.

Dacă z descrie un arc de curbă care unește punctul z cu z_1, înconjurînd trei din punctele ± 1, $\pm i$ funcția w ia valoarea $w_4 = w_1 + 6\pi i$, iar dacă arcul de curbă înconjoară toate punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea $w_5 = w_1 + 8\pi i$.

Deci, dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1 înconjurînd, cel puțin unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcția w trece de la o determinare la altă determinare.

Punctele ± 1, $\pm i$ sînt punctele critice ale funcției w.

Pentru a uniformiza ramurile funcției w facem patru tăieturi care pleacă din punctele critice și merg, de-a lungul axelor spre infinit.

Ramurile funcției w sînt de asemenea uniforme în orice simplu conex care nu conțin nici unul din punctele critice.

29. *Să se studieze funcțiile multiforme.*

1°. $w = \sqrt{z^4 - 1}$, 2°. $w = \sqrt[4]{z^4 - 1}$.

Soluție

1°. Dacă notăm

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad z - i = \rho_3 e^{i\theta_3}, \quad z + i = \rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcția w se scrie

$$w = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)^{\frac{1}{2}} e^{k\pi i + \frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}, \quad (k = 0, 1).$$

Cele două ramuri ale funcției w sînt

$$w_1 = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)},$$

$$w_2 = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(2\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}.$$

Semnificaţiile geometrice ale numerelor ρ_h, θ_h $(h = 1, 2, 3, 4)$ sînt cele din problema 26.

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1 fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta + 2k\pi)}, \quad (\rho = \rho_1' \rho_2' \rho_3' \rho_4'; \quad \theta = \theta_1' + \theta_2' + \theta_3' + \theta_4').$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, înconjurînd unul sau trei din punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w'' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(\theta + 2\pi + 2k\pi)} = -w',$$

(dacă arcul înconjură trei din cele patru puncte avem în vedere că $e^{2\pi i} = 1$).

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1 înconjurînd două sau toate punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w ia valoarea w'.

Deci, cînd punctul z descrie o curbă care înconjură un număr impar de puncte dintre punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w trece de la o determinare la alta. Cînd curba înconjură un număr par de puncte valoarea funcţiei w nu se schimbă.

Punctele ± 1, $\pm i$ sînt deci punctele critice ale funcţiei w.

Dacă facem o tăietură care să unească punctul 1 cu i şi alta care să unească punctul -1 cu $-i$, ramurile funcţiei devin funcţii uniforme (fig. 14).

De asemenea ramurile funcţiei sînt uniforme în orice domeniu simplu conex, care nu conţine nici unul din punctele critice (fig. 14).

2°. Cu notaţiile de la punctul 1° avem

$$w = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)}, \quad (k = 0, 1, 2, 3,).$$

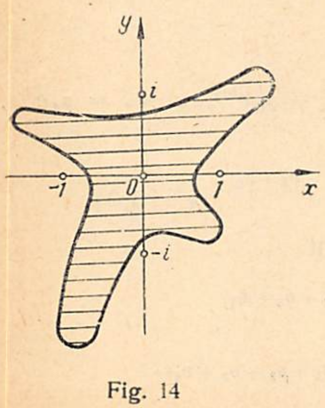

Fig. 14

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w' = \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi + \theta)}.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, înconjurînd unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w'' = \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi + 2\pi + \theta)} = e^{\frac{\pi i}{2}} \cdot w'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd două sau trei din punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea

$$w''' = \sigma^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i}{4}(2k\pi + 4\pi + \theta)} = e^{\pi i} w'$$

respectiv

$$w^{\text{IV}} = e^{\frac{3\pi i}{2}} w'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd toate punctele ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea w'.

Deci, dacă punctul z descrie o curbă care înconjură unul, două sau trei dintre punctele ± 1, $\pm i$, funcția w trece de la o determinare la alta. Cînd curba înconjură toate punctele ± 1, $\pm i$ sau nu înconjură nici unul dintre ele, funcția w nu-și schimbă valoarea.

Punctele ± 1, $\pm i$ sînt deci punctele critice ale funcției.

Dacă facem o tăietură care să unească punctele -1 cu $+1$ și $-i$ cu $+i$ de-a lungul axelor sau o tăietură de-a lungul pătratului cu vîrfurile în cele patru puncte, ramurile funcției w devin uniforme (fig. 15, 16).

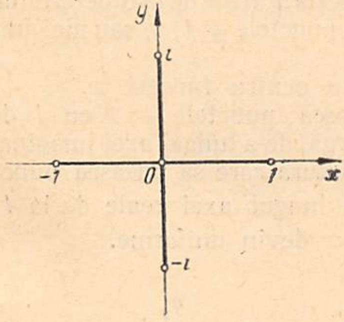

Fig. 15

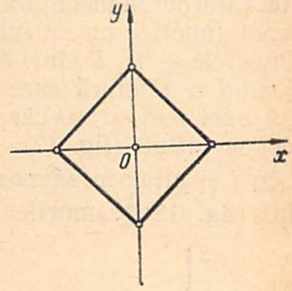

Fig. 16

De asemenea, ramurile funcției w sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele ± 1, $\pm i$ (fig. 14).

30. *Să se studieze funcțiile multiforme*

1°. $w = \sqrt{z^3 - iz^2 - z + i}$, 2°. $w = \sqrt[3]{z^3 - iz^2 - z + i}$.

Soluţie

1°. Dacă notăm

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2}, \quad z - i = \rho_3 e^{i\theta_3},$$

funcţia w se scrie

$$w = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(2k\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)} \quad (k=0,1).$$

Semnificaţiile geometrice ale numerelor ρ_h şi θ_h $(h = 1, 2, 3)$ sînt cele din problema 27.

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, fără a înconjura nici unul din punctele $\pm 1, i$, funcţia w ia valoarea

$$w' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(2k\pi + \theta)} \quad (\rho = \rho_1' \rho_2' \rho_3'; \quad \theta = \theta_1' + \theta_2' + \theta_3').$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1 înconjurînd unul sau toate punctele ± 1, i, funcţia w ia valoarea

$$w'' = \rho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2}(2k\pi + 2\pi + \theta)} = e^{\pi i} w'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, înconjurînd două din punctele ± 1, i, funcţia w ia valoarea w'.

Deci, cînd z descrie o curbă care înconjură un număr impar de puncte dintre punctele ± 1, i, funcţia w trece de la o determinare la alta. Cînd curba înconjură două din punctele ± 1, i, sau nici unul, valoarea funcţiei nu se schimbă.

Punctele ± 1, i sînt deci critice pentru funcţia w.

Făcînd o tăietură care să unească punctele -1 cu 1 de-a lungul axei reale şi una care să meargă, de-a lungul axei imaginare, de la i la infinit (fig. 17), sau o tăietură care să unească punctul -1 cu i şi alta care să meargă de-a lungul axei reale de la 1 la infinit (fig. 18), ramurile funcţiei w devin uniforme.

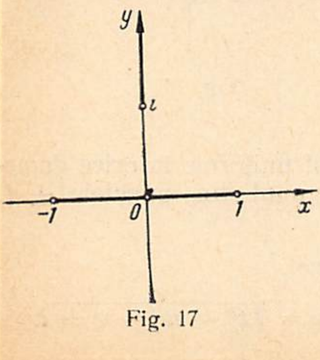

Fig. 17

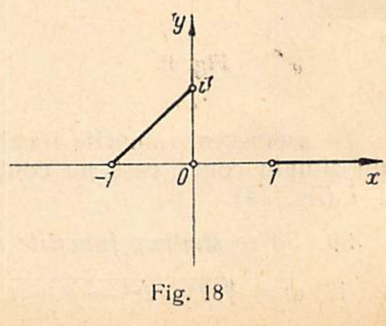

Fig. 18

De asemenea, în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul dintre punctele ± 1, i, ramurile funcției w sînt uniforme (fig. 19).

2°. Cu notațiile de la punctul 1° avem

$$w = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3}(2k\pi + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}, \quad (k = 0, 1, 2).$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, fără să înconjure nici unul din punctele ± 1, i funcția w ia valoarea

$$w' = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3}(2k\pi + \theta)}.$$

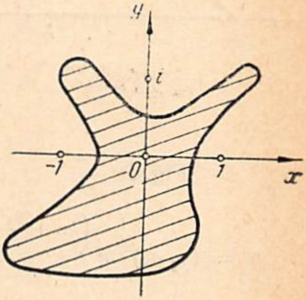

Fig. 19

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd unul sau două dintre punctele ± 1, i, funcția w ia valoarea

$$w' = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3}(2k\pi + 2\pi + \theta)} = e^{\frac{2\pi i}{3}} w',$$

respectiv

$$w'' = \rho^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3}(2k\pi + 4\pi + \theta)} = e^{\frac{4\pi i}{3}} w'.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd toate punctele ± 1, i, funcția w ia valoarea w'.

Deci, dacă punctul z descrie o curbă care înconjură unul sau două dintre punctele ± 1, i, funcția w trece de la o determinare la alta, iar dacă curba nu înconjură nici unul sau toate aceste puncte funcția w nu-și schimbă valoarea.

Punctele ± 1, i sînt punctele critice ale funcției w.

Făcînd una din tăieturile din figurile 20, 21, 22 ramurile funcției w devin uniforme. De asemenea aceste ramuri sînt uniforme

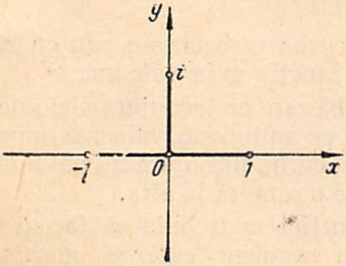

Fig. 20

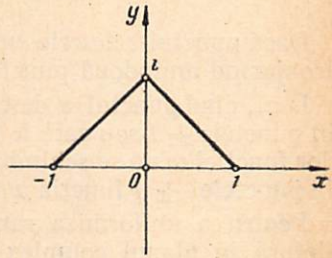

Fig. 21

în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice (fig. 19).

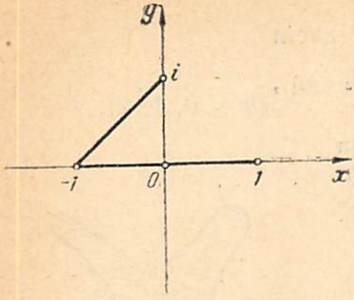

Fig. 22

31. *Să se studieze funcția multiformă*

$$w = \sqrt{z^2 - 1}\,\ln\frac{z-1}{z+1}.$$

Soluție

Dacă notăm

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

funcția dată se scrie

$$w = (\rho_1\rho_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}\left[\ln\frac{\rho_1}{\rho_2} + i(2h\pi + \theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$(k = 0, 1;\ h = 0, \pm 1, \ldots)$$

Semnificația geometrică a numerelor ρ_1, ρ_2, θ_1, θ_2 este cea din problema 25.

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, funcția w ia valoarea

$$w' = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \frac{\theta_1'+\theta_2'}{2}\right)}\left[\ln\frac{\rho_1'}{\rho_2'} + i(2h\pi + \theta_1' - \theta_2')\right].$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd unul din punctele ± 1, funcția w ia valoarea

$$w'' = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \pi + \frac{\theta_1'+\theta_2'}{2}\right)}\left[\ln\frac{\rho_1'}{\rho_2'} + i(2h\pi \pm \pi + \theta_1' - \theta_2')\right].$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care unește pe z cu z_1, înconjurînd amîndouă punctele ± 1, funcția w ia valoarea w'.

Deci, cînd punctul z descrie o curbă care nu înconjură nici unul din punctele ± 1 sau care le înconjură pe amîndouă, valoarea ramurilor funcției w nu se schimbă, iar cînd curba înconjură numai unul din punctele ± 1 funcția w trece de la o ramură la alta.

Pentru a uniformiza ramurile funcției w trebuie să facem o tăietură în planul complex printr-un segment care să unească punctele $z = 1$ cu $z = -1$.

De asemenea ramurile funcţiei w sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţin nici unul din punctele ± 1. Punctele ± 1 sînt deci punctele critice ale funcţiei w.

32. *Să se studieze funcţia multiformă*

$$w = \sqrt{z^2-1}\ \ln\ (z^2+1).$$

Soluţie

Dacă notăm

$$z-1 = \rho_1 e^{i\theta_1},\quad z+1 = \rho_2 e^{i\theta_2},\quad z-i = \rho_3 e^{i\theta_3},\quad z+i = \rho_4 e^{i\theta_4},$$

funcţia w se scrie

$$w = (\rho_1\rho_2)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} [\ln \rho_3\rho_4 + i\,(2h\pi + \theta_3 + \theta_4)],$$
$$(k=0,\ 1;\ h = 0,\ \pm 1,\ldots),$$

unde ρ_j, θ_j, $(j = 1, 2, 3, 4)$ au semnificaţiile geometrice din problema 26.

Cînd punctul z descrie un arc de curbă care-l uneşte cu punctul z_1, fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w_1 = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \frac{\theta_1'+\theta_2'}{2}\right)} [\ln \rho_3'\rho_4' + i(2h\,\pi + \theta_3' + \theta_4')].$$

Dacă z descrie un arc de curbă care-l uneşte cu punctul z_1, înconjurînd unul din punctele ± 1, fără a înconjura nici unul din punctele $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w_2 = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \pi + \frac{\theta_1'+\theta_2'}{2}\right)} [\ln \rho_3'\rho_4' + i\ (2h\pi + \theta_3' + \theta_4')].$$

În cazul în care z descrie un arc de curbă care-l uneşte cu punctul z_1, înconjurînd unul din punctele ± 1 şi unul din punctele $\pm i$, funcţia w ia valoarea

$$w_3 = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \pi + \frac{\theta_1'+\theta_2'}{2}\right)} [\ln \rho_3'\rho_4' + i\ (2h\pi + \pi + \theta_3' + \theta_4')].$$

Dacă z descrie un arc de curbă care-l uneşte cu punctul z_1, înconjurînd unul din punctele $\pm i$ fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, funcţie w ia valoarea

$$w_4 = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \frac{\theta_1'+\theta_2'}{2}\right)} [\ln \rho_3'\rho_4' + i(2h\pi + \pi + \theta_3' + \theta_4')].$$

Cînd z descrie un arc de curbă care-l uneşte cu z_1, înconjurînd ambele puncte ± 1, fără a înconjura nici unul din punctele $\pm i$, funcţia w ia valoarea w_1.

Dacă z descrie un arc de curbă care-l unește cu z_1, înconjurînd ambele puncte $\pm i$ fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, funcția w ia valoarea

$$w_5 = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right)} [\ln \rho_3'\rho_4' + i(2h\pi + 2\pi + \theta_3' + \theta_4')].$$

Dacă z descrie un arc de curbă care-l unește cu z_1, înconjurînd ambele puncte ± 1 și unul din punctele $\pm i$, funcția w ia valoarea w_4, iar dacă arcul de curbă înconjură toate cele patru puncte ± 1, $\pm i$, funcția w ia valoarea w_5.

Dacă z descrie un arc de curbă care-l unește cu z_1, înconjurînd punctele $\pm i$ și unul din punctele ± 1, funcția w ia valoarea

$$w_6 = (\rho_1'\rho_2')^{\frac{1}{2}} e^{i\left(k\pi + \pi + \frac{\theta_1' + \theta_2'}{2}\right)} [\ln \rho_3'\rho_4' + i(2h\pi + 2\pi + \theta_3' + \theta_4')].$$

Deci, dacă punctul z descrie o curbă închisă care nu înconjură nici unul din punctele ± 1, $\pm i$, sau care înconjură ambele puncte ± 1 fără a înconjura nici unul din punctele $\pm i$, ramurile funcției w nu-și schimbă valoarea.

Dacă punctul z descrie o curbă închisă care înconjură punctul $+1$ sau -1, sau dacă înconjură cel puțin unul din punctele $\pm i$, funcția w trece de la o ramură la alta.

Punctele ± 1, $\pm i$ sînt punctele critice ale funcției w.

Ramurile funcției w sînt funcții uniforme în orice domeniu simplu conex în care nu este cuprins nici unul din punctele critice, sau în planul complex în care am făcut tăietura $[-1, +1]$ și tăieturile care unesc punctul i cu punctul de la infinit de-a lungul semiaxei imaginare pozitive și punctul $-i$ cu punctul de la infinit de-a lungul semiaxei imaginare negative (fig. 23 și 24).

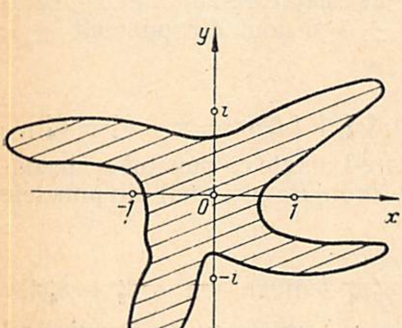

Fig. 23

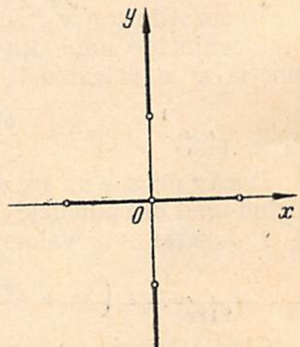

Fig. 24

33. *Să se studieze funcţia multiformă*

$$w = \sqrt[5]{(z+1)^2 (z-1)^3}.$$

Soluţie

Dacă notăm

$$z - 1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, \quad z + 1 = \rho_2 e^{i\theta_2},$$

funcţia w se scrie

$$w = \rho_1^{\frac{3}{5}} \rho_2^{\frac{2}{5}} e^{\frac{i}{5}(2k\pi + 3\theta_1 + 2\theta_2)}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Semnificaţiile geometrice ale numerelor ρ_1, ρ_2, θ_1, θ_2 sînt cele din problema 26.

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1 fără a înconjura nici unul din punctele ± 1, funcţia w ia valoarea

$$w' = \rho e^{\frac{i}{5}(2k\pi + \theta)},$$

unde am pus $\rho = \rho_1'^{\frac{3}{5}} \rho_2'^{\frac{2}{5}}$, $\theta = 3\theta_1' + 2\theta_2'$ accentele însemnînd că modulii şi argumentele sînt calculate pentru punctul z_1.

În cazul în care punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, înconjurînd punctul $z = 1$, funcţia w ia valoarea

$$w'' = \rho e^{\frac{i}{5}(2k\pi + 6\pi + \theta)} = e^{\frac{6\pi i}{5}} w'.$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, înconjurînd punctul $z = -1$, funcţia w ia valoarea

$$w''' = \rho e^{\frac{i}{5}(2k\pi + 4\pi + \theta)} = e^{\frac{4\pi i}{5}} w'.$$

Dacă punctul z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z_1, înconjurînd punctele $z = \pm 1$, funcţia w ia valoarea

$$w^{IV} = \rho e^{\frac{i}{5}(2k\pi + 10\pi + \theta)} = w'.$$

Deci, dacă punctul z descrie o curbă închisă care înconjură numai unul din punctele $z = -1$, $z = +1$, funcţia w trece de la o determinare la alta. Cînd curba înconjură amîndouă punctele $z = \pm 1$ sau nici unul din ele, valoarea funcţiei nu se schimbă.

Punctele $z = \pm 1$ sînt deci punctele critice ale funcţiei w.

Făcînd o tăietură care să unească punctele $z = -1$ şi $z = 1$ de-a lungul axei reale, ramurile funcţiei w devin uniforme.

De asemenea ramurile funcţiei w sînt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţine nici unul din punctele $z = \pm 1$.

34. *Să se rezolve ecuaţiile*:

$$1^\circ.\ \sin z = 2;\quad 2^\circ.\ \cos z = \sqrt{2};\quad 3^\circ.\ \operatorname{tg} z = \frac{4-3i}{5}.$$

S o l u ţ i e

1°. Înlocuind pe $\sin z$ cu valoarea lui în funcţie de e^{iz}, ecuaţia se scrie

$$\frac{e^{-iz} - e^{-iz}}{2i} = 2,$$

sau

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie în raport cu e^{iz} obţinem

$$e^{iz} = i(2 \pm \sqrt{3}).$$

Avînd în vedere că $2 \pm \sqrt{3} > 0$, această egalitate se mai poate scrie

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})\, e^{i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

de unde deducem

$$iz = \ln\,(2 \pm \sqrt{3}) + i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

sau

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - i\ \ln\,(2 \pm \sqrt{3}).$$

Ţinînd seama că $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, rezultă

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm i\ \ln\,(2 + \sqrt{3}),$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea principală.

2°. Această ecuaţie se scrie

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\sqrt{2}$$

sau

$$e^{2iz}-2\sqrt{2}\,e^{iz}+1=0,$$

Rezolvînd această ecuaţie găsim

$$e^{iz}=\sqrt{2}\pm 1,$$

sau, avînd în vedere că $\sqrt{2}\pm 1>0$,

$$e^{iz}=(\sqrt{2}\pm 1)\,e^{2k\pi i}.$$

De aici rezultă

$$iz=\ln(\sqrt{2}\pm 1)+2k\pi i,$$

adică

$$z=2k\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm 1),$$

sau, ţinînd seama că $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,

$$z=2k\pi\pm i\ln(\sqrt{2}+1).$$

3°. Ecuaţia se scrie sub forma

$$\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=\frac{4-3i}{5},$$

de unde

$$e^{2iz}=2i$$

adică

$$e^{2iz}=2e^{i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

De aici rezultă

$$2iz=\ln 2+i\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

sau

$$z=k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{i}{2}\ln 2.$$

35. *Să se determine rădăcinile ecuațiilor*

$1°.\ e^z - 4z^n + 1 = 0,$

$2°.\ z^n + 2z^2 + 1 = 0$

situate în interiorul domeniului $|z| < 1$, *știind că* n *este un număr natural.*

Soluție

În cazul 1° să notăm

$$f_1(z) = -4z^n + 1,\quad f_2(z) = e^z.$$

Avem

$$|f_1(z)| = |4z^n - 1| \geqslant 4|z|^n - 1,$$

deci pe cercul $|z| = 1$,

$$|f_1(z)| \geqslant 3.$$

De asemenea

$$|f_2(z)| = |e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x$$

și deci pe cercul $|z| = 1$,

$$|f_2(z)| \leqslant e.$$

Rezultă că, pentru $|z| = 1$, avem

$$\left|\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right| \leqslant \frac{e}{3} < 1,$$

deci ecuațiile $f_1(z) = 0$ și $f_1(z) + f_2(z) = 0$ au, în domeniul $|z| < 1$, același număr de rădăcini.

Ecuația

$$f_1(z) = -4z^n + 1 = 0$$

are n rădăcini

$$z = \frac{1}{\sqrt[n]{4}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}\right),\quad (k = 0, \ldots, n-1),$$

situat pe cercul $|z| = \frac{1}{\sqrt[n]{4}} < 1$, deci în interiorul domeniului $|z| < 1$.

Rezultă că ecuația

$$e^z - 4z^n + 1 = 0,$$

are în domeniul $|z| < 1$ n rădăcini.

În cazul 2° să notăm

$$f_1(z) = 2z^2 + 1,\ f_2(z) = z^n.$$

Avem

$$|f_1(z)| = |2z^2 + 1| > 2|z|^2 - 1 = 1,$$

$$|f_2(z)| = |z^n| = 1.$$

Rezultă că pe cercul $|z| = 1$, avem

$$\left|\frac{f^2(z)}{f_1(z)}\right| < 1,$$

deci ecuațiile $f_1(z) = 0$ și $f_1(z) + f_2(z) = 0$ au, în domeniul $|z| < 1$, același număr de rădăcini.

Ecuația

$$f_1(z) = 2z^2 + 1 = 0,$$

are rădăcinile

$$z = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

care sînt situate în interiorul domeniului $|z| < 1$, deci, ecuația

$$z^n + 2z^2 + 1 = 0,$$

are în domeniul $|z| < 1$ două rădăcini.

36. *Să se determine numărul rădăcinilor ecuației*

$$z^n + \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2 = 0,\ (n \neq 0,\ 1,\ 2) \qquad (1)$$

cuprinse în domeniul $|z| < 1$, *știind că* $|\alpha_0| > |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1$.

Soluție

Să notăm

$$f_1(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z,\quad f_2(z) = z^n + \alpha_2.$$

Avem

$$|f_1(z)| = |\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z| > |\alpha_0| \cdot |z|^2 - |\alpha_1| \cdot |z|,$$

deci pe cercul $|z| = 1$,

$$|f_1(z)| > |\alpha_0| - |\alpha_1|.$$

Analog, pe cercul $|z| = 1$, avem

$$|f_2(z)| = |z^n + \alpha_2| < |z|^n + |\alpha_2| = |\alpha_2| + 1.$$

Deci, pe acest cerc

$$\left|\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right| < \frac{|\alpha_2|+1}{|\alpha_0|-|\alpha_1|},$$

de unde, ținînd seama de condiția $|\alpha_0| > |\alpha_1| + |\alpha_2| + 1$, deducem

$$\left|\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right| < 1.$$

Rezultă că, în domeniul $|z| < 1$, ecuațiile $f_1(z) = 0$ și $f_1(z) + f_2(z) = 0$, au același număr de rădăcini.

Ecuația

$$f_1(z) = \alpha_0 z^2 + \alpha_1 z = 0$$

are rădăcinile

$$z_1 = 0,\ z_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Avem

$$|z_2| = \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_0|} < \frac{|\alpha_1|}{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1} < 1,$$

deci ecuația $f_1(z) = 0$ are două rădăcini în domeniul $|z| < 1$.

II. Serii

Seria

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

unde z este variabilă complexă, iar a_k sînt constante complexe, se numeşte serie întreagă sau serie de puteri.

În legătură cu aceste serii avem teoremele:

Teorema lui Abel. Dacă o serie întreagă este convergentă pentru o valoare z_0 a lui z, ea este absolut convergentă pentru toate valorile lui z care satisfac inegalitatea $|z| < |z_0|$.

Teorema lui Cauchy-Hadamard. Seria (1) este absolut convergentă pentru valorile lui z din interiorul cercului a cărui rază este

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Numărul R se numeşte raza de convergenţă a seriei (1) iar cercul cu centrul în origine şi cu raza R, cercul de convergenţă. Valoarea razei de convergenţă mai poate fi calculată cu ajutorul formulei

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

Teorema lui Abel. Dacă a_k sînt numere pozitive şi raza de convergenţă a seriei este R şi dacă $a_0 > a_1 R > a_2 R^2 > \cdots > a_n R^n > \cdots$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n R^n = 0$, seria (1) este convergentă pe cercul de convergenţă, afară eventual, de valoarea $z = R$.

O serie întreagă defineşte în interiorul cercului de convergenţă o funcţie olomorfă.

Suma sau produsul a două serii convergente în acelaşi cerc este o serie convergentă în acelaşi cerc şi are ca sumă sau produs, suma sau produsul sumelor seriilor date.

O funcţie $f(z)$ olomorfă într-un domeniu sinplu conex D în interiorul căruia se află punctul a, se poate scrie sub forma unei serii întregi

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots,$$

numită seria Taylor a funcţiei $f(z)$ relativă la punctul a.

Un punct a se numeşte punct ordinar al funcţiei $f(z)$ dacă funcţia $f(z)$ este olomorfă într-un cerc cu centrul în a. Un punct care nu este ordinar se numeşte punct singular al funcţiei.

În cazul în care $f(z) = (1 + z)^{\alpha}$, α fiind un număr complex oarecare, avem formula

$$(1 + z)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n - 1)}{n!} z^n + \ldots,$$

formulă valabilă în interiorul cercului $|z| = 1$. Această serie se numeşte *seria binomială*.

O funcţie $f(z)$ olomorfă într-o coroană circulară cu centrul în a se poate pune sub forma

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1 (z - a) + \ldots$$
$$\ldots + a_n(z - a)^n + \ldots,$$

numită seria Laurent a funcţiei $f(z)$ relativă la punctul a.

Suma

$$\ldots + \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - a}$$

se numeşte *partea principală a funcţiei* $f(z)$.

Dacă $a_{-n-1} = a_{-n-2} = \ldots = 0$, punctul $z = a$ este un pol de ordinul n al funcţiei $f(z)$.

Dacă partea principală a funcţiei $f(z)$ relativă la punctul a are o infinitate de termeni, punctul a este un punct singular esenţial pentru funcţia $f(z)$.

O funcţie $f(z)$, uniformă într-un domeniu D şi care nu are în acest domeniu alte puncte singulare, în afară de poli, se numeşte funcţie meromorfă în domeniul D.

Probleme

1. *Să se determine raza de convergenţă a seriei*

$$1 + \frac{z}{1^3} + \frac{z^2}{2^3} + \ldots + \frac{z^n}{n^3} + \ldots \tag{1}$$

şi să se studieze apoi seria pe cercul de convergenţă.

Soluţie.

Raza de convergenţă a seriei este dată de formula

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

adică

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}}} = 1.$$

Deci seria este absolut convergentă în domeniul $|z| < 1$.

Pentru a determina comportarea seriei pe cercul de convergență folosim teorema lui Abel. Considerăm deci seria cu termenul general $u_n = a_n R^n$. În cazul nostru avem $u_n = \frac{1}{n^3}$. Deci termenii acestei serii sînt pozitivi și descresc tinzînd către zero.

Rezultă că seria (1) este convergentă pe tot cercul $|z| = 1$, afară, eventual, de punctul $z = 1$.

Pentru $z = 1$ seria (1) devine

$$1 + \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots,$$

care este convergentă.

Deci seria (1) este convergentă în domeniul $|z| \leqslant 1$.

2. *Să se determine raza de convergență a seriei*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} z^n \qquad (1)$$

și să se studieze seria pe cercul de convergență.

Soluție

Raza de convergență a seriei este

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)^2+1}}{\frac{n+1}{n^2+1}}} = 1.$$

Deci seria (1) este absolut convergentă în domeniul $|z| < 1$.

Să considerăm acum seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$$

care în cazul nostru se scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Termenii acestei serii sînt pozitivi și descresc tinzînd către zero. Deci seria (1) este convergentă pe cercul $|z| = 1$, în afară, eventual, de punctul $z = 1$.

Pentru $z = 1$, seria (1) se scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

și este divergentă.

Deci, seria (1) este convergentă în domeniul $|z| \leqslant 1$ în afară de punctul $z = 1$.

3. *Să se determine raza de convergență a seriei*

$$1 + \frac{z^p}{1} + \frac{z^{2p}}{2} + \ldots + \frac{z^{np}}{n} + \ldots \tag{1}$$

și să se studieze seria pe cercul de convergență.

[K. Knopp, [8].]

S o l u ț i e

Făcînd substituția

$$z^p = \zeta, \tag{2}$$

seria (1) devine

$$1 + \frac{\zeta}{1} + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^n}{n} + \ldots \tag{3}$$

Raza de convergență a acestei serii este

$$R = \frac{1}{\left|\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Deci seria (3) este absolut convergentă în domeniul $|\zeta| < 1$.

Termenii seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sînt pozitivi și descresc tinzînd către zero, deci seria (3) este convergentă pe tot cercul $|\zeta| = 1$ în afară, eventual, de punctul $\zeta = 1$. În acest punct seria (3) se scrie

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

fiind divergentă.

Rezultă că seria (3) este convergentă în domeniul $|\zeta| \leqslant 1$, în afară de punctul $\zeta = 1$.

Prin transformarea (2), domeniul $|\zeta| \leqslant 1$ devine domeniul $|z| \leqslant 1$, iar punctul $\zeta = 1$, devin imaginile soluțiilor ecuației

$$z^p = 1,$$

adică punctele

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}, (k = 0,1, \ldots, p-1). \tag{4}$$

Deci, seria (1) este convergentă în domeniul $|z| \leqslant 1$, în afară de punctele (4).

4. *Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcția*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

în următorul domeniu

$1^\circ.\ |z| < 1;$

$2^\circ.\ 1 < |z| < 2;$

$3^\circ.\ |z| > 2.$

Soluție

Funcția $f(z)$ are doi poli simpli în punctele $z = 1$ și $z = 2$. În domeniul $|z| < 1$, funcția $f(z)$ este olomorfă. Avem

$$f(z) = \frac{1}{2(1-z)\left(1 - \frac{z}{2}\right)}.$$

Ținînd seama de seria binomială, rezultă că în cercul $|z| < 1$ avem

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots, \quad \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots \qquad (1)$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{2}(1 + z + z^2 + \ldots)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right).$$

Efectuînd produsul celor două serii, găsim pentru coeficientul lui z^n valoarea

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}.$$

Deci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} z^n.$$

Obținem același rezultat folosind metoda descompunerii în fracții simple. Într-adevăr avem

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} \qquad (2)$$

și folosind formula (1) găsim dezvoltarea de mai înainte.

Funcția $f(z)$ este olomorfă în coroana circulară $1 < |z| < 2$, deci este dezvoltabilă în seria Laurent în acest domeniu.

Formula (2) se mai poate scrie

$$f(z) = \frac{-1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}.$$

În coroana circulară dată avem $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, și deci

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots .$$

De asemenea, în această coroană circulară avem $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, de unde rezultă că a doua formulă (1) este adevărată.

Avem deci

$$f(z) = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \ldots\right)$$

sau

$$f(z) = -\left(\ldots + \frac{1}{z^n} + \ldots \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots\right).$$

Domeniul $|z| > 2$ reprezintă exteriorul cercului cu centrul în origine și cu raza 2. În acest domeniu funcția $f(z)$ este olomorfă.

Formula (1) se scrie

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2}{z}}.$$

În domeniul $|z| > 2$ avem $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$, $\left|\frac{2}{z}\right| > 1$, deci formula (3) este adevărată și avem de asemenea

$$\frac{1}{1 - \dfrac{2}{z}} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots$$

Deci

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots\right) - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right)$$

sau

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}.$$

5. *Să se dezvolte în serie de puteri ale lui z funcția*

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6},$$

în următoarele domenii:

1°. $|z| < 1$;
2°. $1 < |z| < 2$;
3°. $2 < |z| < 3$;
4°. $|z| > 3$.

Soluție

Funcția $f(z)$ are ca poli rădăcinile ecuației

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0,$$

adică punctele $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$.

În cercul $|z| < 1$, funcția $f(z)$ este olomorfă, deci este dezvoltabilă în seria Taylor în acest domeniu.

Avem

$$z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z-1)(z-2)(z-3),$$

adică

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Descompunînd această expresie în fracții simple, obținem

$$f(z) = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2(z-3)} \tag{1}$$

sau

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \tag{1'}$$

Ținînd seama că în domeniul 1° avem $|z| < 1$, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$, și aplicînd seria binomială găsim

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots, \tag{2}$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots \tag{2'}$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots \tag{2''}$$

Înlocuind aceste relații în formula (1') deducem

$$f(z) = -\frac{1}{2}(1 + z + z^2 + \ldots) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots\right) -$$

$$-\frac{1}{6}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\right)$$

sau

$$f(z)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

În coroana circulară $1<|z|<2$ funcţia $f(z)$ este dezvoltabilă în serie Laurent. Formula (1) se mai poate scrie

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \qquad (1'')$$

În domeniul 2° avem $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, $\left|\frac{z}{3}\right|<1$ şi deci sînt adevărate formulele (2') şi (2''). De asemenea în acest domeniu avem $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, deci

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots \qquad (3)$$

Înlocuind relaţiile (2'), (2'') şi (3) în egalitatea (1'')găsim

$$f(z)=\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{1}{6}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots\right),$$

sau

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^{n-1}}\right)z^n\right].$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în coroana circulară $2<|z|<3$ scriem formula (1) sub forma

$$f(z)=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \qquad (1''')$$

Avînd în vedere că în domeniul 3° avem $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, $|z|<3$, rezultă că sînt satisfăcute formulele (3) şi (2''). De asemenea în acest domeniu avem $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, deci

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots \qquad (3')$$

Înlocuind expresiile (2″), (3), (3″) în relația (1‴) obținem

$$f(z)=\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\dots\right)-$$

$$-\frac{1}{6}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^3}+\dots\right)$$

sau

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(1-2^n\right)z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n\right.$$

Vom scrie acum relația (1) sub forma

$$f(z)=\frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} \qquad (1^{IV})$$

În acest domeniu $|z|>3$, care este exteriorul cercului de ecuație $|z|=3$, avem $\frac{1}{z}<1$, $\frac{2}{z}<1$, deci formulele (3) și (3′) sînt adevărate. De asemenea în acest domeniu avem $\left|\frac{3}{z}\right|<1$, deci

$$\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\dots \qquad (3'')$$

Înlocuind relațiile (3), (3′) și (3″) în (1^{IV}) obținem

$$f(z)=\frac{1}{2z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right)-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\dots\right)+$$

$$+\frac{1}{2z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\dots\right),$$

sau

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^n+3^{n-1})\frac{1}{z^n}.$$

6. *Se dă funcția*

$$f(z)=\frac{2z^2+3z-1}{z^3+z^2-z-1}.$$

Să se dezvolte această funcție în jurul originii și în jurul punctelor $z=\pm 1$.

Soluţie

Funcţia $f(z)$ admite punctul $z = 1$ ca pol simplu iar punctul $z = -1$ ca pol dublu.

Putem scrie funcţia $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}. \tag{1}$$

În cercul $|z| < 1$, funcţia $f(z)$ este olomorfă şi avem

$$\frac{1}{z-1} = -(1 + z + z^2 + \ldots),$$

$$\frac{1}{z+1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots,$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^2 + \ldots$$

Deci, în cercul $|z| < 1$, dezvoltarea funcţiei $f(z)$ este

$$f(z) = 1 - 4z + 3z^2 - 6z^3 + 5z^4 - \cdots$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în jurul punctului $z = -1$ să scriem relaţia (1) sub forma

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}}.$$

În cercul $|z + 1| < 2$ avem

$$\frac{1}{1 - \frac{z+1}{2}} = 1 + \frac{z+1}{2} + \frac{(z+1)^2}{4} + \cdots$$

şi deci dezvoltarea funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z = -1$ este

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} - \frac{z+1}{4} - \frac{(z+1)^2}{8} - \cdots$$

Să scriem acum relaţia (1) sub forma

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{z-1}{2}\right)^2}.$$

În cercul $|z-1|<2$ avem

$$\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=1-\frac{z-1}{2}+\frac{(z-1)^2}{4}-\cdots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\cdots$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^2}=1-(z-1)+\frac{3(z-1)^2}{4}-\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{(n+1)(z-1)^n}{2^n}+\cdots$$

Deci, dezvoltarea funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z=1$ este

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2^{n+2}}(z-1)^n.$$

7. *Se dă funcţia*

$$f(z)=\frac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6} \tag{1}$$

şi se cere să se dezvolte în serie în jurul punctelor $z=0,\ z=1,\ z=2,\ z=3$.

Soluţie

Descompunînd în fracţii simple, putem scrie funcţia $f(z)$ sub forma

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-3}.$$

În cercul $|z|<1$ avem

$$\frac{1}{z-1}=-(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots),$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\cdots+\frac{z^n}{2^n}+\cdots\right),$$

$$\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\cdots+\frac{z^n}{3^n}+\cdots\right).$$

Deci, în jurul punctului $z=0$, dezvoltarea în serie a funcţiei $f(z)$ este

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$$

Pentru a dezvolta în serie funcţia $f(z)$ în jurul punctului $z = 1$ scriem relaţia (1) sub forma

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}. \qquad (1')$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul $z = 1$ şi cu raza 1 avem $|z-1| < 1, \left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ şi deci

$$\frac{1}{1-(z-1)} = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \cdots + (z-1)^n + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = 1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} + \cdots + \frac{(z-1)^n}{2^n} + \cdots$$

Cu aceste valori, formula (1′) ne dă

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n.$$

Să scriem acum relaţia (1) sub forma

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} - \frac{1}{1-(z-2)}.$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul $z = 2$ şi cu raza 1, avem $|z-2| < 1$, deci

$$\frac{1}{1+(z-2)} = 1 - (z-2) + (z-2)^2 - \cdots + (-1)^n(z-2)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-(z-2)} = 1 + (z-2) + (z-2)^2 + \cdots + (z-2)^n + \cdots$$

Rezultă că în coroana circulară $0 < |z-2| < 1$, avem

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^{2n+1}.$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în jurul punctului $z = 3$, scriem expresia funcţiei $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{1+(z-3)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-3}{2}}.$$

În interiorul cercului cu centrul în punctul $z = 3$ şi cu raza 1, avem $|z-3| < 1$, $\left|\frac{z-3}{2}\right| < 1$ şi deci

$$\frac{1}{1+(z-3)} = 1-(z-3)+(z-3)^2-\cdots+(-1)^n(z-3)^n+\cdots$$

$$\frac{1}{1+\frac{z-3}{2}} = 1-\frac{z-3}{2}+\frac{(z-3)^2}{4}-\cdots+(-1)^n\frac{(z-3)^n}{2^n}+\cdots$$

Deci, în coroana circulară $0 < |z-3| < 1$, dezvoltarea funcţiei $f(z)$ este

$$f(z) = \frac{1}{z-3}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-3)^n.$$

8. *Să se determine diferitele dezvoltări în serie Mac Laurin şi Laurent, după puterile lui z, ale funcţiei* $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-4)^2}$.

Soluţie

Avem

$$f(z) = \frac{1}{3(4-z^2)^2}+\frac{1}{9(4-z^2)}-\frac{1}{9(1-z^2)}.$$

Dacă $|z| < 1$, dezvoltînd după seria binomială avem

$$\frac{1}{1-z^2} = 1+z^2+z^4+\cdots$$

$$\frac{1}{4-z^2} = \frac{1}{4}+\frac{z^2}{4^2}+\frac{z^4}{4^3}+\cdots+\frac{z^{2n}}{4^{n+1}}+\cdots \qquad (1)$$

Derivînd această ultimă relaţie în raport cu z şi simplificînd cu z obţinem

$$\frac{1}{(4-z^2)^2} = \frac{1}{4^2}\left(1+2\frac{z^2}{4}+3\frac{z^4}{4^2}+4\frac{z^6}{4^3}+\cdots+\frac{n+1}{4^n}z^{2n}+\cdots\right) \qquad (2)$$

Înlocuind aceste valori în expresia lui $f(z)$ găsim

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+\frac{3n+7}{4^{n+2}}\right)\frac{z^{2n}}{9}.$$

Dacă $1 < |z| < 2$, avem

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{-1}{z^2\left(1-\frac{z^2}{2}\right)} = -\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^6}-\cdots \qquad (3)$$

Formulele (1) şi (2) rămîn valabile, ele fiind adevărate în interiorul cercului $|z| < 2$. Deci

$$f(z) = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}} + \sum_{0}^{\infty}\frac{3n+7}{4^{n+2}}\frac{z^{2n}}{9}.$$

Dacă $|z| > 2$, avem

$$\frac{1}{4-z^2} = -\frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{4}{z^2} + \frac{4^2}{z^4} + \dots\right),$$

$$\frac{1}{(4-z^2)^2} = \frac{1}{z^4}\left(1 + 2\frac{4}{z^2} + 3\frac{4^2}{z^4} + \dots\right).$$

Formula (3) rămîne valabilă, deci

$$f(z) = \sum_{n=3}^{\infty}[(3n-7)4^{n-2}+1]\frac{1}{9z^{2n}}.$$

9. *Să se dezvolte în serie întreagă funcţia*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+z-1)}.$$

S o l u ţ i e

Funcţia $\frac{1}{z-1}$ are ca pol simplu punctul $z=1$. În cercul C ($|z|<1$), avem dezvoltarea

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

Polinomul $z^2 + z - 1$ se descompune în

$$z^2 + z - 1 = \left(z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

adică

$$\frac{1}{z^2+z-1} = \frac{1}{\left(z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(z + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

sau

$$\frac{1}{z^2+z-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z\right)}.$$

În cercul $C_1\left(|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, avem dezvoltarea

$$\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 z^2 + \cdots$$

iar în cercul $C_2\left(|z| < \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ avem

$$\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 z^2 + \cdots$$

Deci, în cercul C_1, care este intersecția domeniilor C_1 și C_2, avem

$$\frac{1}{z^2+z-1} = -\left[1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 z^2 + \cdots\right] \cdot$$
$$\cdot\left[1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z^2 + \cdots\right]$$

sau

$$\frac{1}{z^2+z-1} = -(1 + z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots). \qquad (2)$$

Ținînd seama de formulele (1) și (2), rezultă că în cercul C_1, care este intersecția domeniilor C și C_1, avem

$$\frac{1}{(z-1)(z^2+z-1)} = (1+z+z^2+\cdots)(1+2z+2z^2+3z^3+\cdots).$$

Făcînd produsul celor două serii, găsim pentru coeficientul lui z^n valoarea

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1,$$

deci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2} + 1\right] z^n.$$

10. *Să se dezvolte în serie în jurul punctului $z = 1$, funcția*

$$f(z) = \sin\frac{z}{z-1}.$$

[G.L. Lunț, L.E. Elsgolț, [10].]

Soluţie

Avem

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}.$$

Dar, ţinînd seama de formulele de dezvoltare în serie ale funcţiilor trigonometrice, rezultă

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots$$

$$\cos\frac{1}{z-1}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\ldots,$$

deci

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin 1+\frac{\cos 1}{z-1}-\frac{\sin 1}{2!(z-1)^2}-\frac{\cos 1}{3!(z-1)^3}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+(-1)^n\frac{\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\ldots$$

11. *Se consideră funcţia*

$$f(z)=\sqrt{1+z^2}+\sqrt{4+z^2},$$

unde pentru cei doi radicali se consideră ramurile care în origine iau valorile 1 *respectiv* 2.

Să se dezvolte această funcţie în serie de puteri ale lui z *în domeniile*

1°. $|z|<1$;
2°. $1<|z|<2$;
3°. $|z|>2$.

Soluţie.

Funcţia $f_1(z)=\sqrt{1+z^2}$ are punctele critice $z=\pm i$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul şi în exteriorul cercului de ecuaţie $|z|=1$.

De asemenea, funcţia $f_2(z)=\sqrt{4+z^2}$ are punctele critice $z=\pm 2i$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul şi în exteriorul cercului de ecuaţie $|z|=2$.

Rezultă că ramura considerată a funcţiei $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ este uniformă în fiecare din domeniile 1°, 2°, şi 3°.

Funcţia $f(z)$ se poate scrie sub forma

$$f(z) = (1 + z^2)^{\frac{1}{2}} + 2\left(1 + \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şi, ţinînd seama că în domeniul $|z| < 1$ avem $|z^2| < 1, \left|\frac{z^2}{4}\right| < 1$, rezultă că putem aplica formula seriei binomiale, adică

$$(1 + z^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{z} z^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} z^{2n} + \ldots \tag{1}$$

$$\left(1 + \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^4}{4^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^6}{4^3} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{z^{2n}}{4^n} + \ldots \tag{1'}$$

Deci, în domeniul $|z| < 1$, funcţia dată are dezvoltarea

$$f(z) = 3 + \frac{3}{2} z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \left(1 + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) z^{2n}.$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în coroana circulară $1 < |z| < 2$, scriem funcţia sub forma

$$f(z) = z\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} + 2\left(1 + \frac{z^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ţinînd seama că în domeniul considerat avem $\left|\frac{z^2}{4}\right| < 1$, rezultă că formula (1′) este satisfăcută. De asemenea în acest domeniu avem $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$, deci avem

$$\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^4} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{z^{2n}} + \ldots \tag{2}$$

De aici rezultă că în domeniul $1 < |z| < 2$ funcţia $f(z)$ are dezvoltarea

$$f(z) = \frac{1}{2z} + 2 + z + \frac{z^2}{4} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \left(2z^{2n} + \frac{1}{z^{2n-1}} \right).$$

Să scriem acum funcţia $f(z)$ sub forma

$$f(z) = z \left(1 + \frac{1}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} + z \left(1 + \frac{4}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

În domeniul $|z| > 2$, care este exteriorul cercului cu centrul în origine şi cu raza 2, avem $\left| \frac{1}{z^2} \right| < 1$, deci formula (2) este satisfăcută. De asemenea în acest domeniu avem $\left| \frac{4}{z^2} \right| < 1$ şi deci

$$\left(1 + \frac{4}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{z^2} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{z^2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{4^n}{z^{2n}} + \dots$$

Dezvoltarea funcţiei $f(z)$ este deci

$$f(z) = 2z + \frac{5}{2z} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{1 + 4^n}{z^{2n-1}}.$$

12. *Se consideră funcţia*

$$f(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}},$$

unde pentru radical se consideră ramura care în origine ia valoarea 1. *Să se dezvolte această funcţie în serie de puteri ale lui z în domeniile*:

1°. $|z| < 1$;
2°. $|z| > 1$.

S o l u ţ i e.

Funcţia $f(z)$ are punctele critice $z = \pm 1$, deci ramura considerată este uniformă în interiorul şi în exteriorul cercului de ecuaţie $|z| = 1$, deci funcţia $f(z)$ este uniformă în fiecare din domeniile 1° şi 2°.

Ţinînd seama că $|z| < 1$, rezultă că putem scrie funcţia $f(z)$ sub forma

$$f(z) = (1 - z)\,(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Funcţia $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se poate dezvolta cu ajutorul seriei binomiale şi avem

$$(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} z^{2n} + \ldots$$

Deci, în domeniul $|z| < 1$, dezvoltarea funcţiei $f(z)$ este

$$f(z) = 1 - z + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} z^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^5 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} z^{2n} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} z^{2n+1} + \ldots$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în domeniul $|z| > 1$, scriem funcţia sub forma

$$f(z) = i\left(1 - \frac{1}{z}\right)\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Avînd în vedere că $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$, rezultă că avem

$$\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{z^6} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{z^{2n}} + \ldots$$

şi deci în domeniul $|z| > 1$ dezvoltarea funcţiei $f(z)$ este

$$f(z) = i\left[1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{z^5} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{z^{2n}} \mid \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{1}{z^{2n+1}} + \ldots\right].$$

13. *Să se dezvolte în serie Laurent funcția*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 (1 - z) \sin z},$$

în coroana circulară $0 < |z| < 1$.

Soluție

Pentru $|z| < 1$, avem

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots \tag{1}$$

Funcția $\sin z$ este olomorfă pentru orice z finit și avem

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

Funcția $\frac{1}{\sin z}$ are poluri simple $z = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, deci în coroana circulară $0 < |z| < 1$, este olomorfă.

Avem

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots}.$$

Funcția

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots}$$

este olomorfă în interiorul cercului $|z| = 1$, deci se poate dezvolta în serie Taylor și putem scrie

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Identificînd coeficienții găsim

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_3 = 0,\ a_4 = \frac{7}{360}, \cdots$$

deci

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \cdots\right). \tag{2}$$

Ţinînd seama de formulele (1) şi (2) rezultă

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 + z + z^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \cdots\right),$$

de unde, avînd în vedere că ambele serii sînt olomorfe în coroana circulară dată,

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{7}{6} + \frac{787}{360}z + \cdots$$

14. *Să se dezvolte funcţia*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$$

în jurul originii şi a punctului $z = \pi$.

Soluţie.

Funcţia $f(z)$ are originea ca pol triplu, iar punctele $z = k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ca poli simpli.

Ţinînd seama de expresia funcţiei $\sin z$, rezultă

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!}}. \tag{1}$$

În domeniul $|z| < \pi$, funcţia

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots}$$

este olomorfă, deci putem scrie

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots} = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots \tag{2}$$

Identificînd coeficienţii obţinem

$$a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{7}{360}, \ldots$$

Cu aceste valori formula (1) devine

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \cdots$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în jurul punctului $z = \pi$, facem substituţia $z = t + \pi$. Funcţia $f(z)$ devine

$$F(t) = \frac{-1}{(t+\pi)^2 \sin t},$$

sau

$$F(t) = -\frac{1}{\pi^2 t} \cdot \left(1 + \frac{t}{\pi}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots}.$$

În interiorul cercului $|t| < \pi$, avem $\left|\frac{t}{\pi}\right| < 1$ şi deci

$$\left(1 + \frac{t}{\pi}\right)^{-2} = 1 - 2\frac{t}{\pi} + 3\frac{t^2}{\pi^2} - 4\frac{t^3}{\pi^3} + \cdots$$

Avînd în vedere această relaţie şi relaţia (2) rezultă că în domeniul $|t| < \pi$ avem

$$F(t) = -\frac{1}{\pi^2 t}\left(1 - \frac{2}{\pi}t + \frac{3}{\pi^2}t^2 - \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{7}{360}t^4 + \cdots\right)$$

sau

$$F(t) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{t} + \frac{2}{\pi^3} - \frac{18+\pi^2}{6\pi^4}t + \frac{12+\pi^2}{3\pi^5}t^2 - \cdots$$

Revenind la variabila z, rezultă că în interiorul cercului $|z - \pi| < \pi$, dezvoltarea în serie a funcţiei $f(z)$ este

$$f(z) = -\frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{z-\pi} + \frac{2}{\pi^3} - \frac{18+\pi^2}{6\pi^4}\left(z-\pi\right) + \frac{12+\pi^2}{3\pi^5}\left(z-\pi\right)^2 - \cdots$$

15. *Se consideră funcţia*

$$f(z) = \frac{\ln\frac{1-z}{1+z}}{1+z^2},$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea care se anulează în origine şi se cere să se dezvolte această funcţie în serie de puteri ale lui z în domeniile:

1°. $|z| < 1$;

2°. $|z| > 1$.

Soluţie

Funcţia $f_1(z) = \ln \frac{1-z}{1+z}$ are două puncte critice şi anume punctele $z = \pm 1$. Determinarea considerată pentru această funcţie este uniformă în fiecare din cele două domenii considerate în problemă.

Funcţia $f(z)$ are doi poli simpli în punctele $z = \pm i$.

În interiorul cercului $|z| < 1$, avem

$$\ln(1-z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots$$

$$\ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \ldots$$

De asemenea în acest domeniu avem $|z^2| < 1$, deci

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots$$

Rezultă că în domeniul $|z| < 1$, avem

$$f(z) = \left(z^2 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \ldots + \frac{z^{2n}}{n} + \ldots\right)\left[1 - z^2 + z^4 - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots\right]$$

sau efectuînd produsul celor două serii

$$f(z) = z^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) z^4 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) z^6 - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right] z^{2n} + \ldots$$

Pentru a dezvolta funcţia $f(z)$ în domeniul $|z| < 1$, vom face substituţia $z = \frac{1}{u}$. Prin această substituţie domeniul dat se transformă în domeniul $|u| < 1$, iar funcţia devine

$$F(u) = \frac{u^2}{1+u^2} \ln \frac{u-1}{u+1}.$$

Ţinînd seama că pentru logaritm am considerat determinarea care se anulează în origine, rezultă că

$$\ln \frac{u-1}{u+1} = \pi i + \ln \frac{1-u}{1+u},$$

adică

$$\frac{u-1}{u+1}=\pi i+u^2+\frac{u^4}{2}+\frac{u^6}{3}+\cdots+\frac{u^{2n}}{n}+\cdots$$

De asemenea, în domeniul $|u|<1$, avem

$$\frac{u^2}{1+u^2}=u^2-u^4+u^6-\cdots+(-1)^{n+1}u^{2n}+\cdots$$

Rezultă că

$$F(u)=\left[u^2-u^4+\cdots+(-1)^{n+1}u^{2n}+\cdots\right]\left(\pi i+u^2+\frac{u^4}{2}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{u^{2n}}{n}+\cdots\right)$$

sau, efectuînd produsul celor două serii

$$F(u)=\pi i\,u^2-\left(\pi i-1\right)u^4+\left(\pi i-1+\frac{1}{2}\right)u^6-\left(\pi i-1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)u^8+\cdots+(-1)^{n-1}\left[\pi i-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1}\right]u^{2n}+\cdots$$

Revenind la variabila z deducem dezvoltarea funcției $f(z)$ în domeniul $|z|>1$

$$f(z)=\pi i\frac{1}{z^2}-(\pi i-1)\frac{1}{z^4}+\left(\pi i-1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^6}-(\pi i-1+$$
$$\left.+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{z^8}+\cdots+(-1)^{n-1}\left[\pi i-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-1}\right]\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

16. *Fie $f(z)$ o funcție meromorfă într-o vecinătate V a originii și care admite originea ca pol simplu. Dacă t este un număr complex, să se arate că în vecinătatea V avem*

$$\frac{f'(z)}{f(z)-t}=-\frac{1}{z}+u_1(t)+u_2(t)z+\cdots+u_n(t)z^{n-1}+\cdots,$$

unde $u_n(t)$ este un polinom de gradul n în variabila t.

[H. Cartan, [3]]

S o l u ţ i e

Ţinînd seama de definiţia funcţiei $f(z)$ rezultă că putem scrie

$$f(z) = \frac{g(z)}{z},$$

unde $g(z)$ este o funcţie olomorfă în V şi $g(0) \neq 0$.

Dezvoltînd funcţia $g(z)$ în serie Taylor avem

$$g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad (a_0 \neq 0). \tag{2}$$

Avînd în vedere (1) rezultă

$$\frac{f'(z)}{f'(z) - t} = \frac{zg'(z) - g(z)}{z[g(z) - tz]},$$

sau, ţinînd seama de (2)

$$\frac{f'(z)}{f(z) - t} = \frac{-a_0 + a_2 z^2 + 2a_3 z^3 + \dots}{z[a_0 + (a_1 - t) z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots]}. \tag{3}$$

Funcţia

$$\frac{1}{a_0 + (a_1 - t) z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots},$$

este olomorfă în vecinătatea originii, deci putem scrie

$$\frac{1}{a_0 + (a_1 - t) z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \tag{4}$$

Identificînd obţinem

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_1 = \frac{t - a_1}{a_0}, \quad b_2 = \frac{(t - a_1)^2}{a_0^3} - \frac{a_2}{a_0^2},$$

$$b_3 = \frac{(t - a_1)^3}{a_0^4} - \frac{2a_2(t - a_1)}{a_0^3} - \frac{a_3}{a_0^2}, \dots \tag{5}$$

Înlocuind în (3) relaţia (4) găsim

$$\frac{f'(z)}{f(z) - t} = \frac{1}{z}(-a_0 + a_2 z^2 + 2a_3 z^3 + \cdots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots),$$

de unde, ţinînd seama de (5), rezultă

$$\frac{f'(z)}{f(z) - t} = -\frac{1}{z} + u_1(t) + u_2(t) z + u_3(t) z^2 + \cdots$$

III. Integrale

Fie $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ o funcţie de variabila complexă z şi C o curbă rectificabilă. Integrala funcţiei $f(z)$ de-a lungul curbei C este dată de relaţia

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy + i\int_C Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy.$$

Avem următoarea limitare a modulului integralei unei funcţii complexe

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| \leqslant M \cdot L,$$

unde M este maximul funcţiei $f(z)$ pe curba C, iar L este lungimea curbei C.

Teorema fundamentală a lui Cauchy. Integrala unei funcţii olomorfe într-un domeniu D pe o curbă simplă închisă rectificabilă conţinută în D este nulă.

Formula integrală a lui Cauchy. Dacă $f(z)$ este o funcţie olomorfă într-un domeniu D, C o curbă simplă închisă rectificabilă conţinută în D şi a un punct din interiorul domeniului mărginit de C, atunci

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Derivatele unei funcţii olomorfe sînt şi ele funcţii olomorfe şi avem

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Fie o funcţie $f(z)$ şi a punctul în jurul căruia avem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \ldots$$

Coeficientul a_{-1} se numeşte reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la punctul singular a.

Dacă în domeniul $|z| > R$ avem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \ldots + a_{-m} z^{m} + \ldots + a_{-1} z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots$$

coeficientul $-a_1$ este reziduul funcției $f(z)$ relativ la punctul de la infinit.

Teorema reziduurilor. Fie D un domeniu mărginit de o curbă simplă închisă rectificabilă C, domeniul în care funcția $f(z)$ este analitică și are un număr finit de puncte singulare $\alpha_1, \ldots \alpha_p$, avînd respectiv reziduurile $R_1, \ldots, R_p$. Atunci

$$\int_C f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} R_k .$$

În legătură cu reziduurile unei funcții relativ la punctele ei singulare avem proprietatea: suma reziduurilor unei funcții $f(z)$ relative la toate punctele sale singulare este zero.

Cînd punctul a este un pol de ordinul m al funcției $f(z)$ reziduul funcției relativ la acest pol este dat de formula

$$R = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-a)^m f(z)].$$

Pentru calculul reziduului funcției $f(z)$ relativ la punctul de la infinit avem formula

$$\operatorname*{Rez}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Rez}_{z=0} \left[\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} \right].$$

Pentru calcularea anumitor integrale reale cu ajutorul teoriei reziduurilor folosim următoarele leme:

Lema 1. Fie AB un arc de pe cercul $|z| = R$, astfel încît

$$\alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta.$$

Dacă

$$\lim_{z \to \infty} z\, f(z) = k, \qquad (k = \text{const}),$$

atunci

$$\lim_{R \to \infty} \int_{AB} f(z)\, \mathrm{d}z = i\,(\beta - \alpha)\, k.$$

Lema 2. Fie AB un arc de pe cercul $|z - a| = R$, astfel încît

$$\alpha \leqslant \arg\ (z - a) \leqslant \beta.$$

Dacă

$$\lim_{z \to a} (z - a)\, f(z) = k, \qquad (k = \text{const}),$$

atunci

$$\lim_{R \to 0} \int_{AB} f(z)\, dz = i(\beta - \alpha)\, k.$$

Lema lui Jordan. Fie $f(z) = e^{imz} F(z)$ unde $m > 0$ și

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = 0 \qquad (\operatorname{Im} z \geqslant 0).$$

Dacă funcția $f(z)$ este analitică în semiplanul superior, avînd polii a_k, $(k = 1, \ldots, n)$ cu reziduurile R_k, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R_k.$$

1. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2} dz,$$

unde curba C are ecuația

1°. $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$,

2°. $|z| = 2$.

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

este o funcție meromorfă, avînd originea ca pol simplu și punctele $z = \pm i$ ca poli dubli.

Notînd cu R_0, R_i, R_{-i} reziduurile funcției $f(z)$ relativ la polii $z = 0$, $z = i$, $z = -i$, avem

$$R_0 = \lim_{z \to 0} z\, f(z) = 1,$$

$$R_i = \lim_{z \to i} [(z-i)^2 f(z)]' = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}(iz^2 - 4z - i)}{z^2(z+i)^2} = -\frac{3}{4e},$$

$$R_{-i} = \lim_{z \to -i} [(z+i)^2 f(z)]' = \lim_{z \to -i} \frac{e^{iz}(iz^2 - 2z + i)}{z^2(z-i)^3} = -\frac{1}{4e}.$$

În cazul 1° curba C este o elipsă raportată la axele de coordonate, avînd semiaxele 1 și $\frac{1}{2}$. Deci în acest caz în interiorul curbei C funcția $f(z)$ are polul $z = 0$, adică

$$J = 2\pi i R_0 = 2\pi i.$$

În cazul 2°, curba C este un cerc cu centrul în origine și cu raza 2, deci în interiorul ei funcția $f(z)$ are polii $z = 0$, $z = \pm i$. Rezultă că în acest caz avem

$$J = 2\pi i\,(R_0 + R_i + R_{-i}) = \frac{2\pi i\,(e-1)}{e}.$$

2. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{z^3}{z^4 - 1}\,dz,$$

unde curba C are ecuația:

1°. $(x^2 + y^2)^4 - 16(x^2 - y^2)^2 = 0$ (fig. 25);

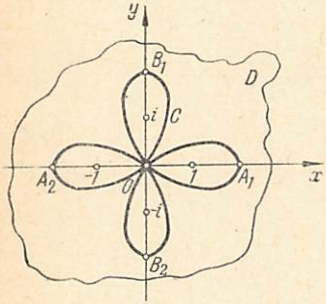

Fig. 25

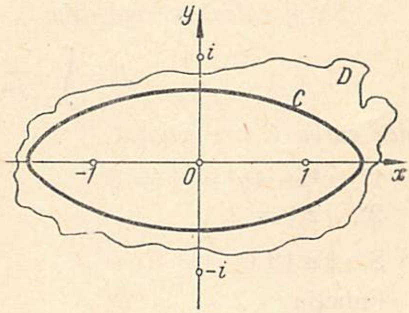

Fig. 26

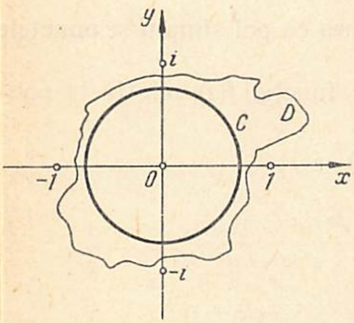

Fig. 27

2°. $x^2 + 16y^2 - 4 = 0$ (fig. 26);

3°. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (fig. 27).

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1}$$

este o funcție uniformă avînd ca poli simpli situați la distanță finită rădăcinile ecuației

$$z^4 - 1 = 0,$$

adică punctele $z = \pm 1$, $z = \pm i$.

În cazul 1°, ecuația curbei C se descompune în ecuațiile

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\,(x^2 - y^2) = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 - 4\,(y^2 - x^2) = 0.$$

Prima ecuație reprezintă o lemniscată avînd originea ca punct dublu și care intersectează axa Ox în punctele $A_1(2, 0)$, $A_2(-2, 0)$.

A doua ecuaţie reprezintă o lemniscată avînd originea ca punct dublu şi care intersectează axa Oy în punctele B_1 (0, 2), B_2 (0, — 2).

Într-un domeniu care conţine curba C în interior, funcţia $f(z)$ este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm 1$, $z = \pm i$, adică toţi polii situaţi la distanţă finită.

Rezultă că

$$J = -2\pi i R_\infty,$$

unde R_∞ este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la punctul de la infinit.

Pentru a calcula reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la punctul de la infinit, dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie de puteri ale lui z în domeniul $|z| > 1$.

Avem

$$f(z) = \frac{1}{z\left(1 - \frac{1}{z^4}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z^4}\right)^{-1}.$$

În domeniul $|z| > 1$, avem $\frac{1}{z^4} < 1$, deci

$$\left(1 - \frac{1}{z^4}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} + \cdots$$

Rezultă că

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^9} + \cdots,$$

adică

$$R_\infty = -1.$$

Valoarea integralei este deci

$$J = 2\pi i.$$

În cazul 2°, curba C este o elipsă raportată la axe, avînd semiaxele 2 şi $\frac{1}{2}$.

Există deci un domeniu care conţine curba C în interior şi în care funcţia $f(z)$ este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm 1$.

Avem

$$J = 2\pi i\ (R_1 + R_{-1}),$$

unde R_1 şi R_{-1} sînt reziduurile funcţiei $f(z)$ relative la punctele $z = 1$, respectiv $z = -1$. Valorile acestor reziduuri sînt

$$R_1 = \lim_{z \to 1} (z - 1)\, f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z + 1)} = \frac{1}{4},$$

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1} (z + 1)\, f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{z^3}{(z^2 + 1)(z - 1)} = \frac{1}{4}.$$

Deci, în cazul 2° avem

$$J = \pi i.$$

În cazul 3°, curba C este un cerc cu centrul în O și cu raza $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Există deci un domeniu care conține curba C în interior și în care funcția $f(z)$ este olomorfă.

Rezultă că în cazul 3° avem

$$J = 0.$$

3. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{dz}{(z - \alpha)^n (z - \beta)^m},$$

unde m și n sînt numere naturale, α și β sînt numere complexe ai căror modul este diferit de 1, *iar C este cercul de ecuație* $|z| = 1$.

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^n (z - \beta)^m}$$

este uniformă avînd punctul $z = \alpha$ ca pol de ordinul n iar $z = \beta$ ca pol de ordinul m.

Pentru a calcula reziduurile funcției $f(z)$ relative la punctele $z = \alpha$ și $z = \beta$ să dezvoltăm funcția $f(z)$ în serie în jurul acestor puncte.

Punînd $z = t + \alpha$, funcția $f(z)$ devine

$$f(t + \alpha) = \frac{1}{t^n (t + \alpha - \beta)^m} = \frac{1}{t^n (\alpha - \beta)^m} \left(1 + \frac{t}{\alpha - \beta}\right)^{-m} =$$

$$= \frac{1}{t^n (\alpha - \beta)^m} \left[1 - \frac{m}{1!} \cdot \frac{t}{\alpha - \beta} + \frac{m(m+1)}{2!} \cdot \frac{t^2}{(\alpha - \beta)^2} - \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{n-1} \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{t^{n-1}}{(\alpha - \beta)^{n-1}} + \dots\right].$$

Deci, dacă notăm cu R_α reziduul funcției $f(z)$ relativ la punctul α, avem

$$R_\alpha = \frac{m(m+1)\dots(m+n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(\alpha - \beta)^{m+n-1}}.$$

Analog, dacă notăm cu R_β reziduul funcției $f(z)$ relativ la punctul β, obținem

$$R_\beta = \frac{n(n+1)\dots(n+m-2)}{(m-1)!} \cdot \frac{(-1)^{m-1}}{(\beta - \alpha)^{m+n-1}}.$$

Dacă $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$, funcţia $f(z)$ este olomorfă în interiorul curbei C şi pe contur, deci

$$J = 0.$$

Dacă $|\alpha| < 1$, $|\beta| > 1$, funcţia $f(z)$ are în interiorul curbei C polul α, deci

$$J = 2\pi i R_\alpha.$$

Dacă $|\alpha| > 1$, $|\beta| < 1$, funcţia $f(z)$ are în interiorul curbei C polul β, deci

$$J = 2\pi i R_\beta.$$

Dacă $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, funcţia $f(z)$ are în interiorul curbei C polii α şi β, deci

$$J = 2\pi i (R_\alpha + R_\beta).$$

4. *Să se calculeze integralele*

$$J_1 = \int_C \frac{dz}{z^2 - 2az + 1}, \quad J_2 = \int_C \frac{(z^2 + 1)dz}{(z^2 - 2az + 1)^2},$$

unde $a > 1$, iar, C este cercul de ecuaţie $|z| = 1$.

Soluţie

Polii funcţiei

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2 - 2az + 1}$$

sînt rădăcinile ecuaţiei

$$z^2 - 2az + 1 = 0$$

adică punctele

$$z_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad z_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Punctul z_1 se află în exteriorul curbei C, iar punctul z_2 se află în interiorul ei.

Deci

$$J_1 = 2\pi i R_1,$$

unde R_1 este reziduul funcţiei $f_1(z)$ relativ la punctul z_2.

Avem

$$R_1 = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f_1(z) = -\frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Rezultă că

$$J_i = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\, i.$$

Funcţia

$$f_2(z) = \frac{z^2+1}{(z^2-2az+1)^2}$$

are ca poli dubli punctele z_1 şi z_2.

Deci

$$J_2 = 2\pi i R_2,$$

unde R_2 este reziduul funcţiei $f_2(z)$ relativ la polul z_2.

Avem

$$R_2 = \lim_{z\to z_2} [(z-z_2)^2 f_2(z)]' = \frac{1}{2(a^2-1)^{3/2}}.$$

Rezultă că

$$J_2 = \frac{\pi}{(a^2-1)^{3/2}}\, i.$$

5. *Să se calculeze integralele*

$$J_1 = \int_C \frac{dz}{z^2-2aiz+1}, \quad J_2 = \int_C \frac{(z^2+1)dz}{(z^2-2aiz+1)^2},$$

unde a este o constantă reală pozitivă, iar C este cercul de ecuaţie $|z| = 1$.

Soluţie

Funcţia

$$f_1(z) = \frac{1}{(z^2-2aiz+1)},$$

are ca poli simpli punctele

$$z_1 = i\left(a+\sqrt{a^2+1}\right),\; z_2 = -i\left(\sqrt{a^2+1}-a\right).$$

Avînd în vedere că

$$a+\sqrt{a^2+1} > 1, \quad \sqrt{a^2+1}-a < 1,$$

rezultă că punctul z_1 este exterior curbei C, iar z_2 este interior ei.

Deci

$$J_1 = 2\pi i R_1,$$

unde R_1 este reziduul funcţiei $f_1(z)$ relativ la punctul z_2.

Avem

$$R_1 = \lim_{z \to z_2} (z - z_2)\, f_1(z) = -\frac{1}{2i\sqrt{a^2+1}} \cdot$$

Rezultă că

$$J_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \cdot$$

Funcţia

$$f_2(z) = \frac{z^2+1}{(z^2 - 2aiz + 1)^2}$$

are ca poli dubli punctele z_1 şi z_2.

Deci

$$J_2 = 2\pi i R_2,$$

unde R_2 este reziduul funcţiei $f_2(z)$ relativ la punctul z_2.

Avem

$$R_2 = \lim_{z \to z_2} [(z - z_2)^2 f_2(z)]' = \frac{1}{2i(a^2+1)^{3/2}} \cdot$$

Rezultă că

$$J_2 = \frac{\pi}{(a^2+1)^{3/2}} \cdot$$

6. *Fie C o curbă simplă închisă care mărgineşte un domeniu D în interiorul căruia se află punctul $z = 0$, $f(z)$ o funcţie olomorfă în $\bar{D} = D \cup C$ şi $g(z)$ o funcţie olomorfă în $\bar{D}$ care are zerourile simple $a_k \neq 0$, $(k = 1, \ldots, n)$, situate în D.*

Să se calculeze integrala

$$J = \int_C \frac{f(z)\, \mathrm{d}z}{z\, g(z)} .$$

[L. I. Volkovîskii, G. L. Lunţ, I. G. Aramanovici [14].

S o l u ţ i e

Funcţia

$$F(z) = \frac{f(z)}{z\, g(z)}$$

este meromorfă, avînd polii simpli $z_0 = 0$, $z_k = a_k$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Deci

$$J = 2\pi i \sum_{j=0}^{n} R_j ,$$

unde R_j este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul z_j.

Avem

$$R_0 = \lim_{z\to 0} zF(z) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(0)}{g(0)},$$

$$R_k = \lim_{z\to a_k}(z - a_k)\frac{f(z)}{z\,g(z)} = \lim_{z\to a_k}\frac{f(z) + (z - a_k)f'(z)}{g(z) + z g'(z)} = \frac{f(a_k)}{a_k g'(a_k)}.$$

Deci

$$J = 2\pi i\left[\frac{f(0)}{g(0)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{a_k\,g'(a_k)}\right].$$

7. *Un cerc* (Γ) *cu centrul în O și cu raza R intersectează axa Oy în punctele A și B iar partea pozitivă a axei Ox în C. Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{z^3\,dz}{e^{2\pi i z^3} - 1},$$

unde curba C este

1°. *cercul* (Γ);
2°. *conturul format din semicercul ABC și diametrul BA.*
Se consideră că $p < R^3 < p + 1$, *unde p este un număr natural*

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{z^3}{e^{2\pi i z^3} - 1},$$

are ca poli rădăcinile ecuației

$$e^{2\pi i z^3} = 1,$$

care se mai poate scrie

$$e^{2\pi i z^3} = e^{2k\pi i},\ (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

de unde deducem

$$z^3 = k.$$

Să arătăm că punctul $z = 0$ este un punct ordinar al funcției $f(z)$. Avem

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{e^{2\pi i z^3} - 1} = \lim_{z\to 0}\frac{3z^2}{6\pi i z^2 e^{2\pi i z^2}} = \frac{1}{2\pi i},$$

deci punctul $z = 0$ este un punct ordinar al funcției $f(z)$.

Rezultă că polii funcției $f(z)$ sînt rădăcinile ecuațiilor

$$z^3 = n,\ z^3 = -n, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

adică punctele

$$z_{1n} = \sqrt[3]{n},\ z_{2n} = \sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ z_{3n} = \sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$z_{4n} = -\sqrt[3]{n},\ z_{5n} = \sqrt[3]{n}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ z_{6n} = \sqrt[3]{n}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$(n = 1, 2, \ldots)$$

În cazul 1°, în interiorul cercului (Γ) funcția $f(z)$ are polii simpli $z_{1n}, z_{2n}, \ldots, z_{6n}$, $(n = 1, \ldots, p)$. Dacă notăm cu R_{jn} reziduul funcției $f(z)$ corespunzător punctului z_{jn}, integrala are valoarea

$$J = 2\pi i \sum_{n=1}^{p} (R_{1n} + R_{2n} + R_{3n} + R_{4n} + R_{5n} + R_{6n}). \qquad (1)$$

Avem

$$R_{jn} = \lim_{z \to z_{jn}} \frac{(z - z_{jn})z^3}{e^{2\pi i z^3} - 1} = z_{jn}^3 \lim_{z \to z_{jn}} \frac{z - z_{jn}}{e^{2\pi i z^3} - 1} = z_{jn}^3 \lim_{z \to z_{jn}} \frac{1}{6\pi i z^2\, e^{2\pi i z^3}} =$$

$$= \frac{z_{jn}}{6\pi i\, e^{2\pi i\, z_{jn}^3}}.$$

Dar z_{jn} este o rădăcină a ecuației $e^{2\pi i z^3} - 1 = 0$, deci $e^{2\pi i z_{jn}^3} = 1$. Rezultă că

$$R_{jn} = \frac{z_{jn}}{6\pi i}. \qquad (j = 1, \ldots, 6;\ n = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

Înlocuind aceste valori în (1) obținem

$$J = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{p} (z_{1n} + z_{2n} + \ldots + z_{6n}) = 0.$$

În cazul 2°, în interiorul conturului avem polii simpli z_{1n}, z_{5n}, z_{6n} $(n = 1, \ldots, p)$. Deci

$$J = 2\pi i \sum_{n=1}^{p} (R_{1n} + R_{5n} + R_{6n}),$$

sau ținînd seama de (2)

$$J = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{p} (z_{1n} + z_{5n} + z_{6n}),$$

adică

$$J = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{p} \sqrt[3]{n}.$$

8. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\sin z}{z^2 (z^4 + 1)} dz,$$

unde curba C are ecuație $|z| = 2$.

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2 (z^4 + 1)}$$

are ca poli punctele

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i),$$

$$z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \quad z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i).$$

Ținînd seama că

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

rezultă că punctul $z_1 = 0$ este un pol simplu ca și ceilalți poli.

Într-un domeniu care conține curba C în interior, funcția $f(z)$ este meromorfă avînd ca poli punctele $z_1, \ldots, z_5$.

Deci

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} R_k.$$

Avem

$$R_1 = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z^4 + 1} = 1,$$

$$R_2 = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{\sin z_2}{z_2^2 (z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_2 - z_5)} =$$

$$= -\frac{(1 - i) \sin \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\right]}{4\sqrt{2}}.$$

Dar

$$\sin\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]=\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}i+\sin\frac{\sqrt{2}}{2}i\cos\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)+i\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\right]$$

deci

$$R_2=-\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[(1-i)\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}+\right.$$

$$\left.+(1+i)\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Analog găsim

$$R_3=-\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[(1+i)\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}+\right.$$

$$\left.+(1-i)\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$R_4=R_2,\qquad R_5=R_3.$$

Rezultă că

$$J=2\pi i(1+2R_2+2R_3),$$

adică

$$J=2\pi i-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\sin\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right]i.$$

9. *Să se calculeze integrala*

$$J=\int_C\frac{dz}{z^2(z-1)\sin z},$$

C fiind cercul de ecuație $|z|=R$, *unde* $n\pi<R<(n+1)\pi$. (n = număr natural).

Soluție

Funcția

$$f(z)=\frac{1}{z^2(z-1)\sin z}$$

este o funcție meromorfă avînd polii $z=0$, $z=1$, $z=k\pi$, ($k=\pm 1,\ \pm 2,\ldots$)

Ţinînd seama că

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

rezultă că punctul $z = 0$ este un pol triplu al funcţiei $f(z)$, iar punctele $z = 1$ şi $z = k\pi$ sînt poli simpli.

În interiorul curbei C, funcţia $f(z)$ are polii

$$z = 0,\ z = 1,\ z = k\pi,\ (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n).$$

Deci

$$J = 2\pi i\left[R_0 + R_1 + \sum_{k=1}^{n} (R_{k\pi} + R_{-k\pi})\right].$$

Avem

$$R_1 = \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = \frac{1}{\sin 1},$$

$$R_{k\pi} = \lim_{z \to k\pi} \frac{z - k\pi}{z^2(z - 1)\sin z} = \frac{1}{k^2\pi^2 (k\pi - 1)} \lim_{\zeta \to 0} \frac{\zeta}{\sin (k\pi + \zeta)} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2(k\pi - 1)}.$$

De aici deducem că

$$R_{k\pi} + R_{-k\pi} = \frac{2(-1)^k}{k^2\pi^2 (k^2\pi^2 - 1)}.$$

Pentru a calcula reziduul funcţiei $f(z)$ relativ folosim dezvoltarea în serie de puteri ale lui z a funcţiei

$$-f(z) = \frac{1}{z^2(1 - z)\sin z},$$

pe care am dedus-o în problema 12, cap. II.

Avem deci

$$f(z) = -\left(\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{7}{6} + \ldots\right)$$

de unde rezultă că

$$R_0 = -\frac{7}{6}.$$

Avînd în vedere valorile găsite pentru reziduuri deducem că

$$J = 2\pi i\left[\frac{1}{\sin 1} - \frac{7}{6} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2 (k^2\pi^2 - 1)}\right].$$

10. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{zdz}{\sin z(1 - \cos z)},$$

unde curba C are ecuația $|z| = 4$.

Soluție

Avem

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots, \quad 1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \ldots \tag{1}$$

De aici rezultă că funcția

$$f(z) = \frac{z}{\sin z\,(1 - \cos z)}$$

are originea ca pol dublu, punctele $z = (2k + 1)\pi$ ca poli simpli, iar punctele $z = 2k\pi$, $(k \neq 0)$, ca poli tripli.

În interiorul curbei C, funcția $f(z)$ are deci polul dublu $z = 0$ și polii simpli $z = \pm\pi$.

Rezultă că

$$J = 2\pi i(R_0 + R_\pi + R_{-\pi}).$$

Avem

$$R_\pi = \lim_{z\to\pi} \frac{z\,(z - \pi)}{\sin z(1 - \cos z)} = \lim_{z\to\pi} \frac{z}{1 - \cos z} \cdot \lim_{z\to\pi} \frac{z - \pi}{\sin z} = -\frac{\pi}{2}.$$

Analog găsim

$$R_{-\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Pentru a calcula reziduul originii să dezvoltăm funcția $f(z)$ în serie de puteri ale lui z în jurul originii.

Ținînd seama de (1), putem scrie

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{2!} - \dfrac{z^2}{4!} + \dfrac{z^4}{6!} - \ldots}$$

Avînd în vedere că funcțiile

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!}}, \quad f_2(z) = \frac{1}{\dfrac{1}{2!} - \dfrac{z^2}{4!} + \dfrac{z^4}{6!}}.$$

sînt olomorfe într-o vecinătate a originii, rezultă că putem scrie

$$f_1(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad f_2(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Dar funcţiile $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ sînt funcţii pare, deci

$$a_1 = a_3 = \cdots = 0, \quad b_1 = b_3 = \cdots = 0,$$

adică

$$f_1(z) \cdot f_2(z) = \alpha_0 + \alpha_2 z^2 + \alpha_4 z^4 + \ldots$$

Deci într-o vecinătate a originii avem

$$f(z) = \frac{\alpha_0}{z^2} + \alpha_2 + \alpha_4 z^2 + \ldots$$

adică

$$R_0 = 0.$$

Rezultă că

$$J = 0.$$

11. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z \sin z},$$

unde curba (C) *este un cerc cu centrul în origine şi cu raza* $r \neq k\pi$, $(k =$ *întreg*$)$.

Soluţie

Funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z \sin z}$$

este uniformă, avînd ca poli rădăcinile ecuaţiei

$$z \sin z = 0,$$

adică punctele $z = 0$, $z = k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Punctul $z = 0$ este un pol de ordinul al doilea, căci avem

$$z \sin z = z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots\right),$$

adică

$$f(z) = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)}.$$

Punctele $z = k\pi$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sînt poli simpli.

Reziduul originii este

$$R_0 = \lim_{z\to 0}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z\sin z}\right)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - z\cos z}{\sin^2 z} = \lim_{z\to 0}\frac{z\sin z}{2\sin z\cos z} = 0.$$

Reziduul polului $z = k\pi$ este

$$R_{k\pi} = \lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{z\sin z}.$$

Făcînd schimbarea de variabile $z = k\pi + \zeta$ găsim

$$R_{k\pi} = \lim_{\zeta\to 0}\frac{\zeta}{(k\pi+\zeta)\sin(k\pi+\zeta)} = \lim_{\zeta\to 0}\frac{(-1)^k\zeta}{(k\pi+\zeta)\sin\zeta} = \frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

De aici rezultă că

$$R_{j\pi} + R_{-j\pi} = 0, \quad (j = 1, 2,\ldots)$$

Dacă notăm cu r raza cercului (C) și cu n cel mai mare număr natural pentru care $r > n\pi$, rezultă

$$J = 2\pi i\left[R_0 + \left(\sum_{j=1}^{n} R_{j\pi} + R_{-j\pi}\right)\right] = 0.$$

12. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\operatorname{tg} z}{z^2}\,dz,$$

unde curba C este cercul de ecuație $|z| = 2$.

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2}$$

are ca poli rădăcinile ecuației

$$z^2\cos z = 0,$$

adică

$$z = 0,\ z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ (k = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots).$$

Deci în interiorul conturului C funcția $f(z)$ are polii

$$z_1 = 0,\ z_2 = \frac{\pi}{2},\ z_3 = -\frac{\pi}{2}.$$

Avem

$$\lim_{z\to 0} z\, f(z) = 1,$$

deci punctul $z = 0$ este un pol simplu, iar reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul $z = 0$ este

$$R_0 = 1.$$

De asemenea avem

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)f(z) = \lim_{t\to 0} t\,\frac{-\operatorname{cotg} t}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{4}{\pi^2},$$

deci punctul $z = \frac{\pi}{2}$ este un pol simplu iar reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul $z = \frac{\pi}{2}$ este

$$R_{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Analog găsim

$$R_{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi^2},$$

De aici rezultă că

$$J = 2\pi i\left(R_0 + R_{\frac{\pi}{2}} + R_{-\frac{\pi}{2}}\right) = 2\pi i\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right).$$

13. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{3\sin z - \sin 3z},$$

unde C este cercul de ecuație $|z| = 4$.

Soluție

Avînd în vedere că $\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$, integrala dată se scrie

$$J = \frac{1}{4}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sin^3 z}.$$

Funcția

$$f(z) = \frac{1}{\sin^3 z}$$

are punctele

$$z_k = k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ca poli tripli.

În interiorul conturului C funcția $f(z)$ are deci polii tripli

$$z_0 = 0,\ z_1 = \pi,\ z_2 = -\pi.$$

Rezultă că

$$J = 2\pi i\,(R_0 + R_\pi + R_{-\pi}),$$

unde R_0, R_π, $R_{-\pi}$ sînt reziduurile funcției $f(z)$ relative la polii $z = 0$, $z = \pi$, $z = -\pi$.

Pentru a calcula aceste reziduuri trebuie să dezvoltăm funcția $f(z)$ în serie Laurent în jurul punctelor 0, π, $-\pi$.

În problema 12, cap. II am arătat că în jurul originii avem

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \ldots\right),$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{15} + \ldots\right).$$

De aici deducem că

$$R_0 = \frac{1}{3}.$$

Pentru a dezvolta funcția $f(z)$ în serie Laurent în jurul punctului $z = \pi$, facem substituția $z = t + \pi$. Obținem

$$f(t + \pi) = -\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{t^3}\left(1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{15} + \ldots\right),$$

deci

$$R_\pi = -\frac{1}{3}.$$

Analog găsim

$$R_{-\pi} = -\frac{1}{3}.$$

Deci

$$J = -\frac{2\pi i}{3},$$

14. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\,dz,$$

unde curba C are ecuația

1°. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2°. $|z| = \sqrt{2}$.

S o l u ț i e

Funcția

$$f(z) = \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$$

are ca puncte singulare punctul $z = -1$, care este un pol simplu și punctul $z = 0$ care este un punct singular esențial.

În cazul 1° valoarea integralei este

$$J = 2\pi i R_0,$$

unde R_0 este reziduul funcției $f(z)$ relativ la punctul $z = 0$. Pentru a calcula acest reziduu dezvoltăm funcția $f(z)$ în serie de puteri ale lui z în coroana circulară $0 < |z| < 1$. Avem

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots, \quad e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots,$$

deci

$$f(z) = z^3(1 - z + z^2 - \ldots)\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots\right).$$

Coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din această dezvoltare este

$$\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \ldots = e^{-1}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right).$$

Deci

$$R_0 = \frac{1}{e} - \frac{1}{3}.$$

Rezultă că

$$J = \frac{2\pi i (3 - e)}{3e}.$$

În cazul al doilea valoarea integralei este

$$J = 2\pi i(R_0 + R_{-1}), \tag{1}$$

unde R_{-1} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul simplu $z = -1$.

Avem

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = -\frac{1}{e}.$$

Deci

$$J = -\frac{2\pi i}{3}.$$

Putem calcula valoarea integralei în cazul 2° cu ajutorul reziduului punctului de la infinit.

Într-adevăr avem

$$R_0 + R_{-1} + R_\infty = 0,$$

deci formula (1) se scrie

$$J = -2\pi i R_\infty.$$

Pentru a găsi valoarea lui R_∞ să dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie de puteri ale lui z în domeniul $|z| > 1$.

În acest domeniu avem

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right),$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots,$$

deci, în domeniul $|z| > 1$,

$$f(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots\right) =$$

$$= z^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3z} + \frac{3}{8z^2} + \ldots$$

Prin definiţie, reziduul R_∞ este coeficientul cu semn schimbat al termenului $\frac{1}{z}$. Deci

$$R_\infty = \frac{1}{3}.$$

Rezultă că

$$J = -\frac{2\pi i}{3}.$$

15. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 1}\, dz,$$

unde n este un număr natural, iar C este curba de ecuație:

1°. $|z| = \frac{1}{2}$;

2°. $|z| = 2$;

3°. $x^2 + y^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$.

Soluție

Funcția

$$f(z) = \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 1},$$

are originea ca punct singular esențial și punctele $z = \pm 1$ ca poli simpli.

Notînd cu R_0, R_1, R_{-1} reziduurile funcției $f(z)$ relative la punctele $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$, avem

$$R_1 = \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = \frac{e}{2},$$

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1} (z + 1) f(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2e}.$$

Pentru a calcula reziduul funcției $f(z)$ relativ la punctul $z = 0$ trebuie să dezvoltăm funcția în serie Laurent în jurul originii. Avem

$$f(z) = -z^n(1 - z^2)^{-1} e^{\frac{1}{z}} = -z^n(1 + z^2 + z^4 + \ldots) \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots\right).$$

Coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din această dezvoltare este

$$R_0 = -\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+5)!} + \ldots\right].$$

Dar

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots$$

și $$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(n+1)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \ldots\right].$$

De aici rezultă

$$R_0 = -\frac{1}{2}\left[(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots - (-)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!} - (-1)^n \frac{1}{n!}\right) + e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right].$$

În cazul 1°, avem

$$J = 2\pi i R_0.$$

În cazul 2°, avem

$$J = 2\pi i (R_0 + R_1 + R_{-1}).$$

In cazul 3°, avem

$$J = 2\pi i\,(R_0 + R_1)$$

16. *Să se calculeze integrala*

$$J_n = \int_C \sin^n \frac{1}{z}\, dz,$$

unde n este un număr natural, iar conturul C este cercul de ecuație $|z| = r$.

Soluție

Punctul $z = 0$ este un punct singular esențial pentru funcția $f_n(z) = \sin^n \frac{1}{z}$.

Avem

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \ldots \tag{1}$$

Dacă notăm cu $R_0^{(n)}$ reziduul funcției $f_n(z)$ relativ la punctul singular esențial $z = 0$, avem

$$R_0^{(1)} = 1,$$

deci

$$J_1 = 2\pi i.$$

Ridicînd la pătrat relaţia (1) obţinem

$$\sin^2 \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3z^4} + \dots,$$

deci

$$R_0^{(2)} = 0,$$

adică

$$J_2 = 0.$$

Ridicînd la puterea n relaţia (1) obţinem

$$\sin^n \frac{1}{z} = \frac{1}{z^n} + \dots,$$

deci

$$R_0^{(n)} = 0.$$

Rezultă

$$J_n = 0, \qquad (n \geqslant 2).$$

17. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{e^{\frac{\pi}{z-i}}}{z^2+1} \mathrm{d}z,$$

unde curba C este cercul de ecuaţie $|z| = 2$.

Soluţie

Funcţia

$$f(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{z-1}}}{z^2+1}$$

are ca pol simplu punctul $z = -i$, iar punctul $z = i$ ca punct singular esenţial. Aceste puncte sînt situate în interiorul conturului C, deci

$$J = 2\pi i(R_i + R_{-i})$$

unde R_i, R_{-i}, sînt reziduurile funcţiei $f(z)$ relativ la punctele $z = i$, $z = -i$.

Avem

$$R_{-i} = \lim_{z \to i} (z+i) f(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{-2i}}}{-2i} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{-2i} = -\frac{1}{2}.$$

Pentru a determina reziduul R_i trebuie să dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie Laurent în jurul punctului $z = i$. Punînd $z = t + i$, obţinem

$$f(t + i) = \frac{e^{\frac{\pi}{t}}}{t^2 + 2it} = \frac{1}{2it}\left(1 - \frac{ti}{2}\right)^{-1} e^{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{2it}\left[1 + \frac{ti}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(ti)^2}{4} + \ldots\right]\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{\pi^2}{2!\,t^2} + \ldots\right).$$

Coeficientul lui $\frac{1}{t}$ din această dezvoltare este

$$R_i = \frac{1}{2i}\left[1 + \frac{\frac{\pi i}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\,i\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\,i\right)^3}{3!} + \ldots\right] = \frac{1}{2i}\, e^{\frac{\pi i}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că

$$J = 0.$$

18. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) \mathrm{d}z,$$

unde curba C are ecuaţia $|z| = 3$.

Soluţie

Fie γ_1, γ_2, γ_3 cercurile cu centrul în punctele $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$ şi cu razele mai mici decît $\frac{1}{2}$.

Avem

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z,$$

unde am pus

$$f(z) = (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right).$$

Integrala pe cercul γ_1 se scrie

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} (1 + z + z^2)\, e^{\frac{1}{z}}\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)\mathrm{d}z.$$

Dar funcţia

$$f_1(z) = (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)$$

este olomorfă în domeniul $|z| \leqslant 1$ care conţine cercul γ_1, deci

$$\int_{\gamma_1} f_1(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Rezultă că

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i R_1,$$

unde R_1 este reziduul funcţiei $(1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z}}$ relativ la punctul singular esenţial $z_1 = 0$.

Avem

$$(1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z}} = (1 + z + z^2)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots\right),$$

adică

$$R_1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{5}{3}.$$

Deci

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \frac{10\pi i}{3}.$$

Integrala pe cercul γ_2 se scrie

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2}(1 + z + z^3)e^{\frac{1}{z-1}}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2}(1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}}\right)\mathrm{d}z.$$

Funcţia

$$f_2(z) = (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-}}\right)$$

fiind olomorfă în domeniul $|z - 1| \leqslant 1$ care conţine cercul γ_2, rezultă

$$\int_{\gamma_2} f_2(z)\mathrm{d}z = 0,$$

deci

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i R_2,$$

unde R_2 este reziduul funcţiei $(1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z-1}}$ relativ la punctul singular esenţial $z_2 = 1$. Pentru a determina acest reziduu vom face substituţia $z = t + 1$. Obţinem

$$(1 + z + z^2)e^{\frac{1}{z-1}} = (t^2 + 3t + 3)e^{\frac{1}{t}} = (t^2 + 3t + 3)\left(1 + \frac{1}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!\,t^2} + \frac{1}{3!\,t^2} + \ldots\right),$$

de unde deducem

$$R_2 = \frac{14}{3}.$$

Deci

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \frac{28\,\pi i}{3}.$$

Analog obţinem

$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \frac{58\pi i}{3}.$$

Rezultă că

$$\int_C (1 + z + z^2)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right)\mathrm{d}z = 32\pi i.$$

19. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{z^2 - 1}\,\mathrm{d}z,$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă, iar curba C *are ecuaţia* $|z| = \sqrt{2}$.

Soluţie

Funcţia

$$f(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{z^2 - 1}$$

are punctele critice $z = \pm 2$ şi polii simpli $z = \pm 1$.

Ținînd seama că pentru radical s-a considerat determinarea pozitivă, rezultă că într-un domeniu care conține în interior curba C fără a conține punctele $z = \pm 2$, funcția $f(z)$ este meromorfă.

Deci

$$J = 2\pi i(R_1 + R_{-1}),$$

unde R_1, R_{-1} sînt reziduurile funcției $f(z)$ relative la punctul $z = 1$, respectiv $z = -1$.

Avem

$$R_1 = \lim_{z \to 1} (z - 1)f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{z + 1} = i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1} (z + 1)f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{\sqrt{z^2 - 4}}{z - 1} = -i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă că

$$J = 0.$$

20. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{\ln\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}}{z^4 + z^2 + 1}\,dz,$$

știind că pentru logaritm se consideră determinarea principală, conturul C fiind pătratul cu centrul în origine și cu laturile (fig. 28) paralele cu axele de coordonate, laturile lui avînd lungimea $\frac{9}{5}$.

Soluție

Funcția $w = \ln\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ are punctele critice $z = \pm 1$, $z = \pm i$, (vezi problema 26, cap. I). Ramurile acestei funcții sînt funcții uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține punctele critice.

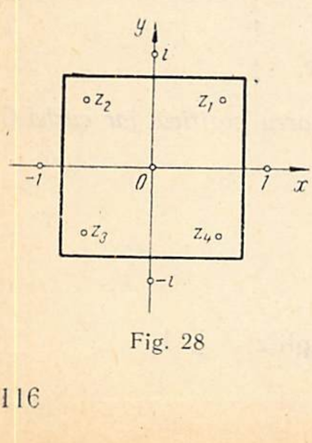

Fig. 28

Funcția

$$f(z) = \frac{\ln\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}}{z^4 + z^2 + 1},$$

are ca poli rădăcinile ecuației

$$z^4 + z^2 + 1 = 0,$$

adică punctele

$$z = \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Deci, funcţia $f(z)$ este meromorfă în domeniul interior conturului C şi pe contur. Această funcţie are toţi polii situaţi în interiotrul conturului C, deci

$$I = 3\pi i(R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Avem

$$R_1 = \left(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{\ln \frac{z^2-1}{z^2+1}}{z^4+z^2+1}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ln (i\sqrt{3})}{-3+i\sqrt{3}}.$$

Analog găsim

$$R_2 = \frac{\ln(-i\sqrt{3})}{3+i\sqrt{3}}, \qquad R_3 = \frac{\ln(i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}}, \qquad R_4 = \frac{\ln(-i\sqrt{3})}{-3-i\sqrt{3}}.$$

Deci

$$I = 0.$$

21. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{\sqrt{1-z^4}}{(z^4+z^2+1)(z-2)}dz,$$

pe următoarele contururi:

1°. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (fig. 29).

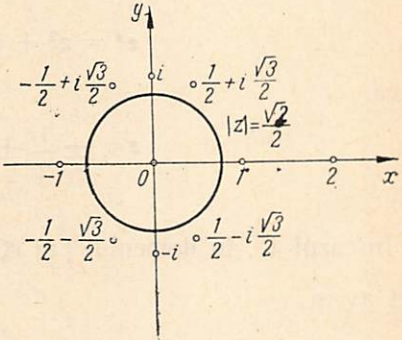

Fig. 29

2°. *Pătratul cu centrul în origine şi laturile paralele cu axele, lungimea laturii fiind egală cu* $\frac{9}{5}$ (fig. 30).

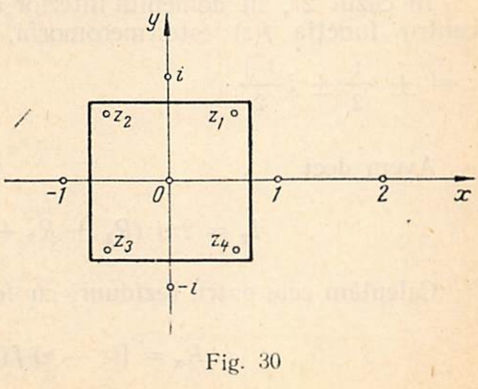

Fig. 30

Pentru radical se consideră ramura care în origine ia valoarea 1.

Soluţie

Funcţia $w = \sqrt{1-z^4}$ are patru puncte critice

$$z_{1,2} = \pm 1, \qquad z_{3,4} = \pm i.$$

Ramurile radicalului sînt funcţii uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţine nici unul din aceste patru puncte sau în planul complex în care am făcut tăieturile care unesc punctele $z = 1$ cu $z = i$ şi $z = -1$ cu $z = -i$, (vezi problema 28 cap. I).

Funcţia

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-z^4}}{(z^4+z^2+1)(z-2)}$$

are ca poli simpli punctul $z = 2$ şi rădăcinile ecuaţiei

$$z^4 = z^2 + 1 = 0.$$

adică

$$z = \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În cazul 1°, în domeniul $|z| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ funcţia $f(z)$ este olomorfă, deci avem

$$I_1 = 0.$$

În cazul 2°, în domeniul interior conturului considerat şi pe centru funcţia $f(z)$ este meromorfă, avînd patru poli simpli $z = \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Avem deci

$$I_2 = 2\pi i\,(R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Calculăm cele patru reziduuri cu formula

$$R_\alpha = [(z-\alpha)\,f(z)]_{z=\alpha}.$$

Avem

$$R_1 = R_{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \left.\frac{\sqrt{1-z^4}}{\left(z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-2)}\right|_{z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3(1-i\sqrt{3})}.$$

Ţinînd seama de ramura considerată pentru radical, avem

$$\sqrt{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

De asemenea avem

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right),$$

deci

$$R_1 = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Analog găsim

$$R_{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$R_{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt[4]{3}}{84}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)(9-i\sqrt{3})$$

$$R_{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt[4]{3}}{84}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)(9+i\sqrt{3}).$$

Cu aceste valori integrala devine

$$I_2 = \frac{\sqrt[4]{3}\,(\sqrt{6}+5\sqrt{2})}{21}\pi.$$

22. *Să se calculeze integrala*

$$I=\int_C \frac{\sqrt{z-1}\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz,$$

pe următoarele contururi:

1°. $|z|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

2°. $36x^2+4y^2-9=0$,

3°. $10x^2+y^2-5=0$.

4°. $x^2+y^2-5y=0$.

Pentru radical considerăm ramura care în origine ia valoarea i, iar pentru logaritm determinarea principală.

Soluţie

Funcţia $w=\sqrt{z^2-1}\ln\frac{z-1}{z+1}$ are punctele critice $z=\pm 1$, (vezi problema 30, cap. I). Ramura considerată este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conţine aceste puncte.

Polii funcţiei

$$f(z)=\frac{\sqrt{z^2-1}\ln\frac{z-1}{z+1}}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

sînt punctele $\pm i$, $\pm 2i$.

Avem

$$R_i=(z-i)f(z)\Big|_{z=i}=\frac{\sqrt{2}}{6}\ln i=\frac{\pi\sqrt{2}}{12}i.$$

Analog găsim

$$R_{-i}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}i,\quad R_{2i}=-\frac{\sqrt{5}}{12}\ln\frac{3+4i}{5},\quad R_{-2i}=\frac{\sqrt{5}}{12}\ln\frac{3-4i}{5}.$$

1°. În domeniul $|z| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ funcţia $f(z)$ (fig. 31) este olomorfă, deci

$$I_1 = 0.$$

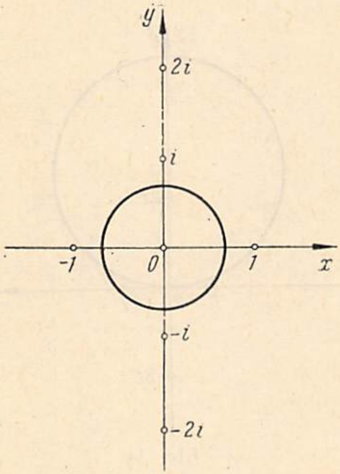

Fig. 31

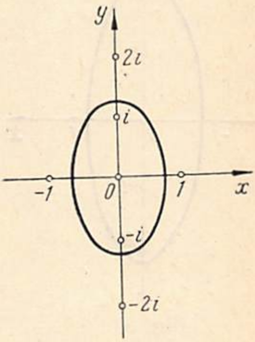

Fig. 32

2°. Curba (C) este în acest caz o elipsă (fig. 32) raportată la axele de coordonate, avînd semiaxele $\frac{1}{2}$ şi $\frac{3}{2}$. Deci în interiorul şi pe curba (C) funcţia $f(z)$ este meromorfă, avînd polii $\pm i$

Deci

$$I_2 = 2\pi i(R_i + R_i) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

3°. Curba (C) (fig. 33) este în acest caz elipsa raportată la axe, avînd semiaxele $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{5}$. Deci în interiorul şi pe curba (C) funcţia $f(z)$ este meromorfă, avînd polii $\pm i$, $\pm 2i$.

Deci

$$I_3 = 2\pi i\,(R_i + R_{-i} + R_{2i} + R_{-2i}) = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}\left(2\pi - \arccos\frac{3}{5}\right) + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{3}.$$

4°. Curba (C) este în acest caz cercul cu centrul în punctul $\Omega\left(0,\frac{5}{2}\right)$ și cu raza $\frac{5}{2}$ (fig. 34). În interiorul și pe cercul (C) funcția $f(z)$ este meromorfă avînd polii i și $2i$. Deci

$$I_4 = 2\pi i(R_i + R_{2i}) = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{5} \text{ arccos } \frac{3}{5} - \pi\sqrt{2}\right).$$

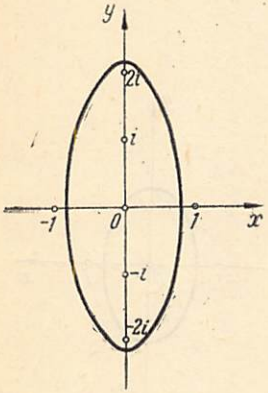

Fig. 33

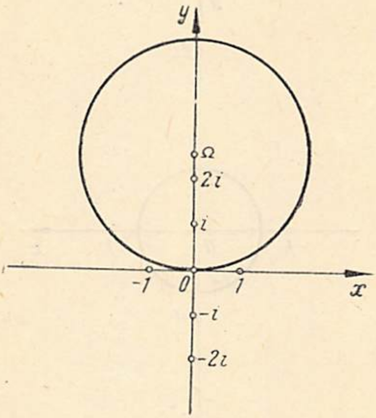

Fig. 34

23. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\sqrt{1-z^2}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz,$$

unde pentru radical se consideră ramura care în origine are valoarea 1, *iar curba C este una dintre curbele de ecuații;*

1°. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2°. $4x^2 + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$, *pentru* $y > 0$ și $x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$, *pentru* $y < 0$;

3°. $|z| = \sqrt{2}$;

4°. $x^2 + y^2 - 2 = 0$, *pentru* $y > 0$ și $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$, *pentru* $y < 0$;

5°. $|z| = 3$.

Soluție

Avînd în vedere determinarea considerată pentru radical, funcția:

$$f(z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{(z^2+1)(z^2+4)},$$

este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul dintre punctele critice $z = \pm 1$. De asemenea funcția este uniformă în planul complex în care am făcut tăietura care unește punctul $z = -1$ cu punctul $z = 1$ de-a lungul axei reale.

Funcția $f(z)$ are ca poli simpli punctele

$$z_{1,2} = \pm i, \qquad z_{3,4} = \pm 2i.$$

Reziduurile funcției $f(z)$ relative la acești poli sînt

$$R_i = \lim_{z \to i} \frac{\sqrt{1 - z^2}}{(z + i)(z^2 + 4)} = -\frac{\sqrt{2}}{6} i, \; R_{-i} = \frac{\sqrt{2}}{6} i,$$

$$R_{2i} = \frac{\sqrt{5}}{12} i, \; R_{-2i} = \frac{\sqrt{5}}{12} i.$$

În cazul 1° există un domeniu D care conține curba C dar nu conține punctele critice $z = \pm 1$ și polii (fig. 35). În acest domeniu funcția $f(z)$ este olomorfă și deci

$$J = 0.$$

În cazul 2° există un domeniu D care conține curba C dar nu conține punctele critice (fig. 36). În domeniul D funcția $f(z)$ are polul simplu $z = i$. Avem deci

$$J = 2\pi i R_i = \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

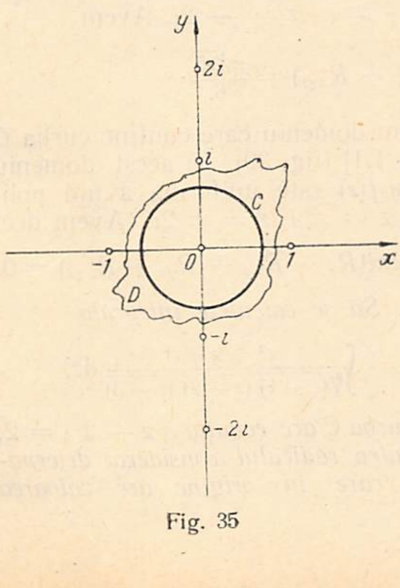

Fig. 35

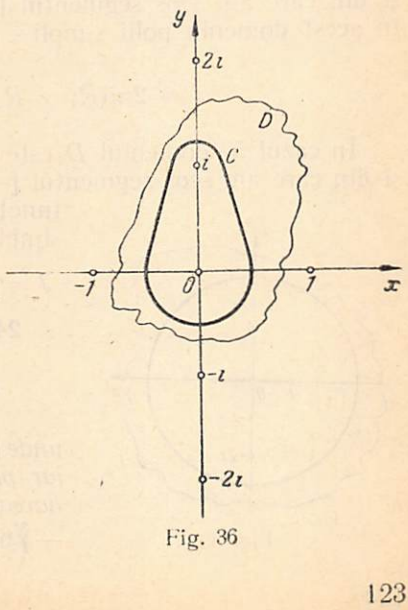

Fig. 36

În cazul 3°, domeniul D este un domeniu din care am scos segmentul $[-1,1]$ (fig. 37). În acest domenin funcția $f(z)$ este uniformă avînd polii simpli $z = \pm i$. Avem

$$J = 2\pi i(R_i + R_{-i}) = 0.$$

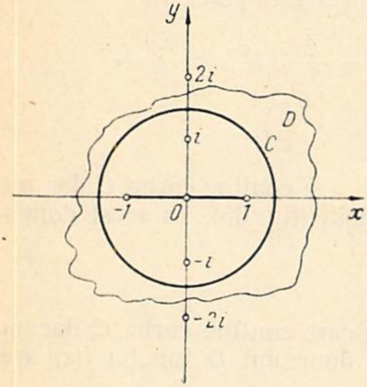

Fig. 37

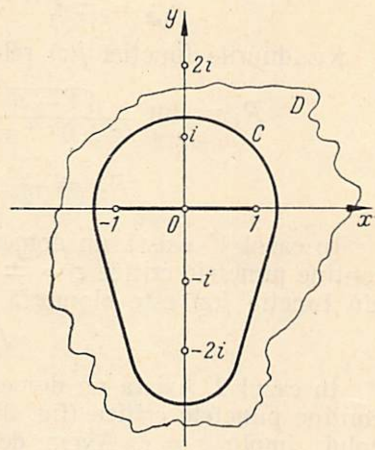

Fig. 38

În cazul 4° domeniul D este un domeniu care conține curba C și din care am scos segmentul $[-1,1]$ (fig. 38). Funcția $f(z)$ are în acest domeniu polii simpli $z = \pm i$, $z = -2i$. Avem

$$J = 2\pi i(R_i + R_{-i} + R_{-2i}) = \frac{\pi\sqrt{5}}{6}.$$

În cazul 5° domeniul D este un domeniu care conține curba C și din care am scos segmentul $[-1,1]$ (fig. 39). În acest domeniu funcția $f(z)$ este uniformă avînd polii simpli $z = \pm i$, $z = \pm 2i$. Avem deci

$$J = 2\pi i(R_i + R_{-i} + R_{2i} + R_{-2i}) = 0.$$

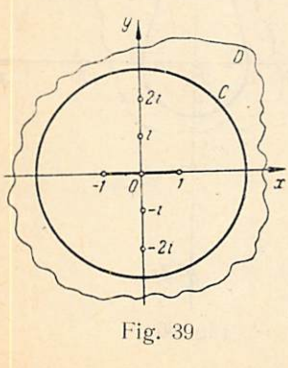

Fig. 39

24. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{z^2 + z + 1}{\sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}}\,dz,$$

unde curba C are ecuația $|z-2| = 2$, iar pentru radicalul considerat determinarea care în origine are valoarea $-\sqrt[3]{6}$.

Soluție

Funcția

$$f(z) = \sqrt[3]{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

are ca puncte critice punctele $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$. Determinarea considerată este uniformă în tot planul complex în care am făcut tăietura ce unește punctele $z = 1$ și $z = 3$ de-a lungul axei reale.

Făcînd substituția $z = u + 2$, integrala dată devine

$$J = \int_{C_1} \frac{u^2 + 5u + 7}{\sqrt[3]{u(u^2-1)}}\, du$$

sau

$$J = \int_{C_1} \frac{u^2 + 5u + 7}{u\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}}\, du,$$

unde curba C_1 are ecuația $|u| = 2$.

Ramura considerată a funcției

$$F(u) = \frac{u^2 + 5u + 7}{u\sqrt[3]{1 - \frac{1}{u^2}}}$$

este uniformă în planul complex în care am făcut tăietura ce unește punctele $u = -1$ și $u = 1$.

În domeniul $|u| > 1$ avem

$$\left(1 - \frac{1}{u^3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{3u^2} + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\cdot\frac{1}{u^4} + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{13\cdot 6\cdot 9}\cdot\frac{1}{u^6} + \ldots,$$

deci în domeniul $|u| > 1$

$$F(u) = u\left(1 + \frac{5}{u} + \frac{7}{u^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3u^2} + \frac{2}{9u^4} + \frac{14}{81u^6} + \ldots\right) = u + 5 +$$

$$+ \frac{22}{3u} + \frac{5}{3u^2} + \ldots$$

Rezultă că

$$J = \int_{C_1}\left(u + 5 + \frac{22}{3u} + \frac{5}{3u^2} + \ldots\right) du$$

şi ţinînd seama că pe cercul C avem

$$\int_{C_1} u^n \, du = 0, \quad (u = \text{întreg} \neq -1)$$

$$\int_{C_1} \frac{du}{u} = 2\pi i$$

deducem

$$I = \frac{44\pi}{3} i.$$

25. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\sqrt[5]{(z-1)^3 (z+1)^2}}{z^2 (z-2)} \, dz,$$

unde pentru radical se consideră determinarea care în origine ia valoarea -1, *iar curba* C *are ecuaţia*

1°. $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2°. $|z| = \sqrt{2}$

3°. $|z| = 3$.

S o l u ţ i e

Funcţia

$$f(z) = \sqrt[5]{(z-1)^3 (z+1)^2},$$

are ca puncte critice punctele $z = -1$ şi $z = 1$. Ramura considerată a acestei funcţii este unifomă în orice domeniu care nu conţine nici unul din punctele $z = \pm 1$. De asemenea ea este uniformă în planul complex în care am făcut o tăietură care uneşte punctul $z = -1$ cu $z = 1$.

În cazul 1°, funcţia

$$F(z) = \frac{\sqrt[5]{(z-1)^3 (z+1)^2}}{z^2(z-2)}$$

este meromorfă în interiorul curbei C şi pe contur, avînd ca pol dublu punctul $z = 0$.

În domeniul $|z| < 1$, avem

$$(1-z)^{\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} z + \ldots,$$

$$(1+z)^{\frac{2}{5}} = 1 + \frac{2}{5} z + \ldots,$$

$$\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-1} = 1 + \frac{z}{2} + \ldots,$$

deci

$$F(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{z} + \ldots$$

Rezultă că reziduul funcției $F(z)$ relativ la punctul $z = 0$ este

$$R_0 = \frac{3}{5}.$$

Deci, în cazul întîi, valoarea integralei este

$$I = \frac{6\pi}{5} i.$$

În cazul 2°, funcția $F(z)$ este olomorfă în domeniul hașurat din fig. 40. Notînd cu Γ_1 conturul acestui domeniu avem

$$\int_{\Gamma_1} F(z) \mathrm{d}z = 0.$$

de unde rezultă că

$$\int_C F(z)\, \mathrm{d}z - \int_\gamma F(z) \mathrm{d}z = 0.$$

Dar

$$\int_\gamma F(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i R_0 = \frac{6\pi}{5} i. \tag{1}$$

deci

$$\int_C \frac{\sqrt[5]{(z-1)^3 (z+1)^2}}{z^2(z-2)} \mathrm{d}z = \frac{6\pi}{5} i.$$

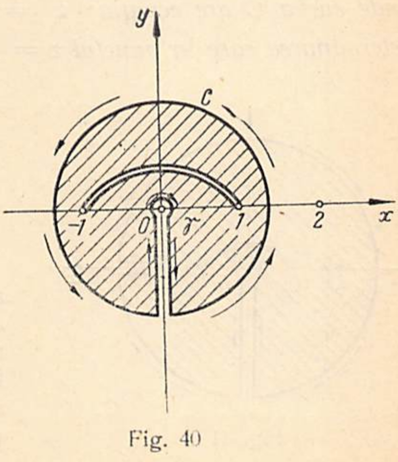

Fig. 40

În cazul 3°, funcţia $F(z)$ este olomorfă în domeniul haşurat din fig. 2. Notînd cu Γ_2 conturul acestui domeniu avem

$$\int_{\Gamma_2} F(z)\mathrm{d}z = 0,$$

de unde deducem

$$\int_C F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} F(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} F(z)\,\mathrm{d}z.$$

Prima integrală din membrul al doilea al acestei egalităţi este dată de relaţia (1). Dacă notăm cu R_2 reziduul funcţiei $F(z)$ relativ la polul simplu $z = 2$, avem

$$R_2 = \lim_{z\to 2}(z-2)F(z) = \lim_{z\to 2}\frac{\sqrt[5]{(z-1)^3(z+1)^2}}{z^2} = \frac{\sqrt[5]{9}}{4}$$

şi deci

$$\int_{\gamma_2} F(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i R_2 = \frac{\pi\sqrt[5]{9}}{2}\,i.$$

Rezultă că în acest caz valoarea integralei este

$$I = \pi i\left(\frac{6}{5} + \frac{\sqrt[5]{9}}{2}\right).$$

26. *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$$

unde curba C are ecuaţia $|z| = 3$, *iar pentru radical considerăm determinarea care în punctul* $z = \frac{1}{2}$ *are valoarea* $\frac{1}{2}$.

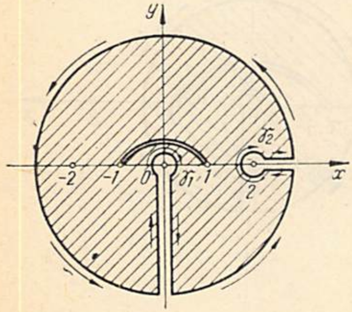

Fig. 41

Soluţie

Funcţia

$$f(z) = \sqrt[5]{z^2(1-z)^3}$$

are ca puncte critice punctele $z = 0$ şi $z = 1$. Ramura considerată a acestei funcţii este uniformă în planul complex în care am făcut tăietura ce uneşte punctul $z = 0$ cu $z = 1$ (fig. 41).

Să dezvoltăm funcţia

$$F(z) = \frac{1}{(z-2)\sqrt[5]{z^2(1-z)^3}}$$

în serie de puteri ale lui z în domeniul $|z| > 0$.

Pentru aceasta scriem funcţia sub forma

$$F(z) = -\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{3}{5}}$$

În domeniul $|z| > 2$, avem

$$\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1} = 1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\ldots$$

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{3}{5}} = 1+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{z}+\frac{12}{25}\cdot\frac{1}{z^2}+\ldots,$$

deci

$$F(z) = -\frac{1}{z^2}-\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{z^3}-\frac{142}{25}\cdot\frac{1}{z^4}-\ldots$$

Rezultă că integrala dată devine

$$J = \int_C\left(-\frac{1}{z^2}-\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{z^3}-\frac{142}{25}\cdot\frac{1}{z^4}-\ldots\right)dz.$$

Pe cercul C de ecuaţie $|z| = 3$, avem

$$\int_C z^n\,dz = 0 \qquad (n = \text{întreg} \neq -1)$$

deci

$$J = 0.$$

27. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{\ln\frac{z-i}{z+i}}{(z^2-1)(z^2-4)}\,dz,$$

unde pentru logaritm considerăm determinarea care în origine are valoarea πi, iar curba C este una din curbele

1°. $|z| = \frac{1}{2}$;

2°. $x^2 + 3y^2 - 2 = 0$;

3°. $|z| = \sqrt{2}$

4°. $x^2 + y^2 - 2 = 0$ pentru $x > 0$ și $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$, pentru $x < 0$;

5°. $|z| = 3$.

Soluție

Funcția $\ln\frac{z-i}{z+i}$ are ca puncte critice punctele $z = \pm i$. Fiecare determinare a acestei funcții este uniformă în orice domeniu simplu conex care nu conține punctele $z = \pm i$ sau în tot planul complex din care am scos segmentul $[-i, i]$ (vezi problema 25, cap. I).

Funcția

$$f(z) = \frac{\ln\frac{z-i}{z+i}}{(z^2-1)(z^2-4)}$$

are ca poli simpli punctele $z = \pm 1$ și $z = \pm 2$.

În cazul 1° există un domeniu D care conține curba C și în interiorul căruia nu există nici unul din punctele $z = \pm i$, $z = \pm 1$ $z = \pm 2$ (fig. 42).

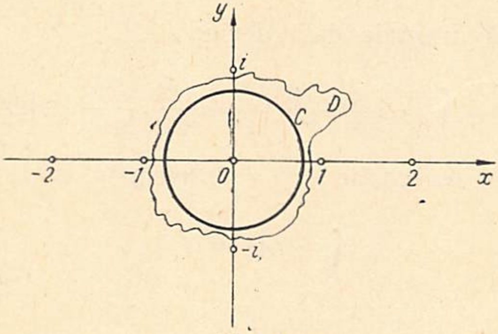

Fig. 42

În domeniul D funcția $f(z)$ este olomorfă și deci

$$J = 0.$$

În cazul 2° considerăm ca domeniu D un domeniu care conține curba C în interior dar care nu conține nici unul din punctele

$z = \pm i$, $z = \pm 2$ (fig. 43). În acest domeniu funcţia $f(z)$ este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm 1$. Deci

$$J = 2\pi i(R_1 + R_{-1}).$$

Avem

$$R_1 = \lim_{z \to 1} \frac{\ln \frac{z - i}{z + i}}{(z + 1)(z^2 - 4)} = \frac{\ln \frac{1 - i}{1 + i}}{-6} = \frac{\ln(-i)}{-6} = -\frac{\pi}{4} i.$$

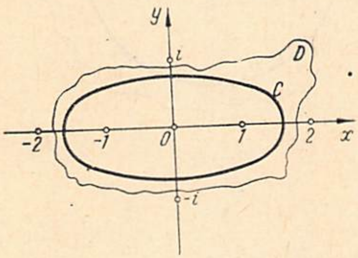

Fig. 43

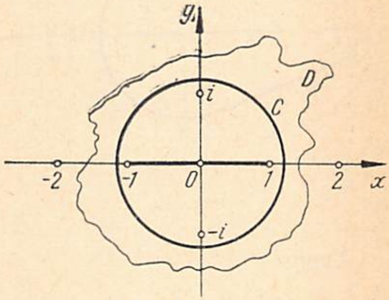

Fig. 44

Analog găsim

$$R_{-1} = -\frac{\pi}{4} i.$$

Deci

$$J = \pi^2.$$

În cazul 3° considerăm domeniul D care conţine curba C fără a conţine punctele $z = \pm 2$ şi din care am scos segmentul $[-i, i]$, (fig. 44). În acest domeniu, funcţia $f(z)$ este meromorfă avînd polii simpli $z = \pm 1$.

Avem deci

$$J = 2\pi i(R_1 + R_{-1}) = \pi^2.$$

În cazul 4° considerăm domeniul D care conţine curba C fără a conţine punctul $z = 2$ şi din care am scos segmentul $[-i, i]$

(fig. 45). Funcţia $f(z)$ este meromorfă în domeniul D avînd polii simpli $z = \pm 1$, $z = -2$. Deci

$$J = 2\pi i(R_1 + R_{-1} + R_{-2}).$$

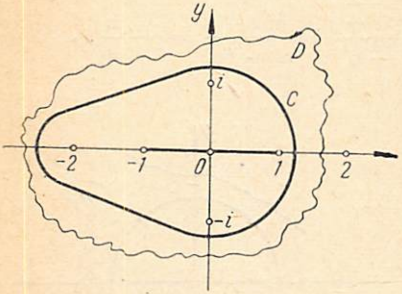

Fig. 45

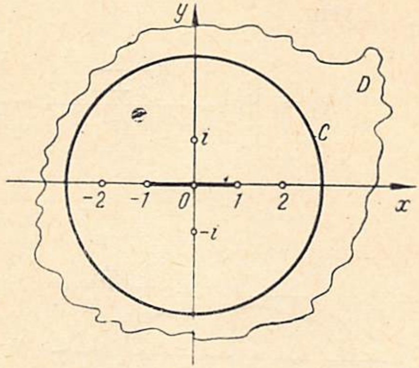

Fig. 46

Avem

$$R_2 = \lim_{z \to 2} \frac{\ln \dfrac{z-i}{z+i}}{(z^2-1)(z+2)} = \frac{\ln \dfrac{2-i}{2+i}}{12} = \frac{\ln \dfrac{3-4i}{5}}{12} = \frac{2\pi - \arcsin \dfrac{4}{5}}{12} i.$$

Analog găsim

$$R_{-2} = \frac{2\pi - \arcsin \dfrac{4}{5}}{12} i.$$

Deci în cazul 4° avem

$$J = \frac{\pi\left(4\pi + \arcsin \dfrac{4}{5}\right)}{6}.$$

În cazul 5° considerăm domeniul D care conţine curba C şi din care am scos segmentul $[-i, i]$ (fig. 46). În acest domeniu funcţia $f(z)$ este meromorfă, avînd polii simpli $z = \pm 1$, $z = \pm 2$. Avem deci

$$J = 2\pi i(R_1 + R_{-1} + R_2 + R_{-2}) = \frac{\pi\left(\pi + \arcsin \dfrac{4}{5}\right)}{3}.$$

28. *Să se găsească reziduul pentru $z = 0$ și $z = \infty$ al funcției $F(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} z^n}{1+z}$ unde n este un întreg pozitiv.*

Soluție

Să găsim coeficientul termenului $\frac{1}{z}$ în dezvoltarea lui $F(z)$ în serie Laurent. Avem

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{n!\,z^n} + \cdots \tag{1}$$

și

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots \tag{2}$$

Dezvoltarea dată de (1) converge absolut în tot planul afară de $z = 0$, iar cea dată de (2) converge absolut în interiorul cercului de rază 1. Dacă facem produsul celor două dezvoltări, aplicînd regula de înmulțire a seriilor și dacă înmulțim cu z^n, noua dezvoltare este o serie Laurent convergentă în interiorul cercului de rază unu, în afară de origine și această serie reprezintă pe $F(z)$.

Reziduul R_1 este coeficientul lui $\frac{1}{z^{n+1}}$ în seria produs al lui (1) cu (2). Avem

$$R_1 = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+4)!} + \cdots$$

adică

$$R_1 = \frac{1}{e} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ dacă } n \text{ este impar,}$$

și

$$R_1 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

În particular, dacă $n = 1$, R_1 este egal cu $\frac{1}{e}$, și pentru $n = 0$ R_1 este egal cu $1 - \frac{1}{e}$.

Să căutăm acum reziduul punctului $z = \infty$. Pentru aceasta să notăm $z = \frac{1}{\zeta}$; funcția F devine

$$F_1(\zeta) = \frac{e^{\zeta}}{\zeta^{n-1}(\zeta+1)}.$$

Să dezvoltăm F_1 după puterile crescătoare ale lui ζ. Coeficientul lui ζ în această dezvoltare, schimbat de semn, este egal cu reziduul R_2.

Avem

$$e^{\zeta} = 1 + \frac{\zeta}{1} + \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^3}{3!} + \ldots \qquad (1')$$

$$\frac{1}{1+\zeta} = 1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \ldots \qquad (2')$$

Este suficient să calculăm coeficientul lui ζ^n în produsul seriilor (1′) și (2′) pentru a-l obține pe $-R_2$. Rezultă

$$-R_2 = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{2!} - (-1)^n \frac{1}{1} + (-1)^n.$$

Putem calcula mai întîi reziduul R_2 al lui $z = \infty$ care este un pol. Deducem apoi reziduul punctului singular esențial $z = 0$, scriind că suma reziduurilor este nulă. În afară de punctele $z = 0$, $z = \infty$ funcția $F(z)$ admite polul simplu $z = -1$, a cărui reziduu este $(-1)^n e^{-1}$. Deci

$$R_1 + R_2 + \frac{(-1)^n}{e} = 0$$

sau

$$R_1 = -R_2 - \frac{(-1)^n}{e} = -\frac{(-1)^n}{1} + \frac{(-1)^n}{1!} - \frac{(-1)^n}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} - \frac{(-1)^n}{e},$$

valoare care coincide cu cea găsită direct.

Dacă n era întreg negativ ($n = -p$), reziduul punctului $z = \infty$ este nul, și avem

$$R_1 + \frac{1}{e(-1)^p} = 0$$

sau

$$R_1 = \frac{(-1)^{p+1}}{e}.$$

29. *Să se calculeze reziduul pentru $z = \infty$ al funcției*

$$F(z) = e^z \ln \frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Soluție

Punctele critice ale funcției $F(z)$ sînt α și β (fig. 47). Valoarea funcției $F(z)$ crește cu $2i\pi e^z$ sau cu $-2i\pi e^z$, după cum ne rotim în jurul punctului $z = \alpha$ sau $z = \beta$, în sens direct. Diferitele de-

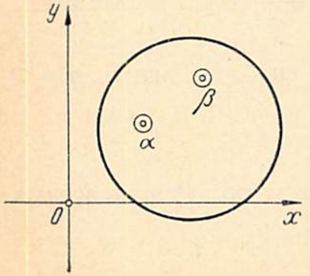

Fig. 47

terminări ale lui $F(z)$ sînt uniforme în exteriorul unui cerc oarecare care înconjură punctele α, β. Să considerăm determinarea principală a logaritmului. Notăm $z = \frac{1}{\zeta}$ și dezvoltăm logaritmul în jurul punctului $\zeta = 0$. Avem

$$\ln\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \ln\frac{1-\alpha\zeta}{1-\beta\zeta} = -\alpha\zeta\left(1+\frac{\alpha\zeta}{2}+\frac{\alpha^2\zeta^2}{3}+\cdots+\frac{\alpha^n\zeta^n}{n+1}+\cdots\right)+$$

$$+\beta\zeta\left(1+\frac{\beta\zeta}{1}+\frac{\beta^2\zeta^2}{2}+\cdots+\frac{\beta^n\zeta}{n+1}+\cdots\right) \qquad (1)$$

Dacă $F_1(z)$ reprezintă determinarea lui $F(z)$ care corespunde la această valoare a logaritmului, toate celelalte determinări sînt de forma $F_1(z) + 2ik\pi e^z$, k fiind un întreg pozitiv sau negativ. Diferitele determinări ale lui $F(z)$ au deci același reziduu pentru $z=\infty$, deoarece, e^z fiind olomorfă, integrala $2ik\pi\int e^z\,dz$, calculată pe un cerc cu raza arbitrară, este nulă.

Reziduul lui $F_1(z)$ se obține, făcînd produsul seriei (1) cu seria

$$e^{\frac{1}{\zeta}} = 1+\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{\zeta^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\,\frac{1}{\zeta^n}+\cdots+$$

și schimbînd semnul coeficientului lui ζ.

Acest coeficient este egal cu

$$-\alpha\left[1+\frac{\alpha}{1\cdot 2}+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{\alpha^n}{(n+1)!}+\ldots\right]+$$

$$+\beta\left[1+\frac{\beta}{1\cdot 2}+\frac{\beta^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{\beta^n}{(n+1)!}+\ldots\right]=e^\alpha-e^\beta.$$

Deci reziduul este $e^\alpha - e^\beta$.

30. *Să se dezvolte integrala*

$$\int_{-a}^{a}\frac{e^x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

după puterile crescătoare ale lui a.

S o l u ț i e

Să notăm $x = a\zeta$; integrala devine

$$J(a) = \int_{-1}^{+1}\frac{e^{a\zeta}\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Funcţia $F(z) = \frac{e^{az}}{\sqrt{1-z^2}}$ are ca puncte critice numai $z = \pm 1$. Integrala luată în lungul unui contur (C) închis care înconjură segmentul $[-1, +1]$ (cu determinarea pozitivă $F_1(z)$ ale lui $F(z)$) este egală cu $-2i\pi R$, R fiind reziduul lui $F(z)$ pentru $z = \infty$. Cînd conturul (C) tinde către segmentul $[-1, +1]$ luat de două ori, găsim

$$2J(a) = -2i\pi R.$$

Pentru a calcula pe R, notăm $z = \frac{1}{\zeta}$, şi dezvoltăm $\frac{e^{\frac{a}{\zeta}}(\pm i\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}$ în serie Laurent. Avem

$$e^{\frac{a}{\zeta}} = 1 + \frac{1}{1}\cdot\frac{a}{\zeta} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{a^2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{a^n}{\zeta^n} + \ldots,$$

$$\frac{\pm i\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \pm i\zeta\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\zeta^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\zeta^{2n} + \ldots\right].$$

Facem produsul celor două dezvoltări care sînt absolut convergente şi căutăm coeficientul lui ζ, coeficient care este egal cu $-R$. Rezultă

$$-R = \pm i\left[1 + \frac{1\cdot a^2}{2\cdot 2!} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\frac{a^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] =$$

$$= \pm i\left[1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{(1\cdot 2)^2} + \ldots + \frac{\alpha^n}{(1\cdot 2\cdots n)^2} + \ldots\right],$$

unde am notat $\frac{a^2}{4} = \alpha$.

Deoarece $J(a)$ este pozitiv pentru a real, trebuie să luăm semnul minus înaintea lui $-R$, astfel încît $-2i\pi R$ să fie pozitiv. Avem

$$J(a) = \pi\left[1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{(1\cdot 2)^2} + \ldots + \frac{\alpha^n}{(n!)^2} + \ldots\right], \quad \left(\alpha = \frac{a^2}{4}\right)$$

deci $J(a)$ este o funcţie olomorfă de a.

31. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a\sin\varphi},$$

unde φ este o variabilă reală, iar $0 < a < 2$.

Soluţie

Făcînd substituţia $z = e^{i\varphi}$, avem

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}.$$

De asemenea, prin această substituţie segmentul $[0, 2\pi]$ se transformă în cercul $|z| = 1$.

Integrala dată devine

$$J = \int_C \frac{2dz}{az^2 + 2iz - a}, \qquad (C : |z| = 1).$$

Funcţia

$$f(z) = \frac{2}{az^2 + 2iz - a},$$

are polii

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - a^2}}{a}\, i.$$

Dar

$$\left|\frac{-2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}\right| < 1, \qquad \left|\frac{-2 - \sqrt{4 - a^2}}{a}\right| > 1,$$

deci, în interiorul curbei C, funcţia $f(z)$ are numai polul simplu

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}\, i.$$

Rezultă

$$J = 2\pi i R_{z_1},$$

unde R_{z_1} este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul z_1.

Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{a}{i\sqrt{4 - a^2}},$$

deci

$$J = \frac{2\pi a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

32. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin\varphi}{2 + \cos\varphi}\, d\varphi.$$

Soluţie

Făcînd susbstituţia $z = e^{i\varphi}$, obţinem

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \ \sin\varphi = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \quad \cos\varphi = \frac{z + \frac{1}{z}}{2},$$

iar segmentul $[0, 2\pi]$ se transformă în cercul $|z| = 1$.

Integrala dată devine

$$J = -\int_C \frac{z^2 + 2iz - 1}{z(z^2 + 4z + 1)} dz, \qquad (C : |z| = 1).$$

Funcţia

$$f(z) = \frac{z^2 + 2iz - 1}{z(z^2 + 4z + 1)}$$

are polii

$$z_1 = 0, \ z_2 = -2 + \sqrt{3}, \ z_3 = -2 - \sqrt{3}.$$

În interiorul curbei C funcţia $f(z)$ are deci polii z_1 şi z_2.

Rezultă că

$$J = -2\pi\, i(R_{z_1} + R_{z_2}),$$

unde R_{z_1} şi R_{z_2} sînt reziduurile funcţiei $f(z)$ relativ la polii z_1 şi z_2. Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z \to 0} z f(z) = -1,$$

$$R_{z_2} = \lim_{z \to \sqrt{3} - 2} (z + 2 - \sqrt{3})\ f(z) = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Deci

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

33. *Să se calculeze integralele*

$$J_1 = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \cos^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi, \ J_2 = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \sin^2\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$

unde $f(z)$ este o funcţie olomorfă în domeniul $|z| < R$, $(R > 1)$.

[H. Cartan, [3]]

Soluţie

Făcînd substituţia $z = e^{i\varphi}$, obţinem

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2} = \frac{1+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}{2} = \frac{(z+1)^2}{4z}.$$

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = -\frac{(z-1)^2}{4z},\ d\varphi = \frac{dz}{iz},$$

iar segmentul $[0, 2\pi]$ devine cercul $|z| = 1$.

Cu această substituţie integrala J_1 se scrie

$$J_1 = \frac{1}{4i}\int_C\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)f(z)\,dz, \qquad (C: |z| = 1). \tag{1}$$

Dar, ţinînd seama de teorema şi formulele integrale ale lui Cauchy, rezultă

$$\int_C f(z)dz = 0,\quad \int_C\frac{2f(z)}{z}\,dz = 4\pi i f(0),\quad \int_C\frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0),$$

deci, relaţia (1) devine

$$J_1 = \frac{\pi}{2}[2f(0) + f'(0)].$$

Analog obţinem

$$J_2 = \frac{\pi}{2}[2f(0) - f'(0)].$$

34. *Să se calculeze integralele*

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+2x+10}\,dx,\quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+2x+10}\,dx.$$

Soluţie

Să considerăm funcţia analitică

$$f(z) = \frac{z\,e^{iz}}{z^2+2z+10}$$

care are poli

$$z_1 = -1+3i,\quad z_2 = -1-3i.$$

Avem $\operatorname{Im} z_1 > 0$.

Notînd

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 10},$$

rezultă

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = 0.$$

În baza lemei lui Jordan deducem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 10}\, \mathrm{d}x = 2\pi i\, R_{z_1}.$$

Dar

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\, f(z) = \frac{3 + i}{6e^3} (\cos 1 - i \sin 1),$$

deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 2x + 10}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3e^3} [3 \sin 1 - \cos 1 + i (3 \cos 1 + \sin 1)].$$

Înlocuind aici pe e^{ix} cu $\cos x + i \sin x$, găsim

$$J_1 = \frac{\pi}{3e^3} (3 \cos 1 + \sin 1), \qquad J_2 = \frac{\pi}{3e^3} (3 \sin 1 - \cos 1).$$

35. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1}.$$

Soluție

Avem

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1} = \int_{\infty}^{0} \frac{(-x)^4 \mathrm{d}(-x)}{(-x)^6 + 1} = -\int_{\infty}^{0} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1} = \int_0^{\infty} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1},$$

deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1},$$

adică

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{x^6 + 1}.$$

Să considerăm acum integrala

$$\int_C \frac{z^4 dz}{z^6 + 1},$$

unde conturul C este format din segmentul $[-r, r]$ și semicercul de ecuație $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, unde $r > 1$. Această integrală se scrie

$$\int_C \frac{z^4 dz}{z^6 + 1} = \int_\gamma \frac{z^4 dz}{z^6 + 1} + \int_{-r}^{r} \frac{x^4 dx}{x^6 + 1}, \tag{1}$$

căci pe axa reală avem $z = x$.

Funcția

$$f(z) = \frac{z^4}{z^6 + 1}$$

are ca poli rădăcinile ecuației

$$z^6 + 1 = 0,$$

adică punctele

$$z_k = \cos \frac{2k + 1}{6} \pi + i \sin \frac{2k + 1}{6} \pi, \quad (k = 0, 1, ..., 5).$$

În interiorul conturului C funcția $f(z)$ are polii z_0, z_1, z_2. Deci

$$\int_C \frac{z^4 dz}{z^6 + 1} = 2\pi i (R_{z_0} + R_{z_1} + R_{z_2}),$$

unde R_{z_k} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul z_k.

Avem

$$R_{z_k} = \lim_{z \to z_k} \frac{z^4(z - z_k)}{z^6 + 1} = \lim_{z \to z_k} \frac{5z^4 - 4z^3 z_k}{6z^5} = \frac{1}{6z_k} = \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{2k+1}{6}\pi\right) + \right.$$

$$\left. + i \sin\left(-\frac{2k+1}{6}\pi\right)\right].$$

De aici deducem

$$R_{z_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \; R_{z_1} = -i, \; R_{z_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},$$

deci

$$\int_C \frac{z^4 dz}{z^6 + 1} = 4\pi.$$

Cu această valoare relaţia (1) devine

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{x^4 dx}{x^6+1} = 4\pi - \int_{\gamma} \frac{z^4 dz}{z^6+1},$$

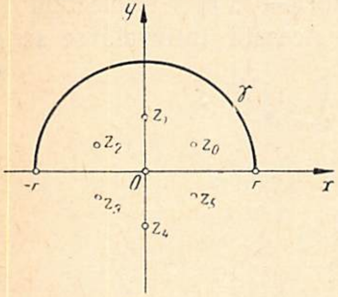

Fig. 48

de unde, trecînd la limită

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 dx}{x^6+1} = 4\pi - \lim_{\gamma \to \infty} \int_{\gamma} \frac{z^4 dz}{z^6+1}. \quad (2)$$

Avem

$$| zf(z) | = \left| \frac{z^5}{z^6+1} \right| < \frac{1}{|z|},$$

deci

$$\lim_{|z| \to \infty} | z f(z) | = 0.$$

Ţinînd seama de această relaţie şi de faptul că γ (fig. 48) este un arc de cerc cu centrul în origine, corespunzînd unui unghi la centru constant (egal cu π), rezultă că

$$\lim_{\gamma \to \infty} \int_{\gamma} \frac{z^4 dz}{z^6+1} = 0$$

şi deci relaţia (2) ne dă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{x^6+1} = 4\pi,$$

adică

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^4 dx}{x^6+1} = 2\pi.$$

36. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_{C} \frac{z^2 dz}{z^4+z^2+1},$$

unde curba C este:

1° *cercul de ecuaţie* $|z| = R$, $(R > 1)$;

2° *semicercul de ecuaţie* $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ *completat cu diametrul respectiv.*

De aici să se deducă valoarea integralei

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+x^2+1}.$$

Soluție

Funcția

$$f(z)=\frac{z^2}{z^4+z^2+1},$$

are ca poli simpli rădăcinile ecuației

$$z^4+z^2+1=0,$$

adică punctele

$$z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_4=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

În cazul 1° cei patru poli ai funcției $f(z)$ sînt situați în interiorul curbei C, deci

$$J=2\pi i(R_1+R_2+R_3+R_4);$$

unde R_j este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul z_j, $(j=1, 2, 3, 4)$.

Avem

$$R_1=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\frac{3-i\sqrt{3}}{12},\ R_2=\frac{3+i\sqrt{3}}{12},$$

$$R_3=-R_1,\quad R_4=-R_2.$$

Deci în cazul 1° valoarea integralei este

$$J=0.$$

În cazul 2°, în interiorul conturului C sînt situați polii z_1 și z_2, deci

$$J=2\pi i(R_1+R_2)=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Dacă notăm cu Γ semicercul de ecuație $y=\sqrt{R^2-x^2}$ și ținînd seama că pe axa reală avem $z=x$, relația (1) se scrie

$$\int_\Gamma\frac{z^2\mathrm{d}x}{z^4+z^2+1}+\int_{-R}^{R}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Trecînd la limită în această egalitate pentru $R\to\infty$ obținem

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma\frac{z^2\mathrm{d}z}{z^4+z^2+1}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}. \tag{2}$$

Avem

$$|z f(z)|=\left|\frac{z^3}{z^4+z^2+1}\right|.$$

Dar

$$| z^4 + z^2 + 1 | > | z^4,$$

deci

$$| z f(z) | < \frac{1}{| z |}.$$

Ținînd seama că Γ este un arc de cerc cu centrul în origine corespunzînd unghiului la centru constant (egal cu π) și că pentru $R \to \infty$ avem $| z f(z) | \to 0$, rezultă că

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{z^2 \mathrm{d}z}{z^4 + z^2 + 1} = 0,$$

deci formula (2) devine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}.$$

Această relație se mai poate scrie

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}.$$

Înlocuind în prima integrală din această egalitate pe x cu $-x$, obținem

$$2 \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3},$$

adică

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{\pi \sqrt{3}}{6}.$$

37. *Să se calculeze integrala lui Laplace*

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{x^2 + a^2}.$$

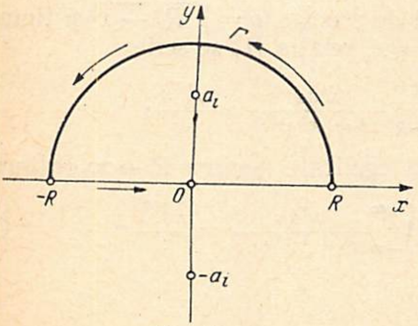

Fig. 49

Soluție

Să considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \mathrm{d}z,$$

unde conturul C este cel din fig. 49.

Funcția:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

este o funcție meromorfă, avînd polii simpli $z = \pm ai$. În interiorul conturului C funcția are polul $z = ai$, deci

$$J = 2\pi i R_{ai},$$

unde R_{ai} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul ai.

Avem

$$R_{ai} = \lim_{z \to ai} (z - ai)\, f(z) = \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Rezultă

$$J = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Avînd în vedere forma conturului C deducem

$$J = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}\mathrm{d}z}{z^2 + a^2},$$

de unde, trecînd la limită pentu $R \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a} - \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}\mathrm{d}z}{z^2 + a^2}. \tag{1}$$

Avem

$$|\, z f(z)\, | = \left| \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} \right| < \frac{e^{-y}}{|\, z\, |}, \quad (y > 0),$$

deci

$$\lim_{|z| \to \infty} |\, z f(z)\, | = 0$$

și ținînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Înlocuind această valoare în (1) obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae},$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a},$$

sau

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ix}\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae}.$$

De aici rezultă

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae}.$$

38. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

Soluţie

Considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz,$$

unde conturul C este format din segmentele $[-R, R]$ şi semicercul Γ de ecuaţie $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $(R > 2)$.

În interiorul conturului C funcţia

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

este meromorfă, avînd polii $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, deci

$$J = 2\pi i(R_i + R_{2i}),$$

unde R_i şi R_{2i} sînt reziduurile funcţiei $f(z)$ relative la polii $z = i$, respectiv $z = 2i$.

Avem

$$R_i = \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \frac{e^{-i}}{6i} = \frac{1}{6ie}, \quad R_{2i} = -\frac{1}{12ie^2}.$$

Deci

$$J = \frac{(2e - 1)\pi}{6e^2}.$$

Ţinînd seama de forma conturului C, această relaţie se scrie

$$\int_{-R} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} + \int_\Gamma \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \frac{(2e - 1)\pi}{6e^2}$$

sau, trecînd la limită pentru $R \to \infty$,

$$\int_{-\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{(2e - 1)\pi}{6e^2} - \lim_{R \to \infty} \int_\Gamma \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}. \qquad (1)$$

Avem

$$| z f(z) | = \left| \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| < \frac{e^{-y}}{|z|^3}, \qquad (y > 0),$$

de unde rezultă

$$\lim_{|z|\to\infty} | z f(z) | = 0$$

și ținînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{e^{iz}\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0.$$

Cu această valoare relația (1) devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{(2e-1)\pi}{6e^2}.$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ix}\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{(2e-1)\pi}{12e^2}.$$

39. *Să se calculeze integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\,\mathrm{d}x}{(e^x+1)(e^x+2)}, \qquad (0 < a < 1).$$

Soluție

Fie integrala

$$J = \int_\Gamma \frac{e^{az}\,\mathrm{d}z}{(e^z+1)(e^z+2)},$$

unde Γ este conturul $ABCDA$ din fig. 50.

Funcția

$$f(z) = \frac{e^{az}}{(e^z+1)(e^z+2)}$$

are ca poli rădăcinile ecuațiilor

$$e^z+1=0, \quad e^z+2=0,$$

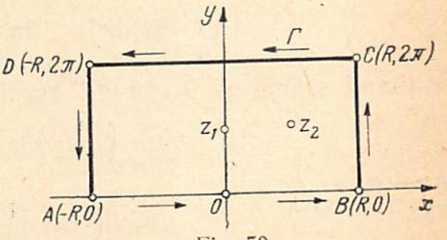

Fig. 50

$$z = (2k + 1)\pi i, \quad z = \ln 2 + (2k + 1)\pi i.$$

În interiorul conturului Γ funcția $f(z)$ are polii

$$z_1 = \pi i, \quad z_2 = \ln 2 + \pi i,$$

deci

$$J = 2\pi i(R_{z_1} + R_{z_2}),$$

unde R_{z_1} și R_{z_2} sînt reziduurile funcțiilor $f(z)$ relativ la punctele z_1, z_2.

Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{(z - \pi i)e^{az}}{(e^z + 1)(e^z + 2)} = - e^{a\pi i}.$$

$$R_{z_2} = \lim_{z \to z_1} \frac{(z - \ln 2 - \pi i)e^{az}}{(e^z + 1)(e^z + 2)} = 2^{a-1} e^{a\pi i}.$$

Deci

$$J = 2\pi i e^{a\pi i} (2^{a-1} - 1).$$

Ținînd seama de forma conturului Γ avem

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z + \int_{BC} f(z)\mathrm{d}z + \int_{CD} f(z)\mathrm{d}z + \int_{DA} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi i e^{a\pi i} (2^{a-1} - 1). \tag{1}$$

Avem

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}\mathrm{d}x}{(e^x + 1)(e^x + 2)}, \tag{2}$$

$$\int_{CD} f(z)\mathrm{d}z = - e^{2a\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}\mathrm{d}x}{(e^{ax} + 1)(e^x + 2)}.$$

Pe segmentul BC avem

$$|f(z)| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{(1 + e^{R+iy})(2 + e^{R+iy})} \right| \leqslant \frac{e^{aR}}{(e^R - 1)(e^R - 2)}.$$

Deci

$$\left| \int_{BC} f(z)\mathrm{d}z \right| \leqslant 2\pi \frac{e^{aR}}{(e^R - 1)(e^R - 2)},$$

și ținînd seama că $0 < a < 1$, rezultă

$$\lim_{R \to \infty} \int_{BC} f(z)\mathrm{d}z = 0. \quad (3)$$

Analog

$$\lim_{R \to \infty} \int_{DA} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3'}$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $R \to \infty$ și, avînd în vedere relațiile [(2), (3), (3')], obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}dx}{(e^x+1)(e^x+2)} = \frac{2\pi i e^{a\pi i}(2^{a-1}-1)}{1-e^{2a\pi i}}$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}\mathrm{d}x}{(e^x+1)(e^x+2)} = \frac{\pi(1-2^{a-1})}{\sin a\pi}.$$

40. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2+a^2}\mathrm{d}x, \quad (a > 0).$$

Soluție

Pentru a calcula integrala dată considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{ze^{iaz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul format din segmentul $[-R, R]$ și semicercul Γ de ecuație $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(R > a)$.

În interiorul conturului C, funcția

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+a^2}$$

are polul simplu $z = ai$, deci

$$J = 2\pi i R_{ai},$$

unde R_{ai} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul $z = ai$.

Avem

$$R_{ai} = \lim_{z \to ai}(z - ai)f(z) = \frac{e^{-a^2}}{2},$$

de unde deducem că

$$J = \pi i e^{-a^2}.$$

Pe de altă parte avem

$$J = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z,$$

adică

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi i e^{-a},$$

sau, trecînd la limită pentru $R \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \pi i e^{-a^2} - \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z. \quad (1)$$

Avînd în vedere că

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{xe^{iax}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} \frac{xe^{-aix}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$$

formula (1) se scrie

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x(e^{iax} - e^{-iax})}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \pi i e^{-a^2} - \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$$

sau

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} e^{-a^2} - \frac{1}{2i}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Avem

$$|\, zf(z)\,| = \left|\frac{z^2}{z^2+a^2}\right| \cdot |\, e^{iaz}\,| \leqslant e^{-ay},$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} |\, zf(z)\,| = 0$$

și, ținînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Relația (2) ne dă

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} e^{-a^2}.$$

41. *Să se calculeze integrala*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}x,$$

unde $a > 0$, α = real.

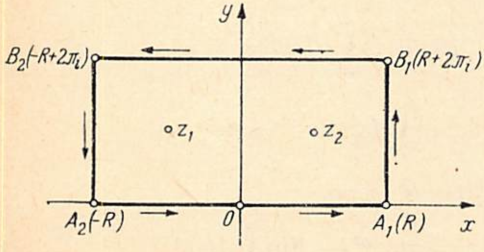

Fig. 51

Soluție

Considerăm integrala

$$J = \int_{C} \frac{e^{i\alpha z}}{\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul din fig. 51.

Funcția

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{\text{ch}\, z + \text{ch}\, a}$$

are ca poli rădăcinile ecuației

$$\text{ch}\, z + \text{ch}\, a = 0,$$

care se mai scrie

$$e^{2z} + \frac{e^{2a}+1}{e^a} e^z + 1 = 0.$$

Deci polii funcției $f(z)$ sînt

$$z_1 = -a + \pi i, \quad z_2 = a + \pi i.$$

Rezultă că

$$J = 2\pi i \left(R_{z_1} + R_{z_2}\right),$$

unde R_{z_1} și R_{z_2} sînt reziduurile funcției $f(z)$ relative la polii z_1, respectiv z_2.

Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{e^{i\alpha z}}{\text{ch}\, z + \text{ch}\, a} = \frac{e^{-\pi\alpha - a\alpha i}}{\text{sh}\, a},$$

$$R_{z_2} = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{e^{i\alpha z}}{\text{ch}\, z + \text{ch}\, a} = -\frac{e^{-\pi\alpha - a\alpha i}}{\text{sh}\, a},$$

deci

$$J = 4\pi e^{-\pi\alpha} \frac{\sin a\alpha}{\text{sh}\, a}.$$

Ținînd seama de forma conturului C rezultă

$$\int_{-R}^{R} f(z)\text{d}z + \int_{R}^{R+2\pi i} f(z)\text{d}z + \int_{R+2\pi i}^{-R+2\pi i} f(z)\text{d}z + \int_{-R+2\pi i}^{-R} f(z)\text{d}z = $$
$$= 4\pi e^{-\pi\alpha} \frac{\sin a\alpha}{\text{sh}\, a}. \qquad (1)$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{-R}^{R} f(z)\text{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}\text{d}x}{\text{ch}\, x + \text{ch}\, a}.$$

Pe dreapta A_1B_1 avem $z = R + iy$, deci

$$\int_{R}^{R+2\pi i} f(z)\text{d}z = \int_{0}^{2\pi} \frac{2ie^{i\alpha R} \cdot e^{-\alpha y}}{e^R e^{iy} + e^{-R} e^{-iy} + 2\text{ch}\, a} \text{d}y.$$

Pe dreapta B_1B_2 avem $z = x + 2\pi i$, deci

$$\int_{R+2\pi i}^{-R+2\pi i} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi\alpha} \cdot a^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}.$$

Pe dreapta B_2A_2 avem $z = -R + iy$, deci

$$\int_{-R+2\pi i}^{-R} f(z)\mathrm{d}z = -\int_0^{2\pi} \frac{2ie^{-i\alpha R}e^{-\alpha y}}{e^{-R}e^{iy} + e^{R}e^{-iy} + 2\operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}y.$$

Relaţia (1) devine

$$(1 - e^{2\pi\alpha})\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} + 2ie^{i\alpha R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha y}}{e^{R}e^{iy} + e^{-R}e^{iy} + 2\operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}y -$$

$$- 2ie^{-i\alpha R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha y}}{e^{-R}e^{iy} + e^{R}e^{-iy} + 2\operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}y = 4\pi e^{-\pi\alpha}\frac{\sin a\alpha}{\operatorname{sh} a}. \qquad (2)$$

Avem

$$\left| 2ie^{i\alpha R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y}{e^{R}e^{iy} + e^{-R}e^{-iy} + 2\operatorname{ch} a} \right| \leqslant \frac{2}{e^{R} + e^{-R}}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y}{\cos y},$$

deci

$$\lim_{R\to\infty} 2ie^{i\alpha R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y}{e^{R}e^{iy} + e^{-R}e^{-iy} + 2\operatorname{ch} a} = 0.$$

Analog deducem

$$\lim_{R\to\infty} 2ie^{-i\alpha R}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y}{e^{-R}e^{iy} + e^{R}e^{-iy} + 2\operatorname{ch} a} = 0.$$

Trecînd la limită relaţia în (2) pentru $R \to \infty$, obţinem

$$(1 - e^{-2\pi\alpha})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} = 4\pi e^{-\pi\alpha}\frac{\sin a\alpha}{\operatorname{sh} a},$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} = \frac{2\pi \sin a\alpha}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} \pi\alpha}. \qquad (3)$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a},$$

deci relaţia (3) ne dă

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \sin a\alpha}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} \pi\alpha}.$$

42. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}, \quad (a,\ b>0),$$

unde n este un număr natural.

Soluție.

Fie funcția

$$f(z) = \frac{1}{(a+bz^2)^n}.$$

Această funcție are ca poli multipli de ordinul n punctele

$$z_1 = -i\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad z_2 = i\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Să considerăm acum integrala

$$J = \int_C \frac{dz}{(a+bz^2)^n},$$

unde conturul C este format din segmentul $[-R, R]$ și semicercul de ecuație $y = \sqrt{R^2-x^2}$ $\left(R > \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

În interiorul conturului C funcția $f(z)$ are polul z_2. Rezultă

$$J = 2\pi i R_{z_2},$$

unde R_{z_2} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul z_2.

Avem

$$R_{z_2} = \frac{1}{(n-1)!\, b^n} \lim_{z\to z_1} [(z-z_2)^{-n}]^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} n}{b^n (z_1-z_2)^{2n-1}}$$

de unde

$$R_{z_2} = \frac{(2n-2)!\sqrt{\frac{a}{b}}}{[(n-1)!]^2\, 2^{2n-1} a^n} i.$$

Deci

$$J = \frac{(2n-2)!\sqrt{\frac{a}{b}}\pi}{(n-1)!\, 2^{2n-2} a^n}.$$

Avînd în vedere forma conturului C, rezultă

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{(a+bz^2)^n} = \frac{(2n-2)!\sqrt{\frac{a}{b}}\pi}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}a^n},$$

sau, trecînd la limită pentru $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} \frac{dz}{(a+bz^2)^n} = \frac{(2n-2)!\sqrt{\frac{a}{b}}\pi}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}a^n}. \quad (1)$$

Avem

$$|zf(z)| < \frac{1}{b^n |z|^{2n-1}},$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$$

şi, ţinînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, deducem

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Relaţia (1) devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{(2n-2)!\sqrt{\frac{a}{b}}\pi}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}a^n}.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n},$$

deci

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{(2n-2)!\sqrt{\frac{a}{b}}\pi}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}a^m}.$$

43. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta + a^2}\, d\theta \qquad (a>1).$$

Soluție

Fie funcția

$$f(z) = \frac{z^n}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}.$$

Polii acestei funcții sînt

$$z_1 = a, \qquad z_2 = \frac{1}{a}.$$

Să considerăm acum integrala

$$J = \int_C \frac{z^n \,\mathrm{d}z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)},$$

unde curba C este cercul de ecuație $|z| = 1$.

În interiorul curbei C funcția $f(z)$ are numai polul z_2, deci

$$J = 2\pi i\, R_{z_2},$$

unde R_{z_2} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul z_2.

Avem

$$R_{z_2} = \lim_{z \to z_2} (z - z_2)\, f(z) = \frac{1}{a^{n-1}(1-a^2)},$$

de unde

$$J = \frac{2\pi i}{a^{n-1}(1-a^2)}.$$

Pe curba C avem $z = e^{\theta i}$, deci integrala J se scrie

$$J = i\int_0^{2} \frac{e^{(n+1)\theta i}\,\mathrm{d}\theta}{e^{2\theta i} - \left(a + \frac{1}{a}\right)e^{\theta i} + 1}.$$

De aici rezultă

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{(n+1)\theta i}\,\mathrm{d}\theta}{e^{2\theta i} - \left(a + \frac{1}{a}\right)e^{\theta i} + 1} = \frac{2\pi}{a^{n-1}(1-a^2)}$$

sau

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)\left[2\cos\theta - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right]}\, d\theta = \frac{2\pi}{a^{n-1}(1-a^2)},$$

de unde deducem

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}\, d\theta = \frac{2\pi}{a^n(a^2-1)}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}\, d\theta = 0.$$

44. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{(\ln z)^2}{z^4+1}\, dz,$$

unde conturul C este cel din fig. 52, *iar pentru* ln z *luăm determinarea principală.*

De aici să se deducă valoarea integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4+1}\, dx.$$

Soluție

În interiorul domeniului mărginit de conturul C funcția

$$f(z) = \frac{(\ln z)^2}{z^4+1}$$

este meromorfă avînd polii

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \qquad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

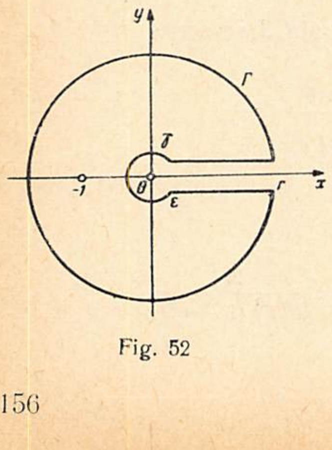

Fig. 52

Deci

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} R_{z_k},$$

unde R_{z_k} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polii z_k.

Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_i} (z - z_1) f(z) = \frac{\left[\ln \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2}{2\sqrt{2}(-1+i)}.$$

Dar

$$\ln \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\frac{\pi}{4},$$

deci

$$R_{z1}=\frac{\pi^2\sqrt{2}(1+i)}{128}.$$

Analog găsim

$$R_{z_2}=-\frac{9\sqrt{2}(1-i)\pi^2}{128},\quad R_{z_3}=\frac{25\sqrt{2}(1-i)\pi^2}{128},$$
$$R_{z_4}=\frac{49\sqrt{2}(1-i)\pi^2}{128}.$$

Rezultă

$$J=\frac{7\pi^3\sqrt{2}}{32}(1-5i).$$

Ţinînd seama de forma conturului C, obţinem

$$\int_\varepsilon^r f(z)\mathrm{d}z+\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z+\int_r^\varepsilon f(z)\mathrm{d}z-\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\frac{7\pi^3\sqrt{2}}{32}(1-5i).\quad (1)$$

Pe partea superioară a semiaxei reale pozitive avem $\ln z=$ $=\ln x$, iar pe partea inferioară avem $\ln z=\ln x+2\pi i$.
Deci

$$\int_\varepsilon^r f(z)\mathrm{d}z=\int_\varepsilon^r\frac{(\ln x)^2}{x^4+1}\mathrm{d}x,\quad \int_r^\varepsilon f(z)\mathrm{d}z=-\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{x^4+1}\mathrm{d}x.$$

Înlocuind aceste valori în (1) deducem

$$\int_\varepsilon^r\frac{4\pi-4\pi i\ln x}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{7\pi^3\sqrt{2}}{32}(1-5i)+\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z-\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Trecînd această relaţie la limită găsim

$$\int_0^\infty\frac{4\pi^2-4\pi i\ln x}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{7\pi^3\sqrt{2}}{32}(1-5i)+\lim_{z\to 0}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z-\lim_{r\to\infty}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z.\quad (2)$$

Avem

$$|zf(z)|=\left|\frac{z(\ln z)^2}{z^4+1}\right|<\left|\frac{(\ln z)^2}{z^3}\right|.$$

Dar

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{(\ln z)^2}{z^3}\right| = 0,$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} | zf(z) | = 0.$$

Analog

$$\lim_{|z|\to 0} | zf(z) | = 0.$$

Ținînd seama că γ și Γ sînt cercuri cu centrul în origine, rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

și deci relația (2) devine

$$4\pi^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} - 4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{7\pi^3\sqrt{2}}{32}(1-5i).$$

Rezultă că

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{7\pi\sqrt{2}}{128}, \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{35\,\pi^2\sqrt{2}}{128}.$$

45. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_0^\infty \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{(x+a)^2+b^2}, \quad (a>0,\ b>0).$$

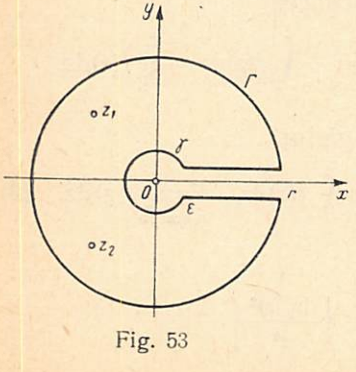

Fig. 53

Soluție.

Să considerăm integrala

$$\int_C \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2}\,\mathrm{d}z,$$

unde pentru logaritm luăm determinarea principală, iar conturul C este cel din fig. 53.

Funcția

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2},$$

este deci meromorfă în interiorul domeniului D mărginit de conturul C avînd polii simpli

$$z_1 = -a + bi, \ z_2 = -a - bi.$$

Luînd $r > \sqrt{a^2 + b^2}$, acești poli sînt în interiorul domeniului D și deci

$$\int_C \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2} \mathrm{d}z = 2\pi i \, (R_{z_1} + R_{z_2}),$$

unde R_{z_1} și R_{z_2} sînt reziduurile funcției $f(z)$ relative la polii z_1 respectiv z_2.

Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2} = \frac{[\ln(-a+bi)]^2}{2bi}.$$

Notînd $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, avem

$$\ln(-a + bi) = \ln \rho + i(\pi - \varphi).$$

Deci

$$R_{z_1} = \frac{[\ln \rho + i(\pi - \varphi)]^2}{2bi}, \quad R_{z_2} = -\frac{[\ln \rho + i(\pi + \varphi)]^2}{2bi}.$$

Rezultă că

$$\frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2} \mathrm{d}z = \frac{4\pi\varphi}{b} (\pi - i \ln \rho).$$

Avînd în vedere forma conturului C, deducem

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_r^\varepsilon f(z)\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^r f(z)\mathrm{d}z. \tag{2}$$

Pe partea superioară a semiaxei reale pozitive avem $\ln z = \ln x$, iar pe partea inferioară avem $\ln z = \ln x + 2\pi i$, deci

$$\int_\varepsilon^r f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^r \frac{\ln^2 x}{(x+a)^2 + b^2} \mathrm{d}x, \ \int_r^\varepsilon f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\varepsilon^r \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+a)^2 + b^2} \mathrm{d}x. \tag{3}$$

De asemenea

$$|zf(z)| = \left| \frac{z \ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2} \right| < \left| \frac{\ln^2 z}{z} \right|$$

și avînd în vedere că

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{\ln^2 z}{z} \right| = 0,$$

rezultă

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0.$$

Analog avem

$$\lim_{|z|\to 0} |zf(z)| = 0$$

și, ținînd seama că Γ și γ sînt cercuri cu centrul în origine, deducem că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0, \ \lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{4}$$

Trecînd la limită în ecuația (2) și înlocuind relațiile (1), (3) și (4) obținem

$$4\pi^2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2+b^2} - 4\pi i\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\mathrm{d}x = \frac{4\pi\varphi}{b}(\pi - i\ln\rho).$$

De aici rezultă

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \ \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Dacă $a = 0$, $b = 1$, deducem

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x = 0.$$

46. *Să se calculeze integralele*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{1+x^3}\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{1+x^3}\mathrm{d}x \quad (a > 0).$$

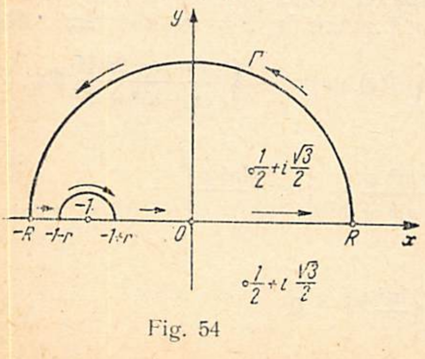

Fig. 54

Soluție

Considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{aiz}}{1+z^3}\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul din fig. 54.

Funcția

$$f(z) = \frac{e^{aiz}}{1+z^3}$$

are polii simpli

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Deci în interiorul conturului C funcţia $f(z)$ are polul simplu

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rezultă că

$$J = 2\pi i R_{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}, \tag{1}$$

unde $R_{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Avem

$$R_{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \lim_{z \to \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) f(z) = \frac{2e^{ai\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{3(-1 + i\sqrt{3})}.$$

Înlocuind această valoare în (1) găsim

$$J = \frac{\pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{3}}}{3}\left[\sqrt{3}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2} + i\left(\sqrt{3}\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)\right]. \tag{2}$$

Avînd în vedere forma conturului C, rezultă

$$J = \int_{-R}^{-1-r} \frac{e^{aix}}{1 + x^3}\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-i+r}^{R} \frac{e^{aix}}{1 + x^3}\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z. \tag{3}$$

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{ze^{aiz}}{1 + z^3}\right| \leqslant \frac{|e^{iaz}|}{|z|^2} = \frac{e^{-ay}}{|z|^2},$$

deci $\lim\limits_{|z| \to \infty} |zf(z)| = 0$

şi ţinînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, deducem

$$\lim_{|R| \to \infty} \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{4}$$

Pentru a calcula integrala pe γ să dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie Laurent în jurul punctului $z = -1$. Făcînd substituţia $z = t - 1$, obţinem

$$f(t-1) = \frac{e^{ai(t-1)}}{t^3 - 3t^2 + 3t} = \frac{e^{-ai}}{3t}\left(1 + \frac{t^2 - 3t}{3}\right)^{-1} e^a =$$

$$= \frac{e^{-ai}}{3t}\left(1 - \frac{t^2 - 3t}{3} + \cdots\right)\left(1 + \frac{ait}{1!} + \cdots\right) = \frac{e^{-ai}}{3} \cdot \frac{1}{t} + P(t),$$

unde $P(t)$ este o funcţie olomorfă de t. Rezultă că

$$f(z) = \frac{e^{-ai}}{3} \cdot \frac{1}{z+1} + P(z+1)$$

şi deci

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \frac{e^{-ai}}{3} \cdot \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1} + \int_\gamma P(z+1)\,\mathrm{d}z.$$

Notînd $z + 1 = re^{i\theta}$, deducem

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \frac{ie^{-ai}}{3}\int_\pi^0 \mathrm{d}\theta + ir\int_\pi^0 P(re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta$$

adică

$$\lim_{\gamma \to 0} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\frac{\pi i e^{-ai}}{3}. \tag{5}$$

Trecînd la limită în relaţia (3) pentru $r \to 0$, $R \to \infty$ şi, avînd în vedere ecuaţiile (2), (4) şi (5), obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi(\sin a + i\cos a) + \pi e^{-\frac{a\sqrt{3}}{3}}\left[\sqrt{3}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2} + i\left(\sqrt{3}\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)\right]}{3}.$$

Dar $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$, deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left[\sin a + e^{-\frac{a\sqrt{3}}{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\right)\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left[\cos a + e^{-\frac{a\sqrt{3}}{3}}\left(\sqrt{3}\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)\right].$$

47. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1-x^4} \mathrm{d}x \quad (a > 0).$$

Soluţie

Pentru a calcula integrala dată considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{iaz}}{1-x^4} \mathrm{d}z,$$

unde conturul C este cel din fig. 55.

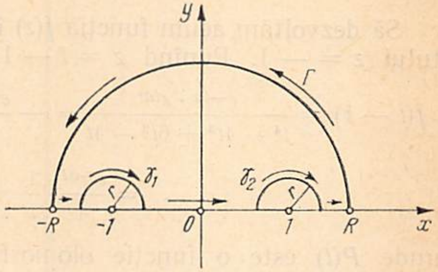

Fig. 55

Funcţia

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{1-z^4}$$

are ca poli simpli punctele $z = \pm 1$, $z = \pm i$, deci în interiorul conturului C funcţia $f(z)$ are polul $z = i$.

Rezultă

$$J = 2\pi i R_i,$$

unde R_i este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul $z = i$. Calculînd acest reziduu găsim

$$R_i = \lim_{z \to i} (z - i)\, f(z) = \frac{e^{-a}}{4i},$$

deci

$$J = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

De aici deducem că

$$\int_{-R}^{-1-r} \frac{e^{iax}}{1-x^4} \mathrm{d}x + \int_{\gamma_1} \frac{e^{iaz}}{1-z^4} \mathrm{d}z + \int_{-1-r}^{1-r} \frac{e^{iax}}{1-x^4} \mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iaz}}{1-z^4} \mathrm{d}z +$$
$$+ \int_{1+r}^{R} \frac{e^{iax}}{1-x^4} \mathrm{d}x + \int_{\Gamma} \frac{e^{iaz}}{1-z^4} \mathrm{d}z = \frac{\pi e^{-a}}{2}. \quad (1)$$

Avem

$$|zf(z)| = \left| \frac{ze^{iaz}}{1-z^4} \right| \leqslant \frac{|e^{iaz}|}{|z|^3} = \frac{e^{-ay}}{|z|^3},$$

adică

$$\lim_{z \to \infty} |zf(z)| = 0$$

și, ținînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, obținem

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2}$$

Să dezvoltăm acum funcția $f(z)$ în serie Laurent în jurul punctului $z = -1$. Punînd $z = t - 1$, găsim

$$f(t-1) = \frac{e^{-ia}\cdot e^{iat}}{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t} = -\frac{e^{-ai}}{4t}\left(1 - \frac{t^3 - 4t^2 + 6t}{4}\right)^{-1} e^{ait} =$$

$$= \frac{e^{-ai}}{4}\cdot\frac{1}{t} + P(t),$$

unde $P(t)$ este o funcție olomorfă.

De aici rezultă

$$f(z) = -\frac{e^{-ai}}{4}\cdot\frac{1}{z+1} + P(z+1),$$

de unde

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{e^{-ai}}{4}\cdot\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1} + \int_{\gamma_1} P(z+1)\,\mathrm{d}z.$$

Înlocuind aici pe $z+1$ cu $re^{i\theta}$, obținem

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{ie^{-ai}}{4}\int_\pi^0 \mathrm{d}\theta + ir\int_\pi^0 P(re^{\theta i})\,e^{\theta i}\,\mathrm{d}\theta$$

deci

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi i e^{-ai}}{4}. \tag{3}$$

Analog găsim

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{\pi i e^{ai}}{4}. \tag{3'}$$

Trecînd la limită în relația (1), pentru $R\to\infty$, $r\to 0$ și ținînd seama de (2), (3) și (3′) obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-a}}{2} + \frac{\pi i}{4}\left(e^{ai} - e^{-ai}\right)$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{1-x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(e^{-a} - \sin a\right).$$

Avînd în vedere că

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{iax}}{1-x^4}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{1-x^4}\,dx$$

și că $\cos ax = \dfrac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$, rezultă

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1-x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}(e^{-a} - \sin a).$$

48. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

Soluție

Să calculăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}\,dz,$$

unde conturul C este cel din fig. 56.

Funcția

$$f(z) = \frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z^2}$$

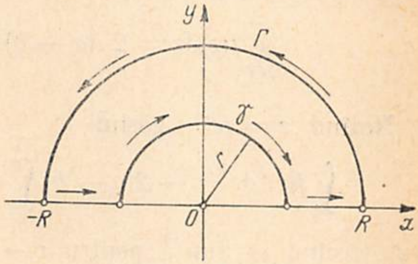

Fig. 56

are punctul $z = 0$ ca pol simplu, deci în interiorul conturului C este olomorfă. Rezultă

$$J = 0.$$

De aici deducem

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{2aix} - e^{2bix}}{x^2}\,dx + \int_\gamma f(z)dz + \int_r^R \frac{e^{2aix} - e^{2bix}}{x^2}\,dx +$$

$$+ \int_\Gamma f(z)dz = 0. \tag{1}$$

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{e^{2aiz} - e^{2biz}}{z}\right| \leqslant \frac{|e^{2aiz}| + |e^{2biz}|}{|z|} = \frac{e^{-2ay} + e^{-2by}}{|z|},$$

adică

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0.$$

Avînd în vedere că Γ este un semicerc cu centrul în origine rezultă

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2}$$

Pentru a calcula integrala pe γ să dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie Laurent în jurul originei. Avem

$$f(z)=\frac{1+\frac{2aiz}{1!}+\frac{(2aiz)^2}{2!}+\dots-1-\frac{2biz}{1!}-\frac{(2biz)^2}{2!}-\dots}{z^2}=\frac{2(a-b)i}{z}+P(z),$$

unde $P(z)$ este o funcţie olomorfă.

De aici rezultă

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\,i(a-b)\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_\gamma P(z)\,\mathrm{d}z.$$

Notînd $z=re^{i\theta}$, găsim

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2(a-b)\int_\pi^0\mathrm{d}\theta+ir\int_\pi^0 P(re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

sau, trecînd la limită pentru $r\to 0$,

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi(a-b). \tag{3}$$

Înlocuind relaţiile (2) şi (3) în ecuaţia (1) în care am trecut la limită pentru $R\to\infty$ şi $r\to 0$, obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2aix}-e^{2bix}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi(b-a)$$

sau, ţinînd seama că

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{2aix}-e^{2bix}}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{e^{-2aix}-e^{-2bix}}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

rezultă

$$\int_0^\infty\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x=\pi(b-a).$$

49. *Să se calculeze integrala lui Poisson*

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x\quad (a>0).$$

S o l u ţ i e

Să considerăm integrala

$$J = \int_C e^{-az^2}\,\mathrm{d}z,$$

unde conturul C (fig. 57) este dreptunghiul ale cărui vîrfuri sînt

$$A_1(R,\,0),\ A_2\left(R,\frac{b}{2a}\right),\ A_3\left(-R\frac{b}{2a}\right),\ A_4\,(-R,\,0).$$

Funcţia

$$f(z) = e^{-az^2}$$

este olomorfă în interiorul conturului C, deci

$$J = 0.$$

Fig. 57

Avînd în vedere forma conturului C rezultă

$$\int_{A_1A_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{A_2A_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{A_3A_4} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{A_4A_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{A_4A_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Observînd că

$$\int_{-R}^{0} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^R e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$$

și, făcînd schimbarea de variabilă $x = \frac{t}{\sqrt{a}}$, relaţia (2) devine

$$\int_{A_4A_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{R\sqrt{a}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Pe dreapta A_2A_3 avem $z = x + \frac{b}{2a}i$, deci

$$\int_{A_2A_3} f(z)\,\mathrm{d}z = e^{\frac{b^2}{4a}}\int_R^{-R} e^{-ax^2}\,e^{-ibx}\,\mathrm{d}x.$$

Schimbînd pe x în $-x$, găsim

$$\int_{-R}^{0} e^{-ax^2}\,e^{-ibx}\,\mathrm{d}x = \int_0^R e^{-ax^2}\,e^{ibx}\,\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_{A_2A_3} f(z)\,\mathrm{d}z = -e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_0^R e^{-ax^2}\left(e^{ibx} + e^{-ibx}\right)\mathrm{d}x$$

sau

$$\int_{A_2A_3} f(z)\mathrm{d}z = -2e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_0^R e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

Înlocuind relațiile (3) și (4) în (1) obținem

$$\frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^R e^{-t^2}\mathrm{d}t - 2e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_0^R e^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x = -\int_{A_1A_2} f(z)\,\mathrm{d}z -$$

$$-\int_{A_3A_4} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{5}$$

sau, trecînd la limită pentru $R \to \infty$ și, ținînd seama că

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

relația (5) devine

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - 2e^{-\frac{b^2}{4a}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = -\lim_{R\to\infty}\left[\int_{A_1A_2} f(z)\mathrm{d}z + \right.$$

$$\left. + \int_{A_3A_4} f(z)\,\mathrm{d}z\right]. \tag{6}$$

Pe dreptele A_1A_2 și A_3A_4 avem $z = R + iy$, respectiv $z = -R + iy$, deci

$$|f(z)| = |e^{-a(R^2 \pm 2Riy - y^2)}| = e^{-a(R^2 - y^2)} \leqslant e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2}.$$

Rezultă

$$\left|\int_{A_1A_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{A_1A_2} |f(z)|\,\mathrm{d}z \leqslant e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2}\int_R^{R+\frac{b}{2a}i}\mathrm{d}z = \frac{b}{2a} i e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2},$$

de unde deducem că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{A_1A_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Analog

$$\lim_{R\to\infty}\int_{A_3A_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Relația (6) ne dă

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}.$$

50. *Să se calculeze integrala lui Euler*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Soluție

Să considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{iz}}{z}\, dz,$$

unde conturul C este cel din fig. 58.

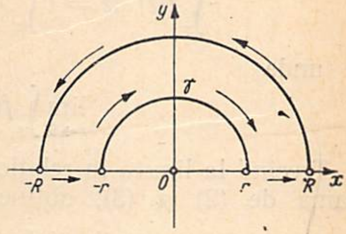

Fig. 58

În interiorul conturului C funcția

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

este olomorfă, deci

$$J = 0.$$

Ținînd seama de forma conturului C rezultă

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}\, dx}{x} + \int_\gamma \frac{e^{iz}\, dz}{z} + \int_r^R \frac{e^{ix} dx}{x} + \int_\Gamma \frac{e^{iz}\, dz}{z} = 0. \tag{1}$$

Avem

$$| zf(z) | = | e^{iz} | = e^{-y},$$

deci

$$\lim_{|z| \to \infty} | zf(z) | = 0$$

și avînd în vedere că Γ este un semicerc cu centrul în origine rezultă

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)\, dz = 0. \tag{2}$$

Într-o vecinătate a originei avem

$$f(z) = \frac{1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \cdots}{z} = \frac{1}{z} + P(z),$$

unde $P(z)$ este o funcție olomorfă în vecinătatea originei.

Rezultă

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\gamma P(z)dz.$$

Înlocuind aici pe z prin $re^{i\theta}$, deducem

$$\int_\gamma f(z)\, dz = i\int_\pi^0 d\theta + ir\int_\pi^0 P(re^{i\theta})\, e^{i\theta}\, d\theta,$$

de unde

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f(z)\, dz = -\pi i. \tag{3}$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $r \to 0$, $R \to \infty$ și, ținînd seama de (2) și (3), obținem

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}dx}{x} + \int_0^\infty \frac{e^{ix}dx}{x} = \pi i.$$

Avînd în vedere că

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix}dx}{x} = -\int_0^\infty \frac{e^{-ix}dx}{x},$$

deducem

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx = \pi i,$$

de unde rezultă

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

51. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

Soluție

Fie funcția

$$f(z) = \frac{e^{2iz} - 1}{z^2}.$$

Această funcție are punctul $z = 0$ ca pol simplu.

Să considerăm acum integrala

$$J = \int_C f(z)\, dz,$$

unde conturul C este cel din fig. 58. În interiorul conturului C funcția $f(z)$ este olomorfă, deci avem

$$J = 0.$$

Avînd în vedere forma conturului C, rezultă

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{2ix} - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

și schimbînd pe x în $-x$, găsim

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{r}^{R} \frac{e^{-2ix} - 1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Avem deci

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{r}^{R} \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Ținînd seama de formula

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

rezultă

$$e^{2ix} - 2 + e^{-2ix} = -4\sin^2 x$$

și formula (2) ne dă

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(z)\mathrm{d}z = -4\int_{r}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Cu această valoare relația (1) devine

$$\int_{r}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z\right],$$

sau, trecînd la limită pentru $r \to 0$, $R \to \infty$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z\right]. \tag{3}$$

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{e^{2iz} - 1}{z}\right| \leqslant \frac{|e^{2iz}| + 1}{|z|} = \frac{e^{-2y} + 1}{|z|},$$

adică

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0.$$

Curba Γ fiind un semicerc cu centrul în origine rezultă

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{4}$$

În jurul originei avem

$$f(z) = \frac{2i}{z} + P(z),$$

unde $P(z)$ este o funcție olomorfă.

Deci

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2i\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma} P(z)\mathrm{d}z.$$

Înlocuind pe z cu $re^{i\theta}$, obținem

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = -2\int_{\pi}^{0}\mathrm{d}\theta + ri\int_{\pi}^{0} P(re^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

de unde deducem

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi. \tag{4'}$$

Ținînd seama de relațiile (4) și (4'), ecuația (3) devine

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

52. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x.$$

[L. I. Volkovîskii, G. L. Lunț, I. G. Aramanovici, [11]]

Soluție

Să considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}\mathrm{d}z,$$

unde conturul C este cel din fig. 58.

În interiorul conturului C funcția

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$

este olomorfă, deci

$$J = 0.$$

De aici rezultă

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

Avem

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3}\mathrm{d}x = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-3ix} - 3e^{-ix} + 2}{x^3}\mathrm{d}x,$$

adică

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{r}^{R} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{x^3}\mathrm{d}x.$$

Dar

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i},$$

deci

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{r}^{R} f(z)\mathrm{d}z = -8i\int_{r}^{R} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x.$$

Cu această expresie, formula (1) devine

$$\int_{r}^{R} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{i}{8}\left[\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right],$$

sau, trecînd la limită pentru $r \to 0$ și $R \to \infty$,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{i}{8}\left[\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z + \lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right]. \tag{2}$$

Avem

$$|zf(z)| = \left|\frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^2}\right| \leqslant \frac{|e^{3iz}| + 3|e^{iz}| + 2}{|z|^2} = \frac{e^{-3y} + 3e^{-y} + 2}{|z|^2},$$

de unde deducem

$$\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$$

și ținînd seama că Γ este un semicerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

În jurul originei avem

$$f(z) = -\frac{3}{z} + P(z),$$

unde $P(z)$ este o funcție olomorfă, deci

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -3\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_\gamma P(z)\mathrm{d}z,$$

sau înlocuind pe z cu $re^{i\theta}$,

$$\int_\gamma f(z)dz = -3i\int_\pi^0 \mathrm{d}\theta + ri\int_\pi^0 P(re^{i\theta})\,e^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

de unde rezultă

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 3\pi i. \tag{3'}$$

Ținînd seama de relațiile (3) și (3'), ecuația (2) ne dă

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}.$$

53. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \quad (b>0).$$

Soluție
Considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z,$$

unde conturul C este cel din fig. 59.

Funcția

$$f(z) = \frac{z^2-b^2}{z^2+b^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}$$

are în interiorul conturului C polul simplu $z = ib$. Deci

$$J = 2\pi i R_{bi},$$

unde R_{bi} este reziduul funcției $f(z)$ relativ la punctul $z = bi$.

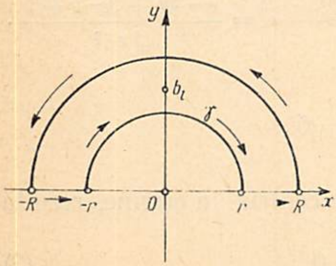

Fig. 59

Avem

$$R_{bi} = \lim_{z \to bi} (z - bi) f(z) = e^{-b}.$$

Deci

$$J = 2\pi i e^{-b}.$$

Ţinînd seama de forma conturului C, avem

$$\int_r^R f(z)\mathrm{d}z + \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i e^{-b}. \quad (1)$$

Dar

$$\int_{-R}^{-r} f(z)dz = \int_{-R}^{-r} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x = -\int_r^R \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{e^{-ix}}{x} \mathrm{d}x$$

şi

$$\int_r^R f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{e^{ix}}{x} \mathrm{d}x.$$

Relaţia (1) devine

$$\int_r^R \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} \mathrm{d}x + \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i e^{-b},$$

sau, trecînd la limită pentru $r \to 0$, $R \to \infty$,

$$2i \int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \lim_{R \to \infty} \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z + \lim_{r \to 0} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i e^{-b}. \quad (2)$$

Avem

$$| zf(z) | = \left| \frac{z^2 - b^2}{z^2 + b^2} \right| \left| e^{iz} \right| \leqslant \left(1 + \frac{2b^2}{|z|}\right) e^{-y},$$

adică

$$\lim_{|z| \to \infty} | zf(z) | = 0$$

şi avînd în vedere că Γ este un semicerc cu centrul în origine deducem

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0. \quad (3)$$

Dezvoltînd în jurul originei funcţia $f(z)$ obţinem

$$f(z) = -\frac{1}{z} - i + z\varphi(z),$$

unde $\varphi(z)$ este o funcţie olomorfă.

Deci

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} - i\int_\gamma \mathrm{d}z + \int_\gamma z\varphi(z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Punînd $z = re^{i\theta}$, avem

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\pi^0 i\mathrm{d}\theta = -\pi i.$$

$$\int_\gamma \mathrm{d}z = kr, \int_\gamma z\varphi(z)\mathrm{d}z = rP(r),$$

unde $k =$ const, iar $P(r)$ este o serie întreagă de r.

Formula (4) devine

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pi i - ikr + rP(r).$$

Înlocuind această expresie în (2) și ținînd seama de (3) obținem

$$2i\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x + \pi i = 2\pi i e^{-b},$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi\left(e^{-b} - \frac{1}{2}\right).$$

54. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\sin\, ax}{\mathrm{sh}\, x}\mathrm{d}x,$$

unde a este un număr real.

[L. I. Volkovîskii, G. L. Lunț, I. G. Aramanovici [14]]

Soluție

Considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{e^{aiz}}{\mathrm{sh}\, z}\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul din fig. 60.

Funcţia

$$f(z) = \frac{e^{aiz}}{\operatorname{sh} z}$$

are ca poli rădăcinile ecuaţiei

$$\operatorname{sh} z = 0$$

sau

$$e^{2z} - 1 = 0,$$

adică

$$z = k\pi i.$$

În interiorul conturului C funcţia $f(z)$ are deci polul simplu

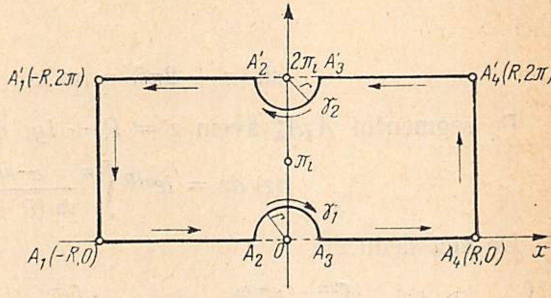

Fig. 60

$$z = \pi i.$$

Rezultă

$$J = 2\pi i R_{\pi i},$$

unde $R_{\pi i}$ este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul $z = \pi i$.

Avem

$$R_{\pi i} = \lim_{z \to \pi i} \frac{2(z - \pi i)e^{aiz}}{e^z - e^{-z}} = 2e^{-a\pi} \lim_{z \to \pi i} \frac{1}{e^z + e^{-z}} = -e^{-a\pi},$$

deci

$$J = -2\pi i e^{-ai\pi}.$$

Ţinînd seama de forma conturului C, rezultă

$$\int_{A_1A_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A_3A_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A_4A'_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A'_4A'_3} f(z)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A'_2A'_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A'_1A_1} f(z)\mathrm{d}z = -2\pi i e^{-a\pi}. \qquad (1)$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{A_1A_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{aix}}{\operatorname{sh} x}\mathrm{d}x, \quad \int_{A_3A_4} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^R \frac{e^{aix}}{\operatorname{sh} x}\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Pe segmentul $A_1'A_2'$ și $A_3'A_4'$ avem $z = x + 2\pi i$, deci

$$\int_{A_4'A_3'} f(z)dz = -\int_r^R \frac{e^{aix}\cdot e^{-2\pi a}}{\operatorname{sh}(x+2\pi i)}dx = -e^{-2\pi a}\int_r^R \frac{e^{aix}}{\operatorname{sh} x}dx, \qquad (2')$$

$$\int_{A_2'A_1'} f(z)dz = -\int_R^{-r} \frac{e^{aix}e^{-2\pi a}}{\operatorname{sh}(x+2\pi i)}dx = -e^{-2\pi a}\int_{-R}^{-r} \frac{e^{aix}}{\operatorname{sh} x}dx, \qquad (2'')$$

căci

$$\operatorname{sh}(x + 2\pi i) = \operatorname{sh} x.$$

Pe segmentul A_4A_4' avem $z = R + iy$, deci

$$\int_{A_4A_4'} f(z)\, dz = ie^{aiR}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ay}}{\operatorname{sh}(R+iy)}dy.$$

De aici deducem

$$\left|\int_{A_4A_4'} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ay}}{\operatorname{sh}(R+iy)}dy\right| \leqslant 2\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{-ay}}{e^{R+iy}-e^{-R-iy}}\right|dy \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^{2\pi}\frac{e^{-ay}}{|e^{R+iy}|}dy = \frac{2}{e^R}\int_0^{2\pi} e^{-ay}dy = \frac{2(1-e^{-2a\pi})}{ae^R},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{A_4A_4'} f(z)dz = 0. \qquad (3)$$

Analog găsim

$$\lim_{R\to\infty}\int_{A_1'A_1} f(z)dz = 0. \qquad (3')$$

Pentru a calcula integrala pe cercul γ_1 dezvoltăm funcția $f(z)$ în serie Laurent în jurul originei.
Avem

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right).$$

Punînd

$$\frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z}\left((a_0 + a_2z^2 + a_4z^4 + \dots\right),$$

rezultă

$$a_0 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{6}, \dots,$$

deci

$$f(z) = \frac{1}{z} + P(z),$$

unde $P(z)$ este o funcţie olomorfă.

De aici deducem

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_1} P(z)\mathrm{d}z.$$

Punînd $z = re^{i\theta}$, obţinem

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = i\int_{\pi}^{0} \mathrm{d}\theta + ir\int_{\pi}^{0} P(re^{i\theta})\, e^{i\theta}\mathrm{d}\theta,$$

de unde

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = -\pi i. \tag{4}$$

Analog găsim

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = -\pi i e^{-2a\pi}. \tag{4'}$$

Trecînd la limită în relaţia (1) pentru $R\to\infty$ şi $r\to 0$ şi, ţinînd seama de (2), (2′), (2″), (3), (3′), (4), (4′), rezultă

$$\left(1 - e^{-2\pi a}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aix}}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \pi i\left(1 - e^{-\pi a}\right)^2$$

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + i\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \pi i \cdot \frac{e^{\pi a} - 1}{e^{\pi a} + 1}.$$

De aici deducem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \pi\frac{e^{\pi a} - 1}{e^{\pi a} + 1}.$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x.$$

şi ţinînd seama că $\operatorname{th}\frac{\pi a}{2} = \frac{e^{\pi a} - 1}{e^{\pi a} + 1}$, rezultă

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{\pi a}{2}.$$

55. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,dx.$$

Soluţie

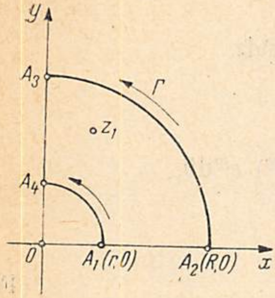

Fig. 61

Să considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{\sqrt[3]{z}}{1+z^4}\,dz,$$

unde C este conturul din fig. 61, iar pentru radical se consideră determinarea care în punctul $z = 1$ ia valoarea 1.

Funcţia

$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z}}{1+z^4},$$

are punctul $z = 0$ ca punct critic, iar rădăcinile ecuaţiei

$$z^4 + 1 = 0,$$

adică punctele

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

ca poli simpli.

Rezultă că în interiorul conturului C funcţia $f(z)$ este meromorfă, avînd polul z_1. Deci

$$J = 2\pi i R_{z_1},$$

unde R_{z_1} este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul z_1.

Avem

$$R_{z_1} = \lim_{z\to z_1}(z - z_1)f(z) = \frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}}{2\sqrt{2}(-1+i)}.$$

Avînd în vedere determinarea considerată pentru radical, deducem

$$R_{z1} = \frac{\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}{4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{8}(1 + i\sqrt{3}),$$

adică

$$J = \frac{\pi}{4}(\sqrt{3} - i).$$

De aici rezultă

$$\int_{A_1A_2} f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz + \int_{A_3A_4} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi}{4}(\sqrt{3} - i). \quad (1)$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{A_1A_2} f(z)\,dz = \int_\gamma^R \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + x^4}\,dx. \quad (2)$$

Pe axa imaginară avem $z = iy$, deci

$$\int_{A_3A_4} f(z)dz = \int_R^\gamma \frac{\sqrt[3]{iy}}{1 + (iy)^4}\,d(iy).$$

Dar

$$\sqrt[3]{i} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$$

atunci

$$\int_{A_3A_4} f(z)dz = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})\int_\gamma^R \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + x^4}\,dx. \quad (2')$$

Avem

$$| zf(z) | = \left|\frac{z\sqrt[3]{z}}{1 + z^4}\right| \leqslant \frac{1}{|z|^{\frac{8}{3}}},$$

adică

$$\lim_{|z| \to \infty} | zf(z) | = 0$$

şi ţinînd seama că Γ este un sfert de cerc cu centrul în origine, rezultă că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

Analog avem

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3'}$$

Trecînd la limită în relaţia (1) pentru $R\to\infty$ şi $r\to 0$ şi, ţinînd seama de (2), (2'), (3) şi (3'), rezultă

$$\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(\sqrt{3}-i),$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

56. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha\,\mathrm{d}x}{x^n+1},\quad (0<\alpha+1<n),$$

unde n este un număr natural $\geqslant 2$.

Soluţie

Fie integrala

$$J = \int_C \frac{z^\alpha\,\mathrm{d}z}{z^n+1},$$

unde C este conturul din fig. 62.

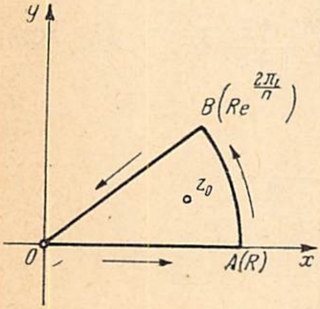

Fig. 62

Funcţia

$$f(z) = \frac{z^\alpha}{z^n+1},$$

are ca poli rădăcinile ecuaţiei

$$z^n+1=0,$$

adică numerele

$$z_k = e^{\frac{2k+1}{n}\pi i},\quad (k=0,\dots,n-1).$$

În interiorul conturului C, funcția $f(z)$ are deci polul $z_0 = e^{\frac{\pi}{n} i}$.

Rezultă că

$$J = 2\pi i R_0,$$

unde R_0 este reziduul funcției $f(z)$ relativ la polul z_0.

Avem

$$R_0 = \lim_{z \to z_0} \frac{z^{\alpha}(z - z_0)}{z^n + 1} = \lim_{z \to z_0} \frac{(\alpha + 1)z^{\alpha} - \alpha z_0 z^{\alpha - 1}}{n z^{n-1}} = \frac{1}{n} z_0^{\alpha - n + 1} =$$

$$= -\frac{1}{n} e^{\frac{(\alpha + 1)\pi}{n} i},$$

deci

$$J = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{(\alpha + 1)\pi}{n} i}.$$

Avînd în vedere forma conturului C, deducem

$$\int_{OA} f(z)\mathrm{d}z + \int_{AB} f(z)\mathrm{d}z + \int_{BO} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{(\alpha+1)\pi}{n} i}. \qquad (1)$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{OA} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{x^{\alpha}\,\mathrm{d}x}{x^n + 1}.$$

Pe arcul AB avem $z = Re^{\theta i}$, deci

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iR^{\alpha+1} e^{\alpha\theta i}\,\mathrm{d}\theta}{R^n e^{n\theta i} + 1}.$$

Pe segmentul BO avem $z = \rho e^{\frac{2\pi i}{n}}$, deci

$$\int_{BO} f(z)\mathrm{d}z = -\int_0^R \frac{\rho^{\alpha} e^{\frac{2\pi(\alpha+1)}{n} i}}{\rho^n + 1}\,\mathrm{d}\rho.$$

Relația (1) devine

$$\left[1 - e^{\frac{2\pi(\alpha+1)}{n} i}\right] \int_0^R \frac{x^{\alpha}\,\mathrm{d}x}{x^n + 1} + iR^{\alpha+1} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{\alpha\theta i}\,\mathrm{d}\theta}{R^n e^{n\theta i} + 1} = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{(\alpha+1)\pi}{n} i} \qquad (2)$$

Avem

$$\left| iR^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{\alpha\theta i}\mathrm{d}\theta}{R^n e^{n\theta i}+1} \right| \leqslant \frac{1}{R^{n-\alpha-1}}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{nR^{n-\alpha-1}}$$

şi ţinînd seama că $\alpha + 1 < n$, rezultă

$$\lim_{R\to\infty} iR^{\alpha+1}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{e^{\alpha\theta i}\mathrm{d}\theta}{R^n e^{n\theta i}+1} = 0.$$

Trecînd la limita în relaţia (2) pentru $R \to \infty$, obţinem

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \,\mathrm{d}x}{x^n+1} = -\frac{2\pi i}{n}\cdot\frac{e^{\frac{(\alpha+1)\pi i}{n}}}{1-e^{\frac{2\pi(\alpha+1)i}{n}}},$$

sau

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \,\mathrm{d}x}{x^n+1} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi(\alpha+1)}{n}}.$$

57. *Să se calculeze integrala*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

S o l u ţ i e

Să considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{\sqrt{z}\ln z}{(1+z)^2}\,\mathrm{d}z,$$

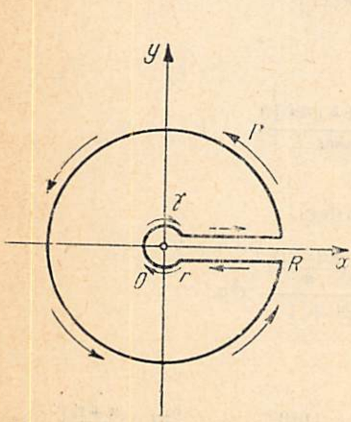

Fig. 63

unde C este conturul din fig. 63, iar pentru radical luăm determinarea pozitivă şi pentru logaritm determinarea principală.

În interiorul conturului C funcţia

$$f(z) = \frac{\sqrt{z}\ln z}{(1+z)^2}$$

este meromorfă, avînd polul $z = -1$, deci

$$\int_C \frac{\sqrt{z}\ln z}{(1+z)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i R_{-1},$$

unde R_{-1} este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la polul $z = -1$.

Avem

$$R_{-1} = \lim_{z \to -1} [(z+1)^2 f(z)]' = \lim_{z \to -1} (\sqrt{z} \ln z)' = \lim_{z \to -1} \left(\frac{\ln z}{2\sqrt{z}} \frac{\sqrt{z}}{z} + \right) = \frac{\pi}{2} - i,$$

deci

$$J = \pi^2 i + 2\pi.$$

Ţinînd seama de forma conturului C, deducem

$$\int_r^R f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_R^r f(z)\,dz + \int_\gamma f(z)\,dz = \pi^2 i + 2\pi. \quad (1)$$

Pe partea superioară a axei reale avem

$$f(z) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2},$$

iar pe partea inferioară

$$f(z) = \frac{-\sqrt{x}\,(\ln x + 2\pi i)}{(1+x)^2},$$

deci relaţia (1) devine

$$2\int_r^R \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2}\,dx + 2\pi i \int_r^R \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} + \int_\Gamma f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz = \pi^2 i + 2\pi,$$

sau trecînd la limită pentru $r \to 0$ şi $R \to \infty$,

$$2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2}\,dx + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} + \lim_{R \to \infty} \int_\Gamma f(z)dz + \lim_{r \to 0} \int_\gamma f(z)\,dz =$$

$$= \pi^2 i + 2\pi. \quad (2)$$

Avem,

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^{3/2} \ln z}{(1+z)^2} \right| < \left| \frac{\ln z}{\sqrt{z}} \right|,$$

deci

$$\lim_{|z| \to \infty} |zf(z)| = 0$$

şi ţinînd seama că Γ este un cerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Analog avem

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

deci relația (2) devine

$$2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + 2\pi i\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \pi^2 i + 2\pi,$$

de unde deducem

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \pi.$$

58. *Să se calculeze integrala*

$$J_1 = \int_0^1 \ln \sin \pi x\,\mathrm{d}x.$$

[D. Emmanuel, [6]

Soluție

Să considerăm integrala

$$\int_C \ln \sin \pi z\,\mathrm{d}z,$$

unde conturul C este cel din fig. 64, iar pentru logaritm se consideră determinarea principală.

Funcția

$$f(z) = \ln \sin \pi z$$

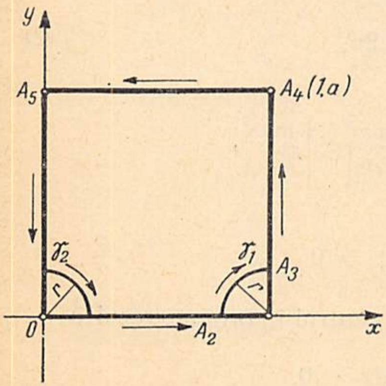

Fig. 64

are ca puncte critice rădăcinile ecuației

$$\sin \pi z = 0,$$

adică punctele $z = k$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$.

În interiorul conturului C funcția $f(z)$ este olomorfă, deci

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

sau

$$\int_{A_1A_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A_3A_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A_4A_5} f(z)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{A_5A_6} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{1}$$

Pe axa reală avem $z = x$, deci

$$\int_{A_1A_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^{1-r} \ln \sin \pi x \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Pe dreapta A_3A_4 avem $z = 1 + iy$, deci

$$\int_{A_3A_4} f(z)\mathrm{d}z = i \int_r^a \ln \sin \pi(1 + iy)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Pe dreapta A_5A_6 avem $z = iy$, deci

$$\int_{A_5A_6} f(z)\mathrm{d}z = - i \int_r^a \ln \sin \pi i y \mathrm{d}y. \tag{3'}$$

Avem

$$\ln \sin \pi i y - \ln \sin \pi(1 + iy) = \ln(-i) = \pi i,$$

deci relațiile (3) și (3′) ne dau

$$\int_{A_3A_4} f(z)\mathrm{d}z + \int_{A_5A_6} f(z)\mathrm{d}z = \pi \int_r^a \mathrm{d}y = \pi (a - r). \tag{4}$$

Pe dreapta A_4A_5 avem $z = x + ai$, adică

$$\int_{A_4A_5} f(z)\mathrm{d}z = - \int_0^1 \ln \sin \pi(x + ia)\mathrm{d}x.$$

Dar

$$\sin \pi (x + ia) = \frac{i}{2} e^{\pi a - \pi x i} \left(1 - e^{-2\pi a + 2\pi x i}\right),$$

deci

$$\ln \sin \pi(x + ia) = - \ln 2 + \frac{\pi i}{2} + \pi a - \pi x i +$$

$$+ \ln\left(1 - e^{-2\pi a + 2\pi x i}\right).$$

De aici deducem

$$\int_{A_4A_5} f(z)\mathrm{d}z = \ln 2 - \pi a - \int_0^1 \ln\left(1 - e^{-2\pi a + 2\pi x i}\right) \mathrm{d}x. \quad (5)$$

Înlocuind în (1) relaţiile (2), (4') şi (5) obţinem

$$\int_r^{1-r} \ln\, \sin \pi x \mathrm{d}x = -\ln 2 + \pi r + \int_0^1 \ln\left(1 - e^{-2\pi a + 2\pi x i}\right)\mathrm{d}x -$$

$$-\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z. \quad (6)$$

Avem

$$\lim_{|z|\to 0} | zf(z) | = \lim_{|z|\to 0} | z \ln \sin \pi z | = 0,$$

şi, ţinînd seama că γ este un sfert de cerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Analog avem

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

deci, trecînd la limită în relaţia (6) pentru $r \to 0$, obţinem

$$\int_0^1 \ln\, \sin \pi x \mathrm{d}x = -\ln 2 + \int_0^1 \ln\left(1 - e^{-2\pi a + 2\pi x i}\right) \mathrm{d}x. \quad (7)$$

Avem

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^1 \ln\left(1 - e^{-2\pi a + 2\pi x i}\right) \mathrm{d}x = 0$$

şi, avînd în vedere că ceilalţi termeni din egalitatea (7) nu depind de a, rezultă

$$\int_0^1 \ln\, \sin\, \pi x \mathrm{d}x = -\ln 2.$$

59. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+a)^3}\, \mathrm{d}x, \ (a > 0).$$

[N. Ciorănescu, [5]]

Soluţie

Punctele critice ale funcţiei

$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(z+a)^3}$$

sînt $z=0$ şi $z=1$, iar $z=-a$ este un pol triplu.

Să considerăm acum integrala

$$\int_C \frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(z+a)^3}\,\mathrm{d}z,$$

unde C este conturul din fig. 65, iar pentru radical se consideră în punctul A determinarea reală. În domeniul D din interiorul conturului C funcţia $f(z)$ este uniformă şi deci în baza teoremei reziduurilor avem

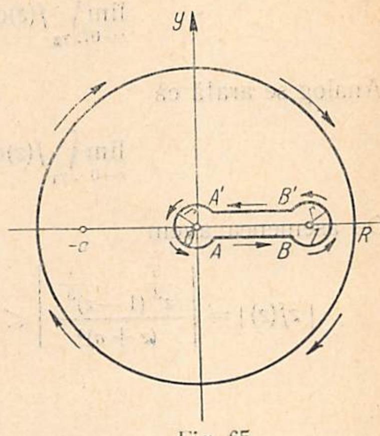

Fig. 65

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{B'A'} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \pi i R_{-a}, \tag{1}$$

unde R_{-a} este reziduul funcţiei $f(z)$ relativ la punctul $z=-a$.

Pe partea inferioară a segmentului AB avem

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z = \int_r^{1-r} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+a)^3}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Cînd z ajunge din B în B' el se roteşte în jurul punctului critic 1 cu argumentul 2π, deci $(1-z)^{1/3}$ ajunge în B' cu valoarea lui din B multiplicată cu $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, adică

$$\int_{B'A'} f(z)\mathrm{d}z = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_r^{1-r} \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(x+a)^3}\,\mathrm{d}x. \tag{2'}$$

Avem

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^{\frac{5}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}}{(z+a)} \right|,$$

deci

$$\lim_{|z|\to 0} | zf(z) | = 0$$

şi, ţinînd seama că γ_2 este un cerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3}$$

Analog se arată că

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{3'}$$

De asemenea avem

$$| zf(z) | = \left| \frac{z^{\frac{5}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}}{(z+a)^3} \right| \leqslant \left| \frac{(1-z)^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{4}{3}}} \right| \leqslant \frac{(|z|+1)^{\frac{1}{3}}}{|z|^{\frac{4}{3}}},$$

deci

$$\lim_{|z|\to\infty} | zf(z) | = 0$$

şi, avînd în vedere că Γ este un cerc cu centrul în origine, rezultă

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{4}$$

Să calculăm acum reziduul R_{-a}. Cum $z = -a$ este un pol triplu, avem

$$R_{-a} = \frac{1}{2} \lim_{z\to -a}\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right]''.$$

Avem

$$\left[\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right]'' = -\frac{2}{9}\left[z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\right]\cdot\left[\frac{1}{z^2}\left(\frac{2}{z(1-z)}+\frac{1}{(1-z)^2}\right)\right],$$

deci

$$R_{-a} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{a^2(a+1)^2}\lim_{z\to -a} z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}.$$

Plecînd din punctul A, z descrie în jurul lui O un semicerc în sens invers, deci argumentul lui $1-z$ nu se schimbă, iar argumentul lui z scade cu π, adică $(1-z)^{\frac{1}{3}}$ nu se schimbă, iar $z^{\frac{2}{3}}$ se înmulțește cu $e^{\frac{-2\pi i}{3}}$. Rezultă că

$$\lim_{z\to -a} z^{\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{-2\pi i}{3}} e^{\frac{2}{3}}(1+a)^{\frac{1}{3}},$$

adică

$$R_{-a} = -\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{9a^{\frac{4}{3}}(1+a)^{\frac{5}{3}}}. \tag{5}$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $R\to\infty$ și $r\to 0$ și, ținînd seama de relațiile (2), (2'), (3), (3'), (4), (5), rezultă

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)J = \frac{2\pi\, i e^{\frac{2\pi i}{3}}}{9a^{\frac{4}{3}}(1+a)^{\frac{5}{3}}},$$

de unde

$$J = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} a^{-\frac{4}{3}}(1+a)^{-\frac{5}{3}}.$$

60. *Să se calculeze integrala*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}.$$

[M. A. Lavrentiev și B. V. Sabat, [9]]

Soluție

Să considerăm funcția

$$f(z) = \sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}.$$

Această funcție are punctele critice $z_1 = -1$, $z_2 = 1$. Dacă punctul z înconjură numai punctul $z_1 = -1$, în sens direct, argumentul funcției $d(z)$ crește cu $\frac{4\pi}{3}$. Dacă punctul z înconjură numai pe $z_2 = 1$ în sens direct, argumentul funcției $f(z)$ crește cu $\frac{2\pi}{3}$. Funcția $f(z)$ este deci uniformă în planul complex din care am scos segmentul $[-1, 1]$.

Să considerăm acum integrala

$$J = \int_C \frac{dz}{f(z)}.$$

unde C este conturul din fig. 66, iar pentru radical se consideră determinarea care în punctul A are valoarea $\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}$.

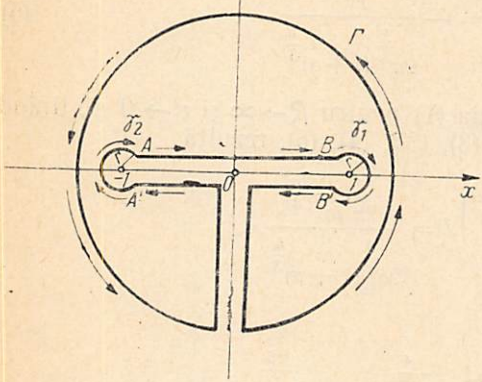

Fig. 66

În interiorul conturului C funcția $\frac{1}{f(z)}$ este olomorfă, deci

$$J = 0.$$

Avînd în vedere forma conturului C, rezultă

$$\int_{AB} \frac{dz}{f(z)} + \int_{\gamma_1} \frac{dz}{f(z)} + \int_{B'A'} \frac{dz}{f(z)} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{f(z)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{f(z)} = 0. \tag{1}$$

Pe partea superioară a segmentului AB, avem

$$f(z) = \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2},$$

deci

$$\int_{AB} \frac{dz}{f(z)} = \int_{-1+r}^{1-r} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}. \tag{2}$$

Pe partea inferioară a segmentului $A'B'$ avem

$$f(z) = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2},$$

pentru că din punctul B am trecut în B', înconjurînd în sens invers punctul critic $z_1 = 1$, deci

$$\int_{B'A'} \frac{dz}{f(z)} = -e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{-1+r}^{1-r} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}. \tag{2'}$$

Avem

$$\left|\frac{z-1}{f(z)}\right| = \sqrt[3]{\left|\frac{1-z}{1+z}\right|^2}$$

și deci

$$\lim_{|z-1|\to 0}\left|\frac{z-1}{f(z)}\right| = 0.$$

Ținînd seama că γ_1 este un cerc cu centrul în punctul $z_1 = 1$, rezultă că

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{f(z)} = 0. \tag{3}$$

Analog avem

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{f(z)} = 0. \tag{3'}$$

Avem

$$f(z) = \sqrt[3]{-z^3\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)^2} = ze^{-\frac{\pi i}{3}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{2}{3}},$$

de unde deducem

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

În exteriorul cercului $|z| = 1$, avem $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, deci

$$\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3z}+\ldots \left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\frac{2}{3}} = 1-\frac{2}{3z}+\ldots,$$

adică

$$\frac{1}{f(z)} = e^{\frac{\pi i}{3}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3z^2}+\ldots\right).$$

De aici rezultă

$$\int_\Gamma\frac{dz}{f(z)} = e^{\frac{\pi i}{3}}\int_\Gamma\frac{dz}{z} - \frac{e^{\frac{\pi i}{3}}}{3}\int_\Gamma\frac{dz}{z^2}+\ldots$$

Dar

$$\int_\Gamma\frac{dz}{z} = 2\pi i, \int_\Gamma\frac{dz}{z^n} = 0, \ (n = 2, 3,\ldots),$$

deci

$$\int_\Gamma\frac{dz}{f(z)} = 2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}}. \tag{4}$$

Trecînd la limită în relaţia (1) pentru $r \to 0$ şi, ţinînd seama de relaţiile (2), (2'), (3), (3'), (4), rezultă

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = -2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}},$$

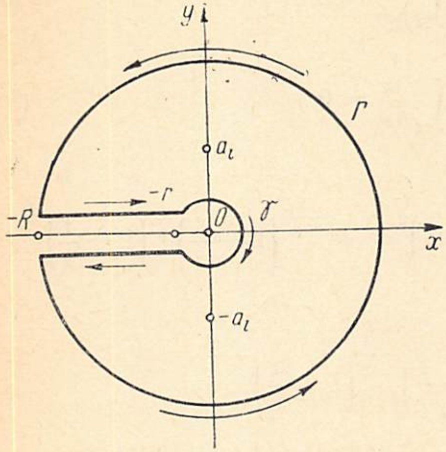

Fig. 67

de unde

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

61. *Să se calculeze integrala*

$$J = \int_C \frac{dz}{(z^2 + a^2)\ln z},$$

unde pentru logaritm se consideră determinarea cu $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$, *conturul C fiind cel din fig.* 67.

Să se deducă de aici valoarea integralei

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)\,[(\ln x)^2 + \pi^2)]}.$$

[H. Cartan, [3]

S o l u ţ i e

În interiorul conturului C, funcţia

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)\ln z}$$

este meromorfă avînd poli simpli $z = \pm ai$.

Deci

$$J = 2\pi i(R_{ai} + R_{-ai}),$$

Avem

$$R_{ai} = \lim_{z \to ai}\left[(z - ai)\frac{1}{(z^2 + a^2)\ln z}\right] = \frac{1}{2ai \ln ai} = \frac{1}{2ai\left(\ln a + \frac{\pi i}{2}\right)},$$

$$R_{-ai} = \lim_{z \to -ai}\left[(z + ai)\frac{1}{(z^2 + a^2)\ln z}\right] = -\frac{1}{2ai\left(\ln a - \frac{\pi i}{2}\right)},$$

adică

$$J = \frac{-4\pi^2 i}{a\,[4(\ln a)^2 + \pi^2]}.$$

Ținînd seama de forma conturului C, rezultă

$$\int_{-R}^{-r} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-r}^{-R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \frac{-4\pi^2 i}{a[4(\ln a)^2 + \pi^2]}. \quad (1)$$

Pe partea superioară a axei reale, avem

$$f(z) = \frac{1}{(x^2 + a^2)\,[\ln|x| + \pi i]},$$

iar pe partea inferioară

$$f(z) = \frac{1}{(x^2 + a^2)\,[\ln|x| - \pi i]}.$$

Relația (1) devine

$$-2\pi i \int_{-R}^{-r} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)\,[(\ln|x|)^2 + \pi^2]} + \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{-4\pi^2 i}{a\,[4(\ln a)^2 + \pi^2]}$$

sau, trecînd la limită pentru $R \to \infty$ și $r \to 0$,

$$-2\pi i \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)[(\ln|x|)^2 + \pi^2]} + \lim_{r \to 0} \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z + \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{-4\pi^2 i}{a[4(\ln a)^2 + \pi^2]}. \quad (2)$$

Dar

$$\lim_{|z| \to 0} |z\,f(z)| = \lim_{|z| \to 0} \left|\frac{z}{\ln z}\right| \cdot \frac{1}{|z^2 + a^2|} = 0,$$

$$\lim_{|z| \to \infty} |z\,f(z)| = \lim_{z \to \infty} \left|\frac{z}{(z^2 + a^2)\ln z}\right| = 0,$$

deci

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

și relația (2) devine

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)[(\ln|x|)^2 + \pi^2]} = \frac{2\pi}{a[4(\ln a)^2 + \pi^2]},$$

de unde

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)\,[(\ln x)^2 + \pi^2]} = \frac{2\pi}{a\,[4(\ln a)^2 + \pi^2]}.$$

62. *Să se calculeze integralele*

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x, \qquad J_2 = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x, \qquad (0 < a < 1).$$

[G. Sansone, I. Gerretsen, [11]]

S o l u ţ i e

Să considerăm integrala

$$J = \int_C \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z, \qquad (0 < a < 1),$$

unde C este conturul din fig. 68 iar pentru funcţia z^{a-1} considerăm determinarea cu $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$. Avem deci

$$J = \int_{-R}^{-r} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z + \int_r^{1-r} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int_{1+r}^{R} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z + \int_\Gamma \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Ţinînd seama că în interiorul conturului C funcţia

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z}$$

este olomorfă, rezultă că $y = 0$.

Avem

$$\lim_{|z|\to\infty} |\, z f(z) \,| = 0,$$

deci

$$\lim_{R\to\infty} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2}$$

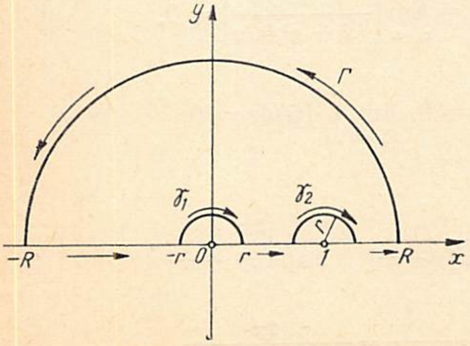

Fig. 68

De asemenea

$$\lim_{|z|\to 0} |z\, f(z)| = 0,$$

deci

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_1} \frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z = 0 \tag{2'}$$

şi

$$\lim_{z\to 1}\, (z-1) f(z) = -1,$$

deci

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z = -\pi i. \qquad (2'')$$

Trecînd la limită în relația (1) pentru $r \to 0$, $R \to \infty$ și, avînd în vedere relațiile (2), (2'), (2''), obținem

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z + \int_{0}^{\infty}\frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z = -\pi i. \qquad (3)$$

Notînd $\theta = \arg z$, avem

$$z^{a-1} = |z|^{a-1}[\cos(a-1)\theta + i\sin(a-1)\theta].$$

În prima integrală din (3) avem $z = -x$, $\theta = \pi$, $(x > 0)$, deci

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z = -(\cos a\pi + i\sin a\pi)\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

În a doua integrală (3) avem $z = x$, $\theta = 0$, deci

$$\int_{0}^{\infty}\frac{z^{a-1}}{1-z}\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Relația (3) devine

$$-(\cos a\pi + i\sin a\pi)\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\pi i.$$

De aici rezultă că

$$J_1 = \int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$J_2 = \int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{cotg}\,a\pi.$$

IV. Transformări conforme

Fie

$$Z = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{1}$$

o funcție definită într-un domeniu D din planul (z). Această funcție definește între planele (z) și (Z) transformarea

$$\left.\begin{aligned} X &= P(x, y) \\ Y &= Q(x, y) \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Această transformare se numește conformă dacă conservă unghiurile. În legătură cu această transformare avem teoremele:

Teorema 1. O funcție $f(z)$ monogenă într-un domeniu D definește o transformare conformă în toate punctele lui D în care derivata $f'(z)$ este diferită de zero.

Teorema 2. Dacă transformarea (2) este conformă, funcția (1) sau conjugata ei sînt funcții monogene.

Teorema lui Riemann. Fiind dat, în planul (z), un domeniu D mărginit de o curbă simplă rectificabilă și, în planul (Z) un cerc C, există o funcție monogenă $Z = f(z)$, care stabilește o corespondență biunivocă între punctele interioare ale lui D și C.

O transformare conformă foarte importantă este transformarea

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{3}$$

unde α, β, γ, δ sînt constante complexe. Această transformare se numește omografică sau circulară.

Transformarea omografică (3) lasă invariantă mulțimea formată din cercurile și dreptele din plan.

Dacă în (3) punem $Z = z$ obținem ecuația

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0,$$

care ne dă punctele unite ale transformării în cazul în care planele (z) și (Z) sînt suprapuse, adică $(Z) \equiv (z)$. Fie λ și μ cele două puncte unite.

Dacă $\lambda = \mu$, transformarea (3) se poate pune sub forma

$$\frac{Z-\lambda}{Z-\mu} = k\frac{z-\lambda}{z-\mu},$$

care se numește forma canonică a transformării.

Dacă $k =$ real, transformarea se numește hiperbolică.

Dacă $k =$ complex și $|k| = 1$, transformarea se numește eliptică.

Dacă $k =$ complex și $|k| = 1$, transformarea se numește loxodromică.

În cazul în care $\lambda = \mu$, forma canonică a transformării (3) este

$$\frac{1}{Z-\lambda} = \frac{1}{z-\lambda} + h$$

și transformarea se numește parabolică.

Cînd $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt numere reale transformarea (3) se numește transformare fuchsiană.

1. *Să se determine transformarea circulară care transformă:*

1°. *punctele* $z = 1, z = i, z = -1$ *în punctele* $Z = 0, Z = -i, Z = \infty$;

2°, *punctele* $z = 1, z = i, z = -1$, *în punctele* $Z = 0, Z = 1, Z = \infty$.

Să se verifice că în cazul 1° *transformarea transformă cercul* $|z| \leqslant 1$ *în semiplanul* $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$, *iar în cazul* 2° *transformă cercul* $|z| \leqslant 1$ *în semiplanul* $\operatorname{Im} Z \geqslant 0$.

[D. Emmanuel, [6]]

S o l u ț i e

Fie

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

transformarea circulară căutată.

Scriind că punctului $z = 1$ îi corespunde $Z = 0$, obținem

$$\alpha + \beta = 0. \tag{2}$$

Scriind că punctului $z = -1$ îi corespunde punctul $Z = \infty$, obținem

$$\gamma - \delta = 0.$$

Ținînd seama de (2) și de (2′) deducem

$$Z = \lambda\frac{z-1}{z+1},$$

unde am pus $\lambda = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Punînd acum condiția ca punctului $z = i$ să-i corespundă punctul $Z = -i$, obținem $\lambda = -1$, deci transformarea căutată este

$$Z = \frac{1-z}{1+z}. \tag{3}$$

Înlocuind aici $z = x + iy$, $Z = X + iY$, găsim

$$X + iY = \frac{1 - x^2 - y^2 - 2iy}{(x+1)^2 + y^2},$$

adică

$$\begin{cases} X = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2}, \\ Y = -\dfrac{2y}{(x+1)^2 + y^2}. \end{cases}$$

Pe cercul $|z| \leqslant 1$, avem $x^2 + y^2 \leqslant 1$, deci $X \geqslant 0$.

Rezultă că prin transformarea (3) cercului $|z| \leqslant 1$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$.

În cazul 2°, găsim transformarea

$$Z = i\frac{1 - z}{1 + z}, \tag{4}$$

de unde deducem

$$\begin{cases} X = \dfrac{2y}{(x+1)^2 + y^2}, \\ Y = \dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2}. \end{cases}$$

Pe cercul $|z| \leqslant 1$, avem $Y \geqslant 0$, deci prin transformarea (4), cercului $|z| \leqslant 1$, îi corespunde semiplanul $\operatorname{Im} Z \geqslant 0$.

2. *Să se determine transformările circulare care lasă invariant cercul unitate,* $|z| = 1$.

S o l u ţ i e

Fie

$$Z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0), \tag{1}$$

transformarea căutată unde α, β, γ, δ sînt constante complexe.

Notînd cu $z_0 = x_0 + iy_0$ punctul din planul (z) care corespunde originei din planul (Z), din (1) deducem $\beta = -\alpha z_0$. De aici rezultă că $\alpha \neq 0$ şi punînd $\frac{\gamma}{\alpha} = \lambda$, $\frac{\delta}{\alpha} = \mu$ ecuaţia (1) se scrie

$$Z = \frac{z - z_0}{\lambda z + \mu}, \quad (\mu + \lambda z_0 \neq 0). \tag{1'}$$

Avînd în vedere că prin această transformare cercul $|z| = 1$ trebuie să rămînă invariant, rezultă că pentru $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ trebuie să obținem $|Z| = 1$. Din relația (1′) deducem

$$|\cos\varphi + i\sin\varphi - x_0 - iy_0| = |a_1\cos\varphi - b_1\sin + a_2 + \\ + i(b_1\cos\varphi + a_1\sin\varphi + b_2)|, \tag{2}$$

unde am pus $\lambda = a_1 + ib_1$, $\mu = a_2 + ib_2$.

Din (2) rezultă

$$(\cos\varphi - x_0)^2 + (\sin\varphi - y_0)^2 = (a_1\cos\varphi - b_1\sin\varphi + a_2)^2 + \\ + (b_1\cos\varphi + a_1\sin\varphi + b_2)^2$$

sau

$$2(a_1a_2 + b_1b_2 + x_0)\cos\varphi + 2(a_1b_2 - a_2b_1 + y_0)\sin\varphi + a_1^2 + \\ + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 1 - x_0^2 - y_0^2 = 0.$$

Ținînd seama că această relație trebuie să aibă loc pentru orice unghi φ, rezultă

$$\begin{cases} a_1a_2 + b_1b_2 = -x_0, \\ a_1b_2 - a_2b_1 = -y_0, \\ a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 1 + x_0^2 + y_0^2. \end{cases} \tag{3}$$

Înmulțind a doua ecuație (3) cu i și scăzînd-o din prima obținem

$$(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) = -(x_0 - iy_0),$$

adică

$$\lambda\bar{\mu} = -\bar{z}_0. \tag{4}$$

De aici și, ținînd seama de neegalitatea (1′), rezultă $\mu \neq 0$, deci din (4) deducem

$$\lambda = -\frac{\bar{z}_0}{\bar{\mu}}. \tag{4′}$$

Cu această valoare ecuația (1′) se scrie

$$Z = \bar{\mu}\,\frac{z - z_0}{\mu\bar{\mu} - z\bar{z}_0} \quad (\mu\bar{\mu} - z_0\bar{z}_0 \neq 0). \tag{1″}$$

Ridicînd la pătrat primele două ecuații (3) și scăzîndu-le din ultima, obținem

$$(a_1^2 + b_1^2 - 1)(a_2^2 + b_2^2 - 1) = 0$$

sau

$$(\lambda\bar{\lambda} - 1)(\mu\bar{\mu} - 1) = 0.$$

Avînd în vedere valoarea lui λ dată de (4'), această ecuaţie se mai poate scrie

$$(\mu\bar{\mu} - z_0\bar{z}_0)(\mu\bar{\mu} - 1) = 0,$$

de unde, ţinînd seama de neegalitatea (1"), rezultă

$$\mu\bar{\mu} = 1.$$

De aici deducem că $\bar{\mu} = e^{i\theta}$ (θ = real), deci transformarea căutată este

$$Z = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad (\mid z_0 \mid \neq 1),$$

unde z_0 este o constantă complexă, iar θ o constantă reală.

3. *Să se studieze transformarea circulară*

$$Z = \frac{i\sqrt{3}z + 1}{z + i\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Soluţie

Pentru a găsi punctele unite ale transformării (1) trebuie să facem în ecuaţia (1), $Z = x$. Obţinem astfel ecuaţia

$$z^2 - 1 = 0,$$

deci punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1 = -1$, $z_2 = 1$.

Transformarea (1) are forma canonică

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = k\frac{z - 1}{z + 1}.$$

Determinăm valoarea lui k înlocuind în această ecuaţie pe Z cu valoarea dată de (1). Găsim $k = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, deci transformarea (1) are forma canonică

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z - 1}{z + 1}.$$

Avem $\mid k \mid = 1$, deci transformarea (1) este o transformare eliptică.

Punînd $z = x + iy$, $Z = X + iY$, ecuaţia (1) devine

$$X + iY = \frac{4x + i(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 + 2y - \sqrt{3})}{x^2 + (y + \sqrt{3})^2}$$

de unde

$$\begin{cases} X = \dfrac{4x}{x^2 + (y + \sqrt{3})^2}, \\[2ex] Y = \dfrac{\sqrt{3}\,(x^2 + y^2) + 2y - \sqrt{3}}{x^2 + (y + \sqrt{3})^2}. \end{cases} \tag{2}$$

De aici deducem că dreptei $x = 0$ îi corespunde dreapta $X = 0$, deci, prin transformarea (1) axa imaginară rămîne invariantă.

Cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\, y - 1 = 0, \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuaţie $Y = 0$.

Avînd în vedere că centrul cercului (3) este punctul $C\left(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, iar raza lui este $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, ecuaţia (3) se mai poate scrie sub forma $\left| z + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. În interiorul cercului (3) avem $x^2 + y^2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} y - 1 < 0$, deci cercului $\left| z + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \right| \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ îi corespunde prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Im} Z \leqslant 0$.

Semiplanului $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$.

Ecuaţia cercului din planul (Z) care trece prin punctele unite $z_1 = -1$ şi $z_2 = 1$ este

$$X^2 + Y^2 - 2\lambda\, Y - 1 = 0, \tag{4}$$

sau în variabilele complexe Z şi $\bar{Z}$

$$Z\bar{Z} + \lambda i(Z - \bar{Z}) - 1 = 0.$$

Făcînd transformarea (1) această ecuaţie devine

$$(1 - \lambda\sqrt{3})\,(Z\bar{Z} - 1) + i(\sqrt{3} + \lambda)\,(Z - \bar{Z}) = 0. \tag{5}$$

Dacă $\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, ecuaţia (4) se scrie

$$X^2 + Y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\, Y - 1 = 0$$

şi prin transformarea (1) îi corespunde dreapta de ecuaţie $z - \bar{z} = 0$, adică axa reală din planul z $(y = 0)$.

Dacă $\lambda \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ecuaţia (5) se scrie

$$Z\bar{Z} + \mu i(z - \bar{z}) - 1 = 0, \qquad \left(\frac{\sqrt{3} + \lambda}{1 - \lambda\sqrt{3}} = \mu\right),$$

deci prin transformarea (1) fascicolul de cercuri care trec prin punctele unite rămîne invariant.

Ecuaţia unui cerc ortogonal tuturor cercurilor (4) este

$$X^2 + Y^2 + 2\nu X + 1 = 0,$$

sau în variabilele Z, $\bar{Z}$,

$$Z\bar{Z} + \nu(Z + \bar{Z}) + 1 = 0. \tag{6}$$

Prin transformarea (1) cercul (6) devine

$$z\bar{z} + \nu(z + \bar{z}) + 1 = 0,$$

deci cercurile ortogonale fascicolului de cercuri care trec prin punctele unite rămîn invariante prin transformarea (1).

4. *Să se studieze transformarea fuchsiană*

$$Z = \frac{z + 2}{2z + 1}. \tag{1}$$

Soluţie

Să determinăm întîi punctele unite ale transformării. Pentru aceasta vom face în ecuaţia (1) $Z = z$. Obţinem astfel

$$z^2 - 1 = 0,$$

deci punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1 = -1$, $z_2 = 1$.

Forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = k\,\frac{z - 1}{z + 1}.$$

Pentru a determina valoarea lui k, înlocuim aici pe Z cu valoarea lui dată de (1). Găsim $k = -\frac{1}{3}$, deci forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z - 1}{Z + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}.$$

Transformarea (1) este deci o transformare hiperbolică.

Notînd $z = x + iy$, $Z = X + iY$, ecuaţia (1) se scrie

$$X + iY = \frac{2x^2 + 2y^2 + 5x + 2 - 3iy}{(2x+1)^2 + 4y^2},$$

de unde

$$\begin{cases} X = \dfrac{2x^2 + 2y^2 + 5x + 2}{(2x+1)^2 + 4y^2}, \\ Y = -\dfrac{3y}{(2x+1)^2 + 4y^2}. \end{cases} \tag{2}$$

De aici rezultă că dreptei $y = 0$ îi corespunde dreapta $Y = 0$, adică prin transformarea (1) axa reală rămîne invariantă.

Cercului de ecuaţia

$$2x^2 + 2y^2 + 5x + 2 = 0, \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) dreapta de ecuaţie $X = 0$.

Centrul cercului (3) este punctul $C\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$, iar raza lui este $R = \frac{3}{4}$, deci ecuaţia (3) se mai poate scrie $\left|z + \frac{5}{4}\right| = \frac{3}{4}$. În interiorul cercului (3) avem $2x^2 + 2y^2 + 5x + 2 < 0$, deci cercului $\left|z + \frac{5}{4}\right| \leqslant \frac{3}{4}$ îi corespunde prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Re} Z \leqslant 0$.

Din a doua ecuaţie (2) rezultă că semiplanului $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ îi corespunde, prin transformarea (1) semiplanul $\operatorname{Im} Z \leqslant 0$.

Un cerc din planul (Z) care trece prin cele două puncte unite z_1 şi z_2 are centrul pe axa imaginară, deci ecuaţia

$$X^2 + Y^2 - 2\lambda Y - 1 = 0 \tag{4}$$

sau în variabilele complexe Z, $\bar{Z}$,

$$Z\bar{Z} + \lambda i(Z - \bar{Z}) - 1 = 0.$$

Prin transformarea (1), această ecuaţie devine

$$z\bar{z} + \lambda i(z - \bar{z}) - 1 = 0,$$

deci cercurile care trec prin cele două puncte unite rămîn invariante.

Să considerăm acum fascicolul cercurilor ortogonale cu cercurile (4). Ecuaţia acestui fascicol este

$$X^2 + Y^2 + 2\mu X + 1 = 0, \tag{5}$$

sau în variabilele complexe Z şi $\bar{Z}$,

$$Z\bar{Z} + \mu(Z + \bar{Z}) + 1 = 0.$$

Prin transformarea (1) această ecuaţie devine

$$(5-4\mu)z\bar{z}+(3\mu-4)(z-\bar{z})+5-4\mu=0. \qquad (6)$$

Dacă $\mu=\frac{5}{4}$ ecuaţia (6) devine $z+\bar{z}=0$, adică $x=0$. Deci cercului

$$X^2+Y^2+\frac{5}{2}X+1=0$$

îi corespunde axa $x=0$.

Dacă $\mu\neq\frac{5}{4}$ ecuaţia (6) se scrie sub forma

$$z\bar{z}+\nu(z+\bar{z})+1=0,$$

deci, prin transformarea (1) fascicolul de cercuri ortogonale cercurilor (4) rămîne invariant.

5. *Să se determine transformarea fuchsiană parabolică care are ca punct unit punctul $z=1$ şi prin care punctului $z=3$ îi corespunde punctul $Z=\infty$. Să se studieze apoi această transformare.*

Soluţie.

Dacă $z=\alpha$ este punctul unit al transformării parabolice, forma ei canonică este

$$\frac{1}{Z-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+h.$$

În cazul nostru avem

$$\frac{1}{Z-1}=\frac{1}{z-1}+h.$$

Înlocuind aici $z=3$ şi $Z=\infty$ obţinem $h=-\frac{1}{2}$.

Deci transformarea căutată este

$$Z=\frac{1+z}{3-z}. \qquad (1)$$

Notînd $z=x+iy$, $Z=X+iY$, ecuaţia (1) se scrie

$$X+iY=\frac{-x^2-y^2+2x+3+4iy}{(x-3)^2+y^2}$$

de unde

$$\begin{cases} X = -\dfrac{x^2 + y^2 - 2x - 3}{(x-3)^2 + y^2}, \\ Y = \dfrac{4y}{(x-3)^2 + y^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Din a doua ecuaţie (2) deducem că dreptei $y = 0$ îi corespunde dreapta $Y = 0$, deci, prin transformarea (1) axa reală rămîne invariantă. De asemenea semiplanului $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Im} Z \geqslant 0$.

Din prima ecuaţie (2) rezultă că cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \tag{3}$$

din planul (z) îi corespunde dreapta $X = 0$, adică axa imaginară din planul (Z). Avînd în vedere că centrul cercului este $C(1, 0)$ şi raza $R = 2$, ecuaţia (3) se mai poate scrie $|z - 1| = 2$. În interiorul cercului avem $x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0$, deci cercului $|z - 1| \leqslant 2$ îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$.

Un cerc tangent în punctul $Z = 1$ la axa reală are ecuaţia

$$X^2 + Y^2 - 2X - 2\lambda Y + 1 = 0, \tag{4}$$

sau în variabilele complexe Z, $\bar{Z}$,

$$Z\bar{Z} - (1 - \lambda i) Z - (1 + \lambda i) \bar{Z} + 1 = 0.$$

Prin transformarea (1) această ecuaţie devine

$$z\bar{z} - (1 - \lambda i) z - (1 + \lambda i) \bar{z} + 1 = 0,$$

deci prin transformarea (1) cercurile tangente la axa reală în punctul unit rămîn invariante.

6. *Să se studieze transformarea circulară*

$$Z = \frac{3z - 2 - i}{(1 - 2i) z + i}. \tag{1}$$

Soluţie

Pentru a determina punctele unite ale transformării să facem în (1), $Z = z$. Obţinem ecuaţia

$$(1 - 2i) z^2 + (i - 3) z + 2 + i = 0$$

care are rădăcinile 1 şi i.

Deci, punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1 = 1$, $z_2 = i$.

Forma canonică a acestei transformări este

$$\frac{Z-1}{Z-i}=k\frac{z-1}{z-i}.$$

Pentru a găsi valoarea lui k înlocuim aici pe Z cu valoarea dată de ecuaţia (1). Obţinem $k=2i$, deci forma canonică a transformării (1) este

$$\frac{Z-1}{Z-i}=2i\frac{z-1}{z-i}.$$

Transformarea (1) este deci o transformare loxodromică. Înlocuind în (1) pe Z cu $X+iY$ şi pe z cu $x+iy$, obţinem

$$X+iY=\frac{3(x^2+y^2)-2y-1+i(6x^2+6y^2-8x+2)}{(x+2y)^2+(2x-y-1)^2},$$

de unde deducem

$$\begin{cases} X=\dfrac{3(x^2+y^2)-2y-1}{(x+2y)^2+(2x-y-1)^2}, \\ Y=\dfrac{6(x^2+y^2)-8x+2}{(x+2y)^2+(2x-y-1)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Inversînd ecuaţia (1) obţinem transformarea

$$z=\frac{Z+1-2i}{(2+i)Z-3i},$$

de unde rezultă că transformarea inversă transformării (2) este

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(X^2+Y^2)-8Y+6}{(2X-Y)^2+(X+2Y-3)^2}, \\ y=-\dfrac{X^2+Y^2+2X-3}{(2X-Y)^2+(X+2Y-3)^2}. \end{cases} \tag{2'}$$

Din prima ecuaţie (2) rezultă că cercului de ecuaţie

$$3(x^2+y^2)-2y-1=0$$

din planul (z) îi corespunde axa imaginară din planul (Z). Ecuaţia acestui cerc se mai poate scrie $\left|z-\frac{i}{3}\right|=\frac{2}{3}$. În interiorul acestui cerc avem $3(x^2+y^2)-2y-1<0$, deci domeniului $\left|z-\frac{i}{3}\right|\leqslant\frac{2}{3}$ din planul (z) îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z\leqslant 0$ din planul (Z).

Din a doua ecuaţie (1) rezultă că cercului de ecuaţie

$$3(x^2 + y^2) - 4x + 1 = 0$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală. Ecuaţia acestui cerc se mai poate scrie $\left| z - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3}$, deci domeniului $\left| z - \frac{2}{3} \right| \leqslant \frac{1}{3}$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semiplanul $\operatorname{Im} Z \leqslant 0$.

Din prima ecuaţie (2') rezultă că cercului de ecuaţie

$$X^2 + Y^2 - 4Y + 3 = 0$$

din planul (Z) îi corespunde în planul (z) axa imaginară. Avînd în vedere că ecuaţia acestui cerc se poate scrie sub forma $| Z - 2 | = 1$, rezultă că domeniul $| Z - 2i | \leqslant 1$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) semiplanul $\operatorname{Re} z \leqslant 0$.

Din a doua ecuaţie (2') deducem că cercului de ecuaţie

$$X^2 + Y^2 + 2X - 3 = 0$$

din planul (Z) îi corespunde axa reală din planul (z). Ecuaţia acestui cerc se mai poate scrie sub forma $| z + 1 | = 2$, deci domeniului $Z + 1 \leqslant 2$ din planul (Z) îi corespunde semiplanul $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ din planul (z).

Prin transformarea (1) nici un cerc sau fascicol de cercuri din planul (z) nu rămîne invariant.

Notînd

$$\frac{Z-1}{Z-i} = \rho' e^{i\theta'}, \qquad \frac{z-1}{z-i} = \rho e^{i\theta}$$

şi avînd în vedere că $2i = 2e^{\frac{\pi i}{2}}$, ecuaţia (1') ne dă

$$\rho' = 2\rho, \qquad \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Să considerăm acum spirala logaritmică de ecuaţie

$$\rho = ae^{\frac{2\ln 2}{\pi}\theta} \qquad (a = \text{const.}) \tag{4}$$

Prin transformarea (3) ecuaţia (4) devine

$$\rho' = ae^{\frac{2\ln 2}{\pi}\theta'},$$

deci, prin transformarea (1), spirala logaritmică (4) rămîne invariantă.

7. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = z^2 + iz. \tag{1}$$

Soluţie

Punînd în (1) $Z = z$, obţinem ecuaţia

$$z^2 + (i - 1)z = 0,$$

care ne dă punctele unite ale transformării (1). Deci punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1 = 0$, $z_2 = 1 - i$.

De asemenea din (1) rezultă

$$\begin{cases} X = x^2 - y^2 - y, \\ Y = 2xy + x. \end{cases} \tag{2}$$

Axei reale din planul (z) îi corespunde în planul (Z) parabola de ecuaţie $Y^2 = X$. Axei imaginare din planul (z) îi corespunde axa reală din planul (Z). De asemenea dreptei de ecuaţie $2y + 1 = 0$ din planul (z), îi corespunde în planul (Z) axa reală. Hiperbolei echilatere de ecuaţie $x^2 - y^2 - y = 0$, din planul (z), îi corespunde axa imaginară din planul (Z).

Dreptelor $x = \pm a$ $(a \neq 0)$, din planul (z), îi corespunde în planul (Z) curba de ecuaţii parametrice

$$X = - y^2 - y + a^2, \qquad Y = \pm 2ay \pm a,$$

adică parabola de ecuaţie $Y^2 = - 4a^2 X + a^2 + 4a^4$.

Dreptelor $y = b$ şi $y = - b - 1$, din planul (z), le corespunde în planul (Z) parabola de ecuaţie $Y^2 = (2b + 1)^2 (X + b^2 + b)$.

Dreptei $X = h$, din planul (Z), îi corespunde în planul (z) hiperbola echilateră de ecuaţie $x^2 - y^2 - y - h = 0$, iar dreptei $Y = k$ îi corespunde hiperbola echilateră $2xy + x - k = 0$.

8. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = \frac{(z + 1)^2}{z}. \tag{1}$$

Soluţie

Pentru a găsi punctele unite ale acestei transformări să punem în ecuaţia (1) $Z = z$. Obţinem astfel punctul $z = - \frac{1}{2}$.

Înlocuind în (1) pe Z cu $X + iY$ şi pe z cu $x + iy$, obţinem

$$\begin{cases} X = \dfrac{(x+2)(x^2+y^2)+x}{x^2+y^2}, \\ Y = \dfrac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Din aceste ecuaţii rezultă că axei reale din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală. Axei imaginare din planul (z) îi corespunde dreapta de ecuaţie $X = 2$.

Cubicei de ecuaţie

$$(x+2)(x^2+y^2)+x=0$$

din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa imaginară.

Pentru a găsi corespondentul în planul (Z) al cercului unitate din planul (z) să înlocuim în ecuaţiile (2) pe x cu $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, iar pe y cu $\dfrac{2t}{1+t^2}$. Obţinem

$$Y = 0, \qquad X = \frac{4}{1+t^2},$$

deci cercului unitate din planul (z) îi corespunde segmentul $[0,4]$ al axei reale din planul (Z).

9. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = \frac{1}{z^2}. \tag{1}$$

Soluţie

Obţinem punctele unite ale transformării punînd în ecuaţia (1), $Z = z$. Găsim ecuaţia

$$z^3 - 1 = 0.$$

Deci transformarea (1) are ca puncte unite punctele $z_1 = 1$,

$$z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Notînd $Z = X + iY$, $z = x + iy$, din ecuaţia (1) deducem

$$\begin{cases} X = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ Y = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Din prima ecuaţie (2) rezultă că sistemului format din dreptele de ecuaţie $x - y = 0$, $x + y = 0$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa imaginară. Din a doua ecuaţie (2) rezultă că sis-) temului format din axele din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală.

Din (1) rezultă că cercul unitate este invariant.

Dreptei $X = a$, $(a \neq 0)$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) lemniscata de ecuaţie

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{a}(x^2 - y^2) = 0.$$

Dreptei $Y = b$, $(b \neq 0)$ din planul (Z) îi corespunde în planul (z) lemniscata de ecuaţie

$$(x^2 + y^2)^2 + \frac{2}{a}xy = 0,$$

raportată la sistemul de axe format din bisectoarele $x - y = 0$, $x + y = 0$.

Notînd cu $D_1, \ldots, D_8$, cele opt octane în care axele de coordonate şi bisectoarele axelor împart planul (z), din ecuaţiile (2) rezultă că octanelor D_4 şi D_8 le corespunde în planul (Z) cadranul întîi; octanelor D_3 şi D_7 le corespunde în planul (Z) cadranul al doilea; octanelor D_2 şi D_6 le corespunde în planul (Z) cadranul al treilea; octanelor D_1 şi D_5 le corespunde în planul (Z) cadranul al patrulea.

10. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = \frac{4z}{(z+1)^2}. \tag{1}$$

Soluţie

Dacă punem în ecuaţia (1), $Z = z$ obţinem punctele unite ale transformării şi anume punctele $z_1 = -3$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$.

Din ecuaţia (1) rezultă

$$\begin{cases} X = \dfrac{4(x+2)(x^2+y^2)+4x}{[(x+1)^2+y^2]^2}, \\ Y = \dfrac{-4y(x^2+y^2-1)}{[(x+1)^2+y^2]^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Din a doua ecuaţie (2) rezultă că axei reale din planul (z) îi corespunde axa reală din planul (Z). Axei imaginare din planul (z) îi corespunde în planul (Z) curba de ecuaţii parametrice

$$X = \frac{8y^2}{(y^2+1)^2}, \quad Y = \frac{-4y(y^2-1)}{(y^2+1)^2},$$

adică cercul de ecuaţii

$$X^2 + Y^2 - 2X = 0.$$

Să căutăm acum corespondentul în planul (Z) al cercului unitate din planul (z). Pentru aceasta înlocuim în ecuaţiile (2) pe x cu $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ iar pe y cu $\frac{2t}{1+t^2}$. Obţinem

$$X = 1 + t^2, \qquad Y = 0,$$

deci, cercului unitate din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semidreapta de ecuaţie $Y = 0$, $X \geqslant 1$.

Din prima ecuaţie (2) rezultă că prin transformarea (1), cubicei

$$(x+2)(x^2+y^2) + x = 0.$$

din planul (z), îi corespunde axa imaginară în planul (Z).

11. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \tag{1}$$

Soluţie

Notînd $z = x + iy$, $Z = X + iY$, din ecuaţia (1) rezultă

$$\begin{cases} X = \dfrac{(x^2+y^2-2y-1)(x^2+y^2+2y-1)}{(x-1)^2+y^2}, \\ Y = \dfrac{-4y(x^2+y^2-1)}{(x-1)^2+y^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Din aceste ecuaţii rezultă că axei reale din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semiaxa reală pozitivă.

Pentru a găsi corespondentul în planul (Z) al cercului unitate din planul (z) să punem în (2), $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

Obţinem

$$X = -\frac{1}{t^2}, \quad Y = 0,$$

deci, cercului unitate din planul (z) îi corespunde semiaxa reală negativă a planului (Z).

Cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

din planul (z) îi corespunde semiaxa imaginară negativă a planului (Z), iar cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$$

îi corespunde în planul (Z) semiaxa imaginară pozitivă.

12. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}. \tag{1}$$

Soluţie

Punînd în (1), $z = x + iy$, $Z = X + iY$, obţinem

$$\begin{cases} X = \dfrac{(x^2+y^2-1)\,(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy + 1)^2}, \\[2ex] Y = \dfrac{-\,2(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2 + (2xy + 1)^2}, \end{cases} \tag{2}$$

Cercului unitate din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa imaginară.

Sistemului format din bisectoarele axelor de coordonate din planul (z) îi corespunde în planul (Z) axa reală.

Axei reale din planul (z) îi corespunde în planul (Z) curba de ecuaţii parametrice

$$X = \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}, \quad Y = \frac{-\,2x^2}{x^4 + 1},$$

adică semicercul de ecuaţie $Y = -\sqrt{1 - X^2}$.

Axei imaginare din planul (z) îi corespunde în planul (Z) curba de ecuaţii parametrice

$$X = \frac{y^4 - 1}{y^4 + 1}, \quad Y = \frac{2y^2}{y^4 + 1},$$

adică semicercul de ecuaţie $Y = \sqrt{1 - X^2}$.

Deci, cercului unitate din planul (Z) îi corespunde în planul (z) sistemul format din axele de coordonate.

13. *Să se studieze transformarea conformă*

$$Z = -i\frac{z^2 + 1 + 2iz}{z^2 + 1 - 2iz}. \tag{1}$$

Soluţie

Să căutăm întîi punctele unite ale transformării. Pentru aceasta să punem în ecuaţia (1), $Z = z$. Obţinem

$$z^3 - iz^2 - z + i = 0,$$

care are rădăcinile 1, -1 şi i.

Deci punctele unite ale transformării (1) sînt $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$.

Punctelor $z = i(-1 \pm \sqrt{2})$ din planul (z) le corespund originea planului (Z). Punctelor $z = i(1 \pm \sqrt{2})$ din planul (z) le corespund punctul de la infinit al planului (Z). Punctelor $z = 0$ şi $z = \infty$ din planul (z) le corespund punctul $Z = -i$ din planul (Z).

Dacă înlocuim în (1) pe Z cu $X + iY$ şi pe z cu $x + iy$, găsim

$$\begin{cases} X = \dfrac{4x(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 - y^2 + 2y + 1)^2 + 4x^2(y - 1)^2}, \\[2ex] Y = -\dfrac{(x^2 + y^2 - 2y - 1)(x^2 + y^2 + 2y - 1)}{(x^2 - y^2 + 2y + 1)^2 + 4x^2(y - 1)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Din prima ecuaţie (2) rezultă că axei imaginare din planul (z) îi corespunde axa imaginară din planul (Z), iar semiplanului $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ din planul (z) îi corespunde semiplanul $\operatorname{Re} Z \geqslant 0$ din planul (Z).

Din a doua ecuaţie (2) rezultă că cercurile (C_1) şi (C_2) de ecuaţii

$$(C_1): x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0; \quad (C_2): x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$$

din planul (z) le corespunde axa reală din planul (Z).

Ecuaţiile celor două cercuri se mai pot scrie

$$(C_1): |z - i| = \sqrt{2}; \quad (C_2): |z + i| = \sqrt{2}.$$

Pentru punctele din interiorul cercului (C_1), dar nesituate în interiorul cercului (C_2) avem $x^2 + y^2 - 2y - 1 < 0$, $x^2 + y^2 + 2y - 1 > 0$.

De asemenea pentru punctele din interiorul cercului (C_2), dar nesituate în interiorul cercului (C_1) avem $x^2+y^2+2y-1<0$, $x^2+y^2-2y-1>0$. Deci domeniilor

$$(D_1): |z-i|<\sqrt{2}<|z+i|;\ (D_2): |z+i|<\sqrt{2}<|z-i|$$

din planul (z) le corespund în planul (Z) semiplanul $\operatorname{Im} Z>0$.

Axei reale $y=0$ din planul (z) îi corespunde în planul (Z) curba de ecuații parametrice

$$\begin{cases} X=\dfrac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)+4x^2}, \\ Y=-\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2+4x^2}. \end{cases}$$

Avînd în vedere că avem $X^2+Y^2=1$, $Y\leqslant 0$, rezultă că axei reale din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semicercul inferior al cercului unitate, $Y=-\sqrt{1-X^2}$.

Să căutăm acum corespondentul cercului unitate din planul (z). Punînd în (2) $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, obținem

$$X=\frac{2\cos\varphi}{1+\cos^2\varphi},\ Y=\frac{\sin^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}.$$

Avem $X^2+Y^2=1$, $Y\geqslant 0$, deci cercului unitate din planul (z) îi corespunde în planul (Z) semicercul superior al cercului unitate $Y=\sqrt{1-X^2}$.

14. *Să se determine transformarea conformă prin care unei curbe date* (Γ) *din planul* (z) *îi corespunde axa reală din planul* (Z). *Ca aplicație să se determine apoi transformarea conformă prin care elipsei de ecuație* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ *din planul* (z) *îi corespunde axa reală din planul* (Z).

[N. Ciorănescu, [5]]

Soluție

Să presupunem că (Γ) este dată prin ecuațiile parametrice

$$x=f(t),\qquad y=g(t),$$

funcțiile $f(t)$ și $g(t)$ fiind funcții analitice în variabila t.

Transformarea căutată este dată de relația

$$z=f[\varphi(Z)]+ig[\varphi(Z)]=F(Z), \tag{1}$$

unde $\varphi(Z)$ este o funcție analitică arbitrară astfel aleasă încît funcția $F(Z)$ să fie reală pentru valori reale ale lui Z.

În adevăr, dacă în (1) punem $Y = 0$, obținem

$$z = x + iy = f[\varphi(X)] + ig[\varphi(X)].$$

Dar $\varphi(X)$ este reală, deci, de aici rezultă că

$$x = f[\varphi(X)], \qquad y = g[\varphi(X)],$$

care sînt tocmai ecuațiile parametrice ale curbei (Γ) prin schimbarea de parametru $t = \varphi(X)$.

În cazul în care curba (Γ) este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, luăm

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

Alegînd $\varphi(Z) = Z$, ecuația (1) se scrie

$$z = a \cos Z + ib \sin Z.$$

Punînd $a = c \operatorname{ch} \alpha$, $b = c \operatorname{sh} \alpha$, unde $c^2 = a^2 - b^2$, $\operatorname{th} \alpha = \frac{b}{a}$, această ecuație devine

$$z = c(\cos Z \operatorname{ch} \alpha + i \sin Z \operatorname{sh} \alpha),$$

sau

$$z = c \cos (Z + i\alpha),$$

care este transformarea conformă căutată.

15. *Să se determine o funcție care transformă conform planul* (z) *din care s-a scos segmentul ce unește punctele* $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + i$, *în semiplanul superior.*

Soluție

Funcția

$$t = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (\alpha = \text{const})$$

transformă punctele z_1 și z_2 în punctul $t = 0$ respectiv $t = \infty$.

Pentru ca segmentul z_1z_2 să se transforme în semiaxa reală pozitivă vom impune condiția ca punctului $\frac{z_1 + z_2}{2}$ să-i corespundă punctul $t = 1$.

Obținem $\alpha = -1$.

Deci, funcția

$$t = \frac{z - 1 + i}{-2 + i - z}, \tag{1}$$

transformă planul (z) din care am scos segmentul z_1z_2 în planul (t) din care am scos semiaxa reală pozitivă.

Să considerăm acum funcţia

$$w = \sqrt{t}, \qquad (2)$$

unde pentru radical considerăm determinarea pozitivă.

În planul (t) din care am scos semiaxa reală pozitivă funcţia w este uniformă.

Dacă notăm $t = \rho e^{i\theta}$ avem

$$w = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

sau, punînd $\rho^{\frac{1}{2}} = \rho_1$, $\frac{\theta}{2} = \theta_1$,

$$w = \rho_1 e^{i\theta_1}.$$

Deci, dacă $0 < \theta < 2\pi$ avem $0 < \theta_1 < \pi$.

Rezultă, că unui punct din planul (t) din care am scos semiaxa reală pozitivă îi corespunde un punct din semiplanul superior al planului (w).

Din (1) şi (2) deducem că funcţia

$$w = \sqrt{\frac{z - 1 + i}{-z - 2 + i}}$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă, transformă planul (z), din care am scos segmentul ce uneşte punctul $z_1 = 1 - i$ cu punctul $z_2 = -2 + i$, în semiplanul superior.

16. *Să se determine o funcţie care transformă comform domeniul* (fig. 69)

$$|z| < \sqrt[3]{2}, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, \qquad (1)$$

în semiplanul superior.

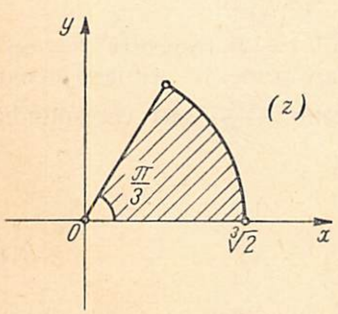

Fig. 69

S o l u ţ i e

Funcţia

$$t = z^3, \qquad (2)$$

transformă domeniul dat în domeniul

$$|t| < 2, \quad 0 < \arg t < \pi \qquad (1')$$

adică în semicercul cu centrul în origine şi raza 2 situat în semiplanul superior din planul (t).

Să considerăm acum funcția

$$\zeta = \frac{t+2}{t-2}. \tag{3}$$

Dacă notăm

$$t = u + iv, \qquad \zeta = \xi + i\eta,$$

din (3) deducem

$$\xi = \frac{u^2 + v^2 - 4}{(u-2)^2 + v^2}, \quad \eta = -\frac{4v}{(u-2)^2 + v^2}. \tag{3'}$$

În coordonatele u și v, domeniul (1') este definit de relațiile

$$v > 0, \qquad u^2 + v^2 < 4,$$

care, ținînd seama de (3'), ne dau

$$\xi < 0, \qquad \eta < 0.$$

Deci, prin transformarea (3), domeniul (1') se transformă în cadranul 3 al planului (ζ), adică în domeniul

$$\pi < \arg \zeta < \frac{3\pi}{2}. \tag{1''}$$

Să facem acum transformarea

$$w = \zeta^2. \tag{4}$$

Avem

$$\arg w = 2 \arg \zeta,$$

deci, prin transformarea (4), domeniul (1'') devine domeniul

$$2\pi < \arg w < 3\pi$$

sau

$$0 < \arg w < \pi,$$

care este semiplanul superior din planul w.

Din (2), (3) și (4) rezultă că transformarea

$$w = \left(\frac{z^3+2}{z^3-2}\right)^2,$$

transformă domeniul (1) în semiplanul superior al planului (z).

17. *Să se determine o funcţie care transformă interiorul cercului unitate din care s-a scos segmentul* [0,1] *în semiplanul superior* (fig. 70).

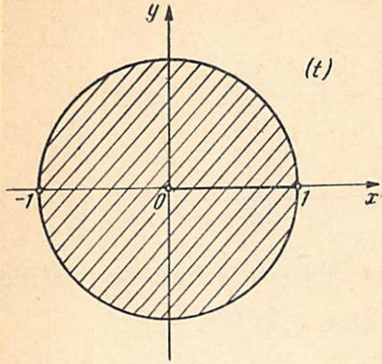

Fig. 70

Soluţie

Să considerăm funcţia

$$t = \sqrt{z}, \tag{1}$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă. În domeniul din problemă această funcţie este uniformă.

Dacă notăm $z = \rho e^{i\theta}$, avem

$$t = \rho_1 e^{i\theta_1},$$

unde $\rho_1 = \rho^{\frac{1}{2}}$, $\theta_1 = \frac{\theta}{2}$.

Domeniul dat este definit de relaţiile

$$\rho < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Prin transformarea (1) acest domeniu devine

$$\rho_1 < 1, \quad 0 < \theta_1 < \pi. \tag{2}$$

Deci, prin transformarea (1) domeniul dat se transformă în semicercul cu centrul în origine şi cu raza 1 aflat în semiplanul superior.

Funcţia

$$\zeta = \frac{t+1}{t-1}, \tag{3}$$

transformă domeniul (2) în cadranul 3 din planul (ζ).

Într-adevăr, dacă notăm $t = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$, relaţia (3) ne dă

$$\xi = \frac{u^2 + v^2 - 1}{(u-1)^2 + v^2}, \quad \eta = -\frac{2v}{(u-1)^2 + v^2}.$$

În coordonatele u, v, domeniul (2) este definit de relaţiile

$$v > 0, \quad u^2 + v^2 < 1,$$

deci, prin transformarea (3) acest domeniu devine

$$\xi < 0, \quad \eta < 0,$$

adică cadranul 3 din planul (ζ).

Fie acum funcția

$$w = \zeta^2. \tag{4}$$

Avem

$$\arg w = 2 \arg \zeta.$$

Cadranul 3 din planul (ζ) este definit de relația

$$\pi < \arg \zeta < \frac{3\pi}{2}.$$

Prin transformarea (4) acest domeniu devine

$$2\pi < \arg w < 3\pi$$

sau

$$0 < \arg w < \pi,$$

care este semiplanul superior din planul (w).

Deci, prin funcția

$$w = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2,$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă, domeniul dat se transformă în semiplanul superior din planul (w).

18. *Se consideră domeniul comun cercurilor cu centrul în punctele* $z_1 = 0$, $z_2 = i$ *și cu raza* 1 (fig. 71) *și se cere să se determine o funcție care să transforme conform acest domeniu în semiplanul superior.*

Soluție

Cercurile date au ecuațiile

$$(C_1): x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$(C_2): x^2 + y^2 - 2y = 0,$$

sau

$$(C_1): |z| = 1,$$

$$(C_2): |z - i| = 1.$$

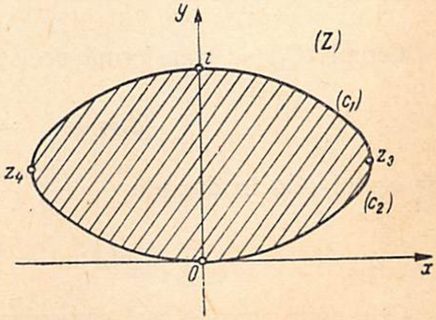

Fig. 71

Aceste două cercuri se intersectează în punctele

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad z_4 = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

Să considerăm transformarea liniară

$$t = \frac{z - \frac{\sqrt{3}+i}{2}}{z + \frac{\sqrt{3}-i}{2}}. \tag{1}$$

Punînd $t = u + iv$, această transformare se scrie

$$\begin{cases} u = \dfrac{4(x^2 + y^2 - 1)}{(2x + \sqrt{3})^2 + (2y - 1)^2}, \\ v = \dfrac{4(x + y\sqrt{3})}{(2x + \sqrt{3})^2 + (2y - 1)^2}. \end{cases}$$

Prin transformarea (1) punctele z_3 și z_4 de intersecție al celor două cercuri se transformă în punctele $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$.

Pentru a găsi imaginile cercurilor (C_1) și (C_2) prin transformarea (1) să găsim imaginile cîte unui punct de pe aceste cercuri.

Punctul $z = 0$ de pe cercul (C_2) se transformă în punctul $t = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, iar punctul $z = i$ de pe cercul (C_1) se transformă în punctul $t = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Cercul (C_1) se transformă deci în dreapta

$$(d_1): \; v = -\sqrt{3}\,u,$$

iar cercul (C_2) în dreapta

$$(d_2): \; v = \sqrt{3}\,u.$$

Cele două arce de cerc care mărginesc domeniul dat se transformă în semidreptele respective situate în cadranele 1 și 3 din planul (t). Domeniul dat se transformă deci în unghiul situat între aceste semidrepte (fig. 72) adică în domeniul definit de relaţia

$$\frac{2\pi}{3} < \arg t < \frac{4\pi}{3}. \tag{2}$$

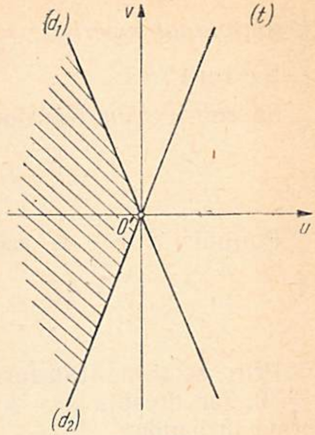

Fig. 72

Transformarea

$$\zeta = e^{-\frac{2\pi i}{3}} t, \tag{3}$$

reprezintă o rotaţie de unghi $-\frac{2\pi}{3}$, deci suprapune semidreapta (d_1) peste semiaxa reală pozitivă din planul (ζ) şi domeniul (2) în domeniul

$$0 < \arg \zeta < \frac{2\pi}{3}. \tag{2'}$$

Să considerăm acum funcţia

$$w = \zeta^{\frac{3}{2}}, \tag{4}$$

unde pentru radical se ia determinarea pozitivă.

În domeniul (2′) această funcţie este uniformă. Avem

$$\arg w = \frac{3}{2} \arg \zeta,$$

deci domeniul (2′) se transformă în

$$0 < \arg w < \pi,$$

adică în semiplanul superior din planul (w).

Din (1), (3) şi (4) deducem

$$w = e^{-\pi i} \left(\frac{2z - \sqrt{3} + i}{2z + \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}},$$

unde pentru radical se consideră determinarea pozitivă.

Dar $e^{-\pi i} = -1$, deci, prin transformarea

$$w = -\left(\frac{2z - \sqrt{3} + i}{2z + \sqrt{3} - i} \right)^{\frac{3}{2}},$$

domeniul situat între cercurile (C_1) şi (C_2) din planul (z) se transformă în semiplanul superior din planul (w).

19. *Să se determine o funcție care să transforme conform banda*

$$a < \operatorname{Re} z < b \tag{1}$$

în semiplanul superior.

Soluție

Să considerăm transformarea liniară

$$t = \frac{1}{b-a}(z-a).$$

Punînd $t = r + is$, această transformare se scrie

$$r = \frac{x-a}{b-a},\ s = \frac{y}{b-a}.$$

Prin această transformare, dreapta $x = a$ devine dreapta $r = 0$, iar dreapta $x = b$ devine $r = 1$, deci banda (1) se transformă în banda

$$0 < \operatorname{Re} t < 1. \tag{2}$$

Funcția $\zeta = \pi i t$ transformă banda (2) în banda

$$0 < \operatorname{Im} \zeta < \pi. \tag{3}$$

Să considerăm acum transformarea

$$w = e^{\zeta}. \tag{4}$$

Punînd $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$, din (4) deducem

$$u = e^{\xi} \cos \eta, \qquad v = e^{\xi} \sin \eta,$$

iar relația (3) se scrie $0 < \eta < \pi$, deci, prin transformarea (4) domeniul (3) se transformă în domeniul $v > 0$, adică în semiplanul superior din planul (w).

Rezultă că prin transformarea

$$w = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$$

banda (1) se transformă în semiplanul superior din planul (w).

20. *Să se determine o funcție care transformă conform domeniul definit de relațiile*

$$|z| < 2, \qquad |z-i| > 1, \tag{1}$$

în semiplanul superior.

Soluţie

Să considerăm transformarea liniară

$$t = \frac{z}{z - 2i}. \tag{2}$$

Pentru a determina imaginea domeniului (1) prin transformarea (2) să găsim imaginile a cîte două puncte de pe cele două cercuri care mărginesc acest domeniu.

Punctele $z_1 = 2$, $z_2 = -2$ de pe cercul $|z| = 2$ se transformă respectiv în punctele $t_1 = \frac{1+i}{2}$, $t_2 = \frac{1-i}{2}$, deci cercul $|z| = 2$ se transformă în dreapta

$$\operatorname{Re} t = \frac{1}{2}.$$

De asemenea punctele $z_3 = 0, z_4 = 1 + i$ de pe cercul $|z - i| = 1$ se transformă respectiv în punctele $t_3 = 0$, $t_4 = i$, deci cercul $|z - i| = 1$ se transformă în axa imaginară din planul (t). Rezultă că domeniul (1) se transformă în banda

$$0 < \operatorname{Re} t < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Prin transformarea

$$\zeta = 2\pi i t, \tag{4}$$

banda (3) se transformă în banda

$$0 < \operatorname{Im} \zeta < \pi. \tag{5}$$

Să considerăm acum funcţia

$$w = e^{\zeta}. \tag{6}$$

Dacă notăm $w = u + iv$, $\zeta = \xi + i\eta$, deducem

$$u = e^{\xi} \cos \eta, \qquad v = e^{\xi} \sin \eta.$$

Relaţiile (5) se scriu

$$0 < \eta < \pi,$$

deci, $v > 0$, adică, prin transformarea (6) domeniul devine semiplanul superior din planul (w).

Rezultă că prin transformarea

$$w = e^{2\pi i \frac{z}{z-2i}},$$

domeniul (1) se transformă în semiplanul superior din planul (w).

Bibliografie

1. A n g h e l u ț ă, Th., Exerciții și Probleme, Editura Universității din Cluj, 1937.
2. A n g h e l u ț ă, Th., Curs de teoria funcțiilor de o variabilă complexă ed. II, Editura tehnică, București, 1957.
3. C a r t a n, H., Théorie élémentaire de fonctions d'une ou plusieurs variables complexes, Ed. Dunod, Paris, 1960.
4. C i o r ă n e s c u, N., Bulletin des Sc. Mathématiques, t. LVI, 1932.
5. C i o r ă n e s c u, N., Tratat de matematici speciale, Editura Didactică București, 1962.
6. E m m a n u e l, D., Lecțiuni de teoria funcțiilor, vol. I, Editura Cultura Națională, București, 1927.
7. G u n t h e r, N. M. și C u z i m, R. O., Culegere de probleme de matematici superioare, Editura tehnică, București, 1953.
8. K n o p p, K., Aufgebensammlung zur Funktionentheorie, t. I, Berlin, 1923.
9. L a v r e n t i e v, M. A. și S a b a t B. V., Metodî teorii funcții kompleksnogo permennogo, Moskva, 1958.
10. L u n ț, G. L., E l s g o l ț, L. E., Funcții kompleksnogo peremennogo, Gos. iz. Fiz. Mat., Moskva, 1958.
11. S a n s o n e G., G e r r e t s e n J., Lectures on the theory of functions of a complex variable, vol. 1, Ed. C. Noordhoff, Groningen, 1960.
12. S t o i l o v, S., Teoria funcțiilor de o variabilă complexă, vol. I, Editura Academiei R. P. R., București, 1954,
13. S t o k a, M., Funcții de variabilă reală și complexă, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
14. V o l k o v î s k i i, L. I. L u n ț, G. L., A r a m o v i c i, I. G., Sbornik zadaci po teorii funcții kompleksnogo peremennogo, Fizmatgiz, Moskva, 1960.

Tabla de materii

Redactor responsabil: LINA TICOŞ
Tehnoredactor: BETTY NEGREANU

Dat la cules 11.05.1965. Bun de tipar 29.07.1965. Apărut 1965. Tiraj 5.500 + 140 broşate. Hîrtie semi-velină de 63 g/m², 610×860/16. Coli editoriale 11,95. Coli de tipar 14,25. A. 5460/1965. C. Z. pentru bibliotecile mari 317.55(076) C. Z. pentru bibliotecile mici 317.

Tiparul executat sub comanda nr. 830 la
Întreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, Bucureşti — R.P.R.